1. Формулировки на принципите на изброителната комбинаторика – принцип на Дирихле, принцип на биекцията, принцип на събирането, принцип на изваждането, принцип на умножението, принцип на делението, принцип за включване и изключване (с доказателство).

- принцип на Дирихле

Ако X и Y са крайни множества и $|X| > |Y|$, то не съществува инекция $f : X \to Y$.

Алтернативна формулировка: ако има m ябълки в n чекмеджета и $m > n$, то в поне едно чекмедже има повече от една ябълка.

Обобщен принцип на Dirichlet: ако има $kn + 1$ ябълки в n чекмеджета, то в поне едно чекмедже има повече от k ябълки.

- принцип на биекцията

Четвърти принцип: Принцип на биекцията. Нека A и B са множества. $|A| = |B|$ тогава и само тогава, когато съществува биекция $f : A \to B$.

Това е очевидно и го приемаме без доказателство.

Този принцип е много полезен, когато, за да изброим някакви обекти, изброяваме други обекти и показваме, че съществува биекция между двете множества от обекти.

- принцип на събирането

Втори принцип: Принцип на разбиването. Дадено е множество X и разбиване $\mathcal{Y} = \{Y_1, \ldots, Y_k\}$ на X. Тогава

$$|X| = |Y_1| + \cdots + |Y_k| \tag{1}$$

Забележете, че това остава в сила дори някои от множествата $Y_1, \ldots, Y_k$ да са празни. Съгласно формалната дефиниция, това не би било разбиване, но (1) остава в сила: мощностите на празните Y_i са нули и те не се отразяват на сумата.

Приемаме този принцип за очевиден и няма да правим доказателство.

- принцип на изваждането

Това е тривиално следствие от принципа на разбиването. Нека е дадено множество A в универсум U. Тогава

$$|A| = |U| - |\overline{A}| \tag{2}$$

Очевидно $\{A, \overline{A}\}$ е разбиване на универсума, така че от принципа на разбиването имаме $|U| = |A| + |\overline{A}|$.

Не е невъзможно $\overline{A}$ да е празно, но и тогава (2) остава в сила.

- принцип на умножението

Трети принцип: Принцип на умножението. Нека A и B са множества. Тогава

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

Приемаме го за очевиден и без доказателство.

Естествено обобщение е следното. Ако $A_1, \ldots, A_k$ са множества, то

$$|A_1 \times \cdots \times A_k| = |A_1| \cdot \cdots \cdot |A_k|$$

Написано по по-икономичен начин:

$$\left| \bigtimes_{i=1}^{k} A_i \right| = \prod_{i=1}^{k} |A_i|$$

- принцип на делението

Пети принцип: Принцип на делението. Нека A е множество. Нека $R \subseteq A^2$ е релация на еквивалентност. Нека A има k класа на еквивалентност и всеки клас на еквивалентност има кардиналност m. Тогава

$$m = \frac{|A|}{k}$$

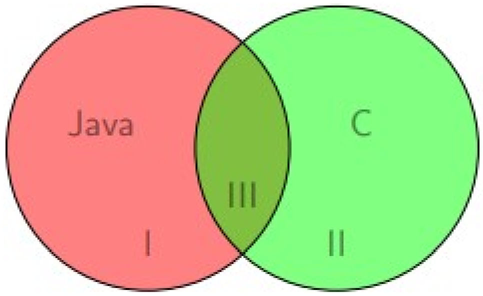
- принцип на включване и изключване

Шести принцип: Принцип на включването и изключването. Явява се обобщение на принципа на разбиването. При разбиването намираме кардиналност на множество като сума от кардиналностите на дяловете на някое негово разбиване. Сега е дадено покриване на множеството и намираме кардиналността на множеството, като събираме и изваждаме кардиналностите на дяловете на покриването, техните сечения по двойки, по тройки и така нататък.

Дадена е група студенти. 10 от тях посещават практикум по Java, 12 посещават практикум по C и е известно, че всеки студент посещава поне един практикум. От колко студента се състои групата?

Нека групата е A. Очевидно $12 \leqslant |A| \leqslant 22$, като тези граници са точни.

Ако обаче е известно, че точно 2-ма студенти посещават и Java, и C, веднага следва, че $|A| = 20$. По-подробно, $|A| = 10 + 12 - 2 = 20$.



Сумата $10 + 12 = 22$ брои прекалено много (overcounting). Тя брои райони I и II правилно, по веднъж, но брои район III неправилно: два пъти.

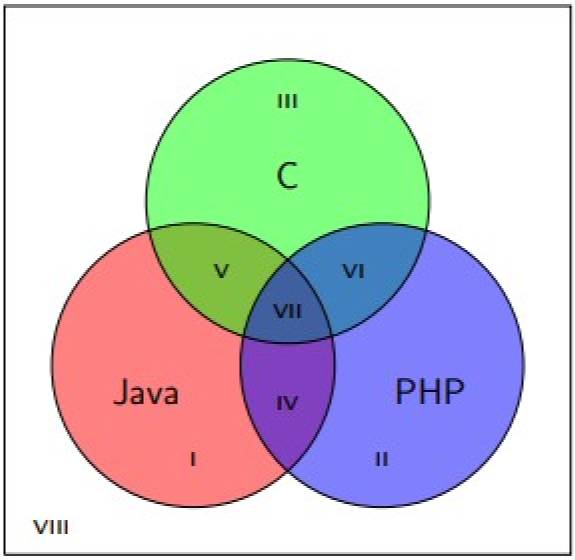
Сумата $10 + 12 - 2 = 20$ брои всеки район точно веднъж.

