Лекция 13.5.2021

1 Отсечки и полупространства — продължение

Припомняне от миналия път

Нека $\mathcal{A}$ е афинно пространство, моделирано върху линейното пространство U.

Нека P_0 и P_1 са различни точки в геометричната равнина или геометричното пространство. Тогава

$$\begin{array}{lccccl} P \in & \text{правата} & P_0P_1 & \Leftrightarrow & \exists \lambda \in \mathbb{R}: & \overrightarrow{P_0P} = \lambda \overrightarrow{P_0P_1}, \\ P \in & \text{отворената отсечка} & P_0P_1 & \Leftrightarrow & \exists \lambda \in (0,1): & \overrightarrow{P_0P} = \lambda \overrightarrow{P_0P_1}, \\ P \in & \text{затворената отсечка} & P_0P_1 & \Leftrightarrow & \exists \lambda \in [0,1]: & \overrightarrow{P_0P} = \lambda \overrightarrow{P_0P_1}. \end{array}$$

Това мотивира следната дефиниция.

Определение 1 Нека P_0 и P_1 са различни точки от $\mathcal{A}$.

$$\begin{array}{ll} \textit{Отворена отсечка с краища } P_0 \textit{ и } P_1 \text{ е} & \{P \in \mathcal{A} : \ \exists \lambda \in (0,1): \ \overrightarrow{P_0P} = \lambda \overrightarrow{P_0P_1}\}. \\ \textit{Затворена отсечка с краища } P_0 \textit{ и } P_1 \text{ е} & \{P \in \mathcal{A} : \ \exists \lambda \in [0,1]: \ \overrightarrow{P_0P} = \lambda \overrightarrow{P_0P_1}\}. \end{array}$$

Считаме, че отворената отсечка P_0P_0 е $\emptyset$, а затворената отсечка P_0P_0 е $\{P_0\}$.

Твърдение 1 *Нека P_0 и P_1 са различни точки от $\mathcal{A}$. Тогава отворената и затворената отсечка P_0P_1 са подмножества на правата през P_0 и P_1.*

Твърдение 2 *Нека P_0 и P_1 са различни точки от $\mathcal{A}$, а $O \in \mathcal{A}$ е произволна точка. Тогава:*

$$\begin{array}{lll} \textit{отв. отс. } P_0P_1 & = \{P \in \mathcal{A} : \exists \lambda \in (0,1): & \overrightarrow{OP} = (1-\lambda)\overrightarrow{OP_0} + \lambda \overrightarrow{OP_1}\} \\ & = \{P \in \mathcal{A} : \exists \lambda_0 > 0, \lambda_1 > 0, \lambda_0 + \lambda_1 = 1: & \overrightarrow{OP} = \lambda_0 \overrightarrow{OP_0} + \lambda_1 \overrightarrow{OP_1}\}, \\ \textit{затв. отс. } P_0P_1 & = \{P \in \mathcal{A} : \exists \lambda \in [0,1]: & \overrightarrow{OP} = (1-\lambda)\overrightarrow{OP_0} + \lambda \overrightarrow{OP_1}\} \\ & = \{P \in \mathcal{A} : \exists \lambda_0 \geq 0, \lambda_1 \geq 0, \lambda_0 + \lambda_1 = 1: & \overrightarrow{OP} = \lambda_0 \overrightarrow{OP_0} + \lambda_1 \overrightarrow{OP_1}\}. \end{array}$$

Следствие 1 *Нека $P_0, P_1 \in \mathcal{A}$. Тогава отворените отсечки P_0P_1 и P_1P_0 съвпадат, а също и затворените отсечки P_0P_1 и P_1P_0 съвпадат.*

Твърдение 3 *Нека $K = Oe_1 \dots e_n$ е афинна координатна система в $\mathcal{A}$ и спрямо нея различните точки P_0 и P_1 имат координати $P_0(x^0)$, $P_1(x^1)$. Тогава спрямо K параметрични уравнения на*

$$\begin{array}{llll} \textit{отворената отсечка} & P_0P_1 & \textit{са} & x = (1-\lambda)x^0 + \lambda x^1, \quad \lambda \in (0,1), \\ \textit{затворената отсечка} & P_0P_1 & \textit{са} & x = (1-\lambda)x^0 + \lambda x^1, \quad \lambda \in [0,1], \end{array}$$

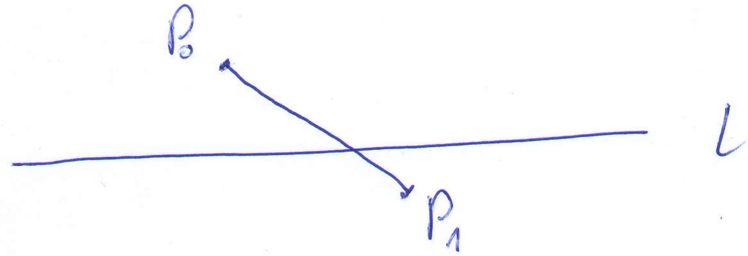
или еквивалентно,

$$\begin{array}{lll} \textit{отворената отсечка} & P_0P_1: & x = \lambda_0 x^0 + \lambda_1 x^1, \quad \lambda_0 > 0, \lambda_1 > 0, \ \lambda_0 + \lambda_1 = 1, \\ \textit{затворената отсечка} & P_0P_1: & x = \lambda_0 x^0 + \lambda_1 x^1, \quad \lambda_0 \geq 0, \lambda_1 \geq 0, \ \lambda_0 + \lambda_1 = 1. \end{array}$$

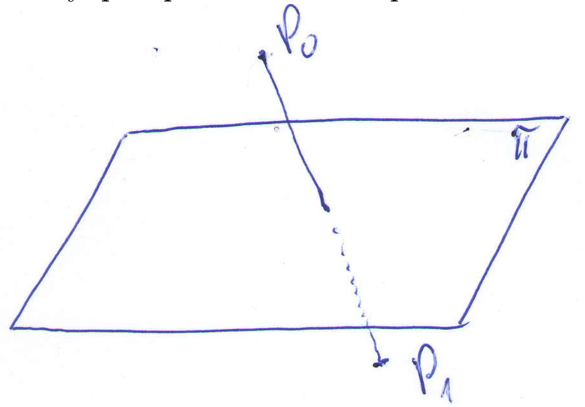
Дотук беше припомнянето от миналия път.

