# Действия с линейни изображения

$V_1, V_2, V_3$ лин. пр-ва над поле $F$

$\varphi, \psi, \dots$ линейни изображения $\begin{cases} \varphi(a+b) = \varphi(a)+\varphi(b) \\ \varphi(\lambda a) = \lambda\varphi(a) \end{cases}$

**Опр/** $\varphi; \psi : V_1 \to V_2$ линейни изображения

$\varphi+\psi : V_1 \to V_2$ определя се като $(\varphi+\psi)(x) = \varphi(x)+\psi(x)$

**С-в-во:** $\varphi+\psi$ също е линейно изображение

**Д-во** $(\varphi+\psi)(a+b) = \varphi(a+b)+\psi(a+b) = \varphi(a)+\varphi(b)+\psi(a)+\psi(b) =$

$$= (\varphi(a)+\psi(a)) + (\varphi(b)+\psi(b)) =$$

$$= (\varphi+\psi)(a) + (\varphi+\psi)(b)$$

$$(\varphi+\psi)(\lambda a) = \varphi(\lambda a) + \psi(\lambda a) = \lambda\varphi(a)+\lambda\psi(a) =$$

$$= \lambda(\varphi+\psi)(a)$$

---

**Опр.** $\lambda \in F$ $(\lambda\varphi) : V_1 \to V_2$ $\quad (\lambda\varphi)(a) = \lambda(\varphi(a))$

$\Rightarrow \lambda\varphi$ е линейно

Св-ва $\varphi, \psi, \tau : V_1 \to V_2$ линейни

$\big|(\varphi+\psi)(a) = \varphi(a)+\psi(a) = (\psi+\varphi)(a)$

1) $\varphi + \psi = \psi + \varphi$

2) $(\varphi+\psi)+\tau = \varphi + (\psi+\tau)$

3) $\mathbb{O} : V_1 \to V_2 \quad \mathbb{O}(a) = O_2$ е лин. изобр.

$(\varphi + \mathbb{O})a = \varphi(a) + \mathbb{O}(a) = \varphi(a) \Rightarrow \varphi + \mathbb{O} = \varphi$

4) $-\varphi : V_1 \to V_2 \ : (-\varphi)(a) = -(\varphi(a))$

$\begin{cases} (-\varphi)(a+b) = -(\varphi(a+b)) \\ \quad (-\varphi)(a) + (-\varphi)(b) \\ (-\varphi)(\lambda a) = -(\varphi(\lambda a)) = \\ = \lambda(-\varphi(a)) = \lambda(-\varphi)(a) \end{cases}$

$\varphi + (-\varphi) = \mathbb{O}$

5) $1\varphi = \varphi$

6) $(\lambda+\mu)\varphi = \lambda\varphi + \mu\varphi$

7) $\lambda(\varphi+\psi) = \lambda\varphi + \lambda\psi$

8) $(\lambda\mu)\varphi = \lambda(\mu\varphi)$

за $\lambda, \mu \in F$

$\varphi, \psi$ лин. изобр

$((\lambda+\mu)\varphi)a = (\lambda+\mu)(\varphi(a)) = \lambda(\varphi(a)) + \mu(\varphi(a)) =$
$= (\lambda\varphi)(a) + (\mu\varphi)(a) = (\lambda\varphi + \mu\varphi)a$

$(\lambda(\varphi+\psi))(a) = \lambda((\varphi+\psi)(a)) = \lambda(\varphi(a) + \psi(a)) =$
$= \lambda\varphi(a) + \lambda\psi(a) = (\lambda\varphi)(a) + (\lambda\psi)(a) =$
$= (\lambda\varphi + \lambda\psi)(a)$

$Hom(V_1, V_2) = \{\varphi \mid \varphi : V_1 \to V_2$ линейно изображение $\}$

**Т/** $Hom(V_1, V_2)$ е линейно пространство над полето $F$.

**Опр./** Ако $V_1$ има базис $(e)\ e_1, \dots, e_n$ и $V_2$ има базис $(g)\ g_1, \dots g_k$ и $\varphi : V_1 \to V_2$ линейно изображ.

$$\varphi(e_1) = a_{11}g_1 + a_{21}g_2 + \dots + a_{k1}g_k$$
$$\varphi(e_2) = a_{12}g_1 + a_{22}g_2 + \dots + a_{k2}g_k$$
$$\dots$$
$$\varphi(e_n) = a_{1n}g_1 + a_{2n}g_2 + \dots + a_{kn}g_k$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}_{k \times n} = A_{\varphi,(e),(g)}$$

