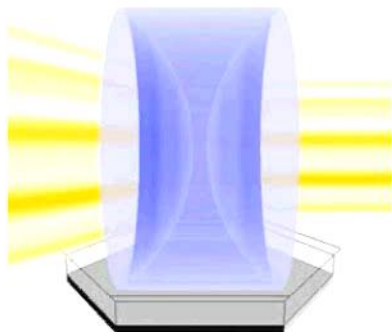
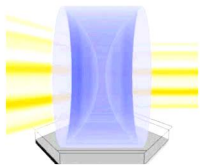


ТЕМА №18

Трасиране на лъчи



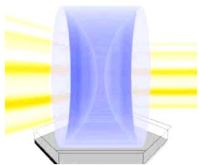


Съдържание

Тема 18: Трасиране на лъчи

- Основни идеи
- Пресичане на лъчи
- Отражение и пречупване

Основни идеи



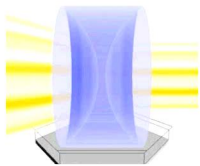
Трасиране на лъчи

Всеки алгоритъм, който

- Обхожда траекторията на светлинни лъчи в права или обратна посока

Посоки на обхождане

- Права посока – от източника към наблюдателя
- Обратна посока – от наблюдателя към източника



Използване

Определяне на видимост

- При сложни обекти, за които другите алгоритми не работят добре

Отчитане материала на обект

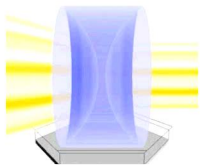
- Отразяване – гладък или матов
- Пречупване – полупрозрачен с различни оптична плътност

Сенки и засенчване

- Определяне на сянката на обект
- Сянка върху други обекти

Определяне на сблъсък

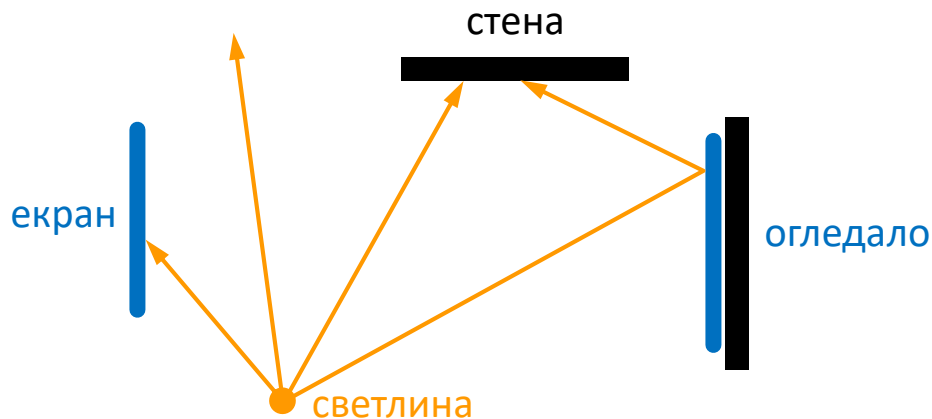
- Сблъсък между обекти с нерегулярни форми

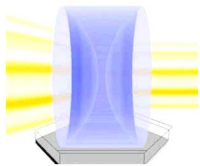


Права посока

Лъчът излиза от източника

- Следи се попадане върху други обекти
- Понякога може да се трасират ненужно много лъчи

