Обратима матрица (част 2)

Опр// $A \in M_{n \times n}(F)$ е обратима $\Leftrightarrow \exists B \in M_{n \times n}(F)$
$AB = BA = E$

$B = A^{-1}$ обратна на A и е единствена с това свойство

Th// A е обратима матрица $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

и в такъв случай:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

A_{ij} е адюнгираното кол-во на елемента на място i,j

$A \in M_{n \times n}(F)$

$r(A) = n \Leftrightarrow A$ неособена матрица $\Leftrightarrow$ редовете на A са ЛНЗ / стълбовете на A са ЛНЗ $\Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow A$ обратима матрица

$$E_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ матрица в която има 1 на място ij и останалите елементи са 0 $S_{7(0)}$

Св-во

$$E_{ij} A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} i$$

на мястото на $i^{ти}$ ред стои ред номер j, а всички останали редове са 0

Св-во

$$A E_{ij} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 \cdots 0 & a_{1i} & 0 \cdots 0 \\ \cdots & a_{2i} & \cdots \\ & \vdots & \\ 0 \cdots 0 & a_{ki} & 0 \cdots 0 \end{pmatrix} \\ j \end{array}$$

на мястото на $j^{ти}$ стълб стои $i^{ти}$ стълб, а всички останали стълбове са равни на 0

Т// Елементарните преобразувания по редове на една матрица могат да се реализират чрез умножаване отляво по подходяща неособена матрица.

Д-во// $A_{k\times n}$ с редове $L_1, \dots, L_k$

основно
$\boxed{E \cdot A = A}$

а) $L_i \Leftrightarrow L_j$

$$\begin{array}{c} \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{array}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & \\ & & 1 & \cdots & 0 & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}}_{T_1} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ - & - & - \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ - & - & - \\ a_{j1} & \dots & a_{jn} \\ - & - & - \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{j1} & \dots & a_{jn} \\ - & - & - \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ - & - & - \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

(колони i, j)

$T_1 = E - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}$

$r(T_1) = k$; $T_{k\times k}$

T_1 - неособена

б) $L_i' = L_i + \lambda L_j$

$$\begin{array}{c} \\ i \\ \\ \\ \\ \end{array}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & \cdots \lambda & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}}_{T_2} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ - & - & - \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ - & - & - \\ a_{j1} & \dots & a_{jn} \\ - & - & - \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ - & - & - \\ a_{i1}+\lambda a_{j1} & \dots & a_{in}+\lambda a_{jn} \\ - & - & - \\ a_{j1} & \dots & a_{jn} \\ - & - & - \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

(колони i, j)

$T_2 = E + \lambda E_{ij}$

$r(T_2) = k$

T_2 - неособена

в) $L_i' = \lambda L_i$, $\lambda \neq 0$

$$\begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \lambda & \\ & & & & 1 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}}_{T_3} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{i1} & \dots & \lambda a_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

(the entry λ stands in row i, column i)

$T_3 = E + (\lambda - 1) E_{ii}$

T_3 - неособена

$r(T_3) = k$

Аналогично:

Елементарните преобразувания по стълбове могат да се реализират чрез умножение отдясно по подходяща неособена матрица.

I/ Всяко елементарно преобразуване по ред на една матрица може да се реализира чрез умножаване отляво по съответна неособена матрица.

Т/ Ако A е неособена (обратима) матрица $\Rightarrow$ съществува последователност от елементарни преобразувания по редове, които привеждат A до E. Ако тези преобразувания (в същия ред) се приложат към E, ще се получи A^{-1}.

Д-во Всяко преобр. има матрица, която го реализира, където T_i е матрицата на преобр. №i

