Лекция 1.4.2021

1 Афинни подпространства

Линейни подпространства – припомняне

Твърдение 1 *1. Множеството V от решенията на хомогенна линейна система $Ax = 0$ с n неизвестни е $(n-r)$-мерно линейно подпространство на $\mathbb{R}^n$, където r е рангът на A.*

2. Ако V е k-мерно линейно подпространство на $\mathbb{R}^n$, то съществува хомогенна линейна система $Ax = 0$ с n неизвестни, такава че V е множеството от решенията ѝ. При това системата може да се вземе с $n-k$ уравнения (това е минималният възможен брой).

Доказателство: Първото със сигурност е доказвано в курса по алгебра. Вероятно и второто, но ще дам едно негово доказателство.

Нека $(v_1, \dots, v_k)$ е базис на V. Тогава $x \in V \Leftrightarrow$ съществуват $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ такива, че $x = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k$. Идеята как да се построи търсената система е съвършено тривиална: Равенството $x = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k$ е система от n уравнения. Изключваме $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ от нея, тоест от някои k от уравненията изразяваме $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ чрез съответните x-ове и заместваме в останалите $n-k$ уравнения. Така получаваме линейна система за x, на която всяко $x \in V$ е решение, което е очевидно от това как беше построена системата. Това е търсената система $Ax = 0$ с $n-k$ уравнения. Останалата част от доказателството е за да се обясни защо наистина някои k от уравненията могат да се решат относно $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ и защо получената система няма други решения освен елементите на V.

Нека M е матрицата $n \times k$, чиито стълбове са $v_1, \dots, v_k$. Тогава равенството $x = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k$ е еквивалентно на $x = M\lambda$, където $\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix}$. Стълбовете на M са линейно независими, защото са базис на V. Следователно рангът ѝ е k и значи някои k от редовете ѝ са линейно независими. За удобство на означенията нека това са първите k реда. Значи матрицата $k \times k$ от първите k реда на M има ранг k, тоест това е обратима матрица $k \times k$ и значи детерминантата ѝ е ненулева. Тогава по теоремата на Крамер системата от първите k уравнения на $x = M\lambda$ (матрицата на която е получената $k \times k$ матрица с ненулева детерминанта) може да се реши относно $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, и то по единствен начин. По такъв начин получаваме $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ като линейни комбинации на $x_1, \dots, x_k$. Заместваме в останалите $n-k$ уравнения на $x = M\lambda$ и получаваме система от вида

$$\left| \begin{array}{lcl} x_{k+1} & = & b_{k+1,1}x_1 + \dots + b_{k+1,k}x_k \\ & \vdots & \\ x_n & = & b_{n,1}x_1 + \dots + b_{n,k}x_k \end{array} \right. .$$

Като прехвърлим всичко отляво получаваме хомогенната система

$$\left|\begin{array}{rcl} -b_{k+1,1}x_1 - \cdots - b_{k+1,k}x_k + x_{k+1} & = & 0 \\ & \vdots & \\ -b_{n,1}x_1 - \cdots - b_{n,k}x_k + x_n & = & 0 \end{array}\right. ,$$

тоест $Ax = 0$, чиято матрица е $(n-k) \times n$ матрицата $A = (-B\ E_{n-k})$, където B е $(n-k) \times k$ матрицата $B = (b_{k+i,j})_{j=1,\dots,k}^{i=1,\dots,n-k}$, а E_{n-k} е единичната матрица от ред $n-k$. От това как построихме системата $Ax = 0$ е ясно, че всяко $x \in V$ е нейно решение. Тъй като $\det E_{n-k} = 1 \neq 0$, то A има минор от ред $n-k$, който е ненулев. Следователно A има ранг $r \geq n-k$. Но A има $n-k$ реда и значи $r \leq n-k$. Следователно $r = n-k$. От това следва, че линейното пространство от решенията на $Ax = 0$ има размерност $n - r = k$. И тъй като пространството от решенията съдържа k-мерното пространство V, то съвпада с V.

И накрая, ако $Ax = 0$ е произволна система, пространството от решенията на която е V, то тя не може да има по-малко от $n-k$ уравнения, защото иначе бихме имали $r < n-k$ и пространството от решенията би било с размерност $n - r > k$. □

Твърдение 2 *Нека $Ax = b$ е съвместима линейна система с n неизвестни и $x_0 \in \mathbb{R}^n$ е едно нейно решение. Тогава $x \in \mathbb{R}^n$ е решение на системата тогава и само тогава, когато $x = x_0 + v$ за някое решение v на съответната хомогенна система $Ax = 0$.*

Доказателство: Това сигурно също е доказвано в курса по алгебра, но тъй като доказателството е съвсем просто, ще го напиша.

