(1) Упражнение 13 за 1, 2 и 3 група

Първа основна граница: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$

По-долу с (!) ще означаваме границите, които се използват често.

Пресметнете границата:

Зад. 1 а) $L = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{x}$;

б) $L = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{\sin 6x}$; в) (!) $L = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$.

Решение: а) $L = \lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{\sin 5x}{5x} . 5 \right) = 1.5 = 5.$

б) $L = \lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{\sin 4x}{4x} . \frac{6x}{\sin 6x} . \frac{4}{6} \right) = 1.1.\frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$

в) $L = \lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x} . \frac{1}{\cos x} \right) = 1.1 = 1.$

Отг. на в): $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1.$

Зад. 2 а) $L = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} 9x - \operatorname{tg} 4x}{x}$;

б) $L = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{4}}$;

в) $L = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{tg}^3 x - 3 \operatorname{tg} x}{x - \frac{\pi}{3}}$.

Решение: а) $\left[\frac{0}{0} \right]$

$L = \lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{\operatorname{tg} 9x}{x} - \frac{\operatorname{tg} 4x}{x} \right) = \lim\limits_{x \to 0} \left(9 . \frac{\operatorname{tg} 9x}{9x} - 4 . \frac{\operatorname{tg} 4x}{4x} \right) =$

$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{от зад. 1 в)}}}{=} 9.1 - 4.1 = 5.$

② б) $\boxed{\frac{0}{0}}$ $L = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \left(\sqrt{2} \cdot \dfrac{\sin x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \cos x}{x - \frac{\pi}{4}} \right) =$

$= \sqrt{2} \cdot \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x \cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4} \cos x}{x - \frac{\pi}{4}} =$

$= \sqrt{2} \cdot \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{x - \frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} \cdot 1 = \sqrt{2}$.

в) $\boxed{\frac{0}{0}}$ $L = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \left[\operatorname{tg} x \left(\operatorname{tg} x + \sqrt{3} \right) \right] \cdot \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{\operatorname{tg} x - \sqrt{3}}{x - \frac{\pi}{3}} =$

$= \sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}}{x - \frac{\pi}{3}}$.

Ще използваме, че $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$,

откъдето следва, че $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(\alpha - \beta) \cdot (1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta)$.

Имаме, че

$L = 6 \cdot \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}}{x - \frac{\pi}{3}} =$

$= 6 \cdot \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \left[\dfrac{\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{x - \frac{\pi}{3}} \cdot \left(1 + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\right) \right] \overset{\text{от зад. 1 в)}}{=}$

$= 6 \cdot 1 \cdot \left(1 + \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}\right) = 6 \cdot 4 = 24$.

Зад. 3 а) (!) $L = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos ax}{x^2}$ $(a \in \mathbb{R})$;

б) $L = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos 4x - \cos 6x}{x^2}$;

в) $L = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos 5x \cos 8x}{x^2}$;

г) $L = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x \sqrt{\cos 2x}}{x^2}$.

③ Решение: а) $\left[\frac{0}{0}\right]$

При $a \neq 0$ $\quad L = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-\cos ax)\cdot(1+\cos ax)}{x^2\cdot(1+\cos ax)} =$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\cos ax} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 ax}{x^2} =$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ a\neq 0}}{=} \frac{1}{2} \cdot \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin^2 ax}{a^2x^2} \cdot a^2 \right) = \frac{a^2}{2} \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin ax}{ax} \right)^2 =$$

$$= \frac{a^2}{2} \cdot 1^2 = \frac{a^2}{2}.$$

При $a = 0$ очевидно $L = 0 = \dfrac{a^2}{2}$.

Отг. на а): $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos ax}{x^2} = \dfrac{a^2}{2}$ $\quad (a \in \mathbb{R})$.

б) $\left[\frac{0}{0}\right]$ $\quad L = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\cos 4x - 1) + (1-\cos 6x)}{x^2} =$

$$= \lim_{x\to 0} \left[-\frac{1-\cos 4x}{x^2} + \frac{1-\cos 6x}{x^2} \right] \overset{\text{от зад. 3 а)}}{=}$$

$$= \left[-\frac{4^2}{2} + \frac{6^2}{2} \right] = \frac{6^2-4^2}{2} = \frac{36-16}{2} = \frac{20}{2} = 10.$$

в) $\left[\frac{0}{0}\right]$ $\quad L = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-\cos 5x) + (\cos 5x - \cos 5x \cos 8x)}{x^2} =$

$$= \lim_{x\to 0} \left[\frac{1-\cos 5x}{x^2} + \cos 5x \cdot \frac{1-\cos 8x}{x^2} \right] \overset{\text{от зад. 3 а)}}{=}$$

$$= \frac{5^2}{2} + 1 \cdot \frac{8^2}{2} = \frac{5^2+8^2}{2} = \frac{25+64}{2} = \frac{89}{2}.$$

г) $\left[\frac{0}{0}\right]$ $\quad L = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-\cos x\sqrt{\cos 2x})\cdot(1+\cos x\sqrt{\cos 2x})}{x^2\cdot(1+\cos x\sqrt{\cos 2x})} =$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\cos x\sqrt{\cos 2x}} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x \cdot \cos 2x}{x^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos^2 x) + (\cos^2 x - \cos^2 x \cdot \cos 2x)}{x^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \left[\left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 + \cos^2 x \cdot \frac{1-\cos 2x}{x^2} \right] \overset{\text{от зад. 3 а)}}{=}$$

$$= \frac{1}{2} \left[1^2 + 1 \cdot \frac{2^2}{2} \right] = \frac{1}{2} [1+2] = \frac{3}{2}.$$

④ Зад. 4 а) $L = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$;

б) $L = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x} \right]$.

Решение: а) $\left[\frac{0}{0}\right]$. Полагаме $t = \sqrt[6]{\cos x}$.

$x \to 0 \implies t \to 1$.

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{(\sqrt[6]{\cos x})^3 - (\sqrt[6]{\cos x})^2}{1 - \cos^2 x} =$$

$$= \lim_{t \to 1} \frac{t^3 - t^2}{1 - t^{12}} = \lim_{t \to 1} \frac{t^2 \overset{(-1)}{\cancel{(t-1)}}}{\cancel{(1-t)}(1+t+t^2+t^3+\ldots+t^{10}+t^{11})} =$$

$$= -\frac{1}{12}.$$

б) Лема Нека $D \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ е точка на сгъстяване на D и $f, g : D \to \mathbb{R}$, като $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, а $g(x)$ е ограничена в D. Тогава $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) g(x)] = 0$.

Д-во: Нека $|g(x)| \leq A$ за $x \in D$. Тогава имаме, че $0 \leq |f(x) g(x)| \leq A |f(x)|$, $x \in D$ и понеже $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, то от лемата за полицаите (за функции) следва, че $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) g(x)] = 0$.

Да се върнем към задачата.

$$L = \lim_{x \to +\infty} \left[2 \sin \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2} \cdot \cos \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2} \right] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \Bigg[\underbrace{2 \sin \frac{1}{2(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}}_{\xrightarrow{x \to +\infty}\ 0} \cdot \underbrace{\cos \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2}}_{\text{ограничена в } [0, +\infty) \text{ функция}} \Bigg].$$

От лемата следва, че $L = 0$.