13.10.2016 | Логическо програмиране

Тв Ако φ е изпълнима и ψ не е тавтология, и $\varphi \models \psi$, то φ и ψ имат поне едно общо елементарно съждение.

Доказателство: Нека φ - изпълнима. Тогава φ има модел - I.
ψ не е тавтология $\Rightarrow$ Има булева интерпретация за $\neg\psi$, при която ψ не е вярно. Нека $J \not\models \psi$, т.е. $J \models \neg\psi$. Да допуснем, че φ и ψ не споделят елементарно съждение. Да разгледаме нова булева интерпретация K: $K(p) = \begin{cases} I(p) & p \text{ участва във } \varphi \\ J(p) & p \text{ участва в } \psi \end{cases}$

I и K дават една и съща стойност на елементарните съждения, участващи във φ $\Rightarrow \|\varphi\|^K = \|\varphi\|^I = И$

J и K: Нека q е елементарно съждение, участващо в ψ. $\Rightarrow$ q не участва във $\varphi \Rightarrow K(q) = J(q) \Rightarrow \forall$ елементарно съждение, участващо в ψ, J и K съвпадат $\Rightarrow \|\psi\|^K = \|\psi\|^J = Л$

Т.к. $\varphi \models \psi$ и K е модел за φ, имаме, че $K \models \psi \Rightarrow \|\psi\|^K = И$ ↯

$\Rightarrow$ Допускането е невалидно

Нека BV е множество от различни букви, $BV \neq \emptyset$. Ще ги наричаме съждителни променливи.

Нека $\neg, \&, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ са букви, които не са от BV. Ще ги наричаме съждителни връзки.

Нека (и) са букви, които не са нито съждителни променливи, нито съждителни връзки.

*) Индуктивна дефиниция на съждителна формула

- Всяка съждителна променлива е съждителна формула.
- Ако φ - съждителна формула, то $\neg\varphi$ също е съждителна формула.
- Ако φ и ψ са съждителни формули, а $\sigma \in \{\&, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$, то $(\varphi \sigma \psi)$ е също е съждителна формула.

$\Rightarrow$ контекстно-свободен език.

13.10.2016 | **Логическо програмиране**

Индуктивни доказателства (индуктивен принцип за доказване на свойства на съждителни формули)

Никое собствено начало не е собствен край $\overbrace{\quad}^{\alpha}\!\!\longrightarrow \varphi \qquad \longmapsto\underbrace{\quad}_{\alpha}\psi$

Тв Нека I е булева интерпретация. Тогава има единствено продължение I^* на I, деф-но за всички формули и удовлетворяващо:

$$I^*(\neg\varphi) = H_\neg(I^*(\varphi))$$
$$I^*((\varphi\sigma\psi)) = H_\sigma(I^*(\varphi), I^*(\psi))$$
$$I^*(p) = I(p) \quad \forall p \in BV$$

Тв Нека I и J са ~~булеви~~ булеви интерпретации. Нека φ е съждителна формула. Ако $\forall p \in \varphi$ ~~и~~ $I(p) = J(p)$, то $I \models \varphi \Leftrightarrow J \models \varphi$.

Доказателство: С индукция относно построението на φ доказваме, че ако $\forall p \in \varphi\ I(p) = J(p)$, то $\|\varphi\|^I = \|\varphi\|^J$

- $\varphi \in BV \Rightarrow \varphi = p \Rightarrow \|p\|^I = I(p) = J(p) = \|p\|^J$
- $\varphi = \neg\psi$ и твърдението е вярно за ψ

т.е. ако за всички променливи на ψ I и J имат една и съща стойност, то $\|\psi\|^I = \|\psi\|^J$. Нека за $\forall p \in \varphi$ $I(p) = J(p)$. Тогава $\forall p \in \psi \Rightarrow I(p) = J(p) \Rightarrow$ от ИП $\Rightarrow \|\psi\|^I = \|\psi\|^J \Rightarrow \|\neg\psi\|^I = H_\neg(I(\psi)) = H_\neg(J(\psi)) = \|\neg\psi\|^J$.

