① Упражнение 17 за 1, 2 и 3 група

Непрекъснатост. Равномерна непрекъснатост.

Опр. 1 Нека $D \subset \mathbb{R}$, $f: D \to \mathbb{R}$ и $x_0 \in D$.
Ако x_0 е точка на сгъстяване на D, казваме, че $f(x)$ е непрекъсната в x_0, ако $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
Ако x_0 не е точка на сгъстяване на D (тогава x_0 се нарича изолирана точка на D), то по определение $f(x)$ е непрекъсната в x_0.

Опр. 2 Елементарни функции наричаме функциите - константи, функциите x^α, a^x, $\sin x$, $\cos x$ и функциите, получени от тях чрез 4-те аритметични операции $+, -, \cdot, :$ и чрез образуване на композиция от функции и на обратна функция.

Примери: 1) Полиномите и рационалните функции са елементарни функции.
2) $tg\, x$ и $cotg\, x$ са елементарни функции, защото $tg\, x = \frac{\sin x}{\cos x}$ и $cotg\, x = \frac{\cos x}{\sin x}$.
3) $\log_a x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $arctg\, x$, $arccotg\, x$ са елементарни функции, защото са обратни съответно на a^x, $\sin x$, $\cos x$, $tg\, x$, $cotg\, x$.
4) $|x|$ е елементарна функция, защото $|x| = \sqrt{x^2}$.

Една от най-важните теореми в анализа е следната

Теорема 1 Всяка елементарна функция е непрекъсната в цялото си дефиниционно множество.

② Много често се използва и следната

Теорема 2 Нека $D \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ и $f, g: D \longrightarrow \mathbb{R}$, като $f(x)$ и $g(x)$ са непрекъснати в x_0. Тогава $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, а ако $g(x_0) \neq 0$ и $\frac{f(x)}{g(x)}$, също са непрекъснати в x_0.

Зад. 1 Нека $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ и $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$, като $f(x)$ е непрекъсната в x_0. Док. че и $|f(x)|$ също е непрекъсната в x_0.

Решение:

$$||a|-|b|| \leqq |a \pm b| \leqq |a|+|b|$$

$a, b \in \mathbb{R}$

неравенство на триъгълника

Съгласно неравенството на триъгълника

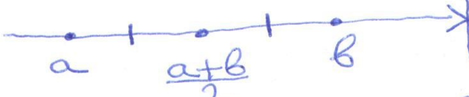
$$0 \leqq \big||f(x)|-|f(x_0)|\big| \leqq |f(x)-f(x_0)|, \quad x \in D. \quad (*)$$

Понеже $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ (по условие $f(x)$ е непрекъсната в x_0), то твърдението в зад. 1 следва от (*) и лемата за полицаите (за функции).

Забележка: Изложеното доказателство е за случая, когато x_0 е точка на сгъстяване на D. Ако x_0 е изолирана точка на D, то по определение $|f(x)|$ е непрекъсната в x_0.

Зад. 2 Нека $D \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ и $f, g: D \longrightarrow \mathbb{R}$, като $f(x)$ и $g(x)$ са непрекъснати в x_0. Док. че и $\min\{f(x), g(x)\}$ и $\max\{f(x), g(x)\}$ също са непрекъснати в x_0.

Решение:



$$\min\{a, b\} = \frac{a+b}{2} - \frac{|a-b|}{2}$$

$$\max\{a, b\} = \frac{a+b}{2} + \frac{|a-b|}{2}$$

Твърдението в зад. 2 следва от равенствата

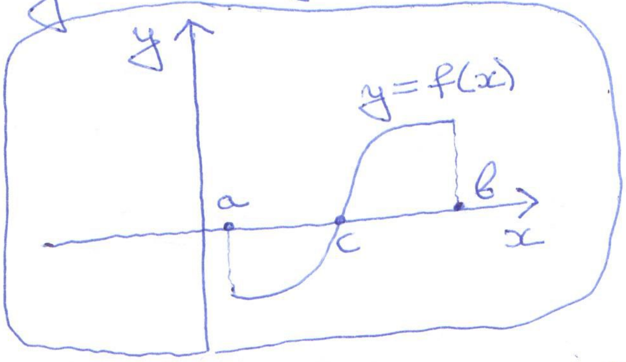
$$\min\{f(x), g(x)\} = \frac{f(x)+g(x)}{2} - \frac{|f(x)-g(x)|}{2}, \quad x \in D$$

$$\max\{f(x), g(x)\} = \frac{f(x)+g(x)}{2} + \frac{|f(x)-g(x)|}{2}, \quad x \in D,$$

теорема 2 и задача 1.

