Скаларно произведение

1 зад.

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – ЛНЗ

$|\vec{a}| = 1, \ |\vec{b}| = 2, \ |\vec{c}| = \sqrt{2}$

$\measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2}, \ \measuredangle(\vec{b}, \vec{c}) = \frac{\pi}{2}, \ \measuredangle(\vec{a}, \vec{c}) = \frac{\pi}{4}$

$\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$

$\vec{q} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$

$\vec{r} = \vec{a} + \lambda.\vec{b} - \vec{c}$

а) $|\vec{p}| = ?, \ |\vec{q}| = ?$

б) $(\vec{p}.\vec{q}) = ? \quad \cos\measuredangle(\vec{p}, \vec{q}) = ?$

в) $\lambda = ? : \vec{r} \perp \vec{p}$; V

г) $\lambda = ? : |\vec{r}| = \sqrt{5}$ Упътване

$|\vec{r}|^2 = 5$

$|\vec{r}|^2 = \vec{r}^{\,2} = \underline{(\vec{a} + \lambda.\vec{b} - \vec{c})^2 = 5},$

Решение:

а) $|\vec{q}|^2 = \vec{q}^{\,2} = (2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c})^2 = 4.\vec{a}^{\,2} + 9.\vec{b}^{\,2} + \vec{c}^{\,2} - 2.(2\vec{a}).(3\vec{b}) + 2.(2\vec{a}).\vec{c} - 2.(3\vec{b}).\vec{c} =$

$= 4.\underbrace{\vec{a}^{\,2}}_{1} + 9.\underbrace{\vec{b}^{\,2}}_{4} + \underbrace{\vec{c}^{\,2}}_{2} - 12.\underbrace{(\vec{a}.\vec{b})}_{0} + 4.\underbrace{(\vec{a}.\vec{c})}_{1} - 6.\underbrace{(\vec{b}.\vec{c})}_{0} =$

$\vec{a}^{\,2} = |\vec{a}|^2 = 1$

$\vec{b}^{\,2} = 4$

$\vec{c}^{\,2} = 2$

$(\vec{a}.\vec{b}) = 1.2.\cos\frac{\pi}{2} = 0$

$(\vec{a}.\vec{c}) = 1.\sqrt{2}.\cos\frac{\pi}{4} = 1$

$(\vec{b}.\vec{c}) = 0$

$= 4 + 36 + 2 + 4 = 46$

$|\vec{q}| = \sqrt{46}$

Упр. $|\vec{p}| = ?$

б) $(\vec{p}.\vec{q}) = (\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}).(2\vec{a} - 3.\vec{b} + \vec{c}) =$

$= 2.\vec{a}^{\,2} - 3.(\vec{a}.\vec{b}) + (\vec{a}.\vec{c}) + 2.(\vec{b}.\vec{a}) - 3.\vec{b}^{\,2} + (\vec{b}.\vec{c}) - 2.(\vec{c}.\vec{a}) + 3(\vec{c}.\vec{b}) - \vec{c}^{\,2} =$

$= 2.1 - 3.0 + 1 + 2.0 - 3.4 + 0 - 2.1 + 3.0 - 2 = -13 < 0$

$\cos\measuredangle(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{(\vec{p}.\vec{q})}{|\vec{p}|.|\vec{q}|} = \frac{-13}{|\vec{p}|.\sqrt{46}} < 0 \Rightarrow \measuredangle(\vec{p}, \vec{q}) \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$

в) $\vec{p} \perp \vec{r} \Leftrightarrow (\vec{p}.\vec{r}) = 0$

$(\vec{p}.\vec{r}) = (\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}).(\vec{a} + \lambda.\vec{b} - \vec{c}) = 0$

$\vec{a}^{\,2} + \lambda.(\vec{a}.\vec{b}) - (\vec{a}.\vec{c}) + (\vec{b}.\vec{a}) + \lambda.\vec{b}^{\,2} - (\vec{b}.\vec{c}) - (\vec{c}.\vec{a}) - \lambda.(\vec{c}.\vec{b}) + \vec{c}^{\,2} = 0$

$1 + \lambda.0 - 1 + 0 + \lambda.4 - 0 - 1 - \lambda.0 + 2 = 0$

$4.\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{4}$

---

2 зад.

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – ЛНЗ

$\vec{p}: \vec{p} \perp \vec{a}, \ \vec{p} \perp \vec{b}, \ \vec{p} \perp \vec{c}$

? че $\vec{p} = \vec{0}$.

