2 сл. $r\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 2$ и $r\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix} = 1$, т.е.

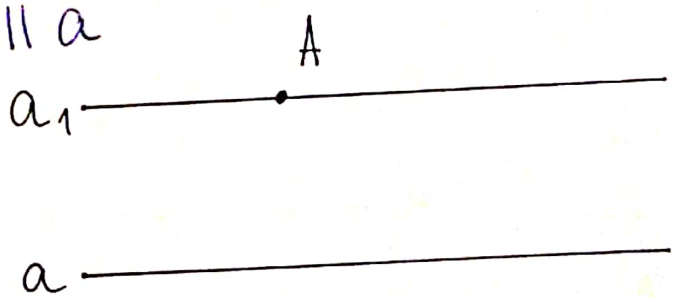
$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2} \iff g_1 \parallel g_2$$

3 сл. $r\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix} = 2 \iff \exists!$ т. $S = g_1 \cap g_2$

* * *

2 зад. (Успоредни прави)

Дадени са правата $a: 3.x+4.y+2=0$ и точка $A(1,-2)$. Да се намери уравнение на правата $a_1 \begin{cases} \ni A \\ \parallel a \end{cases}$.



Решение:

$a: 3x+4y+2=0$

$a_1 \parallel a \Rightarrow a_1: 3x+4y+C=0$

$A(+1,-2) \in a_1 \Rightarrow 3.1+4.(-2)+C=0$

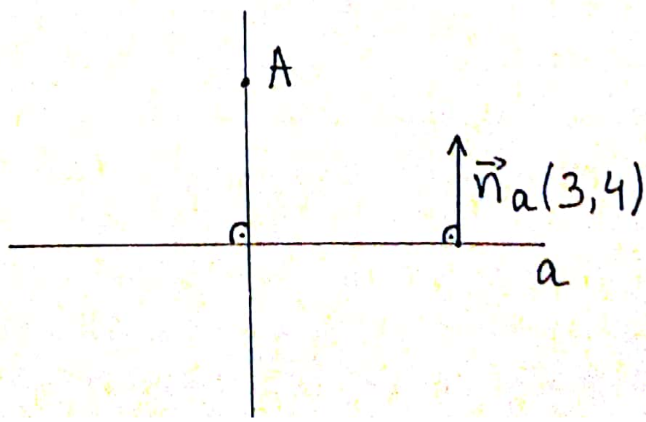
$C=5 \Rightarrow a_1: 3x+4y+5=0$

* * *

3 зад. (Перпендикулярни прави)

$a: 3x+4y+2=0$, $A(1,-2)$

Да се намери уравнение на правата $b \begin{cases} \ni A \\ \perp a \end{cases}$



Решение

$$в \begin{cases} \ni A(1,-2) \\ \parallel \vec{n}_a(3,4) \end{cases} \Rightarrow в: \begin{cases} x = 1 + 3.\lambda \;/.4 \\ y = -2 + 4.\lambda \;/.(-3) \end{cases} \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow в: 4x - 3y - 10 = 0$$

Извод: $a: 3.x + 4.y + 2 = 0 \quad \vec{n}_a(3,4)$

$в: 4.x - 3.y - 10 = 0 \quad \vec{n}_в(4,-3)$

$\vec{n}_a . \vec{n}_в = 0$

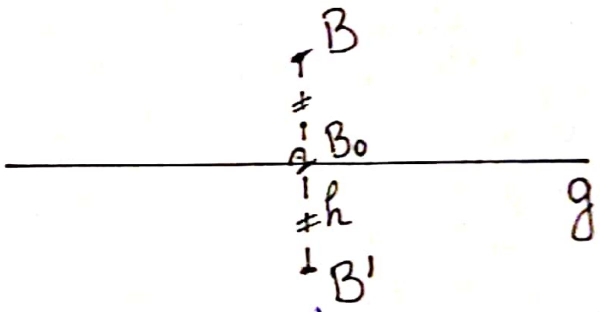
* * *

4 зад. (Симетрия относно права)

Дадени са права $g: x+y-1=0$ и т. $B(0,-1)$

σ_g − симетрия отн. g

т.$B \xrightarrow{\sigma_g}$ т. $B' \Leftrightarrow g \equiv s_{BB'}$



Да се намерят координатите на т. B'.

