Задача. Спрямо стандартния базис на $\mathbb{R}^3$ линеен оператор φ има матрица A. Да се намери ортонормиран базис на $\mathbb{R}^3$, в който φ има диагонална матрица, както и тази матрица, ако

а) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение.

$$f_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & -1 \\ -1 & -\lambda & -1 \\ -1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - 1 - 1 + \lambda + \lambda + \lambda = -\lambda^3 + 3\lambda - 2 = -(\lambda - 1)^2(\lambda + 2).$$

Следователно собствените стойности на φ са $\lambda_{1,2} = 1$ и $\lambda_3 = -2$.

$\boxed{\lambda = 1}$

$$A - E = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Полагаме $x_2 = p$, $x_3 = q$, тогава $x_1 = -p - q$ и множеството от решенията на хомогенната система с матрица $A - E$ е

$$\{(-p - q, p, q) \mid p, q \in \mathbb{R}\}.$$

$$\left.\begin{array}{ll} p = 1, q = 0: & \boldsymbol{a}_1 = (-1, 1, 0) \\ p = 0, q = 1: & \boldsymbol{a}_2 = (-1, 0, 1) \end{array}\right\} \text{ ФСР.}$$

Полагаме $\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1 = (-1, 1, 0)$. Търсим $\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_2 + \mu \boldsymbol{b}_1$, където $\mu = -\dfrac{(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1)}{(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1)} = -\dfrac{1}{2}$. Следователно

$$\boldsymbol{b}_2 = (-1, 0, 1) - \frac{1}{2}(-1, 1, 0) = \frac{1}{2}(-1, -1, 2).$$

След нормиране на тези вектори, получаваме

$$\boldsymbol{v}_1 = \frac{\boldsymbol{b}_1}{|\boldsymbol{b}_1|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0), \quad \boldsymbol{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, -1, 2).$$

$\boxed{\lambda = -2}$

$$A + 2E = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Полагаме $x_3 = p$, тогава $x_2 = p$, $x_1 = p$ и множеството от решенията на хомогенната система с матрица $A + 2E$ е $\{(p, p, p) \mid p \in \mathbb{R}\}$; при $p = 1$: $\boldsymbol{a}_3 = (1, 1, 1)$ — ФСР, а след нормиране

$$\boldsymbol{v}_3 = \frac{\boldsymbol{a}_3}{|\boldsymbol{a}_3|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1).$$

Следователно $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ е търсеният ортонормиран базис. Матрицата на φ в този базис е $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Нека

$$T = T_{\boldsymbol{e} \to \boldsymbol{v}} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \end{array}.$$ Тогава T е ортогонална матрица и $D = T^{-1}AT$.

б) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$f_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 4-\lambda & 4-\lambda \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$(4-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(1-\lambda)^2.$$

Задача. Нека $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Да се намерят ортогонална матрица T и диагонална матрица D, такива че $T^{-1}AT = D$.

Решение. $f_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 & -2 \\ -2 & 6-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(6-\lambda)(4-\lambda)-4(6-\lambda)-4(4-\lambda) = (5-\lambda)(24-10\lambda+\lambda^2)-8(5-\lambda) = (5-\lambda)(\lambda^2-10\lambda+16) = -(\lambda-5)(\lambda-2)(\lambda-8)$.

Търсим ортонормиран базис на $\mathbb{R}^3$, в който линейният оператор φ, с матрица A в стандартния базис на $\mathbb{R}^3$, има диагонална матрица.

$\boxed{\lambda = 2}$ Търсим ФСР на хомогенната система с матрица

$$A - 2E = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Полагаме $x_2 = p$, тогава $x_1 = x_3 = 2p$ и множеството от решенията е $\{(2p, p, 2p) \mid p \in \mathbb{R}\}$. При $p = 1$: $\boldsymbol{a}_1 = (2, 1, 2)$, а след нормиране $\boxed{\boldsymbol{v}_1 = \frac{1}{3}(2, 1, 2)}$.

$\boxed{\lambda = 5}$ Търсим ФСР на хомогенната система с матрица

$$A - 5E = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Полагаме $x_1 = p$, тогава $x_2 = 2p$, $x_3 = -2p$ и множеството от решенията е $\{(p, 2p, -2p) \mid p \in \mathbb{R}\}$. При $p = 1$: $\boldsymbol{a}_2 = (1, 2, -2)$, а след нормиране $\boxed{\boldsymbol{v}_2 = \frac{1}{3}(1, 2, -2)}$.