Дадена е група студенти. 20 посещават практикум по Java, 19 по C и 17 по PHP. 8 посещават Java и C, 7 посещават Java и PHP, 8 посещават C и PHP. 3 посещават и трите практикума. Групата се състои от 46 студенти. Колко студенти не посещават нито един от трите практикума?

Отговорът е

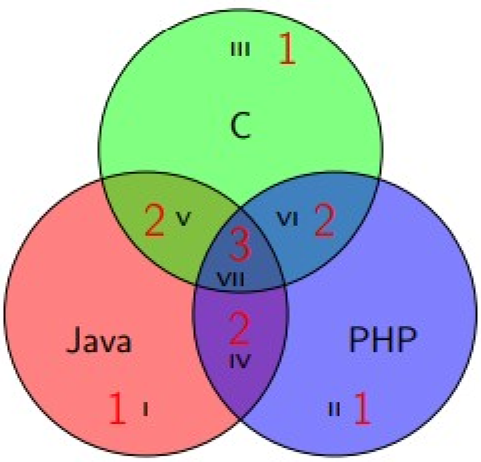
$$46 - (20 + 19 + 17) + (8 + 7 + 8) - 3 = 46 - 56 + 23 - 3 = 10$$

$(20 + 19 + 17) - (8 + 7 + 8) + 3 = 36$ е броят на студентите в поне един практикум. Да видим защо.



Търсим кардиналността на обединението на Java, C и PHP.

i, . . . , viii са районите. i са тези, които ходят само на Java, v са само на Java и C, и т.н. Ние не знаем кардиналностите на районите, освен на vii. Ако ги знаехме, задачата щеше да е много лесна.



Сумата $20 + 19 + 17$ брои i, ii и iii по един път, но iv, v и vi биват броени по два пъти, а тримата студенти от vii биват броени три пъти от тази сума.

Заради това 56 е повече от кардиналността на обединението.

Теорема 1

За всяко $n \geqslant 1$, за всеки n множества $A_1, A_2, \dots, A_n$:

$$|A_1 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} |A_i| - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |A_i \cap A_j| + \dots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap \dots \cap A_n| \quad (3)$$

Доказателството е с индукция по n.

Базата е $n = 1$. (3) става $|A_1| = |A_1|$. ✓

Индукционното предположение е, че за всеки $n - 1$ множества:

$$|A_1 \cup \dots \cup A_{n-1}| = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n-1} |A_i| - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n-1} |A_i \cap A_j| - \dots + (-1)^{n-2} |A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}| \quad (4)$$

Индукционната стъпка е за стойност на аргумента n.

В сила е

$$|A_1 \cup \dots \cup A_{n-1} \cup A_n| = |\underbrace{(A_1 \cup \dots \cup A_{n-1})}_{X} \cup \underbrace{A_n}_{Y}| =$$

$$|\underbrace{A_1 \cup \dots \cup A_{n-1}}_{X}| + |\underbrace{A_n}_{Y}| - |\underbrace{(A_1 \cup \dots \cup A_{n-1})}_{X} \cap \underbrace{A_n}_{Y}| \quad (5)$$

тъй като $|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$ (от (3) при $n = 2$).

Знаем колко е $|A_1 \cup \dots \cup A_{n-1}|$ от (4). Да разгледаме $|(A_1 \cup \dots \cup A_{n-1}) \cap A_n|$.

В сила е

$$(A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}) \cap A_n = (A_1 \cap A_n) \cup \cdots \cup (A_{n-1} \cap A_n) \qquad (6)$$

заради дистрибутивността на сечението спрямо обединението.

Дясната страна на (6) е обединение на $n-1$ множества и (4) е в приложимо. Съгласно (4):

$$\begin{aligned}
|(A_1 \cap A_n) \cup \cdots \cup (A_{n-1} \cap A_n)| = &+ \sum_{1 \leqslant i \leqslant n-1} |A_i \cap A_n| \\
&- \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n-1} |(A_i \cap A_n) \cap (A_j \cap A_n)| + \\
&+ \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n-1} |(A_i \cap A_n) \cap (A_j \cap A_n) \cap (A_k \cap A_n)| \\
&\cdots \\
&+ (-1)^{n-2} |(A_1 \cap A_n) \cap \cdots \cap (A_{n-1} \cap A_n)| \qquad (7)
\end{aligned}$$

Опростявайки дясната страна на (7) и предвид (6), получаваме

$$\begin{aligned}
|(A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}) \cap A_n| = &+ \sum_{1 \leqslant i \leqslant n-1} |A_i \cap A_n| \\
&- \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n-1} |A_i \cap A_j \cap A_n| + \\
&+ \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n-1} |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_n| \\
&\cdots \\
&+ (-1)^{n-2} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1} \cap A_n| \qquad (8)
\end{aligned}$$

