1

Упражнение 23 за 1, 2 и 3 група

Примери за изследване на функция

Зад. 1 Изследвайте функцията $f(x)=\frac{x^2}{x^2-1}$ и начертайте графиката ѝ.

Решение: $f(x)$ е дефинирана, непрекъсната и диференцируема в $\mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$.

$$f(-x)=\frac{(-x)^2}{(-x)^2-1}=\frac{x^2}{x^2-1}=f(x) \text{ при } x\in\mathbb{R}\setminus\{\pm1\}$$

Сл. $f(x)$ е четна функция и е достатъчно да я изследваме за $x\in[0,+\infty)$.

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to1^+} f(x)=+\infty\\ \lim_{x\to1^-} f(x)=-\infty\end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{правата } x=1 \text{ е вертикална асимптота на } f(x)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{x^2}}=1,$$ сл. правата $y=1$ е хоризонтална асимптота на $f(x)$ при $x\to+\infty$.

$$f'(x)=\frac{2x.(x^2-1)-x^2.2x}{(x^2-1)^2}=\frac{-2x}{(x^2-1)^2},\ x\in\mathbb{R}\setminus\{\pm1\}$$

$$f''(x)=-2.\frac{1.(x^2-1)^{\cancel{2}}-x.2\cancel{(x^2-1)}.2x}{(x^2-1)^{\cancel{4}3}}=$$

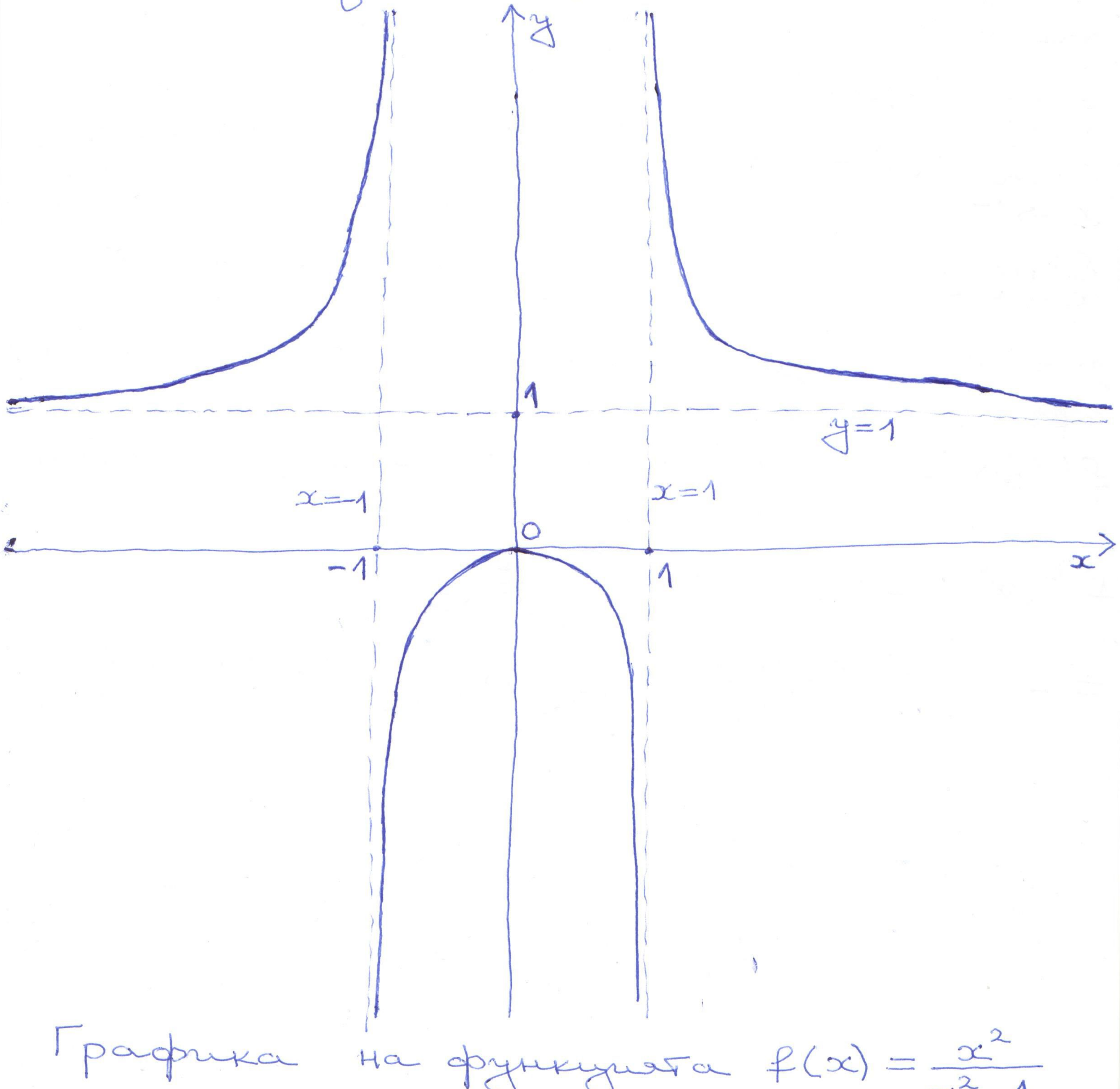
$$=-2\frac{(x^2-1)-4x^2}{(x^2-1)^3}=2.\frac{3x^2+1}{(x^2-1)^3},\ x\in\mathbb{R}\setminus\{\pm1\}$$

