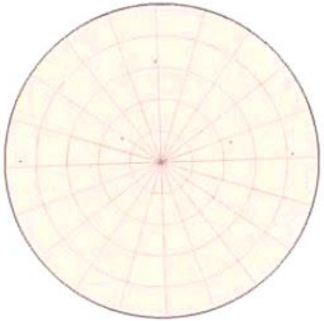
ТЕМА №6

Графи



Съдържание

Графи

История

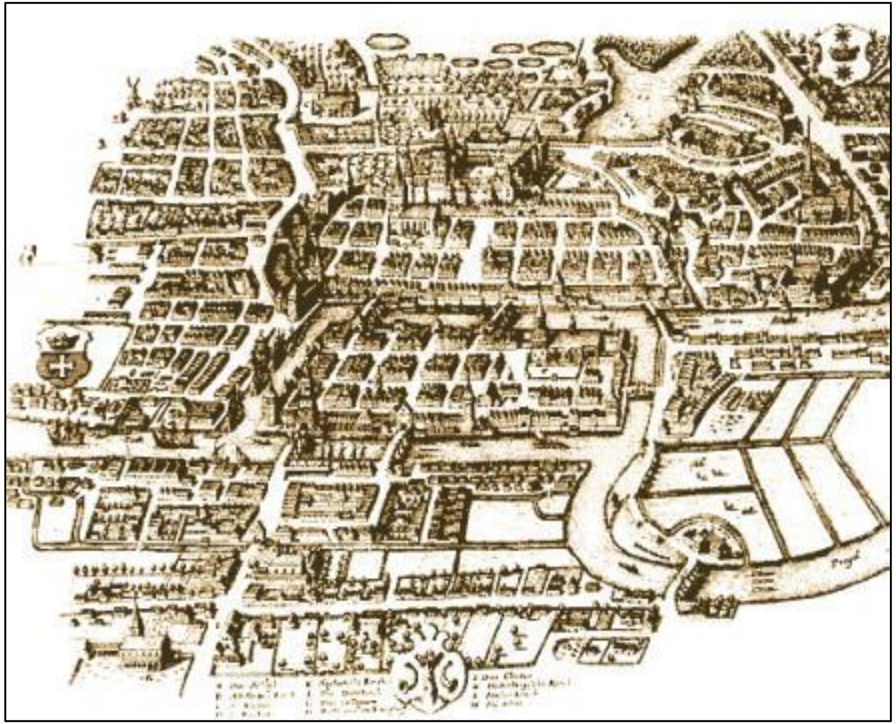
1736

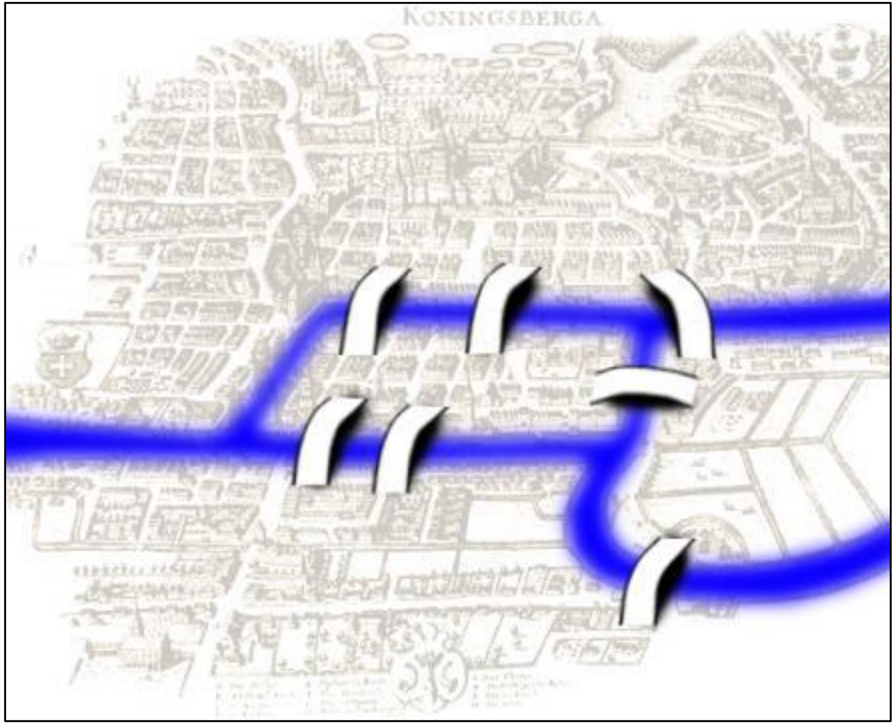
- Заражда се Теория на графите
- Статия на Ойлер

Първи академичен интерес

- Задачата за Кьонигсбергските мостове
- Може ли със затворен път да се мине през всички мостове точно по един път

7те моста на Кьонигсберг




KONINGSBERGA

Дефиниция

Дефиниция на граф

– Наредената двойка (V, E) от множество от върхове V и множество от ребра E, които ги свързват

Частни случаи:

– Списъци
– Дървета
– Многоъгълници

Допълнителни термини

Алтернативни имена

- Възли – състояния, върхове, точки, …
- Ребра – ръбове, линии, преходи, …

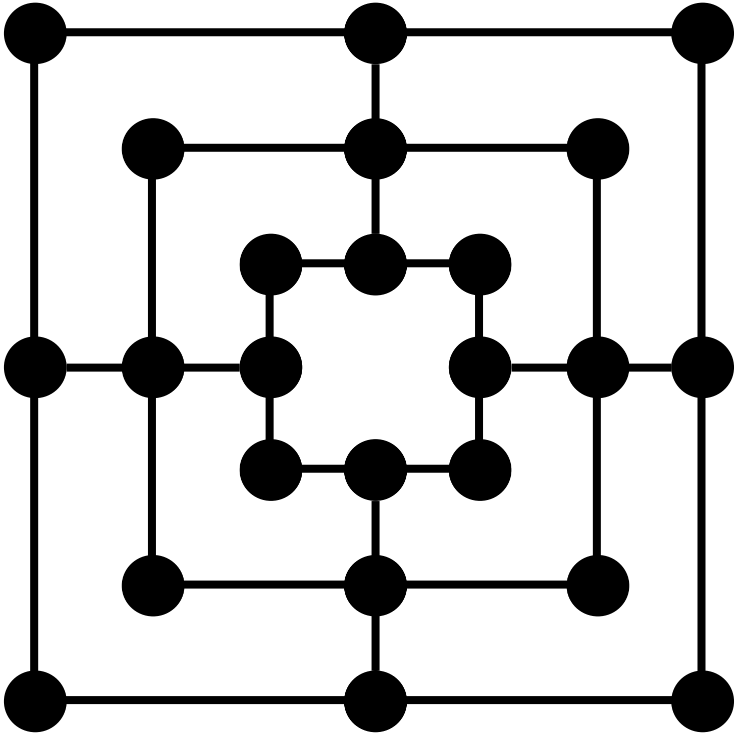
Път

- Поредица от върхове, свързани с ребра
- Цикъл – затворен път

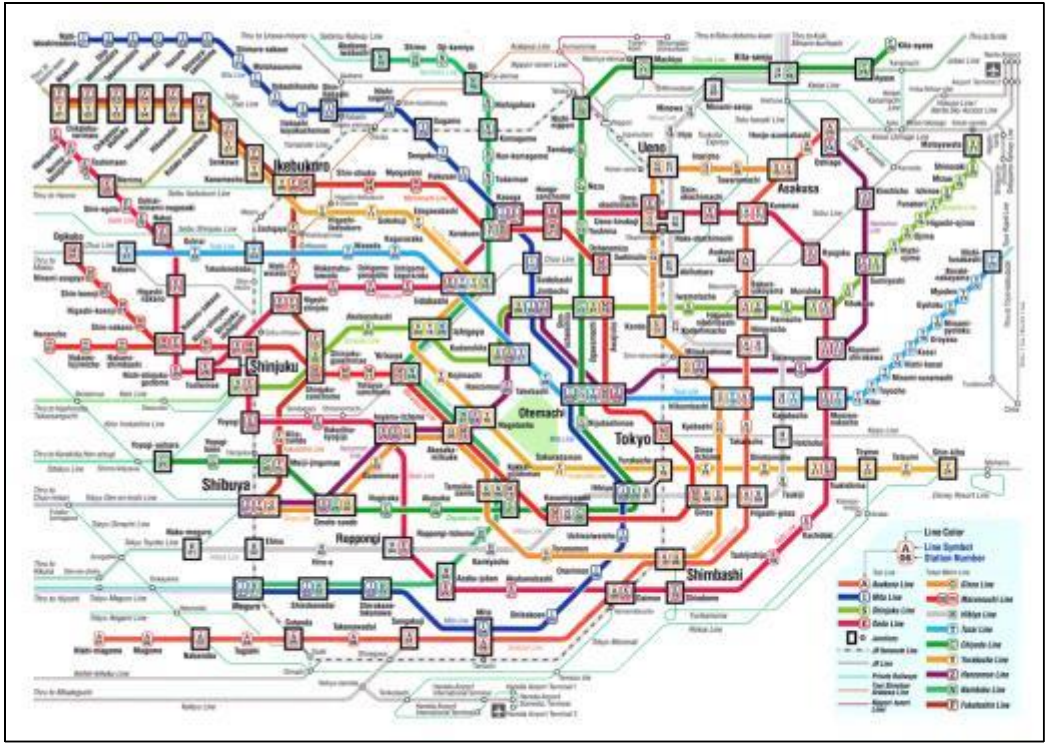
Степен (валентност)

- Брой ребра, свързващи възел

„Игра на дама“



Токийското метро

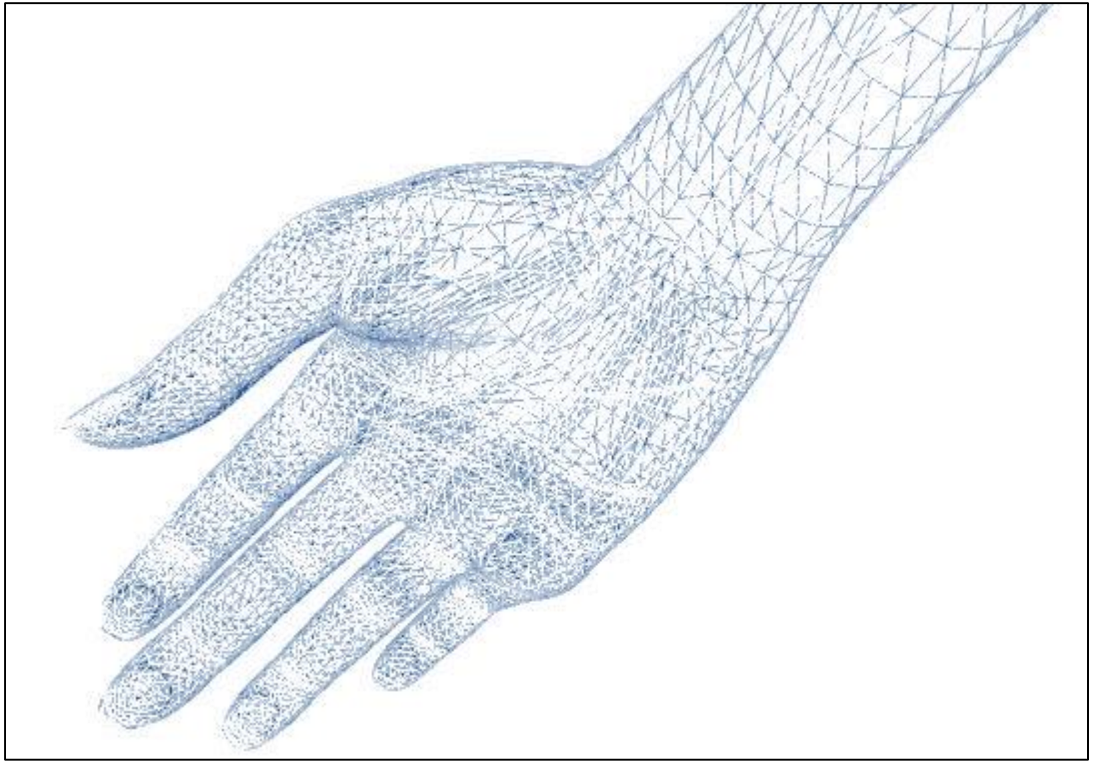


Карта на Токио от Bureau of Transportation, Tokyo Metropolitan Government

Центърът на София

Карта на София от http://www.bgmaps.com

Мрежест модел на длан



Използване

Използване на графи в КГ

- 3D модели чрез мрежи
- Състоянията и преходи на симулация
- Сцени в сложни игри
- Визуализиране на карти, маршрути

