Лекция VI - Непрекъснати случайни величини

Лекция VI - Непрекъснати случайни величини

- Плътност. Функция на разпределение.
- Математическо очакване. Дисперсия.
- Равномерно разпределение
- Нормално разпределение

Непрекъснати случайни величини

До момента разглеждахме дискретни случайни величини, чиито стойности са краен или най-много изброим брой. Това ограничение прави дискретните случайни величини неудобни за описване на редица явления. Например, температурата на въздуха е число в интервала $(-45, 52)$. Затова се налага разглеждането на случайни величини стойностите на които са подмножество на реалните числа, т.е. могат да вземат неизброим брой стойности. Такива случайни величини ще наричаме непрекъснати.

Непрекъснати случайни величини

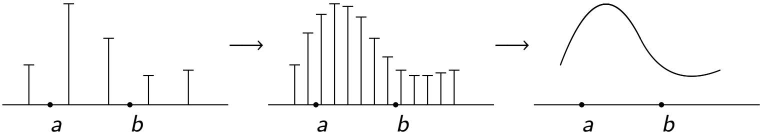
До момента разглеждахме дискретни случайни величини, чиито стойности са краен или най-много изброим брой. Това ограничение прави дискретните случайни величини неудобни за описване на редица явления. Например, температурата на въздуха е число в интервала $(-45, 52)$. Затова се налага разглеждането на случайни величини стойностите на които са подмножество на реалните числа, т.е. могат да вземат неизброим брой стойности. Такива случайни величини ще наричаме непрекъснати.

За непрекъснатите случайни величини би било безмислено да се въвежда разпределение под формата на таблица, тъй като не е възможно описването на всички стойности. Затова, като аналог се използва функция наречена *плътност*, която играе ролята на вероятност. Формално, непрекъснатите сл.в. се дефинират като се извършва граничен преход по дискретните сл.в. Можем да си представим този процес като вземем една дискретна случайна величина и увеличаваме броят на нейните стойности все повече и повече, докато нейното разпределение се превърне в непрекъснатата функция плътност.

Непрекъснати случайни величини

До момента разглеждахме дискретни случайни величини, чиито стойности са краен или най-много изброим брой. Това ограничение прави дискретните случайни величини неудобни за описване на редица явления. Например, температурата на въздуха е число в интервала $(-45, 52)$. Затова се налага разглеждането на случайни величини стойностите на които са подмножество на реалните числа, т.е. могат да вземат неизброим брой стойности. Такива случайни величини ще наричаме непрекъснати.

За непрекъснатите случайни величини би било безмислено да се въвежда разпределение под формата на таблица, тъй като не е възможно описването на всички стойности. Затова, като аналог се използва функция наречена *плътност*, която играе ролята на вероятност. Формално, непрекъснатите сл.в. се дефинират като се извършва граничен преход по дискретните сл.в. Можем да си представим този процес като вземем една дискретна случайна величина и увеличаваме броят на нейните стойности все повече и повече, докато нейното разпределение се превърне в непрекъснатата функция плътност.Това е илюстрирано в следващата схема.



Плътност

В тези лекции няма да се спираме на формалната (аксиоматична) дефиниция на понятието непрекъсната сл.в. Вместо това ще дефинираме функцията плътност, а чрез нея и случайната величина.

Плътност

В тези лекции няма да се спираме на формалната (аксиоматична) дефиниция на понятието непрекъсната сл.в. Вместо това ще дефинираме функцията плътност, а чрез нея и случайната величина.

Дефиниция - Плътност

Плътност на непрекъснатата случайната величина X наричаме функцията $f_X(x)$, изпълняваща следните условия:

$$
\begin{aligned}
&1) \quad f_X(x) \geq 0 \\
&2) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1 \\
&3) \quad \mathrm{P}(a \leq X < b) = \int_a^b f_X(x)dx
\end{aligned}
$$

Плътност

В тези лекции няма да се спираме на формалната (аксиоматична) дефиниция на понятието непрекъсната сл.в. Вместо това ще дефинираме функцията плътност, а чрез нея и случайната величина.

Дефиниция - Плътност

Плътност на непрекъснатата случайната величина X наричаме функцията $f_X(x)$, изпълняваща следните условия:

$$
\begin{aligned}
&1) \quad f_X(x) \geq 0 \\
&2) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1 \\
&3) \quad \mathrm{P}(a \leq X < b) = \int_a^b f_X(x)dx
\end{aligned}
$$

На всяка функция отговаряща на тези условия съответства сл.в. X, при това ако познаваме плътността, можем да пресметнем всички характеристики на X.

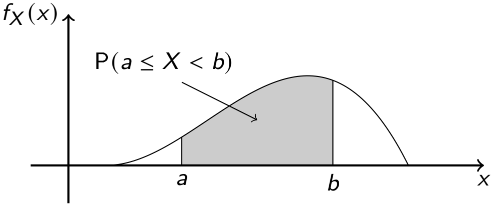
Тази дефиниция е до голяма степен аналогична на дефиницията на разпределение на дискретна случайна величина.

1) отговаря на условието вероятностите да са положителни.

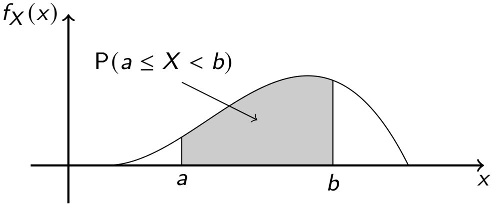
2) означава нормираност, т.е. съответства на условието сумата от всички вероятности в разпределението да бъде едно.

Плътност

3) дава вероятността за попадане на сл.в X в някакво множество - като се сумират, в случая интегрират, вероятностите на благоприятните случай.



3) дава вероятността за попадане на сл.в X в някакво множество - като се сумират, в случая интегрират, вероятностите на благоприятните случай.