$\boxed{\lambda = 8}$ Търсим ФСР на хомогенната система с матрица

$$A - 8E = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Полагаме $x_3 = p$, тогава $x_2 = 2p$, $x_1 = -2p$ и множеството от решенията е $\{(-2p, 2p, p) \mid p \in \mathbb{R}\}$. При $p = 1$: $\boldsymbol{a}_3 = (-2, 2, 1)$, а след нормиране $\boxed{\boldsymbol{v}_3 = \frac{1}{3}(-2, 2, 1)}$.

Тогава $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ е търсеният ортонормиран базис на $\mathbb{R}^3$. Матрицата на φ в този базис е $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$. Нека $T = T_{\boldsymbol{e} \to \boldsymbol{v}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Тогава T е ортогонална и $D = T^{-1}AT$.

Задача. Нека $\boldsymbol{a} = (0, -1, 1, -1)$ е вектор от евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ и нека $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ е изображението, зададено чрез

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = -3\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})\boldsymbol{a}, \qquad \text{за всяко } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4.$$

а) Докажете, че φ е симетричен оператор;

Решение. Нека $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^4$ и $\lambda \in \mathbb{R}$, тогава

$$\begin{aligned} \varphi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) &= -3(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{a})\boldsymbol{a} \\ &= -3\boldsymbol{x} - 3\boldsymbol{y} + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{a})\boldsymbol{a} \\ &= -3\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{y} + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{a})\boldsymbol{a} \\ &= \varphi(\boldsymbol{x}) + \varphi(\boldsymbol{y}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda \boldsymbol{x}) &= -3(\lambda \boldsymbol{x}) + (\lambda \boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})\boldsymbol{a}\\ &= \lambda(-3\boldsymbol{x}) + \lambda(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})\boldsymbol{a}\\ &= \lambda(-3\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})\boldsymbol{a})\\ &= \lambda\varphi(\boldsymbol{x}),\end{aligned}$$

следователно $\varphi \in \mathrm{Hom}\mathbb{R}^4$. При това,

$$\begin{aligned}(\varphi(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}) &= (-3\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})\boldsymbol{a}, \boldsymbol{y})\\ &= -3(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{y})\\ (\boldsymbol{x}, \varphi(\boldsymbol{y})) &= (\boldsymbol{x}, -3\boldsymbol{y} + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{a})\boldsymbol{a})\\ &= -3(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{a})(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}),\end{aligned}$$

така че $(\varphi(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \varphi(\boldsymbol{y}))$ за всяко $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^4$, т.е. φ е симетричен оператор.

б) Да се намери ортонормиран базис на $\mathbb{R}^4$, в който матрицата D на φ е диагонална.

Решение. Нека $\boldsymbol{e}_1 = (1,0,0,0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0,1,0,0)$, $\boldsymbol{e}_3 = (0,0,1,0)$, $\boldsymbol{e}_4 = (0,0,0,1)$ е стандартният базис на $\mathbb{R}^4$. Имаме

$$\begin{aligned}\varphi(\boldsymbol{e}_1) &= -3\boldsymbol{e}_1 + (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{a})\boldsymbol{a} = (-3,0,0,0) + 0(0,-1,1,-1) = (-3,0,0,0)\\ \varphi(\boldsymbol{e}_2) &= -3\boldsymbol{e}_2 + (\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{a})\boldsymbol{a} = (0,-3,0,0) - 1(0,-1,1,-1) = (0,-2,-1,1)\\ \varphi(\boldsymbol{e}_3) &= -3\boldsymbol{e}_3 + (\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{a})\boldsymbol{a} = (0,0,-3,0) + (0,-1,1,-1) = (0,-1,-2,-1)\\ \varphi(\boldsymbol{e}_4) &= -3\boldsymbol{e}_4 + (\boldsymbol{e}_4, \boldsymbol{a})\boldsymbol{a} = (0,0,0,-3) - 1(0,-1,1,-1) = (0,1,-1,-2)\end{aligned}$$

и φ има матрица

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -2 & -1 & 1\\ 0 & -1 & -2 & -1\\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

в стандартния базис на $\mathbb{R}^4$ (оттук също следва, че операторът е симетричен, тъй като A е симетрична и A е матрицата на φ в стандартния базис, който е ортонормиран).

$$f_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 0 & 0 & 0\\ 0 & -2-\lambda & -1 & 1\\ 0 & -1 & -2-\lambda & -1\\ 0 & 1 & -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+3)\begin{vmatrix} -2-\lambda & -1 & 1\\ -1 & -2-\lambda & -1\\ 1 & -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$-(\lambda+3)\begin{vmatrix} -2-\lambda & -1 & 1\\ 0 & -3-\lambda & -3-\lambda\\ 1 & -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+3)^2\begin{vmatrix} -2-\lambda & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+3)^2\begin{vmatrix} -2-\lambda & -2 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 1+\lambda & -2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$(\lambda+3)^2(-1)^{2+3}[(-2-\lambda)(1+\lambda)+2] = (\lambda+3)^2(\lambda^2+3\lambda) = \lambda(\lambda+3)^3,$$

следователно $\lambda_{1,2,3} = -3$, $\lambda_4 = 0$.

