2. Основни комбинаторни принципи и конфигурации. Рекурентни уравнения.

1. **Формулировка на принципите на изброителната комбинаторика**

Деф: Принцип на Дирихле

Нека X и Y са крайни множества като $|X| > |Y|$. Тогава за всяка тотална функция $(Dom(f) = A)$ $f: X \to Y$ съществува $a \neq b \in X$, т.ч. $f(a) = f(b)$

Деф: Принцип на биекцията

Нека A и B са крайни множества. $|A| = |B|$ т.с.т.к. съществува биекция $f: A \to B$

Деф: Принцип на събирането (разбиване, покритие)

Нека A е крайно множество, а $P = \{S_1, \dots, S_k\}$ - покритие на A, т.е.

$\bigcup_{i=1}^{k} S_i = P$; $S_i \cap S_j = \emptyset$ за $i \neq j \in \{1, \dots, k\}$ и $S_i \neq \emptyset$ за $i \in \{1, \dots, k\}$

Тогава $|A| = \sum_{i=1}^{k} |S_i|$

Деф: Принцип на изваждането

Нека A е множество в универсум U. Тогава $|A| = |U| - |\bar{A}|$

Деф: Принцип на умножението

Нека A и B са крайни множества и $|A| = n, |B| = m$. Тогава $|A \times B| = |A|.|B| = n.m$

Деф: Принцип на делението

Нека A е множество. Нека $\mathrm{R} \subseteq \mathrm{A}^2$ е релация на еквивалентност. Нека A има k класа на еквивалентност, всеки клас има кардиналност m. Тогава $m = \frac{|A|}{k}$

Деф: Принцип на включването и изключването

Нека $A_1, \dots, A_n$ са n на брой крайни множества и $n \geq 2$. Тогава

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{1 \leq i \leq n} |A_i| - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| - \dots + (1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|$$

Д-во: *Индукция по n.*

1. За $n = 2$ (принцип на обединението)

   Преставяме $A \cup B$ като 3 непресичащи се множества:

   $$A \cup B = A \setminus (A \cap B) \cup B \setminus (A \cap B) \cup (A \cap B)$$

   $|A \cup B| = |A \setminus (A \cap B)| + |B \setminus (A \cap B)| + |A \cap B|$ (от принципа за събирането)

   $|A \cup B| = |A| - |A \cap B| + |B| - |A \cap B| + |A \cap B|$ (от принципа за изваждането)
   $= |A| + |B| - |A \cap B|$

2. За $n = 3$:

   Нека $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3$ са множества

   $|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |(A_1 \cup A_2) \cup A_3| = |A_1 \cup A_2| + |A_3| - |(A_1 \cup A_2) \cap A_3|$

   $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$ (принцип на обединението)

   $(A_1 \cup A_2) \cap A_3 = (A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3)$ (дистрибутивен закон)

   $$|(A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3)| = |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_3 \cap A_2 \cap A_3| = |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

Получихме:
$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$

3. Индукционна хипотеза: Нека е в сила за n
4. Стъпка: Нека $A_1, \dots, A_n, A_{n+1}$ са $n+1$ на брой крайни множества
$|A_1 \cup \dots \cup A_n \cup A_{n+1}| = |(A_1 \cup \dots \cup A_n) \cup A_{n+1}| =$
$|A_1 \cup \dots \cup A_n| + |A_{n+1}| - |(A_1 \cup \dots \cup A_n) \cap A_{n+1}| =$

$$\sum_{1\le i\le n} |A_i| - \sum_{1\le i_1<i_2\le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| + \sum_{1\le i_1<i_2<i_3\le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| - \dots + (-1)^{n-1}|A_1 \cap \dots \cap A_n| +$$
$$+|A_{n+1}| - |(A_1 \cap A_{n+1}) \cup (A_2 \cap A_{n+1}) \cup \dots \cup (A_n \cap A_{n+1})| =$$

