# Комплексни числа, полета

доц. Евгения Великова

Октомври 2020

# Основни числови множества

- $\mathbb{N}$ - *естествените числа* $1, 2, 3, \ldots$ - събиране, умножение
- $\mathbb{Z}$ - *цели числа* - събиране, <u>изваждане</u>, умножение
- $\mathbb{Q}$ - *рационалните числа* - събиране, изваждане, умножение, <u>деление</u>
- $\mathbb{R}$ - *реални числа* - събиране, изваждане, умножение и деление, <u>непрекъснатост</u>

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

## Комплексни числа

Нека $\mathbb{C}$ е множеството от наредените двойки реални числа

$$\mathbb{C} = \{z = (a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

и в него действия събиране и умножение по следния начин:

$$\begin{array}{rcccl} z_1 + z_2 & = & (a_1, b_1) + (a_2, b_2) & = & (a_1 + a_2, b_1 + b_2) \\ z_1 . z_2 & = & (a_1, b_1) \; . \; (a_2, b_2) & = & (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + b_1 a_2) \end{array}$$

Елементите на това множество, разглеждано с тези действия събиране и умножение, ще наричаме **комплексни числа**.

Пример:

$$\begin{aligned} (3,7) + (-2,4).(1,5) &= (3,7) + (-2.1 - 4.5 \;,\; (-2).5 + 4.1) = \\ &= (3,7) + (-22, -6) = (-19, 1). \end{aligned}$$

## Свойства на събирането и на умножението

1. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ - *комутативност* на събирането,
2. $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$ - *асоциативност* на събирането,
3. $z_1.z_2 = z_2.z_1$ - *комутативност* на умножението,
4. $z_1.(z_2.z_3) = (z_1.z_2).z_3$ - *асоциативност* на умножението,
5. $z_1.(z_2 + z_3) = z_1.z_2 + z_1.z_3$ - *дистрибутивно* свойство.

*Доказателство:* Дистрибутивния закон

$$
\begin{aligned}
z_1.(z_2 + z_3) &= (a_1, b_1).[(a_2, b_2) + (a_3, b_3)] = \\
&= (a_1, b_1).(a_2 + a_3, b_2 + b_3) = \\
&= (a_1 a_2 + a_1 a_3 - b_1 b_2 - b_1 b_3\ ,\ b_1 a_2 + b_1 a_3 + a_1 b_2 + a_1 b_3)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z_1 z_2 + z_1 z_3 &= (a_1, b_1).(a_2, b_2) + (a_1, b_1).(a_3, b_3) = \\
&= (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b2 + a_2 b_1) + (a_1 a_3 - b_1 b_3, a_1 b_3 + a_3 b_1) = \\
&= (a_1 a_2 - b_1 b_2 + a_1 a_3 - b_1 b_3\ ,\ a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_1 b_3 + a_3 b_1)
\end{aligned}
$$

# Неутрални елементи, изваждане

- $(a,b)+(0,0)=(a,b) \;\Rightarrow\; (0,0)$ - неутрален относно събирането (**нула** в $\mathbb{C}$)
- $(a,b).(1,0)=(a-0,b+0)=(a,b) \;\Rightarrow\; (1,0)$ - неутрален относно умножението ( **единица** в $\mathbb{C}$)
- $(a,b)+(-a,-b)=(0,0) \;\Rightarrow\; (-a,-b)=-z$ - ***противоположно*** на комплексното число $z=(a,b)$
- $z+(-z)=(a,b)+(-a,-b)=(0,0) \;\Rightarrow\; -(-z)=z$.

### изваждане

Ако $z_1=(a_1,b_1)\in\mathbb{C}$ и $z_2=(a_2,b_2)\in\mathbb{C}$, тогава уравнението $t+z_1=z_2$ има единствено решение $t=(a_2-a_1,b_2-b_1)$.

$t=z_2-z_1=(a_2-a_1,b_2-b_1)$- **разлика** на $z_2$ и $z_1$.

# Пример

Да се реши уравнението $(4,-2)(3,5)+t=(1,5)-(2,3).(-3,7)$
Последователно пресмятаме

$$\begin{aligned}(4,-2)(3,5)+t &= (1,5)-(2,3).(-3,7)\\ (22,14)+t &= (1,5)-(-27,5)\\ (22,14)+t &= (28,0)\\ t &= (28,0)-(22,14)\\ t &= (6,-14)\end{aligned}$$

$\tilde{R} = \{(k, 0) \mid k \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$.

