Линейна зависимост и линейна независимост

доц. Евгения Великова

Октомври 2020

Определения ЛЗ и ЛНЗ

линейна зависимост

Нека V линейно пространство над F и $b_1, \ldots, b_k$ вектори от V.

$$b_1, \ldots, b_k \text{ са ЛЗ } \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \ \alpha_1, \ldots, \alpha_k \neq 0, \ldots, 0 \ \ (\alpha_i \in F) \\ \alpha_1 b_1 + \ldots + \alpha_k b_k = \mathcal{O} \end{cases} .$$

линейна независимост

Нека V е линейно пространство над F и $b_1, \ldots, b_k$ вектори от V.

$$b_1, \ldots, b_k \text{ са ЛНЗ } \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \ \alpha_1, \ldots, \alpha_k \neq 0, \ldots, 0 \ \ (\alpha_i \in F) \\ \alpha_1 b_1 + \ldots + \alpha_k b_k \neq \mathcal{O} \end{cases} .$$

Забележка: Всяка съвкупност от вектори от линейно пространство V е или линейно зависима или линейно независима.
Забележка: За произволни вектори $b_1, \ldots, b_k \in V$ винаги е изпълнено $0b_1 + \ldots + 0b_k = \mathcal{O}$.

Пример

Линейно независими ли са матриците A, B, C, D, където
$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} i & i \\ 0 & i \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ -i & -i \end{pmatrix}$ и $D = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} i & i \\ 0 & i \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -i & 0 \\ -i & -i \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\left| \begin{array}{l} \lambda_1 + i\lambda_2 - i\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + i\lambda_2 + 5\lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 - i\lambda_3 + 5\lambda_4 = 0 \\ i\lambda_2 - i\lambda_3 + 5\lambda_4 = 0 \end{array} \right. \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & i & -i & 0 \\ 1 & i & 0 & 5 \\ 1 & 0 & -i & 5 \\ 0 & i & -i & 5 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & i & -i & 0 \\ 0 & 0 & i & 5 \\ 0 & -i & 0 & 5 \\ 0 & i & -i & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & i & -i & 0 \\ 0 & 0 & i & 5 \\ 0 & -i & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -i & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

единствено решение $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$
$\Rightarrow A, B, C, D$ са линейно независими.

Свойство 1:

Множество, състоящо се от един вектор е линейно зависимо тогава и само тогава, когато векторът е нулевият вектор на пространството.

Доказателство: Нека $\{a\}$ е линейно зависимо, тогава съществува $\lambda \neq 0$, за който $\lambda a = \mathcal{O} \quad \Rightarrow \mathcal{O} = \lambda^{-1}\lambda a = a$.

Свойство 2:

Система от два вектора е линейно зависима, точно когато векторите са пропорционални.

Доказателство:

- Ако векторите са пропорционални $b = \beta a$, тогава $\beta a - 1b = \mathcal{O}$, векторите са линейно зависими.
- Нека a, b са зависими вектори, и $\lambda a + \mu b = \mathcal{O}$, където $\lambda, \mu \neq 0, 0$, и нека например $\lambda \neq 0$. Преобразуваме до $a = -\dfrac{\mu}{\lambda} b \;\Rightarrow$ векторите са пропорционални.

Твърдение

Нека V е линейно пространство над F и $b_1, \dots, b_k \in V$ и $k \geq 2$. Векторите $b_1, \dots, b_k$ са линейно зависими тогава и само тогава когато един от векторите може да се представи като линейна комбинация на останалите вектори.

Доказателство.

