Лекция 8.4.2021

1 Афинни координатни системи — продължение

Припомняне от миналия път

Афинни координатни системи

Нека A е n-мерно афинно пространство, моделирано върху линейното пространство V.

Определение 1 *Афинна координатна система* K в A е двойка, състояща се от точка $O \in A$ и базис $e = (e_1, \dots, e_n)$ на V. Пишем $K = Oe_1 \dots e_n$. Точката O се нарича *начало* на координатната система, а $e_1, \dots, e_n$ – *координатни* или *базисни вектори*.

Определение 2 Нека $K = Oe_1 \dots e_n$ е афинна координатна система в A и $P \in A$. *Координати на* P *спрямо* K се наричат координатите на вектора $\overrightarrow{OP}$ спрямо базиса $e = (e_1, \dots, e_n)$, тоест координатите на P спрямо K са $x_1, \dots, x_n \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$.
Пишем $P(x_1, \dots, x_n)$.
(Векторът $\overrightarrow{OP} \in V$ се нарича *радиус-вектор на* P *спрямо* K.)
Векторът $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \varkappa_e(\overrightarrow{OP}) \in \mathbb{R}^n$ се нарича *координатен вектор на* P *спрямо* K.
Изображението

$$\varkappa_K : A \to \mathbb{R}^n : \quad P \mapsto x, \quad \text{тоест } \varkappa_K(P) = \varkappa_e\left(\overrightarrow{OP}\right),$$

се нарича *координатно изображение съответно на координатната система* K.
Ако $v \in V$ е вектор, то под *координати на* v *спрямо* K ще разбираме координатите на v спрямо базиса $e = (e_1, \dots, e_n)$.

Забележка 1 Вместо $K = Oe_1 \dots e_n$ често се пише $K = Ox_1 \dots x_n$.
Правата през началото O, която е успоредна на i-тия координатен вектор e_i и е ориентирана с e_i, се нарича *i-та координатна ос* и се означава често с Ox_i.
(Ос е ориентирана права.)
Когато размерността на афинното пространство е малка, често координатите се означават с x, y, z вместо с x_1, x_2, x_3.
Оста Ox_1 (или Ox, ако първата координата е означена с x) се нарича *абсцисна ос*, а координатата x_1 (или x) — *абсциса*.
При $n \geq 2$ оста Ox_2 (или Oy, ако втората координата е означена с y) се нарича *ординатна ос*, а координатата x_2 (или y) — *ордината*.
При $n = 3$ оста Ox_3 (или Oz, ако третата координата е означена със z) се нарича *апликатна ос*, а координатата x_3 (или z) — *апликата*.

Пример 1 $\varkappa_K(O) = 0 \in \mathbb{R}^n$.

Дотук беше припомнянето от миналия път.

Афинни координатни системи — продължение

Пример 2 Нека $A = V$, тоест разглеждаме линейното пространство V като афинно пространство. Ако началото на K е $O = 0$ – нулевият вектор на V, то $\varkappa_K(P) = \varkappa_e(P)$. Ако началото O на K е произволно, то $\varkappa_K(P) = \varkappa_e(P) - \varkappa_e(O)$.
Това е така, защото $\overrightarrow{OP} = P - O$ и значи от линейността на $\varkappa_e$ следва

$$\varkappa_K(P) = \varkappa_e\left(\overrightarrow{OP}\right) = \varkappa_e(P - O) = \varkappa_e(P) - \varkappa_e(O).$$

В частност, ако $O = 0$, то $\varkappa_e(O) = 0$ и следователно $\varkappa_K(P) = \varkappa_e(P)$.

Пример 3 Нека $K^0 = 0e_1^0 \dots e_n^0$ е *стандартната координатна система в* $\mathbb{R}^n$, тоест началото е нулевият вектор на $\mathbb{R}^n$, а $e^0 = (e_1^0, \dots, e_n^0)$ е стандартният базис на $\mathbb{R}^n$. Тогава за $x \in \mathbb{R}^n$ имаме $\varkappa_{K^0}(x) = x$, което следва от предишния пример и известния ни вече факт, че координатният вектор спрямо стандартния базис на вектор от $\mathbb{R}^n$ си е самият вектор, тоест $\varkappa_{e^0}(x) = x$. Значи координатното изображение съответно на K^0 е тъждественото изображение на $\mathbb{R}^n$. В частност, координатите спрямо стандартната координатна система на $\mathbb{R}^n$ на точката $x \in \mathbb{R}^n$ са си компонентите на x.