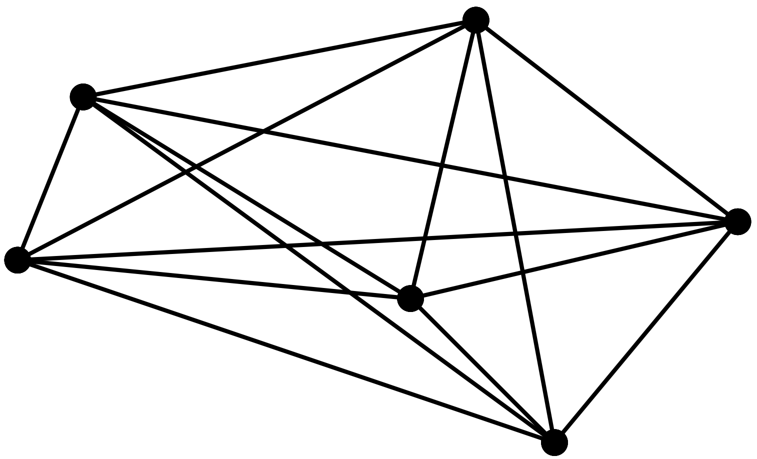
Класификация на графи

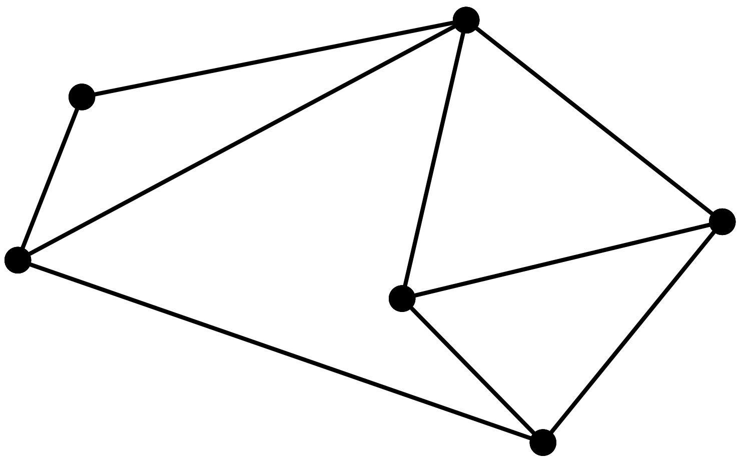
Класификации

Според конкретни характеристики

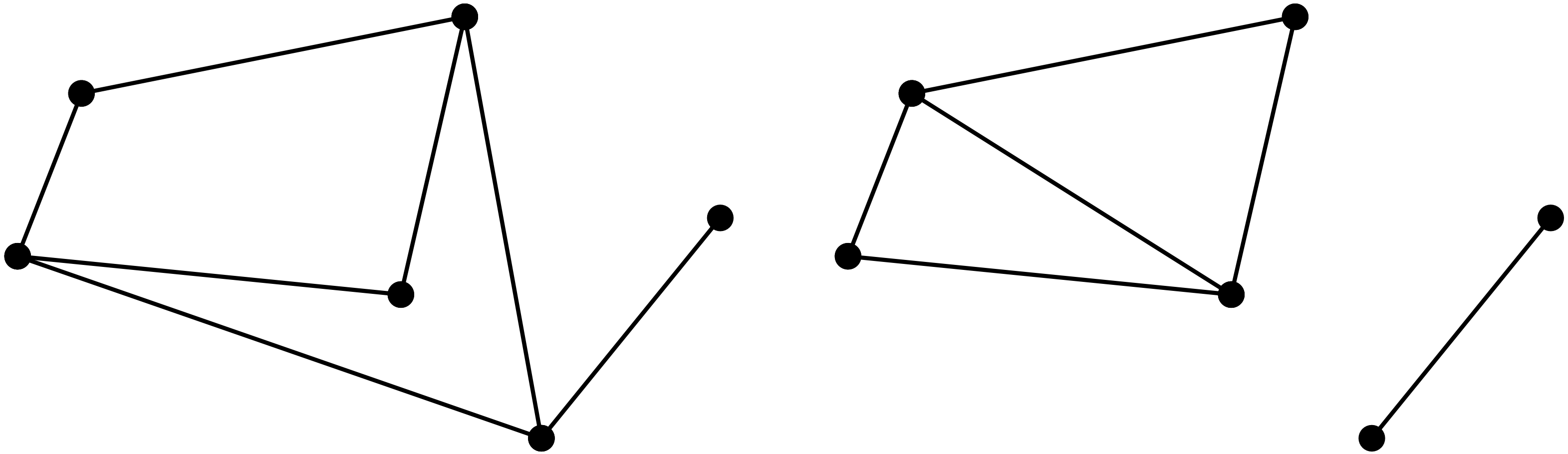
- Пълен и непълен
- Свързан и несвързан
- Ориентиран и неориентиран
- Симетричен и асиметричен
- Планарен (равнинен) и непланарен
- Претеглен и непретеглен

- **Пълен граф**
  (всеки два възела са пряко свързани)
- **Непълен граф**
  (някои възли не са пряко свързани)

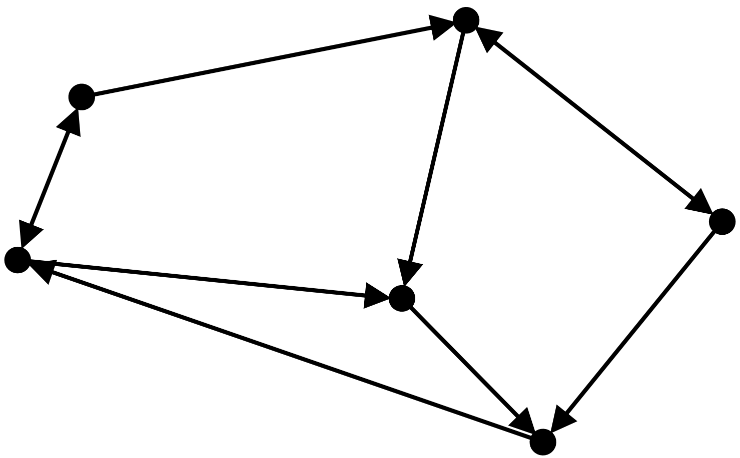


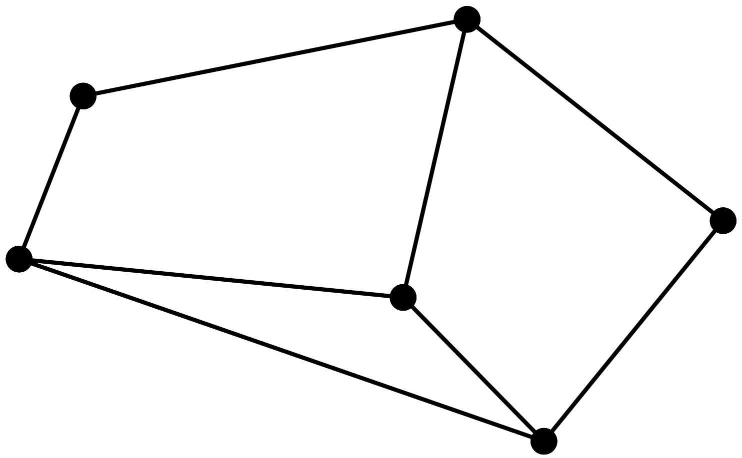


- **Свързан граф**
  (между всеки два възела има път)
- **Несвързан граф**
  (има възли без път между тях)



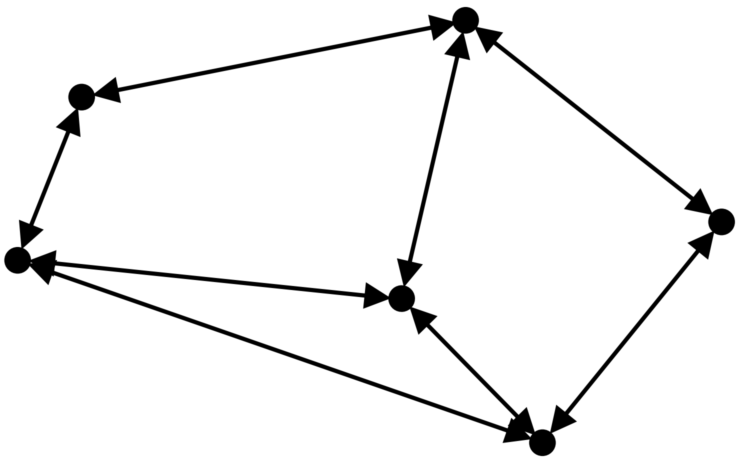
- Ориентиран граф
  (ребрата имат посока)
- Неориентиран граф
  (ребрата нямат посока)

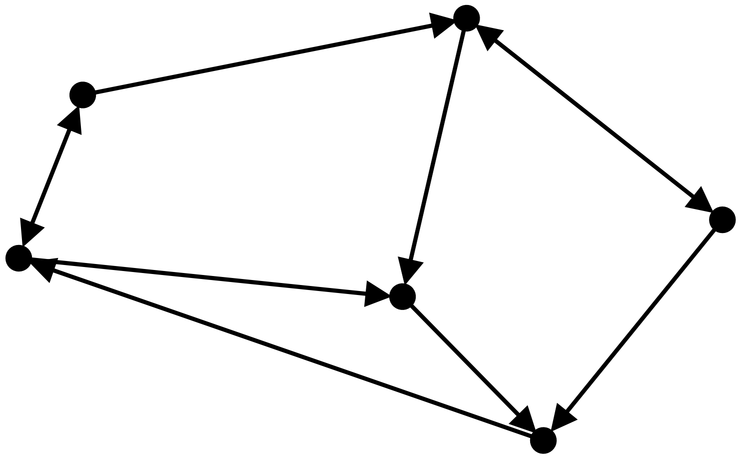




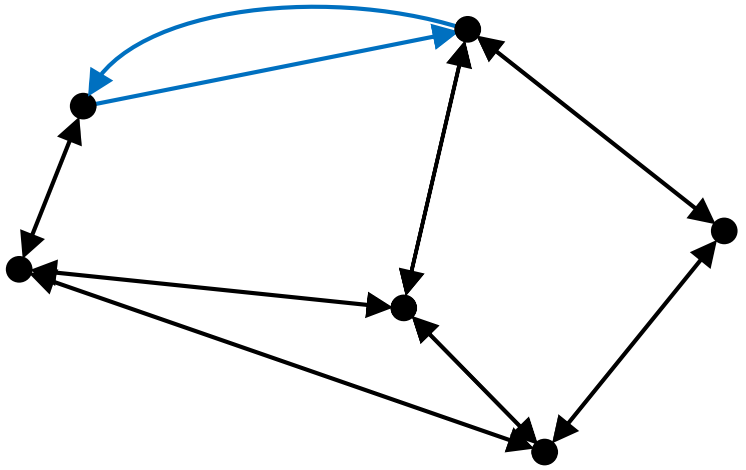
– **Симетричен граф**
(всички ребра са двупосочни)

– **Асиметричен граф**
(има възли, свързани само с едно еднопосочно ребро)



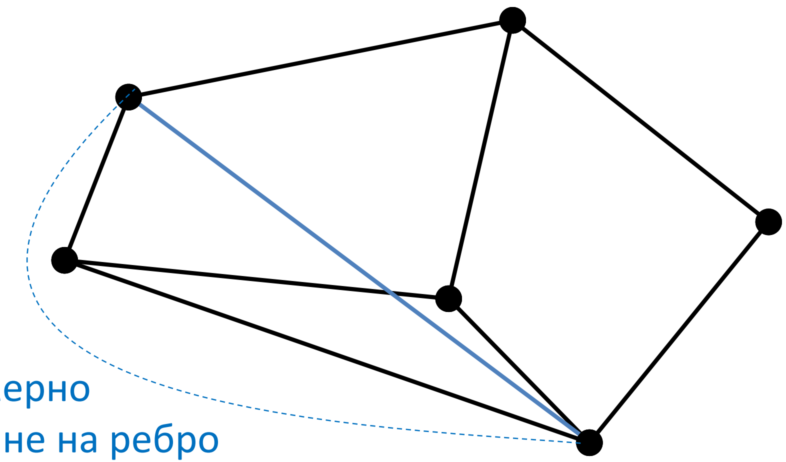


– Защо не трябва да се казва „някои ребра са еднопосочни“?

