Примерно съдържание на въпросите от държавния изпит по логическо програмиране специалност компютърни науки, втори поток, 2015/2016 учебна година

18 май 2017 г.

Тъй като на държавния изпит няма много време, трябва да се пише най-малкото количество неща, което би убедило проверяващия, че знаете нещата. От тук, разбира се, следва, че може да използвате този документ само като напътствие какво се включва във въпросите от държавния изпит, но не и за да учите само от него.

С *наклонен шрифт* са сложени коментари, които са за ваша информация и не трябва да ги пишете на държавния изпит.

Въпрос 18. Синтаксис и семантика на термовете и формулите на предикатното смятане от първи ред. Унификация

Синтаксис

Пропускаме дефиницията за сигнатура.

Дефиниция. Нека $\mathfrak{sig}$ е сигнатура. Понятието *терм* при сигнатура $\mathfrak{sig}$ се дефинира индуктивно посредством следните правила:

а) Ако $\mathtt{x}$ е променлива от $\mathfrak{sig}$, то $\mathtt{x}$ е терм при сигнатура $\mathfrak{sig}$.

б) Ако $\mathtt{c}$ е символ за константа от $\mathfrak{sig}$, то $\mathtt{c}$ е терм при сигнатура $\mathfrak{sig}$.

в) Ако $\mathtt{f}$ е n-местен функционален символ от $\mathfrak{sig}$ и $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ са термове при сигнатура $\mathfrak{sig}$, то изразът $\mathtt{f}(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)$ е терм при сигнатура $\mathfrak{sig}$.

Дефиниция. Нека е дадена сигнатура $\mathfrak{sig}$. Ако $\mathtt{p}$ е n-местен предикатен символ от $\mathfrak{sig}$ и $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ са термове при сигнатура $\mathfrak{sig}$, то изразът $\mathtt{p}(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)$ е *атомарна формула* при сигнатура $\mathfrak{sig}$.

Дефиниция. Нека е дадена сигнатура $\mathfrak{sig}$. *Формулите* при сигнатура $\mathfrak{sig}$ се дефинират индуктивно:

а) ако φ е атомарна формула при сигнатура $\mathfrak{sig}$, то φ е формула при сигнатура $\mathfrak{sig}$;

б) ако φ и ψ са формули при сигнатура $\mathfrak{sig}$, то $(\varphi\&\psi)$, $(\varphi\vee\psi)$ и $(\varphi\Rightarrow\psi)$ са формули при сигнатура $\mathfrak{sig}$;

в) ако φ е формула при сигнатура $\mathfrak{sig}$, то $\neg\varphi$ е формула при сигнатура $\mathfrak{sig}$;

г) ако $\mathtt{x}$ е променлива от сигнатурата $\mathfrak{sig}$ и φ е формула при сигнатура $\mathfrak{sig}$, то $\forall\mathtt{x}\,\varphi$ и $\exists\mathtt{x}\,\varphi$ са формули при сигнатура $\mathfrak{sig}$.

Ще считаме, че изразите от вида $\varphi\Leftrightarrow\psi$ представляват съкратен запис на формулата $((\varphi \Rightarrow \psi)\ \&\ (\psi \Rightarrow \varphi))$.

Дефиниция. Когато формулата ψ е част от формулата φ, казваме, че ψ е *подформула* на φ. Когато формулата φ съдържа подформула от вида $\forall\mathtt{x}\,\psi$ или $\exists\mathtt{x}\,\psi$ (където ψ е формула), казваме, че тази подформула е *областта на действие* на квантора $\forall\mathtt{x}$ или $\exists\mathtt{x}$, с който започва подформулата.

Дефиниция. а) Променливата $\mathtt{x}$ е *свободна променлива* на формулата φ, ако $\mathtt{x}$ се среща в φ на място, което не попада в областта на действие на никой квантор $\forall\mathtt{x}$ или $\exists\mathtt{x}$.

б) Когато променливата $\mathtt{x}$ се среща във формула φ на място, което не попада в областта на действие на никой квантор $\forall\mathtt{x}$ или $\exists\mathtt{x}$, за това срещане на $\mathtt{x}$ в φ казваме, че е *свободно срещане* на $\mathtt{x}$ в φ.

Дефиниция. а) Нека формулата φ съдържа подформула от вида $\forall\mathtt{x}\,\psi$ или $\exists\mathtt{x}\,\psi$ и променливата $\mathtt{y}$ не се среща никъде в тази подформула (нито като свързана, нито като свободна). Ако в тази подформула заменим всички променливи $\mathtt{x}$ с $\mathtt{y}$, казваме, че новата формула е получена посредством *еднократно преименуване на свързана променлива* във φ.

