ТЕМА №23

Криви

Съдържание

Тема 23: Криви

- История
- Кривите в КГ
- Криви на Безие
- Съставни криви
- B-сплайни

История

История

Плавните извивки и контури

- Са винаги харесвани от хората
- Наблюдават се в много живи форми
- Използвани за различни цели

При дизайн

- На лодки, кораби и автомобили
- На музикални инструменти и сгради

Построяване

Чрез гъвкави летви и тежести

- Летвите са наричани *сплайни*
- Тежестите са наричани *патета*

Процедура

- Тежестите удържат летвата в изкривена форма
- Напрежението и деформацията се разпределят равномерно по протежение на летвата

Резултат

Гладки криви

- Постигат се гладки и плавни криви
- Естетически красиви
- Физически оптимални

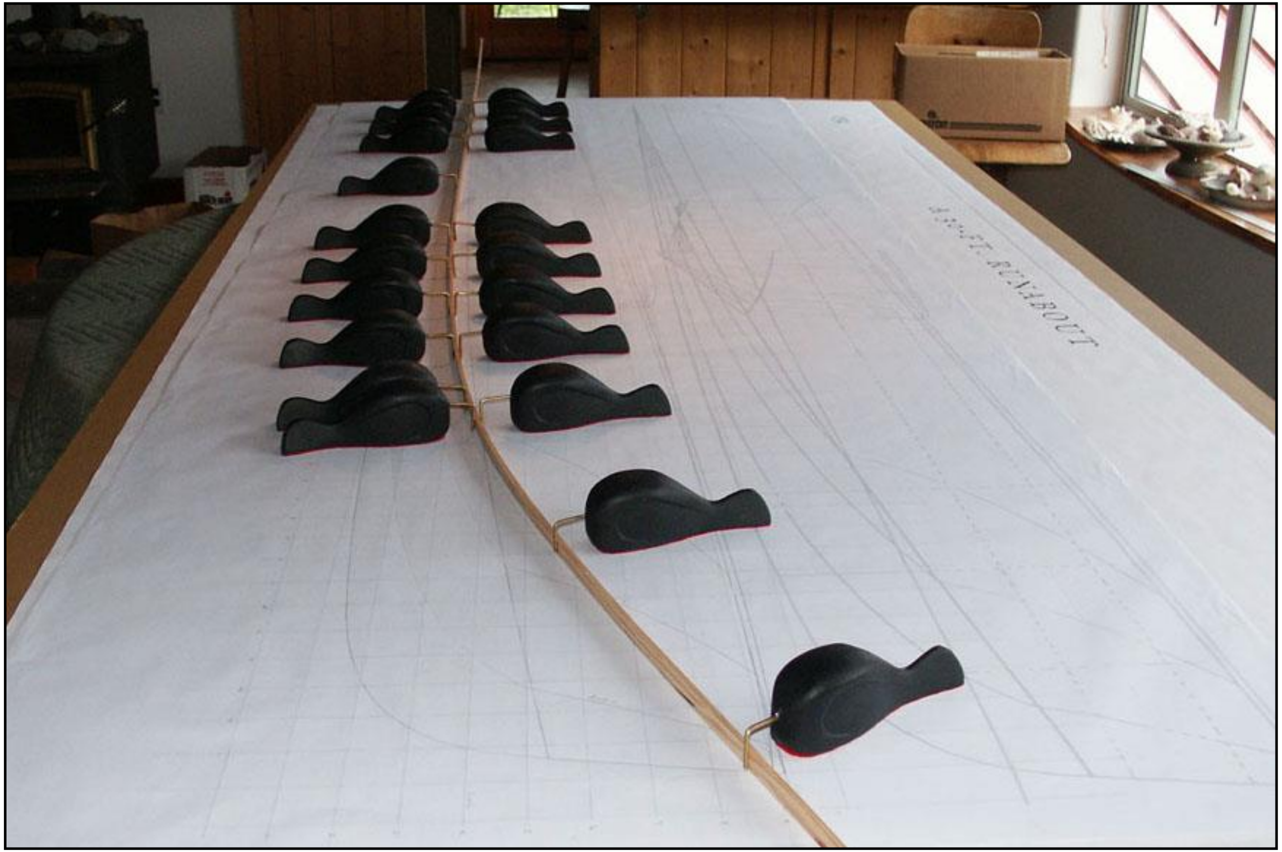
Тежестите

Метални, специално покритие отдолу

– Понякога са украсявани като патета

Снимка: http://www.boatsofwood.com

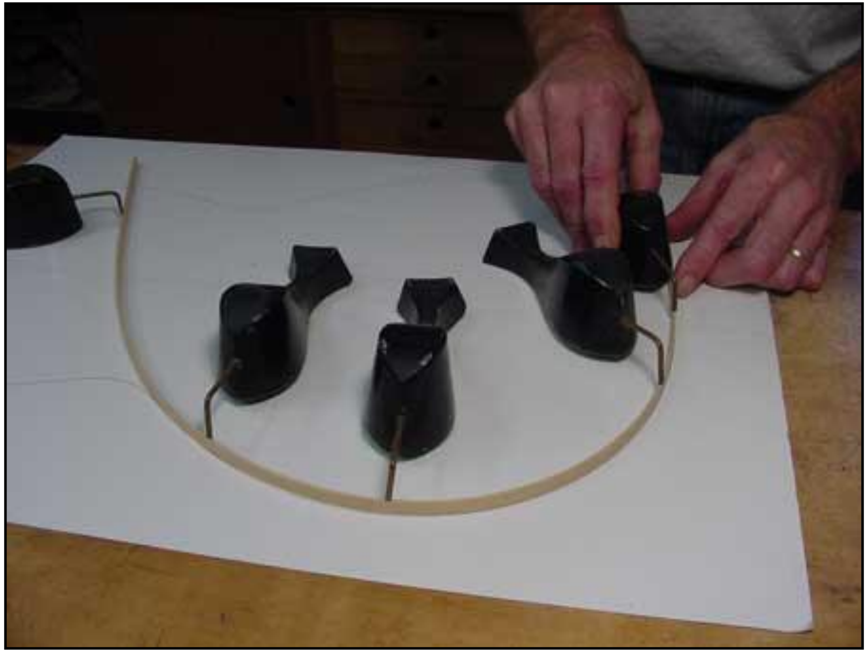
Използване на тежестите



Снимка: http://www.boatsofwood.com

Основно преимущество

- Създаване и деформиране на криви линии
- Интуитивно!!!

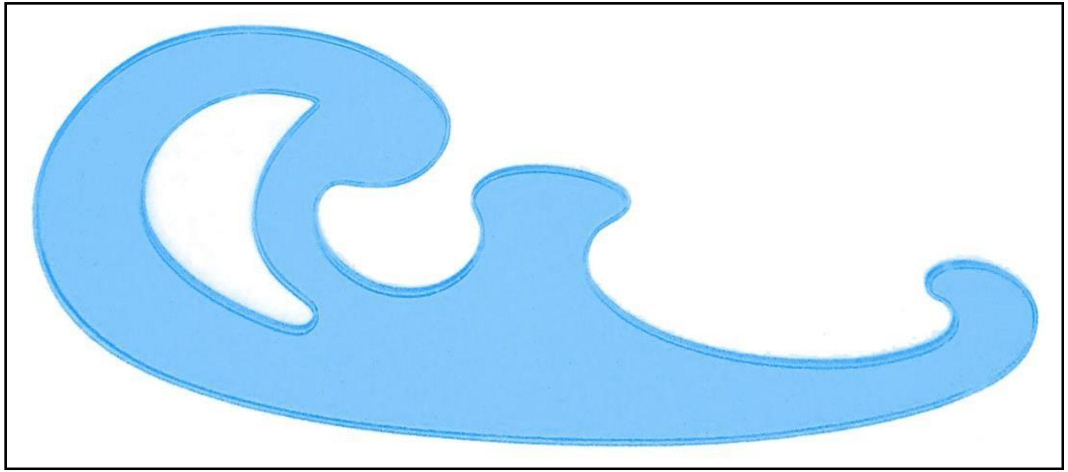


Снимка: Франк Форд, http://www.frets.com

Друго построяване

Чрез готови форми

- Дизайнерът композира кривата линия като набор от няколко криви фрагмента



Кривите в компютърната графика

В компютърната графика

Използване на криви линии

- При моделиране на сложни обекти, които не могат да се композират лесно от стандартните примитиви
- При моделиране на биологични форми, естествено движение или плавни траектории (примерно виртуални хора)
- При изпитване по ОКГ

Подходи

Използване на явно уравнение $y = f(x)$

- Практически трудно се използва
- Не се запазва при въртене
- За едно x има точно едно y
  (това е проблем при проектиране на затворени криви)

Използване на неявно уравнение $f(x, y) = 0$

- Също не е удобно, понеже трудно се намират координатите на точка от кривата
- Подходящо е само за определяне дали точка принадлежи на крива
- Много от кривите е трудно да се дефинират по този начин с неявни уравнения

Използване на двойка (тройка) параметрични уравнения от вида $x = x(t)$ и $y = y(t)$

- Идеални за намиране на координатите на коя да е точка от кривата
- Допускат лесна смяна на координатната система
- Подходящи са за реализиране на движение по траектория