$\boxed{\Leftarrow}$ Нека $b_j = \mu_1 b_1 + \ldots + \mu_{j-1} b_{j-1} + \mu_{j+1} b_{j+1} + \ldots + \mu_k b_k$,
$\Rightarrow \mathcal{O} = \mu_1 b_1 + \ldots + \mu_{j-1} b_{j-1} - 1.b_j + \mu_{j+1} b_{j+1} + \ldots + \mu_k b_k$,

$\boxed{\Rightarrow}$ Нека $b_1, \dots, b_k$ са линейно зависими
$\exists \alpha_1, \dots, \alpha_k \neq 0, \dots, 0$ и $\mathcal{O} = \alpha_1 b_1 + \ldots + \alpha_k b_k$.
Ако $\alpha_p \neq 0 \Rightarrow \exists \alpha_p^{-1} \Rightarrow$

$$b_p = -\frac{1}{\alpha_p}(\alpha_1 b_1 + \ldots + \alpha_{p-1} b_{p-1} + \alpha_{p+1} b_{p+1} + \ldots + \alpha_k b_k)$$

Свойства

Свойство

Ако едно множество от вектори съдържа линейно зависимо подмножество, тогава също и цялото множество е линейно зависимо.

Доказателство: Нека $\{b_1, \ldots, b_s\} \subset \{b_1, \ldots, b_k\}$, където $s < k$ и подмножеството $\{b_1, \ldots, b_s\}$ е линейно зависимо,
съществуват скалари $\alpha_1, \ldots, \alpha_s \neq 0, \ldots, 0$, и $\alpha_1 b_1 + \ldots + \alpha_s b_s = \mathcal{O}$.

$$\alpha_1 b_1 + \ldots + \alpha_s b_s + 0 b_{s+1} + \ldots + 0 b_k = \mathcal{O}.$$

$\alpha_1, \ldots, \alpha_s, 0, \ldots, 0 \neq 0, \ldots, 0, \Rightarrow \{b_1, \ldots, b_k\}$ е линейно зависимо.

Свойство

Всяко подмножество на линейно независимо множество от вектори е линейно независимо.

Доказателство: Нека $b_1, \ldots, b_s$ е подмножество на линейно независимото множество $b_1, \ldots, b_k$. Ако допуснем, че $b_1, \ldots, b_s$ е ЛЗ, ще получим че и $b_1, \ldots, b_k$ е ЛЗ, което е противоречие.

Лема за линейна независимост

Лема

Нека V е линейно пространство над F и $\{b_1, \dots, b_k\} \subset V$ и $c \in V$.

$$\text{Ако } \{b_1, \dots, b_k\} \text{ са ЛНЗ}$$
$$\Downarrow$$
$$\{b_1, \dots, b_k, c\} \text{ са ЛНЗ} \quad \Leftrightarrow \quad c \notin \ell(b_1, \dots, b_k)$$

Доказателство:

$\boxed{\Rightarrow}$ Нека $b_1, \dots, b_k, c$ ЛНЗ и допускаме, че $c \in \ell(b_1, \dots, b_k)$
$\Rightarrow \;\; c = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_k b_k$.

$$\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_k b_k - 1c = \mathcal{O} \text{ , където } \lambda_1, \dots, \lambda_k, -1 \neq 0, \dots, 0, 0.$$

Следователно системата $b_1, \dots, b_k, c$ е ЛЗ, което е противоречие.
Следователно, допускането е невярно и затова $c \notin \ell(b_1, \dots, b_k)$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Нека $c \notin \ell(b_1, \ldots, b_k)$.
Допускаме, че $b_1, \ldots, b_k, c$ са линейно зависими.
$\Rightarrow$ съществуват $\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \mu \neq 0, \ldots, 0, 0$ за които

$$\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_k b_k + \mu c = \mathcal{O}$$

- Ако $\mu \neq 0$, изразяваме c и получаваме $c = -\frac{1}{\mu}(\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_k b_k)$, следователно $c \in \ell(b_1, \ldots, b_k)$, което е противоречие;
- Ако $\mu = 0 \;\Rightarrow\; \mathcal{O} = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_k b_k + 0c$ и $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \neq 0, \ldots, 0$. Следователно $b_1, \ldots, b_k$ са линейно зависими, което е противоречие.

Достигнахме до противоречие, следователно допускането не е вярно и затова $b_1, \ldots, b_k, c$ са линейно независими.