б) Ако във формулата φ извършваме последователно няколко пъти (може и нула) еднократни преименувания на свързани променливи, то казваме, че получената накрая формула ψ е получена от φ посредством *преименуване на свързаните променливи*.

в) Формулата φ е *конгруентна* с формулата ψ, ако ψ може да се получи от φ посредством преименуване на свързаните променливи. Когато φ е конгруентна с ψ, записваме това така:

$$\varphi \equiv \psi$$

Твърдение. *а)* $\varphi \equiv \varphi$

б) ако $\varphi \equiv \psi$*, то* $\psi \equiv \varphi$

в) ако $\varphi \equiv \psi$ *и* $\psi \equiv \chi$*, то* $\varphi \equiv \chi$

Доказателство. **(а)** φ се получава от φ посредством нула на брой еднократни преименувания на свързани променливи.

(б) Да забележим, че ако можем да извършим еднократно преименуване на променливата $\mathtt{x}$ на $\mathtt{y}$, нищо не ни пречи да извършим преименуването и в обратната посока — от $\mathtt{y}$ на $\mathtt{x}$. Следователно ако ψ е получена от φ с помощта на няколко еднократни преименувания на свързани променливи, то нищо не ни пречи да получим φ от ψ като прилагаме преименуванията наобратно и в обратен ред.

(в) Ако от φ с няколко преименувания получим ψ и после с още няколко — χ, то значи от φ с няколко преименувания можем да получим χ. ∎

Твърдение. *Ако формулите* φ *и* φ' *са конгруентни, то те имат едни и същи свободни променливи.*

Лема за преименуване на свързаните променливи. *За всяка формула* φ *и крайно множество* Θ *от променливи съществува формула, конгруентна на* φ*, в която не се срещат променливи от* Θ*, всички квантори са с различни променливи и никоя от кванторните променливи не е свободна.*

Доказателство. Нека Θ' е обединението на Θ с множеството от всички променливи (свързани и несвързани), които се срещат в φ. Множеството Θ' е крайно.

Ще построим редица от конгруентни формули $\varphi = \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, в която последната формула ще отговаря на изискванията на лемата — всички кванторни променливи ще са различни и никоя кванторна променлива няма да е елемент на Θ'.

Ако разполагаме с формулата φ_i, можем да получим формулата φ_{i+1} по следния начин. Нека $\forall \mathtt{z}\, \psi$ или $\exists \mathtt{z}\, \psi$ е произволна подформула на φ_i, чиято променлива $\mathtt{z}$ е елемент на Θ' и в ψ не се срещат квантори с променливи от Θ'. Нека $\mathtt{z}'$ е произволна променлива, която не се среща нито в φ_i, нито е елемент на Θ'. Да преименуваме навсякъде в подформулата $\forall \mathtt{z}\, \psi$ или $\exists \mathtt{z}\, \psi$ променливата $\mathtt{z}$ на $\mathtt{z}'$. Нека така получената формула бъде φ_{i+1}.

Процесът на строене на тази редица от конгруентни формули спира тогава, когато стигнем до формула φ_n, в която няма квантори с променливи от Θ'. Тъй като при всяко преименуване избираме напълно нова променлива, която не се среща нито в φ_i, нито е елемент на Θ, то φ_n ще отговаря на условията на лемата. ∎

Семантика

Дефиниция. Нека X е произволно множество.

а) n-местна *функция* в X означава n-местна функция с аргументи от X и стойност в X.

б) n-местен *предикат* в X означава n-местна функция с аргументи от X, която връща като стойност някое твърдение.

Дефиниция. Нека $\mathfrak{sig}$ е сигнатура. Наредената двойка $\mathbf{M} = (\Omega, \mathtt{i})$ е *структура* за $\mathfrak{sig}$, ако Ω е непразно множество, наречено *универсум* на структурата, а $\mathtt{i}$ е функция, наречена *интерпретация*, която притежава изброените по-долу свойства а), б) и в). Множеството Ω се означава с $|\mathbf{M}|$ и за произволен символ $\mathtt{s}$ вместо $\mathtt{i}(\mathtt{s})$ ще пишем $\mathtt{s}^{\mathbf{M}}$.

а) Ако $\mathtt{c}$ е символ за константа, то $\mathtt{c}^{\mathbf{M}} = \mathtt{i}(\mathtt{c})$ е елемент на $|\mathbf{M}|$.

б) Ако $\mathtt{f}$ е n-местен функционален символ, то $\mathtt{f}^{\mathbf{M}} = \mathtt{i}(\mathtt{f})$ е n-местна функция в $|\mathbf{M}|$.