Отсечки и полупространства — продължение

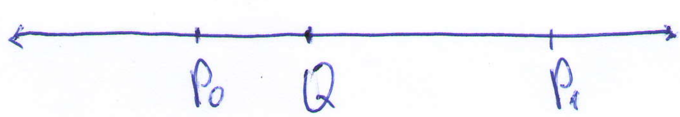
Ако l е права в геометричната равнина, то тя разделя равнината на две подмножества – отворени полуравнини, така че точките P_0 и P_1 са от различни отворени полуравнини $\Leftrightarrow$ отворената отсечка P_0P_1 пресича l.



Аналогично, ако π е равнина в геометричното пространство, то тя разделя пространството на две подмножества – отворени полупространства, така че точките P_0 и P_1 са от различни отворени полупространства $\Leftrightarrow$ отворената отсечка P_0P_1 пресича π.



Аналогично, ако Q е точка върху геометрична права, то тя разделя правата на две подмножества – отворени лъчи, така че точките P_0 и P_1 са от различни отворени лъчи $\Leftrightarrow$ отворената отсечка P_0P_1 съдържа Q, тоест пресича $\{Q\}$.



Ще намерим аналог на тия неща в n-мерно афинно пространство.

Твърдение 4 *Нека $K = Oe_1 \dots e_n$ е афинна координатна система в $\mathcal{A}$ и спрямо нея хиперравнината B има общо уравнение $a_1x_1 + \dots + a_nx_n + b = 0$. Означаваме $F(x) = a_1x_1 + \dots + a_nx_n + b$. Нека нележащите в B точки P_0 и P_1 имат спрямо K координати $P_0(x^0)$, $P_1(x^1)$. Тогава отворената отсечка P_0P_1 пресича $B \Leftrightarrow F(x^0)F(x^1) < 0$ и не пресича $B \Leftrightarrow F(x^0)F(x^1) > 0$.*

Доказателство: Тъй като $P_0 \notin B$ и $P_1 \notin B$, то $F(x^0) \neq 0$ и $F(x^1) \neq 0$ и следователно $F(x^0)F(x^1) \neq 0$.

Трябва да разгледаме случаите $P_0 = P_1$ и $P_0 \neq P_1$ поотделно, защото параметричното уравнение на отворената отсечка от Твърдение 3 не важи при $P_0 = P_1$.

Ако $P_0 = P_1$, то твърдението очевидно е изпълнено: Имаме, че отворената отсечка P_0P_1 е $\emptyset$ и следователно не пресича B и също $F(x^0)F(x^1) = F(x^0)^2 > 0$.

Нека $P_0 \neq P_1$. Тогава е достатъчно да докажем, че
отворената отсечка P_0P_1 пресича $B \Leftrightarrow F(x^0)F(x^1) < 0$,
защото от това и $F(x^0)F(x^1) \neq 0$ веднага следва, че
отворената отсечка P_0P_1 не пресича $B \Leftrightarrow F(x^0)F(x^1) > 0$.

Тъй като B има спрямо K уравнение $F(x) = 0$, а по Твърдение 3 отворената отсечка P_0P_1 има спрямо K параметрично уравнение $x = (1-\lambda)x^0 + \lambda x^1,\ \lambda \in (0,1)$, то отворената отсечка P_0P_1 пресича $B \Leftrightarrow \exists \lambda \in (0,1):\ F((1-\lambda)x^0 + \lambda x^1) = 0$.

Имаме

$$F((1-\lambda)x^0+\lambda x^1) = \sum_{i=1}^{n} a_i((1-\lambda)x_i^0+\lambda x_i^1) + \underbrace{b}_{(1-\lambda)b+\lambda b}$$

$$= (1-\lambda)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^0 + b\right) + \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^1 + b\right) = (1-\lambda)F(x^0) + \lambda F(x^1).$$

Следователно
отворената отсечка P_0P_1 пресича $B \Leftrightarrow \exists \lambda \in (0,1):\ (1-\lambda)F(x^0) + \lambda F(x^1) = 0$
$\Leftrightarrow \exists \lambda \in (0,1):\ (F(x^1) - F(x^0))\lambda + F(x^0) = 0$, тоест когато уравнението
$(F(x^1) - F(x^0))\lambda + F(x^0) = 0$ има решение $\lambda \in (0,1)$.

Ще използваме следната лема, чието доказателство е тривиално и всеки може да го направи сам.

Лема 1 *Нека $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ като $c < d$. Нека $f(\lambda) = a\lambda + b$. Тогава уравнението $f(\lambda) = 0$ има решение $\lambda \in (c,d) \Leftrightarrow f(c)f(d) < 0$ или $f \equiv 0$ (тоест $a = 0 = b$).*

Прилагаме тая лема за $f(\lambda) = (F(x^1) - F(x^0))\lambda + F(x^0)$ и $(c,d) = (0,1)$. Тъй като $b = F(x^0) \neq 0$, то получаваме, че
$f(\lambda) = 0$ има решение $\lambda \in (0,1) \Leftrightarrow f(0)f(1) < 0 \Leftrightarrow F(x^0)F(x^1) < 0$.
Следователно отворената отсечка P_0P_1 пресича $B \Leftrightarrow F(x^0)F(x^1) < 0$. □

Определение 2 Нека B е хиперравнина в $\mathcal{A}$. За нележащите в B точки P_0 и P_1 пишем $P_0 \sim P_1$, ако отворената отсечка P_0P_1 не пресича B. (Това е временно означение — докато стигнем до определението на полупространствата Определение 3.)

