Евклидово пространство

Нека V е лин. пр-во над $\mathbb{R}$

Опр/ Скаларно произведение $V \times V \to \mathbb{R}$
$\forall a, b \in V \longmapsto (a, b) \in \mathbb{R}$
и са изпълнени

1) $(a_1 + a_2, b) = (a_1, b) + (a_2, b)$, $\forall a_1, a_2, b \in V$
2) $(\lambda a, b) = \lambda (a, b)$, $\forall a, b \in V$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$
3) $(a, b) = (b, a)$, $\forall a, b \in V$
4) $(a, a) > 0$, $\forall a \neq \theta$

Скаларното произведение е билинейна симетрична ф-я

Опр// V е линейно простр-во над $\mathbb{R}$ в което има въведено скаларно произведение. Тогава V се нарича Евклидово пространство

Пример: Геометричните вектори в равнината (или 3мерното пространство)

$\vec{a}\cdot\vec{b} = |a||b|\cos\varphi$; $(\vec{a}_1+\vec{a}_2)\cdot\vec{b} = \vec{a}_1\vec{b} + \vec{a}_2\vec{b}$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$, $\vec{a}\cdot\vec{a} = \vec{a}^2 = |a|^2 > 0$ за $a \neq 0$

Пример Нека V е лин. пр-во над $\mathbb{R}$ с базис $e_1 \dots e_n$

Дефинираме ф-я $\varphi: V \times V \to \mathbb{R}$

ако $a = a_1e_1 + \dots + a_ne_n$; $\varphi(a,b) = a_1b_1 + \dots + a_nb_n$

$b = b_1e_1 + \dots + b_ne_n$

$\varphi(a,b) = \varphi(b,a)$

$\varphi(a,a) = a_1^2 + \dots + a_n^2 > 0$, ако $a \neq \theta$

$\varphi(\lambda a, b) = \lambda a_1b_1 + \dots + \lambda a_nb_n = \lambda(a_1b_1 + \dots + a_nb_n) = \lambda\varphi(a,b)$

Ако $c = c_1e_1 + \dots + c_ne_n \in V$

$\varphi(a+c, b) = (a_1+c_1)b_1 + \dots + (a_n+c_n)b_n = a_1b_1 + \dots + a_nb_n + c_1b_1 + \dots + c_nb_n$

$= \varphi(a,b) + \varphi(c,b)$

$\Rightarrow \varphi(a,b)$ е скаларно произведение

Опр. Нека V е Евклидово пр-во
$a, b \in V$. Казваме, че a, b - перпендикулярни $(a \perp b)$
ако $(a, b) = 0$

Опр. $a \in V$: $|a| = \sqrt{(a,a)} \geq 0$ и $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$

Св-во / $|\lambda a| = \sqrt{(\lambda a, \lambda a)} = \sqrt{\lambda^2 (a,a)} = |\lambda| . |a|$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Т // Нека V е Евклидово пр-во и $a_1, \dots, a_n \in V$
такива че $a_i \perp a_j$ за $i \neq j$. Тогава:

$$|a_1 + \dots + a_n|^2 = |a_1|^2 + \dots + |a_n|^2$$

Д-во

$$|a_1 + \dots + a_n|^2 = (a_1 + \dots + a_n, a_1 + \dots + a_n) = \sum_{i=1}^{n} (a_i, a_1 + \dots + a_n) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (a_i, a_j) = \sum_{i=1}^{n} (a_i, a_i) = |a_1|^2 + \dots + |a_n|^2$$

(за $i \neq j$ $(a_i, a_j) = 0$)

Св-во // $0 \perp a$, $\forall a \in V$

③

Тв/ V - Евклидово пр-во и $a, b \in V$
Тогава: $|a-b|^2 + |a+b|^2 = 2(|a|^2 + |b|^2)$

Д-во
$$|a-b|^2 + |a+b|^2 = (a-b, a-b) + (a+b, a+b) =$$
$$= (a,a) - 2(a,b) + (b,b) + (a,a) + (b,a) + (a,b) + (b,b)$$
$$= 2(a,a) + 2(b,b) =$$
$$= 2|a|^2 + 2|b|^2$$

