① 2019.06.08

Азбука – крайно мн-во

Дума – крайна редица от ел. на Σ

Език – мн-во от думи

* * *

$\circ$ на думи

$$u = a_1a_2 \dots a_n \qquad v = b_1b_2 \dots b_m$$

$$u \circ v = a_1a_2 \dots a_n b_1b_2 \dots b_m$$

$$|u| = n \qquad |v| = m$$

e – празна дума

$$|e| = 0$$

* * *

Операции над езици

$\cup$ $\quad L_1 \cup L_2$

$\circ$ $\quad L_1 \circ L_2 = \{\alpha \circ \beta \mid \alpha \in L_1, \beta \in L_2\}$

$n \in \mathbb{N}$, L – език

$$L^n = \begin{cases} \{e\} & n = 0 \\ L \circ L^{n-1} & n \geq 1 \end{cases}$$

$*$ $\quad L^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} L^n$

Σ^* – езикът от всички думи над Σ

Деф | Регулярен език над Σ (азбука)

- $\emptyset$, $\{e\}$, $\{a\}$ за $a \in \Sigma$ са регулярни
- Ако L_1 и L_2 са регулярни, то $L_1 \circ L_2$, $L_1 \cup L_2$, L_1^* са регулярни

Деф | Недетерминиран краен автомат

$A = \langle \Sigma, Q, s, \Delta, F \rangle$, където

1/ Σ - азбука

2/ Q - крайно мн-во (от състояния)

3/ $s \in Q$ - начално състояние

4/ $\Delta \subseteq Q \times \Sigma \times Q$ $(\Delta \subseteq Q \times (\Sigma \cup \{e\}) \times Q)$

5/ $F \subseteq Q$ - финални състояния

$$\Delta^* \subseteq Q \times \Sigma^* \times Q$$

$$\Delta^{(0)} = \{ (q, \varepsilon, q) \mid q \in Q \}$$

$$\Delta^{(n+1)} = \{ (p, \alpha, a, r) \mid \exists q \in Q((p, \alpha, q) \in \Delta^{(n)} \land (q, a, r) \in \Delta \}$$

$$\Delta^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Delta^{(n)}$$

$$L(A) = \{ \alpha \in \Sigma^* \mid \exists f \in F((s, \alpha, f) \in \Delta^*) \}$$

Теорема на Клини

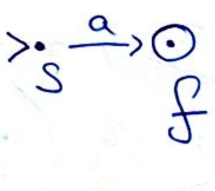
Нека | Σ е азбука и $L \subseteq \Sigma^*$. Тогава следните са еквивалентни:

1) L - регулярен език

2/ има краен автомат A с $L(A) = L$

Д-во 1/ => 2/ → индукция по деф на рег. език

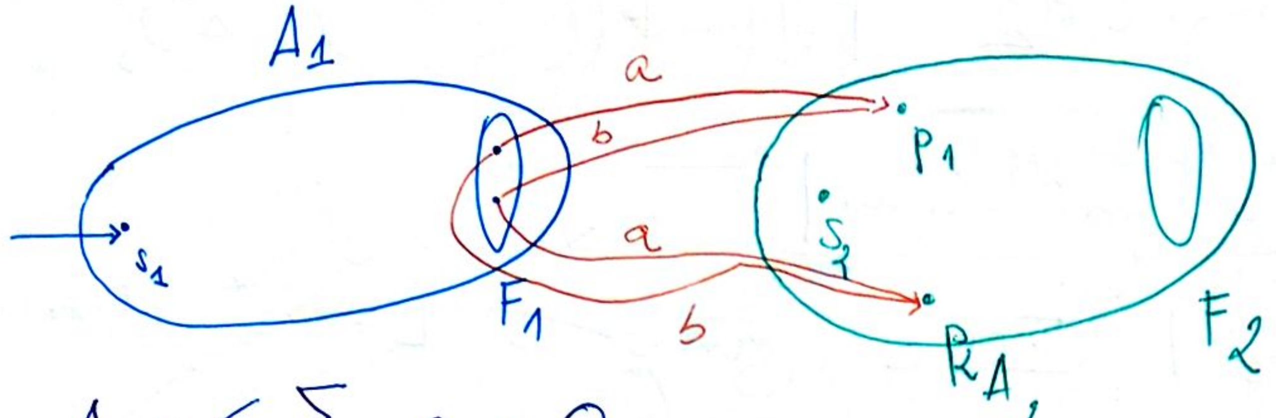
- $L = \emptyset$; $L = \{\varepsilon\}$; $L = \{a\}$



