I фн: 82134 T 16

Смяна на базиса

Нека имаме $e_1, \dots, e_n$ - базис на V над F
и $b_1, \dots, b_n$ - друг базис на V

$b_1 = \lambda_{11} e_1 + \dots + \lambda_{n1} e_n$

$\dots$

$b_n = \lambda_{1n} e_1 + \dots + \lambda_{nn} e_n$

тогава $T = T_{(e) \to (b)} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} b_1 & b_2 & b_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \dots & \lambda_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} \dots & \lambda_{nn} \end{pmatrix} \end{array}$

е матрица на прехода от (e) в (b)

Свойства:

- матрицата на прехода е обратима ($T_{(e)\to(b)} \Rightarrow T_{(b)\to(e)}$)
- всяка обратима матрица е матрица на прехода от базиса (e) към друг
- ако имаме 3 базиса (e), (a) и (b), матриците на прехода работят по следния начин:

$$Q_{(e)\to(b)} = T_{(e)\to(a)} \cdot U_{(a)\to(b)}$$

$$\begin{tikzcd} & e \arrow[dl, "T"'] \arrow[dr, "Q"] & \\ a \arrow[rr, "U"] & & b \end{tikzcd}$$

Аналогично на матрица на линейно изображение, ако имаме $v = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = \mu_1 b_1 + \dots + \mu_n b_n$ и $T = T_{(e)\to(b)}$ тогава $T \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$

ФН: 82134

T | Нека $\varphi: V \to V$ и имаме базиси (e) и (b)

и $T = T_{(e)\to(b)}$, A – матрица на φ спрямо (e),

B – матрица на φ спрямо (b)

тогава е изпълнено $T^{-1}AT = B$

$$\begin{tikzcd}
 & \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix} \arrow[r, "A"] \arrow[d, bend right, "T^{-1}"'] & \begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix} \arrow[d, bend right, "T^{-1}"'] & \\
V \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \varphi(V) \arrow[ul] \arrow[dl] \\
 & \begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix} \arrow[r, "B"] \arrow[u, bend right, "T"'] & \begin{pmatrix}\mu_1\\ \vdots\\ \mu_n\end{pmatrix} \arrow[u, bend right, "T"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{pmatrix}\mu_1\\ \vdots\\ \mu_n\end{pmatrix} = B\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix} \quad 1)$$

$$\begin{pmatrix}\mu_1\\ \vdots\\ \mu_n\end{pmatrix} = T^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix} = T^{-1}A\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix} = T^{-1}AT\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix} \quad 2)$$

от 1) и 2) $\Rightarrow B = T^{-1}AT$

Подобни матрици

$A, B \in M_{n\times n}(F)$

$A \sim B \iff \exists\, T \in M_{n\times n}(F)$ – обратима

и $B = T^{-1}AT$

Свойства: (релация на еквивалентност)

- $A \sim A$
- $A \sim B \Rightarrow B \sim A$
- $A \sim B$ и $B \sim C \Rightarrow A \sim C$

О/озн: 82134

$f_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ – характеристичен полином

ако $A \sim B \Rightarrow f_A(\lambda) = f_B(\lambda)$

Доказателство:

$$\det(B - \lambda E) = \det(T^{-1}AT - \lambda E) = \det(T^{-1}AT - \lambda T^{-1}ET) =$$

$$= \det(T^{-1}(A - \lambda E)T) = \cancel{\det} T^{-1} \cdot \det(A - \lambda E) \cdot \cancel{\det} T =$$

$$= \det(A - \lambda E)$$