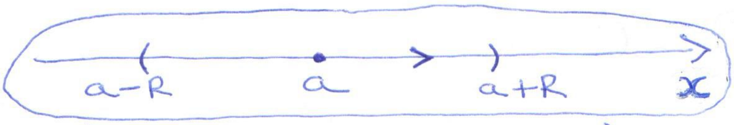
Упражнение 7

Развиване на функции в степенен ред, част 1

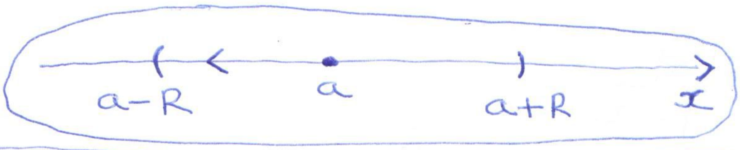
Теорема за почленно диференциране на степенните редове (ТПДСР) Степенните редове $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ и $g(x)=\sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1}$ имат един и същ интервал на сходимост, като в него $f(x)$ е диференцируема функция и $f'(x)=g(x)$.

Гранична теорема на Абел Нека степенният ред $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ има интервал на сходимост $(a-R, a+R)$. Тогава:

1) ако $f(x)$ е сходящ в $a+R$ (т.е. ако $f(a+R)\in\mathbb{R}$), то $\lim\limits_{x\to(a+R)^-} f(x)=f(a+R)$;



2) ако $f(x)$ е сходящ в $a-R$ (т.е. ако $f(a-R)\in\mathbb{R}$), то $\lim\limits_{x\to(a-R)^+} f(x)=f(a-R)$.



С други думи, ако $f(x)$ е дефинирана в $a+R$, то $f(x)$ е непрекъсната отляво в $a+R$, а ако пък $f(x)$ е дефинирана в $a-R$, то $f(x)$ е непрекъсната отдясно в $a-R$.

Нека $f(x)$ е дефинирана в околност на $a\in\mathbb{R}$ и е безкраен брой пъти диференцируема в a. Степенният ред $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\dots$ се нарича ред на Тейлър на $f(x)$ около a.

При $a=0$ редът на Тейлър се нарича ред на Маклорен.

Важна забележка: Ако в околност на a е в сила равенството $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-a)^n$, то от ТПДСР следва, че $b_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ за $\forall n$. С други думи, ако в околност на a $f(x)$ се представя като сума на степенен ред с център a, то този ред е задължително редът на Тейлър на $f(x)$ около a.

② Към равенството

$$f(x) = b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + b_3(x-a)^3 + \dots,$$

изпълнено в околност на a, прилагаме ТПДСР, като след всяко прилагане полагаме $x = a$, и така получаваме, че $b_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ за $\forall n$.

Най-важни маклоренови развития:

① $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \dots, \ x \in \mathbb{R}$

② $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots, \ x \in \mathbb{R}$

③ $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots, \ x \in \mathbb{R}$

④ $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots, \ x \in (-1, 1]$

⑤ $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = \binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1} x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \binom{\alpha}{3} x^3 + \dots, \ x \in (-1, 1)$

⑥ $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \dots, \ x \in (-1, 1).$

Разбира се, ⑥ е формулата за сумата на безкрайна геометрична прогресия и освен това ⑥ е частен случай от ⑤ (⑥ се получава като в ⑤ положим $\alpha = -1$ и заместим x с $-x$).

Понеже ⑥ се използва много често, написахме го отделно.

Зад. 1 Развийте в ред на Маклорен функцията:

а) $f(x) = \sin 5x \sin 3x$

Решение: $f(x) = \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 8x) \overset{\text{от ③}}{=}$

$$= \frac{1}{2}\Bigg(\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n)!}}_{\text{за } x \in \mathbb{R}} - \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (8x)^{2n}}{(2n)!}}_{\text{за } x \in \mathbb{R}} \Bigg) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (4^n - 64^n) x^{2n}, \ x \in \mathbb{R}$$

б) $f(x) = \ln[(6+x)(1-2x)]$

Решение: $f(x) = \ln 6 + \ln\left(1 + \frac{x}{6}\right) + \ln(1 - 2x) \overset{\text{от ④}}{=}$

