$$\mathbb{Q}[x] \supset \mathbb{Z}[x] \qquad \mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; (a,b)=1,\ a,b\in\mathbb{Z} \right\}$$

Тв $f = f_0 + f_1 x + \dots + f_n x^n \in \mathbb{Q}[x]$, $n = \deg f$

$$f_i = \frac{a_i}{b_i}, \quad (a_i, b_i) = 1 \qquad a_i, b_i \in \mathbb{Z}$$

$$m = \text{НОК}(b_0, b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{Z} \qquad \frac{m}{b_i} = c_i \in \mathbb{Z},\ i=0,\dots,n$$

$$f = \frac{1}{m}\left(\frac{m a_0}{b_0} + \frac{m a_1}{b_1}x + \dots + \frac{m a_n}{b_n}x^n\right) =$$

$$= \frac{1}{m}\left(\underbrace{c_0 a_0}_{\in\mathbb{Z}} + \underbrace{c_1 a_1}_{\in\mathbb{Z}}x + \dots + c_n a_n x^n\right)$$

$$d = \text{НОД}(c_0 a_0, c_1 a_1, \dots, c_n a_n) \Leftrightarrow \begin{array}{l} c_i a_i = d u_i,\ u_i \in \mathbb{Z} \\ \text{НОД}(u_0, u_1, \dots, u_n) = 1 \end{array}$$

$$f = \frac{d}{m}\underbrace{(u_0 + u_1 x + \dots + u_n x^n)}_{\in\mathbb{Z}}$$

Опр. $g = u_0 + u_1 x + \dots + u_n x^n \in \mathbb{Z}[x]$
ако $\text{НОД}(u_0, u_1, \dots, u_n) = 1$ $\Rightarrow$ g е примитивен полином
$g \in \mathbb{Z}[x]$

Тв// Ако $f \in \mathbb{Q}[x]$, тогава
$\exists$ примитивен полином $g \in \mathbb{Z}[x]$ и $\alpha \in \mathbb{Q}$:
$f = \alpha g$

Лема
Тв/ Нека $g \in \mathbb{Z}[x]$ е примитивен полином
$\alpha \in \mathbb{Q}$: $\alpha g \in \mathbb{Z}[x]$, тогава $\alpha \in \mathbb{Z}$.

Д-во $\alpha = \frac{b}{c}$, $(b,c) = 1$, $b, c \in \mathbb{Z}$

$g = u_0 + u_1 x + \dots + u_n x^n \Rightarrow \alpha g \in \mathbb{Z}[x]$

$\alpha u_i \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{b u_i}{c} \in \mathbb{Z} \Rightarrow c \mid b u_i \overset{(b,c)=1}{\Longrightarrow} c \mid u_i \ \forall i$

$i \in 0, \dots, n$

$\Rightarrow c \mid \text{НОД}(u_0, \dots, u_n)$, но $\text{НОД}(u_i) = 1$

$\Rightarrow c \mid 1 \Rightarrow c = \pm 1 \Rightarrow \frac{b}{c} \in \mathbb{Z}$

$\mathbb{Z}[x]$ $\quad p \in \mathbb{N}$ $\quad \eta: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_p$

$\eta_p: \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}_p[x]$ $\quad \eta_p(a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n) = \bar{a}_0 + \bar{a}_1 x + \dots + \bar{a}_n x^n$, $\quad \bar{a}_i \in \mathbb{Z}_p$

$\eta_p(f+g) = \eta_p(f) + \eta_p(g)$

$\eta_p(f \cdot g) = \eta_p(f) \cdot \eta_p(g)$ хомоморфизъм

$x^2 + x + \bar{1} \in \mathbb{Z}_2[x]$ неразлож.

$\Rightarrow 53x^2 + 17x - 247 \in \mathbb{Z}[x]$ неразл.

T/ (Редукционен критерий) $f \in \mathbb{Z}[x]$, $f = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$

p - просто число, $p \nmid a_n$ $\quad (n = \deg f)$

Тогава ако $\eta_p(f)$ е неразложим над $\mathbb{Z}_p \Rightarrow f$ е неразложим над $\mathbb{Z}$

Д-во Нека $\eta_p(f)$ неразложим и допускаме, че f - разложим

$\Rightarrow \exists h, l \in \mathbb{Z}[x]$ $(1 \le \deg h, (l) \le \deg f)$ $\quad \underline{f = h \cdot l} \Rightarrow \eta_p(f) = \eta_p(h)\,\eta_p(l)$

$p \nmid a_n \Rightarrow \deg \eta_p(f) = n = \deg(f) \Rightarrow$ $\quad \deg h + \deg l = n$

$\deg \eta_p(h) + \deg \eta_p(l) = n$ $\quad \Rightarrow \deg \eta_p(h) = \deg h$, $\deg \eta_p(l) = \deg l$ $\Rightarrow \eta_p(f)$ разложим

противоречие

Лема на Гаус // Произведение на примитивни полиноми е примитивен полином.

