2. $r(A_1,\dots,A_k) = r = \dim \ell(A_1,\dots,A_k)$,
3. $r(A_1,\dots,A_k) = r \Leftrightarrow$ в набора от вектори има r линейно независими вектора и всеки $r+1$ вектора са линейно зависими.

Доказателство:
Нека $\{A_{i_1},\dots,A_{i_r}\}$ е МЛНП за $A_1,\dots,A_k$.

1. Да разгледаме техните линейни обвивки $U = \ell(A_{i_1},\dots,A_{i_r})$ и $W = \ell(A_1,\dots,A_k)$. МЛНП $\{A_{i_1},\dots,A_{i_r}\}$ е подмножество на изходната система $\Rightarrow$ $U \subset W$. Всеки вектор от изходната система е линейна комбинация $A_j \in \ell(A_{i_1},\dots,A_{i_r}),\ \ \forall j = 1,\dots,k \quad \Rightarrow$ $W \subset U$ откъдето получаваме, че $W = U$.
2. Получихме, че $\ell(A_{i_1},\dots,A_{i_r}) = W = \ell(A_1,\dots,A_k)$ и векторите $\{A_{i_1},\dots,A_{i_r}\}$ са линейно независими $\Rightarrow$те образуват базис на $\ell(A_1,\dots,A_k)$, откъдето получаваме че $r(A_1,\dots,A_k) = r = \dim \ell(A_1,\dots,A_k)$.

$\square$

4. Сума на подпространства

Знаем, че в ненулево линейно пространство V има различни подпространства и освен това ако се вземе сечението на две подпространство се получава пак подпространство.
Непосредствено се вижда, че обединението на две подпространство *не е* подпространство. За да се опише подпространството, което съдържа обединението на две подпространства се използва конструкцията на сума на подпространства.

Определение:
Нека V е линейно пространство над полето F и U и W са подпространства на V. Сума на подпространствата U и W се нарича:

$$U + W = \{a + b \mid a \in U,\ b \in W\}.$$

Пример:
Нека в 4 мерното векторно пространство $\mathbb{R}^4$ разгледаме подпространствата $U = \ell(a_1, a_2)$ и $W = \ell(b_1, b_2)$, където

$$a_1 = (1,1,0,0), \quad a_2 = (0,0,1,1)$$
$$b_1 = (1,0,1,0), \quad b_2 = (0,1,0,1)$$

Описанието на подпространствата може да бъде направено по следния начин $U = \{(x,x,y,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$ и $W = \{(z,t,z,t) \mid z,t \in \mathbb{R}\}$. Тогава сумата на подпространствата е множеството

$$U + W = \{(x+z, x+t, y+z, y+t) \mid x,y,z,t \in \mathbb{R}\}.$$

Забележка: По подобен начин може да се определи сума на повече от две подпространства. Ако V *е линейно пространство и* $U_1, \ldots, U_k$ *са подпространства на* V*, тогава*

$$U_1 + \ldots + U_k = \{a_1 + \ldots + a_k \mid a_i \in U_i, \ \ i = 1, \ldots, k\}.$$

4.1. Свойства на сумата на подпространства

Твърдение:
Нека V е линейно пространство, като U и W са негови подпространства. Тогава е изпълнено:

1. $U + W$ е подпространство на V,
2. Изпълнено е, че $\ell(a_1, \ldots, a_k) + \ell(b_1, \ldots, b_s) = \ell(a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_s)$,
3. ако за подпространството T е в сила, че $U < T$ и $W < T$, тогава е изпълнено $U + W < T$,
4. сумата на подпространствата U и W е равна на сечението на всички подпространства на V, които съдържат обединението $U \cup W$

$$U + W = \bigcap_{T \supset \{U \cup W\}, T < V} T.$$

Доказателство:

1. Нека да разгледаме два произволни елемента от сумата на подпространствата $a = u_1 + w_1$ и $b = u_2 + w_2$. Тъй като U и W, като подпространства са затворени относно операциите, е изпълнено $\lambda a = \lambda u_1 + \lambda w_1 \in U + W$, както и

$$a+b=(u_1+w_1)+(u_2+w_2)=(\underbrace{u_1+u_2}_{\in U})+(\underbrace{w_1+w_2}_{\in W})\in U+W$$

По този начин получаваме, че $U+W$ е подпространство.

