Тема 30

Итерационни методи за решаване на нелинейни уравнения

Голяма част от методите за приближено пресмятане на корените на уравнения са итерационни. При тях се тръгва от някакво приближение x_0 и след извършването на итерация се намира следващото приближение x_1. Въз основа на x_0 и x_1 се намира x_2 и т.н. Построява се редица $x_0, x_1, \dots, x_n$, която клони към корена ξ на уравнението $f(x)=0$.

def/ Изображение в себе си

Казваме, че φ е изобр. на $[a;b]$ в себе си, ако $\varphi(x) \in [a;b]$ за $\forall x \in [a;b]$. Озн.: $\varphi : [a;b] \to [a;b]$.

def/ Неподвижна точка

Една точка α е неп. точка за ф-я φ, ако $\varphi(\alpha)=\alpha$.

def/ Итерационен метод

Нека $f(x)=0$, f е деф. в/у $\mathbb{R}$.

$\xi \in (a;b)$ е единст. корен в $(a;b)$ на $f(x)=0$

$f(x)=0 \iff x=\varphi(x)$ // изр. x чрез себеси.

$x_0 \in [a;b]$ - нач. прибл.

$x_{n+1} = \varphi(x_n)$, $n=0,1,\dots$

Лема Th на Брауер /

Ако φ е непрек. изобр. на $[a;b]$ в $[a;b]$, то φ има поне една неподвижна точка.

Д-во:/ Нека $\varphi : [a;b] \to [a;b]$ е непрек. Ако $\varphi(a)=a$ или $\varphi(b)=b$, то a или b е неп. точка. Нека $\varphi(a) \neq a$ и $\varphi(b) \neq b$. Тъй като φ е изобр. в себе си, то $\varphi(a) \in (a;b]$ и $\varphi(b) \in [a;b)$ т.е. $a < \varphi(a)$ и $\varphi(b) < b$. Нека $r(x) := x - \varphi(x)$ пак непр. в/у $[a;b]$

Имаме, че $r(a) = a - \varphi(a) < 0$, а $r(b) = b - \varphi(b) > 0$.

По Th на Ферма гласяща, че ако непрек. ф-я в краищата на интервала има противоположни знаци, то тя пресича в него някъде абсцисата $\Rightarrow \exists \xi \in (a;b)$: $r(\xi)=0$ т.е. $\varphi(\xi)=\xi$

def/ Липшицова ф-я

φ е липшицова в $[a;b]$, ако $\exists L>0$:

$$|\varphi(x)-\varphi(y)| \le L.|x-y|, \forall x,y \in [a;b].$$

* за $L<1 \Rightarrow$ свиващо.
* Липшицовост $\Rightarrow$ непрекъснатост.

def/ Свиващо изображение

Нека $\varphi \in C[a;b]$. φ се нарича свив. изобр. с константа $q \in (0;1)$, ако:

1) $\varphi([a;b]) \subset [a;b]$ // стесняване на инт.

$\frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|}{|x-y|} \le q \Leftrightarrow$ 2) $|\varphi'(x)| \le q, \forall x \in [a;b]$ // разстоянието м/у праобразите е по-голямо от това м/у образите

Th// Ако $\varphi:[a;b] \to [a;b]$ е непрек. изобр. и е свиващо с константа на Липшиц $q \in (0;1)$, то:

a) φ притежава единствена неп. точка $\xi \in [a;b]$

/ур-ето $x=\varphi(x)$ има единств. корен $\xi \in [a;b]$./

b) При всеки избор на нач. прибл. $x_0 \in [a;b]$ редицата $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ получено по формулата $x_{n+1}=\varphi(x_n)$ за $n=0,1,\dots$ е сходяща към неп. точка ξ и

$$|x_n-\xi| \le q^n.(b-a) \text{ за } \forall n \in \mathbb{N}_0$$

Д-во// a) $\exists$) Нека $r(x) := x-\varphi(x)$. непр. в $[a;b]$.

Имаме, че $r(a) \le 0$, а $r(b) \ge 0$. Ако $r(a)=0$ или $r(b)=0$, то $\xi=a$ или $\xi=b$. Нека $r(a) \ne 0$ и $r(b) \ne 0$. Тогава т.к. в двата разл. знаци на функ. ст-ти в краищата на инт. и r е непр. в него, то $\exists \xi \in (a;b)$: $r(\xi)=0$ или $\varphi(\xi)=\xi$

!) Доп., че $\xi_1 \ne \xi_2$ са неп. точки за φ в $[a;b]$.

