Да се дефинират последователно: разбиване на интервал, големи и малки суми на Дарбу.

Дефиниция

Разбиване на интервала $[a, b]$ наричаме всяко множество от точки $\tau := \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ такива, че

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.$$

Пишем още

$$\tau : \quad a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.$$

Точките $x_0, x_1, \dots, x_n$ се наричат делящи. Диаметър на разбиването τ наричаме числото $d(\tau) := \max\limits_{i=1,\dots,n}(x_i - x_{i-1})$.

Дефиниция

Точките $c_1, c_2, \dots, c_n$ наричаме междинни за разбиването

$$\tau : \quad a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b,$$

ако $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Дефиниция (суми на Дарбу)

Нека $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ е ограничена. За разбиване $\tau : \quad a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ на $[a, b]$ дефинираме съответно малката и голяма сума на Дарбу на $f(x)$ чрез

$$s_\tau := s_\tau(f) := \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}), \quad m_i := \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x), \tag{7}$$

$$S_\tau := S_\tau(f) := \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}), \quad M_i := \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x). \tag{8}$$

Да се установи, че при добавяне на нови точки в разбиването на интервала, големите суми на Дарбу не нарастват, а малките не намаляват (желателно е да се направи чертеж).

Твърдение 2

При добавяне на нови делящи точки, малките суми на Дарбу не намаляват, а големите — не нарастват.

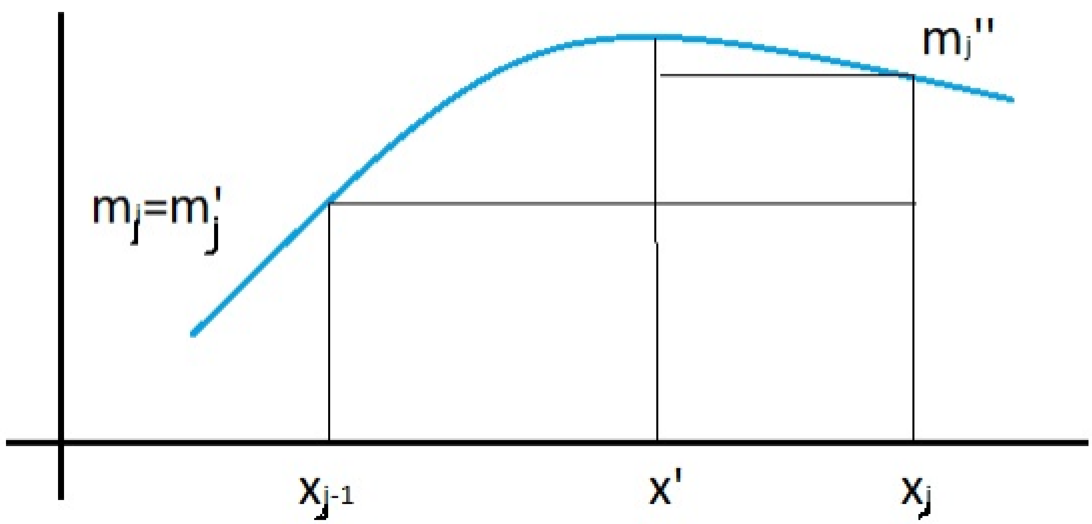
Д-во: Достатъчно е да установим твърдението при добавянето на една деляща точка. Общият случай следва след повторение на тази стъпка. Ще разгледаме малките суми на Дарбу. Твърдението за големите се д-ва аналог. или може да се използва $S_\tau(f) = -s_\tau(-f)$.
Нека $\tau_1 : \quad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ е разбиване на $[a, b]$ и τ_2 е разбиването на $[a, b]$, което се получава от τ_1 с добавяне на делящата точка x'. Нека $x' \in (x_{j-1}, x_j)$. Тогава

$$s_{\tau_2} - s_{\tau_1} = m_j'(x' - x_{j-1}) + m_j''(x_j - x') - m_j(x_j - x_{j-1}), \qquad (11)$$

където

$$m_j := \inf_{x\in[x_{j-1},x_j]} f(x), \quad m_j' := \inf_{x\in[x_{j-1},x']} f(x), \quad m_j'' := \inf_{x\in[x',x_j]} f(x). \qquad (12)$$

Имаме $m_j', m_j'' \geq m_j$.



От (11) следва

$$s_{\tau_2} - s_{\tau_1} = \underbrace{m_j'}_{\geq m_j}(x' - x_{j-1}) + \underbrace{m_j''}_{\geq m_j}(x_j - x') - m_j(x_j - x_{j-1}) \qquad (13)$$

$$\geq m_j(x' - x_{j-1} + x_j - x' - x_j + x_{j-1}) = 0. \qquad (14)$$

Да се дефинира риманов интеграл чрез подхода на Дарбу.

