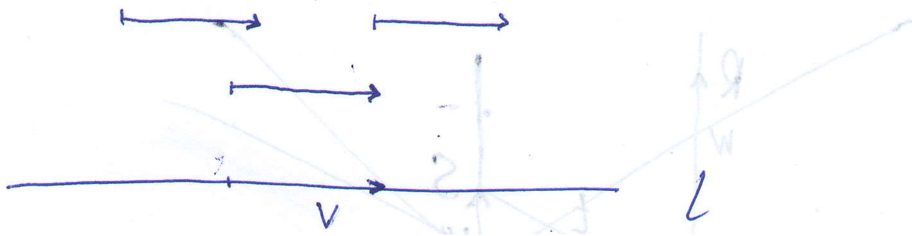
Лекция 4.3.2021

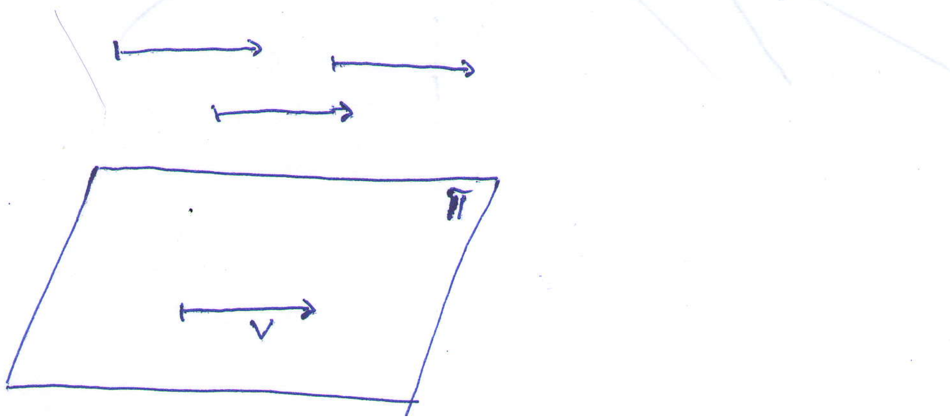
1 Условия за колинеарност и компланарност на вектори чрез линейна зависимост

Определение 1 1. Казваме, че векторът v е *колинеарен* с правата l, и пишем $v \parallel l$, ако v има представител, лежащ на l.
Еквивалентна дефиниция е всеки представител на v да е успореден на l.



2. Казваме, че векторите $v_1, \dots, v_k$ са *колинеарни*, ако съществува права l, такава че $v_1, \dots, v_k$ са колинеарни с l. При два вектора пишем $v_1 \parallel v_2$.

3. Казваме, че векторът v е *компланарен* с равнината π, и пишем $v \parallel \pi$, ако v има представител, лежащ в π.
Еквивалентна дефиниция е всеки представител на v да е успореден на π.



4. Казваме, че векторите $v_1, \dots, v_k$ са *компланарни*, ако съществува равнина π, такава че $v_1, \dots, v_k$ са компланарни с π.

Определение 2 Нека е фиксирана единична отсечка за измерване. *Дължина* на вектора v е дължината на произволен негов представител. Означава се с $|v|$.

Коректност: Трябва да се провери, че дължината на v не зависи от избора на представителя на v, чрез която тя се дефинира. Но това е ясно, защото всички представители на v са равни и следователно имат една и съща дължина.

Определение 3 Казваме, че векторите u и v са *еднопосочни* (съответно *противопосочни*) и пишем $u \uparrow\uparrow v$ (съответно $u \uparrow\downarrow v$), ако един представител на u е еднопосочен (съответно противопосочен) с един представител на v.
Еквивалентна дефиниция е всеки представител на u да е еднопосочен (съответно противопосочен) с всеки представител на v.

Припомняне от алгебрата

По-долу ще използваме следните линейно-алгебрични факти, които са ви известни от курса по алгебра.

Нека V е реално линейно пространство.

Твърдение 1 *Един вектор $v \in V$ е линейно зависим $\Leftrightarrow$ $v = 0$.*

Твърдение 2 *При $n > 1$: Векторите $v_1, \dots, v_n \in V$ са линейно зависими $\Leftrightarrow$ някой от тях е линейна комбинация на останалите. При това, ако някои $n-1$ от тях са линейно независими, то останалият вектор е линейна комбинация на тия $n-1$ вектора, тоест, ако например $v_1, \dots, v_{n-1}$ са линейно независими, то $v_1, \dots, v_n$ са линейно зависими $\Leftrightarrow$ v_n е линейна комбинация на $v_1, \dots, v_{n-1}$.*
(Това твърдение всъщност важи и при $n = 1$, ако се уговорим да считаме, че по дефиниция линейна комбинация на нула на брой вектора е 0.)

Твърдение 3 *Ако векторите $v_1, \dots, v_n \in V$ са линейно независими и векторът $u \in V$ е тяхна линейна комбинация, то тая линейна комбинация е единствена, тоест коефициентите в нея са единствени.*

Твърдение 4 *Линейното пространство V е n-мерно, ако в него съществуват n линейно независими вектора, но всеки $n+1$ вектора са линейно зависими.*

Всъщност горното твърдение е една от възможните дефиниции на размерност на линейно пространство. Другата често срещана (вероятно и при вас е била дадена тя) е: размерността е броят на векторите в един (а следователно и във всеки) базис.