- $(k, 0) + (s, 0) = (k + s, 0) \in \tilde{R}$,
- $(k, 0).(s, 0) = (k.s - 0.0, k.0 + 0.s) = (ks, 0) \in \tilde{R}$.

**$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$**

$\chi : \mathbb{R} \to \ \tilde{R} = \{(k, 0) \mid k \in \mathbb{R}\}$, където $\chi(k) = (k, 0)$,

- $\chi$ е взаимно еднозначно и обратимо изображение
- $\chi(k + s) = (k + s, 0) = (k, 0) + (s, 0) = \chi(k) + \chi(s)$;
- $\chi(k.s) = (k.s, 0) = (k, 0).(s, 0) = \chi(k).\chi(s)$.

$\mathbb{R}$ утъждествяваме с $\tilde{R} \subset \mathbb{C}$ и затова приемаме, че $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
Ако $k \in \tilde{R}$, записваме $(k, 0) = k \in \mathbb{R}$.

# алгебричен запис (II)

Нека $(k, 0) = k \in \mathbb{R}$,
$\Rightarrow \quad k(a, b) = (k, 0).(a, b) = (ka - 0.b, 0.a + kb) = (ka, kb)$.

## Имагинерна единица

Нека $i = (0, 1)$ - *имагинерна единица* $\boxed{i^2 = -1}$

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (0 - 1, 0 + 0) = (-1, 0) = -1 \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0).(0, 1) = a + bi$$

Записваме $z = (a, b)$ като $a + bi$, $a = \mathtt{Re}(z)$, $\quad b = \mathtt{Im}(z)$

$$(a + bi).(c + di) = ac + adi + bci + bd \underbrace{i^2}_{-1} = ac - bd + (ad + bc)i$$

# Степени на имагинерната единица

$$
\begin{aligned}
&i^2 = -1\\
&i^3 = i^2.i = -1.i = -i\\
&i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1\\
&i^5 = (i^4)i = i\\
&\ldots\ldots\ldots\\
&i^{47} = i^{4.11}.i^3 = (i^4)^{11}i^3 = 1.i^3 = -i
\end{aligned}
$$

Пример: Да се пресметне $i^{2378}$. Делим $2378 : 4 = 594$(остатък 2).

$$i^{2378} = \underbrace{(i^4)^{594}}_{=1}.i^2 = i^2 = -1$$

Пример: Да се пресметне $(\sqrt{3} - i)^5$. Използваме Нютонов бином

$$
\begin{aligned}
(\sqrt{3} - i)^5 &= (\sqrt{3})^5 - 5(\sqrt{3})^4 i + 10(\sqrt{3})^3 i^2 - 10(\sqrt{3})^2 i^3 + 5(\sqrt{3}) i^4 - i^5\\
&= 9\sqrt{3} - 45i - 30\sqrt{3} + 30i + 5\sqrt{3} - i = -16\sqrt{3} - 16i
\end{aligned}
$$

# Примери

1. Да се пресметне
$$(1+3i).(2+4i)+(-1+2i) = (2+4i+6i+12i^2)+(-1+2i) = \\ = -10+10i-1+2i = -11+12i$$
2. Да се реши уравнението $5-4i+2z=(1+2i)^3$
$$\begin{aligned} 5-4i+2z &= (1+2i)^3 \\ 2z &= (1+6i+12i^2+8i^3)-(5-4i) \\ 2z &= -11-2i-5+4i \\ 2z &= -16+2i \quad |:2 \\ z &= -8+i \end{aligned}$$
3. Търсим $z$, за което $z^2=7-24i$. Нека $z=a+bi$
$$\begin{aligned} (a+bi)^2 &= a^2-b^2+2abi = 7-24i \\ &\Rightarrow \left| \begin{array}{l} a^2-b^2=7 \\ ab=-12 \end{array} \right. \text{ (, заместваме } b=-\tfrac{12}{a}) \\ &\Rightarrow a^4-7a^2-144=0 \Rightarrow a=\pm 4 \in \mathbb{R} \\ &\Rightarrow z_1=4-3i; \quad z_2=-4+3i \end{aligned}$$

$\overline{z}$ - ***комплесно спрегнато*** на $z$, където $\overline{z} = \overline{a + bi} = a - bi$

## свойства на спрягането

- $\overline{\overline{z}} = z$;
- $z = \overline{z} \quad \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$ ;
- $z + \overline{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a = 2\mathtt{Re}(z)$;
- $z - \overline{z} = (a + bi) - (a - bi) = 2bi = 2\mathtt{Im}(z)i$;
- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$;
- $\overline{z_1 . z_2} = \overline{z_1} . \overline{z_2}$;
- $z.\overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}$ и за всяко $z \neq 0$ е изпълнено, че $z.\overline{z} > 0$.

