# Линейни системи - метод на Гаус

доц. Евгения Великова

Октомври 2020

# Линейно уравнение

## линейно уравнение

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b.$$

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ - неизвестни (променливи)
$a_1, a_2, \ldots, a_n \in F$ - коефициенти, $b \in F$- свободен коефициент
$(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ е **решение**, когато $a_1r_1 + a_2r_2 + \ldots + a_nr_n = b$ е тъждество.

## Example

Разглеждаме $x_1 + 2x_3 + 0x_3 - 4x_4 = -7$ с коефициенти от $\mathbb{R}$ има решение $(-2p_2 + 4p_4 - 7\ ,\ p_1\ ,\ p_2\ ,\ p_3)$.
$T = \{(-2p_2 + 4p_4 - 7, p_1, p_2, p_3) \mid p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R},$ произволни$\}$
$T = \{(q_1, q_2, q_3, \frac{1}{4}q_1 + \frac{1}{2}q_3 + \frac{7}{4}) \mid q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R},$ произволни$\}$.

- Ако $a_1 = \ldots = a_n = b = 0, \quad \Rightarrow$ всеки $(t_1, \ldots, t_n) \in F^n$ е решение.
- Ако $a_1 = \ldots = a_n = 0$ и $b \neq 0$, тогава уравнението няма решение.

# Система линейни уравнения и матрица на система

## линейна система

$F$ е поле и $x_1, \ldots, x_n$- неизвестни

$$\left| \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \multicolumn{3}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n & = & b_k \end{array} \right. , \text{ където } \begin{array}{c} a_{ij} \in F \\ b_i \in F \end{array} \tag{1}$$

## матрица

Матрица $A = (a_{ij})_{k \times n}$ - правоъгълна таблица с елементи от поле $F$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kn} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}; \quad \overline{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} a_{11} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kn} & b_k \end{array} \right)$$

# съвместими и несъвместими системи

$$\left|\begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n & = & b_k \end{array}\right., \text{ където } \begin{array}{c} a_{ij} \in F \\ b_i \in F \end{array}$$

**решение**

$\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \in F^n$, е решение на системата , когато $a_{i1}\beta_1 + a_{i2}\beta_2 + \ldots + a_{in}\beta_n = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, k.$

- **несъвместими** системи - когато нямат решения,
- **съвместими** системи- когато имат решения
  - *определена система* - която има единствено решение,
  - *неопределена система* - която има повече от едно решение

**Example**

$(a) \left|\begin{array}{lcl} x + 2y & = & 3 \\ 4x - 3y & = & 1 \end{array}\right. ; \quad (b) \left|\begin{array}{lcl} x + y & = & 2 \\ 2x + 2y & = & 4 \end{array}\right. ; \quad (c) \left|\begin{array}{lcl} x + y & = & 2 \\ 2x + 2y & = & 3 \end{array}\right.$

# Еквивалентни системи, елементарни преобразования

## Определение

Две линейни системи с неизвестни $x_1, \ldots, x_n$ и с коефициенти над поле $F$ се наричат еквивалентни, ако имат едно и също множество от решения или ако и двете са несъвместими.

## Елементарни преобразувания на системи линейни уравнения

- Размяна местата на две уравнения;
- Умножение на двете страни на уравнението по число $c$, различно от нула;
- Прибавяне към едно уравнение на друго уравнение, умножено по число.

## Твърдение

Всяко от елементарните преобразувания на система линейни уравнения е обратимо и преобразува една система в система, еквивалентна на изходната.

Доказателство: Нека $L_1, \ldots, L_k$ - уравненията на системата

- Размяна местата на две уравнения $L_s \leftrightarrow L_t$.
- Умножаване на уравнение с номер $i$ по число , $L_i' = c.L_i$, $c \neq 0$.

$$\begin{array}{c} a_{i1}\beta_1 + a_{i2}\beta_2 + \ldots + a_{in}\beta_n = b_i \\ \Updownarrow \; c \neq 0 \\ c.a_{i1}\beta_1 + c.a_{i2}\beta_2 + \ldots + c.a_{in}\beta_n = c.b_i \end{array}$$

- Към уравнение с номер $i$ прибавяме уравнение с номер $j$, което е умножено по число - $L_i' = L_i + c.L_j$

$$\begin{array}{ll} L_i : & a_{i1}\beta_1 + a_{i2}\beta_2 + \ldots + a_{in}\beta_n = b_i \\ L_j : & a_{j1}\beta_1 + a_{j2}\beta_2 + \ldots + a_{jn}\beta_n = b_j \end{array}$$

$$(\downarrow L_i' = L_i + cL_j) \quad \Updownarrow \quad (L_i = L_i' - cL_j \uparrow)$$

$$\begin{array}{ll} L_i' : & (a_{i1} + ca_{j1})\beta_1 \ldots + (a_{in} + ca_{jn})\beta_n = b_i + cb_j \\ L_j : & a_{j1}\beta_1 + a_{j2}\beta_2 + \ldots + a_{jn}\beta_n = b_j \end{array}$$

## Елементарни преобразования по редове на една матрица:

- Размяна местата на два реда на матрицата;
- Умножение на ред от матрицата по число $c$, различно от нула;
- Към един ред прибавяне на друг ред, умножен по число.

