Квадратурни формули на Гаус, Радо и Лобато

Гаусовите квадратурни формули служат за численото пресмятане на определен интеграл при наличие на теглова функция. Те имат вида

$$\int_a^b \mu(x)f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k).$$

Задача 1: Да се намери квадратурна формула (КФ) на Гаус с два възела при тегло

$\mu(x) = x^2$ в интервала $[-1, 1]$.

Решение: Търсим формула от вида:

$$\int_{-1}^{1} x^2 f(x)dx \approx A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2)$$

От **Лекцията** за Гаусови квадратурни формули знаем, че възлите x_1 и x_2 на КФ на Гаус са корени на полинома $p(x) = x^2 + mx + n$, който е ортогонален на полиномите от първа и нулева степен при тегло $\mu(x) = x^2$ в интервала $[-1, 1]$. Определяме коефициентите на полинома от условията за ортогоналност на $p(x)$ на базисните полиноми в π_1 и π_0. Получаваме следната система:

$$\left| \begin{array}{l} \displaystyle\int_{-1}^{1} x^2(x^2 + mx + n)x dx = 0 \\ \displaystyle\int_{-1}^{1} x^2(x^2 + mx + n).1 dx = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \dfrac{2m}{5} = 0 \\ \dfrac{2}{5} + \dfrac{2n}{3} = 0 \end{array} \right. \Rightarrow m = 0, n = -\frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow p(x) = x^2 - \frac{3}{5} = 0 \;\Rightarrow x_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}}, x_2 = \sqrt{\frac{3}{5}}$$

Следователно Гаусовата квадратурна формула има вида:

$$Q(f) = A_1 f\left(-\sqrt{3/5}\right) + A_2 f\left(\sqrt{3/5}\right).$$

Коефициентите A_1 и A_2 определяме от условията, че $Q(f)$ е точна полиномите от първа и нулева степен при тегло $\mu(x) = x^2$ в интервала $[-1, 1]$. Т. е. $Q(f)$ е точна за $f(x) = x$ и $f(x) = 1$. Получаваме система уравнения:

$$\left| \begin{array}{l} \int_{-1}^{1} x^2.x dx = -\sqrt{3/5}.A_1 + \sqrt{3/5}.A_2 \\ \int_{-1}^{1} x^2.1 dx = A_1 + A_2 \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} A_1 = A_2 \\ 2A_1 = \frac{2}{3} \end{array} \right. \Rightarrow A_1 = A_2 = \frac{1}{3}$$

Следователно търсената Гаусова квадратурна формула е

$$Q(f) = \frac{1}{3} f\left(-\sqrt{3/5}\right) + \frac{1}{3} f\left(\sqrt{3/5}\right).$$

Задача 2: Да се намери дясна квадратурна формула на Радо с два възела в интервала

[0, 1] при тегло $\mu(x) = x$.

Решение: Търсим формула от вида:

$$\int_0^1 x f(x) dx \approx A_1 f(x_1) + A_2 f(1)$$

Съгласно теоремите от **Лекция** ($m = n = 1$), фиксираният възел е десния край на интервала $t_1 = 1$, а възелът x_1 е корен на полином $p(x) = x - x_1$, който е ортогонален на полиномите от нулева степен при тегло $-\mu(x)\sigma(x) = x(1-x)$ в интервала $[0, 1]$. От условието за ортогоналност намираме x_1

$$\int_0^1 x(1-x)(x - x_1).1 dx = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}$$

Следователно дясната КФ на Радо има вида

$$Q(f) = A_1 f\left(\frac{1}{2}\right) + A_2 f(1)$$

Коефициентите A_1 и A_2 определяме от условията, че $Q(f)$ е точна полиномите от първа и нулева степен при тегло $\mu(x) = x$ в интервала [0, 1]. Т. е. $Q(f)$ е точна за $f(x) = x$ и $f(x) = 1$. Получаваме система уравнения:

$$\left| \begin{array}{l} \int_0^1 x.x dx = \frac{1}{2}.A_1 + A_2 \\ \int_0^1 1.x dx = A_1 + A_2 \end{array} \right. \Rightarrow A_1 = \frac{1}{3}, A_2 = \frac{1}{6}$$

Следователно търсената дясна квадратурна формула на Радо е

$$Q(f) = \frac{1}{3} f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{6} f(1).$$

Задача 3: Да се намери квадратурна формула на Лобато с три възела в интервала $[-1, 1]$ при тегло $\mu(x) = 1$.

