Държавен изпит за завършване
на образователно-квалификационната степен *Бакалавър*
специалност Статистика

—

юли, 2012

Задача 1. Нека e_1, e_2, e_3 е ортонормиран базис в тримерното евклидово пространство и $\mathcal{A}$ е линеен оператор в това пространство, за който

$$\begin{array}{rrrr} \mathcal{A}(e_1) = & -2.e_1 & -2.e_2 & +2.e_3 \\ \mathcal{A}(e_2) = & -2.e_1 & -5.e_2 & -e_3 \\ \mathcal{A}(e_3) = & (\mu+3)e_1 & -e_2 & -5e_3 \end{array}$$

(а) Да се намери μ така, че $\mathcal{A}$ да е симетричен оператор.

(б) Да се намери ортонормиран базис от собствени вектори на $\mathcal{A}$ при определената в (а) стойност наμ.

(в) Да се определи ξ така, че векторът $e_1 - e_2 + \xi.e_3$ да принадлежи на образа $Im(\mathcal{A})$ при определената в (а) стойност на μ.

Задача 2. Нека X е случайна величина с разпределение на Поасон с параметър $\lambda > 0$:

$$X \sim Po(\lambda), \quad P(X = x) = \mathbf{e}^{-\lambda}.\frac{\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots.$$

(а) Намерете математическото очакване $\mathbb{E}\,X$ и дисперсията $\mathbb{V}ar\,X$ на случайната величина X.

(б) Нека случайните величини X_1 и X_2 са независими и с разпределение на Поасон с параметри съответно $\lambda_1 > 0$ и $\lambda_2 > 0$:

$$X_1 \sim Po(\lambda_1), \quad X_2 \sim Po(\lambda_2).$$

Намерете разпределението на сумата им

$$S_2 = X_1 + X_2.$$

(в) Нека $X_1, X_2, \dots, X_n$ са независими наблюдения над случайната величина $X \sim Po(\lambda), \lambda > 0$ и нека сумата им е $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

Намерете значимостта (p -value) на статисткаta S_n при проверката на основна и алтернативна хипотези:

$$\mathbb{H}_0 : \lambda = 3 \tag{1}$$
$$\mathbb{H}_1 : \lambda = 6 \tag{2}$$

при $n = 4$ и $S_4 = 15$.

Упътване към Задача 2: Използвайте пораждаща функция $\pi_X(s) = \mathbb{E}\left(s^X\right)$ или пораждаща моментите функция $M_X(t) = \mathbb{E}\left(\mathbf{e}^{t.X}\right)$ и приложената таблица за функцията на разпределение $F(x)$ за случайна величина с разпределение на Поасон:

$$F(x) = \mathbf{e}^{-\lambda}.\sum_{k=0}^{x} \frac{\lambda^k}{k!}$$

x	$\lambda = 3$	$\lambda = 6$	$\lambda = 9$	$\lambda = 12$	$\lambda = 15$	$\lambda = 18$	$\lambda = 21$	$\lambda = 24$
0	0,050	0,002	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
1	0,199	0,017	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
2	0,423	0,062	0,006	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000
3	0,647	0,151	0,021	0,002	0,000	0,000	0,000	0,000
4	0,815	0,285	0,055	0,008	0,001	0,000	0,000	0,000
5	0,916	0,446	0,116	0,020	0,003	0,000	0,000	0,000
6	0,966	0,606	0,207	0,046	0,008	0,001	0,000	0,000
7	0,988	0,744	0,324	0,090	0,018	0,003	0,000	0,000
8	0,996	0,847	0,456	0,155	0,037	0,007	0,001	0,000
9	0,999	0,916	0,587	0,242	0,070	0,015	0,003	0,000
10	1,000	0,957	0,706	0,347	0,118	0,030	0,006	0,001
11	1,000	0,980	0,803	0,462	0,185	0,055	0,013	0,003
12	1,000	0,991	0,876	0,576	0,268	0,092	0,025	0,005
13	1,000	0,996	0,926	0,682	0,363	0,143	0,043	0,011
14	1,000	0,999	0,959	0,772	0,466	0,208	0,072	0,020
15	1,000	0,999	0,978	0,844	0,568	0,287	0,111	0,034
16	1,000	1,000	0,989	0,899	0,664	0,375	0,163	0,056
17	1,000	1,000	0,995	0,937	0,749	0,469	0,227	0,087
18	1,000	1,000	0,998	0,963	0,819	0,562	0,302	0,128
19	1,000	1,000	0,999	0,979	0,875	0,651	0,384	0,180
20	1,000	1,000	1,000	0,988	0,917	0,731	0,471	0,243
21	1,000	1,000	1,000	0,994	0,947	0,799	0,558	0,314
22	1,000	1,000	1,000	0,997	0,967	0,855	0,640	0,392
23	1,000	1,000	1,000	0,999	0,981	0,899	0,716	0,473
24	1,000	1,000	1,000	0,999	0,989	0,932	0,782	0,554