Параметрични уравнения

Размисли

- Най-подходящи са полиномите
- Броят на извивките зависи от степента

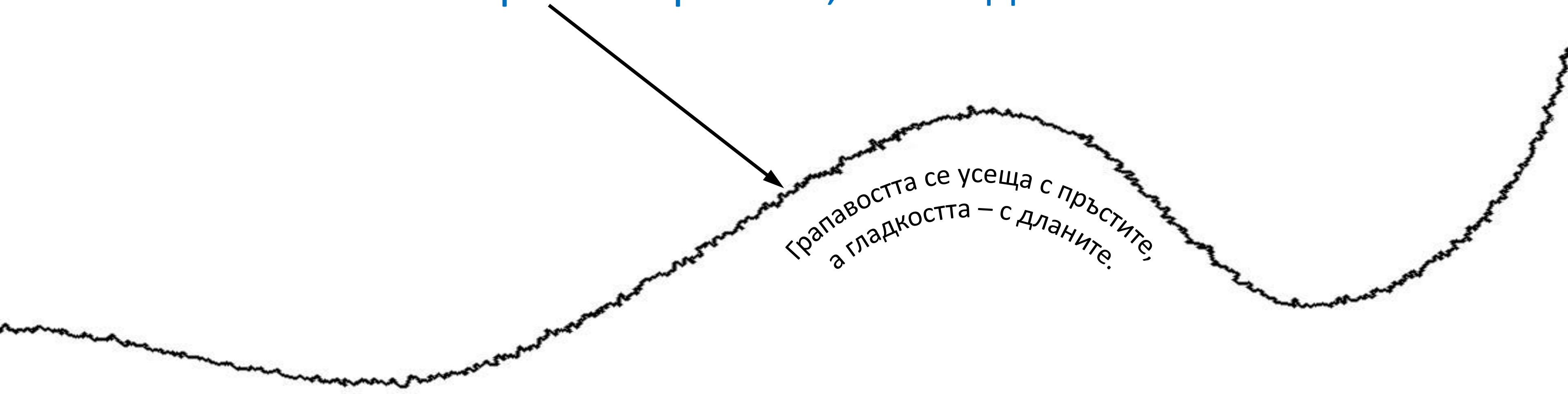
Проблеми

- Коефициентите не са интуитивен начин за контрол на кривата
- За сложни криви е нужно съшиване на парчета от отделни криви

Съшиване и гладкост

Съшиването води до проблем

- Хората са чувствителни към гладкостта на кривата
- Гладкостта няма връзка с „грапавостта“
- Тази крива е грапава, но гладка



Гладкост в КГ

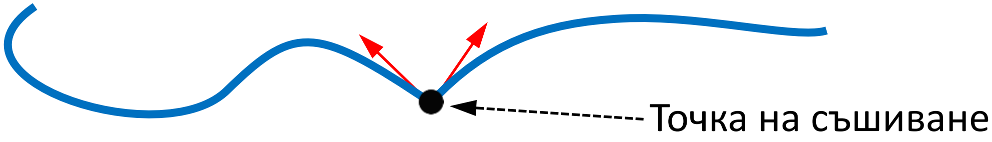
Гладкостта е на степени

- По-висока степен = математически по-гладка крива
- Гладкостта зависи от поведението на кривата в точките за съшиване
- За гладкост се изследват производните
- Хората усещат 2-3 степени на гладкост

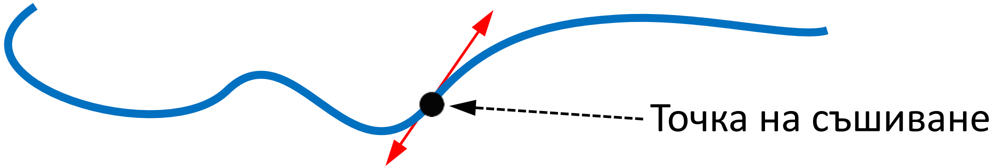
G^0, G^1, G^2 …

Геометрична гладкост от степен n

– G^0: единият край съвпада с другия



– G^1: тангентите са непрекъснати

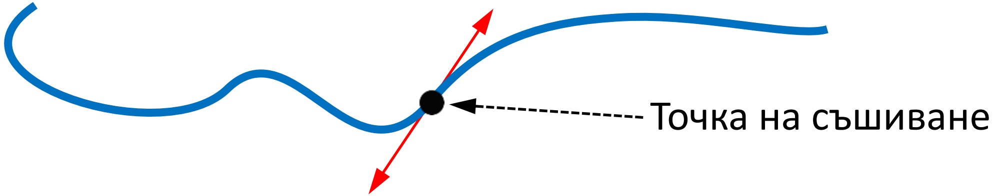


– G^2: кривината е непрекъсната

C^0, C^1, C^2 …

Параметрична гладкост от степен n
(непрекъсната n-та производна)