Решение: Търсим формула от вида:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx A_1 f(-1) + A_2 f(x_2) + A_3 f(1)$$

Съгласно **Лекцията** (m = 2, n = 1), възелът x_2 е корен на полином $p(x) = x - x_2$, който е ортогонален на полиномите от нулева степен при тегло $-\mu(x)\sigma(x) = (x+1)(1-x)$ в интервала $[-1, 1]$. От условието за ортогоналност намираме x_2

$$\int_{-1}^{1} (1 - x^2)(x - x_2).1dx = 0 \;\; => x_2 = 0$$

Следователно квадратурната формула на Лобато има вида

$$Q(f) = A_1 f(-1) + A_2 f(0) + A_3 f(1)$$

Коефициентите A_1, A_2 и A_3 определяме от условията, че $Q(f)$ е точна полиномите от нулева, първа и втора степен при тегло $\mu(x) = 1$ в интервала [-1, 1] (АСТ(Q) = 3). Т. е. $Q(f)$ е точна за $f(x) = 1,\; f(x) = x$ и $f(x) = x^2$. Получаваме система уравнения:

$$\left| \begin{array}{l} \int_{-1}^{1} dx = 1.A_1 + 1.A_2 + 1.A_3 \\ \int_{-1}^{1} xdx = -1.A_1 + 0.A_2 + 1.A_3 \qquad => A_1 = A_3 = \frac{1}{3}, A_2 = \frac{4}{3}. \\ \int_{-1}^{1} x^2 dx = (-1)^2.A_1 + 0^2.A_2 + 1^2.A_3 \end{array} \right.$$

Следователно търсената квадратурна формула на Лобато е

$$Q(f) = \frac{1}{3} f(-1) + \frac{4}{3} f(0) + \frac{1}{3} f(1).$$

Задачи за самостоятелна работа:

1) Да се намери квадратурна формула (КФ) на Гаус с два възела при тегло $\mu(x) = 1 - x^2$ в интервала $[-1, 1]$;
2) Да се намери лява квадратурна формула на Радо с два възела в интервала $[0, 1]$ при тегло $\mu(x) = x$;
3) Да се намери квадратурна формула на Лобато с три възела в интервала $[0, 1]$ при тегло $\mu(x) = 1 - x$.

Решения на задачите за самостоятелна работа:

Задача 1: Да се намери квадратурна формула (КФ) на Гаус с два възела при тегло

$\mu(x) = 1 - x^2$ в интервала $[-1, 1]$.

Решение: Търсим формула от вида:

$$\int_{-1}^{1} (1 - x^2) f(x) dx \approx A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2)$$

От **Лекцията** за Гаусови квадратурни формули знаем, че възлите x_1 и x_2 на КФ на Гаус са корени на полинома $p(x) = x^2 + mx + n$, който е ортогонален на полиномите от първа и нулева степен при тегло $\mu(x) = x^2$ в интервала $[-1, 1]$. Определяме коефициентите на полинома от условията за ортогоналност на $p(x)$ на базисните полиноми в π_1 и π_0. Получаваме следната система:

$$\left| \begin{array}{l} \int_{-1}^{1} (1 - x^2)(x^2 + mx + n) x dx = 0 \\ \int_{-1}^{1} (1 - x^2)(x^2 + mx + n).1 dx = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \frac{4m}{15} = 0 \\ \frac{4}{15} + \frac{4n}{3} = 0 \end{array} \right. \Rightarrow m = 0, n = -\frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow p(x) = x^2 - \frac{1}{5} = 0 \ \Rightarrow x_1 = -\frac{\sqrt{5}}{5}, x_2 = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

Следователно Гаусовата квадратурна формула има вида:

$$Q(f) = A_1 f\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) + A_2 f\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right).$$

