Лекция IV - Дискретни разпределения

Лекция IV - Дискретни разпределения

- Пораждаща функция
- Разпределение на Бернули
- Биномно разпределение
- Геометрично разпределение
- Отрицателно биномно разпределение

Пораждаща функция

Много често се разглеждат случайни величини, чиито стойности са естествени числа. Такива са тези сл.в. които броят някакви обекти, например: “броя на шестиците при 10 хвърляния на зар” или “броя на опитите до падането на шестица” и т.н. За подобни случайни величини е удобно да се въведе така наречената пораждаща функция.

Пораждаща функция

Много често се разглеждат случайни величини, чиито стойности са естествени числа. Такива са тези сл.в. които броят някакви обекти, например: “броя на шестиците при 10 хвърляния на зар” или “броя на опитите до падането на шестица” и т.н. За подобни случайни величини е удобно да се въведе така наречената пораждаща функция.

Дефиниция - Пораждаща функция

Нека X е случайна величина, чийто стойности са цели положителни числа. Пораждаща функция на X наричаме:

$$g_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{P}(X = k)\, s^k$$

Пораждаща функция

Много често се разглеждат случайни величини, чиито стойности са естествени числа. Такива са тези сл.в. които броят някакви обекти, например: "броя на шестиците при 10 хвърляния на зар" или "броя на опитите до падането на шестица" и т.н. За подобни случайни величини е удобно да се въведе така наречената пораждаща функция.

Дефиниция - Пораждаща функция

Нека X е случайна величина, чийто стойности са цели положителни числа. Пораждаща функция на X наричаме:

$$g_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{P}(X = k)\, s^k$$

Пораждаща функция на X е просто полином, в който пред k-тата степен на s стои вероятността $\mathrm{P}(X = k)$.

Ако случайната величина взима само краен брой стойности, то сумата е крайна и пораждащата функция е дефинирана за всяко s.

Ако стойностите на сл.в. X са изброим брой, то е сигурно, че $g_X(1) = 1$, тъй като сумата от вероятностите е равна на единица. От тук следва, че поне за $|s| \leq 1$ пораждащата функция със сигурност е сходяща, т.е. съществува. Това е достатъчно за нашите цели, така че по-нататък няма да разглеждаме въпроса за сходимостта на пораждащите функции.

Пораждаща функция

Пример

Нека сл.в. X е точките паднали се при хвърлянето на зар, тогава:

X	1	2	3	4	5	6
P	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

За пораждащата функция на X получаваме:

$$g_X(s) = \frac{1}{6}s + \frac{1}{6}s^2 + \ldots + \frac{1}{6}s^6 = \frac{s}{6}\left(1 + s + \ldots + s^5\right) = \frac{s(1-s^6)}{6(1-s)}$$

В последното равенство приложихме формулата за сума на геометрична прогресия.

Пораждаща функция

Пример

Нека сл.в. X е точките паднали се при хвърлянето на зар, тогава:

X	1	2	3	4	5	6
P	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

За пораждащата функция на X получаваме:

$$g_X(s) = \frac{1}{6}s + \frac{1}{6}s^2 + \ldots + \frac{1}{6}s^6 = \frac{s}{6}\left(1 + s + \ldots + s^5\right) = \frac{s(1-s^6)}{6(1-s)}$$

В последното равенство приложихме формулата за сума на геометрична прогресия.

Пораждащите функциии могат да бъдат използвани за намирането на суми от случайни величини.

Твърдение - Пораждаща функция на сума

Нека X и Y са независими сл.в. и техните пораждащи функции съществуват, тогава

$$g_{X+Y}(s) = g_X(s)\, g_Y(s)$$

Пораждаща функция

Док. Ще образуваме произведението $g_X(s)g_Y(s)$ и ще пренаредим получения ред по степените на s, т.е. ще пресметнем коефициента пред s^k.

$$g_X(s)g_Y(s) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{P}(X = i)\, s^i \sum_{j=0}^{\infty} \mathrm{P}(Y = j)\, s^j =$$

Пораждаща функция

Док. Ще образуваме произведението $g_X(s)g_Y(s)$ и ще пренаредим получения ред по степените на s, т.е. ще пресметнем коефициента пред s^k.

$$g_X(s)g_Y(s) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathsf{P}(X = i)\, s^i \sum_{j=0}^{\infty} \mathsf{P}(Y = j)\, s^j = \qquad (\star)$$

$$= \mathsf{P}(X = 0)\mathsf{P}(Y = 0)s^0 + (\mathsf{P}(X = 0)\mathsf{P}(Y = 1) + \mathsf{P}(X = 1)\mathsf{P}(Y = 0))\, s^1 + \dots$$

$$\dots + \left(\sum_{i=0}^{k} \mathsf{P}(X = i)\mathsf{P}(Y = k - i)\right) s^k + \dots =$$

Пораждаща функция

Док. Ще образуваме произведението $g_X(s)g_Y(s)$ и ще пренаредим получения ред по степените на s, т.е. ще пресметнем коефициента пред s^k.

$$g_X(s)g_Y(s) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{P}(X=i)\, s^i \sum_{j=0}^{\infty} \mathrm{P}(Y=j)\, s^j = \qquad (\star)$$

$$= \mathrm{P}(X=0)\mathrm{P}(Y=0)s^0 + (\mathrm{P}(X=0)\mathrm{P}(Y=1) + \mathrm{P}(X=1)\mathrm{P}(Y=0))\, s^1 + \dots$$

$$\dots + \left(\sum_{i=0}^{k} \mathrm{P}(X=i)\mathrm{P}(Y=k-i)\right) s^k + \dots = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{k} \mathrm{P}(X=i)\,\mathrm{P}(Y=k-i)\right) s^k$$

Пораждаща функция

Док. Ще образуваме произведението $g_X(s)g_Y(s)$ и ще пренаредим получения ред по степените на s, т.е. ще пресметнем коефициента пред s^k.

$$g_X(s)g_Y(s) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{P}(X = i)\, s^i \, \sum_{j=0}^{\infty} \mathrm{P}(Y = j)\, s^j = \qquad (\star)$$

$$= \mathrm{P}(X = 0)\mathrm{P}(Y = 0)s^0 + (\mathrm{P}(X = 0)\mathrm{P}(Y = 1) + \mathrm{P}(X = 1)\mathrm{P}(Y = 0))\, s^1 + \dots$$

$$\dots + \left(\sum_{i=0}^{k} \mathrm{P}(X = i)\mathrm{P}(Y = k - i)\right) s^k + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{k} \mathrm{P}(X = i)\, \mathrm{P}(Y = k - i)\right) s^k$$

X и Y са независими случайни величини, тогава

$$\mathrm{P}(X = i)\, \mathrm{P}(Y = k - i) = \mathrm{P}(X = i, Y = k - i)$$

Пораждаща функция

Док. Ще образуваме произведението $g_X(s)g_Y(s)$ и ще пренаредим получения ред по степените на s, т.е. ще пресметнем коефициента пред s^k.

$$g_X(s)g_Y(s) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathsf{P}(X=i)\, s^i \sum_{j=0}^{\infty} \mathsf{P}(Y=j)\, s^j = \qquad (\star)$$

$$= \mathsf{P}(X=0)\mathsf{P}(Y=0)s^0 + \left(\mathsf{P}(X=0)\mathsf{P}(Y=1) + \mathsf{P}(X=1)\mathsf{P}(Y=0)\right) s^1 + \dots$$

$$\dots + \left(\sum_{i=0}^{k} \mathsf{P}(X=i)\mathsf{P}(Y=k-i)\right) s^k + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{k} \mathsf{P}(X=i)\, \mathsf{P}(Y=k-i)\right) s^k$$