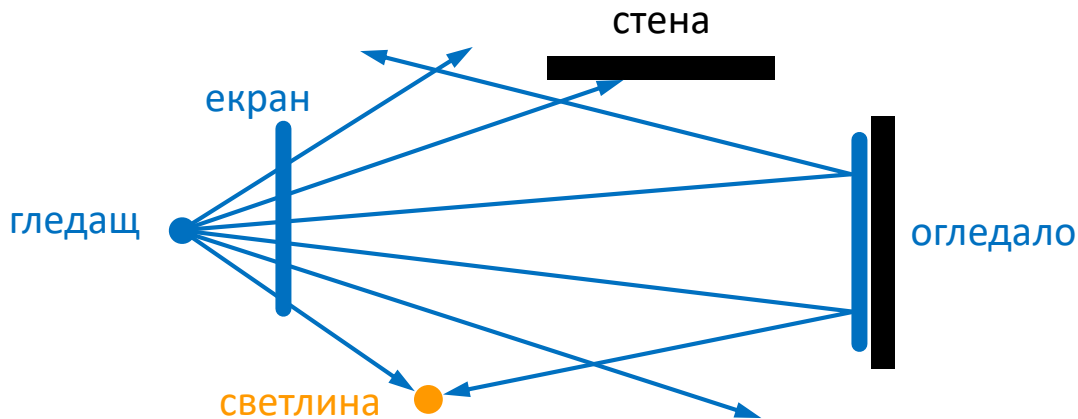




Обратна посока

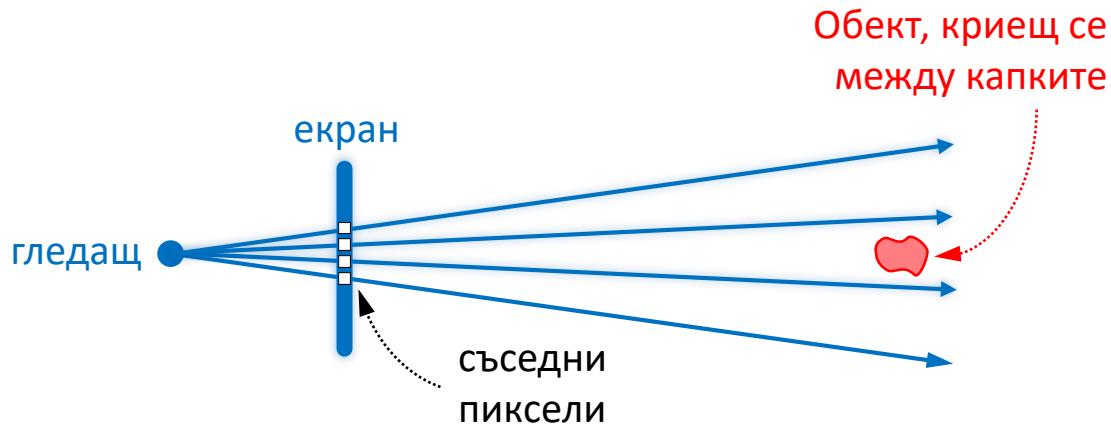
Лъчът излиза от гледащия

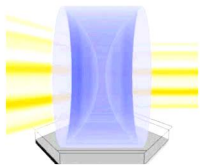
- Следи се кога и как попада на обекти и светлинни източници



Проблеми на обратната връзка

- Ограничение за максимален брой отражения
- Изтърване на малък обект, който е „между“ два пиксела





Основни трудности

Изчисляване на пресичане

- Пресичането на лъч със сложен обект е трудоемко

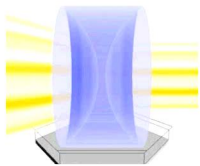
Отражения и пречупвания

- Наслагване на множество отражения и пречупвания

Различни материи

- Гладки, матови, прозрачни, фосфоресциращи

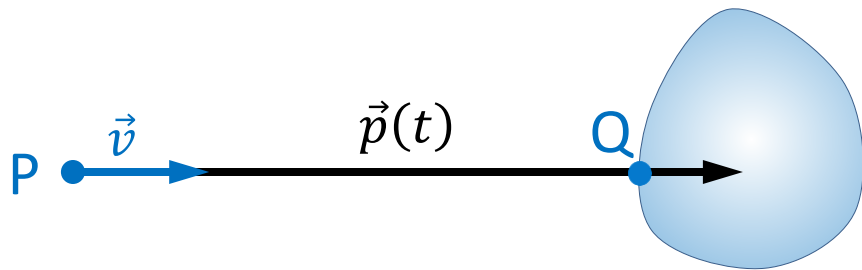
Пресичане на лъчи



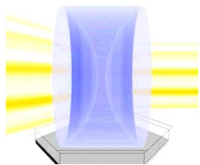
Пресичане

Основна задача

- Намиране сечението Q на лъч и обект
- Задаване на лъч чрез параметър $\vec{p}(t) = P + t\vec{v}$



- Сечението може да намери аналитично и числено



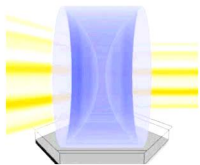
Аналитичен метод

Аналитичен метод за сечение

- Приложим при обекти, зададени чрез полиноми от ниска степен
- Много графични обекти могат да се представят така