С това завършва припомнянето от алгебрата.

Условия за колинеарност и компланарност на вектори чрез линейна зависимост

Теорема 1 *Нека u и v са вектори и $u \neq 0$. Тогава u и v са колинеарни $\Leftrightarrow$ съществува $\lambda \in \mathbb{R}$ такова, че $v = \lambda u$.*
Числото λ в това равенство е единствено.

Доказателство: Трябва да се докажат три неща: права посока на еквивалентността, обратна посока на еквивалентността и единственост на λ. Ще ги доказваме в следния ред: обратна посока, единственост, права посока.

1. Обратна посока.

   Нека $v = \lambda u$. Тогава от самата дефиниция на умножение на вектор с число следва, че $u \parallel v$: При $\lambda \neq 0$ се конструираше представител на v върху правата, определена от представител на u, а при $\lambda = 0$ имаме $v = 0$ и той също има представител върху тая права (и дори върху всяка права).

2. Единственост.

   Ще дадем две доказателства на единствеността на λ. Първото е чисто линейно-алгебрично, като използва вече известния ни факт, че векторите образуват линейно пространство, и е съвсем кратко. Второто използва конкретната дефиниция на умножение на вектор с число и е по-дълго, но затова пък в него се получава формула за λ, която можем да използваме при доказателството на съществуването, тоест на правата посока.

   (а) Първо доказателство.

   Тъй като $u \neq 0$, то по Твърдение 1 той е линейно независим. Тогава от Твърдение 3 получаваме, че ако $v = \lambda.u$, тоест v е линейна комбинация на линейно независимия u, то това става по единствен начин, тоест за единствено λ.

   (б) Второ доказателство.

   Нека $v = \lambda.u$. Нека сме фиксирали единична отсечка. От дефиницията на умножение на вектор с число следва: Ако $v = 0$, то $\lambda = 0$, защото $u \neq 0$. А ако $v \neq 0$, то $|v| = |\lambda|.|u|$ и тъй като $|u| \neq 0$, защото $u \neq 0$, то $|\lambda| = \frac{|v|}{|u|}$. При това, ако $v \uparrow\uparrow u$, то $\lambda > 0$, а ако $v \uparrow\downarrow u$, то $\lambda < 0$. Следователно

   $$\lambda = \begin{cases} 0, & \text{ако } v = 0 \\ \frac{|v|}{|u|}, & \text{ако } v \neq 0,\ v \uparrow\uparrow u \\ -\frac{|v|}{|u|}, & \text{ако } v \neq 0,\ v \uparrow\downarrow u \end{cases}. \tag{1}$$

   Това показва, че λ еднозначно се определя от u и v и следователно е единствено.

3. Права посока.

   Нека $u \parallel v$. Дефинираме λ чрез формулата (1) от второто доказателство на единствеността. Тогава, ако $v = 0$, то $\lambda = 0$ и следователно $v = 0 = 0.u = \lambda.u$. А ако $v \neq 0$, то $|\lambda| = \frac{|v|}{|u|}$, тоест $|v| = |\lambda|.|u| = |\lambda.u|$, и $v \uparrow\uparrow \lambda.u$, защото при $\lambda > 0$ имаме $v \uparrow\uparrow u \uparrow\uparrow \lambda.u$, а при $\lambda < 0$ имаме $v \uparrow\downarrow u \uparrow\downarrow \lambda.u$. Така че и при $v \neq 0$ също $v = \lambda.u$.

□

Следствие 1 *Два вектора са колинеарни $\Leftrightarrow$ са линейно зависими.*

Доказателство: Нека двата вектора са u и v.

Ако $u = 0$, то и двете страни на еквивалентността са изпълнени.

Нека $u \neq 0$. Следователно u е линейно независим (по Твърдение 1). Тогава от Твърдение 2 получаваме
u и v са линейно зависими $\Leftrightarrow$ v е линейна комбинация на u, тоест v е число по u
$\Leftrightarrow$ (от Теорема 1) $u \parallel v$.

С това следствието е доказано. $\square$

Забележка 1 Горното следствие е условието за колинеарност на вектори от заглавието. Както се вижда от доказателството му, то представлява малко по-обща версия на Теорема 1 (защото в него не се иска единият от векторите да е ненулев).

Следствие 2 *Векторите, колинеарни с дадена права, образуват едномерно реално линейно пространство.*

Доказателство: Това, че векторите, колинеарни с дадена права, образуват реално линейно пространство, вече го знаем от предишния въпрос. Така че трябва само да докажем, че размерността му е 1.