Решение:

1) Уравнения на $h \begin{cases} \perp g \\ \ni B \end{cases} \Rightarrow$

$g: x + y - 1 = 0$

$h: x - y + C = 0$

$B(0,-1) \Rightarrow C = -1$

$h: x - y - 1 = 0$

2) т. $B_0 = h \cap g$

$$\left| \begin{array}{l} x + y - 1 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow B_0(1,0)$$

3) B_0 е средата на BB'

$B(0,-1) \quad \frac{x'+0}{2} = 1 \Rightarrow x' = 2$

$B_0(1,0)$

$B'(x', y') \quad \frac{y'+(-1)}{2} = 0 \Rightarrow y' = 1$

$B'(2; 1)$

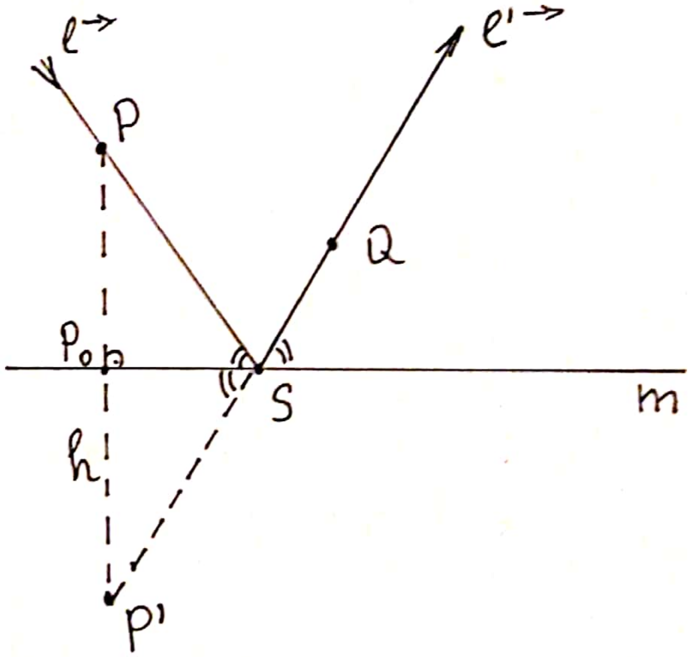
5 зад. (Светлинни лъчи)

Дадени са права $m: x+y-3=0$, т. $P(-5,4)$, т. $Q(-1,1)$

Светлинен лъч $\vec{l}$ минава през т. P, отразява се от правата m и отразеният лъч $\vec{l'}$ минава през т. Q.

Намерете уравнения на правите l и l', които съдържат лъчите.

Решение:



Важно:

Нека т. $P \xrightarrow{\sigma_m} P'$, то $P' \in l'$.

1) Намираме т. P'

$$h\begin{cases} \ni P(-5,4) \\ \perp m: x+y-3=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow h: x-y+C=0$

$P \in h \Rightarrow -5-4+C=0$

$h: x-y+9=0$

т. $P_0 = h \cap m$

$$\begin{vmatrix} x+y-3=0 \\ x-y+9=0 \end{vmatrix}$$

$x=-3$

$y=6$

т. $P_0(-3,6)$ - средата

т. $P(-5,4)$

т. $P'(x',y')$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{x'+(-5)}{2}=-3 \Rightarrow x'=-1$

$\dfrac{y'+4}{2}=6 \Rightarrow y'=8$

т. $P'(-1,8)$

2) общо уравнение на $l' \begin{cases} \ni Q(-1,1) \\ \ni P'(-1,8) \end{cases}$, т. $M(x,y)$ произв.

$$l': \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 8 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -7x-7=0 \,/:(-7)$$

$$l': x+1=0$$

Важно: От $x_Q = x_{P'} = -1 \Rightarrow x=-1$ за всяка точка от l' $\Rightarrow$ направо може да се напише

$$l': x=-1$$

3) Намираме т. $S = l' \cap m$

$$\begin{cases} x+y-3=0 \\ x=-1 \end{cases} \Rightarrow y=4 \Rightarrow S(-1;4)$$

4) общо уравнение на $l \begin{cases} \ni P(-5,4) \\ \ni S(-1,4) \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow l: y=4$$

* * *

6 зад. (Упражнение)

