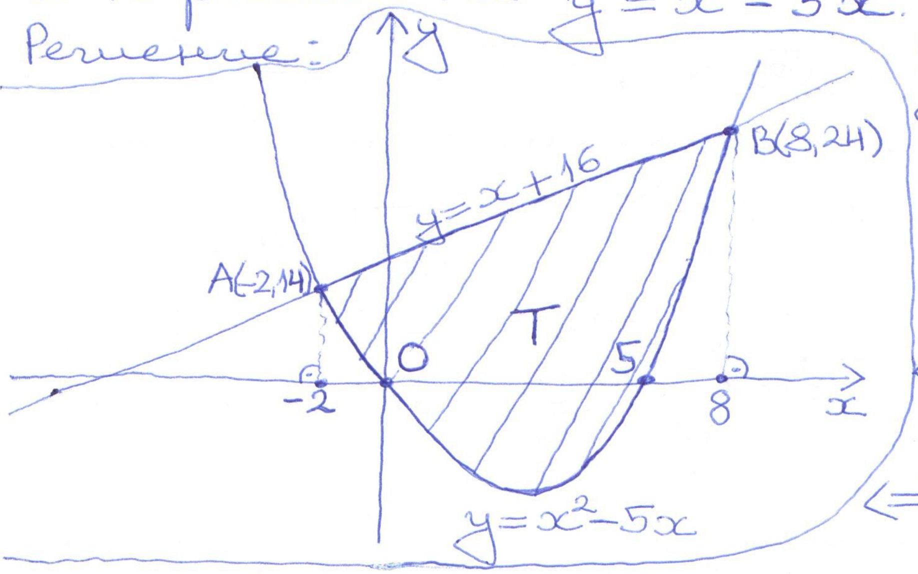
(1) Примерни задачи за контролно № 1

Зад. 1 Намерете лицето $S(T)$ и периметъра $P(T)$ на фигурата T, заградена от правата $y=x+16$ и параболата $y=x^2-5x$.

Решение:



Координатите на A и B са решенията на системата

$$\begin{cases} y=x+16 \\ y=x^2-5x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x+16 \\ x+16=x^2-5x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x+16 \\ x^2-6x-16=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

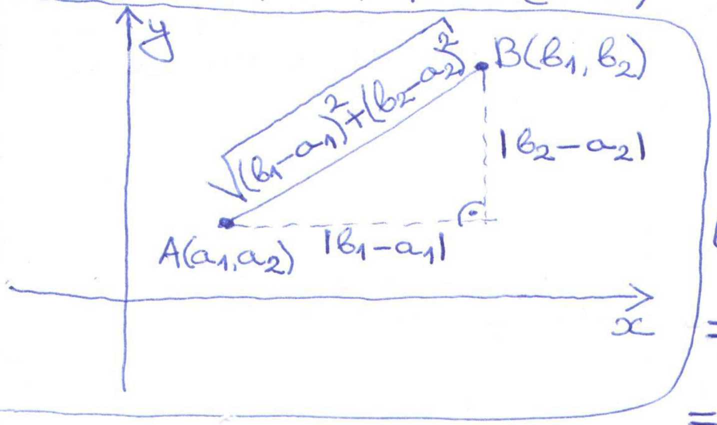
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=x+16 \\ x=-2 \text{ или } x=8 \end{cases} \quad A(-2,14) \quad B(8,24)$$

$$S(T)=\int_{-2}^{8}\left[(x+16)-(x^2-5x)\right]dx=\int_{-2}^{8}(-x^2+6x+16)\,dx=$$

$$=\left(-\frac{x^3}{3}+3x^2+16x\right)\Big|_{-2}^{8}=\left(-\frac{512}{3}+192+128\right)-\left(\frac{8}{3}+12-32\right)=$$

$$=\left(-\frac{512}{3}+320\right)-\left(\frac{8}{3}-20\right)=340-\frac{520}{3}=\frac{1020-520}{3}=\frac{500}{3}.$$

$$P(T)=|AB|+\ell(\overset{\frown}{AB})$$



$$|AB|=\sqrt{(8+2)^2+(24-14)^2}=$$

$$=\sqrt{100+100}=\sqrt{2.100}=10\sqrt{2}$$

$$\ell(\overset{\frown}{AB})=\int_{-2}^{8}\sqrt{1+(2x-5)^2}\,dx=\boxed{t=2x-5}$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-2}^{8}\sqrt{1+(2x-5)^2}\,d(2x-5)=$$

$$=\frac{1}{2}\underbrace{\int_{-9}^{11}\sqrt{1+t^2}\,dt}_{I}=\frac{1}{2}I$$

$$I=\int_{-9}^{11}\sqrt{1+t^2}\,dt=\left(t\sqrt{1+t^2}\right)\Big|_{-9}^{11}-\int_{-9}^{11}t\,d\sqrt{1+t^2}=$$

$$=\left(t\sqrt{1+t^2}\right)\Big|_{-9}^{11}-\int_{-9}^{11}\frac{(t^2+1)-1}{\sqrt{1+t^2}}\,dt=$$

$$=\left(t\sqrt{1+t^2}\right)\Big|_{-9}^{11}-\int_{-9}^{11}\sqrt{1+t^2}\,dt+\int_{-9}^{11}\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,dt=$$

$$=\left(t\sqrt{1+t^2}\right)\Big|_{-9}^{11}-I+\ln\left|t+\sqrt{1+t^2}\right|\Big|_{-9}^{11}$$