③ $= \ln 6 + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{x}{6}\right)^n}_{\text{за } x\in(-6,6]} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (-2x)^n}_{\text{за } x\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2})} =$

$= \ln 6 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{1}{6^n} + (-2)^n\right) x^n, \; x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$

в) $f(x) = \frac{1}{(x-6)(x+4)}$

Решение: $f(x) = \frac{1}{10} \frac{(x+4)-(x-6)}{(x-6)(x+4)} =$

$= \frac{1}{10}\left(\frac{1}{x-6} - \frac{1}{x+4}\right) = -\frac{1}{10}\left(\frac{1}{6-x} + \frac{1}{4+x}\right) =$

$= -\frac{1}{10}\left(\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{6}} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-(-\frac{x}{4})}\right) \overset{\text{от ⑥}}{=}$

$= -\frac{1}{10}\left(\frac{1}{6}\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{6}\right)^n}_{\text{за } x\in(-6,6)} + \frac{1}{4}\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{4}\right)^n}_{\text{за } x\in(-4,4)}\right) =$

$= -\frac{1}{10}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{6^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{4^{n+1}}\right)x^n, \; x\in(-4,4).$

г) $f(x) = \frac{1}{1+x+x^2+x^3}$

Решение: $f(x) = \frac{1-x}{(1-x)(1+x+x^2+x^3)} = \frac{1-x}{1-x^4} = (1-x)\cdot\frac{1}{1-x^4} =$

$\overset{\text{от ⑥}}{=} (1-x)\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}(x^4)^n}_{\text{за } x\in(-1,1)} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(x^{4n} - x^{4n+1}\right), \; x\in(-1,1).$

д) $f(x) = \operatorname{arctg} x$

Решение: $f(x)$ е диференцируема в $\mathbb{R}$ и

$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} \overset{\text{от ⑥}}{=} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n}_{\text{за } x\in(-1,1)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}, x\in(-1,1).$

От ТПДСР следва, че

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + C, \; x\in(-1,1). \quad (*)$

(Пояснение: $f(x)$ и $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ имат една и съща производна в $(-1,1)$, а именно $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$, и значи се различават с константа в $(-1,1)$.)

④ В (*) полагаме $x=0$ и получаваме, че $C=0$.

И така, $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\ x\in(-1,1)$ (**)

От критерия на Лайбниц за числови редове следва, че $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ е сходящ при $x=1$ и $x=-1$.

Тогава, използвайки граничната теорема на Абел и факта, че $f(x)=\operatorname{arctg}x$ е непрекъсната в ±1, получаваме, че (**) е вярно в $[-1,1]$.

Отг. на д): $f(x)=\operatorname{arctg}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1},\ x\in[-1,1]$.

е) $f(x)=\arcsin x$

Решение: $f(x)$ е диференцуема в $(-1,1)$ и

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=[1+(-x^2)]^{-\frac{1}{2}}\overset{\text{от ⑤}}{=}\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}(-x^2)^n}_{\text{за } x\in(-1,1)}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{-\frac{1}{2}}{n}x^{2n},\ x\in(-1,1)$$

От ТПДСР следва, че

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{-\frac{1}{2}}{n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+C,\ x\in(-1,1)$$

Оттук при $x=0$ получаваме, че $C=0$ и сл.

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{-\frac{1}{2}}{n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\ x\in(-1,1).$$

Да забележим, че $(-1)^n\binom{-\frac{1}{2}}{n}=(-1)^n\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n-1}{2}\right)}{n!}=$

$$=\frac{\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{5}{2}\cdots\frac{2n-1}{2}}{n!}=\frac{(2n-1)!!}{2^n(1.2.3.4\ldots n)}=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\text{ за }\forall n\in\mathbb{N}$$

Сл. $f(x)=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\ x\in(-1,1)$. (***)

С критерия на Раабе и Дюамел за числови редове се вижда, че $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ е сходящ при $x=1$, откъдето пък следва, че е абсолютно сходящ (а значи и сходящ) при $x=-1$.

$$\left(\begin{aligned}&\text{При } x=1:\ n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=n\left(\frac{\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}}{\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!(2n+3)}}-1\right)=\\&=n\left(\frac{(2n+2)(2n+3)}{(2n+1)^2}-1\right)=\\&=n\frac{(4n^2+10n+6)-(4n^2+4n+1)}{(2n+1)^2}=n\frac{6n+5}{(2n+1)^2}=\frac{6+\frac{5}{n}}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^2}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{3}{2}>1\\&\text{По кр. на Раабе и Дюамел при } x=1 \text{ редът е сходящ.}\end{aligned}\right)$$

5 Тогава, използвайки граничната теорема на Абел и факта, че $f(x)=\arcsin x$ е непрекъсната в ± 1, получаваме, че (***) е вярно за $x \in [-1,1]$.