Тъй като по Твърдение 1 един вектор е линейно независим $\Leftrightarrow$ е ненулев, а очевидно съществува ненулев вектор, който е колинеарен с дадената права, то съществува един линейно независим вектор, колинеарен с дадената права. Освен това всеки два вектора, които са колинеарни с правата, са колинеарни и значи са линейно зависими по Следствие 1. Така от Твърдение 4 получаваме, че размерността на линейното пространство на векторите, колинеарни с дадената права, е 1. $\square$

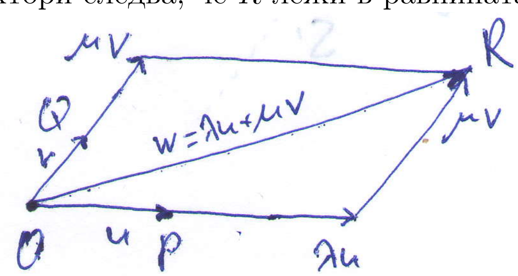
Теорема 2 *Нека u, v, w са вектори, като u и v не са колинеарни. Тогава u, v, w са компланарни $\Leftrightarrow$ съществуват $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ такива, че $w = \lambda u + \mu v$.*
Числата λ и μ в това равенство са единствени.

Доказателство: Трябва да се докажат три неща: права посока на еквивалентността, обратна посока на еквивалентността и единственост на λ и μ. Ще ги доказваме в следния ред: обратна посока, единственост, права посока.

Нека O е произволна точка, а точките P, Q, R са такива, че $\overrightarrow{OP} = u$, $\overrightarrow{OQ} = v$, $\overrightarrow{OR} = w$. Тъй като u и v не са колинеарни, то точките O, P, Q не са на една права и следователно задават равнина.

1. Обратна посока.

   Нека $w = \lambda u + \mu v$. Тогава от дефинициите на умножение на вектор с число и събиране на вектори следва, че R лежи в равнината OPQ.



Значи u, v, w имат представители в равнината OPQ, тоест компланарни са с нея. Следователно u, v, w са компланарни.

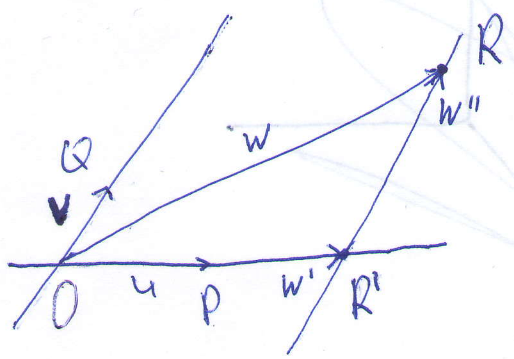
2. Единственост.

   Тъй като u и v не са колинеарни, то по Следствие 1 те са линейно независими. Тогава от Твърдение 3 получаваме, че ако $w = \lambda u + \mu v$, тоест w е линейна комбинация на линейно независимите u и v, то това става по единствен начин, тоест за единствени λ и μ.

3. Права посока.

   Нека u, v, w са компланарни. Тъй като равнините, с които u и v са компланарни, са равнините, които са успоредни на равнината OPQ, то и w е компланарен с тях. Следователно представителя $\overrightarrow{OR}$ на w е успореден на равнината OPQ и тъй като началото му O лежи в нея, то и краят му R лежи в нея.

   Нека R' е пресечната точка на правата OP с правата през R, която е успоредна на правата OQ. Означаваме векторите с представители $\overrightarrow{OR'}$ и $\overrightarrow{R'R}$ съответно с w' и w''. Следователно $w = w' + w''$.



   Имаме, че u и w' са колинеарни (защото имат представители върху правата OP) и $u \neq 0$ (защото иначе u и v биха били колинеарни), така че по Теорема 1 съществува $\lambda \in \mathbb{R}$ такова, че $w' = \lambda.u$.

   Също така имаме, че v и w'' са колинеарни (защото имат представители съответно върху правата OQ и върху успоредната на нея права през R) и $v \neq 0$ (защото иначе u и v биха били колинеарни), така че по Теорема 1 съществува $\mu \in \mathbb{R}$ такова, че $w'' = \mu.v$.

   Следователно $w = w' + w'' = \lambda.u + \mu.v$. □

Следствие 3 *Три вектора са компланарни* $\Leftrightarrow$ *са линейно зависими.*

Доказателство: Нека трите вектора са u, v, w.

Ако u и v са колинеарни, то u, v, w са компланарни, а освен това u и v са линейно зависими (по Следствие 1), така че и u, v, w са линейно зависими. Значи в тоя случай и двете страни на еквивалентността са изпълнени.

Нека u и v не са колинеарни. Следователно u и v са линейно независими (по Следствие 1). Тогава от Твърдение 2 получаваме
u, v, w са линейно зависими
$\Leftrightarrow$ w е линейна комбинация на u и v, тоест $w = \lambda u + \mu v$ за някои $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
$\Leftrightarrow$ (от Теорема 2) u, v, w са компланарни.

С това следствието е доказано. $\square$

Забележка 2 Горното следствие е условието за компланарност на вектори от заглавието. Както се вижда от доказателството му, то представлява малко по-обща версия на Теорема 2 (защото в него не се иска два от векторите да са неколинеарни).

