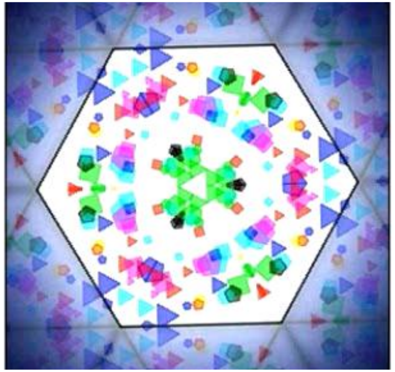
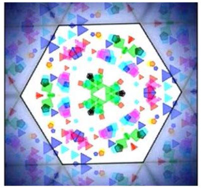
ТЕМА №15

# Изпъкнали обвивки



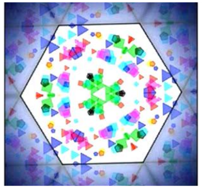


# Съдържание

**Тема 15: Изпъкнали обвивки**

- Изпъкнали многоъгълници
- Изпъкнали многостени
- Изпъкнала обвивка

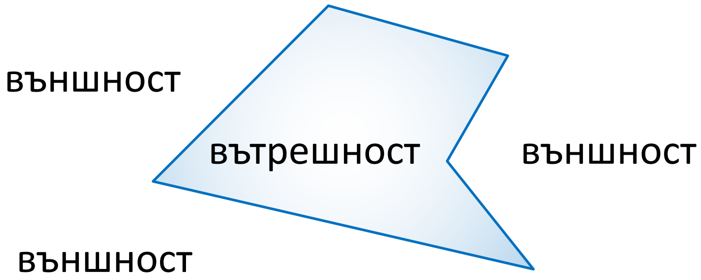
# Изпъкнали многоъгълници



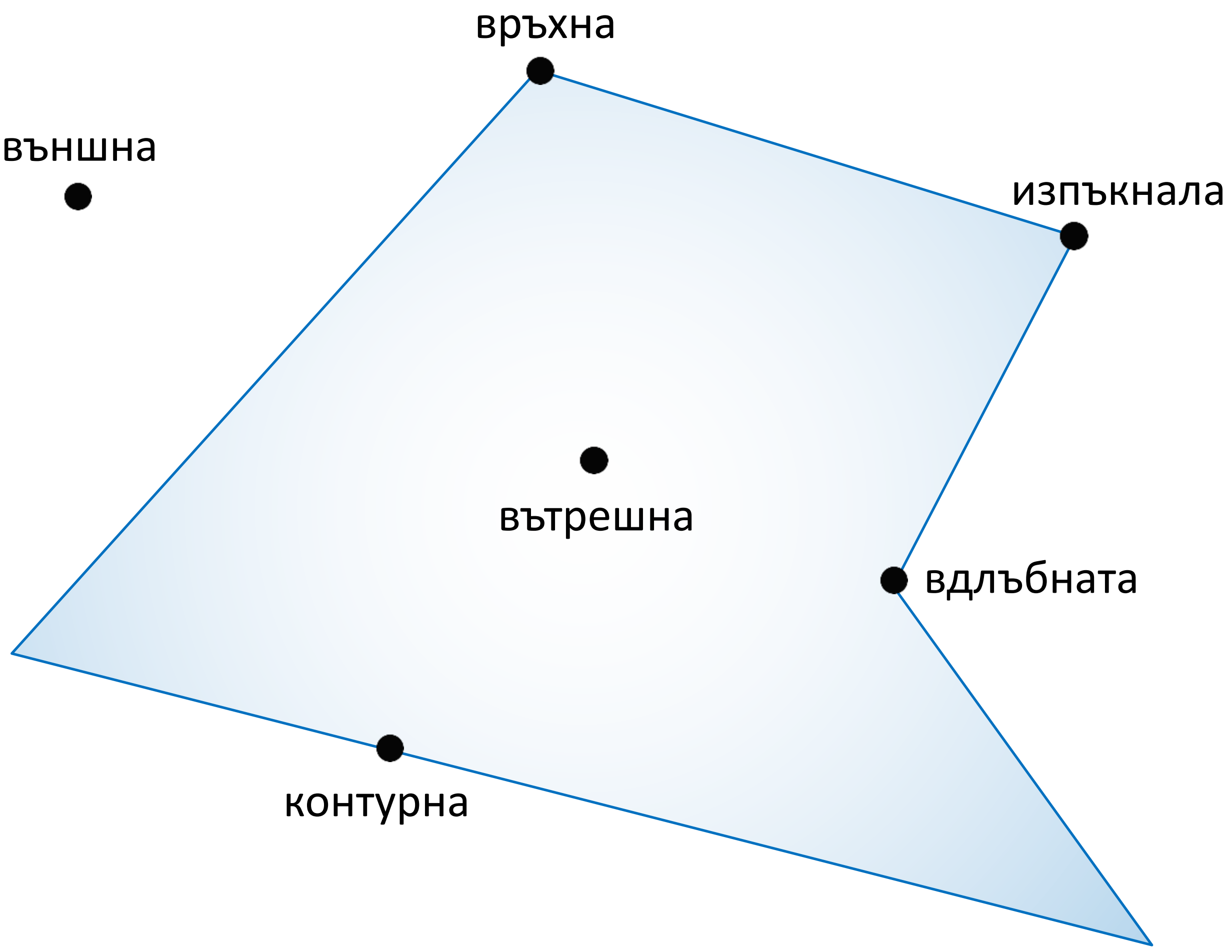
# Малко терминология

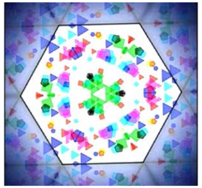
## Терминология

- Разглеждаме само прости многоъгълници (не се самопресичат)
- Те разделят равнината на две условни зони: вътрешност и външност



– Видове точки според положението им спрямо многоъгълника

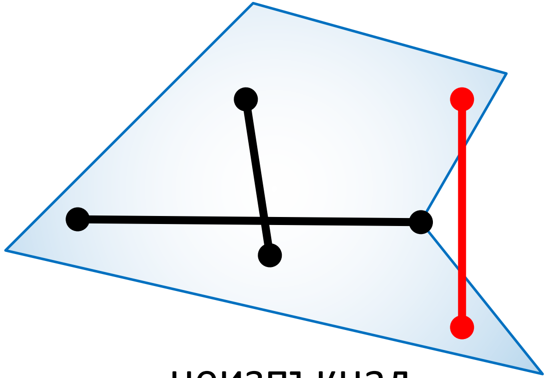

върхна
външна
изпъкнала
вътрешна
вдлъбната
контурна



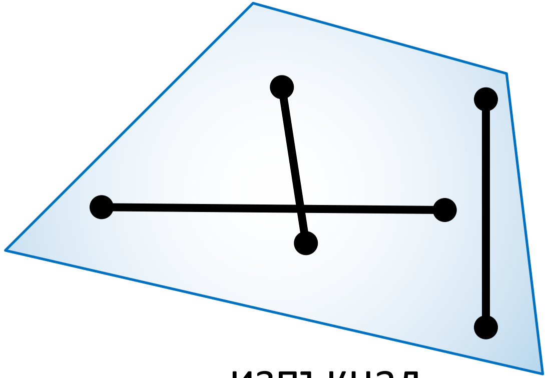
# Изпъкнали многоъгълници

## Изпъкнали многоъгълници

- Нямат вдлъбнати върхове
- Отсечка между всеки две невъншни точки е само от невъншни точки