матрица на $\varphi$ спрямо базисите $(e)$ на $V_1$ и $(g)$ на $V_2$

I/ Нека $V_1, V_2$ лин. пр-ва над $F$ и $(e) = e_1 \dots e_n$ баз. $V_1$ $(g) = g_1, \dots, g_k$ - базис $V_2$. Тогава

а) $\varphi, \psi : V_1 \to V_2$ линейни изображения

$\varphi = \psi \Leftrightarrow A_{\varphi,(e),(g)} = A_{\psi,(e),(g)}$

б) Ако $A \in M_{k\times n}(F)$ произволна $\Rightarrow \exists\, \varphi : V_1 \to V_2$ който има матрица $A$

в) Ако $\varphi : V_1 \to V_2$ има мат. $A \Rightarrow \lambda\varphi : V_1 \to V_2$ $(\lambda \in F)$ има матрица $\lambda A$

г) Ако $\varphi; \psi : V_1 \to V_2$ линейни и $A_\varphi, A_\psi$ - матриците им $\Rightarrow A_\varphi + A_\psi$ матрица на $\varphi + \psi$

Д-во а) $\varphi = \psi \Leftrightarrow \varphi(e_1) = \psi(e_1) \dots$
$\dots \varphi(e_n) = \psi(e_n)$
$\Rightarrow A_\varphi = A_\psi$ имат равни стълбове

б) Ако $A$ - произв. $A = (a_{ij})_{k\times n}$
$\varphi(e_1) = b_1 = a_{11}g_1 + a_{21}g_2 + \dots + a_{k1}g_k$
$\vdots$
$\varphi(e_n) = b_n = a_{1n}g_1 + a_{2n}g_2 + \dots + a_{kn}g_k$
$\exists!$ лин. изобр. $\varphi : V_1 \to V_2 : \varphi(e_i) = b_i$

$(\lambda\varphi)e_i = \lambda(\varphi(e_i))$
стълбовете на $\lambda A$ се получават от $A$ чрез умнож. по $\lambda$

$(\varphi+\psi)(e_i) = \varphi(e_i) + \psi(e_i)$
$i^{\text{-ти}}$ стълб на матрицата на $\varphi + \psi$ е сума на $i^{\text{-ти}}$ стълб на $A_\varphi$ + $i^{\text{-ти}}$ стълб на $A_\psi$

**Сл.)** Нека $V_1, V_2$ линейни пр-ва над полето $F$ и $(e) = e_1, \dots, e_n$ - базис на $V_1$, $(g) = g_1, \dots, g_k$ - базис на $V_2$

$\mu : Hom(V_1, V_2) \to M_{k\times n}(F)$ : $\mu(\varphi) = A_{\varphi,(e)(g)}$ матрицата на $\varphi$ спрямо $(e)$ и $(g)$

$\Rightarrow$ а) $\mu$ е изоморфизъм на линейни пространства

б) $\dim Hom(V_1, V_2) = \dim M_{k\times n}(F) = \underline{\underline{k.n}}$

---

Ако $\varphi : V_1 \to V_2$ - линейно изобр. с матр. $\varphi$

$\Rightarrow r(\varphi) = r(A)$

и координатите от векторите от $Im\,\varphi$ са $k$-мерните вектори от $\ell(c_1, \dots, c_n)$

където $c_1, \dots, c_n$ стълбовете на $A$

I/ Нека $V_1, V_2$ лин. пр-ва над $F$

$(e) = e_1, \dots, e_n$ базис на $V_1$, $(g) = g_1, \dots, g_k$ базис на $V_2$

$\varphi : V_1 \to V_2$ с матрица $A$

Ако $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \in V_1$

тогава $\varphi(x) = y_1 g_1 + \dots + y_k g_k$, където $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Д-во

$$\varphi(x) = \varphi(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) =$$
$$= x_1 \varphi(e_1) + x_2 \varphi(e_2) + \dots + x_n \varphi(e_n) =$$
$$= x_1 (a_{11} g_1 + a_{21} g_2 + \dots + a_{k1} g_k) +$$
$$+ x_2 (a_{12} g_1 + a_{22} g_2 + \dots + a_{k2} g_k) +$$
$$+ \dots$$
$$+ x_n (a_{1n} g_1 + a_{2n} g_2 + \dots + a_{kn} g_k) =$$

$$\varphi(x) = (a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n) g_1 +$$
$$+ (a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n) g_2 +$$
$$+ \dots$$
$$+ (a_{k1} x_1 + a_{k2} x_2 + \dots + a_{kn} x_n) g_k$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix}$$

