Линейни пространства (част 2)

доц. Евгения Великова

Октомври 2020

линейна комбинация

Нека $\{a_1, \ldots, a_k\} \subset V$ и $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in F$
$b = \lambda_1.a_1 + \ldots + \lambda_k.a_k$ - линейна кмбинация на $a_1, \ldots, a_k$

Example

Ако $a_1 = (3, -1, 0)$, $a_2 = (-4, 7, 5)$, $a_3 = (4, 0, -3)$ от $\mathbb{R}^3$
Линейни комбинации на a_1, a_2, a_3 са:
$b = 2.a_1 + a_2 - 3.a_3 = (6, -2, 0) + (-4, 7, 5) - (12, 0, -9) = (-10, 5, 14).$
$c = 3a_2 - 2.a_3 = (-12, 21, 15) - (8, 0, 6) = (-20, 21, 9).$
$d = 5a_1 = (15, -5, 0)$
$g = -a_1 - a_2 - a_3 = (-3, 1, 0) + (4, -7, -5) + (-4, 0, 3) = (-3, -6, -2)$

Пример

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}.$$

Да се определи дали C е линейна комбинация на A, B.
Търсим дали има скалари $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ за които $C = \lambda A + \mu B$:

$$\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda + \mu & -3\lambda + 3\mu \\ -4\lambda + 3\mu & 5\lambda - \mu \end{pmatrix}$$

$$\left| \begin{array}{rcl} 2\lambda + \mu & = & 7 \\ -3\lambda + 3\mu & = & 3 \\ -4\lambda + 3\mu & = & 1 \\ 5\lambda - \mu & = & 7 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{rcl} 2\lambda + \mu & = & 7 \\ -9\lambda & = & -18 \\ -10\lambda & = & -20 \\ 7\lambda & = & 14 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \lambda = 2; \ \mu = 3.$$

$$\Rightarrow \quad C = 2A + 3B.$$

определение - линейна обвивка

Ако $a_1, \ldots, a_k \in V$, множеството от всички техни линейни комбинации е тяхна линейна обвивка:

$$\ell(a_1, \ldots, a_k) = \{\mu_1 a_1 + \ldots + \mu_k a_k \mid \mu_1, \ldots, \mu_k \in F\}.$$

Ясно, е че $\ell(\mathcal{O}) = \{\mathcal{O}\}$.

Example

Нека $a_1 = (1, 3, -2)$ и $a_2 = (-1, 2, 7)$, тогава тяхната линейна обвивка е

$$\begin{aligned} \ell(a_1, a_2) &= \{\mu_1 a_1 + \mu_2 . a_2 \mid \mu_1, \mu_2 \in F\} = \\ &= \{(\mu_1 - \mu_2,\ \mu_1 + 2\mu_2,\ -2\mu_1 + 7\mu_2) \mid \mu_1, \mu_2 \in F\}. \end{aligned}$$

Свойство 1

$\mathcal{O} \in \ell(a_1, \ldots, a_k)$, защото $\mathcal{O} = 0.a_1 + \ldots + 0.a_k$;

Свойство 2

Ако $b \in \ell(a_1, \ldots, a_k) \;\Rightarrow\; \ell(a_1, \ldots, a_k, b) = \ell(a_1, \ldots, a_k)$.

Ако $b = \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_k a_k$ и $c \in \ell(a_1, \ldots, a_k, b)$:
$c = \mu_1 a_1 + \ldots + \mu_k a_k + \nu b = \mu_1 a_1 + \ldots + \mu_k a_k + \nu(\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_k a_k)$

Свойство 3

Ако $b_1, \ldots, b_s$ са от линейната обвивка $\ell(a_1, \ldots, a_k)$, следователно всяка тяхна линейна комбинация принадлежи също на $\ell(a_1, \ldots, a_k)$.

$$b_i = \beta_{i1}.a_1 + \ldots + \beta_{ik} a_k, \text{ за } i = 1, \ldots, s$$

$$\begin{array}{rcl} c & = & \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_s.b_s = \\ & = & \lambda_1(\beta_{11} a_1 + \ldots + \beta_{1k} a_k) + \\ & + & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ & + & \lambda_s(\beta_{s1} a_1 + \ldots + \beta_{sk} a_k) \Rightarrow \\ & \Rightarrow & c \in \ell(a_1, \ldots, a_k) \end{array}$$

Свойство 4

Ако $b_1, \ldots, b_s \in \ell(a_1, \ldots, a_k)$, тогава $\ell(b_1, \ldots, b_s) \subseteq \ell(a_1, \ldots, a_k)$.

