Лекция X - Доверителни интервали

Лекция X - Доверителни интервали

- Централна статистика
- Доверителни интервали за нормално разпределени сл.в.
- Свойства на нормалните извадки

Доверителни интервали

В предишната лекция разгледахме начините за оценяване на неизвестен параметър θ, от който зависи наблюдаваната случайна величина. При това търсехема точкова оценка на параметъра, т.е. функция $\hat{\theta}(\overrightarrow{\mathrm{X}})$, зависеща от наблюденията $\overrightarrow{\mathrm{X}} = (X_1, \ldots, X_n)$, като стойността на тази функция приемахме за истинска стойност на θ.

Ясно е, че в действителност оценката, която получаваме дава приблизителна стойност за истинският параметър. Наистина добавянето на дори само едно допълнително наблюдение най-често води до промяна на получената оценка. Тази оценка ще бъде безинтересна от практическа гледна точка, ако не познаваме нейната точност, т.е. вероятността да сме допуснали грешка. Намирането на доверителен интервал решава точно този проблем - вместо една единствена стойност за неизвестен параметър θ ние ще намерим интервал (т.е. границите) в който θ попада с достатъчно висока вероятност.

Доверителни интервали

В предишната лекция разгледахме начините за оценяване на неизвестен параметър θ, от който зависи наблюдаваната случайна величина. При това търсехема точкова оценка на параметъра, т.е. функция $\hat{\theta}(\overrightarrow{\mathrm{X}})$, зависеща от наблюденията $\overrightarrow{\mathrm{X}} = (X_1, \dots, X_n)$, като стойността на тази функция приемахме за истинска стойност на θ.

Ясно е, че в действителност оценката, която получаваме дава приблизителна стойност за истинският параметър. Наистина добавянето на дори само едно допълнително наблюдение най-често води до промяна на получената оценка. Тази оценка ще бъде безинтересна от практическа гледна точка, ако не познаваме нейната точност, т.е. вероятността да сме допуснали грешка. Намирането на доверителен интервал решава точно този проблем - вместо една единствена стойност за неизвестен параметър θ ние ще намерим интервал (т.е. границите) в който θ попада с достатъчно висока вероятност.

Ще формулираме задачата формално. Нека $\overrightarrow{\mathrm{X}} = (X_1, \dots, X_n)$ са независими наблюдения над сл.в. X. Ще предполагаме, че типа на разпределението на X е известно, но то зависи от неизвестен параметър θ, възможно е $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s)$ да бъде многомерен. Търсим интервал $I = I(\overrightarrow{\mathrm{X}})$, такъв че

$$\mathrm{P}(\theta \in I) \geq \gamma$$

Доверителни интервали

Константата γ се нарича **ниво на доверие**, то е предварително зададено, определянето му не е математическа задача. Нивото на доверие зависи от най-голямата вероятност с която можем да си позволим да допуснем грешка, от гледна точка на щетите, който ще понесем при грешка в сатистиката, финансовите загуби и т.н.

Обикновено се избира γ в интервал $[0.9, 0.99]$. Колкото по-високо е нивото на доверие, толково по-широк става интервала и затова носи по-малко информация за оценявания параметър. При $\gamma = 1$ интервала, който ще получим за θ е $[-\infty, \infty]$, което не казва нищо за конкретната стойност на θ. Например, с вероятност единица можем да твърдим, че ръстът на хората е между нула и три метра. Ползата от подобна статистика обаче е съмнителна. При ниски нива на доверие интервалът е по тесен, по информативен, но тогава има по-голяма вероятност за грешка, т.е. възможност θ изобщо да не лежи в този интервал.

Доверителни интервали

Константата γ се нарича **ниво на доверие**, то е предварително зададено, определянето му не е математическа задача. Нивото на доверие зависи от най-голямата вероятност с която можем да си позволим да допуснем грешка, от гледна точка на щетите, който ще понесем при грешка в сатистиката, финансовите загуби и т.н.

Обикновено се избира γ в интервал $[0.9, 0.99]$. Колкото по-високо е нивото на доверие, толково по-широк става интервала и затова носи по-малко информация за оценявания параметър. При $\gamma = 1$ интервала, който ще получим за θ е $[-\infty, \infty]$, което не казва нищо за конкретната стойност на θ. Например, с вероятност единица можем да твърдим, че ръстът на хората е между нула и три метра. Ползата от подобна статистика обаче е съмнителна. При ниски нива на доверие интервалът е по тесен, по информативен, но тогава има по-голяма вероятност за грешка, т.е. възможност θ изобщо да не лежи в този интервал.

Намирането на доверителен интервал може да се разглежда като намиране на две точкови оценки $I_1(\overrightarrow{\mathrm{X}})$ и $I_2(\overrightarrow{\mathrm{X}})$, които са съответно долна и горна граница на интервала

$$\mathsf{P}(I_1 < \theta < I_2) \geq \gamma$$

Начин за конструиране на доверителни интервали е предложен от Нейман и Уилкс в 40-те години на миналия век.

Централна статистика

Нека T е функция зависеща от наблюденията и от неизвестния параметър, която отговаря на следните условия:

1) $\mathrm{T}(\overrightarrow{\mathrm{X}}, \theta)$ е непрекъсната и монотонна по θ, но

2) разпределението на $\mathrm{T}(\overrightarrow{\mathrm{X}}, \theta)$ не зависи от θ, т.е. $\mathsf{P}(\mathrm{T}(\overrightarrow{\mathrm{X}}, \theta) < \mathrm{x})$ зависи само от x, но не и от θ.

Тази функция се нарича **централна статистика**. Намирането и не е тривиална задача. Обикновено за основа се използват точковите оценки за параметъра, но се изискват задълбочени познания за разпределенията за да се конструира.