Тъй като x_0 е решение на системата $Ax = b$, то $Ax_0 = b$. Следователно
x е решение на системата $\Leftrightarrow Ax = b \Leftrightarrow Ax = Ax_0 \Leftrightarrow A(x - x_0) = 0$
$\Leftrightarrow v = x - x_0$ удовлетворява $Av = 0$, тоест е решение на хомогенната система $Ax = 0$
$\Leftrightarrow x = x_0 + v$, където $Av = 0$, тоест v е решение на хомогенната система $Ax = 0$. □

Твърдение 3 *Произволно сечение на линейни подпространства е линейно подпространство.*

Доказателство: Това сигурно също е доказвано в курса по алгебра, но тъй като доказателството е кратко и лесно, ще го напиша.

Нека U е линейно пространство и V_i, $i \in I$, са линейни подпространства на U. (Индексното множество I е произволно, тоест подпространствата може да са едно, две, краен брой, безкраен брой, но доказателството си върви по един и същ начин.)

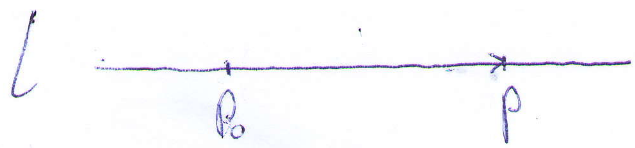
Тъй като V_i е линейно подпространство за всяко $i \in I$, то $0 \in V_i$ за всяко $i \in I$. Следователно $0 \in \bigcap\limits_{i \in I} V_i$ и значи $\bigcap\limits_{i \in I} V_i$ не е празно.

Нека $\lambda', \lambda'' \in \mathbb{R}$, $v', v'' \in \bigcap\limits_{i \in I} V_i$. Тогава $v', v'' \in V_i$ за всяко $i \in I$ и тъй като V_i е линейно подпространство за всяко $i \in I$, то $\lambda' v' + \lambda'' v'' \in V_i$ за всяко $i \in I$. Следователно $\lambda' v' + \lambda'' v'' \in \bigcap\limits_{i \in I} V_i$.

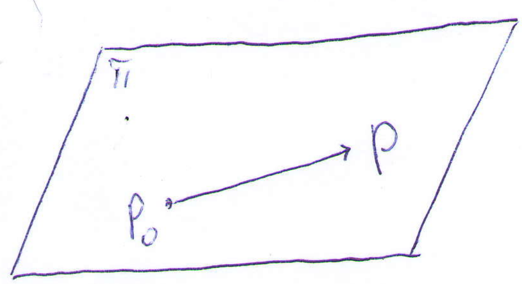
С това е доказано, че $\bigcap\limits_{i \in I} V_i$ е линейно подпространство на U. □

Афинни подпространства

Нека l е права в геометричната равнина или геометричното пространство, V е линейното пространство на векторите, които са колинеарни с нея, и P_0 е точка от l. Тогава за произволна точка P имаме, че $P \in l$ тогава и само тогава, когато векторът $\overrightarrow{P_0P}$ е колинеарен с l, тоест когато $\overrightarrow{P_0P} \in V$. Следователно $l = \left\{P : \overrightarrow{P_0P} \in V\right\}$.



Аналогично, нека π е равнина в геометричното пространство, V е линейното пространство на векторите, които са компланарни с нея, и P_0 е точка от π. Тогава за произволна точка P имаме, че $P \in \pi$ тогава и само тогава, когато векторът $\overrightarrow{P_0P}$ е компланарен с π, тоест когато $\overrightarrow{P_0P} \in V$. Следователно $\pi = \left\{P : \overrightarrow{P_0P} \in V\right\}$.



Тия прости съображения са мотивацията за въвеждането на понятието афинно подпространство в произволно афинно пространство.

Нека $\mathcal{A}$ е афинно пространство, моделирано върху линейното пространство U.

Определение 1 Подмножеството B на $\mathcal{A}$ се нарича *афинно подпространство на* $\mathcal{A}$, ако $B = \left\{Q \in \mathcal{A} : \overrightarrow{P_0Q} \in V\right\}$, където V е линейно подпространство на U и $P_0 \in \mathcal{A}$, тоест ако за някое линейно подпространство V на U и някоя точка $P_0 \in \mathcal{A}$ е изпълнено $Q \in B \Leftrightarrow \overrightarrow{P_0Q} \in V$.

