Пространството от линейните функции. Дуални пространства

Пространство от линейните функции

Нека $f(x) = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n$ е линейна функция на n неизвестни с коефициенти от полето F и $a = (a_1, \ldots, a_n)$ е произволен n-мерен вектор от F^n. Може да бъде пресметната стойността на тази линейна функция $f(x)$, когато стойностите на неизвестните са равни на координатите на вектора a, и се получава $f(a) = c_1a_1 + \ldots + c_na_n$.

За произволни n-мерни вектори $a = (a_1, \ldots, a_n)$ и $b = (b_1, \ldots, b_n)$ е изпълнено равенството:

$$\begin{aligned} f(a+b) = c_1(a_1+b_1) + \ldots + c_n(a_n+b_n) = \\ = (c_1a_1 + \ldots + c_na_n) + (c_1b_1 + \ldots + c_nb_n) = f(a) + f(b) \end{aligned} \tag{1}$$

Също и за произволен скалар $\mu \in F$ е изпълнено, че

$$f(\mu a) = c_1(\mu a_1) + \ldots + c_n(\mu a_n) = \mu(c_1a_1 + \ldots + c_na_n) = \mu f(a). \tag{2}$$

Наличието на точно тези две свойства ни дава право да наричаме тази функция **линейна** функция. В общия случай определението за линейна функция е следното:

Определение: 1. ***Линейна функция*** *(линеен функционал) на линейното пространство V над полето F се нарича такова изображение $f : V \to F$, което изпълнява свойствата*

$$\begin{array}{ll} f(a+b) = f(a) + f(b), & \forall a, b \in V \\ f(\lambda a) = \lambda.f(a), & \forall a \in V,\ \forall \lambda \in F \end{array}.$$

В следващото твърдение се показва, че всички линейни функции на крайномерно линейно пространство V над полето F могат да се представят в известния ни вид $f(x) = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n$.

Твърдение: 1. *Нека V е крайномерно линейното пространство над полето F, което има базис $e_1, \ldots, e_n$ и нека е зададена линейна функция $f : V \to F$. Ако $x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n \in V$, то*

$$f(x) = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n,$$

където коефициентите са $c_1 = f(e_1) \in F, \ldots, c_n = f(e_n) \in F$.

Доказателство: Нека x е произволен вектор от линейното пространство V и този вектор се представя спрямо базиса $e_1, \ldots, e_n$ по следния начин $x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$. Тогава използвайки свойството, че f е линейна функция, получаваме:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_1e_1 + \ldots + x_ne_n) = \\ &= f(x_1e_1) + \ldots + f(x_ne_n) = \\ &= x_1f(e_1) + \ldots + x_nf(e_n) = \\ &= c_1x_1 + \ldots + c_ne_n. \end{aligned}$$

В това равенство чрез $c_1, \ldots, c_n$ са отбелязани тези стойности от полето F, които приема функцията в базисните вектори, а именно $c_1 = f(e_1), \ldots, c_n = f(e_n)$. $\diamondsuit$

Нека с $L_n(F)$ да бележим множеството от всички линейни функции на n неизвестни, които имат коефициенти от полето F.

$$L_n(F) = \{f(x) = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n \mid c_1, \ldots, c_n \in F\}.$$

Ако $f(x) = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n$ и $g(x) = d_1x_1 + \ldots + d_nx_n$ са две линейни функции, може да се разгледа действието събиране на линейни функции, което е определено по най-стандартния начин:

$$f(x) + g(x) = (c_1 + d_1)x_1 + \ldots + (c_n + d_n)x_n,$$

а също и ако λ е произволен елемент от полето F се определя произведението на линейната функция по този елемент $\lambda.f(x) = \lambda c_1x_1 + \ldots + \lambda c_nx_n$. Сумата на линейни функции $f(x) + g(x)$ и произведението на линейна функция със скалар $\lambda.f(x)$ също са линейни функции.

Не е трудно да се установи, че $L_n(F)$ е линейно пространство над полето F относно тези две действия - събиране на линейни функции и умножаване на линейна функция по елемент от полето. Това пространство има размерност n и един негов базис представляват следните линейни функции:

$$\begin{aligned} &g_1(x) = x_1 = 1.x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &g_n(x) = x_n = 0x_1 + \ldots + 0x_{n-1} + 1.x_n \end{aligned}$$

Съответствие между подпространствата на F^n и подпространствата на дуалното му пространство $L_n(F)$

Пространството $L_n(F)$, състоящо се от линейните функции на n променливи с коефициенти от полето F се нарича дуално пространство на n мерното векторно пространство F^n и този факт се бележи с $L_n(F) = (F^n)^*$.

