Лекция 8:
Представяне на несигурни знания и вероятностни разсъждения

ПРЕДСТАВЯНЕ НА НЕСИГУРНИ ЗНАНИЯ С ВЕРОЯТНОСТИ

- *Случайна променлива.* Величина в езика за представяне на знания, която може да има няколко (вкл. безброй много) възможни стойности.
- *Област на променлива*: $dom(x)$ = множеството от възможни стойности на x.
- *Твърдение*: булев израз от присвоявания на променливи ($x_i = v_j$). Например: *(време = дъждовно)* $\vee$ *(болест = грип)* $\vee$ $\neg$*(температура = повишена)*.
- *Вероятност* = мярка за увереност в дадено твърдение (реално число между 0 и 1). $P(A)=0 \rightarrow$ 100% увереност, че твърдението A е лъжа; $P(A)=1 \rightarrow$ 100% увереност, че твърдението A е истина.
- *Вероятностното разпределение* задава вероятността на всяка възможна стойност на променливата. Ако $dom(x) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, то $\sum_{i=1}^{n} P(x = v_i) = 1$.
- *Априорна вероятност* – вероятност при отсъствие на каквато и да е информация.
- *Условна вероятност* – вероятност при наличието на информация за стойностите на други случайни променливи. Например: *P(температура = повишена | болест = грип)*.
- *Основни зависимости* (A, B – твърдения):
  - $P(A \vee B) = P(A) + P(B) - P(A \wedge B)$
  - A и B са *независими* (т.е. знанието на едното не променя вероятността на другото), когато $P(A \wedge B) = P(A)P(B)$
  - A и B са *несъвместими* (т.е. никога не могат да се случат заедно), когато $P(A \wedge B) = 0$
  - Дефиниция на условна вероятност: $P(A|B) = \dfrac{P(A \wedge B)}{P(B)}$

    Следователно, $P(A \wedge B) = P(A|B)\, P(B)$
  - *Условна независимост* на A и B при дадено C: ако $P(A|B \wedge C) = P(A|C)$ и $P(B|A \wedge C) = P(B|C)$
  - Формула (теорема) на Бейс: $P(A|B) = \dfrac{P(B\,|\,A)P(A)}{P(B)}$
- Вероятностен модел на предметната област:
  - *Атомарно събитие*: $(x_1 = v_1) \wedge (x_2 = v_2) \wedge \dots \wedge (x_n = v_n)$, където x_i са случайни променливи. Описва конкретно състояние на предметната област.
  - *Съвместно разпределение*: n-мерна таблица с m_i ($i = 1,2, \dots, n$) клетки по всяка размерност (ако x_i има m_i възможни стойности). Във всяка клетка се записва вероятността на съответното атомарно събитие. Тъй като атомарните събития са несъвместими (т.е. взаимно изключващи се) и таблицата съдържа всички атомарни събития, то сумата от стойностите на всички клетки е 1.

МЕХАНИЗМИ ЗА ИЗВОД

- Използване на съвместното разпределение
  Дадено е съвместното разпределение на няколко случайни променливи, например

	зъбобол = да	*зъбобол = не*
кариес = да	0.04	0.06
кариес = не	0.01	0.89

Тогава могат да се изчисляват вероятностите на произволни твърдения. Например (за краткост са пропуснати стойностите на променливите):

P(кариес) = 0.04 + 0.06 = 0.1   (сумата на реда)

P(кариес $\vee$ *зъбобол)* = 0.04 + 0.06 + 0.01 = 0.11

P(кариес|зъбобол) = P(кариес $\wedge$ *зъбобол)/P(зъбобол)* = 0.04/(0.04+0.01) = 0.8

- Използване на формулата на Бейс
  - Дадени са: e – множество от симптоми ($e = e_1 \wedge e_2 \wedge \ldots \wedge e_k$) и $d_1, d_2, \ldots, d_n$ – изчерпващо множество от диагнози. Предполага се, че елементарните симптоми $\{e_i\}$ са независими. Известни са $P(d_i)$ и $P(e|d_i)$ за $i = 1, \ldots, n$ (по-точно, $P(e_j|d_i)$ за $j = 1, \ldots, k$ и $i = 1, \ldots, n$).
  - Задачата е да се пресметнат $P(d_i|e)$, $i = 1, \ldots, n$ и да се намери най-вероятната диагноза при дадените симптоми e.
  - Според формулата на Бейс

    $P(d_i \mid e) = \frac{P(d_i)P(e|d_i)}{P(e)}$ за всяко $i = 1, \ldots, n$
  - Предполага се, че елементарните симптоми $\{e_i\}$ са независими, следователно

    $P(e \mid d_i) = \prod_{j=1}^{k} P(e_j \mid d_i)$ за всяко $i = 1, \ldots, n$
  - $P(e)$ може да се намери по следния начин:

    $\sum_{i=1}^{n} P(d_i \mid e) = \sum_{i=1}^{n} \frac{P(d_i)P(e|d_i)}{P(e)} = 1$, следователно

    $$P(e) = \sum_{i=1}^{n} P(d_i)P(e \mid d_i)$$
  - Пример:

вероятност	*здрав*	*грип*	*алергия*
P(d)	0.9	0.05	0.05
P(кихане|d)	0.1	0.9	0.9
P(кашлица|d)	0.1	0.8	0.7
P(температура|d)	0.01	0.7	0.4

Нека симптомите e са кихане и кашлица без повишена температура.