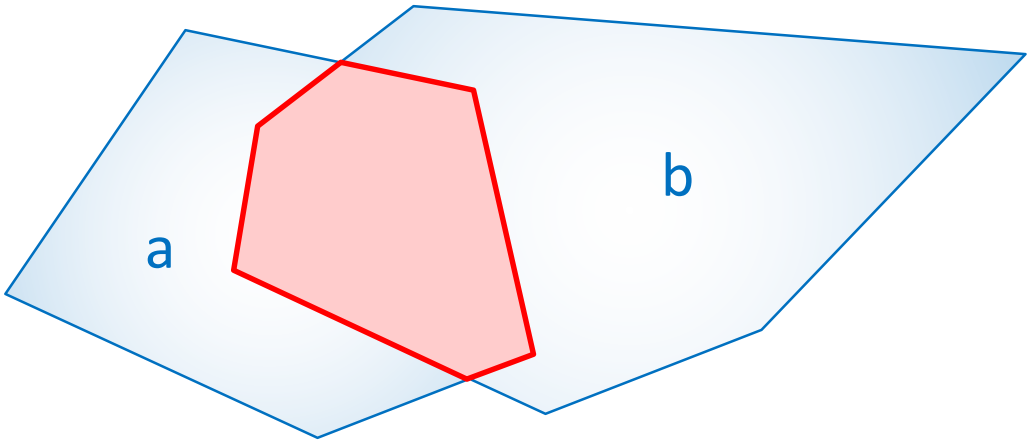
неизпъкнал



изпъкнал

# Едно основно свойство

– Непразното сечение на изпъкнали многоъгълници е изпъкнал многоъгълник



# **Доказателство** (полагаме $\text{⌂}(x) \equiv$ „$x$ е изпъкнал“)

Предполагаме ! $\text{⌂}(a \cap b) \Rightarrow$

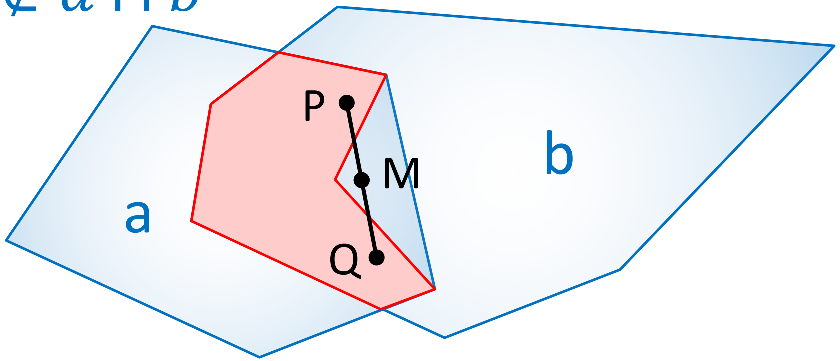
$\exists PQ: P, Q \in a \cap b$ и $\exists M \in PQ: M \notin a \cap b$

$$\left.\begin{array}{l} \{P, Q \in a, \text{⌂}(a)\} \Rightarrow M \in a \\ \{P, Q \in b, \text{⌂}(b)\} \Rightarrow M \in b \end{array}\right\} \Rightarrow M \in a \cap b$$

Това противоречи с $M \notin a \cap b$

$\Rightarrow !\,!\,\text{⌂}(a \cap b)$

$\Rightarrow \text{⌂}(a \cap b)$



## Същото нещо, но на човешки:

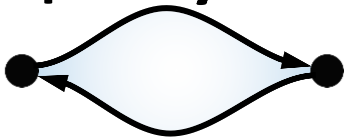
- Предполагаме, че сечението не е изпъкнало. Значи може да намерим отсечка, чиито краища са в сечението, а някаква вътрешна нейна точка е извън сечението.
- Обаче, и двата края принадлежат на единия многоъгълник, т.е. и някаквата точка също, понеже той е изпъкнал. По същата причина точката е и в другия многоъгълник.
- Щом тя е в двата, значи е и в сечението им. Т.е. червеното ни предположение е грешно. Затова сечението е не е неизпъкнало, което значи, че е изпъкнало.

## Друго основно свойство: $V - E = 0$

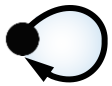
- Където $V$ е броят върхове, а $E$ е броят страни
- За нормалните хора $V \geq 3$

## За ненормалните съществуват

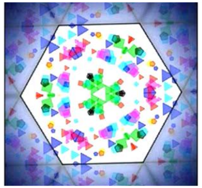
- Двуъгълник V=2 (не е отсечка)



- Едноъгълник V=1 (не е точка)



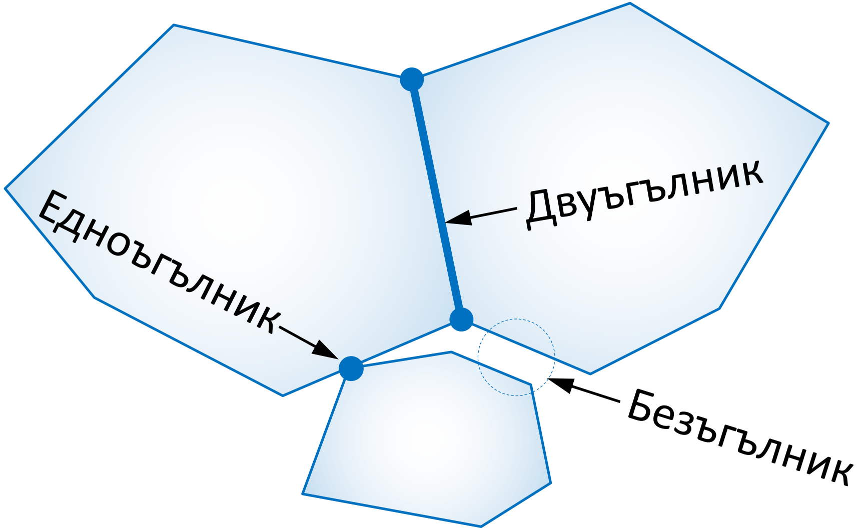
- Безъгълник V=0 (не е нищо)



# Чрез изродените случаи

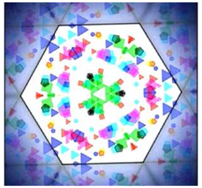
## Два изпъкнали многоъгълника

- Винаги имат сечение-многоъгълник



# Изпъкнали многостени

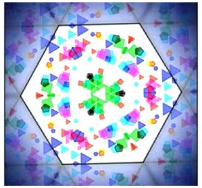
0:20



# Дефиниция

## Многостен

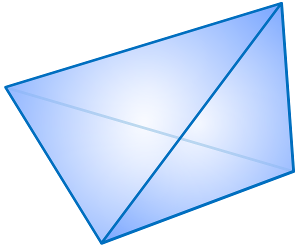
- 3D тяло, ограничено от равнинни многоъгълници
- Всяко ребро на многостена е страна на точно два от тези многоъгълника
- Всеки многоъгълник е стена на многостена

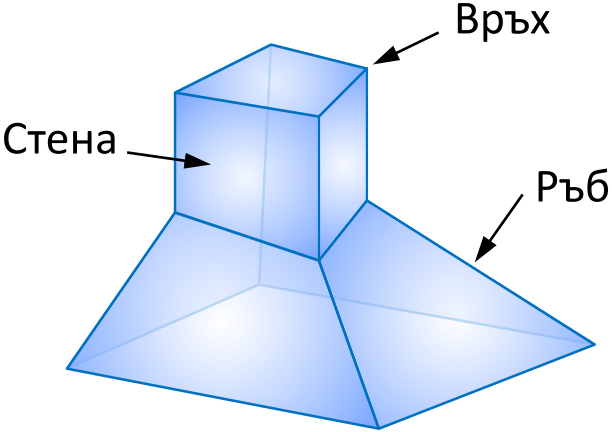


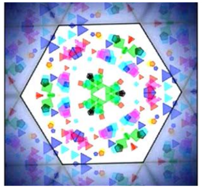
# История и примери

## История

- Изследвани още от древна Гърция
- Ползвани в математиката, астрономията, изкуствата







# Изпъкнали многостени

## Изпъкнали многостени

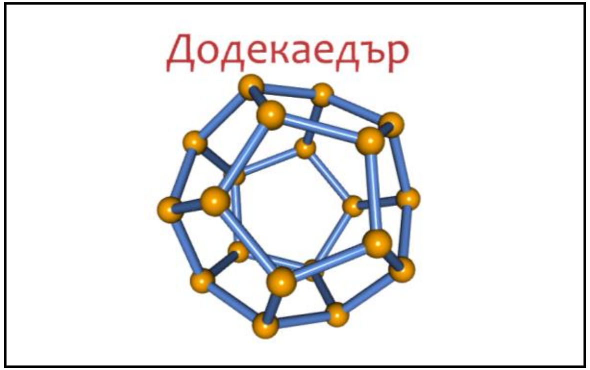
- През всеки връх съществува равнина, такава че всички точки от многостена са само в едното полупространство