$\vec{p} = \alpha.\vec{a} + \beta.\vec{b} + \gamma.\vec{c} \ /.\vec{p}$, $(\vec{p}.\vec{a}) = (\vec{p}.\vec{b}) = (\vec{p}.\vec{c}) = 0$

$\vec{p}^{\,2} = \alpha.(\vec{a}.\vec{p}) + \beta.(\vec{b}.\vec{p}) + \gamma.(\vec{c}.\vec{p})$

$\vec{p}^{\,2} = 0 \Rightarrow \vec{p} = \vec{0}$

$\vec{p}: \vec{p}\perp\vec{a}, \vec{p}\perp\vec{b}, \vec{p}\perp\vec{c}$
?, че $\vec{p}=\vec{0}$.

$\vec{p}^{\,2}=0 \Rightarrow \vec{p}=\vec{0}$

Детерминанта на Грам

$$\Gamma(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\dots,\vec{a}_n)=\begin{vmatrix} \vec{a}_1^{\,2} & (\vec{a}_1.\vec{a}_2) & \dots & (\vec{a}_1.\vec{a}_n) \\ (\vec{a}_1.\vec{a}_2) & \vec{a}_2^{\,2} & \dots & (\vec{a}_2.\vec{a}_n) \\ & & & \\ (\vec{a}_1.\vec{a}_n) & (\vec{a}_2.\vec{a}_n) & \dots & \vec{a}_n^{\,2} \end{vmatrix}$$

$\underbrace{\Gamma(\vec{a})}_{||^2}=\vec{a}^{\,2}=|\vec{a}|^2$, $\underbrace{\Gamma(\vec{a},\vec{b})}_{\text{лице}^2}=\begin{vmatrix} \vec{a}^{\,2} & \vec{a}\vec{b} \\ \vec{a}\vec{b} & \vec{b}^{\,2}\end{vmatrix}$, $\underbrace{\Gamma(\vec{a},\vec{b},\vec{c})}_{\text{обем}^2}$

Тв: $a_1,\dots,a_n$ са ЛЗ $\Leftrightarrow \Gamma(a_1,\dots,a_n)=0$
$a_1,\dots,a_n$ са ЛНЗ $\Leftrightarrow \Gamma(a_1,\dots,a_n)\neq 0$

2 зад. ($\Gamma(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$)
$\vec{p}=\alpha.\vec{a}+\beta.\vec{b}+\gamma.\vec{c}$
$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ – ЛНЗ $\Leftrightarrow \Gamma(a,b,c)\neq 0$

$(\vec{p}.\vec{a})=\alpha.\vec{a}^{\,2}+\beta.(ab)+\gamma.(\vec{a}\vec{c})=0$ $\{p\perp a\}$
$(\vec{p}.\vec{b})=\alpha.(ab)+\beta.\vec{b}^{\,2}+\gamma.(bc)=0$ $\vec{p}\perp\vec{b}$
$(\vec{p}.\vec{c})=\alpha.(\vec{a}\vec{c})+\beta.(\vec{b}.\vec{c})+\gamma.\vec{c}^{\,2}=0$ $\vec{p}\perp\vec{c}$
ХСЛУ с det $\Gamma(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\neq 0$
$\Rightarrow$ има ! решение $\alpha=\beta=\gamma=0 \Rightarrow \vec{p}=\vec{0}$

---

3 зад.
$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$
$|\vec{a}|=2, |\vec{b}|=1, |\vec{c}|=3$
$\angle(\vec{a},\vec{b})=\angle(\vec{b},\vec{c})=\angle(\vec{c},\vec{a})=\frac{\pi}{3}$

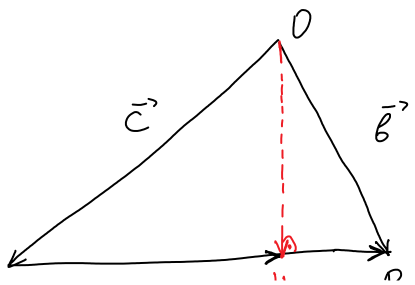
Дали $\vec{a},\vec{b}$ и $\vec{c}$ са ЛЗ или ЛНЗ?
$\vec{a}^{\,2}=4$, $\vec{b}^{\,2}=1$, $\vec{c}^{\,2}=9$
$(\vec{a}.\vec{b})=2.1.\frac{1}{2}=1$, $(\vec{b}.\vec{c})=\frac{3}{2}$, $(\vec{a}.\vec{c})=3$

$$\Gamma(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 3 & \frac{3}{2} & 9 \end{vmatrix}=36+\frac{9}{2}+\frac{9}{2}-(9+9+9)=$$
$=45-27=18\neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{a},\vec{b},\vec{c}$ са ЛНЗ

$\vec{OA}=\vec{a}, \vec{OB}=\vec{b}, \vec{OC}=\vec{c}$

а) Нека т. $H \in BC$: $\vec{OH}\perp\vec{BC}$
$\vec{OH}=?$ чрез $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$



$\vec{OH}, \vec{b}, \vec{c}$ са компланарни $\Rightarrow \vec{OH}$ ще можем ...

