32. Уравнения за права и равнина. Формули за разстояния

Част 1: Права в равнината

1. **Векторно и скаларно параметрично уравнение на права**

   Нека т. $P_o \in$ А, а векторът $v_0 \in U \neq \vec{0}$ е ненулев (ЛНЗ). Тогава съществува единствена права l, т.ч. $P_o \in l$ и $v_1 || \, l$.

   Нека P е произволна т. от l ($P \in l$). $\overrightarrow{\mathrm{P_0P}} \, || \, \mathrm{v_1} \leftrightarrow \exists! \, \lambda \in \mathrm{R}$, т.ч. $\overrightarrow{\mathrm{P_0P}} = \lambda \mathrm{v_1}$

   Нека $r = \overrightarrow{OP}, r_0 = \overrightarrow{\mathrm{OP_0}}, \overrightarrow{\mathrm{P_0}P} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{\mathrm{OP_0}} = r - r_0 = \lambda v_1$.

   Получихме, че $P_o \in l \leftrightarrow r = r_0 + \lambda v_1$ за $\lambda \in R$. Уравнението $r = r_0 + \lambda v_1$ (1) наричаме **векторно параметрично уравнение на правата l.**

   Нека т. $P(x, y)$, а $P_0(x_0, y_0)$, тогава $\overrightarrow{\mathrm{P_0P}}(x - x_0, y - y_0)$ и $v_1(a, b)$. $\vec{\mathrm{r}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}(x, y), \vec{\mathrm{r_0}} = \overrightarrow{\mathrm{OP_0}}(x_0, y_0)$.

   За да е изпълнено уравнение (1), трябва да са изпълнени и уравненията:

   l: $\begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \end{cases}$, $\lambda \in R$. Равенствата се наричат **скаларни параметрични уравнения на правата l.**

2. **Общо уравнение на права**

   Нека А е 2-мерно афино пространство (в частност равнина), моделирано върху ЛП U и К $= 0e_1e_2$ е АКС в А.

   Нека l е права. Уравнение на l от вида $Ax + By + C = 0$, където $(A, B) \neq (0,0), A, B, C \in R$ наричаме общо уравнение на правата l спрямо K.

   Теорема:
   1. Всяка права в А има общо уравнение спрямо K, т.е. уравнение от вида $Ax + By + C = 0$, където $(A, B) \neq (0,0)$
   2. Всяко уравнение от вида $Ax + By + C = 0$, където $(A, B) \neq (0,0)$ е общо уравнение спрямо K на някоя права в A.

   Доказателство:
   1. Нека l е права и $P_0(x_0, y_0)$ е т. от l. Нека векторът $\vec{\mathrm{v}}(v_1, v_2), \vec{\mathrm{v}} \neq \vec{0}$ е т.ч. $\vec{\mathrm{v}} \, || \, l$.

      т. $P(x, y) \in l$ т.с.т.к. $\overrightarrow{\mathrm{P_0}P} \, || \, \vec{\mathrm{v}}$, т.с.т.к.

      $\begin{vmatrix} x - x_0 & v_1 \\ y - y_0 & v_2 \end{vmatrix} = 0 \leftrightarrow v_2(x - x_0) - v_1(y - y_0) = 0 \leftrightarrow v_2 x - v_1 y - v_2 x_0 + v_1 y_0 = 0$

      Нека $A = v_2, B = -v_1, C = -v_2 x_0 + v_1 y_0$, тогава

      $P \in l$ т.с.т.к. $Ax + By + C = 0$. $(A, B) \neq (0,0)$, защото $(v_1, v_2) \neq (0,0)$.

   2. Нека $Ax + By + C = 0$, където $(A, B) \neq (0,0)$ има решение и (x_0, y_0) е едно такова, т.е. $Ax_0 + By_0 + C = 0$.