– C^0: съвпада с G^0
– C^1: тангентите са равни и непрекъснати

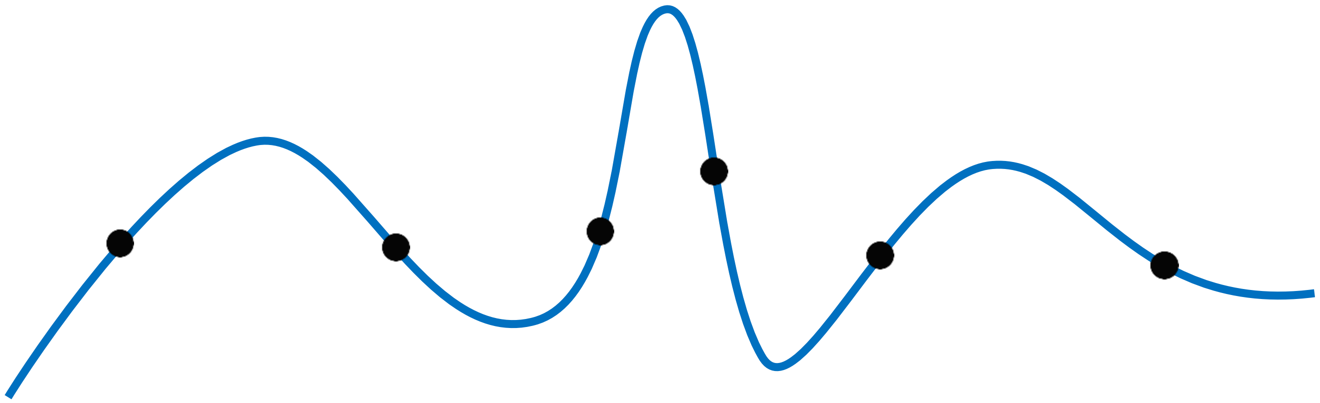


– C^2: кривината е равна и непрекъсната

Типове криви

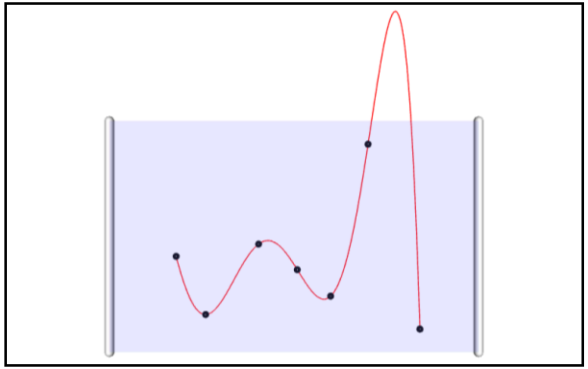
Интерполиращи

– Минават през избраните точки
– Водят до големи „разсейки“



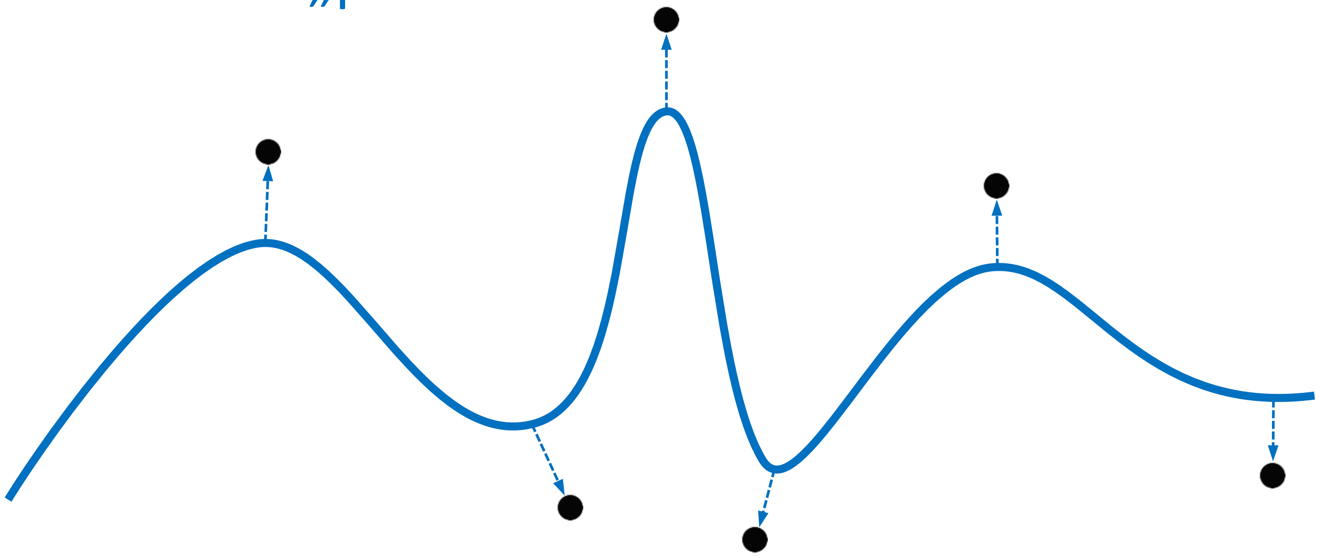
Пример

- Полиномиална интерполация
- Гладка крива, която не е интуитивна и се „разсейва“



Апроксимиращи

- Минават покрай избраните точки
- Тези точки „придърпват“ кривата към себе си
- Няма „разсейки“



В заключение

Търси се начин, за който

- Изчисляването на точка да е бързо
- Дизайнът на кривата да е интуитивен
- Кривата да подлежи на трансформация
- Кривата да не дава „разсейки“
- Фрагментите да имат поне една степен на свобода
- Да не си личи къде е съшивано

Криви на Безие

Криви на Безие

Криви на Безие (Bezier)

– Описани първо от Пол де Кастело (Paul de Casteljau), работещ в „Ситроен“
– Паралелно открити от Пиер Безие (Pierre Bézier), работещ в „Рено“
– Поради секретността в „Ситроен“ Безие успява първи да публикува и да закове името си в историята на КГ

Основна идея

Елементи

- Контролни точки
- Коефициенти-полиноми (тегла)

Изчисление

- Всяка контролна точка се умножава покоординатно по коефициента си
- Сумират се в точка от кривата

Полиноми на Бернщайн

В основата на кривите на Безие

– Полиноми на Бернщайн (Bernstein), като $t \in [0,1]$

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$$

– Коефициентите са $\binom{n}{i} = \frac{n!}{(n-i)!i!}$

Започваме с $n = 1$

Да разгледаме $n = 1$

- Прескачаме $n = 0$ по тривиални причини
- Умножаваме две точки P_0 и P_1 по полиномите на Бернщайн

$$Q(t) = B_0^1(t)P_0 + B_1^1(t)P_1 =$$
$$= \binom{1}{0} t^0(1-t)^1 P_0 + \binom{1}{1} t^1(1-t)^0 P_1 =$$
$$= (1-t)P_0 + tP_1$$

А това си е

- Чистокръвна и чистоплътна линейна комбинация на две точки
- Резултатът е точка по правата
  (който не вярва, да погледне лекция 3 ето там)

