Ранг на матрица

F поле

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \hline a_{k1} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix}_{k\times n} \longrightarrow \left.\begin{matrix} L_1 = (a_{11}, \dots, a_{1n}) \\ L_2 = (a_{21}, \dots, a_{2n}) \\ \vdots \\ L_k = (a_{k1}, \dots, a_{kn}) \end{matrix}\right\} \in F^n$$

$$\downarrow$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{k1} \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{k2} \end{pmatrix}, \dots, \quad C_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{kn} \end{pmatrix} \in F^k$$

$[L_1, \dots, L_k] = rows(A)$

$[C_1, \dots, C_n] = columns(A)$

$$\boxed{r(A) = r(L_1, \dots, L_k) = r(C_1, \dots, C_n)}$$

ел. преобр. по редове

ранг на сист. вектори = разм. на лин. обвивка = брой на вект. в МЛНП

I) Нека $A, A' \in M_{k \times n}(F)$ и A' се получава от A чрез елем. преобр. по редове

$\Rightarrow r(rows(A)) = r(rows(A'))$ / $\ell(rows(A)) = \ell(rows A')$

$rows A = [L_1, \dots, L_k]$ $\quad rows(A') = [L'_1, \dots, L'_k]$

$\rightarrow s \leftrightarrow t \quad L'_s = L_t \ ; \ L'_t = L_s, \quad L'_i = L_i \quad i \neq s, t$

$\ell(L_1, \dots, L_k) = \ell(L'_1, \dots, L'_k) \Rightarrow r(L_1, \dots, L_k) = r(L'_1, \dots, L'_k)$

$\rightarrow s^{\text{ти}}$ ред $\lambda \neq 0$ $(\lambda \in F) \Rightarrow \exists \lambda^{-1} \in F$

$\underline{L'_s = \lambda L_s}, \ L'_i = L_i \ (i \neq s) \longleftrightarrow \underline{L_s = \lambda^{-1} L'_s}$

$\Rightarrow \ell(L_1, \dots, L_k) = \ell(L'_1, \dots, L'_k)$

$\rightarrow s^{\text{ти}}$ ред $+$ t ред $* \lambda$

$L'_s = L_s + \lambda L_t$

$L_i = L'_i, \ i \neq s$

$\Longleftrightarrow L_s = L'_s - \lambda L'_t$

$rows(A') \subset \ell(rows A) \} \ \ell(rows A) =$

$rows(A) \subset \ell(rows A') \} \ \ell(rows A')$

$\Rightarrow r(rows A) = r(rows A') = \dim \ell(rows A)$

$$\Lambda)\quad c_1\begin{pmatrix}a_{11}\\ \vdots\\ a_{k1}\end{pmatrix},\dots,c_n\begin{pmatrix}a_{1n}\\ \vdots\\ a_{kn}\end{pmatrix} \Longleftrightarrow A=\begin{pmatrix}a_{11}&\dots&a_{1n}\\ \dots&\dots&\dots\\ a_{k1}&\dots&a_{kn}\end{pmatrix} \overset{(*)}{\Longleftrightarrow} \left|\begin{array}{l}a_{11}x_1+\dots+a_{1n}x_n=0\\ \dots\\ a_{k1}x_1+\dots+a_{kn}x_n=0\end{array}\right.$$

$$\boxed{c_1,\dots,c_n \text{ са ЛЗ} \Longleftrightarrow (*) \text{ има ненулево решение}}$$

$$\lambda_1c_1+\dots+\lambda_nc_n=\lambda_1\begin{pmatrix}a_{11}\\ \vdots\\ a_{k1}\end{pmatrix}+\dots+\lambda_n\begin{pmatrix}a_{1n}\\ \vdots\\ a_{kn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1a_{11}+\dots+\lambda_na_{1n}\\ \dots\\ \lambda_1a_{k1}+\dots+\lambda_na_{kn}\end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\lambda_1c_1+\dots+\lambda_nc_n=0 \text{ и } (\lambda_1,\dots,\lambda_n)\neq(0,\dots,0)$$

$$\Updownarrow$$

$$(*) \text{ има реш. } (\lambda_1,\dots,\lambda_n)\neq(0,0\dots0)$$

I) $A, A' \in M_{k \times n}(F)$ и A' се получава от A чрез елементарни преобр. по редове $A = (a_{ij})$; $A' = (a'_{ij})$

$\rightarrow r(\text{columns}(A)) = r(\text{columns}(A'))$

$\{j_1, \dots, j_s\} \subset \{1, 2, \dots, n\}$ стълбове на $A \rightarrow c_1, \dots, c_n$

