Упражнение 7 - Теория, задачи, решения

ЕК, МС

31.03.2021

1 Условия на задачите от упражнение 7

Задача 1 Студент чака своя приятелка, която закъснява. За да разнообрази чакането той решава да се поразходи, като хвърля монета и ако се падне герб прави 10 крачки в една посока, а при лице прави 10 крачки в противоположна посока. На новото място повтаря тази операция и т.н. Каква е вероятността след 100 извършени крачки студентът да се намира:
а) на мястото от където е тръгнал;
б) на разстояние 20 крачки;
в) на разстояние 50 крачки от мястото на срещата.

Задача 2 Игра се провежда при следните правила. Играчът залага 5лв и има право да хвърли два зара. Ако хвърли две шестици печели 100лв, ако хвърли една шестица печели 5лв. Да се пресметне математическото очакване на печалбата на играча. Справедлива ли е играта?

Задача 3 Два зара се хвърлят последователно пет пъти. Каква е вероятността броят на хвърлянията, при които сумата от точките е шест, да бъде точно 2? Да се намери средната стойност на този брой.

Задача 4 Първият играч хвърля 3 монети, а вторият 2. Играта печели този, който хвърли повече гербове и взима всичките 5 монети. В случай на равен брой печели вторият. Каква е вероятността първият играч да спечели? Ако е спечелил първия каква е вероятността втория да е хвърлил точно един герб? Каква е средната печалба на играчите?

Задача 5 Извършва се серия от бернулиеви опити с вероятност за успех при всеки опит равна на p. Да се пресметне вероятността r-тия успех да настъпи точно на $(k+r)$-тия опит.

Задача 6 Пушач носи в джоба си две кутии кибрит. Всеки път когато иска да запали, той избира произволна кутия и вади една клечка. След известно време той забелязва, че едната кутия е празна. Каква е вероятността в този момент в другата да са останали точно k клечки, ако първоначално във всяка кутия е имало n клечки.

Задача 7 Подводница стреля n пъти последователно по кораб. Всяко торпедо улучва с вероятност p. Корабът има m отсека, ако торпедо улучи кораба, вероятността да наводни кой да е от тях е една и съща. Каква е вероятността корабът да бъде потопен, ако за това е необходимо да се наводнят поне два отсека?

Задача 8 Нека преди опита съществуват две равно вероятни и единствено възможни хипотези относно вероятността за успех при един опит: $H_0 : \ p_0 = 1/2$ и $H_1 : \ p_1 = 2/3$. Коя от двете хипотези има по-голяма апостериорна вероятност, ако при провеждането на 200 опита са настъпили 120 успеха.

Задача 9 Нека n е естествено число и S_n е симетричната група от степен n. Да се намери средната стойност на случайната величина, съпоставяща на всеки елемент от S_n, броят на неподвижните му точки.

1.1 Решения на задачите от упражнение 7

Задача 1 Имаме бернулиева схема с 10 независими опита, при всеки от които се хвърлят монета с вероятност за падане на герб p. Нека $X \in \mathrm{Bi}(10, p)$. Тук интерпретираме падането на герб като успех. Нека x и y са съответно брой успехи и неуспехи. Тогава $x + y = 10$ и за търсената вероятност $\mathbf{P}$ имаме:
а) $x = y = 5$, следователно $\mathbf{P} = \mathbf{P}(X = 5) = \binom{10}{5} p^5 (1-p)^5$
б) $|x - y| = 2$, следователно $x = 6, \ y = 4$ или $x = 4, \ y = 6$. Нека $A, \ B$ са съответно събитията - при 10 бернулиеви опита получаваме 6 успеха; 4 успеха. Тогава A и B са непресичащи се събития, откъдето $\mathbf{P} = \mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) = \binom{10}{6} p^6 (1-p)^4 + \binom{10}{4} p^4 (1-p)^6 = \binom{10}{4} p^4 (1-p)^4 [p^2 + (1-p)^2]$.

Забележка 1.1. *Еквивалентно, за търсената вероятност* $\mathbf{P}$ *намираме:*

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(\{X = 4\} \cup \{X = 6\}) = \mathbf{P}(\{X = 4\}) + \mathbf{P}(\{X = 6\}) = \binom{10}{6} p^6 (1-p)^4 + \binom{10}{4} p^4 (1-p)^6$$

$$= \binom{10}{4} p^4 (1-p)^4 [p^2 + (1-p)^2].$$

в) $|x - y| = 5$ е невъзможно, следователно $\mathbf{P} = 0$.

