6. Сложност на алгоритъм. Асимптотично поведение на целочислени функции. Сложност на рекурсивни програми

1. **Модели на изчисленията - машина на Тюринг, машина с произволен достъп и език за програмиране**
   Съществуват различни формални модели на изчисление като МТ, езици за програмиране и машини с произволен достъп. Доказано е, че всички са еквивалентни (Тезис на Чърч). Ще разгледаме МТ.

   Машината на Тюринг (МТ) е абстрактна изчислителна машина, която манипулира символи, записани върху безкрайна лента(устройство) спрямо таблица от правила

Деф: Детерминирана машина на Тюринг

Наричаме осморка от вида $\mathcal{M} = \left\langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, \sqcup, q_{start}, q_{accept}, q_{reject} \right\rangle$, където

- Q - крайно множество от състояния
- Σ - крайна азбука на входа
- Γ - крайна азбука за лентата, $\Sigma \subseteq \Gamma$
- $\sqcup$ - символ за празна клетка на лентата, $\sqcup \in \Gamma \setminus \Sigma$
- $q_{start} \in Q$ - начално състояние
- $q_{accept} \in Q$ - приемащо състояние
- $q_{reject} \in Q$ - отхвърлящо състояние, $q_{accept} \neq q_{reject}$
- $\delta: Q' \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, R, S\}$ - тотална функция на преходите, където $Q' = Q \setminus \left\{q_{accept}, q_{reject}\right\}$

Всяка машина на Тюринг разполага с неограничено количество памет, което е представено като безкрайна лента, разделена на изброимо множество еднотипни клетки, съдържащи елементи на Γ.

Четенето и писането на лентата се извършва от четящо-пишещо устройство - глава. Във всеки един момент главата се намира върху точно една клетка, като в края на всеки такт може да се премести върху една клетка наляво L, надясно R или да остане на място S.

Деф: Моментна конфигурация

Моментна конфигурация на изчисление на машина на Тюринг наричаме тройка от вида

$(\alpha, q, \beta) \in \Gamma^* \times Q \times \Gamma^+$

Интерпретация: $\beta = x\beta'$, $x \in \Gamma$, намираме се в състояние q, лентата има вида

$$\cdots \sqcup \sqcup \sqcup \alpha \underline{x} \beta' \sqcup \sqcup \sqcup \cdots$$

Видове конфигурации

- *Начална* конфигурация за входната дума $\alpha \in \Sigma^*$: $(\varepsilon, q_{start}, \alpha \sqcup)$
- *Приемаща* конфигурация: $(\lambda, q_{accept}, \rho)$
- *Отхвърляща* конфигурация: $(\lambda, q_{reject}, \rho)$

Конфигурация е *заключителна*, ако е приемаща или отхвърляща

Деф: Преходи между конфигурации

$\vdash_{y,d}: \Gamma^* \times \Gamma^+ \to \Gamma^* \times \Gamma^+$, показва как се променя една моментна конфигурация, когато заменим символа на главата с y и се придвижим в посока $d \in \{L, R, S\}$

- $x, y, z \in \Gamma$, $\lambda, \rho \in \Gamma^*$, $(\lambda, xz\rho) \vdash_{y,R} (\lambda y, z\rho)$
- $x, y \in \Gamma$, $\lambda \in \Gamma^*$, $(\lambda, x) \vdash_{y,R} (\lambda y, \sqcup)$
- $x, y, z \in \Gamma$, $\lambda, \rho \in \Gamma^*$, $(\lambda z, x\rho) \vdash_{y,L} (\lambda, zy\rho)$
- $x, y \in \Gamma$, $\lambda \in \Gamma^*$, $(\varepsilon, x\rho) \vdash_{y,L} (\varepsilon, \sqcup y\rho)$
- $x, y \in \Gamma$, $\lambda, \rho \in \Gamma^*$, $(\lambda, x\rho) \vdash_{y,S} (\lambda, y\rho)$

Деф: Преход в машина на Тюринг

$\vdash_{\mathcal{M}}: \Gamma^* \times Q \times \Gamma^+$ дефинираме:

$\delta(q, x) = (q', y, d)$, $(\lambda, x\rho) \vdash_{y,d} (\lambda', \rho') \Rightarrow (\lambda, q, x\rho) \vdash_{\mathcal{M}} (\lambda', q', \rho')$

- $k \vdash_{\mathcal{M}}^0 k$
- $k \vdash_{\mathcal{M}} k''$, $k'' \vdash_{\mathcal{M}}^n k' \Rightarrow k \vdash_{\mathcal{M}}^{n+1} k'$

$k \vdash_{\mathcal{M}}^* k' \overset{def}{\iff} (\exists n \in \mathbb{N})\left[k \vdash_{\mathcal{M}}^n k'\right]$

Машина на Тюринг *зацикля*, ако за лентова дума α, машината не спре работа никога. Например, ако е в състояние q, попадне над клетка със съдържание x и $\delta(q,x) = (q,x,S)$.

