30. Теорема на Ферма. Теореми за средните стойности (Рол, Лагранж и Коши). Формула на Тейлър

0. ***Теорема***: на Вайерщрас:
Ако функция f е дефинирана и непрекъсната в крайния и затворен интервал $[a, b]$, то тя е ограничена в него и достига своя максимум и минимум.

1. Теорема на Ферма
Деф: Нека $f: D \to \mathbb{R}$, където $D \subseteq \mathbb{R}$.

a. Казваме, че x_0 е **точка на локален минимум** за $f(x)$, ако:
$\exists \delta > 0: \quad (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset D$ и $f(x_0) \leq f(x), \qquad x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

b. Казваме, че x_0 е **точка на локален максимум** за $f(x)$, ако:
$\exists \delta > 0: \quad (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset D$ и $f(x_0) \geq f(x), \qquad x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

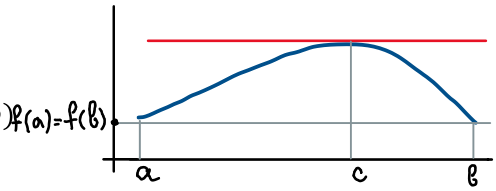
Казваме, че x_0 е **точка на локален екстремум** за $f(x)$, ако тя е точка на локален минимум или максимум.

Теорема: (НУ за локален екстремум, Ферма)
Ако x_0 е точка на локален екстремум за функцията $f(x)$ и $f(x)$ е диференциуема в x_0, то $f'(x_0) = 0$

Доказателство:
Понеже $f(x)$ е диференциуема в т. x_0, то съществува границата:
$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$
Нека x_0 е точка на локален минимум за $f(x)$. Тогава $\exists \delta > 0$, т.ч. интервалът $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ се съдържа в дефиниционната област на функцията и
$f(x_0) \leq f(x), \qquad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$
Тогава за всяко $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), x \neq x_0$ имаме, че:
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \begin{cases} \leq 0, & x \in (x_0 - \delta, x_0) \\ \geq 0, & x \in (x_0, x_0 + \delta) \end{cases}$$
Следователно:
$$\lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \quad \text{и} \quad \lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$
Получихме, че:
$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \underbrace{\lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\leq 0} = \underbrace{\lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\geq 0}$$
То $f'(x_0)$ е както ≤ 0, така и ≥ 0, следователно $f'(x_0) = 0$.

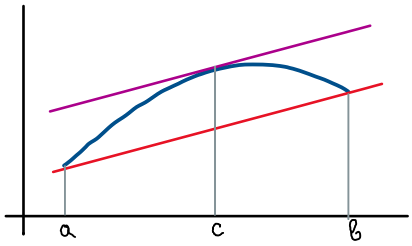
Нека x_0 е тоочка на локален максимум за $f(x)$. Тогава x_0 е точка на локален минимум за $-f(x)$ и според вече доказаното $(-\mathrm{f})'(\mathrm{x}_0) = 0$, т.е. $-\mathrm{f}'(\mathrm{x}_0) = 0$. Следователно $f'(x_0) = 0$.

2. Теореми за средните стойности
Теорема 1: Теорема на Рол
Нека $f(x)$ е непрекъсната в $[a, b]$ и диференциуема в (a, b).
Ако $f(a) = f(b)$, то $\exists c \in (a, b): f'(c) = 0$



Доказателство:
Щом $f(x)$ е непрекъсната в $[a, b]$, то от теоремата на Вайерщрас $f(x)$ има най-голяма (НГ) и най-малка (НМ) стойност. Ако поне една от тях се достига в т. $c \in (a, b)$, то тя непременно е точка на локален екстремум. Следователно от Теоремата на Ферма имаме, че $f'(c) = 0$

Ако нито НГ, нито НМ стойност на $f(x)$ не се достигат в т. от (a, b), то тогава това става в т. а или в т. b. Но $f(a) = f(b)$, следователно:
$$f_{НГ} = f_{НМ} \Rightarrow f(x) \equiv const \;\Rightarrow f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b)$$



Теорема 2: Теорема за крайните нараствания, Лагранж

Нека $f(x)$ е непрекъсната в $[a, b]$ и диференцуема в (a, b).

