Хомогенни системи

(*) $\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{k1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n = 0 \end{cases}$

H: H е подпр-во $H \subset F^n$

Опр// фундаментална (ФСР) система от решения на хомогенна система е базис на подпр-вото от решения

Хом. система която е определена няма ФСР

$y^{(1)}, \dots, y^{(s)}$ е ФСР на (*) и е базис на H

$$H = \{p_1 y^{(1)} + \dots + p_s y^{(s)} \mid p_1, \dots, p_s \in F\}$$

Т// Ако H е р-е на хомогенна система (*) тогава

$$\dim H = n - r(A)$$

n - брой на неизвестните

A - матрицата на системата (*)

Д-во Нека A - матр. на (*) $r = r(A)$ ранг на A

Нека първите r реда са ЛНЗ

$$A \to \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \hline a_{r1} & \cdots & a_{rn} \\ \hline 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$\exists$ r ЛНЗ стълба ЛНЗ с номера $j_1, \dots, j_r$

$\{i_1, \dots, i_{n-r}\} = \{1, \dots, n\} \setminus \{j_1, \dots, j_r\}$

$$A_0 = \begin{pmatrix} a_{1j_1} & \cdots & a_{1j_r} \\ \hline a_{rj_1}, & \cdots, & a_{rj_r} \end{pmatrix}_{r \times r}$$

неособена само с елем. преобр. по редове може да се приведе до E

$$A \to \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \hline a_{r1} & \cdots & a_{rn} \\ \hline 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} & a_{ij}' & \\ \hline 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

в стълбовете $j_1, \dots, j_r$ са стълбовете на E

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc}
j_1 & \cdots & & j_r & i_1 & \cdots & i_{n-r} \\
1 & 0 & \cdots & 0 & a'_{1i_1} & \cdots & a'_{1i_{n-r}} \\
0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & & \cdots \\
 & & \ddots & & \cdots & & \cdots \\
0 & & & 1 & a'_{ri_1} & \cdots & a'_{r,i_{n-r}} \\
\hline
x_{j_1} & x_{j_2} & \cdots & x_{j_r} & x_{i_1} & & x_{i_{n-r}}
\end{array}\right) \to \left|\begin{array}{l}
x_{j_1} + a'_{1i_1}x_{i_1} + \cdots + a'_{1i_{n-r}}x_{i_{n-r}} = 0 \\
x_{j_2} \pm a'_{2i_1}x_{i_1} \cdots \\
\cdots \\
x_{j_r} + a'_{ri_1}x_{i_1} + \cdots + a'_{ri_{n-r}}x_{i_{n-r}} = 0
\end{array}\right.$$

$$\begin{array}{cccc|cccc|l}
x_{j_1} & x_{j_2} & \cdots & x_{j_r} & x_{i_1} & \cdots & \cdots & x_{i_{n-r}} & \\
\hline
-a'_{1i_1}, & -a'_{2i_1}, & \cdots, & -a'_{ri_1} & 1 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_1 \\
-a'_{1i_2}, & -a'_{2i_2}, & \cdots, & -a'_{ri_2} & 0 & 1 & 0 \cdots & 0 & \alpha_2 \\
 & & & & & & & & \\
-a'_{1i_{n-r}}, & -a'_{2,i_{n-r}}, & \cdots, & -a'_{ri_{n-r}} & 0 & \cdots & 0 & 1 & \alpha_{n-r}
\end{array}$$

$$(\gamma_{j_1}\ \gamma_{j_2} \cdots \gamma_{j_r}, \gamma_{i_1}, \cdots, \gamma_{i_r}) = \gamma \in H.$$

① $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-r}$ са реш. $\in H$

② $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-r}$ Л.НЗ

③ $\ell(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-r}) \underset{?}{=} H$

$$\gamma - \gamma_{i_1}\alpha_1 - \gamma_{i_2}\alpha_2 - \dots - \gamma_{i_{n-r}}\alpha_{n-r} = \quad (\in H)$$

$$= (\underset{j_1}{*}, *, \dots, \underset{j_r}{*}, \underset{i_1}{0}, \dots, \underset{i_{n-r}}{0}) \text{ е решение}$$

