ФН: 82134

Мартин ФН: 82134

Въпрос 1:

1) ~~съвкупност от вектори~~ непразно мн-во от елементи (вектори), които могат да бъдат събирани или умножавани с ~~число~~ скалар. Резултатът също трябва да принадлежи на линейното пространство. Освен ~~двете~~ двете бинарни операции, трябва да бъдат изпълнени следните аксиоми:

1. $a+b=b+a \quad \forall a,b\in V$
2. $(a+b)+c=a+(b+c), \ \forall a,b\in V$
3. $\exists \theta \quad a+\theta=a \quad \forall a\in V$
4. $\forall a, \exists b: a+b=\theta$
5. $1.a=a, \ \forall a \ (1\in F)$
6. $\lambda(a+b)=\lambda a+\lambda b, \ \forall \lambda\in F, a,b\in V$
7. $(\lambda+\mu)a=\lambda a+\mu a, \ \forall \lambda,\mu\in F, a\in V$
8. $(\lambda\mu)a=\lambda(\mu a) \ \forall \lambda,\mu\in F, a\in V$

Примери:

- геометричните вектори в равнината ($\mathbb{R}^2$) или в $\mathbb{R}^3$ (3мерно пр-во)
- множеството от всички функции от поле F във F
- множеството от всички полиноми с елементи от F
- мн-вото $F_{m\times n}$ от всички m x n матрици с ел. от F

2) Нека W е непразно подмножество на V

W е подпр. на V, ако всяка линейна комб. на вектори от W също принадлежи на W

* $w_1+w_2\in W \ \forall w_1,w_2\in W$
* $\lambda w\in W \ \forall w\in W, \lambda\in F$

Примери:

1. $\{\theta\}$ и V са подпр. на V
2. Векторите в равнината са подпр. на простр. от тримерните вектори
3. ~~Компл. числа~~ $\mathbb{R}$ е подпр. на простр от компл. числа.

ФН: 82134

3) ~~[illegible]~~

4) Линейна обвивка ~~—~~ е множеството от всички линейни комб. на дадени вектори

Св-ва на ℓ:

1. $\theta \in \ell(a_1, \dots, a_n)$, защото $\theta = 0.a_1 + \dots + 0.a_n$
2. ако $b_1, \dots, b_k$ са от $\ell(a_1, \dots, a_n) \Rightarrow$ всяка тяхна ЛК също $\in \ell(a_1, \dots, a_n)$
3. ако $b \in \ell(a_1, \dots, a_n) \Rightarrow \ell(a_1, \dots, a_n, b) = \ell(a_1, \dots, a_n)$
4. ако $b_1, \dots, b_k \in \ell(a_1, \dots, a_n) \rightarrow \ell(b_1, \dots, b_k) \subseteq \ell(a_1, \dots, a_n)$

Нека V е лин. пр.-во и базисните вектори са a_1, a_2, a_3 тогава $\ell(a_1, a_2, a_3) = V$ понеже цялото V може да се представи чрез базисните си в-ри и техни ЛК, но V е подпр. на себе си $\Rightarrow \ell(a_1, a_2, a_3)$ е лин. подпр.

ФН: 82134
ФН: 82134

Въпрос 2:

1) B е базис на V, ако
- $\ell(b_1,\dots,b_k) = V$
- $B = \{b_1,\dots,b_k\}$ е ЛНЗ

V е лин. пр. ($V \neq \{\theta\}$) над F и
$V = \ell(a_1,\dots,a_n)$
V има базис $b_1,\dots,b_k$ $\quad \{b_1,\dots,b_k\} \subseteq \{a_1,\dots,a_n\}$

д-во:
в $\{a_1,\dots,a_n\}$ $\exists a_i \neq \theta$
нека $b_1 = a_i$
- ако $\{a_1,\dots,a_n\} \subset \ell(b_1)$ – b_1 е базис
- ако $\exists a_l \notin \ell(b_1) \to b_2 = a_l \Rightarrow b_1, b_2$ ЛНЗ → същото

...
ако $\{b_1,\dots,b_p\}$ е ЛНЗ и $\{b_1,\dots,b_k\} \subset \{a_1,\dots,a_n\}$
- ако $\{a_1,\dots,a_n\} \subset \ell(b_1,\dots,b_p) \to \{b_1,\dots,b_p\}$ е базис
- ако $\exists a_m \notin \ell(b_1,\dots,b_p) \to b_{p+1} = a_m \Rightarrow b_1,\dots,b_{p+1}$ ЛНЗ и пак същото

$$\left.\begin{array}{l} \text{ако } b_1,\dots,b_k \text{ са ЛНЗ} \\ \{b_1,\dots,b_k\} \subseteq \{a_1,\dots,a_n\} \\ \{a_1,\dots,a_n\} \subseteq \ell(b_1,\dots,b_k) \end{array}\right\} \Rightarrow b_1,\dots,b_k \text{ е базис}$$

ФН: 82134

2) нека $a_1, \dots, a_n$ и $b_1, \dots, b_k$ – базиси на V

$a_1, \dots, a_n$ базис $\Rightarrow b_i \in V = \ell(a_1, \dots, a_n)$ $i = 1, \dots, k$

ако $k > n \rightarrow b_1, \dots, b_k$ ЛЗ, ЛН $\Rightarrow k \leq n$

$b_1, \dots, b_k$ базис $\Rightarrow$ $a_1, \dots, a_n \in \ell(b_1, \dots, b_k) \Rightarrow n \leq k$

$\Rightarrow n = k$

Размерност на V наричаме броя на векторите в базис на простр. $\dim V = n$

3) $B = \{b_1, \dots, b_k\}$ базис

$a = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_k b_k$ тогава k-мерният вектор, съставен от коеф. на тази ЛК нар. координати на a спрямо B

Св-ва:

1. координатите дават биекция

$a = \lambda_1 b_1, \dots, \lambda_k b_k \xrightarrow{f(B)} (\lambda_1, \dots, \lambda_k$

$f(a) = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ $\rightarrow$ $f(a+c) = f(a) + f(c)$

$f(c) = (\mu_1, \dots, \mu_k)$ $\quad f(\lambda a) = \lambda f(a)$, $\lambda \in F$

$e_1 = (1, 0, 0)$
$e_2 = (0, 1, 0)$
$e_3 = (0, 0, 1)$

$a = (2, 8, -5)$

коорд. на a спрямо $\{e_1, e_2, e_3\}$ са $(2, 8, -5)$