① Упражнение 27 за 1, 2 и 3 група

Интегриране на рационални функции

Първо да припомним, че рационална функция наричаме функция, която е частно на два полинома.

Ако в рационалната функция $\frac{P(x)}{Q(x)}$ (тук $P(x)$ и $Q(x)$ са полиноми) имаме, че $\deg P \geq \deg Q$, то $P(x) = R(x)Q(x) + S(x)$, където $R(x)$ и $S(x)$ са полиноми и $\deg S < \deg Q$ (деление на полиноми с частно и остатък) и тогава

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{R(x)Q(x)+S(x)}{Q(x)} = R(x) + \frac{S(x)}{Q(x)}.$$

И така: всяка рационална функция може да се представи като сбор от полином и правилна рационална функция (т.е. със степен на числителя, по-малка от степента на знаменателя).

Ако $\frac{P(x)}{Q(x)}$ е правилна рационална функция и $Q(x) = (x-a)^k \dots (x-b)^l (x^2+\alpha x+\beta)^r \dots (x^2+\gamma x+\delta)^s$, където квадратните тричлени са с отрицателни дискриминанти, то

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x-a)^k} + \dots + \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} +$$

$$\dots + \frac{B_l}{(x-b)^l} + \frac{M_1 x + N_1}{x^2+\alpha x+\beta} + \frac{M_2 x + N_2}{(x^2+\alpha x+\beta)^2} + \dots + \frac{M_r x + N_r}{(x^2+\alpha x+\beta)^r} +$$

$$\dots + \frac{R_1 x + L_1}{x^2+\gamma x+\delta} + \frac{R_2 x + L_2}{(x^2+\gamma x+\delta)^2} + \dots + \frac{R_s x + L_s}{(x^2+\gamma x+\delta)^s}.$$

Дробите в дясната страна на това равенство се наричат елементарни дроби.

Константите в дясната страна на равенството, означени с големи букви, са реални числа и могат да се определят като в равенството се освободим от знаменателите и сравним коефициентите пред еднаквите степени на x.

(2) И така: всяка рационална функция се представя като сбор от полином и елементарни дроби.
Следователно интегрирането на рационална функция се свежда до интегриране на полином и на елементарни дроби.
Полиномът се интегрира непосредствено, а елементарните дроби се интегрират така:

$$\int \frac{A}{x-a}\,dx = A\int \frac{1}{x-a}\,d(x-a) = A\ln|x-a| + C,$$

$$\int \frac{A}{(x-a)^n}\,dx = A\int (x-a)^{-n}\,d(x-a) = A\,\frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1} + C,$$
$(n \in \mathbb{N}\setminus\{1\})$

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx = \int \frac{\frac{M}{2}(2x+p)+\left(N-\frac{M}{2}p\right)}{x^2+px+q}\,dx =$$
$(p^2-4q<0)$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}\,dx + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{1}{x^2+px+q}\,dx =$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{1}{x^2+px+q}\,d(x^2+px+q) + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{1}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\underbrace{\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}_{>0}}\,dx =$$

$$= \frac{M}{2}\ln|\underbrace{x^2+px+q}_{>0}| + \frac{N-\frac{Mp}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\int \frac{1}{\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\right)^2+1}\,d\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} =$$

$$= \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{N-\frac{Mp}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C,$$

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\,dx = \int \frac{\frac{M}{2}(2x+p)+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)}{(x^2+px+q)^n}\,dx =$$
$(p^2-4q<0,\ n\in\mathbb{N}\setminus\{1\})$

$$= \frac{M}{2}\int (x^2+px+q)^{-n}\,d(x^2+px+q) +$$

$$+ \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{1}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\underbrace{\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}_{>0}\right]^n}\,d\left(x+\frac{p}{2}\right)$$

$$= \frac{M}{2}\,\frac{(x^2+px+q)^{-n+1}}{-n+1} + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{1}{(t^2+a^2)^n}\,dt,$$ където

$$t = x+\frac{p}{2},\quad a = \sqrt{q-\frac{p^2}{4}}.$$

③ За последния интеграл в миналото упражнение изведохме рекурентна формула, чрез която той може да бъде пресметнат.
Пресметнете неопределените интеграли:

Зад. 1 $I = \int \frac{15x^2 - 4x - 81}{(x-3)(x+4)(x-1)} dx$

Решение: $\frac{15x^2 - 4x - 81}{(x-3)(x+4)(x-1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+4} + \frac{C}{x-1}$

$15x^2 - 4x - 81 = A(x+4)(x-1) + B(x-3)(x-1) + C(x-3)(x+4)$

$x = 3 \Rightarrow 135 - 12 - 81 = 14A \Rightarrow 42 = 14A \Rightarrow A = 3$

$x = -4 \Rightarrow 240 + 16 - 81 = 35B \Rightarrow 175 = 35B \Rightarrow B = 5$

$x = 1 \Rightarrow 15 - 4 - 81 = -10C \Rightarrow -70 = -10C \Rightarrow C = 7$

$$\frac{15x^2 - 4x - 81}{(x-3)(x+4)(x-1)} = \frac{3}{x-3} + \frac{5}{x+4} + \frac{7}{x-1}$$

$$I = 3\int \frac{1}{x-3} dx + 5\int \frac{1}{x+4} dx + 7\int \frac{1}{x-1} dx =$$

$$= 3\int \frac{1}{x-3} d(x-3) + 5\int \frac{1}{x+4} d(x+4) + 7\int \frac{1}{x-1} d(x-1) =$$

$$= 3\ln|x-3| + 5\ln|x+4| + 7\ln|x-1| + C.$$

Зад. 2 $I = \int \frac{3x^2 - 5x + 2}{(x-2)(x^2+3)} dx$

Решение: $\frac{3x^2 - 5x + 2}{(x-2)(x^2+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx + C}{x^2+3}$

$3x^2 - 5x + 2 = A(x^2+3) + (Bx + C)(x-2)$

$x = 2 \Rightarrow 12 - 10 + 2 = 7A \Rightarrow 4 = 7A \Rightarrow A = \frac{4}{7}$

$x^2 :\ 3 = A + B \Rightarrow 3 = \frac{4}{7} + B \Rightarrow B = \frac{17}{7}$

$x = 0 \Rightarrow 2 = 3A - 2C \Rightarrow 2C = 3A - 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2C = \frac{12}{7} - 2 \Rightarrow C = \frac{6}{7} - 1 \Rightarrow C = -\frac{1}{7}$

4) $\dfrac{3x^2-5x+2}{(x-2)(x^2+3)}=\dfrac{1}{7}\left(\dfrac{4}{x-2}+\dfrac{17x-1}{x^2+3}\right)$

$$I=\frac{1}{7}\left[4\int\frac{1}{x-2}dx+\int\frac{17x-1}{x^2+3}dx\right]$$

$$\int\frac{1}{x-2}dx=\int\frac{1}{x-2}d(x-2)=\ln|x-2|+C,$$

$$\int\frac{17x-1}{x^2+3}dx=17\int\frac{x}{x^2+3}dx-\int\frac{1}{x^2+3}dx=$$

$$=\frac{17}{2}\int\frac{1}{x^2+3}d(x^2+3)-\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2+1}d\frac{x}{\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{17}{2}\ln(x^2+3)-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+C$$

В следващите упражнения ще срещнем и други примери за интегриране на рационална функция.