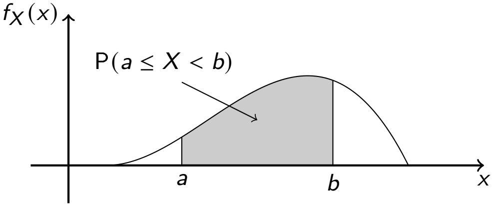


Пример

Застрахователна полица покрива годишните медицински разходи на работещи в малка фирма. Размерът на разходите е $M = 100\,000X$, където X е сл.в. с плътност $f_X(x) = 5(1-x)^4$ за $x \in (0,1)$. Каква е вероятността да има разходи за повече от $10\,000$?

Плътност

3) дава вероятността за попадане на сл.в X в някакво множество - като се сумират, в случая интегрират, вероятностите на благоприятните случай.



Пример

Застрахователна полица покрива годишните медицински разходи на работещи в малка фирма. Размерът на разходите е $M = 100\,000X$, където X е сл.в. с плътност $f_X(x) = 5(1-x)^4$ за $x \in (0,1)$. Каква е вероятността да има разходи за повече от $10\,000$?

$$\mathrm{P}(M > 10\,000) = \mathrm{P}(X > 0.1) = \int_{0.1}^{1} 5(1-x)^4\,dx = -(1-x)^5\Big|_{0.1}^{1} = 0.9^5 = 0.59$$

Функция на разпределение

Дефиницията на функция на разпределение съвсем точно съвпада с дефиницията при дискретни случайни величини.

Дефиниция - Функция на разпределение

Функция на разпределение на случайната величина X наричаме:

$$F_X(x) = \mathrm{P}(X < x).$$

Функция на разпределение

Дефиницията на функция на разпределение съвсем точно съвпада с дефиницията при дискретни случайни величини.

Дефиниция - Функция на разпределение

Функция на разпределение на случайната величина X наричаме:

$$F_X(x) = \mathrm{P}(X < x).$$

Ако разполагаме с плътността не е проблем да намерим функцията на разпределение, както и обратно. Съгласно условие 3) от дефиницията на плътност:

$$F_X(x) = \mathrm{P}(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt.$$

Следователно обратната връзка е от вида

$$f_X(x) = \frac{\partial F_X(x)}{\partial x}.$$

Функция на разпределение

Дефиницията на функция на разпределение съвсем точно съвпада с дефиницията при дискретни случайни величини.

Дефиниция - Функция на разпределение

Функция на разпределение на случайната величина X наричаме:

$$F_X(x) = \mathrm{P}(X < x).$$

Ако разполагаме с плътността не е проблем да намерим функцията на разпределение, както и обратно. Съгласно условие 3) от дефиницията на плътност:

$$F_X(x) = \mathrm{P}(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt.$$

Следователно обратната връзка е от вида

$$f_X(x) = \frac{\partial F_X(x)}{\partial x}.$$

Забележка. Формалното въвеждане на понятието “случайна величина”, често се извършва в обратен ред. Дефинира се вероятностно пространство. Иска се праобразът на събитито $\{X < x\}$ винаги да принадлежи на някоя σ-алгебра, това гарантира че вероятността $\mathrm{P}(X < x)$ може да бъде пресметната за всяко x, т.е. $F_X(x)$ е дефинирана за $\forall x$. И накрая, плътността се изчислява като производна на $F_X(x)$.

Смяна на променливите

Понякога, не можем да измерваме директно случайната величина, която ни интересува, а наблюдаваме някаква нейна функция. В тези случай се налага да преизчисляваме плътностите на случайните величини.

Формално, задачата която решаваме е следната. Нека X е произволна непрекъсната сл.в. с известно разпределение, т.е. познаваме плътността и $f_X(x)$. Нека Y е нова сл.в. зададена като функция на X, т.е. $Y = g(X)$. Следващата формула показва начин за намиране на плътността на новата сл.в. $f_Y(y)$.

Смяна на променливите

Понякога, не можем да измерваме директно случайната величина, която ни интересува, а наблюдаваме някаква нейна функция. В тези случай се налага да преизчисляваме плътностите на случайните величини.

Формално, задачата която решаваме е следната. Нека X е произволна непрекъсната сл.в. с известно разпределение, т.е. познаваме плътността и $f_X(x)$. Нека Y е нова сл.в. зададена като функция на X, т.е. $Y = g(X)$. Следващата формула показва начин за намиране на плътността на новата сл.в. $f_Y(y)$.

Формула за смяна на променливите

Нека X е непрекъсната случайна величина, а $g(x)$ е монотонна и непрекъсната функция. Тогава плътността на случайната величина $Y = g(X)$ се пресмята по формулата

$$f_Y(y) = f_X(h(y))\,|h'(y)|,$$

където $h(y)$ е обратната функция на $g(x)$.

Смяна на променливите

Понякога, не можем да измерваме директно случайната величина, която ни интересува, а наблюдаваме някаква нейна функция. В тези случай се налага да преизчисляваме плътностите на случайните величини.

Формално, задачата която решаваме е следната. Нека X е произволна непрекъсната сл.в. с известно разпределение, т.е. познаваме плътността и $f_X(x)$. Нека Y е нова сл.в. зададена като функция на X, т.е. $Y = g(X)$. Следващата формула показва начин за намиране на плътността на новата сл.в. $f_Y(y)$.

Формула за смяна на променливите

Нека X е непрекъсната случайна величина, а $g(x)$ е монотонна и непрекъсната функция. Тогава плътността на случайната величина $Y = g(X)$ се пресмята по формулата

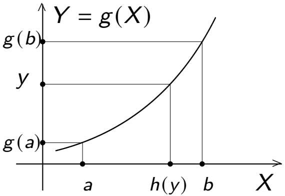
$$f_Y(y) = f_X(h(y))\,|h'(y)|,$$

където $h(y)$ е обратната функция на $g(x)$.

Забележка. В тази формула наложихме условия върху функцията $g(x)$. Ако $g(x)$ не е обратима, то също е възможно да се направи смяна на променливите, но тогава се работи директно с функциите на разпределение.