## Example

$$\left| \begin{array}{lcl} x+2y & = & 3 \\ 4x-3y & = & 1 \end{array} \right. \xrightarrow{L_2-4L_1} \left| \begin{array}{lcl} x+2y & = & 3 \\ -11y & = & -11 \end{array} \right. \xrightarrow{L_2:(-11)}$$

$$\left| \begin{array}{lcl} x+2y & = & 3 \\ y & = & 1 \end{array} \right. \xrightarrow{L_1-2L_2} \left| \begin{array}{lcl} x & = & 1 \\ y & = & 1 \end{array} \right. \Rightarrow (1,1) \text{ е решение}$$

$$\left( \begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -3 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2-4L_1} \left( \begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -11 & -11 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2:(-11)} \left( \begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$y=1$ и заместваме в първото уравнение $x+2.1=3$
решение $(1,1)$.

# метод на Гаус (последователно изключване на неизвестните) I

## изключване на неизвестно

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1k}x_k + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2k}x_k + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \end{aligned}$$ , когато $a_{1k} \neq 0$ след

$L_2' = L_2 - \frac{a_{2k}}{a_{1k}} L_1$ ще се изключи $x_k$ от второто уравнение

$$(a_{21} - \frac{a_{11}a_{2k}}{a_{1k}})x_1 + \ldots + 0.x_k + \ldots + (a_{2n} - \frac{a_{1n}.a_{2k}}{a_{1k}})x_n = b_2 - \frac{b_1.a_{2k}}{a_{1k}}.$$

$$\left| \begin{array}{rcl} \boxed{a_{11}}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &=& b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &=& b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n &=& b_k \end{array} \right. \qquad \left( \begin{array}{cccc|c} \boxed{a_{11}} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kn} & b_k \end{array} \right)$$

$$\left| \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &=& b_1 \\ 0x_1 + a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n &=& b'_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ 0x_1 + a'_{k2}x_2 + \ldots + a'_{kn}x_n &=& b'_k \end{array} \right. \qquad \left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & \ldots & a'_{2n} & b'_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & a'_{k2} & \ldots & a'_{kn} & b'_k \end{array} \right)$$

1. Ако се получи уравнение от вида $0x_2 + \ldots + 0x_n = b \neq 0$, тогава системата няма решение.
2. Ако се получи нулево уравнение $0x_2 + \ldots + 0x_n = 0$, тогава това уравнение може да се махне (да не се разглежда).

За системата с уравнения $L'_2, \ldots, L'_k$ се прилага метода за изключване на следващо неизвестно и се получава система с 1 уравнение по-малко и едно неизвестно по-малко. Продължава се до "стъпаловиден вид"

**Example**

$$\begin{pmatrix} \underline{\underline{3}} & \underline{-4} & 1 & 0 & -2 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & \underline{\underline{1}} & 3 & -5 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{\underline{2}} & \underline{4} & \underline{0} & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{\underline{15}} \end{pmatrix}$$

За решението - се започва от последното у-е и се замества нагоре

Ако $x_2 = t_2, \ldots, x_n = t_n$ е решение на системата $L'_2, \ldots, L'_k$, тогава $x_1 = t_1 = -\frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}t_2 - \ldots - a_{1n}t_n)$.

# Пример

$$\left|\begin{array}{rrrrrrrcr} 2x_1 & -3x_2 & +2x_3 & -5x_4 & +7x_5 & +5x_6 & -x_7 & = & 0 \\ 2x_1 & -3x_2 & +6x_3 & -2x_4 & +18x_5 & -3x_6 & +3x_7 & = & 0 \\ -2x_1 & +3x_2 & +2x_3 & +11x_4 & +4x_5 & -4x_6 & +5x_7 & = & 0 \\ -4x_1 & +6x_2 & +12x_3 & +31x_4 & +30x_5 & -15x_6 & +8x_7 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{2} & -3 & 2 & -5 & 7 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 6 & -2 & 18 & -3 & 3 \\ -2 & 3 & 2 & 11 & 4 & -4 & 5 \\ -4 & 6 & 12 & 31 & 30 & -15 & 8 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 & -5 & 7 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{4} & 3 & 11 & -8 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 6 & 11 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 16 & 21 & 44 & -5 & 6 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 & -5 & 7 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 11 & -8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{3} & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 27 & -10 \end{pmatrix} \to$$

# Пример - продължение

$$A \to \ldots \to \begin{pmatrix} \underline{2} & \underline{-3} & 2 & -5 & 7 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & \underline{4} & 3 & 11 & -8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{1} & \underline{0} & \underline{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{-10} \end{pmatrix}$$

- от четвъртото уравнение получаваме $x_7 = 0$
- от третото уравнение - $x_5 = p,\ x_6 = q$ и $x_4 = -3q$,
- от второто уравнение $x_3 = \frac{-11p+17q}{4}$.
- от първото уравнение $x_2 = r$ и намираме $x_1$

Решението е $(\frac{6r-3p-57q}{4}, r, \frac{-11p+17q}{4}, -3q, p, q, 0)$.