Теорема на Клини

Теорема Всеки автоматен език е регулярен.

Д-во: Даден: DFA $A = (\{1, \ldots, n\}, \Sigma, \delta, s, F)$

Резултат: регулярен израз α такъв, че $L(A) = L(\alpha)$.

За всяко $f \in F$ нека $L_f = \left\{ w \in \Sigma^* : \hat{\delta}(s, w) = f \right\}$.

Ще намерим RegExp за L_f. Тъй като $L(A) = \bigcup_{f \in F} L_f$,

теоремата ще е доказана, защото F е крайно.

Даден: DFA $A_f = (\{1,\ldots,n\},\Sigma,\delta,s,\{f\})$

Резултат: регулярен израз α и $L_f = L(A_f) = L(\alpha)$.

Нека $L_{ij} := L((\{1,\ldots,n\},\Sigma,\delta,i,\{j\}))$

В частност $L_{sf} = L_f$.

Ако $i \neq j$: $L^0_{ij} := \{a \in \Sigma : j \in \delta(i,a)\}$

Ако $i = j$: $L^0_{ij} := \{a \in \Sigma : j \in \delta(i,a)\} \cup \{\varepsilon\}$

$L^m_{ij} := \left\{ w \in \Sigma^* : \exists \text{работен път } i \stackrel{w}{\Rightarrow} j = iPj \text{ и } P \in \{1,\ldots,m\}^* \right\}$

Тук преход iPj озаначава преход от i до j, с междинни състояния с номера $\leq m$.

Забележете, че $L_{ij} = L^n_{ij}$.

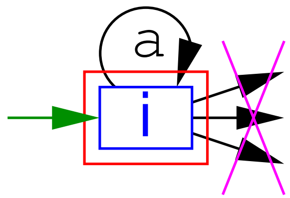
Ще построим реулярен израз за L^m_{ij} индуктивно, използвайки регулярните изрази за по-малките m.

$$L_{ij}^m := \left\{ w \in \Sigma^* : \exists \text{работен път } i \overset{w}{\Rightarrow} j = iPj \text{ и } P \in \{1,\ldots,m\}^* \right\}$$

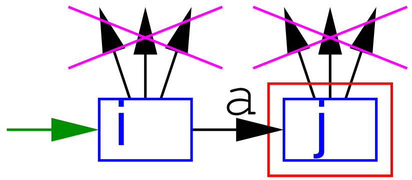
Даден: регулярен израз α_{ij}^k, $k < m$ и $L(\alpha_{ij}^k) = L_{ij}^k$

Резултат: α_{ij}^m и $L(\alpha_{ij}^m) = L_{ij}^m$

Ако $m = 0, i = j$: $\alpha_{ii}^0 = \bigcup_{a \in \Sigma : \delta(i,a) = i} a \cup \varepsilon$

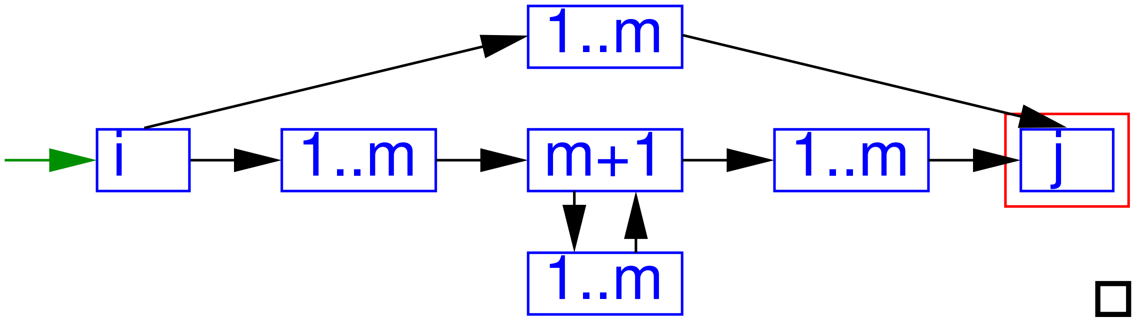


Ако $m = 0, i \neq j$: $\alpha_{ij}^0 = \bigcup_{a \in \Sigma : \delta(i,a) = j} a$



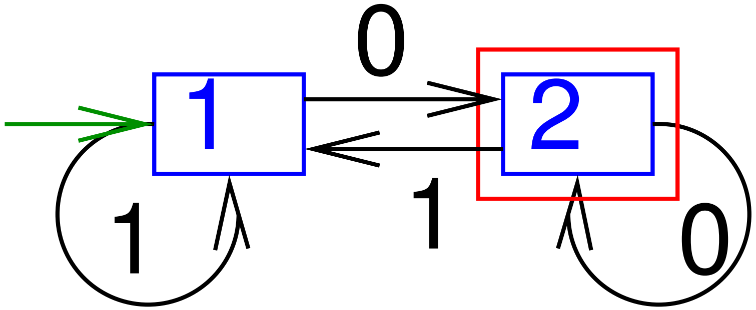
Ако $m \rightsquigarrow m+1$:

$$\alpha_{ij}^{m+1} = \alpha_{ij}^m \cup \alpha_{i,m+1}^m \cdot (\alpha_{m+1,m+1}^m)^* \cdot \alpha_{m+1,j}^m$$



□

Пример



$$\alpha^0_{11} = 1 \cup \varepsilon \qquad \alpha^0_{22} = 0 \cup \varepsilon \qquad \alpha^0_{12} = 0 \qquad \alpha^0_{21} = 1$$

$$\begin{aligned} \alpha^1_{12} &= \alpha^0_{12} \cup \alpha^0_{11} \cdot (\alpha^0_{11})^* \cdot \alpha^0_{12} \\ &= 0 \cup (1 \cup \varepsilon) \cdot (1 \cup \varepsilon)^* \cdot 0 \\ &= 1^*0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha^1_{22} &= \alpha^0_{22} \cup \alpha^0_{21} \cdot (\alpha^0_{11})^* \cdot \alpha^0_{12} \\ &= 0 \cup \varepsilon \cup 1 \cdot (1 \cup \varepsilon)^* \cdot 0 \\ &= 1^*0 \cup \varepsilon \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha^2_{12} &= \alpha^1_{12} \cup \alpha^1_{12} \cdot (\alpha^1_{22})^* \cdot \alpha^1_{22} \\ &= 1^*0 \cup 1^*0 \cdot (1^*0 \cup \varepsilon)^* \cdot (1^*0 \cup \varepsilon) \\ &= 1^*0(1^*0)^* \end{aligned}$$

$L(\alpha^2_{12}) = L^2_{12} = L_{12} = L_2$, където $F = \{2\}$.