$\boxed{\lambda = -3}$

$$A + 3E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Полагаме $x_1 = p$, $x_3 = q$, $x_4 = r$, тогава $x_2 = q - r$ и множеството от решенията на хомогенната система с матрица $A + 3E$ е

$$\{(p, q-r, q, r) \mid p, q, r \in \mathbb{R}\}.$$

$$\left.\begin{array}{ll} p=1, q=0, r=0: & \boldsymbol{a}_1 = (1,0,0,0)\\ p=0, q=1, r=0: & \boldsymbol{a}_2 = (0,1,1,0)\\ p=0, q=0, r=1: & \boldsymbol{a}_3 = (0,-1,0,1) \end{array}\right\} \text{ФСР},$$

като $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) = 0$. Полагаме $\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_2$ и търсим $\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{a}_3 + \lambda_1\boldsymbol{b}_1 + \lambda_2\boldsymbol{b}_2$, където

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -\frac{(\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_1)}{(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1)} = -\frac{0}{1} = 0\\ \lambda_2 &= -\frac{(\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_2)}{(\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_2)} = -\frac{-1}{2} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Следователно $\boldsymbol{b}_3 = (0,-1,0,1) + \frac{1}{2}(0,1,1,0) = \frac{1}{2}(0,-1,1,2)$. След нормиране на тези вектори, получаваме

$$\boldsymbol{v}_1 = \frac{\boldsymbol{b}_1}{|\boldsymbol{b}_1|} = (1,0,0,0), \quad \boldsymbol{v}_2 = \frac{\boldsymbol{b}_2}{|\boldsymbol{b}_2|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0,0), \quad \boldsymbol{v}_3 = \frac{\boldsymbol{b}_3}{|\boldsymbol{b}_3|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(0,-1,1,2).$$

$\boxed{\lambda = 0}$

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Полагаме $x_4 = p$, тогава $x_3 = -p$, $x_2 = p$, $x_1 = 0$ и множеството от решенията на хомогенната система с матрица A е $\{(0,p,-p,p) \mid p \in \mathbb{R}\}$; при $p = 1$: $\boldsymbol{a}_4 = (0,1,-1,1)$ — ФСР, а след нормиране

$$\boldsymbol{v}_4 = \frac{1}{\sqrt{3}}(0,1,-1,1).$$

Следователно $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ е търсеният ортономиран базис на $\mathbb{R}^4$.

Втори начин. Забелязваме, че $\varphi(\boldsymbol{a}) = -3\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})\boldsymbol{a} = -3\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0} = 0.\boldsymbol{a}$ и значи 0 е собствена стойност на φ, а $\boldsymbol{a}$ е собствен вектор, съответстващ на собствената стойност 0. Да означим $U = l(\boldsymbol{a})$. Тогава за всеки вектор $\boldsymbol{v} \in U^\perp$ имаме

$$\varphi(\boldsymbol{v}) = -3\boldsymbol{v} + \underbrace{(\boldsymbol{v},\boldsymbol{a})}_{=0}\boldsymbol{a} = -3\boldsymbol{v}$$

и следователно -3 е собствена стойност на φ и всеки вектор от $U^\perp$ е собствен вектор, съответстващ на собствената стойност -3.

Търсим ортонормиран базис на $U^\perp$.

$$U^\perp : |x_2 - x_3 + x_4 = 0 \ ,$$

полагаме $x_1 = p$, $x_3 = q$, $x_4 = r$, тогава $x_2 = q - r$ и

$$U^\perp = \{(p, q-r, q, r) \mid p,q,r \in \mathbb{R}\}.$$

$$\left.\begin{array}{ll} p=1, q=0, r=0: & \boldsymbol{a}_1 = (1,0,0,0) \\ p=0, q=1, r=0: & \boldsymbol{a}_2 = (0,1,1,0) \\ p=0, q=0, r=1: & \boldsymbol{a}_3 = (0,-1,0,1) \end{array}\right\} \text{ФСР},$$

като $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) = 0$. Полагаме $\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_2$ и търсим $\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{a}_3 + \lambda_1\boldsymbol{b}_1 + \lambda_2\boldsymbol{b}_2$, където

$$\begin{array}{lllllll} \lambda_1 & = & -\dfrac{(\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{b}_1)}{(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_1)} & = & -\dfrac{0}{1} & = & 0 \\ \lambda_2 & = & -\dfrac{(\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{b}_2)}{(\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_2)} & = & -\dfrac{-1}{2} & = & \dfrac{1}{2} \end{array}.$$