Деф: Изчислима по Тюринг функция

Нека $\mathcal{M}$ е машина на Тюринг. Тотална функция $f\colon \Sigma^* \to \Gamma^*$ е *изчислима по Тюринг*, когато

$$f(\alpha) = \begin{cases} \beta, & \text{ако } (\varepsilon, q_o, \alpha) \vdash_{\mathcal{M}}^* (\beta', q, \beta'') \text{ – заключителна и } \beta = \beta'\beta'' \\ \text{неопределена,} & \text{ако } \mathcal{M} \text{ зацикля} \end{cases}$$

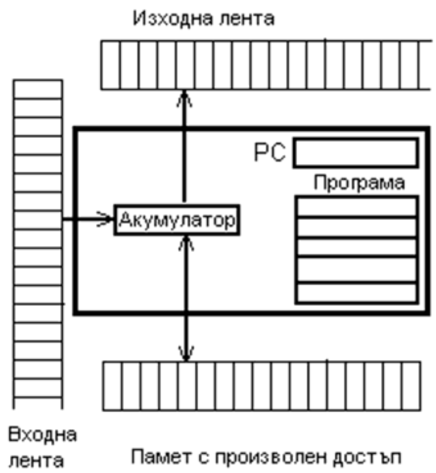
Деф: Език, разпознаван от МТ

$$\mathcal{L}(\mathcal{M}) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{\alpha \in \Sigma^* \mid (\varepsilon, q_{start}, \alpha \sqcup) \vdash_{\mathcal{M}}^* (\lambda, q_{accept}, \rho), \text{за някои } \lambda, \rho \in \Gamma^*\right\}$$

Деф: Машина с произволен достъп до паметта (МПД)

МПД е съставена от *Управляващ блок* и три ленти, разделени на клетки.
Всяка МПД има параметър R - *разрядност*.
R-МПД е МПД с разрядност R.
Входната и изходната лента са безкрайни в едната посока.
Паметта с произволен достъп се състои от 2^R клетки, номерирани от 0 до $2^R - 1$, числа наричани адреси.
Всяка клетка може да съдържа число в $\left[-2^{R-1}, 2^{R-1} - 1\right]$

В управляващия блок са разположени специални клетки - *акумулатор* и *брояч на команди*, както и *програма*, съставена от *команди*, състоящи се от *код на командата* и *аргумент на командата*.



Този модел представлява абстракция на модерните изчислителни машини.

2. Дефиниция на (машинно-зависима) сложност (по време и по памет) в най-лошия и средния случай

Във входните данни трябва да се съдържа всичко необходимо за решаване на задачата без да има излишък.

Нека $A \subseteq \Sigma^*$. С $d(\omega)$, $\omega \in \Sigma^*$ бележим дължината на думата ω. С $A_n = \{\omega \mid \omega \in A \,\&\, d(\omega) = n\}$, $n = \{1,2,\dots\}$ означаваме всички подмножества от всички думи на A с дължина n, изпълняващи условията за входните данни.

Деф: Нека $f_M\colon A \to X^*$ е тотално изчислима по Тюринг функция и $\mathcal{M}$ е МТ

- Да означим с $\#_{\mathcal{M}}(\alpha)$ броят на стъпките, които M прави при работа върху лентовата дума α
- Да означим с $\&_{\mathcal{M}}(\alpha)$ броят на клетките от лентата, които M използва при работа върху лентовата дума α.

$t_M, \widetilde{t_M}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$\mathrm{t_M(n)} = \max_{\alpha \in A_n} \#_M(\alpha) \text{ – сложност по време на M в най-лошия случай}$$

$$\widetilde{t_M}(n) = \frac{\sum_{\alpha \in A_n} \#_M(\alpha)}{|A_n|} \text{ – средна сложност по време на МТ } \mathcal{M}$$

$s_M, \widetilde{s_M}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$\mathrm{s_M(n)} = \max_{\alpha \in A_n} \&_M(\alpha) \text{ – сложност по памет на M в най-лошия случай}$$

$$\widetilde{t_M}(n) = \frac{\sum_{\alpha \in A_n} \&(\alpha)}{|A_n|} \text{ – средна сложност по паметна МТ } \mathcal{M}$$