нека $z \in \mathbb{C} \;\Rightarrow\; z.\overline{z} \in \mathbb{R}$ и когато $z \neq 0 \Rightarrow z.\overline{z} > 0$

### модул

$|z| = |a + bi| = \sqrt{z.\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$ - модул на $|z|$.

Ако $z = a + 0i \in \mathbb{R}, \quad \Rightarrow |a + 0i| = \sqrt{a^2} = |a|$.

### свойства на модула

- $|z_1.z_2| = |z_1|.|z_2,|$ следва от $z_1 z_2.\overline{z_1.z_2} = (z_1\overline{z_1}).(z_2\overline{z_2})$
- $|z| = |-z|$.
- $|z| = |\overline{z}|$

### Example

$|1 - i| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$, и $|3 + 2i| = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$.

$$|(1 - i) + (3 + 2i)| = |4 + i| = \sqrt{16 + 1} = \sqrt{17} \neq |1 - i| + |3 + 2i|.$$

# обратен елемент

Нека $z = a + bi \neq 0 \quad \Rightarrow \quad z.\overline{z} = |z|^2 \neq 0, (\in \mathbb{R})$

$$\Rightarrow \exists \frac{1}{|z|^2} \;\Rightarrow\; z.\left(\frac{1}{|z|^2}.\overline{z}\right) = 1 = (a+bi).\left(\frac{a-bi}{a^2+b^2}\right)$$

## обратен елемент

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} = \frac{1}{|z|^2}.\overline{z} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}, \text{ когато } \; z \neq 0$$

$$\frac{1}{2+7i} = \frac{2-7i}{(2+7i)(2-7i)} = \frac{2-7i}{4+49} = \frac{2}{53} - \frac{7}{53}i$$

## деление

Нека $0 \neq z_1 \in \mathbb{C}$ и $z_2 \in \mathbb{C}$, тогава уравнението $z_1.t = z_2$ има единствено решение (**частно на комплесните числа**)

$$t = z_2.z_1^{-1} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{z_2.\overline{z_1}}{z_1.\overline{z_1}} = \frac{z_2.\overline{z_1}}{|z_1|^2}.$$

$$\frac{5-2i}{-2+3i} = \frac{(5-2i)(-2-3i)}{(-2+3i)(-2-3i)} = \frac{-10-15i+4i+6i^2}{4+9} = -\frac{16}{13} - \frac{11}{13}i$$

В $\mathbb{C}$ са дефинирани събиране, изваждане, умножение и деление и $\mathbb{C}$ се нарича ***поле на комплесните числа***.

# Примери

## Example

$$
\begin{aligned}
& z.(1-4i)+\overline{2-5i}=7+4i \\
& \Rightarrow z.(1-4i)=7+4i-(2+5i) \\
& \Rightarrow z=\frac{5-i}{1-4i}=\frac{(5-i)(1+4i)}{(1-4i)(1+4i)} \\
& \Rightarrow z=\frac{(9+19i)}{17}
\end{aligned}
$$

## Example

$$z^2-(4+11i)z-25+25i=0,$$

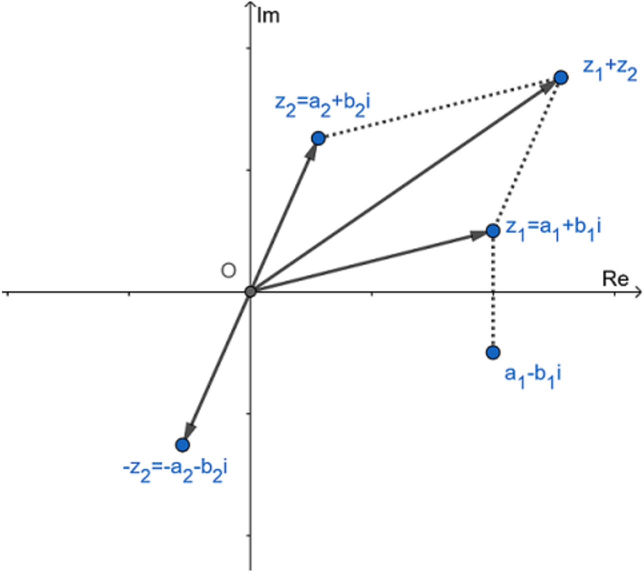
$$D=(4+11i)^2-4(-25+25i)=(-105+88i)+100-100i=-5-12i$$

