# 34. Дискретни разпределения. Равномерно, биномно, геометрично, Поасоново разпределение. Задачи, в които възникват. Моменти - математическо очакване и дисперсия

***Деф***: Случайна величина

Това е всяка числова функция на елементарни изходи от даден опит. Стойностите на случайната величина зависят от изходите на опита. Случайна величина се нарича дискретна, ако приема краен или изброим брой стойности, а иначе е непрекъсната - ако са неизброими

***Деф***: Дискретна случайна величина

Нека $H_j, \quad j = 1, 2, \ldots$ е някое разлагане на $\Omega$, а $x_j$ са произволни различни числа. Дискретна случайан величина наричаме:

$$X(\omega) = \sum_j x_j I_{H_j}(\omega)$$

Където $I_{H_j}(\omega) = \begin{cases} 1 & w \in H_i \\ 0 & w \notin H_i \end{cases}$ е индикатора на множеството $H_j$.

***Деф***: Разпределение на дискретна случайна величина $X$ наричаме следната таблица:

| X | $x_1$ | $x_2$ | ... | $x_n$ | ... |
|---|---|---|---|---|---|
| P | $p_1$ | $p_2$ | ... | $p_n$ | ... |

Където $x_i$ са стойностите на случайната величина. Те могат да бъдат краен или изброим брой. $p_j = P(X = x_j)$ са вероятностите с които случайната величина взема съответните стойности. За да бъде $X$ добре дефинирано е необходимо

$$\sum_j p_j = 1$$

***Деф***: Сигма алгебра

Нека $\Omega$ е произволно множество и нека $A$ е съвкупност от подмножества на $\Omega$. Казваме, че $A$ е сигма алгебра, ако са изпълнени условията:

- $\emptyset \in \mathrm{A}$ и $\Omega \in \mathrm{A}$
- Ако $A \in \mathrm{A}$, то $\bar{A} \in \mathrm{A}$
- Ако $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots \in \mathrm{A}$, то

  $$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathrm{A} \quad \text{и} \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathrm{A}$$

***Деф***: Вероятността е функция, дефинирана върху сигма алгебра A, т.ч.

$\forall A \in \mathrm{A}$: $P(A)$ е число, отговарящо на следните аксиоми:

1. $P(A) \geq 0$ **неотрицателност**
2. $P(\Omega) = 1$ **нормираност**
3. $AB = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ **адитивност**
4. Непрекъснатост: $A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset \emptyset$, то $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0$
5. За $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B}$, то $P(A) \leq P(B)$ **монотонност**

***Деф***: **Математическо очакване** (точка на равновесие)

X - ДСВ, $\mathbb{E}[X] = \sum_{j \in Index(X(\Omega))} x_j P\left(X = x_j\right)$

Св-ва: $\mathbb{E}[c.X] = c.\mathbb{E}[X]$, $\quad \mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$, $\quad \mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X].\mathbb{E}[Y]$, $(X, Y$ – независими)

***Деф***: **Дисперсия** (разсейване на стойностите на сл. вел. около $\mathbb{E}$)

$X$ - случайна величина, $\quad \mathbb{D}[X] = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right] = \sum_{j \in Index(X)} P\left(X = x_j\right)\left(x_j - \mathbb{E}[X]\right)^2$

Св-ва: $\mathbb{D}[X] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - (\mathbb{E}[X])^2$, $\mathbb{D}[X] \geq 0$, $\quad \mathbb{D}[cX] = c^2\mathbb{D}[X]$

$\mathbb{D}[X + Y] = \mathbb{D}[X] + \mathbb{D}[Y]$, $(X, Y$ - независими)

**Равномерно разпределение**

***Деф***: Равномерно разпределение

$X \in U(a,b)$ е равномерно разпределение:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a,b] \\ 0\ , & x \notin [a,b] \end{cases}$$

Вероятността да вземе коя да е стойност в интервала е една и съща.

Пример за равномерно разпределение:

Когато хвърляме правилен зар всяко число може да се падне с равна вероятност.

Математическо очакване:

$$EX = \int_a^b x\frac{1}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\frac{x^2}{2}\Big|_{x=a}^{b} = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

Дисперсия:

$$EX^2 = \int_a^b x^2\frac{1}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\frac{x^3}{3}\Big|_{x=a}^{b} = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

$$DX = EX^2-(EX)^2 = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

**Разпределение на Бернули**

***Деф***: Разпределение на Бернули

Нека $X$ е С.В. Ще казваме, че $X$ има разпределение на Бернули, ако $X$ приема две стойности - "1" при успех и "0" при неуспех. Разпределението има вида:

| | | |
|---|---|---|
| $X$ | 0 | 1 |
| $P$ | q | p |

Математическо очакване

$$EX = 0.(1-p)+1.p = p = EX^2$$

Дисперсия

$$DX = EX^2-(EX)^2 = p-p^2 = p(1-p) = pq$$

Пример:

Еднократно хвърляне на монета, ако означим ези за успех, а тура за неуспех

**Биномно разпределение**

***Деф***: Биномно разпределение $X \in Bi(n,P)$

Извършват се **n** последователни, независими опити на Бернули, вероятността за успех **p** за всеки опит е една и съща. Случайната величина $X$, равна на броя на успехите, наричаме биномно разпределена. Имаме, че $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ - независими С.В. с разпрределение на Бернули с вероятност за успех **p**

$$P(X=k) = \binom{n}{k}p^k q^{n-k}, \qquad k = 0,1,\dots,n$$

Коректност

Съгласно формулата за бинома на Нютон:

$$\sum_{k=1}^{n} P(X=k) = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1$$

Пример:

Хвърляме зар 5 пъти. Броим падналите се шестици $X \in Bi(5,\frac{1}{6})$

Пораждаща функция

$$g_X(s) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P(X = k).\,s^k} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} s^k = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (ps)^k q^{n-k} = (ps+q)^n$$

$$EX = g'_X(1) = \left[n(ps+q)^{n-1}p\right]\Big|_{s=1} = n(p+q).p = np$$

$$DX = g''_X(1) + g'_X(1) - [g'_X(1)]^2 = \left[n(n-1)(ps+q)^{n-2}p^2\right]_{s=1} + n.p - n^2p^2 =$$
$$= n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2 = np(1-p) = npq$$

Свеждане до Бернули

$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, където с $X_i$ озбачаваме успеха от i-тия опит. Имаме, че $X_1, X_2, \dots, X_n$ са независими с разпределение на Бернули.

$EX = E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = EX_1 + EX_2 + \cdots + EX_n = n.p$

$DX = D(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = DX_1 + DX_2 + \cdots + DX_n = n.p.q$

**Геометрично разпределение**

***Деф***: Геометрично разпределение $\mathrm{X} \in \mathrm{Ge}(p)$

Схема на Бернули с неограничен брой опити. Сл. в. $X =$ броят на неуспехите до първия успех наричаме геометрично разпределена сл. в.

$P(X = k) = q^k p, \qquad k = 0, 1, 2, \dots$

Коректност:

Прилагайки формулата за сума на безкрайна геометрична прогресия:

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(X=k) = \sum_{k=0}^{\infty} q^k p = \frac{p}{1-q} = 1$$

Пораждаща функция:

$$g_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X=k)s^k = \sum_{k=0}^{\infty} q^k p s^k = p\sum_{k=0}^{\infty} (qs)^k = \frac{p}{1-qs}$$

Математическо очакване:

$$EX = g'_X(1) = p\left(\frac{q}{(1-qs)^2}\right)\Bigg|_{s=1} = \frac{pq}{(1-q)^2} = \frac{pq}{p^2} = \frac{q}{p}$$

Дисперсия

$$g''_X(1) = \left(\frac{pq}{(1-qs)^2}\right)'\Bigg|_{s=1} = \frac{2pq^2}{(1-q)^3} = \frac{2pq^2}{p^3} = \frac{2q^2}{p^2}$$

$$DX = g''_X(1) + g'_X(1) - [g'_X(1)]^2 = \frac{2q^2}{p^2} + \frac{q}{p} - \frac{q^2}{p^2} = \frac{q(q+p)}{p^2} = \frac{q}{p^2}$$

Пример:

Хвърляме зар докато не се падне първа шестица. Сл. в. $X$ е броят опити до падането на шестица.

$$P(X=4) = \left(1 - \frac{1}{6}\right)^4 + \frac{1}{6}$$

**Поасоново разпределение**

***Деф***: Поасоново разпределение $\mathrm{X} \in \mathrm{Po}(p)$

$P(X = k) = \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \qquad k = 0, 1, 2, \dots$

Където $\lambda > 0$ е константа

Възниква като граничен случай на биномното разпределение, ако броят на опитите е голям, а вероятността за успех е малка.

***Теорема*** на Поасон

Нека $X \in Bi(n, p)$ като $n \to \infty$, $p \to \infty$ и $np \to \lambda \neq 0, \neq \infty$. Тогава

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \underset{\substack{n\to\infty \\ p\to 0 \\ np\to\lambda}}{\longrightarrow} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Коректност:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$$

Пораждаща функция:

$$g_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) s^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} s^k = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda s)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda s} = e^{\lambda(s-1)}$$

Математическо очакване:

$$EX = g'_X(1) = \lambda e^{\lambda(s-1)}\Big|_{s=1} = \lambda$$

Дисперсия:

$$DX = g''_X(1) + g'_X(1) - \left[g'_X(1)\right]^2 = \lambda^2 e^{\lambda(s-1)}\Big|_{s=1} + \lambda - \lambda^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

Пример:

Дисплей има 1 милион пиксела. Вероятността един пиксел да изгърми е $\frac{1}{1\,000\,000}$.

$$n = 1\,000\,000, \qquad p = \frac{1}{1\,000\,000}, \qquad \text{средно се пада } \lambda = 1$$

$$P(X = 2) = \frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!} = \frac{1.\, e^{-1}}{2} = \frac{1}{2e}$$