X и Y са независими случайни величини, тогава

$$\mathsf{P}(X=i)\, \mathsf{P}(Y=k-i) = \mathsf{P}(X=i, Y=k-i) =$$

ако $X=i$ и $Y=k-i$, то явно $X+Y=k$

$$= \mathsf{P}(X=i, X+Y=k)$$

Пораждаща функция

Док. Ще образуваме произведението $g_X(s)g_Y(s)$ и ще пренаредим получения ред по степените на s, т.е. ще пресметнем коефициента пред s^k.

$$g_X(s)g_Y(s) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{P}(X=i)\, s^i \sum_{j=0}^{\infty} \mathrm{P}(Y=j)\, s^j = \qquad (\star)$$

$$= \mathrm{P}(X=0)\mathrm{P}(Y=0)s^0 + (\mathrm{P}(X=0)\mathrm{P}(Y=1) + \mathrm{P}(X=1)\mathrm{P}(Y=0))\, s^1 + \dots$$

$$\dots + \left(\sum_{i=0}^{k} \mathrm{P}(X=i)\mathrm{P}(Y=k-i)\right) s^k + \dots = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{k} \mathrm{P}(X=i)\,\mathrm{P}(Y=k-i)\right) s^k$$

X и Y са независими случайни величини, тогава

$$\mathrm{P}(X=i)\,\mathrm{P}(Y=k-i) = \mathrm{P}(X=i, Y=k-i) =$$

ако $X=i$ и $Y=k-i$, то явно $X+Y=k$

$$= \mathrm{P}(X=i, X+Y=k) =$$

Сега, от формулата за произведение на вероятности получаваме

$$= \mathrm{P}(X=i)\,\mathrm{P}(X+Y=k|X=i)$$

Пораждаща функция

Ще пресметнем вътрешната сума в последното равенство на ($\star$).

$$\sum_{i=0}^{k} \mathsf{P}(X = i)\,\mathsf{P}(Y = k - i) = \sum_{i=0}^{k} \mathsf{P}(X = i)\,\mathsf{P}(X + Y = k \mid X = i)$$

Пораждаща функция

Ще пресметнем вътрешната сума в последното равенство на $(\star)$.

$$\sum_{i=0}^{k} \mathrm{P}(X = i)\,\mathrm{P}(Y = k - i) = \sum_{i=0}^{k} \mathrm{P}(X = i)\,\mathrm{P}(X + Y = k \mid X = i) =$$

Пораждащи функции се разглеждат само за неотрицателни случайни величини, т.е. $Y \geq 0$, тогава за $k < i$ е изпълнено $\mathrm{P}(X + Y = k \mid X = i) = 0$. Следователно, можем да разширим границите на сумата, тъй като след k всички следващи събираеми ще са нула.

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{P}(X = i)\,\mathrm{P}(X + Y = k \mid X = i) =$$

Пораждаща функция

Ще пресметнем вътрешната сума в последното равенство на $(\star)$.

$$\sum_{i=0}^{k} \mathrm{P}(X = i)\,\mathrm{P}(Y = k - i) = \sum_{i=0}^{k} \mathrm{P}(X = i)\,\mathrm{P}(X + Y = k \mid X = i) =$$

Пораждащи функции се разглеждат само за неотрицателни случайни величини, т.е. $Y \geq 0$, тогава за $k < i$ е изпълнено $\mathrm{P}(X + Y = k \mid X = i) = 0$. Следователно, можем да разширим границите на сумата, тъй като след k всички следващи събираеми ще са нула.

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{P}(X = i)\,\mathrm{P}(X + Y = k \mid X = i) = P(X + Y = k)$$

В последното равенство приложихме формулата за пълна вероятност с хипотези $H_i = \{X = i\}$.

Пораждаща функция

Ще пресметнем вътрешната сума в последното равенство на $(\star)$.

$$\sum_{i=0}^{k} \mathrm{P}(X = i)\, \mathrm{P}(Y = k - i) = \sum_{i=0}^{k} \mathrm{P}(X = i)\, \mathrm{P}(X + Y = k \mid X = i) =$$

Пораждащи функции се разглеждат само за неотрицателни случайни величини, т.е. $Y \geq 0$, тогава за $k < i$ е изпълнено $\mathrm{P}(X + Y = k \mid X = i) = 0$. Следователно, можем да разширим границите на сумата, тъй като след k всички следващи събираеми ще са нула.

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{P}(X = i)\, \mathrm{P}(X + Y = k \mid X = i) = P(X + Y = k)$$

В последното равенство приложихме формулата за пълна вероятност с хипотези $H_i = \{X = i\}$.

Заместваме този резултат в $(\star)$ и получаваме търсената пораждаща функция на случайната величина $X + Y$.

$$g_X(s) g_Y(s) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X + Y = k)\, s^k.$$

Тази сума е точно дефиниция за функцията $g_{X+Y}(s)$. $\square$

Пораждаща функция

По естествен начин този резултат се обобщава за няколко случайни величини. Разбира се, ще поискаме случайните величини да са независими. Независимостта при повече от две случайни величини се дефинира, аналогично на независимостта в съвкупност при множество от събития:

Дефиниция

Казваме че дискретните случайни величини $X_1, \ldots, X_n$ са независими, ако за всяко s, и всеки набор от индекси $1 \leq j_1, j_2, \ldots, j_s \leq n$ и за произволни реални числа $x_1, \ldots, x_s$ е изпълнено:

$$\mathrm{P}\left(X_{j_1} = x_1, X_{j_2} = x_2, \ldots, X_{j_s} = x_s\right) = \mathrm{P}\left(X_{j_1} = x_1\right)\ \mathrm{P}\left(X_{j_2} = x_2\right) \ldots \mathrm{P}\left(X_{j_s} = x_s\right)$$

Пораждаща функция

По естествен начин този резултат се обобщава за няколко случайни величини. Разбира се, ще поискаме случайните величини да са независими. Независимостта при повече от две случайни величини се дефинира, аналогично на независимостта в съвкупност при множество от събития:

Дефиниция

Казваме че дискретните случайни величини $X_1, \dots, X_n$ са независими, ако за всяко s, и всеки набор от индекси $1 \le j_1, j_2, \dots, j_s \le n$ и за произволни реални числа $x_1, \dots, x_s$ е изпълнено:

$$\mathrm{P}\left(X_{j_1} = x_1, X_{j_2} = x_2, \dots, X_{j_s} = x_s\right) = \mathrm{P}\left(X_{j_1} = x_1\right)\, \mathrm{P}\left(X_{j_2} = x_2\right) \dots \mathrm{P}\left(X_{j_s} = x_s\right)$$

Сега можем да изведем формула за пораждащата функция на сума от произволен брой случайни величини.

Твърдение

Нека $X_1, \dots X_n$ са независими случайни величини, който взимат цели неотрицателни стойности, тогава

$$g_{X_1 + X_2 + \dots X_n}(s) = g_{X_1}(s)\, g_{X_2}(s) \dots g_{X_n}(s)$$

Пораждаща функция

По естествен начин този резултат се обобщава за няколко случайни величини. Разбира се, ще поискаме случайните величини да са независими. Независимостта при повече от две случайни величини се дефинира, аналогично на независимостта в съвкупност при множество от събития:

Дефиниция

Казваме че дискретните случайни величини $X_1, \dots, X_n$ са независими, ако за всяко s, и всеки набор от индекси $1 \leq j_1, j_2, \dots, j_s \leq n$ и за произволни реални числа $x_1, \dots, x_s$ е изпълнено:

$$\mathsf{P}\left(X_{j_1} = x_1, X_{j_2} = x_2, \dots, X_{j_s} = x_s\right) = \mathsf{P}\left(X_{j_1} = x_1\right)\, \mathsf{P}\left(X_{j_2} = x_2\right) \dots \mathsf{P}\left(X_{j_s} = x_s\right)$$

Сега можем да изведем формула за пораждащата функция на сума от произволен брой случайни величини.