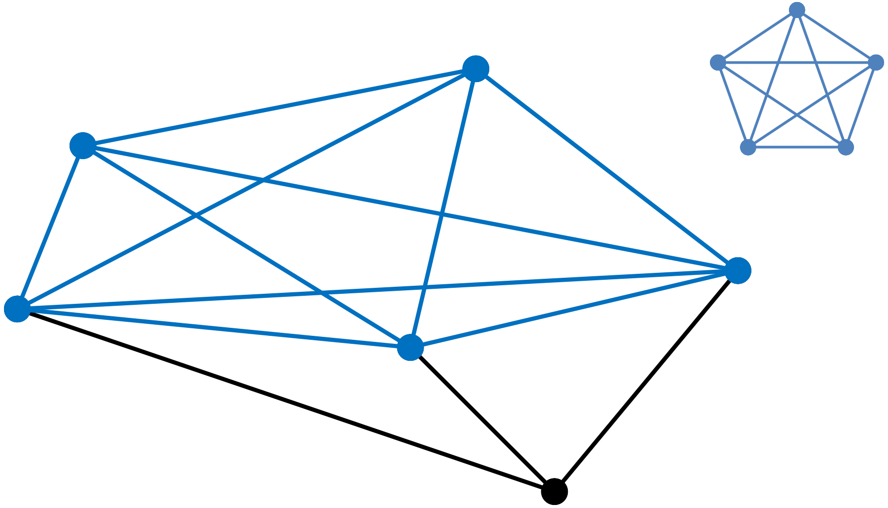


този граф
приемаме за
симетричен

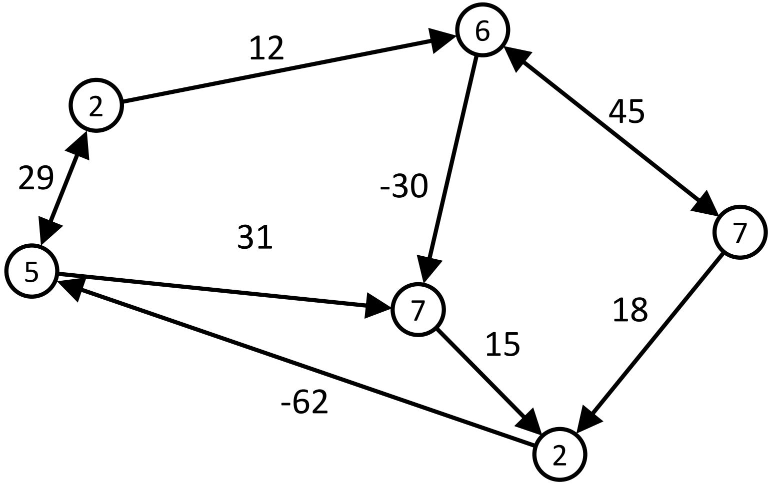
- **Планарен граф**
  (може да се нарисува в равнината без пресичане на ребра)
- **Непланарен граф**
  (не може)

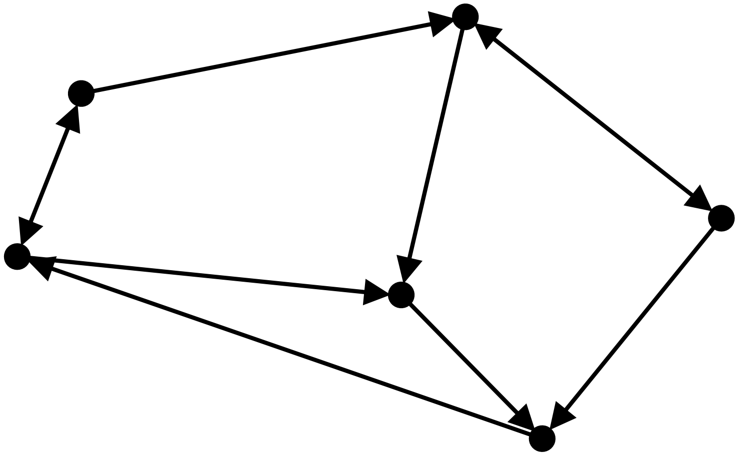


Примерно огъване на ребро



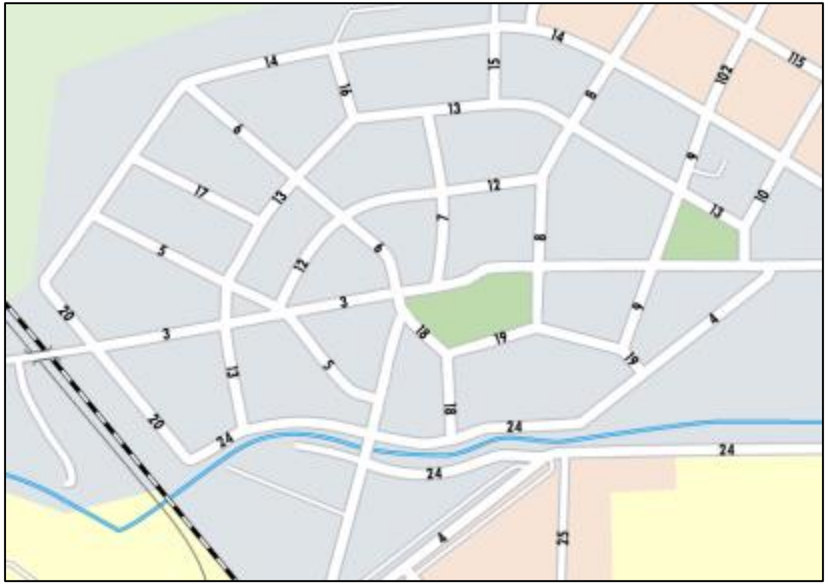
- **Претеглен граф**
  (ребрата и/или възлите имат „тегла“, „дължини“, „цени“)
- **Непретеглен граф**
  (няма „тегла“ или пък всички тегла са равни)

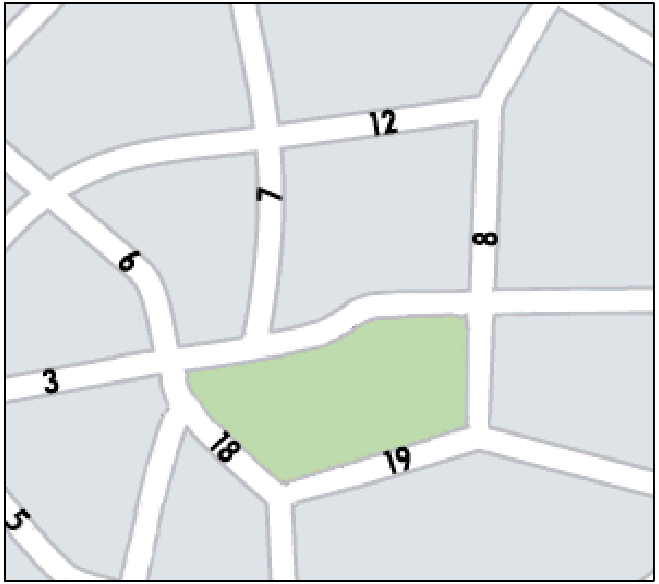




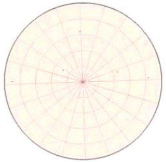
Внимание

- Не всеки граф с числа по ръбовете е претеглен
- Този по-долу е анотиран





Представяне на графи



Представяне на граф

Има различни представяния

- Най-доброто зависи от целите, за които ще се ползва
- Какви алгоритми ще се ползват
- Налични ресурси (памет и време)