Теорема 1 *Нека координатните вектори спрямо K на точките $P, Q \in A$ са съответно $x, y \in \mathbb{R}^n$. Тогава координатният вектор спрямо e на вектора $\overrightarrow{PQ} \in V$ е $y - x$, тоест $\varkappa_e\left(\overrightarrow{PQ}\right) = \varkappa_K(Q) - \varkappa_K(P)$.*

Доказателство: Имаме $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$. По дефиниция координатните вектори спрямо e на $\overrightarrow{OP}$ и $\overrightarrow{OQ}$ са съответно координатните вектори спрямо K на P и Q, тоест x и y. Следователно координатният вектор спрямо e на $\overrightarrow{PQ}$ е $y - x$.

Същото доказателство, написано чрез координатните изображения, изглежда по следния начин: Тъй като $\varkappa_e : V \to \mathbb{R}^n$ е линейно изображение, то

$$\varkappa_e\left(\overrightarrow{PQ}\right) = \varkappa_e\left(\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}\right) = \varkappa_e\left(\overrightarrow{OQ}\right) - \varkappa_e\left(\overrightarrow{OP}\right) = \varkappa_K(Q) - \varkappa_K(P). \qquad \square$$

.

Твърдение 1 *Координатното изображение $\varkappa_K : A \to \mathbb{R}^n$ е биекция.*

Доказателство: Нека $x \in \mathbb{R}^n$. Тъй като $\varkappa_e : V \to \mathbb{R}^n$ е биекция, то съществува единствено $v \in V$ такова, че $\varkappa_e(v) = x$. От първото свойство в дефиницията на афинно пространство следва, че съществува единствено $P \in A$ такова, че $\overrightarrow{OP} = v$. Следователно за всяко $x \in \mathbb{R}^n$ съществува единствено $P \in A$ такова, че $\varkappa_e\left(\overrightarrow{OP}\right) = x$, тоест $\varkappa_K(P) = x$. Това означава, че $\varkappa_K$ е биекция. $\square$

Забележка 2 В горните неща никъде не се използват някакви специфични свойства на полето на реалните числа, така че всичко важи без промяна и ако вместо $\mathbb{R}$ се вземе произволно поле F, тоест ако V е линейно пространство над произволно поле.

Ориентирани координатни системи

Определение 3 Афинна координатна система в ориентирано афинно пространство се нарича *положително ориентирана* или *дясна* (съответно *отрицателно ориентирана* или *лява*), ако координатният базис е положително (съответно отрицателно) ориентиран.

Пример 4 В $\mathbb{R}^n$, разглеждано като афинно пространство, имаме стандартната ориентация (зададена от стандартния базис). Спрямо нея стандартната афинна координатна система в $\mathbb{R}^n$ е положително ориентирана.

Ортонормирани координатни системи

Нека A е n-мерно евклидово афинно пространство, моделирано върху линейното пространство U (и следователно U е евклидово линейно пространство).

Определение 4 Афинната координатна система $K = Oe_1 \dots e_n$ се нарича *ортонормирана*, когато координатният базис $e = (e_1, \dots, e_n)$ е ортонормиран.

Пример 5 В $\mathbb{R}^n$, разглеждано като афинно пространство, стандартната афинна координатна система е ортонормирана.

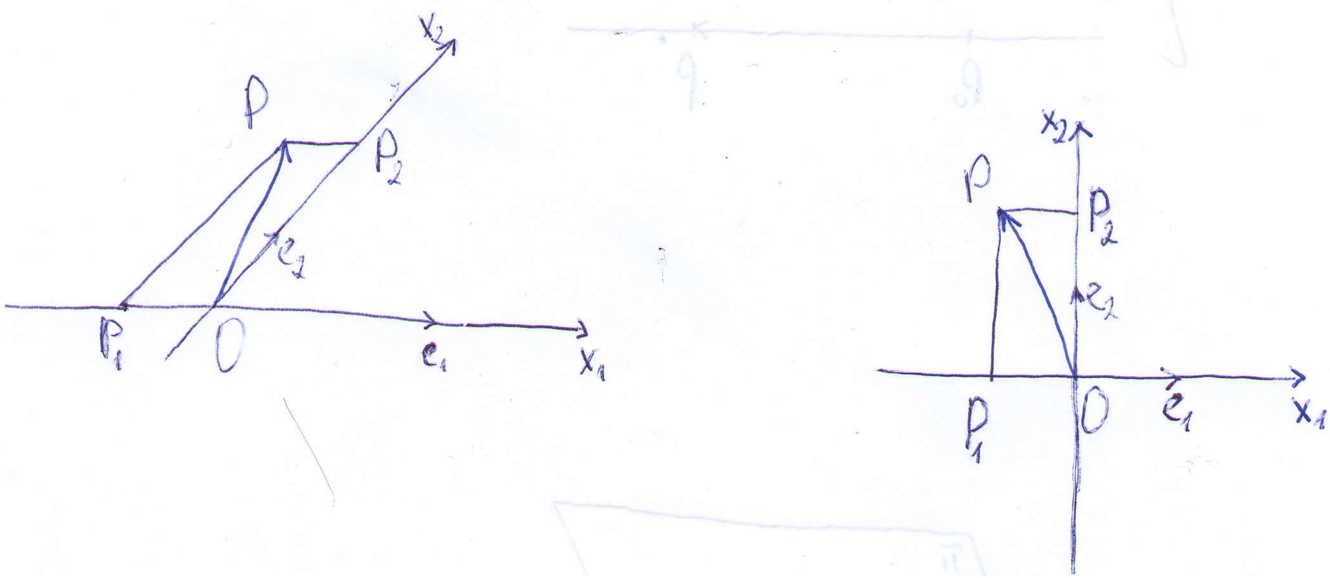
Теорема 2 *Нека $K = Oe_1 \dots e_n$ е ортонормирана координатна система и спрямо нея точките $P, Q \in A$ имат координати $P(x_1, \dots, x_n)$, $Q(y_1, \dots, y_n)$. Тогава*