Св-во/ Ако $e_1, \dots, e_n$ базис на V
$a = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$; $b = b_1 e_1 + \dots + b_n e_n$
$$(a,b) = \left(\sum a_i e_i, \sum b_j e_j\right) = \sum_i \sum_j a_i b_j (e_i, e_j)$$

Тв. V е Евклидово пр-во и $a_1, \dots, a_n \in V$ като $a_i \perp a_j$ за $i \neq j$ и $a_i \neq \mathcal{O}, \forall i$. Тогава $a_1, \dots, a_n$ са линейно независими.

Д-во Нека $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ са такива, че
$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n = \mathcal{O}$ (умножаваме скаларно по a_k $(k = 1, \dots n)$)

$$(\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n, a_k) = (\mathcal{O}, a_k) = 0$$

$$\lambda_1 (a_1, a_k) + \dots + \lambda_k (a_k, a_k) + \dots + \lambda_n (a_n, a_k) = 0$$

$$\lambda_k (a_k, a_k) = 0 \quad / \ (a_k, a_k) \neq 0 \quad (a_k \neq \mathcal{O})$$

$$\lambda_k = 0$$

$\Rightarrow$ за $k = 1, \dots n \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 \dots = \lambda_n = 0$

$\Rightarrow a_1, a_2, \dots, a_n$ са ЛНЗ

I/ (Метод на Грам-Шмид)

Нека V е Евклидово пр-во и $a_1, \dots, a_n \in V$ и $a_1, \dots a_n$ са ЛНЗ. Тогава $\exists\ b_1, \dots b_n \in V$ за които е изпълнено:

1) $b_i \perp b_j$ за $i \neq j$

2) $\ell(b_1, \dots, b_k) = \ell(a_1, \dots, a_k)$, за $k = 1, 2, \dots, n$

Д-во: 1) Нека $b_1 := a_1 \Rightarrow \ell(b_1) = \ell(a_1)$, $b_1 \neq 0$

2) Търсим $b_2 := a_2 + \lambda_{21} b_1$ $(\lambda_{21} \in \mathbb{R})$

така, че $b_2 \perp b_1$, т.е.

$$(b_2, b_1) = 0 = (a_2, b_1) + \lambda_{21}(b_1, b_1)$$

$$\Rightarrow \lambda_{21} = -\frac{(a_2, b_1)}{(b_1, b_1)}$$

тогава $b_2 \in \ell(a_2, b_1) = \ell(a_1, a_2)$

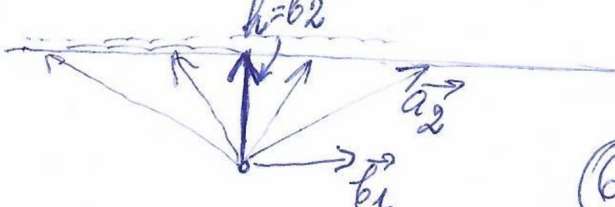
НО $a_2 = b_2 - \lambda_{21} b_1 \in \ell(b_1, b_2)$

$\Rightarrow \ell(b_1, b_2) = \ell(a_1, a_2)$

$\ell(b_1, b_2) = \ell(a_1, a_2)$

$r(b_1, b_2) = r(a_1, a_2) = 2$

$b_2 \neq 0$



Ако са определени $b_1, \dots, b_{k-1}$, така че $\left\{ \begin{array}{l} l(a_1, \dots, a_{k-1}) = \\ = l(b_1, \dots b_{k-1}) \\ b_i \perp b_j \text{ за } i \neq j \end{array} \right.$

k) Търсим $b_k = a_k + \lambda_{k1} b_1 + \dots + \lambda_{k,k-1} b_{k-1}$

$i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$

$b_i \perp b_k \Rightarrow 0 = (a_k, b_i) + \lambda_{k,1}(b_1, b_i) + \dots + \lambda_{k,i}(b_i, b_i) + \dots + \lambda_{k,k-1}(b_{k-1}, b_i)$