$$\sum_{1\le i\le n} |A_i| - \sum_{1\le i_1<i_2\le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| + \sum_{1\le i_1<i_2<i_3\le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| - \dots + (-1)^{n-1}|A_1 \cap \dots \cap A_n| +$$
$$+|A_{n+1}| - \sum_{1\le i_1\le n} |A_{i_1} \cap A_{n+1}| + \sum_{1\le i_1<i_2\le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{n+1}| - \dots + (-1)^n |A_1 \cap \dots \cap A_n \cap A_{n+1}| =$$

$$\sum_{1\le i\le n+1} |A_i| - \sum_{1\le i_1<i_2\le n+1} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| + \sum_{1\le i_1<i_2<i_3\le n+1} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| - \dots + (-1)^n |A_1 \cap \dots \cap A_{n+1}|$$

2. Основни комбинаторни конфигурации с или без наредба, с или без повторение. Извеждане на формулите за броя

Основна задача: дадени са ни n обекта и искаме да изберем k от тях. Изборът е функция $f: \{1, \dots, k\} \to \{1, \dots, n\}$. По колко начина може да направим този избор, т.е. колко са функциите f?

1. Конфигурация с повторение, с наредба
Теорема: Нека A и B са множества, $|A| = k, |B| = n$. Броят на функциите $f: A \to B$ е n^k.
Д-во:
   - Ако $k = 0$, то $A = \emptyset$ има една единствена функция $f = \emptyset: A \to B$
   - Нека $k \ge 1$ и нека $A = \{a_1, \dots, a_k\}$. Всяка функция $f: A \to B$ можем да представим еднозначно чрез вектора от нейните стойности:
   $$f = (f(a_1), \dots, f(a_k)) \in B^k$$
   Съгласно принципа на биекцията, броят на различните функции е същият като броя на елементите на B^k.
   Съгласно принципа за умножението $|B^k| = n^k \Rightarrow K_{\text{нп}}(k, n) = n^k$

2. Конфигурация с наредба, без повторение
Функцията трябва да е инекция, защото вече не е позволено да има повторение на обекти
Теорема:
Нека A и B са множества, $|A| = k, |B| = n$. Броят на инекциите $f: A \to B$ е
$$n(n-1)\dots(n-k+1) = \prod_{i=0}^{k-1}(n-i)$$
Д-во:
   - Ако $k > n$, от принципа на Дирихле няма инекции $f: A \to B$. Формулата остава вярна, защото един от множителите ще е 0.
   - Ако k = 0, то $A = \emptyset$ има една единствена функция $f = \emptyset: A \to B$. Тя е инекция.
   - Нека $k \ge 1$ и нека $A = \{a_1, \dots, a_k\}$. Всяка инекция $f: A \to B$ можем да представим еднозначно чрез вектора от нейните стойности
   $$f = (f(a_1), \dots, f(a_k)) \in B^k$$
   $f(a_1)$ е произволен ел. от B, но $f(a_2) \in B \setminus \{f(a_1)\}$. Така $f(a_3) \in B \setminus \{f(a_1), f(a_2)\}, \dots$
   $f(a_k) \in B \setminus \{f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_{k-1})\}$
   Съгласно принципа за умножението получаваме $K_{\text{н}}(k, n) = \prod_{i=0}^{k-1}(n-i)$ възможности

3. Конфигурация без повторение, без наредба

Теорема:

Броят на k-елементните подмножества на множество с n елемента е $\binom{n}{k}$.

Д-во:

- Ако $k > n$, няма k-елементни подмножества на множество с n елемента и формулата е вярна
- Нека $k \leq n$ и A е множество

  Индукция по n:

  - n=0, $A = \emptyset$, единствената възожност за k е $k = 0$. $1 = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \binom{n}{0}$
  - Индукционно предположение: нека е в сила за всяко $k \leq n$, броят на k-елементните подмножества на A е $\binom{n}{k}$,
  - Нека $A = \{a_1, \dots, a_n, a_{n+1}\}$ и $k \leq n+1$
    - Ако $k = 0$, $\emptyset$ е единственото подмн. на A с 0 елемента. $1 = \frac{(n+1)!}{0!((n+1)-0)!} = \binom{n+1}{0}$
    - Ако $k = n+1$, то A е единственото подмножество на A с $n+1$ елемента

