15. Развитие на функции в степенен ред. Дефиниции на експоненциалната и тригонометричните функции посредством степенен ред

Развитие на функции в степенен ред

Дефиниция

Нека D е интервал и т. a е вътрешна за D. Казваме, че $f : D \to \mathbb{R}$ се развива в степенен ред в т. a, ако съществуват интервал $E \subseteq D$, за който a е също вътрешна точка, и $a_n \in \mathbb{R}$, $n = 0, 1, \dots,$ такива, че

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n, \quad x \in E. \tag{1}$$

Тук се подразбира, че степенният ред вдясно е сходящ в E.

Единственост на развитието в степенен ред

Теорема 1

Ако $f(x)$ се развива в степенен ред в т. a

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n, \quad x \in E, \tag{2}$$

чиито радиус на сходимост не е 0, то $f(x)$ притежава производна от всеки ред в т. a и

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{3}$$

Доказателство

От (2) с $x = a$ следва, че $f(a) = a_0$ (всички членове за $n \geq 1$ са равни на 0); следователно $a_0 = \frac{f(a)}{0!}$.
По-нататък, от Теорема 3 в Тема 14 следва, че $f(x)$ е диференцируема в околност U на т. a (т.е. $U := (a - \delta, a + \delta)$ с някакво $\delta > 0$) и

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - a)^{n-1}, \quad x \in U. \tag{4}$$

В частност при $x = a$, както по-горе, получаваме $f'(a) = a_1$; следователно $a_1 = \frac{f'(a)}{1!}$.
Прилагайки отново Теорема 3 в Тема 14, но този път към реда горе вдясно, установяваме, че неговата сума $f'(x)$ е диференцируема в U и

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x - a)^{n-2}, \quad x \in U. \tag{5}$$

В частност при $x = a$, както по-горе, получаваме $f''(a) = 2a_2$; следователно $a_2 = \frac{f''(a)}{2!}$.

Продължавайки по същия начин, получаваме

$$f'''(x) = \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2)a_n(x-a)^{n-3}, \quad x \in U. \tag{6}$$

В частност при $x = a$ имаме $f'''(a) = 3.2.1.a_3$; следователно $a_3 = \frac{f'''(a)}{3!}$.
И така нататък, изобщо имаме

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n(x-a)^{n-k}, \quad x \in U, \tag{7}$$

откъдето при $x = a$ получаваме $f^{(k)}(a) = k(k-1).\cdots.1.a_k$; следователно $a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$.

Ред на Тейлър

Теорема 1 показва, че, ако дадена функция $f(x)$ се развива в степенен ред в т. a, то той непременно има вида

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \tag{8}$$

Това ни връща към формулата на Тейлър.:

Теорема (формула на Тейлър), ДИС 1, Тема 30, т-ма 2

Нека $f(x)$ притежава производни до ред $n+1$ включително в $(a-\delta, a+\delta)$, където $\delta > 0$. Тогава за всяко $x \in (a-\delta, a+\delta)$ съществува $c := c(x)$ между a и x такова, че

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c(x))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \tag{9}$$

Изобщо c, освен от x, зависи и от n, затова ще пишем по-нататък $c_n(x)$. Редът в (8) се нарича ред на Тейлър на $f(x)$ в т. a; при $a = 0$ се нарича още ред на Маклорен.

Развитие на функции в ст. ред чрез ф-лата на Тейлър

Нека $f(x)$ притежава производни от всеки ред в $(a-\delta, a+\delta)$, $\delta > 0$. Полагаме:

$$T_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \text{ — частичните суми на реда в (8)}$$

(още се нар. полиноми на Тейлър),

$$R_n(x) := \frac{f^{(n+1)}(c_n(x))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \text{— остатъчен чл. във ф-лата на Тейлър}$$

От ф-лата на Тейлър следва, че за $x \in (a-\delta, a+\delta)$ имаме

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \overset{\text{по деф.}}{\Longleftrightarrow} f(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x) \overset{\text{Тейлър}}{\Longleftrightarrow} R_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \tag{10}$$

