Системи на Чебишов

Задача 1. Да се намери $\sum_{k=0}^{n} k^3$ чрез интерполиране с разделени разлики.

Решение: Нека $S(n) = \sum_{k=0}^{n} k^3$ => $S(0) = 0, S(1) = 1, S(2) = 9, S(3) = 36, S(4) = 100, \dots, S(n) = S(n-1) + n^3$. Интерполационните възли са $x_i = i,\ i = 0, 1, 2, \dots, n$. Създаваме таблицата за намиране на разделените разлики:

x_i	S[i]	S[i,i+1]	S[i,i+1,i+2]	S[i,i+1,i+2,i+3]	S[i,i+1, …,i+4]	S[i,i+1, …,i+5]
0	0	1	7/2	2	¼	0
1	1	8	19/2	3	¼	…
2	9	27	37/2	4	…	0
3	36	64	61/2	…	¼	
4	100	125	…	n-1		
…	…	…	$\frac{3n^2 - 3n + 1}{2}$			
n-1	$S(n-1)$	n^3				
n	$S(n)$					

$$S(n) \in \pi_4 => S(n) = L_n(S; n) =$$
$$= 0 + 1.n + \frac{7}{2}n(n-1) + 2n(n-1)(n-2) + \frac{1}{4}n(n-1)(n-2)(n-3)$$
$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Системи на Чебишов:

Нека $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{n}$ са непрекъснати и линейно независими функции в интервала I. Казваме, че те образуват система на Чебишов в интервала I, ако всеки обобщен ненулев полином по тези функции има не повече от n различни нули в I.

Обобщен полином на функциите наричаме линейна комбинация на системата $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{n}$:

$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_k(x)$, където $a_k \neq 0$ за някое k.

Задача 2. Нека $\alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_n$ са различни реални числа. Да се докаже, че $\{e^{\alpha_i x}\}_{i=0}^{n}$ образуват Чебишова система върху реалната права.

Доказателство: Индукция по броя на функциите.

$n = 0, \varphi(x) = a_0 e^{\alpha_0 x} \neq 0$ за $a_0 \neq 0$ => твърдението е вярно.

Допускаме, че твърдението е вярно за $(n-1)$. Ще докажем, че твърдението е в сила за $n \in N$.

Да допуснем противното, т.е. съществува обобщен полином $\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k e^{\alpha_k x}$, който има $(n+1)$ различни реални нули $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$. Ясно е, че $a_i \neq 0, i = 0,1, \dots, n$, защото в противен случай ще попаднем в индукционното предположение. Тогава

$\varphi(x) = e^{\alpha_0 x}\{a_0 + a_1 e^{(\alpha_1-\alpha_0)x} + \cdots + a_n e^{(\alpha_n-\alpha_0)x}\}$. Но $e^{\alpha_0 x} \neq 0$ => нулите на $\varphi(x)$ съвпадат с нулите на $\theta(x) = a_0 + a_1 e^{(\alpha_1-\alpha_0)x} + \cdots + a_n e^{(\alpha_n-\alpha_0)x}$. За $\theta(x)$ прилагаме теоремата на Рол. Следователно $\theta'(x)$ има поне n различни реални нули. Но $\theta'(x)$ е обобщен полином на функциите

$\{e^{(\alpha_i-\alpha_0)x}\}_{i=1}^{n}$, където $\alpha_1-\alpha_0 < \alpha_2-\alpha_0 < \cdots < \alpha_n-\alpha_0$. Съгласно индукционното предположение $\theta'(x)$ има не повече от $(n-1)$ различни реални нули, което е противоречие, дължащо се на грешното допускане. Следователно $\{e^{\alpha_i x}\}_{i=0}^{n}$ образуват Чебишова система върху реалната права.

Задача 3. Нека $f(x) \in C^n[a,b]$ и $f^{(n)}(x) \neq 0, \forall x \in (a,b)$. Да се докаже, че $\{1, x, \dots, x^{n-1}, f(x)\}$ образуват Чебишова система в интервала $[a,b]$.

Доказателство: Да допуснем, че функциите не са Т-система в интервала $[a,b]$. Тогава съществува $\varphi(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n f(x)$ с $(n+1)$ различни нули в интервала $[a,b]$. Ясно е, че $a_n \neq 0$, защото ако $a_n = 0$, то $\varphi(x)$ има не повече от n различни нули. От теоремата на Рол следва, че $\varphi'(x)$ има $\boldsymbol{n}$ различни нули в (a,b) и след многократно приложение на теоремата на Рол получаваме, че $\varphi^{(n)}(x) = a_n f^{(n)}(x)$ има поне една нула в (a,b). Но $f^{(n)}(x) \neq 0$ и $a_n \neq 0 \Rightarrow \varphi^{(n)} \neq 0$, което е противоречие, дължащо се на грешното допускане. Следователно $\{1, x, \dots, x^{n-1}, f(x)\}$ образуват Чебишова система в интервала $[a,b]$.