Твърдение

Нека $X_1, \dots X_n$ са независими случайни величини, който взимат цели неотрицателни стойности, тогава

$$g_{X_1+X_2+\dots X_n}(s) = g_{X_1}(s)\, g_{X_2}(s) \dots g_{X_n}(s)$$

Доказателството на това твърдение се извършва по индукция.

Пораждаща функция

Пример

Хвърляме 10 зара. Ще намерим вероятността сумата от падналите се точки да бъде точно 19.

Директното изчисляване на тази задача е твърде трудоемко. То би означавало да се пресметнат всички начини числото 19 да се представи като сума на 10 цели числа в диапазона от 1 до 6. Затова ще използваме възможностите, който ни дават пораждащите функции.

Пораждаща функция

Пример

Хвърляме 10 зара. Ще намерим вероятността сумата от падналите се точки да бъде точно 19.

Директното изчисляване на тази задача е твърде трудоемко. То би означавало да се пресметнат всички начини числото 19 да се представи като сума на 10 цели числа в диапазона от 1 до 6. Затова ще използваме възможностите, който ни дават пораждащите функции.

С X_i, $i = 1 \ldots 10$ ще означим точките паднали се върху i-тия зар. В предишния пример изведохме пораждащата функция на тези случайни величини

$$g_{X_i}(s) = \frac{s(1-s^6)}{6(1-s)}.$$

Пораждаща функция

Пример

Хвърляме 10 зара. Ще намерим вероятността сумата от падналите се точки да бъде точно 19.

Директното изчисляване на тази задача е твърде трудоемко. То би означавало да се пресметнат всички начини числото 19 да се представи като сума на 10 цели числа в диапазона от 1 до 6. Затова ще използваме възможностите, който ни дават пораждащите функции.

С X_i, $i = 1 \dots 10$ ще означим точките паднали се върху i-тия зар. В предишния пример изведохме пораждащата функция на тези случайни величини

$$g_{X_i}(s) = \frac{s(1-s^6)}{6(1-s)}.$$

Нека Y е сумата от падналите се точки, т.е. $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_{10}$. Точките паднали се върху един зар по никакъв начин не влияят върху точките паднали се върху друг. Следователно, случайните величини X_i са независими. Тогава, пораждащата функция на Y е произведение от пораждащите функции на X_i, $i = 1 \dots 10$.

Пораждаща функция

Пример

Хвърляме 10 зара. Ще намерим вероятността сумата от падналите се точки да бъде точно 19.

Директното изчисляване на тази задача е твърде трудоемко. То би означавало да се пресметнат всички начини числото 19 да се представи като сума на 10 цели числа в диапазона от 1 до 6. Затова ще използваме възможностите, който ни дават пораждащите функции.

С X_i, $i = 1 \ldots 10$ ще означим точките паднали се върху i-тия зар. В предишния пример изведохме пораждащата функция на тези случайни величини

$$g_{X_i}(s) = \frac{s(1-s^6)}{6(1-s)}.$$

Нека Y е сумата от падналите се точки, т.е. $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_{10}$. Точките паднали се върху един зар по никакъв начин не влияят върху точките паднали се върху друг. Следователно, случайните величини X_i са независими. Тогава, пораждащата функция на Y е произведение от пораждащите функции на X_i, $i = 1 \ldots 10$.

$$g_Y(s) = \prod_{i=1}^{10} g_{X_i}(s) = \prod_{i=1}^{10} \left(\frac{s(1-s^6)}{6(1-s)} \right) = \frac{s^{10}(1-s^6)^{10}}{6^{10}(1-s)^{10}}$$

Пораждаща функция

Пример

Съгласно дефиницията на пораждащата функция търсената вероятност ще бъде коефициента пред 19-тата степен на s. За да пресметнем коефициента на s^{19} ще развием тази функция по степените на s.

Пример

Съгласно дефиницията на пораждащата функция търсената вероятност ще бъде коефициента пред 19-тата степен на s. За да пресметнем коефициента на s^{19} ще развием тази функция по степените на s.

За да преубразуваме числителя, ще използваме формулата за бином на Нютон:

$$(1-a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-a)^k$$

Пораждаща функция

Пример

Съгласно дефиницията на пораждащата функция търсената вероятност ще бъде коефициента пред 19-тата степен на s. За да пресметнем коефициента на s^{19} ще развием тази функция по степените на s.

За да преубразуваме числителя, ще използваме формулата за бином на Нютон:

$$(1-a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-a)^k$$

За знаменателят ще използваме формулата за отрицателен бином:

$$(1-a)^{-n} = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n+j-1}{j} a^j$$

Обърнете внимание, че в последната сума има произволно високи степени на a.

Пораждаща функция

Пример

Съгласно дефиницията на пораждащата функция търсената вероятност ще бъде коефициента пред 19-тата степен на s. За да пресметнем коефициента на s^{19} ще развием тази функция по степените на s.

За да преубразуваме числителя, ще използваме формулата за бином на Нютон:

$$(1-a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-a)^k$$

За знаменателят ще използваме формулата за отрицателен бином:

$$(1-a)^{-n} = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n+j-1}{j} a^j$$

Обърнете внимание, че в последната сума има произволно високи степени на a.

Формулата за отрицателен бином се доказва с развитие в ред на Тейлор на функцията $(1-a)^{-n}$ около точката $a=0$. Съществува и интересно комбинаторно доказателство, но изложението му е извън рамките на тези записки.

Пораждаща функция

Пример

По този начин за пораждащата функция на Y получаваме:

$$g_Y(s) = \frac{s^{10}}{6^{10}} \left[\sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} (-s^6)^k \right] \sum_{j=0}^{\infty} \binom{9+j}{j} s^j$$

Пораждаща функция

Пример

По този начин за пораждащата функция на Y получаваме:

$$g_Y(s) = \frac{s^{10}}{6^{10}} \left[\sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} (-s^6)^k \right] \sum_{j=0}^{\infty} \binom{9+j}{j} s^j =$$

$$= \frac{s^{10}}{6^{10}} \left[1 - \binom{10}{1} s^6 + \binom{10}{2} s^{12} + \dots \right] \sum_{j=0}^{\infty} \binom{9+j}{j} s^j$$

Пораждаща функция

Пример

По този начин за пораждащата функция на Y получаваме:

$$g_Y(s) = \frac{s^{10}}{6^{10}}\left[\sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}(-s^6)^k\right]\sum_{j=0}^{\infty}\binom{9+j}{j}s^j =$$

$$= \frac{s^{10}}{6^{10}}\left[1-\binom{10}{1}s^6+\binom{10}{2}s^{12}+\ldots\right]\sum_{j=0}^{\infty}\binom{9+j}{j}s^j$$

Пред сумите стои s^{10}, следователно от произведението на двете суми трябва да получим s^9. Това може да стане само по два начина. Да вземем единица от първата сума и да я умножим с s^9 от втората сума. Или да вземем s^6 от първата и s^3 от втората сума. Останалите събираеми в първата сума са със степен равна или по-голяма от 12, тъй че няма как да се използват.

Пораждаща функция

Пример

По този начин за пораждащата функция на Y получаваме:

$$g_Y(s) = \frac{s^{10}}{6^{10}}\left[\sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}(-s^6)^k\right]\sum_{j=0}^{\infty}\binom{9+j}{j}s^j =$$

$$= \frac{s^{10}}{6^{10}}\left[1-\binom{10}{1}s^6+\binom{10}{2}s^{12}+\dots\right]\sum_{j=0}^{\infty}\binom{9+j}{j}s^j$$

Пред сумите стои s^{10}, следователно от произведението на двете суми трябва да получим s^9. Това може да стане само по два начина. Да вземем единица от първата сума и да я умножим с s^9 от втората сума. Или да вземем s^6 от първата и s^3 от втората сума. Останалите събираеми в първата сума са със степен равна или по-голяма от 12, тъй че няма как да се използват.

