Задачи по теория — диференцируемост, монотонност, екстремуми и изпъкналост на функции
КН, 1 к., I п.

Някои задачи от посочените тук или подобни на тях се падат на изпита по теория. Задачите обозначени със $*$ са по-сложни или имат по-дълги решения. Такива **не** се падат на изпита.

1. Нека $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ е диференцируема. Изяснете в кои точки е диференцируема функцията $|f(x)|$ и каква е връзката на производната ѝ в тях с тази на $f(x)$.

2. Покажете, че уравнението $\sin(\cos x) = x$ има точно едно решение в интервала $[0, \frac{\pi}{2}]$.

3. Нека $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ е диференцируема в (a, b). Нека още съществува границата $\ell := \lim\limits_{x \to a+0} f'(x)$ и $f(x)$ е непрекъсната в т. a. Докажете, че $f(x)$ има дясна производна в т. a и тя е равна на ℓ.

4. Нека $0 < p < q$. Докажете неравенството
$$\left(1 + \frac{x}{p}\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(1 + \frac{x}{q}\right)^{\frac{1}{q}}, \quad x \ge 0.$$

5. Нека
$$f(x) := \begin{cases} x^4 \left(2 + \sin \frac{1}{x}\right), & x \ne 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$
Докажете, че $f(x)$ е диференцируема в $\mathbb{R}$ и има дори строг локален минимум в т. 0, но въпреки това производната ѝ не си запазва знака в никой интервал от вида $(-\delta, 0)$ или $(0, \delta)$, където $\delta > 0$.

6. Докажете, че всеки полином (с реални коефициенти) от степен n може да има най-много n реални корена.

7. * Докажете, че всеки локален минимум на изпъкнала функция е и нейн глобален минимум.

8. * Докажете, че всяка изпъкнала функция, дефинирана върху краен затворен интервал, е ограничена отгоре, има НГ стойност и тя се достига в край на този интервал.