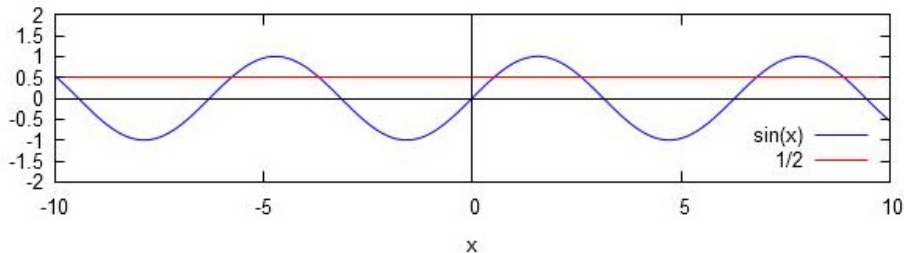


16. Обратни тригонометрични функции

Обратната функция на \sin

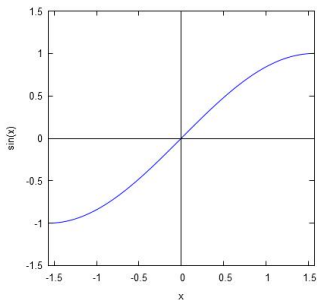
За да посочим ъгъл с определен синус, е удобно да разполагаме с функция, която е обратна на синус.



Пример: $\sin x = \frac{1}{2}$; $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Разглеждаме **sin** върху част от дефиниционната ѝ област, но такава, че функцията върху нея е инекция и покрива цялата област от стойности на **sin**, т.е. $[-1, 1]$.

Удачен избор с посочените свойства е $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.



В интервала $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ функцията **sin** е строго монотонно растяща и областта ѝ от стойности е $[-1, 1]$, т.е. $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$ е биекция; следователно има обратна; тя се означава чрез **arcsin**;

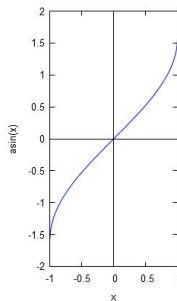
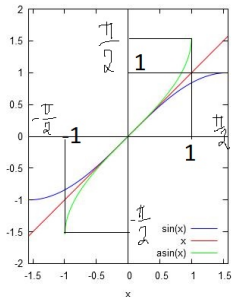
$$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]. \quad (1)$$

Дефиниция на \arcsin

Дефиниция

Дефинираме функцията $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, като за $x \in [-1, 1]$, полагаме $\arcsin x := \alpha$, където $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ е единственото такова, че $\sin \alpha = x$.

$\arcsin x$ — дъгата, чийто синус е x



Графиката на $\arcsin x$

Основни стойности и свойства на \arcsin

Някои стойности на \arcsin :

- ❶ $\arcsin 0 = 0$, защото $\sin 0 = 0$ и $0 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$;
- ❷ $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, защото $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ и $\frac{\pi}{6} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$;
- ❸ $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$, защото $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$ и $-\frac{\pi}{2} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Основни свойства:

- (а) $\sin(\arcsin x) = x$, $x \in [-1, 1]$;
- (б) $\arcsin(\sin \alpha) = \alpha$, $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Един пример

Ще намерим формула за $\cos(\arcsin x)$, където $x \in [-1, 1]$.

За $x \in [-1, 1]$ произволно фиксирано, полагаме $\alpha := \arcsin x$. Тогава $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ и $\sin \alpha = x$. Ще пресметнем $\cos \alpha$. Имаме $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$ понеже $\cos \alpha \geq 0$ за $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Следователно, като използваме основно с-во (а), получаваме

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - (\sin(\arcsin x))^2} = \sqrt{1 - x^2}. \quad (2)$$

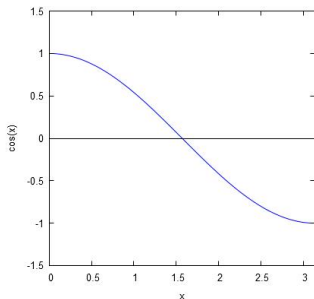
Така установихме тъждеството

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}, \quad x \in [-1, 1]. \quad (3)$$

Обратната функция на \cos

Разглеждаме \cos върху част от дефиниционната ѝ област, но такава, че функцията върху нея е инекция и покрива цялата област от стойности на \cos , т.е. $[-1, 1]$.

Удачен избор с посочените свойства е $[0, \pi]$.