$$|PQ| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2}.$$

Доказателство: По дефиниция $|PQ| = \left|\overrightarrow{PQ}\right|$, а по Теорема 1 координатите спрямо e на $\overrightarrow{PQ}$ са $(y_1 - x_1, \dots, y_n - x_n)$. Тогава по формулата за дължина на вектор чрез координатите му спрямо ортонормиран базис получаваме $|PQ| = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2}$. $\square$

Забележка 3 В училището са използвани само така наречените декартови (или правоъгълни) координатни системи в равнината, тоест в тукашната терминология ортонормирани координатни системи в равнината. И определянето на координатите там на пръв поглед се прави по друг начин, а не като тук. Но всъщност се прави същото като тук:

Нека $K = Oe_1e_2$ е афинна координатна система в равнината (произволна, тоест не е нужно да е ортонормирана). По Определение 1 координатите спрямо K на точката P са (x_1, x_2), където $\overrightarrow{OP} = x_1e_1 + x_2e_2$. Как могат да се намерят те се вижда от доказателството на втората теорема от въпроса за колинеарност и компланарност чрез линейна зависимост: Нека P_1 е пресечната точка на Ox_1 с правата през P, която е успоредна на Ox_2, а P_2 е пресечната точка на Ox_2 с правата през P, която е успоредна на Ox_1. От $\overrightarrow{OP_1} \parallel e_1$ и $\overrightarrow{OP_2} \parallel e_2$ следва, че $\overrightarrow{OP_1} = x_1e_1$ и $\overrightarrow{OP_2} = x_2e_2$ за някои $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. И тъй като OP_1PP_2 е успоредник, то $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} = x_1e_1 + x_2e_2$. (Ако работехме в пространството щяхме да пресичаме координатните оси с равнини през P, които са успоредни на координатните равнини, и щяхме да получим паралелепипед.)



Нека сега координатната система е ортонормирана. В училището координатите са се определяли по следния начин: Нека P_i е ортогоналната проекция на P върху оста Ox_i. Тогава x_i е $\pm|OP_i|$, като $+$ е когато P_i е върху положителната полуос, а $-$ е когато P_i е върху отрицателната полуос. Но това е именно каквото направихме по-горе: Поради $Ox_1 \perp Ox_2$ това, че P_1 е ортогоналната проекция на P върху Ox_1, означава, че P_1 е пресечната точка на Ox_1 с правата през P, която е успоредна на Ox_2. Тогава $\overrightarrow{OP_1} = x_1e_1$ за някое $x_1 \in \mathbb{R}$, като $|OP_1| = |x_1|.|e_1| = |x_1|$ (защото $|e_1| = 1$) и $x_1 > 0$ при $\overrightarrow{OP_1} \uparrow\uparrow e_1$ и $x_1 < 0$ при $\overrightarrow{OP_1} \uparrow\downarrow e_1$, тоест $x_1 = \pm|OP_1|$, като $+$ е когато P_1 е върху положителната полуос, а $-$ е когато P_1 е върху отрицателната полуос. Аналогично за x_2.

2 Смяна на координатната система

Афинни координатни системи

Следващата теорема е известна от курса по алгебра (и доказателството ѝ е много лесно: в матричен запис то е първият ред на написаното в скобите — във второто равенство се замества e' от първото).