Твърдение 4 *Нека B е афинното подпространство на $\mathcal{A}$, зададено с линейното подпространство V на U и точката $P_0 \in \mathcal{A}$, тоест $B = \left\{Q \in \mathcal{A} : \overrightarrow{P_0Q} \in V\right\}$. Тогава:*

1. *$P_0 \in B$. В частност, B не е празно множество.*
2. *За всяка точка $P \in B$ имаме $B = \left\{Q \in \mathcal{A} : \overrightarrow{PQ} \in V\right\}$.*
3. *$V = \left\{\overrightarrow{PQ} : P, Q \in B\right\}$ и дори за всяка точка $P \in B$ имаме $V = \left\{\overrightarrow{PQ} : Q \in B\right\}$.*
4. *Линейното подпространство V се определя еднозначно от B.*
5. *B е афинно пространство, моделирано върху линейното подпространство V.*

Доказателство:

1. Имаме $\overrightarrow{P_0P_0} = 0$, а $0 \in V$, защото V е линейно подпространство на U. Следователно $P_0 \in B$.

2. Нека $P \in B$. Тогава $\overrightarrow{P_0P} \in V$. За произволна точка $Q \in \mathcal{A}$ имаме $\overrightarrow{P_0Q} = \overrightarrow{P_0P} + \overrightarrow{PQ}$. Тъй като V е линейно подпространство и $\overrightarrow{P_0P} \in V$, от това равенство следва, че $\overrightarrow{P_0Q} \in V \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} \in V$. Следователно $\left\{Q \in \mathcal{A} : \overrightarrow{P_0Q} \in V\right\} = \left\{Q \in \mathcal{A} : \overrightarrow{PQ} \in V\right\}$, тоест $B = \left\{Q \in \mathcal{A} : \overrightarrow{PQ} \in V\right\}$.

3. Нека $P \in B$. Тогава от 2. следва, че за всяко $Q \in B$ имаме $\overrightarrow{PQ} \in V$. Значи $\left\{\overrightarrow{PQ} : Q \in B\right\} \subset V$.

   За обратното включване: Нека $v \in V$. Тъй като $\mathcal{A}$ е афинно пространство, то съществува единствено $Q \in \mathcal{A}$ такова, че $\overrightarrow{PQ} = v$. Тъй като $v \in V$, от 2. следва, че $Q \in B$. Следователно за всяко $v \in V$ съществува $Q \in B$ (и при това единствено) такова, че $\overrightarrow{PQ} = v$, тоест $v \in \left\{\overrightarrow{PQ} : Q \in B\right\}$. Значи $V \subset \left\{\overrightarrow{PQ} : Q \in B\right\}$.

   Следователно $V = \left\{\overrightarrow{PQ} : Q \in B\right\}$, с което е доказано второто равенство.

   А първото равенство следва от второто, защото

   $$\left\{\overrightarrow{PQ} : P, Q \in B\right\} = \bigcup_{P \in B} \left\{\overrightarrow{PQ} : Q \in B\right\} = \bigcup_{P \in B} V = V.$$

4. Това следва от първото равенство в 3..

5. От 1. знаем, че B не е празно множество. От 3. (а и от 2.) следва, че за $P, Q \in B$ имаме $\overrightarrow{PQ} \in V$. Следователно като ограничим изображението $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \ni (P, Q) \mapsto \overrightarrow{PQ} \in U$ върху $B \times B$ ще получим изображение $B \times B \to V$. Остава да проверим, че двете свойства от дефиницията на афинно пространство са изпълнени за това изображение.

   Че за $P \in B$ и $v \in V$ съществува единствено $Q \in B$ такова, че $\overrightarrow{PQ} = v$, го видяхме при доказателството на обратното включване в 3.. А че за всеки $P, Q, R \in B$ е в сила правилото на триъгълника за събиране е ясно, тъй като то е в сила дори за всеки $P, Q, R \in \mathcal{A}$, защото $\mathcal{A}$ е афинно пространство.

   Следователно B е афинно пространство, моделирано върху V. □

Твърдение 5 0-*мерните афинни подпространства са едноточковите подмножества.*

Доказателство: Размерността на афинно пространство по дефиниция е размерността на направляващото линейно пространство. Следователно афинното подпространство B е 0-мерно тогава и само тогава, когато направляващото му пространство V е 0-мерно, тоест когато $V = \{0\}$. Значи 0-мерно афинно пространство B се определя от $V = \{0\}$ и точка $P_0 \in \mathcal{A}$, така че получаваме

$$B = \left\{ P \in \mathcal{A} : \overrightarrow{P_0P} \in V \right\} = \left\{ P \in \mathcal{A} : \overrightarrow{P_0P} = 0 \right\} = \{P \in \mathcal{A} : P_0 = P\} = \{P_0\}.$$