Следователно $\boldsymbol{b}_3 = (0,-1,0,1) + \frac{1}{2}(0,1,1,0) = \frac{1}{2}(0,-1,1,2)$. След нормиране на тези вектори, получаваме

$$\boldsymbol{v}_1 = \frac{\boldsymbol{b}_1}{|\boldsymbol{b}_1|} = (1,0,0,0), \quad \boldsymbol{v}_2 = \frac{\boldsymbol{b}_2}{|\boldsymbol{b}_2|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0,0), \quad \boldsymbol{v}_3 = \frac{\boldsymbol{b}_3}{|\boldsymbol{b}_3|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(0,-1,1,2)$$

ортонормиран базис на $U^\perp$. След нормиране на $\boldsymbol{a}$ (базис на U), получаваме

$$\boldsymbol{v}_4 = \frac{1}{\sqrt{3}}(0,1,-1,1)$$

и $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ е ортонормиран базис (на $\mathbb{R}^4$) от собствени вектори.

Задача. Да се пресметне детерминантата от n-ти ред:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} -12 & -5 & -5 & \dots & -5 & -5 \\ -7 & -12 & -5 & \dots & -5 & -5 \\ -7 & -7 & -12 & \dots & -5 & -5 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -7 & -7 & -7 & \dots & -12 & -5 \\ -7 & -7 & -7 & \dots & -7 & -12 \end{vmatrix}$$

Решение. Имаме

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} -12 & -5 & -5 & \dots & -5 & -5 \\ -7 & -12 & -5 & \dots & -5 & -5 \\ -7 & -7 & -12 & \dots & -5 & -5 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -7 & -7 & -7 & \dots & -12 & -5 \\ -7 & -7 & -7 & \dots & -7 & -12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -12 & -5 & -5 & \dots & -5 & -5 \\ -7 & -12 & -5 & \dots & -5 & -5 \\ -7 & -7 & -12 & \dots & -5 & -5 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -7 & -7 & -7 & \dots & -12 & -5 \\ -7 & -7 & -7 & \dots & -7 & -5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -12 & -5 & -5 & \dots & -5 & 0 \\ -7 & -12 & -5 & \dots & -5 & 0 \\ -7 & -7 & -12 & \dots & -5 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -7 & -7 & -7 & \dots & -12 & 0 \\ -7 & -7 & -7 & \dots & -7 & -7 \end{vmatrix} =$$

$$(-5)\begin{vmatrix} -12 & -5 & -5 & \dots & -5 & 1 \\ -7 & -12 & -5 & \dots & -5 & 1 \\ -7 & -7 & -12 & \dots & -5 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -7 & -7 & -7 & \dots & -12 & 1 \\ -7 & -7 & -7 & \dots & -7 & 1 \end{vmatrix} + (-7)(-1)^{2n}\Delta_{n-1} = (-5)\begin{vmatrix} -5 & 2 & 2 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 2 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & \dots & 2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} - 7\Delta_{n-1} =$$

$$(-5)(-5)^{n-1} - 7\Delta_{n-1} = (-5)^n - 7\Delta_{n-1},$$

т.е.

$$\Delta_n = (-5)^n - 7\Delta_{n-1}.$$

От друга страна, след транспониране на детерминантата, получаваме

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} -12 & -7 & -7 & \dots & -7 & -7 \\ -5 & -12 & -7 & \dots & -7 & -7 \\ -5 & -5 & -12 & \dots & -7 & -7 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -5 & -5 & -5 & \dots & -12 & -7 \\ -5 & -5 & -5 & \dots & -5 & -12 \end{vmatrix} = (-7)^n - 5\Delta_{n-1},$$

т.е. имаме

$$\begin{array}{rcrcl} \Delta_n & = & (-5)^n & - & 7\Delta_{n-1} \\ \Delta_n & = & (-7)^n & - & 5\Delta_{n-1} \end{array}.$$

Оттук $2\Delta_{n-1} = (-5)^n - (-7)^n$, т.е. $\Delta_{n-1} = \dfrac{(-5)^n - (-7)^n}{2}$ и значи $\Delta_n = \dfrac{(-5)^{n+1} - (-7)^{n+1}}{2}$.