## Правилни многостени

- Трябва да са от еднакви правилни многоъгълници, сключващи еднакви стенни ъгли

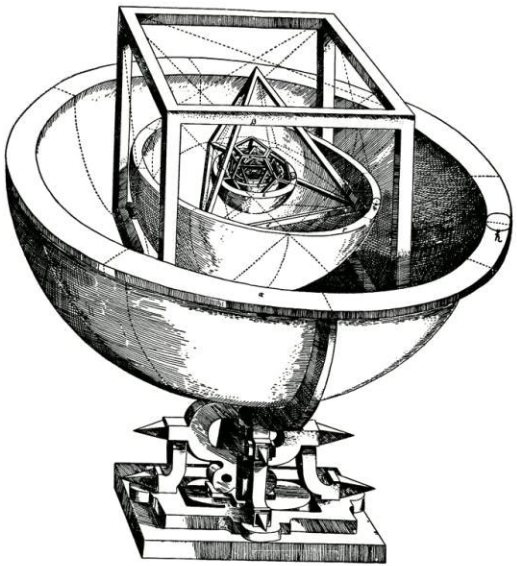
# Платонови тела

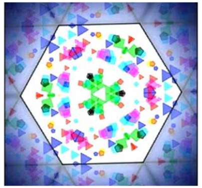
- Правилни многостени
- От еднакви правилни многоъгълници
- Сключващи еднакви стенни ъгли
- Само 5 са: 



# Използване на Платонови тела

- Да се търси истината
- Смисълът на съществуването на света





# Формула на Ойлер

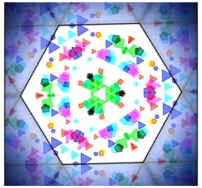
**Прост многостен**

- Многостен, който не се самопресича
- Може да бъде „издут“ до сфера

**За всеки прост многостен**

- Където $V$ е броят върхове, $E$ – ръбове, а $F$ – стени:

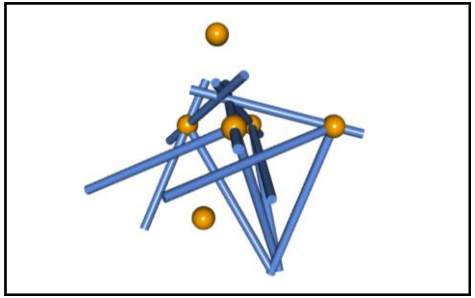
$$V - E + F = 2$$



# Да я проверим

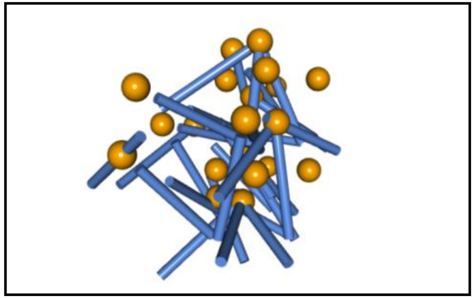
**Октаедър** $6 - 12 + 8 = 2$

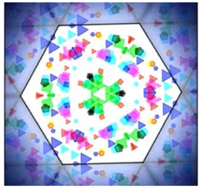
- Върхове $V = 6$
- Ръбове $E = 12$
- Стени $F = 8$



**Додекаедър** $20 - 30 + 12 = 2$

- Върхове $V = 20$
- Ръбове $E = 30$
- Стени $F = 12$





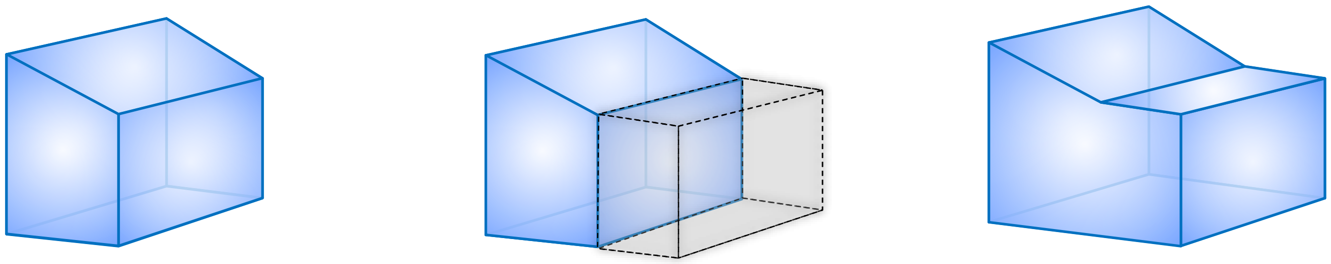
# Още за $V - E + F = 2$

**Важи за многостени, за които:**

- Всички стени са обкръжени от единичен „пръстен“ от ръбове
- Всеки ръб се споделя от точно две стени и се простира между точно два върха
- Във всеки връх се срещат поне 3 ръба
- В многостена няма дупки и тунели

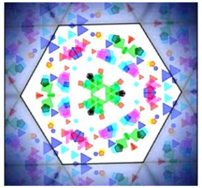
# Тримерни тела в КГ

- Спазващи формулата на Ойлер
- Отговарящи на 4-те условия
- Удобни за представяне на тримерни обекти с мрежа



$V = 8, E = 12, F = 6$
$8 - 12 + 6 = 2$

$V = 10, E = 15, F = 7$
$10 - 15 + 7 = 2$



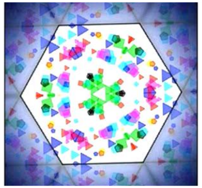
# По-сложни тела

## Топологични сфери

- За формулата на Ойлер се иска „да няма тунели“
- Такива тела са топологично еквивалентни на сфера

## Какво правим с другите обекти

- Има доста такива обекти – халба за бира, геврек-осморка със захар (или без захар) и т.н.



# По-обща формула

**Ако в 3D обект има $T$ тунела, то $V - E + F = 2 - 2T$**

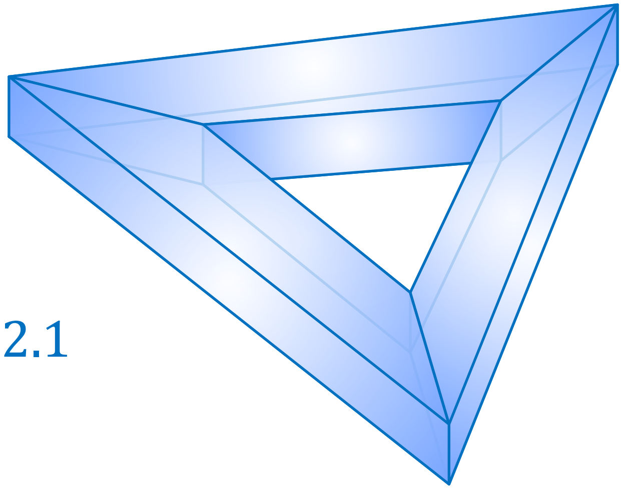
- Модел на поничка: $T = 1$, а $V - E + F = 0$
- 3D модел на рамка за очила: $T = 2$, а $V - E + F = -2$
- Модел на език с 3 пиърсинга: $T = 3$, а $V - E + F = -4$