# Композиция на изображения и умножение на матрици

Нека $V_1, V_2, V_3$ лин. пр-ва над $F$ и

$\varphi_1 : V_1 \to V_2$ линейни изображения

$\varphi_2 : V_2 \to V_3$

композицията $\varphi_2 \circ \varphi_1 : V_1 \to V_3$

$$\begin{array}{ccccc} x & \xrightarrow{\varphi_1} & \varphi(x) & \xrightarrow{\varphi_2} & \varphi(\varphi(x)) \\ \cap & & \cap & & \cap \\ V_1 & & V_2 & & V_3 \end{array}$$

$\varphi_2 \circ \varphi_1 (x) = \varphi_2(\varphi_1(x))$

<u>Св-во:</u> $\varphi_2 \circ \varphi_1 : V_1 \to V_3$ е линейно

$a, b \in V_1$

$$(\varphi_2 \circ \varphi_1)(a+b) = \varphi_2(\varphi_1(a+b)) = \varphi_2(\varphi_1(a) + \varphi_1(b)) =$$

$$= \varphi_2(\varphi_1(a)) + \varphi_2(\varphi_1(b)) = (\varphi_2 \circ \varphi_1)(a) + (\varphi_2 \circ \varphi_1)(b)$$

$$(\varphi_2 \circ \varphi_1)(\lambda a) = \varphi_2(\varphi_1(\lambda a)) = \varphi_2(\lambda \varphi_1(a)) = \lambda \varphi_2(\varphi_1(a)) =$$

$$= \lambda (\varphi_2 \circ \varphi_1)(a)$$

I/ Нека $V_1, V_2, V_3$ лин. пр-ва над $F$

$(e) = e_1, \dots, e_n$ базис на $V_1$

$(g) = g_1 \dots g_k$ базис на $V_2$

$(h) = h_1, \dots, h_s$ базис на $V_3$

$\varphi_1 : V_1 \to V_2$ с матр. $A = (a_{ij})$

$\varphi_2 : V_2 \to V_3$ с матр. $B = (b_{ij})$

$\Longrightarrow \varphi_2 \circ \varphi_1$ има матрица $BA$

---

$(\varphi_2 \circ \varphi_1) e_i = \varphi_2(\varphi_1(e_i)) =$

$= \varphi_2(a_{1i} g_1 + a_{2i} g_2 + \dots + a_{ki} g_k) =$

$= a_{1i} \varphi_2(g_1) + a_{2i} \varphi_2(g_2) + \dots + a_{ki} \varphi_2(g_k) =$

$= a_{1i}(b_{11} h_1 + b_{21} h_2 + \dots + b_{s1} h_s) +$

$+ a_{2i}(b_{12} h_1 + b_{22} h_2 + \dots + b_{s2} h_s) +$

$+ \dots$

$+ a_{ki}(b_{1k} h_1 + b_{2k} h_2 + \dots + b_{sk} h_s) =$

$= \varphi_2(\varphi_1(e_i)) =$

$= (b_{11} a_{1i} + b_{12} a_{2i} + \dots + b_{1k} a_{ki}) h_1 +$

$+ (b_{21} a_{1i} + b_{22} a_{2i} + \dots + b_{2k} a_{ki}) h_2 +$

$+ \dots$

$+ (b_{s1} a_{1i} + b_{s2} a_{2i} + \dots + b_{sk} a_{ki}) h_s$

---

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ \dots & & & \dots \\ b_{s1} & b_{s2} & \dots & b_{sk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & \dots & & \\ a_{k1} & \dots & a_{ki} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

матр. свойства $\varphi_i, \psi_i$ – лин. изобр

1) $(A+B)C = AC + BC$

2) $A(B+C) = AB + AC$

3) $(\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B)$
$\lambda \in F$

4) $(AB)C = A(BC)$

5) $E$ = единична матрица
$AE = EA = A$

1) $(\varphi_1 + \varphi_2) \circ \psi = \varphi_1 \circ \psi + \varphi_2 \circ \psi$

2) $\varphi \circ (\psi_1 + \psi_2) = \varphi \circ \psi_1 + \varphi \circ \psi_2$

3) $(\lambda\varphi) \circ \psi = \lambda(\varphi \circ \psi) = \varphi \circ (\lambda\psi)$

4) $(\varphi \circ \psi) \circ \tau = \varphi \circ (\psi \circ \tau)$

5) $id_V : V \to V : id(x) = x$
$id \circ \varphi = \varphi \circ id = \varphi$

празна стр.