Линейни изображения

Нека V_1 и V_2 са линейни пространства над поле F.

Опр// Изображението $\varphi: V_1 \to V_2$

$\varphi: V_1 \to V_2$ е линейно изображение, ако:

1) $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$, $\forall\, a, b \in V_1$
2) $\varphi(\lambda a) = \lambda \varphi(a)$, $\forall\, a \in V_1$, $\forall \lambda \in F$

Пример 1) Нека $\Theta: V \to \{O\}$ $\quad \Theta(x) = O$ е линейно

2) $k < n$ $\quad \varphi: F^n \to F^k : \varphi((a_1, .., a_n)) = (a_1, .., a_k) \in F^k$

3) V има фиксиран базис $e_1, .., e_n$ над поле F

вземане на координати $\sigma: V \to F^n : \sigma(a_1 e_1 + .. + a_n e_n) = (a_1, .., a_n) \in F^n$

$\sigma(x+y) = \sigma(x) + \sigma(y)$ и $\sigma(\lambda x) = \lambda \sigma(x)$

4) Нека $l_1, .., l_k : F^n \to F$ са $\underline{\underline{k}}$ линейни функции

$l_i(x_1, .., x_n) = a_{i1} x_1 + .. + a_{in} x_n$

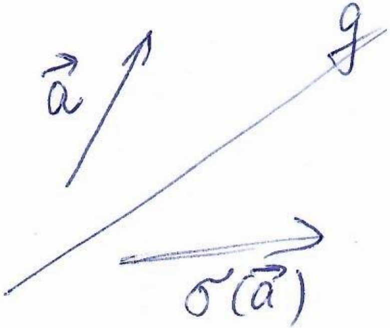
$\varphi: F^n \to F^k \quad \varphi(x) = (l_1(x), .., l_k(x))$

$$\left| \begin{array}{l} l_1 = a_{11} x_1 + .. + a_{1n} x_n \\ \vdots \\ l_k = a_{k1} x_1 + .. + a_{kn} x_n \end{array} \right.$$

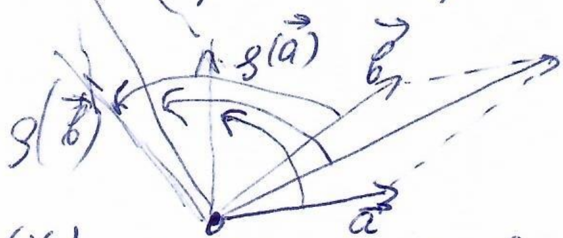
стойността на x заместено в системата

Линейни изображения II

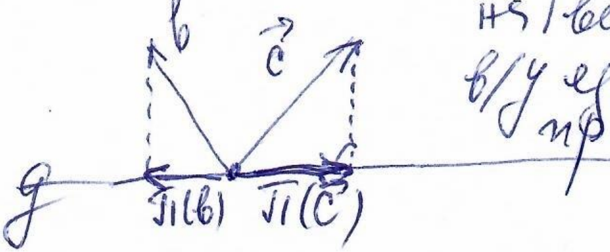
Нека $\mathbb{R}^2$ - лин. пр-во на векторите в равнината



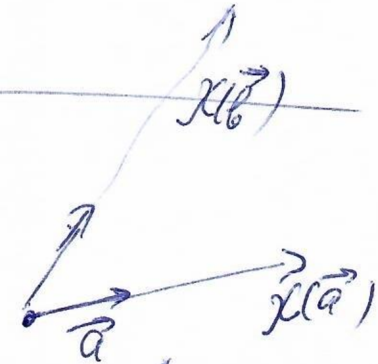
σ - осева симетрия относно фикс. права



$\varrho(X)$ - ротация на векторите относно една фиксирана точка в равнината



π - проекцията на векторите в/у една права



хомотетия с фиксиран коефициент

Линейни изображения

Нека $\varphi: V_1 \to V_2$ е линейно изображение

1) $\varphi(\theta_{(1)}) = \theta_{(2)}$ $\qquad (\varphi(\theta) = \varphi(0.\theta) = 0\varphi(\theta) = \theta)$

2) Нека $a_1, \dots, a_s \in V_1$, $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in F$

$\varphi(\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_s a_s) = \lambda_1 \varphi(a_1) + \dots + \lambda_s \varphi(a_s)$

3) $\varphi(-a) = -\varphi(a)$ $\qquad (\varphi(-a) = \varphi(-1a) = -1\varphi(a) = -\varphi(a))$

4) Ако $e_1, \dots, e_n$ е базис на V_1, тогава

$\varphi(a) = a_1\varphi(e_1) + \dots + a_n\varphi(e_n)$

$a = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$

и φ се определя от стойностите на $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$

Пример: $V = \mathbb{R}[x]$ $\qquad \partial: \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$

$\partial(f) = f'$ $\quad : \partial(f+g) = (f+g)' = f' + g' = \partial(f) + \partial(g)$

$\partial(\lambda f) = (\lambda f)' = \lambda (f)' = \lambda \partial(f)$

3'

<u>Св-во</u>/ Нека $\varphi: V_1 \to V_2$ е линейно изобр.

