Симетричен оператор и симетрична матрица

Нека E - Евклидово пространство

<u>Опр.</u> Линейният оператор $\varphi: E \to E$ е симетричен, ако $(\varphi(x), y) = (x, \varphi(y))$, $\forall x, y \in E$

<u>Св-во1</u>// Ако $\varphi: E \to E$ е симетричен и обратим оператор
$\Rightarrow \varphi^{-1}$ също е симетричен.

<u>Д-во</u> Нека $x, y \in E$ - произволни

$$(\varphi^{-1}(x), y) = (\varphi^{-1}(x), \underbrace{\varphi \circ \varphi^{-1}}_{=id}(y)) = (\varphi(\varphi^{-1}(x)), \varphi^{-1}(y)) = (x, \varphi^{-1}(y))$$

$\Rightarrow \varphi^{-1}$ е симетричен

<u>Св-во2</u>// Ако $\varphi, \psi: E \to E$ симетрични и $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$
$\Rightarrow \varphi \circ \psi$ - симетричен

$$(\varphi \circ \psi(x), y) = (\psi(x), \varphi(y)) = (x, \psi \circ \varphi(y)) = (x, \varphi \circ \psi(y))$$

<u>Св-во3</u>// Ако $\varphi: E \to E$ симетричен оператор
$\Rightarrow \varphi^k$ - симетричен оператор ($k \in \mathbb{N}$)

$\varphi^{k+1} = \varphi^k \circ \varphi = \varphi \circ \varphi^k$ (по индукция)

Опр.// Матрица $A \in M_{n\times n}(F)$ се нарича симетрична, когато $A = A^t$, т.е. ($a_{ij} = a_{ji}$ за $i \neq j$, $\forall i, j$ произволни)

Св-во1 $Sym_n(F) = \{A \in M_{n\times n}(F) \mid A = A^t\}$

$Sym_n(F)$ – линейно пространство над F

Св-во2 Ако симетричната матрица A е обратима, тогава A^{-1} също е симетрична матрица

Д-во/ Нека $A^{-1} = C \Rightarrow AC = E \Rightarrow (AC)^t = E^t \Rightarrow C^t A^t = E$

$\Rightarrow C^t \cdot A = E \Rightarrow C^t$ е обратна на A, но C е обратна на A

$\Rightarrow C^t = C$ (A има единствена обратна матрица)

Св-во3 // Ако A, B – симетрични и $AB = BA$, тогава AB също симетрична

Д-во $(AB)^t = B^t A^t = B \cdot A = AB \Rightarrow AB$ – симетрична

Св-во4 // Ако A – симетрична матрица $\Rightarrow A^k$ – симетрична ($k \in \mathbb{N}$)

Св-во5 // Ако $C \in M_{k\times n}(F) \Rightarrow C \cdot C^t \in M_{k\times k}(F)$ е симетрична

$(CC^t)^t = (C^t)^t \cdot C^t = C \cdot C^t \Rightarrow CC^t$ – симетрична

Th E – крайномерно Евклидово пр-во, $\varphi: E \to E$ линеен оператор

φ – симетричен оператор $\iff$ спрямо ортонормиран базис φ има симетрична матрица

Д-во Нека $e_1, \dots e_n$ – ортонормиран базис, A матр. на φ

$\Rightarrow$ Нека φ – симетричен, оператор с матр. A спрямо $e_1 \dots e_n$

$\varphi(e_j) = a_{1j} e_1 + \dots + a_{ij} e_i + \dots + a_{nj} e_n$ Нека i, j произволни

$\Rightarrow (\varphi(e_j), e_i) = a_{ij}, \quad a_{ji} = (\varphi(e_i), e_j)$

$\Rightarrow a_{ij} = (\varphi(e_j), e_i) = (e_j, \varphi(e_i)) = (\varphi(e_i), e_j) = a_{ji}$

