① Упражнение 12 за 1, 2 и 3 група

Опр. 1 Нека $x_0 \in \mathbb{R}$. Околност на x_0 наричаме всеки отворен интервал с център x_0. Прободена околност на x_0 наричаме околност на x_0, от която е махната точката x_0.

Опр. 2 Нека $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ и $x_0 \in \mathbb{R}$. Казваме, че x_0 е точка на сгъстяване на $\mathcal{D}$, ако във всяка прободена околност на x_0 има точка от $\mathcal{D}$.

Опр. 3 (Коши) Нека $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$, $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ и $x_0 \in \mathbb{R}$ е точка на сгъстяване на $\mathcal{D}$. Казваме, че $f(x)$ има граница A при x клонящо към x_0 и пишем $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$, такова че при $|x - x_0| < \delta$, $x \in \mathcal{D}$, $x \neq x_0$ имаме $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Опр. 3 (Хайне) Нека $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$, $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ и $x_0 \in \mathbb{R}$ е точка на сгъстяване на $\mathcal{D}$. Казваме, че $f(x)$ има граница A при x клонящо към x_0 и пишем $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, ако за всяка редица $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x_0$ от точки на $\mathcal{D}$, различни от x_0, съответната редица $f(x_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} A$.

Теорема 1 Определенията на Коши и Хайне са равносилни.

Теорема 2 Нека $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$, $f, g : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ е точка на сгъстяване на $\mathcal{D}$ и $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$.

Тогава: 1) $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = A + B$;

2) $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) - g(x)] = A - B$;

2

3) $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = AB$;

4) ако $B \neq 0$, то $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$.

Означение: С $g(x) = o(f(x))$ при $x \to x_0$ ще означаваме факта, че $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$.

Примери: 1) $x^3 = o(x^7)$ при $x \to +\infty$, защото $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x^7} = 0$;

2) $x^5 = o(x^2)$ при $x \to 0$, защото $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^5}{x^2} = 0$.

Пресметнете границата:

Зад. 1 $L = \lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 12x + 20}$.

Решение: $L = \lim\limits_{x \to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x-3)}{\cancel{(x-2)}(x-10)} = \frac{-1}{-8} = \frac{1}{8}$.

Зад. 2 $L = \lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$.

Решение:

$$L = \lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{(1-x)(1+x+x^2)} \right) =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(1+x+x^2) - 3}{(1-x)(1+x+x^2)} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2+x-2}{(1-x)(1+x+x^2)} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+2)}{\underbrace{\cancel{(1-x)}}_{(-1)}(1+x+x^2)} = \frac{3}{-3} = -1.$$

(3) Зад. 3 $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+6x)^5-(1+5x)^6}{x^2}$.

Решение:

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{\left[\cancel{\underbrace{\binom{5}{0}}_{=1}}+\cancel{\underbrace{\binom{5}{1}}_{=5}6x}+\underbrace{\binom{5}{2}}_{=10}(6x)^2+\overbrace{\binom{5}{3}(6x)^3+\ldots+\binom{5}{5}(6x)^5}^{o(x^2)}\right]-\left[\cancel{\underbrace{\binom{6}{0}}_{=1}}+\cancel{\underbrace{\binom{6}{1}}_{=6}(5x)}+\underbrace{\binom{6}{2}}_{=15}(5x)^2+\overbrace{\binom{6}{3}(5x)^3+\ldots+\binom{6}{6}(5x)^6}^{o(x^2)}\right]}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{[360x^2+o(x^2)]-[375x^2+o(x^2)]}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-15x^2+o(x^2)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left[-15+\frac{o(x^2)}{x^2}\right]=-15.$$

Използвахме, че $o(x^2)-o(x^2)=o(x^2)$ (в случая при $x\to 0$). Това е вярно, защото:

$$\left|\begin{array}{l} f=o(x^2)\\ g=o(x^2)\end{array}\right. \Longrightarrow \left|\begin{array}{l} \dfrac{f}{x^2}\longrightarrow 0\\ \dfrac{g}{x^2}\longrightarrow 0\end{array}\right. \Longrightarrow \frac{f-g}{x^2}\longrightarrow 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow f-g=o(x^2).$$

Зад. 4 а) $L=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3-x+1}{3x^3+x^2-x}$;

б) $L=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^4-x^3+1}{x^3-1}$.