Отг. на е): $f(x)=\arcsin x = x+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $x\in[-1,1]$.

Зад. 2 Намерете сумата на степенния ред:

а) $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(3n+1)x^{3n}}{n!}$

Решение: От 1 следва, че

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n+1}}{n!}=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x^3)^n}{n!}=xe^{x^3},\ x\in\mathbb{R}.$$

Диференцираме това равенство, използвайки ТПДСР, и получаваме, че

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3n+1)x^{3n}}{n!}=\left(xe^{x^3}\right)'=e^{x^3}+3x^3e^{x^3}=(1+3x^3)e^{x^3},\ x\in\mathbb{R}.$$

Отг. на а): $f(x)=(1+3x^3)e^{x^3}$, $x\in\mathbb{R}$

б) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$

Решение: Първо да припомним 4:

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n},\ x\in(-1,1]$$

Замествайки тук x с $-x$, получаваме, че

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x),\ x\in[-1,1). \quad (*)$$

Да се върнем към б). Имаме, че

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)-n}{n(n+1)}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)x^n=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}-\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}\overset{\text{от }(*)}{=}\underbrace{-\ln(1-x)}_{\text{за } x\in[-1,1)}-\underbrace{\frac{1}{x}\left[-\ln(1-x)-x\right]}_{\text{за } x\in[-1,1)\setminus\{0\}}=$$

$$=-\ln(1-x)+\frac{\ln(1-x)+x}{x}=\frac{(1-x)\ln(1-x)+x}{x},\ x\in[-1,1)\setminus\{0\}$$

Директно от условието следва, че $f(0)=0$.

Отг. на б):

$$f(x)=\begin{cases}\frac{(1-x)\ln(1-x)+x}{x}, & \text{ако } x\in[-1,1)\setminus\{0\}\\ 0, & \text{ако } x=0\end{cases}$$

6 Зад. 3 а) Нека $f(x)=x^4\ln(1+x)+x^6e^x$.
Пресметнете $f^{(2021)}(0)$.

Решение: Използвайки 1, 4 и определението за ред на Маклорен, получаваме, че

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n}_{(*)}=f(x)=\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{n+4}}{n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+6}}{n!}}_{(**)},\ x\in(-1,1]$$

Понеже $(*)$ и $(**)$ са един и същ ред (реда на Маклорен на $f(x)$), то

коефициента пред x^{2021} в $(*)$ = коефициента пред x^{2021} в $(**)$

Следователно $\dfrac{f^{(2021)}(0)}{2021!}=\dfrac{(-1)^{2016}}{2017}+\dfrac{1}{2015!}$.

Отг. на а): $f^{(2021)}(0)=2021!\left(\dfrac{1}{2017}+\dfrac{1}{2015!}\right)$.

б) Нека $f(x)=x^5\sin x-\cos x$.
Пресметнете $f^{(1000)}(0)$.

Решение: От 2, 3 и определението за ред на Маклорен следва, че

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n}_{(\Delta)}=f(x)=\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+6}}{(2n+1)!}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}}_{(\Delta\Delta)},\ x\in\mathbb{R}$$

Понеже (Δ) и $(\Delta\Delta)$ са един и същ ред, а именно реда на Маклорен на $f(x)$, то

коефициента пред x^{1000} в (Δ) = коефициента пред x^{1000} в $(\Delta\Delta)$

Следователно $\dfrac{f^{(1000)}(0)}{1000!}=\dfrac{(-1)^{497}}{995!}-\dfrac{(-1)^{500}}{1000!}=\dfrac{-1}{995!}-\dfrac{1}{1000!}$

$(2n+6=1000 \Leftrightarrow n=497;\quad 2n=1000 \Leftrightarrow n=500)$.

Отг. на б): $f^{(1000)}(0)=-\left(\dfrac{1000!}{995!}+1\right)$.