Твърдение 5 *Нека B е хиперравнина в $\mathcal{A}$. Тогава:*

1. *Дефинираната по-горе релация $\sim$ е релация на еквивалентност в $\mathcal{A} \setminus B$.*

2. *Класовете на еквивалентност относно $\sim$ са два: ако $P_0 \notin B$ е фиксирана точка, то те са $[P_0] = \{P \notin B : P \sim P_0\}$ и $\{P \notin B : P \not\sim P_0\}$.*

Доказателство: Фиксираме една афинна координатна система K. Координатите на всички точки ще бъдат спрямо нея. Нека $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + b = 0$ е общо уравнение на B спрямо K. Означаваме $F(x) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + b$. От Твърдение 4 имаме, че $P_0(x^0) \sim P_1(x^1) \Leftrightarrow F(x^0)F(x^1) > 0$, тоест когато $F(x^0)$ и $F(x^1)$ имат еднакви знаци.

1. Трябва да се докаже, че $\sim$ е рефлексивна, симетрична и транзитивна.

рефлексивност Нека $P_0(x^0) \in \mathcal{A} \setminus B$. Тъй като $F(x^0)$ и $F(x^0)$ имат еднакви знаци, то $P_0 \sim P_0$. Това си беше ясно и без Твърдение 4, защото отворената отсечка P_0P_0 е $\emptyset$ и значи не пресича B.

симетричност Нека $P_0(x^0), P_1(x^1) \in \mathcal{A} \setminus B$ и $P_0 \sim P_1$. Следователно $F(x^0)$ и $F(x^1)$ имат еднакви знаци. Тогава и $F(x^1)$ и $F(x^0)$ имат еднакви знаци и значи $P_1 \sim P_0$. Това си беше ясно и без Твърдение 4, защото отворените отсечки P_0P_1 и P_1P_0 съвпадат и щом отворената отсечка P_0P_1 не пресича B, то и отворената отсечка P_1P_0 не пресича B.

транзитивност Нека $P_0(x^0), P_1(x^1), P_2(x^2) \in \mathcal{A} \setminus B$ и $P_0 \sim P_1$, $P_1 \sim P_2$. Следователно $F(x^0)$ и $F(x^1)$ имат еднакви знаци и $F(x^1)$ и $F(x^2)$ имат еднакви знаци. Тогава и $F(x^0)$ и $F(x^2)$ имат еднакви знаци и значи $P_0 \sim P_2$.

Следователно $\sim$ е релация на еквивалентност.

2. Множеството $\{P \notin B : P \sim P_0\}$ е клас на еквивалентност, а именно класът на P_0. Значи трябва да се докаже, че и множеството $\{P \notin B : P \not\sim P_0\}$ също е клас на еквивалентност.

   Тъй като $\sim$ е релация на еквивалентност, $\mathcal{A} \setminus B$ се разбива на класове на еквивалентност. Един от тях е класът на P_0. Следователно множеството от останалите точки, а именно $\{P \notin B : P \not\sim P_0\}$, е обединението на останалите класове на еквивалентност. Ако покажем, че всеки два елемента на $\{P \notin B : P \not\sim P_0\}$ са еквивалентни, то това множество ще се съдържа в един клас на еквивалентност. Така ще получим, че $\{P \notin B : P \not\sim P_0\}$ е един клас на еквивалентност, освен ако е празно.

   Че всеки два елемента на $\{P \notin B : P \not\sim P_0\}$ са еквивалентни се вижда както погоре при транзитивността: Ако $P_0(x^0), P_1(x^1), P_2(x^2) \in \mathcal{A} \setminus B$ и $P_1 \not\sim P_0$ и $P_2 \not\sim P_0$, то $F(x^1)$ и $F(x^0)$ имат различни знаци и $F(x^2)$ и $F(x^0)$ имат различни знаци. Тогава $F(x^1)$ и $F(x^2)$ имат еднакви знаци и значи $P_1 \sim P_2$.

   Остава да се докаже, че $\{P \notin B : P \not\sim P_0\}$ не е празно. Нека $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$. Да разгледаме точката P_λ с координатен вектор $x^0 + \lambda a$, където $\lambda \in \mathbb{R}$. Имаме

$$F(x^0 + \lambda a) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x_i^0 + \lambda a_i) + b = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^0 + b\right) + \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = F(x^0) + \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i^2.$$

Тъй като $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 > 0$, защото $a \neq 0$, то

$$F(x^0 + \lambda a) \begin{cases} > 0 \quad \text{при } \lambda > -\dfrac{F(x^0)}{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2}, \\ < 0 \quad \text{при } \lambda < -\dfrac{F(x^0)}{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2}. \end{cases}$$

Значи какъвто и да е знакът на $F(x^0)$ можем да изберем λ така, че $F(x^0 + \lambda a)$ да има обратния знак, тоест да имаме $P_\lambda \not\sim P_0$. Следователно $\{P \notin B : P \not\sim P_0\}$ не е празно.

Значи освен класът на P_0, тоест $\{P \notin B : P \sim P_0\}$, има още точно един клас на еквивалентност, а именно $\{P \notin B : P \not\sim P_0\}$. $\square$

Определение 3 Нека B е хиперравнина в $\mathcal{A}$. Класовете на еквивалентност относно дефинираната по-горе релация $\sim$ се наричат *отворени полупространства относно* B. *Затворено полупространство относно* B е множество, състоящо се от точките на отворено полупространство относно B и от точките на B.

Забележка 1 От горната дефиниция получаваме, че $P_0 \sim P_1 \Leftrightarrow P_0$ и P_1 са от едно и също отворено полупространство относно B.

Теорема 1 *Нека $K = Oe_1 \dots e_n$ е афинна координатна система в $\mathcal{A}$ и спрямо нея хиперравнината B има общо уравнение $a_1x_1 + \dots + a_nx_n + b = 0$, а точките P_0 и P_1 имат координати $P_0(x^0)$, $P_1(x^1)$. Означаваме $F(x) = a_1x_1 + \dots + a_nx_n + b$. Тогава:*

1. *P_0 и P_1 са от различни отворени полупространства спрямо $B \Leftrightarrow F(x^0)F(x^1) < 0$ (тоест когато $F(x^0)$ и $F(x^1)$ имат различни знаци).*
   P_0 и P_1 са от едно и също отворено полупространство спрямо $B \Leftrightarrow F(x^0)F(x^1) > 0$ (тоест когато $F(x^0)$ и $F(x^1)$ имат еднакви знаци).