Развитие в ред на Маклорен на e^x

Разглеждаме $f(x) := e^x$. Знаем, че $f^{(n)}(x) = e^x$ за всяко n; следователно $f^{(n)}(0) = 1$ и редът на Тейлър на e^x в т. 0 (т.е. редът на Маклорен на e^x) има вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \tag{11}$$

За да установим за кои $x \in \mathbb{R}$ имаме

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \tag{12}$$

ще изследваме за кои x остатъчният член във ф-лата на Тейлър клони към 0 при $n \to \infty$.
Сега той има вида

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_n(x))}{(n+1)!}\, x^{n+1} = \frac{e^{c_n(x)}}{(n+1)!}\, x^{n+1}, \tag{13}$$

където $c_n(x)$ е между 0 и x.

Следователно
$$|R_n(x)| \le e^{|x|} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}. \tag{14}$$

Знаем, че редът $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ е сходящ за всяко $x \in \mathbb{R}$. Тогава, както следва от НУ за сходимост на числови редове (Теорема 3, Тема 5, ДИС 1)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{15}$$

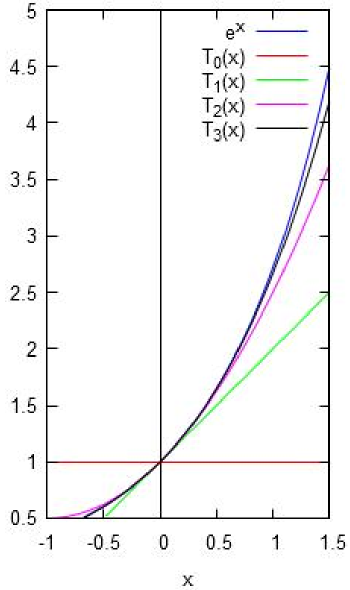
Оттук и (14) следва

$$\lim_{n\to\infty} |R_n(x)| = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{16}$$

Предвид (10), последното влече

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{17}$$

Сходимост на степенния ред на e^x



Дефиниция на e^x

Полученото развитие на e^x в (17) може да се използва за дефиниция на функцията e^x. По-точно това се постига по следния начин.

1) Показва се, че редът $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ е сходящ за всяко $x \in \mathbb{R}$.

2) Полагаме $e^x := \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $x \in \mathbb{R}$, т.е. означаваме сумата на реда с e^x.

Развитие на $\sin x$ и $\cos x$ в ред на Маклорен

Нека $f(x) := \sin x$. Имаме $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$. Следователно $f^{(2k)}(0) = 0$ и $f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$. Следователно редът на Маклорен на $\sin x$ има вида

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{т.е.} \quad x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \tag{18}$$

Остатъчният член има вида

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_n(x))}{(n+1)!}\, x^{n+1} = \frac{\sin\left(c_n(x) + \frac{(n+1)\pi}{2}\right)}{(n+1)!}\, x^{n+1}. \tag{19}$$

Както по-горе установяваме

$$|R_n(x)| = \left|\sin\left(c_n(x) + \frac{(n+1)\pi}{2}\right)\right| \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \tag{20}$$

$$\leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{21}$$

Следователно

$$R_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}; \tag{22}$$

следователно

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{23}$$

Аналогично се установява, че

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{24}$$

Както за e^x, развитията (23) и (24) може да се използват за дефиниция на $\sin x$ и $\cos x$.

Развитие в ред на Маклорен на $(1+x)^\alpha$

Посредством формулата на Тейлър, но с по-прецизна форма на остатъчния член, отколкото тази на Лагранж, се доказва следното развитие

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \tag{25}$$

където

- ако $\alpha \in \mathbb{N}_0$, то $x \in \mathbb{R}$,
- ако $\alpha > 0$, но $\alpha \notin \mathbb{N}$, то $x \in [-1, 1]$,
- ако $-1 < \alpha < 0$, то $x \in (-1, 1]$,
- ако $\alpha \leq -1$, то $x \in (-1, 1)$.