Теорема 3 *(смяна на координатите при смяна на базиса)*
Нека V е n-мерно реално линейно пространство, $e = (e_1, \ldots, e_n)$ и $e' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ са базиси на V и T е матрицата на прехода от базиса e към базиса e'. Нека координатните вектори на $v \in V$ спрямо e и e' са съответно $x, x' \in \mathbb{R}^n$. Тогава $x = Tx'$, тоест $\varkappa_e(v) = T\varkappa_{e'}(v)$.
(Тоест $e' = e.T$, $e.x = v = e'.x' \Rightarrow x = Tx'$,
или: ако T е матрицата на прехода от „стария“ към „новия“ базис, то
(„старите“ координати)$=T$(„новите“ координати).)

Теорема 4 *(смяна на координатите при смяна на афинната координатна система)*
Нека $K = Oe_1 \ldots e_n$ и $K' = O'e'_1 \ldots e'_n$ са афинни координатни системи в n-мерното афинно пространство A, координатният вектор на O' спрямо K е s, а матрицата на прехода от базиса $e = (e_1, \ldots, e_n)$ към базиса $e' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ е T. Нека координатните вектори на $P \in A$ спрямо K и K' са съответно $x, x' \in \mathbb{R}^n$. Тогава $x = s + Tx'$, тоест $\varkappa_K(P) = \varkappa_K(O') + T\varkappa_{K'}(P)$.

Доказателство: Имаме $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P}$. По дефиницията на координати координатният вектор спрямо e на $\overrightarrow{OP}$ е координатният вектор спрямо K на P, тоест x, а координатният вектор спрямо e на $\overrightarrow{OO'}$ е координатният вектор спрямо K на O', тоест s. Аналогично координатният вектор спрямо e' на $\overrightarrow{O'P}$ е координатният вектор спрямо K' на P, тоест x'. От Теорема 3 тогава следва, че координатният вектор спрямо e на $\overrightarrow{O'P}$ е Tx'. Тъй като от равенството $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P}$ следва, че същото равенство е в сила за координатните вектори спрямо e на участващите вектори, получаваме $x = s + Tx'$.

Същото доказателство, написано чрез координатните изображения, изглежда по следния начин: Тъй като $\varkappa_e : V \to \mathbb{R}^n$ е линейно изображение, то

$$\begin{aligned}\varkappa_K(P) &= \varkappa_e\left(\overrightarrow{OP}\right) = \varkappa_e\left(\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P}\right) = \varkappa_e\left(\overrightarrow{OO'}\right) + \varkappa_e\left(\overrightarrow{O'P}\right) = \varkappa_K(O') + T\varkappa_{e'}\left(\overrightarrow{O'P}\right)\\ &= \varkappa_K(O') + T\varkappa_{K'}(P).\end{aligned}$$

□

Забележка 4 Ако разглеждаме K като „стара“ координатна система, а K' като „нова“ (тоест „новата“ е зададена чрез координатите на елементите си спрямо „старата“ (чрез s и T)), то теоремата дава „старите“ координати x чрез „новите“ x'. Ако ни трябва как „новите“ се изразяват чрез „старите“, то трябва да решим $x = s + Tx'$ относно x', тоест относно „новите“ координати. Получаваме $x' = T^{-1}(-s + x)$, тоест $x' = -T^{-1}s + T^{-1}x$.

Забележка 5 В горните неща никъде не се използват някакви специфични свойства на полето на реалните числа, така че всичко важи без промяна и ако вместо $\mathbb{R}$ се вземе произволно поле F, тоест ако V е линейно пространство над произволно поле.

Ортонормирани координатни системи

Определение 5 Реалната квадратна матрица T се нарича *ортогонална*, ако е обратима и $T^{-1} = T^t$.
Ако освен това $\det T > 0$, то T се нарича *специална ортогонална*.

От определението директно следва

Твърдение 2 *Нека T е реална квадратна матрица. Тогава T е ортогонална $\Leftrightarrow TT^t = E \Leftrightarrow T^tT = E$.*

Пример 6 Единичната матрица E е специална ортогонална.

Пример 7 Диагоналната матрица $D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$ е ортогонална $\Leftrightarrow d_i = \pm 1$, $i = 1, \dots, n$. Тя е специална ортогонална, ако освен това броят на -1 е четен.
Това следва от това, че $D^t = D$ и значи $D^tD = D^2 = \begin{pmatrix} d_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n^2 \end{pmatrix}$.

Пример 8 $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ е специална ортогонална матрица.
$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$ е ортогонална матрица, която не е специална ортогонална.