Пресмятаме $(\sqrt{D})_1=2-3i$ и $(\sqrt{D})_2=-2+3i$

$$z_1=\frac{(4+11i)+2-3i}{2}=3+4i, \quad z_2=\frac{(4+11i)-2+3i}{2}=1+7i$$

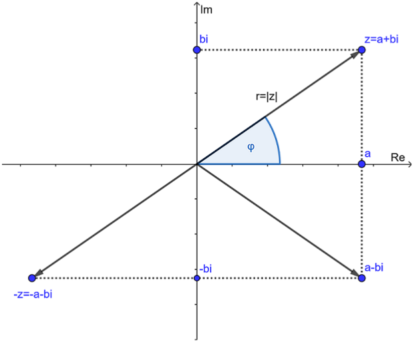
# Геометрично представяне

$z = (a, b) = a + bi \in \mathbb{C}$



# Тригонометричен вид на комплексно число

$$z = a + bi = (a, b) \quad \to \quad (a, b), \ \ |\overrightarrow{Oz}| = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|,$$




## тригонометричен вид

Ако $z \neq 0$, където $r = |z|$, $\mathtt{Arg}(z) = \varphi$ и е изпълнено $a = r\cos\varphi$ и $b = r\sin\varphi$.

$$z = a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$z = a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad z \neq 0$$

1. пресмята се $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
2. намира се $\mathtt{Arg}(z) = \varphi : \begin{cases} \cos\varphi = \frac{a}{r} \\ \sin\varphi = \frac{b}{r} \end{cases}$

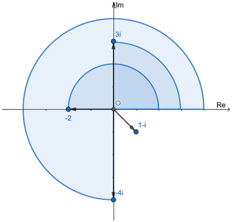
### свойства на аргумента

- $z_1 = z_2 \;\Leftrightarrow\; |z_1| = |z_2|$ и $\mathtt{Arg}(z_1) - \mathtt{Arg}(z_2) = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ;
- $|z| = |\bar{z}|$ и $\mathtt{Arg}(\bar{z}) = 2k\pi - \mathtt{Arg}(z)$ ;
- $|z| = |-z|$ и $\mathtt{Arg}(-z) = (2k+1)\pi + \mathtt{Arg}(z)$ ;

### Example

- $|z| = |\sqrt{3} + i| = 2,$
- $\mathtt{Arg}z = \varphi : \Big\{ \cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{6},$
- $\sqrt{3} + i = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$
- $\sqrt{3} - i = 2(\cos\frac{-\pi}{6} + i\sin\frac{-\pi}{6})$

- $\mathtt{Arg}(1) = 0$ и $|1| = 1 \;\Rightarrow\; 1 = 1(\cos 0 + i \sin 0)$;
- $\mathtt{Arg}(3i) = \frac{\pi}{2}$ и $|3i| = 3 \;\Rightarrow\; 3i = 3(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})$;
- $\mathtt{Arg}(-4) = \pi$ и $|-4| = 4 \;\Rightarrow\; -4 = 4(\cos \pi + i \sin \pi)$;
- $|-2i| = 2$ и $\mathtt{Arg}(-2i) = -\frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; -2i = 2(\cos(-\frac{\pi}{2}) + i \sin(-\frac{\pi}{2}))$
- $|1-i| = \sqrt{2}$ и $\mathtt{Arg}(1-i) = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow 1-i = \sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i \sin(-\frac{\pi}{4}))$.



