Уравнения на права в равнината

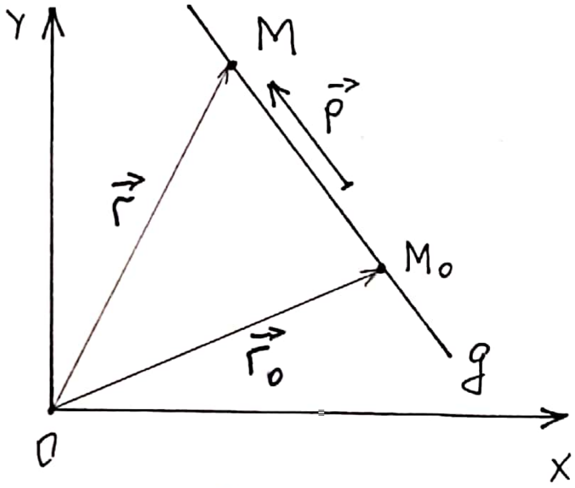
$K = Oxy$ – АКС в равнината

I Параметрични уравнения

$\vec{OM_0} = \vec{r_0}$
$\vec{OM} = \vec{r}$ – радиус-вектори

$\vec{p} \neq \vec{o}$ – даден вектор

$\exists!$ права $g \begin{cases} \ni M_0 \\ \parallel \vec{p} \end{cases}$



За произволна точка M от g е в сила

$\vec{M_0M} \parallel \vec{p} \Rightarrow \exists! s \in \mathbb{R} : \vec{M_0M} = s.\vec{p}$ – установява взаимно-еднозначно съответствие между $s \in \mathbb{R}$ и т. $M \in g$.

1) $\vec{M_0M} = \vec{OM} - \vec{OM_0} = \vec{r} - \vec{r_0} \Rightarrow \vec{r} - \vec{r_0} = s.\vec{p}$

$g: \vec{r} = \vec{r_0} + s.\vec{p}, s \in \mathbb{R}$ – векторно параметрично

2) Нека $M_0(x_0, y_0)$, $M(x, y)$, $\vec{p}(p_1, p_2) \Rightarrow$

$g: \begin{cases} x = x_0 + s.p_1 \\ y = y_0 + s.p_2 \end{cases}$, $s \in \mathbb{R}$ – координатни (скаларни) параметрични уравнения

II Общо уравнение, $K = Oxy$

/ Теорема: Всяка права в равнината има спр. K уравнение от вида $A.x+B.y+C=0$, $(A,B)\neq(0,0)$. Обратно, всяко уравнение от вида $A.x+B.y+C=0$, $(A,B)\neq(0,0)$ определя права в равн.

Доказателство:

1) Нека $g\begin{cases}\ni M_0\\ \parallel \vec{p}\end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{M_0M}(x-x_0, y-y_0) \parallel \vec{p}(p_1,p_2) \Leftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & p_1 \\ y-y_0 & p_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow p_2.(x-x_0) - p_1.(y-y_0) = 0$$

$$g: p_2.x - p_1.y - p_2.x_0 + p_1.y_0 = 0$$

Полагаме: $A = p_2$, $B = -p_1$, $C = -p_2.x_0 + p_1.y_0 \Rightarrow$

$g: A.x+B.y+C=0$, от $\vec{p}(p_1,p_2)\neq\vec{o} \Rightarrow (A,B)\neq(0,0)$

Извод: т. $M(x,y)\ni g \Leftrightarrow A.x+B.y+C=0$

* * *

2) Разглеждаме уравнението:

$A.x+B.y+C=0$, $(A,B)\neq(0,0)$

Нека (x_0,y_0) е едно решение

Определяме вектор $\vec{p}(-B,A) \Rightarrow \vec{p}\neq\vec{o}$

Тогава $\exists!$ права $g \begin{cases} \ni M_0(x_0, y_0) \\ \parallel \vec{p}(-B, A) \end{cases}$.

Коорд. парам. уравнения на тази права g:

$$g: \begin{cases} x = x_0 - B.\lambda \\ y = y_0 + A.\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R} \iff \frac{x - x_0}{-B} = \frac{y - y_0}{A} \iff$$

$$A.(x - x_0) + B.(y - y_0) = 0$$

$A.x + B.y - A.x_0 - B.y_0 = 0$, но $A.x_0 + B.y_0 + C = 0 \Rightarrow$

у-то $A.x + B.y + C = 0$ описва точно правата g.