      $$1 = \frac{(n+1)!}{(n+1)!\left((n+1)-(n+1)\right)!} = \binom{n+1}{n+1}$$
    - Ако $1 \leq k \leq n$, то можем да разделим k-елементните подмножества на две непресичащи се групи: група 1 - тези, които не съдържат елемента a_{n+1} и група 2 - тези, които го съдържат.
      - Елементите от група 1 са k-елементни подмн. на $\{a_1, \dots, a_n\}$. Съгласно ИП те са $\binom{n}{k}$ на брой
      - Елементите от група 2 са от вида $\{a_{k+1}\} \cup B$, където B е $k-1$-елементно подмн. На $\{a_1, \dots, a_n\}$. Броят на елементите от група 2 е колкото са различните възможности за B. От ИП, те са $\binom{n}{k-1}$ на брой

      От принципа за събирането:

      $$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!} =$$

      $$\frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!\,(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k+1})} = \frac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k} = K(k,n)$$

4. Конфигурация без наредба, с повторение

Трябва да изберем k предмета измежду n вида, като наредбата няма значение, но имаме право на повторения. Ще ни трябват $k+n-1$ кутийки и $n-1$ звездички.

- Празните кутийки преди първата звездичка отговарят на броя обекти от първия вид.
- Празните кутийки между 1 и 2 звездичка отговарят на броя на обектите от втория вид
- …

На всеки избор на обекти съответства разпределяне на две звездички в кутиите. Всяко разпределяне на двете звездички в кутийки съответства на избор на обекти.

От принципа на биекцията, задачата се свежда до начините по които може да изберем k-1 от кутийките, в които да поставим звездички:

$$K_{\text{п}}(k,n) = \binom{n+\text{к}-1}{k-1}$$

3. Биномни коефициенти и теорема на Нютон. Д-во на комбинаторни тъждества чрез комбинаторни разсъждения (принцип на двукратното броене)

Деф: Биномен коефициент

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} - \text{броят на } k - \text{елем. подмножества на множество с } n \text{ елемента}$$

Теорема: на Нютон

Нека $x, y \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$

$$(\mathrm{x}+\mathrm{y})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Д-во: Индукция по n:

- $n=0$: $(x+y)^0 = 1 = \binom{0}{0} x^0 y^{0-0}$
- Нека твърдението е в сила за n
- $(\mathrm{x}+\mathrm{y})^{n+1} = (x+y)^n (x+y) = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}\right)(x+y) =$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k+1} =$$
$$= \binom{n}{0} x y^n + \binom{n}{1} x^2 y^{n-1} + \cdots + \binom{n}{k-1} x^k y^{n+1-k} + \cdots + \binom{n}{n} x^{n+1} +$$
$$+ \binom{n}{0} y^{n+1} + \binom{n}{1} x y^n + \cdots + \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k} + \cdots + \binom{n}{n} x^n y =$$
$$= \binom{n+1}{0} y^{n+1} + \left(\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\right) x y^n + \cdots + \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right) x^k y^{n+1-k} + \cdots + \binom{n+1}{n+1} x^{n+1} =$$
$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k}$$

В комбинаториката едно тъждество може да бъде доказано както по формален начин, така и по чисто комбинаторен път чрез преброяване на елементите на подходящо избрана конфигурация по два различни начина. Тази техника е известна като принципа на двукратното броене. Ще я използваме, за да докажем свойства на биномния коефициент:

Св-во: $n, m \in \mathbb{N},\ n > m$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

Д-во:

Нека фиксираме x. Дефинираме множеството $|A| = \binom{n}{k}$.