Задача 4. Да се докаже, че $\{1, x, x\cos x\}$ образуват Чебишова система в интервала $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Доказателство: Да допуснем, че функциите $\{1, x, x\cos x\}$ не са Т-система в интервала. Тогава съществува $\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x\cos x$, която има три различни нули в интервала $[0, \frac{\pi}{2}]$, $a_2 \neq 0$, защото ако $a_2 = 0$, то $\varphi(x)$ има не повече от един корен. От теоремата на Рол следва, че $\varphi''(x)$ има поне един корен в интервала $(0, \frac{\pi}{2})$. Но $\varphi''(x) = -a_2(2\sin x + x\cos x) \neq 0, \forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Получихме противоречие, дължащо се на грешното допускане. Следователно $\{1, x, x\cos x\}$ образуват Чебишова система в интервала $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Задача 5. Да се докаже, че функциите $\{1, \sin x\}$ не образуват Чебишова система в интервала $\left[0, \frac{3\pi}{4}\right]$.

Доказателство: Трябва да намерим такава линейна комбинация на тези функции, която да има поне две нули в интервала $\left[0, \frac{3\pi}{4}\right]$. Нека $a_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}, a_1 = -1$. Функцията $\varphi(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \sin x$ има два корена $x_1 = \frac{\pi}{4}$ и $x_2 = \frac{3\pi}{4}$ в интервала $\left[0, \frac{3\pi}{4}\right]$. Следователно функциите $\{1, \sin x\}$ не образуват Чебишова система в интервала $\left[0, \frac{3\pi}{4}\right]$.

Интерполиране с тригонометрични полиноми

Нека $f(x)$ е периодична функция с период 2π. Нека са зададени стойностите на тази функция $f(x_k) = y_k$ в $(2n+1)$ възела $0 \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_{2n} \leq 2\pi$. Тогава може да построим единствен тригонометричен полином $\tau(f;x)$, който интерполира функцията $f(x)$ във възлите $\{x_k\}_{k=0}^{2n}$.

$$\tau(f;x) = \sum_{k=0}^{2n} \lambda_k(x) y_k,$$

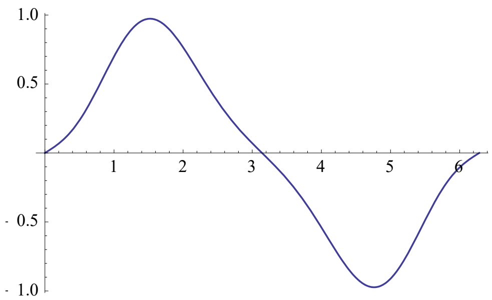
$$\lambda_k(x) = \prod_{j=0, j\neq k}^{2n} \frac{\sin\frac{x-x_j}{2}}{\sin\frac{x_k-x_j}{2}}.$$

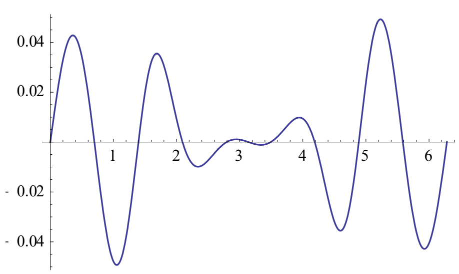
Изпълнени са следните интерполационни условия: $\tau(f;x_k) = f(x_k) = y_k,\ k = 0,1,\dots,2n$.

Задача: Да се състави програма за построяването на тригонометричен полином $\tau(f;x)$ за функцията $f(x) = \frac{\sin x}{1+(\cos x)^2}$ с интерполационни възли $x_k = \frac{2k\pi}{2n+1}, k = 0,1, \dots ,2n,$ за $n = 4$.

Решение:

```
n=4;
Do[x[k]=2k*Pi/(2n+1),{k,0,2n}];
f[t_]:=Sin[t]/(1+Cos[t]^2);
Do[l[k_,t_]:=(s=1;Do[If[j≠k,s*=Sin[(t-x[j])/2]/Sin[(x[k]-
x[j])/2]],{j,0,2n}];s),{k,0,2n}];
T[t_]:=Sum[l[k,t]*f[x[k]],{k,0,2n}];
Plot[T[t],{t,0,2Pi}]
Plot[f[t]-T[t],{t,0,2Pi}]
```





Задачи са самостоятелна работа:

1) Да се докаже, че функциите $\{1, \cos x\}$ не образуват Чебишова система в интервала $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
2) Да се докаже, че $\{1, x, x\sin x\}$ образуват Чебишова система в интервала $[\frac{\pi}{2}, \pi]$