Разделени разлики

Разделена разлика за функцията $f(x)$ във възлите $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ се дефинира по следния начин:

- В един възел $f[x_0] = f(x_0)$;
- Рекурентно в повече възли $f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_k] - f[x_0, x_1, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$.

На лекции е доказана следната формула (1) за разделената разлика във всички интерполационни възли:

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{\omega'(x_k)} \qquad (1)$$

Разделената разлика $f[x_0, x_1, \dots, x_n]$ е равна на коефициента пред x^n в интерполационния полином на Лагранж $L_n(f; x)$ от $\boldsymbol{n}$-та степен за $f(x)$ с възли $x_0, x_1, \dots, x_n$.

От горното твърдение получаваме:

1) $f[x_0, x_1, \dots, x_n] = 0,$ за $f(x) = x^m, m = 0,1, \dots, n-1;$
2) $f[x_0, x_1, \dots, x_n] = 1,$ за $f(x) = x^n.$

Тези тъждества могат да бъдат написани в следния вид, използвайки формула (1):

1') $\sum_{k=0}^{n} \frac{x_k^m}{\omega'(x_k)} = 0, m = 0,1, \dots, n-1;$

2') $\sum_{k=0}^{n} \frac{x_k^n}{\omega'(x_k)} = 1.$

Задача 1. Да се намерят коефициентите A_k в разлагането $\frac{p(x)}{\omega(x)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{A_k}{x - x_k}$, където $p(x) \in \pi_n$.

Решение: $p(x) \in \pi_n => p(x) = L_n(p; x) => p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\omega(x)}{(x - x_k)\omega'(x_k)} p(x_k)$

Делим двете страни на равенството на $\omega(x)$ и получаваме:

$\frac{p(x)}{\omega(x)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{A_k}{x - x_k}$, където $A_k = \frac{p(x_k)}{\omega'(x_k)}$.

Задача 2. Да се разложи на елементарни дроби рационалната функция $\frac{x+2}{x(x-1)(x-2)}$.

Решение: $p(x) = x + 2;\ \omega(x) = x(x-1)(x-2)$. Използвайки изведените в Задача 1. формули за коефициентите A_k получаваме:

$$A_0 = \frac{p(x_0)}{\omega'(x_0)} = \frac{p(0)}{\omega'(0)} = 1;$$

$$A_1 = \frac{p(x_1)}{\omega'(x_1)} = \frac{p(1)}{\omega'(1)} = -3;$$

$$A_2 = \frac{p(x_2)}{\omega'(x_2)} = \frac{p(2)}{\omega'(2)} = 2.$$

$$=> \frac{x+2}{x(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x} - \frac{3}{x-1} + \frac{2}{x-2}.$$

Задача 3. Да се намери $\sum_{k=0}^{n} \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}$.

Решение: Търсим разделената разлика на функцията $f(x) = \omega''(x)$.

Но $\omega(x) \in \pi_{n+1} => \omega''(x) \in \pi_{n-1}$ и от твърдението 1) получаваме, че $\sum_{k=0}^{n} \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)} = 0$.

Задача 4. Да се намери $\sum_{k=0}^{n} \frac{x_k \omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}$.

Решение: Търсим разделената разлика на функцията $f(x) = x\omega''(x)$. Но $\omega(x) \in \pi_{n+1} =>$ $x\omega''(x) \in \pi_n$.

$\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n) = x^{n+1} + a_1 x^n + \cdots + a_{n+1}$,

$$=> \omega'(x) = (n+1)x^n + n.a_1 x^{n-1} + \cdots$$

$$=> \omega''(x) = (n+1)n.x^{n-1} + n(n-1)a_1 x^{n-2} + \cdots$$

$$=> x\omega''(x) = (n+1)n.x^n + n(n-1)a_1 x^{n-1} + \cdots$$

$$=> \sum_{k=0}^{n} \frac{x_k \omega''(x_k)}{\omega'(x_k)} = n(n+1).$$

Задача 5. Да се докаже, че $\sum_{k=0}^{n} \frac{x_k^{n+1}}{\omega'(x_k)} = \sum_{k=0}^{n} x_k$.

