Ред на елемент и цикличн~~ата~~ група

$4\mathbb{Z} = \{ k(4) = \underbrace{4 + \dots + 4}_{k} \mid k \in \mathbb{Z} \}$

$(L, +)$ $\quad k > 0$

$k(x) = \underbrace{x + \dots + x}_{k}$

$s = -k$

$s(x) = -k(x) = \underbrace{(-x) + (-x) + \dots + (-x)}_{k}$

$(t+k)x = t(x) + k(x)$

$0(x) = 0$

$(G, \circ)$ $\quad k > 0$

$\underbrace{a a \dots a}_{k} = a^k$

$s = -k$

$a^s = \underbrace{(a^{-1}) \cdot (a^{-1}) \dots (a^{-1})}_{k}$

$a^0 = e$

$a^t a^k = a^{t+k}$

$3 \in (\mathbb{Q}^*, \cdot) \Rightarrow \langle 3 \rangle = \{3^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$a \in G$

$\langle x \rangle = \{k(x) \mid k \in \mathbb{Z}\}$

циклична подгрупа породена от x

$\langle a \rangle = \{a^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

мултипликативна подгр. породена от x

Св-во 1

Нека $(G, \cdot)$, $a \in G$, $H < G$ и $a \in H$

$\Rightarrow \langle a \rangle \subset H \mid \langle a \rangle < H$

$a \in H \Rightarrow \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{k} \in H$, $a^{-1} \in H \Rightarrow \underbrace{(a^{-1}) \cdots (a^{-1})}_{k} \in H$

$\Rightarrow \langle a \rangle \subset H$

цикличната подгр. $\langle a \rangle$ е min подгрупа

която съдържа a

$3 \in (\mathbb{Q}^*, \cdot) \Rightarrow \langle 3 \rangle = \{3^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$3 \in (\mathbb{Q}, +) \Rightarrow \langle 3 \rangle = \{k.3 \mid k \in \mathbb{Z}\} = 3\mathbb{Z}$

$(\mathbb{Z}, +)$ $\langle 1 \rangle = \mathbb{Z}$; $\langle -1 \rangle = \mathbb{Z}$ $\Rightarrow$ $\mathbb{Z}$ е цикличнa

Опр. $(G, \cdot)$ е цикл. група, когато $\exists\, a \in G$: $\langle a \rangle = G = \{a^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Пр. $\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \bar{5}\}$

$\mathbb{Z}_6 = \langle \bar{1} \rangle = \{\bar{0}, \bar{1}, 2(\bar{1}) = \bar{2}; 3(\bar{1}) = \bar{3}, \ldots, 5(\bar{1}) = \bar{5}\}$

аналогично $\mathbb{Z}_n = \langle \bar{1} \rangle$ $\underline{\forall n \text{ произв.}}$

$\mathbb{Z}_n$ циклични

$C_n = \{x \in \mathbb{C} \mid x^n = 1\} \subset \mathbb{C}^*$

$\omega_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$

$C_n = \{\underset{\underset{1}{\parallel}}{\omega_0}, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-1}\} = \{1, \omega_1, \omega_1^2, \omega_1^3, \dots, \omega_1^{n-1}\}$ / $\omega_1^n = 1$

$\omega_k = \left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^k = \omega_1^k$

$C_n = \langle \omega_1 \rangle$ циклична група от степен n

Св-во Ако $G = \langle a \rangle \Rightarrow G$ е Абелева

$\mathbb{Z}_n = \langle \bar{1} \rangle$ $\quad n(\bar{1}) = \underbrace{\bar{1} + \dots + \bar{1}}_{n} = \bar{0}$

$\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle$ $\quad n(1) = n \neq 0$ за $n \neq 0$

Опр. $a \in G$, $(G, \cdot)$

реда на a е k когато k е min ест. число, за което $a^k = e$

Ако $\forall k \in \mathbb{N}$ е изпълнено че $a^k \neq e \Rightarrow a$ има ред ∞

$|a| = k$ или $O(a) = k$; $ord(a) = k$

$(L, *)$

$x \in L$

k min ест. число

$k(x) = 0$

ТВ Нека $(G, \cdot)$, $a \in G$ и $|a| = k$

Тогава:

а) $a^s = e \Leftrightarrow k \mid s$

б) $a^s = a^t \Leftrightarrow s \equiv t \pmod{k}$

Д-во а) Нека $|a| = k$ и $a^s = e \Rightarrow s = kq + r$, $0 \leq r < k$

$\Rightarrow e = a^s = a^{kq+r} = a^{kq} \cdot a^r = (a^k)^q \cdot a^r = e \cdot a^r = a^r$

$\Rightarrow$ единствено возм. е $r = 0 \Rightarrow k \mid s$

$\Leftarrow k \mid s \Rightarrow s = kt \Rightarrow a^s = a^{kt} = \underbrace{(a^k)}_{=e}{}^t = e$

б) $a^s = a^t \Leftrightarrow a^s \cdot a^{-t} = e \Leftrightarrow a^{s-t} = e \Leftrightarrow k \mid (s-t) \Leftrightarrow s \equiv t (k)$

Тв/ Нека $(G, \cdot)$ е група и $a \in G$

$\Rightarrow |\langle a \rangle| = |a|$

Д-во Нека $|a| = k$ $(\neq \infty)$

Нека $s \in \mathbb{Z}$; $s = kq + r$, $0 \leq r < k$

$a^s = a^{kq+r} = \underbrace{(a^k)}_{e}{}^q \cdot a^r = e \cdot a^r = a^r$

$\Rightarrow a^s = a^r \in \{a^0, a^1, \dots, a^{k-1}\}$

Ако $s \neq t$ и $s, t \in \{0, 1, \dots, k-1\}$

$a^s \neq a^t$, защото $k \nmid (s-t)$

$\Rightarrow \langle a \rangle = \{a^0, a^1, \dots, a^{k-1}\}$

$|\langle a \rangle| = k$

когато $|a| = \infty$

$\Rightarrow a^x \neq e$ за $x \neq 0$

$\Rightarrow a^x \neq a^s$ за $x \neq s$

$\Rightarrow \{a^x \mid x \in \mathbb{Z}\}$ няма повтарящи се елементи

$\Rightarrow |\langle a \rangle| = \infty$

$C_n = \langle \omega_1 \rangle =$

$= \{1, \omega_1, \omega_1^2, \dots, \omega_1^{n-1}\}$

$= \{\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} \mid 0 \leq k < n\}$

$\mathbb{Z}_n = \langle \bar{1} \rangle =$

$= \{\bar{0}, \bar{1}, 2(\bar{1}), \dots, (n-1)\bar{1}\}$