      Нека т. $P(x_0, y_0), \vec{\mathrm{v}}(-B, A)$ е ненулев, защото $(A, B) \neq (0,0)$. $\exists$ единствена права l, определена от P и $\vec{\mathrm{v}}$. $l \; z \; P(x, y)$, $l \, || \, \vec{\mathrm{v}}(-B, A)$

      $\Rightarrow l$: $\begin{cases} x = x_0 + \lambda(-B) \; /.A \\ y = y_0 + \lambda A \qquad /.B \end{cases}$

      $Ax + By = Ax_0 + By_0$. Нека $C = -Ax_0 - By_0 \Rightarrow Ax + By + X = 0$ за $\forall$т. P от l.

   a. **През две точки**

      Нека $P_1(x_1, y_1) \neq P_0(x_0, y_0)$ определят правата l. Тогава, ако искаме произволна т. $P(x, y) \in l$, то трябва $\overrightarrow{\mathrm{P_0P_1}} \, || \, \overrightarrow{\mathrm{P_0}P}$, т.е. $\begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ x - x_0 & y - y_0 \end{vmatrix} = 0 \leftrightarrow$

      $(x_1 - x_0)(y - y_0) - (x - x_0)(y_1 - y_0) = 0 \leftrightarrow$

      $x_1 y - x_1 y_0 - x_0 y + x_0 y_0 - x y_1 + x y_0 + x_0 y_1 - x_0 y_0 = 0$

      $\underbrace{(y_0 - y_1)}_{A} x + \underbrace{(x_1 - x_0)}_{B} y + \underbrace{(-(x_1 - x_0) y_0 - (y_0 - y_1) x_0)}_{C} = 0$

      l: $Ax + Bx + C = 0$ е удовлетворено

3. Декартово уравнение на права

Нека $K = Oxy$ е АКС. Нека l е права с общо уравнение $Ax + By + C = 0$ е т.ч. $l \neq Oy \Leftrightarrow B \neq 0$

$\Rightarrow l: y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$ се нарича декартово уравнение на правата l

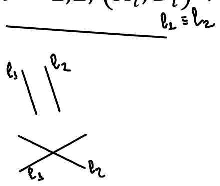
4. Взаимно положение на две прави в равнината

Нека $l_i: A_i x + B_i y + C_i = 0$ за $i = 1,2$, $(A_i, B_i) \neq (0,0)$.

a. $l_1 \equiv l_2 \leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$

b. $l_1 \,||\, l_2 \leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$

c. $l_1 \cap l_2 \leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$



5. Нормално уравнение на права

Нека l е права, зададена с $Ax + By + C = 0$, $(A, B) \neq (0,0)$. Тогава ако $\vec{v} \,||\, l$, то $\vec{v}(-B, A)$, а ако $\vec{n} \perp l$, то $\vec{n}(A, B)$.

$\vec{n}$ - нормален вектор на l; $\overrightarrow{n_0} = \frac{1}{|\vec{n}|}\vec{n}$ - единичен норм. вектор ($|\vec{n}| = \sqrt{A^2 + B^2}$),

т.е. $\overrightarrow{n_0}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right) \perp l$ и $|\overrightarrow{n_0}| = 1$.

Когато в общото уравнение, коефициентите пред x и y са тези от $\overrightarrow{n_0}$, то го наричаме **нормално уравнение на правата *l*** и е в сила, че $A^2 + B^2 = 1$.

Има точно две нормални уравнения (от $\overrightarrow{n_0}$ и $-\overrightarrow{n_0}$).

$\boldsymbol{l}: \pm\frac{\boldsymbol{Ax+By+C}}{\sqrt{\boldsymbol{A^2+B^2}}} = \boldsymbol{0}$

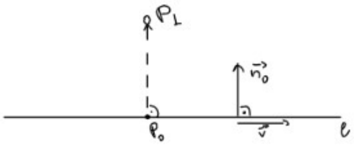
Служи за намиране на разстояние от т. $P(x, y)$ до l: $d(P, l)$

6. Разстояние от точка до права

Нека $l: Ax + By + C = 0$, $A^2 + B^2 = 1$.

Нека т. $P_1(x_1, y_1) \notin l$. Търсим $d(P_1, l)$

Знаем, че $|P_1P_0| = |\overrightarrow{P_1P_0}| = \overrightarrow{|P_0P_1|}$



Значи $l \perp \begin{cases} \overrightarrow{n_0}(A, B) \\ \overrightarrow{P_1P_0} \end{cases} \Leftrightarrow \overrightarrow{P_1P_0} \,||\, \overrightarrow{n_0}$ и $\exists \lambda \in R$: $\overrightarrow{P_1P_0} = \lambda\overrightarrow{n_0}$.

