# Полиноми на n променливи

$A$ – комут. с 1 (област на цялост)

$A[x] = \{(a_0, a_1, \dots)$ | фин. ред$\} \to \{$
$A \subset A[x]$
$x \in A[x]$
$A[x]$ комут. пръст.
област на цялост
$\deg(fg) = \deg f + \deg g$
$\}$

$B = A[x]$

$B[y] = A[x][y] = A[x,y]$ област

краен бр. едночл. $\alpha_{ij} x^i y^j$

$\vdots$

$A[x_1, x_2, \dots, x_n] = (A[x_1, \dots, x_{n-1}])[x_n]$

$\{$
$A \subset A[x_1, \dots, x_n]$
$A[x_1, \dots, x_n]$ комутат.
$x_1, x_2, \dots, x_n \in A[x_1, \dots, x_n]$
област на цялост
$\}$

$A[x_1, \dots x_n]$
сума от краен брой едночлени

$\alpha x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$ $\quad 0 \le k_i$

$\alpha \in A$

$\alpha = a x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$ $\qquad$ $\alpha$ подобен на $\beta$

$\beta = b x_1^{s_1} x_2^{s_2} \dots x_n^{s_n}$ $\qquad$ $k_1 = s_1;\ k_2 = s_2;\ \dots\ k_n = s_n$

$\alpha + \beta = (a+b) x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$

---

$$f = \underbrace{3x^2y^3z}_{6} - 4\underbrace{xy^3z^5}_{9} + \underbrace{7x^2y}_{3} - 14\underbrace{xz^5}_{6} + \underbrace{27y^3}_{3} - 4\underbrace{z}_{1}$$

$$f = (27y^3 + 7x^2y) + (3x^2y^3 - 4)z + (-4xy^3 - 14x)z^5 \in A[x,y][z]$$

$\deg_z f = 5$

$$f = (-14xz^5 - 4z) + (7x^2)y + (3x^2z - 4xz^5 + 27)y^3, \quad \deg_y f = 3$$

$$f = (27y^3 - 4z) + (-4y^3z^5 - 14z^5)x + (3y^3z + 7y)x^2, \quad \deg_x f = 2$$

---

обща степен $\alpha = a x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$ $\qquad$ $\deg \alpha = k_1 + k_2 + \dots + k_n$, $\deg_{x_s} \alpha = k_s$

$\deg \alpha = k_s$

Хомогенен полином – при който всички едночлени имат една и съща обща степен

$(6xy^3 - 11x^2y^2 + 4x^4 - 7x^3y + 5y^4)$

Т6 $f, g \in A[x_1, \dots, x_n]$, A-област

а) $\deg_{x_k}(f+g) \le \max\{\deg_{x_k} f, \deg_{x_k} g\}$

б) $\deg_{x_k}(f \cdot g) = \deg_{x_k} f + \deg_{x_k} g$

следствие от теоремата за $A[X]$

в) $\deg(f+g) \le \max\{\deg f, \deg g\}$

$f = \alpha_1 + \dots + \alpha_s$

$g = \beta_1 + \dots + \beta_t$

$f+g = \alpha_1 + \dots + \alpha_s + \beta_1 + \dots + \beta_t$

г) $\deg(f \cdot g) = \deg f + \deg g$

---

г) $f = f_0 + f_1 + \dots + \boxed{f_t}$ $\deg f = t$ (хомогенни части) $f_t \ne 0$

$g = g_0 + g_1 + \dots + \boxed{g_l}$ $\deg g = l$ $fg = \sum_{\substack{0 \le i \le t \\ 0 \le j \le l}} f_i g_j$ $g_l \ne 0$

$\underbrace{f_t g_l}_{t+l} \ne 0$

лексикографска наредба $\qquad A[x_1, \ldots, x_n]$

$\alpha = a x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n}$

$\beta = b x_1^{s_1} x_2^{s_2} \cdots x_n^{s_n}$

$\alpha \neq \beta \Rightarrow \exists j: \ k_j \neq s_j$

Ако $k_1 = s_1, \ldots, k_{j-1} = s_{j-1}$ и $k_j > s_j$

$\alpha > \beta$

$x_1 > x_2 > x_3 \cdots > x_n$

$x_1 x_2 > x_2 x_3$

$x_1 x_2^2 > x_1 x_2$

$x_1 x_2 x_3^2 > x_1 x_2 x_3$

---

$f = \alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 \cdots$

$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots$

Старши едночлен на полином

този едночлен, който лексикографски

[illegible]

$\alpha > \beta$

$\alpha\gamma > \beta\gamma$

---

$\alpha > \beta > \gamma$

$\alpha > \gamma$

алгебра

геометрия

---

алгебра

анализ

---

алгебра

алгоритъм

Лема за старшия едночлен // A - област $f \neq 0, g \neq 0 \in A[x_1, \dots, x_n]$

Старшия (главния) едночлен на $f \cdot g$ е равен на старшия (гл.) на $f$ умножен по старши едн. на $g$.

Д-во $f = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_t$ едночлени, $\alpha_1$ старши едночл. $\alpha_1 > \alpha_i \; i = 2, \dots, t$

$g = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_m$ едночлени, $\beta_1$ - старшия $\beta_1 > \beta_j, j = 2, \dots, m$

$\boxed{\alpha_1 \beta_1} > \alpha_1 \beta_2 \dots \qquad \alpha_1 \beta_1 > \alpha_1 \beta_j, \quad j = 2, \dots m$

$\alpha_i \beta_j \; \square \; \alpha_1 \beta_1 \qquad \alpha_1 \beta_1 > \alpha_1 \beta_j > \alpha_i \beta_j$

$\alpha_1 = a_1 x_1^{r_1} x_2^{r_2} \dots x_n^{r_n} > \alpha_i = a_i x_1^{p_1} x_2^{p_2} \dots x_n^{p_n} \quad \exists r: \begin{cases} r_r > p_r \\ r_1 = p_1 \dots r_{r-1} = p_{r-1} \end{cases}$

$\beta_1 = b_1 x_1^{w_1} x_2^{w_2} \dots x_n^{w_n} > \beta_j = b_j x_1^{l_1} x_2^{l_2} \dots x_n^{l_n} \quad \exists q: w_q > l_q, \; w_{q-1} = l_{q-1}, \dots$

$\alpha_1 \beta_1 \quad \alpha_1 \beta_j \quad q \quad r_q + w_q > r_q + l_q \dots$