Тогава $|\xi_1-\xi_2| = |\varphi(\xi_1)-\varphi(\xi_2)| \underset{\text{лип}}{\le} q.|\xi_1-\xi_2| \underset{q<1}{<} |\xi_1-\xi_2|$

Абсурд!

b) С индукция по n се доказва, че $x_0 \in [a;b]$, то $x_1 \in [a;b], \dots, x_n \in [a;b]$, - от това, че е свиващо т.е $x_{n+1} = \varphi(x_n) \in [a,b]$ за $\forall n \in \mathbb{N}_0$.

Сходимостта следва от:

$$|x_n - \xi| = |\varphi(x_{n-1}) - \varphi(\xi)| \leq q |x_{n-1} - \xi| \leq q^2 |x_{n-2} - \xi| \leq \dots$$
$$\leq q^n |x_0 - \xi| \leq q^n (b-a) \quad \blacksquare$$

Следствие/

Ако ξ е корен на ур-ето $\varphi(x) = x$ и φ има неп. производна в околност U на т. ξ, за която $|\varphi'(\xi)| < 1$, то при достатъчно добро нач. прибл. x_0, итер. процес ~~има~~ поражда(?) е със скорост на сходимост съизмерима с тази на геометрична прогресия т.е

$$|x_n - \xi| \leq c.q^n, \; c > 0, \; q \in (0;1), \; n \in \mathbb{N}_0.$$

Д-во:/ Нека $\varphi'(x)$ е непр. в околност U на ξ. Тогава $\exists \varepsilon > 0 : |\varphi'(x)| < 1, \; \forall x \in \underbrace{[\xi - \varepsilon; \xi + \varepsilon]}_{\Delta\varepsilon}$

От неп. на $\varphi'(x)$, то $q := \max\limits_{x \in \Delta x} \{ |\varphi'(x)| < 1 \}$

φ удовл. усл. на Липшиц в $\Delta\varepsilon$ с $q < 1$. Остава да покажем, че $\varphi : \Delta\varepsilon \to \Delta\varepsilon$.

Нека $x_0 \in \Delta\varepsilon$. Тогава $|\varphi(x_0) - \xi| = |\varphi(x_0) - \varphi(\xi)| \overset{\text{Th Лагранж}}{=}$

$$= |\varphi'(\theta).(x_0 - \xi)| \leq q . |x_0 - \xi| \leq q . \varepsilon \overset{q<1}{<} \varepsilon.$$

$|\varphi'(\theta)| \leq q < 1$ т.е. $\varphi(x) \in \Delta\varepsilon$. $\blacksquare$

def/ Казваме, че итер. процес $x_{n+1} = \varphi(x_n), \; n = 0, 1, \dots$ има рез на сходимост p, ако $\exists c > 0, \; q \in (0;1)$ т.че

$$|x_n - \xi| \leq c . q^{p^n}, \; \forall n \in \mathbb{N}_0 \quad \text{/* faster than geometrical}$$

Следните условия са в сила при описанието на методите нагоду:

1) $f(x)$ е два пъти диферен. в $[a;b]$

2) $f(a).f(b)<0$ /гарантира съществуване на корен на f в $[a;b]$ /

3) $f'(x).f''(x) \neq 0, \forall x \in [a;b]$.

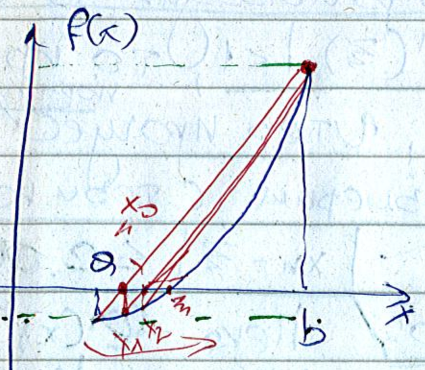
/гарантира, че той е единствен корен за f в $[a;b]$, понеже, че f е строго мон. ф-я и освен това, ако $f''(x)>0$, то f е изпъкнала, иначе е вдлъбната. Една мон. ф-я пресича Ox само в 1 точка т.е. корена е единствен /

Метод на хордите

Нач. точка $x_0 \in [a;b]$ е т.ч.

$f'(x_0).f''(x_0) < 0$

Другата е стационарна (фикс.).



