Мартин 82134

Въпрос 1

Дет. наричаме полилин. и антисим. ф-я на редовете на матрица. Има я само за квадратни матрици $A_{n\times n}$ и дава стойност 1 за ед. матр E

$$\det(a_1,\dots,a_n)=\sum_{\substack{j_1\dots j_n\\ \text{перм.}}}(-1)^{[j_1\dots j_n]}a_{1j_1}\dots a_{nj_n}$$ като a_i, $i\in\{1\dots n\}$ са редовете на матр.

∃! ф-я, която е полилин, антисим. и норм. и означаваме с det

Д-во: Нека φ_1, φ_2 – полилин., антисим. и норм. ф-ии

$$\Rightarrow \varphi_1(a_1,\dots,a_n)=\sum_{j_1\dots j_n}(-1)^{[j_1\dots j_n]}a_{1j_1}\dots a_{nj_n}=\varphi_2(a_1,\dots,a_n)$$

понеже двете функк. се изразяват с една и съща формула

$$\Rightarrow \varphi_1=\varphi_2=\det(a_1,\dots,a_n)$$

При t det не се промени

За да го док., ще ни трябва една помощна лема

Лема: $i_1,\dots,i_n$ – перм. $\{1,\dots,n\}$
$j_1,\dots,j_n$ – перм

във ф-лата за det на $a_1,\dots,a_n$ имаме $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\dots a_{i_nj_n}$ което участва със знак $(-1)^{[i_1\dots i_n]+[j_1\dots j_n]}$

ако сменим

$i_k \longleftrightarrow i_s$
$j_k \longleftrightarrow j_s$

тогава $[i_1\dots i_n]$ и $[j_1\dots j_n]$ сменят четностите си т.е. det не смене четността си

в $\det(a_1,\dots,a_n)=\sum_{j_1\dots j_n}(-1)^{[j_1\dots j_n]}a_{1j_1}\dots a_{nj_n}$

$a_{1j_1},\dots,a_{nj_n}$ има фиксирана перм. и трябва да изглежда така:

$(-1)^{[1\dots n]+[j_1\dots j_n]}$ а при A^t det има същия знак $\Rightarrow \det A=\det A^t$