Централна статистика

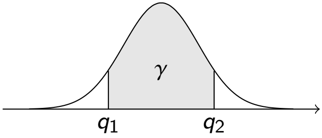
Нека T е функция зависеща от наблюденията и от неизвестния параметър, която отговаря на следните условия:

1) $\mathrm{T}(\overrightarrow{\mathrm{X}}, \theta)$ е непрекъсната и монотонна по θ, но

2) разпределението на $\mathrm{T}(\overrightarrow{\mathrm{X}}, \theta)$ не зависи от θ, т.е. $\mathsf{P}(\mathrm{T}(\overrightarrow{\mathrm{X}}, \theta) < \mathrm{x})$ зависи само от x, но не и от θ.

Тази функция се нарича **централна статистика**. Намирането и не е тривиална задача. Обикновено за основа се използват точковите оценки за параметъра, но се изискват задълбочени познания за разпределенията за да се конструира.

Все пак, ако разполагаме с централна статистика, лесно можем да построим доверителен интервал за параметъра θ. Процедурата се състои в следното. Тъй като разпределението на T е известно можем да намерим квантили q_1 и q_2, такива, че $\mathsf{P}(q_1 < \mathrm{T} < q_2) = \gamma$.



На схемата разпределението е нормално, но методът работи с произволно познато разпределение.

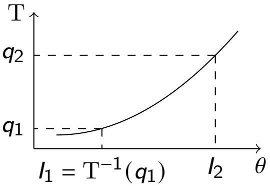
Централна статистика

Разбира се, квантилите q_1 и q_2, не се определят еднозначно от горното равенство. Съществуват много двойки квантили с това свойство лицето между тях да бъде точно γ. Естествено е да предпочетем този интервал, който има най-малка дължина. При симетричните разпределения на това изискване отговарят квантили q_1 и q_2 такива, че лявата и дясната опашка съвпадат, т.е. $\mathsf{P}(\mathrm{T} < q_1) = \mathsf{P}(\mathrm{T} > q_2) = \dfrac{1-\gamma}{2}$. На практика и при произволни разпределения (независимо дали симетрични или не) се работи точно с тези квантили от съображения за простота.

Централна статистика

Разбира се, квантилите q_1 и q_2, не се определят еднозначно от горното равенство. Съществуват много двойки квантили с това свойство лицето между тях да бъде точно γ. Естествено е да предпочетем този интервал, който има най-малка дължина. При симетричните разпределения на това изискване отговарят квантили q_1 и q_2 такива, че лявата и дясната опашка съвпадат, т.е. $\mathsf{P}(\mathrm{T} < q_1) = \mathsf{P}(\mathrm{T} > q_2) = \dfrac{1-\gamma}{2}$. На практика и при произволни разпределения (независимо дали симетрични или не) се работи точно с тези квантили от съображения за простота.

След като определим квантилите не е проблем да обърнем функцията T, тя е обратима по θ поради свойство 1), и така да получим доверителния интервал за θ.



На практика решаваме неравенствата спрямо θ.

$$\gamma = \mathsf{P}(q_1 < \mathrm{T} < q_2) = \mathsf{P}(l_1 < \theta < l_2)$$

Доверителни интервали за $N(\mu, \sigma^2)$

Ще намерим доверителни интервали за параметрите на нормално разпределена сл.в. Навсякъде по-надолу ще считаме, че $X \in N\left(\mu, \sigma^2\right)$

Доверителни интервали за $N(\mu, \sigma^2)$

Ще намерим доверителни интервали за параметрите на нормално разпределена сл.в. Навсякъде по-надолу ще считаме, че $X \in N\left(\mu, \sigma^2\right)$

- Доверителен интервал за очакването μ при известна дисперсия σ^2

Като цяло този случай не е особено достоверен. Да познаваме дисперсията но да не знаем очакването на една случайна величина рядко се реализира на практика. Възможно е например, при повторно изследване на пациенти да се предполага, че дисперсията зависи от индивидуалните особености на всеки човек, а очакването от действието на изследваното лекарство. Така дисперсията ще бъде известна от предишното изследване. По-разумно е разбира се да се провери доколко дисперсиите съвпадат.

Доверителни интервали за $N(\mu, \sigma^2)$

Ще намерим доверителни интервали за параметрите на нормално разпределена сл.в. Навсякъде по-надолу ще считаме, че $X \in N\left(\mu, \sigma^2\right)$

- Доверителен интервал за очакването μ при известна дисперсия σ^2

Като цяло този случай не е особено достоверен. Да познаваме дисперсията но да не знаем очакването на една случайна величина рядко се реализира на практика. Възможно е например, при повторно изследване на пациенти да се предполага, че дисперсията зависи от индивидуалните особености на всеки човек, а очакването от действието на изследваното лекарство. Така дисперсията ще бъде известна от предишното изследване. По-разумно е разбира се да се провери доколко дисперсиите съвпадат.

Ние ще разгледаме този случай защото е по-прост от теоретична страна и е отправна точка за следващия по-сложен случай. В предишната лекция изведохме точкава оценка за параметър μ, а именно $\hat{\mu} = \overline{X}$. Ще превърнем тази точкова оценка в централна статистика. Знаем, че сумата на нормално разпределени сл.в. е нормално разпределена, от $X_k \in N\left(\mu, \sigma^2\right)$ следва

$$\sum_{k=1}^{n} X_k \in N\left(n\mu, n\sigma^2\right) \quad \Longleftrightarrow \quad \overline{X} = \frac{\sum X_k}{n} \in N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

Впрочем, последното равенство показва защо средноаритметичното е по-добра статистика от едно отделно наблюдение - има по-малка дисперсия.

