<u>Опр.</u>// V_1 и V_2 са Евклидови пространства
$\varphi: V_1 \to V_2$ е <u>изоморфизъм</u> на Евклидови пр-ва
ако 1) φ - изоморфизъм на лин. пр-ва
$\boxed{V_1 \cong V_2}$ 2) $(\varphi(a), \varphi(b)) = (a, b)$, $\forall a, b \in V_1$

<u>Th</u>// V_1, V_2 крайномерни Евклидови пространства
$V_1 \cong V_2 \iff \dim V_1 = \dim V_2$

<u>Д-во</u>
$\Rightarrow$) $V_1 \cong V_2$ като Евклидови пр-ва $\Rightarrow V_1 \cong V_2$ като лин. пр-ва
$\Rightarrow \dim V_1 = \dim V_2$

$\Leftarrow$) Нека $\dim V_1 = \dim V_2 = n$, $\left\{ \begin{array}{l} e_1 \dots e_n \text{ - ортонорм. базис на } V_1 \\ e_1', \dots, e_n' \text{ - ортонормиран базис на } V_2 \end{array} \right.$
Съставяме $\varphi: V_1 \to V_2 : \varphi(e_i) = e_i'$
знаем, че $\exists$ $\underline{\varphi}$ е единствено лин. изображение
- Нека $a = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$; $b = b_1 e_1 + \dots + b_n e_n$
$(\varphi(a), \varphi(b)) = (\sum a_i \varphi(e_i), \sum_j b_j \varphi(e_j)) = (\sum a_i e_i', \sum b_j e_j') =$
$= \sum a_i b_i = (\sum a_i e_i, \sum b_i e_i) = (a, b)$
- изображението φ е биекция
$\Rightarrow \varphi$ е изоморфизъм на Евклидови пр-ва

Опр.// Нека V е Евклидово пр-во
$\varphi: V \to V$ е ортогонален оператор, ако
→ φ е линеен оператор
→ $(\varphi(a), \varphi(b)) = (a, b)$, $\forall a, b \in V$

Св-во 1// Нека $\varphi: V \to V$ е линеен оператор
φ - ортогонален оператор $\Leftrightarrow |\varphi(a)| = |a|$, $\forall a \in V$

Д-во
φ - ортогонален $\Rightarrow (\varphi(a), \varphi(a)) = (a, a) \Rightarrow |\varphi(a)| = |a|$
$\Leftarrow$ Нека φ запазва дължините на векторите $a, b \in V$:
$|\varphi(a+b)|^2 = |a+b|^2$
$\Rightarrow (\varphi(a+b), \varphi(a+b)) = (\varphi(a)+\varphi(b), \varphi(a)+\varphi(b)) = |\varphi(a)|^2 + 2(\varphi(a), \varphi(b)) + |\varphi(b)|^2$
$(a+b, a+b) = |a|^2 + 2(a, b) + |b|^2$
$\Rightarrow (\varphi(a), \varphi(b)) = (a, b)$

Св-во 2// φ - ортогонален оператор $\Rightarrow \operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$
Св-во 3// V - крайномерно Евклидово, φ - ортогонален оператор
$\Rightarrow \varphi$ изпраща ортонормиран базис в ортонормиран базис

Св-во // φ - ортогонален оператор и $\varphi(g)=\lambda g$, g - собствен вектор $\Rightarrow \lambda=\pm 1$.

Д-во $g\neq 0$ и $|\varphi(g)|=|g|$, но $\varphi(g)=\lambda g \Rightarrow |\lambda|.|g|=|g|$

$\Rightarrow |\lambda|=1 \Rightarrow \lambda=\pm 1$

Св-во // Ако g_1, g_2 собствени вектори за различни собствени стойности за φ - ортогонален оператор

$\Rightarrow g_1 \perp g_2$

Д-во // $(\varphi(g_1),\varphi(g_2))=(g_1,g_2) \Rightarrow (\lambda_1 g_1, \lambda_2 g_2)=(g_1,g_2)$

$\Rightarrow \lambda_1\lambda_2(g_1,g_2)=(g_1,g_2)$ от предното св-во

$\Rightarrow \lambda_1\cdot\lambda_2=-1$

$\Rightarrow (1-\lambda_1\lambda_2)(g_1,g_2)=0 \Rightarrow (g_1,g_2)=0 \Rightarrow g_1\perp g_2$

Св-во // Нека V е крайномерно Евклидово пр-во $\varphi: V\to V$ ортогонален оператор и g - собствен в-р

$\Rightarrow U=(l(g))^{\perp}$ е φ-инвариантно подпр-во

Д-во: $x\in U \Rightarrow (x,g)=0 \Rightarrow (\varphi(x),\varphi(g))=0=(\varphi(x),\pm g) \Rightarrow \varphi(x)\in U$

<u>Опр.</u> // $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$

A е ортогонална матрица, когато $A \cdot A^t = E$

т.е. $A^{-1} = A^t$

<u>Св-ва</u> /

1) A - ортогонална матрица $\Rightarrow \det A = \pm 1$

2) A - ортогонална $\Rightarrow A^{-1} = A^t \Rightarrow A^{-1} \cdot A = E \Rightarrow A^t A = E = A^t (A^t)^t$

$\Rightarrow A^t$ - ортогонална

3) редовете на ~~матрица~~ ортогонална A са два по два ортогонални и с дължина 1

$\to A A^t$ Ако редовете на A са $a_1, \dots a_n$

$\Rightarrow (a_i, a_j)$ е елемента на място ij в AA^t

$\Rightarrow (a_i, a_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$

4) стълбовете на ортогонална матрица образуват ортонормиран базис на $\mathbb{R}^n$