Решение: Важно практическо правило: Граница на рационална функция (т.е. на частно на два полинома) при $x\to+\infty$ или при $x\to-\infty$ се пресмята като в числителя и в знаменателя изнесем пред скоби най-високата степен на x.

а) $L=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{x^3}\left(2-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{\cancel{x^3}\left(3+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}=\dfrac{2}{3}$.

④ б) $L = \lim\limits_{x \to -\infty} \left[\frac{x^4}{\cancel{x^3}} \frac{2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^4}}{1 - \frac{1}{x^3}} \right] = (-\infty) \cdot 2 = -\infty.$

Зад. 5 $L = \lim\limits_{t \to 1^-} \frac{2t^2+2}{t^2-3t+2}.$

Забележка: $t \to 1^-$ означава $\begin{matrix} t \to 1 \\ t < 1 \end{matrix}$

Решение: $L = \lim\limits_{t \to 1^-} \left(\frac{2t^2+2}{t-2} \cdot \frac{1}{t-1} \right) =$

$= (-4) \cdot (-\infty) = +\infty.$

Зад. 6 $L = \lim\limits_{x \to 8} \frac{\sqrt{9+2x} - 5}{\sqrt[3]{x} - 2}.$

Решение:

$$L = \lim_{x \to 8} \frac{(\sqrt{9+2x}-5)(\sqrt{9+2x}+5)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{(\sqrt[3]{x}-2)(\sqrt{9+2x}+5)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)} =$$

$$= \lim_{x \to 8} \frac{\overset{2}{\cancel{(2x-16)}} \cdot (\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{\cancel{(x-8)} \cdot (\sqrt{9+2x}+5)} = \frac{2 \cdot 12}{10} = \frac{12}{5}.$$

Зад. 7 $L = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - \sqrt[4]{1-2x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}.$

Решение: Ще използваме, че

$u^n - v^n = (u-v)(u^{n-1} + u^{n-2}v + \dots + uv^{n-2} + v^{n-1}).$

$u, v \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$

Нека $a = \sqrt[3]{1+x^2}$, $b = \sqrt[4]{1-2x}$, $c = \sqrt{1+x}$, $d = \sqrt[3]{1-x}$.

Имаме, че $\lim\limits_{x \to 0} a = 1$, $\lim\limits_{x \to 0} b = 1$, $\lim\limits_{x \to 0} c = 1$, $\lim\limits_{x \to 0} d = 1$.

Спрегнатият израз на числителя е

$M = a^{11} + a^{10}b + \dots + ab^{10} + b^{11}$, $\lim\limits_{x \to 0} M = 12.$

Спрегнатият израз на знаменателя е

$N = c^5 + c^4 d + \dots + cd^4 + d^5$, $\lim\limits_{x \to 0} N = 6.$

(5) $$L = \lim_{x \to 0} \frac{a-b}{c-d} = \lim_{x \to 0} \frac{(a-b)MN}{(c-d)MN} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(a-b)M}{(c-d)N} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{N}{M} =$$

$$= \frac{6}{12} \lim_{x \to 0} \frac{a^{12} - b^{12}}{c^6 - d^6} = \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \frac{(1+x^2)^4 - (1-2x)^3}{(1+x)^3 - (1-x)^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \frac{\left[\cancel{\binom{4}{0}}^{=1} + o(x)\right] - \left[\cancel{1} - 6x + o(x)\right]}{\left[\cancel{1} + 3x + o(x)\right] - \left[\cancel{1} - 2x + o(x)\right]} =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \frac{6x + o(x)}{5x + o(x)} = \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \frac{6 + \frac{o(x)}{x}}{5 + \frac{o(x)}{x}} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{5} = \frac{3}{5}.$$ Отг. $L = \frac{3}{5}$.

Използвахме, че $o(x) - o(x) = o(x)$ (в случая при $x \to 0$). Това е вярно, защото:

$$\left| \begin{aligned} f &= o(x) \\ g &= o(x) \end{aligned} \right. \Rightarrow \left| \begin{aligned} &\frac{f}{x} \to 0 \\ &\frac{g}{x} \to 0 \end{aligned} \right. \Rightarrow \frac{f-g}{x} \to 0 \Rightarrow f - g = o(x).$$