Задача 2 Нека $A_i, \ i = 0, 1, 2$ са събиията - при хвърляне на 2 зара се падат точно i на брой шестици. Нека X е случайна величина с теглова функция: $x_i \longmapsto p_i, \ i = 0, 1, 2$ където $p_0 = \mathbf{P}(A_0) = \frac{25}{36}, \ p_1 = \mathbf{P}(A_1) = \frac{10}{36}, \ p_2 = \mathbf{P}(A_2) = \frac{1}{36}; \ x_0 = -5, \ x_1 = 0, \ x_2 = 95$. Очакваната чиста печалба на играча е $\mathrm{E}X = \sum_{i=0}^{2} p_i x_i = -5 \times \frac{25}{36} + 0 \times \frac{10}{36} + 95 \times \frac{1}{36} = -\frac{5}{6}$ и следователно играта не е справедлива.

Забележка 1.2. *Събитията* $A_i, \ i = 0, 1, 2$ *образуват пълна група, следователно можем да въведем (за краткост, вместо разглеждане на пълна група от събития) случайна величина* Y*, дефинирана като брой шестици при хвърляне на 2 зара. Тогава* $p_0 = \mathbf{P}(Y = 0) = \frac{25}{36}, \ p_1 = \mathbf{P}(Y = 1) = \frac{10}{36}, \ p_2 = \mathbf{P}(Y = 2) = \frac{1}{36}$.

Задача 3 Имаме бернулиева схема с 5 независими опита, при всеки от които се хвърлят 2 зара. Нека X е случайната величина - брой хвърляния при които сумата от падналите се числа е равна на 6. Тогава X е биномно разпределена случайна величина: $X \in \mathrm{Bi}(5, \frac{5}{36})$. Търсим $\mathbf{P}(X = 2) = \binom{5}{2}p^2(1-p)^3 = 10p^2(1-p)^3,\ p = \frac{5}{36}$. Търсеният среден брой е $\mathrm{E}X = 5 \times \frac{5}{36} = \frac{25}{36}$, понеже по-общо за $X \in \mathrm{Bi}(n,p)$ имаме $\mathrm{E}X = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^k q^{n-k} = np\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-1}{k-1}p^{k-1}q^{n-k} = np(p+q)^{n-1} = np$.

Задача 4 Нека $X,\ Y$ са случайни величини, дефинирани чрез - брой гербове при хвърляне на 3 монети; при хвърляне на 2 монети. Без ограничение, нека вероятността за падане на герб при хвърляне всяка от монетите е $p = \frac{1}{2}$. Тогава $X \in \mathrm{Bi}(3, \frac{1}{2}),\ Y \in \mathrm{Bi}(2, \frac{1}{2})$. Събитието $A = \{X > Y\}$ се представя като обединение на 4 непресичащи се събития: $A = \{X = 3\} \cup \{X = 2,\ Y = 1\} \cup \{X = 2,\ Y = 0\} \cup \{X = 1,\ Y = 0\}$, като събитията $\{X = i\},\ \{Y = j\}$ са независими. Вероятността за победа на първия играч е $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(X > Y) = \mathbf{P}(X = 3) + \mathbf{P}(X = 2,\ Y = 1) + \mathbf{P}(X = 2,\ Y = 0) + \mathbf{P}(X = 1,\ Y = 0) = \mathbf{P}(X = 3) + \mathbf{P}(X = 2)\mathbf{P}(Y = 1) + \mathbf{P}(X = 2)\mathbf{P}(Y = 0) + \mathbf{P}(X = 1)\mathbf{P}(Y = 0) = \frac{1}{2}$.
Ако е спечелил първия, вероятността втория да е има точно един герб е $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\{Y = 1\}|\{X > Y\}) = \frac{\mathbf{P}(\{Y=1\}\cap\{X>Y\})}{\mathbf{P}(\{X>Y\})} = \frac{\mathbf{P}(X=3,Y=1)+\mathbf{P}(X=2,Y=1)}{\mathbf{P}(X>Y)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$.
Означаваме с $Z_i,\ i = 1, 2$ печалбата на $i-$тия играч, следователно средната печалба на играчите е $\mathrm{E}Z_1 = 2 \times \mathbf{P}(A) + (-3) \times \mathbf{P}(\overline{A}) = -\frac{1}{2};\ \ \mathrm{E}Z_2 = \frac{1}{2}$.

Задача 5 Нека A е събитието - r-тия успех настъпва на $(k + r)$-тия бернулиев опит. Нека $X \in \mathrm{Bi}(k + r - 1, p),\ Y \in \mathrm{Bi}(1, p)$. Понеже $A = \{X = r - 1\} \cap \{Y = 1\}$ е сечение на независими събития, то

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(X = r-1, Y = 1) = \mathbf{P}(X = r-1)\mathbf{P}(Y = 1) = \binom{k+r-1}{r-1}p^r(1-p)^k.$$

Задача 6 Нека $A_i,\ i = 1, 2$ са съответно събитията - при случаен избор на клечки от кутия 1 и кутия 2, за $(n+1)-$път отваряме кутия i на $(2n-k+1)-$вия ход. Съгласно предходната задача $\mathbf{P}(A_1) = \mathbf{P}(A_2) = \frac{1}{2^{2n-k+1}}\binom{2n-k}{n}$. Понеже A_1 и A_2 са несъвместими, то търсената вероятност е

