I ФОН: 82134

T2

# Линейни пространства

Определение:

Нека ~~във~~ $V \neq \emptyset$ са дефинирани бинарните операции „+" и „·", за които за $\forall a, b \in V$, $\lambda \in F$ ($F$ е поле) е дефинирано $a+b \in V$ и $\lambda a \in V$. $V$ е линейно пространство над $F$, когато, освен тези, са изпълнени и следните аксиоми:

1. $(a+b)+c = a+(b+c)$, $\forall a, b, c \in V$
2. $a+b = b+a$, $\forall a, b \in V$
3. $\exists\, \theta \in V$: $a + \theta = a$, $\forall a \in V$
4. за $\forall a$ $\exists\, b \in V$: $a+b=0$
5. за единицата $1 \in F$ е вярно $1.a = a$, $\forall a \in V$
6. $\lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b$, $\forall \lambda \in F$, $\forall a, b \in V$
7. $(\lambda+\mu)a = \lambda a + \mu a$, $\forall \lambda, \mu \in F$, $\forall a \in V$
8. $(\lambda\mu)a = \lambda(\mu a)$, $\forall \lambda \mu \in F$, $\forall a \in V$

Примери:

- n-мерно векторно пространство
- множеството от всички полиноми с елементи от $F$
- геометричните вектори в равнината ($\mathbb{R}^2$) или в пространството ($\mathbb{R}^3$)
- множеството от всички функции от поле $F$ във $F$
- полето на $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, като линейно пространство над себе си
- матричното пространство от всички $k \times n$ матрици $M_{k \times n}$

ФН: 82134

Свойства:

1) $\theta$ е единствен елемент за $a+\theta=a,\ \forall a\in V$

2) за $\forall a\in V\ \exists!\, b\in V: a+b=\theta$

3) $\forall a,b\in V$, $a+x=b$ има единствено решение

4) $\forall a\in V, \forall 0\in F \Rightarrow 0.a=\theta$

5) $\forall \theta\in V, \forall \lambda\in F \Rightarrow \lambda.\theta=\theta$

6) $\forall a\in V, \forall -1\in F \Rightarrow -1.a=-a$

---

Линейна комбинация – определение

Нека $a_1,\dots,a_n\in V$ и $\lambda_1\dots\lambda_n\in F$

$b=\lambda_1 a_1+\dots+\lambda_n a_n$ е линейна комбинация на $a_1,\dots,a_n$

Линейна обвивка – определение

$l(a_1,\dots,a_n)=\{\lambda_1 a_1+\dots+\lambda_n a_n \mid a_1,\dots,a_n\in V, \lambda_1,\dots,\lambda_n\in F\}$

---

Свойства на $l$:

1) $\theta\in l(a_1,\dots,a_n)$, $\theta=0a_1+\dots+0a_n$

2) $b\in l(a_1,\dots,a_n)\Rightarrow l(a_1,\dots,a_n,b)=l(a_1,\dots,a_n)$

3) $b_1,\dots,b_k\in l(a_1,\dots,a_n)\Rightarrow \mu_1 b_1+\dots+\mu_k b_k\in l(a_1,\dots,a_n)$

4) $b_1,\dots,b_k\in l(a_1,\dots,a_n)\Rightarrow l(b_1,\dots,b_k)\subseteq l(a_1,\dots,a_n)$

Т. $\text{ф}$ № 82134 Т2

# Линейни подпространства

$W$ е линейно подпространство на $V$, ако

$\emptyset \neq W \subseteq V$ и $W$ е линейно пространство относно операциите във $V$.

Примери:

- $\{\emptyset\}$ и $V$ са подпространства на $V$
- векторите в равнината са подпространство на пространството от триерните вектори
- $\mathbb{R}$ е подпространство на $\mathbb{C}$
- $\ell(a_1, \dots, a_n)$ е линейно подпространство, за $a_1, \dots, a_n \in V$