- Нека L_1 и L_2 - регулярни езици и

да допуснем, че $A_i = \langle \Sigma, Q_i, s_i, \Delta_i, F_i \rangle$, за $i=1,2$

Дсд $L(A_\cup) = L(A_1) \cup L(A_2)$



$A_0 = \langle \Sigma, Q_1 \cup Q_2, s_1, \Delta, F \rangle$

$\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \{(f_1, a, p_2 \mid f_1 \in F_1 \wedge (s_2, a, p_2) \in \Delta_2\}$

$F = \begin{cases} F_2, & s_2 \notin F_2 \\ F_1 \cup F_2, & s_2 \in F_2 \end{cases}$

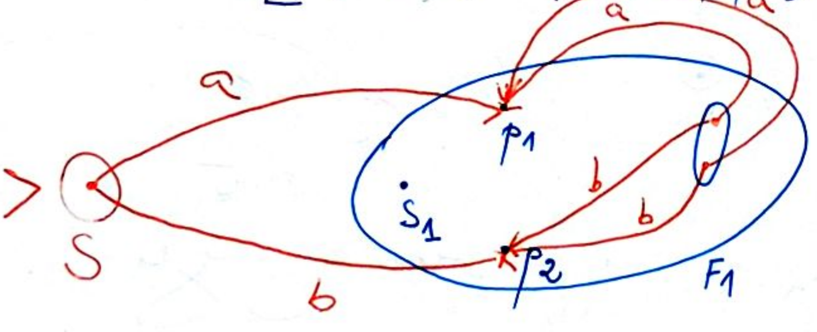
$\boxed{\text{Тогава } L(A_0) = L(A1) \cdot L(A_2)}$

$A_* = \langle \Sigma, Q_1 \cup \{s\}, s, \Delta, F_1 \cup \{s\} \rangle$,

където $s \notin Q1$

$\Delta = \Delta_1 \cup \{(f, a, p_1) \mid f \in F_1 \wedge$

$(s, a, p_2$



Ⓐ$_1$

Тогава $L(A_*) = (L(A_1))^*$

Ⓐ$_2$ В известен смисъл "рестартираме" автомата, ако се намираме в някое финално състояние

Доказателство за итерация | $L(A_*) = (L(\Delta_1)$

Нека $\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_m \in L(\Delta_1) \setminus \{e\}$. Тогава

има $f_1, f_2, \dots, f_m$:

$(s_1, \alpha_1, f_1) \in \Delta_1^*$. Тогава

- $\alpha_1 = a\beta_1 \xrightarrow{def} \Delta \quad (s, \alpha_1, f_1) \in \Delta^*$,

защото ако $\langle s_1, a_1, p_1 \rangle \in \Delta_1$ и $\langle p_1, \beta_1, f_1$

$\Rightarrow \langle s, a, p_1 \rangle \in \Delta$ и $\langle p_1, \beta_1 \overset{\in \Delta_1}{,} f_1 \rangle \in \Delta^*$

- Освен това $\langle f_{1-1}, a, p_1 \rangle \in \Delta \Rightarrow$

$\langle f_{1-1}, a\beta_1, f_1 \rangle \in \Delta^*$

$\Rightarrow \langle s, \alpha_1, f_1 \rangle \in \Delta^*$ и $\langle f_1, \alpha_{1+1}, f_{1+1} \rangle \in \Delta$

за $i \geq 1 \Rightarrow \langle s, \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_m, f_m \rangle \in \Delta^*$

$\Rightarrow \alpha_1 \dots \alpha_m \in L(A_*)$

Сега ако $\alpha \in L(\Delta_1)$, то

~~$\alpha \in$~~ $\alpha = \varepsilon$ и тогава $\varepsilon \in L(\Delta_*)$,

защото $s \in F_1 \cup \{s\}$. Или $\alpha \in L(\Delta_1)^* \setminus \{$

Тогава $\alpha = \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_m$ за някои ненулев
непразни