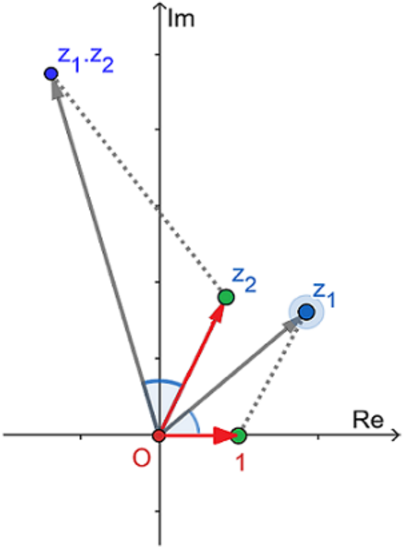
**Твърдение-умножение на комплексни числа**

$$[r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)].[r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)] =$$
$$= r_1.r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$$

*Доказателство:*

$$\begin{aligned}
z_1.z_2 &= r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1).r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \\
&= r_1 r_2[\underbrace{(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2)}_{=\cos((\varphi_1+\varphi_2))} + i\underbrace{(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)}_{=\sin((\varphi_1+\varphi_2))}] = \\
&= r_1.r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]
\end{aligned}$$

- $|z_1.z_2| = |z_1|.|z_2|$,
- $\mathtt{Arg}(z_1.z_2) = \mathtt{Arg}(z_1) + \mathtt{Arg}(z_2)$.



**Твърдение (деление в тригонометричен вид)**

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$

*Доказателство:*

$$
\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_1.\overline{z_2}}{z_2.\overline{z_2}} = \\
&= \frac{r_1.r_2}{r_2^2}(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos(-\varphi_2) + i\sin(-\varphi_2)) = \\
&= \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))
\end{aligned}
$$

# Примери

1. $2(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ).3(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ) = 6(\cos 105^\circ + i\sin 105^\circ)$

2. $$\frac{2(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ)}{3(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ)} = \frac{2}{3}(\cos(-15^\circ) + i\sin(-15^\circ))$$

3. $$\frac{\overline{2(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ)}}{-3(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ)} = \frac{2(\cos(-45^\circ) + i\sin(-45^\circ))}{3(\cos 240^\circ + i\sin 240^\circ)} =$$
$$= \frac{2}{3}(\cos(-285^\circ) + i\sin(-285^\circ))$$

## Формула на Моавър-степенуване

Нека $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ и $n \in \mathbb{N}$ произволно естествено число, тогава

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

*Доказателство:* - по метода на математическата индукция.

- При $n = 1$ имаме $z^1 = z$ и няма какво да се доказва.
- Предполагаме, че за някое естествено число $n$ е в сила $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$.
- пресмятаме за $n + 1$

$$\begin{aligned} z^{n+1} &= z^n.z = \\ &= \left[r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)\right].\left[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right] = \\ &= r^{n+1}(\cos(n\varphi + \varphi) + i\sin(n\varphi + \varphi)) = \\ &= r^{n+1}(\cos(n+1)\varphi + i\sin(n+1)\varphi) \end{aligned}$$

# Пример:

Да се пресметне $(-1+i)^{543}$.

- Намираме $|-1+i| = \sqrt{2}$ и $\mathtt{Arg}(-1+i)$

$$\left.\begin{aligned} \cos\varphi &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\varphi &= \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \varphi = \frac{3\pi}{4}$$

- тригонометричен вид $-1+i = \sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$

$$\begin{aligned}
(-1+i)^{543} &= \sqrt{2}^{543}(\cos\frac{543.3\pi}{4} + i\sin\frac{543.3\pi}{4}) = \\
&= 2^{271}\sqrt{2}(\cos(406\pi + \frac{5\pi}{4}) + i\sin(406\pi + \frac{5\pi}{4})) = \\
&= 2^{271}\sqrt{2}(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}) = \\
&= 2^{271}\sqrt{2}(-\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}) = \\
&= -2^{271}(1+i)
\end{aligned}$$

# Кореннуване

## Формули на Моавър

Нека $z \in \mathbb{C}, z \neq 0$ и $n \in \mathbb{N}$ е естествено число.Уравнението $x^n = z$ има $n$ броя различни корена, ($n$-ти корени на $z$)

$$\sqrt[n]{z} = \{\omega_k = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n})|\ k = 0, 1, \ldots, n-1\}$$

*Доказателство:*

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r(\cos(\varphi + 2k\pi) + i\sin(\varphi + 2k\pi)), \forall k \in \mathbb{Z}$$

Съгласно формулата за степенуване, установяваме че всички числа от вида $\omega_k = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n})$ повдигнати на степен $n$ дават числото $z$

$$\begin{aligned} \omega_k^n &= (\sqrt[n]{r}(\cos\tfrac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\tfrac{\varphi+2k\pi}{n}))^n \\ &= r(\cos(\varphi + 2k\pi) + i\sin(\varphi + 2k\pi)) = \\ &= r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = z \end{aligned}$$