Окончателно, за търсената вероятност получаваме

$$\mathrm{P}(Y=19) = coeff_{s^{19}}\{g_Y(s)\} = ?$$

Пораждаща функция

Пример

По този начин за пораждащата функция на Y получаваме:

$$g_Y(s) = \frac{s^{10}}{6^{10}} \left[\sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} (-s^6)^k \right] \sum_{j=0}^{\infty} \binom{9+j}{j} s^j =$$

$$= \frac{s^{10}}{6^{10}} \left[1 - \binom{10}{1} s^6 + \binom{10}{2} s^{12} + \ldots \right] \sum_{j=0}^{\infty} \binom{9+j}{j} s^j$$

Пред сумите стои s^{10}, следователно от произведението на двете суми трябва да получим s^9. Това може да стане само по два начина. Да вземем единица от първата сума и да я умножим с s^9 от втората сума. Или да вземем s^6 от първата и s^3 от втората сума. Останалите събираеми в първата сума са със степен равна или по-голяма от 12, тъй че няма как да се използват.

Окончателно, за търсената вероятност получаваме

$$\mathrm{P}(Y = 19) = coeff_{s^{19}} \{g_Y(s)\} = ??$$

Пораждаща функция

Пример

По този начин за пораждащата функция на Y получаваме:

$$g_Y(s) = \frac{s^{10}}{6^{10}} \left[\sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} (-s^6)^k \right] \sum_{j=0}^{\infty} \binom{9+j}{j} s^j =$$

$$= \frac{s^{10}}{6^{10}} \left[1 - \binom{10}{1} s^6 + \binom{10}{2} s^{12} + \ldots \right] \sum_{j=0}^{\infty} \binom{9+j}{j} s^j$$

Пред сумите стои s^{10}, следователно от произведението на двете суми трябва да получим s^9. Това може да стане само по два начина. Да вземем единица от първата сума и да я умножим с s^9 от втората сума. Или да вземем s^6 от първата и s^3 от втората сума. Останалите събираеми в първата сума са със степен равна или по-голяма от 12, тъй че няма как да се използват.

Окончателно, за търсената вероятност получаваме

$$\mathrm{P}(Y = 19) = coeff_{s^{19}} \{g_Y(s)\} = \frac{1}{6^{10}} \left[\binom{18}{9} - \binom{10}{1}\binom{12}{3} \right]$$

Пораждаща функция

Сега ще покажем, как пораждащите функции могат да бъдат използвани за намирането на математическото очакване и дисперсията на една случайна величина.

Пораждаща функция

Сега ще покажем, как пораждащите функции могат да бъдат използвани за намирането на математическото очакване и дисперсията на една случайна величина.

Твърдение

Нека сл.в. X е неотрицателна, целочислена и $\mathsf{E}X$ съществува, тогава:

$$\mathsf{E}X = g'_X(1)$$

Пораждаща функция

Сега ще покажем, как пораждащите функции могат да бъдат използвани за намирането на математическото очакване и дисперсията на една случайна величина.

Твърдение

Нека сл.в. X е неотрицателна, целочислена и $\mathsf{E}X$ съществува, тогава:

$$\mathsf{E}X = g_X'(1)$$

Док. Пораждащата функция е полином по s

$$g_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathsf{P}(X = k)\, s^k$$

Ще диференцираме, след което ще положим $s = 1$

Пораждаща функция

Сега ще покажем, как пораждащите функции могат да бъдат използвани за намирането на математическото очакване и дисперсията на една случайна величина.

Твърдение

Нека сл.в. X е неотрицателна, целочислена и $\mathsf{E}X$ съществува, тогава:

$$\mathsf{E}X = g_X'(1)$$

Док. Пораждащата функция е полином по s

$$g_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathsf{P}(X = k)\, s^k$$

Ще диференцираме, след което ще положим $s = 1$

$$g_X'(1) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}(X = k)\, k\, s^{k-1}\Big|_{s=1} = \sum_{k=1}^{\infty} k\, \mathsf{P}(X = k) = \mathsf{E}X$$

□

Пораждаща функция

Твърдение

Нека сл.в. X е неотрицателна, целочислена и $\mathrm{D}X$ съществува, тогава:

$$\mathrm{D}X = g_X''(1) + g_X'(1) - \left(g_X'(1)\right)^2$$

Пораждаща функция

Твърдение

Нека сл.в. X е неотрицателна, целочислена и $\mathrm{D}X$ съществува, тогава:

$$\mathrm{D}X = g_X''(1) + g_X'(1) - \left(g_X'(1)\right)^2$$

Док. Ще пресметнем втората производна на $g_X(s)$.

$$g_X''(1) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{P}(X = k)\, k(k-1)\, s^{k-2} \Big|_{s=1} = \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)\, \mathrm{P}(X = k)$$

Пораждаща функция

Твърдение

Нека сл.в. X е неотрицателна, целочислена и $\mathrm{D}X$ съществува, тогава:

$$\mathrm{D}X = g_X''(1) + g_X'(1) - \left(g_X'(1)\right)^2$$

Док. Ще пресметнем втората производна на $g_X(s)$.

$$g_X''(1) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{P}(X=k)\, k(k-1)\, s^{k-2}\Big|_{s=1} = \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)\, \mathrm{P}(X=k)$$

Последната сума, съгласно формулата за очакване на функция от случайна величина е равна на $\mathrm{E}X(X-1)$.

$$g_X''(1) = \mathrm{E}\left(X(X-1)\right) = \mathrm{E}X^2 - \mathrm{E}X$$

Пораждаща функция

Твърдение

Нека сл.в. X е неотрицателна, целочислена и $\mathrm{D}X$ съществува, тогава:

$$\mathrm{D}X = g_X''(1) + g_X'(1) - \left(g_X'(1)\right)^2$$

Док. Ще пресметнем втората производна на $g_X(s)$.

$$g_X''(1) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{P}(X = k)\, k(k-1)\, s^{k-2}\Big|_{s=1} = \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)\, \mathrm{P}(X = k)$$

Последната сума, съгласно формулата за очакване на функция от случайна величина е равна на $\mathrm{E}X(X-1)$.

$$g_X''(1) = \mathrm{E}\left(X(X-1)\right) = \mathrm{E}X^2 - \mathrm{E}X$$

От тук лесно можем да изразим $\mathrm{E}X^2$:

$$\mathrm{E}X^2 = g_X''(1) + \mathrm{E}X = g_X''(1) + g_X'(1).$$

Твърдение

Нека сл.в. X е неотрицателна, целочислена и $\mathrm{D}X$ съществува, тогава:

$$\mathrm{D}X = g_X''(1) + g_X'(1) - \left(g_X'(1)\right)^2$$

Док. Ще пресметнем втората производна на $g_X(s)$.

$$g_X''(1) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{P}(X=k)\, k(k-1)\, s^{k-2}\Big|_{s=1} = \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)\, \mathrm{P}(X=k)$$

Последната сума, съгласно формулата за очакване на функция от случайна величина е равна на $\mathrm{E}X(X-1)$.

$$g_X''(1) = \mathrm{E}\left(X(X-1)\right) = \mathrm{E}X^2 - \mathrm{E}X$$

От тук лесно можем да изразим $\mathrm{E}X^2$:

$$\mathrm{E}X^2 = g_X''(1) + \mathrm{E}X = g_X''(1) + g_X'(1).$$

Окончателно, за дисперсията получаваме:

$$\mathrm{D}X = \mathrm{E}X^2 - (\mathrm{E}X)^2 = g_X''(1) + g_X'(1) - \left(g_X'(1)\right)^2 \qquad \square$$

Пораждаща функция

Задача

Хвърлят се три сини и три червени зара. Каква е вероятността сумата от точките върху сините и червените зарове да съвпада?