И тъй като можем да вземем произволно $P_0 \in \mathcal{A}$, то 0-мерните афинни подпространства на $\mathcal{A}$ са всевъзможните едноточкови подмножества на $\mathcal{A}$. $\square$

Твърдение 6 *$\mathcal{A}$ е афинно подпространство на себе си. При това, ако $\dim \mathcal{A} = n$ е крайна, то $\mathcal{A}$ е единственото n-мерно афинно подпространство на $\mathcal{A}$.*

Доказателство: Нека $P_0 \in \mathcal{A}$ е произволна точка. Тъй като $\overrightarrow{P_0P} \in U$ за всяко $P \in \mathcal{A}$, то афинното подпространство, определено от $V = U$ и P_0, е $\left\{ P \in \mathcal{A} : \overrightarrow{P_0P} \in U \right\} = \mathcal{A}$.

Нека $\dim \mathcal{A} = n$ е крайна. Това означава, че $\dim U = n$ е крайна. Нека B е n-мерно афинно подпространство на $\mathcal{A}$. Тогава направляващото линейно пространство V на B е n-мерно линейно подпространство на n-мерното U и следователно $V = U$. Значи B е афинно подпространство, определено от U и някоя точка $P_0 \in \mathcal{A}$, и от доказаното по-горе следва, че $B = \mathcal{A}$. $\square$

Определение 2 Нека U е линейно пространство, V е линейно подпространство на U и $u_0 \in U$. Означаваме $u_0 + V = \{u_0 + v : v \in V\}$.

Твърдение 7 *Афинните подпространства на линейното пространство U са точно подмножествата от вида $u_0 + V$, където V е линейно подпространство на U и $u_0 \in U$, като при това направляващото пространство на $u_0 + V$ е V. В частност, афинните подпространства на U през 0 са точно линейните подпространства на U.*

Доказателство: Знаем, че U е афинно пространство, моделирано върху U, с изображението $\overrightarrow{uv} = v - u$.

Нека B е афинното подпространство през $u_0 \in U$ с направляващо пространство линейното подпространство V на U. Тогава

$$\begin{aligned} B &= \{u \in U : \overrightarrow{u_0u} \in V\} = \{u \in U : u - u_0 \in V\} = \{u \in U : u - u_0 = v \text{ за някое } v \in V\} \\ &= \{u \in U : u = u_0 + v \text{ за някое } v \in V\} = \{u_0 + v : v \in V\} = u_0 + V. \end{aligned}$$

В частност, ако $u_0 = 0$, то $B = 0 + V = V$, тоест афинните подпространства на U през 0 са точно линейните подпространства V на U. $\square$

Твърдение 8 *1. Множеството B от решенията на съвместима линейна система $Ax = b$ с n неизвестни е $(n-r)$-мерно афинно подпространство на $\mathbb{R}^n$, моделирано върху линейното подпространство V от решенията на съответната хомогенна система $Ax = 0$, където r е рангът на A.*

2. Ако B е k-мерно афинно подпространство на $\mathbb{R}^n$, то съществува линейна система $Ax = b$ с n неизвестни, такава че B е множеството от решенията ѝ. При това системата може да се вземе с $n-k$ уравнения (това е минималният възможен брой).

Доказателство:

1. Нека x_0 е едно решение на $Ax = b$ (такова съществува, защото системата е съвместима). От Твърдение 2 и Определение 2 следва, че $B = x_0 + V$. По Твърдение 7 това означава, че B е афинно подпространство на $\mathbb{R}^n$, моделирано върху V. Освен това от 1. на Твърдение 1 имаме, че $\dim V = n-r$, така че $\dim B = \dim V = n-r$.

2. От Твърдение 7 следва, че $B = x_0 + V$ за някое $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и някое линейно подпространство V на $\mathbb{R}^n$. При това $\dim V = \dim B = k$. От 2. на Твърдение 1 имаме, че V е множеството от решенията на някоя хомогенна система $Ax = 0$ с n неизвестни и $n-k$ уравнения. Нека $b = Ax_0$. Тогава x_0 е решение на системата $Ax = b$ и от доказателството на 1. следва, че множеството от решенията ѝ е $x_0 + V$, тоест B. Така намерихме система $Ax = b$ с n неизвестни и $n-k$ уравнения, множеството от решенията на която е B.