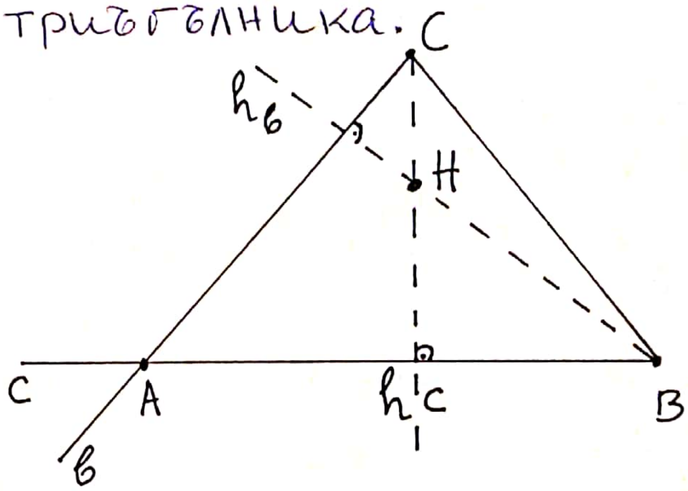
Дадени са т. $P(2,4)$ и т. $Q(0,1)$. Светлинен лъч $\vec{l} \ni P$, отразява се от абсцисната ос Ox $(y=0)$ и отразеният лъч $\vec{l'} \ni Q$. Намерете уравнения на правите l и l'.

7 зад. Дадени са:

в: $5x+4y-13=0$

c: $x+2y-5=0$ и т. $H(14,15)$

Да се намерят координатите на върховете на $\triangle ABC$, ако правите в и c съдържат съответно страните AC и AB, а т. H е ортоцентърът на триъгълника.



Решение:

1) т. $A = в \cap c$

$$\begin{cases} 5x+4y-13=0 \\ x+2.y-5=0 \end{cases}$$

т. $A(1;2)$ (?)

2) Уравнение на $h_c \begin{cases} \ni H(14,15) \\ \perp c: x+2y-5=0 \end{cases}$

$h_c: 2x-y+D=0$

$2.14-15+D=0$

$D=-13$

$\Rightarrow$ $h_c: 2x-y-13=0$

3) т. $C = h_c \cap в$

$$\begin{cases} 2x-y-13=0 \\ 5.x+4y-13=0 \end{cases}$$

т. $C(5,-3)$

За упр. $S_{\triangle ABC} = ?$

4) $h_в \begin{cases} \ni H(14,15) \\ \perp в: 5x+4y-13=0 \end{cases}$

$h_в: 4x-5y+19=0$ (?)

6) т. $B = h_в \cap c$

$$\begin{cases} 4x-5y+19=0 \\ x+2y-5=0 \end{cases}$$

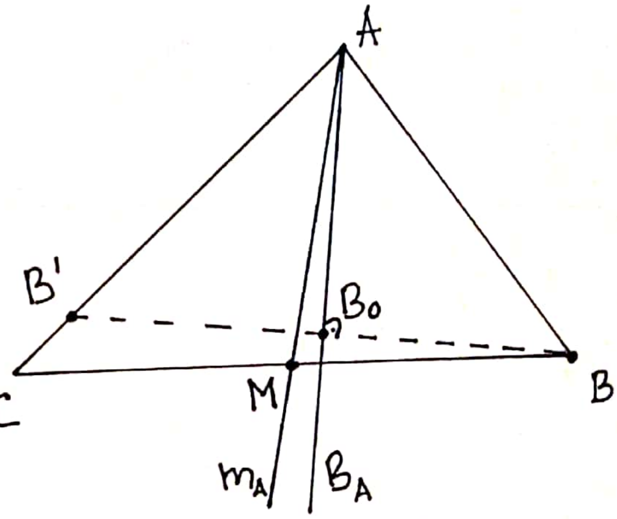
т. $B(-1,3)$

8 зад. Дадени са: $b_A: 2x-3y-5=0$

$m_A: x-8y+4=0$

т. $B(3,-4)$

а) Да се нам. коорд. на върховете B и C на $\triangle ABC$, за който b_A и m_A са съотв. ъглополовяща и медиана през върха A.



1) т. $A = b_A \cap m_A$

$$\left| \begin{aligned} 2x-3y-5=0 \\ x-8y+4=0 \end{aligned} \right. \Rightarrow A(4,1)$$

2) Нека т. $B \xrightarrow{\sigma_{b_A}}$ т. B',

тогава т. $B' \in AC$ (правата)

Намираме т. $B'(-1,2)$ (Упр.)