Междинни точки

Имаме две 3D точки (пак *Ю* и *Ъ*)

- Искаме да получим междинна точка

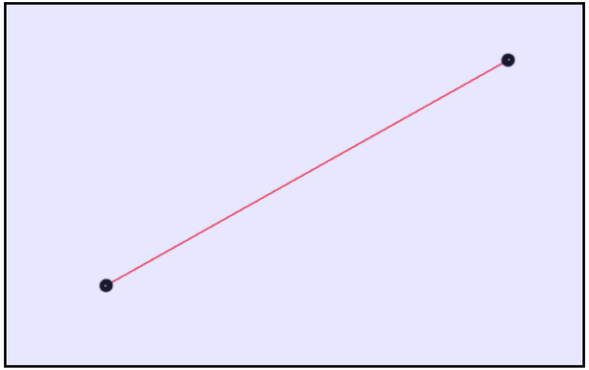
Използваме линейна обвивка

- При t=0 и t=1 получаваме Ю и Ъ
- При t∈(0,1) – междинна точка

$$Щ = (1-t)Ю + (t)Ъ \qquad \left|\begin{aligned} x_Щ &= (1-t)x_Ю + (t)x_Ъ \\ y_Щ &= (1-t)y_Ю + (t)y_Ъ \\ z_Щ &= (1-t)z_Ю + (t)z_Ъ \end{aligned}\right.$$

Илюстрация

– Да изпробваме $n = 1$ – линейна крива на Безие



Следваща стъпка

Да разгледаме $n = 2$

- Полиномите са 3, а точките 2, затова въвеждаме една междинна точка

$$Q(t) = B_0^2(t)P_0 + B_1^2(t)P_1 + B_2^2(t)P_2 =$$
$$= \binom{2}{0} t^0(1-t)^2 P_0 + \binom{2}{1} t^1(1-t)^1 P_1 + \binom{2}{2} t^2(1-t)^0 P_2 =$$
$$= (1-t)^2 P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2 P_2$$

- Това е линейна комбинация от 3 точки и резултатът е точка в триъгълника P_{012}

Защо?

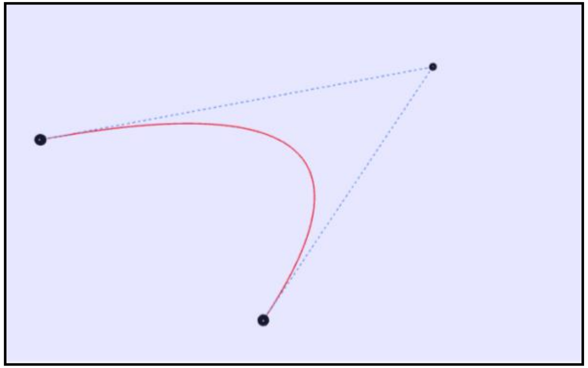
- Защото за коефициентите $(1-t)^2$, $2t(1-t)$ и t^2 са в интервала $[0,1]$, ако $t\in[0,1]$
- Защото сумата им $(1-t)^2+2t(1-t)+t^2=1$

Графична интерпретация

- Очевидно точките ще са по крива, която започва от P_0 и свършва в P_2:
$Q(0)=(1-0)^2P_0+2\cdot 0(1-0)P_1+0^2P_2=P_0$
$Q(1)=(1-1)^2P_0+2\cdot 1(1-1)P_1+1^2P_2=P_2$

Илюстрация

– Да изпробваме $n = 2$ – квадратична крива на Безие



- **Но каква е ролята на средната точка**
  - Тя изтегля кривата в своя посока
  - Променяйки тази точка, променяме кривата
- **Особености**
  - Интерполираща спрямо крайните точки P_0 и P_2
  - Апроксимираща спрямо средната точка

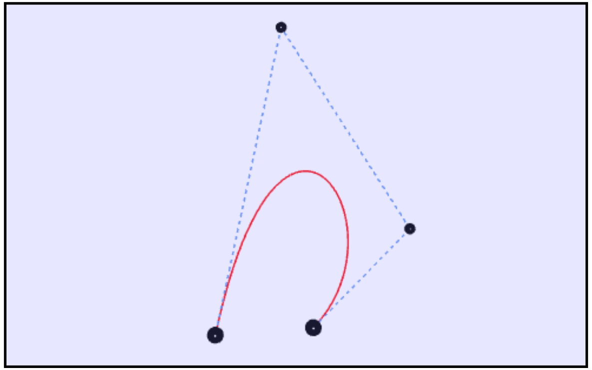
Кубични криви на Безие

Получават се при $n = 3$

- Нужни са ни две междинни точки
  $$Q(t) = B_0^3(t)P_0 + B_1^3(t)P_1 + B_2^3(t)P_2 + B_3^3(t)P_3 =$$
  $$= (1-t)^3P_0 + 3t(1-t)^2P_1 + 3t^2(1-t)P_2 + t^3P_3$$
- Това е линейна комбинация от 4 точки и резултатът е точка в 4-ъгълника P_{0123}
- Точките ще са по крива, която започва от P_0 и свършва в P_3, т.е. $Q(0) = P_0$ и $Q(1) = P_3$

Илюстрация

- Да изпробваме $n = 3$ – кубична крива на Безие



Свойства

Свойство 1

- Кривата лежи изцяло в изпъкналата обвивка на контролните точки

Свойство 2

- Ако те са на една линия, кривата се изражда в права

Свойство 3

- За трансформация на кривата е нужно и достатъчно да трансформираме само точките ѝ