Доказателство: Лявата страна на равенството е разделена разлика за функцията $f(x) = x^{n+1}$. Търсим коефициента пред x^n в интерполационния полином на Лагранж (ИПЛ) $L_n(f; x)$. Но той интерполира функцията във възлите $x_0, x_1, \dots, x_n$. Следователно

$$f(x_i) - L_n(f; x_i) = 0, i = 0,1, \dots, n$$

$$=> f(x) - L_n(f; x) = \omega(x)$$

Приравняваме коефициентите пред x^n от двете страни на равенството. От дясната страна използваме формулите на Виет. Получаваме:

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \sum_{k=0}^{n} x_k,$$

Следователно $\sum_{k=0}^{n} \frac{x_k^{n+1}}{\omega'(x_k)} = \sum_{k=0}^{n} x_k$.

Задача 6. Като използвате ИПЛ докажете тъждествата:

а) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \binom{m}{n} \frac{1}{m-k} = \frac{1}{m-n}, \forall m > n \geq 0$;

б) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \binom{m}{n} \frac{k}{m-k} = \frac{m}{m-n}, \forall m > n \geq 1$.

Решение: Нека $x_k = k, k = 0,1, \dots, n \Rightarrow \omega(x) = x(x-1)(x-2)\dots(x-n)$;

$$\omega'(k) = \prod_{j=0, j\neq k}^{n} (k-j);$$

$$L_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\omega(x)f(k)}{(x-k)\omega'(k)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x(x-1)\dots(x-n)f(k)}{(x-k).k(k-1)(k-2)\dots 1.(-1)(-2)\dots(-(n-k))}.$$

Нека $x = m \Rightarrow L_n(f;m) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k} m(m-1)\dots(m-n)f(k)}{(m-k)k!(n-k)!}$. Умножаваме и делим на $n!$ в дробта и получаваме:

$$L_n(f;m) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}(m-n)}{(m-k)} \binom{n}{k}\binom{m}{n} f(k).$$

а) Нека $f(x) = 1 \in \pi_0 \Rightarrow f(m) = L_n(f;m) = 1$. Делим двете страни на равенството на $(m-n) \neq 0$ и получаваме $\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\binom{n}{k}\binom{m}{n}\frac{1}{m-k} = \frac{1}{m-n}$.

б) Нека $f(x) = x \in \pi_1 \Rightarrow f(m) = L_n(f;m) = m$. Делим двете страни на равенството на $(m-n) \neq 0$ и получаваме $\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\binom{n}{k}\binom{m}{n}\frac{k}{m-k} = \frac{m}{m-n}$.

Интерполационна формула на Нютон с разделени разлики:

$$L_n(f;x) = f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0) + \dots + f[x_0,x_1,\dots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1}).$$

Задача 7. Да се намери полином $p(x) \in \pi_3$, такъв че $p(-1) = 3, p(0) = 1, p(1) = -1, p(2) = 3$.

Решение: Имаме 4 интерполационни възела. Можем да построим единствен полином от трета степен с тези условия по формулата на Нютон. За целта са ни необходими разделените разлики. Тях най-лесно можем да пресметнем от рекурентната връзка в следната таблица:

x_i	$p[x_i]$	$p[x_i, x_{i+1}]$	$p[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$p[x_i x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$
-1	3	$\frac{1-3}{0-(-1)} = -2$	$\frac{-2-(-2)}{1-(-1)} = 0$	$\frac{3-0}{2-(-1)} = 1$
0	1	$\frac{-1-1}{1-0} = -2$	$\frac{4-(-2)}{2-0} = 3$	
1	-1	$\frac{3-(-1)}{2-1} = 4$		
2	3			

Оцветените в червено разделени разлики участват във формулата на Нютон. Заместваме в нея:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} p[x_0,x_1,\dots,x_k](x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{k-1})$$
$$= 3 - 2(x+1) + 0(x+1)(x-0) + 1(x+1)(x-0)(x-1) = x^3 - 3x + 1.$$