Изпит по Вероятности и Статистика
Решения

18.06.2021
Варианти 1 и 2

Задача 1 Хвърлят се три зара. Нека X е броя на падналите се четни числа, а Y е броя на падналите се петици върху трите зара. Да се определи:
а) съвместното разпределение на X и Y;
б) разпределененията на $Z = \max\{X, Y\}$ и средната стойност $\mathbf{E}(Z \mid Y = 1)$.

Решение: Нека $p_{k,l} := \mathbf{P}(X = k, Y = l)$, $q_k := \mathbf{P}(X = k)$, $r_l := \mathbf{P}(Y = l)$, $s_m := \mathbf{P}(Z = m)$. Тогава $\Omega = V(6;3)$, $X(\Omega) = Y(\Omega) = Z(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$ и пресмятаме:
а)

$$p_{0,0} = \frac{|V(2;3)|}{|\Omega|} = \frac{8}{6^3};\ p_{0,1} = \frac{|C_3^1|.|V(2;2)|}{|\Omega|} = \frac{12}{6^3};\ p_{0,2} = \frac{6}{6^3};\ p_{0,3} = \frac{1}{6^3};$$

$$p_{1,0} = p_{1,1} = \frac{36}{6^3};\ p_{1,2} = \frac{9}{6^3};\ p_{2,0} = \frac{54}{6^3};\ p_{2,1} = p_{3,0} = \frac{27}{6^3};\ p_{k,l} = 0 \text{ при } k + l \geq 4.$$

б) Намираме:

$$s_0 = p_{0,0} = \frac{8}{6^3};\ s_1 = p_{1,0} + p_{0,1} + p_{1,1} = \frac{84}{6^3};\ s_2 = p_{2,0} + p_{0,2} + p_{2,1} + p_{1,2} = \frac{96}{6^3};\ s_3 = p_{3,0} + p_{0,3} = \frac{28}{6^3}.$$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(Z \mid Y = 1) &= \sum_{m=0}^{3} m\mathbf{P}(Z = m \mid Y = 1) \\ &= \frac{\mathbf{P}(Z = 1, Y = 1)}{\mathbf{P}(Y = 1)} + \frac{2\mathbf{P}(Z = 2, Y = 1)}{\mathbf{P}(Y = 1)} + \frac{3\mathbf{P}(Z = 3, Y = 1)}{\mathbf{P}(Y = 1)} \\ &= \frac{p_{0,1} + p_{1,1}}{r_1} + \frac{2p_{2,1}}{r_1} + \frac{3p_{3,1}}{r_1} = \frac{102}{75} = 1.36\end{aligned}$$

Оценяване: 4 точки

- За подточка а) : 2 точки;
- За разпределението на Z : 1 точка;
- За средното $\mathbf{E}(Z \mid Y = 1)$: 1 точка.

Задача 2 Случайна величина $Z = (X, Y)$ има плътност $f(x,y) = \begin{cases} c(x+y)^2, & 0 < x < y < 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

Да се намерят:
а) константата c;
б) плътността на сумата $X + Y$ и средната стойност $\mathbf{E}(Y \mid X = \frac{1}{2})$.

Решение: а) Пресмятаме:

$$1 = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy = c\int_0^1 \int_x^1 (x+y)^2 dydx = \frac{c}{3}\int_0^1 (x+y)^3\Big|_{y=x}^1 dx = \frac{7c}{12} \Rightarrow c = \frac{12}{7}.$$

б) Съгласно формулата за плътността f_{X+Y} на $X + Y$ намираме:

$$f_{X+Y}(z) = \int_{\mathbb{R}} f(u, z-u)du.$$

От условието следва, че $f(u, z-u) \neq 0$ точно тогава, когато $0 < u < z - u < 1$. Следователно $f_{X+Y}(z) \neq 0$ само при $0 < 2u < z < 1 + u < 2$, откъдето $z \in (0, 2)$. От $z - 1 < u < \frac{z}{2}$ следват:

Случай 1: $z \in (0, 1]$. Тогава $0 < u < \frac{z}{2}$ и намираме

$$f_{X+Y}(z) = \frac{12}{7}\int_0^{\frac{z}{2}} z^2 du = \frac{6z^3}{7}.$$

Случай 2: $z \in (1, 2)$. Тогава $z - 1 < u < \frac{z}{2}$ и пресмятаме

$$f_{X+Y}(z) = \frac{12}{7}\int_{z-1}^{\frac{z}{2}} z^2 du = \frac{6z^2(2-z)}{7}.$$

Окончателно:

$$f_{X+Y}(z) = \begin{cases} 0, & z \in (-\infty, 0] \cup [2, \infty) \\ \frac{6z^3}{7}, & z \in (0, 1] \\ \frac{6z^2(2-z)}{7}, & z \in (1, 2) \end{cases}$$

За пресмятането на средната стойност $\mathbf{E}(Y \mid X = \frac{1}{2})$ е необходимо да определим $f_X(1/2)$.

$$f_X(1/2) = \int_{\mathbb{R}} f(1/2, y)dy = \frac{12}{7}\int_{1/2}^1 (1/2 + y)^2 dy = \frac{19}{14};$$

$$\mathbf{E}(Y \mid X = 1/2) = \frac{12}{7}\int_{\mathbb{R}} y\frac{f(1/2, y)}{f_X(1/2)}dy = \frac{24}{19}\int_{1/2}^1 y(1/2 + y)^2 dy = \frac{119}{152} \approx 0.78289$$

Оценяване: 5 точки

- За подточка а) : 1 точка;
- За плътността на $X + Y$: 2 точки;
- За средното $\mathbf{E}(Y \mid X = 1/2)$: 2 точки.

Задача 3 Височината на студентите е нормално разпределена случайна величина с параметри $\mathcal{N}(170, 4^2)$ за момичетата и $\mathcal{N}(174, 4^2)$ за момчетата. Да се определи:
а) вероятността от 3 случайно избрани студента, поне един да има ръст между 160см и 172см;
б) вероятността случайно избран студент да е по-висок от 170см, ако е известно, че е над 165см.

Решение: Нека $X \in \mathcal{N}(170, 4^2),\ Y \in \mathcal{N}(174, 4^2),\ Z \in \mathcal{N}(0, 1)$ и за $n \in \mathbb{N}$ дефинираме събитието: $A_n = \{$При случаен избор на n студента, поне един от тях има ръст в $I = [160, 172]\}$. Тогава

$$a)\ \ X = 4Z + 170,\ Y = 4Z + 174,\ \mathbf{P}(A_n) = 1 - \mathbf{P}(\overline{A}_n) = 1 - \left[\mathbf{P}(\overline{A}_1)\right]^n = 1 - [1 - \mathbf{P}(A_1)]^n .$$

Нека $H_k,\ k = 1, 2$ са събитията: случайно избран студент е момиче за $k = 1$, момче за $k = 2$.

$$\mathbf{P}(A_1) = \sum_{k=1}^{2} \mathbf{P}(A_1|H_k)\mathbf{P}(H_k) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{P}(X \in I) + \mathbf{P}(Y \in I)\right)$$

$$= \frac{\mathbf{P}(Z \in [-2.5,\ 0.5]) + \mathbf{P}(Z \in [-3.5, -0.5])}{2} = \frac{1 - \Phi(-2,5) - \Phi(-3,5)}{2} \approx 0.49678;$$

$$\mathbf{P}(A_3) = 1 - [1 - 0.49678]^3 = 0.8725$$

б) Нека B, C са съответно събитията: случаен студент е по-висок от 170см и съответно по-висок от 165см. Тогава $B \subset C$ и следователно $BC = B$, откъдето намираме

$$\mathbf{P}(B|C) = \frac{\mathbf{P}(BC)}{\mathbf{P}(C)} = \frac{\mathbf{P}(B)}{\mathbf{P}(C)} = \frac{\sum_{k=1}^{2} \mathbf{P}(B|H_k)\mathbf{P}(H_k)}{\sum_{k=1}^{2} \mathbf{P}(C|H_k)\mathbf{P}(H_k)}$$

$$= \frac{\mathbf{P}(Z > 0) + \mathbf{P}(Z > -1)}{\mathbf{P}(Z > -5/4) + \mathbf{P}(Z > -9/4)} = \frac{2 - \Phi(0) - \Phi(-1)}{2 - \Phi(-5/4) - \Phi(-9/4)} \approx 0.7126$$