Някои представяния са

- Чрез матрица на съседство
- Чрез двойно-свързани списъци

Матрица на съседство

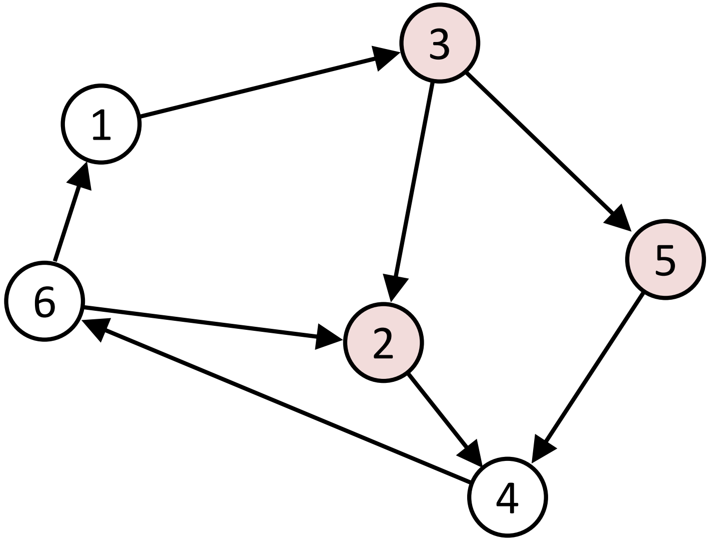
Имаме граф с n възела (т.е. $|V| = n$)

- Матрица възел-към-възел
- Записваме 1 при наличието на ребро
- Записваме 0 при липса на ребро

Свойства на представянето

- Еднородно и опростено представяне
- Непригодно за големи графи с много възли и ребра

Пример



$$
\begin{array}{cc}
 & \text{към} \\
 & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\
\begin{array}{c} \text{от } 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} &
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

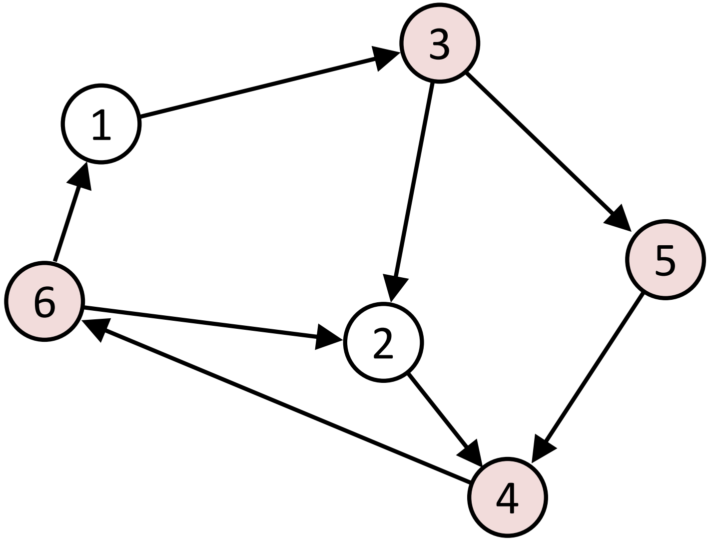
– От възел 3 има ребра към възли 2 и 5

Повдигаме на квадрат

– Да видим дали би станало нещо

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

– Е, станаха брой пътища с дължина 2



$$
\begin{array}{cc}
 & \text{към} \\
 & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\
\begin{array}{c} \text{от } 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} &
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & \mathbf{2} & 0 & \mathbf{0} \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

– От 3 до 4 има два различни пътя

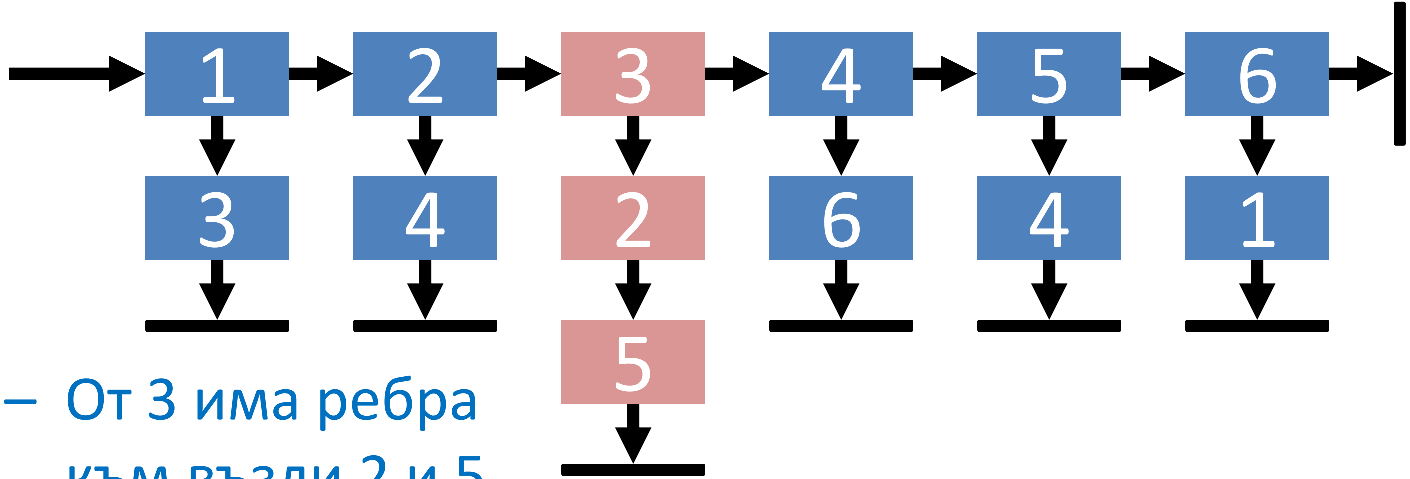
– От 3 до 6 няма път

– От 5 до 6 има единствен път

Второ представяне

Представяне на матрица на съседство

- Чрез масив (дори битов) е неудобно
- Използва се, че е силно разредена



- От 3 има ребра към възли 2 и 5

Други представяния

Списък на родителите

- За всеки възел се описват възлите, водещи до него

Списък на ребрата

- Списък от ребрата в произволен ред
- За всяко ребро се описва началния и крайния възел

- **Матрица на инцидентност**
  - Матрица възел-към-ребро
  - Описва кой връх на кое ребро е начало или край
- **Матрица на достижимост**
  - Матрица възел-към-възел
  - Записват се теглата на ребрата
- **Представените представяния**
  - Удобни за типичните задачи с графи
  - А те са?

Типични задачи с графи

(скучни са ни и не ни интересуват)

- Обхождане на граф в дълбочина или широчина
- Намиране на най-къс път между възли
- Минимално покриващо дърво
- Хамилтонов цикъл
  (обхождане еднократно на всички възли)
- Ойлеров път
  (обхождане еднократно на всички ребра)

Обаче

КГ поставя нови уникални задачи

- Трудно решими със стандартните модели на графи

Примерни нови задачи

- Включване на стени към мрежа
  (стена = полигон от ръбове в мрежа)
- Обхождане на мрежа
- Изглаждане на повърхност от мрежа