Ще разгледаме

- Сечение с равнина
- Сечение с квадратични повърхности



Сечение с равнина

Сечение на лъч с равнина

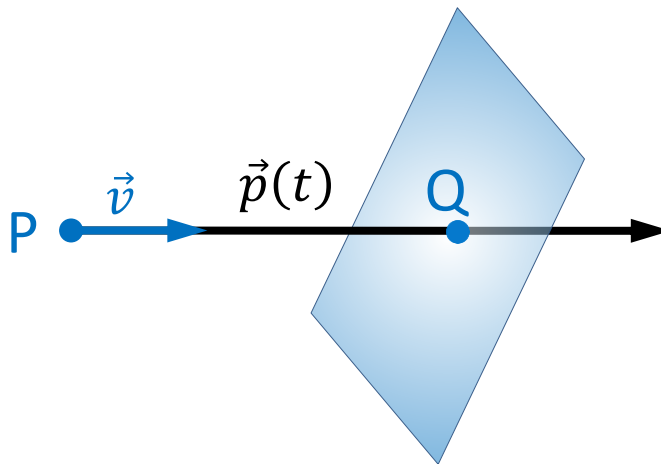
- Точка Q е на лъча и на равнината

$$aQ_x + bQ_y + cQ_z + d = 0$$

$$Q_x = P_x + tv_x$$

$$Q_y = P_y + tv_y$$

$$Q_z = P_z + tv_z$$



Получаваме

$$a(P_x + tv_x) + b(P_y + tv_y) + c(P_z + tv_z) + d = 0$$

Решаваме

$$t = \frac{aP_x + bP_y + cP_z + d}{av_x + bv_y + cv_z}$$

Математическо отклонение

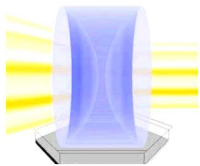
- В хомогенни координати имаме $P(P_x, P_y, P_z, 1)$, $\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$ и $S(a, b, c, d)$
- Тогава имаме красивото $t = -\frac{S(P)}{S(\vec{v})} = -\frac{S \cdot P}{S \cdot \vec{v}}$

Получили сме резултат t

- Отнася се за сечение линия-равнина
- За лъч – интересуваме се $0 \leq t < \infty$
 - Ако $t < 0$, лъчът сочи в обратна посока
 - Ако $t = \infty$, лъчът е успореден

После какво?

- В реалност сечението е със стена, а не с равнина
- Стената е многоъгълник, т.е. задачата се свежда до проверка дали точка е вътрешна за многоъгълник

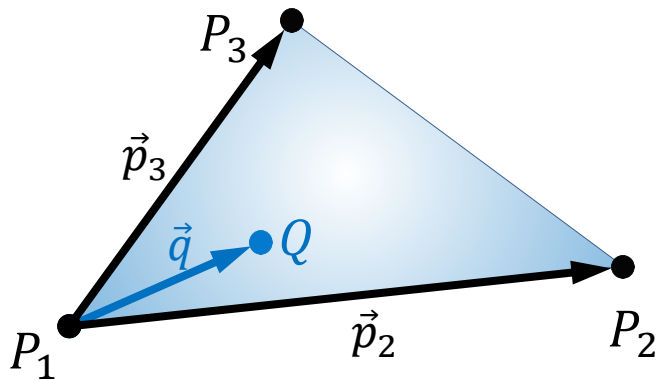


Лъч и триъгълник

Сечение на лъч и триъгълник

- Обект дефиниран с триъгълна мрежа
- Всяка стена дефинира равнина

$$Q = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3 : \alpha_i \in [0,1]; \sum \alpha_i = 1$$



$$\begin{aligned} Q &= (1 - \alpha_2 - \alpha_3)P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3 \\ Q - P_1 &= \alpha_2(P_2 - P_1) + \alpha_3(P_3 - P_1) \\ \vec{q} &= \alpha_2 \vec{p}_2 + \alpha_3 \vec{p}_3 \end{aligned}$$

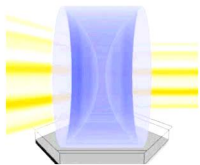
- Умножаваме скалярно с \vec{p}_2 и \vec{p}_3

$$\vec{q} = \alpha_2 \vec{p}_2 + \alpha_3 \vec{p}_3$$

- Получаваме система от две линейни уравнения с две неизвестни

$$\begin{cases} \vec{q} \cdot \vec{p}_2 = \alpha_2 \vec{p}_2 \cdot \vec{p}_2 + \alpha_3 \vec{p}_3 \cdot \vec{p}_2 \\ \vec{q} \cdot \vec{p}_3 = \alpha_2 \vec{p}_2 \cdot \vec{p}_3 + \alpha_3 \vec{p}_3 \cdot \vec{p}_3 \end{cases}$$