Смяна на променливите

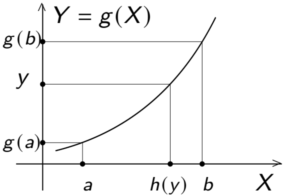
Док. Нека $g(x)$ е непрекъсната и монотонно растяща. В този случай съществува обратна функция $h(y) \equiv g^{-1}(y)$.



Вероятността случайната величина X да принадлежи на интервала $[a, b]$ е равна на вероятността Y да принадлежи на $[g(a), g(b)]$. Това ни дава възможност да пресметнем функцията на разпределение на Y.

Смяна на променливите

Док. Нека $g(x)$ е непрекъсната и монотонно растяща. В този случай съществува обратна функция $h(y) \equiv g^{-1}(y)$.



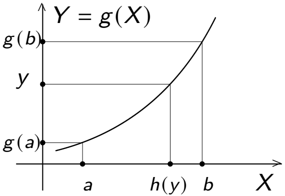
Вероятността случайната величина X да принадлежи на интервала $[a, b]$ е равна на вероятността Y да принадлежи на $[g(a), g(b)]$. Това ни дава възможност да пресметнем функцията на разпределение на Y.

$$F_Y(y) = \mathrm{P}(Y < y) = \mathrm{P}(g(X) < y) = \mathrm{P}(X < h(y)) = F_X(h(y))$$

Пресмятането на плътността $f_Y(y)$ се свежда до намиране на производна на $F_X(h(y))$. От формулата за диференциране на сложна функция следва

$$f_Y(y) = \frac{\partial F_X(h(y))}{\partial y} = f_X(h(y))\, h'(y).$$

Док. Нека $g(x)$ е непрекъсната и монотонно растяща. В този случай съществува обратна функция $h(y) \equiv g^{-1}(y)$.



Вероятността случайната величина X да принадлежи на интервала $[a, b]$ е равна на вероятността Y да принадлежи на $[g(a), g(b)]$. Това ни дава възможност да пресметнем функцията на разпределение на Y.

$$F_Y(y) = \mathrm{P}(Y < y) = \mathrm{P}(g(X) < y) = \mathrm{P}(X < h(y)) = F_X(h(y))$$

Пресмятането на плътността $f_Y(y)$ се свежда до намиране на производна на $F_X(h(y))$. От формулата за диференциране на сложна функция следва

$$f_Y(y) = \frac{\partial F_X(h(y))}{\partial y} = f_X(h(y))\, h'(y).$$

Тъй като $g(x)$ е растяща функция, то $h(y)$ също е растяща и производната и $h'(y)$ е положителна. Следователно формулата за смяна на променливите е в сила.

Смяна на променливите

Нека сега функцията $g(x)$ е непрекъсната и монотонно намаляваща. Обратната функция $h(y)$ отново съществува.

Вероятността случайната величина X да принадлежи на интервала $[a, b]$ е равна на вероятността Y да принадлежи на $[g(b), g(a)]$, т.е функцията $g(x)$ обръща неравенствата. За функцията на разпределение на Y получаваме

Смяна на променливите

Нека сега функцията $g(x)$ е непрекъсната и монотонно намаляваща. Обратната функция $h(y)$ отново съществува.

Вероятността случайната величина X да принадлежи на интервала $[a, b]$ е равна на вероятността Y да принадлежи на $[g(b), g(a)]$, т.е функцията $g(x)$ обръща неравенствата. За функцията на разпределение на Y получаваме

$$F_Y(y) = \mathrm{P}(Y < y) = \mathrm{P}(g(X) < y) = \mathrm{P}(X > h(y)) =$$
$$= 1 - \mathrm{P}(X \leq h(y)) = 1 - F_X(h(y)).$$

В последното равенство използвахме факта, че X е непрекъсната и следователно вероятността да попадне във фиксирана точка е нула, т.е. $\mathrm{P}(X \leq h(y)) = \mathrm{P}(X < h(y))$.

Смяна на променливите

Нека сега функцията $g(x)$ е непрекъсната и монотонно намаляваща. Обратната функция $h(y)$ отново съществува.

Вероятността случайната величина X да принадлежи на интервала $[a, b]$ е равна на вероятността Y да принадлежи на $[g(b), g(a)]$, т.е функцията $g(x)$ обръща неравенствата. За функцията на разпределение на Y получаваме

$$F_Y(y) = \mathrm{P}(Y < y) = \mathrm{P}(g(X) < y) = \mathrm{P}(X > h(y)) =$$
$$= 1 - \mathrm{P}(X \leq h(y)) = 1 - F_X(h(y)).$$

В последното равенство използвахме факта, че X е непрекъсната и следователно вероятността да попадне във фиксирана точка е нула, т.е. $\mathrm{P}(X \leq h(y)) = \mathrm{P}(X < h(y))$.

Следователно

$$f_Y(y) = \frac{\partial[1 - F_X(h(y))]}{\partial y} = -f_X(h(y))\, h'(y)$$

Нека сега функцията $g(x)$ е непрекъсната и монотонно намаляваща. Обратната функция $h(y)$ отново съществува.

Вероятността случайната величина X да принадлежи на интервала $[a, b]$ е равна на вероятността Y да принадлежи на $[g(b), g(a)]$, т.е функцията $g(x)$ обръща неравенствата. За функцията на разпределение на Y получаваме

$$F_Y(y) = \mathrm{P}(Y < y) = \mathrm{P}(g(X) < y) = \mathrm{P}(X > h(y)) =$$
$$= 1 - \mathrm{P}(X \leq h(y)) = 1 - F_X(h(y)).$$

В последното равенство използвахме факта, че X е непрекъсната и следователно вероятността да попадне във фиксирана точка е нула, т.е. $\mathrm{P}(X \leq h(y)) = \mathrm{P}(X < h(y))$.