Пораждаща функция

Задача

Хвърлят се три сини и три червени зара. Каква е вероятността сумата от точките върху сините и червените зарове да съвпада?

Случайните величини, които се срещат често, са добре описани, класифицирани са, свойствата им са известни. По нататък в тази лекция ще разгледаме някой от най-често срещаните дискретни случайни величини. Но преди това, ще опищем една популярна схема на извършване на опити.

Схема на Бернули

“Опит на Бернули” (Якоб Бернули е швейцарски математик) наричаме опит, при който има само две възможности - „успех“ или “неуспех”. Стандартният пример е хвърляне на монета.

Схема на Бернули

“Опит на Бернули” (Якоб Бернули е швейцарски математик) наричаме опит, при който има само две възможности - „успех“ или “неуспех”. Стандартният пример е хвърляне на монета.

Дефиниция - Схема на Бернули

Извършват се последователни, независими опити на Бернули. Вероятността за успех на всеки опит е една и съща, ще я означим с p. Съответно вероятността за неуспех $q = 1 - p$ също е еднаква за отделните опити. Няма ограничение за броя на опитите.

Схема на Бернули

"Опит на Бернули" (Якоб Бернули е швейцарски математик) наричаме опит, при който има само две възможности - „успех" или "неуспех". Стандартният пример е хвърляне на монета.

Дефиниция - Схема на Бернули

Извършват се последователни, независими опити на Бернули. Вероятността за успех на всеки опит е една и съща, ще я означим с p. Съответно вероятността за неуспех $q = 1 - p$ също е еднаква за отделните опити. Няма ограничение за броя на опитите.

Ще обърнем внимание, за да попаднем в схема на Бернули са съществени две условия - опитите да са независими и вероятността да не се мени от опит на опит. Например, ако хвърлим 100 зара и шестицата е успех, или ако 100 пъти последователно хвърляме зар и шестицата е успех.

Схема на Бернули

"Опит на Бернули" (Якоб Бернули е швейцарски математик) наричаме опит, при който има само две възможности - „успех" или "неуспех". Стандартният пример е хвърляне на монета.

Дефиниция - Схема на Бернули

Извършват се последователни, независими опити на Бернули. Вероятността за успех на всеки опит е една и съща, ще я означим с p. Съответно вероятността за неуспех $q = 1 - p$ също е еднаква за отделните опити. Няма ограничение за броя на опитите.

Ще обърнем внимание, за да попаднем в схема на Бернули са съществени две условия - опитите да са независими и вероятността да не се мени от опит на опит. Например, ако хвърлим 100 зара и шестицата е успех, или ако 100 пъти последователно хвърляме зар и шестицата е успех.

В схемата на Бернули могат да се въведат различни случайни величини - "броят на успехите при фиксиран брой опити", "броят на опитите до първия или до k-тия успех" и т.н.

Разпределение на Бернули

Започваме изучаването на конкретни разпределения.

- Разпределение на Бернули

Извършваме един Бернулиев опит. Нека сл.в X е броя на успехите, т.е. случайната величина може да взима само две стойности - „1“ при успех и „0“ при неуспех. Разпределението на X и има вида:

Разпределение на Бернули

Започваме изучаването на конкретни разпределения.

- Разпределение на Бернули

Извършваме един Бернулиев опит. Нека сл.в X е броя на успехите, т.е. случайната величина може да взима само две стойности - „1“ при успех и „0“ при неуспех. Разпределението на X и има вида:

X	0	1
P	q	p

Разпределение на Бернули

Започваме изучаването на конкретни разпределения.

- Разпределение на Бернули

Извършваме един Бернулиев опит. Нека сл.в X е броя на успехите, т.е. случайната величина може да взима само две стойности - „1“ при успех и „0“ при неуспех. Разпределението на X и има вида:

X	0	1
P	q	p

Елементарно се пресмятат:

$$\mathrm{E}X = p$$

$$\mathrm{E}X^2 = p$$

$$\mathrm{D}X = p - p^2 = p(1-p) = pq$$

Трудно може да се намери практическо приложение на толкова елементарна случайна величина. Ние я въведохме, само защото ще ние удобна при изучаване на следващото разпределение.

Биномно разпределение

- Биномно разпределение - $X \in Bi(n, p)$

Нека в “Схема на Бернули” броят на опитите - n е предварително фиксиран, а вероятността за успех p е известна.

Случайната величина X равна на броя на успехите, наричаме биномно разпределена.Символично това се записва по следния начин: $X \in Bi(n, p)$.

$$\begin{array}{cccccccc} & \multicolumn{7}{c}{\overbrace{\hphantom{xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx}}^{X = \#1}} \\ & * & * & & * & & & * \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ q & p & p & & \dots & & & \end{array}$$

Биномно разпределение

- Биномно разпределение - $X \in Bi(n, p)$

Нека в “Схема на Бернули” броят на опитите - n е предварително фиксиран, а вероятността за успех p е известна.

Случайната величина X равна на броя на успехите, наричаме биномно разпределена.Символично това се записва по следния начин: $X \in Bi(n, p)$.

$$\begin{array}{cccccccc} \multicolumn{8}{c}{\overbrace{\hspace{12em}}^{X = \#1}} \\ & * & * & & * & & & * \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ q & p & p & & \dots & & & \end{array}$$

Ясно е, че стойностите на X т.е. броят на успехите е цяло число в интервала от 0 до n. Ще пресметнем вероятността за точно k на брой успеха. Общо са проведени n опита, на k от които има успех. Съществуват C_n^k начина да изберем опитите, на който да има успех. Ако вероятността за успех при всеки опит е p, то вероятността за успех на k фиксирани опита ще бъде p^k, тъй като опитите са независими. Аналогично, вероятността на останалите $n-k$ опита да има неуспех ще бъде $(1-p)^{n-k}$. Така за вероятността за точно k успеха от n опита, получаваме:

Биномно разпределение

$X \in Bi(n,p)$

$$P(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \qquad (\star)$$

$k = 0, 1, \dots n.$

Биномно разпределение

$X \in Bi(n,p)$

$$\mathrm{P}(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \qquad (\star)$$

$k = 0, 1, \ldots n.$

Биномното разпределение е добре дефинирано, тъй като съгласно формулата за бинома на Нютон е изпълнено:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1.$$

От тук идва и самото име на разпределението.

Биномно разпределение

$X \in Bi(n, p)$

$$\mathrm{P}(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \qquad (\star)$$

$k = 0, 1, \ldots n.$

Биномното разпределение е добре дефинирано, тъй като съгласно формулата за бинома на Нютон е изпълнено:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = (p + q)^n = 1.$$

От тук идва и самото име на разпределението.

Пример

Нека X е броя на шестиците паднали се при хвърлянето на три зара.

Биномно разпределение

$X \in Bi(n, p)$

$$\mathrm{P}(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \qquad (\star)$$

$k = 0, 1, \ldots n.$

Биномното разпределение е добре дефинирано, тъй като съгласно формулата за бинома на Нютон е изпълнено:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1.$$

От тук идва и самото име на разпределението.

Пример

Нека X е броя на шестиците паднали се при хвърлянето на три зара. Тогава $X \in Bi(3, \frac{1}{6})$. Лесно се пресмята разпределението на сл.в X.

Биномно разпределение

$X \in Bi(n, p)$

$$\mathrm{P}(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \qquad (\star)$$

$k = 0, 1, \ldots n.$

Биномното разпределение е добре дефинирано, тъй като съгласно формулата за бинома на Нютон е изпълнено:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1.$$

От тук идва и самото име на разпределението.