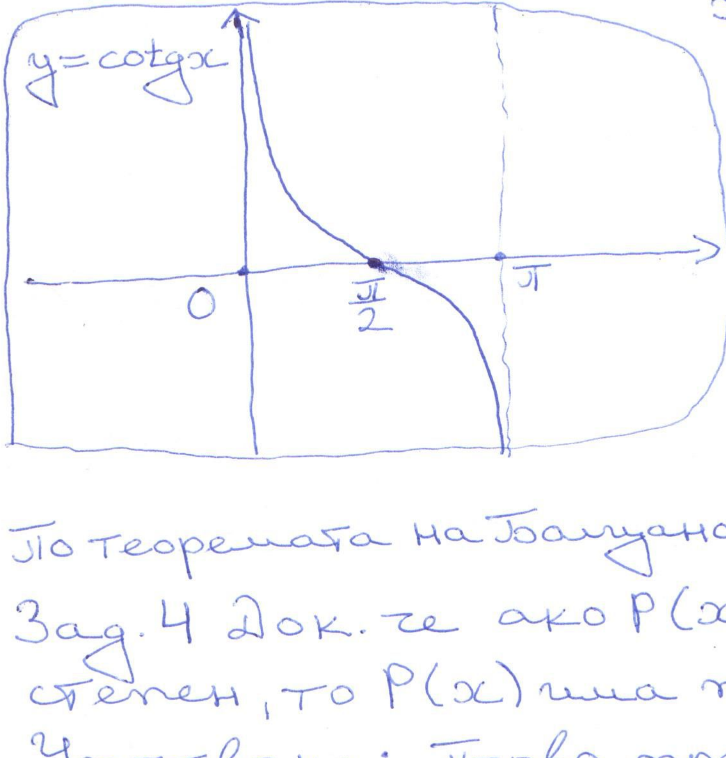
③ Теорема на Вайерщрас Ако $f(x)$ е непрекъсната в $[a,b]$, то $f(x)$ е ограничена в $[a,b]$ и има най-малка и най-голяма стойност в $[a,b]$.

Теорема на Болцано Ако $f(x)$ е непрекъсната в $[a,b]$ и $f(a)\cdot f(b)<0$, то $f(x)$ има поне една нула в (a,b) (т.е. $\exists\, c\in(a,b)$, такова че $f(c)=0$).

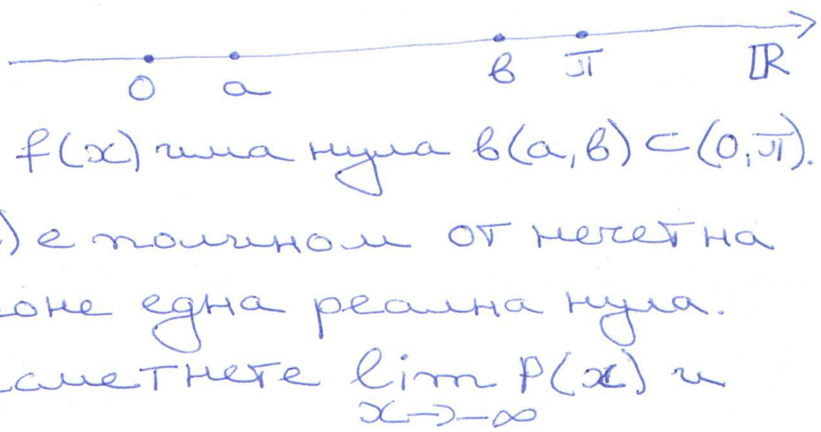


Зад.3 Док. че ако $P(x)$ е полином, то уравнението $\operatorname{cotg} x = P(x)$ има корен в $(0,\pi)$.

Решение: Нека $f(x)=\operatorname{cotg} x - P(x)$, $x\in(0,\pi)$. Трябва да док. че $f(x)$ има нула в $(0,\pi)$. Имаме, че $f(x)$ е непрекъсната в $(0,\pi)$. По теоремата на Вайерщрас $P(x)$ е ограничена в $[0,\pi]$ и сл. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to\pi^-} f(x)=-\infty$.