Коефициентите A_1 и A_2 определяме от условията, че $Q(f)$ е точна полиномите от първа и нулева степен при тегло $\mu(x) = x^2$ в интервала $[-1, 1]$. Т. е. $Q(f)$ е точна за $f(x) = x$ и $f(x) = 1$. Получаваме система уравнения:

$$\left|\begin{array}{l} \int_{-1}^{1} (1 - x^2).xdx = (-\sqrt{5}.A_1 + \sqrt{5}.A_2)/5 \\ \int_{-1}^{1} (1 - x^2).1dx = A_1 + A_2 \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} A_1 = A_2 \\ 2A_1 = \frac{4}{3} \end{array}\right. \Rightarrow A_1 = A_2 = \frac{2}{3}$$

Следователно търсената Гаусова квадратурна формула е

$$Q(f) = \frac{2}{3} f\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) + \frac{2}{3} f\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right).$$

Задача 2: Да се намери лява квадратурна формула на Радо с два възела в интервала

$[0, 1]$ при тегло $\mu(x) = x$.

Решение: Търсим формула от вида:

$$\int_{0}^{1} xf(x)dx \approx A_1 f(0) + A_2 f(x_2)$$

Съгласно теоремите от **Лекция** ($m = n = 1$), фиксираният възел е десния край на интервала $t_1 = 1$, а възелът x_1 е корен на полином $p(x) = x - x_2$, който е ортогонален на полиномите от нулева степен при тегло $-\mu(x)\sigma(x) = x^2$ в интервала $[0, 1]$. От условието за ортогоналност намираме x_1

$$\int_{0}^{1} x^2(x - x_2).1dx = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{3}{4}$$

Следователно дясната КФ на Радо има вида

$$Q(f) = A_1 f(0) + A_2 f\left(\frac{3}{4}\right)$$

Коефициентите A_1 и A_2 определяме от условията, че $Q(f)$ е точна полиномите от първа и нулева степен при тегло $\mu(x) = x$ в интервала $[0,1]$. Т. е. $Q(f)$ е точна за $f(x) = x$ и $f(x) = 1$. Получаваме система уравнения:

$$\left|\begin{array}{l}\int_0^1 x.x dx = 0.A_1 + \frac{3}{4}A_2 \\ \int_0^1 1.x dx = A_1 + A_2\end{array}\right. \Rightarrow A_2 = \frac{4}{9}, A_1 = \frac{1}{18}$$

Следователно търсената лява квадратурна формула на Радо е

$$Q(f) = \frac{1}{18}f(0) + \frac{4}{9}f\left(\frac{3}{4}\right).$$

Задача 3: Да се намери квадратурна формула на Лобато с три възела в интервала [0, 1] при тегло $\mu(x) = 1 - x$.

Решение: Търсим формула от вида:

$$\int_0^1 (1-x)f(x)dx \approx A_1 f(0) + A_2 f(x_2) + A_3 f(1)$$

Съгласно **Лекцията** (m = 2, n = 1), възелът x_2 е корен на полином $p(x) = x - x_2$, който е ортогонален на полиномите от нулева степен при тегло $-\mu(x)\sigma(x) = x(1-x)^2$ в интервала [0, 1]. От условието за ортогоналност намираме x_2

$$\int_0^1 x(1-x)^2(x-x_2).1dx = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{2}{5}$$

Следователно квадратурната формула на Лобато има вида

$$Q(f) = A_1 f(0) + A_2 f\left(\frac{2}{5}\right) + A_3 f(1)$$

Коефициентите A_1, A_2 и A_3 определяме от условията, че $Q(f)$ е точна полиномите от нулева, първа и втора степен при тегло $\mu(x) = 1$ в интервала [0,1] (АСТ(Q) = 3). Т. е. $Q(f)$ е точна за $f(x) = 1,\ f(x) = x$ и $f(x) = x^2$. Получаваме система уравнения:

$$\left| \begin{array}{l} \int_0^1 (1-x)dx = 1.A_1 + 1.A_2 + 1.A_3 \\ \int_0^1 (1-x)xdx = 0.A_1 + \frac{2}{5}.A_2 + 1.A_3 \qquad => A_1 = \frac{1}{8}, A_2 = \frac{25}{72}, A_3 = \frac{1}{36}. \\ \int_0^1 (1-x)x^2dx = 0^2.A_1 + \left(\frac{2}{5}\right)^2.A_2 + 1^2.A_3 \end{array} \right.$$

Следователно търсената квадратурна формула на Лобато е

$$Q(f) = \frac{1}{8}f(0) + \frac{25}{72}f\left(\frac{2}{5}\right) + \frac{1}{36}f(1).$$