2. Нека да резгледаме по един елемент от всяка една от двете линейни обвивки $u\in U=\ell(a_1,\ldots,a_k)$, където $u=\lambda_1a_1+\ldots+\lambda_ka_k$, също и $w\in W=\ell(b_1,\ldots,b_s)\Rightarrow w=\mu_1b_1+\ldots+\mu_sb_s$. Тогава имаме

$$\begin{array}{rcl} u+w & = & \lambda_1a_1+\ldots+\lambda_ka_k+\mu_1b_1+\ldots+\mu_sb_s \\ & \Downarrow & \\ U+W & \subset & \ell(a_1,\ldots,a_k,b_1,\ldots,b_s) \end{array}$$

От друга страна за произволен вектор $t\in\ell(a_1,\ldots,a_k,b_1,\ldots,b_s)$ е изпълнено, че

$$t=\underbrace{\beta_1a_1+\ldots+\beta_ka_k}_{\in\ell(a_1,\ldots,a_k)}+\underbrace{\gamma b_1+\ldots+\gamma_sb_s}_{\in\ell(b_1,\ldots,b_s)}$$

$$t\in\ell(a_1,\ldots,a_k)+\ell(b_1,\ldots,b_s)$$
$$\Downarrow$$
$$\ell(a_1,\ldots,a_k,b_1,\ldots,b_s)\subset U+W$$

Следователно

$$\ell(a_1,\ldots,a_k)+\ell(b_1,\ldots,b_s)=\ell(a_1,\ldots,a_k,b_1,\ldots,b_s)$$

3. Ако $T<V$ е подпространство, което съдържа и двете $U\subset T$ $W\subset T$, то за произволен елемент от сумата на подпространствата е изпълнено

$$a=u+w\in T,\quad \text{защото}\quad u\in U\subset T \text{ и } w\in W\subset T.$$

4. Сумата $U+W$ се съдържа във всички подпространства T , които съдържат $U\cup W$, затова $U+W$ се съдържа в сечението на всички такива подпространства

$$U \cup W \subset T \Rightarrow U + W \subset T \Rightarrow U + W \subset \bigcap_{(U \cup W) \subset T} T$$

Ако $L = U + W$, тогава L съдържа обединението $U \cup W$:

$$\left.\begin{array}{l} u \in U \Rightarrow u = u + \underbrace{\mathcal{O}}_{\in W} \in U + W \\ w \in W \Rightarrow w = \underbrace{\mathcal{O}}_{\in U} + w \in U + W \end{array}\right\} \Rightarrow \{U \cup W\} \subset U + W$$

Получаваме, че $L = U + W$ е едно от подпространствата, които участват в сечението и следователно $\bigcap_{T \supset U, W} T \subset U + W$. По този начин установихме, че

$$U + W = \bigcap_{(U \cup W) \subset T} T$$

$\square$

4.2. размерност на сумата

Теорема:
Нека V е линейно пространство над полето F, U и W са крайномерни подпространства на V. Тогава е изпълнено

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W).$$

Доказателство:
Тъй като U и W са крайномерни пространства, затова и тяхното сечение $U \cap W$ също е крайномерно и нека $e_1, \ldots, e_s$ е базис на $U \cap W$ и $\dim(U \cap W) = s$. Ако сечението е нулевото пространство $U \cap W = \{\mathcal{O}\}$, тогава не се взема никакъв вектор за сечението.

Допълва се базиса на сечението веднъж до базис на подпространството U и от друга страна се допълва до базис на W:

$$\begin{array}{lll} e_1,\ldots,e_s,a_1,\ldots a_m & \text{- базис на } U, & \dim U = s+m, \\ e_1,\ldots,e_s,b_1,\ldots b_k & \text{- базис на } W, & \dim W = s+k. \end{array}$$

Ще докажем, че $e_1,\ldots,e_s,a_1,\ldots a_m,b_1,\ldots b_k$ образува базис на сумата на подпространствата $U+W$.

