Основна теорема на алгебрата
(теорема на Даламбер)

Опр. Поле F се нарича алгебрически затворено поле, когато е изпълнено че: $\forall f \in F[x], \deg f \geq 1$ f има корен в полето F.

Свойство: Полето F е алгебрически затворено
$\Longleftrightarrow$ всеки полином $f \in F[x], \deg f \geq 2$ е разложим
$\Longleftrightarrow$ всеки полином $f \in F[x], \deg f \geq 1$ се разлага на линейни множители

Д-во Ако F е алгебрически затворено
индукция по $n = \deg f \geq 2$
$n=2$ | f има корен $\alpha \Rightarrow (x-\alpha) \mid f \Rightarrow f = (x-\alpha)(ax+b)$
Нека е вярно за всички полиноми от степен $< n$
и нека $\deg f = n \Rightarrow$ f има корен $\alpha \Rightarrow (x-\alpha) \mid f$
$\Rightarrow f = (x-\alpha) q(x)$ и $\deg q(x) = n-1 \Rightarrow$ за $n>2$, q се разлага
$\Rightarrow q = \underbrace{l_1(x) \ldots l_{n-1}(x)}_{\text{линейни}} \Rightarrow f = (x-\alpha) l_1(x) \ldots l_{n-1}(x)$

Основна теорема на Алгебрата//

Полето $\mathbb{C}$ е алгебрически затворено.
(т.е. всеки полином с комплексни коефициенти ($\deg f \geq 1$) има поне един комплексен корен)

Лема на Гаус// Всеки полином с реални коефициенти ($\deg f \geq 1$) има поне един комплексен корен.

Доказателство// Нека $\deg f = n = 2^k \cdot m$, където $2 \nmid m$

Индукция по $\underline{k}$ (max. степен на 2, която дели $\deg f$)

База: $k=0$ (т.е. n – нечетно число)

Използва се непрекъснатост на $\mathbb{R}$

Ако $f = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ и $f_1 = \frac{f}{a_n}$ старши коеф. на f_1 е 1

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f_1 = +\infty$ и $\lim\limits_{x \to -\infty} f_1 = -\infty$

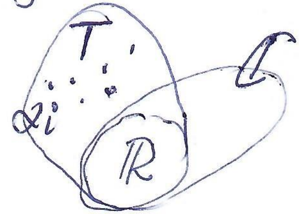
$\Rightarrow$ има поне едно реално число α – корен на f_1

т.е. $f_1(\alpha) = f(\alpha) = 0$

Основна Теорема на алгебрата II

Нека $k \ge 1$ и твърдението е в сила за всички полиноми $h \in \mathbb{R}[x]$, за които $2^k \nmid \deg h$.

Нека $f \in \mathbb{R}[x]$, $\deg f = 2^k \cdot m$ и $2 \nmid m$



$\Rightarrow \exists$ поле T (поле на разлагане на f):

$\underbrace{\alpha_1, \dots \alpha_n}_{\text{корени на } f} \in T$ и $\mathbb{R} \subset T$

Нека i, j - произв. индекси $i \ne j$ ($\in 1, \dots, n$)

и r - произволно реално число

$\beta_{ij}(r) = \alpha_i\alpha_j + r(\alpha_i + \alpha_j) \in T$. Съставяме полином с корени $\left\{\beta_{ij}(r) \,\middle|\, \begin{smallmatrix} i \ne j \\ 1 \le i,j \le n \end{smallmatrix}\right\}$

$$g_r(x) = \prod_{\substack{i \ne j \\ 1 \le i,j \le n}} (x - \beta_{ij}(r))$$

коефициентите $g_0, \dots g_s$ се изразяват чрез елем. симетр. полиноми на $\beta_{ij}(r)$ и $\in T$

Нека $\deg g_r(x) = s$

$$s = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{2^k m(2^k m - 1)}{2} = 2^{k-1} \underbrace{m \cdot (2^k m - 1)}_{\text{нечетно}}$$

Основна теорема на алгебрата

$B_r = \{\beta_{ij}^{(r)} \mid i \neq j,\ 1 \leq i,j \leq n\}$ $\beta_{ij}^{(r)}$ са полиноми на α_s, $1 \leq s \leq n$

