Зад.) Да се докаже, че $T(n) = 2T(\frac{n}{2} + 17) + n = O(n\lg n)$

Д-во:) Трябва да докажем, че

$$\exists c > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ T(n) \leq cn\lg n$$

Ще направим индукция по n, в хода на която ще подберем подходящи ст-ти за c и n_0.

База:) Нямаме база тук, тъй като краен брой начални членове ги приемаме за $\Theta(1)$

Инд. предположение:) Нека тв-ето е вярно за $\forall k \in [n_0, n)$ за произволно n

(т.е. за всички ст-ти по-малки от n и по-големи или равни на избраното n_0)

$$T(k) \leq ck\lg k \quad \text{за } k \in [n_0, n)$$

Ще докажем, че е вярно и за n, т.е.

$$T(n) \leq cn\lg n$$

Имаме

$$T(n) \underset{\text{Деф.}}{=} 2T\left(\frac{n}{2} + 17\right) + n \underset{n > 34}{\leq} 2c\left(\frac{n}{2} + 17\right)\lg\left(\frac{n}{2} + 17\right) + n$$

И.П. за $k = \frac{n}{2} + 17 < n \Leftrightarrow n > 34$

$$= c(n+34)\left(\lg(n+34) - \lg 2\right) + n \leq$$

$$\underset{n > 85}{\leq} c(n+34)\left[\lg(n\sqrt{2}) - \lg 2\right] + n =$$

// Припомням, че $\lg n = \log_2 n$ само по ДАА, т.е. $\lg 2 = 1$

$$= c(n+34)\left(\lg n - \frac{1}{2}\right) + n =$$

$$= cn\lg n - \frac{cn}{2} + 34c\lg n - 17c + n =$$

$$= cn\lg n + \underbrace{\left(1 - \frac{c}{2}\right)n + 34c\lg n - 17c}$$

$\left(n + 34 < n\sqrt{2} \Leftrightarrow \right.$

$\Leftrightarrow 34 < (\sqrt{2} - 1)n \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{34}{\sqrt{2} - 1} < n \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \underbrace{} < 85 \Rightarrow n \geq 85$

$\left. \text{върши работа} \right)$

$\sqrt{2} < 1.5$

$\sqrt{2} > 1.4 \to 34/(\sqrt{2} - 1) < \frac{34}{\frac{4}{10}} = 85$

за достатъчно голямо n при $1 - \frac{c}{2} < 0$ (т.е. $c > 2$), този израз е отрицателен, т.к. линейната ф-я доминира логаритмичната

Нека $c = 4$. Тогава $\left(1-\frac{c}{2}\right)n + 34c\lg n - 17c =$

$$= -n + 136\lg n - 68 < 0 \iff$$

$$136\lg n < n + 68 \iff$$

$$\frac{136\lg n}{n+68} < 1$$

Но $\frac{136\lg n}{n+68} = \frac{2\lg n}{\left(\frac{n}{68}+1\right)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\Rightarrow$ за достатъчно голямо n_1 е в сила $\forall n \geq n_1$: $\frac{136\lg n}{n+68} < 1$ т.е. $\boxed{\left(1-\frac{c}{2}\right)n + 34c\lg n - 17c < 0}$

т.е. $\boxed{T(n) \leq cn\lg n}$

Тоест за $\underline{c = 4}$ и $n_0 = \max\{35; 86; n_1\}$ е вярно, че $\forall n \geq n_0$: $T(n) \leq cn\lg n$

т.е. $T(n) = O(n\lg n)$

Зад) Дадени са $f(n) = \log n$ и

$$g(n) = (\sqrt[n]{n} - 1).n$$

Док., че $g(n) = \Theta(f(n))$

Д-во.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n(\sqrt[n]{n} - 1)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\log n}{n}}{\sqrt[n]{n} - 1} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\overset{1}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(\log n)' n - \log n.(n')}{n^2}}{n^{1/n} . \frac{(\ln n)' n - \ln n.(n')}{n^2}} =$$

$$= \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}}_{\frac{1}{1} = 1} . \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{(\log n)' n - \log n.(n')}{(\ln n)' n - \ln n.(n')}}_{const}$$

$$= const > 0 \Rightarrow \boxed{g(n) = \Theta(f(n))}$$

// $\frac{\log n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\sqrt[n]{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

$\left(\lim_{n\to\infty} \ln(\sqrt[n]{n}) =\right.$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = e^0 = 1)$

// $\left[e^{(\ln n)\frac{1}{n}} - 1\right]' =$

$= e^{(\ln n)\frac{1}{n}} \left(\frac{\ln n}{n}\right)'$

$= n^{1/n} . \frac{(\ln n)' n - \ln n (n')}{n^2}$

$T(1) = \Theta(1)$

$T(n) = 2T\left(\frac{n}{4}\right) + \sqrt{n}\ , \quad n \geq 2$

$a = 2,\ b = 4,\ k = \log_b a = \frac{1}{2}$

$\left.\begin{array}{l} n^k = n^{1/2} = \sqrt{n} \\ f(n) = \sqrt{n} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad n^k \asymp f(n)$

$\xrightarrow[\text{случай 2}]{\text{МТh}} \quad T(n) = \Theta(n^k \lg n) = \underline{\underline{\Theta(\sqrt{n}\ \lg n)}}$

$T(1) = \Theta(1)$

$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + \lg n\ , \quad n \geq 2$

$a = 1,\ b = 2,\ k = \log_b a = 0, \quad f(n) = n^0 \lg^1 n$

$\xrightarrow{\text{МТh. 4 случай}} \quad T(n) = \Theta(n^k \log^{t+1} n) = \Theta(n^0 \log^2 n) =$

$\left(f(n) = n^k \lg^t n \text{ за } k = 0,\ t = 1 \right)$

$= \underline{\underline{\Theta(\lg^2 n)}}$

$$\begin{cases} T(1) = \Theta(1) \\ T(n) = 2T(\sqrt{n}) + 1, \quad n \geq 2 \end{cases}$$

I начин: Полагаме $n = 2^m \rightarrow \sqrt{n} = 2^{m/2}$

$m = \lg n$

$$\underbrace{T(2^m)}_{\text{полагаме } Q(m) = T(2^m)} = 2T(2^{m/2}) + 1$$

$$Q(m) = 2Q\left(\frac{m}{2}\right) + 1$$

$a = 2,\ b = 2,\ k = \log_b a = 1$

$m^k = m$

$f(m) = 1$

$f(m) < m^k$ т.е. $f(m) = O(m^{k-\varepsilon})$ за $\varepsilon = 10^{-10}$ (примерно)

$\xRightarrow{\text{MTh 1 случай}}$ $Q(m) = \Theta(m^k) = \Theta(m)$

$$T(n) = T(2^m) = Q(m) = \Theta(m) = \Theta(\lg n)$$

$$\boxed{T(n) = \Theta(\lg n)}$$

II начин: Полагаме $n = 2^{2^m} \rightarrow 2^m = \lg n,\ m = \lg\lg n$

$\sqrt{n} = 2^{2^{m-1}}$

$$\underbrace{T(2^{2^m})}_{\text{полагаме } Q(m) = T(2^{2^m})} = 2T(2^{2^{m-1}}) + 1$$

$$Q(m) = 2Q(m-1) + 1$$

$x - 2 = 0$

$\{2\}_M$

$$Q(m) = c \cdot 2^m = \Theta(2^m) = \Theta(\lg n)$$

$$\Rightarrow T(n) = T(2^{2^m}) = Q(m) = \Theta(\lg n)$$

$$\boxed{T(n) = \Theta(\lg n)}$$