Съставни криви
от сегменти на Безие

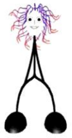
Съставни криви

Моделиране на сложни криви

- Може да е с криви на Безие от висока степен

Не се препоръчва, защото:

- Изчисленията са по-обемни
- Моделирането става по трудно
- Промяна в една точка променя малко или много цялата крива



Решението

Съшиване на криви на Безие

- Представяне на сложна крива чрез няколко снадени криви на Безие
- Тези криви може да са от ниска степен (квадратични и кубични)

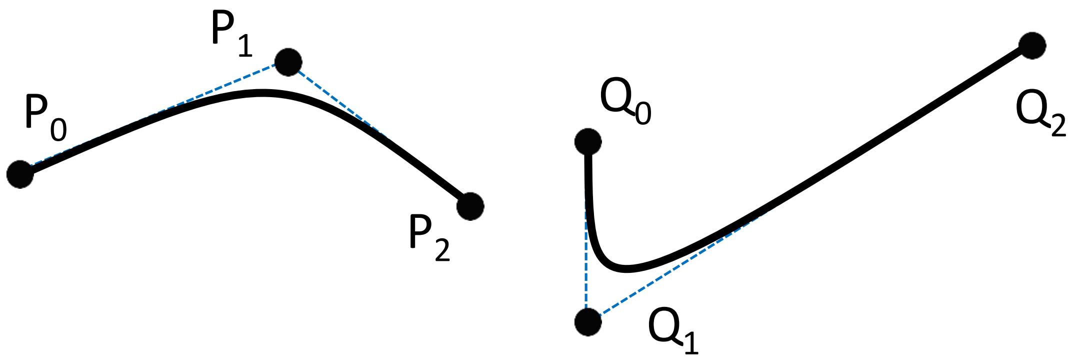
Нов проблем

- Съставната крива трябва да е гладка, най-вече в точките на съшиване

Съшиване при $n = 2$

Съшиване на квадратични криви

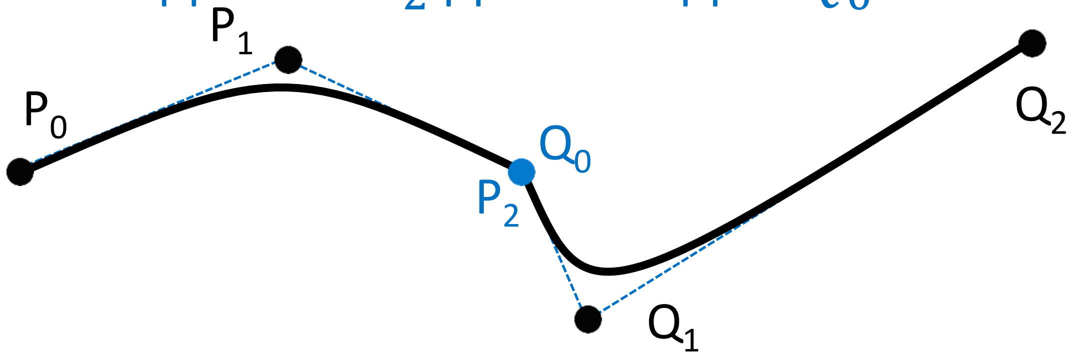
– Две криви с контролни точки $P_{0,1,2}$ и $Q_{0,1,2}$

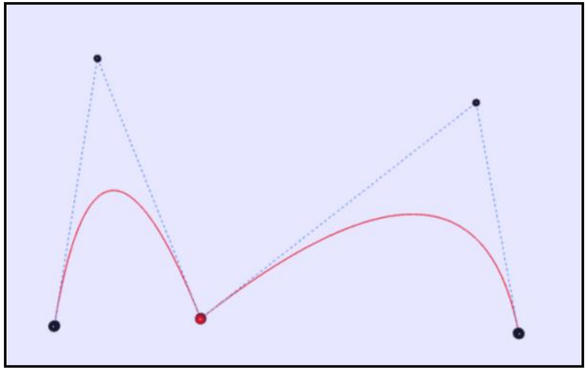


– Съшиването изисква жертвоготовност – някои от точките ще бъдат променени

Постигане на G^0 (=C^0)