в) Ако $\mathtt{p}$ е n-местен предикатен символ, то $\mathtt{p}^{\mathbf{M}} = \mathtt{i}(\mathtt{p})$ е n-местен предикат в $|\mathbf{M}|$.

Дефиниция. Нека $\mathbf{M}$ е структура за сигнатурата $\mathfrak{sig}$. *Оценка* в $\mathbf{M}$ е функция v, която съпоставя на всяка променлива от $\mathfrak{sig}$ елемент на универсума на $\mathbf{M}$.

Дефиниция. Нека $\mathbf{M}$ е структура за сигнатурата $\mathfrak{sig}$ и v е оценка в $\mathbf{M}$. *Стойността* на терм в структурата $\mathbf{M}$ при оценка v се дефинира индуктивно:

– Ако $\mathtt{x}$ е променлива от $\mathfrak{sig}$, то стойността на терма $\mathtt{x}$ е $v(\mathtt{x})$.

– Ако $\mathtt{c}$ е символ за константа от $\mathfrak{sig}$, то стойността на терма $\mathtt{c}$ е $\mathtt{c}^{\mathbf{M}}$.

– Ако $\mathtt{f}$ е n-местен функционален символ от $\mathfrak{sig}$ и $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ са термове от $\mathfrak{sig}$, то стойността на терма $\mathtt{f}(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)$ е $\mathtt{f}^{\mathbf{M}}(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$, където μ_i е стойността на τ_i в $\mathbf{M}$ при оценка v.

Дефиниция. Нека $\mathbf{M}$ е структура за сигнатурата $\mathfrak{sig}$ и v е оценка в $\mathbf{M}$. Ако $\mathtt{p}$ е n-местен предикатен символ от $\mathfrak{sig}$ и $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ са термове от $\mathfrak{sig}$, то *стойността* на атомарната формула $\mathtt{p}(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)$ е твърдението $\mathtt{p}^{\mathbf{M}}(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$, където μ_i е стойността на τ_i в $\mathbf{M}$ при оценка v.

Дефиниция. Нека v е оценка в структурата $\mathbf{M}$, $\mathtt{x}$ е променлива и μ е елемент на универсума на $\mathbf{M}$. Тогава оценката

$$v'(\xi) = \begin{cases} \mu, & \text{ако } \xi = \mathtt{x} \\ v(\xi), & \text{иначе} \end{cases}$$

се нарича *модифицирана оценка* и ще бъде означавана $v_{\mathtt{x}}^{\mu}$.

Дефиниция. Нека v е оценка в структурата $\mathbf{M}$. Стойността на формула φ в структурата $\mathbf{M}$ при оценка v е твърдение, което ще означаваме с

$$\mathbf{M} \models \varphi[v]$$

и се дефинира индуктивно посредством следните правила:

а) ако φ е атомарна, тогава стойността ѝ се определя съгласно предната дефиниция;

б) ако $\varphi = \psi_1 \,\&\, \psi_2$, тогава $\mathbf{M} \models \varphi[v]$ е твърдението „$\mathbf{M} \models \psi_1[v]$ и $\mathbf{M} \models \psi_2[v]$“;

в) ако $\varphi = \psi_1 \vee \psi_2$, тогава $\mathbf{M} \models \varphi[v]$ е твърдението „$\mathbf{M} \models \psi_1[v]$ или $\mathbf{M} \models \psi_2[v]$“;

г) ако $\varphi = \psi_1 \Rightarrow \psi_2$, тогава $\mathbf{M} \models \varphi[v]$ е твърдението „ако $\mathbf{M} \models \psi_1[v]$, то $\mathbf{M} \models \psi_2[v]$“;

д) ако $\varphi = \neg\psi$, тогава $\mathbf{M} \models \varphi[v]$ е твърдението „не е вярно, че $\mathbf{M} \models \psi[v]$“;

е) ако $\varphi = \forall \mathtt{x}\, \psi$, тогава $\mathbf{M} \models \varphi[v]$ е твърдението „за всеки елемент μ на универсума на $\mathbf{M}$ е вярно $\mathbf{M} \models \psi[v^{\mu}_{\mathtt{x}}]$“;

ж) ако $\varphi = \exists \mathtt{x}\, \psi$, тогава $\mathbf{M} \models \varphi[v]$ е твърдението „за някой елемент μ на универсума на $\mathbf{M}$ е вярно $\mathbf{M} \models \psi[v^{\mu}_{\mathtt{x}}]$“.