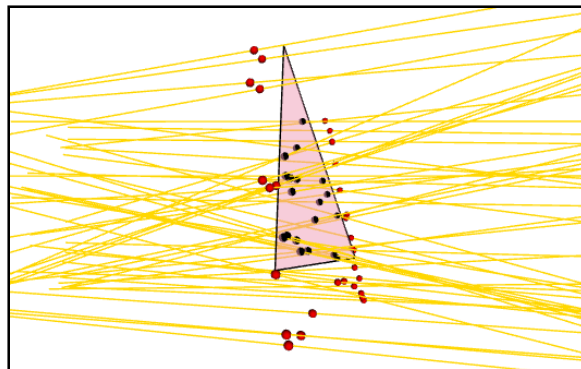
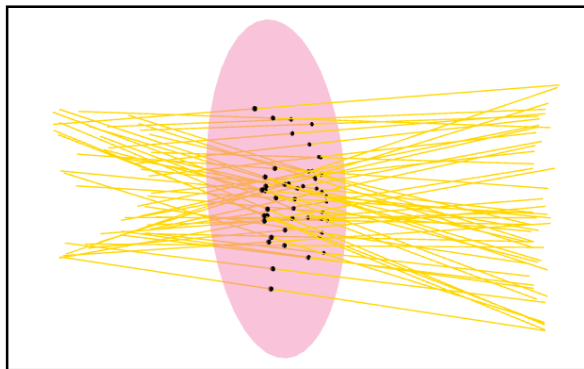
- Решаването ѝ дава α_2 и α_3
- Ако $0 \leq \alpha_i \leq 1$, то Q е вътрешна

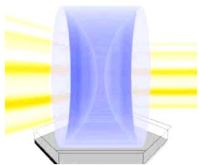


Примери

Примерни сечения

- Сечение на спагети с равнина
- Сечение на спагети с триъгълник

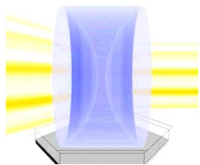




Квадратични обекти

Сечение на лъч с квадратични обекти

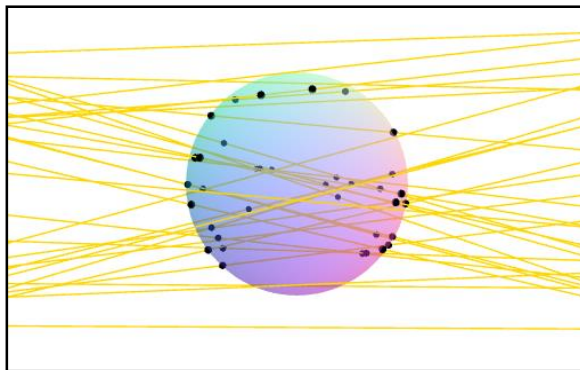
- Такива обекти са сферата, цилиндъра,...
- Свеждат се до решаване на квадратни уравнения спрямо t
- А тук всеки знае да решава квадратни уравнения, дори щорите и дограмата

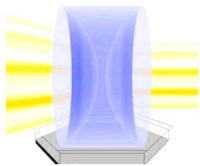


Пример със сфера

Сечение на спаге... лъчи със сфера

– Подвижна сфера





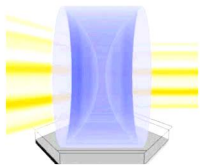
Числен метод

Числен метод за сечение

- Получава сечението с приближение
- Да се внимава при подбора на първоначална апроксимация

Методи

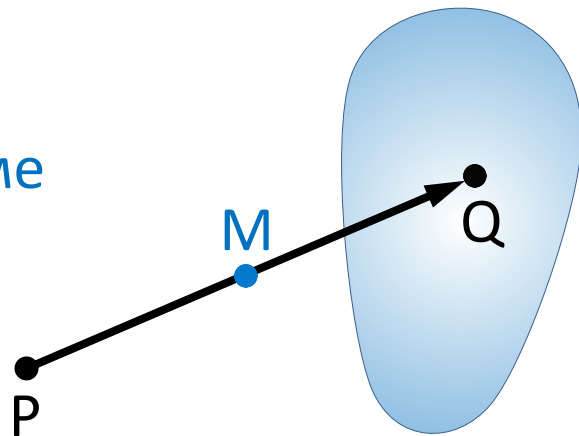
- Метод на Нютон чрез допирателна
- Метод на двоичното търсене

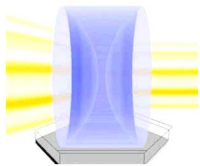


Двоично търсене

Основна идея

- С магия намираме външна точка P и вътрешна Q
- Намираме $M = \frac{(P+Q)}{2}$
- Ако M е външна, продължаваме с M и Q , иначе с M и P
- Повтаряме до достигане на желаната точност