   И накрая, не съществува система $Ax = b$ с по-малко от $n-k$ уравнения, множеството от решенията на която е B, защото в противен случай k-мерното направляващо пространство V на B би било линейното пространство от решенията на съответната хомогенна система $Ax = 0$, която има същия брой уравнения, тоест по-малко от $n-k$, а това противоречи на 2. на Твърдение 1. □

Твърдение 9 *Нека B и B' са афинни подпространства на $\mathcal{A}$, моделирани съответно върху линейните подпространства V и V' на U. Тогава:*

1. *Ако $B \subset B'$, то $V \subset V'$.*
2. *Ако $V \subset V'$ и $B \cap B' \neq \emptyset$, то $B \subset B'$.*
3. *Ако $B \subset B'$, то $\dim B \leq \dim B'$.*
4. *Ако $B \subset B'$ и $\dim B = \dim B'$ е крайна, то $B = B'$.*

Доказателство:

1. Това следва от 3. на Твърдение 4:

$$V = \left\{ \overrightarrow{PQ} : P, Q \in B \right\} \subset \left\{ \overrightarrow{PQ} : P, Q \in B' \right\} = V'.$$

2. Нека $P_0 \in B \cap B' \neq \emptyset$ (такава точка P_0 съществува, защото $B \cap B' \neq \emptyset$). Тогава

$$B = \left\{ P \in \mathcal{A} : \overrightarrow{P_0 P} \in V \right\} \subset \left\{ P \in \mathcal{A} : \overrightarrow{P_0 P} \in V' \right\} = B'.$$

3. Ако $B \subset B'$, то от 1. следва $V \subset V'$ и значи $\dim V \leq \dim V'$. Тъй като $\dim B = \dim V$ и $\dim B' = \dim V'$, то $\dim B \leq \dim B'$.

4. Ако $B \subset B'$, то от 1. следва $V \subset V'$. При това $\dim V = \dim B = \dim B' = \dim V'$ е крайна и значи $V = V'$. Тъй като $B \subset B'$, то $B \cap B' = B \neq \emptyset$, и тъй като освен това $V' = V \subset V$, от 2. получаваме $B' \subset B$. Следователно $B = B'$. $\square$

Определение 3 Нека B е афинно подпространство на $\mathcal{A}$, моделирано върху V. Векторите $v \in V$ наричаме *успоредни на* B и пишем $v \parallel B$.

Теорема 1 *Нека $P_0 \in \mathcal{A}$, а $v_1, \dots, v_k \in U$. Тогава най-малкото афинно подпространство B на $\mathcal{A}$, за което $P_0 \in B$ и $v_1, \dots, v_k \parallel B$, е афинното подпространство породено от точката P_0 и $V = l(v_1, \dots, v_k)$, тоест*

$$B = \left\{ P \in \mathcal{A} : \overrightarrow{P_0 P} \in l(v_1, \dots, v_k) \right\} = \left\{ P \in \mathcal{A} : \exists \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R} : \overrightarrow{P_0 P} = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k \right\}.$$

(Че е най-малкото означава, че всяко афинно подпространство с тия свойства го съдържа.)
Ако освен това $v_1, \dots, v_k$ са линейно независими, то горното B е единственото k-мерно афинно подпространство B на $\mathcal{A}$, за което $P_0 \in B$ и $v_1, \dots, v_k \parallel B$.

Доказателство: Тъй като афинното подпространство B от формулировката е породено от P_0 и $l(v_1, \dots, v_k)$ и имаме $v_1, \dots, v_k \in l(v_1, \dots, v_k)$, то $P_0 \in B$ и $v_1, \dots, v_k \parallel B$.

Нека B' е произволно афинно подпространство, за което $P_0 \in B'$ и $v_1, \dots, v_k \parallel B'$. Нека V' е направляващото пространство на B'. Тогава $v_1, \dots, v_k \in V'$ и следователно $V = l(v_1, \dots, v_k) \subset V'$. Освен това $P_0 \in B \cap B'$, така че $B \cap B' \neq \emptyset$. От 2. на Твърдение 9 тогава следва, че $B \subset B'$. Значи наистина B е най-малкото афинно подпространство на $\mathcal{A}$ през P_0, на което $v_1, \dots, v_k$ са успоредни.

Нека $v_1, \dots, v_k$ са линейно независими. Тогава $\dim B = \dim l(v_1, \dots, v_k) = k$. Ако B' е k-мерно афинно подпространство на $\mathcal{A}$, за което $P_0 \in B'$ и $v_1, \dots, v_k \parallel B'$, то от доказаното по-горе $B \subset B'$. Тъй като освен това $\dim B = k = \dim B'$ е крайна, то от 4. на Твърдение 9 следва, че $B = B'$. Значи наистина B е единственото k-мерно афинно подпространство на $\mathcal{A}$ през P_0, на което $v_1, \dots, v_k$ са успоредни. $\square$

Забележка 1 Ако в горната теорема $v_1, \dots, v_k$ са линейно зависими, то $\dim B < k$ (защото $\dim B = \dim l(v_1, \dots, v_k) < k$).