2. *Отворените полупространства относно B са множествата $\{P(x) \in \mathcal{A} : F(x) > 0\}$ и $\{P(x) \in \mathcal{A} : F(x) < 0\}$.*

Съответните твърдения за затворени полупространства са същите, като вместо > 0 и < 0 се пише ≥ 0 и ≤ 0.

Доказателство:

1. В левите страни на двете еквивалентности се иска P_0 и P_1 да са от отворени полупространства и значи $P_0, P_1 \notin B$. В десните им страни се иска $F(x^0)F(x^1) \neq 0$, от което следва $F(x^0) \neq 0$, $F(x^1) \neq 0$ и значи пак $P_0, P_1 \notin B$. Следователно в 1. имаме $P_0, P_1 \notin B$ и като се вземат предвид дефинициите твърдението се свежда до Твърдение 4.

2. Нека $P_0(x^0)$ е една фиксирана точка. Тогава от 2. на Твърдение 5 отворените полупространства относно B са $\{P \notin B : P \sim P_0\}$ (тоест това, в което лежи P_0) и $\{P \notin B : P \nsim P_0\}$ (тоест това, в което не лежи P_0). От 1. тогава следва, че те са
$\{P(x) :\ F(x)$ и $F(x^0)$ имат еднакви знаци$\}$ и
$\{P(x) :\ F(x)$ и $F(x^0)$ имат различни знаци$\}$, тоест това са множествата
(в същия ред, ако $F(x^0) > 0$, и в обратен ред, ако $F(x^0) < 0$)
$\{P(x) : F(x) > 0\}$ и $\{P(x) : F(x) < 0\}$.

За затворените полупространства: Тъй като затворено полупространство се състои от точките на отворено полупространство и точките на B, а точките на B са точките $P(x)$, за които $F(x) = 0$, то навсякъде по-горе трябва да се допуска и $= 0$, тоест навсякъде вместо строги неравенства трябва да се пишат нестроги. $\square$

Частни случаи:

1. $n = 2$.

   Теорема 1$'$ *Същата като Теорема 1, като координатите са две и вместо хиперравнина се пише права, а вместо полупространство – полуравнина.*

2. $n = 3$.

   Теорема 1$''$ *Същата като Теорема 1, като координатите са три и вместо хиперравнина се пише равнина.*

3. $n = 1$.

   В 1-мерно афинно пространство (тоест права) хиперравнините са 0-мерни, тоест са едноточкови множества. Върху геометрична права множествата, на които дадена точка разделя правата, се наричат лъчи, тоест в тоя случай полупространствата са лъчите (виж коментара преди Твърдение 4). Това мотивира следната дефиниция.

   Определение 4 Върху права, тоест 1-мерно афинно пространство, отворените (съответно затворените) полупространства, тоест полуправите, се наричат отворени (съответно затворени) лъчи.

   Теорема 1$'''$ *Същата като Теорема 1, като координатата е една и вместо „хиперравнината B има общо уравнение $a_1x_1+\cdots+a_nx_n+b = 0$“ се пише „точката Q се задава с уравнението $ax+b = 0$ (тоест $Q\left(-\frac{b}{a}\right)$)“, а вместо полупространство – лъч.*

Забележка 2 Многомерни хиперравнини (и по-общо – афинни подпространства) и полупространства се появяват например в задачата на линейното оптимиране. При нея се търси минимум или максимум на линейна функция върху многомерно изпъкнало многостенно множество, тоест върху множество, което се получава като сечение на краен брой полупространства. Един от класическите методи за решаване на тая задача е така нареченият симплекс-метод.

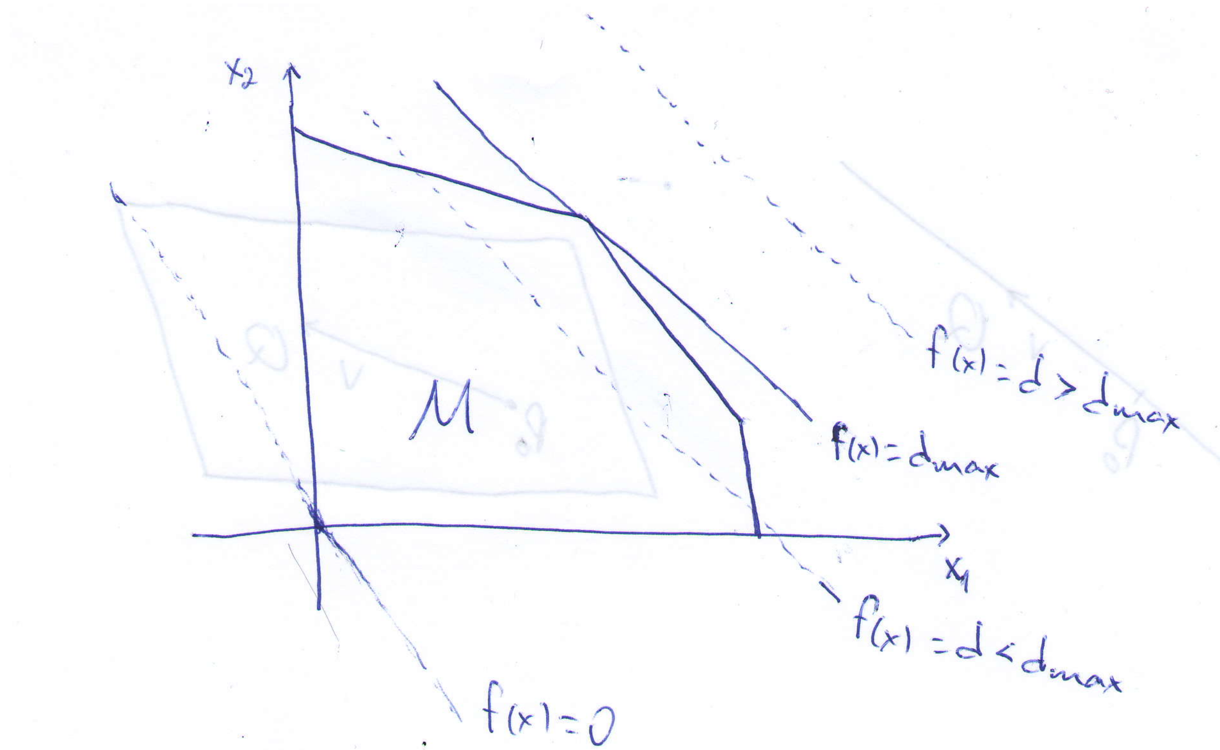
Задачата на линейното оптимиране възниква често при икономически задачи. Типичен пример е следният:

Завод произвежда n стоки, за което се използват m вида материали. Количеството от i-тия материал, което е необходимо за производството на единица от j-тата стока, е a_{ij}. В склада на завода е налично количество b_i от i-тия материал. Цената на j-тата стока е c_j. Задачата е какво количество x_j от j-тата стока трябва да се произведе за всяко $j = 1, \ldots, n$, така че да се получи най-голям приход.
Тъй като за производството на количество x_j от j-тата стока от i-тия материал ще бъде необходимо количество $a_{ij}x_j$, то общото необходимо количество от i-тия материал е $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$. При това полученият приход ще бъде $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$. Следователно множеството M от възможните стойности на $(x_1, \ldots, x_n)$ се задава със системата от неравенства

$$M : \left| \begin{array}{ll} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i, & i = 1, \ldots, m \\ x_j \geq 0, & j = 1, \ldots, n \end{array} \right.$$

и се търси максимумът върху M на функцията $f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$.

Всяко от неравенствата в системата задава затворено полупространство в $\mathbb{R}^n$, така че M е изпъкнало многостенно множество в $\mathbb{R}^n$. (M не е празно, защото поради естеството на задачата всички участващи коефициенти са ≥ 0, така че например $0 \in M$.) Множеството $f(x) = d$ пък е хиперравнина в $\mathbb{R}^n$. Като меним d хиперравнините се менят, но остават успоредни. И се търси най-голямото d, при което въпросната движеща се хиперравнина все още има обща точка с M. (Най-малкото е ясно — то е $d = 0$ и съответна обща точка е $x = 0$).
В практическите задачи n е голямо, а също и m. Но за нагледност можете да си нарисувате случая $n = 2$. Тогава сме в равнината, M е сечение на полуравнини. Така че M ще бъде изпъкнал многоъгълник в първи квадрант. Движещата се хиперравнина $f(x) = d$ ще бъде движеща се права, която с растенето на d се мести, грубо казано, в посока североизток. Интуитивно ясно е, че последната точка на контакт на движещата се права с M ще бъде връх на M (или цяла страна на M, но и в тоя случай имаме връх — върховете на тая страна).



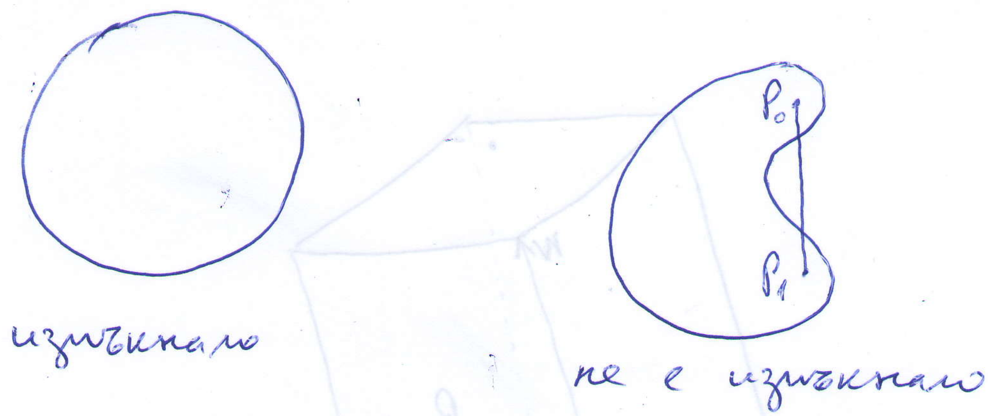
Същото е при произволно n и симплекс-методът (който, доколкото ми е известно, ще бъде учен в някоя от дисциплините в следващите курсове) е метод за последователно преминаване от връх на M в съседен връх (тръгвайки, да речем, от върха 0), така че на всяка стъпка стойността на f да расте. Когато това стане невъзможно, то максимумът е намерен, защото се оказва, че не може да има локален максимум, който не е глобален, тоест стойността на f в някой връх да е по-голяма от стойностите ѝ в съседните върхове, но в някой друг връх (несъседен) да е още по-голяма.
(Симплекс се нарича многомерният аналог на триъгълника в равнината и тетраедъра в пространството. Защо методът се нарича симплекс-метод не ми е съвсем ясно, защото въпреки че симплексите наистина са изпъкнали многостенни множества, в самия метод те не се появяват в явен вид.)

2 Изпъкнали множества

Нека $\mathcal{A}$ е афинно пространство, моделирано върху линейното пространство U.

Определение 5 Подмножеството C на $\mathcal{A}$ се нарича *изпъкнало*, ако за всеки две точки $P_0, P_1 \in C$ отсечката P_0P_1 лежи в C.

Забележка 3 В горната дефиниция няма значение дали се има предвид отворената или затворената отсечка P_0P_1, защото краищата ѝ P_0 и P_1 така или иначе са си в C.



Твърдение 6 *Ако B е афинно подпространство на $\mathcal{A}$ и $P_0, P_1 \in B$ са различни точки, то B съдържа правата, определена от P_0 и P_1.*

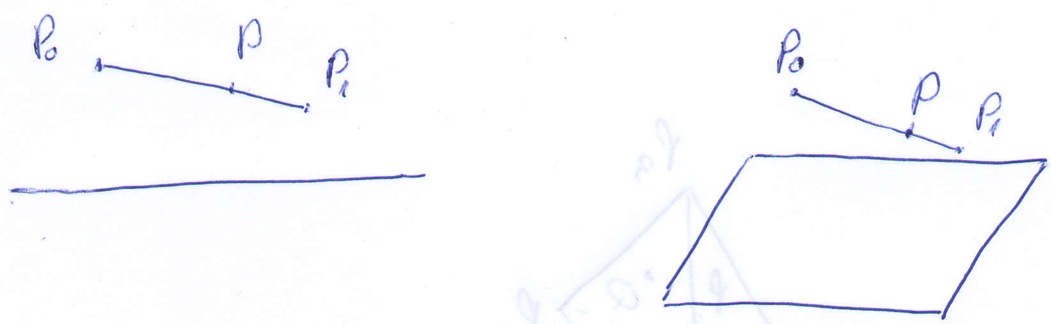
Доказателство: Тъй като B съдържа P_0 и P_1, а правата P_0P_1 е най-малкото афинно подпространство на $\mathcal{A}$, което ги съдържа, то B съдържа правата P_0P_1. □