Пример

Чрез трасиране на лъчи

- Да генерираме обекта с повърхност

$$f(x, y, z) = (2x^2 + y^2 + z^2 - 1)^3 - \frac{x^2 z^3}{10} - y^2 z^3 = 0$$

- Виждаме, че точка $(0,0,0)$ е вътрешна, а $(1,0,0)$ е външна (или обратното (няма значение кое кое е))

$$f(0,0,0) = -1 < 0$$

$$f(1,0,0) = +1 > 0$$

Това ни дава следната идея

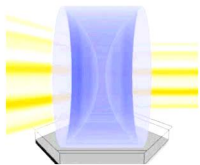
- Ако тръгнем от $(0,0,0)$ в някаква посока, след време ще пресечем обекта
- После с двоично търсене можем да намерим приближено границата

Внимание

- С тази идея се надяваме обектът да е затворена повърхност и точка $(0,0,0)$ е вътрешна
- Едва като построим обекта ще се убедим, че това е било така

Тука следва упорито писане на код със следната фонова мисъл:

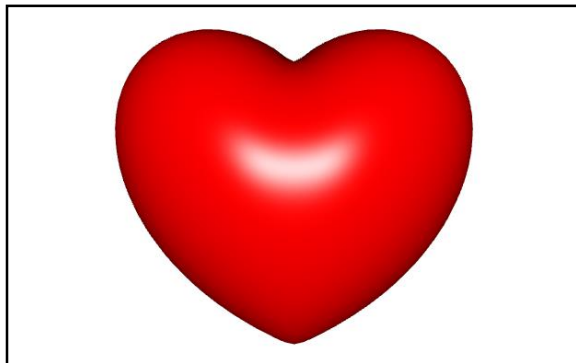
- Ако се пусне двоичното търсене паралелно по всички направления, би изглеждало като балон, който се раздува, докато не заеме дадена форма ...
- Като балон от дъвка, който се пука и приема лицевия релеф на дъвчещия
- ... или този срещу него



Ето резултата

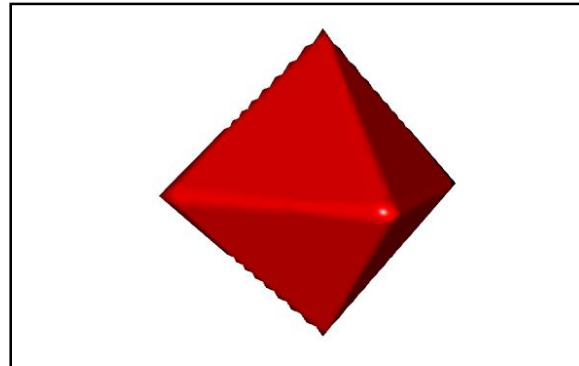
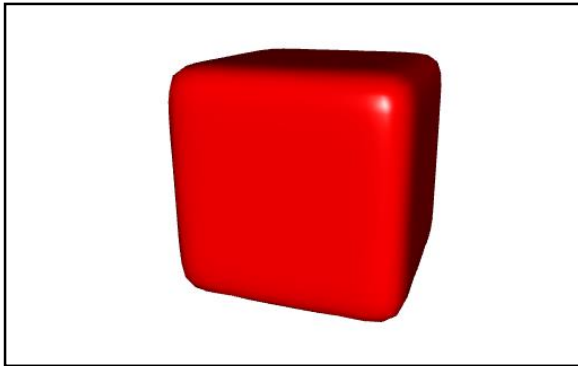
Повърхности

– Само $(2x^2 + y^2 + z^2 - 1)^3 - \frac{x^2 z^3}{10} - y^2 z^3 = 0$

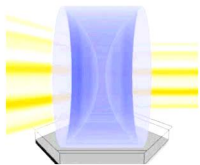


Две други повърхности

- Заоблен куб $x^{10} + y^{10} + z^{10} = 1$
- Настръхнал октаедър $|x| + |y| + |z| = 1$



Отражение и пречупване



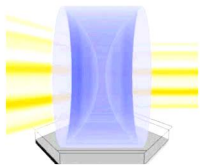
Какво е това

Отражение

- Лъч достига до повърхност и се отразява от нея
- На английски *reflection*

Пречупване

- Лъч достига до повърхност и навлиза в нея, променяйки посоката си
- На английски *refraction*



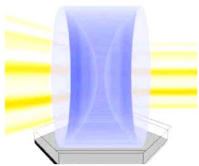
Общо и различно

Общото

- Изискват трасиране на лъчи
- Случват се едновременно
- Светлинният лъч променя посоката си

Различното

- Дали преминава или не отвъд границата на обекта



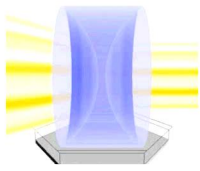
Отражение

Основна употреба

- Постигане на по-голяма реалистичност
- Огледални и гладки повърхности
- Дори и матовите могат да отразяват