Дефиниция. а) Една формула е *вярна* в структура $\mathbf{M}$ при оценка v, ако стойността ѝ в структурата $\mathbf{M}$ при оценка v е истина. Следователно

$$\mathbf{M} \models \varphi[v]$$

е истина тогава и само тогава, когато формулата φ е вярна в структурата $\mathbf{M}$ при оценка v.

б) Формула φ е *тъждествено вярна* в структура $\mathbf{M}$, ако е вярна в структурата $\mathbf{M}$ при произволна оценка v. Записваме това така:

$$\mathbf{M} \models \psi$$

в) Формула φ е *тъждествено вярна* или *предикатна тавтология*, ако φ е тъждествено вярна във всяка структура. Записваме това така:

$$\models \psi$$

г) Две формули φ и ψ са *еквивалентни*, ако формулата $\varphi \Leftrightarrow \psi$ е предикатна тавтология. Записваме това така:

$$\models \varphi \Leftrightarrow \psi$$

Твърдение. *Две формули φ и ψ са еквивалентни тогава и само тогава, когато при произволна структура $\mathbf{M}$ и оценка v в $\mathbf{M}$, $\mathbf{M} \models \varphi[v]$ е еквивалентно на $\mathbf{M} \models \psi[v]$.*

Доказателство. Да си припомним, че формулата $\varphi \Leftrightarrow \psi$ е съкращение на формулата $(\varphi \Rightarrow \psi) \,\&\, (\psi \Rightarrow \varphi)$. Затова от дефинициите за еквивалентни и тъждествено верни формули следва, че φ и ψ са еквивалентни тогава и само тогава, когато при произволна структура $\mathbf{M}$ и оценка v в $\mathbf{M}$, от $\mathbf{M} \models \varphi[v]$ следва $\mathbf{M} \models \psi[v]$ и от $\mathbf{M} \models \psi[v]$ следва $\mathbf{M} \models \varphi[v]$. Това означава, че $\mathbf{M} \models \varphi[v]$ и $\mathbf{M} \models \psi[v]$ са еквивалентни. ■

Следствие. *а)* $\models \varphi \Leftrightarrow \varphi$

б) ако $\models \varphi \Leftrightarrow \psi$, *то* $\models \psi \Leftrightarrow \varphi$

в) ако $\models \varphi \Leftrightarrow \psi$ *и* $\models \psi \Leftrightarrow \chi$, *то* $\models \varphi \Leftrightarrow \chi$

Доказателство. Следва непосредствено от предното твърдение. ■

Твърдение. *Нека формулата φ има подформула ψ и формулата ψ е еквивалентна на ψ'. Ако формулата φ' се получава от φ като заменим подформулата ψ с ψ', то формулите φ и φ' са еквивалентни.*

Твърдение. *Ако две формули са конгруентни, то те са еквивалентни.*

Твърдение. *Нека v и v' са оценки в структура $\mathbf{M}$. Ако v и v' съвпадат за всички свободни променливи на формулата φ, то $\mathbf{M} \models \varphi[v]$ е еквивалентно на $\mathbf{M} \models \varphi[v']$.*

Дефиниция. *Затворена формула* означава формула, която не съдържа свободни променливи.

Твърдение. *Ако φ е затворена формула, а $\mathbf{M}$ — произволна структура, то за всяка оценка v в $\mathbf{M}$*

$$\mathbf{M} \models \varphi[v] \longleftrightarrow \mathbf{M} \models \varphi$$

Доказателство. Да припомним, че $\mathbf{M} \models \varphi$ означава, че формулата φ е тъждествено вярна в $\mathbf{M}$, т.е. φ е вярна при всяка оценка.

Съгласно предното твърдение за кои да е две оценки v_1 и v_2 в $\mathbf{M}$ твърдението $\mathbf{M} \models \varphi[v_1]$ е еквивалентно на $\mathbf{M} \models \varphi[v_2]$. Следователно ако $\mathbf{M} \models \varphi[v]$ е вярно за някоя оценка v, то $\mathbf{M} \models \varphi[v]$ ще е вярно за всяка оценка v. ■

Въпрос 19. Метод на резолюцията в съждителното и в предикатното смятане от първи ред. Хорнови клаузи

Дефиниция. а) *Литерал* означава атомарна формула или отрицание на атомарна формула.

б) *Дизюнкт* е крайно (може и празно) множество от литерали.

в) Един дизюнкт е верен в структура $\mathbf{M}$ при оценка v в $\mathbf{M}$, ако някой литерал от дизюнкта е верен в $\mathbf{M}$ при оценка v.