Теорема 2 *Нека $P_0, \ldots, P_k \in \mathcal{A}$. Тогава най-малкото афинно подпространство на $\mathcal{A}$, което ги съдържа, е афинното подпространство породено от точката P_0 и $V = l\left(\overrightarrow{P_0P_1}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_k}\right)$, тоест*

$$B = \left\{P \in \mathcal{A} : \overrightarrow{P_0P} \in l\left(\overrightarrow{P_0P_1}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_k}\right)\right\} = \left\{P \in \mathcal{A} : \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R} : \overrightarrow{P_0P} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \overrightarrow{P_0P_i}\right\}.$$

Ако освен това $P_0, \ldots, P_k \in \mathcal{A}$ не лежат в афинно подпространство на $\mathcal{A}$ с размерност строго по-малка от k, то горното B е единственото k-мерно афинно подпространство B на $\mathcal{A}$, което ги съдържа.

Доказателство: Тъй като афинното подпространство B от формулировката е породено от P_0 и $l\left(\overrightarrow{P_0P_1}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_k}\right)$, имаме $P_0 \in B$. Освен това за всяко $i = 1, \ldots, k$ е изпълнено $\overrightarrow{P_0P_i} \in l\left(\overrightarrow{P_0P_1}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_k}\right)$ и следователно $P_i \in B$. Значи наистина B съдържа $P_0, \ldots, P_k$.

От дефиницията на B и Теорема 1 е ясно, че B е най-малкото афинно подпространство през P_0, на което $\overrightarrow{P_0P_1}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_k}$ са успоредни. Нека B' е произволно афинно подпространство, което съдържа $P_0, \ldots, P_k$. Нека V' е направляващото пространство на B'. Тогава $P_0 \in B'$ и освен това за всяко $i = 1, \ldots, k$ от $P_i \in B'$ следва $\overrightarrow{P_0P_i} \in V'$, тоест $\overrightarrow{P_0P_i} \parallel B'$. Значи B' е афинно подпространство през P_0, на което $\overrightarrow{P_0P_1}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_k}$ са успоредни. Но B е най-малкото афинно подпространство с тия свойства. Следователно $B \subset B'$. Значи наистина B е най-малкото афинно подпространство на $\mathcal{A}$, което съдържа $P_0, \ldots, P_k$.

Имаме $\dim B = \dim l\left(\overrightarrow{P_0P_1}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_k}\right) \leq k$. Нека $P_0, \ldots, P_k \in \mathcal{A}$ не лежат в афинно подпространство на $\mathcal{A}$ с размерност строго по-малка от k. Тогава $\dim B \geq k$ и следователно $\dim B = k$. Ако B' е k-мерно афинно подпространство на $\mathcal{A}$, което съдържа $P_0, \ldots, P_k$, то от доказаното по-горе $B \subset B'$. Тъй като освен това $\dim B = k = \dim B'$ е крайна, то от 4. на Твърдение 9 следва, че $B = B'$. Значи наистина B е единственото k-мерно афинно подпространство на $\mathcal{A}$, което съдържа $P_0, \ldots, P_k$. □

Забележка 2 Ако в горната теорема $P_0, \ldots, P_k$ лежат в афинно подпространство на $\mathcal{A}$ с размерност строго по-малка от k, то $\dim B < k$ (защото B е най-малкото, в което лежат).

Твърдение 10 *Нека B е k-мерно афинно подпространство на $\mathcal{A}$. Тогава съществуват точки $P_0, \ldots, P_k \in B$, които не лежат в афинно подпространство на $\mathcal{A}$ с размерност строго по-малка от k.*

Доказателство: Нека V е направляващото пространство на B. Следователно $\dim V = \dim B = k$. Нека $(v_1, \ldots, v_k)$ е базис на V. Нека P_0 е произволна точка от B. За $i = 1, \ldots, k$ нека P_i е единствената точка, за която $\overrightarrow{P_0P_i} = v_i$. Тъй като $v_1, \ldots, v_k \in V$ и $P_0 \in B$, то и $P_1, \ldots, P_k \in B$.

Нека B' е афинно подпространство, съдържащо $P_0, \ldots, P_k$. Нека V' е направляващото пространство на B'. Тогава за всяко $i = 1, \ldots, k$ имаме $v_i = \overrightarrow{P_0P_i} \in V'$. Следователно $V = l(v_1, \ldots, v_k) \subset V'$, откъдето получаваме $\dim B' = \dim V' \geq \dim V = \dim B = k$. Значи наистина не съществува афинно подпространство на $\mathcal{A}$ с размерност строго по-малка от k, което съдържа така построените точки $P_0, \ldots, P_k$. □

Пример 1 $k = 1$.
$2 = k + 1$ точки лежат в афинно подпространство с размерност строго по-малка от $k = 1$, тоест в 0-мерно афинно подпространство, $\Leftrightarrow$ съвпадат, защото 0-мерните афинни подпространства са едноточковите подмножества.