стълбове $A' \rightarrow c'_1, \dots, c'_n$

$c_{j_1}, \dots, c_{j_s}$ е ЛЗ $\Leftrightarrow c'_{j_1}, \dots, c'_{j_s}$ е ЛЗ

$c_{j_1}, \dots, c_{j_s}$ е ЛЗ $\Leftrightarrow$ (1) $\left| \begin{array}{l} a_{1j_1}x_{j_1} + \dots + a_{1j_s}x_{j_s} = 0 \\ \text{---------} \\ a_{kj_1}x_{j_1} + \dots + a_{kj_s}x_{j_s} = 0 \end{array} \right.$ има ненулево решение

$\Updownarrow$ елем. преобр. по редове

еквивалентни системи

$c'_{j_1}, \dots, c'_{j_s}$ са ЛЗ $\Leftrightarrow$ (2) $\left| \begin{array}{l} a'_{1j_1}x_{j_1} + \dots + a'_{1j_s}x_{j_s} = 0 \\ \text{---------} \\ a'_{kj_1}x_{j_1} + \dots + a'_{kj_s}x_{j_s} = 0 \end{array} \right.$ има ненулево р-е

Нека $c_{j_1}, \dots, c_{j_r}$ е МЛНП на columns(A)

- $c_{j_1}, \dots, c_{j_r}$ ЛНЗ $\Rightarrow c'_{j_1}, \dots, c'_{j_r}$ е ЛНЗ
- $\forall i$: $c_i, c_{j_1}, \dots, c_{j_r}$ са ЛЗ $\Rightarrow c'_i, c'_{j_1}, \dots, c'_{j_r}$ е ЛЗ

$\Rightarrow c'_{j_1}, \dots, c'_{j_r}$ е МЛНП на columns(A')

$\Rightarrow r(\text{columns}(A)) = r(\text{columns}(A'))$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix} \qquad A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{k1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}$$ транспонирането

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 7 \\ 3 & 8 \\ 4 & 9 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$$

$$(A^t)^t = A$$

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow[\text{ред.}]{\text{хр.}} & A' \\ \downarrow & & \\ A^t & \xrightarrow[\text{по ст.}]{} & (A')^t \end{array}$$

Т $A, B \in M_{k\times n}(F)$ и B се получава от A чрез последователност от елементарни преобр. по редове и по стълбове тогава

— $r(\text{rows}(A)) = r(\text{rows}(B))$

— $r(\text{columns}(A)) = r(\text{columns}(B))$

$$\boxed{E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{m\times n}}$$

$e_{ij} = 0$ за $i \neq j$

$e_{ii} = 1$

I) $A \in M_{k\times n}(F)$ е ненулева матрица

$\rightarrow$ съществува последователност от елем. преобр. по редове и по стълбове

$$A \rightarrow \rightarrow \dashrightarrow T = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & & 0 \end{array}\right) \quad \begin{cases} t_{ii}=1 & \text{за } i=1,\dots,r \\ t_{jl}=0 & \text{останалите} \end{cases}$$

$\rightarrow r(\text{rows}A) = r(\text{columns}A) = r$

$$A_{k\times n} \rightarrow \begin{pmatrix} - & - & - \\ - & a_{ij} & - \\ - & - & - \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} a_{ij} & - & - \\ - & - & - \\ - & - & - \end{pmatrix} /:a_{ij} \quad \begin{pmatrix} \boxed{1} & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & & & \\ a'_{k1} & a'_{k2} & \cdots & a'_{kn} \end{pmatrix}$$

$a_{ij} \neq 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ 0 & a''_{22} & \cdots & a''_{2n} \\ \vdots & & & \\ 0 & a''_{k2} & \cdots & a''_{kn} \end{pmatrix} \rightarrow \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B_{(k-1)\times(n-1)} & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

$k-1=0 \rightarrow (1, 0, \dots, 0)$ край

$n-1=0 \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$k-1 \neq 0,\ n-1 \neq 0$

Ако $B = \mathbb{0} \Rightarrow$

Ако $B \neq 0$ стъпката процедура за B

$$T = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & & & \\ 0 & & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & & & & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & & & \\ 0 & & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \\ \hline 0 & \cdots & 0 \\ & \cdots & \\ 0 & \cdots & 0 \end{array}\right)$$