$d(P_1, l) = |\overrightarrow{P_1P_0}| = |\lambda| . |\overrightarrow{n_0}| = |\lambda|$

Нека $P_0(x_0, y_0)$. Тогава $\overrightarrow{P_1P_0}(x_0 - x_1, y_0 - y_1)$ и

$\overrightarrow{P_1P_0} = \lambda\overrightarrow{n_0}: \begin{cases} x_0 - x_1 = \lambda A \\ y_0 - y_1 = \lambda B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} x_1 = x_0 - \lambda A \\ y_1 = y_0 - \lambda B \end{matrix}$

От $P_0(x_0, y_0) \in l \leftrightarrow Ax_0 + By_o + C = 0$, т.е.

$A(x_1 - \lambda A) + B(y_1 - \lambda B) + C = 0 \leftrightarrow Ax_1 + By_1 + C - \lambda\overbrace{(A^2 + B^2)}^{1} = 0 \leftrightarrow$

$\lambda = Ax_1 + By_1 + C$, т.е. $d(P_1, l) = |\lambda| = |Ax_1 + By_1 + C|$

Част 2: Права в равнината

1. **Векторно и скаларно параметрично уравнение на равнина**
Нека $K = Oe_1e_2e_3$ е АКС в 3-мерно аффино пространство A, моделирано върху ЛП U.
Нека $P_0 \in A$, а векторите $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \in U$ са ЛНЗ. Тогава $\exists!$ равнина α, т.ч. $\alpha \parallel \overrightarrow{v_1}, \alpha \parallel \overrightarrow{v_2}$ и $P_0 \in \alpha$.
Нека т. $P \in A$ произволна, $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$ и $\overrightarrow{r_0} = \overrightarrow{OP_0}$, тогава $\overrightarrow{P_0P} = \vec{r} - \overrightarrow{r_0}$.
Тогава $P \in \alpha \Leftrightarrow \exists \lambda_1, \lambda_2 \in R: \vec{r} - \overrightarrow{r_0} = \lambda_1\overrightarrow{v_1} + \lambda_2\overrightarrow{v_2}$, т.е.
$\vec{r} = \overrightarrow{r_0} + \lambda_1\overrightarrow{v_1} + \lambda_2\overrightarrow{v_2}$ (3) се нарича **векторно параметрично уравнение на равнината $\boldsymbol{\alpha}$.**
Нека спрямо K $\alpha: \begin{cases} \parallel \overrightarrow{v_1}(a_1, a_2, a_3) \\ \parallel \overrightarrow{v_2}(b_1, b_2, b_3) \\ P_0(x_0, y_0, z_0) \in \alpha \end{cases}$ и $P(x, y, z)$, от (3),
$P \in \alpha \leftrightarrow \alpha: \begin{cases} x = x_0 + \lambda_1 a_1 + \lambda_2 b_1 \\ y = y_0 + \lambda_1 a_2 + \lambda_2 b_2 \\ z = z_0 + \lambda_1 a_3 + \lambda_2 b_3 \end{cases}$ се нарича **скаларно параметрично уравнение на равнината $\boldsymbol{\alpha}$.**

2. **Общо уравнение на равнина**
   a. **през точка и 2 вектора**
   Нека $K = O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_3}$ е АКС и равнината α е определена (еднозначно) от $P_0(x_0, y_0, z_0) \in \alpha$, $\vec{p}(p_1, p_2, p_3) \parallel \alpha$, $\vec{q}(q_1, q_2, q_3) \parallel \alpha$ за $\vec{p}, \vec{q}$ ЛНЗ ($\vec{p} \nparallel \vec{q}$ и $\vec{p}, \vec{q} \neq \vec{0}$)
   т. $P(x, y, z) \in \alpha \leftrightarrow \overrightarrow{P_0P}(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, $\vec{p}$ и $\vec{q}$ са компланарни, т.е.
   $$\begin{vmatrix} x - x_0 & p_1 & q_1 \\ y - y_0 & p_2 & q_2 \\ z - z_0 & p_3 & q_3 \end{vmatrix} = 0 \leftrightarrow$$
   $$(x - x_0)p_2q_3 + (y - y_0)p_1q_3 + (z - z_0)p_1q_2 - \big((z - z_0)p_2q_1 + (y - y_0)p_1q_3 + (x - x_0)p_3q_2\big) = 0$$
   След еквивалентни преобразувания и полагане за A, B, C, D, получаваме:
   $\alpha: Ax + By + Cz + D = 0$ за $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$, наричано **общо уравнение за равнината $\boldsymbol{\alpha}$**
   т. $P(x, y, z) \in l \leftrightarrow x, y, z$ удовлетворявават общото уравнение за α спрямо АКС K.

