(1) Упражнение 14 за 1, 2 и 3 група

Втора основна граница: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$

Следствие: $\lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$ (*)

Д-во: $\lim\limits_{x \to 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}} \overset{t=\frac{1}{x}}{=} \lim\limits_{t \to +\infty} \left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e$

$\lim\limits_{x \to 0^-} (1+x)^{\frac{1}{x}} \overset{t=\frac{1}{x}}{=} \lim\limits_{t \to -\infty} \left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e$

Сл. $\lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$

По-долу с (!) ще означаваме границите, които се използват често.

Зад. 1 (!) Докажете, че: ($\ln = \log_e$)

а) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{y \to 1} \frac{\ln y}{y-1} = 1;$

б) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1;$ в) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln a \quad (a>0);$

г) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(1+x)^\alpha-1}{x} = \alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R}).$

Решение: а) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \overset{y=1+x}{=} \lim\limits_{y \to 1} \frac{\ln y}{y-1}.$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} \underset{\text{от (*)}}{=} \ln e = 1.$

б) Полагаме $y = e^x$. $x \to 0 \Rightarrow y \to 1.$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x-1}{x} = \lim\limits_{y \to 1} \frac{y-1}{\ln y} \underset{\text{от зад. 1а)}}{=} 1.$

в) При $a \neq 1$ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{a^x-1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{\ln a^x}-1}{x} =$

$\underset{a\neq1 \Rightarrow \ln a \neq 0}{=} \lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{e^{x\ln a}-1}{x\ln a} \cdot \ln a\right) \underset{\text{от зад. 1б)}}{=} 1 \cdot \ln a = \ln a.$

При $a=1$ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{a^x-1}{x} = 0 = \ln a.$

(2) г) При $\alpha \neq 0$ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{\ln(1+x)^\alpha} - 1}{x} =$

$$\underset{\alpha\neq 0}{=} \lim_{x\to 0} \left(\frac{e^{\alpha\ln(1+x)} - 1}{\alpha \ln(1+x)} \cdot \alpha \frac{\ln(1+x)}{x} \right) \underset{\text{от зад. 1 а) и б)}}{=} 1.\alpha.1 = \alpha$$

При $\alpha = 0$ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = 0 = \alpha$.

Зад. 2 Пресметнете границите:

а) $L = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x \cos x - 1}{x}$; б) $L = \lim\limits_{x\to 0} \frac{a^{\cos x} - a}{x^2}$ $(a>0)$;

в) $L = \lim\limits_{x\to +\infty} \left[x^2 \left(a^{\frac{1}{x}} - a^{\frac{1}{x+1}} \right) \right]$ $(a>0)$;

г) $L = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln \cos ax}{\ln \cos bx}$ $(a\neq 0, b\neq 0)$

Решение: Ще използваме една важна граница, която пресметнахме в предното упражнение: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos ax}{x^2} = \frac{a^2}{2}$ $(a\in\mathbb{R})$ $(**)$.

а) $L = \lim\limits_{x\to 0} \frac{(e^x\cos x - \cos x) + (\cos x - 1)}{x} =$

$$= \lim_{x\to 0} \left[\cos x . \frac{e^x - 1}{x} - \frac{1-\cos x}{x^2} . x \right] \underset{\text{от зад. 1 б) и (**)}}{=} 1.1 - \frac{1}{2}.0 = 1.$$

б) $$L = \lim_{x\to 0} \left[a \frac{a^{\cos x - 1} - 1}{\cos x - 1} . \frac{\cos x - 1}{x^2} \right] \underset{\text{от зад. 1 в) и (**)}}{=} a.\ln a.\left(-\frac{1}{2}\right) =$$

$= -\frac{1}{2} a\ln a.$

в) $L = \lim\limits_{x\to +\infty} a^{\frac{1}{x+1}} . \lim\limits_{x\to +\infty} \left[x^2 \left(a^{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}} - 1 \right) \right] =$

$= a^0 . \lim\limits_{x\to +\infty} \left[x^2 \left(a^{\frac{1}{x(x+1)}} - 1 \right) \right] =$

$= 1. \lim\limits_{x\to +\infty} \left[\frac{a^{\frac{1}{x(x+1)}} - 1}{\frac{1}{x(x+1)}} . \frac{x^2}{x(x+1)} \right] =$

$$= \lim_{x\to +\infty} \left[\frac{a^{\frac{1}{x(x+1)}} - 1}{\frac{1}{x(x+1)}} . \frac{1}{1+\frac{1}{x}} \right] \overset{\text{от зад. 1 в)}}{=} \ln a . 1 = \ln a.$$

③ 2) $L=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln\cos ax}{\cos ax-1}\cdot\frac{\cos ax-1}{x^2}\cdot\frac{x^2}{\cos bx-1}\cdot\frac{\cos bx-1}{\ln\cos bx}\right] \underset{\text{от зад. 1а) и (**)}}{=} 1\cdot\left(-\frac{a^2}{2}\right)\cdot\frac{1}{\left(-\frac{b^2}{2}\right)}\cdot 1=\frac{a^2}{b^2}$.