В дясната страна на (5) заместваме съгласно (4) и (8) и получаваме

$$
\begin{aligned}
&|A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1} \cup A_n| = \\
&\left(\sum_{1 \leqslant i \leqslant n-1} |A_i| - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n-1} |A_i \cap A_j| + \cdots + (-1)^{n-2} |A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}| \right) \\
&+ |A_n| \\
&- \left(\sum_{1 \leqslant i \leqslant n-1} |A_i \cap A_n| - \cdots + (-1)^{n-2} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1} \cap A_n| \right) =
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} |A_i| - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n-1} |A_i \cap A_j| + \cdots + (-1)^{n-2} |A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}| \\
&- \sum_{1 \leqslant i \leqslant n-1} |A_i \cap A_n| + \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1} \cap A_n| \qquad (9)
\end{aligned}
$$

В дясната страна на (9) групираме събираемите от горния и долния ред по подходящ начин:

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant n}|A_i| - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n-1}|A_i\cap A_j| + \sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n-1}|A_i\cap A_j\cap A_k| + \dots + (-1)^{n-2}|A_1\cap\dots\cap A_{n-1}|$$
$$- \sum_{1\leqslant i\leqslant n-1}|A_i\cap A_n| + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n-1}|A_i\cap A_j\cap A_n| - \dots + (-1)^{n-2}\sum_{1\leqslant i_1<\dots<i_{n-2}\leqslant n-1}|A_{i_1}\cap\dots\cap A_{i_{n-2}}\cap A_n| + (-1)^{n-1}|A_1\cap\dots\cap A_n| =$$

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant n}|A_i| - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|A_i\cap A_j| + \sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}|A_i\cap A_j\cap A_k| + \dots + (-1)^{n-2}\sum_{1\leqslant i_1<\dots<i_{n-1}\leqslant n}|A_{i_1}\cap\dots\cap A_{i_{n-1}}| + (-1)^{n-1}|A_1\cap\dots\cap A_n|$$

Получихме дясната страна на (3). $\square$

Символно, групирания и опростявания в дясната страна на (9) са следните

$\sum_{1\leqslant i\leqslant n}|A_i|$ не се групира с нищо;

$$-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n-1}|A_i\cap A_j| - \sum_{1\leqslant i\leqslant n-1}|A_i\cap A_n| = -\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|A_i\cap A_j|;$$

$$\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n-1}|A_i\cap A_j\cap A_k| + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n-1}|A_i\cap A_j\cap A_n| = \sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}|A_i\cap A_j\cap A_k|;$$

$\dots$

$(-1)^{n-2}|A_1\cap\dots\cap A_{n-1}|$ се групира с $(-1)^{n-2}\sum_{1\leqslant i_1<\dots<i_{n-2}\leqslant n-1}|A_{i_1}\cap\dots\cap A_{i_{n-2}}\cap A_n|$;

$(-1)^{n-1}|A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_{n-1}\cap A_n|$ не се групира с нищо.

2. Основните комбинаторни конфигурации: с или без наредба, с или без повтаряне.

- с наредба и повтаряне

Множеството от конфигурациите с наредба и повтаряне с големина m над опорно множество с кардиналност n означаваме с "$K_{\text{Н,П}}(n, m)$". Елементите му са наредените m-торки (векторите с големина m), чиито елементи са от опорното множество A. Лесно се вижда, че $K_{\text{Н,П}}(n, m) = A^m$.

Интересува ни $|K_{\text{Н,П}}(n, m)|$. С обобщения принцип на умножението извеждаме

$$K_{\text{Н,П}}(n, m)| = |A^m| = n^m \tag{1}$$

Нека $A = \{a, b, c\}$. Нека $m = 2$. Тогава $K_{\text{Н,П}}(3, 2) =$ $\{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\}$.

- с наредба и без повтаряне

Множеството от конфигурациите с наредба, без повтаряне с големина m над опорно множество с кардиналност n означаваме с "$K_{\text{Н}}(n, m)$". Елементите му са наредените m-торки (векторите с големина m) без повтаряне, чиито елементи са от опорното множество A.

Интересува ни $|K_{\text{Н}}(n, m)|$. Представяме си процеса на изграждането на някой от тези вектори. За първата позиция можем да изберем всеки елемент на A, следователно имаме n възможности. За втората позиция имаме само $n - 1$ възможности, защото елементът от A, избран за първата позиция, вече не може да се ползва. Аналогично, за третата позиция има само $n - 2$ възможности, и така нататък, за m-тата позиция имаме само $n - (m - 1)$ възможности.

Виждаме, че

$$|K_{\mathrm{H}}(n,m)| = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot (n-m+1) \qquad (2)$$

$n-m+1$ идва от $n-(m-1)$.

Дясната страна на (2) може да се напише и като $\prod_{k=0}^{m-1}(n-k)$, а освен това и като $n^{\underline{m}}$. Последното се чете "n на падаща степен m".

Този резултат **не се получава от принципа на умножението**.

Резултатът остава в сила и при $m > n$. Тогава дясната страна на (2) е нула.

Нека $A = \{a,b,c\}$. Нека $m = 2$. Тогава $K_{\mathrm{H}}(3,2) = \{(a,b),(a,c),(b,a),(b,c),(c,a),(c,b)\}$.

Това **не е изведено чрез принципа на умножението**. Имаме $|K_{\mathrm{H}}(3,2)| = 3 \cdot 2 = 3^{\underline{2}} = 6$, но $K_{\mathrm{H}}(3,2)$ **не е декартово произведение** нито на триелементно и двуелементно множество, нито на шестелементно и едноелементно множество. Както на първа, така и на втора позиция се срещат и трите елемента на A.