Следователно

$$f_Y(y) = \frac{\partial[1 - F_X(h(y))]}{\partial y} = -f_X(h(y))\, h'(y)$$

Тъй като $g(x)$ е намаляваща функция, то и обратната и функция $h(y)$ също е намаляваща, а производната и $h'(y)$ е отрицателна. Следователно намерената плътност е добре дефинирана, т.е. $f_Y(y) \geq 0$ и формулата за смяна на променливите отново е в сила. □

Математическо очакване

Формално понятието математическо очакване също се дефинира чрез граничен преход. Ние няма да се спираме на този аксиоматичен подход. Ще използваме следният директен начин.

Дефиниция - Математическо очакване

Математическо очакване на непрекъснатата сл.в. X наричаме числото $\mathrm{E}X$ дефинирано с равенството:

$$\mathrm{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x) dx.$$

Ако интегралът е разходящ, казваме че математическото очакване не съществува.

Математическо очакване

Формално понятието математическо очакване също се дефинира чрез граничен преход. Ние няма да се спираме на този аксиоматичен подход. Ще използваме следният директен начин.

Дефиниция - Математическо очакване

Математическо очакване на непрекъснатата сл.в. X наричаме числото $\mathrm{E}X$ дефинирано с равенството:

$$\mathrm{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x) dx.$$

Ако интегралът е разходящ, казваме че математическото очакване не съществува.

Тази дефиниция на математическото очакване е аналогична на дефиницията от дискретния случай. Поради неизброимия брой стойности на случайната величина тук сумирането е заменено с интегриране, а конкретните вероятности са заменени с плътността на случайната величина. Затова и смисълът на понятието е същият. Ако извършваме опита, при които възниква съответната случайна величина и осредняваме получените ѝ стойности, то този резултат клони към математическото очакване.

Математическо очакване

Следващото твърдение дава начина да се пресметне математическото очакване на функция от случайна величина.

Формула за очакване на функция от случайна величина

Нека X е непрекъсната сл.в., а $g(x)$ е произволна функция. Тогава, ако съществува математическото очакване $\mathrm{E}g(X)$, то се пресмята по формулата

$$\mathrm{E}g(X) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, f_X(x) dx.$$

Математическо очакване

Следващото твърдение дава начина да се пресметне математическото очакване на функция от случайна величина.

Формула за очакване на функция от случайна величина

Нека X е непрекъсната сл.в., а $g(x)$ е произволна функция. Тогава, ако съществува математическото очакване $\mathsf{E}g(X)$, то се пресмята по формулата

$$\mathsf{E}g(X) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, f_X(x)dx.$$

Док. Ще направим доказателството само в случая, когато $g(x)$ е непрекъсната и монотонна. Твърдението е изпълнено за произволна функция, но доказателството в този случай изисква аксиоматично построяване на понятието математическо очакване, което е извън рамките на тези лекции.

Математическо очакване

Следващото твърдение дава начина да се пресметне математическото очакване на функция от случайна величина.

Формула за очакване на функция от случайна величина

Нека X е непрекъсната сл.в., а $g(x)$ е произволна функция. Тогава, ако съществува математическото очакване $\mathrm{E}g(X)$, то се пресмята по формулата

$$\mathrm{E}g(X) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, f_X(x)dx.$$

Док. Ще направим доказателството само в случая, когато $g(x)$ е непрекъсната и монотонна. Твърдението е изпълнено за произволна функция, но доказателството в този случай изисква аксиоматично построяване на понятието математическо очакване, което е извън рамките на тези лекции.

Нека $Y = g(X)$ Съгласно дефиницията на математическо очакване и формулата за смяна на променливите.

$$\mathrm{E}g(x) = \mathrm{E}Y = \int_{-\infty}^{\infty} y\, f_Y(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} y\, f_X(h(y))\, |h'(y)|dy =$$

Правим смяна на променливите в интеграла със същата смяна $y = g(x)$, $x = h(y)$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} y\, f_X(h(y))dh(y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, f_X(x)dx$$

Дисперсия

Дисперсията при непрекъснати случайни величини се дефинира точно по същия начин както при дискретни:

Дисперсия

Дисперсията на произволна случайна величина е

$$\mathrm{D}X = \mathrm{E}\left(X - \mathrm{E}X\right)^2 = EX^2 - \left(\mathrm{E}X\right)^2$$

$\sqrt{\mathrm{D}X}$ естествено се нарича “стандартно отклонение”.

Дисперсия

Дисперсията при непрекъснати случайни величини се дефинира точно по същия начин както при дискретни:

Дисперсия

Дисперсията на произволна случайна величина е

$$\mathrm{D}X = \mathrm{E}\,(X - \mathrm{E}X)^2 = EX^2 - (\mathrm{E}X)^2$$

$\sqrt{\mathrm{D}X}$ естествено се нарича “стандартно отклонение”.

“Сумите” и “интегралите” притежават сходни свойства, и двата типа обекти са линейни. Затова всички свойства, който бяха доказани за математическото очакване и дисперсията в дискретния случай, могат по аналогичен начин да се докажат и в непрекъснатия. Просто в самите доказателства знакът за сума трябва да се замени със знак за интеграл. Ще припомним тези свойства:

- $\mathrm{E}c = c$, $\quad$ $\mathrm{D}c = 0$,
- $\mathrm{E}(cX) = c\,\mathrm{E}X$ $\quad$ $\mathrm{D}(cX) = c^2\,\mathrm{D}X$
- $\mathrm{E}(X+Y) = \mathrm{E}X + \mathrm{E}Y$, $\quad$ $X \perp\!\!\!\perp Y \;\Rightarrow\; \mathrm{D}(X+Y) = \mathrm{D}X + \mathrm{D}Y$
- $X \perp\!\!\!\perp Y \;\Rightarrow\; \mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}X\,\mathrm{E}Y$

Равномерно разпределение

Често срещаните непрекъснати сл.в. са класифицирани, описани, свойствата им са добре познати. Понататък ще разгледаме подробно няколко разпределения.