Следствие 4 *Векторите, компланарни с дадена равнина, образуват двумерно реално линейно пространство.*

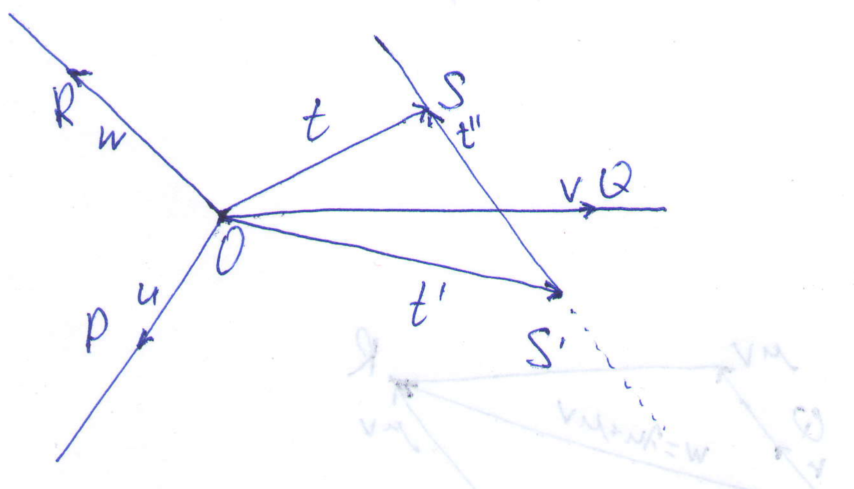
Доказателство: Това, че векторите, компланарни с дадена равнина, образуват реално линейно пространство, вече го знаем от предишния въпрос. Така че трябва само да докажем, че размерността му е 2.

Тъй като по Следствие 1 два вектора са линейно независими $\Leftrightarrow$ са неколинеарни, а очевидно съществуват два неколинеарни вектора, които са компланарни с дадената равнина, то съществуват два линейно независими вектора, компланарни с дадената равнина. Освен това всеки три вектора, които са компланарни с равнината, са компланарни и значи са линейно зависими по Следствие 3. Така от Твърдение 4 получаваме, че размерността на линейното пространство на векторите, компланарни с дадената равнина, е 2. $\square$

Теорема 3 *Нека u, v, w са некомпланарни вектори. Тогава за всеки вектор t съществуват единствени $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ такива, че $t = \lambda u + \mu v + \nu w$.*

Доказателство: Нека O е произволна точка, а точките P, Q, R, S са такива, че $\overrightarrow{OP} = u$, $\overrightarrow{OQ} = v$, $\overrightarrow{OR} = w$, $\overrightarrow{OS} = t$. Тъй като u, v, w не са компланарни, то точките O, P, Q, R не лежат в една равнина.

Нека S' е пресечната точка на равнината OPQ с правата през S, която е успоредна на правата OR. Означаваме векторите с представители $\overrightarrow{OS'}$ и $\overrightarrow{S'S}$ съответно с t' и t''. Следователно $t = t' + t''$.



Имаме, че u, v, t' са компланарни (защото имат представители в равнината OPQ) и u и v са неколинеарни (защото иначе u, v, w биха били компланарни), така че по Теорема 2 съществуват $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ такива, че $t' = \lambda.u + \mu.v$.

Също така имаме, че w и t'' са колинеарни (защото имат представители съответно върху правата OR и върху успоредната на нея права през S) и $w \neq 0$ (защото иначе u, v, w биха били компланарни), така че по Теорема 1 съществува $\nu \in \mathbb{R}$ такова, че $t'' = \nu.w$.

Следователно $t = t' + t'' = \lambda.u + \mu.v + \nu.w$. С това съществуването е доказано.

Единственост: Тъй като u, v, w не са компланарни, то по Следствие 3 те са линейно независими. Тогава от Твърдение 3 получаваме, че ако $t = \lambda.u + \mu.v + \nu.w$, тоест t е линейна комбинация на линейно независимите u, v, w, то това става по единствен начин, тоест за единствени λ, μ, ν. □

Следствие 5 *Всеки четири вектора в пространството са линейно зависими.*

Доказателство: Нека четирите вектора са u, v, w, t.

Ако u, v, w са компланарни, то u, v, w са линейно зависими (по Следствие 3), така че и u, v, w, t са линейно зависими.

Нека u, v, w не са компланарни. Тогава от Теорема 3 следва, че $t = \lambda.u + \mu.v + \nu.w$ за някои $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$, тоест t е линейна комбинация на u, v, w, и значи от Твърдение 2 получаваме, че u, v, w, t са линейно зависими.

С това следствието е доказано. □

Забележка 3 Както се вижда от доказателството на горното следствие, то представлява малко по-обща версия на Теорема 3 (защото в него не се иска три от векторите да са некомпланарни).

Следствие 6 *Векторите в пространството образуват тримерно реално линейно пространство.*

Доказателство: Това, че векторите в пространството образуват реално линейно пространство, вече го знаем от предишния въпрос. Така че трябва само да докажем, че размерността му е 3.

Тъй като по Следствие 3 три вектора са линейно независими $\Leftrightarrow$ са некомпланарни, а очевидно в пространството съществуват три некомпланарни вектора, то в пространството съществуват три линейно независими вектора. Освен това всеки четири вектора в пространството са линейно зависими по Следствие 5. Така от Твърдение 4 получаваме, че размерността на линейното пространство на векторите в пространството е 3. $\square$

2 Колинеарност и компланарност на вектори чрез координати

Координати спрямо базис в линейно пространство (припомняне)

Нека V е n-мерно реално линейно пространство и $e = (e_1, \ldots, e_n)$ е базис на V.