Нека $A = \{a,b,c\}$. Нека $m = 4$. Но $K_{\mathrm{H}}(3,4) = \emptyset$, тъй като е невъзможно да не повторим елемент от A съгласно принципа на Dirichlet.

Забележете, че дясната страна на (2) става именно нула:

$$3^{\underline{4}} = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

Не е необходимо да изискваме $m \leqslant n$.

Важен частен случай е $n = m$. Тогава векторите се наричат *пермутации*. Пермутациите на n на брой, два по два различни обекта (pairwise dictinct), са разполаганията в линейна наредба на тези обекти.

Дясната страна на (2) става $n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$. Това бележим с "$n!$". Чете се "ен-факториел", на английски е *factorial*. И така,

$$|K_{\text{H}}(n, n)| = n!$$

Примерно, по колко начина могат да се наредят 12 човека в редица? Отговорът е $12! = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = 479\,001\,600$.

В сила е $0! = 1$. Комбинаторно, това може да се изведе така: по колко начина можем да разположим нула обекта в редица? Отговор: по един начин, а именно празния начин.

Алгебрично, същото можем да изведем така:

$$\prod_{k \in \varnothing} k = 1$$

Вземаме неутралния елемент на умножението, който е единица, а не нула. Нулата е неутрален например на събирането.

- без наредба и без повтаряне

Множеството от конфигурациите с наредба, без повтаряне с големина m над опорно множество с кардиналност n означаваме с "$K(n,m)$". Елементите му са m-елементните подмножества на опорното множество A.

Наричат се още *комбинации*. Този термин обаче се използва широко за какво ли не. Точният термин е "подмножество".

Интересува ни $|K(n,m)|$. Пресмята се от $|K_{\text{H}}(n,m)|$ чрез принципа на делението. Въвеждаме релация
$R \subseteq K_{\text{H}}(n,m) \times K_{\text{H}}(n,m)$ така:

$$\forall X, Y \in K_{\text{H}}(n,m) : X \, R \, Y \ \leftrightarrow \ X \text{ и } Y \text{ имат едни и същи елементи}$$

R е релация на еквивалентност. Всеки неин клас на еквивалентност има кардиналност $m!$, а $|K(n,m)|$ е броят на класовете на еквивалентност, като

$$|K(n,m)| = \frac{|K_{\text{H}}(n,m)|}{m!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot (n-m+1)}{m!} \tag{3}$$

Пример с фиш от тото 6/49. Колко са възможните фишове? Отговорът $49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44 = 10\,068\,347\,520$ е грешен.

Верният отговор е

$$\frac{10\,068\,347\,520}{6!} = \frac{10\,068\,347\,520}{720} = 13\,983\,816$$

Причината да делим на $6! = 720$ е, че няма значение в какъв ред се изтеглят числата. Ако и редът на изтегляне имаше значение, фишовете наистина щяха да са $10\,068\,347\,520$. Но това би била друга игра.

- без наредба и с повтаряне

Комб конф с повт, без нар.

$K_\Pi(n, m)$

Елементите са мултим-вата/с големина m над n-ел. опорно м-во.

$|K_\Pi(n, m)| = ?$

Нека $A = \{a, b\}$, нека $m = 5$.

$$K_\Pi(2,5) = \{ \{a,a,a,a,a\}_M, \{a,a,a,a,b\}_M, \{a,a,a,b,b\}_M, \{a,a,b,b,b\}_M, \{a,b,b,b,b\}_M, \{b,b,b,b,b\}_M \}$$

12 еднакви билета се раздават на 10 човека. По колко начина може да стане това?

Решение: множеството от хората е опорното множество. Броят на билетите е големината на конфигурацията. Тогава $n = 10$, $m = 12$. Отговорът е

$$\binom{12+10-1}{12} = \binom{12+10-1}{10-1} = 293\,930$$

Едно от раздаванията:

$$* * \mid \mid \mid \mid * * * \mid \mid * \mid * * * * * \mid * \mid$$

Първи човек с два билета; втори, трети и четвърти с по нула билети, петия човек с три билета, шестият без билети, седмият с един билет, осмият с пет билета, деветият с един билет и десетият без билети.

Колко са фишовете в 6 от 49, ако след изтегляне на топка тя бива връщана отново в сферата?

Отговор:

$$\binom{49+6-1}{6} = 25\,827\,165$$

3. Извеждане на формулите за броя на основните комбинаторни конфигурации.

- с наредба и с повтаряне

Множеството от конфигурациите с наредба и повтаряне с големина m над опорно множество с кардиналност n означаваме с "$K_{\text{Н,П}}(n, m)$". Елементите му са наредените m-торки (векторите с големина m), чиито елементи са от опорното множество A. Лесно се вижда, че $K_{\text{Н,П}}(n, m) = A^m$.

Интересува ни $|K_{\text{Н,П}}(n, m)|$. С обобщения принцип на умножението извеждаме

$$K_{\text{Н,П}}(n, m)| = |A^m| = n^m \qquad (1)$$

- с наредба и без повтаряне

Множеството от конфигурациите с наредба, без повтаряне с големина m над опорно множество с кардиналност n означаваме с "$K_{\mathrm{H}}(n, m)$". Елементите му са наредените m-торки (векторите с големина m) без повтаряне, чиито елементи са от опорното множество A.