Пример

Нека X е броя на шестиците паднали се при хвърлянето на три зара. Тогава $X \in Bi(3, \frac{1}{6})$. Лесно се пресмята разпределението на сл.в X.

X	0	1	2	3
P	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

Биномно разпределение

Задача

Директното намиране на математическото очакване и дисперсията на сл.в X означава да се пресметнат:

Биномно разпределение

Задача

Директното намиране на математическото очакване и дисперсията на сл.в X означава да се пресметнат:

$$\mathrm{E}X = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \ldots ?$$

Задача

Директното намиране на математическото очакване и дисперсията на сл.в X означава да се пресметнат:

$$\mathsf{E}X = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \ldots ? \qquad \text{и} \qquad \mathsf{E}X^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \ldots ?$$

което е предизвикателство.

Биномно разпределение

Задача

Директното намиране на математическото очакване и дисперсията на сл.в X означава да се пресметнат:

$$\mathrm{E}X = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \ldots? \qquad \text{и} \qquad \mathrm{E}X^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \ldots?$$

което е предизвикателство.

Ние ще изберем друг подход. За да пресметнем характеристиките на сл.в $X \in Bi(n, p)$, ще я представим като сума от Бернулиеви сл.в.

Нека с X_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ означим успеха на i-тия опит, т.е. случайните величини X_i могат да вземат само две стойности 0, или 1. X_i и имат разпределение на Бернули, като $\mathrm{E}X_i = p$ и $\mathrm{D}X_i = pq$. Опитите са независими следователно и случайните величини X_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ са независими.

Биномно разпределение

Задача

Директното намиране на математическото очакване и дисперсията на сл.в X означава да се пресметнат:

$$\mathrm{E}X = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \ldots ? \qquad \text{и} \qquad \mathrm{E}X^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \ldots ?$$

което е предизвикателство.

Ние ще изберем друг подход. За да пресметнем характеристиките на сл.в $X \in Bi(n, p)$, ще я представим като сума от Бернулиеви сл.в.

Нека с X_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ означим успеха на i-тия опит, т.е. случайните величини X_i могат да вземат само две стойности 0, или 1. X_i и имат разпределение на Бернули, като $\mathrm{E}X_i = p$ и $\mathrm{D}X_i = pq$. Опитите са независими следователно и случайните величини X_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ са независими.

Ясно е, че $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. Тогава от свойствата на очакването и дисперсията следва:

$$\mathrm{E}X = \mathrm{E}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = \mathrm{E}X_1 + \mathrm{E}X_2 + \ldots + \mathrm{E}X_n = np$$

$$\mathrm{D}X = \mathrm{D}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = \mathrm{D}X_1 + \mathrm{D}X_2 + \ldots + \mathrm{D}X_n = npq$$

Биномно разпределение

Ще пресметнем и максималната стойност на вероятността, т.е. ще открием за кое $k = 0, 1, \ldots n$ вероятността $\mathsf{P}(X = k)$ достига максимум. Намирането на този максимум не е възможно по традиционният начин познат от математическият анализ с намиране на първата производна, тъй като биномният коефициент в $(\star)$ не може да бъде диференциран. Затова ще разгледаме отношението на вероятностите. Ако е изпълнено неравенството

$$\frac{\mathsf{P}(X = k)}{\mathsf{P}(X = k - 1)} > 1$$

то вероятността $\mathsf{P}(X = k)$ разглеждана като функция по k е растяща. По този начин ще определим интервалите на растене и намаляване на функцията.

Биномно разпределение

Ще пресметнем и максималната стойност на вероятността, т.е. ще открием за кое $k = 0, 1, \ldots n$ вероятността $\mathsf{P}(X = k)$ достига максимум. Намирането на този максимум не е възможно по традиционният начин познат от математическият анализ с намиране на първата производна, тъй като биномният коефициент в $(\star)$ не може да бъде диференциран. Затова ще разгледаме отношението на вероятностите. Ако е изпълнено неравенството

$$\frac{\mathsf{P}(X = k)}{\mathsf{P}(X = k-1)} > 1$$

то вероятността $\mathsf{P}(X = k)$ разглеждана като функция по k е растяща. По този начин ще определим интервалите на растене и намаляване на функцията. Съгласно $(\star)$ горното неравенство е еквивалентно на:

$$1 < \frac{C_n^k p^k q^{n-k}}{C_n^{k-1} p^{k-1} q^{n-k+1}} = \frac{n!\,(k-1)!(n-k+1)!\,p}{k!(n-k)!\,n!\,q} = \frac{(n-k+1)\,p}{kq}.$$

Ще решим това неравенство спрямо k.

$$p(n+1) > (p+q)k = k.$$

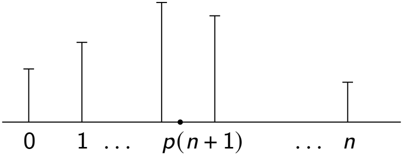
Тук p и $n+1$ са известни константи.

Биномно разпределение

Следователно за $k < p(n+1)$ вероятността $\mathrm{P}(X = k)$ е растяща по k. Аналогично, при $k > p(n+1)$ вероятността $\mathrm{P}(X = k)$ е намаляваща. Знаем, че k взима стойности $0, 1, \dots n$. В началото вероятностите растат, достигат до някаква максимална стойност, след което започват да намаляват.

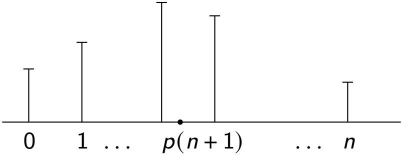
Биномно разпределение

Следователно за $k < p(n+1)$ вероятността $\mathrm{P}(X = k)$ е растяща по k. Аналогично, при $k > p(n+1)$ вероятността $\mathrm{P}(X = k)$ е намаляваща. Знаем, че k взима стойности $0, 1, \dots n$. В началото вероятностите растат, достигат до някаква максимална стойност, след което започват да намаляват.



Биномно разпределение

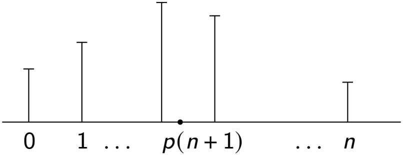
Следователно за $k < p(n+1)$ вероятността $\mathrm{P}(X = k)$ е растяща по k. Аналогично, при $k > p(n+1)$ вероятността $\mathrm{P}(X = k)$ е намаляваща. Знаем, че k взима стойности $0, 1, \dots n$. В началото вероятностите растат, достигат до някаква максимална стойност, след което започват да намаляват.



Максималната стойност на вероятността се достига за най-голямото цяло число k, което е по-малко от $p(n+1)$, т.е. при k равно на цялата част на $p(n+1)$.

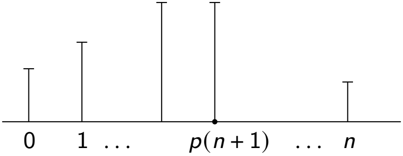
Биномно разпределение

Следователно за $k < p(n+1)$ вероятността $\mathrm{P}(X = k)$ е растяща по k. Аналогично, при $k > p(n+1)$ вероятността $\mathrm{P}(X = k)$ е намаляваща. Знаем, че k взима стойности $0, 1, \dots n$. В началото вероятностите растат, достигат до някаква максимална стойност, след което започват да намаляват.



Максималната стойност на вероятността се достига за най-голямото цяло число k, което е по-малко от $p(n+1)$, т.е. при k равно на цялата част на $p(n+1)$.

Ако числото $p(n+1)$ се окаже цяло, то неравенство се превръща в равенство $k = p(n+1)$ за някое k. Тогава ще има две максимални стойности за вероятността $\mathrm{P}(X = k)$ и $\mathrm{P}(X = k-1)$.



