Числено диференциране и интегриране

Задача 1: Нека $x_0 = a, x_1 = a + h$ и $x_2 = a + 2h$. Да се намери интерполационна формула за числено диференциране от вида $f'(a) \approx \alpha f(x_0) + \beta f(x_1) + \gamma f(x_2)$, точна за полиноми от възможно най-висока степен.

Решение: Имаме три възела и с тях можем да построим $L_2(f;x)$. Ако $f(x) \in \pi_2$, то $f(x) = L_2(f;x)$. Следователно $f'(a) = L_2{}'(f;a)$. С помощта на възлите x_0, x_1 и x_2 намираме

$$L_2(f;x) = f(a) + f[a, a+h](x-a) + f[a, a+h, a+2h](x-a)(x-a-h)$$

$$L_2'(f;x) = f[a, a+h] + f[a, a+h, a+2h](x-a-h+x-a),$$

$$L_2'(f;x) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} + \frac{f[a+h, a+2h] - f[a, a+h]}{2h}(2x-2a-h) =$$

$$= \frac{f(a+h)-f(a)}{h} + \frac{\frac{f(a+2h)-f(a+h)}{h} - \frac{f(a+h)-f(a)}{h}}{2h}(2x-2a-h).$$

Заместваме $x = a$, опростяваме израза и получаваме

$$f'(a) \approx L_2'(f;a) = -\frac{3}{2h}f(a) + \frac{2}{h}f(a+h) - \frac{1}{2h}f(a+2h)$$

$$=> f'(a) \approx \alpha f(x_0) + \beta f(x_1) + \gamma f(x_2), \text{където } \alpha = -\frac{3}{2h}, \beta = \frac{2}{h} \text{ и } \gamma = -\frac{1}{2h}.$$

Задача 2: Нека $x_0 = a - h, x_1 = a$ и $x_2 = a + h$. Да се намери интерполационна формула за числено диференциране от вида $f'(a) \approx \alpha f(x_0) + \beta f(x_1) + \gamma f(x_2)$, точна за полиноми от възможно най-висока степен.

Решение: Имаме три възела и с тях можем да построим $L_2(f;x)$. Ако $f(x) \in \pi_2$, то $f(x) = L_2(f;x)$. Следователно $f'(a) = L_2{}'(f;a)$. С помощта на възлите x_0, x_1 и x_2 намираме

$$L_2(f;x) = f(a-h) + f[a-h, a](x-a+h) + f[a-h, a, a+h](x-a+h)(x-a)$$

$$L_2'(f;x) = f[a-h, a] + f[a-h, a, a+h](x-a+h+x-a),$$

$$L_2'(f;x) = \frac{f(a)-f(a-h)}{h} + \frac{f[a, a+h] - f[a-h, a]}{2h}(2x-2a+h) =$$

$$= \frac{f(a)-f(a-h)}{h} + \frac{f(a-h) - 2f(a) + f(a+h)}{2h^2}(2x-2a+h).$$

Заместваме $x = a$, опростяваме израза и получаваме

$$f'(a) \approx L_2'(f;a) = -\frac{1}{2h}f(a-h) + \frac{1}{2h}f(a+h)$$

$$=> f'(a) \approx \alpha f(x_0) + \gamma f(x_2), \text{където } \alpha = -\frac{1}{2h}, \beta = 0 \text{ и } \gamma = \frac{1}{2h}.$$

Задача 3: Нека $x_0 = a, x_1 = a + h$ и $x_2 = a + 2h$. Да се изведе формула за приближаване на $f'(a)$ въз основа на стойностите на $f(x_0), f(x_1),\ f(x_2)$ при условие, че функцията има непрекъсната четвърта производна в интервала $[a, a + 2h]$ (метод на неопределените коефициенти).