Ако $a_1, \dots, a_k \in V_1$ са линейно зависими тогава $\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_k)$ също са лин. зависими.

<u>Д-во</u> $a_1, \dots, a_k$ ЛЗ $\Rightarrow \exists \lambda_1, \dots, \lambda_k \neq 0, \dots, 0$ и $\lambda_i \in F$

$$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k = \theta$$

$$\Downarrow$$

$$\varphi(\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k) = \varphi(\theta)$$

$$\Rightarrow \lambda_1 \varphi(a_1) + \dots + \lambda_k \varphi(a_k) = \theta$$

$\Rightarrow \varphi(a_1), \dots, \varphi(a_k)$ са ЛЗ

<u>Забел.</u>

T// Нека V_1, V_2 лин. пр-ва над поле F и $\dim V_1 = n$ и $e_1, \dots, e_n$ базис на V_1. Ако $b_1, \dots, b_n$ са произволни вектори от V_2,
$\Rightarrow$ съществува единствено лин. изображение
$\varphi: V_1 \to V_2$, за което $\varphi(e_i) = b_i$, $i = 1, \dots, n$

<u>Д-во //</u>

(!) Нека $\varphi: V_1 \to V_2$ и $\psi: V_1 \to V_2$ са линейни изображения $\varphi(e_i) = \psi(e_i) = b_i$

Нека $a = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n \in V_1$ — произволен

$$\varphi(a) = \alpha_1 \varphi(e_1) + \dots + \alpha_n \varphi(e_n) = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n$$

$$\psi(a) = \alpha_1 \psi(e_1) + \dots + \alpha_n \psi(e_n) = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n$$

$$\Rightarrow \varphi(a) = \psi(a), \ \forall a \in V_1$$

$$\Rightarrow \varphi = \psi$$

3) Нека $b_1, \dots, b_n$ произволни от V_2

$e_1, \dots, e_n$ - базис на V_1

Дефинираме изображение $\varphi : V_1 \to V_2$

$a = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n \Rightarrow \varphi(a) = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n \in V_2$

Проверяваме, че φ е линейно изображение

Ако $c = \gamma_1 e_1 + \dots + \gamma_n e_n \in V_1$

$\varphi(a+c) = \varphi((\alpha_1+\gamma_1)e_1 + \dots + (\alpha_n+\gamma_n)e_n) =$

$= (\alpha_1+\gamma_1) b_1 + \dots + (\alpha_n+\gamma_n) b_n =$

$= (\alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n) + (\gamma_1 b_1 + \dots + \gamma_n b_n) =$

$= \varphi(a) + \varphi(c)$

$\varphi(\lambda a) = \varphi(\lambda\alpha_1 e_1 + \dots + \lambda\alpha_n e_n) = \lambda_1\alpha_1 b_1 + \dots + \lambda_n\alpha_n b_n =$

$= \lambda(\alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n) = \lambda\varphi(a)$

$\Rightarrow \varphi$ е линейно изображение

Зад/ Да се намери линейно изображение (6)
$\varphi: F^3 \to F^2$ за което $\varphi(e_1)=(1,2)$; $\varphi(e_2)=(3,4)$; $\varphi(e_3)=(5,6)$

Р-е// $\varphi(x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3)=\varphi(x_1,x_2,x_3)=x_1(1,2)+x_2(3,4)+x_3(5,6)=$
$=(x_1+3x_2+5x_3,\ 2x_1+4x_2+5x_6)$

т.е. $\left|\begin{array}{l} l_1: x_1+3x_2+5x_3=l_1(x) \\ l_2: 2x_1+4x_2+5x_3=l_2(x) \end{array}\right.$

Опр.// Ако V_1 и V_2 са линейни пространства над поле F, то φ е изоморфизъм, ако
1) $\varphi: V_1 \to V_2$ линейно изображение
2) φ е биекция $\left\{\begin{array}{l} \text{сюрекция}: \forall y \in V_2 \Rightarrow \exists x \in V_1: \varphi(x)=y \\ \text{инекция}: \text{Ако } \varphi(x_1)=\varphi(x_2) \Rightarrow x_1=x_2 \end{array}\right.$