$OH =:$ чрез a, b, c

$\vec{OH}, \vec{b}, \vec{c}$ са компланарни $\Rightarrow$ $\vec{OH}$ ще изразим чрез $\vec{b}$ и $\vec{c}$

$\vec{OH} = \underbrace{\vec{OC}}_{\vec{c}} + \underbrace{\vec{CH}}_{?}$, $\vec{CH} \parallel \vec{CB} = \vec{b} - \vec{c} \Rightarrow \exists!\, x : \underline{\vec{CH} = x.\vec{CB}}$ $\quad x = ?$

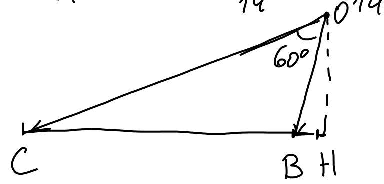
$\vec{OH} = \vec{OC} + x.\vec{CB}$, $\vec{OH} \perp \vec{CB} \Leftrightarrow (\vec{OH}.\vec{CB}) = 0$

$(\vec{OH}.\vec{CB}) = \underline{(\vec{OC}.\vec{CB}) + x.\vec{CB}^2 = 0}$ $\qquad (\vec{OC}.\vec{CB}) = \vec{c}.(\vec{b} - \vec{c}) = (\vec{c}.\vec{b}) - \vec{c}^2 = \frac{3}{2} - 9 = \frac{-15}{2}$

$\vec{CB}^2 = (\vec{b} - \vec{c})^2 = \vec{b}^2 - 2.(\vec{b}.\vec{c}) + \vec{c}^2 = 1 - 2.\frac{3}{2} + 9 = 7$

$-\frac{15}{2} + x.7 = 0$

$x = \frac{15}{14} \longrightarrow \vec{OH} = \vec{OC} + \frac{15}{14}.\vec{CB} = \vec{c} + \frac{15}{14}.(\vec{b} - \vec{c}) = \frac{15}{14}.\vec{b} - \frac{1}{14}.\vec{c}$



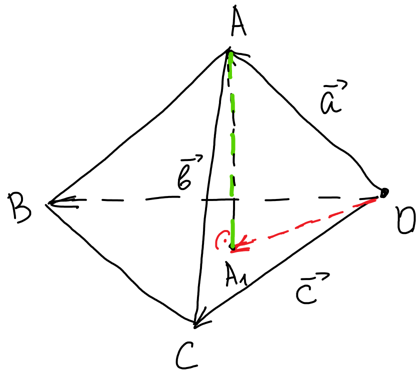
II н. $\quad H \in BC \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} \vec{OH} = \alpha.\vec{OB} + \beta.\vec{OC} \\ \alpha + \beta = 1 \end{array} \right.$ $\qquad$ (Упр.)

б) $A_1 \in (BOC)$, $AA_1 \perp (BOC)$

$\vec{OA_1} = ?$ чрез $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

$\vec{OA_1}, \vec{b}, \vec{c}$ – лин. зависими $\Rightarrow \exists!\, \beta$ и γ:

$\boxed{\vec{OA_1} = \beta.\vec{b} + \gamma.\vec{c}}$



$\vec{AA_1} = \vec{OA_1} - \vec{OA} = \beta.\vec{b} + \gamma.\vec{c} - \vec{a}$ $\qquad AA_1 \perp (BOC) \Rightarrow \begin{array}{l} (\vec{AA_1}.\vec{b}) = 0 \\ (\vec{AA_1}.\vec{c}) = 0 \end{array}$

$\left| \begin{array}{l} (\beta.\vec{b} + \gamma.\vec{c} - \vec{a}).\vec{b} = 0 \\ (\beta.\vec{b} + \gamma.\vec{c} - \vec{a}).\vec{c} = 0 \end{array} \right.$

$\left| \begin{array}{l} \beta.\vec{b}^2 + \gamma.(\vec{c}\vec{b}) - (\vec{a}\vec{b}) = 0 \\ \beta.(\vec{b}\vec{c}) + \gamma.\vec{c}^2 - (\vec{a}\vec{c}) = 0 \end{array} \right.$ $\qquad \begin{array}{l} \vec{a}^2 = 4, \ \vec{b}^2 = 1, \ \vec{c}^2 = 9 \\ (\vec{a}.\vec{b}) = 2.1.\frac{1}{2} = 1, \ (\vec{b}.\vec{c}) = \frac{3}{2}, \ (\vec{a}.\vec{c}) = 3 \end{array}$

$\left| \begin{array}{l} \beta.1 + \gamma.\frac{3}{2} - 1 = 0 \ |.2 \\ \beta.\frac{3}{2} + \gamma.9 - 3 = 0 \ |.\frac{2}{3} \end{array} \right.$ $\qquad \left| \begin{array}{l} 2\beta + 3\gamma = 2 \ |.-2 \\ \beta + 6\gamma = 2 \end{array} \right. +$ $\quad \Rightarrow -3\beta = -2$

$\beta = \frac{2}{3} \Rightarrow \gamma = \frac{2}{9}$

$\vec{OA_1} = \frac{2}{3}.\vec{b} + \frac{2}{9}.\vec{c}$

Твърдение: Векторите $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ са линейно зависими $\Leftrightarrow$ $\Gamma(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) = 0$.