$\alpha_1, \dots, \alpha_{n-r}$ са ЛНЗ
$\ell(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-r}) = H$
$\Rightarrow \alpha_1, \dots, \alpha_{n-r}$ ~~базис~~ на H
$\Rightarrow \alpha_1, \dots, \alpha_{n-r}$ ФСР на $(*)$

$\Rightarrow \dim H = n - r = n - r(A)$

$\Rightarrow * \dots * = 0, \dots 0$

$\gamma - \gamma_{i_1}\alpha_1 - \gamma_{i_2}\alpha_2 - \dots - \gamma_{i_{n-r}}\alpha_{n-r} = \in H$

$$= (\underset{j_1}{0}, \dots, \underset{j_r}{0}, \underset{i_1}{0}, \dots, \underset{i_{n-r}}{0}) = \theta$$

$\gamma = \gamma_{i_1}\alpha_1 + \dots + \gamma_{i_{n-r}}\alpha_{n-r} \in \ell(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-r})$

$\Rightarrow H \in \ell(\underset{H}{\alpha_1}, \dots, \underset{H}{\alpha_{n-r}}) \subset H$

$\Rightarrow H = \ell(\alpha_1, \dots \alpha_{n-r})$

$x_1\, x_2 \mid x_3 \mid x_4\, x_5\, x_6 \mid x_7$

базисни $x_1, x_3, x_4\, x_7$

своб. $x_2\, x_5\, x_6$

$\alpha_1, \alpha_2\, \alpha_3$ ФСР

$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline \alpha_1 = & 3/2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_2 = & & 0 & -\frac{11}{4} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha_3 & & 0 & \frac{17}{4} & -3 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

за упр.

$x_2\, x_3\, x_6\, x_7$

св. $x_1, x_4\, x_5$

$x_4 + 3x_6 = 0$

$4x_3 + 3x_4 + 11x_5 - 8x_6 + 4x_7 = 0$

$4x_3 + (-9 - 8) = 0$

$2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 5x_4 + 7x_5 + 5x_6 - x_7 = 0$

$$T: \left| \begin{array}{l} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots \\ a_{k1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n = b_k \end{array} \right.$$

понеделник от 17°°

(1) несъвместима $r(A) \neq r(\bar{A})$ ($r(\bar{A}) = r(A)+1$

(2) съвместима $r(A) = r(\bar{A})$

– определена $(r(A) = r(\bar{A}) = n)$

– неопределена $(r(A) = r(\bar{A}) < n)$

реш. зависи от $n - r(A)$ параметъра

Ако β – фикс. р-е на системата

$\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(n-r)}$ ФСР на хомогенната система

$$\Rightarrow T = \left\{ \beta + p_1\alpha^{(1)} + \dots p_{n-r}\alpha^{(n-r)} \;\middle|\; p_1, \dots, p_{n-r} \right\}$$

$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0$ $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ р-е на тази у-е

$a_{11}\beta_1 + \dots + a_{1n}\beta_n = 0$ {подпр-ва на F^n} = {мн-во лин. обвивки} = {мн-во решения на хомогенни с-ми}

$(\beta_1, \dots, \beta_n)$ реш. на $a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0$

$(a_{11}, \dots, a_{1n})$ е реш. на $\beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n = 0$

всяко подпр-во на F^n е лин. обвивка (на базис)

реш. на хом. система е подпр-во → е лин. обв на ФСР

Т/ За всяко подпр-во U на F^n съществува хомогенна система, която има решение U.

1) Нека $U = \{0\}$ ⟶ ⟶ ⟶ $0: \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ \vdots \\ x_n = 0 \end{cases}$

2) Нека U има базис $b_1, \dots, b_k$

$b_i = (b_{i1}, b_{i2}, \dots, b_{in})$

Нека произволно у-е от търсената ~~система~~ (a_i не се знаят)

$a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$ ($b_1, \dots, b_n$ р-е)

b_1 реш. ⟶ $\circledast$ $L: \begin{cases} a_1 b_{11} + \dots + a_n b_{1n} = 0 \\ a_1 b_{21} + \dots + a_n b_{2n} = 0 \\ \dots \\ a_1 b_{k1} + \dots + a_n b_{kn} = 0 \end{cases}$

b_2 -"- ⟶

b_k р-е ⟶

хомогенна система с неизвестни $a_1, \dots, a_n$

$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{k1} & \dots & b_{kn} \end{pmatrix}$