Следствие 2 *Всяко афинно подпространство е изпъкнало множество.*

Доказателство: Всяко афинно подпространство съдържа отсечката, определена от всеки две свои точки, защото по Твърдение 6 съдържа определената от тях права, а правата, определена от две точки, съдържа отсечката, определена от тях. □

Твърдение 7 *Полупространствата (и отворените, и затворените) са изпъкнали множества.*

Доказателство: Ако ви е нужна някаква нагледна представа, можете да си мислите за полуравнина в геометричната равнина или полупространство в геометричното пространство.



Нека H е $\substack{\text{отворено}\\ \text{затворено}}$ полупространство относно хиперравнината B. Нека $K = Oe_1 \dots e_n$ е афинна координатна система в $\mathcal{A}$ и спрямо нея B има общо уравнение $F(x) = 0$, където $F(x) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + b$. Тогава $\substack{\text{отворените}\\ \text{затворените}}$ полупространства относно B са множествата $\{P(x) \in \mathcal{A} : F(x) \substack{>\\ \geq} 0\}$ и $\{P(x) \in \mathcal{A} : F(x) \substack{<\\ \leq} 0\}$. Тъй като и $-F(x) = 0$ е общо уравнение на B, можем да считаме, че $H = \{P(x) \in \mathcal{A} : F(x) \substack{>\\ \geq} 0\}$. Нека $P_0(x^0), P_1(x^1) \in H$. Следователно $F(x^0) \substack{>\\ \geq} 0$, $F(x^1) \substack{>\\ \geq} 0$. Нека $P(x)$ е от отворената отсечка P_0P_1. Следователно $x = (1-\lambda)x^0 + \lambda x^1$ за някое $\lambda \in (0, 1)$. Имаме

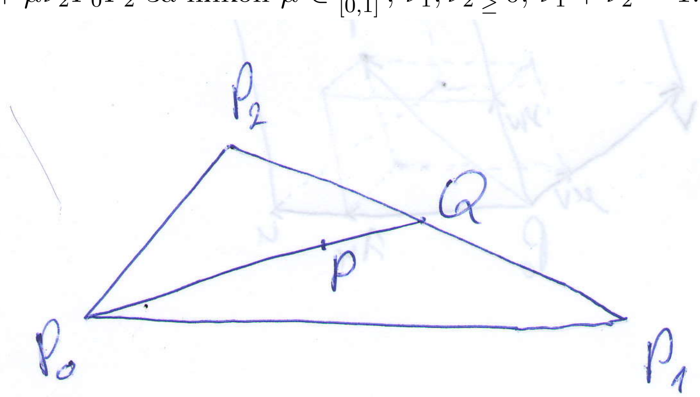
$$F\left((1-\lambda)x^0 + \lambda x^1\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i\left((1-\lambda)x_i^0 + \lambda x_i^1\right) + \underbrace{b}_{(1-\lambda)b+\lambda b}$$

$$= (1-\lambda)\left(\sum_{i=1}^{n} a_ix_i^0 + b\right) + \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} a_ix_i^1 + b\right) = \underbrace{(1-\lambda)}_{>0}\underbrace{F(x^0)}_{\substack{>\\ \geq}\,0} + \underbrace{\lambda}_{>0}\underbrace{F(x^1)}_{\substack{>\\ \geq}\,0} \substack{>\\ \geq} 0.$$

Значи $P \in H$. Това означава, че отворената отсечка P_0P_1 се съдържа в H. Следователно H е изпъкнало множество. □

Твърдение 8 *В геометричната равнина или геометричното пространство нека точките P_0, P_1, P_2 не са на една права и нека O е произволна точка. Тогава точката P лежи в $\substack{\text{отворения}\\ \text{затворения}}$ триъгълник $P_0P_1P_2$*
$\Leftrightarrow \exists \lambda_1, \lambda_2 \substack{>\\ \geq} 0,\ \lambda_1 + \lambda_2 \substack{<\\ \leq} 1$: $\overrightarrow{P_0P} = \lambda_1\overrightarrow{P_0P_1} + \lambda_2\overrightarrow{P_0P_2}$
$\Leftrightarrow \exists \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \substack{>\\ \geq} 0,\ \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1$: $\overrightarrow{OP} = \lambda_0\overrightarrow{OP_0} + \lambda_1\overrightarrow{OP_1} + \lambda_2\overrightarrow{OP_2}$.

Доказателство: P лежи в $\substack{\text{отворения}\\ \text{затворения}}$ триъгълник $P_0P_1P_2$
$\Leftrightarrow$ P лежи в $\substack{\text{отворената}\\ \text{затворената}}$ отсечка P_0Q за някоя точка Q от $\substack{\text{отворената}\\ \text{затворената}}$ отсечка P_1P_2
$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{P_0P} = \mu\overrightarrow{P_0Q}$ за някое $\mu \in \substack{(0,1)\\ [0,1]}$, където $\overrightarrow{P_0Q} = \nu_1\overrightarrow{P_0P_1} + \nu_2\overrightarrow{P_0P_2}$ за някои $\nu_1, \nu_2 \substack{>\\ \geq} 0$, $\nu_1 + \nu_2 = 1$
$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{P_0P} = \mu\nu_1\overrightarrow{P_0P_1} + \mu\nu_2\overrightarrow{P_0P_2}$ за някои $\mu \in \substack{(0,1)\\ [0,1]}$, $\nu_1, \nu_2 \substack{>\\ \geq} 0$, $\nu_1 + \nu_2 = 1$.