Основен закон

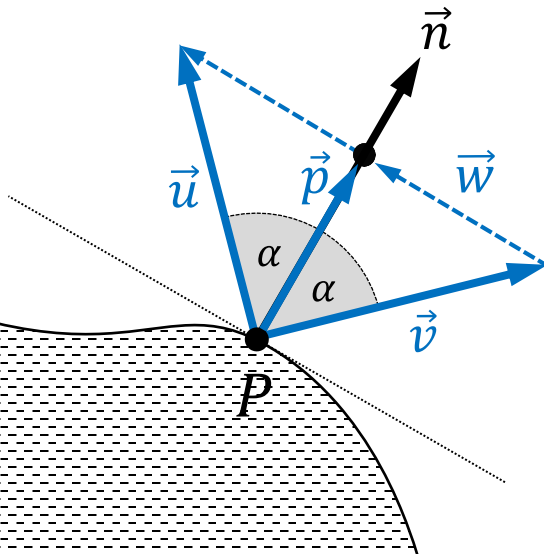
- Лъч се отразява под същия ъгъл, под който пада към повърхността



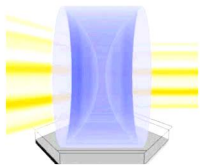
Изчисляване без ъгъл

Падащ лъч \vec{v} , отразен \vec{u} , нормала \vec{n}

– И трите вектора са нормирани, т.е. $|\dots| = 1$



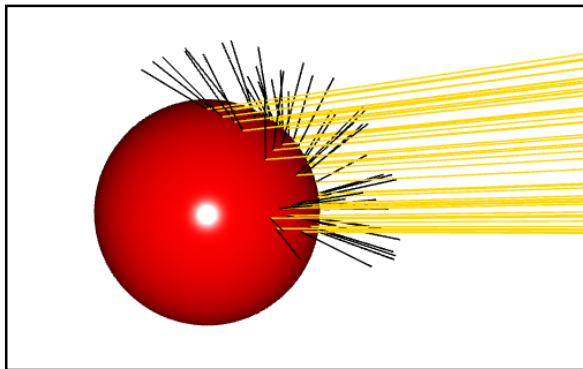
$$\begin{aligned}\vec{u} &= \vec{v} + 2\vec{w} = \vec{v} + 2(\vec{p} - \vec{v}) = \\ &= 2\vec{p} - \vec{v} = 2|\vec{p}|\vec{n} - \vec{v} = \\ &= 2(\cos \alpha)\vec{n} - \vec{v} = \\ &= 2(|\vec{n}||\vec{v}| \cos \alpha)\vec{n} - \vec{v} = \\ &= 2(\vec{n} \cdot \vec{v})\vec{n} - \vec{v}\end{aligned}$$

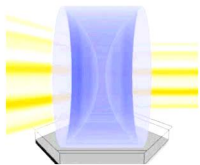


Пример със сфера

Отразяване на лъч от сфера

– Пак подвижна сфера





Любопитно

1950 Ъ. Щраус се зачудил

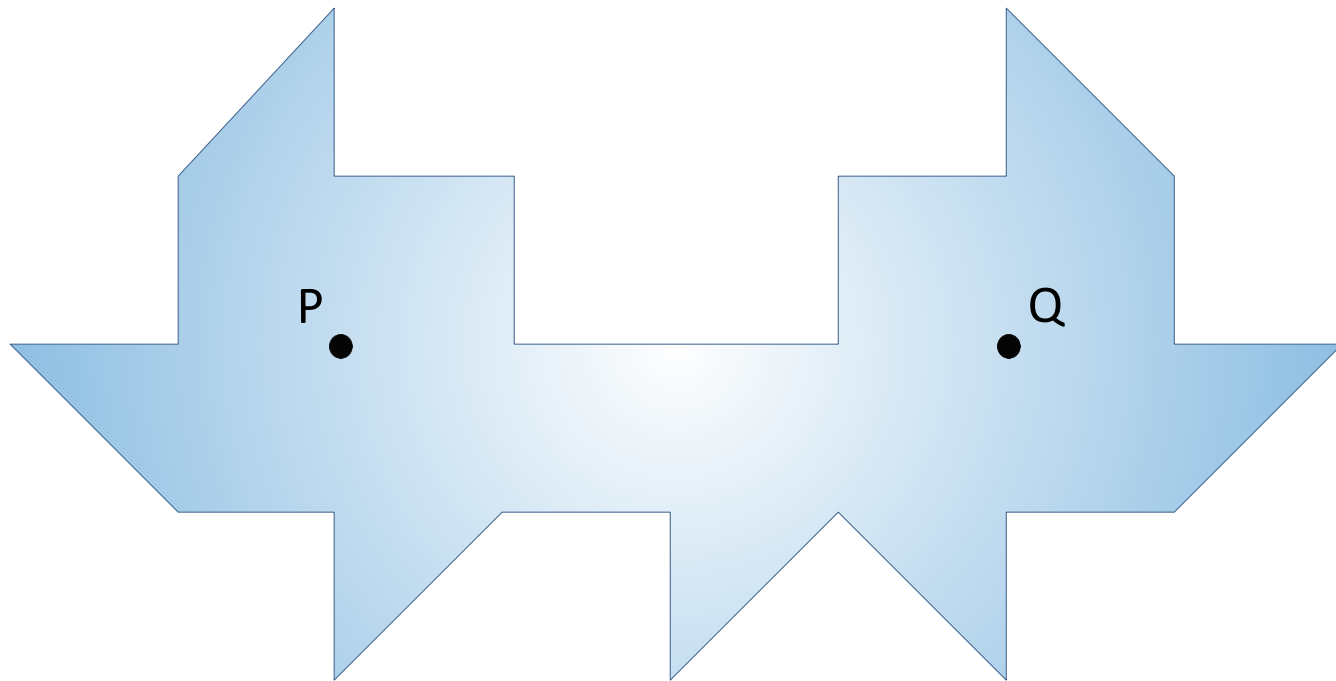
- Може ли огледална стая да се освети с клечка кибрит от произволно място?