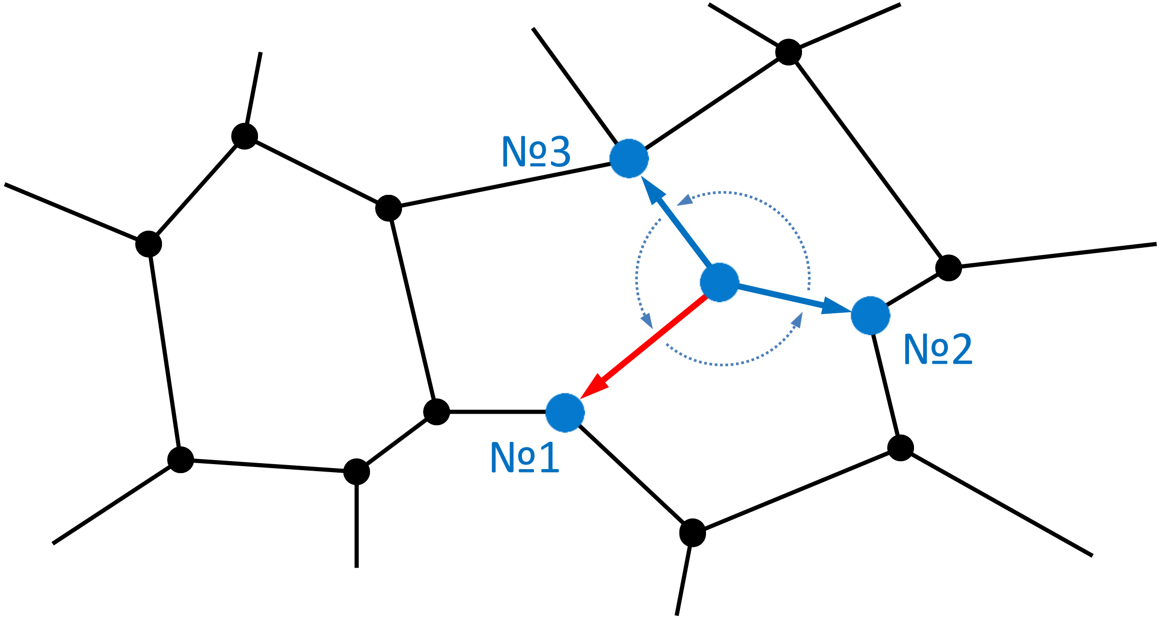
- **Някои от задачите в КГ**
  - Изискват ребрата да имат водеща роля
  - Изискват графът да е и множество от стени
  - Нужни са друг вид базови операции
- **КГ се интересува често от графи**
  - Които са непълни, свързани, неориентирани, локално планарни, непретеглени
  - Важно е пространственото положение
  - Важен е редът (поредността) на както на ребрата от връх, така и на ребрата на стена