Този ред се нарича биномен.

Развитие на ф-ции в ст. ред чрез почленно диференциране

Можем да получим развитието в степепен ред на дадена функция чрез диференциране на вече известно развитие (Т-ма 3, Тема 14).
Пример: Вече е известно, че

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{26}$$

Тогава от Теорема 3, Тема 14 следва за $x \in \mathbb{R}$

$$\underbrace{(\sin x)'}_{= \cos x} \overset{(26)}{=} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right)' \overset{\text{т-ма 3, тема 14}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left((-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right)'}_{= (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}}.$$

Така получихме развитието на $\cos x$ в ред на Маклорен

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{27}$$

Развитие на ф-ции в ст. ред чрез почленно интегриране

Можем да получим развитието в степепен ред на дадена функция чрез интегриране на вече известно развитие (Т-ма 4, Тема 14).
Пример: Знаем, че

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad x \in (-1,1). \tag{28}$$

Следователно

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n, \quad -x \in (-1,1), \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad x \in (-1,1). \end{aligned} \tag{29}$$

Тогава от Теорема 4, Тема 14 следва, че за всяко $x \in (-1, 1)$ имаме

$$\underbrace{\int_0^x \frac{dt}{1+t}}_{=[\ln(1+t)]\big|_0^x = \ln(1+x)} \overset{(29)}{=} \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n \right) dt$$

$$\overset{\text{т-ма 4, тема 14}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \underbrace{\int_0^x t^n dt}_{= \frac{t^{n+1}}{n+1}\big|_0^x = \frac{x^{n+1}}{n+1}}.$$

Така получихме

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \quad x \in (-1, 1). \qquad (30)$$

Знаем (Теорема 4, Тема 14), че евентуално интервалът за x горе може да се разшири само до включване на краищата му. Явно $x \neq -1$ заради дефиниционната област на $\ln(1+x)$.

В т. $x = 1$ функцията $\ln(1+x)$ е дефинирана и непрекъсната, а дясната страна се свежда до числовия ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, който, както знаем (Т-ма 3, Пример, тема 7, ДИС 1), е сходящ. Сега от теоремата на Абел (Т-ма 5, тема 14) следва, че (30) е в сила и за $x = 1$.

Така установихме, че

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \quad x \in (-1, 1]. \tag{31}$$

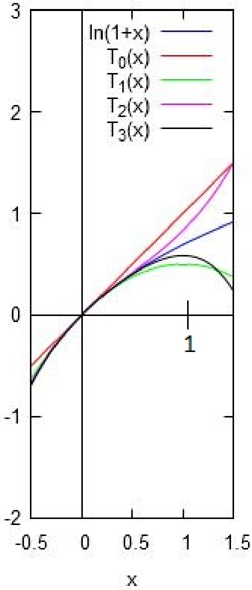
Аналогично се доказва и следното развитие в ред на Маклорен

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in [-1, 1]. \tag{32}$$

В частност, от това равенство при $x = 1$ получаваме

$$\pi = 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 4 \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + \cdots \right). \tag{33}$$

Сходимост на степенния ред на $\ln(1+x)$



Развитие на ф-ции в ст. ред чрез алгебрични операции

Можем да получим развитието в степепен ред на дадена функция от вече известни развития чрез прилагане на елементарни алгебрични операции.

Пример 1: Знаем, че
$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad x \in (-1, 1). \tag{34}$$

Следователно
$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n, \quad -x^2 \in (-1, 1), \tag{35}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, \quad x \in (-1, 1). \tag{36}$$

Пример 2: като използваме (34), получаваме
$$\frac{1}{2-x} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n, \quad \frac{x}{2} \in (-1, 1), \tag{37}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n+1}}, \quad x \in (-2, 2). \tag{38}$$