1995 Дж. Токарски отговаря

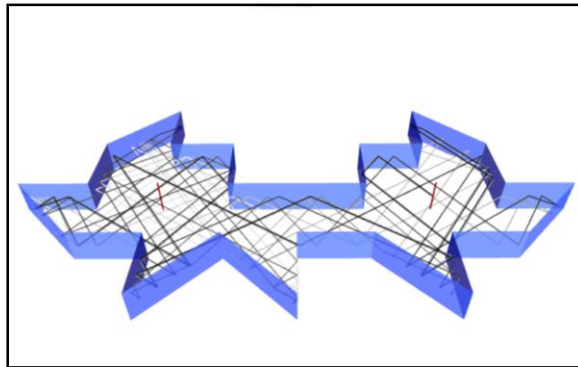
- Има 26-ъгълна стая, която не може

1997 Д. Кастро допълва

- Може и с 24-ъгълна стая да не може

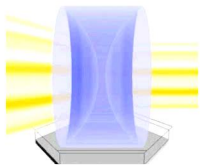


– Да си поиграем със стаята



Внимание

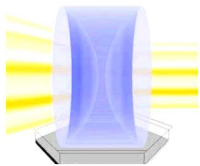
Задача за 5т бонус



Бонус за 5 точки

Условие

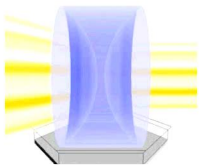
- Идеята за решението трябва да бъде поместено във форума на курса в Moodle
- Бонус получава първият с правилна идея (важи timestampът на сървера)



Задача за бонус

Билярдна маса с някакви размери

- Две топки са на някакви координати
- На рикошет от дълга стена зрителите реагират с въздишка **ой**, а на къса с въздишка **ля**
- Да се намерят лесно посоките на удар, така че да се удари другата топка, а зрителите да въздишнат някакъв брой **ой** и някакъв **ля**, без значение от реда (напр. 2/2 броя: **ойля-ойля** или **ойляля-ой** или ...)



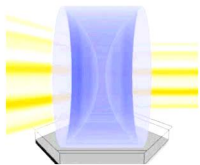
Пречупване

Физическа основа

- Лъч преминава от една среда в друга
- Наблюдава се пречупване на лъча

Фактори

- Оптичните плътности на двете среди
- Ъгълът на лъча спрямо границата
- Честотата на лъча