Операции
с графи

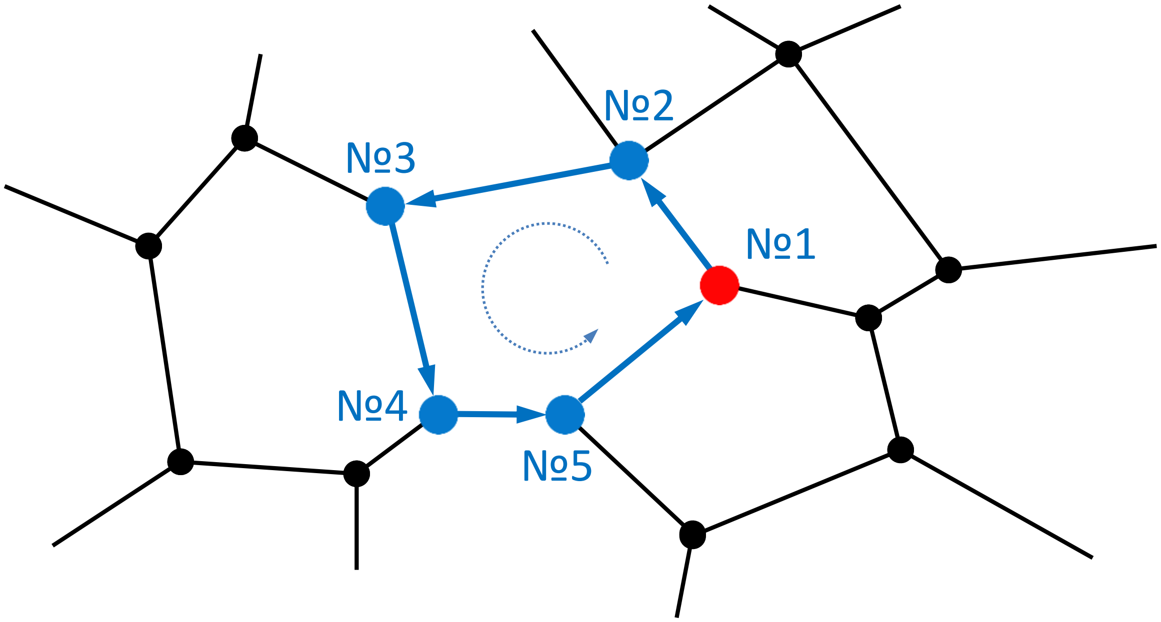
Операции с графи

Операции с графи в компютърната графика

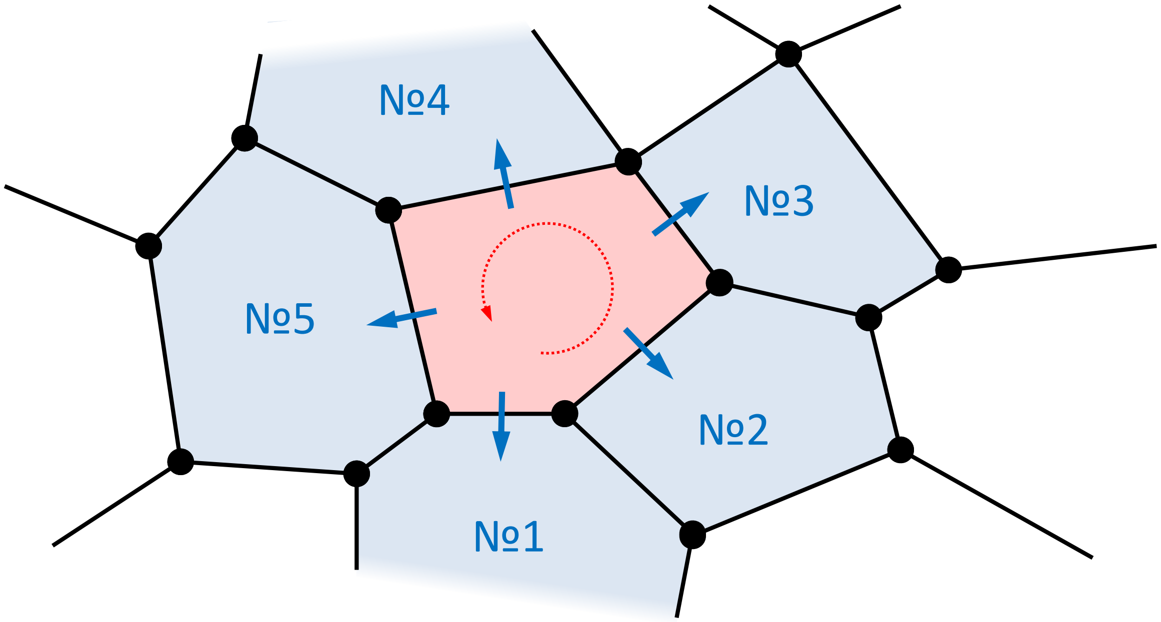
– Намиране на поредни съседни възли



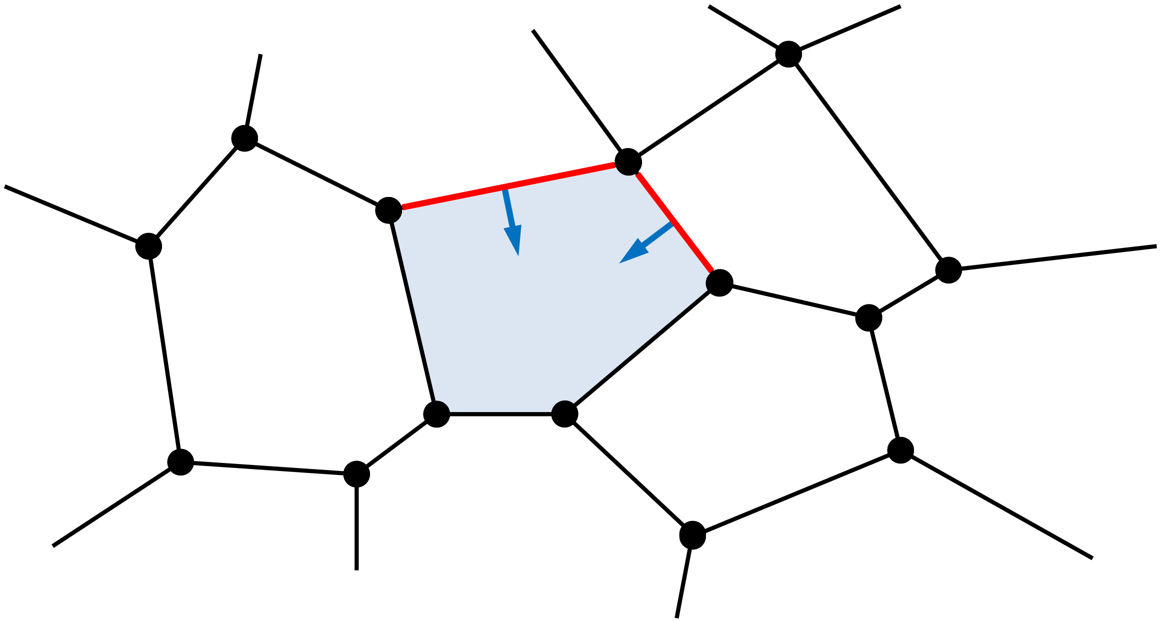
– Обхождане на възли от стена



– Намиране на съседни стени



– Намиране на стена по две съседни ребра



ДССР (DCEL)

абстрактна структура от данни

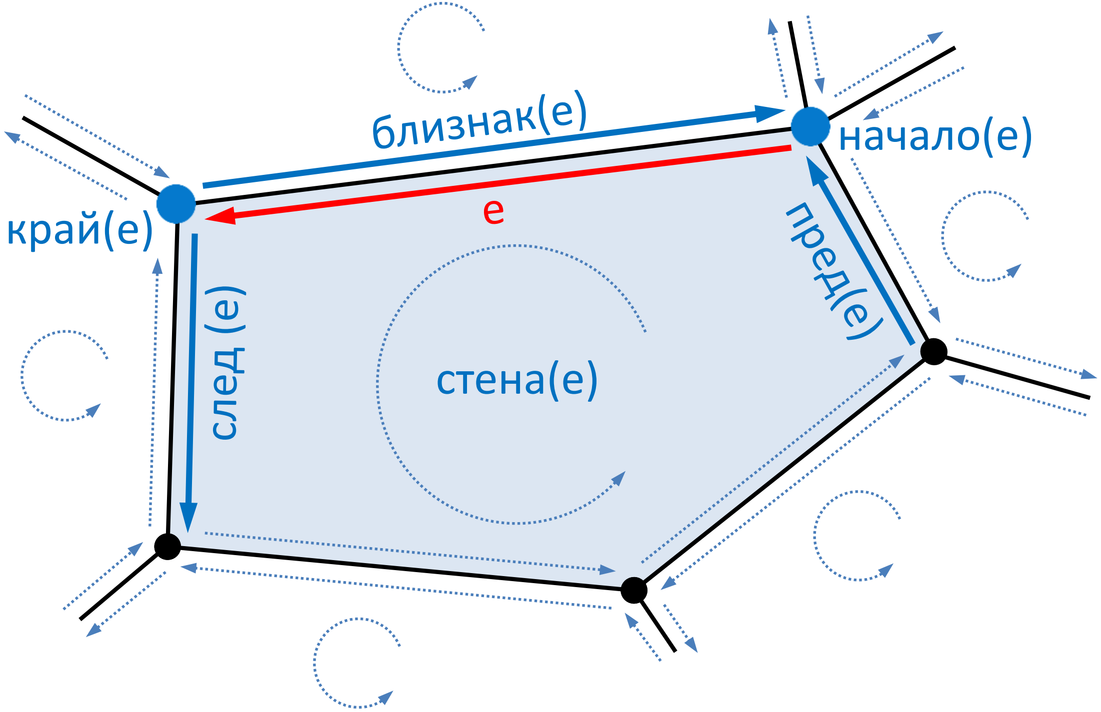
Нова структура от данни

Двойно свързан списък от ръбове

- DCEL (Doubly Connected Edge List)
- Възлите са свързани с двойка симетрични насочени ръбове (наричани **полуръбове**)
- Всяка стена се обхожда еднообразно или
- Всеки полуръб е към единствена стена
- За всеки полуръб може да се извлече допълнителна информация

Нови функции

– Съществуването им е част от ДССР
– Реализацията им не е част от ДССР



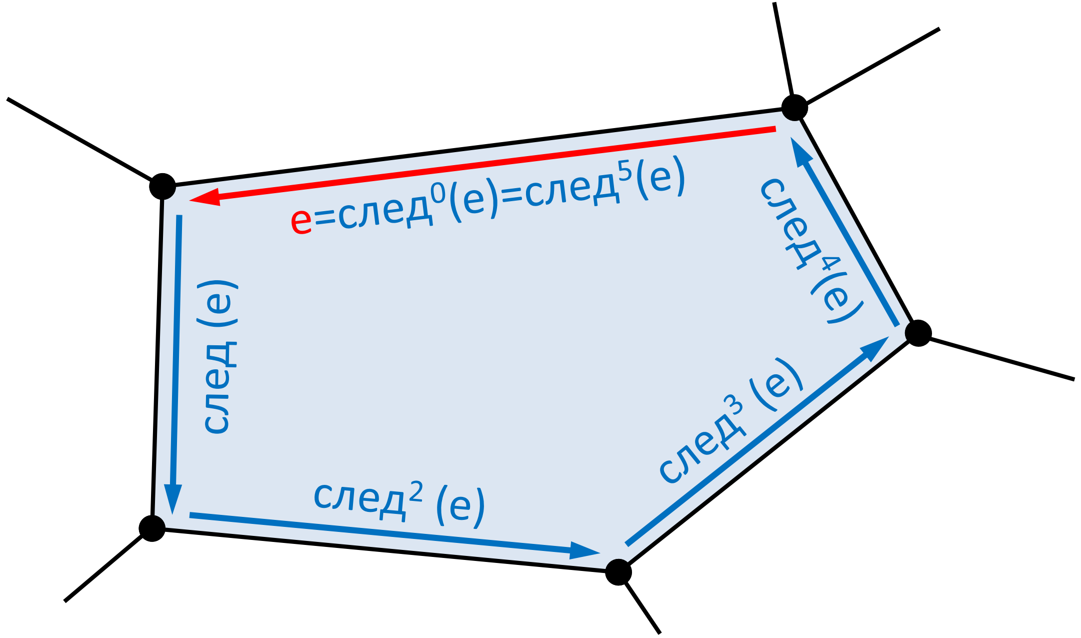
Примерно използване

Задачи с ДССР

- Намиране периметър на стена
- Намиране на две съседни стени
- Намиране на гранични полуръбове
- Обхождане на стени около възел