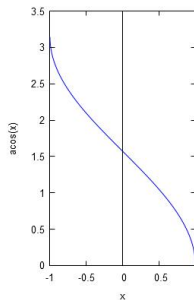
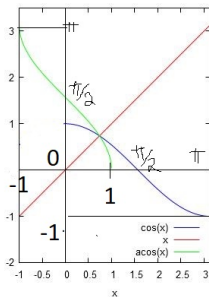
В интервала $[0, \pi]$ функцията \cos е строго монотонно намаляваща и областта ѝ от стойности е $[-1, 1]$, т.е. $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ е биекция; следователно има обратна; тя се означава чрез \arccos ;

$$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]. \quad (4)$$

Дефиниция на \arccos

Дефиниция

Дефинираме функцията $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$, като за $x \in [-1, 1]$, полагаме $\arccos x := \alpha$, където $\alpha \in [0, \pi]$ е единственото такова, че $\cos \alpha = x$.



Графиката на $\arccos x$

Основни стойности и свойства на \arccos

Някои стойности на \arccos :

- ① $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$, защото $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ и $\frac{\pi}{2} \in [0, \pi]$;
- ② $\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$, защото $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ и $\frac{\pi}{3} \in [0, \pi]$;
- ③ $\arccos(-1) = \pi$, защото $\cos \pi = -1$ и $\pi \in [0, \pi]$.

Основни свойства:

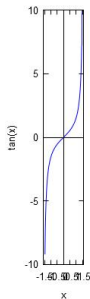
- (а) $\cos(\arccos x) = x$, $x \in [-1, 1]$;
- (б) $\arccos(\cos \alpha) = \alpha$, $\alpha \in [0, \pi]$.

Зад. Докажете тъждеството $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, $x \in [-1, 1]$.

Обратната функция на tg

Разглеждаме tg върху част от дефиниционната ѝ област, но такава, че функцията върху нея е инекция и покрива цялата област от стойности на tg , т.е. \mathbb{R} .

Удачен избор с посочените свойства е $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.



В интервала $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ функцията tg е строго монотонно растяща и областта ѝ от стойности е \mathbb{R} , т.е.

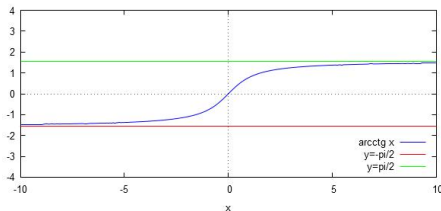
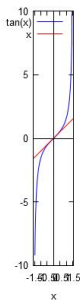
$\text{tg} : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ е биекция; следователно има обратна; тя се означава чрез arctg ;

$$\text{arctg} : \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right). \quad (5)$$

Дефиниция на arctg

Дефиниция

Дефинираме функцията $\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, като за $x \in \mathbb{R}$, полагаме $\operatorname{arctg} x := \alpha$, където $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ е единственото такова, че $\operatorname{tg} \alpha = x$.



Графиката на $\operatorname{arctg} x$

Основни стойности и свойства на arctg

Някои стойности на arctg :

- ❶ $\operatorname{arctg} 0 = 0$, защото $\operatorname{tg} 0 = 0$ и $0 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$;
- ❷ $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, защото $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$ и $\frac{\pi}{4} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$;
- ❸ $\operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$, защото $\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ и $\frac{\pi}{3} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Основни свойства:

- (а) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$, $x \in \mathbb{R}$;
- (б) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \alpha) = \alpha$, $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Бележка

Горните две свойства показват, че на всяко число от числовата права може да се съпостави различно число от крайния интервал $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Следователно в който и да е интервал с различни краища има точно толкова числа колкото върху цялата числова права!

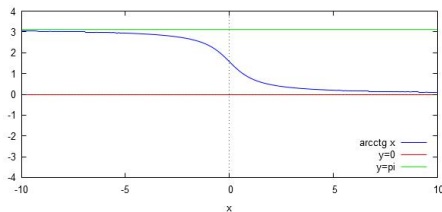
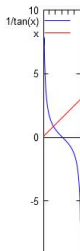
Обратната функция на ctg

Функцията ctg е строго монотонно намаляваща в $(0, \pi)$ и областта от стойностите, които приема върху този интервал е \mathbb{R} . Следователно $\text{ctg} : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ е биекция; следователно има обратна; тя се означава чрез arcctg ;

$$\text{arcctg} : \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi). \quad (6)$$

Дефиниция

Дефинираме функцията $\text{arcctg} : \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$, като за $x \in \mathbb{R}$, полагаме $\text{arcctg } x := \alpha$, където $\alpha \in (0, \pi)$ е единственото такова, че $\text{ctg } \alpha = x$.



Основни свойства на arcctg

Основни свойства:

(а) $\text{ctg}(\text{arcctg } x) = x, x \in \mathbb{R};$

(б) $\text{arcctg}(\text{ctg } \alpha) = \alpha, \alpha \in (0, \pi).$