31. Смяна на променливата в определения интеграл на функция на две променливи

Трансформации в равнината

Нека $O \subseteq \mathbb{R}^2$ е отворено. Казваме, че изображението $\Phi : O \to \mathbb{R}^2$ е гладко, ако координатните му функции притежават непрекъснати първи частни производни, т.е. ако

$$\Phi(u, v) := (\varphi(u, v), \psi(u, v)), \tag{1}$$

то $\varphi'_u(u, v)$, $\varphi'_v(u, v)$, $\psi'_u(u, v)$ и $\psi'_v(u, v)$ са непрекъснати в O.

Казваме, че $\Phi(u, v)$ е инективно (обратимо), ако

$$(\varphi(u_1, v_1), \psi(u_1, v_1)) \neq (\varphi(u_2, v_2), \psi(u_2, v_2)) \quad \text{при} \quad (u_1, v_1) \neq (u_2, v_2). \tag{2}$$

В такъв случай още казваме, че е дадена гладката инективна (обратима) трансформация

$$\Phi : \left| \begin{array}{l} x = \varphi(u, v), \\ y = \psi(u, v). \end{array} \right. \tag{3}$$

Теорема

Нека $D \subseteq \mathbb{R}^2$ е измерим компакт и $F : D \to \mathbb{R}$ е непрекъсната. Нека $D' \subset \mathbb{R}^2$ е също измерим компакт и $\Phi(u, v) := (\varphi(u, v), \psi(u, v))$ е гладко инективно изображение, дефинирано в отворено множество $O \supset D'$, като $\Phi(D') = D$. Тогава

$$\iint\limits_{D} F(x, y)\, dxdy = \iint\limits_{D'} F(\varphi(u, v), \psi(u, v))\, |J_\Phi(u, v)|\, dudv, \tag{4}$$

където

$$J_\Phi(u, v) := \begin{vmatrix} \varphi'_u(u, v) & \varphi'_v(u, v) \\ \psi'_u(u, v) & \psi'_v(u, v) \end{vmatrix}. \tag{5}$$

$J_\Phi(u, v)$ се нарича якобиан на трансформацията Φ.

Схема на д-вото

Ще предположим, че $J_\Phi(u,v) \neq 0$ в D'.
Нека $\tau' := \{D'_i\}_{i=1}^n$ е измеримо разбиване на D' и $(u_i,v_i) \in D'^o_i$.
Благодарение на ф-лата за крайните нараствания (тема 24, т-ма 4) имаме

$$\varphi(u,v) = \varphi(u_i,v_i) + \varphi'_u(u_i+\theta_i h, v_i+\theta_i k)h + \varphi'_v(u_i+\theta_i h, v_i+\theta_i k)k,$$
$$\psi(u,v) = \psi(u_i,v_i) + \psi'_u(u_i+\eta_i h, v_i+\eta_i k)h + \psi'_v(u_i+\eta_i h, v_i+\eta_i k)k,$$

където $h := u - u_i$, $k := v - v_i$ и $\theta_i, \eta_i \in (0,1)$.
Ако diam D'_i е малък, то h и k ще бъдат близки до 0; тогава поради непрекъснатостта на частните производни имаме

$$\varphi'_u(u_i+\theta_i h, v_i+\theta_i k) \approx \varphi'_u(u_i,v_i), \quad \varphi'_v(u_i+\theta_i h, v_i+\theta_i k) \approx \varphi'_v(u_i,v_i),$$
$$\psi'_u(u_i+\eta_i h, v_i+\eta_i k) \approx \psi'_u(u_i,v_i), \quad \psi'_v(u_i+\eta_i h, v_i+\eta_i k) \approx \psi'_v(u_i,v_i).$$

Следователно образът при трансформацията Φ е близък до образа на линейната трансформация $L(u,v) := (\ell_1(u,v), \ell_2(u,v))$, където

$$\ell_1(u,v) := \varphi(u_i,v_i) + \varphi'_u(u_i,v_i)(u-u_i) + \varphi'_v(u_i,v_i)(v-v_i), \tag{6}$$
$$\ell_2(u,v) := \psi(u_i,v_i) + \psi'_u(u_i,v_i)(u-u_i) + \psi'_v(u_i,v_i)(v-v_i). \tag{7}$$

Понеже $J_\Phi(u_i, v_i) \neq 0$, то L трансформира всеки правоъгълник в успоредник. Понеже транслацията запазва лицето, можем да считаме, че свободните членове в L са 0. Тогава, ако правоъгълникът Π е определен от векторите $\vec{a} := (a_1, a_2)$ и $\vec{b} := (b_1, b_2)$, то $L(\Pi)$ е успоредник, определен от векторите $\vec{c} := L(\vec{a}) = (\ell_1(a_1, a_2), \ell_2(a_1, a_2))$ и $\vec{d} := L(\vec{b}) = (\ell_1(b_1, b_2), \ell_2(b_1, b_2))$.

Лицето на този успоредник се дава от

$$\begin{aligned} |\vec{c} \times \vec{d}| &= \operatorname{abs}\left(\begin{vmatrix} \ell_1(a_1, a_2) & \ell_2(a_1, a_2) \\ \ell_1(b_1, b_2) & \ell_2(b_1, b_2) \end{vmatrix}\right) = |J_\Phi(u_i, v_i)| \operatorname{abs}\left(\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right) \\ &= |J_\Phi(u_i, v_i)|\, S(\Pi), \end{aligned} \tag{8}$$

където $S(\Pi)$ е лицето на Π.

Така установихме, че $\mu(L(\Pi)) = |J_\Phi(u_i, v_i)|\, \mu(\Pi)$.

Следователно за всяка елементарна фигура E имаме $\mu(L(E)) = |J_\Phi(u_i, v_i)|\, \mu(E)$.

Оттук може да се покаже, че $\Phi(D'_i)$ е измеримо и

$$\mu(\Phi(D'_i)) \approx |J_\Phi(u_i, v_i)|\, \mu(D'_i). \tag{9}$$

Тогава $\tau := \{\Phi(D'_i)\}_{i=1}^n$ е измеримо разбиване на D и с $(x_i, y_i) := \Phi(u_i, v_i)$ имаме

$$\begin{aligned} R_\tau(F) &:= \sum_{i=1}^n F(x_i, y_i)\mu(\Phi(D'_i)) \\ &\approx \sum_{i=1}^n F(\Phi(u_i, v_i))|J_\Phi(u_i, v_i)|\mu(D'_i) =: R_{\tau'}(F(\Phi)|J_\Phi|). \end{aligned} \tag{10}$$

Остава да използваме, че

$$\lim_{\operatorname{diam}\tau\to 0} R_\tau(F) = \iint\limits_D F(x, y)\, dxdy \tag{11}$$

и

$$\lim_{\operatorname{diam}\tau\to 0} R_{\tau'}(F(\Phi)|J_\Phi|) = \iint\limits_{D'} F(\varphi(u, v), \psi(u, v))\, |J_\Phi(u, v)|\, dudv. \tag{12}$$