$$T_s(\dots(T_2(T_1A))\dots) = E$$

$$\underbrace{(T_s \dots T_2 T_1)}_{=T} A = E$$

$$TA = E \quad / \cdot A^{-1}$$

$$T\underbrace{AA^{-1}} = EA^{-1}$$

$$T = A^{-1}$$

$$\Rightarrow T = A^{-1} = (T_s \dots T_2 T_1)E$$

$$\Rightarrow A^{-1} = T_s(\dots T_2(T_1E)\dots)$$

$$(A|E) \sim \dots\dots \sim (E|A^{-1})$$

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix};\quad A^{-1}=?$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}0&1&1&1&1&0&0&0\\1&0&1&1&0&1&0&0\\1&1&0&1&0&0&1&0\\1&1&1&0&0&0&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&1&1&0&1&0&0\\0&1&1&1&1&0&0&0\\0&1&-1&0&0&-1&1&0\\0&1&0&-1&0&-1&0&1\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&1&1&0&1&0&0\\0&1&1&1&1&0&0&0\\0&0&-2&-1&-1&-1&1&0\\0&0&-1&-2&-1&-1&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&-1&-1&0&0&1\\0&1&0&-1&0&-1&0&1\\0&0&0&3&1&1&1&-2\\0&0&1&2&1&1&0&-1\end{array}\right)$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\0&1&0&0&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\0&0&0&1&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\0&0&1&0&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{array}\right);\quad A^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2&1&1&1\\1&-2&1&1\\1&1&-2&1\\1&1&1&-2\end{pmatrix}$$

празна страница

Матрично уравнение

Нека A - обратима матрица $A_{n\times n}$

$$A X_{n\times k} = B_{n\times k}$$

$$\Rightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}B$$

$$X = A^{-1}B$$

$$(A|B) \sim (T_1A|T_1B) \sim \ldots$$

$$\sim \ldots ((T_s\ldots T_1)A | (T_s\ldots T_1)B) =$$

$$= (E | A^{-1}B)$$

$$T_s\ldots T_1 = A^{-1}$$

преобразувания по редове

$$Y_{s\times n} A_{n\times n} = C_{s\times n}$$

$$(YA)A^{-1} = CA^{-1}$$

$$Y = CA^{-1}$$

$$\left(\frac{A}{C}\right) \sim \left(\frac{AR_1}{CR_1}\right) \sim \ldots \sim \left(\frac{AR_1\ldots R_k}{CR_1\ldots R_k}\right)$$

$$= \left(\frac{AA^{-1}}{CA^{-1}}\right) = \left(\frac{E}{CA^{-1}}\right)$$

преобразувания по стълбове

Матричен запис на система линейни уравнения

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots \\ a_{k1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n = b_k \end{cases}$$

матр. A стълб от св. чл. $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}$$

Ако A е $n \times n$ матрица (обратима)

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1}A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\left(A \,\middle|\, \begin{matrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{matrix}\right) \sim \left(T_1 A \,\middle|\, T_1 b\right) \sim \left(T_2(T_1 A) \,\middle|\, T_2(T_1 b)\right) \sim$$

$$\sim \dots \sim \left(E \,\middle|\, Tb\right) = \left(E \,\middle|\, A^{-1} b\right)$$

Да се реши матричното у-е

$$X\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 9 \\ 1 & 5 & -2 & 7 \\ 3 & 22 & 1 & 15 \\ -1 & 2 & 3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 87 & 1 & 4 \\ -2 & 4 & 6 & 5 \\ 5 & -3 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\left|\begin{array}{cccc} 2 & 3 & 1 & 9 \\ \boxed{1} & 5 & -2 & 7 \\ 3 & 22 & 1 & 15 \\ -1 & 2 & 3 & -5 \\ \hline 2 & 87 & 1 & 4 \\ -2 & 4 & 6 & 5 \\ 5 & -3 & 4 & 8 \end{array}\right| \sim \left|\begin{array}{cccc} 2 & -7 & 5 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 7 & -6 \\ -1 & 7 & \boxed{1} & 2 \\ \hline 2 & 77 & 5 & -10 \\ -2 & 14 & 2 & 19 \\ 5 & -28 & 14 & -27 \end{array}\right|$$

$$\sim \left|\begin{array}{cccc} 7 & -6 & 5 & -15 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & -6 & 7 & -20 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 7 & 6 & 5 & -20 \\ 0 & 0 & 2 & 15 \\ 19 & -18 & 14 & -55 \end{array}\right| \sim \left|\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 14 & -1 & 10 & -35 \\ 0 & 0 & 2 & 15 \\ -2 & 3 & -1 & -10 \end{array}\right| \sim \left|\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline -8 & -7 & 7 & -4 \\ 3 & 9 & -3 & 8 \\ 1 & -8 & 2 & -5 \end{array}\right|$$

$$X = \begin{pmatrix} -8 & -7 & 7 & -4 \\ 3 & 9 & -3 & 8 \\ 1 & -8 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

празна ст.