Интересува ни $|K_{\mathrm{H}}(n, m)|$. Представяме си процеса на изграждането на някой от тези вектори. За първата позиция можем да изберем всеки елемент на A, следователно имаме n възможности. За втората позиция имаме само $n-1$ възможности, защото елементът от A, избран за първата позиция, вече не може да се ползва. Аналогично, за третата позиция има само $n-2$ възможности, и така нататък, за m-тата позиция имаме само $n-(m-1)$ възможности.

Виждаме, че

$$|K_{\mathrm{H}}(n, m)| = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot (n-m+1) \qquad (2)$$

$n-m+1$ идва от $n-(m-1)$.

Дясната страна на (2) може да се напише и като $\prod_{k=0}^{m-1}(n-k)$, а освен това и като $n^{\underline{m}}$. Последното се чете "n на падаща степен m".

Този резултат **не се получава от принципа на умножението**.

Резултатът остава в сила и при $m > n$. Тогава дясната страна на (2) е нула.

- без наредба и без повтаряне

Интересува ни $|K(n,m)|$. Пресмята се от $|K_{\text{Н}}(n,m)|$ чрез принципа на делението. Въвеждаме релация $R \subseteq K_{\text{Н}}(n,m) \times K_{\text{Н}}(n,m)$ така:

$$\forall X, Y \in K_{\text{Н}}(n,m) : X \; R \; Y \;\leftrightarrow\; X \text{ и } Y \text{ имат едни и същи елементи}$$

R е релация на еквивалентност. Всеки неин клас на еквивалентност има кардиналност $m!$, а $|K(n,m)|$ е броят на класовете на еквивалентност, като

$$|K(n,m)| = \frac{|K_{\text{Н}}(n,m)|}{m!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot (n-m+1)}{m!} \qquad (3)$$

- без наредба и с повтаряне

$$K_{\text{п}}(n,m) = \binom{n+m-1}{n-1} = \binom{n+m-1}{m}$$

4. Биномни коефициенти и теорема на Нютон.

Понякога (3) се записва така:

$$|K(n,m)| = \frac{n!}{(n-m)!m!} \tag{4}$$

Въпреки че (4) е по-кратък и "по-спретнат" запис, като алгоритъм (3) е по-бърз.

Дясната страна на (3) и (4) се нарича *биномен коефициент*, на английски *binomial coefficient*, и се бележи кратко с "$\binom{n}{m}$". Чете се "ен-над-ем", на английски "n-choose-m". И така,

$$\binom{n}{m} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot (n-m+1)}{m!}$$

n е *горен индекс*, а m е *долен индекс*. Да не се бърка $\binom{n}{m}$ с $\left(\frac{n}{m}\right)$.

Дефинираме $\binom{n}{m}$ за $m, n \in \mathbb{N}$. Ако $m > n$, то $\binom{n}{m} = 0$, което има комбинаторен смисъл: има нула начина да изберем m елементно подмножество на A, ако $|A| = n$ и $m > n$.

$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$. Също има комбираторен смисъл: има точно един начин да изберем нула неща от n (не избираме нищо, тоест избираме празното множество) и има точно един начин да изберем n неща от n (избираме всичко).

$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$. Има n начина да изберем едно нещо от n. Има n начина да изберем $n-1$ неща от n.

Изобщо, при $m \leqslant n$, в сила е $\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$. Това също има комбинаторен смисъл: като брой начини да го сторим, все едно е дали избираме m неща от n или $n-m$ неща от n. Примерно, тото 6/49 можеше да е 43/49.

При фиксиран горен индекс n, сумата от всички биномни коефициенти е 2^n:

$$\underbrace{\binom{n}{0}}_{1} + \underbrace{\binom{n}{1}}_{n} + \underbrace{\binom{n}{2}}_{\frac{n(n-1)}{2}} + \cdots + \underbrace{\binom{n}{n-2}}_{\frac{n(n-1)}{2}} + \underbrace{\binom{n}{n-1}}_{n} + \underbrace{\binom{n}{n}}_{1} = 2^n \tag{5}$$

И това има комбинаторен смисъл. Дясната страна брои всички подмножества на n-елементно множество, а знаем, че те са 2^n; това се извежда тривиално с броене на характеристичните вектори с дължина n, които са $|\{0,1\}^n| = |\{0,1\}|^n = 2^n$. Лявата страна брои разбиването на всички подмножества по кардиналности.

Това е пример за *доказателство с комбинаторни съображения*, или *принцип на двукратното броене*.

Ако $n, m \geqslant 1$, в сила е

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1} \tag{6}$$

Доказателство: с комбинаторни съображения. Лявата страна брои m-елементните подмножества на n-елементно множество A. Дясната страна брои същото, но по-детайлно. Фиксираме произволен $a \in A$.

- m-елементните подмножества, които **не съдържат** a, са $\binom{n-1}{m}$, защото $|A\setminus\{a\}| = n-1$, а $A\setminus\{a\}$ е множеството, от което можем да избираме.
- m-елементните подмножества, които **съдържат** a, са $\binom{n-1}{m-1}$, защото след като изберем a, останалите $m-1$ на брой пак избираме от $A\setminus\{a\}$.

По принципа на разбиването $\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}$.