$\square$

$g: A.x + B.y + C = 0$, $(A, B) \neq (0, 0)$

$g \parallel \vec{p}(-B, A)$

Условие за колинеарност на g и вектор $\vec{q}(q_1, q_2)$

$$\vec{q}(q_1, q_2) \parallel g \parallel \vec{p}(-B, A) \iff \begin{vmatrix} q_1 & -B \\ q_2 & A \end{vmatrix} = 0 \iff$$

$$A.q_1 + B.q_2 = 0$$

* * *

III Декартово уравнение на права: ДКС Oxy

Разгл.: $g: A.x + B.y + C = 0$, $B \neq 0$, т.е. $g \nparallel Oy \Rightarrow$

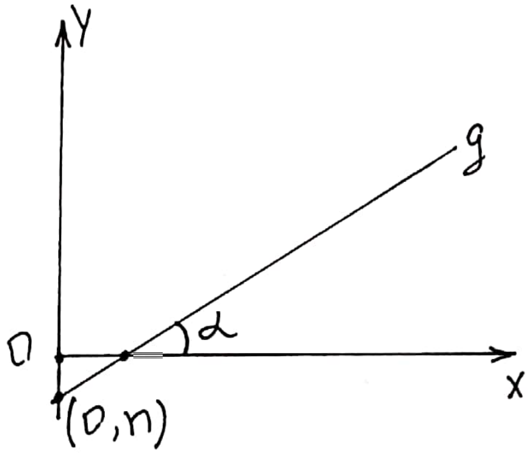
$$g: y = -\frac{A}{B}.x - \frac{C}{B}$$

Полагаме: $-\frac{A}{B} = k$, $-\frac{C}{B} = n$

$g: y = k.x + n$

$k = tg\alpha, \alpha = \measuredangle(Ox^+, g)$

$(0,n)$ - пресечна точка на g и Oy



* * *

IV Взаимни положения на две прави

АКС $K = Oxy$

$g_1: A_1.x + B_1.y + C_1 = 0$

$g_2: A_2.x + B_2.y + C_2 = 0$

1сл. $r\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow g_1 \cap g_2 =$ т. P - единств. обща точка

2сл. $r\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix} = 1$ и $r\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 2 \Leftrightarrow$

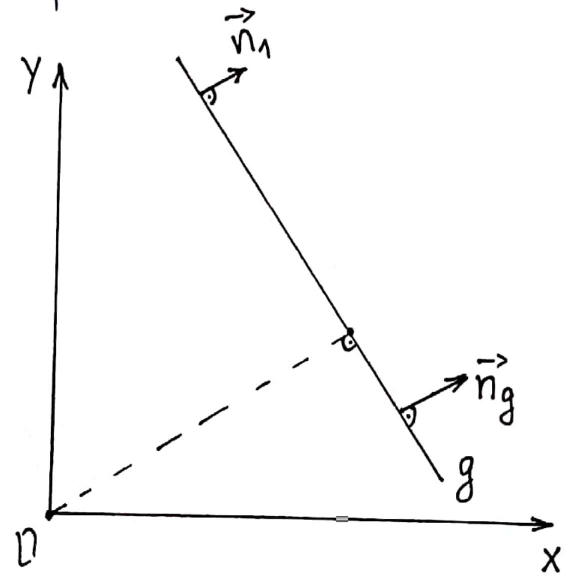
$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2} \Rightarrow g_1 \parallel g_2,$$ нямат обща точка

3сл. $r\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow g_1 \equiv g_2$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

V Нормално уравнение на права

ОКС $K = Oxy$



$g: A.x + B.y + C = 0$

$g \parallel \vec{p}(-B, A)$

$g \perp \vec{n}_g(A, B)$ – нормален вектор

$|\vec{n}_g| = \sqrt{A^2 + B^2} \Rightarrow$

$\vec{n}_1\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)$ – единичен нормален вектор на g

Всички общи уравнения на g имат вида:

$(\lambda.A).x + (\lambda.B).y + \lambda.C = 0$

Търсим $\lambda = ?$ така, че $\vec{n}_1(\lambda.A, \lambda.B)$ да е единичен

$$\vec{n}_1^{\,2} = (\lambda.A)^2 + (\lambda.B)^2 = 1 \Rightarrow \lambda^2 = \frac{1}{A^2+B^2} \Rightarrow \lambda = \frac{\pm 1}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

$$g: \pm\frac{A.x + B.y + C}{\sqrt{A^2+B^2}} = 0$$ – всяка права има точно две нормални уравнения

Ако означим:

$A_1 = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$, $\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} = B_1$, $C_1 = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$, то

$A_1 = \cos\sphericalangle(\vec{e}_1, \vec{n}_1)$

$B_1 = \cos\sphericalangle(\vec{e}_2, \vec{n}_1)$

$C_1 = \delta(т.\,O; g)$

VI Разстояние от точка до права

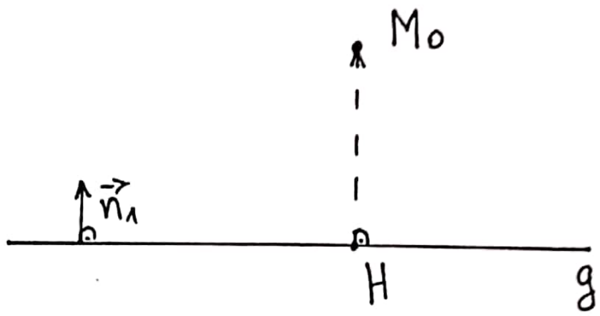
ОКС $K = Oxy$

$g: A_1 . x + B_1 . y + C_1 = 0$ е нормално уравнение,

$A_1^2 + B_1^2 = 1$

Нека т. $M_0(x_0, y_0)$

е точка от равнината



$H =$ орт. пр.$_g M_0$

$\overrightarrow{HM_0} \parallel \vec{n}_1 \Rightarrow \exists!\, \delta : \overrightarrow{HM_0} = \delta . \vec{n}_1$

т. $H(x_H, y_H) \in g$ $\quad \begin{cases} x_0 - x_H = \delta . A_1 \\ y_0 - y_H = \delta . B_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_H = x_0 - \delta . A_1 \\ y_H = y_0 - \delta . B_1 \end{cases}$

Заместваме в у-то на $g: A_1 . x + B_1 . y + C_1 = 0$

$\Rightarrow A_1 . (x_0 - \delta . A_1) + B_1 . (y_0 - \delta . B_1) + C_1 = 0 \qquad \delta = ?$

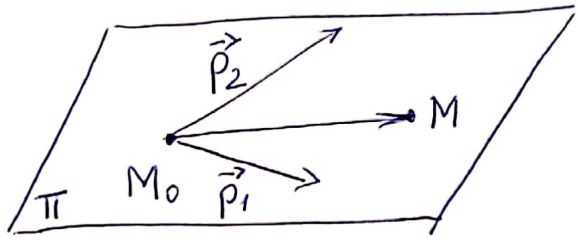
$A_1 . x_0 + B_1 . y_0 + C_1 - \delta . (A_1^2 + B_1^2) = 0$

$\delta = A_1 . x_0 + B_1 . y_0 + C_1 = \dfrac{A . x_0 + B . y_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ – ориентирано разстояние от точка M_0 до права g.

Общо уравнение на равнина

АКС $K = Oxyz$

Теорема:



Всяка равнина π има спрямо K уравнение от вида: $A.x+B.y+C.z+D=0$, $(A,B,C)\neq(0,0,0)$.

Обратно: Всяко уравнение от вида $A.x+B.y+C.z+D=0$, $(A,B,C)\neq(0,0,0)$ е уравнение на точно една равнина.

Доказателство:

1) Разгл. т. $M_0(x_0,y_0,z_0)$ и два лнз вектора $\vec{p_1}(a_1,b_1,c_1)$ и $\vec{p_2}(a_2,b_2,c_2)$

$$\exists!\ \text{равнина}\ \pi \begin{cases} \ni M_0 \\ \parallel \vec{p_1} \\ \parallel \vec{p_2} \end{cases}$$

Какво уравнение удовлетворяват координатите на произволна точка $M(x,y,z)$ от р-та π?