Д-во // Нека $h, g \in \mathbb{Z}[x]$ примитивни полиноми

$f = g \cdot h$; $g = g_0 + g_1 x + \dots + g_k x^k$, $НОД(g_0, \dots, g_k) = 1$

$h = h_0 + h_1 x + \dots + h_s x^s$ $\quad НОД(h_0, \dots, h_s) = 1$

p - произволно просто число

g - примитивен $\Rightarrow \exists i : (g_i, p) = 1 \Rightarrow$

h - примитивен $\Rightarrow \exists j : (h_j, p) = 1 \Rightarrow$

$\boxed{\text{в } \mathbb{Z}_p \quad \begin{cases} \overline{g_i} \neq \overline{0} \\ \overline{h_j} \neq \overline{0} \end{cases}}$

$\Rightarrow \eta_p(g) \neq 0 \in \mathbb{Z}_p[x]$, $\eta_p(h) \neq \overline{0} \in \mathbb{Z}_p[x]$

$\mathbb{Z}_p$ - поле , в $\mathbb{Z}_p[x]$ няма делители на 0

$\eta_p(g) \cdot \eta_p(h) \neq \overline{0}$ и $\Rightarrow \eta_p(g)\eta_p(h) = \eta_p(gh) = \eta_p(f) \neq \overline{0}$

$\Rightarrow \exists t : p \nmid f_t \Rightarrow p \nmid НОД(f_0, f_1, \dots, f_n)$

p - произволно просто $\Rightarrow НОД(f_0, f_1, \dots, f_n) = 1$ няма прости делители

Следствие $f \in \mathbb{Z}[x]$

f неразложим над $\mathbb{Z} \iff f$ неразложим над $\mathbb{Q}$

Д-во

Нека f - неразложим над $\mathbb{Z}$

и допускаме че f е разложим над $\mathbb{Q}$

$f = gh$, $g, h \in \mathbb{Q}[x]$ и $1 \leq \deg g_{(h)} < \deg f$

$g = \alpha \cdot \ell$, $\alpha \in \mathbb{Q}$, ℓ - примитивен $\ell \in \mathbb{Z}[x]$

$h = \beta \cdot t$, $\beta \in \mathbb{Q}$, t — $''$ — , $t \in \mathbb{Z}[x]$

$f = \underbrace{\alpha\beta}_{\alpha\beta \in \mathbb{Q}} \underbrace{\ell \cdot t} \Rightarrow \ell \cdot t$ е примитивен полином

$\alpha \cdot \beta (\ell t) \in \mathbb{Z}[x] \Rightarrow \alpha\beta \in \mathbb{Z}$

$f = \underbrace{(\alpha\beta\ell)}_{\in \mathbb{Z}[x]} \underbrace{t}_{\in \mathbb{Z}[x]} \Rightarrow$ противоречие

$x^4 + x^3 + \bar{1}$ неразл.

$101x^4 + 103x^3 + 104x + 105$

Т Критерий на Айзенщайн !!

$f = f_0 + f_1 x + \dots + f_n x^n$, $n = \deg f$, $f \in \mathbb{Z}[x]$

Ако $\exists$ p - просто число:

1) $p \nmid f_n$

2) $p \mid f_0, p \mid f_1, \dots, p \mid f_{n-1}$

3) $p^2 \nmid f_0$

тогава f е неразложим над $\mathbb{Z}$ (над $\mathbb{Q}$)

$\mathbb{Q}[x]$ има неразложими полиноми от произволна степен

$x^{2021} + 17$ неразложим.

$34x^{100}$

Д-во Допускаме че $f = gh$

$\deg g > 0$, $\deg h > 0$, $\deg g = k$, $\deg h = s$

$\mathbb{Z}_p$ - поле

$\eta_p(f) = \eta_p(g)\eta_p(h) = \bar{f}_n x^n$

неразложимите множители $\bar{f}_n x^n$ са $\underbrace{x \cdot x \cdot x \dots x}_{n}\ \bar{f}_n$

$\eta_p(g) = \bar{g}_k x^k$; $\eta_p(h) = \bar{h}_s x^s$

$p \mid g_0, p \mid g_1, \dots, p \mid g_{k-1}$
$p \mid h_0, p \mid h_1, \dots, p \mid h_{s-1}$ $\Rightarrow$

$f_0 = g_0 h_0 \Rightarrow p^2 \mid f_0 \Rightarrow$ противор.

$\Rightarrow f$ неразложим