Задачи за втора контролна работа (28.11.2022)

- Нека $\{x_i\}_{i=0}^n$ са различни точки. Намерете в явен вид алгебричен полином $\Phi_{k,0}(x) \in \pi_{2n+1}$, удовлетворяващ интерполационните условия

$$\begin{array}{l} \Phi_{k,0}(x_i) = 0 \ \text{ за } \ i \in \{0,1,\dots,n\} \setminus \{k\},\ \Phi_{k,0}(x_k) = 1 \\ \Phi'_{k,0}(x_i) = 0 \ \text{ за } \ i = 0,1,\dots,n. \end{array}$$

- Нека $\{x_i\}_{i=0}^n$ са различни точки. Намерете в явен вид алгебричен полином $\Phi_{k,1}(x) \in \pi_{2n+1}$, удовлетворяващ интерполационните условия

$$\begin{array}{l} \Phi_{k,1}(x_i) = 0 \ \text{ за } \ i = 0,1,\dots,n, \\ \Phi'_{k,1}(x_i) = 0 \ \text{ за } \ i \in \{0,1,\dots,n\} \setminus \{k\},\ \Phi'_{k,1}(x_k) = 1. \end{array}$$

- Нека $\{t_i\}_0^m$ и ξ са различни точки, докажете, че

$$((x-\xi)f(x))[\xi, t_1, t_2, \dots, t_m] = f[t_1, t_2, \dots, t_m]\,.$$

- Нека $\{x_i\}_0^n$ са различни точки, различни от нула. Ако $f(x) = \dfrac{1}{x}$, намерете с помощта на формулата на Стефенсон-Поповичу $f[x_0, x_1, \dots, x_n]$.

- Нека $\{x_i\}_0^n$ са различни точки, различни от нула. Ако $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, намерете с помощта на формулата на Стефенсон-Поповичу $f[x_0, x_1, \dots, x_n]$.

- Нека $\{x_i\}_0^n$ са различни точки. Ако $f(x) = x^{n+1}$, намерете с помощта на формулата на Стефенсон-Поповичу $f[x_0, x_1, \dots, x_n]$.

- Нека $\{x_i\}_0^n$ са различни точки. Ако $f(x) = x^{n+2}$, намерете с помощта на формулата на Стефенсон-Поповичу $f[x_0, x_1, \dots, x_n]$.

- Нека $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$. Ако $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, докажете, че

$$\sum_{i=k}^{n} \frac{1}{\omega'(x_i)} \neq 0\,.$$

- Като използвате връзката между разделени и крайни разлики и формулата на Стефенсон-Поповичу, докажете тъждеството

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{2k+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

- Като използвате представянето на крайните разлики и връзката им с разделените разлики, докажете тъждеството

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} j^k = \begin{cases} 0, & \text{за } \ k = 0,1,\dots,n-1 \\ n!, & \text{за } \ k = n. \end{cases}$$

- Като използвате представянето на крайните разлики и връзката им с разделените разлики, докажете тъждеството

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} \binom{m+j}{k} = 0 \ \text{ за всяко } \ m \in \mathbb{N} \ \text{ и } \ k = 0,1,\dots,n-1.$$

- Изведете явна формула за тригонометричния полином от ред n, интерполиращ дадена функция f в точките $x_k = \dfrac{2k\pi}{2n+1}$, $k = 0, 1, \ldots, 2n$.

- Ако $\alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_n$, докажете, че функциите
$$\{e^{\alpha_0 x}, e^{\alpha_1 x}, \ldots, e^{\alpha_n x}\}$$
образуват Чебишова система в интервала $(-\infty, \infty)$.

- Като използвате интерполационен полином с интерполационни възли в точките $0, 1, \ldots, n$, намерете формула за
$$S(n) = \sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2.$$

- Като използвате интерполационен полином с интерполационни възли в точките $0, 1, \ldots, n$, намерете формула за
$$S(n) = \sum_{k=1}^{n} (2k-1)^3.$$

- Ако $0 \leq \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_n$, докажете, че функциите
$$\{x^{\alpha_0}, x^{\alpha_1}, \ldots, x^{\alpha_n}\}$$
образуват Чебишова система в интервала $(0, \infty)$.

- Ако $f(x)$ притежава непрекъсната n-та производна в интервала $[a, b]$, и $f^{(n)}(x) \neq 0$ в (a, b), докажете, че функциите
$$\{1, x, \ldots, x^{n-1}, f(x)\}$$
образуват Чебишова система в интервала $[a, b]$.

- Докажете, че функциите $\{1,\ x,\ x\cos x\}$ образуват Чебишова система в интервала $(0, \frac{\pi}{2}]$.

- Докажете, че функциите $\{1,\ x,\ x\sin x\}$ образуват Чебишова система в интервала $[\frac{\pi}{2}, \pi]$.

- Докажете, че функциите $\{\sin x,\ \sin 2x\}$ не образуват Чебишова система в интервала $[0, \frac{\pi}{2}]$.

- Докажете, че функциите $\{1,\ \cos x\}$ образуват Чебишова система в интервала $[0, \pi]$.

- Докажете, че функциите $\{1,\ \cos x\}$ не образуват Чебишова система в интервала $[0, 2\pi)$.