примери

Основна лема на линейната алгебра

Нека V е линейно пространство над F и векторите $a_1, \dots, a_k$ и $b_1, \dots, b_n$ са от пространството V.

$$\text{Ако } \left\{ \begin{array}{r} \{b_1, \dots, b_n\} \subset \ell(a_1, \dots, a_k) \\ \text{и} \quad n > k \end{array} \right\} \Rightarrow \{b_1, \dots, b_n\} \text{ е ЛЗ.}$$

Доказателство: индукция по k

Нека $k = 1$ и

$$b_1 = \lambda_1 a_1, \ \dots, \ b_n = \lambda_n a_1$$

- ако $\lambda_1 = 0$, следователно $b_1 = \mathcal{O}$ и $b_1, \dots, b_n$ е ЛЗ;
- ако $\lambda_1 \neq 0 \Rightarrow \lambda_2 b_1 - \lambda_1 b_2 = \mathcal{O}$ и $\lambda_2, -\lambda_1 \neq 0, 0$ следователно b_1, b_2 са ЛЗ $\Rightarrow b_1, \dots, b_n$ ЛЗ;

Доказателство на основна лема - продължение

Нека за $k-1$ вектори $a_1, \dots, a_{k-1}$ е изпълнено твърдението.
Разглеждаме случая, когато $b_i \in \ell(a_1, \dots, a_k)$ за $i = 1, 2, \dots, n$ и $n > k$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
b_1 & = & \lambda_{11} a_1 & + & \dots & + & \lambda_{1,k-1} a_{k-1} & + & \lambda_{1k} a_k \\
\multicolumn{9}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\
b_{n-1} & = & \lambda_{n-1,1} a_1 & + & \dots & + & \lambda_{n-1,k-1} a_{k-1} & + & \lambda_{n-1,k} a_k \\
b_n & = & \lambda_{n,1} a_1 & + & \dots & + & \lambda_{n,k-1} a_{k-1} & + & \lambda_{n,k} a_k
\end{array}
$$

- Ако всички скалари при b_n са нули, $\Rightarrow b_n = \mathcal{O}$ и $b_1, \dots, b_n$ са ЛЗ
- Ако съществува $\lambda_{n,i} \neq 0$, без ограничение считаме че $\lambda_{n,k} \neq 0$
  $c_i = b_i - \frac{\lambda_{ik}}{\lambda_{nk}} b_n$ за $i = 1, 2, \dots, n-1$,

Доказателство на основна лема - продължение 2

$$\begin{aligned} c_i = & \; b_i - \frac{\lambda_{ik}}{\lambda_{nk}} b_n = \\ = & \left(\lambda_{i1} - \frac{\lambda_{n1}\lambda_{ik}}{\lambda_{nk}}\right) a_1 + \ldots + \left(\lambda_{i,k-1} - \frac{\lambda_{n,k-1}\lambda_{ik}}{\lambda_{nk}}\right) a_{k-1} + 0a_k \\ \Downarrow & \\ c_i \in & \; \ell(a_1, \ldots, a_{k-1}), \quad \text{за i=1,2,\ldots, n-1} \end{aligned}.$$

$\Rightarrow \quad \{c_1, \ldots, c_{n-1}\} \subset \ell(a_1, \ldots, a_{k-1})$ и $n - 1 > k - 1$.

Прилагаме индукционното предположение $\Rightarrow c_1, \ldots, c_{n-1}$ са ЛЗ

$\exists \;\; \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1} \neq 0, \ldots, 0$, за които $\alpha_1 c_1 + \ldots + \alpha_{n-1} c_{n-1} = \mathcal{O}$.

$$\alpha_1 b_1 + \ldots + \alpha n - 1 b_{n-1} + \mu b_n = \mathcal{O},$$

$$\mu = -(\alpha_1 \frac{\lambda_{1k}}{\lambda_{nk}} + \ldots + \alpha_{n-1} \frac{\lambda_{n-1,k}}{\lambda_{nk}})$$

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \mu \neq 0, \ldots, 0, 0 \Rightarrow b_1, \ldots, b_n \text{ ЛЗ}$$