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2) = 2 \times \frac{1}{2^{2n-k+1}}\binom{2n-k}{n} = \frac{1}{2^{2n-k}}\binom{2n-k}{n}.$$

Задача 7 Ще считаме, че всеки отсек може да бъде наводнен с вероятност $\frac{1}{m}$, и при повторно уцелване не е задължително да се наводни нов отсек. Нека $A,\ B_i,\ C_i\ i = 0, 1, \ldots, n$ са съответно събитията - корабът е потопен; корабът е уцелен i пъти; корабът е уцелен i пъти и е наводнен точно един отсек (при $i \geq 1$). Нека $X \in \mathrm{Bi}(n, p)$, тогава $B_i = \{X = i\}$. Пресмятаме $\mathbf{P}(C_i) = \mathbf{P}(C_i \cap B_i) = \mathbf{P}(C_i|B_i)\mathbf{P}(B_i) = \frac{1}{m^{i-1}} \times \binom{n}{i}p^i q^{n-i}$, при $i \geq 1$; $\mathbf{P}(C_0 \cap B_0) = q^n$. Получаваме

$$\mathbf{P}(A) = 1 - \mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbf{P}(\cup_{i=0}^{n} C_i) = 1 - \sum_{i=0}^{n}\mathbf{P}(C_i) = 1 - \left(q^n + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{m^{i-1}} \times \binom{n}{i}p^i q^{n-i}\right)$$

$$= 1 - \left(q^n + m\sum_{i=1}^{n} \times \binom{n}{i}\left(\frac{p}{m}\right)^i q^{n-i}\right) = 1 - \left(-(m-1)q^n + m\sum_{i=0}^{n} \times \binom{n}{i}\left(\frac{p}{m}\right)^i q^{n-i}\right)$$

$$= 1 - \left(-(m-1)q^n + m\left(\frac{p}{m} + q\right)^n\right) = 1 + (m-1)q^n - m\left(\frac{p}{m} + q\right)^n.$$

Задача 8 Нека A е събитието - от 200 бернулиеви опита (с вероятност за успех в единичен опит p) да имаме 120 успеха. По условие $\mathbf{P}(H_0) = \mathbf{P}(H_1) = \frac{1}{2}$. Трябва да определим кое от числата $\mathbf{P}(H_0|A)$ и $\mathbf{P}(H_1|A)$ е по-голямо. Нека $X_i \in \mathrm{Bi}(200, p_i)$, $i = 0, 1$; $p_0 = \frac{1}{2}$, $p_1 = \frac{2}{3}$. Тогава $\mathbf{P}(H_0|A) = \frac{\mathbf{P}(H_0 \cap A)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{\mathbf{P}(A|H_0)\mathbf{P}(H_0)}{\mathbf{P}(A|H_0)\mathbf{P}(H_0)+\mathbf{P}(A|H_1)\mathbf{P}(H_1)} = \frac{\mathbf{P}(A|H_0)}{\mathbf{P}(A|H_0)+\mathbf{P}(A|H_1)} = \frac{\mathbf{P}(X_0=120)}{\mathbf{P}(A|H_0)+\mathbf{P}(A|H_1)} = \frac{1}{\mathbf{P}(A|H_0)+\mathbf{P}(A|H_1)} \times \binom{200}{120} 2^{-200}$.
$\mathbf{P}(H_1|A) = \frac{1}{\mathbf{P}(A|H_0)+\mathbf{P}(A|H_1)} \times \binom{200}{120} \frac{2^{120}}{3^{200}}$. Следователно $\mathbf{P}(H_1|A) = \mathbf{P}(H_0|A) \frac{2^{320}}{3^{200}}$
$= \mathbf{P}(H_0|A) \left(\frac{2^8}{3^5}\right)^{40} > \mathbf{P}(H_0|A)$.

Задача 9 Нека X е случайната величина, съпоставяща на всеки елемент от S_n, броят на неподвижните му точки. Нека $T_{n,k}$ е броят на елементите на S_n с точно k неподвижни точки. Съгласно задача 9 от упражнение 3, имаме

$$T_{(n,0)} = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}, \quad T_{(n,k)} = \binom{n}{k} T_{(n-k,0)}.$$

Следователно

$$\mathbf{P}(X = k) = \frac{|T_{(n,k)}|}{|S_n|} = \frac{\binom{n}{k}(n-k)! \sum_{l=0}^{n-k} \frac{(-1)^l}{l!}}{n!} = \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^{n-k} \frac{(-1)^l}{l!},$$

$$\mathbf{E}X = \sum_{k=0}^{n} k\mathbf{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=0}^{n-k} \frac{(-1)^l}{(k-1)!l!}.$$