Нека P лежи в $\substack{\text{отворения}\\ \text{затворения}}$ триъгълник $P_0P_1P_2$. Тогава в горната еквивалентност полагаме $\lambda_i = \mu\nu_i$, $i = 1, 2$. Тогава $\overrightarrow{P_0P} = \lambda_1\overrightarrow{P_0P_1} + \lambda_2\overrightarrow{P_0P_2}$ и $\lambda_i = \mu\nu_i \substack{>\\ \geq} 0$, $i = 1, 2$, и $\lambda_1 + \lambda_2 = \mu(\nu_1 + \nu_2) = \mu \substack{<\\ \leq} 1$.

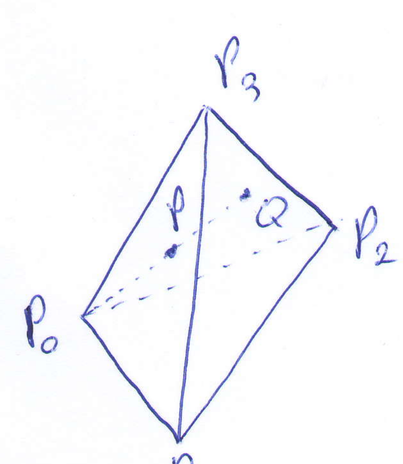
Обратно, нека $\overrightarrow{P_0P} = \lambda_1\overrightarrow{P_0P_1} + \lambda_2\overrightarrow{P_0P_2}$, където $\lambda_i \underset{\geq}{>} 0$, $i = 1, 2$, и $\lambda_1 + \lambda_2 \underset{\leq}{<} 1$. Нека $\mu = \lambda_1 + \lambda_2$. Следователно $\mu \in \substack{(0,1)\\ {[0,1]}}$. Ако $\mu = 0$, то $\lambda_i = 0$, $i = 1, 2$, и значи
$\overrightarrow{P_0P} = \lambda_1\overrightarrow{P_0P_1} + \lambda_2\overrightarrow{P_0P_2} = 0$. Следователно $P = P_0$, така че P лежи в затворения триъгълник $P_0P_1P_2$. Ако $\mu > 0$, то дефинираме $\nu_i = \frac{\lambda_i}{\mu}$, $i = 1, 2$. Значи $\lambda_i = \mu\nu_i$, $i = 1, 2$, така че $\overrightarrow{P_0P} = \mu\nu_1\overrightarrow{P_0P_1} + \mu\nu_2\overrightarrow{P_0P_2}$, като $\mu \in \substack{(0,1)\\ {[0,1]}}$, $\nu_i = \frac{\lambda_i}{\mu} \underset{\geq}{>} 0$, $i = 1, 2$, $\nu_1 + \nu_2 = \frac{\lambda_1+\lambda_2}{\mu} = \frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} = 1$. Следователно от обратната посока на горната еквивалентност получаваме, че P лежи в $\substack{\text{отворения}\\ \text{затворения}}$ триъгълник $P_0P_1P_2$.

С това е доказана първата еквивалентност във формулировката.

Втората се получава като се използва, че $\overrightarrow{P_0P} = \lambda_1\overrightarrow{P_0P_1} + \lambda_2\overrightarrow{P_0P_2}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0} = \lambda_1\left(\overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_0}\right) + \lambda_2\left(\overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_0}\right)$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{OP} = (1 - \lambda_1 - \lambda_2)\overrightarrow{OP_0} + \lambda_1\overrightarrow{OP_1} + \lambda_2\overrightarrow{OP_2}$ и се положи $\lambda_0 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2$. □

Твърдение 9 *В геометричното пространство нека точките P_0, P_1, P_2, P_3 не лежат в една равнина и нека O е произволна точка. Тогава*
точката P лежи в $\substack{\text{отворения}\\ \text{затворения}}$ тетраедър $P_0P_1P_2P_3$
$\Leftrightarrow \exists\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \underset{\geq}{>} 0,\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \underset{\leq}{<} 1$*:* $\overrightarrow{P_0P} = \lambda_1\overrightarrow{P_0P_1} + \lambda_2\overrightarrow{P_0P_2} + \lambda_3\overrightarrow{P_0P_3}$
$\Leftrightarrow \exists\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \underset{\geq}{>} 0,\ \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$*:* $\overrightarrow{OP} = \lambda_0\overrightarrow{OP_0} + \lambda_1\overrightarrow{OP_1} + \lambda_2\overrightarrow{OP_2} + \lambda_3\overrightarrow{OP_3}$*.*

Доказателство: P лежи в $\substack{\text{отворения}\\ \text{затворения}}$ тетраедър $P_0P_1P_2P_3$
$\Leftrightarrow$ P лежи в $\substack{\text{отворената}\\ \text{затворената}}$ отсечка P_0Q за някоя точка Q от $\substack{\text{отворения}\\ \text{затворения}}$ триъгълник $P_1P_2P_3$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P} = \mu\overrightarrow{P_0Q}$ за някое $\mu \in \substack{(0,1)\\ {[0,1]}}$, където $\overrightarrow{P_0Q} = \nu_1\overrightarrow{P_0P_1} + \nu_2\overrightarrow{P_0P_2} + \nu_3\overrightarrow{P_0P_3}$ за някои $\nu_1, \nu_2, \nu_3 \underset{\geq}{>} 0$, $\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 = 1$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P} = \mu\nu_1\overrightarrow{P_0P_1} + \mu\nu_2\overrightarrow{P_0P_2} + \mu\nu_3\overrightarrow{P_0P_3}$ за някои $\mu \in \substack{(0,1)\\ {[0,1]}}$, $\nu_1, \nu_2, \nu_3 \underset{\geq}{>} 0$, $\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 = 1$.



Нека P лежи в $\substack{\text{отворения}\\ \text{затворения}}$ тетраедър $P_0P_1P_2P_3$. Тогава в горната еквивалентност полагаме $\lambda_i = \mu\nu_i$, $i = 1, 2, 3$. Тогава $\overrightarrow{P_0P} = \lambda_1\overrightarrow{P_0P_1} + \lambda_2\overrightarrow{P_0P_2} + \lambda_3\overrightarrow{P_0P_3}$ и
$\lambda_i = \mu\nu_i \underset{\geq}{>} 0$, $i = 1, 2, 3$, и $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \mu(\nu_1 + \nu_2 + \nu_3) = \mu \underset{\leq}{<} 1$.