Доверителни интервали за $N(\mu, \sigma^2)$

Стандартизираме

$$\mathrm{T} = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \in N(0,1) \qquad (*)$$

Видно е, че T е монотонно намаляваща и непрекъсната по μ, а разпределението и е стандартно нормално, т.е. не зависи от μ. Следователно, T е търсената централна статистика.

Доверителни интервали за $N(\mu, \sigma^2)$

Стандартизираме

$$\mathrm{T} = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \in N(0,1) \qquad (*)$$

Видно е, че T е монотонно намаляваща и непрекъсната по μ, а разпределението и е стандартно нормално, т.е. не зависи от μ. Следователно, T е търсената централна статистика.

Ако имаме зададено ниво на доверие γ, избираме съответните симетрични квантили $-q$ и q и решаваме получените неравенства спрямо μ

$$\gamma = \mathrm{P}\left(-q < \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < q\right) = \mathrm{P}\left(\overline{X} - q\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + q\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Доверителни интервали за $N(\mu, \sigma^2)$

Стандартизираме

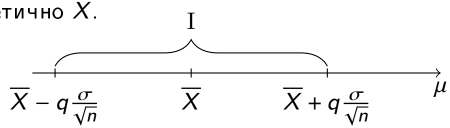
$$\mathrm{T} = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \in N(0,1) \qquad (*)$$

Видно е, че T е монотонно намаляваща и непрекъсната по μ, а разпределението и е стандартно нормално, т.е. не зависи от μ. Следователно, T е търсената централна статистика.

Ако имаме зададено ниво на доверие γ, избираме съответните симетрични квантили $-q$ и q и решаваме получените неравенства спрямо μ

$$\gamma = \mathrm{P}\left(-q < \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < q\right) = \mathrm{P}\left(\overline{X} - q\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + q\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Доверителния интервал, който получаваме $\mathrm{I} = \overline{X} \pm q\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ е околност на средното аритметично $\overline{X}$.



Дължината на интервала зависи от нивото на доверие, дисперсията на сл.в. X, както и от броя на наблюденията. Когато броят на наблюденията расте интервала става по-тесен, т.е. по-точен.

Доверителни интервали за $N(\mu, \sigma^2)$

Пример

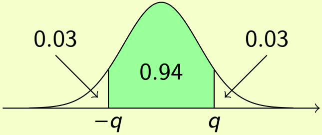
Няколко опитни полета са третирани с нов тип тор, след което е измерен добива: 4.5, 6.3, 5, 4.8, 5.2. Да се построи доверителен интервал, с ниво на доверие $\gamma = 0.94$ за средния добив, ако от предишни изследвания знаем, че данните са нормално разпределени с дисперсия 0.5.

Доверителни интервали за $N(\mu, \sigma^2)$

Пример

Няколко опитни полета са третирани с нов тип тор, след което е измерен добива: 4.5, 6.3, 5, 4.8, 5.2. Да се построи доверителен интервал, с ниво на доверие $\gamma = 0.94$ за средния добив, ако от предишни изследвания знаем, че данните са нормално разпределени с дисперсия 0.5.

Разполагаме с пет наблюдения над сл.в. $X \in N(\mu, 0.5)$ и търсим доверителен интервал за μ. Пресмятаме $\overline{X} = 5.16$ и $\sigma = \sqrt{0.5} = 0.7071$



От таблица за нормално разпределение вадим квантил $q = q_{0.97} = 1.88$. Доверителния интервал, който получаваме е

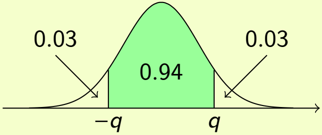
$$\mathrm{I} = 5.16 \pm 1.88 \frac{0.7071}{\sqrt{5}} = (4.56; 5.75)$$

Доверителни интервали за $N(\mu, \sigma^2)$

Пример

Няколко опитни полета са третирани с нов тип тор, след което е измерен добива: 4.5, 6.3, 5, 4.8, 5.2. Да се построи доверителен интервал, с ниво на доверие $\gamma = 0.94$ за средния добив, ако от предишни изследвания знаем, че данните са нормално разпределени с дисперсия 0.5.

Разполагаме с пет наблюдения над сл.в. $X \in N(\mu, 0.5)$ и търсим доверителен интервал за μ. Пресмятаме $\overline{X} = 5.16$ и $\sigma = \sqrt{0.5} = 0.7071$



От таблица за нормално разпределение вадим квантил $q = q_{0.97} = 1.88$. Доверителния интервал, който получаваме е

$$\mathrm{I} = 5.16 \pm 1.88 \frac{0.7071}{\sqrt{5}} = (4.56; 5.75)$$

Това означава че има 94% вероятност средния добив да е в този интервал, съответно 6% вероятност за грешка. Обърнете внимание! Ние не твърдим, че 94% от полетата имат такъв добив. Интервалът се отнася за средния добив от полетата, а не за конкретно поле.

Свойства на нормалните извадки

- Доверителен интервал за очакването μ при неизвестна дисперсия σ^2

Единствената разлика с предходния случай е, че сега дисперсията е неизвестна. Въпросът който стои е какво би станало, ако използваме същата централна статистика за построяване на доверителен интервал, но заместим неизвестната дисперсия σ^2 с оценката за нея

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left(X_k - \overline{X}\right)^2$$

Ще се наложи да изследваме разпределението на централната статистика

$$\mathrm{T} = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \qquad (\star)$$

Свойства на нормалните извадки

- Доверителен интервал за очакването μ при неизвестна дисперсия σ^2

Единствената разлика с предходния случай е, че сега дисперсията е неизвестна. Въпросът който стои е какво би станало, ако използваме същата централна статистика за построяване на доверителен интервал, но заместим неизвестната дисперсия σ^2 с оценката за нея

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left(X_k - \overline{X}\right)^2$$

Ще се наложи да изследваме разпределението на централната статистика

$$\mathrm{T} = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \qquad (\star)$$

Твърдение 1

Нека $X_k \in N(\mu, \sigma^2)$, $k = 1, \ldots, n$, Тогава $\overline{X}$ и S^2 са независими сл.в.