?

Да се докаже, че дадена функция е интегруема по Риман тогава и само тогава, когато за всяко ε > 0 съществуват голяма сума на Дарбу S и малка сума на Дарбу s такива, че S – s < ε.

Теорема 1 (критерий за интегруемост, Дарбу)

Ограничената функцията $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ е интегруема върху $[a, b]$ тогава и само тогава, когато

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \text{ разбиване } \tau \text{ на } [a, b] : S_\tau - s_\tau < \varepsilon. \qquad (1)$$

Д-во: Нека $f(x)$ е интегруема. Тогава $I := \underline{I} = \overline{I}$, т.е.

$$I := \sup_\tau s_\tau = \inf_\tau S_\tau. \qquad (2)$$

Нека $\varepsilon > 0$ е произволно. Числото $I - \frac{\varepsilon}{2}$ не е горна граница на множеството от малките суми на Дарбу. Следователно съществува s_{τ_1} такава, че

$$s_{\tau_1} > I - \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (3)$$

Аналогично, $I + \frac{\varepsilon}{2}$ не е долна граница на множеството от големите суми на Дарбу. Следователно съществува S_{τ_2} такава, че

$$S_{\tau_2} < I + \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (4)$$

От (3) и (4) следва, че

$$S_{\tau_2} - s_{\tau_1} < I + \frac{\varepsilon}{2} - \left(I - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon. \tag{5}$$

Образуваме разбиването $\tau := \tau_1 \cup \tau_2$. От Твърдение 2 в Тема 1 и (5) следва, че

$$S_\tau - s_\tau \leq S_{\tau_2} - s_{\tau_1} < \varepsilon. \tag{6}$$

Обратно, нека $\varepsilon > 0$ е произволно. Тогава съществува разбиване τ такова, че $S_\tau - s_\tau < \varepsilon$. Следователно

$$\overline{I} - \underline{I} \leq S_\tau - s_\tau < \varepsilon. \tag{7}$$

Така установихме, че

$$0 \leq \overline{I} - \underline{I} < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0. \tag{8}$$

Следователно $\underline{I} = \overline{I}$ и $f(x)$ е интегруема върху $[a, b]$.

Като се използва тази теорема и теоремата на Кантор (без доказателство), според която всяка непрекъсната функция в краен и затворен интервал е равномерно непрекъсната, да се докаже, че всяка непрекъсната функция в краен и затворен интервал е интегруема по Риман.

краен, затворен интервал

Д-во / Нека f е непрек. и огр. в $[a;b]$. От Th на Кантор, то тя е равномерно непрекъсната в $[a;b]$ и за избрано $\varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall \xi_1, \xi_2 \in [a;b]$ и ако $|\xi_1 - \xi_2| < \delta$, то $|f(\xi_1) - f(\xi_2)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$.

Избираме разб. π, т.ч. $d(\pi) < \delta$. Нека образуваме S_π и s_π с подходящ избор на M_i, m_i, $i \in \{1, \dots, n\}$.

Тогава $S_\pi - s_\pi = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1})}$

Имаме, че $M_i - m_i < \frac{\varepsilon}{b-a}$, защото $d(\pi) < \delta$, $i \in \{1, \dots, n\}$,

и $S_\pi - s_\pi < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = \varepsilon$, т.е. f е инт. по $[a;b]$

Да се изброят (без доказателство) основните свойства на римановия интеграл.

С-ва на Риманов интеграл

1) Нека f, g са инт. в $[a;b]$ и $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx$$

линейност

2) Нека $c \in [a;b]$,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$ адитивност

3) Ако $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a,b]$, то $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

неотрицателност

4) Ако $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a;b]$, то $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

монотонност

5) Ако f е инт. в $[a;b]$, то и $|f|$ е инт. в $[a;b]$ и

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$ С-во модул

6) Switch sign tweak $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$

Да се докаже, че ако f е непрекъсната в [a, b], то съществува c ∈ [a, b] такова, че