Има едно най-естествено еднозначно съответствие между всички подпространства на F^n и всички подпространства на дуалното му пространство $L_n(F)$, съответствие описващо връзката между хомогенните системи и подпространството от решенията им.

Нека M е подпространство на пространството от линейните функции $L_n(F)$ със M^0 ще бележим множеството от всички n-мерни вектори, които са решения на хомогенните уравнения $f(x) = 0$ за всяка функция $f(x) \in M$, т.е. множеството от **нулиращите вектори** за всички функции от M и M^0 ще наричаме анулиращо подпространство (или **анулатор**).

$$M^0 = \{a \in F^n \mid f(a) = 0,\ \forall f(x) \in M\} \subset F^n$$

Нека линейните функции $f_1(x), \ldots, f_k(x)$ образуват базис на подпространството $M \subset L_n(F)$. За да намерим пространството от векторите, нулиращи тези функции е достатъчно да се реши съответната хомогенната система, получена от тези линейни функции.

$$U : \left| \begin{array}{lcl} f_1(x) = c_{11}.x_1 + \ldots + c_{1n}.x_n & = & 0 \\ \multicolumn{3}{l}{\dotfill} \\ f_k(x) = c_{k1}.x_1 + \ldots + c_{kn}.x_n & = & 0 \end{array} \right.$$

Нека да бележим с U решението на тази система. Известно ни е, че множеството от решения U е подпространство на F^n, което има размерност равна на $\dim U = n - k$, където k е броят на линейните функции в базиса на $M \subset L_n(F)$.

Освен това, ако един вектор $a \in U$ е решение на хомогенните уравнения $f_1(x) = 0, \ldots, f_k(x) = 0$, то тогава този вектор е решение на произволна линейна комбинация от тези уравнения $\mu_1 f_1(x) + \ldots + \mu_k f_k(x) = 0$, следователно е решение на всяко хомогенно уравнение от линейната обвивка на тези функции, т.е.a е нулиращ вектор за всички линейни функции от пространството $M = \ell(f_1(x), \ldots, f_k(x))$.

По този начин се установява, че $M^0 = U$, т.е. нулиращото подпространство M^0 е точно подпространството U от решение на хомогенната система, с уравнения съставени от базис на подпространството M и е изпълнено: $\dim M^0 = n - \dim M$.

Пример $\{0x_1 + \ldots + 0x_n\}^0 = F^n$, защото всички вектори са решение на нулевото уравнение.

Пример Да се определи анулатора M^0 от нулиращи вектори за пространството $M = \ell(x_1 + \ldots + x_n)$. Разглежда се линейната система, съставена от единственото уравнение $x_1 + \ldots + x_n = 0$. Лесно се вижда, че всеки вектор от вида

$$a_1 = (1, -1, 0, \ldots, 0), a_2 = (0, 1, -1, 0, \ldots, 0), \ldots, a_{n-1} = (0, \ldots, 0, 1, -1)$$

е решение на това уравнение. Тези $n-$мерни вектори са линейно независими и пораждат подпространство с размерност $n-1$, колкото е и размерността на търсеното подпространство от нулиращи вектори. Следователно $M^0 = (\ell(x_1 + \ldots + x_n))^0 = \ell(a_1, \ldots, a_{n-1})$.

Аналогично може да се постъпи, ако U е подпространство на F^n. Тогава пространството от **нулиращи функции** за векторите от U се бележи с U^0 и съдържа точно тези линейни функции, за които всеки вектор от U е решение на съответното им хомогенно уравнение:

$$U^0 = \{f(x) \in L_n(f) \mid f(a) = 0,\ \forall a \in U\}.$$

Знаем, че съществува хомогенна линейна система, която има за решение подпространството U, също е известно и, че рангът на матрицата на тази система е точно $n - \dim U$. Това означава, че пространството от нулиращи функции U^0 може да се намери, като се вземе линейната обвивка на уравненията на тази система ще получим че $\dim U^0 = n - \dim U$.

Пример $\{\vartheta\}^0 = L_n(F)$, защото нулевият вектор е решение на всяко хомогенно линейно уравнение.