Забележка. Твърдението на пръв поглед е парадоксално, доколкото и $\overline{X_n}$ и S^2 зависят от едни и същи сл.в. То кореспондира с други известни резултати за нормално рапределение. Например, ако X и Y са независими то $X + Y$ и $X - Y$ също са независими.

Свойства на нормалните извадки

Док.В началото ще представим S^2 по следния начин.

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left(X_k - \overline{X}\right)^2 = \frac{1}{n-1}\left[\left(X_1 - \overline{X}\right)^2 + \sum_{k=2}^{n}\left(X_k - \overline{X}\right)^2\right]$$

Ще преработим първото събираемо. Лесно се вижда, че $\sum\left(X_k - \overline{X}\right) = 0.$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(X_k - \overline{X}\right) = \sum_{k=1}^{n} X_k - n\overline{X} = \sum_{k=1}^{n} X_k - \sum_{k=1}^{n} X_k = 0$$

Док.В началото ще представим S^2 по следния начин.

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left(X_k - \overline{X}\right)^2 = \frac{1}{n-1}\left[\left(X_1 - \overline{X}\right)^2 + \sum_{k=2}^{n}\left(X_k - \overline{X}\right)^2\right]$$

Ще преработим първото събираемо. Лесно се вижда, че $\sum\left(X_k - \overline{X}\right) = 0.$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(X_k - \overline{X}\right) = \sum_{k=1}^{n} X_k - n\overline{X} = \sum_{k=1}^{n} X_k - \sum_{k=1}^{n} X_k = 0$$

Тогава

$$\left(X_1 - \overline{X}\right) + \sum_{k=2}^{n}\left(X_k - \overline{X}\right) = 0$$

Док. В началото ще представим S^2 по следния начин.

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left(X_k - \overline{X}\right)^2 = \frac{1}{n-1}\left[\left(X_1 - \overline{X}\right)^2 + \sum_{k=2}^{n}\left(X_k - \overline{X}\right)^2\right]$$

Ще преработим първото събираемо. Лесно се вижда, че $\sum\left(X_k - \overline{X}\right) = 0$.

$$\sum_{k=1}^{n}\left(X_k - \overline{X}\right) = \sum_{k=1}^{n} X_k - n\overline{X} = \sum_{k=1}^{n} X_k - \sum_{k=1}^{n} X_k = 0$$

Тогава

$$\left(X_1 - \overline{X}\right) + \sum_{k=2}^{n}\left(X_k - \overline{X}\right) = 0$$

Следователно

$$\left(X_1 - \overline{X}\right)^2 = \left(-\sum_{k=2}^{n}\left(X_k - \overline{X}\right)\right)^2 = \left(\sum_{k=2}^{n}\left(X_k - \overline{X}\right)\right)^2$$

Свойства на нормалните извадки

Док. В началото ще представим S^2 по следния начин.

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left(X_k - \overline{X}\right)^2 = \frac{1}{n-1}\left[\left(X_1 - \overline{X}\right)^2 + \sum_{k=2}^{n}\left(X_k - \overline{X}\right)^2\right]$$

Ще преработим първото събираемо. Лесно се вижда, че $\sum\left(X_k - \overline{X}\right) = 0$.

$$\sum_{k=1}^{n}\left(X_k - \overline{X}\right) = \sum_{k=1}^{n} X_k - n\overline{X} = \sum_{k=1}^{n} X_k - \sum_{k=1}^{n} X_k = 0$$

Тогава

$$\left(X_1 - \overline{X}\right) + \sum_{k=2}^{n}\left(X_k - \overline{X}\right) = 0$$

Следователно

$$\left(X_1 - \overline{X}\right)^2 = \left(-\sum_{k=2}^{n}\left(X_k - \overline{X}\right)\right)^2 = \left(\sum_{k=2}^{n}\left(X_k - \overline{X}\right)\right)^2$$

Ще заместим в израза за S^2

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\left[\left(\sum_{k=2}^{n}\left(X_k - \overline{X}\right)\right)^2 + \sum_{k=2}^{n}\left(X_k - \overline{X}\right)^2\right]$$

Това показва, че S^2 е функция само на $\left(X_2 - \overline{X}, X_3 - \overline{X}, \dots, X_n - \overline{X}\right)$.

Ще докажем, че тези случайни величини и $\overline{X}$ са независими.

Свойства на нормалните извадки

Без ограничение на общността можем да считаме, че $X_k \in N(0,1)$. Наистина, ако това не е така можем да стандартизираме X_k, при което $\overline{X}$ и S^2 също ще се променят с константа, а промяната с константа не влияе на независимостта. Съвместната плътност на $X_1, \ldots, X_n$ е

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{k=1}^{n} f_{X_k}(x_k) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)$$

Свойства на нормалните извадки

Без ограничение на общността можем да считаме, че $X_k \in N(0,1)$. Наистина, ако това не е така можем да стандартизираме X_k, при което $\overline{X}$ и S^2 също ще се променят с константа, а промяната с константа не влияе на независимостта. Съвместната плътност на $X_1, \ldots, X_n$ е

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{k=1}^{n} f_{X_k}(x_k) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)$$

Сега ще направим следната смяна на променливите

$$\left| \begin{array}{l} y_1 = \overline{x} \\ y_2 = x_2 - \overline{x} \\ \ldots \\ y_n = x_n - \overline{x} \end{array} \right.$$