Геометрично разпределение

- Геометрично разпределение - $X \in Ge(p)$

Разглеждаме схема на Бернули с неограничен брой опити. Случайната величина X равна на “броя на неуспехите до достигане на първи успех” наричаме геометрично разпределена сл.в. Символично това се записва по следния начин: $X \in Ge(p)$. Броят на опитите не е ограничен, така че стойностите на X могат да варират от 0 до ∞.

$$\overbrace{|\,0\,|\,0\,|\,0\,|\quad \dots \quad |\,0\,}^{X}|\,1\,|\quad \dots$$

Геометрично разпределение

- Геометрично разпределение - $X \in Ge(p)$

Разглеждаме схема на Бернули с неограничен брой опити. Случайната величина X равна на "броя на неуспехите до достигане на първи успех" наричаме геометрично разпределена сл.в. Символично това се записва по следния начин: $X \in Ge(p)$. Броят на опитите не е ограничен, така че стойностите на X могат да варират от 0 до ∞.

$$\overbrace{\,0 \mid 0 \mid 0 \mid \quad \dots \quad \mid 0\,}^{X} \mid 1 \mid \quad \dots$$

Ще пресметнем вероятноста за точно k неуспеха до първия успех, т.е. $\mathrm{P}(X = k)$ за $k = 0, 1, 2, \dots$. Ясно е, че тази вероятност отговаря на събитието - „при първите k опита има неуспех, а на опит $k+1$ успех“.

Опитите са независими, следователно:

Геометрично разпределение

- Геометрично разпределение - $X \in Ge(p)$

Разглеждаме схема на Бернули с неограничен брой опити. Случайната величина X равна на "броя на неуспехите до достигане на първи успех" наричаме геометрично разпределена сл.в. Символично това се записва по следния начин: $X \in Ge(p)$. Броят на опитите не е ограничен, така че стойностите на X могат да варират от 0 до ∞.

$$\overbrace{0\;|\;0\;|\;0\;|\quad\ldots\quad|\;0}^{X}\;|\;1\;|\quad\ldots$$

Ще пресметнем вероятноста за точно k неуспеха до първия успех, т.е. $\mathrm{P}(X = k)$ за $k = 0, 1, 2, \ldots$. Ясно е, че тази вероятност отговаря на събитието - „при първите k опита има неуспех, а на опит $k + 1$ успех“.

Опитите са независими, следователно:

$X \in Ge(p)$

$$\mathrm{P}(X = k) = (1 - p)^k p = q^k p$$
$$k = 0, 1, 2, \ldots$$

Тук, както обикновено сме означили вероятността за неуспех с q.

Геометрично разпределение

За да се покаже, че това разпределение е добре дефинирано, е достатъчно да се приложи формулата за сума на безкрайна геометрична прогресия:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathsf{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} q^k p = \frac{p}{1-q} = 1.$$

Геометрично разпределение

За да се покаже, че това разпределение е добре дефинирано, е достатъчно да се приложи формулата за сума на безкрайна геометрична прогресия:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} q^k p = \frac{p}{1-q} = 1.$$

Забележка. В някой източници геометричното разпределена сл.в. Y се дефинира, като “броя на опитите за първи успех”, т.е. в общия брой се включва и опита в който има успех. Не е трудно да се види че $Y = X + 1$ и следователно $\mathrm{P}(Y = k) = q^{k-1}p$

Геометрично разпределение

За да се покаже, че това разпределение е добре дефинирано, е достатъчно да се приложи формулата за сума на безкрайна геометрична прогресия:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} q^k p = \frac{p}{1-q} = 1.$$

Забележка. В някой източници геометричното разпределена сл.в. Y се дефинира, като "броя на опитите за първи успех", т.е. в общия брой се включва и опита в който има успех. Не е трудно да се види че $Y = X + 1$ и следователно $\mathrm{P}(Y = k) = q^{k-1}p$

Директното пресмятане на математическото очакване и дисперсията на X изисква умения за сумиране на редове. Например

$$\mathrm{E}X = \sum_{k=0}^{\infty} k\, q^k p$$

Пораждащите функции дават възможност за значително опростяване на този процес. Пораждащата функция на X има вида:

$$g_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{P}(X = k)s^k = \sum_{k=0}^{\infty} q^k p s^k = p\sum_{k=0}^{\infty} (qs)^k = \frac{p}{1-qs}.$$

Геометрично разпределение

Съгласно свойствата на пораждаща функция, които изведохме в лекция IV, математическото очакване на X е производната на $g_X(s)$ при $s = 1$.

$$\mathrm{E}X = g_X'(1) = \left.\frac{pq}{(1-qs)^2}\right|_{s=1} = \frac{pq}{(1-q)^2} = \frac{q}{p}$$

Геометрично разпределение

Съгласно свойствата на пораждаща функция, които изведохме в лекция IV, математическото очакване на X е производната на $g_X(s)$ при $s = 1$.

$$\mathsf{E}X = g'_X(1) = \left.\frac{pq}{(1-qs)^2}\right|_{s=1} = \frac{pq}{(1-q)^2} = \frac{q}{p}$$

За да пресметнем дисперсията на X ще ни трябва втората производна на пораждащата функция:

$$g''_X(1) = \left.\left(\frac{pq}{(1-qs)^2}\right)'\right|_{s=1} = \frac{2pq^2}{(1-q)^3} = \frac{2q^2}{p^2}.$$

Сега, отново от свойствата на пораждащите функции, следва:

$$\mathsf{D}X = g''_X(1) + g'_X(1) - \left(g'_X(1)\right)^2 = \frac{2q^2}{p^2} + \frac{q}{p} - \frac{q^2}{p^2} = \frac{q(q+p)}{p^2} = \frac{q}{p^2}.$$

Геометрично разпределение

Съгласно свойствата на пораждаща функция, които изведохме в лекция IV, математическото очакване на X е производната на $g_X(s)$ при $s = 1$.

$$\mathsf{E}X = g'_X(1) = \left.\frac{pq}{(1-qs)^2}\right|_{s=1} = \frac{pq}{(1-q)^2} = \frac{q}{p}$$

За да пресметнем дисперсията на X ще ни трябва втората производна на пораждащата функция:

$$g''_X(1) = \left.\left(\frac{pq}{(1-qs)^2}\right)'\right|_{s=1} = \frac{2pq^2}{(1-q)^3} = \frac{2q^2}{p^2}.$$

Сега, отново от свойствата на пораждащите функции, следва:

$$\mathsf{D}X = g''_X(1) + g'_X(1) - \left(g'_X(1)\right)^2 = \frac{2q^2}{p^2} + \frac{q}{p} - \frac{q^2}{p^2} = \frac{q(q+p)}{p^2} = \frac{q}{p^2}.$$

Задача

Разполагаме с тесте от 32 карти. Теглим случайна карта, записваме я, след което я връщаме обратно в тестето. Теглим нова карта, записваме я, връщаме я и т.н. Намерете математическото очакване на броя опити необходими за да запишем всички карти.

Отрицателно биномно разпределение

- Отрицателно биномно разпределение - $X \in NB(r, p)$

Отново разглеждаме схема на Бернули с неограничен брой опити. Случайната величина X равна на “броя на неуспехите до достигане на r-тия успех” наричаме отрицателно биномно разпределена.

Отрицателно биномно разпределение

- Отрицателно биномно разпределение - $X \in NB(r, p)$

Отново разглеждаме схема на Бернули с неограничен брой опити. Случайната величина X равна на "броя на неуспехите до достигане на r-тия успех" наричаме отрицателно биномно разпределена.

Ясно е, че геометричното разпределение е частен случай на отрицателно биномното за $r = 1$, т.е. $NB(1, p) \equiv Ge(p)$.