$\alpha_1, \dots, \alpha_m \in L(A_1) \Rightarrow$

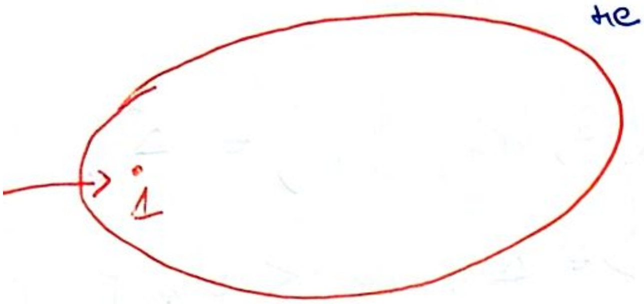
$\Rightarrow L(A_1)^* \subseteq L(A_*)$

$2/ \to 1/$

Нека $A = \langle \Sigma, Q, s, \Delta, F \rangle$ е краен автомат

Б.о.о. може да предполагаме, че $Q = \{1, 2, \dots, n\}$

и $s = 1$. $R_{ij}^{(k)} = \{\alpha \in \Sigma^* \mid \langle i, \alpha, j \rangle \in \Delta^*$ като не използваме вътрешни състояния от $\{k+1, \dots, n\}$



(В частност при $k = n$

$$R_{ij}^{(n)} = \{\alpha \mid \langle i, \alpha, j \rangle \in \Delta^*\}$$

Ще разглеждаме пътища в A, които имат допълнително ограничения да не използват някои върхове

С индукция по k ще докажем, че $\forall i \forall j$ ($R_{ij}^{(k)}$ - регулярен) $(*)$

Ако $(*)$ е вярно, то

$$L(A) = \{\alpha \mid \exists f \in F (\langle 1, \alpha, f \rangle \in \Delta^*)\} =$$

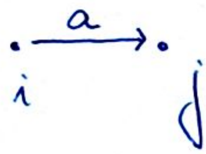
$$= \bigcup_{f \in F} R_{1,f}^{(n)}$$ е крайно обединение на регулярни езици $\Rightarrow$

$L(A)$ е регулярен!

Доказване (*)

ⒾⒽ

1. $k = 0$ $R_{ij}^{(0)}$ не допуска вътрешни състояния по пътищата от i до j. Тогава тези пътища са или



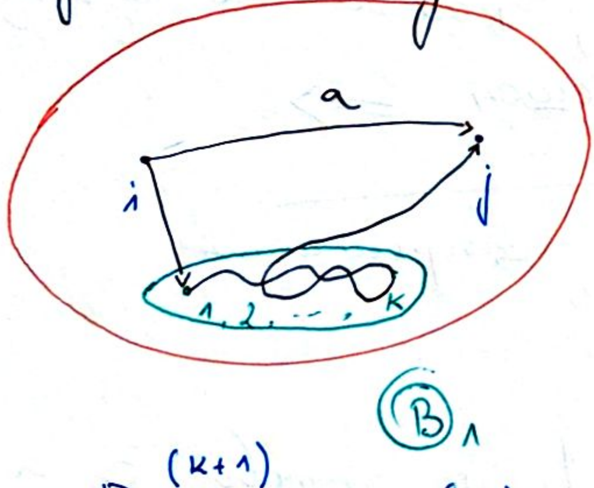
или

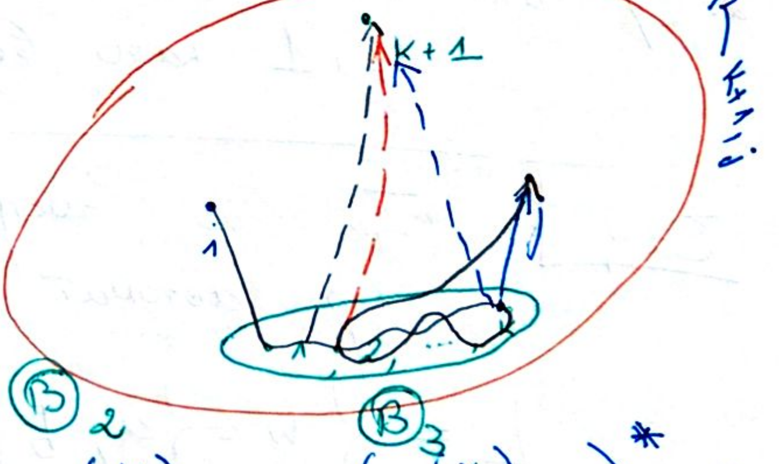
$$\Rightarrow R_{ij}^{(0)} = \begin{cases} \{a \mid \langle i,a,j\rangle \in \Delta\} & i \neq j \\ \{e\} \cup \{a \mid \langle i,a,j\rangle \in \Delta\}, & i = j \end{cases}$$