Зад. 3 Док. че ако $\lim_{x\to x_0} f(x)=a$, $\lim_{x\to x_0} g(x)=b$, $f(x)>0$, $a>0$, то $\lim_{x\to x_0}\left[f(x)\right]^{g(x)}=a^b$.

Решение: $\lim_{x\to x_0}\left[f(x)\right]^{g(x)}=\lim_{x\to x_0} e^{\ln[f(x)]^{g(x)}}=$

$=\lim_{x\to x_0} e^{g(x)\ln f(x)}=e^{b\ln a}=e^{\ln a^b}=a^b$.

Зад. 4 (!) Док. че ако $\lim_{x\to +\infty} f(x)=a$, то $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^x=e^a$.

Решение: От $\lim_{x\to+\infty} f(x)=a$ следва, че $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$.

Тогава $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{\frac{f(x)}{x}}}\right]^{f(x)}=$

$\underset{\text{от (*) и зад. 3}}{=} e^a$.

Зад. 5 Пресметнете границите:

а) $L=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-5x+6}{x^2+5x+6}\right)^x$;

б) $L=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3+4x^2+6x+5}{x^3+2x^2+3x+7}\right)^x$.

Решение: а) $[1^\infty]$

$L=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(x-2)(x-3)}{(x+2)(x+3)}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(1-\frac{2}{x})(1-\frac{3}{x})}{(1+\frac{2}{x})(1+\frac{3}{x})}\right)^x=$

$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{-2}{x}\right)^x\cdot\left(1+\frac{-3}{x}\right)^x}{\left(1+\frac{2}{x}\right)^x\cdot\left(1+\frac{3}{x}\right)^x}\underset{\text{от зад. 4}}{=}\frac{e^{-2}\cdot e^{-3}}{e^2\cdot e^3}=\frac{e^{-5}}{e^5}=e^{-10}$. Отг. на а): $L=e^{-10}$.

б) $[1^\infty]$ $L=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(x^3+2x^2+3x+7)+(2x^2+3x-2)}{x^3+2x^2+3x+7}\right)^x=$

$=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2x^2+3x-2}{x^3+2x^2+3x+7}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\frac{2x^2+3x-2}{x^2+2x+3+\frac{7}{x}}}{x}\right)^x=$

4

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\overset{f(x)}{=}\frac{2+\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}}{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{7}{x^3}}}{x}\right)^x \underset{\text{от зад. 4}}{=} e^2.$$ Отг. на б): $L=e^2$.

Забележка: С разсъжденията от б) можем по-общо да пресметнем $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0}{x^n+b_{n-1}x^{n-1}+\dots+b_1x+b_0}\right)^x$, където $n\in\mathbb{N}$.

Зад. 6 Пресметнете границите:

а) $L=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2^x+3^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$; б) $L=\lim_{x\to 0}(1+4\,tg\,6x)^{cotg\,2x}$.

Решение: а) $[1^\infty]$

$$L=\lim_{x\to 0}\left\{\left[1+\left(\frac{2^x+3^x}{2}-1\right)\right]^{\frac{1}{\frac{2^x+3^x}{2}-1}}\right\}^{\frac{\frac{2^x+3^x}{2}-1}{x}} \underset{\text{от (*) и зад. 3}}{=} e^{\ln\sqrt{6}} = \sqrt{6},$$

защото $$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2^x+3^x}{2}-1}{x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{2^x-1}{x}+\frac{3^x-1}{x}\right) \underset{\text{от зад. 1в)}}{=} \frac{1}{2}(\ln 2+\ln 3)=\frac{1}{2}\ln 6=\ln\sqrt{6}.$$

Отг. на а): $L=\sqrt{6}$.

б) $[1^\infty]$ $$L=\lim_{x\to 0}\left[(1+4\,tg\,6x)^{\frac{1}{4\,tg\,6x}}\right]^{4\,tg\,6x\cdot cotg\,2x} \underset{\text{от (*) и зад. 3}}{=} e^{12},$$

защото $\lim_{x\to 0}(4\,tg\,6x\cdot cotg\,2x)=$

$$=4\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos 2x}{\cos 6x}\right)\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 6x}{\sin 2x}\right)=$$

$$=4\cdot 1\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 6x}{6x}\cdot\frac{2x}{\sin 2x}\cdot\frac{6}{2}\right)=4\cdot 1\cdot 1\cdot 3=12.$$

Отг. на б): $L=e^{12}$.