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

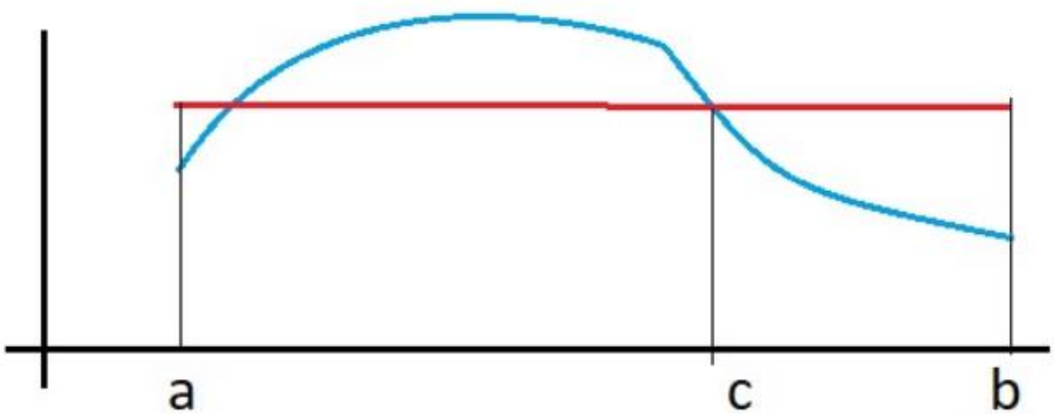
За установяването на това твърдение да се приложат (без доказателство) свойството за интегриране на неравенства и теоремата, че всяка непрекъсната функция в [a, b] приема всички стойности между максимума и минимума си.

Теорема (за средните стойности)

Нека $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ е непрекъсната. Тогава съществува $c \in [a, b]$ такова, че

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a). \tag{1}$$

Геометрична интерпретация



Доказателство на теоремата

Както знаем благодарение на т-мата на Вайерщрас, щом $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ е непрекъсната, то тя има НМ и НГ стойност. Да ги означим съответно с m и M. Тогава

$$m \leq f(x) \leq M, \quad x \in [a, b]. \tag{2}$$

След като интегрираме тези неравенства (Теорема 2 в Тема 3) и вземем предвид колко е стойността на определен интеграл от константна функция (примера в края на Тема 1), получаваме

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a) \quad \Longrightarrow \quad m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq M. \tag{3}$$

Числата m и M са стойности на непрекъсната функция $f(x)$. От Теоремата за междинните стойности (Тема 14 от ДИС 1) следва, че съществува $c \in [a, b]$ такова, че

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx, \tag{4}$$

откъдето и следва твърдението на теоремата.

Да се докаже теоремата на Нютон-Лайбниц, т.е. ако f е непрекъсната в [a, b], то за всяко x ∈ [a, b] е изпълнено

$$\frac{d}{dx}\int_a^b f(t)dt = f(x)$$

Теорема 1 (Лайбниц-Нютон, основна теорема на ДИС, I част)

Нека $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ е непрекъсната. Тогава $F : [a, b] \to \mathbb{R}$, дефинирана в (1), е диференцируема, при това $F'(x) = f(x)$, $x \in [a, b]$ (т.е. $F(x)$ е примитивна на $f(x)$ в $[a, b]$). Накратко

$$\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' = f(x), \quad x \in [a, b]. \tag{5}$$

Поради тази причина функцията

$$\int_a^x f(t)\,dt, \quad x \in [a, b], \tag{6}$$

също се нарича неопределен интеграл на $f(x)$ в $[a, b]$.

Следствие

Всяка функция, която е непрекъсната върху краен затворен интервал, притежава примитивна върху него.

Доказателство на Теорема 1

Нека $x_0 \in [a, b]$ е произволно фиксирана и $h \neq 0$ е такова, че $x_0 + h \in [a, b]$. За диференчното частно на $F(x)$ в т. x_0 имаме

$$\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_a^{x_0+h} f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt\right) \tag{7}$$

$$\overset{(15),\text{ тема 3}}{=} \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt \tag{8}$$

$$\overset{\text{т-ма ср. ст., тема 4}}{=} \frac{1}{h} f(c_h)[(x_0 + h) - x_0] = f(c_h), \tag{9}$$

където c_h е между x_0 и $x_0 + h$. Щом c_h е между x_0 и $x_0 + h$, то $c_h \to x_0$ при $h \to 0$ (ако x_0 съвпада с край на интервала, то h клони към 0 само от едната страна така, че $x_0 + h \in [a, b]$). Функцията $f(x)$ е непрекъсната в т. x_0. Следователно $\lim\limits_{h\to 0} f(c_h) = f(x_0)$.

Следователно

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = f(x_0). \tag{10}$$

Следователно $F(x)$ е диференцируема в т. x_0 и $F'(x_0) = f(x_0)$ (ако x_0 съвпада с край на интервала, производната е едностранна — лява или дясна).
Понеже т. x_0 бе произволно фиксирана в $[a, b]$, теоремата е доказана.

Да се покаже как теоремата се използва за изчисляване на определени интеграли.

?