Определяме колко са $\sqrt[n]{z}$, т.е. колко от числата $\omega_k$ са различни.
Нека $s, t \in \mathbb{Z}$

$$\omega_s = \omega_t$$
$$\Updownarrow$$
$$\sqrt[n]{r}(\cos\tfrac{\varphi+2s\pi}{n} + i\sin\tfrac{\varphi+2s\pi}{n}) = \sqrt[n]{r}(\cos\tfrac{\varphi+2t\pi}{n} + i\sin\tfrac{\varphi+2t\pi}{n})$$
$$\Updownarrow$$
$$\tfrac{\varphi+2s\pi}{n} - \tfrac{\varphi+2t\pi}{n} = 2k\pi$$
$$\Updownarrow$$
$$s - t = k.n, \quad \text{за някое } k \in \mathbb{Z}$$
$$\Updownarrow$$
$$s \text{ и } t \quad \text{имат равни остатъци при делене на } n$$

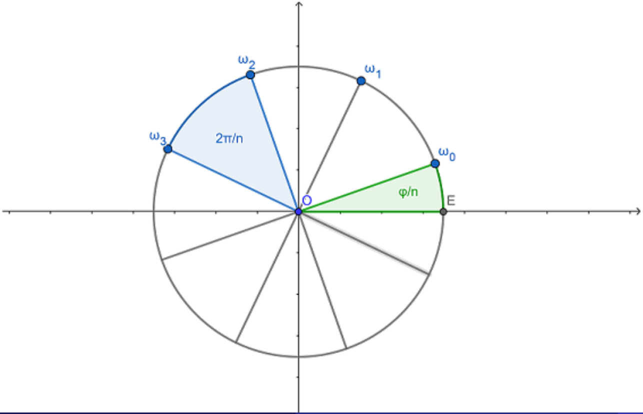
Различните остатъци, при делене на числото $n$ са $0, 1, 2, \ldots, n-1$.

$$\sqrt[n]{z} = \{\omega_k = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n})|\ k = 0, 1, \ldots, n-1\}$$

$$\omega_k = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n})$$

За да се опишат всички $n$-ти корени на комплексно число, важното е да вземем такива $n$ броя $\omega_s$, при които остатъците при разделяне $s$ на $n$ са различни.

- $|\omega_k| = \sqrt[n]{r}$
- $\mathtt{Arg}(\omega_k) - \mathtt{Arg}(\omega_{k-1}) = \frac{2\pi}{n}$

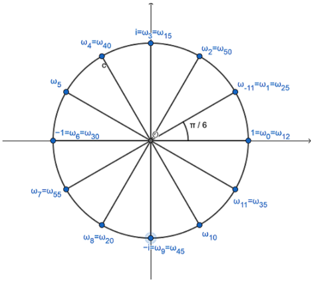


# Пример

Да се определят $\sqrt[12]{1}$, т.е. 12-ти корени на $1 = 1(\cos 0 + i \sin 0)$.

$$\sqrt[12]{1} = \{\omega_k = \cos\frac{2\pi k}{12} + i\sin\frac{2\pi k}{12} \mid k = 0, 1, \ldots, 11\}.$$

или $\sqrt[12]{1} = \{\omega_k = \cos\frac{2\pi k}{12} + i\sin\frac{2\pi k}{12} \mid k = 1, \ldots, 12\}.$




$$\omega_k = \omega_{k+12} = \omega_{k+24} = \ldots = \omega_{k+12t}, \forall t \in \mathbb{Z}$$

$$\sqrt[12]{1} = \{\omega_0, \omega_5, \omega_{10}, \omega_{15}, \ldots, \omega_{55}\}.$$

# Поле

## Определение на поле

$M$ е **поле**, когато $M \neq \emptyset$ и са дефинирани "$+$" и "$.$", $a, b \in M \rightarrow a+b \in M$, и $a.b \in M$ и са изпълнени свойствата:

1. $(a+b)+c = a+(b+c)$, $\forall a, b, c \in M$;
2. $a+b = b+a$, $\forall a, b \in M$ ;
3. съществува нулев елемент 0, за който $a+0 = a$, $\forall a \in M$;
4. за всеки елемент $a \in M$ съществува $b \in M$, за които $a+b = b+a = 0$
5. $(a.b).c = a.(b.c)$, $\forall a, b, c \in M$.
6. $a.b = b.a$, $\forall a, b \in M$ ;
7. $(a+b).c = a.c + b.c$, $\forall a, b, c \in M$ ;
8. съществува елемент 1, за който $1.a = a$, $\forall a \in M$ и $1 \neq 0$;
9. ако $0 \neq a \in M$, съществува $c \in M$, за които $a.c = c.a = 1$

Всяко поле има поне 2 елемента.