Втори начин. Нека сме получили $\Delta_n = (-5)^n - 7\Delta_{n-1}$. Тогава

$$+\left|\begin{array}{rcrcrl} \Delta_n & = & (-5)^n & - & 7\Delta_{n-1} & \\ \Delta_{n-1} & = & (-5)^{n-1} & - & 7\Delta_{n-2} & .(-7) \\ \Delta_{n-2} & = & (-5)^{n-2} & - & 7\Delta_{n-3} & .(-7)^2 \\ \vdots & & & & & \\ \Delta_3 & = & (-5)^3 & - & 7\Delta_2 & .(-7)^{n-3} \\ \Delta_2 & = & (-5)^2 & - & 7\Delta_1 & .(-7)^{n-2} \\ \Delta_1 & = & -5 & - & 7 & .(-7)^{n-1} \end{array}\right.$$

и значи

$$\begin{array}{rcl}\Delta_n & = & (-5)^n+(-5)^{n-1}(-7)+(-5)^{n-2}(-7)^2+\cdots+(-5)^2(-7)^{n-2}+(-5)(-7)^{n-1}+(-7)^n\\ & = & \dfrac{(-5)^{n+1}-(-7)^{n+1}}{2}\end{array}$$

Втори начин за получаване на рекурентна връзка. От всеки ред изваждаме предходния, започвайки от последния. Получената детерминанта развиваме по последния ѝ стълб:

$$\Delta_n=\begin{vmatrix}-12 & -5 & -5 & \dots & -5 & -5 & -5\\ -7 & -12 & -5 & \dots & -5 & -5 & -5\\ -7 & -7 & -12 & \dots & -5 & -5 & -5\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\ -7 & -7 & -7 & \dots & -12 & -5 & -5\\ -7 & -7 & -7 & \dots & -7 & -12 & -5\\ -7 & -7 & -7 & \dots & -7 & -7 & -12\end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix}-12 & -5 & -5 & \dots & -5 & -5 & -5\\ 5 & -7 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0\\ 0 & 5 & -7 & \dots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -7 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 5 & -7 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 5 & -7\end{vmatrix} = (-5)(-1)^{n+1}5^{n-1}+(-1)^{n+n}(-7)\Delta_{n-1}=(-5)^n-7\Delta_{n-1}.$$

Задача. Нека $V=M_2(\mathbb{R})$, $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -3 & -3\end{pmatrix}$, а $\varphi,\psi:V\to V$, зададени по следните правила:

$$\begin{array}{rcll}\varphi(X) & = & 2A^2X+3AX & \text{за } X\in V;\\ \psi(X) & = & 2X^t & \text{за } X\in V.\end{array}$$

а) Да се докаже, че φ и ψ са линейни оператори.
б) Да се намерят матриците на φ и ψ в базиса

$$E_{11}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad E_{12}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad E_{21}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad E_{22}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

в) Да се намерят базиси на $\mathrm{Ker}\varphi$ и $\mathrm{Im}\psi$.
г) Да се намерят матриците на операторите $\varphi\psi$ и $\psi\varphi$ в дадения базис на V.

Решение. а) Нека $B,C\in M_2(\mathbb{R})$ и нека $\lambda\in\mathbb{R}$. Тогава

$$\begin{array}{rcl}\varphi(B+C) & = & 2A^2(B+C)+3A(B+C)=2A^2B+3AB+2A^2C+3AC=\varphi(B)+\varphi(C);\\ \varphi(\lambda B) & = & 2A^2(\lambda B)+3A(\lambda B)=\lambda(2A^2B+3AB)=\lambda\varphi(B)\end{array}$$

и следователно φ е линеен оператор.

$$\begin{array}{rcl}\psi(B+C) & = & 2(B+C)^t=2B^t+2C^t=\psi(B)+\psi(C);\\ \psi(\lambda B) & = & 2(\lambda B)^t=\lambda(2B^t)=\lambda\psi(B)\end{array}$$

и следователно ψ е линеен оператор.

б) Имаме $\varphi(X)=2A^2X+3AX=(2A^2+3A)X$, където $2A^2+3A=2\begin{pmatrix}1 & 1\\ -3 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -3 & -3\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}1 & 1\\ -3 & 3\end{pmatrix}=$ $2\begin{pmatrix}-2 & -2\\ 6 & 6\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}1 & 1\\ -3 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 3 & 3\end{pmatrix}$ и следователно $\varphi(X)=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 3 & 3\end{pmatrix}X$. Тогава

$$\begin{array}{rcl}\varphi(E_{11}) & = & \begin{pmatrix}-1 & -1\\ 3 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 3 & 0\end{pmatrix}=-1.E_{11}+0.E_{12}+3.E_{21}+0.E_{22}\\ \varphi(E_{12}) & = & \begin{pmatrix}-1 & -1\\ 3 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 0 & 3\end{pmatrix}=0.E_{11}-1.E_{12}+0.E_{21}+3.E_{22}\\ \varphi(E_{21}) & = & \begin{pmatrix}-1 & -1\\ 3 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 3 & 0\end{pmatrix}=-1.E_{11}+0.E_{12}+3.E_{21}+0.E_{22}\\ \varphi(E_{22}) & = & \begin{pmatrix}-1 & -1\\ 3 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 0 & 3\end{pmatrix}=0.E_{11}-1.E_{12}+0.E_{21}+3.E_{22}\end{array}$$