Обратно, нека $\overrightarrow{P_0P} = \lambda_1\overrightarrow{P_0P_1} + \lambda_2\overrightarrow{P_0P_2} + \lambda_3\overrightarrow{P_0P_3}$, където $\lambda_i \underset{\geq}{>} 0$, $i = 1, 2, 3$, и $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \underset{\leq}{<} 1$. Нека $\mu = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$. Следователно $\mu \in \substack{(0,1)\\ [0,1]}$. Ако $\mu = 0$, то $\lambda_i = 0$, $i = 1, 2, 3$, и значи $\overrightarrow{P_0P} = \lambda_1\overrightarrow{P_0P_1} + \lambda_2\overrightarrow{P_0P_2} + \lambda_3\overrightarrow{P_0P_3} = 0$. Следователно $P = P_0$, така че P лежи в затворения тетраедър $P_0P_1P_2P_3$. Ако $\mu > 0$, то дефинираме $\nu_i = \frac{\lambda_i}{\mu}$, $i = 1, 2, 3$. Значи $\lambda_i = \mu\nu_i$, $i = 1, 2, 3$, така че $\overrightarrow{P_0P} = \mu\nu_1\overrightarrow{P_0P_1} + \mu\nu_2\overrightarrow{P_0P_2} + \mu\nu_3\overrightarrow{P_0P_3}$, като $\mu \in \substack{(0,1)\\ [0,1]}$, $\nu_i = \frac{\lambda_i}{\mu} \underset{\geq}{>} 0$, $i = 1, 2, 3$, $\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 = \frac{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}{\mu} = \frac{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3} = 1$. Следователно от обратната посока на горната еквивалентност получаваме, че P лежи в $\substack{\text{отворения}\\ \text{затворения}}$ тетраедър $P_0P_1P_2P_3$.

С това е доказана първата еквивалентност във формулировката.

Втората се получава като се използва, че $\overrightarrow{P_0P} = \lambda_1\overrightarrow{P_0P_1} + \lambda_2\overrightarrow{P_0P_2} + \lambda_3\overrightarrow{P_0P_3}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0} = \lambda_1\left(\overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_0}\right) + \lambda_2\left(\overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_0}\right) + \lambda_3\left(\overrightarrow{OP_3} - \overrightarrow{OP_0}\right)$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{OP} = (1-\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3)\overrightarrow{OP_0} + \lambda_1\overrightarrow{OP_1} + \lambda_2\overrightarrow{OP_2} + \lambda_3\overrightarrow{OP_3}$ и се положи $\lambda_0 = 1-\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3$.

□

Последните две твърдения мотивират следната дефиниция.

Определение 6 Нека точките $P_0, \ldots, P_k \in \mathcal{A}$ не лежат в $(k-1)$-мерно афинно подпространство на $\mathcal{A}$. $\substack{\textit{Отворен}\\ \textit{Затворен}}$ *k-мерен симплекс с върхове* $P_0, \ldots, P_k$ се нарича множеството

$$\left\{P \in \mathcal{A} : \exists\lambda_1, \ldots, \lambda_k \underset{\geq}{>} 0, \lambda_1 + \cdots + \lambda_k \underset{\leq}{<} 1 : \overrightarrow{P_0P} = \lambda_1\overrightarrow{P_0P_1} + \cdots + \lambda_k\overrightarrow{P_0P_k}\right\}.$$

Пример 1 От дефиницията на отсечка следва, че 1-мерните отворени (съответно затворени) симплекси са отворените (съответно затворените) отсечки.

Пример 2 Твърдение 8 и Твърдение 9 показват, че 2-мерните отворени (съответно затворени) симплекси в геометричната равнина или геометричното пространство са отворените (съответно затворените) триъгълници, а 3-мерните отворени (съответно затворени) симплекси в геометричното пространство са отворените (съответно затворените) тетраедри.
Поради това и в произволно афинно пространство 2-мерните и 3-мерните симплекси се наричат съответно триъгълници и тетраедри.

Твърдение 10 *Нека точките $P_0, \ldots, P_k \in \mathcal{A}$ не лежат в $(k-1)$-мерно афинно подпространство и нека O е произволна точка. Тогава*
k-мерният $\substack{\text{отворен}\\ \text{затворен}}$ симплекс $P_0 \ldots P_k$

$$= \left\{P \in \mathcal{A} : \exists\lambda_1, \ldots, \lambda_k \underset{\geq}{>} 0, \lambda_1 + \cdots + \lambda_k \underset{\leq}{<} 1 : \right.$$
$$\left. \overrightarrow{OP} = (1-\lambda_1-\cdots-\lambda_k)\overrightarrow{OP_0} + \lambda_1\overrightarrow{OP_1} + \cdots + \lambda_k\overrightarrow{OP_k}\right\}$$
$$= \left\{P \in \mathcal{A} : \exists\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_k \underset{\geq}{>} 0, \lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 1 : \right.$$
$$\left. \overrightarrow{OP} = \lambda_0\overrightarrow{OP_0} + \lambda_1\overrightarrow{OP_1} + \cdots + \lambda_k\overrightarrow{OP_k}\right\}.$$

Доказателство: Първото равенство се получава като се използва, че
$\overrightarrow{P_0P} = \lambda_1\overrightarrow{P_0P_1} + \cdots + \lambda_k\overrightarrow{P_0P_k} \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0} = \lambda_1\left(\overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_0}\right) + \cdots + \lambda_k\left(\overrightarrow{OP_k} - \overrightarrow{OP_0}\right)$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{OP} = (1 - \lambda_1 - \cdots - \lambda_k)\overrightarrow{OP_0} + \lambda_1\overrightarrow{OP_1} + \cdots + \lambda_k\overrightarrow{OP_k}$, а второто равенство се получава като се положи $\lambda_0 = 1 - \lambda_1 - \cdots - \lambda_k$. $\square$

От второто равенство в горното твърдение получаваме

Следствие 3 *Редът на точките в дефиницията на симплекс няма значение.*