5) A - ортогонална матрица $\Leftrightarrow$ A е матрица на преход от ортонормиран базис към ортонормиран б

6) Ако A, B - ортогонални матрици $\Rightarrow$ AB също ортогонална

$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1} = B^t A^t = (AB)^t$

I// Нека V е Евклидово пространство и $\varphi: V \to V$ е линеен оператор. Тогава
φ - ортогонален оператор $\Longleftrightarrow$ спрямо ортонормиран базис φ има ортогонална матрица

Д-во
($\Rightarrow$) φ - ортогонален оператор и нека $e_1, \dots, e_n$ ортонормиран базис

$\Rightarrow (\varphi(e_i), \varphi(e_j)) = (e_i, e_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$ $\qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

$\varphi(e_i) = a_{1i} e_1 + a_{2i} e_2 + \dots + a_{ni} e_n$

$A^t A = (c_{ij})_{n \times n} \Rightarrow c_{ij} = a_{1i} a_{1j} + a_{2i} a_{2j} + \dots + a_{ni} a_{nj} = (\varphi(e_i), \varphi(e_j)) = \delta_{ij}$

$\Rightarrow A^t A = E \Rightarrow A^t = A^{-1} \Rightarrow A$ - ортогонална

($\Leftarrow$) Нека матрицата на φ спрямо ортонормиран б. $e_1 \dots e_n$ е ортогонална и $A = (a_{ij}) \Rightarrow \varphi(e_i) = a_{1i} e_1 + a_{2i} e_2 + \dots + a_{ni} e_n$

$\Rightarrow (\varphi(e_i), \varphi(e_j)) = (\sum_k a_{ki} e_i, \sum_k a_{kj} e_j) = \sum_k a_{ki} a_{kj}$ { елемент на място ij в $A^t A = E$

$\Rightarrow (\varphi(e_i), \varphi(e_j)) = \delta_{ij} = (e_i, e_j)$

Нека $a = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$; $b = b_1 e_1 + \dots + b_n e_n$

$(\varphi(a), \varphi(b)) = (\sum a_i \varphi(e_i), \sum b_j \varphi(e_j)) = \sum_{i,j} a_i b_j (\varphi(e_i), \varphi(e_j)) = \sum_i a_i b_i = (a, b)$

$\Rightarrow \varphi$ е ортогонален оператор

I/ Нека V е Евклидово пр-во и φ е ортогонален оператор, $\dim V = n$. Тогава съществува ортонормиран базис на V, спрямо който матрицата на φ е клетъчно диагонална

$$D = \begin{pmatrix} D_1 & & & O \\ & D_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & D_k \end{pmatrix}$$

където $D_i = (1)$
или $D_i = (-1)$
или $D_i = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

Д-во/ Индукция по $\dim V = n$

$n=1 \Rightarrow V = \ell(g)$ и $\varphi(g) \in \ell(g) \Rightarrow g$ - собствен в-р
и $\varphi(g) = \lambda g$, $\lambda = \pm 1 \Rightarrow$ изпълнено е

$n=2 \Rightarrow$ I сл. φ има собствен в-р $g_1 \Rightarrow \varphi(g_1) = \lambda_1 g_1$, $\lambda_1 = \pm 1$
$\Rightarrow U = (\ell(g_1))^\perp$ е φ - инвариантно $\dim U = 2-1 = 1$
$\Rightarrow U = \ell(g_2)$ и $\varphi(g_2) \in \ell(g_2) \Rightarrow g_2$ собствен в-р
$\Rightarrow e_1 = \frac{g_1}{|g_1|}$, $e_2 = \frac{g_2}{|g_2|}$ $\quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ $\lambda_i \in \{1, -1\}$
$\Rightarrow$ изпълнено е

II сп. $(n=2)$ φ - няма собствен в-р

Нека e_1, e_2 ортонормиран базис на V

и A - матрицата на φ спрямо този базис

$A^t = A^{-1}$, Ако $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = \pm 1$

$$A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda) - bc = \lambda^2 - (a+d)\lambda + \underbrace{ad - bc}_{=\det A};$$

При $\det A = -1 \Rightarrow D > 0 \Rightarrow$ има реален корен

$\Rightarrow \exists$ собствен вектор

$\Rightarrow$ Щом няма собствен вектор $\Rightarrow \det A = 1$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} a = d \\ b = -c \end{matrix} \text{ и } ad - bc = a^2 + b^2 = 1$$

$\Rightarrow \exists \alpha : a = \cos\alpha$ и $b = \sin\alpha$

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Изпълнено е

Общ случай/ Нека $\dim V = n > 2$

Според доказана теорема $\Rightarrow \exists\, U$ - едномерно или двумерно φ - инвариантно подпространство

Нека $L = U^{\perp}$ и нека $x \in L$ - произволен, $a \in U$ произв.

$\varphi_{|U} : U \to U$ е обратим оператор $\Rightarrow \exists\, b \in U : a = \varphi(b)$

$(\varphi(x), a) = (\varphi(x), \varphi(b)) = (x, b) = 0 \Rightarrow \varphi(x) \perp a,\ \forall a \in U$
$\Rightarrow \varphi(x) \in U^{\perp} = L$

$\Rightarrow L$ е φ - инвариантно

$V = U \oplus U^{\perp}$ и двете са φ - инвариантни

индукционното предположение за U, $U^{\perp} = L$

$\Rightarrow \exists$ ортонормиран базис

$D_i = (1)$ или $D_i = (-1)$

D_1 за U

B за $U^{\perp}$

$$\left(\begin{array}{c|c} D_1 & \\ \hline & B \end{array}\right) = \begin{pmatrix} D_1 & & & 0 \\ & D_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & D_k \end{pmatrix}$$

или

$$D_i = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

празна ст.