Равномерно разпределение

Често срещаните непрекъснати сл.в. са класифицирани, описани, свойствата им са добре познати. Понататък ще разгледаме подробно няколко разпределения.

- Равномерно разпределение - $X \in \mathrm{U}(a, b)$

Нека $[a, b]$ е произволен интервал върху реалната права. Казваме, че случайната величина X е равномерно разпределена в $[a, b]$, ако вероятността да вземе коя да е стойност в този интервал е една и съща. Или казано по друг начин, ако X попада по случаен начин в този интервал. Равномерното разпределение се означава съкратено $X \in U(a, b)$, където $a < b$ са реални числа.

Равномерно разпределение

Често срещаните непрекъснати сл.в. са класифицирани, описани, свойствата им са добре познати. Понататък ще разгледаме подробно няколко разпределения.

- Равномерно разпределение - $X \in \mathrm{U}(a, b)$

Нека $[a, b]$ е произволен интервал върху реалната права. Казваме, че случайната величина X е равномерно разпределена в $[a, b]$, ако вероятността да вземе коя да е стойност в този интервал е една и съща. Или казано по друг начин, ако X попада по случаен начин в този интервал. Равномерното разпределение се означава съкратено $X \in U(a, b)$, където $a < b$ са реални числа.

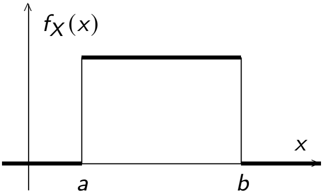
Една и съща вероятност за попадане в интервала означава, че плътността е константа. Тази константа може да бъде намерена от нормиращото условие 2) от дефиницията на плътност т.е. лицето под функцията да бъде единица.

Равномерно разпределение - $X \in U(a, b)$

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & , x \in [a, b] \\ 0 & , \quad \notin \end{cases}$$

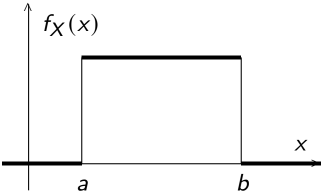
Равномерно разпределение

Графиката на плътността на равномерно разпределена сл.в. е следната:



Равномерно разпределение

Графиката на плътността на равномерно разпределена сл.в. е следната:



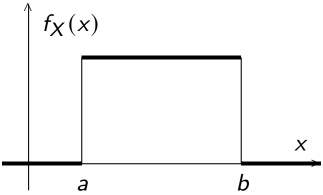
Ще намерим математическото очакване на X.

$$\mathrm{E}X = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \left.\frac{x^2}{2}\right|_{x=a}^{b} = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

Както можеше да се предположи, математическото очакване е точно в средата на интервала $[a, b]$.

Равномерно разпределение

Графиката на плътността на равномерно разпределена сл.в. е следната:



Ще намерим математическото очакване на X.

$$EX = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \left. \frac{x^2}{2} \right|_{x=a}^{b} = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

Както можеше да се предположи, математическото очакване е точно в средата на интервала $[a, b]$.

Ще пресметнем и дисперсията на X. Съгласно формулата за очакване на функция от случайна величина:

$$EX^2 = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \left. \frac{x^3}{3} \right|_{x=a}^{b} = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Равномерно разпределение

Ще определим функцията на разпределение на X. Да припомним $F_X(x) = \mathrm{P}(X < x)$. Ясно е, че $F_X(x) = 0$ за $x \leq a$ и $F_X(x) = 1$ за $x > b$. Ще пресметнем съществения случай $a \leq x < b$

$$F_X(x) = \int_a^x \frac{1}{b-a}\,dt = \left.\frac{t}{b-a}\right|_{t=a}^{x} = \frac{x-a}{b-a}$$

Окончателно

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & , a \leq x < b \\ 1 & , x \geq b \end{cases}$$

Пример

Върху окръжност $K(O,1)$ по случаен начин попадат точките A и B. Да се намери очакването на лицето на триъгълника AOB.

Равномерно разпределение

Ще определим функцията на разпределение на X. Да припомним $F_X(x) = \mathrm{P}(X < x)$. Ясно е, че $F_X(x) = 0$ за $x \le a$ и $F_X(x) = 1$ за $x > b$. Ще пресметнем съществения случай $a \le x < b$

$$F_X(x) = \int_a^x \frac{1}{b-a}\,dt = \frac{t}{b-a}\Big|_{t=a}^{x} = \frac{x-a}{b-a}$$

Окончателно

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & , a \le x < b \\ 1 & , x \ge b \end{cases}$$

Пример

Върху окръжност $K(O,1)$ по случаен начин попадат точките A и B. Да се намери очакването на лицето на триъгълника AOB.

Къде ще попадне точка A е без значение. Нека сл.в. $\varphi = \sphericalangle AOB$. Ясно е че $\varphi \in U(0,\pi)$ и следователно $f_\varphi(x) = 1/\pi$ за $x \in [0,\pi]$. От формулата за очакване на функция от сл.в. (*стр.10*) следва

$$\mathrm{E}S_{AOB} = \mathrm{E}\left(\frac{AO.OB.\sin\varphi}{2}\right) = \frac{1}{2}\mathrm{E}\sin\varphi = \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin x\,\frac{1}{\pi}\,dx = \frac{1}{\pi}$$

Нормално разпределение

- Нормално разпределение - $X \in N(\mu, \sigma^2)$

Нормално разпределените случайни величини са изключително често срещани, изучаването на техните свойства е важна задача в теория на вероятностите. Нормалната плътност е открита от Гаус при изучаване на грешките в астрономически наблюдения. Поради тази причина разпределението също се нарича Гаусово.

Нормално разпределение - $X \in N(\mu, \sigma^2)$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad x \in (-\infty, \infty)$$

Където $\sigma > 0$, а μ е произволно реално число.

Нормално разпределение

- Нормално разпределение - $X \in N(\mu, \sigma^2)$

Нормално разпределените случайни величини са изключително често срещани, изучаването на техните свойства е важна задача в теория на вероятностите. Нормалната плътност е открита от Гаус при изучаване на грешките в астрономически наблюдения. Поради тази причина разпределението също се нарича Гаусово.