Тъй като $\{a\}$ за $a \in \Sigma$ и $\{e\}$ са регулярни $\Rightarrow$ $R_{ij}^{(0)}$ е регулярен за всички

$1 \le i, j \le n$

$$R_{i,j}^{(k+1)} = R_{ij}^{(k)} \cup R_{i,k+1}^{(k)} \left(R_{k+1,k+1}^{(k)}\right)^{*} R_{k+1,j}^{(k)}$$





$$R_{ij}^{(k+1)} = R_{ij}^{(k)} \cup R_{i,k+1}^{(k)} \cup \left(R_{k+1,k+1}^{(k)}\right)^{*} \cup$$

Ⓑ$_4$ $R_{k+1,j}^{(k)}$ ■

Пътищата, които определят $R_{ij}^{(k+1)}$ се разбиват на две части

Ⓑ$_1$ 1/ не използват k+1 !

$(R_{ij}^{(k)})$

Ⓑ$_2$ 2/ използват k+1 !

Всеки път, който започва в i, стига до j и минава през k+1 се разбива на:

Ⓑ$_2$ 2.1/ път, който започва в i до k+1 (без да използва k+1)

Ⓑ$_3$ 2.2/ няколко пътя от k+1 до k+1 (никои от които не използва k+1 като вътрешен)

Ⓑ$_4$ 2.3/ път от k+1 до j, който не използва k+1 като вътрешен $\Rightarrow$

Зад. Да се построи детерминиран кр. автомат

$L = \{ w \in \{a, b\}^* \mid w$ започва с $\underline{\underline{a}} \Leftrightarrow w$ завършва с $b \}$

$= \{ w \in \{a,b\}^* \mid w$ започва с $\underline{\underline{a}}$ и
w завършва с $\underline{\underline{b}} \}$

$\cup \{ w \in \{a,b\}^* \mid w$ не започва с $\underline{\underline{a}}$ и
w не завършва с $\underline{\underline{b}} \} =$

$= [\{ w \in \{a,b\}^* \mid w$ започва с $\underline{\underline{a}} \} \cap$
$\{ w \in \{a,b\}^* \mid w$ завършва с $\underline{\underline{b}} \}]$
$\cup [\{a,b\}^* \setminus \{ w \in \{a,b\}^* \mid w$ започво с $\underline{\underline{a}} \}$
$\cap \{a,b\}^* \setminus \{ w \in \{a,b\}^* \mid w$ завършва с $\underline{\underline{b}} \}]$

$L_a = \{ w \in \{a,b\}^* \mid w$ започва с $\underline{\underline{a}} \} =$

$= \{a\} \circ \{a,b\}^*$

$L_b = \{ w \in \{a,b\}^* \mid w$ завършво с $\underline{\underline{b}} \} =$

$= \{a,b\}^* \circ \{b\}$

$\overline{L_a} = \{a,b\}^* \setminus L_a$

$\overline{L_b} = \{a,b\}^* \setminus L_b$

Пример за друга формулировка!

$\{w$ започва с $a \Rightarrow w$ завършва с $b\}$

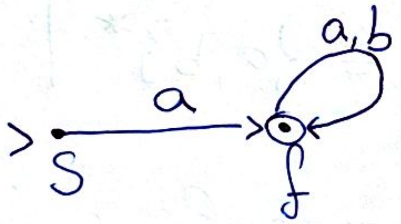
$= \{a, b\}^* \setminus \{w$ започва с a и w не завършва с $b\} =$

$= \{a, b\}^* \setminus (L_a \cap \overline{L}_b)$

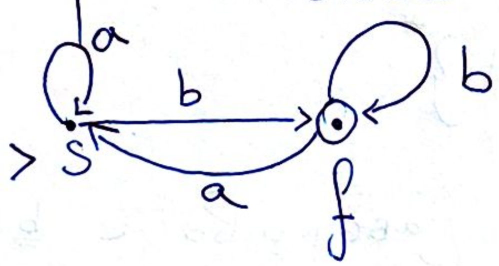
$\cap, \Sigma^* \setminus$ – получаваме детерминиран автомата