Свойства на нормалните извадки

Без ограничение на общността можем да считаме, че $X_k \in N(0,1)$. Наистина, ако това не е така можем да стандартизираме X_k, при което $\overline{X}$ и S^2 също ще се променят с константа, а промяната с константа не влияе на независимостта. Съвместната плътност на $X_1, \dots, X_n$ е

$$f(x_1, \dots, x_n) = \prod_{k=1}^{n} f_{X_k}(x_k) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)$$

Сега ще направим следната смяна на променливите

$$\left| \begin{array}{l} y_1 = \overline{x} \\ y_2 = x_2 - \overline{x} \\ \dots \\ y_n = x_n - \overline{x} \end{array} \right.$$

Тогава обратната трансформация и якобианът са съответно

$$\left| \begin{array}{l} x_1 = y_1 - \sum_{k=2}^{n} y_k \\ x_2 = y_2 + y_1 \\ \dots \\ x_n = y_n + y_1 \end{array} \right. \qquad J = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = n$$

Якубианът се пресмята елементарно, ако всеки ред се прибави към първия.

Свойства на нормалните извадки

Съвместната плътност на новите променливи има вида

$$f(y_1, \ldots, y_n) = \frac{n}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\left(y_1 - \sum_{k=2}^{n} y_k\right)^2 + \sum_{k=2}^{n}(y_k + y_1)^2\right]\right\}$$

Свойства на нормалните извадки

Съвместната плътност на новите променливи има вида

$$f(y_1, \ldots, y_n) = \frac{n}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\left(y_1 - \sum_{k=2}^{n} y_k\right)^2 + \sum_{k=2}^{n}(y_k + y_1)^2\right]\right\}$$

Можем да разделим израза в експонентата на две части, едната от които зависи само от y_1. За целта използваме формула за съкратено умножение и групираме.

$$\left(y_1 - \sum_{k=2}^{n} y_k\right)^2 + \sum_{k=2}^{n}(y_k + y_1)^2 = n\, y_1^2 + \left(\sum_{k=2}^{n} y_k\right)^2 + \sum_{k=2}^{n} y_k^2$$

Съвместната плътност на новите променливи има вида

$$f(y_1,\dots,y_n) = \frac{n}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\left(y_1 - \sum_{k=2}^{n} y_k\right)^2 + \sum_{k=2}^{n}(y_k + y_1)^2\right]\right\}$$

Можем да разделим израза в експонентата на две части, едната от които зависи само от y_1. За целта използваме формула за съкратено умножение и групираме.

$$\left(y_1 - \sum_{k=2}^{n} y_k\right)^2 + \sum_{k=2}^{n}(y_k + y_1)^2 = n\,y_1^2 + \left(\sum_{k=2}^{n} y_k\right)^2 + \sum_{k=2}^{n} y_k^2$$

По този начин представяме съвместната плътност като произведение от две плътности.

$$f(y_1,\dots,y_n) = \left[\left(\frac{n}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{ny_1^2}{2}\right\}\right]\left[\frac{n^{\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\sum_{k=2}^{n} y_k\right)^2 - \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n} y_k^2\right\}\right]$$

Не е трудно да разпознаем първата $N(0,\frac{1}{n})$, точно това се очаква и за плътността на $Y_1 = \overline{X}$. Фактът, че съвместната плътност се разпада на произведение от две маргинални плътности означава, че съответните сл.в. са независими. Следователно $\overline{X}$ е независимо с $\left(X_2 - \overline{X}, X_3 - \overline{X}, \dots, X_n - \overline{X}\right)$, а тогава и $X \perp\!\!\!\perp S^2$, тъй като S^2 е функция само от тях, както доказахме. □

Свойства на нормалните извадки

Вече знаем, че числителят и знаменателят на централната статистика $(\star)$ T са независими, освен това познаваме разпределението в числителя, остава да определим как е разпределен знаменателя.

Свойства на нормалните извадки

Вече знаем, че числителят и знаменателят на централната статистика $(\star)$ T са независими, освен това познаваме разпределението в числителя, остава да определим как е разпределен знаменателя.

Твърдение 2

Нека $X_k \in N(\mu, \sigma^2)$, $k = 1, \ldots, n$, Тогава

$$\frac{(n-1)}{\sigma^2} S^2 \in \chi^2(n-1)$$

Свойства на нормалните извадки

Вече знаем, че числителят и знаменателят на централната статистика $(\star)$ T са независими, освен това познаваме разпределението в числителя, остава да определим как е разпределен знаменателя.

Твърдение 2

Нека $X_k \in N(\mu, \sigma^2)$, $k = 1, \ldots, n$, Тогава

$$\frac{(n-1)}{\sigma^2} S^2 \in \chi^2(n-1)$$

Док. Ще използваме равенството $\sum \left(X_k - \overline{X}\right) = 0$, което доказахме по-горе. Тогава

$$\sum_{k=1}^{n} (X_k - \mu)^2 = \sum_{k=1}^{n} \left[(X_k - \overline{X}) + (\overline{X} - \mu)\right]^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(X_k - \overline{X}\right)^2 + 2(\overline{X} - \mu) \sum_{k=1}^{n} \left(X_k - \overline{X}\right) + \sum_{k=1}^{n} \left(\overline{X} - \mu\right)^2$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(X_k - \overline{X}\right)^2 + n\left(\overline{X} - \mu\right)^2$$

Свойства на нормалните извадки

Ще разделим двете страни на полученото равенство на σ^2.

$$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}(X_k-\mu)^2 = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}\left(X_k-\overline{X}\right)^2 + n\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\right)^2$$

Свойства на нормалните извадки

Ще разделим двете страни на полученото равенство на σ^2.

$$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}(X_k-\mu)^2=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}\left(X_k-\overline{X}\right)^2+n\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\right)^2$$

Използваме дефиницията на S^2.