Ако $\tau \in S_n$ $\tau(\beta_{ij}^{(r)}) = \beta_{\tau(i),\tau(j)}^{(r)} \in B \Rightarrow \tau$ поражда пермутация на B

коефициентите g_t са симетрични функции на $\beta_{ij}^{(r)}$

$\Rightarrow g_t$ могат да се разглеждат като полиноми на α_s, $1 \leq s \leq n$

Всяка пермутация $\tau \in S_n$, поражда пермутация на мн-вото B

$\Rightarrow \tau(g_t) = g_t$ (разглеждани като функции на α_i)

$\Rightarrow g_t$ са симетрични функции на $\alpha_1, \dots, \alpha_n \Rightarrow$

g_t могат да се представят като полиноми на $\begin{cases} \sigma_1(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R} \\ \vdots \\ \sigma_n(\alpha_1, \dots \alpha_n) \in \mathbb{R} \end{cases}$ (с коеф. от $\mathbb{R}$)

$\Rightarrow g_0, g_1, \dots, g_s \in \mathbb{R} \Rightarrow g_r(x) \in \mathbb{R}[x]$

$\Rightarrow$ към полинома $g_r(x)$ можем да приложим индукционното предположение

$\exists$ $ind(r) = \{i,j\}_{(r)} : \beta_{ij}^{(r)} \in \mathbb{C}$ $\{i,j\}_{(r)} \subset \{1, 2, \dots, n\}$

Броя на възможните $ind(r)$ (т.е. подмн-вото 2 индекса) е $\binom{n}{2}$

а $r \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists r_1 \neq r_2 \in \mathbb{R} : ind(r_1) = ind(r_2) = \{i,j\}_{(r_1)} = \{i,j\}_{(r_2)}$

Основна Теорема на алгебрата

установихме, че $\exists\ r_1 \neq r_2$ и индекси i, j : $\beta_{ij}(r_1) \in \mathbb{C}$, $\beta_{ij}(r_2) \in \mathbb{C}$

$$\begin{cases} \alpha_i \alpha_j + r_1(\alpha_i + \alpha_j) = \beta_{ij}(r_1) \in \mathbb{C} \\ \alpha_i \alpha_j + r_2(\alpha_i + \alpha_j) = \beta_{ij}(r_2) \in \mathbb{C} \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} a = \alpha_i + \alpha_j = \frac{\beta_{ij}(r_1) - \beta_{ij}(r_2)}{r_1 - r_2} \in \mathbb{C} \\ b = \alpha_i \alpha_j = \frac{r_1 \beta_{ij}(r_2) - r_2 \beta_{ij}(r_1)}{r_1 - r_2} \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \alpha_i, \alpha_j$ са корени на $x^2 + ax + b = 0 \in \mathbb{C}[X]$

$\mathcal{D} = a^2 - 4b \in \mathbb{C}$ има двойка $\sqrt{\mathcal{D}}_{1,2} \in \mathbb{C}$; $\Rightarrow \alpha_{i,j} = \dfrac{-a \pm \sqrt{\mathcal{D}}}{2} \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow$ полинома $f(x)$ има корени α_i, α_j, които са комплексни числа.

Д-во на Th

Нека $f = f_0 + f_1 x + \dots + f_n x^n \in \mathbb{C}[X]$

разглеждаме $\overline{f} = \overline{f_0} + \overline{f_1} x + \dots + \overline{f_n} x^n$, където $\overline{f_j}$ е компл. спрегнатата на f_j

Тогава $f \cdot \overline{f} \in \mathbb{R}[X]$, защото ако $f \cdot \overline{f} = h(x) = h_0 + h_1 x + \dots + h_{2n} x^{2n}$

$$h_k = f_0 \overline{f_k} + f_1 \overline{f_{k-1}} + \dots + f_{k-1} \overline{f_1} + f_k \overline{f_0}$$

$$\overline{h_k} = \overline{f_0 \overline{f_k}} + \overline{f_1 \overline{f_{k-1}}} + \dots + \overline{f_{k-1} \overline{f_1}} + \overline{f_k \overline{f_0}} = \overline{f_0} f_k + \overline{f_1} f_{k-1} + \dots + \overline{f_{k-1}} f_1 + \overline{f_k} f_0$$