## Още за формулата $V - E + F = 2 - 2T$

- Не зависи колко детайлно сме представили обекта като 3D мрежа

## Да проверим с поничка

- Ама много груба, тоблеронска, поничка

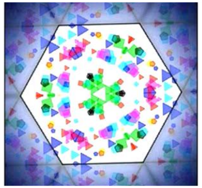


$V = 12$
$E = 24$
$F = 12$
$T = 1$

$V - E + F = 2 - 2T$
$12 - 24 + 12 = 2 - 2.1$

# Изпъкнала обвивка

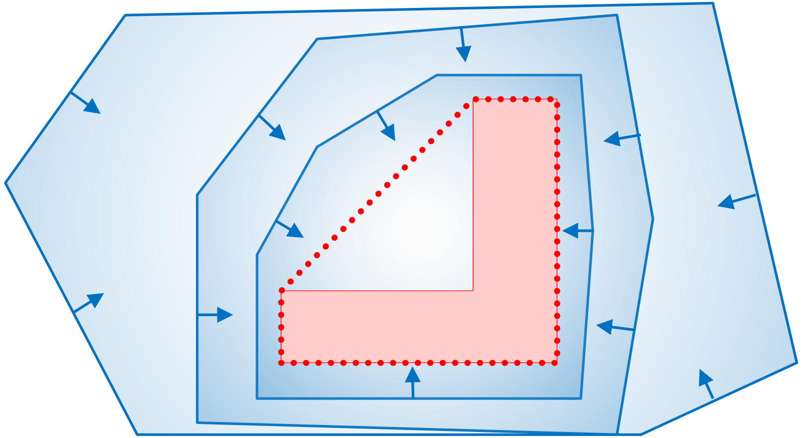
0:30



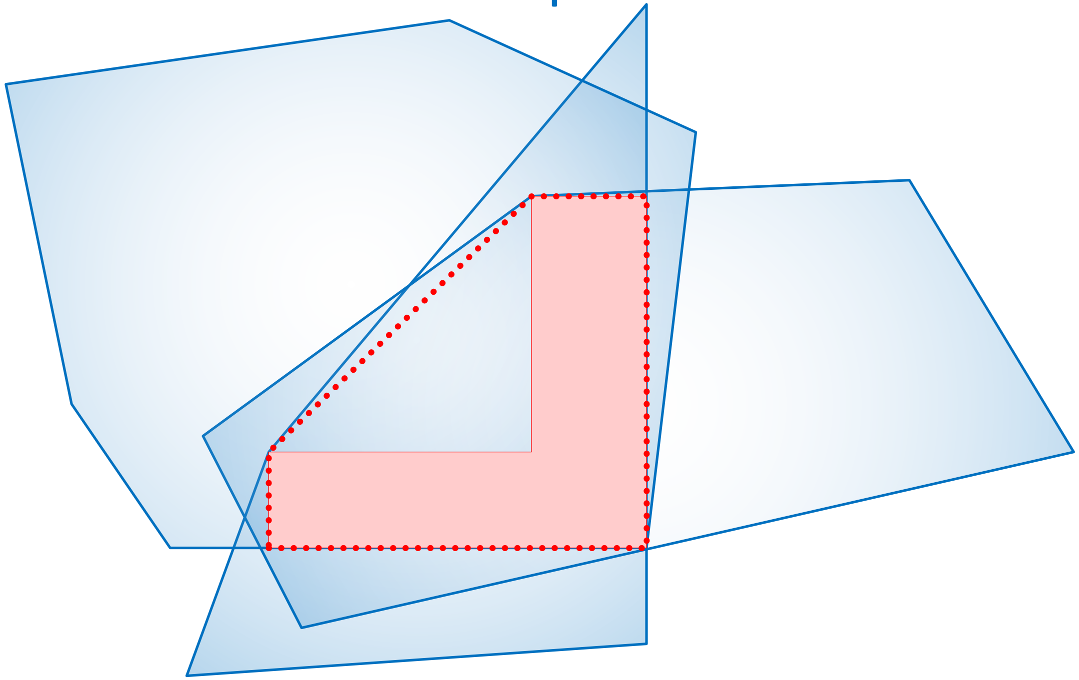
# Изпъкнала обвивка в 2D

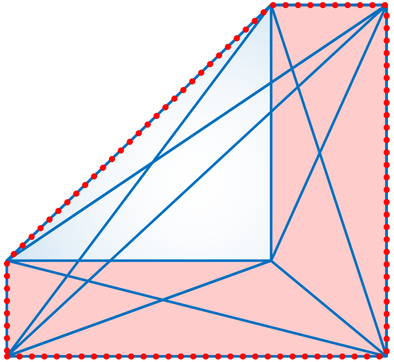
## Няколко еквивалентни дефиниции

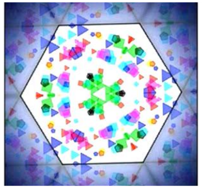
- Това е най-малкият по площ изпъкнал многоъгълник включващ всички върхове от многоъгълника



- Сечението на всички изпъкнали многоъгълници, които включват върховете на многоъгълника
- Обединението на всички триъгълници определени от върховете на многоъгълник



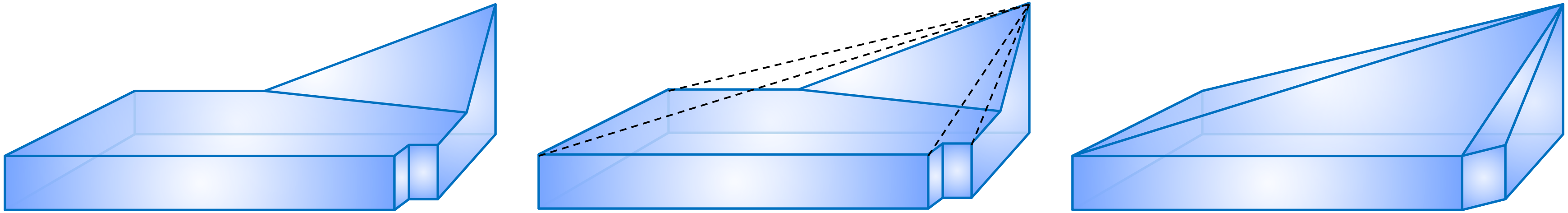


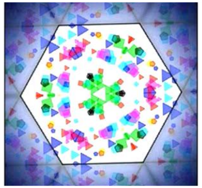


# Изпъкнала обвивка в 3D

## Изпъкнала обвивка на многостен

- Минималният изпъкнал многостен, включващ всички точки от многостена
- Или: сечението на всички многостени, включващи всички точки от многостена





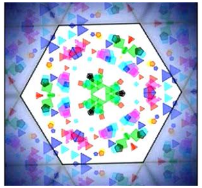
# Намиране на обвивка

**Намиране на изпъкнала обвивка**

- Разглеждаме само в 2D
- Алгоритъм „Добавяне на точки“
- Алгоритъм „Опаковане на подарък“
- Алгоритъм „Сканиране на Греъм“

# Алгоритъм
# “Добавяне на точки”

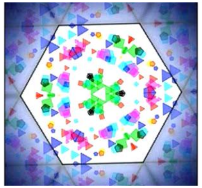
0:35



# Основна идея

**Алгоритъм**

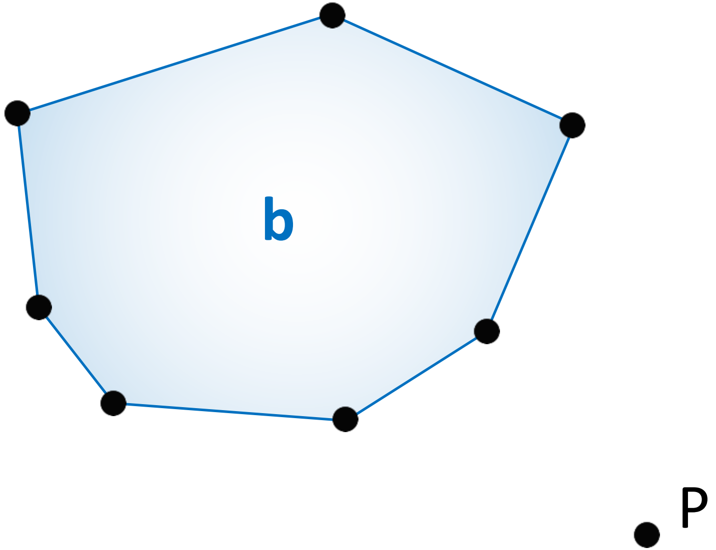
- Имаме многоъгълник $a$
- Създаваме безъгълник $b$
- Един по един всеки връх от $a$ включваме в $b$
- Всяко такова включване променя $b$ така, че да е винаги изпъкнал (с цената на изтриване на върхове)



