ФН: 82134 Т20

Ортогонален оператор

Определение: ако за V(Евклидово) имаме $\varphi: V \to V$ - ортогонален

$\Rightarrow$ 1) φ е линеен

2) $(\varphi(a), \varphi(b)) = (a, b)$ за $\forall a, b \in V$

Свойства на ортогонален лин. оп. φ във V(Евклидово):

1. Щом $(\varphi(a), \varphi(a)) = (a, a) = |a|^2 \Rightarrow \sqrt{(\varphi(a), \varphi(a))} = \sqrt{(a,a)} = |a|, \forall a \in V$
т.е. φ запазва дължините. $\Rightarrow = |\varphi(a)|$

2. $\operatorname{Ker} \varphi = \{\theta\}$

3. φ изпраща ортонормиран базис в ортонормиран базис (от запазване на ск. произведение) - за $\dim V < \infty$

4. Ако g е собствен вектор за стойност λ, то $\lambda = \pm 1$
- от $|\varphi(g)| = |\lambda g| = |\lambda| . |g|$ за $g \neq \theta$

5. Ако v_1, v_2 са собствени вектори за различни собствени стойности $\Rightarrow v_1 \perp v_2$

6. $U = \ell(g)$ (g - собствен вектор) е φ-инвариантно
$U^{\perp}$ също е φ-инвариантно

Опр: 82134

Ортогонална матрица

Определение:

A е ортогонална $(A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})) \Leftrightarrow A^{-1} = A^t$ или $A.A^t = E$

Свойства на ортогонална матрица A:

1. $\det A = \pm 1$ | $A.A^t = E \Rightarrow (\det A)^2 = 1$
2. A^t е ортогонална
3. Редовете на A са 2 по 2 ортогонални и с дължина 1 $\Rightarrow$ образуват ортонормиран базис на $\mathbb{R}^n$
4. От $A^{-1} = A^t$ ~~и~~ 3. $\Rightarrow$ и стълбовете образуват ортонормиран базис
5. A е матрица на прехода от ортонорм. ~~в~~ към ортонорм. базис
6. A, B – ортогонални $\Rightarrow AB$ също

T/ Нека φ е лин. оп. във V (Евклидово)

φ е ортогонален $\Leftrightarrow$ спрямо ортонормиран базис φ има ортогонална матрица

Доказателство:

$\Rightarrow$ Нека $e_1, \dots, e_n$ – ортонорм. базис и $\varphi(e_i) = a_{1i}e_1 + \dots + a_{ni}e_n$

(φ – ортогонален оп.)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Нека вземем $A^t A = B$ и $b_{ij} = a_{1i}a_{1j} + \dots + a_{ni}a_{nj} = \underset{(e_i, e_j)}{\underset{\|}{(\varphi(e_i), \varphi(e_j))}}$

$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$ – символ на Кронекер

ФН: 82134 T20

Тоест в матрицата B имаме 1 на места i,i и 0 на i,j $i \neq j$

$\Rightarrow B = E$ и $A^t A = E \Rightarrow A^t = A^{-1}$ и A е ортогонална

$\Leftarrow$ Нека матрицата на φ е ортогонална и $e_1, \dots, e_n$ – ортонорм. базис, имаме $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ – ортог.

Отново $\varphi(e_i) = a_{1i}e_1 + \dots + a_{ni}e_n$ и нека разпишем:

$(\varphi(e_i), \varphi(e_j)) = a_{1i}a_{1j} + \dots + a_{ni}a_{nj}$ $\rightarrow$ това можем да го разгледаме като елемент от матрица на място i,j, която се получава от $A^t A$, но този елемент отново е равен на δ_{ij} тоест $0, i \neq j$ и $1, i = j$, но това също е и скаларното произведение на двойка вектори от ортонормирания базис $\Rightarrow (\varphi(e_i), \varphi(e_j)) = (e_i, e_j)$

$\Rightarrow \varphi$ е ортогонален