$\Rightarrow h_k = \overline{h_k} \Rightarrow h_k \in \mathbb{R} \Rightarrow h \in \mathbb{R}[X]$

Основна теорема на алгебрата //

(6)

Прилагаме лемата на Гаус към $h = f \cdot \bar{f} \Rightarrow$

$\exists \alpha \in \mathbb{C} : h(\alpha) = 0 = f(\alpha) \cdot \bar{f}(\alpha)$

$\Rightarrow f(\alpha) = 0$ или $\bar{f}(\alpha) = 0$

α - корен на f | $\bar{f}(\alpha) = \bar{0} = 0 = \bar{f_0} + \bar{f_1}\alpha + \dots + \bar{f_n}\alpha^n =$

$= \overline{f_0 + f_1\bar{\alpha} + \dots + f_n\bar{\alpha}^n} = \overline{f(\bar{\alpha})} = 0$

$\Rightarrow f$ има комплексен корен | $\bar{\alpha}$ е корен на f

$\Rightarrow \mathbb{C}$ е алгебрически затворено поле.

Св-во// Неразложимите полиноми над $\mathbb{C}$ са само полиномите от първа степен.

Св-во// Всеки полином $f \in \mathbb{C}[X]$ се разлага на линейни множители $f = a_0(X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \dots (X - \alpha_n)$

Твърдение// Ако $f \in \mathbb{R}[X]$ и $\alpha \in \mathbb{C}$ е корен: $f(\alpha) = 0$

$\Rightarrow \bar{\alpha}$ също е корен на f.

Д-во: $f(\alpha) = 0 \Rightarrow \overline{f(\alpha)} = 0 \Rightarrow \bar{f}(\bar{\alpha}) = 0$, но $\bar{f} = f \in \mathbb{R}[X]$

$\Rightarrow f(\bar{\alpha}) = 0$

Основна теорема на алгебрата //

Следствие // Неразложимите полиноми над $\mathbb{R}$ са само полиномите от степен 1 и полиноми от вида ax^2+bx+c, за които $D = b^2-4ac < 0$.

Д-во // Нека $f \in \mathbb{R}[x]$ неразложим, $\deg f \geq 2$; корените му $\alpha_1, \dots \alpha_n \in \mathbb{C}$

α_1 - корен $\in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \Rightarrow \bar{\alpha}_1$ също корен. Нека $\alpha_1 = p+qi \in \mathbb{C}$, $\bar{\alpha}_1 = p-qi$

$\Rightarrow u = \alpha_1+\bar{\alpha}_1 = 2p \in \mathbb{R}$; $v = \alpha_1 \bar{\alpha}_1 = p^2+q^2 \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha_1, \bar{\alpha}_1$ корени на $x^2-ux+v \in \mathbb{R}[x]$

$\Rightarrow (x^2-ux+v) \mid f \Rightarrow f = a_0(x^2-ux+v)$, $D_f < 0$

Следствие // Всеки полином с реални коефициенти $\deg f \geq 2$ се разлага на множители $f = a_0(x-\alpha_1)\dots(x-\alpha_k)\,g_1(x)\dots g_s(x)$; $k \geq 0$, $s \geq 0$

където $g_j(x) = x^2+u_j x+v_j$, $D_{g_j} < 0$,

$\deg f = k+2s$

Забележка 1 // Полето $\mathbb{Q}$ не е алгебрически затворено

(x^n-3) неразложим над $\mathbb{Q}$, $\forall n$

Забележка 2 // Полетата $\mathbb{Z}_p$, p просто не са алгебрически затворени.

$f = x^2+\bar{a}x+\bar{b}$ от тези полиноми има p броя от вида $(x-\bar{k})^2$

има $\binom{p}{2}$ броя от вида $(x-\bar{k})(x-\bar{s})$ $\Rightarrow p^2-p-\binom{p}{2}$ броя неразложими от ст. 2