Клетката на ред n и колона k съдържа $\binom{n}{k}$. Всеки "вътрешен" елемент е сумата от елемента над него и елемента горе вляво; тоест, $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	1	4	6	4	1	0	0	0	0	0	0	0	0
5	1	5	10	10	5	1	0	0	0	0	0	0	0
6	1	6	15	20	15	6	1	0	0	0	0	0	0
7	1	7	21	35	35	21	7	1	0	0	0	0	0
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	0	0	0	0
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	0	0	0
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1	0	0
11	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1	0
12	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1

Теорема 1 (Newton)

$$\forall x, y \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N} : (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

"Бином" означава буквално "двуименник". На български е прието "двучлен". Имената са x и y.

Доказателство: с комбинаторни съображения. Лявата страна записваме като

$$\underbrace{(x+y)\cdot(x+y)\cdot\ \cdots\ \cdot(x+y)\cdot(x+y)}_{n \text{ множителя}}$$

Очевидно след отварянето на скобите ще се получи сума от 2^n събираеми от вида $x^k y^{n-k}$, по всички $k \in \{0, \ldots, n\}$.

Разбиваме множеството от събираемите в $n + 1$ множества по степента на x (която диктува степента на y): $x^0 y^n$, $x^1 y^{n-1}$, ..., $x^n y^0$. Коефициентът пред $x^k y^{n-k}$ е броят на появите на това събираемо. За да определим този брой, съобразяваме, че x^k "идва" от k на брой множителя (останалите множители дават y^{n-k}). А тези k множителя можем да изберем от всички n множителя по $\binom{n}{k}$ начина.

Примерно, $x^n y^0$ се появява само веднъж, понеже за него трябва да "дойде" x от всеки множител. $x^{n-1}y^1$ се появява точно n пъти, защото от един множител "идва" y, от останалите, x, а този един множител можем да изберем по n начина. И така нататък. $\square$

С Теоремата на Newton лесно извеждаме (5): полагаме $x = y = 1$.

Лесно доказваме и

$$3^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$$

Записваме лявата страна като $(2 + 1)^n$, дясната страна като $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k 1^{n-k}$ и прилагаме Теорема 1.

По колко начина можем да сложим p единици и q нули в редица?

Общо $p + q$ булеви цифри. Това са характеристичните вектори с дължина $p + q$ и точно p единици. Те съответстват биективно на p-елементните подмножества на $(p + q)$-елементно множество. Ние вече знаем колко са тези подмножества: $\binom{p+q}{p}$. Тогава и въпросните характеристични вектори са толкова.

Можем да го запишем и като $\binom{p+q}{q}$.

5. Доказателства на комбинаторни тъждества чрез комбинаторни разсъждения (принцип на двукратното броене).

При фиксиран горен индекс n, сумата от всички биномни коефициенти е 2^n:

$$\underbrace{\binom{n}{0}}_{1} + \underbrace{\binom{n}{1}}_{n} + \underbrace{\binom{n}{2}}_{\frac{n(n-1)}{2}} + \cdots + \underbrace{\binom{n}{n-2}}_{\frac{n(n-1)}{2}} + \underbrace{\binom{n}{n-1}}_{n} + \underbrace{\binom{n}{n}}_{1} = 2^n \tag{5}$$

И това има комбинаторен смисъл. Дясната страна брои всички подмножества на n-елементно множество, а знаем, че те са 2^n; това се извежда тривиално с броене на характеристичните вектори с дължина n, които са $|\{0,1\}^n| = |\{0,1\}|^n = 2^n$. Лявата страна брои разбиването на всички подмножества по кардиналности.

Това е пример за *доказателство с комбинаторни съображения*, или *принцип на двукратното броене*.

Ако $n, m \geqslant 1$, в сила е

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1} \tag{6}$$

Доказателство: с комбинаторни съображения. Лявата страна брои m-елементните подмножества на n-елементно множество A. Дясната страна брои същото, но по-детайлно. Фиксираме произволен $a \in A$.

- m-елементните подмножества, които **не съдържат** a, са $\binom{n-1}{m}$, защото $|A \backslash \{a\}| = n - 1$, а $A \backslash \{a\}$ е множеството, от което можем да избираме.
- m-елементните подмножества, които **съдържат** a, са $\binom{n-1}{m-1}$, защото след като изберем a, останалите $m - 1$ на брой пак избираме от $A \backslash \{a\}$.

По принципа на разбиването $\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}$.

Теорема 1 (Newton)

$$\forall x, y \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N} : (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

"Бином" означава буквално "двуименник". На български е прието "двучлен". Имената са x и y.

Доказателство: с комбинаторни съображения. Лявата страна записваме като

$$\underbrace{(x+y)\cdot(x+y)\cdot\ \cdots\ \cdot(x+y)\cdot(x+y)}_{n \text{ множителя}}$$

Очевидно след отварянето на скобите ще се получи сума от 2^n събираеми от вида $x^k y^{n-k}$, по всички $k \in \{0,\ldots,n\}$.

Разбиваме множеството от събираемите в $n+1$ множества по степента на x (която диктува степента на y): x^0y^n, x^1y^{n-1}, ..., x^ny^0. Коефициентът пред x^ky^{n-k} е броят на появите на това събираемо. За да определим този брой, съобразяваме, че x^k "идва" от k на брой множителя (останалите множители дават y^{n-k}). А тези k множителя можем да изберем от всички n множителя по $\binom{n}{k}$ начина.