Твърдение 3
1. *Ако T е ортогонална матрица, то $\det T = \pm 1$.*
2. *Ако T е специална ортогонална матрица, то $\det T = 1$.*

Доказателство:

1. Тъй като $\det T^t = \det T$, то
$$1 = \det E = \det\left(T^tT\right) = \det T^t . \det T = (\det T)^2$$
и следователно $\det T = \pm 1$.
2. От първата част $\det T = \pm 1$ и тъй като $\det T > 0$, то $\det T = 1$. □

Твърдение 4
1. *Произведение на (специални) ортогонални матрици е (специална) ортогонална матрица.*
2. *Обратната на (специална) ортогонална матрица е (специална) ортогонална матрица.*

Доказателство:

1. Нека S и T са ортогонални матрици. Това означава, че S и T са обратими и $S^{-1} = S^t$ и $T^{-1} = T^t$. Тогава и ST е обратима и $(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1} = T^tS^t = (ST)^t$. Следователно ST е ортогонална.

   Ако S и T са специални ортогонални, то имаме още $\det S > 0$ и $\det T > 0$. Следователно $\det(ST) = \det S. \det T > 0$ и значи и ST е специална ортогонална.

2. Нека T е ортогонална матрица. Това означава, че T е обратима и $T^{-1} = T^t$. Тогава и T^{-1} е обратима и $\left(T^{-1}\right)^{-1} = T = \left(T^t\right)^t = \left(T^{-1}\right)^t$. Следователно T^{-1} е ортогонална.

   Ако T е специална ортогонална, то имаме още $\det T > 0$. Следователно $\det\left(T^{-1}\right) = \frac{1}{\det T} > 0$ и значи и T^{-1} е специална ортогонална. □

Твърдение 5 *Нека U е евклидово линейно пространство, $e = (e_1, \dots, e_n)$ е ортонормиран базис на U, $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$ е система от n вектора в U и T е матрицата, стълбовете на която са координатните вектори на $e'_1, \dots, e'_n$ спрямо базиса e, тоест $e' = e.T$. (В частност, ако e' също е базис на U, то T е матрицата на прехода от e към e'.) Тогава:*

1. *e' е ортонормиран базис на $U \Leftrightarrow T$ е ортогонална.*

2. *e' е ортонормиран и еднакво ориентиран с e базис на $U \Leftrightarrow T$ е специална ортогонална.*

Доказателство:

1. Равенството $e' = e.T$ означава, че за всяко $i = 1, \dots, n$ координатният вектор спрямо e на e'_i е i-тият стълб на T, тоест $\begin{pmatrix} t_{1i} \\ \vdots \\ t_{ni} \end{pmatrix}$. Тогава по формулата за пресмятане на скаларно произведение чрез координати спрямо ортонормиран базис получаваме $\langle e'_i, e'_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} t_{ki}t_{kj}$. Тъй като векторите $e'_1, \dots, e'_n$ са $n = \dim U$ на брой, то

   e' е ортонормиран базис $\Leftrightarrow e'$ е ортонормирана система $\Leftrightarrow \langle e'_i, e'_j \rangle = \begin{cases} 1 \text{ при } i = j \\ 0 \text{ при } i \neq j \end{cases}$

   $\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} t_{ki}t_{kj} = \begin{cases} 1 \text{ при } i = j \\ 0 \text{ при } i \neq j \end{cases}$.

   Нека $S = T^t$. Тогава елементите на S са $s_{ik} = t_{ki}$, $i, k = 1, \dots, n$. Следователно (i, j)-тият елемент на $T^tT = ST$ е $\sum_{k=1}^{n} s_{ik}t_{kj} = \sum_{k=1}^{n} t_{ki}t_{kj}$. Значи

   T е ортогонална $\Leftrightarrow T^tT = E \Leftrightarrow (i, j)$-тият елемент на T^tT е $\begin{cases} 1 \text{ при } i = j \\ 0 \text{ при } i \neq j \end{cases}$

   $\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} t_{ki}t_{kj} = \begin{cases} 1 \text{ при } i = j \\ 0 \text{ при } i \neq j \end{cases}$.

Така получаваме, че e' е ортонормиран базис на $U \Leftrightarrow T$ е ортогонална.

2. Тъй като e' е еднакво ориентиран с e базис на $U \Leftrightarrow \det T > 0$, то от първата част следва, че e' е ортонормиран и еднакво ориентиран с e базис на U $\Leftrightarrow T$ е ортогонална и $\det T > 0 \Leftrightarrow T$ е специална ортогонална. □

Следствие 1 *Реалната $n \times n$-матрица T е (специална) ортогонална $\Leftrightarrow$ редовете ѝ образуват (положително ориентиран) ортонормиран базис на $\mathbb{R}^n$ $\Leftrightarrow$ стълбовете ѝ образуват (положително ориентиран) ортонормиран базис на $\mathbb{R}^n$.*

Доказателство: В Твърдение 5 взимаме базиса e да е стандартният базис e^0 на $\mathbb{R}^n$, а e'_i да е i-тият стълб на T, $i = 1, \dots, n$. Тъй като координатният вектор спрямо e^0 на вектор от $\mathbb{R}^n$ си е самият вектор, то $e' = e^0.T$. Тогава от Твърдение 5 получаваме еквивалентността за стълбове. А еквивалентността за редове се получава като се използва, че редовете на T са стълбовете на T^t.