$0 = (a_k, b_i) + \lambda_{ki}(b_i, b_i)$

$\Rightarrow$ вземаме $\lambda_{ki} = \dfrac{-(a_k, b_i)}{(b_i, b_i)}$

$b_i \neq 0$, защото $b_1, \dots, b_{k-1}$ са ЛНЗ

По този начин се определят $\lambda_{k1}, \dots, \lambda_{k,k-1}$

$\Rightarrow b_k \perp b_1, \dots, b_k \perp b_{k-1}$

$b_k \in l(b_1, \dots, b_{k-1}, a_k) = l(a_1, \dots, a_{k-1}, a_k)$

$\Rightarrow l(b_1, \dots, b_k) \subset l(a_1, \dots, a_k)$

Но $a_k = -\lambda_{k1} b_1 - \dots - \lambda_{k,k-1} b_{k-1} + b_k \in l(b_1, \dots, b_k)$

$\Rightarrow l(a_1, \dots, a_k) \subset l(b_1, \dots, b_k)$

$\Rightarrow l(a_1, \dots, a_k) = l(b_1, \dots, b_k) \Rightarrow r(a_1, \dots, a_k) = r(b_1, \dots, b_k) = k$

$\Rightarrow b_1, \dots, b_k$ са ЛНЗ и $b_k \neq 0$

V - Евклидово пр-во

<u>Опр.</u> $b_1, \dots b_n$ базис на V, за който е изпълнено $b_i \perp b_j$ за $i \neq j \Rightarrow$ ортогонален базис

<u>Опр.</u> Ако за базиса $e_1, \dots, e_n$ на V е изпълнено $e_i \perp e_j$ за $i \neq j$ и $|e_i| = 1 \Rightarrow$ ортонормиран базис

т.е. $(e_i, e_j) = \delta_{ij} := \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$

<u>Сл.</u> Всяко крайномерно Евклидово пр-во има ортогонален базис. Има и ортонормиран базис.

$a_1 \dots a_n$ - базис $\xrightarrow[\text{Г.Ш}]{\text{м.}}$ $b_1 \dots b_n$ ортогонален базис $\longrightarrow$ $e_i = \frac{1}{|b_i|} b_i$ и $|e_i| = 1$; $e_1, \dots e_n$ ортонормиран

<u>Св-во</u> Ако $e_1, \dots e_n$ - ортонормиран базис и $a = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$; $b = b_1 e_1 + \dots + b_n e_n$

$(a, b) = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$ и $|a| = \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}$

празна стр.

Пример || $\mathbb{R}^3$ с ортонормиран базис e_1, e_2, e_3
$a_1 = (1,1,0)$, $a_2 = (1,0,1)$, $a_3 = (0,1,1)$ Да се приложи метода на Грам - Шмид.

$\boxed{b_1 = (1,1,0)}$

$\to b_1 = a_1 = (1,1,0)$

$\to b_2 = a_2 + \lambda_{21} b_1 \Rightarrow 0 = (b_2, b_1) = (a_2, b_1) + \lambda_{21}(b_1, b_1)$

$0 = 1 + \lambda_{21} \cdot 2 \Rightarrow \lambda_{21} = -\frac{1}{2}$

$b_2 = (1,0,1) - \frac{1}{2}(1,1,0) = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1)$ $\boxed{b_2' = (1,-1,2)}$

$\to b_3 = a_3 + \lambda_{31} b_1 + \lambda_{32} b_2' \Rightarrow \left| \begin{array}{l} 0 = (a_3, b_1) + \lambda_{31}(b_1, b_1) \\ 0 = (a_3, b_2') + \lambda_{32}(b_2', b_2') \end{array} \right. \to \left| \begin{array}{l} 0 = 1 + \lambda_{31} \cdot 2 \\ 0 = 1 + \lambda_{32} \cdot 6 \end{array} \right.$

$\Rightarrow b_3 = a_3 - \frac{1}{2} b_1 - \frac{1}{6} b_2'$

$b_3 = (0,1,1) - (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0) - (\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, \frac{2}{6}) = (-\frac{4}{6}, \frac{4}{6}, \frac{4}{6}) = \frac{4}{6}(-1,1,1)$