и следователно матрицата на φ в базиса $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ е

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \psi(E_{11}) &= 2E_{11}^t = 2E_{11} = 2.E_{11} + 0.E_{12} + 0.E_{21} + 0.E_{22} \\ \psi(E_{12}) &= 2E_{12}^t = 2E_{21} = 0.E_{11} + 0.E_{12} + 2.E_{21} + 0.E_{22} \\ \psi(E_{21}) &= 2E_{21}^t = 2E_{12} = 0.E_{11} + 2.E_{12} + 0.E_{21} + 0.E_{22} \\ \psi(E_{22}) &= 2E_{22}^t = 2E_{22} = 0.E_{11} + 0.E_{12} + 0.E_{21} + 2.E_{22} \end{aligned}$$

и следователно матрицата на ψ в базиса $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ е

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

в) $\boxed{\mathrm{Ker}\varphi}$

$$\mathrm{Ker}\varphi : \left| \begin{array}{rcrcrcrcl} -x_1 & + & & - & x_3 & & & = & 0 \\ & - & x_2 & & & - & x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & + & & + & 3x_3 & & & = & 0 \\ & & 3x_2 & & & + & 3x_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Полагаме $x_3 = p$, $x_4 = q$, тогава $x_1 = -p$, $x_2 = -q$ и множеството от решенията е

$$\{(-p, -q, p, q) \mid p, q \in F\}.$$

$$\left. \begin{array}{ll} p = 1, q = 0 : & \boldsymbol{v}_1 = (-1, 0, 1, 0) \\ p = 1, q = 0 : & \boldsymbol{v}_2 = (0, -1, 0, 1) \end{array} \right\} \text{ФСР, т.е. базис на } \mathrm{Ker}\varphi.$$

$\boxed{\mathrm{Im}\psi}$ Имаме $\det C = -16 \neq 0$, откъдето $r(\psi) = 4$ и следователно $\mathrm{Im}(\psi) = V$.

г) Матрицата на оператора $\varphi\psi$ в базиса $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ е

$$BC = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 6 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \end{pmatrix},$$

а на $\psi\varphi$

$$CB = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 6 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Задача. Да се реши матричното уравнение $XA = A + 3X$, където $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -3 \\ 1 & 7 & 6 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. Имаме $XA - 3X = A$, $XA + X.(-3E) = A$ и следователно $X(A - 3E) = A$, т.е.

$$X \begin{pmatrix} -1 & -3 & -3 \\ 1 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -3 \\ 1 & 7 & 6 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ -3 & 4 & 2 & -3 & 7 & 2 \\ -3 & 6 & -1 & -3 & 6 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -9 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & -4 & -9 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -9 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -18 & 9 & -2 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -20 & 8 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -27 & 13 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -18 & 9 & -2 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -47 & 21 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -27 & 13 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -18 & 9 & -2 \end{array}\right).$$

Следователно $X = (X^t)^t = \begin{pmatrix} -47 & -27 & -18 \\ 21 & 13 & 9 \\ -6 & -3 & -2 \end{pmatrix}$.

Задача. В линейно пространство V с базис $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4$ е даден линейният оператор $\mathcal{A}$ с матрица

$$A = \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & -3 \\ 0 & -2 & -11 & 1 \\ 0 & 6 & 6 & -12 \end{pmatrix}.$$

Да се намери базис, в който матрицата на $\mathcal{A}$ е диагонална, както и матрицата на оператора в този базис.

Решение. $f_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -9-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3-\lambda & 6 & -3 \\ 0 & -2 & -11-\lambda & 1 \\ 0 & 6 & 6 & -12-\lambda \end{vmatrix} = (-9-\lambda) \begin{vmatrix} -3-\lambda & 6 & -3 \\ -2 & -11-\lambda & 1 \\ 6 & 6 & -12-\lambda \end{vmatrix} =$
$(-9-\lambda) \begin{vmatrix} -9-\lambda & 6 & -3 \\ 9+\lambda & -11-\lambda & 1 \\ 0 & 6 & -12-\lambda \end{vmatrix} = (-9-\lambda) \begin{vmatrix} -9-\lambda & 6 & -3 \\ 0 & -5-\lambda & -2 \\ 0 & 6 & -12-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+9)^2 \begin{vmatrix} -5-\lambda & -2 \\ 6 & -12-\lambda \end{vmatrix} =$
$(\lambda+9)^2[(-5-\lambda)(-12-\lambda)+12] = (\lambda+9)^2(\lambda^2+17\lambda+72) = (\lambda+9)^3(\lambda+8)$