Следствието може да се докаже и с директно прилагане на дефиницията на ортонормиран базис. По същество нужните пресмятания и съображения вече сме ги направили в доказателството на Твърдение 5. □

Твърдение 6 *Нека $K = Oe_1 \dots e_n$ и $K' = O'e'_1 \dots e'_n$ са афинни координатни системи в евклидовото афинно пространство A, смяната на координатите между K и K' се задава с формулата $x = s + Tx'$ и K е ортонормирана. Тогава*

1. *K' също е ортонормирана $\Leftrightarrow$ матрицата T е ортогонална.*
2. *K' е ортонормирана и еднакво ориентирана с $K \Leftrightarrow T$ е специална ортогонална.*

Доказателство: Знаем, че T е матрицата на прехода от координатния базис $e = (e_1, \dots, e_n)$ на K към координатния базис $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$ на K'. Освен това K е ортонормирана, което означава, че координатният ѝ базис e е ортонормиран. Също имаме, че K' е ортонормирана $\Leftrightarrow e'$ е ортонормиран и че K' е еднакво ориентирана с K $\Leftrightarrow e'$ е еднакво ориентиран с e. От тия неща е ясно, че двете части на твърдението следват от частите със същите номера на Твърдение 5. □

Забележка 6 Нека K и K' са афинни координатни системи в A и смяната на координатите между тях се задава с $x = s + Tx'$. Ако ни трябват координатите относно K' изразени чрез координатите относно K, то трябва да решим това уравнение относно x' и получаваме $x' = T^{-1}(-s + x)$, тоест $x' = -T^{-1}s + T^{-1}x$. В общия случай пресмятането на T^{-1} е трудоемко, но ако K и K' са ортонормирани, то T е ортогонална и $T^{-1} = T^t$. Следователно в тоя случай няма никакво пресмятане за определянето на обратната матрица и $x' = T^t(-s + x)$, тоест $x' = -T^t s + T^t x$.

3 Задаване на множество с уравнения и с параметрични уравнения

Нека $\mathcal{A}$ е n-мерно афинно пространство, моделирано върху линейното пространство U, $K = Oe_1 \dots e_n$ е афинна координатна система в $\mathcal{A}$ и B е подмножество на $\mathcal{A}$.

Определение 6 Нека S е някакво множество и $f, g : \mathbb{R}^n \to S$. Ако

$$P(x_1, \dots, x_n) \in B \quad \Leftrightarrow \quad f(x_1, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_n),$$

то казваме, че B *има спрямо* K *уравнение* $f(x_1, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_n)$ и пишем

$$B : f(x_1, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_n).$$

Забележка 7 Често S е $\mathbb{R}$ или $\mathbb{R}^m$ и g е 0 или друга константа. В случая $S = \mathbb{R}^m$ се казва също и че B се задава със система от m (скаларни) уравнения (вместо с едно $\mathbb{R}^m$-значно уравнение).

Забележка 8 Всяко подмножество $B \subset \mathcal{A}$ може да се зададе с уравнение по следния тавтологичен начин:
Дефинираме $f : \mathbb{R}^n \to \{0, 1\}$: $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ако } P(x) \in B \\ 0, & \text{ако } P(x) \notin B \end{cases}$.
Тогава $B : f(x) = 1$.

Пример 9 Нека K^0 е стандартната координатна система в $\mathbb{R}^n$ и нека B е афинно подпространство на $\mathbb{R}^n$. Знаем, че B е множеството от решенията на някоя линейна система $Ax = b$. Също знаем, че координатният вектор спрямо K^0 на точката $x \in \mathbb{R}^n$ си е x. Следователно $B : Ax = b$ спрямо K^0.

Пример 10 По-късно ще видим, че афинно подпространство $B \subset \mathcal{A}$ също се задава с линейна система: $B : Ax = b$ спрямо K.

Пример 11 Нека f е полином от степен d на n променливи. Тогава множеството $B : f(x_1, \dots, x_n) = 0$ се нарича *алгебрична (хипер)повърхнина от степен* d (при $n = 2$ – *алгебрична крива от степен* d, а при $n = 3$ – *алгебрична повърхнина от степен* d).

Пример 12 Нека $f_1, \dots, f_m$ са полиноми на n променливи съответно от степени $d_1, \dots, d_m$. Тогава множеството

$$B : \left\{ \begin{array}{rcl} f_1(x) & = & 0 \\ & \vdots & \\ f_m(x) & = & 0 \end{array} \right.$$

се нарича *алгебрично множество от степен* $d = \max(d_1, \dots, d_m)$.
В частност, Пример 10 показва, че афинните подпространства са алгебрични множества от степен 1.