$\boxed{b_3' = (-1,1,1)}$

Забележка || При прилагане на метода на Грам-Шмид, ако се случи $a_k \in \ell(a_1, \dots, a_{k-1})$ (т.е. ЛЗ), тогава намирайки $b_k \perp b_1, \dots, b_k \perp b_{k-1}$ ще видим, че $b_k = \mathcal{O}$
$\ell(b_1, \dots, b_k) = \ell(a_1, \dots, a_{k-1})$

Опр. Нека V е Евклидово пространство и $\mathcal{U}$ подпростр-во на V, $a \in V$.

$a \perp \mathcal{U}$, когато $a \perp x, \forall x \in \mathcal{U}$

Опр. $\mathcal{U}$ - подпространство на V

$\mathcal{U}^\perp = \{a \in V \mid a \perp \mathcal{U}\} = \{a \in V \mid (a, x) = 0, \forall x \in \mathcal{U}\}$

$\mathcal{U}^\perp$ - ортогонално допълнение на $\mathcal{U}$.

Тв/ (Свойства на $\mathcal{U}^\perp$)

- $\mathcal{U}^\perp$ е подпространство
- $\mathcal{U} \subset W \Rightarrow \mathcal{U}^\perp \supset W^\perp$
- $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}^\perp = \{\mathcal{O}\}$
- $(\mathcal{U}+W)^\perp = \mathcal{U}^\perp \cap W^\perp$

Нека $a, b \in \mathcal{U}^\perp$, нека $x \in \mathcal{U}$ произволен

$(a,x)=0$, $(b,x)=0 \Rightarrow \lambda(a,x)+\mu(b,x)=0$

$\Rightarrow (\lambda a+\mu b, x)=0$

$\Rightarrow \lambda a+\mu b \in \mathcal{U}^\perp \Rightarrow \mathcal{U}^\perp$ е подпр-во

Нека $\mathcal{U} \subset W$ и $a \in W^\perp$

$\Rightarrow (a,x)=0, \forall x \in W \Rightarrow (a,x)=0, \forall x \in \mathcal{U}$

$\Rightarrow a \in \mathcal{U}^\perp \Rightarrow W^\perp \subset \mathcal{U}^\perp$

Нека $a \in \mathcal{U} \cap \mathcal{U}^\perp$

$\Rightarrow (a,a)=0 \Rightarrow a=\mathcal{O} \Rightarrow \mathcal{U} \cap \mathcal{U}^\perp = \{\mathcal{O}\}$

Нека $a \in (\mathcal{U}+W)^\perp$

$x \in \mathcal{U} \subset \mathcal{U}+W \Rightarrow (a,x)=0 \Rightarrow a \in \mathcal{U}^\perp$

$y \in W \subset \mathcal{U}+W \Rightarrow (a,y)=0 \Rightarrow a \in W^\perp$

$\Rightarrow (\mathcal{U}+W)^\perp \subset \mathcal{U}^\perp \cap W^\perp$

$b \in \mathcal{U}^\perp \cap W^\perp$, $z = \underset{\in \mathcal{U}}{x} + \underset{\in W}{y} \in \mathcal{U}+W \Rightarrow (b,z) = (b, x+y) = (b,x)+(b,y) = 0 \Rightarrow b \in (\mathcal{U}+W)^\perp$

$\Rightarrow \mathcal{U}^\perp \cap W^\perp \subset (\mathcal{U}+W)^\perp \Rightarrow (\mathcal{U}+W)^\perp = \mathcal{U}^\perp \cap W^\perp$

T/ Нека V е крайномерно Евклидово пространство $\mathcal{U}$ - подпространство на V. Тогава:

a) $\dim \mathcal{U}^\perp = \dim V - \dim \mathcal{U}$

б) $V = \mathcal{U} \oplus \mathcal{U}^\perp$; в) $(\mathcal{U}^\perp)^\perp = \mathcal{U}$