Пример Да се определи пространството от нулиращи функции за подпространството $U = \ell(1, \ldots, 1)$. Едно типично линейно уравнение може да се запише във вида $c_1x_1 + \ldots + c_nx_n = 0$. Записваме условието, че вектора $(1, \ldots, 1)$ е решение на това уравнение и получаваме следната зависимост за коефициентите на уравнението

$$c_1.1 + \ldots + c_n.1 = 0.$$

Линейно независимите решения на тази зависимост ни дават коефициентите на уравненията на една система, която има за решение вектора $(1, \ldots, 1)$. По този начин се получава системата:

$$\left|\begin{array}{l} f_1(x) = x_1 - x_2 = 0 \\ f_2(x) = x_2 - x_3 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_{n-1} = x_{n-1} - x_n = 0 \end{array}\right.$$

Всяко уравнение, което е линейна комбинация на уравненията от тази система

$$\lambda_1 f_1(x) + \ldots + \lambda_{n-1} f_{n-1}(x) = 0$$

също има решение $(1, \ldots, 1)$.

Линейните функции $f_1, \ldots, f_{n-1}$ са линейно независими и пораждат подпространството с размерност $n-1$ и всички функции от това подпространство са нулиращи функции за вектора $(1, \ldots, 1)$. Тези функции са нулиращи също и за всички вектори от линейната обвивка $U = \ell(1, \ldots, 1)$. Следователно $U^0 = (\ell(1, \ldots, 1))^0 = \ell(f_1, \ldots, f_{n-1})$.

Изпълнени са следните свойства:
- Ако $T \subset M$ са подпространства на $L_n(F)$, тогава $T^0 \supset M^0$
- Ако $U \subset W$ са подпространства на F^n, тогава $U^0 \supset W^0$
- $(U + W)^0 = U^0 \cap W^0$, където U, W са подпространства на F^n
- $(T + M)^0 = T^0 \cap M^0$, където T, M са подпространства на $L_n(F)$
- $(U \cap W)^0 = U^0 + W^0$, където U, W са подпространства на F^n
- $(T \cap M)^0 = T^0 + M^0$, където T, M са подпространства на $L_n(F)$
- Ако T е подпространство на $L_n(F)$, тогава $(T^0)^0 = T$.
- Ако U е подпространство на F^n, тогава $(U^0)^0 = U$.

Дуалното пространство на $L_n(F)$ е n- мерното векторно пространство F^n

Нека $c = (c_1, \ldots, c_n)$ е произволен n-мерен вектор от пространството F^n. Накратко чрез $f_c(x)$ ще записваме линейната функция, за която коефициентите пред неизвестните са точно координатите на вектора c, а именно $f_c(x) = c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n$.

Тогава, при зададен вектор $a = (a_1, \ldots, a_n)$ може да се пресметне стойността $f_c(a) = c_1 a_1 + \ldots + c_n a_n \in F$, която е елемент от полето F.

По този начин се получава едно изображение

$$\varphi_a(f_c(x)) = f_c(a) = c_1 a_1 + \ldots + c_n a_n,$$

което на всяка линейна функция задава скалар който представлява стойността на функцията, когато се заменят неизвестните с координатите на вектора a.

За изображението φ_a е изпълнено:

$$\begin{aligned} \varphi_a(f_c(x)) + \varphi_a(f_d(x)) &= f_c(a) + f_d(a) = \\ &= (c_1 a_1 + \ldots + c_n a_n) + (d_1 a_1 + \ldots + d_n a_n) = \\ &= (c_1 + d_1) a_1 + \ldots + (c_n + d_n) a_n = f_{c+d}(a) = \\ &= \varphi_a(f_{c+d}(x)) = \varphi_a(f_c(x) + f_d(x)). \end{aligned} \tag{3}$$

Аналогично е изпълнено и

$$\varphi_a(\lambda f_c(x)) = \lambda(c_1a_1 + \ldots + c_na_n) = \lambda\varphi_a(f_c(x)) \qquad (4)$$

По този начин се получава, че $\varphi_a(f_c(x))$ изпълнява определение (1) за линеен функционал за пространството от линейните функции $L_n(F)$. По този начин за произволен вектор a може да получим по един линеен функционал:

$$\varphi_a : L_n(F) \to F$$

Нека $\psi : L_n(F) \to F$ е произволен линеен функционал и нека

$$\begin{array}{l} g_1(x) = x_1 = 1.x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_n(x) = x_n = 0x_1 + \ldots + 0x_{n-1} + 1.x_n \end{array}$$