(2) $f'(x)=\dfrac{-2x}{(x^2-1)^2},\ x\in\mathbb{R}\setminus\{\pm 1\};\quad f''(x)=\dfrac{2(3x^2+1)}{(x^2-1)^3},\ x\in\mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$

x	0		1	
f'		$-$		$-$
f		$\searrow$		$\searrow$

x	0		1	
f''		$-$		$+$
f		$\cap$		$\cup$

$$\boxed{f(x)=0 \Leftrightarrow x=0}$$



Графика на функцията $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-1}$

③ Зад. 2 Изследвайте функцията $f(x)=(x+6)e^{\frac{1}{x}}$ и начертайте графиката ѝ.

Решение: $f(x)$ е дефинирана, непрекъсната и диференцируема в $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

$f(-x)=(-x+6)e^{\frac{1}{-x}}\neq\pm f(x)$, сл. $f(x)$ не е четна или пък нечетна функция.

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=6.(+\infty)=+\infty \Rightarrow$ правата $x=0$ е вертикална асимптота на $f(x)$

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=6.0=0$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\left(1+\frac{6}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}\right]=1,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-1.x\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[(x+6)e^{\frac{1}{x}}-x\right]\overset{t=\frac{1}{x}}{=}$$

$$=\lim_{t\to0^\pm}\left[\left(\frac{1}{t}+6\right)e^{t}-\frac{1}{t}\right]=\lim_{t\to0^\pm}\frac{(1+6t)e^t-1}{t}\overset{\text{Л.}}{=}$$

$$=\lim_{t\to0^\pm}\frac{6e^t+(1+6t)e^t}{1}=6+1.1=7$$

Сл. правата $y=x+7$ е наклонена асимптота на $f(x)$ както при $x\to+\infty$, така и при $x\to-\infty$.

$$f'(x)=1.e^{\frac{1}{x}}+(x+6)e^{\frac{1}{x}}.\left(-\frac{1}{x^2}\right)=e^{\frac{1}{x}}.\left(1-\frac{x+6}{x^2}\right)=$$

$$=e^{\frac{1}{x}}\,\frac{x^2-x-6}{x^2}=e^{\frac{1}{x}}\,\frac{(x+2)(x-3)}{x^2},\ x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$$

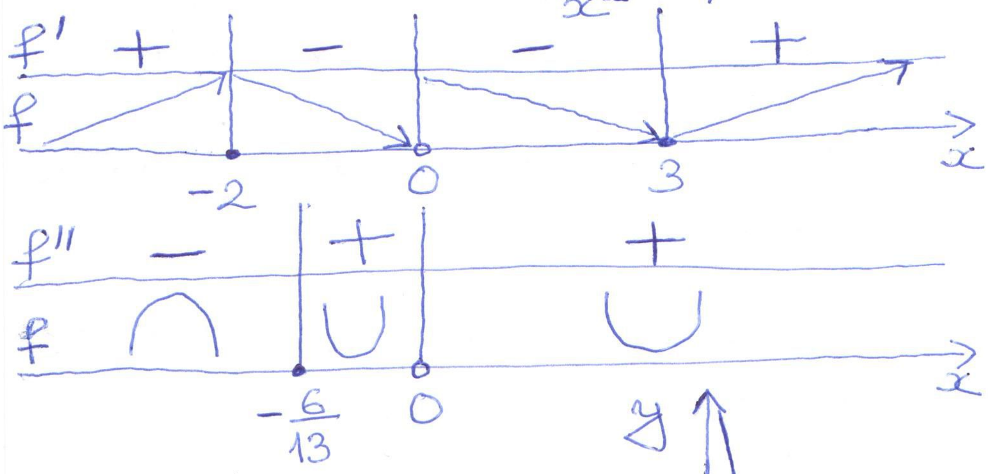
Понеже $f'(x)=e^{\frac{1}{x}}\left(1-\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}\right),\ x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, то

$$f''(x)=e^{\frac{1}{x}}.\left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(1-\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}\right)+e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{12}{x^3}\right)=$$

$$=e^{\frac{1}{x}}\left(-\cancel{\frac{1}{x^2}}+\frac{1}{x^3}+\frac{6}{x^4}+\cancel{\frac{1}{x^2}}+\frac{12}{x^3}\right)=$$

$$=e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{13}{x^3}+\frac{6}{x^4}\right)=e^{\frac{1}{x}}\,\frac{13x+6}{x^4},\ x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$$