Нормално разпределение - $X \in N(\mu, \sigma^2)$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad x \in (-\infty, \infty)$$

Където $\sigma > 0$, а μ е произволно реално число.

Известно е, че функцията e^{-x^2} няма примитивна, т.е. не може да бъде интегрирана в общия случай. Затова функцията на разпределение $F_X(x)$ няма явен вид, а също така вероятностите, свързани с нормално разпределена сл.в. не могат да бъдат пресмятани по традиционния начин чрез интегриране, а са пресметнати числено и се вадят от таблици.

Нормално разпределение

Ще пресметнем математическото очакване на X.

$$\mathrm{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-\mu+\mu}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx$$

Ще разделим този интеграл на две части. Първата с $x-\mu$, а втората с μ. В първият интеграл ще извършим линейна смяна на променливите $y = x - \mu$. При тази смяна границите на интеграла се запазват, а $dy = dx$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\dfrac{y^2}{2\sigma^2}}\, dy = 0.$$

Този интеграл е равен на нула, тъй като функцията е нечетна, а границите на интегриране са симетрични.

Ще пресметнем математическото очакване на X.

$$\mathrm{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-\mu+\mu}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx$$

Ще разделим този интеграл на две части. Първата с $x-\mu$, а втората с μ. В първият интеграл ще извършим линейна смяна на променливите $y = x-\mu$. При тази смяна границите на интеграла се запазват, а $dy = dx$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\dfrac{y^2}{2\sigma^2}}\, dy = 0.$$

Този интеграл е равен на нула, тъй като функцията е нечетна, а границите на интегриране са симетрични.

Ще решим втория интеграл, като го сведем до интеграл от нормална плътност. Ще използваме факта, че плътността отговаря на нормиращото условие 2), т.е. за всяко реално μ и $\sigma > 0$ е изпълнено

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx = 1.$$

Това е известния от анализа Гаусов интеграл (няма да го решаваме тук). Един начин за намиране е да се вземе интегралът на квадрат, да се представи като двоен и да се извърши полярна смяна на променливите.

Нормално разпределение

Като използваме Гаусовия интеграл за математическото очакване получаваме:

$$\mathsf{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx = \mu \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx = \mu.$$

Нормално разпределение

Като използваме Гаусовия интеграл за математическото очакване получаваме:

$$\mathrm{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx = \mu \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx = \mu.$$

Ще намерим дисперсията на X. Няма да използваме традиционния начин с намирането на $\mathrm{E}X^2$, защото това е трудоемка задача. Вместо това ще пресметнем дисперсията директно от нейната дефиниция. Като приложим формулата за очакване на функция от сл.в. (стр.10), получаваме

$$\mathrm{D}X = \mathrm{E}(X - \mathrm{E}X)^2 = \mathrm{E}(X-\mu)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx$$

Като използваме Гаусовия интеграл за математическото очакване получаваме:

$$\mathsf{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \mu \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \mu.$$

Ще намерим дисперсията на X. Няма да използваме традиционния начин с намирането на $\mathsf{E}X^2$, защото това е трудоемка задача. Вместо това ще пресметнем дисперсията директно от нейната дефиниция. Като приложим формулата за очакване на функция от сл.в. (стр.10), получаваме

$$\mathsf{D}X = \mathsf{E}(X - \mathsf{E}X)^2 = \mathsf{E}(X-\mu)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Интегрираме по части, като ще вкараме експонентата под знака на диференциала. Предварително ще пресметнем производната на експонентата.

$$\left(e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \right)' = -\frac{x-\mu}{\sigma^2} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Нормално разпределение

Следователно

$$DX = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx = -\sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-\mu)}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, d\left(e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \right) =$$

$$= -\sigma^2\, \frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \Bigg|_{-\infty}^{\infty} + \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx = \sigma^2$$

Нормално разпределение

Следователно

$$DX = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx = -\sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-\mu)}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, d\left(e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right) =$$

$$= -\sigma^2 \left.\frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right|_{-\infty}^{\infty} + \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx = \sigma^2$$

Първото събираемо е равно на нула, тъй като $\lim\limits_{x\to\pm\infty} xe^{-x^2} = 0$. Във второто събираемо интегралът отново е Гаусов.

Нормално разпределение

Следователно

$$\mathrm{D}X = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx = -\sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-\mu)}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, d\left(e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \right) =$$

$$= -\sigma^2\, \frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \Bigg|_{-\infty}^{\infty} + \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx = \sigma^2$$

Първото събираемо е равно на нула, тъй като $\lim\limits_{x\to\pm\infty} xe^{-x^2} = 0$. Във второто събираемо интегралът отново е Гаусов.

Така за нормално разпределената случайна величина $X \in N(\mu, \sigma^2)$ получихме

$$\mathrm{E}X = \mu, \qquad \mathrm{D}X = \sigma^2,$$

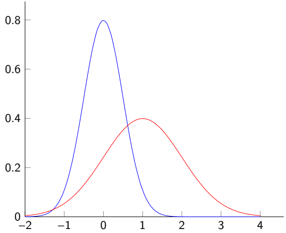
т.е. параметрите μ и σ^2, с които се задава случайната величина, са математическото очакване и дисперсията ѝ.

Нормално разпределение

Графиката на нормалната плътност

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

е известната камбановидната крива, тя е симетрична, средата и е точно в математическото очакване μ.



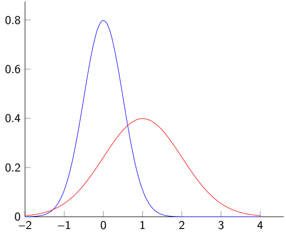
$X \in N(0, 1/4)$

$Y \in N(1, 1)$

Графиката на нормалната плътност

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

е известната камбановидната крива, тя е симетрична, средата и е точно в математическото очакване μ.