   b. **през три точки**
   Нека имаме три неколинеарни точки M_1, M_2, M_3. Равнината α може еднозначно да се определи от тях: $\alpha: \begin{cases} M_1 \in \alpha \\ \overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \parallel \alpha \\ \overrightarrow{M_1M_3}(x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1) \parallel \alpha \end{cases}$ и $\overrightarrow{M_1M_2} \nparallel \overrightarrow{M_1M_3}$ и $\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3} \neq \vec{0}$.
   Аналогично на a. извеждаме общото уравнение

3. **Нормално уравнение на равнина**
Нека $\alpha: Ax + By + Cz + D = 0$, където $(A, B, C) \neq \vec{0}$. Тогава векторът $\vec{n}(A, B, C) \perp \alpha$ се нарича **нормален вектор.** $\overrightarrow{n_0} = \frac{1}{|\overrightarrow{n_0}|}\vec{n} \perp \alpha$, $|\overrightarrow{n_0}| = 1 = |-\overrightarrow{n_0}|$ е единичен нормален вектор.
$$\overrightarrow{n_0}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right) \perp \alpha$$
Когато коефициентите пред x, y, z в общото уравнение на α са тези на $\overrightarrow{n_0}$, то го наричаме **нормално уравнение на равнината $\boldsymbol{\alpha}$.** Има точно две нормални уравнения на α (от $\overrightarrow{n_0}$ и $-\overrightarrow{n_0}$)
$$\alpha: \pm\frac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0$$

4. **Разстояние от точка до равнина**
Нека $\alpha: Ax + By + Cz + D = 0$ за $A^2 + B^2 + C^2 = 1$ и т. $P_0(x_0, y_0, z_0) \in \alpha$, т. $P_1(x_1, y_1, z_1) \notin \alpha$.
Търсим $d(P_1, \alpha) = ?$ Имаме, че $d(P_1, \alpha) = |P_0P_1| = |\overrightarrow{P_0P_1}| = |\overrightarrow{P_1P_0}|$.
$\overrightarrow{P_1P_0} \perp \alpha \to \overrightarrow{P_1P_0} \parallel \overrightarrow{n_0} \leftrightarrow \exists\lambda: \overrightarrow{P_1P_0} = \lambda\overrightarrow{n_0}$.
$d(P_1, \lambda) = |\overrightarrow{P_1P_0}| = |\lambda|.|\overrightarrow{n_0}| = |\lambda|$. Също от $P \in \lambda$, то $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$.
$\overrightarrow{P_1P_0} = \lambda\overrightarrow{n_0}: \begin{cases} x_0 - x_1 = \lambda A \\ y_0 - y_1 = \lambda B \\ z_0 - z_1 = \lambda C \end{cases} \leftrightarrow \begin{matrix} x_1 = x_0 - \lambda A \\ y_1 = y_0 - \lambda B \\ z_1 = z_0 - \lambda C \end{matrix}$, т.е. $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D - \lambda(A^2 + B^2 + C^2) = 0$
Т.е. $\lambda = Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D$ или $\boldsymbol{d(P_1, \alpha) = |Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}$

5. Взаимно положение между две равнини

Нека $\alpha_i: A_i x + B_i y + C_i\, z + D_i = 0,\, A_i^2 + B_i^2 + C_i^2 \neq 0$ за $i \in \{1,2\}$

a. $\alpha_1 \equiv \alpha_2 \leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} = \dfrac{D_1}{D_2}$

b. $\alpha_1 || \, \alpha_2 \leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} \neq \dfrac{D_1}{D_2}$

c. $\alpha_1 \cap \alpha_2 \leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2} \neq \dfrac{D_1}{D_2}$