Определение 4 Нека $v \in V$. Тогава v се представя по единствен начин като линейна комбинация на базисните вектори: $v = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$. Коефициентите $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ в тая линейна комбинация се наричат *координати на v спрямо базиса $e = (e_1, \ldots, e_n)$*. Пишем $v(x_1, \ldots, x_n)$.

Векторът $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ се нарича *координатен вектор на v спрямо e*.

Изображението

$$\varkappa_e : V \to \mathbb{R}^n : \quad v \mapsto x$$

се нарича *координатно изображение съответно на базиса e*.

Забележка 4 Разглеждайки $e = (e_1, \ldots, e_n)$ като вектор-ред, а $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ като вектор-стълб и считайки, че вектор може да се умножава с число отдясно, получаваме, че равенството $v = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$ може да се запише в матричен вид като $v = (e_1, \ldots, e_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, тоест $v = e.x$. Следователно координатното изображение се задава с $\varkappa_e(e.x) = x$.

Пример 1 $\varkappa_e(0) = 0 \in \mathbb{R}^n$.

Пример 2 Нека $e^0 = (e^0_1, \dots, e^0_n)$ е *стандартният базис на* $\mathbb{R}^n$, тоест

$$e^0_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i \ , \quad i = 1, \dots, n$$

(i-тата компонента на e^0_i е 1, всички останали са 0). Тогава за $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ имаме $x = x_1 e^0_1 + \dots + x_n e^0_n$. Следователно координатите спрямо стандартния базис са си компонентите на вектора. В частност, координатното изображение $\varkappa_{e^0} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ е $\varkappa_{e^0}(x) = x$, тоест $\varkappa_{e^0}$ е тъждественото изображение на $\mathbb{R}^n$.

Твърдение 5 *Ако координатните вектори спрямо базиса e на $u, v \in V$ са съответно $x, y \in \mathbb{R}^n$, то $u = v \Leftrightarrow x = y$.*

Следствие 7 *Координатното изображение $\varkappa_e : V \to \mathbb{R}^n$ е биекция.*

Твърдение 6 *Нека координатните вектори спрямо базиса e на $u_1, \dots, u_k, v \in V$ са съответно $x_1, \dots, x_k, y \in \mathbb{R}^n$ и нека $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$. Тогава $v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i \Leftrightarrow y = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$.*

Следствие 8 *Координатното изображение $\varkappa_e : V \to \mathbb{R}^n$ е линеен изоморфизъм.*

Следствие 9 *Нека координатните вектори спрямо базиса e на $u_1, \dots, u_k \in V$ са съответно $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$. Тогава $u_1, \dots, u_k$ са линейно зависими $\Leftrightarrow$ $x_1, \dots, x_k$ са линейно зависими $\Leftrightarrow$ рангът на матрицата $X = (x_1 \dots x_k)$ (със стълбове $x_1, \dots, x_k$) е строго по-малък от k.*

Забележка 5 В направеното по-горе не се използват никакви специфични свойства на полето на реалните числа, така че то важи и за линейни пространства над произволно поле F — навсякъде вместо $\mathbb{R}$ се пише F, тоест вместо реални числа се взимат елементи на F.

Колинеарност и компланарност чрез координати

Теорема 4 *Нека векторите u и v в геометричната равнина имат спрямо даден базис координати $u(x_1, x_2)$ и $v(y_1, y_2)$. Тогава u и v са колинеарни $\Leftrightarrow$ рангът на матрицата от координатите им $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$ е строго по-малък от 2 $\Leftrightarrow$ $\det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} = 0$.*

Доказателство: u и v са колинеарни $\Leftrightarrow$ (от предишния въпрос) са линейно зависими $\Leftrightarrow$ (от Следствие 9) рангът на матрицата от координатите им $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$ е строго по-малък от 2. С това е доказана първата еквивалентност.

Рангът на $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$ е строго по-малък от 2 $\Leftrightarrow$ всичките ѝ минори от ред 2 са 0. Тъй като матрицата е 2×2, то тя има единствена подматрица 2×2, а именно цялата матрица, и следователно единствен минор от ред 2, а именно детерминантата на цялата матрица. Значи рангът на $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$ е строго по-малък от 2 $\Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} = 0$. С това е доказана и втората еквивалентност. $\square$

Теорема 5 *Нека векторите u и v в геометричното пространство имат спрямо даден базис координати $u(x_1, x_2, x_3)$ и $v(y_1, y_2, y_3)$. Тогава u и v са колинеарни $\Leftrightarrow$ рангът на матрицата от координатите им $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix}$ е строго по-малък от 2 $\Leftrightarrow$*

$\det \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix} = 0$, $\det \begin{pmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{pmatrix} = 0$, $\det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} = 0$.

Доказателство: u и v са колинеарни $\Leftrightarrow$ (от предишния въпрос) са линейно зависими $\Leftrightarrow$ (от Следствие 9) рангът на матрицата от координатите им $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix}$ е строго по-малък от 2. С това е доказана първата еквивалентност.