г) Един дизюнкт е (тъждествено) верен в структура $\mathbf{M}$, ако е верен при всяка оценка в $\mathbf{M}$.

д) Множество от дизюнкти е *изпълнимо*, ако съществува структура, в която са тъждествено верни всички дизюнкти от множеството. Множество от дизюнкти е *неизпълнимо*, ако не е изпълнимо.

е) Празното множество от литерали се нарича *празен дизюнкт* и найчесто се означава с $\square$, $\blacksquare$ или $\{\}$.

Твърдение. *Празният дизюнкт не е тъждествено верен в никоя структура.*

Доказателство. Празният дизюнкт не съдържа литерали и значи не съдържа литерали, които да са верни в структура все едно при каква оценка. ∎

Дефиниция. а) Нека s е субституция, а δ — дизюнкт. Дизюнктът, който се получава като заменим всеки литерал φ от δ с $\hat{s}(\varphi)$, се нарича *резултат от прилагането* на субституцията s към δ и ще означаваме с $\hat{s}(\delta)$.

б) Всеки дизюнкт от вида $\hat{s}(\delta)$, където s е произволна субституция, а δ е дизюнкт, се нарича *частен случай* на дизюнкта δ.

Твърдение. *Частните случаи на дизюнкт, който е тъждествено верен в структура* $\mathbf{M}$*, също са тъждествено верни в* $\mathbf{M}$*.*

Доказателство. Нека дизюнктът δ е тъждествено верен в структура $\mathbf{M}$, а $\hat{s}(\delta)$ е някой негов частен случай. Нека v е произволна оценка в $\mathbf{M}$. Трябва да докажем, че частният случай $\hat{s}(\delta)$ е верен в $\mathbf{M}$ при оценка v. Съгласно доказано твърдение съществува такава оценка w, че всеки литерал φ от δ е верен в $\mathbf{M}$ при оценка w тогава и само тогава, когато литералът $\hat{s}(\varphi)$ е верен в $\mathbf{M}$ при оценка v. Тъй като дизюнктът δ е тъждествено верен в $\mathbf{M}$, то има литерал φ от δ, който е верен в $\mathbf{M}$ при оценка w, а значи има литерал φ от δ, такъв че $\hat{s}(\varphi)$ е верен в $\mathbf{M}$ при оценка v. Остава да забележим, че съгласно дефиницията за прилагане на субституция, дизюнктът $\hat{s}(\delta)$ съдържа точно литералите $\hat{s}(\varphi)$, където φ е литерал от δ. ∎

Дефиниция. а) За всяка атомарна формула φ нека $\overline{\varphi} = \neg\varphi$ и $\overline{\neg\varphi} = \varphi$. Очевидно $\overline{\overline{\psi}} = \psi$ за всеки литерал ψ.

б) Ако два дизюнкта имат частни случаи от вида $\{\varphi\} \cup \delta'$ и $\{\overline{\varphi}\} \cup \delta''$, то дизюнктът $\delta' \cup \delta''$ се нарича тяхна *либерална резолвента*.

Твърдение. *Либералната резолвента на дизюнкти, които са тъждествено верни в структура* $\mathbf{M}$*, също е тъждествено вярна в* $\mathbf{M}$.

Доказателство. Нека двата дизюнкта имат частни случаи $\{\varphi\} \cup \delta'$ и $\{\overline{\varphi}\} \cup \delta''$, а а резолвентата е $\delta' \cup \delta''$. Съгласно предното твърдение, тези частни случаи са тъждествено верни в $\mathbf{M}$. Нека v е произволна оценка в $\mathbf{M}$. Трябва да докажем, че резолвентата $\delta' \cup \delta''$ е вярна в $\mathbf{M}$ при оценка v, т.е. че тя съдържа литерал, който е верен в $\mathbf{M}$ при оценка v. За да докажем това, да допуснем, че резолвентата не съдържа литерал, който е верен при оценка v. Това означава, че литералите от δ', както и литералите от δ'', са неверни в $\mathbf{M}$ при оценка v. Тъй като частният случай $\{\varphi\} \cup \delta'$ съдържа литерал, който е верен в $\mathbf{M}$ при оценка v, то литералът φ е верен в $\mathbf{M}$ при оценка v и значи литералът $\overline{\varphi}$ не е верен в $\mathbf{M}$ при оценка v. Така доказахме, че всички литерали на частният случай $\{\overline{\varphi}\} \cup \delta''$ са неверни в $\mathbf{M}$ при оценка v, а това е противоречие. ∎

Дефиниция. Нека Γ е множество от дизюнкти.