системата с $\circledast$ има L - решение

$r(B) = k$ защото редовете са ЛНЗ

$\boxed{\dim L = n - r(B) = n - k}$

$\alpha^{(1)}$ ... $\alpha^{(n-k)}$ ФСР $\circledast$

$\alpha^{(1)} = (\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1n})$

$\vdots$

$\alpha^{(n-k)} = (\alpha_{n-k,1}, \dots, \alpha_{n-k,n})$

ФСР на $(*)$

$(**)$ $W: \begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \dots + \alpha_{1n}x_n = 0 \\ \dots \\ \alpha_{n-k,1}x_1 + \dots + \alpha_{n-k,n}x_n = 0 \end{cases}$

$(*) \begin{cases} a_1 b_{11} + \dots + a_n b_{1n} = 0 \\ \dots \\ a_1 b_{k1} + \dots + a_n b_{kn} = 0 \end{cases}$

$r(A) = n-k$ редовете ЛНЗ

$i \in 1, \dots, k$

$j \in 1, \dots, n-k$

$\boxed{\dim W = n - r(A) = k}$

$\alpha_{j1} b_{i1} + \dots + \alpha_{jn} b_{in} = 0$

защото $\alpha^{(j)}$ е реш. на у-е (i) от $(*)$

b_i е реш. на урав. (j) ~~на~~ от $(**)$

$\Rightarrow j = 1, \dots, n-k$

$\Rightarrow b_i$ е реш. на $(**)$

$\Rightarrow b_1, \dots, b_k$ са р-я на $(**)$ $\Rightarrow l(b_1, \dots, b_k) = U$ е решение на $(**)$

$U \subset W$.

$\dim W = k$, $\dim U = k \Rightarrow$

$U = W$

Зад $U = \ell(a_1, a_2, a_3)$

$a_1 = (1, 2, -1, 3)$

$a_2 = (7, 13, 5, 2)$

$a_3 = (2, 3, 1, -4)$

$t_1x_1 + t_2x_2 + t_3x_3 + t_4x_4 = 0$

a_1 р-е

$$T: \begin{cases} 1t_1 + 2t_2 - t_3 + 3t_4 = 0 \\ 7t_1 + 13t_2 + 5t_3 + 2t_4 = 0 \\ 2t_1 + 3t_2 + t_3 - 4t_4 = 0 \end{cases} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 7 & 13 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot 5$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 12 & 23 & 0 & 17 \\ 3 & 5 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 10 & 17 & -1 & 0 \\ 63 & 108 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$t_1\ t_3\ t_4$ б.н.

t_2

$\dim T = 4 - 3 = 1$

$t_2 = 63 \Rightarrow t_1 = -108$

$$\begin{cases} 10t_1 + 17t_2 = t_3 = \cancel{-1206}\ 9 \\ 3t_1 + 5t_2 = t_4 = -351 \end{cases}$$

~~$351x_1 + 63x_2$~~

$U: \boxed{-108x_1 + 63x_2 - 9x_3 - \cancel{351}\,9\,x_4 = 0}$

$$\begin{pmatrix} 10 & 17 & -1 & 0 \\ \cancel{63} & \cancel{108} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 3 & 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

— $t_2 t_3 t_4$ базисны — $c_2 c_3 c_4$ ЛНЗ

— или $t_1 t_3 t_4$ базисны — $c_1 c_3 c_4$ ЛНЗ

t_1	t_2	t_3	t_4
12	-7	1	1
св		б	

t_1	t_2	t_3	t_4
б	св	б	

$$10t_1 + 17t_2 = t_3$$

$$3t_1 + 5t_2 = t_4$$

$$+12x_1 - 7x_2 + 1x_3 + x_4 = 0$$

$L = \{ \ldots \}$

$f_1, f_2 \in L$

$f_1 + f_2 \in ? L$

$\alpha f_1 \in ? L$