# Една стъпка

**Проверяваме дали $P \in b$**

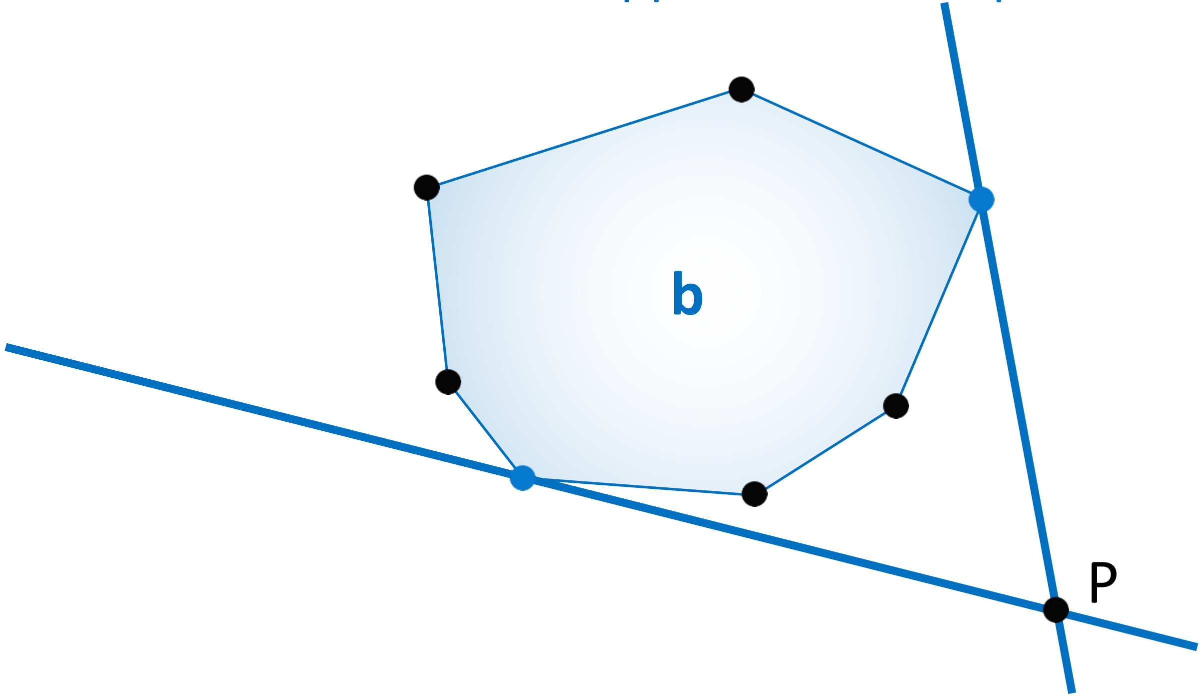
– Ако да, значи няма нужда да се добавя



# Построяваме тангентите през $P$ към $b$

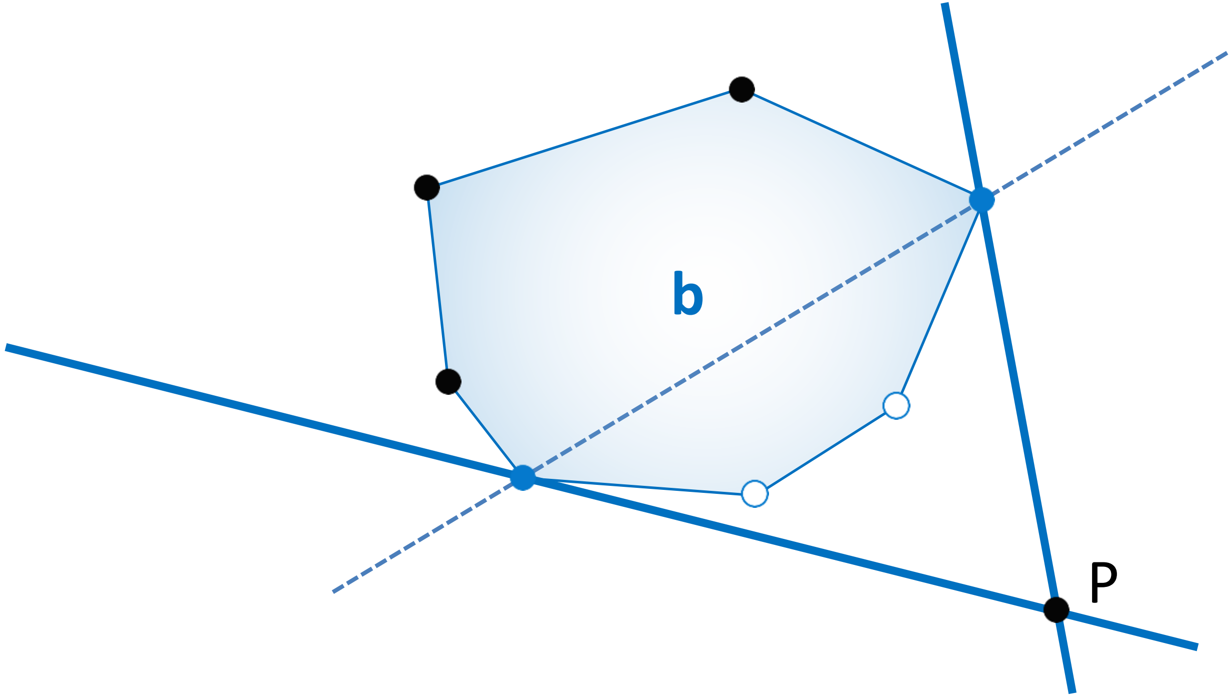
– Това са прави, свързващи $P$ с връх на $b$ така, че $b$ да е само от едната страна

– Запомняме двата тангенциални върха



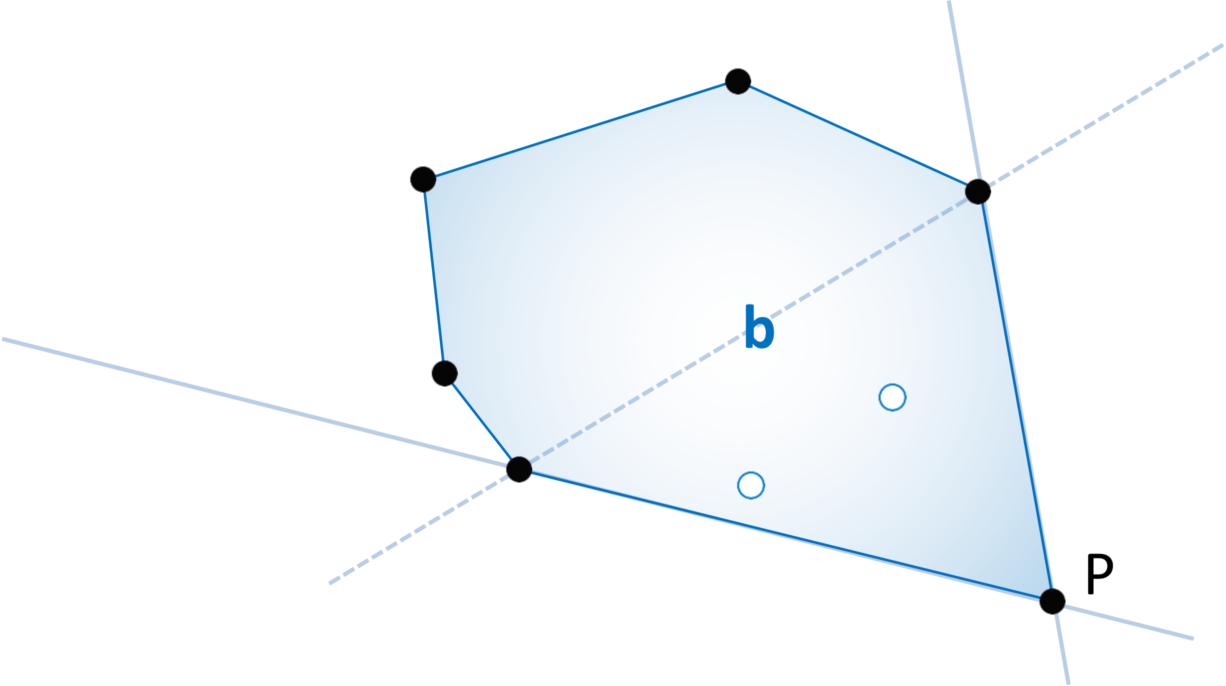
# Премахваме по-близките върхове

– Това са върховете между запомнените два, които са откъм $P$ спрямо правата която минава през тях