– Необходимо е P_2 да съвпада с Q_0



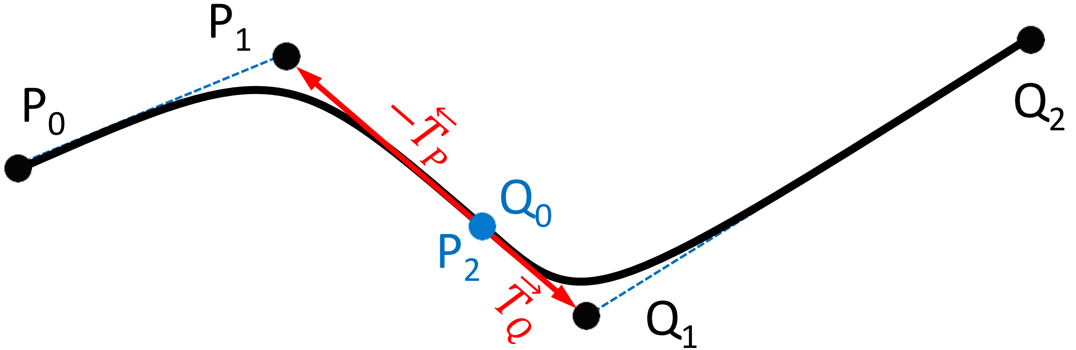


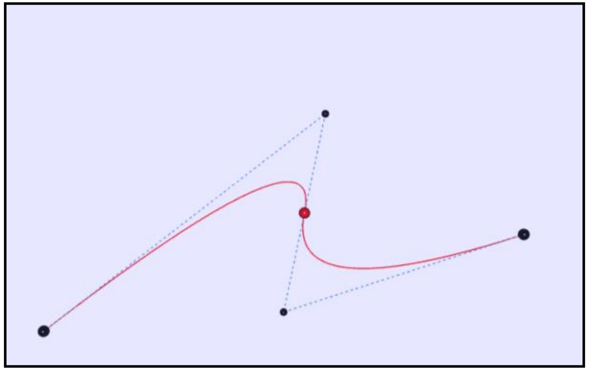
Постигане на G^1 ($G^1 < C^1$)

- Необходимо е двете тангенти в общата точка да са на една линия
- Да сметнем тангентата $\vec{T}_P$ в P_2:
  $\vec{p}'(t) = [(1-t)^2 P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2 P_2]' =$
  $= (2t-2)P_0 + (2-4t)P_1 + 2tP_2$
- В края на кривата имаме $\vec{p}'(1) = 2(P_2 - P_1)$
- Получаваме $\vec{T}_P || \overrightarrow{P_1 P_2}$
- Аналогично получаваме $\vec{q}'(0) = 2(Q_1 - Q_0)$, т.е. тангентата $\vec{T}_Q || \overrightarrow{Q_0 Q_1}$

За постигане на G¹ е необходимо

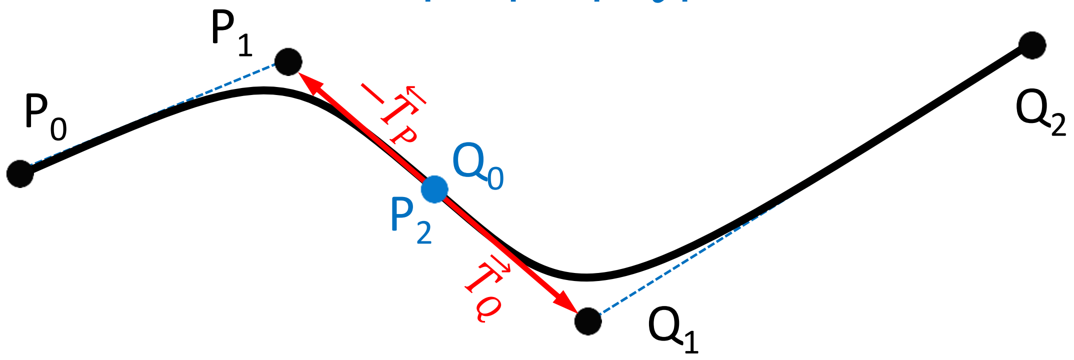
– $P_2 = Q_0$ да са „между“ P_1 и Q_1 (т.е. $\vec{T}_P || \vec{T}_Q$)

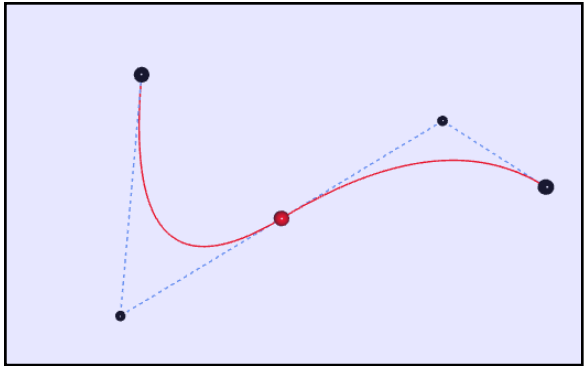




За постигане на C^1

– Необходимо е и $|\vec{T}_P|$ и $|\vec{T}_Q|$ да са равни

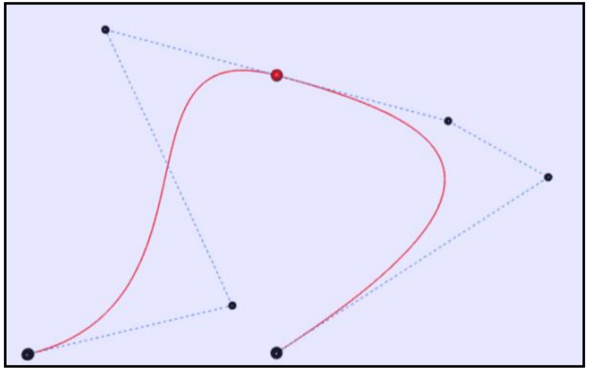




Пак C^1, но с кубично

Тангентите играят същата роля

- По-удобно е за ръчно манипулиране
- Промените са локализирани около общата точка



B-сплайни

B-сплайни

Подобни на кривите на Безие

- Полиноми и контролни точки

Но

- Предоставят локални модификации
- Промяна в една контролна точка променя само част от цялата кривата

Видове B-сплайни

Нерационални и рационални

- Рационалните представят точно конични сечения
- Имат *тегла*
  (сила с която контролните точки придърпват кривата)