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{X_k-\mu}{\sigma}\right)^2}_{Z_1}=\underbrace{\frac{n-1}{\sigma^2}\,S^2}_{Z_2}+\underbrace{\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2}_{Z_3}$$

Свойства на нормалните извадки

Ще разделим двете страни на полученото равенство на σ^2.

$$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}(X_k-\mu)^2=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}\left(X_k-\overline{X}\right)^2+n\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\right)^2$$

Използваме дефиницията на S^2.

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{X_k-\mu}{\sigma}\right)^2}_{Z_1}=\underbrace{\frac{n-1}{\sigma^2}S^2}_{Z_2}+\underbrace{\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2}_{Z_3}$$

Лесно се вижда, че Z_1 и Z_3 имат хи-квадрат разпределение. Наистина, по условие $X_k\in N(\mu,\sigma^2)$, следователно $\frac{X_k-\mu}{\sigma}\in N(0,1)$. В лекция VIII доказахме че сумата от квадратите на нормални сл.в. има хи-квадрат разпределение

$$Z_1=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{X_k-\mu}{\sigma}\right)^2\in\chi^2(n)$$

Свойства на нормалните извадки

Ще разделим двете страни на полученото равенство на σ^2.

$$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}(X_k-\mu)^2=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}\left(X_k-\overline{X}\right)^2+n\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\right)^2$$

Използваме дефиницията на S^2.

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{X_k-\mu}{\sigma}\right)^2}_{Z_1}=\underbrace{\frac{n-1}{\sigma^2}S^2}_{Z_2}+\underbrace{\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2}_{Z_3}$$

Лесно се вижда, че Z_1 и Z_3 имат хи-квадрат разпределение. Наистина, по условие $X_k\in N(\mu,\sigma^2)$, следователно $\frac{X_k-\mu}{\sigma}\in N(0,1)$. В лекция VIII доказахме че сумата от квадратите на нормални сл.в. има хи-квадрат разпределение

$$Z_1=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{X_k-\mu}{\sigma}\right)^2\in\chi^2(n)$$

При решаването на първата задача показахме $(*)$, че

$$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\in N(0,1)\qquad\Longrightarrow\qquad Z_3=\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2\in\chi^2(1)$$

Освен това знаем, че $\overline{X_n}$ и S^2 са независими, тогава $Z_2 \perp\!\!\!\perp Z_3$ защото се различават само с константи.

Свойства на нормалните извадки

Да обобщим

$$Z_1 = Z_2 + Z_3$$

Освен това $Z_1 \in \chi^2(n)$, $Z_3 \in \chi^2(1)$ и $Z_2 \perp\!\!\!\perp Z_3$. Тогава единствената възможност е $Z_2 \in \chi^2(n-1)$, с което всичко е доказано. Все пак това не е прецизно доказателство, ще направим такова за по-любознателните.

Свойства на нормалните извадки

Да обобщим

$$Z_1 = Z_2 + Z_3$$

Освен това $Z_1 \in \chi^2(n)$, $Z_3 \in \chi^2(1)$ и $Z_2 \perp\!\!\!\perp Z_3$. Тогава единствената възможност е $Z_2 \in \chi^2(n-1)$, с което всичко е доказано. Все пак това не е прецизно доказателство, ще направим такова за по-любознателните.

В лекция X доказахме, че за функцията пораждаща моментите е изпълнено

$$Z = X + Y, \ \ X \perp\!\!\!\perp Y \qquad \Rightarrow \qquad M_Z(t) = M_X(t)\, M_Y(t)$$

Свойства на нормалните извадки

Да обобщим

$$Z_1 = Z_2 + Z_3$$

Освен това $Z_1 \in \chi^2(n)$, $Z_3 \in \chi^2(1)$ и $Z_2 \perp\!\!\!\perp Z_3$. Тогава единствената възможност е $Z_2 \in \chi^2(n-1)$, с което всичко е доказано. Все пак това не е прецизно доказателство, ще направим такова за по-любознателните.

В лекция X доказахме, че за функцията пораждаща моментите е изпълнено

$$Z = X + Y, \ \ X \perp\!\!\!\perp Y \qquad \Rightarrow \qquad M_Z(t) = M_X(t)\, M_Y(t)$$

В същата лекция изведохме функцията пораждаща моментите на хи-квадрат рапределение, а именно

$$X \ \in \ \chi^2(m) \qquad \Longleftrightarrow \qquad M_X(t) = (1 - 2t)^{-m/2}$$

Свойства на нормалните извадки

Да обобщим

$$Z_1 = Z_2 + Z_3$$

Освен това $Z_1 \in \chi^2(n)$, $Z_3 \in \chi^2(1)$ и $Z_2 \perp\!\!\!\perp Z_3$. Тогава единствената възможност е $Z_2 \in \chi^2(n-1)$, с което всичко е доказано. Все пак това не е прецизно доказателство, ще направим такова за по-любознателните.

В лекция X доказахме, че за функцията пораждаща моментите е изпълнено

$$Z = X + Y, \ \ X \perp\!\!\!\perp Y \qquad \Rightarrow \qquad M_Z(t) = M_X(t)\, M_Y(t)$$

В същата лекция изведохме функцията пораждаща моментите на хи-квадрат рапределение, а именно

$$X \in \chi^2(m) \qquad \Longleftrightarrow \qquad M_X(t) = (1-2t)^{-m/2}$$

Лесно можем да докажем следните две твърдения:

$$1) \qquad X \in \chi^2(m), \ \ Y \in \chi^2(k) \qquad \Rightarrow \qquad Z \in \chi^2(m+k)$$

Защото

$$M_Z(t) = (1-2t)^{-m/2}(1-2t)^{-k/2} = (1-2t)^{-(m+k)/2}$$

Свойства на нормалните извадки

Да обобщим

$$Z_1 = Z_2 + Z_3$$

Освен това $Z_1 \in \chi^2(n)$, $Z_3 \in \chi^2(1)$ и $Z_2 \perp\!\!\!\perp Z_3$. Тогава единствената възможност е $Z_2 \in \chi^2(n-1)$, с което всичко е доказано. Все пак това не е прецизно доказателство, ще направим такова за по-любознателните.