а) За всяко естествено число n ще дефинираме множество $\text{ЛРИ}_n(\Gamma)$ от дизюнкти. Нека $\text{ЛРИ}_0(\Gamma) = \Gamma$. И нека за всяко i множеството $\text{ЛРИ}_{i+1}(\Gamma)$ съдържа елементите на $\text{ЛРИ}_i(\Gamma)$, както и всички либерални резолвенти на елементи на $\text{ЛРИ}_i(\Gamma)$.

б) Нека $\text{ЛРИ}(\Gamma)$ е обединението на всички множества $\text{ЛРИ}_i(\Gamma)$.

Твърдение. *Ако* Γ *е множество от тъждествено верни в структура* $\mathbf{M}$ *дизюнкти, то елементите на* $\text{ЛРИ}_0(\Gamma)$, $\text{ЛРИ}_1(\Gamma)$, $\text{ЛРИ}_2(\Gamma)$,… *и* $\text{ЛРИ}(\Gamma)$ *съдържат тъждествено верни в* $\mathbf{M}$ *дизюнкти.*

Доказателство. С индукция по i ще докажем, че всички елементи на $\text{ЛРИ}_i(\Gamma)$ са тъждествено верни в $\mathbf{M}$, от където ще следва, че и елементите на $\text{ЛРИ}(\Gamma)$ са такива дизюнкти.

При $i = 0$ няма какво да доказваме, защото $\text{ЛРИ}_0(\Gamma) = \Gamma$.

Да допуснем, че $\text{ЛРИ}_i(\Gamma)$ съдържа тъждествено верни в $\mathbf{M}$ дизюнкти. От предното твърдение следва, че всички либерални резолвенти на елементи на $\text{ЛРИ}_i(\Gamma)$ са тъждествено верни в $\mathbf{M}$ и значи всички елементи на $\text{ЛРИ}_{i+1}(\Gamma)$ са тъждествено верни в $\mathbf{M}$. ∎

Теорема за коректност на либералната резолютивна изводимост. *Ако множеството от дизюнкти* Γ *е изпълнимо, то празният дизюнкт не е елемент на* $\text{ЛРИ}(\Gamma)$.

Доказателство. Да допуснем, че дизюнктите от Γ са тъждествено верни в структура $\mathbf{M}$. Съгласно предното твърдение елементите на лри(Γ) също ще бъдат тъждествено верни в $\mathbf{M}$. Съгласно първото твърдение пък, празният дизюнкт не е тъждествено верен в $\mathbf{M}$. ∎

Следва доказателство на теоремата за пълнота на либералната резолютивна изводимост. Разбира се, дори да не ви стигне времето да пишете доказателствата, най-малко формулировката на теоремата за пълнота трябва да се напише.

Лема. *Нека Γ е множество от дизюнкти без променливи и λ е литерал без променливи. Ако $\delta \in$ лри$(\Gamma \cup \{\{\lambda\}\})$, то $\delta \in$ лри(Γ) или $\delta \cup \{\overline{\lambda}\} \in$ лри(Γ) или $\delta = \{\lambda\}$.*

Доказателство. Най-напред да отбележим, че единственият частен случай на дизюнкт без променливи е същият дизюнкт.

С индукция по i ще докажем, че ако $\delta \in$ лри$_i(\Gamma \cup \{\{\lambda\}\})$, то δ има исканото свойство.

При $i = 0$ имаме лри$_0(\Gamma \cup \{\{\lambda\}\}) = \Gamma \cup \{\{\lambda\}\}$ и значи в този случай $\delta \in \Gamma$ или $\delta = \{\lambda\}$.

Да допуснем, че твърдението е доказано за i и ще го докажем за $i+1$. По дефиниция, лри$_{i+1}(\Gamma \cup \{\{\lambda\}\})$ съдържа елементите на множеството лри$_i(\Gamma \cup \{\{\lambda\}\})$ както и всички либерални резолвенти от дизюнкти от това множество. Ако δ е елемент на лри$_i(\Gamma \cup \{\{\lambda\}\})$, то получаваме исканото от индукционното предположение.