× × ×

Нека построим автомати за L_a



Нека построим автомат за L_b



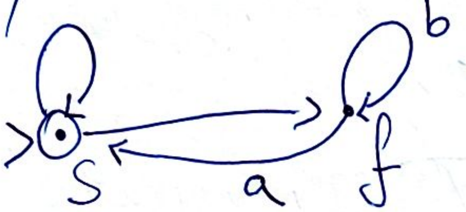
Защо? В f влизат само преходи с b $\land$ начално b $\Rightarrow$ $\forall$ думи, които завършват с b се разпознават от езика.

Нека $\alpha = \beta b$. Тъй като автоматът е тотален, $\delta^*(s, \beta) = p$ е деф. От диаграмата се не $\delta(p, b) = f$ за $p \in \{s, f\}$!

$$\Rightarrow \delta^*(s, \alpha) = f \Rightarrow \alpha \in L(A)$$

$\delta^*(s, \beta) = p$ ≡ след прочитане на β - тука се намираме в p

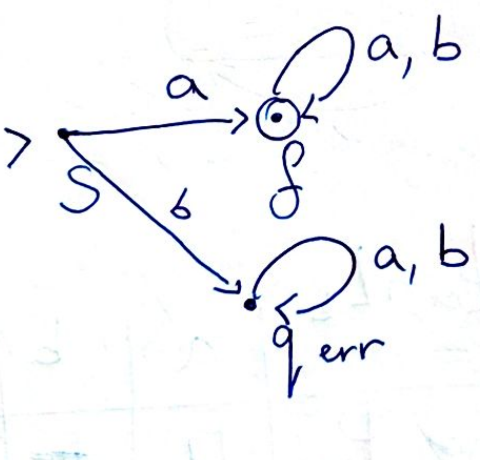
Нека за $\overline{L_b} = \{a, b\}^* \setminus L_b$ (автоматът е тотален) построим автомат



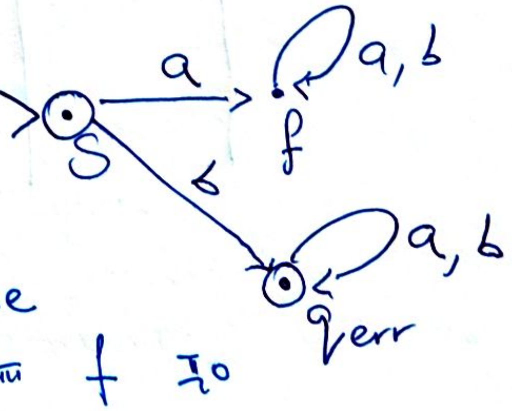
← Обръщаме финалността на състоянията

Тук L_a не е тотален ⇒ Ако искаме да получим допълнение ⇒ Допълваме до тотален

⇒ Обръщаме финалността на състоянията



⇒ $\overline{L_a} = \{a, b\}^* \setminus L_a$



f не е кодостижимо (не съществува път от f до финално състояние) ⇒ Може да го махнем!

$L_a \cap L_b$

$\langle a, b \rangle$

↑ за L_a ↑ за L_b

	a	b
→ $\langle s, s\rangle$	$\langle f, s\rangle$	—
$\langle f, s\rangle$	$\langle f, s\rangle$	$\langle f, f\rangle$
$\underline{\underline{\langle f, f\rangle}}$	$\langle f, s\rangle$	$\langle f, f\rangle$

Финалните състояния са двойки от фин. състояния на двата автомата.

В случая само $\langle f, f\rangle$

Упражнение: $L_a \cap \overline{L_a}$

$\overline{L_b} \cap \overline{L_a}$

	a	b
> * $\langle s, s\rangle$	—	$\langle f, q_{err}\rangle$
$\langle f, q_{err}\rangle$	$\langle s, q_{err}\rangle$	$\langle f, q_{err}\rangle$
* $\langle s, q_{err}\rangle$	$\langle s, q_{err}\rangle$	$\langle f, q_{err}\rangle$