Рангът на $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix}$ е строго по-малък от 2 $\Leftrightarrow$ всичките ѝ минори от ред 2 са 0. Тъй като матрицата е 3×2, то за да получим подматрица 2×2, трябва да вземем и двата стълба, а от редовете да махнем един. Следователно има три подматрици 2×2, а именно получените чрез махането съответно на първи, втори и трети ред, така че и минорите от ред 2 са три — техните детерминанти. Значи рангът на $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix}$ е строго по-малък от 2 $\Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix} = 0$, $\det \begin{pmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{pmatrix} = 0$, $\det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} = 0$.
(Тук във втората матрица съм написал първо третия ред, а след това първия, а не първо първия ред, а след това третия, както се получава при махането на втория ред. Това в случая няма значение, защото при размяна на двата реда знакът на детермитата се сменя, а тук ни интересува условието детерминантата да е 0, за което смяната на знака не играе роля. Направил съм го за да тренираме за в бъдеще, където координатите на векторното произведение са тия три детерминанти, написани точно по тоя начин.) С това е доказана и втората еквивалентност. $\square$

Теорема 6 *Нека векторите u, v, w в геометричното пространство имат спрямо даден базис координати $u(x_1, x_2, x_3)$, $v(y_1, y_2, y_3)$, $w(z_1, z_2, z_3)$. Тогава u, v, w са компланарни $\Leftrightarrow$ рангът на матрицата от координатите им $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$ е строго по-малък от 3* $\Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} = 0$.

Доказателство: u, v, w са компланарни $\Leftrightarrow$ (от предишния въпрос) са линейно зависими $\Leftrightarrow$ (от Следствие 9) рангът на матрицата от координатите им $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$ е строго по-малък от 3. С това е доказана първата еквивалентност.

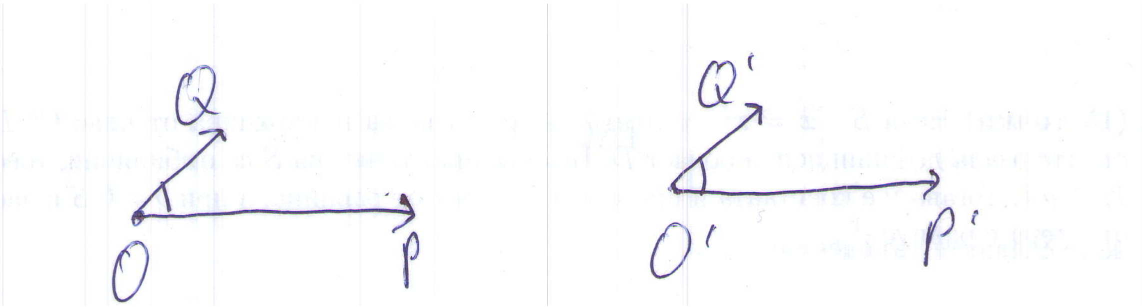
Рангът на $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$ е строго по-малък от 3 $\Leftrightarrow$ всичките ѝ минори от ред 3 са 0. Тъй като матрицата е 3×3, то тя има единствена подматрица 3×3, а именно цялата матрица, и следователно единствен минор от ред 3, а именно детерминантата на цялата матрица. Значи рангът на $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$ е строго по-малък от 3 $\Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} = 0$. С това е доказана и втората еквивалентност. $\square$

3 Скаларно произведение в геометричното пространство

Работим в геометричното пространство.

Определение 5 *Ъгъл между ненулевите вектори u и v* е ъгълът между произволни техни представители с общо начало. Означава се с $\sphericalangle(u, v)$.

Коректност: Трябва да се провери, че ъгълът не зависи от това коя точка сме взели за общо начало на представителите. Но това е ясно: Ако вземем представители с начало O, а именно $\overrightarrow{OP} = u$ и $\overrightarrow{OQ} = v$, и с начало O', а именно $\overrightarrow{O'P'} = u$ и $\overrightarrow{O'Q'} = v$, то $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{O'P'}$ и $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{O'Q'}$. В частност, $\overrightarrow{OP} \uparrow\uparrow \overrightarrow{O'P'}$ и $\overrightarrow{OQ} \uparrow\uparrow \overrightarrow{O'Q'}$ и следователно $\sphericalangle\left(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}\right) = \sphericalangle\left(\overrightarrow{O'P'}, \overrightarrow{O'Q'}\right)$.



Пример 3 При $u \neq 0$ имаме $\sphericalangle(u, u) = 0$.

Пример 4 При $u \neq 0$, $v \neq 0$ имаме $\sphericalangle(v, u) = \sphericalangle(u, v)$.

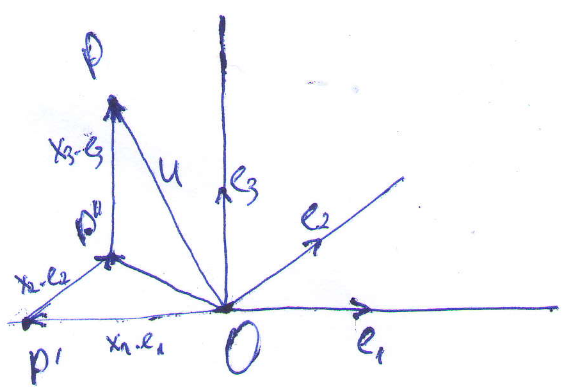
Оттук нататък считаме, че е фиксирана единична отсечка за измерване на дължини.