$\boxed{\lambda = -9}$ Търсим ФСР на хомогенната система с матрица

$$A + 9E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & -3 \\ 0 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 6 & 6 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Полагаме $x_1 = p$, $x_2 = q$, $x_3 = r$, тогава $x_4 = 2q + 2r$ и множеството от решенията е

$$\{(p, q, r, 2q + 2r) \mid p, q, r \in F\}.$$

$$\left.\begin{array}{ll} p = 1, q = 0, r = 0: & \boldsymbol{v}_1 = (1, 0, 0, 0) \\ p = 0, q = 1, r = 0: & \boldsymbol{v}_2 = (0, 1, 0, 2) \\ p = 0, q = 0, r = 1: & \boldsymbol{v}_3 = (0, 0, 1, 2) \end{array}\right\} \text{ФСР}.$$

$\boxed{\lambda = -8}$ Търсим ФСР на хомогенната система с матрица

$$A + 8E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & -3 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 6 & 6 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & -6 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Имаме $x_1 = 0$, полагаме $x_3 = p$, тогава $x_2 = -3p$, $x_4 = -3p$ и множеството от решенията е $\{(0, -3p, p, -3p) \mid p \in F$.
При $p = 1$: $\boldsymbol{v}_4 = (0, -3, 1, -3)$ — ФСР.

Следователно $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ е базис от собствени вектори на φ и матрицата на φ в този базис е

$$D = \begin{array}{cccc} \varphi(\boldsymbol{v}_1) & \varphi(\boldsymbol{v}_2) & \varphi(\boldsymbol{v}_3) & \varphi(\boldsymbol{v}_4) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \end{array}$$
$$D = \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

Задача. Да се пресметне детерминантата

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 4 & 4 & 4 & 4 & -2 \\ 4 & 4 & 5 & 4 & 4 & 4 & -2 \\ 4 & 4 & 4 & 5 & 4 & 4 & -2 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 5 & 4 & -2 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 5 & -2 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix}$$

Решение.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 4 & 4 & 4 & 4 & -2 \\ 4 & 4 & 5 & 4 & 4 & 4 & -2 \\ 4 & 4 & 4 & 5 & 4 & 4 & -2 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 5 & 4 & -2 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 5 & -2 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -6 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4+6.4.6 \end{vmatrix} = 148$$

Задача. Нека $V = M_2(F)$ и $\varphi, \psi : V \to V$ действат по правилата

$$\begin{aligned} \varphi(X) &= AX + XB, \\ \psi(X) &= XA + B, \end{aligned}$$

където $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Да се провери дали φ и ψ са линейни оператори във V и когато са такива да се напишат матриците им в базиса $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$.

Решение. За произволни $X, Y \in V$ и $\lambda \in F$ е в сила $\varphi(X+Y) = A(X+Y) + (X+Y)B = (AX+XB) + (AY+YB) = \varphi(X) + \varphi(Y)$, $\varphi(\lambda X) = A(\lambda X) + (\lambda X)B = \lambda(AX+XB) = \lambda\varphi(X)$ и следователно $\varphi \in \mathrm{Hom} V$.

Забелязваме, че $\psi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}A + B = B \neq \mathbf{0}$ и следователно $\psi \notin \mathrm{Hom} V$.

Имаме

$$\begin{aligned}
\varphi(E_{11}) &= \begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\3&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\3&0\end{pmatrix} &&= 2.E_{11}+1.E_{12}+3.E_{21}+0.E_{22}\\
\varphi(E_{12}) &= \begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&-1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix} &&= 2.E_{11}+0.E_{12}+0.E_{21}+3.E_{22}\\
\varphi(E_{21}) &= \begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\4&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\5&1\end{pmatrix} &&= 2.E_{11}+0.E_{12}+5.E_{21}+1.E_{22}\\
\varphi(E_{22}) &= \begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2\\0&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2\\2&3\end{pmatrix} &&= 0.E_{11}+2.E_{12}+2.E_{21}+3.E_{22}
\end{aligned}$$

и следователно матрицата на φ в базиса $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ е $\begin{pmatrix}2&2&2&0\\1&0&0&2\\3&0&5&2\\0&3&1&3\end{pmatrix}$.