$\Rightarrow$ A – симетрична

$\Leftarrow$ Нека $e_1, \dots e_n$ ортонормиран базис и $A = A^t = (a_{ij})$

$a_{ij} = (\varphi(e_j), e_i) = a_{ji} = (\varphi(e_i), e_j) = (e_j, \varphi(e_i))$

Нека $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \in E$, $y = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n \in E$ – произволни

$(\varphi(x), y) = (x_1 \varphi(e_1) + \dots + x_n \varphi(e_n), y_1 e_1 + \dots + y_n e_n) = \sum_{i,j} x_i y_j (\varphi(e_i), e_j)$

$(x, \varphi(y)) = (x_1 e_1 + \dots + x_n e_n, y_1 \varphi(e_1) + \dots + y_n \varphi(e_n)) = \sum_{i,j} x_i y_j (e_i, \varphi(e_j))$

Но $(\varphi(e_i), e_j) = (e_i, \varphi(e_j)) \Rightarrow (\varphi(x), y) = (x, \varphi(y)) \ \forall x, y \in E$

за $i, j = 1, \dots, n$ $\Rightarrow \varphi$ – симетричен оператор

Тв// Нека $\varphi: E \to E$ е симетричен оператор и g_1, g_2 собствени вектори за φ с различни собствени стойности ($\varphi(g_1) = \lambda_1 g_1$ и $\varphi(g_2) = \lambda_2 g_2$ и $\lambda_1 \neq \lambda_2$)

Тогава $g_1 \perp g_2$.

Д-во

$$\left.\begin{array}{l}(\varphi(g_1), g_2) = (\lambda_1 g_1, g_2) = \lambda_1 (g_1, g_2) \\ \quad \| \\ (g_1, \varphi(g_2)) = (g_1, \lambda_2 g_2) = \lambda_2 (g_1, g_2)\end{array}\right\} \Rightarrow \lambda_1 (g_1, g_2) = \lambda_2 (g_1, g_2)$$

$$\Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2) \cdot (g_1, g_2) = 0 \;/ : (\lambda_1 - \lambda_2)$$

$$\Rightarrow (g_1, g_2) = 0 \Rightarrow g_1 \perp g_2$$

Тв// Нека $\varphi: E \to E$ - симетричен оператор, U е φ-инвариантно подпр-во $\Rightarrow$ $U^{\perp}$ е φ-инвариантно

Д-во Нека $a \in U^{\perp} \Rightarrow (a, x) = 0, \forall x \in U$

$$(\varphi(a), x) = (a, \underbrace{\varphi(x)}_{\in U}) = 0 \quad \forall x \in U \quad (\varphi(x) \in U - \varphi\text{-инвар.})$$

$\Rightarrow \varphi(a) \in U^{\perp} \Rightarrow U^{\perp}$ е φ-инвариантно

I/ Нека $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ е симетрична матрица с реални числа. Характеристичните корени на A са реални числа.

Д-во $f_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = 0$, Нека λ_0 - корен на $f_A(\lambda)$, $\lambda_0 \in \mathbb{C}$

$B = A - \lambda_0 E \in M_{n\times n}(\mathbb{C}) \Rightarrow$ хомогенната система с матрица $B = A - \lambda_0 E$ има ненулево решение $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$

$$\Rightarrow (A - \lambda_0 E) z^t = \theta \Rightarrow A z^t = \lambda_0 z^t$$

$$\Rightarrow \circledast \; (\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_n) A \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \lambda_0 (\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_n) \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \lambda_0 (|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2)$$

транспонираме $\circledast$

$$① \; (z_1, \dots, z_n) A^t \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \vdots \\ \bar{z}_n \end{pmatrix} = (z_1 \dots z_n) A \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \vdots \\ \bar{z}_n \end{pmatrix} = \lambda_0 (|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2)$$