$X \in N(0, 1/4)$

$Y \in N(1, 1)$

Дисперсията, както може да се очаква дава разсейването на случайната величина. При по-малка дисперсия кривата е по стръмна и стойностите на сл.в. са скупчени около очакването (синята крива).

При по-голяма дисперсия, кривата е по плавна и има по-голяма вероятност стойностите на сл.в. да са далеч от очакването (червената крива).

Нормално разпределение

Както отбелязахме, вероятностите свързани с нормално разпределени сл.в. се вадят от таблици. Таблиците се отнасят само за сл.в. от типа $N(0,1)$. Прието е, това да се нарича „стандартно нормално разпределение“, а процедурата, с която една случайна величина се привежда към този вид - „стандартизиране“.

Нормално разпределение

Както отбелязахме, вероятностите свързани с нормално разпределени сл.в. се вадят от таблици. Таблиците се отнасят само за сл.в. от типа $N(0,1)$. Прието е, това да се нарича „стандартно нормално разпределение“, а процедурата, с която една случайна величина се привежда към този вид - „стандартизиране“.

Твърдение - Стандартизиране

Нека $X \in N(\mu, \sigma^2)$ и нека
$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma},$$
тогава $Z \in N(0,1)$.

Нормално разпределение

Както отбелязахме, вероятностите свързани с нормално разпределени сл.в. се вадят от таблици. Таблиците се отнасят само за сл.в. от типа $N(0,1)$. Прието е, това да се нарича „стандартно нормално разпределение“, а процедурата, с която една случайна величина се привежда към този вид - „стандартизиране“.

Твърдение - Стандартизиране

Нека $X \in N(\mu, \sigma^2)$ и нека

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma},$$

тогава $Z \in N(0,1)$.

Док. Ще използваме формулата за смяна на променливите(*стр.6*). В условието е зададена правата трансформация $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$.

Нормално разпределение

Както отбелязахме, вероятностите свързани с нормално разпределени сл.в. се вадят от таблици. Таблиците се отнасят само за сл.в. от типа $N(0,1)$. Прието е, това да се нарича „стандартно нормално разпределение“, а процедурата, с която една случайна величина се привежда към този вид - „стандартизиране“.

Твърдение - Стандартизиране

Нека $X \in N(\mu, \sigma^2)$ и нека

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma},$$

тогава $Z \in N(0,1)$.

Док. Ще използваме формулата за смяна на променливите(*стр.6*). В условието е зададена правата трансформация $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$.

Обратната трансформация е $x = h(z) = \sigma z + \mu$ с производна $h'(z) = \sigma$. По този начин за плътността на Y, получаваме

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\dfrac{(\sigma z + \mu - \mu)^2}{2\sigma^2}}\, \sigma = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\dfrac{z^2}{2}}$$

Тази функция явно е плътност от типа $N(0,1)$. $\square$

Нормално разпределение

Прието е функцията на разпределение F_X на стандартното нормално разпределение да се бележи с Φ, т.е. ако $Z \in N(0,1)$

$$\Phi(q) = \mathrm{P}(Z < q)$$

Нормално разпределение

Прието е функцията на разпределение F_X на стандартното нормално разпределение да се бележи с Φ, т.е. ако $Z \in N(0,1)$

$$\Phi(q) = \mathrm{P}(Z < q)$$

Стойностите на функцията $\Phi(q)$ са пресметнати числено и са дадени в таблицата на следващата страница. Първите две цифри на числото q са означени в началото на реда, а третата цифра в съответната колона. Така например $\Phi(0.83) = 0.7967$.

Вероятностите при отрицателните стойности на q не са в таблицата, тъй като лесно могат да бъдат сметнати, като се използва симетричността на нормалната плътност.

Свойство на функцията на разпределение на $Z \in N(0,1)$

$$\Phi(-q) = 1 - \Phi(q)$$

Нормално разпределение

Прието е функцията на разпределение F_X на стандартното нормално разпределение да се бележи с Φ, т.е. ако $Z \in N(0,1)$

$$\Phi(q) = \mathrm{P}(Z < q)$$

Стойностите на функцията $\Phi(q)$ са пресметнати числено и са дадени в таблицата на следващата страница. Първите две цифри на числото q са означени в началото на реда, а третата цифра в съответната колона. Така например $\Phi(0.83) = 0.7967$.

Вероятностите при отрицателните стойности на q не са в таблицата, тъй като лесно могат да бъдат сметнати, като се използва симетричността на нормалната плътност.

Свойство на функцията на разпределение на $Z \in N(0,1)$

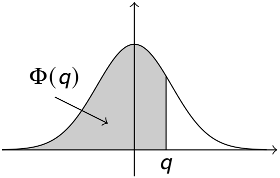
$$\Phi(-q) = 1 - \Phi(q)$$

Док. $f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$ е четна функция, т.е. $f_Z(-z) = f_Z(z)$. Тогава

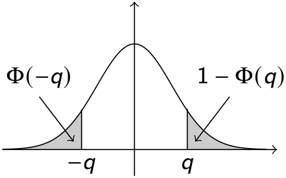
$$\Phi(-q) = \int_{-\infty}^{-q} f_Z(z)dz = \int_{q}^{\infty} f_Z(z)dz = \int_{-\infty}^{\infty} f_Z(z)dz - \int_{-\infty}^{q} f_Z(z)dz = 1 - \Phi(q)$$

Таблица за нормално разпределение - $Z \in N(0,1)$

$$\Phi(q) = \mathrm{P}(Z < q)$$



$$\Phi(-q) = 1 - \Phi(q)$$



q	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

Нормално разпределение

Пример

Резултатите от теста SAT проведен в 1982г. са нормално разпределени с очакване $\mu = 503$ и дисперсия $\sigma^2 = 9604$. Каква част от резултатите попадат в граници съответно $\pm$ едно стандартно отклонение от средното.