$L_a \cap L_b$	a	b
→ P_1	P_2	~~P_2~~
P_2	P_2	P_3
* P_3	P_2	P_3

$\overline{L_a} \cap \overline{L_b}$

	a	b
$\rightarrow {}^{*}Q_1$	–	Q_2
Q_2	Q_3	Q_2
${}^{*}Q_3$	Q_3	Q_2

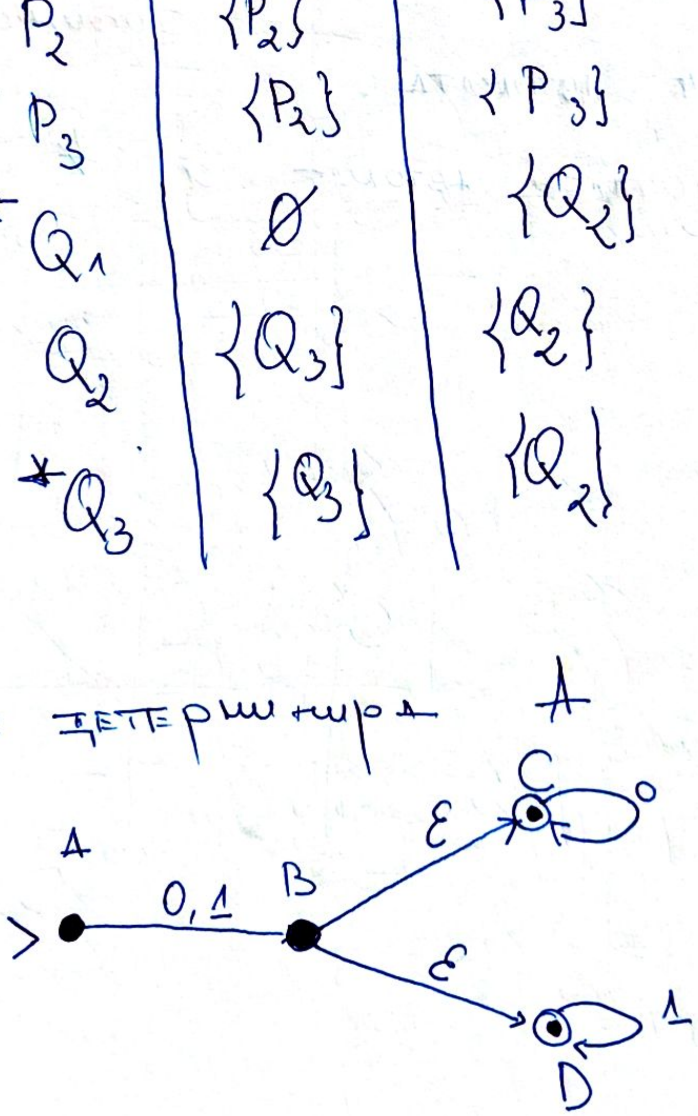
$L = (L_a \cap L_b) \cup (\overline{L_a} \cap \overline{L_b})$

	a	b
$\rightarrow {}^{*}S$	$\{P_2\}$	$\{Q_2\}$
P_1	$\{P_2\}$	$\emptyset$
P_2	$\{P_2\}$	$\{P_3\}$
${}^{*}P_3$	$\{P_2\}$	$\{P_3\}$
${}^{*}Q_1$	$\emptyset$	$\{Q_2\}$
Q_2	$\{Q_3\}$	$\{Q_2\}$
${}^{*}Q_3$	$\{Q_3\}$	$\{Q_2\}$

От всяко състояние с ∀ буква излиза 1 преход => можем да приемем, че автоматът е детерминиран ■

Зад 1

Да се детерминира



Тук можем да прочетем думи от следния вид:

$$a_1a_2a_3 = \underline{\varepsilon\varepsilon\varepsilon}\,|\,\underline{a_1\,\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon}\,|\,\underline{a_2\,\varepsilon\varepsilon\dots\varepsilon}\,|\,\underline{a_3\,\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\dots\varepsilon}\,|$$

	0	1
→ $\{A\}$	$\{B, \underline{\underline{C}}, \underline{\underline{D}}\}$	$\{B, \underline{\underline{C}}, \underline{\underline{D}}\}$
* $\{B, C, D\}$	$\{C\}$	$\{D\}$
* $\{C\}$	$\{C\}$	$\emptyset$
* $\{D\}$	$\emptyset$	$\{D\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