е стандартния базис на $L_n(F)$. Тогава за произволна линейна функция $f_c(x) = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n = c_1g_1(x) + \ldots + c_ng_n(x)$ е изпълнено:

$$\begin{aligned} \psi(f_c(x)) = {} & \psi(c_1g_1(x) + \ldots + c_ng_n(x)) = \\ = {} & c_1\psi(g_1(x)) + \ldots + c_n\psi(g_n(x)) = \\ = {} & c_1b_1 + \ldots + c_nb_n \\ = {} & f_c(b) = \varphi_b(f_c(x)). \end{aligned}$$

В това равенство с вектора $b = (b_1, \ldots, b_n)$ сме белязали вектора, получен от стойностите, които се получават от базисните функции под действие на функционала ψ:

$$b_1 = \psi(g_1(x)), \ldots, b_n = \psi(g_n(x)).$$

Следователно този линеен функционал $\psi : L_n(F) \to F$ може да се получи като се вземат стойностите на функциите, когато неизвестните се заместят с координатите на вектора $b = (b_1, \ldots, b_n)$.

Поради тази причина се получава, че всички линейни функционали на пространството $L_n(F)$ се описват от $n-$мерните вектори и затова можем да напишем $(L_n(F))^* = F^n$.

Външно произведение (*inner product*) на вектори от F^n

Нека $c = (c_1, \ldots, c_n)$ е произволен n-мерен вектор от пространството F^n. Чрез $f_c(x) = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n$ ще записваме линейната функция, която има за коефициенти координатите на вектора c. Изпълнено е:

$$\begin{aligned} f_c(x) + f_d(x) &= (c_1x_1 + \ldots + c_nx_n) + (d_1x_1 + \ldots + d_nx_n) = \\ &= (c_1 + d_1)x_1 + \ldots + (c_n + d_n)x_n = \qquad , \\ &= f_{c+d}(x), \ \text{където} \ \ d = (d_1, \ldots, d_n) \in F^n \end{aligned}$$

също и

$$\lambda f_c(x) = \lambda(c_1x_1 + \ldots + c_nx_n) = (\lambda c_1)x_1 + \ldots + (\lambda c_n)x_n = f_{\lambda c}(x), \text{за } \lambda \in F.$$

Определение: 2. *Вънишно произведение (inner product) на векторите $a, b \in F^n$ се бележи чрез $< a, c >$ и е равно на израза $< a, c >= a_1c_1 + \ldots + a_nc_n$.*

Изразът $< a, c >= c_1a_1 + \ldots + c_na_n$ може да бъде получен по два начина:

- Първи начин: ако в уравнението $f_c(x) = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n$ се замести с вектора $a = (a_1, \ldots, a_n)$, тогава се получава $< a, c >= c_1a_1 + \ldots + c_na_n = f_c(a)$;

- Втори начин: ако в уравнението $f_a(x) = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$ се замести с вектора $c = (c_1, \ldots, c_n)$ пак се получава същия израз $< a, c >= a_1c_1 + \ldots + a_nc_n = f_a(c)$.

Лесно се вижда, че това изображение $< a, c >$ е линейно по всеки от двата си аргумента (т.е. се билинейно), защото

$< a + b, c >= f_c(a + b) = f_c(a) + f_c(b) =< a, c > + < b, c >$;
$< \mu a, c >= f_c(\mu a) = \mu f_c(a) = \mu < a, c >$;
$< a, c + d >= f_{c+d}(a) = f_c(a) + f_d(a) =< a, c > + < a, d >$;
$< a, \lambda c >= f_{(\lambda c)}(a) = \lambda f_c(a) = \lambda < a, c >$;
$< a, c >= f_c(a) = f_a(c) =< c, a >$. Наличието на тези свойства отбелязваме, че това изображение е билинейно и симитрично.

Тогава нулиращото пространство (U^0) много често се бележи с $U^\perp$ и се определя по следния начин

$U^\perp = \{x \in F^n \mid < x, a >= 0, \forall a \in U\}$ Подпространството $U^\perp$ често се нарича **допълнение** на подпространството U.

В сила са свойствата :

$(U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$
$(U \cap W)^\perp = U^\perp + W^\perp$
$(U^\perp)^\perp = U.$