- A_1 - ако x е избрано отляво, то имаме оставащо $\binom{n-1}{k-1}$
- A_2 - ако x не е избрано отляво, то $\binom{n-1}{k}$, защото $A = A_1 \cup A_2$ и $A_1 \cap A_2 = \emptyset$

  По принципа за събиране: $|A| = \binom{n}{k} = |A_1| + |A_2| = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

Св-во: $n, m \in \mathbb{N},\ n > m$

$$\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$$

Д-во:

За всяко подмножество $A' \subseteq A$ за $|A| = n$ и $|A'| = m$, то еднозначно съответства на подмножеството $A \setminus A'$ и $|A \setminus A'| = |A| - |A'| = n - m$

- A_1 - ако x е избрано отляво, то имаме оставащо $\binom{n-1}{k-1}$
- A_2 - ако x не е избрано отляво, то $\binom{n-1}{k}$, защото $A = A_1 \cup A_2$ и $A_1 \cap A_2 = \emptyset$

  По принципа за събиране: $|A| = \binom{n}{k} = |A_1| + |A_2| = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

4. Алгоритъм за решаване на линейни рекурентни уравнения с константни коефициенти - хомогенни и нехомогенни

Деф: Рекурентно отношение от ред r

Нека $a_0, a_1, \dots, a_{r-1}$ са членове на редицата $a_n = f(a_{n-1}, \dots, a_{n-r}), n \geq r$ - рекурентни отношения от ред r

1. Линейно рекурентно уравнение, хомогенно с константни коефициенти

$$\left|\begin{array}{l} a_0, a_1, \dots, a_{r-1} - \text{дадени начални условия} \\ a_n = e_1 a_{n-1} + e_{2a_{n-2}} + \cdots + e_r a_{n-r}, e_r \neq 0, e_i \in R \end{array}\right.$$

Алгоритъм:

a. Намираме характеристичното уравнение на хомогенната част
$a_n - e_n a_{n-1} - \cdots - e_r a_{n-r} = 0$
$x^r - e_1 x^{r-1} - \cdots - e_r x^0 = 0$
b. Решаваме X и намираме корени $x_1, \dots, x_r \in \mathbb{C}$
c. 2 случая
    i. Всички корени са различни.
    Общ вид: $a_n = x_1^n A_1 + x_2^n A_2 + \cdots + x_r^n A_r$
    ii. Не всички са различни. Нека $x = x_{i_1} = x_{i_2} = \cdots = x_{i_k}$
    Общ вид: $a_n = \cdots + \left(A_{i_1} + A_{i_2} n + A_{i_3} n^2 + \cdots + A_{i_k} n^{k-1}\right) x^n + \cdots$

d. Правим система за дадените $a_0, \dots, a_{r-1}$

$$\left| \begin{aligned} a_o &= A_1 x_1^0 + A_2 x_2^0 + \cdots + A_\mathrm{r} x_\mathrm{r}^0 \\ a_1 &= A_1 x_1^1 + A_2 x_2^1 + \cdots + A_\mathrm{r} x_\mathrm{r}^1 \\ &\dots \\ a_{r-1} &= A_1 x_1^{r-1} + A_2 x_2^{r-1} + \cdots + A_\mathrm{r} x_\mathrm{r}^{r-1} \end{aligned} \right.$$

e. Решаваме системата и полуваваме $A_1, \dots, A_r$. Заместваме в общия вид и получаваме отговор

2. Линейно рекурентно уравнение, нехомогенно

$$\left| \begin{aligned} &a_0, a_1, \dots, a_{r-1} - \text{дадени начални условия} \\ &a_n = e_1 a_{n-1} + e_{2a_{n-2}} + \cdots + e_r a_{n-r} + \underbrace{f(n)}_{\substack{\text{нехомогенна} \\ \text{част}}} \quad , e_r \neq 0, e_i \in R \end{aligned} \right.$$

За решението на нехомогено линейно рекурентно уравнение с константни коефициенти, трябва да представим нехомогенната част:
$f(n) = e_1^n \cdot P_1(n) + e_2^n \cdot P_2(n) + \cdots + e_s^n \cdot P_s(n), \qquad \deg(\mathrm{P_i}) = \mathrm{d_i}$ за $\mathrm{i} \in \{1, \dots, \mathrm{s}\}$

т.е. нехомогенната част представяме като константа e на степен n по полином от степен d.

Алгоритъмът за решаване е същият с изключение, че на стъпка 2. добавяме още $(d+1)$ еднакви корена (=e)