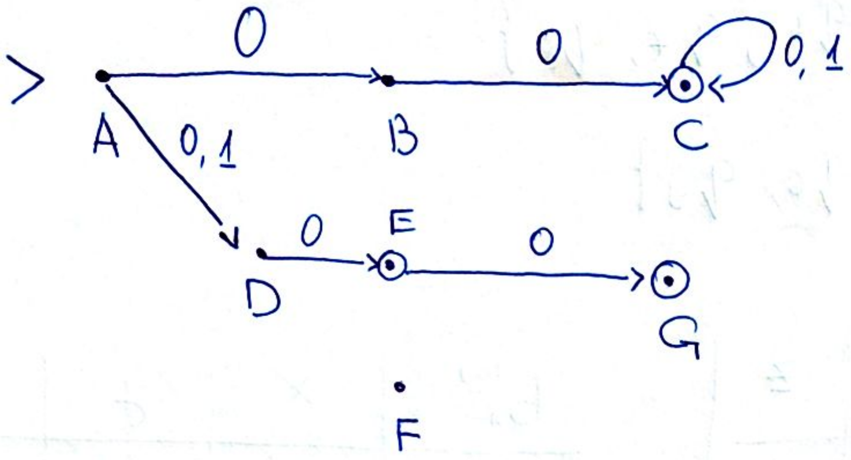
Началните състояни са всички начални с-яния и всички с-яния, достижими с ε преходи

∀ ε преходи, достижими от B

Нека минимизираме автомата.

Тук имаме тотален автомат и ∀ състояние е достижимо.

Зад. Нека минимизираме и детерминираме автомата



Зад. Нека минимизираме автомата

	q	X	Y	Z
0	✓ $> {}^{*}q_1$	q_3 ✓	q_9	q_7
0	*✓ q_2	q_3	q_5	q_4
1	✓ q_3	q_4	q_6	q_3
0	*✓ q_4	q_9	q_9	q_2
1	✓ q_5	q_8	q_9	q_9
1	✓ q_6	q_2	q_6	q_2
0	*✓ q_7	q_5	q_5	q_1
0	*✓ q_8	q_5	q_5	q_1
1	✓ q_9	q_7	q_5	q_5

1/ Тотален и детерминиран, но не знаем дали ∀ състояния са достижими.

2/ Обхождане в широчина и премахване недостижимите състояния

3/ Тест на едната буква

Разделяне на финални и всички останали състояния

стъпка

$B_0^{(0)} = \{q_1, q_2, q_4, q_7, q_8\}$

$B_1^{(0)} = \{q_3, q_5, q_6, q_9\}$

I стъпка

$B_0^{(0)}$	x	y	z
q_1	$B_1^{(0)}$	$B_1^{(0)}$	$B_0^{(0)}$
q_2	$B_1^{(0)}$	$B_1^{(0)}$	$B_0^{(0)}$
q_4	$B_1^{(0)}$	$B_1^{(0)}$	$B_0^{(0)}$
q_7	$B_1^{(0)}$	$B_1^{(0)}$	$B_0^{(0)}$
q_8	$B_1^{(0)}$	$B_0^{(0)}$	$B_0^{(0)}$

$B_1^{(0)}$	x	y	z	
q_3	$B_0^{(0)}$	$B_1^{(0)}$	$B_1^{(0)}$	+
q_5	$B_0^{(0)}$	$B_1^{(0)}$	$B_1^{(0)}$	+
q_6	$B_0^{(0)}$	$B_1^{(0)}$	$B_0^{(0)}$	-
q_9	$B_0^{(0)}$	$B_1^{(0)}$	$B_1^{(0)}$	+

II стъпка

$B_0^{(1)}$	x	y	z
q_1	$B_1^{(1)}$	$B_1^{(1)}$	$B_0^{(1)}$
q_2	$B_1^{(1)}$	$B_1^{(1)}$	$B_0^{(1)}$
q_4	$B_1^{(1)}$	$B_1^{(1)}$	$B_0^{(1)}$
q_7	$B_1^{(1)}$	$B_1^{(1)}$	$B_0^{(1)}$
q_8	$B_1^{(1)}$	$B_1^{(1)}$	$B_0^{(1)}$

$B_1^{(1)}$	x	y	z
q_3	$B_0^{(1)}$	$B_2^{(1)}$	$B_1^{(1)}$
q_5	$B_0^{(1)}$	$B_1^{(1)}$	$B_1^{(1)}$
q_9	$B_0^{(1)}$	$B_1^{(1)}$	$B_1^{(1)}$