Остава да разгледаме случая когато δ е либерална резолвента на два дизюнкта от лри$_i(\Gamma \cup \{\{\lambda\}\})$. Тъй като става въпрос за дизюнкти без променливи, то тези два дизюнкта имат вида $\delta' \cup \{\mu\}$ и $\delta'' \cup \{\overline{\mu}\}$, където $\delta = \delta' \cup \delta''$. Съгласно индукционното предположение за тези два дизюнкта имаме няколко възможности:

- Ако $\delta' \cup \{\mu\}$ и $\delta'' \cup \{\overline{\mu}\}$ са елементи на лри$_i(\Gamma)$, то значи тяхната резолвента δ е елемент на лри$_{i+1}(\Gamma)$.
- Ако $\delta' \cup \{\mu\}$ и $\delta'' \cup \{\overline{\mu}\} \cup \{\overline{\lambda}\}$ са елементи на лри$_i(\Gamma)$, то резолвентата $\delta \cup \{\overline{\lambda}\}$ на тези два дизюнкта е елемент на лри$_{i+1}(\Gamma)$.
- Ако $\delta' \cup \{\mu\} \cup \{\overline{\lambda}\}$ и $\delta'' \cup \{\overline{\mu}\}$ са елементи на лри$_i(\Gamma)$, то разсъждаваме аналогично.
- Ако $\delta' \cup \{\mu\} \cup \{\overline{\lambda}\}$ и $\delta'' \cup \{\overline{\mu}\} \cup \{\overline{\lambda}\}$ са елементи на лри$_i(\Gamma)$, то също разсъждаваме аналогично.
- Ако $\delta' \cup \{\mu\} = \{\lambda\}$, то $\delta' = \varnothing$ и $\mu = \lambda$, следователно вторият дизюнкт е равен на $\delta'' \cup \{\overline{\lambda}\}$, а резолвентата на тези два дизюнкта е δ''. Ако се възползваме от индукционното предположение за втория дизюнкт, ще получим, че лри$_{i+1}(\Gamma)$ съдържа $\delta'' \cup \{\overline{\mu}\}$ или $\delta'' \cup \{\overline{\mu}\} \cup \{\overline{\lambda}\}$. Но $\lambda = \mu$, така че и в двата случая получаваме желаното.
- Ако $\delta'' \cup \{\overline{\mu}\} = \{\lambda\}$, то се разсъждава аналогично.

$\blacksquare$

Следствие. *Нека* Γ *е множество от дизюнкти без променливи и* λ *е литерал без променливи. Ако празният дизюнкт се съдържа в* $\text{лри}(\Gamma \cup \{\lambda\})$ *и* $\text{лри}(\Gamma \cup \{\overline{\lambda}\})$*, то той се съдържа и в* $\text{лри}(\Gamma)$.

Доказателство. Щом празният дизюнкт се съдържа в $\text{лри}(\Gamma \cup \{\lambda\})$, то от предната лема получаваме, че $\{\overline{\lambda}\}$ се съдържа в $\text{лри}(\Gamma)$.

Аналогично, щом празният дизюнкт се съдържа в $\text{лри}(\Gamma \cup \{\overline{\lambda}\})$, то от предната лема получаваме също, че $\{\lambda\}$ се съдържа в $\text{лри}(\Gamma)$.

Тъй като празният дизюнкт е резолвента на $\{\lambda\}$ и $\{\overline{\lambda}\}$, то значи той се съдържа в $\text{лри}(\Gamma)$. $\blacksquare$

Нека $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ е редица, съдържаща всички атомарни формули без променливи. Ще докажем теоремата за пълнота при условие, че съществува такава редица. (Такава редица съществува, ако в сигнатурата има изброимо много символи.)

Твърдение за пълнота на резолютивната изводимост за дизюнкти без променливи. *Множеството от дизюнкти без променливи* Γ *е изпълнимо, ако празният дизюнкт не е елемент на* $\text{лри}(\Gamma)$.

Доказателство. Да дефинираме множества $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ по следния начин. Нека $\Gamma_0 = \Gamma$. И нека

$$\Gamma_{i+1} = \begin{cases} \Gamma_i \cup \{\varphi_i\}, & \text{ако лри}(\Gamma_i \cup \{\varphi_i\}) \text{ не съдържа празния дизюнкт} \\ \Gamma_i \cup \{\neg\varphi_i\}, & \text{иначе} \end{cases}$$

Ако $\text{лри}(\Gamma_i \cup \{\varphi_i\})$ съдържа празния дизюнкт, то от предното следствие получаваме, че $\text{лри}(\Gamma_i \cup \{\neg\varphi_i\})$ не съдържа празният дизюнкт. Следователно множествата $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ не съдържат празния дизюнкт. Нека

$$\Gamma_\infty = \bigcup_{i=0}^{\infty} \Gamma_i$$

Тъй като всеки елемент на $\text{лри}(\Gamma_\infty)$ се получава от краен брой елементи на Γ_∞, то значи всеки елемент на $\text{лри}(\Gamma_\infty)$ е елемент на $\text{лри}(\Gamma_i)$ за някое i. Следователно $\text{лри}(\Gamma_\infty)$ също не съдържа празния дизюнкт.