Определение 6 Базисът $e = (e_1, e_2, e_3)$ на линейното пространство на векторите в пространството се нарича *ортонормиран*, ако векторите e_1, e_2, e_3 са единични и взаимно перпендикулярни, тоест $|e_i| = 1$, $i = 1, 2, 3$, и $\sphericalangle(e_i, e_j) = \frac{\pi}{2}$ при $i \neq j$.

Забележка 6 Ясно е, че съществуват ортонормирани базиси, защото съществуват три взаимно перпендикулярни прави и върху всяка от тях можем да вземем по един единичен вектор.

Теорема 7 *Нека базисът $e = (e_1, e_2, e_3)$ на линейното пространство на векторите в пространството е ортонормиран и спрямо него векторът u има координати (x_1, x_2, x_3). Тогава $|u| = \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2}$.*

Доказателство: Нека O е произволна точка, точката P' е такава, че $\overrightarrow{OP'} = x_1 e_1$, точката P'' е такава, че $\overrightarrow{P'P''} = x_2 e_2$ и точката P е такава, че $\overrightarrow{P''P} = x_3 e_3$. Тогава $\overrightarrow{OP} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 = u$ и следователно $|u| = |OP|$.



Имаме $\overrightarrow{OP'} = x_1e_1 \parallel e_1$ и значи точката P' е върху правата през O, която е колинеарна с e_1. Също така $\overrightarrow{P'P''} = x_2e_2 \parallel e_2$ и значи точката P'' е върху правата през P', която е колинеарна с e_2. Следователно P'' е в равнината през O, която е компланарна с e_1 и e_2. Тъй като $\overrightarrow{P''P} = x_3e_3 \parallel e_3$, то точката P е върху правата през P'', която е колинеарна с e_3. Но e_3 е перпендикулярен на e_1 и e_2, така че правата през P'', която е колинеарна с e_3, е перпендикулярна на равнината през O, която е компланарна с e_1 и e_2. Следователно триъгълникът $OP''P$ е правоъгълен с прав ъгъл при върха P'' и по теоремата на Питагор получаваме $|OP|^2 = |OP''|^2 + |P''P|^2$.

Тъй като e_1 и e_2 са перпендикулярни, то правата през O, която е колинеарна с e_1, и правата през P', която е колинеарна с e_2, са перпендикулярни. Следователно триъгълникът $OP'P''$ е правоъгълен с прав ъгъл при върха P' и по теоремата на Питагор получаваме $|OP''|^2 = |OP'|^2 + |P'P''|^2$.

Значи

$$\begin{aligned} |u|^2 &= |OP|^2 = |OP'|^2 + |P'P''|^2 + |P''P|^2 = |x_1e_1|^2 + |x_2e_2|^2 + |x_3e_3|^2 \\ &= |x_1|^2|e_1|^2 + |x_2|^2|e_2|^2 + |x_3|^2|e_3|^2 = {x_1}^2.1^2 + {x_2}^2.1^2 + {x_3}^2.1^2 = {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2, \end{aligned}$$

тоест $|u| = \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2}$. □

Определение 7 *Скаларно произведение на векторите* u *и* v е числото $\langle u, v\rangle \in \mathbb{R}$, дефинирано по следния начин:

а) Ако $u = 0$ или $v = 0$, то $\langle u, v\rangle = 0$.

б) Ако $u \neq 0$ и $v \neq 0$, то $\langle u, v\rangle = |u||v| \cos \sphericalangle(u, v)$.

Забележка 7 Срещат се и други означения за скаларното произведение. Например uv, $u.v$, (u, v).

Забележка 8 Ако $u = 0$ или $v = 0$, то $\sphericalangle(u, v)$ не е дефиниран. Но тъй като дължината на нулевия вектор е 0, то в тоя случай $\langle u, v\rangle = 0 = |u||v| \cos \varphi$ каквото и да е φ. Следователно, ако се уговорим да считаме, че нулевият вектор и другите вектори сключват произволен ъгъл, то тогава $\langle u, v\rangle = |u||v| \cos \sphericalangle(u, v)$ за всички вектори u и v.

Пример 5 При $u \neq 0$ имаме $\langle u, u\rangle = |u||u| \cos \sphericalangle(u, u) = |u||u| \cos 0 = |u|^2$, а също и при $u = 0$ имаме $\langle u, u\rangle = 0 = |u|^2$.

Теорема 8 (критерий за перпендикулярност на вектори)
Ненулевите вектори u *и* v *са перпендикулярни* $\Leftrightarrow \langle u, v\rangle = 0$.

