Вериги на Марков

Деф: $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ наричаме верига на Марков (ВНМ)

$\iff \forall n\ \forall x_1 \ldots x_{n+1} \in \mathcal{X}\quad p(X_{n+1}=x_{n+1} \mid x_1 \ldots x_n) =$

$= p(X_{n+1} \mid X_n)$

Деф: ВНМ е хомогенна (time invariant) $\iff$

$p\ \forall n\ \forall a, b\quad p(X_{n+1}=a \mid X_n=b) =$

$= p(X_2=a \mid X_1=b)$

Тв: Ако $\{X\}$ ВНМ е стационарна, то тя е хомогенна.

Д-во: $p(X_{n+1}=a \mid X_n=b) = \dfrac{p(X_{n+1}=a, X_n=b)}{p(X_n=b)} =$

$= \dfrac{p(X_2=a, X_1=b)}{p(X_1=b)} = p(X_2=a \mid X_1=b)$

Св-во: Хомогенните ВНМ се характеризират от $p(X_1)$ и $p_{ij} = p(\cancel{x_i \mid x_j})$

$p(X_{n+1}=x_j \mid X_n=x_i)$

P-matrix $N \times N$

$\mathcal{X} = \{x_1 \ldots x_n\}$

$p(X_{n+1}=x_{n+1}) = p\left(\bigcup_{x_n \in \mathcal{X}} \{X_n=x_n, X_{n+1}=x_{n+1}\}\right)$

$$= \sum_{x_n \in \mathcal{X}} p(X_n = x_n) \cancel{p}(X_{n+1} = x_{n+1}) =$$

$$= \sum_{x_n} p(X_n = x_n)\, p(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n) =$$

$$\cancel{= \sum_{x} p(X_n = x)\, p(X_{n+1} \ldots p_{x_n, x_{n+1}}}$$

$$\cancel{\sum_{i=1} p(}$$

$$p(X_{n+1} = x_j) = \sum_{i=1} p(X_n = x_i)\, p_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^{|\mathcal{X}|} p(X_n = x_i) \cdot p_{ij}$$

P Нека $\mu_i = P(X_1 = x_i)$

$$P(X_2 = x_j) = \sum_{i=1} \mu_i \cdot p_{ij} = (\mu P)_j$$

Св-во: $P(X_{n+1} = x_j) = (\mu P^n)_j$

Деф: μ е стац. разпределение за ВНМ $\Leftrightarrow$

$$\mu P = \mu$$

Тв: Нека ВНМ е хомогенна с харак. матрица P.
~~Тогава~~ $\{x_i\}_{i=1}$ е стац $\Leftrightarrow$
1) $p(X_1) = \mu$ и
2) $\mu P = \mu$

Д-во:

$\Leftarrow$ Нека $C \in \mathbb{N}$ $\quad p_{x_1 x_2} \quad p(x_3|x_2) = p_{x_2 x_3}$

$p(X_1 = x_1 \dots X_n = x_n) = \mu_{x_1} \cdot \cancel{p_{x_1 x_2}} \cdot p(x_3|x_1 x_2) \dots$

$\dots p_{x_{n-1} x_n} = P(X_{l+1} = x_1) \cdot p(X_{l+2} = x_2 | X_{l+1} = x_1) \dots$

$\dots p(X_{l+n} = x_n | X_{l+n-1} = x_{n-1}) = P(X_{1+l} = x_1 \dots X_{l+n} = x_n)$

ЛЕК 5

Тв Нека $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ е стац. верига на Марков

Тогава $H = H(X_2|X_1)$

Д-во: $H = H'$

$H' = \lim_{n\to\infty} H(X_n | X_1 \dots X_{n-1}) =$

от ВНМ

$= \lim_{n\to\infty} H(X_n | X_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} H(X_2|X_1) = H(X_2|X_1)$

Нека $\{X_i\}_{i=1}$ е стац ВНМ и матрица P

$\mu = p(X_1)$ и $\mu P = \mu$

вероятност на X_1

$H(\cancel{X_2|X_1}) = -\sum_{i,j} \mu_i \cdot p_{ij} \cdot \log p_{ij}$

Д-во: $H = H(X_2|X_1) =$

$= \sum_{i,j} \mu_i p_{ij} \cdot \log p_{ij}$