Подпространство

определение за подпространство

Непразно подмножество L на линейно пространство V се нарича линейно подпространство, ако е L е линейно пространство, относно операциите, които са дефинирани във V.

Примери:

- $\{\mathcal{O}\}$- множеството, съставено само от нулевия вектор;
- Цялото пространство V би могло да се разглежда и като подпространство на V;
- Векторите в равнината могат да се разглеждат като подпространство на пространството от тримерните вектори;
- Комплексните числа, разглеждани като линейно подпространство над полето $\mathbb{R}$, има линейно подпространство което се състои от реалните числа разглеждани като линейно пространство над полето $\mathbb{R}$.

Твърдение:

Нека V е линейно пространство F и $L \subset V$ е непразно подмножество.

$$L \text{ е линейно подпространство на } V \Leftrightarrow \begin{cases} a+b \in L, & \forall a, b \in L \\ \lambda a \in L, & \forall a \in L, \ \forall \lambda \in F \end{cases}.$$

Доказателство:

Нека за $L \subset V$ са изпълнени $\begin{cases} a+b \in L, & \forall a, b \in L \\ \lambda a \in L, & \forall a \in L, \ \forall \lambda \in F \end{cases}$.

$\Rightarrow$събирането е бинарна операция за L, има и умножение със скалар.
За L проверяваме аксиомите за линейно пространство:

- Аксиоми 1, 2 , 5 , 6 ,7 и 8 са изпълнени за произволни вектори от V, следователно са изпълнени и за елементите на L;
- Ако $a \in L$, тогава $\mathcal{O} = 0.a \in L \ \Rightarrow$ изпълнена е аксиома 3;
- Ако $a \in L$, тогава $-a = -1.a \in L \ \Rightarrow$ изпълнена е аксиома 4.

L изпълнява определението и е линейно пространство, което е подпространство на V.

примери

Example

Решението на хомогенно линейното уравнение $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0$ е линейно подпространство на F^n.
Ако $u = (u_1, \ldots, u_n)$ и $w = (w_1, \ldots, w_n)$ са решения, тогава
$a_1(\lambda u_1) + \cdots + a_n(\lambda u_n) = \lambda.(a_1u_1 + \cdots + a_nu_n) = \lambda.0 = 0$
$a_1(u_1+w_1)+\cdots+a_n(u_n+w_n) = (a_1u_1+\cdots+a_nu_n)+(a_1w_1+\cdots+a_nw_n) = 0.$

Забележка: Решението на произволно уравнение, в което свободния коефициент не е равен на нула ***не е*** *линейно пространство. Например вектора* $(1, 2)$ *е решение на уравнението* $x_1 + x_2 = 3$*, но вектора* $(2, 4)$ *не е решение на това уравнение.*

Example

Решението на всяка хомогенна линейна система с n неизвестни и коефициенти от полето F е подпространство на $n-$ мерното векторно пространство F^n.

Твърдение:

Линейната обвивка $\ell(a_1, \ldots, a_k)$ на произволни вектори от пространството V представлява линейно подпространство;

Доказателство:
Нека $b, c \in \ell(a_1, \ldots, a_k)$ са произволни вектори от линейната обвивка, където $b = \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_k a_k$ и $c = \mu_1 a_1 + \ldots + \mu_k a_k$. Проверяваме, дали сумата им също е от линейната обвивка

$$b + c = (\lambda_1 + \mu_1)a_1 + \ldots + (\lambda_k + \mu_k)a_k \in \ell(a_1, \ldots, a_k)$$

Правим проверка за умножение на скалар по вектор

$$\beta b = \beta\lambda_1 a_1 + \ldots + \beta\lambda_k a_k \in \ell(a_1, \ldots, a_k), \quad \beta \in F$$

От доказаното в предишното твърдение следва, че $\ell(a_1, \ldots, a_k)$ е линейно подпространство на прстранството V.