Пример 13 Нека $B_i : f_i(x) = g_i(x)$, $i = 1, \ldots, m$. Тогава $B = \bigcap_{i=1}^{m} B_i$ има уравнения

$$B : \begin{cases} f_1(x) & = & g_1(x) \\ & \vdots & \\ f_m(x) & = & g_m(x) \end{cases}.$$

Следователно алгебричните множества са сечения на алгебрични хиперповърхнини.

Определение 7 Нека Λ е някакво множество и $h = (h_1, \ldots, h_n) : \Lambda \to \mathbb{R}^n$. Ако

$$P(x_1, \ldots, x_n) \in B \quad \Leftrightarrow \quad \exists \lambda \in \Lambda : \ x_i = h_i(\lambda), \ i = 1, \ldots, n,$$

то казваме, че $x_i = h_i(\lambda)$, $i = 1, \ldots, n$, *са (скаларни) параметрични уравнения на* B *спрямо* K и пишем

$$B : \begin{cases} x_1 & = & h_1(\lambda) \\ & \vdots & \\ x_n & = & h_n(\lambda) \end{cases}, \ \lambda \in \Lambda,$$

или накратко във векторна форма $B : x = h(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$.

Определение 8 Нека Λ е някакво множество и $\widetilde{h} : \Lambda \to U$. За $P \in \mathcal{A}$ означаваме $r = \overrightarrow{OP}$ (тоест r е радиус-векторът на P спрямо K). Ако $P \in B \Leftrightarrow \exists \lambda \in \Lambda : r = \widetilde{h}(\lambda)$, то казваме, че $r = \widetilde{h}(\lambda)$ *е векторно параметрично уравнение на* B *спрямо* K и пишем $B : r = \widetilde{h}(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$.

Забележка 9 Очевидно векторното параметрично уравнение зависи само от началото O на K, но не и от координатния базис $(e_1, \ldots, e_n)$.

Твърдение 7 *Ако векторно параметрично уравнение на* B *се напише покоординатно, се получават скаларни параметрични уравнения на* B*. Всички системи скаларни параметрични уравнения на* B *се получават по тоя начин.*

Доказателство: Знаем, че координатният вектор x спрямо K на точка P съвпада с координатния вектор спрямо координатния базис e на K на радиус-вектора ѝ $r = \overrightarrow{OP}$, тоест $x = \varkappa_e(r)$. Също така знаем, че за всяко $x \in \mathbb{R}^n$ съществува единствен вектор $u \in U$ с координатен вектор x спрямо e (това всъщност е биективността на координатното изображение $\varkappa_e$).

Нека B има векторно параметрично уравнение $r = \widetilde{h}(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$. За всяко $\lambda \in \Lambda$ нека $h(\lambda) \in \mathbb{R}^n$ е координатният вектор спрямо e на вектора $\widetilde{h}(\lambda) \in U$, тоест $h(\lambda) = \varkappa_e\left(\widetilde{h}(\lambda)\right)$.
Така получаваме изображение $h : \Lambda \to \mathbb{R}^n$. Тогава
$P(x) \in B \Leftrightarrow \exists \lambda \in \Lambda : r = \widetilde{h}(\lambda) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \Lambda : \varkappa_e(r) = \varkappa_e\left(\widetilde{h}(\lambda)\right)$ (защото $\varkappa_e$ е биекция) $\Leftrightarrow \exists \lambda \in \Lambda : x = h(\lambda)$.
Това означава, че B има спрямо K скаларни параметрични уравнения $x = h(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$, тоест векторното параметрично уравнение, от което тръгнахме, написано покоординатно. С това първата част е доказана.

Нека B има скаларни параметрични уравнения $x = h(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$. За всяко $\lambda \in \Lambda$ нека $\widetilde{h}(\lambda) \in U$ е векторът, чийто координатен вектор спрямо e е $h(\lambda) \in \mathbb{R}^n$, тоест $\widetilde{h}(\lambda) = {\varkappa_e}^{-1}(h(\lambda))$. Така получаваме изображение $\widetilde{h} : \Lambda \to U$. Тогава
$P(x) \in B \Leftrightarrow \exists\lambda \in \Lambda : x = h(\lambda) \Leftrightarrow \exists\lambda \in \Lambda : {\varkappa_e}^{-1}(x) = {\varkappa_e}^{-1}(h(\lambda))$ (защото $\varkappa_e$ е биекция)
$\Leftrightarrow \exists\lambda \in \Lambda : r = \widetilde{h}(\lambda)$.
Това означава, че B има спрямо K векторно параметрично уравнение $r = \widetilde{h}(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$. При това е ясно, че скаларните параметрични уравнения, от които тръгнахме, са това векторно параметрично уравнение, написано покоординатно. С това и втората част е доказана. $\square$

Твърдение 8 *1. B има спрямо K уравнение $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \varkappa_K(B)$ има спрямо K^0 уравнение $f(x) = g(x)$.*

2. B има спрямо K параметрично уравнение $x = h(\lambda) \Leftrightarrow \varkappa_K(B)$ има спрямо K^0 параметрично уравнение $x = h(\lambda)$.