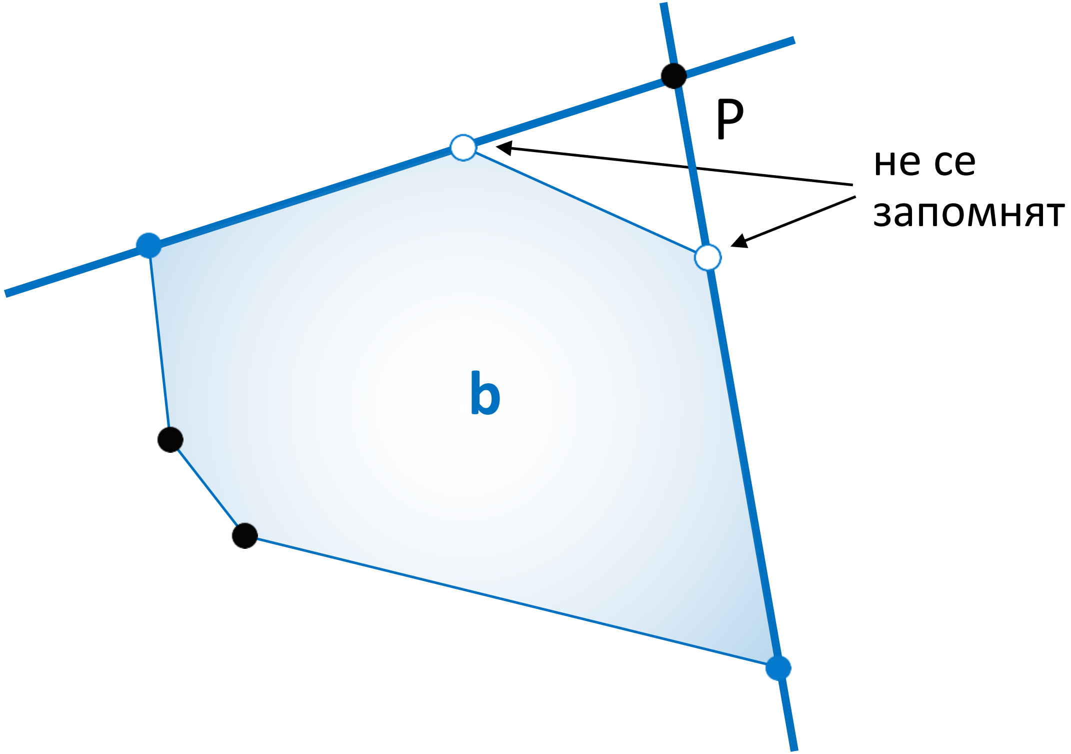
# Шпакловаме

- Свързваме $P$ с двата запомнени върха
- Вече имаме новия изпъкнал $b$



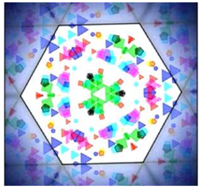
# Да се внимава

– При тангенциални страни запомняме само по-далечния от двата върха



# Алгоритъм
# „Опаковане на подарък“

0:40



# Основна идея

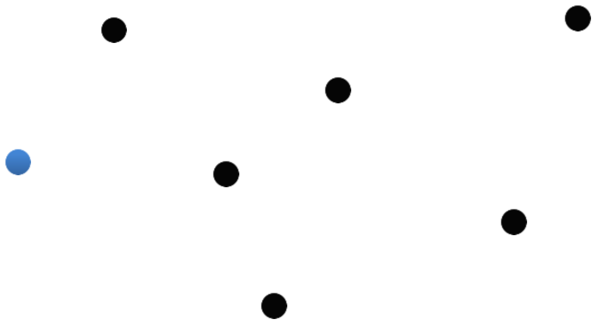
**Алгоритъм**

- Избираме точка, която със сигурност принадлежи към изпъкналата обвивка
- Коя да е тази точка? Ами … най-лявата, тази с най-малка $x$ координата, е ОК.
- Завъртаме по часовниковата стрелка вертикален лъч от тази точка, докато опре до друга точка
- После завъртаме от другата и т.н.