- За векторите от разглежданите базиси е изпълнено $e_i \in U\cap W \subset U+W$, освен това $a_j \in U \subset U+W$, както и $b_l \in W \subset U+W$. Следователно $\ell(e_1,\ldots,e_s,a_1,\ldots a_m,b_1,\ldots b_k) \subset U+W$. Нека разгледаме произволен елемент от сумата $t = u+w \in U+W$, където $u = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_s e_s + \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_m a_m \in U$ и $w = \mu_1 e_1 + \ldots + \mu_s e_s + \beta_1 b_1 + \ldots + \beta_k b_k \in W$. От това изразяване, получаваме

$$\begin{array}{rcl} t & = & u+w= \\ & = & (\lambda_1+\mu_1)e_1 + \ldots + (\lambda_s+\mu_s)e_s + \\ & & \quad + \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_m a_m + \\ & & \quad + \beta_1 b_1 + \ldots + \beta_k b_k. \\ & \Downarrow & \\ t & \in & \ell(e_1,\ldots,e_s,a_1,\ldots a_m,b_1,\ldots b_k) \end{array}$$

  По този начин се получи, че $U+W \subset \ell(e_1,\ldots,e_s,a_1,\ldots a_m,b_1,\ldots b_k)$. Следователно $U+W = \ell(e_1,\ldots,e_s,a_1,\ldots a_m,b_1,\ldots b_k)$.
- Ще докажем, че векторите $e_1,\ldots,e_s,a_1,\ldots a_m,b_1,\ldots b_k$ са линейно независими. За целта разглеждаме едно изразяване на нулевия вектор

$$\underbrace{\gamma_1 e_1 + \ldots + \gamma_s e_s}_{=x\in U\cap W} + \underbrace{\delta_1 a_1 + \ldots + \delta_m a_m}_{=y\in U} + \underbrace{\nu_1 b_1 + \ldots \nu_k b_k}_{=z\in W} = \mathcal{O}$$

  За векторите $x \in U\cap W$, $y \in U$ и $z \in W$ е изпълнено $x+y+z = \mathcal{O}$, следователно $x+y = -z$. Изпълнено е, че $x+y \in U$, както и $-z \in W$ и тъй като те са равни, затова тези вектори са от сечението на двете подмножества $x+y = -z \in U\cap W$. Следователно тези вектори могат да се представят като линейна комбинация на базисните вектори на $U\cap W$ и затова можем да напишем $x+y = -z = \omega_1 e_1 + \ldots + \omega_s e_s$. Изразяваме по следния начин

$$\omega_1 e_1 + \ldots + \omega_s e_s + \nu_1 b_1 + \ldots \nu_k b_k = \mathcal{O}.$$

  Векторите $e_1,\ldots,e_s,b_1,\ldots b_k$ са линейно независими, защото са базис на подпространството W и затова всички коефициенти на тази линейна комбинация са нули $\omega_1 = 0,\ldots,\omega_s = 0, \nu_1 = 0,\ldots \nu_k = 0$, следователно е изпълнено $x+y = \mathcal{O}$. По този начин установяваме и за останалите коефициенти, че са равни на нула $\gamma_1 = 0, \ldots, \gamma_s = 0$, както и $\delta_1 = 0, \ldots, \delta_m = 0$. Следователно $e_1, \ldots, e_s, a_1, \ldots a_m, b_1, \ldots b_k$ са линейно независими.

По този начин установихме, че $e_1, \ldots, e_s, a_1, \ldots a_m, b_1, \ldots b_k$ е базис на $U+W$. Следователно е изпълнено

$$\begin{aligned}\dim(U+W) &= s+m+k = \\ &= (s+m)+(s+k)-s = \\ &= \dim U + \dim W - \dim(U \cap W).\end{aligned}$$

$\square$

<u>Пример:</u>
В разгледания на предната страница пример в $\mathbb{R}^4$, където $U = \ell(a_1, a_2)$ и $W = \ell(b_1, b_2)$, където

$$\begin{aligned}a_1 &= (1,1,0,0), \quad & a_2 &= (0,0,1,1) \\ b_1 &= (1,0,1,0), \quad & b_2 &= (0,1,0,1)\end{aligned}$$

Елементите на подпространствата се изразяват по следния начин
$U = \{(x,x,y,y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ и $W = \{(z,t,z,t) \mid z, t \in \mathbb{R}\}$
Тогава

$$\begin{aligned}U+W &= \{(x+z, x+t, y+z, y+t) \mid x,y,z,t \in \mathbb{R}\} = \\ &= \ell(a_1, a_2, b_1, b_2)\end{aligned}$$

Сечението на двете подпространства е едномерно и $U \cap W = \ell(c)$, където $c = (1,1,1,1)$. Можем да определим размерността на сумата $\dim(U+W) = 2+2-1 = 3$.
Следвайки начина на доказване на теоремата, можем да намерим базис на сумата на подпространствата. Имаме следните базиси
$\{c, a_1\}$ образува базис на U,
$\{c, b_1\}$ образува базис на W,
$\{c, a_1, b_1\}$ образува базис на $U+W$.