3. Поведение на асимптотически положителни целочислени функции - O–, Ω-, Θ-, o-, ω- нотация

Деф: Нека f - функция дефинирана в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{Z}$. f се нарича асимптотично положителна, когато $(\exists n_o \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)[f(n) > 0]$

До края на темата нека $n, n_0, n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, $f(n), g(n), h(n)$ - асимптотично положителни, $c, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Деф:
- $O(g(n)) = \{f(n) \mid (\exists c > 0)\exists n_0(\forall n \geq n_0)[0 \leq f(n) \leq c.g(n)]\}$ - асимптотично не по-бързо от g, $f \preccurlyeq g$
- $\Omega(g(n)) = \{f(n) \mid (\exists c > 0)\exists n_0(\forall n \geq n_0)[0 \leq c.g(n) \leq f(n)]\}$ - асимптотично не по-бавно от g, $f \succcurlyeq g$
- $o(g(n)) = \{f(n) \mid (\forall c > 0)\exists n_0(\forall n \geq n_0)[0 \leq f(n) \leq c.g(n)]\}$ - асимптотично по-бавно от g, $f \prec g$
- $\omega(g(n)) = \{f(n) \mid (\forall c > 0)\exists n_0(\forall n \geq n_0)[0 \leq c.g(n) < f(n)]\}$ - асимптотично по-бързо от g, $f \succ g$
- $\Theta(g(n)) = \{f(n) \mid (\exists c_1 > 0)(\exists c_2 > 0)\exists n_0(\forall n \geq n_0)[0 \leq c_1.g(n) \leq f(n) \leq c_2.g(n)]\}$ - асимптотично еднакво с g. $f \asymp g$

Могат да бъдат тълкувани като бинарни релации между асимптотично положителни функции

4. Свойства и гранични теореми

Основни свойства:

(1) *Рефлексивност*: $f\ \sigma\ f$, за всяко $\sigma \in \{\preccurlyeq, \succcurlyeq, \asymp\}$

(2) *Транзитивност*: Ако $f\ \sigma\ g$ и $g\ \sigma\ h$, то $f\ \sigma\ h$, за всяко $\sigma \in \{\prec, \succ, \preccurlyeq, \succcurlyeq, \asymp\}$

(3) Антисиметричност: $f\ \sigma\ g$ и $g\ \sigma\ f \Leftrightarrow f \asymp g$, за $\sigma \in \{\preccurlyeq, \succcurlyeq\}$

(4) Симетричност: $f \asymp g \Rightarrow g \asymp f$ (Θ е симетрична)

(5) $f \preccurlyeq g \Leftrightarrow g \succcurlyeq f$; $f \prec g \Leftrightarrow g \succ f$

(6) $\max\{f, g\} \asymp \mathrm{f} + \mathrm{g}$

Д-во: За достатъчно големи n важат неравенствата:

$$\frac{1}{2}f(n) + \frac{1}{2}g(n) \leq \max\{f(n), g(n)\} \leq f(n) + g(n)$$

(7) Ако $(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)[0 < c_1 \leq f(n) \leq c_2]$, то $gf \asymp \mathrm{g}$

Гранични теореми:

(1) Ако $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$, то $f(n) \in o(g(n))$ $(f \prec g)$ $- f$ нараства по-бавно от g

(2) Ако $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$, то $f(n) \in \omega(g(n))$ $(f \succ g)$ $- f$ нараства по-бързо от g

(3) Ако $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c \neq 0$, то $f(n) \in \Theta(g(n))$ $(f \asymp g)$ $- f$ и g нарастват еднакво бързо

Мастър теорема:

Нека $f(n)$, $T(n)$ са асимптотично положителни функции и е дадено рекурентното отношение:

$$\left|\begin{aligned} T(n) &= \Theta(1),\ n \leq 1 \\ T(n) &= a\,T(n/b) + f(n),\ a \geq 1, b > 1 \end{aligned}\right.$$

Тогава:
- Случай 1: Ако $f(n) \in O(n^{k-\varepsilon})$, $\varepsilon > 0$, то $T(n) \in \Theta(n^k)$ (най-тежки изчисления при листата)
- Случай 2: Ако $f(n) \in O(n^k)$, то $T(n) \in \Theta(n^k \cdot \log n)$
- Случай 3: Ако $f(n) \in \Omega(n^{k+\varepsilon})$ за някое $\varepsilon > 0$ и $\exists c \in (0,1)$ $(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)\left[a.f\left(\frac{n}{b}\right) \leq c.f(n)\right]$ (условие за регулярност на f), то $T(n) = \Theta(f(n))$

Доказателството се извършва чрез развиване на рекурентното уравнение.