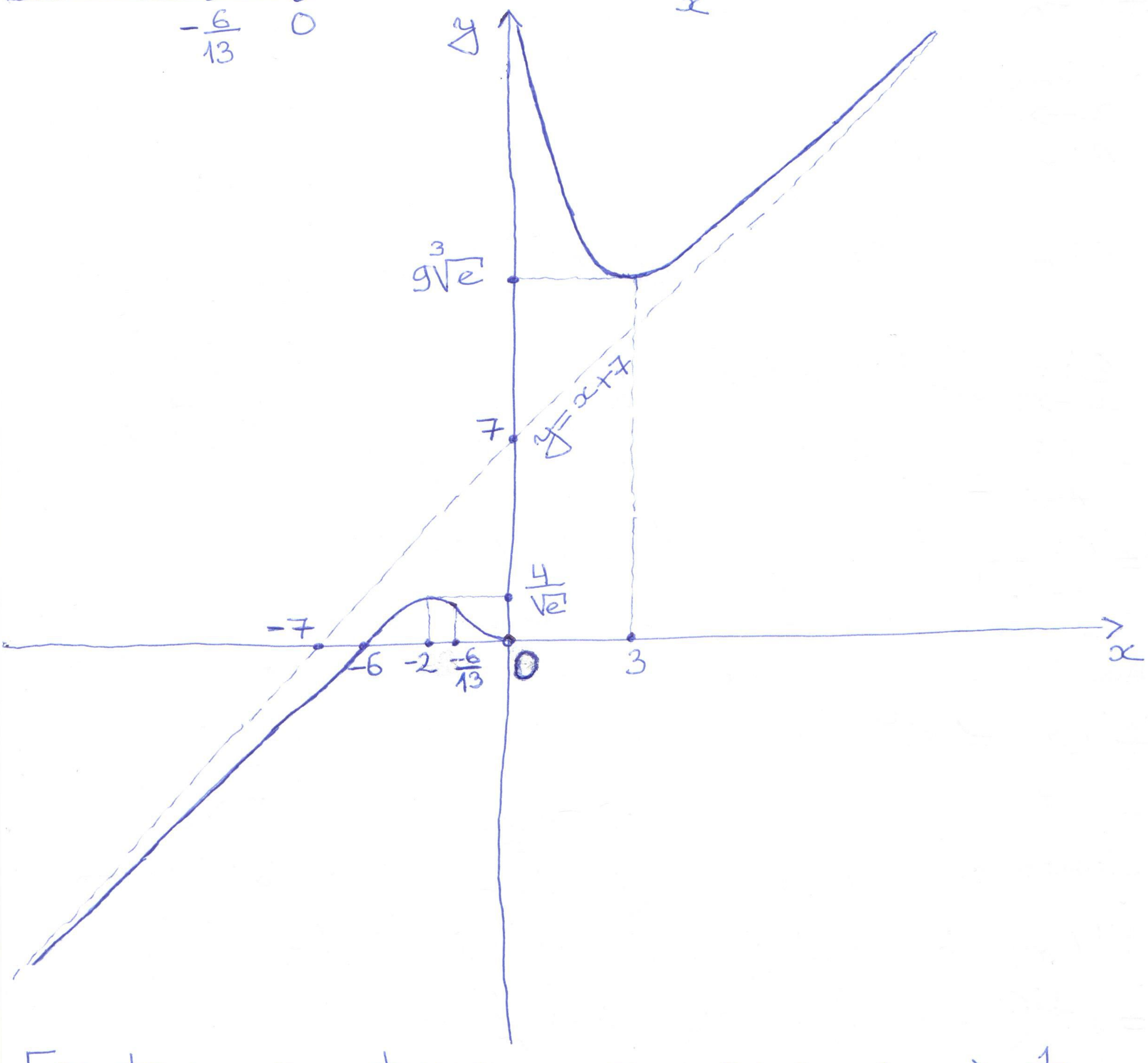
(4) $f'(x)=e^{\frac{1}{x}}\dfrac{(x+2)(x-3)}{x^2},\ x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$; $f''(x)=e^{\frac{1}{x}}\dfrac{13x+6}{x^4},\ x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$



$f(-2)=\dfrac{4}{\sqrt{e}}$

$f(3)=9\sqrt[3]{e}$

$f(x)=0 \Leftrightarrow x=-6$



Графика на функцията $f(x)=(x+6)e^{\frac{1}{x}}$

В следващото упражнение ще разгледаме още един пример за изследване на функция.