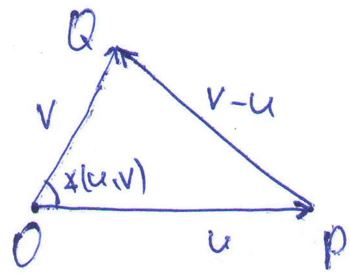
Доказателство: $\langle u, v\rangle = 0 \Leftrightarrow |u||v| \cos \sphericalangle(u, v) = 0$
$\Leftrightarrow \cos \sphericalangle(u, v) = 0$ (защото $|u| \neq 0$, $|v| \neq 0$) $\Leftrightarrow \sphericalangle(u, v) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow u \perp v$. □

Забележка 9 Ако приемем, че нулевият вектор е перпендикулярен на всеки вектор (което е в унисон с приемането, че сключва произволен ъгъл с всеки вектор — щом сключва произволен ъгъл значи сключва и прав ъгъл), то горната теорема е вярна и без изискването u и v да са ненулеви.

Теорема 9 *Нека базисът $e = (e_1, e_2, e_3)$ на линейното пространство на векторите в пространството е ортонормиран и спрямо него векторите u и v имат координати $u(x_1, x_2, x_3)$ и $v(y_1, y_2, y_3)$. Тогава $\langle u, v\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$.*

Доказателство: Ако $u = 0$ или $v = 0$, то всички x-ове са 0 или всички y-ци са 0 и следователно $\langle u, v\rangle = 0 = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$.

Нека $u \neq 0$ и $v \neq 0$. Нека O е произволна точка, а точките P и Q са такива, че $\overrightarrow{OP} = u$ и $\overrightarrow{OQ} = v$.



По косинусовата теорема за триъгълника OPQ (която важи и за изродени триъгълници, тоест когато O, P, Q са на една права — виж по-долу Забележка 10) имаме

$$|PQ|^2 = |OP|^2 + |OQ|^2 - 2|OP||OQ| \cos \sphericalangle POQ.$$

Тъй като $|OP| = |u|$, $|OQ| = |v|$ и $\sphericalangle POQ = \sphericalangle(u, v)$, то

$$|OP||OQ| \cos \sphericalangle POQ = |u||v| \cos \sphericalangle(u, v) = \langle u, v\rangle.$$

Освен това $\overrightarrow{PQ} = v - u$. Следователно $|v - u|^2 = |PQ|^2 = |u|^2 + |v|^2 - 2\langle u, v\rangle$, откъдето получаваме

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{2}\left(|u|^2 + |v|^2 - |v - u|^2\right).$$

Тъй като координатите на $v - u$ спрямо базиса e са $(y_1 - x_1, y_2 - x_2, y_3 - x_3)$, по Теорема 7 имаме

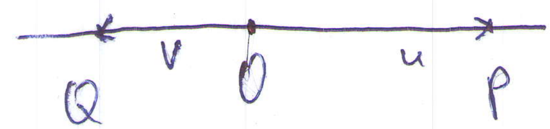
$$|u|^2 = {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2, \quad |v|^2 = {y_1}^2 + {y_2}^2 + {y_3}^2, \quad |v - u|^2 = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2.$$

Следователно

$$\begin{aligned}\langle u, v\rangle &= \frac{1}{2}\left(\left({x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2\right) + \left({y_1}^2 + {y_2}^2 + {y_3}^2\right) - \left((y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}(2x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.\end{aligned}$$

□

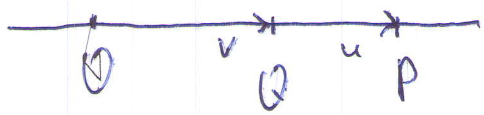
Забележка 10 В училището косинусовата теорема вероятно е формулирана само за истински триъгълници. Тя обаче важи и за изродени триъгълници OPQ, тоест когато O, P, Q са на една права, и доказателството в тоя случай е много просто:
Ако O е между P и Q, то $|PQ| = |OP| + |OQ|$ и $\sphericalangle POQ = \pi$.

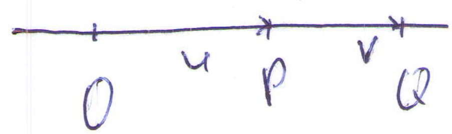


Следователно

$$\begin{aligned} |PQ|^2 &= (|OP| + |OQ|)^2 = |OP|^2 + |OQ|^2 + 2|OP||OQ| \\ &= |OP|^2 + |OQ|^2 - 2|OP||OQ|.(-1) = |OP|^2 + |OQ|^2 - 2|OP||OQ| \cos \pi \\ &= |OP|^2 + |OQ|^2 - 2|OP||OQ| \cos \sphericalangle POQ. \end{aligned}$$

Ако O не е между P и Q, тоест P и Q са от една и съща страна на O, то
$|PQ| = |OP| - |OQ|$ или $|PQ| = |OQ| - |OP|$, тоест $|PQ| = ||OP| - |OQ||$, и $\sphericalangle POQ = 0$.





Следователно

$$\begin{aligned} |PQ|^2 &= ||OP| - |OQ||^2 = (|OP| - |OQ|)^2 = |OP|^2 + |OQ|^2 - 2|OP||OQ| \\ &= |OP|^2 + |OQ|^2 - 2|OP||OQ|.1 = |OP|^2 + |OQ|^2 - 2|OP||OQ| \cos 0 \\ &= |OP|^2 + |OQ|^2 - 2|OP||OQ| \cos \sphericalangle POQ. \end{aligned}$$