Доказателство:

I Нека $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ са л.з. $\Rightarrow \exists (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq (0, \dots, 0)$:

$$\alpha_1 \cdot \vec{a}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \cdot \vec{a}_n = \vec{o} \quad \begin{array}{l} | \cdot \vec{a}_1 \Rightarrow \\ | \cdot \vec{a}_2 \Rightarrow \\ \vdots \\ | \cdot \vec{a}_n \end{array} \left| \begin{array}{l} \alpha_1 \cdot \vec{a}_1^{\,2} + \alpha_2 \cdot (\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2) + \dots + \alpha_n \cdot (\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_n) = 0 \\ \alpha_1 \cdot (\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2) + \alpha_2 \cdot \vec{a}_2^{\,2} + \dots + \alpha_n \cdot (\vec{a}_2 \cdot \vec{a}_n) = 0 \\ \vdots \\ \alpha_1 \cdot (\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_n) + \alpha_2 \cdot (\vec{a}_2 \cdot \vec{a}_n) + \dots + \alpha_n \cdot \vec{a}_n^{\,2} = 0 \end{array} \right. \quad (*)$$

Системата $(*)$ е ХСЛУ с детерминанта $\Gamma(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)$.
Тази система има решение $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$.
Това е изпълнето точно, когато $\underline{\Gamma(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n) = 0}$.

II Нека $\Gamma(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n) = 0$

Разглеждаме ХСЛУ

$$\left| \begin{array}{l} \alpha_1 \cdot \vec{a}_1^{\,2} + \alpha_2 \cdot (\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2) + \dots + \alpha_n \cdot (\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_n) = 0 \\ \alpha_1 \cdot (\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2) + \alpha_2 \cdot \vec{a}_2^{\,2} + \dots + \alpha_n \cdot (\vec{a}_2 \cdot \vec{a}_n) = 0 \\ \vdots \\ \alpha_1 \cdot (\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_n) + \alpha_2 \cdot (\vec{a}_2 \cdot \vec{a}_n) + \dots + \alpha_n \cdot \vec{a}_n^{\,2} = 0 \end{array} \right. \quad \left(\begin{smallmatrix} * \\ * \end{smallmatrix}\right)$$

с неизвестни $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$.

Детерминантата на системата $\left(\begin{smallmatrix} * \\ * \end{smallmatrix}\right)$ е точно $\Gamma(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ системата има решение $(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \dots, \alpha_n^0) \neq (0, \dots, 0)$.

Разглеждаме линейната комбинация:

$\alpha_1^0 \cdot \vec{a}_1 + \alpha_2^0 \cdot \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n^0 \cdot \vec{a}_n = \vec{v} \quad | \cdot \vec{a}_1 \Rightarrow (\vec{v} \cdot \vec{a}_1) = \alpha_1^0 \cdot \vec{a}_1^{\,2} + \dots + \alpha_n^0 \cdot (\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_n) = 0,$

от първото уравнение на $\left(\begin{smallmatrix} * \\ * \end{smallmatrix}\right)$

$(\vec{v} \cdot \vec{a}_2) = \alpha_1^0 \cdot (\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2) + \dots + \alpha_n^0 \cdot (\vec{a}_n \cdot \vec{a}_2) = 0$

$\vdots$

$(\vec{v} \cdot \vec{a}_n) = 0$

$(\vec{v} \cdot \vec{a}_1) = (\vec{v} \cdot \vec{a}_2) = \dots = (\vec{v} \cdot \vec{a}_n) = 0$

Тогава $(\vec{v} \cdot \vec{v}) = \alpha_1^0 \cdot (\vec{a}_1 \cdot \vec{v}) + \alpha_2^0 \cdot (\vec{a}_2 \cdot \vec{v}) + \dots + \alpha_n^0 \cdot (\vec{a}_n \cdot \vec{v}) = 0$

От $\vec{v}^{\,2} = 0 \Rightarrow \vec{v} = \vec{o} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \alpha_1^0 \cdot \vec{a}_1 + \dots + \alpha_n^0 \cdot \vec{a}_n = \vec{o} \\ (\alpha_1^0, \dots, \alpha_n^0) \neq (0, \dots, 0) \end{array} \right. \Rightarrow \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ са л.з.