Оценяване: 5 точки

- За изразяване на $\mathbf{P}(A_3)$ чрез $\mathbf{P}(A_1)$: 1 точка;
- За намиране на $\mathbf{P}(A_1)$: 2 точки;
- За подточка б) : 2 точки.

Задача 4 Във вътрешността на квадрат с лице 1 по случаен начин попада точка. Да се намери средната стойност и дисперсията на разстоянието от точката до центъра на квадрата.

Решение: Фиксираме в равнината правоъгълна координатна система Oxy, като квадратът K е в първи квадрант, две от страните му лежат върху координатните оси, а един от върховете му съвпада с началото O (фигура 1). Нека координати на случайната точка са (X, Y), тогава за плътността на двумерната (X, Y) е в сила: $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1, & 0 < x, y < 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$ Понеже центърът на K е $(1/2,\ 1/2)$, то за разстоянието намираме $d = \sqrt{(X-1/2)^2 + (Y-1/2)^2}$. Прилагаме теоремата за *средна стойност на композиция* и намираме

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}d = \mathbf{E}\sqrt{(X-1/2)^2+(Y-1/2)^2} &= \int_0^1\int_0^1 \sqrt{(x-1/2)^2+(y-1/2)^2} f_{X,Y}(x,y)dxdy \\
&= \int_{-1/2}^{1/2}\int_{-1/2}^{1/2} \sqrt{u^2+v^2}dudv = 4\int_0^{1/2}\int_0^{1/2} \sqrt{u^2+v^2}dudv \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\frac{1}{2\cos\theta}} \rho^2 d\rho d\theta + 4\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{1}{2\sin\theta}} \rho^2 d\rho d\theta = \frac{1}{6}\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{\cos^3\theta} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sin^3\theta}\right) \\
&= \frac{2}{6}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{\cos^3\theta} = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos\theta d\theta}{\cos^4\theta} = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\sin\theta}{(1-\sin^2\theta)^2} \\
&= \frac{1}{3}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{dt}{(1-t^2)^2} = \frac{1}{3}\left(\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{dt}{1-t^2} + \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{t^2dt}{(1-t^2)^2}\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{dt}{1-t^2} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} td(1-t^2)^{-1}\right) \\
&= \frac{1}{6}\left(\frac{t}{1-t^2} + \frac{1}{2}\ln\frac{1+t}{1-t}\right)\Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{6}\left(\sqrt{2} + \frac{1}{2}\ln\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right) \approx 0.382597
\end{aligned}$$

Аналогично пресмятаме средната стойност $\mathbf{E}d^2 = \mathbf{E}\left[(X-1/2)^2 + (Y-1/2)^2\right] = \frac{1}{6}$. Тогава

$$\mathbf{D}d = \mathbf{E}d^2 - (\mathbf{E}d)^2 = 1/6 - 0.382597^2 \approx 0.0202855$$

Оценяване: 6 точки

- За въвеждане на координати и определяне на плътността f : 1 точка;
- За определяне на d и написване на интегралът за $\mathbf{E}d$: 1 точка;
- За смяна на променливите $(x, y) \longmapsto (\rho, \theta)$: 1 точка;
- За свеждане до еднократен интеграл от рационална функция : 1 точка;
- Вярно пресмятане на $\mathbf{E}d$: 1 точка;
- Вярно пресмятане на $\mathbf{E}d^2$: 1 точка.

Оценката се получава по формулата $2 + \frac{\mathbf{p}}{5}$, където $\mathbf{p} \in [0, 20]$ е сумата на точките.