- Противоположен на $a$ се дефинира съгласно свойство 4 и е единствен, като се бележи с $-a$ и $-a+a=0=a+(-a)$.
- Изваждане е операция противоположна на събирането. Разликата $b-a=b+(-a)=x$ е единствен елемент, за който $a+x=b$.
- Обратен на $a \neq 0$, съгласно свойство 9 е *единствеият* елемент, за който е изпълнено $a.a^{-1}=a^{-1}.a=1$ и се бележи с $a^{-1}=\dfrac{1}{a}$.
- Операцията деление, като обратна на умножението се определя по следния начин $b:a=\dfrac{b}{a}=b.(a^{-1})=z$ и задава единствения елемент от полето, за който е изпълнено $a.z=b$.

Най-свободно казано:

*"Поле е непразно множество, в което са дефинирани събиране, изваждане, умножение и деление и са изпълнени основните свойства на тези операции"*

# Числово поле

## Определение -числово поле

Числово поле е поле $M$, което е подмножество на комплексните числа.

Примери: $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ са полета

$\mathbb{Z}$ не е поле

## Теорема

За всяко числово поле $F$ е изпълнено $\mathbb{Q} \subseteq F \subseteq \mathbb{C}$.

## Твърдение

Нека $F \subseteq \mathbb{C}$ и в $F$ съществува поне едно ненулево число. $F$ е числово поле, ако са изпълнени свойствата

- $a - b \in F, \forall a, b \in F$;
- $a.b \in F, \forall a, b \in F$;
- $a^{-1} \in F, \forall a \in F, a \neq 0$;

# пример числово поле

Множеството $\mathbb{Q}(i\sqrt{3}) = \{a + ib\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ е поле, защото:

- $(a_1 + ib_1\sqrt{3}) - (a_2 + ib_2\sqrt{3}) = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(i\sqrt{3})$;
- $(a_1 + ib_1\sqrt{3}).(a_2 + ib_2\sqrt{3}) = a_1a_2 - 3b_1b_2 + i\sqrt{3}(a_1b_2 + a_2b_1) \in \mathbb{Q}(i\sqrt{3})$;
- Когато $a + ib\sqrt{3} \neq 0$. е изпълнено

$$\frac{1}{a + ib\sqrt{3}} = \frac{a}{a^2 + 3b^2} - i\sqrt{3}\frac{b}{a^2 + 3b^2} \in \mathbb{Q}(i\sqrt{3}).$$

Нека множество $M = \{\overline{0}, \overline{1}\}$ се състои само от два елемента, които са различни от числата нула и едно и затова са отбелязани с $\overline{0}$ и $\overline{1}$. Те се събират и умножават, съгласно следните таблици

$$\begin{array}{c|cc} + & \overline{0} & \overline{1} \\ \hline \overline{0} & \overline{0} & \overline{1} \\ \overline{1} & \overline{1} & \overline{0} \end{array} \quad \text{и} \quad \begin{array}{c|cc} . & \overline{0} & \overline{1} \\ \hline \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{1} & \overline{0} & \overline{1} \end{array}$$

# пример $Z_5$

$\mathbb{Z}_p = \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{p-1}\}$ - остатъците при делене на някакво фиксирано **просто число** $p$. Поле е само когато числото на което делим е просто. Таблиците за събирането и умножението в полето $\mathbb{Z}_5$ са:

$$\begin{array}{c|ccccc} + & \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} \\ \hline \overline{0} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} \\ \overline{1} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{0} \\ \overline{2} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{0} & \overline{1} \\ \overline{3} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} \\ \overline{4} & \overline{4} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} \end{array} \quad \text{и} \quad \begin{array}{c|ccccc} . & \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} \\ \hline \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{1} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} \\ \overline{2} & \overline{0} & \overline{2} & \overline{4} & \overline{1} & \overline{3} \\ \overline{3} & \overline{0} & \overline{3} & \overline{1} & \overline{4} & \overline{2} \\ \overline{4} & \overline{0} & \overline{4} & \overline{3} & \overline{2} & \overline{1} \end{array}.$$