В лекция X доказахме, че за функцията пораждаща моментите е изпълнено

$$Z = X + Y,\ \ X \perp\!\!\!\perp Y \qquad \Rightarrow \qquad M_Z(t) = M_X(t)\, M_Y(t)$$

В същата лекция изведохме функцията пораждаща моментите на хи-квадрат рапределение, а именно

$$X \in \chi^2(m) \qquad \Longleftrightarrow \qquad M_X(t) = (1-2t)^{-m/2}$$

Лесно можем да докажем следните две твърдения:

$$1) \qquad X \in \chi^2(m),\ \ Y \in \chi^2(k) \qquad \Rightarrow \qquad Z \in \chi^2(m+k)$$

Защото

$$M_Z(t) = (1-2t)^{-m/2}(1-2t)^{-k/2} = (1-2t)^{-(m+k)/2}$$

$$2) \qquad X \in \chi^2(m),\ \ Z \in \chi^2(m+k) \qquad \Rightarrow \qquad Y \in \chi^2(k)$$

Понеже

$$M_Y(t) = \frac{M_Z(t)}{M_X(t)} = \frac{(1-2t)^{-(m+k)/2}}{(1-2t)^{-m/2}} = (1-2t)^{-k/2} \qquad \square$$

Доверителни интервали за $N(\mu, \sigma^2)$

Вече разполагаме с всичко необходимо за да се върнем към основната задача и да построим доверителен интервал за очакването μ при неизвестна дисперсия. Ще се върнем към централната статистика T ($\star$), ще разделим на σ и ще пренаредим

$$\mathrm{T} = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} = \frac{\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \Big/ (n-1)}}$$

Доверителни интервали за $N(\mu, \sigma^2)$

Вече разполагаме с всичко необходимо за да се върнем към основната задача и да построим доверителен интервал за очакването μ при неизвестна дисперсия. Ще се върнем към централната статистика T ($\star$), ще разделим на σ и ще пренаредим

$$\mathrm{T} = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} = \frac{\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \Big/ (n-1)}}$$

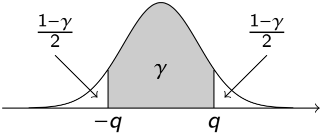
Както многократно отбелязвахме числителят е с разпределение $N(0,1)$, знаменателят е от типа $\sqrt{\chi^2(n-1)/(n-1)}$ и те са независими. От последното твърдение в лекция VIII следва, че T има разпределение на Стюдънт с $n-1$ степени на свобода

$$\mathrm{T} = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \in t(n-1)$$

Разпределението на Стюдънт е подобно на нормалното разпределение, също е симетрично, затова и квантилите се определят по същия начин, т.е. при зададено ниво на доверие γ намираме квантили $-q$ и q от таблица с $t(n-1)$ разпределение, такива че

$$\mathsf{P}(-q < \mathrm{T} < q) = \gamma$$

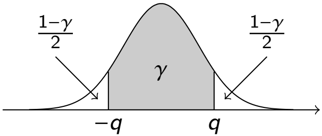
Доверителни интервали за $N(\mu, \sigma^2)$



Ясно е че
$$\mathrm{P}(T < q) = \frac{1-\gamma}{2} + \gamma = \frac{1+\gamma}{2}$$

Тогава q е $\frac{1+\gamma}{2}$ квантил на разпределение на Стюдънт $n-1$ степени на свобода. А търсеният доверителен интервал за μ е $\mathrm{I} = \overline{X} \pm q\frac{S}{\sqrt{n}}$

Доверителни интервали за $N(\mu, \sigma^2)$



Ясно е че

$$\mathrm{P}(T < q) = \frac{1-\gamma}{2} + \gamma = \frac{1+\gamma}{2}$$

Тогава q е $\frac{1+\gamma}{2}$ квантил на разпределение на Стюдънт $n-1$ степени на свобода. А търсеният доверителен интервал за μ е $\mathrm{I} = \overline{X} \pm q\frac{S}{\sqrt{n}}$

И двата доверителни интервала за μ, които построихме, при известна и при неизвестна дисперсия, използват статистика T, в която основна роля играе $\overline{X} = \frac{\sum X_k}{n}$. Ние предполагахме, че $X_k \in N(\mu, \sigma^2)$ и затова $\overline{X}$ е нормално разпределено. В действителност $\overline{X}$ ще бъде нормално разпределено, дори първоначалните наблюдения да не са, стига те да са достатъчно на брой, това твърди централна гранична теорема, лекция X. Поради тази причина, статистиката T $(\star)$ може да се използва за намиране на доверителен интервал за математическото очакване на произволни случайни величини, достатъчно е наблюденията да са много на брой. Под "много" най-често се разбира повече от 30.