В природата

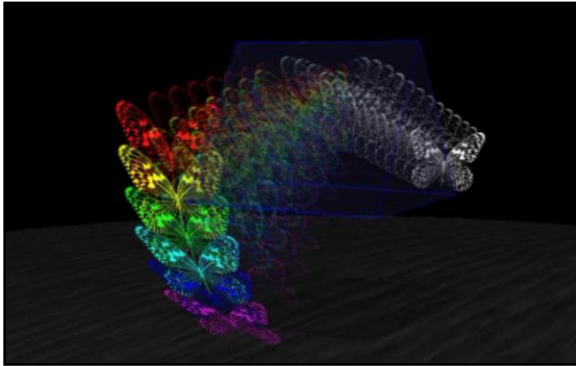
Дъгата е причинена от пречупване

– За да сме честни – и от отражение



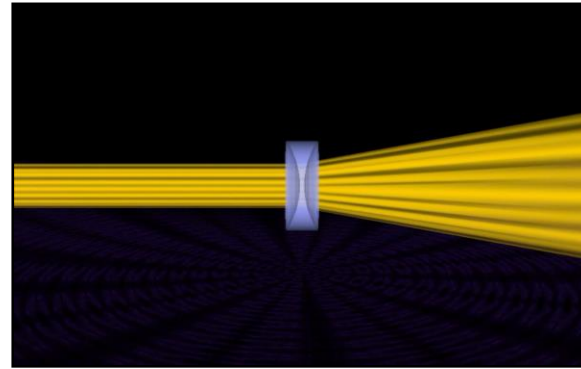
Пречупване с призма или лещи

- При призма става разлагане на светлината
- При оптични лещи – префокусиране
(човешкото око, очни лещи, очила, лупи, някои телескопи ...)



“Spectrum”

<http://youtu.be/Zit6HTFWmRc>



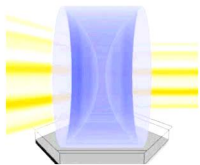
“Optical Lens”

<http://youtu.be/jeXIA0JIClk>

Пречупване дори и в заведение

– Сламка в чаша



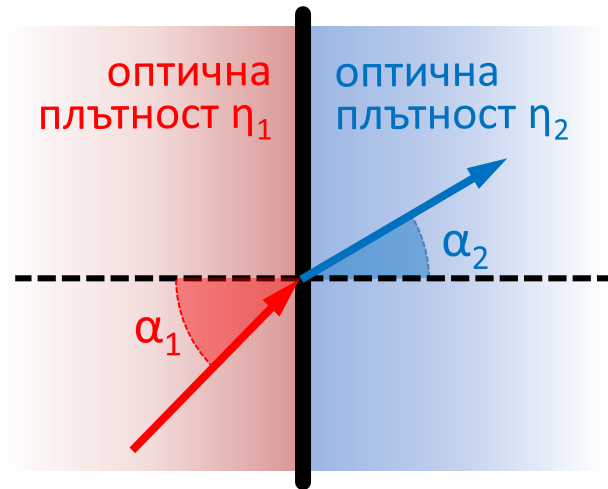


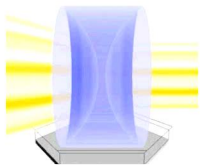
Закон на Снел (Snell)

Лъч през границата на две среди

- Те са с различни оптични плътности
(наричани още *индекси на рефракция*)

$$\eta_1 \sin \alpha_1 = \eta_2 \sin \alpha_2$$

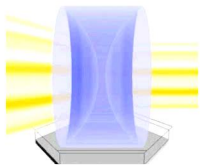




Индекси

Индекси на някои вещества

– Вакуум	1.000000
– Въздух	1.000293 при 0°C и 1 atm
– CO ₂	1.00045
– Лед	1.31
– Вода	1.33 при 20°C
– Диамант	2.42
– Силиций	3.96



Особености

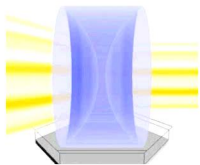
Двойно пречупване

- При преминаване през леща лъч се пречупва при влизане и при излизане

Критичен ъгъл

- Лъч, скосен повече от критичния ъгъл, може да не се пречупи, а само да се отрази
- Например, има проблем при $\frac{\eta_1}{\eta_2} \sin \alpha_1 > 1$, защото

$$\alpha_2 = \arcsin \left(\frac{\eta_1}{\eta_2} \sin \alpha_1 \right)$$

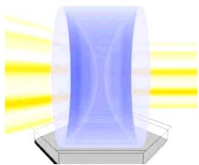


Любопитно

Метаматериали

- Конструирани са метаматериали с отрицателна оптична плътност (*negative index metamaterials*)
- В природата не съществуват естествени материали с такива свойства
- Предсказани през 1967
- Създадени едва през 2000

Въпроси?



Повече информация

[AGO2]	стр. 338-350
[BAGL]	стр. 86-88
[KLAW]	стр. 207-208
[LENG]	стр. 133-157
[MORT]	стр. 192

А също и:

- Ray Tracing: Graphics for the Masses
<http://www.cs.unc.edu/~rademach/xroads-RT/RTarticle.html>
- A raytracer in C++
<http://www.codermind.com/articles/Raytracer-in-C++-Introduction-What-is-ray-tracing.html>

И на тази презентация

Край