Д-во/ Нека $e_1, \dots e_n$ ортонормиран базис на V

Нека $a_1, \dots, a_k$ - базис на $\mathcal{U}$

$a_i = a_{i1}e_1 + \dots + a_{in}e_n$

Нека $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \in \mathcal{U}^\perp$

$$\begin{array}{l} (a_1, x) = 0 \Rightarrow \\ \vdots \quad (*) \\ (a_k, x) = 0 \Rightarrow \end{array} \left| \begin{array}{l} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots \\ a_{k1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n = 0 \end{array} \right.$$

(*) има матрица A, $r(A) = k$

Всяко решение на (*) е от $\mathcal{U}^\perp$

Ако $\tilde{x}$ е произволно решение на (*)

$(a_1, \tilde{x}) = 0, \dots = (a_k, \tilde{x}) = 0$

$\Rightarrow (\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k, \tilde{x}) = \lambda_1 0 + \dots + \lambda_k 0 = 0$

Нека W е решение на (*)

$\Rightarrow a_1 \perp W, \dots, a_k \perp W \Rightarrow$

$b = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k \perp W$

$\Rightarrow \mathcal{U}^\perp = W \Rightarrow \dim \mathcal{U}^\perp = n - r(A)$

$\Rightarrow \dim \mathcal{U}^\perp = \dim V - \dim \mathcal{U}$

б) $\dim(\mathcal{U} + \mathcal{U}^\perp) = \dim \mathcal{U} + \dim \mathcal{U}^\perp - 0$

$\Rightarrow \dim(\mathcal{U} + \mathcal{U}^\perp) = \dim V$

$\Rightarrow \mathcal{U} + \mathcal{U}^\perp = V$ и $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}^\perp = \{0\}$

$\mathcal{U} \oplus \mathcal{U}^\perp = V$

в) Нека $T = (\mathcal{U}^\perp)^\perp$

ако $a \in \mathcal{U} \Rightarrow \forall x \in \mathcal{U}^\perp : (a, x) = 0$

$\Rightarrow a \in (\mathcal{U}^\perp)^\perp \Rightarrow \mathcal{U} \subset (\mathcal{U}^\perp)^\perp$

$\dim (\mathcal{U}^\perp)^\perp = n - (\dim \mathcal{U}^\perp) =$

$= n - (n - \dim \mathcal{U}) = \dim \mathcal{U}$

$\Rightarrow \mathcal{U} = (\mathcal{U}^\perp)^\perp$

Пример // $\mathbb{R}^3$ със стандартен ортонормиран базис
$\mathcal{U} = \ell(a_1, a_2)$ $a_1 = (1, 2, 7)$, $a_2 = (3, 5, -4)$

Р-е Нека $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{U}^{\perp}$

$$\left.\begin{array}{l}(a_1, x) = 0 \\ (a_2, x) = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \left|\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 0\end{array}\right. \quad \begin{pmatrix}1 & 2 & 7 \\ 3 & 5 & -4\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 2 & 7 \\ 0 & -1 & -25\end{pmatrix}$$

x_1	x_2	x_3
43	-25	1

$\Rightarrow c = (43, -25, 1)$
$\mathcal{U}^{\perp} = \ell(c)$

V - крайномерно Евклидово пр-во
$V = \mathcal{U} \oplus \mathcal{U}^{\perp} \Rightarrow a \in V$, $\exists !\ a_0 \in \mathcal{U}$, $h \in \mathcal{U}^{\perp}$
$a = a_0 + h$ a_0 - проекция в/у и
h - перпендикуляр от a към $\mathcal{U}$

Св-во // Ако $u \in \mathcal{U}$ произволен $u \neq u_0$
тогава $|h| = |a - a_0| < |a - u|$

Д-во $|a - u|^2 = |\underbrace{(a - a_0)}_{h} + \underbrace{(a_0 - u)}_{= y \in \mathcal{U}}|^2 = |h|^2 + \overset{\neq 0}{|a_0 - u|^2} \Rightarrow |a - u|^2 > |h|^2$

$h \perp y \Rightarrow (h, y) = 0$

празна страница

празна страница