3) Общо уравнение на правата AB' $\begin{cases} \ni A(4,1) \\ \ni B'(-1,2) \end{cases}$

$$AB': \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow AB': x+5y-9=0$$

4) Търсим т. $C(x_c, y_c)$

$C \in AB' \Rightarrow x_c+5y_c-9=0 \quad (1)$

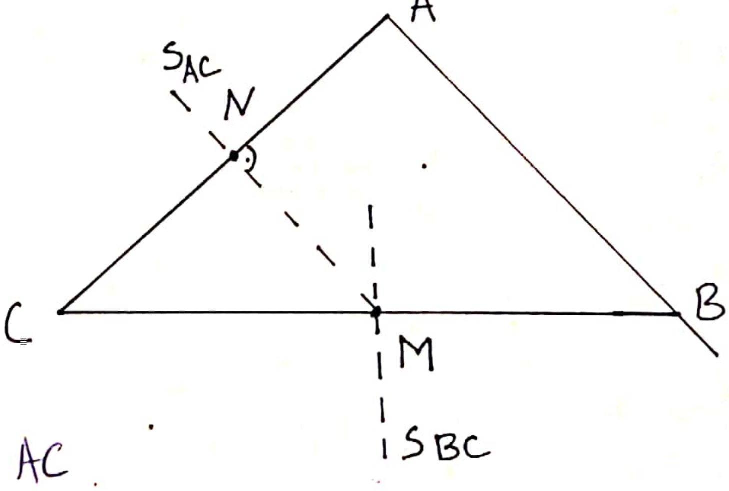
Нека т. M е средата на BC $\Rightarrow$ т. $M\left(\frac{x_c+3}{2}, \frac{y_c+(-4)}{2}\right)$

$M \in m_A \Rightarrow \left(\frac{x_c+3}{2}\right) - 8.\left(\frac{y_c-4}{2}\right)+4=0 \quad (2)$

От (1) и (2) $\Rightarrow C(-11,4)$

б) $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & 1 \\ -11 & 4 & 1 \end{vmatrix} \right| = 36$ кв. ед.

в) Да се намерят координатите на центъра S и радиуса на описаната около $\triangle ABC$ окръжност.



Търсим уравнения на две от симетралите S_{AC} и S_{BC}

1) $S_{AC} \begin{cases} \ni N \text{ - средата на } AC \\ \perp AC \equiv AB' \end{cases}$

$AB': x + 5y - 9 = 0$

т. $N\left(-\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right)$ $\Rightarrow$ $\underline{S_{AC}: 5x - y + 20 = 0}$

2) $S_{BC} \begin{cases} \ni M \text{ - средата на } BC,\ M(-4,0) \\ \perp BC: 4x + 7y + 16 = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\underline{S_{BC}: 7x - 4y + 28 = 0}$

3) т. $S = S_{AC} \cap S_{BC}$

$\begin{cases} 5x - y + 20 = 0 \\ 7x - 4y + 28 = 0 \end{cases} \Rightarrow$ $\underline{S(-4,0) \equiv \text{т. } M}$

4) $R = |\overrightarrow{MB}| = \sqrt{65}$

6 зад. (Ос на кръстосани прави) ДКС $K_1 = Oxyz$

$$a: \begin{cases} x = 5 + s \\ y = -1 + 2.s, \; s \in \mathbb{R} \\ z = 11 - s \end{cases}, \quad b: \begin{cases} x = -4 - 7p \\ y = 3 + 2p, \; p \in \mathbb{R} \\ z = 4 + 3p \end{cases}$$

а) Да се определи взаимното положение на a и b

За две прави в пространството има четири възможни взаимни положения:

$a \equiv b$, $a \parallel b$, $\exists!$ т. $S = a \cap b$, a и b - кръстосани

1) $a \parallel \vec{a}(1, 2, -1)$
$b \parallel \vec{b}(-7, 2, 3)$ $\Rightarrow$ $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са ЛНЗ, т.е. не са колинеарни

извод: $a \not\equiv b$, $a \nparallel b$

2) Остава да проверим дали a и b имат обща точка.

$$\left| \begin{array}{ll} x = 5 + s = -4 - 7p & (1) \\ y = -1 + 2s = 3 + 2p & (2) \\ z = 11 - s = 4 + 3p & (3) \end{array} \right.$$

От (1) и (3) $\Rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} p = -4 \\ s = 19 \end{array}}$

заместване в (2)

Не се получава вярно рав.