$M \in \pi \iff \overrightarrow{M_0M}, \vec{p_1}, \vec{p_2}$ са компланарни (л.з.).

$$\iff \begin{vmatrix} x-x_0 & a_1 & a_2 \\ y-y_0 & b_1 & b_2 \\ z-z_0 & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-x_0)\cdot\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} + (y-y_0)\cdot\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} + (z-z_0)\cdot\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

Полагаме $A=\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$, $B=\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}$, $C=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$,

$D=-A\cdot x_0-B\cdot y_0-C\cdot z_0$ и получаваме за π:

π: $A\cdot x+B\cdot y+C\cdot z+D=0$

Дали $(A,B,C)\neq(0,0,0)$?

Ако допуснем, че $A=B=C=0 \Rightarrow \dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2} \Rightarrow \vec{p_1}\parallel\vec{p_2}$ ↯

* * *

2) Нека е дадено уравнението:

(*) $A\cdot x+B\cdot y+C\cdot z+D=0$, $(A,B,C)\neq(0,0,0)$

Нека (x_0,y_0,z_0) е едно решение на у-то (*)

Б.о.о. можем да считаме, че $A\neq 0$

Взимаме векторите:

$\vec{p_1}(-B,A,0)$ и $\vec{p_2}\left(-\dfrac{C}{A},0,1\right)$ - ненулеви, ЛНЗ

$\exists!$ равнина π: $\begin{cases} \ni M_0(x_0,y_0,z_0) \\ \parallel \vec{p_1} \\ \parallel \vec{p_2} \end{cases}$, за която

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & -B & -\frac{C}{A} \\ y-y_0 & A & 0 \\ z-z_0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow A\cdot x+B\cdot y+C\cdot z+D=0,$$

където $D=-A\cdot x_0-B\cdot y_0-C\cdot z_0$

$\pi: A.x+B.y+C.z+D=0\ ,\ (A,B,C)\neq(0,0,0)$

Условие за компланарност на вектор и равнина:

$\vec{p}(a,b,c) \parallel \pi \iff A.a+B.b+C.c=0$

Доказателство:

Нека т. $P_0(x_0,y_0,z_0)\in\pi$

$\vec{p}(a,b,c)\neq(0,0,0)$

Нека т. $P_1(x_1,y_1,z_1)$: $\overrightarrow{P_0P_1}=\vec{p} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1-x_0=a \\ y_1-y_0=b \\ z_1-z_0=c \end{array}$

$x_1=x_0+a\ ,\ y_1=y_0+b,\ z_1=z_0+c$

$\vec{p}\parallel\pi \iff P_1(x_1,y_1,z_1)\in\pi \iff A.x_1+B.y_1+C.z_1+D=0$

$\iff A.(x_0+a)+B.(y_0+b)+C.(z_0+c)+D=0 \iff$

$\iff \underbrace{A.x_0+B.y_0+C.z_0+D}_{\substack{\| \\ 0 \text{ от } P_0\in\pi}}+A.a+B.b+C.c=0 \iff$

$\iff A.a+B.b+C.c=0.$

$\square$

Взаимни положения на две равнини

$\pi_1: A_1 . x + B_1 . y + C_1 . z + D_1 = 0$

$\pi_2: A_2 . x + B_2 . y + C_2 . z + D_2 = 0$

1сл. $r\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \pi_1 \cap \pi_2 = g$ - пресечница

2сл. $r\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 1$ и $r\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix} = 2$, т.е.