4.3. Директна сума

Определение:
Нека U и W са подпространства на линейното пространство V. Сумата на подпространствата $U+W$ се нарича директна сума - когато всеки вектор от $a \in U+W$ може да се изрази по единствен начин във вид $a = u + w, \ u \in U, \ w \in W$.
Когато сумата на подпространствата е директна сума, записваме $U \oplus W$.

<u>Пример:</u>
Нека линейно пространство V има базис $b_1, \ldots, b_n$ и нека $1 \leq k < n$.
За подпространствата $U = \ell(b_1, \ldots, b_k$ и $W = \ell(b_{k+1}, \ldots, b_n)$ е вярно, че сумата на тези подпространства е директна сума.

- Нека $a \in U+W$ е представено като $a = u_1 + w_1$ и освен това като $a = u_2 + w_2$, където $u_1, u_2 \in U$ и $w_1, w_2 \in W$. Тогава е изпълнено, че

$$u_1 + w_1 = u_2 + w_2 \ \Rightarrow \ u_1 - u_2 = w_2 - w_1 \in U \cap W$$

  - Нека $t \in U \cap W$, следва че $t = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_k b_k = \mu_{k+1} b_{k+1} + \ldots + \mu_n b_n$, откъдето получаваме, че $\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_k b_k - \mu_{k+1} b_{k+1} - \ldots - \mu_n b_n = \mathcal{O}$. Векторите $b_1, \ldots, b_n$ са линейно независими, откъдето получаваме, че $\lambda_1 = 0, \ldots, \lambda_k = 0, \mu_{k+1} = 0, \ldots, \mu_n = 0$ и следователно $U \cap W = \{\mathcal{O}\}$.
- От това получаваме, че $u_1 - u_2 = w_2 - w_1 = \mathcal{O}$.

Получихме, че всеки вектор от $U+W$ по единствен начин се представя като вектор от U плюс вектор от W, следователно сумата на подпространствата е директна сума и е изпълнено, че $U \oplus W = V$.

4.4. Т (за директна сума)

Начина, по който се доказа, че имаме директна сума в предния пример, е валиден за произволни пространства. В сила е следната теорема:

Теорема:
Нека U и W са подпространства на линейното пространство V. Сумата $U+W$ е директна сума, тогава и само тогава когато $U \cap W = \{\mathcal{O}\}$.

Доказателство:

$\boxed{\Rightarrow}$ Нека сумата на двете подпространства е директна сума $U+W=U\oplus W$. За произволен елемент от сечението $x\in U\cap W$, има две очевидни представяния като сума на елемент от подпространството U плюс елемент от W и щом сумата на подпространствата е директна, трябва тези две представяния да изразяват едно и също:

$$\left.\begin{array}{lll} x=x+\mathcal{O}, & \text{където } x\in U, & \mathcal{O}\in W \\ x=\mathcal{O}+x, & \text{където } \mathcal{O}\in U, & x\in W \end{array}\right\} \Rightarrow x=\mathcal{O}$$

Получихме, че единственият елемент от сечението може да бъде нулевия вектор $U\cap W=\{\mathcal{O}\}$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Нека е изпълнено $U\cap W=\{\mathcal{O}\}$ и да разгледаме произволен елемент от сумата на подпространствата $a\in U+W$. Ако е изпълнено $a=u_1+w_1$ и $a=u_2+w_2$, тогава е изпълнено

$$u_1+w_1=u_2+w_2 \;\Rightarrow\; u_1-u_2=w_2-w_1\in U\cap W=\{\mathcal{O}.\}$$

Получихме, че $u_1=u_2$ и $w_1=w_2$, следователно векторът a по единствен начин се представя като сума на вектори от U и W.

$\square$

Следствие:

Ако U и W са крайномерни подпространства на линейното пространство V и тяхната сума е директна сума, тогава

$$\dim(U\oplus W)=\dim U+\dim W.$$