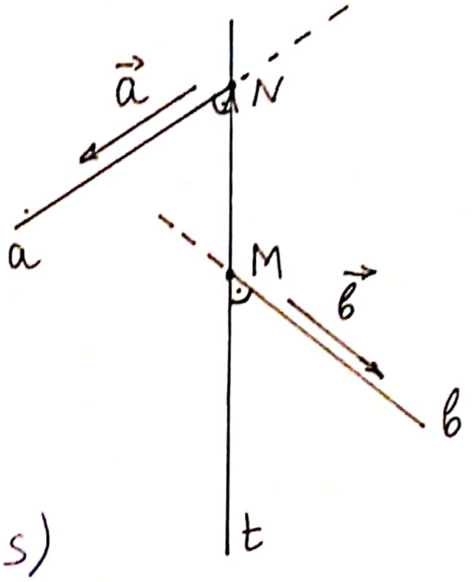
Извод: a и b не се пресичат

Окончателно: a и b са кръстосани.

Не съществува равнина, която да ги съдържа едновременно.

б) Да се намерят уравнения на оста t на кръст. прави a и b

Търсим координатите на:



$$\begin{cases} т.\ N \in a \\ т.\ M \in b \\ MN \perp a \\ MN \perp b \end{cases}$$

Тези условия еднозначно определят правата $MN \equiv t$

От $N \in a \Rightarrow N(5+s, -1+2s, 11-s)$

От $M \in b \Rightarrow M(-4-7p, 3+2p, 4+3p)$

$\overrightarrow{MN}(9+7p+s, -4-2p+2s, 7-3p-s)$

$\vec{a}(1, 2, -1)$

$\vec{b}(-7, 2, 3)$

$$\begin{cases} (\overrightarrow{MN} \cdot \vec{a}) = 0 \\ (\overrightarrow{MN} \cdot \vec{b}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (9+7p+s).1+(-4-2p+2s).2+(7-3p-s).(-1) = 0 \\ (9+7p+s).(-7)+(-4-2p+2s).2+(7-3p-s).3=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6p+6s=6 \\ -62p-6s=50 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} p=-1 \Rightarrow M(3, 1, 1) \\ s=2 \Rightarrow N(7, 3, 9) \end{matrix}$$

$\overrightarrow{MN}(4, 2, 8)$

$$t \begin{cases} \ni M \\ \parallel \overrightarrow{MN} \end{cases} \Rightarrow t \begin{cases} x = 3+2.\lambda \\ y = 1+1.\lambda \\ z = 1+4.\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$|\overrightarrow{MN}| = \sqrt{4^2+2^2+8^2} = \sqrt{84}$ разстояние между правите a и b

7 зад. (Упражнение) Да се намерят уравнения на оста на кръстосаните прави

$$a: \begin{cases} x = 7 + s \\ y = 0 + 2s \\ z = 1 + 2s \end{cases}, s \in \mathbb{R} \quad \text{и} \quad b: \begin{cases} x = -1 + 2p \\ y = -4 + 2p \\ z = 3p \end{cases}, p \in \mathbb{R}$$

и разстоянието между тях.

Отг. т. $N(9, 4, 5) \in a$
т. $M(5, 2, 9) \in b$

* * *

8 зад. ОКС $K = Oxyz$

$$m: \begin{cases} x = 2 - s \\ y = s \\ z = 1 + 2s \end{cases}, s \in \mathbb{R} \qquad g: \begin{cases} x + 2y + 2z - 1 = 0 \\ y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$$

$\alpha : x - z + 2 = 0.$

а) Намерете уравнения на оста на кръстосаните прави m и g, и разстоянието между тях;

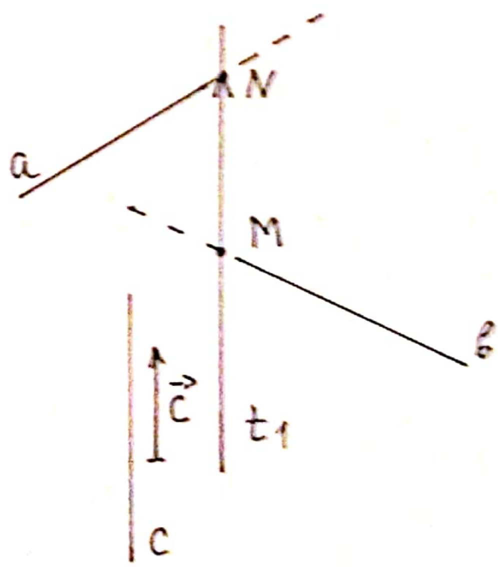
б) Намерете уравнения на ортогоналната проекция на правата g върху равнината α.