(С други думи, уравненията на B спрямо K и на координатния му образ $\varkappa_K(B)$ спрямо стандартната координатна система K^0 в $\mathbb{R}^n$ са едни и същи и аналогично за параметричните уравнения.)

Доказателство: Знаем, че координатното изображение $\varkappa_{K^0}$ е тъждественото изображение на $\mathbb{R}^n$, тоест координатният вектор на $x \in \mathbb{R}^n$ спрямо K^0 си е x. Също така знаем, че координатното изображение $\varkappa_K : A \to \mathbb{R}^n$ е биекция и следователно
$P(x) \in B \Leftrightarrow x = \varkappa_K(P) \in \varkappa_K(B)$.

1. Нека B има спрямо K уравнение $f(x) = g(x)$. Това означава, че
   $P(x) \in B \Leftrightarrow f(x) = g(x)$.
   Тогава за $x \in \mathbb{R}^n$ имаме
   $x \in \varkappa_K(B) \Leftrightarrow P = {\varkappa_K}^{-1}(x) \in B$, тоест $P(x) \in B$
   $\Leftrightarrow f(x) = g(x)$ (от уравнението на B) $\Leftrightarrow$
   f(координатния вектор на x спрямо K^0) $= g$(координатния вектор на x спрямо K^0)
   (защото координатният вектор на x спрямо K^0 е x).
   Следователно $\varkappa_K(B)$ има спрямо K^0 уравнение $f(x) = g(x)$. С това е доказана правата посока.

   Обратно, нека $\varkappa_K(B)$ има спрямо K^0 уравнение $f(x) = g(x)$. Това означава, че
   $x \in \varkappa_K(B) \Leftrightarrow$
   f(координатния вектор на x спрямо K^0) $= g$(координатния вектор на x спрямо K^0),
   тоест $f(x) = g(x)$ (защото координатният вектор на x спрямо K^0 е x).
   Тогава за $P(x) \in A$ имаме
   $P(x) \in B \Leftrightarrow x = \varkappa_K(P) \in \varkappa_K(B) \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ (от уравнението на $\varkappa_K(B)$).
   Следователно B има спрямо K уравнение $f(x) = g(x)$. С това е доказана и обратната посока.

2. Нека B има спрямо K параметрично уравнение $x = h(\lambda)$. Това означава, че $P(x) \in B \Leftrightarrow \exists \lambda \in \Lambda : \ x = h(\lambda)$.
Тогава за $x \in \mathbb{R}^n$ имаме
$x \in \varkappa_K(B) \Leftrightarrow P = {\varkappa_K}^{-1}(x) \in B$, тоест $P(x) \in B$
$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \Lambda : \ x = h(\lambda)$ (от параметричното уравнение на B)
$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \Lambda :$ координатният вектор на x спрямо $K^0 = h(\lambda)$ (защото координатният вектор на x спрямо K^0 е x).
Следователно $\varkappa_K(B)$ има спрямо K^0 параметрично уравнение $x = h(\lambda)$. С това е доказана правата посока.

Обратно, нека $\varkappa_K(B)$ има спрямо K^0 параметрично уравнение $x = h(\lambda)$. Това означава, че
$x \in \varkappa_K(B)$
$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \Lambda :$ координатният вектор на x спрямо $K^0 = h(\lambda)$, тоест $x = h(\lambda)$ (защото координатният вектор на x спрямо K^0 е x).
Тогава за $P(x) \in A$ имаме
$P(x) \in B \Leftrightarrow x = \varkappa_K(P) \in \varkappa_K(B)$
$\Leftrightarrow x = h(\lambda)$ (от параметричното уравнение на $\varkappa_K(B)$).
Следователно B има спрямо K параметрично уравнение $x = h(\lambda)$. С това е доказана и обратната посока. $\square$

Забележка 10 В горните неща никъде не се използват някакви специфични свойства на полето на реалните числа, така че всичко важи без промяна и ако вместо $\mathbb{R}$ се вземе произволно поле F, тоест ако U е линейно пространство над произволно поле.