комплексно спрягане на $\circledast$

$$② \; (z_1, \dots, z_n) \bar{A} \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \vdots \\ \bar{z}_n \end{pmatrix} = (z_1, \dots, z_n) A \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \vdots \\ \bar{z}_n \end{pmatrix} = \bar{\lambda}_0 (|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2)$$

$$① = ② \Rightarrow \lambda_0 \underbrace{(|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2)}_{\neq 0} = \bar{\lambda}_0 \underbrace{(|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2)}_{\neq 0}$$

$$\Rightarrow \lambda_0 = \bar{\lambda}_0 \Rightarrow \lambda_0 \in \mathbb{R}$$

T/ Нека E - Евклидово пр-во и $\varphi: E \to E$ симетричен оператор. $\dim E < \infty$. Съществува ортонормиран базис на E спрямо който матрицата на φ е диагонална (т.е. съществува ортонормиран базис от собствени вектори за φ)

Д-во // Индукция по $n = \dim E$

$n=1$ e_1 - единичен вектор $E = l(e_1)$ и e_1 - собствен в-р
$\Rightarrow$ изпълнено е

Нека е изпълнено за $\dim E \leq n-1$

Нека E - Евклидово пр-во, $\dim E = n$, A матрица на φ спрямо ортонорм. б.
$\Rightarrow A$ - симетрична $\Rightarrow \lambda_1 \in \mathbb{R}$ характеристичен корен
$\Rightarrow \lambda_1$ - собствена стойност $\Rightarrow \exists g_1 \neq 0 : \varphi(g_1) = \lambda_1 g_1$

Нека $U = (l(g_1))^{\perp}$, $l(g_1)$ е φ-инвариантно $\Rightarrow U$ също е φ-инвариант.

$\dim U = n-1$, $\varphi_{|U}: U \to U$ симетричен
$\Rightarrow$ по индукция (за U) $\Rightarrow \exists$ ортонормиран базис $e_2, \dots, e_n$ на U
$\varphi(e_i) = \lambda_i e_i$, $e_i \perp g_1$, $i = 2, \dots, n$
$\Rightarrow e_1 = \frac{1}{|g_1|} g_1$, $\varphi(g_1) = \lambda_1 g_1$ и $e_1, \dots, e_n$ ортонорм. б. на E

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \; \lambda_n \end{pmatrix}$$

<u>Следствие</u> Нека $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ симетрична матрица. Тогава съществува ортогонална матрица $T \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$

$$T^{-1}AT = T^tAT = D$$ - диагонална матрица

<u>Д-во</u> // A - симетрична

Разглеждаме лин. оператор $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, който спрямо стандартния ортонормиран базис има матр. A

$\Rightarrow \exists$ базис $b_1, \dots, b_n$ (ортонормиран) на $\mathbb{R}^n$

$\varphi(b_i) = \lambda_i b_i \Rightarrow$ Ако T матрица на прехода $(e) \to (b)$

$\Rightarrow T$ - ортогонална и

$$T^{-1}AT = T^tAT = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Задача Спрямо ортонормиран базис е зададен $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ с матрица $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Намерете ортонормиран базис от собствени вектори за φ

Р-е

$$f_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 2-\lambda & 2-\lambda & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$f_A(\lambda) = (2-\lambda)(-1-\lambda)^2 \Rightarrow \lambda_1 = 2;\ \lambda_2 = \lambda_3 = -1$$

за $\lambda = 2$

$$B_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow g_1 = (1, 1, 1)$$

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$$

за $\lambda = -1$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$g_2(1, -1, 0) \Rightarrow b_2 = (1, -1, 0)$

$g_3(1, 0, -1) \Rightarrow b_3 = g_3 + \mu b_2$

$$\mu = \frac{-(g_2, g_3)}{(g_2, g_2)} = \frac{-1}{2} \Rightarrow b_3 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\right)$$

$$\Rightarrow e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)$$

$$e_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2) \Rightarrow D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

празна стр.