- $\varphi = (\varphi_1 \sigma \varphi_2)$ и е вярно за φ_1 и φ_2 ... аналогично

Език на предикатното смятане

I Логическа част

- Безкрайна азбука Var (изброима) - индивидуални променливи
- Съждителни връзки - $\neg, \&, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$
- Квантори - $\forall$ (всеобщност), $\exists$ (съществуване)
- Помощни символи - '(', ')', ','.
- Опция - формално равенство „="

13.10.2016 | Логическо програмиране

II Нелогическа част

- $\mathbb{C}$onst – $c, d, a \dots$ – индивидуални константи
- $\mathbb{F}$unc – $f, g \dots$ – функционални символи
- $\#: \mathbb{F}unc \to \mathbb{N}^+$ – брой аргументи / арност, $\#(f) > 0$
- $\mathbb{P}$red – $p, q \dots$ – предикатни символи

  $\#: \mathbb{P}red \to \mathbb{N}^+$ – брой аргументи / арност, $\#(p) > 0$

Нека L е език на предикатното смятане (от първи ред). Дефинираме понятието терм (означение за обект / функция)

- Всяка индивидуална променлива е терм от L.
- Всяка индивидна константа от $\mathbb{C}onst$ е терм от L.
- Всеки път, когато f е функционален символ от L, $\#(f) = n > 0$, $\tau_1 \dots \tau_n$

са термове, то $f(\tau_1 \dots \tau_n)$ е терм от L.

$\mathcal{T}_L$ – всички термове (означаваме ги типично с τ и $\varkappa$)

Еднозначен синтактичен анализ на термове:

За всеки терм е в сила точно 1 от:

- τ е индивидна променлива
- τ е индивидна константа
- τ е от вида $f(\tau_1 \dots \tau_n)$, където f е еднозначно определен функционален символ от L с арност n, а $\tau_1 \dots \tau_n$ са еднозначно определени термове от L.

$f(\tau_1 \dots \tau_n) = f(\tau_1' \dots \tau_k') \Rightarrow n = k,\ \tau_i = \tau_i',\ i = \overline{1, n}$

$\tau = a_1 \dots a_n c_1 \dots c_k$

$\varkappa = a_1 \dots a_n d_1 \dots d_m$

$c_1 \neq d_1 \begin{cases} c_1 \text{ и } d_1 \text{ са индивидни променливи/константи} \\ c_1 \text{ и } d_1 \text{ са функционални символи} \\ c_1 \text{ и } d_1 \text{ са индивидна константа/променлива и функционален символ} \end{cases}$

Предикатни формули: $\mathcal{F}or_L$

13.10.2016 | Логическо програмиране

Атомарни формули $\mathcal{AF}or_L$ - това са думите от вида:

- $p(\tau_1 \ldots \tau_n)$, $p \in \mathbb{P}red_L$, $\#(p) = n$, $\tau_i \in \mathcal{T}_L$, $i = \overline{1,n}$

[• $(\tau_1 \doteq \tau_2)$ - при избрана опция „език с формално равенство"]

Формулите се дефинират със следната индуктивна дефиниция:

- Атомарните формули от L са формули от L.
- Ако φ е формула от L, то $\neg\varphi$ също е формула от L.
- Ако φ и ψ са формули от L и $\sigma \in \{\&, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$, то $(\varphi \sigma \psi)$ е също формула от L.
- Ако φ е формула от L, а x е индивидна променлива, то $\forall x \varphi$ и $\exists x \varphi$ също са формули от L.

! Ако имаме външни скоби, с най-висок приоритет е двуваленнтния знак.

Формулите, в които не се среща квантор, се наричат безкванторни или отворени.

Семантика

$\boxed{О}$ Нека L е предикатен език. Структура за L е наредена двойка от вида $\langle A, \mathbb{I} \rangle$, където $A \neq \emptyset$ множество (универсум на структурата), а $\mathbb{I}$ - интерпретация на L в A (дава смисъл на нелогическите символи)

- $\mathbb{I}(c) \in A$
- $\mathbb{I}(f) : A^{\#(f)} \to A$ (не е частична функция)
- $\mathbb{I}(p) \subseteq \underbrace{A \times \ldots \times A}_{\#(p)}$

Оценка на индивидни променливи в структура $\mathcal{A}$ е функция v: $v : Var \to A$.