Отрицателно биномно разпределение

- Отрицателно биномно разпределение - $X \in NB(r, p)$

Отново разглеждаме схема на Бернули с неограничен брой опити. Случайната величина X равна на "броя на неуспехите до достигане на r-тия успех" наричаме отрицателно биномно разпределена.

Ясно е, че геометричното разпределение е частен случай на отрицателно биномното за $r = 1$, т.е. $NB(1, p) \equiv Ge(p)$.

Ще пресметнем $\mathrm{P}(X = k)$. За да бъде изпълнено $X = k$, то в серията на Бернули трябва да имаме r успеха и k неуспеха, като при това на последния опит задължително е настъпил успех. Явно опитите общо са $r + k$ на брой.

$$\underbrace{\overbrace{\overset{*}{0}\,|\,1\,|\,1\,|\,\overset{*}{0}\,|\,1\,|\,\dots\,|\,\overset{*}{0}}^{X=k}\,|\,1}_{r+k}$$

Отрицателно биномно разпределение

- Отрицателно биномно разпределение - $X \in NB(r,p)$

Отново разглеждаме схема на Бернули с неограничен брой опити. Случайната величина X равна на "броя на неуспехите до достигане на r-тия успех" наричаме отрицателно биномно разпределена.

Ясно е, че геометричното разпределение е частен случай на отрицателно биномното за $r = 1$, т.е. $NB(1,p) \equiv Ge(p)$.

Ще пресметнем $\mathsf{P}(X = k)$. За да бъде изпълнено $X = k$, то в серията на Бернули трябва да имаме r успеха и k неуспеха, като при това на последния опит задължително е настъпил успех. Явно опитите общо са $r + k$ на брой.

$$\underbrace{\overbrace{\overset{*}{0}\;1\;1\;\overset{*}{0}\;1\;\ldots\;\overset{*}{0}}^{X=k}\;1}_{r+k}$$

От първите $r + k - 1$ места трябва да изберем местата на неуспехите, това може да стане по $\binom{r+k-1}{k}$ начина. Сега при вече фиксираните места, като използваме факта, че опитите са независими, вероятността за r успеха и k неуспеха ще бъде $p^r q^k$.

Отрицателно биномно разпределение

$X \in NB(r, p)$

$$\mathrm{P}(X = k) = \binom{r+k-1}{k} p^r q^k = \binom{r+k-1}{r-1} p^r q^k \qquad (*)$$

$k = 0, 1, 2, \ldots$

Отрицателно биномно разпределение

$X \in NB(r, p)$

$$\mathrm{P}(X = k) = \binom{r+k-1}{k} p^r q^k = \binom{r+k-1}{r-1} p^r q^k \qquad (*)$$

$k = 0, 1, 2, \ldots$

За да покажем, че разпределението е добре дефинирано ще използваме формулата за отрицателен бином (това обяснява и името)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{P}(X = k) = p^r \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r+k-1}{k} q^k = \frac{p^r}{(1-q)^r} = 1$$

Отрицателно биномно разпределение

$X \in NB(r, p)$

$$P(X = k) = \binom{r+k-1}{k} p^r q^k = \binom{r+k-1}{r-1} p^r q^k \qquad (*)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

За да покажем, че разпределението е добре дефинирано ще използваме формулата за отрицателен бином (това обяснява и името)

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) = p^r \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r+k-1}{k} q^k = \frac{p^r}{(1-q)^r} = 1$$

Нека $X \in NB(r, p)$, ще намерим EX и DX. За целта ще въведем допълнителни случайни величини:

X_1 - броя на неуспехите до първия успех,

X_2 - броя на неуспехите между първия и втория успех,

X_3 - броя на неуспехите между втория и третия успех,

и т.н.

Отрицателно биномно разпределение

$X \in NB(r, p)$

$$P(X = k) = \binom{r+k-1}{k} p^r q^k = \binom{r+k-1}{r-1} p^r q^k \qquad (*)$$

$k = 0, 1, 2, \ldots$

За да покажем, че разпределението е добре дефинирано ще използваме формулата за отрицателен бином (това обяснява и името)

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) = p^r \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r+k-1}{k} q^k = \frac{p^r}{(1-q)^r} = 1$$

Нека $X \in NB(r, p)$, ще намерим EX и DX. За целта ще въведем допълнителни случайни величини:

X_1 - броя на неуспехите до първия успех,

X_2 - броя на неуспехите между първия и втория успех,

X_3 - броя на неуспехите между втория и третия успех,

и т.н.

Ясно е, че $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_r$. Не е трудно да се съобрази, че тези случайни величини са независими, тъй като опитите са независими. Освен това всяка от тях е геометрично разпределена, т.е. $X_i \in Ge(p)$.

Отрицателно биномно разпределение

Следователно отрицателно биномното разпределение може да се разглежда като сума от геометрични разпределения. Този факт може да бъде доказан и строго. За целта нека случайните величини $X_i \in Ge(p)$ са независими и $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_r$.

Отрицателно биномно разпределение

Следователно отрицателно биномното разпределение може да се разглежда като сума от геометрични разпределения. Този факт може да бъде доказан и строго. За целта нека случайните величини $X_i \in Ge(p)$ са независими и $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_r$.

По-горе в тази лекция намерихме пораждащата функция на X_i:

$$g_{X_i}(s) = \frac{p}{1 - qs}.$$

Тогава за пораждащата функция на X получаваме:

$$g_X(s) = g_{X_1+\ldots+X_r}(s) = \prod_{i=1}^{r} g_{X_i}(s) = \frac{p^r}{(1 - qs)^r} =$$

Отрицателно биномно разпределение

Следователно отрицателно биномното разпределение може да се разглежда като сума от геометрични разпределения. Този факт може да бъде доказан и строго. За целта нека случайните величини $X_i \in Ge(p)$ са независими и $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_r$.

По-горе в тази лекция намерихме пораждащата функция на X_i:

$$g_{X_i}(s) = \frac{p}{1 - qs}.$$

Тогава за пораждащата функция на X получаваме:

$$g_X(s) = g_{X_1 + \ldots + X_r}(s) = \prod_{i=1}^{r} g_{X_i}(s) = \frac{p^r}{(1 - qs)^r} =$$

сега ще приложим формулата за отрицателен бином.

$$= p^r \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r + k - 1}{k} q^k s^k = \sum_{k=0}^{\infty} P(X = k)\, s^k,$$

където $P(X = k)$ е взета съгласно $(*)$. Това показва, че $X \in NB(r, p)$. $\square$

Отрицателно биномно разпределение

Следователно отрицателно биномното разпределение може да се разглежда като сума от геометрични разпределения. Този факт може да бъде доказан и строго. За целта нека случайните величини $X_i \in Ge(p)$ са независими и $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_r$.

По-горе в тази лекция намерихме пораждащата функция на X_i:

$$g_{X_i}(s) = \frac{p}{1 - qs}.$$

Тогава за пораждащата функция на X получаваме:

$$g_X(s) = g_{X_1 + \ldots + X_r}(s) = \prod_{i=1}^{r} g_{X_i}(s) = \frac{p^r}{(1 - qs)^r} =$$

сега ще приложим формулата за отрицателен бином.

$$= p^r \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r + k - 1}{k} q^k s^k = \sum_{k=0}^{\infty} P(X = k)\, s^k,$$

където $P(X = k)$ е взета съгласно $(*)$. Това показва, че $X \in NB(r, p)$. □

Тогава от свойствата на очакването и дисперсията следва:

$$\mathrm{E}X = \mathrm{E}(X_1 + X_2 + \ldots + X_r) = r\ \mathrm{E}X_1 = r\frac{q}{p} \qquad \text{и} \qquad \mathrm{D}X = r\frac{q}{p^2}$$