Пример

Резултатите от теста SAT проведен в 1982г. са нормално разпределени с очакване $\mu = 503$ и дисперсия $\sigma^2 = 9604$. Каква част от резултатите попадат в граници съответно $\pm$ едно стандартно отклонение от средното.

Знаем че $X \in N(503, 9604)$ и стандартното отклонение е $\sigma = \sqrt{9604} = 98$.

Търсим вероятността $p = \mathrm{P}(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = \mathrm{P}(405 < X < 601)$.

Пример

Резултатите от теста SAT проведен в 1982г. са нормално разпределени с очакване $\mu = 503$ и дисперсия $\sigma^2 = 9604$. Каква част от резултатите попадат в граници съответно $\pm$ едно стандартно отклонение от средното.

Знаем че $X \in N(503, 9604)$ и стандартното отклонение е $\sigma = \sqrt{9604} = 98$.

Търсим вероятността $p = \mathrm{P}(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = \mathrm{P}(405 < X < 601)$.

За да можем да използваме таблицата ще трябва да стандартизираме X (*стр.20*) , т.е. да направим трансформацията $Z = \frac{X-503}{98}$, тогава $Z \in N(0, 1)$.

Пример

Резултатите от теста SAT проведен в 1982г. са нормално разпределени с очакване $\mu = 503$ и дисперсия $\sigma^2 = 9604$. Каква част от резултатите попадат в граници съответно $\pm$ едно стандартно отклонение от средното.

Знаем че $X \in N(503, 9604)$ и стандартното отклонение е $\sigma = \sqrt{9604} = 98$.

Търсим вероятността $p = \mathrm{P}(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = \mathrm{P}(405 < X < 601)$.

За да можем да използваме таблицата ще трябва да стандартизираме X (*стр.20*) , т.е. да направим трансформацията $Z = \frac{X-503}{98}$, тогава $Z \in N(0, 1)$.

$$p = \mathrm{P}\left(\frac{405-503}{98} < \frac{X-503}{98} < \frac{601-503}{98}\right) = \mathrm{P}(-1 < Z < 1) =$$

$$= \mathrm{P}(Z < 1) - \mathrm{P}(Z < -1) = \Phi(1) - \Phi(-1)$$

Нормално разпределение

Пример

Резултатите от теста SAT проведен в 1982г. са нормално разпределени с очакване $\mu = 503$ и дисперсия $\sigma^2 = 9604$. Каква част от резултатите попадат в граници съответно $\pm$ едно стандартно отклонение от средното.

Знаем че $X \in N(503, 9604)$ и стандартното отклонение е $\sigma = \sqrt{9604} = 98$.

Търсим вероятността $p = \mathrm{P}(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = \mathrm{P}(405 < X < 601)$.

За да можем да използваме таблицата ще трябва да стандартизираме X (*стр.20*) , т.е. да направим трансформацията $Z = \frac{X-503}{98}$, тогава $Z \in N(0,1)$.

$$p = \mathrm{P}\left(\frac{405-503}{98} < \frac{X-503}{98} < \frac{601-503}{98}\right) = \mathrm{P}(-1 < Z < 1) =$$

$$= \mathrm{P}(Z < 1) - \mathrm{P}(Z < -1) = \Phi(1) - \Phi(-1)$$

От таблицата отчитаме: $\Phi(1) = 0.8413$,

$\Phi(-1) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$.

Пример

Резултатите от теста SAT проведен в 1982г. са нормално разпределени с очакване $\mu = 503$ и дисперсия $\sigma^2 = 9604$. Каква част от резултатите попадат в граници съответно $\pm$ едно стандартно отклонение от средното.

Знаем че $X \in N(503, 9604)$ и стандартното отклонение е $\sigma = \sqrt{9604} = 98$.

Търсим вероятността $p = \mathrm{P}(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = \mathrm{P}(405 < X < 601)$.

За да можем да използваме таблицата ще трябва да стандартизираме X (*стр.20*) , т.е. да направим трансформацията $Z = \frac{X-503}{98}$, тогава $Z \in N(0,1)$.

$$p = \mathrm{P}\left(\frac{405-503}{98} < \frac{X-503}{98} < \frac{601-503}{98}\right) = \mathrm{P}(-1 < Z < 1) =$$

$$= \mathrm{P}(Z < 1) - \mathrm{P}(Z < -1) = \Phi(1) - \Phi(-1)$$

От таблицата отчитаме: $\Phi(1) = 0.8413$,

$\Phi(-1) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$.

Следователно $p = 0.8413 - 0.1587 = 0.6826$, т.е. приблизително 68% от резултатите са в интервала$(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$.

Аналогично:

95% от резултатите са в интервала$(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)$.

99.7% от резултатите са в интервала$(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$.

Пример

Резултатите от теста SAT проведен в 1982г. са нормално разпределени с очакване $\mu = 503$ и дисперсия $\sigma^2 = 9604$. Каква част от резултатите попадат в граници съответно $\pm$ едно стандартно отклонение от средното.

Знаем че $X \in N(503, 9604)$ и стандартното отклонение е $\sigma = \sqrt{9604} = 98$.

Търсим вероятността $p = \mathrm{P}(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = \mathrm{P}(405 < X < 601)$.

За да можем да използваме таблицата ще трябва да стандартизираме X (*стр.20*) , т.е. да направим трансформацията $Z = \frac{X-503}{98}$, тогава $Z \in N(0, 1)$.

$$p = \mathrm{P}\left(\frac{405-503}{98} < \frac{X-503}{98} < \frac{601-503}{98}\right) = \mathrm{P}(-1 < Z < 1) =$$

$$= \mathrm{P}(Z < 1) - \mathrm{P}(Z < -1) = \Phi(1) - \Phi(-1)$$

От таблицата отчитаме: $\Phi(1) = 0.8413$,

$\Phi(-1) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$.

Следователно $p = 0.8413 - 0.1587 = 0.6826$, т.е. приблизително 68% от резултатите са в интервала$(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$.

Аналогично:

95% от резултатите са в интервала$(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)$.

99.7% от резултатите са в интервала$(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$.