Задача. В линейното пространство V с базис $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4$ е даден линейният оператор $\mathcal{A}$, действащ по правилото

$$\mathcal{A}(\xi_1\boldsymbol{e}_1+\xi_2\boldsymbol{e}_2+\xi_3\boldsymbol{e}_3+\xi_4\boldsymbol{e}_4)=(-2\xi_1-\xi_2+\xi_4)\boldsymbol{e}_1+(\xi_3-\xi_1)\boldsymbol{e}_2+(-5\xi_1-2\xi_2+\xi_3+2\xi_4)\boldsymbol{e}_3+(-5\xi_1-2\xi_2+\xi_3+2\xi_4)\boldsymbol{e}_4$$

за всяко $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$. Да се намерят матрицата на $\mathcal{A}$ в този базис и базиси на $\mathrm{Ker}\mathcal{A}, \mathrm{Im}\mathcal{A}$.

Решение.

$$\begin{array}{llllrcrcrcrcr}
\xi_1=1 & \xi_2=0 & \xi_3=0 & \xi_4=0: & \mathcal{A}(\boldsymbol{e}_1) & = & -2\boldsymbol{e}_1 & - & \boldsymbol{e}_2 & - & 5\boldsymbol{e}_3 & - & 5\boldsymbol{e}_4\\
\xi_1=0 & \xi_2=1 & \xi_3=0 & \xi_4=0: & \mathcal{A}(\boldsymbol{e}_2) & = & -\boldsymbol{e}_1 & & & - & 2\boldsymbol{e}_3 & - & 2\boldsymbol{e}_4\\
\xi_1=0 & \xi_2=0 & \xi_3=1 & \xi_4=0: & \mathcal{A}(\boldsymbol{e}_3) & = & & & \boldsymbol{e}_2 & + & \boldsymbol{e}_3 & + & \boldsymbol{e}_4\\
\xi_1=0 & \xi_2=0 & \xi_3=0 & \xi_4=1: & \mathcal{A}(\boldsymbol{e}_4) & = & \boldsymbol{e}_1 & & & + & 2\boldsymbol{e}_3 & + & 2\boldsymbol{e}_4
\end{array}$$

Следователно $\mathcal{A}$ има матрица

$$A=\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc}\mathcal{A}(\boldsymbol{e}_1) & \mathcal{A}(\boldsymbol{e}_3) & \mathcal{A}(\boldsymbol{e}_3) & \mathcal{A}(\boldsymbol{e}_4)\\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow\end{array}\\
\begin{pmatrix}-2&-1&0&1\\-1&0&1&0\\-5&-2&1&2\\-5&-2&1&2\end{pmatrix}
\end{array}$$

в базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4$.

$\boxed{\mathrm{Ker}\mathcal{A}}$

$$\mathrm{Ker}\mathcal{A}:\left|\begin{array}{rcrcrcrcl}
-2x_1 & - & x_2 & & & + & x_4 & = & 0\\
-x_1 & & & + & x_3 & & & = & 0\\
-5x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & & & = & 0\\
-5x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & & & = & 0
\end{array}\right.$$

$$\begin{pmatrix}-2&-1&0&1\\-1&0&1&0\\-5&-2&1&2\\-5&-2&1&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1&0&1&0\\-2&-1&0&1\\-5&-2&1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1&0&1&0\\0&-1&-2&1\\0&-2&-4&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1&0&1&0\\0&-1&-2&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Полагаме $x_3=p$, $x_4=q$, тогава $x_1=p$, $x_2=-2p+q$ и множеството от решенията е

$$\{(p,-2p+q,p,q)\mid p,q\in F\}.$$

$$\left.\begin{array}{ll}p=1,q=0: & \boldsymbol{v}_1=(1,-2,1,0)\\ p=1,q=0: & \boldsymbol{v}_2=(0,1,0,1)\end{array}\right\}\text{ФСР, т.е. базис на }\mathrm{Ker}\mathcal{A}.$$

$\boxed{\mathrm{Im}\mathcal{A}}$ Имаме $\mathrm{Im}\mathcal{A}=l(\mathcal{A}(\boldsymbol{e}_1),\mathcal{A}(\boldsymbol{e}_2),\mathcal{A}(\boldsymbol{e}_3),\mathcal{A}(\boldsymbol{e}_4))$.

$$\begin{array}{c}\mathcal{A}(\boldsymbol{e}_1)\\\mathcal{A}(\boldsymbol{e}_2)\\\mathcal{A}(\boldsymbol{e}_3)\\\mathcal{A}(\boldsymbol{e}_4)\end{array}\begin{pmatrix}-2&-1&-5&-5\\-1&0&-2&-2\\0&1&1&1\\1&0&2&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&-1&-1&-1\\-1&0&-2&-2\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&-1&-1&-1\\-1&0&-2&-2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

и следователно $\mathcal{A}(\boldsymbol{e}_1), \mathcal{A}(\boldsymbol{e}_2)$ са базис на $\mathrm{Im}\mathcal{A}$.