$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n).(b-x_n)}{f(b)-f(x_n)}$$

$n \in \{0,1,\ldots\}$

Има скорост на сходимост на геом. прогресия

$|x_n - \xi| \leq c.q^n \; \forall n \in \mathbb{N}$

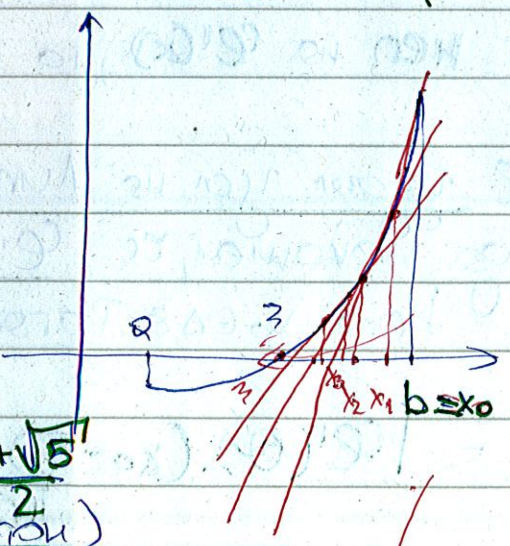
Метод на секущите

Нач. точка $x_0 \in [a;b]$ т.ч.

$f'(x_0).f''(x_0) > 0$ и

избираме x_1 близо до x_0 т.ч.

$f'(x_1).f''(x_1) > 0$.



$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n).(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

$n \in \{1,2,\ldots\}$

Има ред на сходимост $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

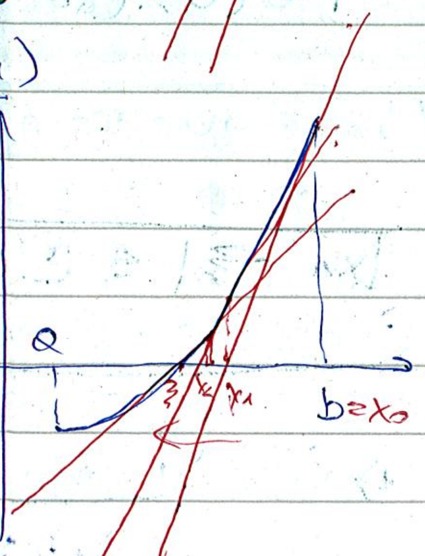
Метод на допирателните (Нютон)

Нач. точка $x_0 \in [a;b]$ т.ч.

$f'(x_0).f''(x_0) > 0$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

$n \in \{0,1,\ldots\}$



Има ред на сходимост $p = 2$

Най-бърз

Т8// Методът на хордите има скорост на сходимост на геометрична прогресия при условие, че коренът е отделен в достатъчно малък интервал

Д-во / Достатъчно е да док., че $|\varphi'(\xi)| < 1$ за $\varphi(x_n) = x_{n+1}$.

За дано X $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n).(b-x_n)}{f(b)-f(x_n)}$

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x).(b-x)}{f(b)-f(x)}$$

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{f'(x).(b-x)}{f(b)-f(x)} - f(x).\left(\frac{b-x}{f(b)-f(x)}\right)'$$

За $x = \xi$, то $f(\xi) = 0$

$$\varphi'(\xi) = 1 - \frac{f'(\xi).(b-\xi)}{f(b)} = \frac{f(b) - f'(\xi)(b-\xi)}{f(b)}$$

Нека развием числ. $f(b)$ и знам. $f(b)$ по ф-лата на Тейлър (f е поне 2 пъти диференц.) в т. ξ.

за числ. $f(b) = \underbrace{f(\xi)}_{0} + \dfrac{f'(\xi).(b-\xi)}{1!} + \dfrac{f''(\eta_1)(b-\xi)^2}{2!}$

за знам. $f(b) = \underbrace{f(\xi)}_{0} + \dfrac{f'(\eta_2)(b-\xi)^1}{1!}$

за $\eta_1, \eta_2 \in (a; b)$.

$$\varphi'(\xi) = \frac{\cancel{f'(\xi).(b-\xi)} + \dfrac{f''(\eta_1).(b-\xi)^{\cancel{2}}}{2} - \cancel{f'(\xi)(b-\xi)}}{f'(\eta_2).\cancel{(b-\xi)}} =$$

$$= \frac{f''(\eta_1).(b-\xi)}{2.f'(\eta_2)}$$ и

$$|\varphi'(\xi)| = \left|\frac{f''(\eta_1).(b-\xi)}{2.f'(\eta_2)}\right| < 1$$ за b дост. близо до ξ.