# Да го покажем

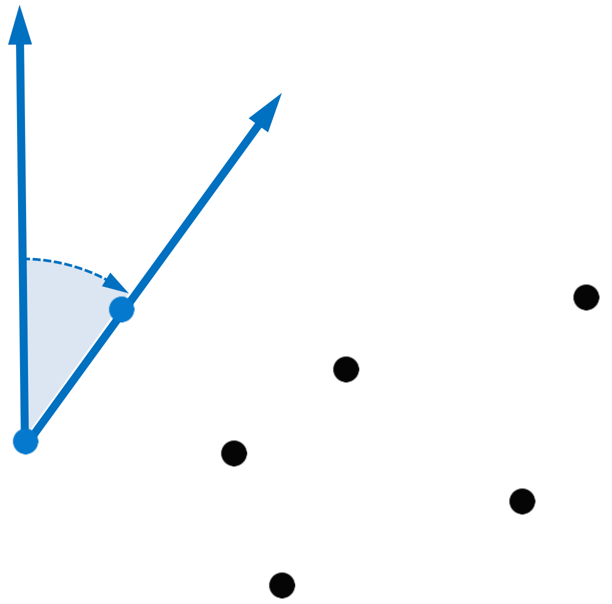
## Избираме най-лявата точка

- Ако са няколко, избираме най-горната



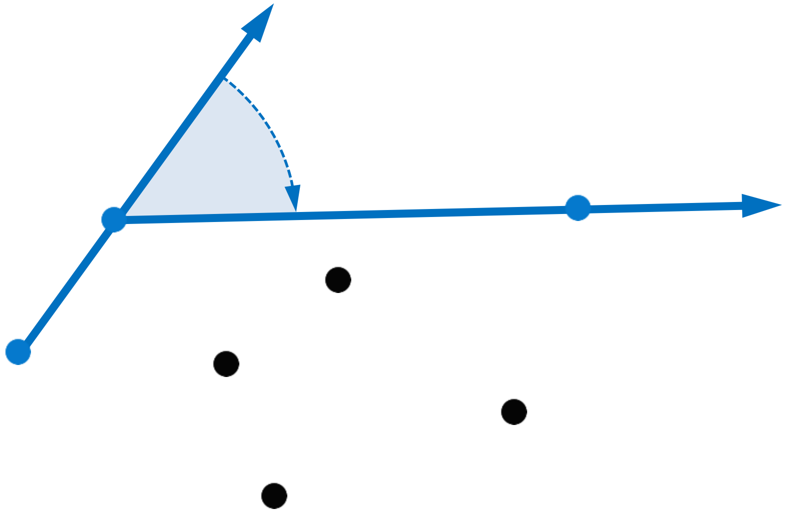
## Завъртаме вертикален лъч

- Докато опре до друга точка
- Тази точка е следващата от обвивката



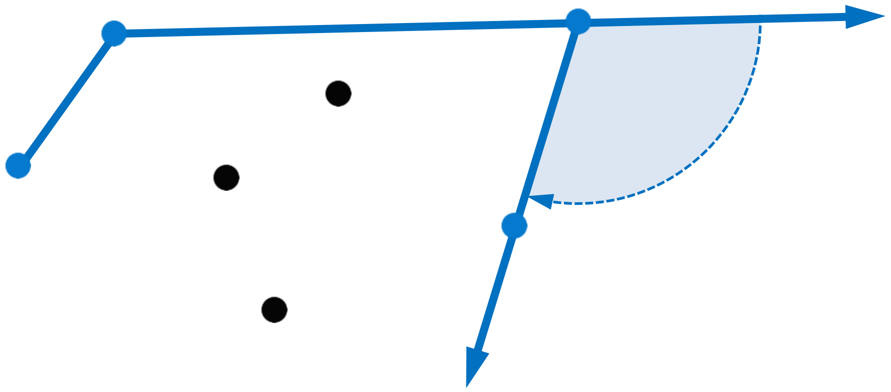
## Завъртаме остатъка от лъч

- Около новата точка
- Така намираме поредната точка

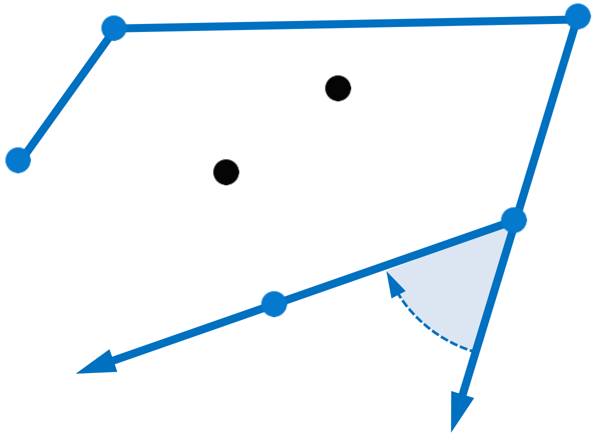


# Продължаваме в този дух

- Около още по-нова точка
- Така намираме още по-поредна точка

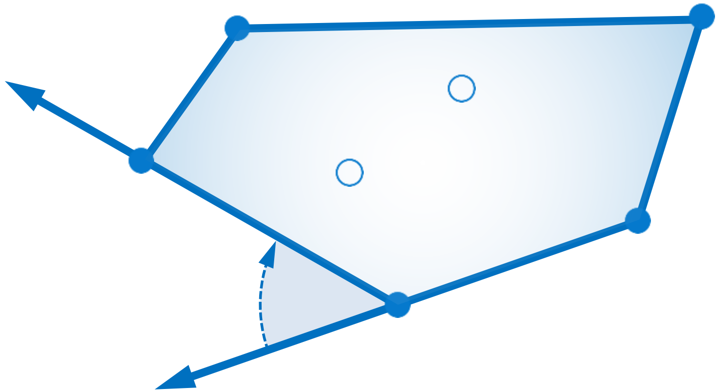


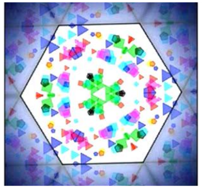
# И още веднъж



# И за последно

- Рано или късно стигаме до първия връх
  (Забележка: догодина да ползвам по-къс пример)





# Какво би станало?

**Ако изберем друга начална точка?**

- Най-долната, най-дясната, най-горната
- Пак ще се опакова подаръка, стига първият лъч да е тангенциален

**Ако изберем обратна посока на въртене?**

- Ще ни се завие свят, но пак ще се опакова подаръка

# Алгоритъм „Сканиране на Греъм“

0:45

# Основна идея

## Алгоритъм

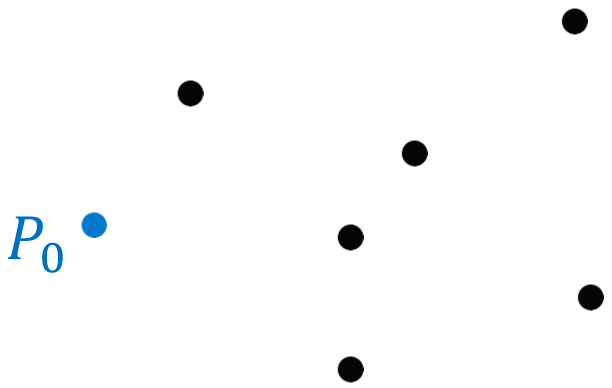
- Избираме точка $P_0$, която със сигурност принадлежи към изпъкналата обвивка, примерно пак най-лявата
- Сортираме всички останали точки според ъгъла им в полярни координати спрямо $P_0$
- Избираме втора и трета точки: $P_1$ и $P_2$
- Работим с последните 3 избрани точки

**Ето как работим**

- Ако към третата сме направили завой надясно, изтриваме втората и пак гледаме последните три избрани точки

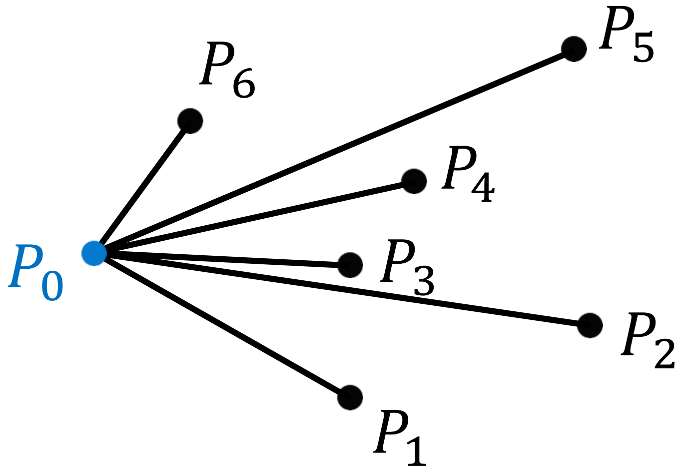
**Пример**

- Избираме най-лявата точка



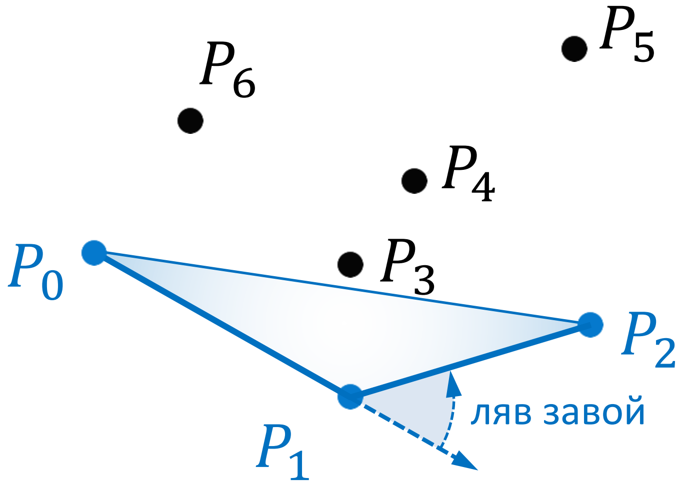
# Сортираме според ъгъла

- Ползваме полярни координати
- Точката $(0,0)$ е в $P_0$
- Сортираме (преномерираме) точките



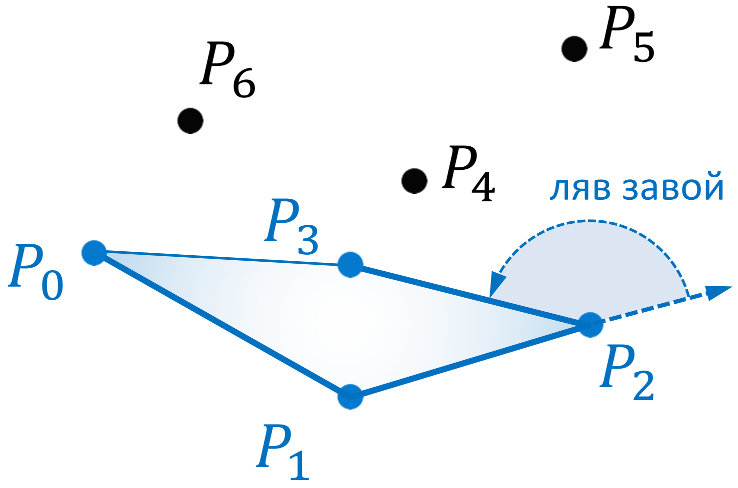
# Избираме втора и трета точки

- Ползваме $P_1$ и $P_2$
- $P_0 P_1 P_2$ е текущият ни изпъкнал многоъгълник
- Забелязваме, че от $P_0 P_1$ завиваме наляво за $P_2$ – това е добре



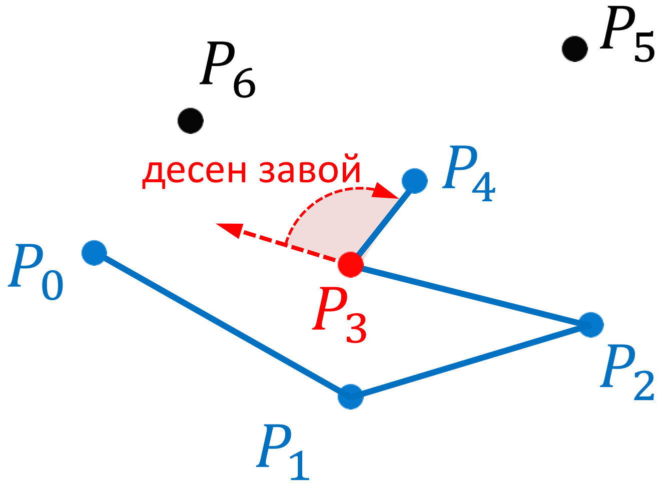
# Избираме нова точка

- Това ще да е следващата $P_3$
- Последните три избрани точки вече са $P_1$, $P_2$ и $P_3$
- Забелязваме, че от $P_1P_2$ завиваме наляво за $P_3$ (направо не вярваме на късмета си)