Твърдение 11

1. *В геометричната равнина и в геометричното пространство* 1*-мерните афинни подпространства са правите.*
2. *В геометричното пространство* 2*-мерните афинни подпространства са равнините.*

Доказателство:

1. В мотивацията в началото на въпроса видяхме, че ако l е права, V е линейното пространство на векторите, които са колинеарни с нея, и P_0 е точка от l, то $l = \left\{P : \overrightarrow{P_0P} \in V\right\}$. Това показва, че l е афинно подпространство, моделирано върху V. Тъй като знаем, че $\dim V = 1$, то l е 1-мерно афинно подпространство. Значи всяка права в геометричната равнина и в геометричното пространство е 1-мерно афинно подпространство.

   Обратно: Нека B е 1-мерно афинно подпространство в геометричната равнина или в геометричното пространство. От Твърдение 10 следва, че съществуват две точки $P_0, P_1 \in B$, които не лежат в афинно подпространство с размерност по-малка от 1, тоест различни точки (поради Пример 1). Щом P_0 и P_1 са различни, през тях минава единствена права l. Както вече видяхме, l също е 1-мерно афинно подпространство. От последната част на Теорема 2 (единствеността) следва $l = B$. Значи всяко 1-мерно афинно подпространство в геометричната равнина и в геометричното пространство е права.

   Следователно в геометричната равнина и в геометричното пространство всевъзможните 1-мерни афинни подпространства са всевъзможните прави.

2. В мотивацията в началото на въпроса видяхме, че ако π е равнина, V е линейното пространство на векторите, които са компланарни с нея, и P_0 е точка от π, то $\pi = \left\{P : \overrightarrow{P_0P} \in V\right\}$. Това показва, че π е афинно подпространство, моделирано върху V. Тъй като знаем, че $\dim V = 2$, то π е 2-мерно афинно подпространство. Значи всяка равнина в геометричното пространство е 2-мерно афинно подпространство.

   Обратно: Нека B е 2-мерно афинно подпространство в геометричното пространство. От Твърдение 10 следва, че съществуват три точки $P_0, P_1, P_2 \in B$, които не лежат в афинно подпространство с размерност по-малка от 2. Значи не лежат в 1-мерно афинно подпространство, тоест на една права (поради първата част на твърдението). Щом P_0, P_1, P_2 не лежат на една права, през тях минава единствена равнина π. Както вече видяхме, π също е 2-мерно афинно подпространство. От последната част на Теорема 2 (единствеността) следва $\pi = B$. Значи всяко 2-мерно афинно подпространство в геометричното пространство е равнина.

   Следователно в геометричното пространство всевъзможните 2-мерни афинни подпространства са всевъзможните равнини. □

Горното твърдение мотивира следващото определение:

Определение 4 1-мерните афинни подпространства на произволно афинно пространство $\mathcal{A}$ се наричат *прави*, 2-мерните – *равнини*, а ако $\dim \mathcal{A} = n$ е крайна, то $(n-1)$-мерните афинни подпространства се наричат *хиперравнини*.

Пример 2 Нека $\mathcal{A}$ е n-мерно. Тогава хиперравнините са:

1. при $n = 1$ точките.
2. при $n = 2$ правите.
3. при $n = 3$ равнините.

Частни случаи на Теорема 2:

1. $k = 1$: *През две различни точки в афинно пространство минава точно една права.*
2. $k = 2$: *През три различни точки в афинно пространство, които не лежат на една права, минава точно една равнина.*
3. $k = n - 1$: *През n точки в n-мерно афинно пространство, които не лежат в $(n-2)$-мерно афинно подпространство, минава точно една хиперравнина.*

Първите два частни случая по-горе са аксиоми при обичайното изграждане на геометрията. Това показва още веднъж, че геометрията, изградена въз основа на понятието афинно пространство, си е обичайната геометрия.