Примерно, x^ny^0 се появява само веднъж, понеже за него трябва да "дойде" x от всеки множител. $x^{n-1}y^1$ се появява точно n пъти, защото от един множител "идва" y, от останалите, x, а този един множител можем да изберем по n начина. И така нататък. $\square$

6. Алгоритъм за решаване на линейни рекурентни уравнения с константни коефициенти – хомогенни и нехомогенни.

Дадено е рекурентно уравнение

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} \qquad (3)$$

където $c_1, \ldots, c_k$ са (целочислени) константи, като $c_k \neq 0$, и k е константа. Това е *линейно рекурентно уравнение от k-ти ред с константни коефициенти и крайна история*.

Началните условия са $a_1 = q_1, \ldots, a_k = q_k$, където q_i са цели числа. Или $a_0 = q_0, \ldots, a_{k-1} = q_{k-1}$. Същественото е да са k на брой.

Първата стъпка от решаването на (3) е да конструираме *характеристичното уравнение*. Заместваме a_n с x^n, a_{n-1} с x^{n-1} и така нататък и получаваме

$$x^n = c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \cdots + c_{k-1} x^{n-k+1} + c_k x^{n-k} \qquad (4)$$

Делим на x^{n-k} и получаваме

$$x^k = c_1 x^{k-1} + c_2 x^{k-2} + \cdots + c_{k-1} x + c_k \qquad (5)$$

Алтернативен запис е

$$x^k - c_1 x^{k-1} - c_2 x^{k-2} - \cdots - c_{k-1} x - c_k = 0 \qquad (6)$$

Това е характеристичното уравнение.

Съгласно основната теорема на алгебрата, характеристичното уравнение има k на брой, не непременно различни, комплексни корени.

Нека $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\}_M$ е мултимножеството от корените.

Теорията казва, че ако корените са два по два различни, *общото решение* е

$$a_n = A_1\alpha_1^n + A_2\alpha_2^n + \cdots + A_k\alpha_k^n \tag{7}$$

където $A_1, \ldots, A_k$ са неизвестни константи. Ако началните условия не са дадени, не можем да намерим тези константи и най-доброто решение е именно (7).
Ако обаче началните условия, k на брой, са дадени, можем да намерим $A_1, \ldots, A_k$, замествайки n със стойностите на аргумента в началните условия. Ще получим система от k линейни (алгебрични) уравнения с k неизвестни (а именно, $A_1, \ldots, A_k$). Рашавайки системата, ще намерим $A_1, \ldots, A_k$, а оттам и *точното решение* на рекурентното уравнение.

Нека различните корени са $\beta_1, \ldots, \beta_t$, където $t \leqslant k$. Нека β_i има кратност r_i, за $1 \leqslant i \leqslant t$. Очевидно, $r_1 + \cdots + r_t = k$.
Общото решение тогава е

$$\begin{aligned} a_n = {} & A_{1,1}\beta_1^n + A_{1,2}n\beta_1^n + \cdots + A_{1,r_1}n^{r_1-1}\beta_1^n + \\ & A_{2,1}\beta_2^n + A_{2,2}n\beta_2^n + \cdots + A_{2,r_2}n^{r_2-1}\beta_2^n + \\ & \ldots \\ & A_{t,1}\beta_t^n + A_{t,2}n\beta_t^n + \cdots + A_{t,r_t}n^{r_t-1}\beta_t^n \end{aligned} \tag{8}$$

Двойно индексираните константи $A_{i,j}$ са точно k на брой и може да бъдат намерени от началните условия по начина, който вече разгледахме.

- пример

Нека

$$a_n = 12a_{n-1} - 51a_{n-2} + 92a_{n-3} - 60a_{n-4}$$

с начални условия $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 4$, $a_4 = 6$.

Характеристичното уравнение е

$$x^4 - 12x^3 + 51x^2 - 92x + 60 = 0 \leftrightarrow (x-2)^2(x-3)(x-5) = 0$$

Мултимножеството от корените му е $\{2, 2, 3, 5\}_M$.

Общото решение е

$$a_n = A2^n + Bn2^n + C3^n + D5^n \tag{9}$$

за някакви константи A, B, C и D.

Константите определяме от началните условия. Замествайки в (9) n с 1, 2, 3 и 4, получаваме

$$\begin{aligned}
a_1 &= A2^1 + B \cdot 1 \cdot 2^1 + C3^1 + D5^1 \\
a_2 &= A2^2 + B \cdot 2 \cdot 2^2 + C3^2 + D5^2 \\
a_3 &= A2^3 + B \cdot 3 \cdot 2^3 + C3^3 + D5^3 \\
a_4 &= A2^4 + B \cdot 4 \cdot 2^4 + C3^4 + D5^4
\end{aligned}$$

Знаем, че $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 4$, $a_4 = 6$, така че

$$\begin{aligned}
1 &= 2A + 2B + 3C + 5D \\
2 &= 4A + 8B + 9C + 25D \\
4 &= 8A + 24B + 27C + 125D \\
6 &= 16A + 64B + 81C + 625D
\end{aligned}$$

Решението е $A = \frac{2}{9}, B = -\frac{1}{6}, C = \frac{1}{3}, D = -\frac{1}{45}$. Заместваме в (9) и получаваме

$$a_n = \frac{2^{n+1}}{9} - \frac{n2^n}{6} + 3^{n-1} - \frac{5^n}{45}$$

- нехомогенни

Дадено е рекурентно уравнение

$$a_n = \underbrace{c_1 a_{n-1} + \cdots + c_k a_{n-k}}_{\text{хомогенна част}} + \underbrace{p_1(n) \cdot b_1^n + \cdots + p_\ell(n) \cdot b_\ell^n}_{\text{нехомогенна част}} \qquad (10)$$

където k и ℓ са константи, $c_1, \ldots, c_k$ са константи, $b_1, \ldots, b_\ell$ са две по две различни константи, а $p_1(n), \ldots, p_\ell(n)$ са полиноми на n.