Нека $\mathbf{H}$ е ербранова структура, в която предикатните символи се интерпретират по следния начин:

$$\mathtt{p}^{\mathbf{H}}(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n) \longleftrightarrow \mathtt{p}(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n) \in \Gamma_\infty$$

Ще докажем, че тази структура е модел на Γ. За целта да допуснем, че някой дизюнкт $\delta \in \Gamma$ е неверен в $\mathbf{H}$. Тъй като става въпрос за дизюнкти без променливи, от тук следва, че всички литерали в δ са неверни в $\mathbf{H}$. Обаче

– множеството Γ_∞ е така дефинирано, че за всеки литерал без променливи λ ще бъде вярно $\lambda \in \Gamma_\infty$ или $\overline{\lambda} \in \Gamma_\infty$, а

– структурата $\mathbf{H}$ е така дефинирана, че един литерал без променливи λ е верен в $\mathbf{H}$ тогава и само тогава, когато $\lambda \in \Gamma_\infty$.

Следователно за всеки литерал λ от δ е вярно $\overline{\lambda} \in \Gamma_\infty$ и значи от Γ_∞ става възможно да получим с резолюция празния дизюнкт, което е противоречие. ∎

Теорема за пълнота на резолютивната либерална изводимост. *Множеството от дизюнкти* Γ *е изпълнимо, ако празният дизюнкт не е елемент на* лри(Γ).

Доказателство. Нека Γ' е множеството от всички частни случаи без променливи на дизюнкти от Γ. С индукция по i ще докажем, че елементите на лри$_i(\Gamma')$ са елементи на $\Gamma' \cup$ лри$_i(\Gamma)$. При $i = 0$ това е ясно. Ако пък $\delta \in$ лри$_{i+1}(\Gamma')$, то δ е либерална резолвента на някакви дизюнкти δ'_1 и δ'_2 от лри$_i(\Gamma')$. Тъй като в дизюнктите от Γ' са без променливи, то също и δ'_1 и δ'_2 са без променливи. Съгласно индукционното предположение тези два дизюнкта са елементи на $\Gamma' \cup$ лри$_i(\Gamma)$. Тъй като дефиницията на либерална резолвента позволява използването на произволни частни случаи, а елементите на Γ' са частни случаи на дизюнкти от лри$_i(\Gamma)$, то значи δ е либерална резолвента дизюнкти от лри$_i(\Gamma)$ и значи е елемент на лри$_{i+1}(\Gamma)$.

Доказахме, че елементите на лри$_i(\Gamma')$ са елементи на $\Gamma' \cup$ лри$_i(\Gamma)$. По условие празният дизюнкт не е елемент на лри(Γ) и значи той няма да бъде елемент и на лри(Γ'). Съгласно предното твърдение Γ' има ербранов модел $\mathbf{H}$. Ще докажем, че $\mathbf{H}$ е модел и на Γ.

Нека ε е произволен дизюнкт от Γ, а v е оценка в $\mathbf{H}$. Всяка оценка в ербранова структура е субституция. Нека ε' е частният случай на ε, който се получава при прилагане на субституцията v. Тъй като $\varepsilon' \in \Gamma'$, то ε' е верен в $\mathbf{H}$, и значи съдържа литерал λ', който е верен в $\mathbf{H}$. Нека λ е литералът от ε, от който се получава λ'. Съгласно едно свойство на ербрановите структури един литерал λ е верен в $\mathbf{H}$ при оценка v тогава и само тогава, когато в $\mathbf{H}$ е верен λ', т.е. литералът, който се получава от λ като приложим v като оценка. Но λ' е верен, значи и λ е верен при оценка v. Тъй като оценката v бе произволно избрана, получаваме исканото. ∎

Съществуването на най-малък ербранов модел е доказано в раздел 4.5 в записките. Тук пропускам това, защото въпросът става толкова дълъг, че не си представям как може да се напише на държавния изпит. Дайте обаче следващите две дефиниции.

Дефиниция. *Хорновата клауза* е наредена двойка (Γ, ψ), където Γ е редица от атомарни формули (може и празна) и ψ е атомарна формула.

Клаузата $((\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n), \psi)$ записваме така:

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \vdash \psi$$

или така

$$\psi :\!- \ \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n.$$

Дефиниция. Клаузата $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \vdash \psi$ е (тъждествено) вярна в структурата $\mathbf{M}$, ако при всяка оценка, при която предпоставките $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ са верни, заключението ψ също е вярно. Използваме следното означение:

$$\mathbf{M} \vDash \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \vdash \psi$$