Доверителни интервали за $N(\mu, \sigma^2)$

- Доверителен интервал за дисперсия σ^2 при известно очакване μ

Като основа за конструиране на централна статистика отново ще ползваме съответната точкова оценка. $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \mu)^2$. Нека

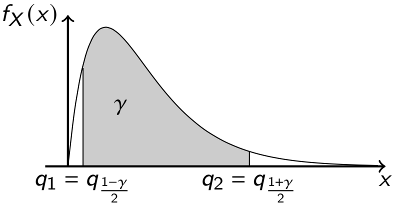
$$\mathrm{T} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \mu)^2$$

- Доверителен интервал за дисперсия σ^2 при известно очакване μ

Като основа за конструиране на централна статистика отново ще ползваме съответната точкова оценка. $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \mu)^2$. Нека

$$\mathrm{T} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \mu)^2$$

По горе (стр.14) показахме, че $\mathrm{T} \in \chi^2(n)$, освен това функцията явно е монотонна и непрекъснато по σ, следователно тя е централна статистика. Избираме съответните квантили на хи-квадрат разпределението и решаваме спрямо σ^2



$$\gamma = \mathrm{P}(q_1 < \mathrm{T} < q_2) = \mathrm{P}\left(\frac{\sum_{k=1}^{n}(X_k - \mu)^2}{q_2} < \sigma^2 < \frac{\sum_{k=1}^{n}(X_k - \mu)^2}{q_1}\right)$$

Доверителни интервали за $N(\mu, \sigma^2)$

- Доверителен интервал за дисперсия σ^2 при неизвестно очакване μ

В централната статистика от предната задача ще заместим очакването μ с точковата оценка за него $\overline{X}$.

$$\mathrm{T} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=1}^{n} \left(X_k - \overline{X} \right)^2$$

Доверителни интервали за $N(\mu, \sigma^2)$

- Доверителен интервал за дисперсия σ^2 при неизвестно очакване μ

В централната статистика от предната задача ще заместим очакването μ с точковата оценка за него $\overline{X}$.

$$\mathrm{T} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=1}^{n} \left(X_k - \overline{X}\right)^2$$

T се оказва точно статистиката от Твърдение 2.

$$\mathrm{T} = \frac{n-1}{\sigma^2} S^2 \in \chi^2(n-1)$$

Разликата с предишния случай е в степените на свобода тук те са $n-1$. Доверителния интервал е аналогичен.

$$\mathrm{I} = \left(\frac{\sum_{k=1}^{n} \left(X_k - \overline{X}\right)^2}{q_2} ; \frac{\sum_{k=1}^{n} \left(X_k - \overline{X}\right)^2}{q_1} \right)$$

Доверителни интервали за $N(\mu, \sigma^2)$

- Доверителен интервал за дисперсия σ^2 при неизвестно очакване μ

В централната статистика от предната задача ще заместим очакването μ с точковата оценка за него $\overline{X}$.

$$\mathrm{T} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}\left(X_k - \overline{X}\right)^2$$

T се оказва точно статистиката от Твърдение 2.

$$\mathrm{T} = \frac{n-1}{\sigma^2}\, S^2 \in \chi^2(n-1)$$

Разликата с предишния случай е в степените на свобода тук те са $n-1$. Доверителния интервал е аналогичен.

$$\mathrm{I} = \left(\frac{\sum_{k=1}^{n}\left(X_k - \overline{X}\right)^2}{q_2}\ ;\ \frac{\sum_{k=1}^{n}\left(X_k - \overline{X}\right)^2}{q_1}\right)$$

Ще обобщим получените лезултати в следното твърдение

Доверителни интервали за $N(\mu, \sigma^2)$

Твърдение

Нека $X \in N(\mu, \sigma^2)$ и $X_1, \ldots, X_n$ са независими наблюдения над X. Тогава доверителните интервали за параметрите са както следва.

- Доверителен интервал за μ при известна σ^2
$$\mathrm{I} = \left(\overline{X} - q\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ;\ \overline{X} + q\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \qquad q \in N(0,1)$$
- Доверителен интервал за μ при неизвестна σ^2
$$\mathrm{I} = \left(\overline{X} - q\frac{S}{\sqrt{n}}\ ;\ \overline{X} + q\frac{S}{\sqrt{n}}\right) \qquad q \in t(n-1)$$
- Доверителен интервал за σ^2 при известно μ
$$\mathrm{I} = \left(\frac{\sum_{k=1}^{n}(X_k - \mu)^2}{q_2}\ ;\ \frac{\sum_{k=1}^{n}(X_k - \mu)^2}{q_1}\right) \qquad q_1, q_2 \in \chi^2(n)$$
- Доверителен интервал за σ^2 при неизвестно μ
$$\mathrm{I} = \left(\frac{\sum_{k=1}^{n}\left(X_k - \overline{X}\right)^2}{q_2}\ ;\ \frac{\sum_{k=1}^{n}\left(X_k - \overline{X}\right)^2}{q_1}\right) \qquad q_1, q_2 \in \chi^2(n-1)$$

Доверителни интервали за $N(\mu, \sigma^2)$

Твърдение

Нека $X \in N(\mu, \sigma^2)$ и $X_1, \ldots, X_n$ са независими наблюдения над X. Тогава доверителните интервали за параметрите са както следва.

- Доверителен интервал за μ при известна σ^2
$$\mathrm{I} = \left(\overline{X} - q\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ;\ \overline{X} + q\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \qquad q \in N(0,1)$$
- Доверителен интервал за μ при неизвестна σ^2
$$\mathrm{I} = \left(\overline{X} - q\frac{S}{\sqrt{n}}\ ;\ \overline{X} + q\frac{S}{\sqrt{n}}\right) \qquad q \in t(n-1)$$
- Доверителен интервал за σ^2 при известно μ
$$\mathrm{I} = \left(\frac{\sum_{k=1}^{n}(X_k - \mu)^2}{q_2}\ ;\ \frac{\sum_{k=1}^{n}(X_k - \mu)^2}{q_1}\right) \qquad q_1, q_2 \in \chi^2(n)$$
- Доверителен интервал за σ^2 при неизвестно μ
$$\mathrm{I} = \left(\frac{\sum_{k=1}^{n}\left(X_k - \overline{X}\right)^2}{q_2}\ ;\ \frac{\sum_{k=1}^{n}\left(X_k - \overline{X}\right)^2}{q_1}\right) \qquad q_1, q_2 \in \chi^2(n-1)$$