Съставя се характеристично уравнение само от хомогенната част—за момент забравяме за нехомогенната част—и се намира мултимножеството X от корените, точно както преди.

Нека Y мултимножеството от числата $b_1, \ldots, b_\ell$, всяко от които има кратност колкото е степента на съответния полином плюс едно. Обединяваме мултимножествата X и Y и съставяме общото решение спрямо това обединение по същия начин, както преди. Неизвестните константи се намират чрез началните условия. Има една особеност: дадените начални условия са k, докато обединението на X и Y има кардиналност $k + \ell$, така че неизвестните константи са $k + \ell$ на брой. За да ги намерим си правим още ℓ начални условия от (10).

Обединението на мултимножества е мултимножеството, в което кратността на всеки елемент е сумата от кратностите му в дадените мултимножества.

- пример 1

Ще решим

$$L(n) = \begin{cases} L(n-1) + n, & \text{ако } n \in \mathbb{N}^+ \\ 1, & \text{ако } n = 0 \end{cases}$$

чрез метода с характеристичното уравнение. Първо да се убедим, че фóрмата на рекурентното уравнение е подходяща. Преписваме го така

$$L(n) = \underbrace{L(n-1)}_{\text{хомогенна част}} + \underbrace{n^1 \cdot 1^n}_{\text{нехомогенна част}}$$

Характеристичното уравнение е $x - 1 = 0$ с мултимножество от корените $X = \{1\}_M$.

От нехомогенната част образуваме мултимножеството $Y = \{1, 1\}_M$. То съдържа единици, защото основата на експонентата е единица, а броят им е две, защото степента на полинома е едно. Обединението на X и Y е $\{1, 1, 1\}_M$. Общото решение е $L(n) = A1^n + Bn1^n + Cn^2 1^n = A + Bn + Cn^2$.

За да намерим A, B и C не е достатъчно даденото начално условие $L(0) = 1$. Правим още две начални условия: $L(1) = 2$ и $L(2) = 4$ и съставяме системата

$$\begin{aligned} 1 &= A + B \cdot 0 + C \cdot 0^2 = A \\ 2 &= A + B \cdot 1 + C \cdot 1^2 = A + B + C \\ 4 &= A + B \cdot 2 + C \cdot 4 \end{aligned}$$

Намираме $A = 1$, $B = C = \frac{1}{2}$, откъдето

$$L(n) = A + \frac{n + n^2}{2}$$

То е практически същото като (1).

- пример 2

Решаваме

$$H(n) = \begin{cases} 2H(n-1) + n^0 \cdot 1^n, & \text{ако } n \geqslant 2, \\ 1, & \text{ако } n = 1 \end{cases}$$

Характеристичното уравнение е $x - 2 = 0$ с мултимножество от корените $\{2\}_M$. От нехомогенната част генерираме мултимножеството $\{1\}_M$: степенната основа е единица, а степента на полинома е нулева. Обединението им е $\{1, 2\}_M$, откъдето общото решение е $H(n) = A1^n + B2^n = A + B2^n$. $H(1) = 1$, $H(2) = 3$ и оттук $1 = A + 2B$, $3 = A + 4B$, откъдето $A = -1$, $B = 1$ и $H(n) = 1 - 2^n$, точно като (2).

- пример 3

Намерете сумата $1^4 + 2^4 + \cdots + n^4$.

Нека $S(n) = 1^4 + 2^4 + \cdots + (n-1)^4 + n^4$. Тогава $S(n-1) = 1^4 + 2^4 + \cdots + (n-1)^4$ и

$$S(n) - S(n-1) = n^4 \leftrightarrow S(n) = S(n-1) + n^4$$

с начално условие $S(1) = 1$.

Вече знаем как се решава такова рекурентно уравнение. Има и още един начин за решаване: с Maple(tm). Кодът е

```
rsolve({S(1) = 1, S(n) = S(n-1)+n^4}, {S});
```

Решението на Maple(tm) е $S(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$.

Уравнения като $T(n) = 2T(n-1) + \lceil \sqrt{n} \rceil$ или $S(n) = S(n-1) + \frac{1}{n}$ не може да бъдат решени чрез показания алгоритъм, понеже нехомогенната част няма фóрмата, която се иска в (10).

Уравнението $A(n) = 2A(n-1) + 2^{2n+3}n$ може да бъде решено с показания алгоритъм, но първо нехомогенната част трябва да бъде приведена в правилна форма: $A(n) = 2A(n-1) + (8n) \cdot 4^n$. Основата на експонентата в нехомогенната част е 4, а не 2. Степента на полинома е 1, с или без множителя 8.

Аналогично, $B(n) = 2B(n-1) + 2^{\frac{n}{2}}$ трябва да бъде преписано като $B(n) = 2B(n-1) + (n^0) \cdot \sqrt{2}^n$, за да е ясно, че основата на експонентата е $\sqrt{2}$, а не 2, а степента на полинома е 0.