① Упражнение 19 за 1, 2 и 3 група

Опр. 1 Нека $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ е множество, симетрично спрямо 0 и $f: \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$. Казваме, че:

а) $f(x)$ е четна, ако $f(-x) = f(x)$ за $\forall x \in \mathcal{D}$;

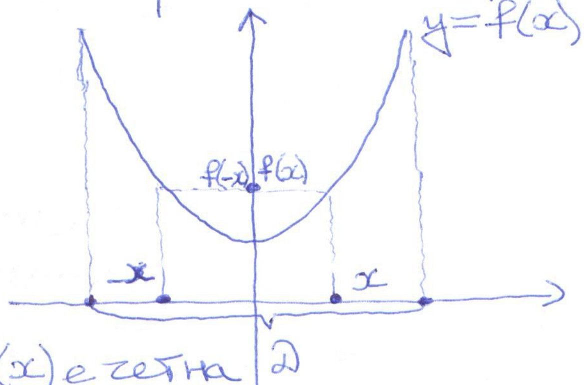
б) $f(x)$ е нечетна, ако $f(-x) = -f(x)$ за $\forall x \in \mathcal{D}$.

Забележка: Ако $f(x)$ е нечетна и $0 \in \mathcal{D}$, то $f(0) = 0$ (защото $f(-0) = -f(0)$, т.е. $2f(0) = 0$).

Ясно е, че:

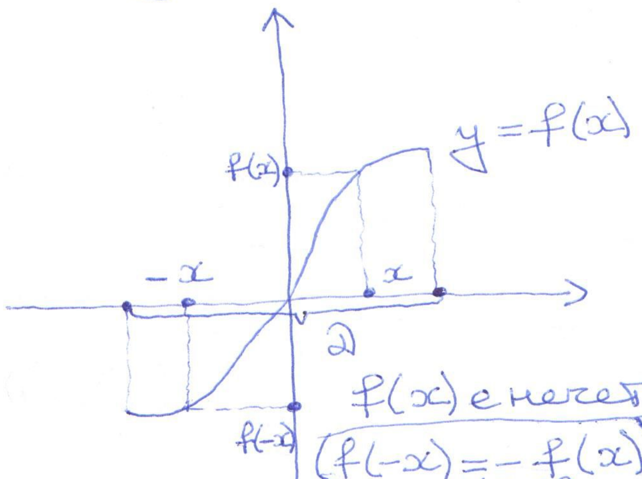
1) $f(x)$ е четна $\Leftrightarrow$ графиката на $f(x)$ е симетрична спрямо ординатната ос;

2) $f(x)$ е нечетна $\Leftrightarrow$ графиката на $f(x)$ е симетрична спрямо координатното начало.



$f(x)$ е четна

$f(-x) = f(x)$ за $\forall x \in \mathcal{D}$



$f(x)$ е нечетна

$f(-x) = -f(x)$ за $\forall x \in \mathcal{D}$

Например $\cos x$ и x^{2n} са четни функции, а $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$ и x^{2n+1} са нечетни функции.

Опр. 2 Казваме, че функцията $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ е периодична, ако съществува $T > 0$, такова че $f(x+T) = f(x)$ за $\forall x \in \mathbb{R}$. Числото T се нарича период на $f(x)$.

Например $\sin x$ и $\cos x$ са 2π-периодични функции, а $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{cotg} x$ са π-периодични функции.

(2) Зад. 1 Док. че производната на четна функция е нечетна функция, производната на нечетна функция е четна функция, а производната на T-периодична функция е пак T-периодична функция.

Решение: Нека $D \subset \mathbb{R}$ е симетрично спрямо 0 и $f: D \to \mathbb{R}$.

Ако $f(x)$ е четна, то $f(-x) = f(x)$ в D и, диференцирайки, получаваме, че $-f'(-x) = f'(x)$ в D, т.е. че $f'(x)$ е нечетна.

Ако $f(x)$ е нечетна, то $f(-x) = -f(x)$ в D и, диференцирайки, получаваме, че $-f'(-x) = -f'(x)$ в D, т.е. че $f'(x)$ е четна.

Ако пък $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е T-периодична, то $f(x+T) = f(x)$ в $\mathbb{R}$ и, диференцирайки, получаваме, че $f'(x+T) = f'(x)$ в $\mathbb{R}$, т.е. че $f'(x)$ е T-периодична.

Опр. 3 Производната на първата производна на $f(x)$ (ако съществува) се нарича втора производна на $f(x)$ и се означава с $f''(x)$, т.е. по определение $f''(x) = (f'(x))'$. По-общо производната на n-тата производна на $f(x)$ (тук $n \in \mathbb{N}$) (ако съществува) се нарича $(n+1)$-ва производна на $f(x)$ и се означава с $f^{(n+1)}(x)$, т.е. по определение $f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x)\right)'$.