② Сл. $I=\frac{1}{2}\left[\left(t\sqrt{1+t^2}\right)\Big|_{-9}^{11}+\ln\left|t+\sqrt{1+t^2}\right|\Big|_{-9}^{11}\right]$

а пък $l(\widehat{AB})=\frac{1}{2}I$.

Отг. на зад. 1: $S(T)=\frac{500}{3}$,

$P(T)=10\sqrt{2}+\frac{1}{4}\left[11\sqrt{122}+9\sqrt{82}+\ln(11+\sqrt{122})-\ln(-9+\sqrt{82})\right]$.

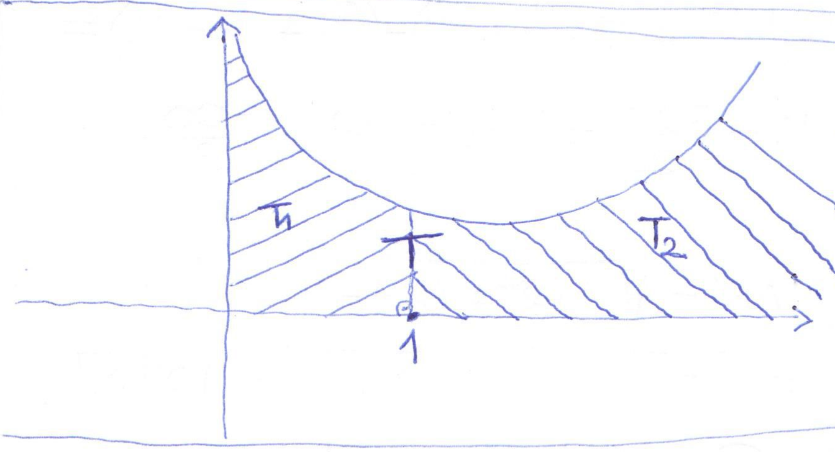
Зад. 2 Изследвайте за сходимост несобствения интеграл $I=\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x^4)}{x^5+x^6}\sqrt{\operatorname{arctg}x}\,dx$.

Решение: Особените точки на I са 0 и $+\infty$.

$$I=\underbrace{\int_0^1\frac{\ln(1+x^4)}{x^5+x^6}\sqrt{\operatorname{arctg}x}\,dx}_{I_1}+\underbrace{\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x^4)}{x^5+x^6}\sqrt{\operatorname{arctg}x}\,dx}_{I_2}$$

Понеже $\frac{\ln(1+x^4)}{x^5+x^6}\sqrt{\operatorname{arctg}x}>0$ за $x\in(0,+\infty)$, то

I е сходящ $\Longleftrightarrow$ I_1 и I_2 са сходящи (1)



Геометрично тълкуване на (1):
Лицето $S(T)$ е крайно число
$\Updownarrow$
Лицата $S(T_1)$ и $S(T_2)$ са крайни числа

I_1: Особената точка е 0.

$$I_1\sim\int_0^1\frac{x^4}{x^5+x^6}\sqrt{\operatorname{arctg}x}\,dx\sim\int_0^1\frac{x^4}{x^5+x^6}\sqrt{x}\,dx\sim$$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x^4)}{x^4}=1$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sqrt{\operatorname{arctg}x}}{\sqrt{x}}=1$

$$\sim\int_0^1\frac{x^4}{x^5}\sqrt{x}\,dx=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx=\int_0^1\frac{1}{(x-0)^{\frac{1}{2}}}\,dx$$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{x^5+x^6}{x^5}=\lim\limits_{x\to0}(1+x)=1$

Понеже $\frac{1}{2}<1$, то последният интеграл е сходящ.

Сл. I_1 е сходящ (2)

(3) I_2: Особената точка е $+\infty$.

$$I_2 \sim \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x^4)}{x^5+x^6}\,dx \sim \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^5+x^6}\,dx \sim$$

$$\sqrt{\operatorname{arctg} x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$\frac{\ln(1+x^4)}{\ln x} = \frac{\ln\left[x^4\left(\frac{1}{x^4}+1\right)\right]}{\ln x} = \frac{\ln x^4 + \ln\left(\frac{1}{x^4}+1\right)}{\ln x} = \frac{4\ln x + \ln\left(1+\frac{1}{x^4}\right)}{\ln x} = 4 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^4}\right)}{\ln x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 4$$

$$\sim \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^6}\,dx \leq \int_1^{+\infty} \frac{x}{x^6}\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^5}\,dx.$$

$$\frac{x^6}{x^5+x^6} = \frac{1}{\frac{1}{x}+1} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$$

при $x\to+\infty$ степенната функция расте по-бързо от логаритмичната

Понеже $5>1$, то последният интеграл е сходящ.