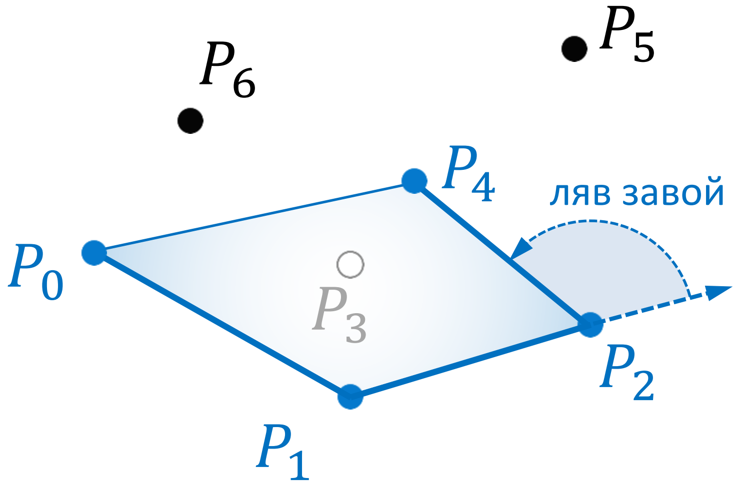
# Избираме нова точка – $P_4$

- Вече работим с $P_2$, $P_3$ и $P_4$
- Забелязваме, че от $P_2P_3$ завиваме надясно за $P_4$, т.е. $P_3$ не може да е в изпъкналата обвивка
- $P_3$ трябва да се премахне



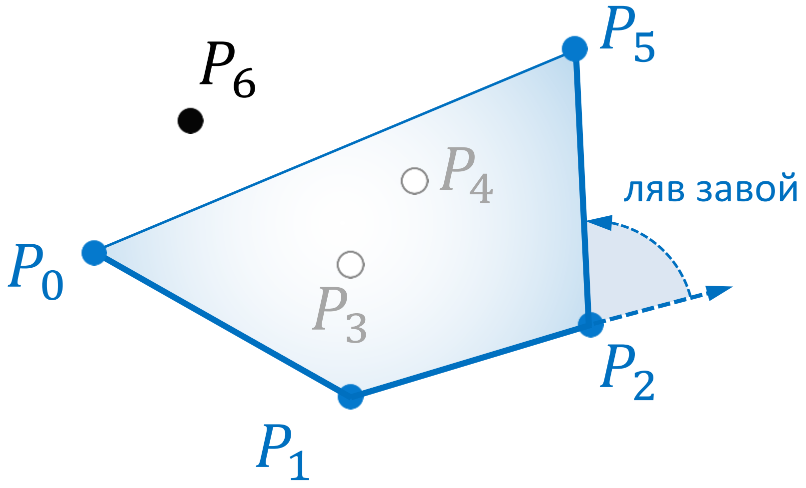
# Премахваме $P_3$

- Вече последните три точки са $P_1$, $P_2$ и $P_4$
- Завоят към $P_4$ е ляв, т.е. текущият многоъгълник $P_0P_1P_2P_4$ е изпъкнал
- Продължаваме нататък



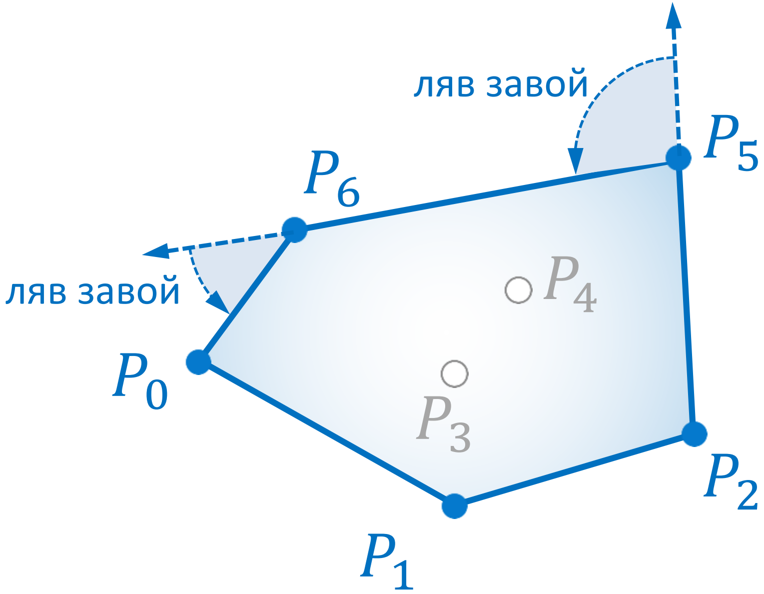
# Добавяме $P_5$

- Аналогично, добавянето на $P_5$, ще премахне $P_4$, защото завоят от $P_2P_4$ към $P_5$ е десен
- Текущият изпъкнал многоъгълник става $P_0P_1P_2P_5$



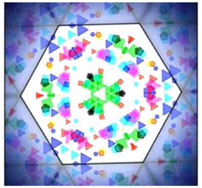
# Следващите две стъпки са ясни

- Добавяме $P_6$ без проблеми и
- И стигаме до първата точка $P_0$
- С това изпъкналата обвивка $P_0P_1P_2P_5P_6$ е готова



# Алгоритмите
# „на живо“

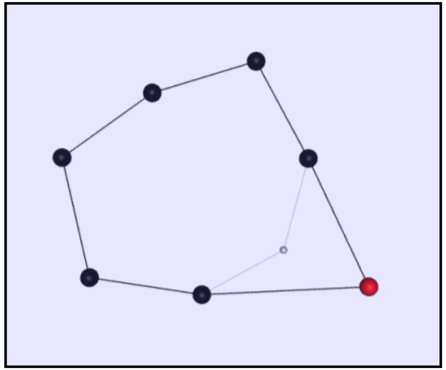
0:55

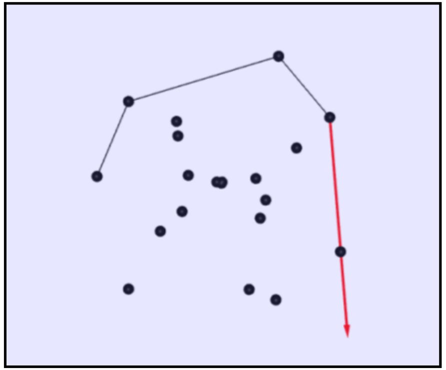


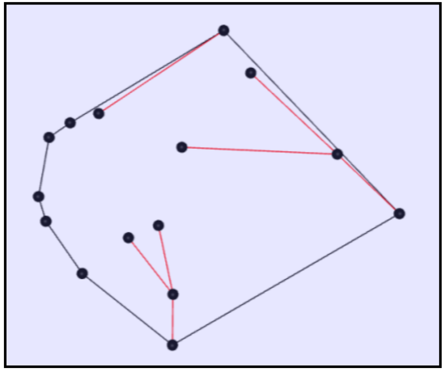
# Илюстрации

## Динамични илюстрации

- Алгоритъм „Добавяне на точки“
- Алгоритъм „Опаковане на подарък“
- Алгоритъм „Сканиране на Греъм“







# Въпроси и коментари

# Повече информация

[KLRO]   стр. 25-26, 429-432

[LASZ]   стр. 78-88, 112-116, 139-145, 182-183

[MORT]   стр. 214-216

**А също и:**

– Graham's Scanning
  http://www.personal.kent.edu/~rmuhamma/Compgeometry/MyCG/ConvexHull/GrahamScan/grahamScan.htm
– The Convex Hull of a 2D Point Set or Polygon
  http://softsurfer.com/Archive/algorithm_0109/algorithm_0109.htm

# Край