Тогава $\exists\, a\in(0,\pi)$, достатъчно близко до 0, такова че $f(a)>0$ и $\exists\, b\in(0,\pi)$, достатъчно близко до π, такова че $f(b)<0$.



По теоремата на Болцано $f(x)$ има нула в $(a,b)\subset(0,\pi)$.

Зад.4 Док. че ако $P(x)$ е полином от нечетна степен, то $P(x)$ има поне една реална нула.

Упътване: Първо пресметнете $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x)$ (те зависят от знака на старшия коефициент на $P(x)$) и после приложете теоремата на Болцано.

④ Опр. 3 Нека $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ и $f: \mathcal{D} \to \mathbb{R}$. Казваме, че $f(x)$ е равномерно непрекъсната в $\mathcal{D}$, ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$, такова че при $x, y \in \mathcal{D}$ и $|x-y| < \delta$ да имаме $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$.

От опр. 3 следва, че всяка равномерно непрекъсната функция е и непрекъсната. Обратното не е вярно (вж. зад. 6 по-долу).

Следствие от опр. 3. Нека $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ и $f: \mathcal{D} \to \mathbb{R}$. Ако за някое $\varepsilon_0 > 0$ съществуват две редици $\{x_n\} \subset \mathcal{D}$ и $\{y_n\} \subset \mathcal{D}$, такива, че $|x_n - y_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ и $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0$ за $\forall n$, то $f(x)$ <u>не е</u> равномерно непрекъсната в $\mathcal{D}$.

Теорема на Кантор Ако $f(x)$ е непрекъсната в $[a, b]$, то $f(x)$ е равномерно непрекъсната в $[a,b]$.

Зад. 5 Док. че: а) $f(x) = \sqrt{x}$ е равном. непр. в $[1, +\infty)$;
б) $f(x) = \frac{1}{x}$ е равном. непр. в $[\frac{1}{2}, +\infty)$.

Решение:

а) Фиксираме $\varepsilon > 0$.
При $x, y \in [1, +\infty)$ имаме

(при $|x-y| < 2\varepsilon$)

$$|f(x) - f(y)| = |\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \frac{|x-y|}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \leq \frac{|x-y|}{2} < \varepsilon.$$

Избираме $\delta = 2\varepsilon > 0$.
При $x, y \in [1, +\infty)$ и $|x-y| < \delta$ имаме $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

б) Фиксираме $\varepsilon > 0$.
При $x, y \in [\frac{1}{2}, +\infty)$ имаме

(при $|x-y| < \frac{\varepsilon}{4}$)

$$|f(x) - f(y)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \frac{|x-y|}{xy} \leq 4|x-y| < \varepsilon.$$

Избираме $\delta = \frac{\varepsilon}{4} > 0$.

Ако $x, y \in [\frac{1}{2}, +\infty)$ и $|x-y| < \delta$, то $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

(5) Зад. 6 Док. че:

а) $f(x) = x^2$ не е равном. непр. в $[0, +\infty)$;

б) $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ не е равном. непр. в $(0, +\infty)$.

Решение: а) Нека $x_n = \sqrt{n+1}$, $y_n = \sqrt{n}$ за $\forall n \in \mathbb{N}$.

Имаме, че $\{x_n\} \subset [0, +\infty)$, $\{y_n\} \subset [0, +\infty)$,

$$|x_n - y_n| = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \text{ и}$$

$|f(x_n) - f(y_n)| = |(n+1) - n| = 1$ за $\forall n$.

Според следствието от опр. 3 $f(x)$ не е равном. непр. в $[0, +\infty)$.

б) Нека $x_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$, $y_n = \dfrac{1}{\frac{3\pi}{2} + 2n\pi}$ за $\forall n \in \mathbb{N}$.

Имаме, че $\{x_n\} \subset (0, +\infty)$, $\{y_n\} \subset (0, +\infty)$,

$$|x_n - y_n| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \text{ и}$$

$$|f(x_n) - f(y_n)| = \left|\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} + 2n\pi\right)\right| =$$

$= |1 - (-1)| = 2$ за $\forall n$.

Според следствието от опр. 3 $f(x)$ не е равном. непр. в $(0, +\infty)$.