Тогава $\exists c \in (a, b)$: $f(b) - f(a) = f'(x)(b - a)$

Доказателство:

Ще сведем твърдението до теоремата на Рол. Нека $h(x) \coloneqq f(x) - kx, \quad x \in [a, b]$, като определяме константата k да е т.ч. $h(a) = h(b)$. Имаме:

$$h(a) = h(b), \text{т.е. } f(a) - ka = f(b) - kb \iff k = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Щом $f(x)$ е непрекъсната в $[a, b]$ и диференциуема в (a, b), то и $h(x)$ е такава.

$h(x)$ удовлетворява предположенията на теоремата на Рол. Прилатаме я и получаваме, че

$$\exists c \in (a, b): \quad h'(c) = 0$$

Пресмятаме, че $h'(x) = f'(x) - k$, следователно $f'(c) - k = 0$, т.е. $f'(c) = k = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Теорема 3: Обобщена теорема за крайните нараствания, Коши

Нека $f(x)$ и $g(x)$ са непрекъснати в $[a, b]$ и диференцуеми в (a, b).

Нека $g'(x) \neq 0$ при $x \in (a, b)$. Тогава

$$\exists c \in (a, b): \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Доказателство:

Ще сведем твърдението до теоремата на Рол. Нека $h(x) \coloneqq f(x) - k.g(x), \ \ x \in [a, b]$, като определяме константата k така, че $h(a) = h(b)$. Имаме:

$$h(a) = h(b) \text{ т.е. } f(a) - kg(a) = f(b) - kg(b)$$

$$\iff k\big[g(b) - g(a)\big] = f(b) - f(a) \xLeftrightarrow{g(b)-g(a)\neq 0} k = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Щом $f(x)$ и $g(x)$ са непрекъснати в $[a, b]$ и диференциуеми в (a, b), то и $h(x)$ е такава.

$h(x)$ удовлетворява предположенията на теоремата на Рол. Прилатаме я и получаваме, че

$$\exists c \in (a, b): \quad h'(c) = 0$$

Пресмятаме, че $h'(x) = f'(x) - kg'(x)$. Следователно

$$f'(c) - kg'(c) = 0, \text{т.е. } \frac{f'(c)}{g'(c)} = k = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

Заб.

От направените предположения за $g(x)$ имаме, че $g(a) \neq g(b)$, защото в противен случай от теоремата на Рол би следвало, че $\exists c \in (a, b)$: $g'(c) = 0$, което е в противоречие с направеното предположение, че $g'(x) \neq 0$ при $x \in (a, b)$.

3. Формула на Тейлър

Теорема 4: Формула на Тейлър

Нека $f(x)$ притежава производни до ред $n + 1$ включително в $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, където $\delta > 0$.

Тогава за всяко $x \in (x_0 - \delta, \ x_0 + \delta)$ съществува c между x_0 и x, т.ч.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

Разписана има вида:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

Доказателство

Лема 1: Нека $f(x)$ притежава производна от ред n в т. x_0. Тогава

$$T_n(x) \coloneqq \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Притежава свойството $(T_n)^{(i)}(x_0) = f^{(i)}(x_0), \quad i = 0, 1, \dots, n.$

Д-во: Имаме

$$(\mathrm{T_n})^{(i)}(x) = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\right)^{(i)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\left((x-x_0)^k\right)^{(i)}$$

$$= \textstyle\sum_{k=i}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} k(k-1)\dots(k-(i-1))(x-x_0)^{k-i}$$

Следователно $(T_n)^{(i)}(x_0) = f^{(i)}(x_0)$

Лема 1: Нека $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ притежават производни до ред $n+1$ включително в $(\mathrm{x_0}-\delta, \mathrm{x_0}+\delta)$, където $\delta > 0$. Нека още

$\varphi^{(i)}(x_0) = \psi^{(i)}(x_0) = 0, \qquad i = 0, 1, \dots, n$

А $\psi^{(i)}(x) \neq 0$ за $x \in (\mathrm{x_0}-\delta, \mathrm{x_0}+\delta)$, $\mathrm{x} \neq \mathrm{x_0}$ и $i = 0, 1, \dots, n+1$.