Решение: Развиваме в ред на Тейлор около точката a стойностите $f(x_0), f(x_1),\ f(x_2)$:

$$f(a) = f(a) \qquad /.\alpha$$

$$f(a+h) = f(a) + f'(a).h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \frac{f'''(a)}{3!}h^3 + \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}h^4 \qquad /.\beta$$

$$f(a+2h) = f(a) + f'(a).2h + \frac{f''(a)}{2!}4h^2 + \frac{f'''(a)}{3!}8h^3 + \frac{f^{(4)}(\eta)}{4!}16h^4 \qquad /.\gamma$$

Точките ξ и η са съответно в интервалите $[a, a + h]$ и $[a, a + 2h]$. Целта ни е да намерим коефициентите α, β и γ така, че изразът $\alpha f(x_0) + \beta f(x_1) + \gamma f(x_2)$ да бъде равен на $f'(a) + O(h^k)$, където k е възможно най-голям, т. е. грешката е възможно най-малка. Получаваме

$$f(a)(\alpha + \beta + \gamma) + f'(a)(\beta + 2\gamma)h + f''(a)(\beta + 4\gamma)\frac{h^2}{2} + f'''(a)(\beta + 8\gamma)\frac{h^3}{6} + \left(\beta.f^{(4)}(\xi) + 16\gamma f^{(4)}(\eta)\right)\frac{h^4}{24} = f'(a) + O\left(h^k\right).$$

Получаваме системата:

$$\left|\begin{array}{l} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ (\beta + 2\gamma)h = 1 \\ (\beta + 4\gamma)\dfrac{h^2}{2} = 0 \end{array}\right.$$

$$=> \alpha = -\frac{3}{2h}, \beta = \frac{2}{h}, \gamma = -\frac{1}{2h} \; => f'(a) \approx \frac{-3f(x_0) + 4f(x_1) - f(x_2)}{2h}.$$

Задача 4: Нека $x_0 = a, x_1 = a + h$ и $x_2 = a + 2h$. Да се изведе формула за приближаване на $f''(a)$ въз основа на стойностите на $f(x_0), f(x_1),\ f(x_2)$ при условие, че функцията има непрекъсната четвърта производна в интервала $[a, a + 2h]$ (метод на неопределените коефициенти).

Решение: Развиваме в ред на Тейлор около точката a стойностите $f(x_0), f(x_1),\ f(x_2)$:

$$f(a) = f(a) \qquad /.\alpha$$

$$f(a+h) = f(a) + f'(a).h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \frac{f'''(a)}{3!}h^3 + \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}h^4 \qquad /.\beta$$

$$f(a+2h)=f(a)+f'(a).2h+\frac{f''(a)}{2!}4h^2+\frac{f'''(a)}{3!}8h^3+\frac{f^{(4)}(\eta)}{4!}16h^4 \qquad /.\gamma$$

Точките ξ и η са съответно в интервалите $[a,a+h]$ и $[a,a+2h]$. Целта ни е да намерим коефициентите α,β и γ така, че изразът $\alpha f(x_0)+\beta f(x_1)+\gamma f(x_2)$ да бъде равен на $f''(a)+O(h^k)$, където k е възможно най-голям, т. е. грешката е възможно най-малка. Получаваме

$$f(a)(\alpha+\beta+\gamma)+f'(a)(\beta+2\gamma)h+f''(a)(\beta+4\gamma)\frac{h^2}{2}+f'''(a)(\beta+8\gamma)\frac{h^3}{6}$$
$$+\left(\beta.f^{(4)}(\xi)+16\gamma f^{(4)}(\eta)\right)\frac{h^4}{24}=f''(a)+O\left(h^k\right).$$

Получаваме системата:

$$\left|\begin{array}{c}\alpha+\beta+\gamma=0\\(\beta+2\gamma)h=0\\(\beta+4\gamma)\dfrac{h^2}{2}=1\end{array}\right.$$

$$=>\alpha=\frac{1}{h^2},\beta=-\frac{2}{h^2},\gamma=\frac{1}{h^2}\;=>f''(a)\approx\frac{f(x_0)-2f(x_1)+f(x_2)}{h^2}.$$

Съставни квадратурни формули

Задача 5: Да се определи броят n на подинтервалите на съставните квадратурни формули на правоъгълниците, трапеците и Симпсон, така че грешката да не надминава 10^{-5} при численото пресмятане на $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$.