Тогава $V_1 \cong V_2$

Св-ва 1) $V \cong V$ $(id: V \to V: id(x)=x)$
2) Ако $V_1 \cong V_2 \Rightarrow V_2 \cong V_1$
$V_1 \cong V_2 \Rightarrow \exists\, \varphi: V_1 \to V_2$ биекция и линейно изобр.
$\Rightarrow \exists\, \varphi^{-1}: V_2 \to V_1$. Нека $u, t \in V_2 \Rightarrow \exists\, a, b \in V_1$
$\left|\begin{array}{l} u=\varphi(a) \\ t=\varphi(b) \end{array}\right. \Rightarrow \varphi(a+b)=u+t \Rightarrow \left|\begin{array}{l} \varphi^{-1}(u+t)=a+b= \\ =\varphi^{-1}(u)+\varphi^{-1}(t) \end{array}\right.$

$\begin{array}{l} u=\varphi(a) \\ \lambda u=\varphi(\lambda a) \end{array} \Rightarrow \varphi^{-1}(\lambda u)=\lambda a=\lambda\varphi^{-1}(u)$

празна страница

I// Нека F е поле и V_1 и V_2 крайномерни пр-ва над F. Тогава е изпълнено:

$$V_1 \cong V_2 \iff \dim V_1 = \dim V_2$$

Д-во/

($\Rightarrow$) Нека $V_1 \cong V_2 \Rightarrow \exists\, \varphi : V_1 \to V_2$ изоморфизъм

Нека $e_1, \dots, e_n$ базис на V_1

Ще докажем, че $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ - базис на V_2

— Нека $b \in V_2$ - произволен

От φ - биекция $\Rightarrow \exists\, a \in V_1 : \varphi(a) = b$

ако $a = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$

$\Rightarrow b = \varphi(a) = a_1 \varphi(e_1) + \dots + a_n \varphi(e_n) \in \ell(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$

$\Rightarrow \ell(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) = V_2$

— Допускаме, че $\beta_1, \dots, \beta_n \in F$:

$\beta_1 \varphi(e_1) + \dots + \beta_n \varphi(e_n) = \theta$ от φ - линейно $\Rightarrow$

$\varphi(\beta_1 e_1 + \dots + \beta_n e_n) = \varphi(\theta)$ от φ биекция $\Rightarrow$

$\Rightarrow \beta_1 e_1 + \dots + \beta_n e_n = \theta$ но $e_1, \dots, e_n$ са ЛНЗ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_n = 0 \Rightarrow \varphi(e_1) \dots \varphi(e_n)$ ЛНЗ

$\Rightarrow \varphi(e_1) \dots \varphi(e_n)$ базис на V_2

($\Leftarrow$) Нека $\dim V_1 = \dim V_2 = n$ и $e_1, \dots, e_n$ базис на V_1
$g_1, \dots, g_n$ базис на V_2

От Th $\Rightarrow \exists!$ линейно изобр. $\varphi : V_1 \to V_2 : \varphi(e_i) = g_i$

Ще док., че φ е биекция

- Нека $b \in V_2 \Rightarrow b = \beta_1 g_1 + \dots + \beta_n g_n = \beta_1 \varphi(e_1) + \dots + \beta_n \varphi(e_n)$
$= \varphi(\beta_1 e_1 + \dots + \beta_n e_n)$.

$\Rightarrow \varphi$ е сюрекция

- Нека $a_1, a_2 \in V_1$ такива, че

$\varphi(a_1) = \varphi(a_2)$ $\qquad a_1 = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$
$\qquad a_2 = \mu_1 e_1 + \dots + \mu_n e_n$

$\Downarrow$

$\varphi(\lambda e_1 + \dots + \lambda_n e_n) = \varphi(\mu_1 e_1 + \dots + \mu_n e_n)$

$\lambda_1 g_1 + \dots + \lambda_n g_n = \mu_1 g_1 + \dots + \mu_n g_n$

$\Rightarrow (\lambda_1 - \mu_1) g_1 + \dots + (\lambda_n - \mu_n) g_n = \mathcal{O}$

$g_1, \dots, g_n$ са ЛНЗ $\Rightarrow \lambda_1 - \mu_1 = 0, \dots, \lambda_n - \mu_n = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = \mu_1; \dots; \lambda_n = \mu_n \Rightarrow a_1 = a_2$

$\Rightarrow \varphi$ е инекция

$\Rightarrow \varphi$ е биекция $\Rightarrow V_1 \cong V_2$