Равномерни и неравномерни

- Според разпределението на деленията по параметричната ос

Точка от B-сплайн

- Набор от контролни точки
- Преливащи функции определящи влиянието на контролните точки
- Гарантират плавно предаване на „щафетата“ от контролна точка към следващата
- Удобно пресмятане чрез формулите на Кокс-ДеБур (M.G. Cox, Carl DeBoor)

Кубичен сплайн

Имаме 4 точки $P_{0,1,2,3}$

- Преливащи функции

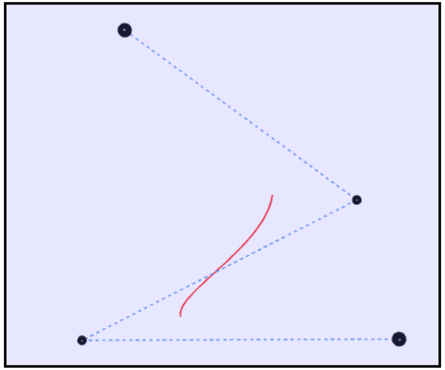
  $w_0(t) = \frac{-t^3+3t^2-3t+1}{6}$ $\quad w_1(t) = \frac{3t^3-6t^2+4}{6}$

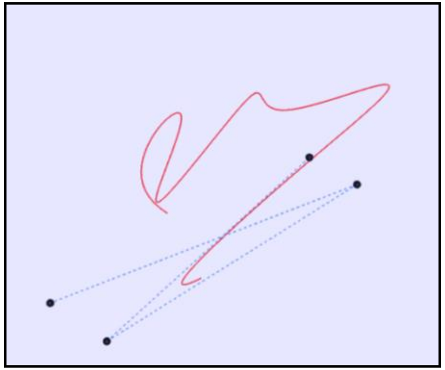
  $w_2(t) = \frac{-3t^3+3t^2+3t+1}{6}$ $\quad w_3(t) = \frac{t^3}{6}$

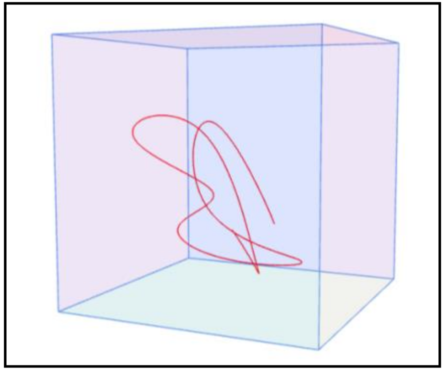
- Точка $p(t)$ за $t \in [0,1]$ получаваме така:
  $p(t) = w_0(t)P_0 + w_1(t)P_1 + w_2(t)P_2 + w_3(t)P_3$

Пример с кубичен сплайн

- Единична кубична крива
- Крива, съшита от кубични криви
- 3D крива, съшита от кубични криви



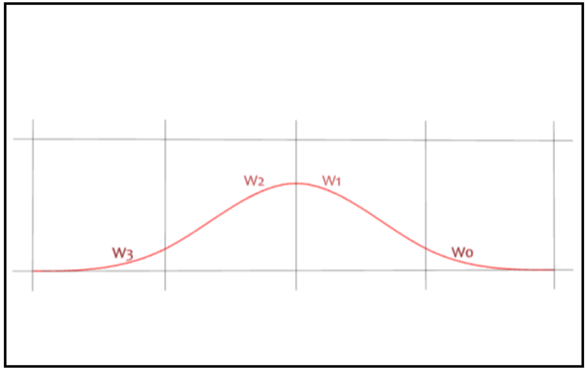




Преливащи функции

Функции-тегла за точките

- Използват се за постигане на гладкост
- Удоволствието от получаването им е в друг курс



Бонус 3т

- Отговор във форума на курса
- Знаем, че:

$$\sum_{i=0}^{3} w_i(t)P_i = p(t)$$

- Колко е сумата само на преливащите функции:

$$\sum_{i=0}^{3} w_i(t) = ?$$

NURBS криви

Само за протокола (ред k, степен $k-1$)

- Възли: $T = [t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_n]$
- Функции: $N_i^0(t) = \begin{cases} 1 : t \in [t_i, t_{i+1}] \\ 0 : t \notin [t_i, t_{i+1}] \end{cases}$

  $N_i^k(t) = \frac{t-t_i}{t_{i+k-1}-t_i} N_i^{k-1}(t) + \frac{t_{i+k}-t}{t_{i+k}-t_{i+1}} N_{i+1}^{k-1}(t)$
- Сплайн: $p(t) = \sum_{i=0}^{n} N_i^k(t) P_i$

Въпроси?

Повече информация

[LUKI]	стр. 263-311	[LENG]	стр. 453-485
[AGO2]	стр. 373-445	[MORT]	стр. 244-276
[ALZH]	гл. 4.6 и 4.7	[PAQU]	стр. 186-188
[BAGL]	стр. 31	[SALO]	половината
[KLAW]	стр. 148-155	[SEAK]	стр. 181-187
[VINC]	стр. 125-141	[ZHDA]	стр. 97-103

А също и:

- Горното е предостатъчно. Честно! Ама ако някой държи, ето:
  B(asis)Splines
  http://ashishmyles.com/tutorials/bsplines/bsplines.pdf

Край