Решение: От Лекцията за числено интегриране ще използваме формулите за представяне на грешките на съставните квадратурни формули на правоъгълниците, трапеците и Симпсон. В тези формули участват производните до четвърти ред на подинтегралната функция $f(x)=\frac{1}{1+x}$. Трябва да намерим съответните производни и техните максимуми по модул в интервала [0,1].

$$f'(x)=[(1+x)^{-1}]'=-\frac{1}{(1+x)^2}=-(1+x)^{-2},f''(x)=\frac{2}{(1+x)^3},f'''(x)=-\frac{6}{(1+x)^4},$$

$$f^{\,(4)}(x)=\frac{24}{(1+x)^5}.$$

$$=>\max_{x\in[0,1]}|f''(x)|=2;\;\max_{x\in[0,1]}\left|f^{(4)}(x)\right|=24.$$

$$|R(Q^{\text{пр.}};f)|=|f''(\xi)|\frac{(b-a)^3}{24n^2}\le\frac{1}{12n^2},$$

Искаме грешката да не надвишава 10^{-5} $=>\frac{1}{12n^2}\le 10^{-5}=>n\ge 100\sqrt{\frac{5}{6}}\approx 92.$

$$|R(Q^{\text{тр.}};f)| = |f''(\xi)|\frac{(b-a)^3}{12n^2} \leq \frac{1}{6n^2} => \frac{1}{6n^2} \leq 10^{-5} => n \geq 100\sqrt{\frac{5}{3}} \approx 130.$$

$$\left|R(Q^{\text{С.}};f)\right| = \left|f^{(4)}(\xi)\right|\frac{(b-a)^5}{2880n^4} \leq \frac{1}{120n^4} => \frac{1}{120n^4} \leq 10^{-5} => n \geq 10\sqrt[4]{1/12} \approx 6.$$

Следователно за да пресметнем с точност 10^{-5} дадения интеграл, който е равен на $\ln 2$, е необходимо да разделим интервала [0,1] на 92 равни части при съставната КФ на правоъгълниците; трябва да разделим интервала [0,1] на 130 при съставната КФ на трапеците и на 6 равни части при съставната квадратурна формула на Симпсон.

Задача 6: Да се определи броят n на подинтервалите на съставните квадратурни формули на правоъгълниците и трапеците, така че грешката да не надминава 10^{-5} при численото пресмятане на $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$.

Решение: Определеният интеграл е равен на $\pi/4$ и следователно ние търсим приближената стойност на $\pi/4$ с точност 10^{-5}. Както и в предишната задача от Лекция за числено интегриране ще използваме формулите за представяне на грешките на съставните квадратурни формули на правоъгълниците и трапеците. Трябва да намерим втората производна на функцията и максимума й в интервала [0,1].

$$f'(x) = [(1+x^2)^{-1}]' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}, f''(x) = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$$

$$=> \max_{x\in[0,1]}|f''(x)| = 4.$$

Искаме грешката да не надвишава 10^{-5}. Следователно получаваме следните неравенства:

1) $|R(Q^{\text{пр.}};f)| = |f''(\xi)|\frac{(b-a)^3}{24n^2} \leq \frac{1}{6n^2} \leq 10^{-5} => n \geq 100\sqrt{\frac{5}{3}} \approx 130$ разделяния на интервала [0,1] при съставната КФ на правоъгълниците;
2) $|R(Q^{\text{тр.}};f)| = |f''(\xi)|\frac{(b-a)^3}{12n^2} \leq \frac{1}{3n^2} => \frac{1}{3n^2} \leq 10^{-5} => n \geq 100\sqrt{\frac{10}{3}} \approx 183$ разделяния на интервала [0,1] при съставната КФ на трапеците.

На следващата графика са илюстрирани графиката на функцията (в тъмно син цвят и запълване) и квадратурната формула на трапеците (в розов свят) за 5 разбивания на интервала [0,1] (в червен цвят са точките на разделяне). Взети са само пет подинтервала за по-добра видимост. Изложена е и програмата за построяване на графиката.

```
n=5;
f[t_]:=1/(1+t^2);
Do[x[i]=i/n,{i,0,n}];
pts=Table[{x[i],f[x[i]]},{i,0,n}];
Show[Graphics[{Magenta,Line[pts],Red,Point[pts]}],Plot[f[t],{t,0
,1},Filling→Bottom]]
```