Твърдение 12 *Ако* B_i *са афинни подпространства на* $\mathcal{A}$*, моделирани върху* V_i*,* $i \in I$*, и* $B = \bigcap_{i \in I} B_i$ *е непразно множество, то* B *е афинно подпространство на* $\mathcal{A}$*, моделирано върху* $\bigcap_{i \in I} V_i$*.*

Доказателство: Нека $P_0 \in \bigcap_{i \in I} B_i$ (такова P_0 съществува, защото $\bigcap_{i \in I} B_i$ не е празно). Следователно за всяко $i \in I$ имаме $P_0 \in B_i$ и значи $B_i = \left\{P \in \mathcal{A} : \overrightarrow{P_0P} \in V_i\right\}$. Тогава $P \in \bigcap_{i \in I} B_i \Leftrightarrow$ за всяко $i \in I$ имаме $P \in B_i \Leftrightarrow$ за всяко $i \in I$ имаме $\overrightarrow{P_0P} \in V_i$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P} \in \bigcap_{i \in I} V_i$. Значи $\bigcap_{i \in I} B_i = \left\{P \in \mathcal{A} : \overrightarrow{P_0P} \in \bigcap_{i \in I} V_i\right\}$. Тъй като от Твърдение 3 знаем, че $\bigcap_{i \in I} V_i$ е линейно подпространство на U, то последното равенство показва, че $\bigcap_{i \in I} B_i$ е афинното пространство през P_0 с направляващо пространство $\bigcap_{i \in I} V_i$. $\square$

Забележка 3 Всичко дотук очевидно остава в сила и ако вместо $\mathbb{R}$ се вземе произволно поле F, тоест ако U е линейно пространство над произволно поле.

Твърдение 13 *Нека* $\mathcal{A}$ *е евклидово афинно пространство (тоест* U *е евклидово линейно пространство) и* B *е афинно подпространство на* $\mathcal{A}$*, моделирано върху линейното подпространство* V *на* U*. Тогава знаем, че* V *е евклидово линейно пространство с наследеното от* U *скаларно произведение и следователно* B *е евклидово афинно пространство.*

Забележка 4 Винаги ще разглеждаме афинните подпространства на евклидово афинно пространство като евклидови афинни пространства по начина от горното твърдение, освен ако изрично не е казано друго.

2 Афинни координатни системи

Афинни координатни системи

Нека A е n-мерно афинно пространство, моделирано върху линейното пространство V.

Определение 5 *Афинна координатна система* K в A е двойка, състояща се от точка $O \in A$ и базис $e = (e_1, \dots, e_n)$ на V. Пишем $K = Oe_1 \dots e_n$. Точката O се нарича *начало* на координатната система, а $e_1, \dots, e_n$ – *координатни* или *базисни вектори.*

Определение 6 Нека $K = Oe_1 \dots e_n$ е афинна координатна система в A и $P \in A$. *Координати на P спрямо K* се наричат координатите на вектора $\overrightarrow{OP}$ спрямо базиса $e = (e_1, \dots, e_n)$, тоест координатите на P спрямо K са $x_1, \dots, x_n \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$. Пишем $P(x_1, \dots, x_n)$.
(Векторът $\overrightarrow{OP} \in V$ се нарича *радиус-вектор на P спрямо K*.)
Векторът $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \varkappa_e(\overrightarrow{OP}) \in \mathbb{R}^n$ се нарича *координатен вектор на P спрямо K*.
Изображението

$$\varkappa_K : A \to \mathbb{R}^n : \quad P \mapsto x, \quad \text{тоест } \varkappa_K(P) = \varkappa_e\left(\overrightarrow{OP}\right),$$

се нарича *координатно изображение съответно на координатната система K*.
Ако $v \in V$ е вектор, то под *координати на v спрямо K* ще разбираме координатите на v спрямо базиса $e = (e_1, \dots, e_n)$.

Забележка 5 Вместо $K = Oe_1 \dots e_n$ често се пише $K = Ox_1 \dots x_n$.
Правата през началото O, която е успоредна на i-тия координатен вектор e_i и е ориентирана с e_i, се нарича *i-та координатна ос* и се означава често с Ox_i.
(Ос е ориентирана права.)
Когато размерността на афинното пространство е малка, често координатите се означават с x, y, z вместо с x_1, x_2, x_3.
Оста Ox_1 (или Ox, ако първата координата е означена с x) се нарича *абсцисна ос*, а координатата x_1 (или x) — *абсциса*.
При $n \geq 2$ оста Ox_2 (или Oy, ако втората координата е означена с y) се нарича *ординатна ос*, а координатата x_2 (или y) — *ордината*.
При $n = 3$ оста Ox_3 (или Oz, ако третата координата е означена със z) се нарича *апликатна ос*, а координатата x_3 (или z) — *апликата*.

Пример 3 $\varkappa_K(O) = 0 \in \mathbb{R}^n$.
Това е така, защото $\overrightarrow{OO} = 0$ и координатите на нулевия вектор спрямо базиса e са нули.