Формула на Лайбниц:

$$(f.g)^{(n)} = \binom{n}{0} f^{(n)}.g + \binom{n}{1} f^{(n-1)}.g' + \binom{n}{2} f^{(n-2)}.g'' + \dots$$

$$\dots + \binom{n}{n-1} f'.g^{(n-1)} + \binom{n}{n} f.g^{(n)}$$

$(n \in \mathbb{N})$ (доказва се с индукция по n)

3 Зад. 2 Нека $y(x)=\underbrace{\frac{1}{(x-4)(x+6)}}_{f(x)}+\underbrace{x^9e^x}_{g(x)}+\underbrace{x^8e^{x^2}\sin x}_{h(x)}$.

Пресметнете $y^{10}(0)$.

Решение: $y^{(10)}(0)=f^{(10)}(0)+g^{(10)}(0)+h^{(10)}(0)$.

$$f(x)=\frac{1}{10}\,\frac{(x+6)-(x-4)}{(x+6)(x-4)}=\frac{1}{10}\left(\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x+6}\right)=$$

$$=\frac{1}{10}\left[(x-4)^{-1}-(x+6)^{-1}\right].$$

$$f'(x)=\frac{1}{10}\left[(-1)(x-4)^{-2}-(-1)(x+6)^{-2}\right]$$

$$f''(x)=\frac{1}{10}\left[(-1)(-2)(x-4)^{-3}-(-1)(-2)(x+6)^{-3}\right]$$

$$\cdots\cdots$$

$$f^{(10)}(x)=\frac{1}{10}\left[(-1)(-2)\ldots(-10)(x-4)^{-11}-(-1)(-2)\ldots(-10)(x+6)^{-11}\right]$$

$$f^{(10)}(0)=\frac{1}{10}\left[10!\,(-4)^{-11}-10!\,(6)^{-11}\right],\text{ т.е.}$$

$$f^{(10)}(0)=-9!\left(\frac{1}{4^{11}}+\frac{1}{6^{11}}\right)$$

По формулата на Лайбниц

$$g^{(10)}(0)=\binom{10}{0}\underbrace{(x^9)^{(10)}}_{0}\cdot e^x\Big|_{x=0}+\binom{10}{1}\underbrace{(x^9)^{(9)}}_{9!}\cdot\underbrace{(e^x)'}_{e^x}\Big|_{x=0}+$$

$$+\binom{10}{2}\underbrace{(x^9)^{(8)}}_{(9.8\ldots2x)}\cdot\underbrace{(e^x)''}_{e^x}\Big|_{x=0}+\ldots+\binom{10}{9}\underbrace{(x^9)'}_{9x^8}\cdot\underbrace{(e^x)^{(9)}}_{e^x}\Big|_{x=0}+$$

$$+\binom{10}{10}x^9\cdot\underbrace{(e^x)^{(10)}}_{e^x}\Big|_{x=0}.\quad \text{Сл. } g^{(10)}(0)=\binom{10}{1}\cdot 9!\,e^0=$$

$$=10.9!\ ,\ \text{т.е. } g^{(10)}(0)=10!$$

$h(x)$ е нечетна $\Rightarrow h'(x)$ е четна $\Rightarrow h''(x)$ е нечетна

$\Rightarrow h^{(3)}(x)$ е четна $\Rightarrow h^{(4)}(x)$ е нечетна $\Rightarrow\ldots$

$\ldots\Rightarrow h^{(10)}(x)$ е нечетна $\Rightarrow h^{(10)}(0)=0$

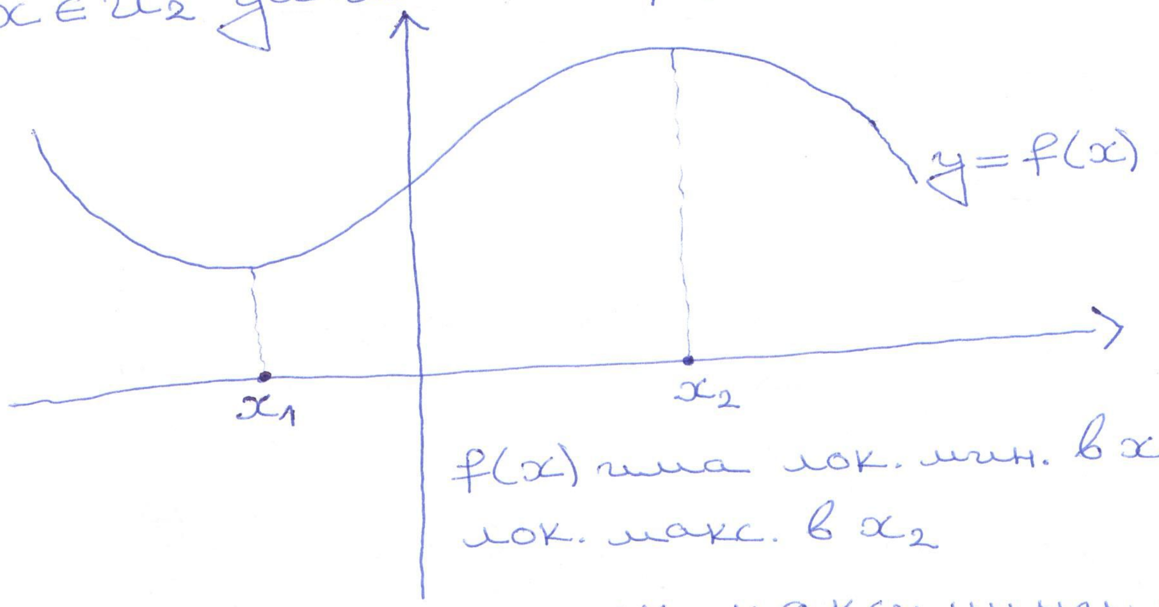
(Използваме зад. 1 и забележката към опр. 1)