Тогава

$e = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$,

e_1 = *кихане*, e_2 = *кашлица*, e_3 = $\neg$*(повишена температура)*

d_1 = *здрав*, d_2 = *грип*, d_3 = *алергия*

$$P(здрав|e) = \frac{P(здрав)P(e\,|\,здрав)}{P(e)} = \frac{(0.9)P(e\,|\,здрав)}{P(e)};$$

$$P(e|здрав) = \prod_{j=1}^{3} P(e_j\,|\,здрав) = (0.1)(0.1)(1\text{-}0.01)$$

Следователно,

$$P(здрав|e) = \frac{(0.9)(0.1)(0.1)(0.99)}{P(e)} = \frac{0.0089}{P(e)}$$

$$P(грип|e) = \frac{(0.05)(0.9)(0.8)(0.3)}{P(e)} = \frac{0.01}{P(e)}$$

$$P(алергия|e) = \frac{(0.05)(0.9)(0.7)(0.6)}{P(e)} = \frac{0.019}{P(e)}$$

$$P(e) = \sum_{i=1}^{3} P(d_i)P(e\,|\,d_i) = 0.0089 + 0.01 + 0.019 = 0.0379$$

Следователно,

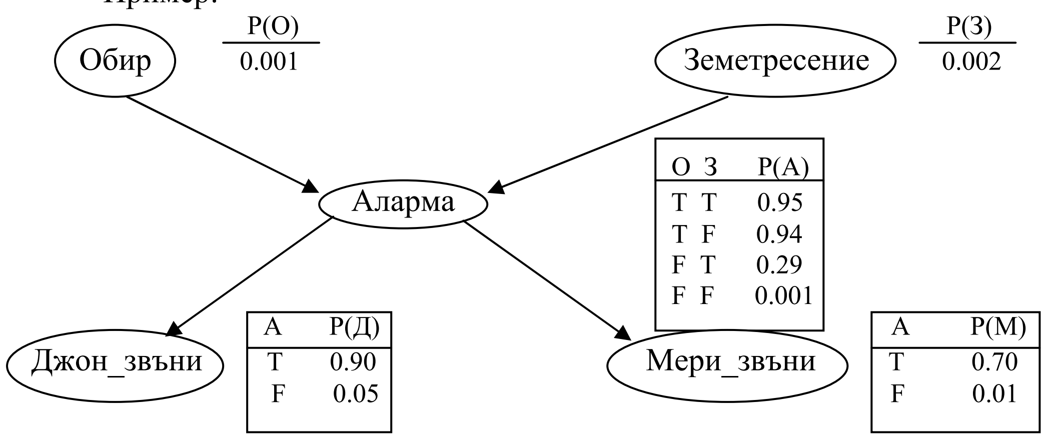
$P(здрав|e) = 0.23$; $P(грип|e) = 0.26$; $P(алергия|e) = 0.50$

- Проблем: предположението за независимост на елементарните симптоми е прекалено силно и нереалистично.

БЕЙСОВИ МРЕЖИ (БМ, BELIEF NETWORKS)

- Използване на ацикличен ориентиран граф за представяне на зависимостите между променливите с цел сбито (компактно) описание на съвместното им разпределение.
- На всяка случайна променлива съответства отделен възел от мрежата. Дъгите от мрежата задават *причинно-следствени връзки*. Интуитивното значение на дъгата от възела X към възела Y е, че X оказва *директно влияние* върху Y.
- За всеки възел е дефинирана таблица с условни вероятности, която задава вероятността на всяка стойност на променливата във възела в зависимост от всяка възможна комбинация от стойности на променливите в родителските възли.

Пример:



Примерна предметна област. В жилището си имате монтирана нова сигнална инсталация (аларма). Тя е чувствителна и реагира на опит за проникване в жилището ви (в частност, при опит за обир), но също и на (дори слаби) земетресения. Имате също двама съседи, Джон и Мери, които са обещали да ви се обаждат по телефона в службата винаги когато чуят, че алармата във вашето жилище се е включила. Джон винаги ви се обажда, когато чуе алармата, но понякога я обърква със звъна на телефона и тогава също ви се обажда. Мери пък обича да слуша силна музика и понякога е възможно да не чуе алармата у вас.

Ако е известно кой от двамата ви се е обадил или не се е обадил, може да се установи например вероятността в жилището ви да е извършен обир.

- БМ задават неявно съвместното разпределение на променливите си. Нека $x_1, x_2, \dots, x_n$ са случайни променливи и $P(v_1,v_2, \dots ,v_n)$ е съвместната вероятност те да получат съответно стойности $v_1, v_2, \dots , v_n$. Тогава

$$P(v_1,v_2,...,v_n) = \prod_{i=1}^{n} P(v_i \mid Parents(x_i)),$$

  където $P(v_i \mid Parents(x_i))$ е условната вероятност за $x_i = v_i$ при условие, че са дадени стойностите на родителските променливи $Parents(x_i)$ на x_i. Например:
  P(Джон_звъни, Мери_звъни, Аларма, ¬Обир, ¬Земетресение) =
  P(Д|А).P(М|А).P(А|¬О∧¬З).P(¬О).P(¬З) = (0.9)(0.7)(0.001)(0.999)(0.998) = 0.000628
- Видове извод в БМ. При дадени стойности на подмножество от променливите (наблюдаеми, evidence variables) да се определи вероятността на стойностите на друго подмножество от променливите (търсени, query променливи).
  - Диагностика – от следствието към причината: *P(Обир | Джон_звъни)* = ?
  - Предсказване – от причината към следствието: *P(Джон_звъни | Обир)* = ?
  - Междупричинен извод – между причините за дадено следствие:
    P(Обир | Земетресение) = ?
  - Смесен извод – комбинация на горните три:
    P(Аларма | Джон_звъни∧¬Земетресение) = ?