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_2}{D_2} \Rightarrow \pi_1 \parallel \pi_2$$

3сл. $r\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow \pi_1 \equiv \pi_2$

* * *

Нормално уравнение на равнина

ОКС $K = Oxyz$

$\pi: A.x + B.y + C.z + D = 0$

$\vec{n}_\pi(A, B, C)$ - нормален вектор на π

$\vec{p}(a, b, c) \parallel \pi \Leftrightarrow (\vec{n}_\pi . \vec{p}) = 0$

$$\vec{n}_1 = \frac{\vec{n}_\pi}{|\vec{n}_\pi|} \Rightarrow \vec{n}_1\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right)$$

↳ единичен нормален в-р на π

$\pi: \dfrac{A.x+B.y+C.z}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = D$ – нормално уравнение на π

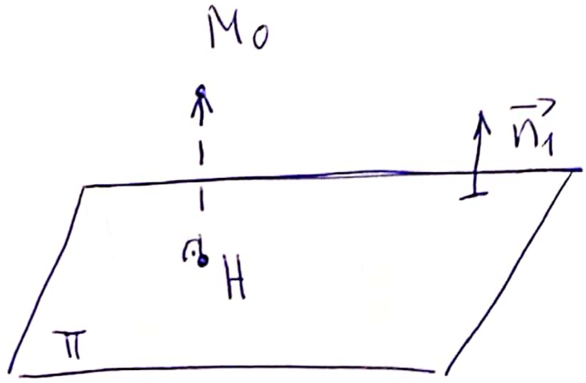
Разстояние от точка до равнина

Нека $\pi: A_1.x+B_1.y+C_1.z+D_1=0$, където

$A_1=\dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, $B_1=\dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, $C_1=\dfrac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, $D_1=\dfrac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

Разгл. т. $M_0(x_0, y_0, z_0)$

Нека $H=$ орт. пр.$_\pi M_0$



$\overrightarrow{HM_0} \parallel \vec{n}_1 \Rightarrow \exists!\, \delta:$

$\overrightarrow{HM_0} = \delta.\vec{n}_1 \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x_0-x_H=\delta.A_1 \\ y_0-y_H=\delta.B_1 \\ z_0-z_H=\delta.C_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_H=x_0-\delta.A_1 \\ y_H=y_0-\delta.B_1 \\ z_H=z_0-\delta.C_1 \end{cases} \longrightarrow$ заместваме в уравн. на π, търсим $\delta=?$

$A_1.(x_0-\delta.A_1)+B_1.(y_0-\delta.B_1)+C_1(z_0-\delta.C_1)+D_1=0$

$A_1.x_0+B_1.y_0+C_1.z_0+D_1-\delta.1=0$

Извод: $\delta(M_0;\pi)=\dfrac{A.x_0+B.y_0+C.z_0+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ – ориентирано разстояние от точка до равнина.

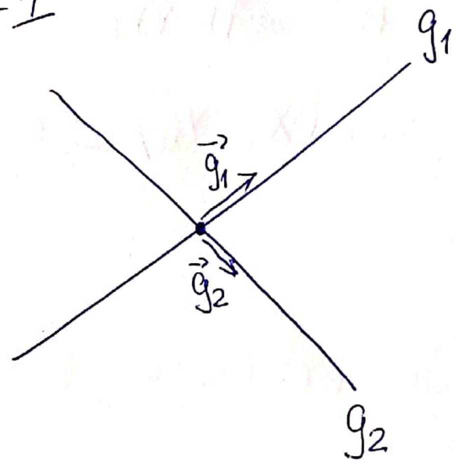
Ъгъл между две прави

ОКС $K = Oxy$

$$g_1: \begin{cases} x = x_0 + s.a \\ y = y_0 + s.b \end{cases} s \in \mathbb{R}; \quad g_2: \begin{cases} x = x^* + s.c \\ y = y^* + s.d \end{cases}$$

$$g_1 \parallel \vec{g_1}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right); \quad g_2 \parallel \vec{g_2}\left(\frac{c}{\sqrt{c^2+d^2}}, \frac{d}{\sqrt{c^2+d^2}}\right)$$

$|\vec{g_1}| = 1$ $\qquad$ $|\vec{g_2}| = 1$



$$\measuredangle(g_1, g_2) = \measuredangle(\vec{g_1}, \vec{g_2}) = \varphi$$

$$(\vec{g_1} \cdot \vec{g_2}) = |\vec{g_1}| . |\vec{g_2}| . \cos\varphi = \cos\varphi$$

$$\cos\varphi = (\vec{g_1} \cdot \vec{g_2}) = \frac{a.c + b.d}{\sqrt{a^2+b^2} . \sqrt{c^2+d^2}}$$