9 зад. (Трансверзали) ОКС $K = Oxyz$

$a: \begin{cases} x = p \\ y = -2+p \\ z = -1+2p \end{cases}, p \in \mathbb{R}, \quad b: \begin{cases} x+z=0 \\ y+z-2=0 \end{cases}, \quad c: \begin{cases} x = 1+2.q \\ y = -1+6.q \\ z = 2-1.q \end{cases}$

а) Да се намерят уравнения на онази трансверзала t_1 на a и b, която е успоредна на правата c;

I начин



1) Коорд. парам. уравн. на b

$b: \begin{cases} x+z=0 \\ y+z-2=0 \end{cases}$, изб. $z = s$

$b: \begin{cases} x = -s \\ y = 2-s \\ z = s \end{cases}, s \in \mathbb{R}$

$M \in b \Rightarrow M(-s, 2-s, s)$

$N \in a \Rightarrow N(p, -2+p, -1+2p)$

$\overrightarrow{MN}(p+s, -4+p+s, -1+2p-s) \parallel \vec{c}(2, 6, -1) \Rightarrow$

$\frac{p+s}{2} = \frac{-4+p+s}{6} = \frac{-1+2p-s}{-1}$

$\left| \begin{array}{l} -(p+s) = 2.(-1+2p-s) \\ 6.(p+s) = 2.(-4+p+s) \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{l} p = 0 \Rightarrow M(0,2,-1) \\ s = -2 \Rightarrow N(2,4,-2) \end{array} \Rightarrow t_1: \begin{cases} x = 2+2\lambda \\ y = 4+6\lambda \\ z = -2-\lambda \end{cases}$

$\lambda \in \mathbb{R}$

II начин (Упражнение)

1) Намира се уравнение на равнината $\beta \begin{cases} \ni a \\ \parallel c \end{cases}$

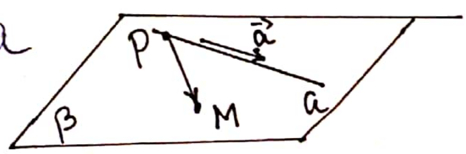
2) Намира се т. $N = b \cap \beta$

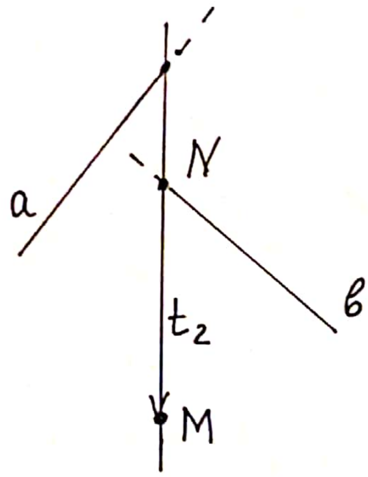
3) $t_1 \begin{cases} \ni N \\ \parallel \vec{c}(2, 6, -1) \end{cases}$

* * *

б) Да се намерят уравнения на онази трансверзала t_2 на a и b, която минава през т. $M(6, 0, 4)$

1) Търсим общо уравнение на $\beta \begin{cases} \ni M \\ \ni a \end{cases}$





$$\left.\begin{array}{l} \beta \parallel \vec{a}(1, 1, 2) \\ \beta \ni M(6, 0, 4) \\ \beta \ni P(0, -2, -1) \in a \end{array}\right\} \Rightarrow \beta \parallel \overrightarrow{PM}(6, 2, 5)$$

$$\beta: \begin{vmatrix} x-6 & y & z-4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \beta: x + 7y - 4z + 10 = 0$$

2) Търсим т. $N = b \cap \beta$

$$\left| \begin{array}{l} x = -s \\ y = 2 - s \\ z = s \\ x + 7y - 4z + 10 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow s = 2, \quad N(-2, 0, 2), \quad M(6, 0, 4), \quad \overrightarrow{NM}(8, 0, 2) \Rightarrow t_2: \begin{cases} x = 6 + 4 \cdot \mu \\ y = 0 \\ z = 4 + 1 \cdot \mu \end{cases}, \mu \in \mathbb{R}$$