Тогава за всяко $x \in (\mathrm{x_0}-\delta, \mathrm{x_0}+\delta)$, $\mathrm{x} \neq \mathrm{x_0}$ съществува c между x_0 и x, т.ч.

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi^{(n+1)}(c)}{\psi^{(n+1)}(c)}$$

Д-во: Нека $x \in (\mathrm{x_0}-\delta, \mathrm{x_0}+\delta)$, $\mathrm{x} \neq \mathrm{x_0}$ е произволно фиксирано. Прилагаме обобщената теорема за крайните нараствания на Коши (об.т.кр.н.) към φ и ψ в интервала с краища x_0 и x. Получаваме, че съществува c_1, между x_0 и x, т.ч.

$$\underbrace{\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{\psi(x)-\psi(x_0)}}_{=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}} = \frac{\varphi'(c_1)}{\psi'(c_1)} = \frac{\varphi'(c_1)-\varphi'(x_0)}{\psi'(c_1)-\psi'(x_0)}$$

Аналогично прилагаме об.т.кр.н. към φ' и ψ' в интервала с краища x_0 и c_1. Получаваме, че съществува c_2, между x_0 и c_1, т.ч.

$$\frac{\varphi'(c_1)-\varphi'(x_0)}{\psi'(c_1)-\psi'(x_0)} = \frac{\varphi''(c_2)}{\psi''(c_2)} = \frac{\varphi''(c_2)-\varphi''(x_0)}{\psi''(c_2)-\psi''(x_0)}$$

Продължавайки така получаваме, че съществуват т. $c_1, c_2, \dots, c_{n+1}$ между x_0 и x, т.ч.

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{\psi(x)-\psi(x_0)} = \frac{\varphi'(c_1)}{\psi'(c_1)} =$$

$$= \frac{\varphi'(c_1)-\varphi'(x_0)}{\psi'(c_1)-\psi'(x_0)} = \frac{\varphi''(c_2)}{\psi''(c_2)} =$$

$$= \frac{\varphi''(c_2)-\varphi''(x_0)}{\psi''(c_2)-\psi''(x_0)} = \frac{\varphi'''(c_3)}{\psi'''(c_3)} =$$

$$\dots$$

$$= \frac{\varphi^{(n)}(x)-\varphi^{(n)}(x_0)}{\psi^{(n)}(x)-\psi^{(n)}(x_0)} = \frac{\varphi^{(n+1)}(c_{n+1})}{\psi^{(n+1)}(c_{n+1})}$$

Твърдението на Теорема 4 е тривиално за $x = x_0$, свежда се до $f(x_0) = f(x_0)$.

Нека $x \neq x_0$. Прилагаме Лема 2 с $\varphi(x) \coloneqq f(x) - T_n(x)$ и $\psi(x) \coloneqq (x-x_0)^{n+1}$. Функцията $\varphi(x)$ удовлетворява предположенията в Лема 2 благодарение на Лема 1, а относно $\psi(x)$ имаме:

$\psi^{(i)}(x) = (n+1)n\dots(n-i+2)(x-x_0)^{n-i+1}, \qquad i = 0, 1, \dots, n+1$

Лема 2 влече, че съществува c между x_0 и x, т.ч.

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi^{(n+1)}(c)}{\psi^{(n+1)}(c)} \Rightarrow \varphi(x) = \frac{\varphi^{(n+1)}(c)}{\psi^{(n+1)}(c)}\psi(x)$$

Следователно

$$f(x) - T_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$