$B_2^{(1)}$	x	y	z
q_6			

$\Uparrow$

Ненужно: Мн-вос 1елем

$B_0^{(2)} = \{q_1, q_2, q_4, q_7, q_8\}$

$B_1^{(2)} = \{q_5, q_9\}$

$B_2^{(2)} = \{q_6\}$

$B_3^{(2)} = \{q_3\}$

$B_1^{(2)}$	x	y	z
q_5	$B_0^{(2)}$	$B_1^{(2)}$	$B_1^{(2)}$
q_9	$B_0^{(2)}$	⋮	⋮

$B_0^{(2)}$	x	y	z
q_1	$B_3^{(2)}$	$B_1^{(2)}$	$B_0^{(2)}$
q_2	$B_3^{(2)}$	$B_1^{(2)}$	$B_0^{(2)}$
q_4	⋮	⋮	⋮
q_7			
q_8			

■

Pumping Lemma

Нека L – регулярен. Тогава $\exists n \in \mathbb{N}$:

за $\forall$ дума $w \in L$ с $|w| \geq n$ има:

$x, y, z : w = xyz$ и

1) $|xy| \le n$

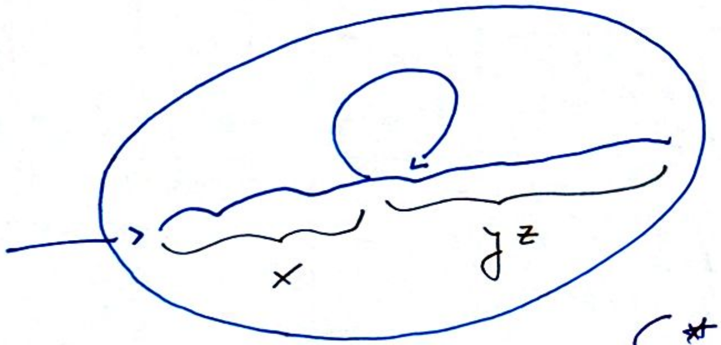
2) $|y| \ge 1$

3) $\forall_i \, (xy^i z \in L)$

Д-во| Тъй като L - регулярен, то има краен детерминиран автомат с език $L(A) = L$

$$A = \langle \Sigma, Q, s, \delta, F \rangle$$

Ще докажем, че $n = |Q|$ има желаното св-во



Нека $\alpha = a_1 a_2 \dots a_m \in L$ и $m = |\alpha| \ge n$

Тогава $\delta^*(s, a_1 \dots a_m) \in F$

В частност $p_i = \delta^*(s, a_1 a_2 \dots a_i)$ са дефинирани

$p_0 = S, p_1, p_2, \dots, p_m$ е редица от $m+1 \ge n+1$ състояния $\Rightarrow \exists i \ne j \, (p_i - p_j)$

Нека j е най-малкото i има $i < j \, (p_i = p_j)$.

Тогава $p_0, p_1, \dots, p_{j-1}$ са различни $\Rightarrow$

$$\Rightarrow j \le |Q| = n$$

Нека

$$x = a_1 a_2 \dots a_i$$

$$y = a_{i+1} \dots a_j$$

$$z = a_{j+1} \dots a_m$$

Тогава: $1/\ |xy| = j \leq n$

$2/\ |y| = j - i > 0$

$3/\ \delta^*(s, x) = p_i$

$$p_i = p_j = \delta^*(s, xy) = \delta^*(\delta^*(s, x), y) = \delta^*(p_i, y)$$

$$p_m = \delta^*(s, xyz) = \delta^*(p_i, z)$$

Нека $k \in N$

Тогава $\delta^*(p_i, y^k) = p_i \ (p_i = \delta^*(\delta^* \dots \delta^*(p_i, y), y), \dots y)$

$$\Rightarrow \delta^*(s, xy^k z) = \delta^*(\delta^*(s, xy^k), z) =$$

$$= \delta^*(\delta^*(\underbrace{\delta^*(s, x)}_{}, y^k), z) =$$

$$= \delta^*(\underbrace{\delta^*(p_i, \overset{p_i}{y^k})}_{p_i}, z) = \delta^*(p_i, z) = p_m \in F \Rightarrow$$

$$\Rightarrow xy^k z \in L(A) = L$$

∎