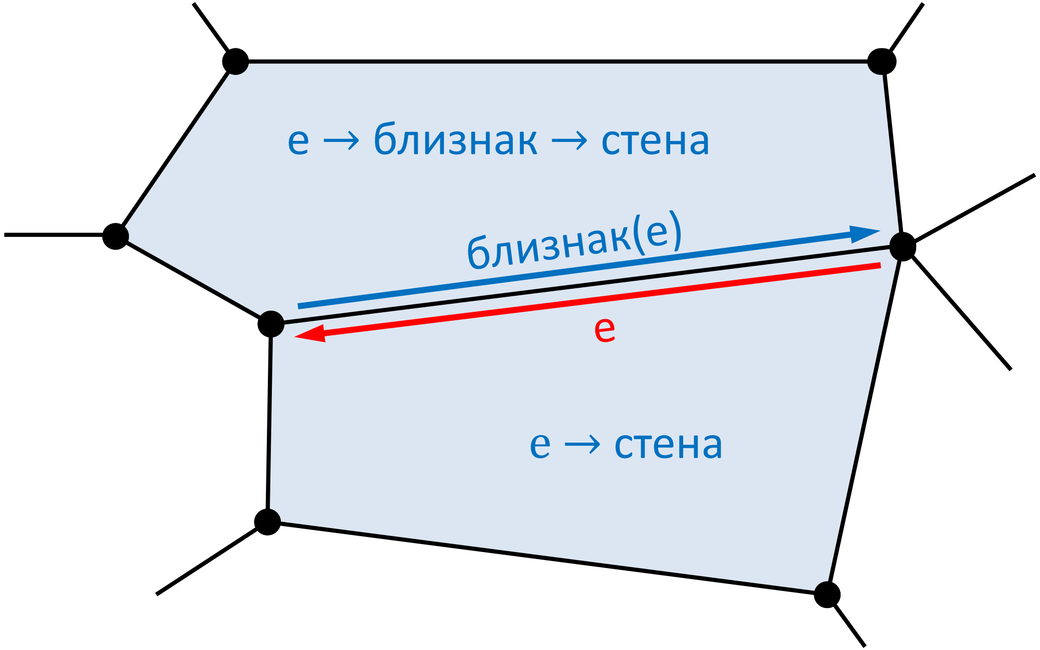
Периметър на стена

– Започваме от зададен полуръб e
– Следваме e → след → след → … → e



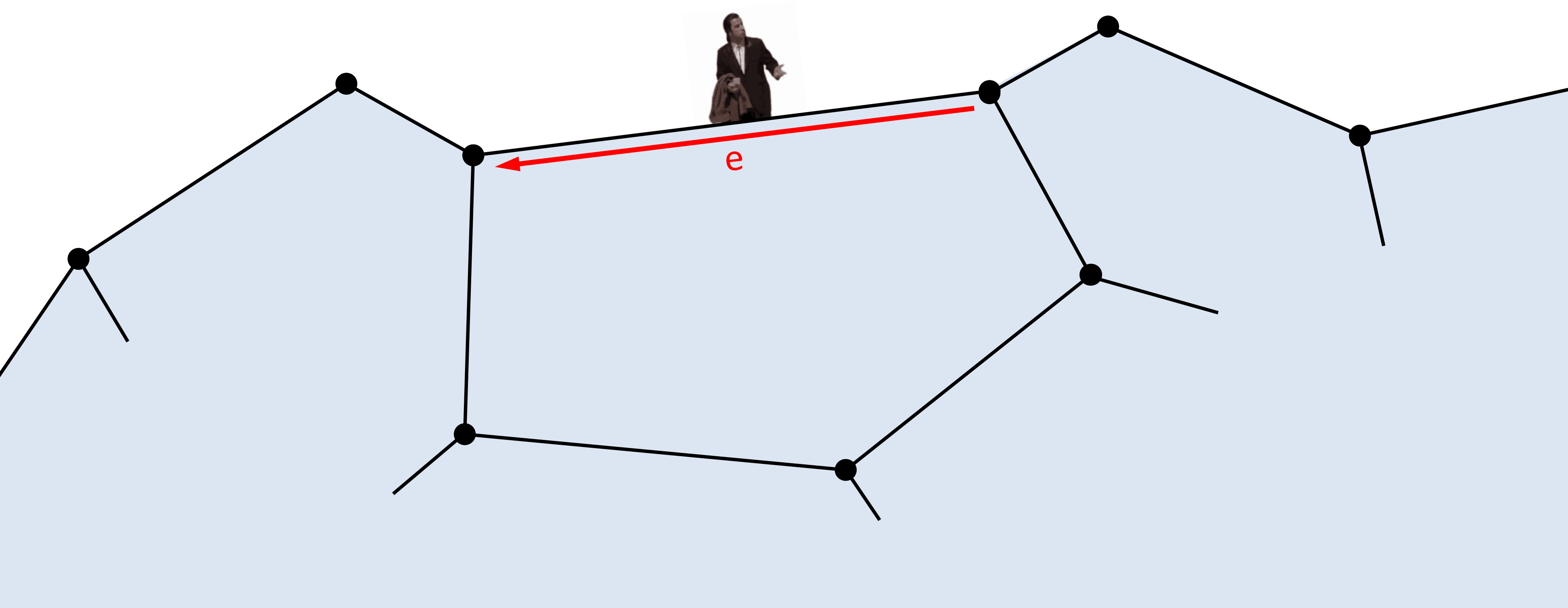
Съседни стени

- Първа стена: e → стена
- Съседна стена: e → близнак → стена



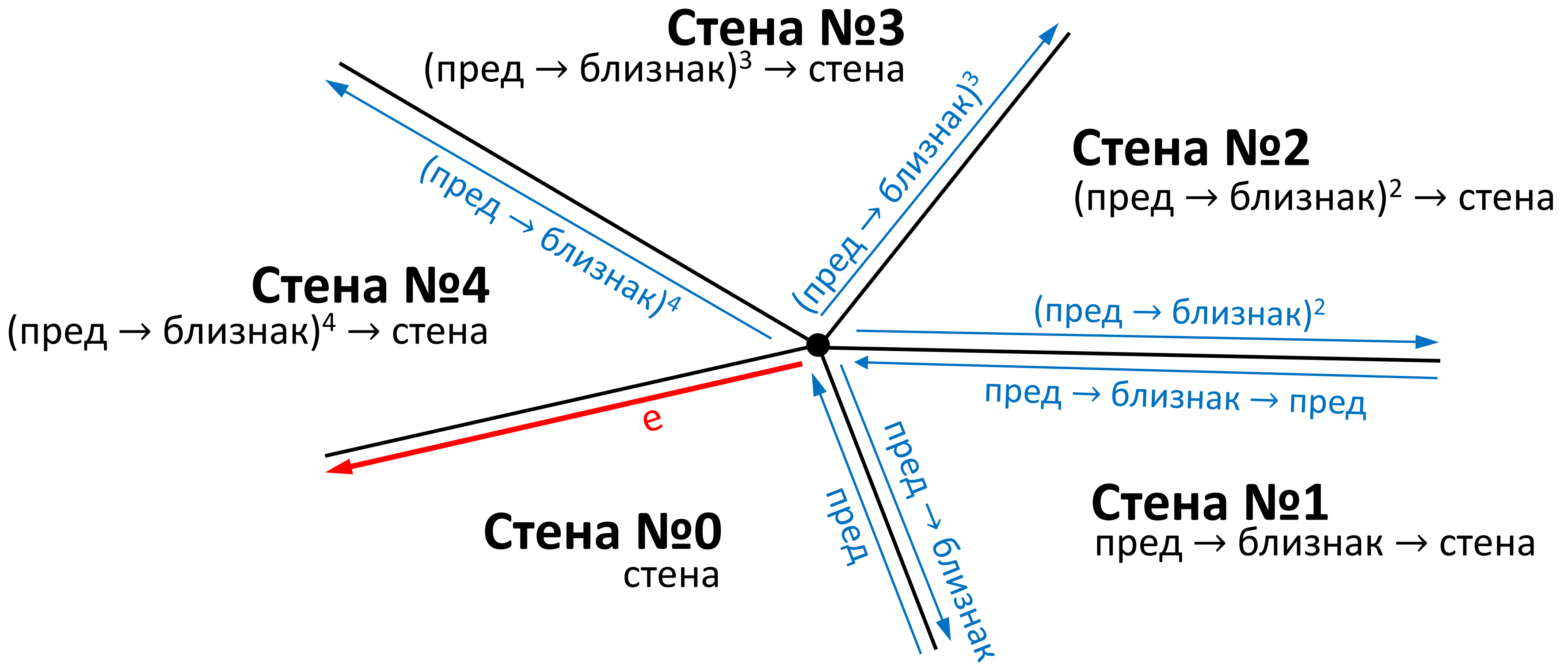
Граничен полуръб

- Полуръбове, отвъд които няма мрежа
- Липсва e → близнак



Обхождане на стени около възел

– Чрез обхождане на полуръбовете



Въпроси?

Повече информация

[**AGO2**] стр. 199-203
[**GRIM**] стр. 513-516, 533-534
[**KLRO**] стр. 125-130
[**MORT**] стр. 219-221

А също и:

- The Winged-Edge Data Structure
  http://www.cs.mtu.edu/~shene/COURSES/cs3621/NOTES/model/winged-e.html

Край