$t_{11} = \ldots = t_{rr} = 1$
останалите са 0

$\Rightarrow$ първите r реда са ЛНЗ || r(редовете) = r(стълбовете)
първите r стълба са ЛНЗ

Опр. $A \in M_{n\times n}(F)$, A е неособена, ако $r(A) = n$

$\rightarrow$ А - неособена $\Leftrightarrow$ редовете са ЛНЗ $\Leftrightarrow$ стълбовете са ЛНЗ

Т/ Ако $A \in M_{n\times n}(F)$ е неособена, тогава само с елементарни преобр. по редове се превежда в E_n

Д-во ($C_1, \dots, C_n$ стълбове)

1) има ненулев елемент в C_1 / защото стълбовете са ЛНЗ

$$\begin{pmatrix} & & \\ * & & \\ & & \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} * & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}^{1:\,\sqcup} \sim \begin{pmatrix} 1 & & \\ a'_{21} & & \\ \vdots & & \\ a'_{n1} & & \end{pmatrix} \begin{matrix} (-a'_{21}) \dots (-a'_{n1}) \end{matrix}$$

2) само по редове

$$\begin{pmatrix} 1 & * \ * \dots * \\ 0 & \\ 0 & A_1 \\ \vdots & \\ 0 & \end{pmatrix}$$

A_1 има ЛНЗ редове и ЛНЗ стълбове

$\Rightarrow A_1$ неособена

$\Rightarrow$ правим 1, 2 за A_1

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * & * \dots * \\ 0 & 1 & * \dots * \\ \vdots & 0 & \\ 0 & 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

A_2 неособена

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ 0 & 1 \\ \vdots & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dots$

$A \xrightarrow[\text{по редове}]{\text{само}}$ $\begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ 0 & 1 & * & \cdots & * \\ \vdots & & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & & * & 0 \\ & 1 & & \vdots \\ 0 & & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

II/ (Руше) (Кронекер-Капели)

$$(*) \left| \begin{array}{l} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \cdots \\ a_{k1}x_1 + \cdots + a_{kn}x_n = b_k \end{array} \right.$$

Системата (*), която има матрица A и разширена матр. $\bar{A}$

(*) е съвместима $\Longleftrightarrow r(A) = r(\bar{A})$

Д-во $c_1, \dots c_n$ са ЛЗ $\iff$ хомогенната система има ненулево р-е

$\Rightarrow$ системата (*) има решение $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

$$c_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{k1} \end{pmatrix}, \dots, c_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{kn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11}\alpha_1 + \dots + a_{1n}\alpha_n \\ \dots \\ a_{k1}\alpha_1 + \dots + a_{kn}\alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{k1} \end{pmatrix} + \dots + \alpha_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{kn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \alpha_1 c_1 + \dots + \alpha_k c_k = B \Rightarrow B \in \ell(c_1, \dots c_k) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ell(c_1, \dots, c_k) = \ell(c_1, \dots, c_k, B)$$

$$(r(A) = r(\overline{A})) \Rightarrow r(c_1, \dots, c_k) = r(c_1, \dots, c_k, B)$$

$\Leftarrow$ $r(A) = r(\overline{A}) \Rightarrow r(c_1, \dots, c_k) = r(c_1, \dots, c_k, B) \Rightarrow \ell(c_1, \dots, c_k) = \ell(c_1, \dots, c_k, B)$

$$\Rightarrow B \in \ell(c_1, \dots, c_k) \Rightarrow \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in F$$

$B = \lambda_1 c_1 + \dots + \lambda_k c_k \Rightarrow (\lambda_1, \dots \lambda_n)$ е решение на (*)

различаване съвместима $\leftrightarrow$ несъвместима сист.

(т. Руше)

$$N: \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots \\ a_{k1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n = b_k \end{cases} \longrightarrow H: \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{k1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n = 0 \end{cases}$$

нехомогенна — хомогенна

1) $(\beta_1, \dots, \beta_n) = \beta$ и $(\gamma_1, \dots, \gamma_n) = \gamma$ реш. нехомогенната $\in N$

$\beta - \gamma$ е? $\Rightarrow$ $\beta - \gamma$ е р-е на хомогенната система ($\in H$)

$N: i$

$$\begin{array}{r} a_{i1}\beta_1 + \dots + a_{in}\beta_n = b_i \\ - \quad a_{i1}\gamma_1 + \dots + a_{in}\gamma_n = b_i \\ \hline a_{i1}(\beta_1 - \gamma_1) + \dots + a_{in}(\beta_n - \gamma_n) = 0 \end{array}$$