(4) Основни теореми за диференцируемите функции

Теорема 1 Нека $U \subset \mathbb{R}$ е околност на $x_0 \in \mathbb{R}$ и $f: U \to \mathbb{R}$. Ако $f(x)$ е диференцируема в x_0, то $f(x)$ е непрекъсната в x_0.

Забележка: Обратното не е вярно. Например $f(x) = |x|$ е непрекъсната в 0, но не е диференцируема в 0 (помислете сами защо).

Опр. 1 Нека $U \subset \mathbb{R}$ е околност на $x_0 \in \mathbb{R}$ и $f: U \to \mathbb{R}$.
Казваме, че $f(x)$ има локален минимум в x_0, ако съществува околност $U_1 \subset U$ на x_0, такава че при $x \in U_1$ да имаме $f(x) \geq f(x_0)$.
Казваме, че $f(x)$ има локален максимум в x_0, ако съществува околност $U_2 \subset U$ на x_0, такава че при $x \in U_2$ да имаме $f(x) \leq f(x_0)$.



$f(x)$ има лок. мин. в x_1 и лок. макс. в x_2

Лок. минимуми и лок. максимуми се наричат общо лок. екстремуми.

Теорема на Ферма Нека $U \subset \mathbb{R}$ е околност на $x_0 \in \mathbb{R}$ и $f: U \to \mathbb{R}$. Ако $f(x)$ има лок. екстремум в x_0 и е диференцируема в x_0, то $f'(x_0) = 0$.

Зад. 1 (теорема на Дарбу) Док. че ако $f(x)$ е диференцируема в $[a, b]$ и $f'(a).f'(b) < 0$, то $f'(x)$ има нула в (a, b).

⑤ Забележка: Ако $f'(x)$ е непрекъсната в $[a,b]$, то теоремата на Дарбу следва директно от теоремата на Болцано. Но $f'(x)$ може и да не е непрекъсната в $[a,b]$.

Решение: Нека за конкретност $f'(a)<0$, $f'(b)>0$ (ако $f'(a)>0$, $f'(b)<0$ се разсъждава аналогично).

$$f'(a)<0 \Rightarrow \lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}<0 \Rightarrow \frac{f(x)-f(a)}{x-a}<0$$

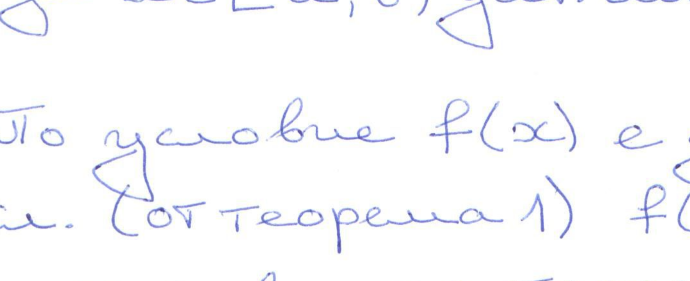
за $x\in(a,b]$ дост. близки до $a \Rightarrow$ $\boxed{f(x)<f(a) \text{ за тези } x\in(a,b] \quad (1)}$

$$f'(b)>0 \Rightarrow \lim_{x\to b^-}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}>0 \Rightarrow \frac{f(x)-f(b)}{x-b}>0$$

за $x\in[a,b)$ дост. близки до $b \Rightarrow$ $\boxed{f(x)<f(b) \text{ за тези } x\in[a,b) \quad (2)}$

По условие $f(x)$ е диференцируема в $[a,b]$, сл. (от теорема 1) $f(x)$ е непрекъсната в $[a,b]$ и тогава по теоремата на Вайерщрас $f(x)$ има най-малка стойност в $[a,b]$.

От (1) и (2) следва, че $\min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ не се достига в a или във b и сл. се достига в точка $c\in(a,b)$. Тогава $f(x)$ има лок. мин. в c и по теоремата на Ферма



$$f'(c)=0.$$