Сл. I_2 е сходящ. (3)

От (1), (2) и (3) следва, че I е сходящ.

Отг. на зад. 2: I е сходящ.

Зад. 3 Нека $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+x-6}$.

а) Развийте $f(x)$ в ред на Маклорен.

б) Пресметнете $f^{(2000)}(0)$.

Решение: а) Ще използваме, че $\boxed{\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n,\ x\in(-1,1)}$ (*)

Имаме, че $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-2)(x+3)} = \dfrac{x^3}{5}\,\dfrac{(x+3)-(x-2)}{(x-2)(x+3)} =$

$$= \frac{x^3}{5}\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+3}\right) = -\frac{x^3}{5}\left(\frac{1}{2-x} + \frac{1}{3+x}\right) =$$

$$= -\frac{x^3}{5}\left(\frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\frac{x}{2}} + \frac{1}{3}\,\frac{1}{1-\left(-\frac{x}{3}\right)}\right) \overset{\text{от (*)}}{=}$$

$$= -\frac{x^3}{5}\left(\frac{1}{2}\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n}_{\text{за } x\in(-2,2)} + \frac{1}{3}\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{3}\right)^n}_{\text{за } x\in(-3,3)}\right) =$$

$$= -\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{3^{n+1}}\right)x^{n+3},\quad x\in(-2,2)$$

④ б) От определението за ред на Маклорен и от а) получаваме, че

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n}_{(1)} = f(x) = \underbrace{-\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}\right)x^{n+3}}_{(2)}, \quad x\in(-2,2)$$

Понеже (1) и (2) са един и същ ред, а именно реда на Маклорен на $f(x)$, то коефициента пред x^{2000} в (1) = коефициента пред x^{2000} в (2).

Оттук $\dfrac{f^{(2000)}(0)}{2000!} = -\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{1}{2^{1998}}-\dfrac{1}{3^{1998}}\right)$.

Отг. на зад. 3 б): $f^{(2000)}(0)=\dfrac{2000!}{5}\left(\dfrac{1}{3^{1998}}-\dfrac{1}{2^{1998}}\right)$.

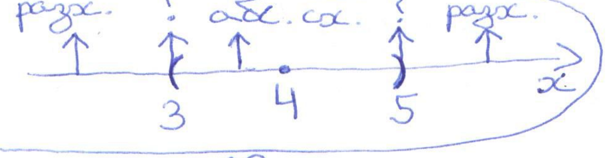
Зад. 4 Намерете областта на сходимост на степенния ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n^2+4n+2}{5n^3+6}(x-4)^n$ (1)

Решение: Центърът на (1) е 4.

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{n^2+4n+2}{5n^3+6}}{\frac{(n+1)^2+4(n+1)+2}{5(n+1)^3+6}}\right| =$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+4n+2}{(n+1)^2+4n+6}\cdot\frac{5(n+1)^3+6}{5n^3+6}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\frac{4}{n}+\frac{2}{n^2}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2+\frac{4}{n}+\frac{6}{n^2}}\cdot\frac{5\left(1+\frac{1}{n}\right)^3+\frac{6}{n^3}}{5+\frac{6}{n^3}}\right)=1.1=1.$$



Интервалът на сходимост на (1) е (3,5).

$x=5$: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n^2+4n+2}{5n^3+6} \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ Сл. при $x=5$ (1) е разходящ.

$$\frac{\frac{n^2+4n+2}{5n^3+6}}{\frac{1}{n}} = \frac{n^3+4n^2+2n}{5n^3+6} = \frac{1+\frac{4}{n}+\frac{2}{n^2}}{5+\frac{6}{n^3}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{5}>0$$

$x=3$: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n^2+4n+2}{5n^3+6}$

(5) Лема Ако $P(x)$ и $Q(x)$ са полиноми и $\deg P < \deg Q$, то $\frac{P(n)}{Q(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ и то монотонно от известно място нататък.

Лемата е доказана в упражненията по ДИС-2, а на контролното само трябва да се формулира.

Съгласно лемата, $\frac{n^2+4n+2}{5n^3+6} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ и то монотонно от известно място нататък.

Тогава, според критерия на Лайбниц,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+4n+2}{5n^3+6}$$ е сходящ.

Така при $x=3$ (1) е сходящ.

Отг. на зад. 4: Областта на сходимост на (1) е $[3, 5)$.