Полином на най-добро средноквадратично приближение (ПНДСКП)

Търсим полином $P(x) \in \pi_n$, който приближава най-добре функцията $f \in L_2(\mu; (a,b))$ относно средноквадратичната норма. Полиномът $P(x)$ е този, който минимизира величината

$$\left\{ \int_a^b \mu(x)[f(x) - P(x)]^2 dx \right\}^{1/2}.$$

Задача 1: Докажете, че ако $f(x)$ е четна (нечетна) функция и теглото $\mu(x)$ е четно за $x \in [-a, a]$, то ПНДСКП от произволна степен за $f(x)$ в $[-a, a]$ е също четен (нечетен).

Доказателство: Доказателството на твърдението следва от единствеността на ПНДСКП. Нека за определеност функцията е четна, т. е. $f(x) = f(-x)$, теглото е също четна функция по условие

$\mu(-x) = \mu(x), \forall x \in [-a, a]$. Нека $P(x) \in \pi_n$ е ПНДСКП за $f(x)$ в $[-a, a]$. Тогава

$$\left\{ \int_{-a}^{a} \mu(x)[f(x) - P(x)]^2 dx \right\}^{1/2} = \left\{ \int_{-a}^{a} \mu(-x)[f(-x) - P(-x)]^2 dx \right\}^{1/2}$$
$$= \left\{ \int_{-a}^{a} \mu(x)[f(x) - P(-x)]^2 dx \right\}^{1/2}$$

Следователно $P(-x)$ е полином на най-добро средноквадратично приближение за $f(x)$ от степен *n*. От единствеността на полинома следва, че $P(x) \equiv P(-x)$, а това е възможно само ако P е четен.

Задача 2: Да се намери ПНДСКП от втора степен за $f(x) = x^4$ при $\mu(x) \equiv 1, x \in [-1,1]$.

Решение: Функцията е четна, теглото е четно, интервалът е симетричен относно нулата. Следователно ПНДСКП е също четна функция. Тогава $P(x) = Ax^2 + B$. Търсим коефициентите A и B, така че величината $S(A,B) = \int_a^b \mu(x)[f(x) - P(x)]^2 dx = \int_{-1}^{1} (x^4 - Ax^2 - B)^2 dx$ да бъде минимална. НДУ за минимум са $S'_A = S'_B = 0$. Диференцираме и получаваме система две линейни уравнения относно неизвестните A и B:

$$\frac{\partial S}{\partial A} = 2\int_{-1}^{1} (x^4 - Ax^2 - B)(-x^2)dx = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial B} = 2\int_{-1}^{1} (x^4 - Ax^2 - B)(-1)dx = 0$$

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{A}{5} + \dfrac{B}{3} = \dfrac{1}{7} \\ \dfrac{A}{3} + B = \dfrac{1}{5} \end{array} \right.$$

Окончателно намираме ПНДСКП от втора степен $P(x) = \frac{6}{7}x^2 - \frac{3}{35}$.

Задача 3: Да се намери ПНДСКП от първа степен за $f(x) = 7x^3$ при $\mu(x) = x^2, x \in [-1,1]$.

Решение: Функцията е нечетна, теглото е четно, интервалът е симетричен относно нулата. Следователно ПНДСКП е също нечетна функция. Тогава $P(x) = Ax$. Търсим коефициента A, така че величината $S(A) = \int_a^b \mu(x)[f(x) - P(x)]^2 dx = \int_{-1}^1 x^2(7x^3 - Ax)^2 dx$ да бъде минимална. НДУ за минимум са $S'(A) = 0$. Диференцираме

$$S'(A) = 2\int_{-1}^{1} x^2(7x^3 - Ax)(-x)dx = 0 => \frac{A}{5} - 1 = 0 => A = 5.$$

$$=> P(x) = 5x.$$

Задача 4: Да се намери ПНДСКП от първа степен за $f(x) = e^x$ при тегло $\mu(x) \equiv 1, x \in [0,1]$.

Решение: Означаваме ПНДСКП от първа степен с $P(x) = Ax + B$. Търсим коефициентите A и B, така че величината $S(A,B) = \int_a^b \mu(x)[f(x) - P(x)]^2 dx = \int_0^1 (e^x - Ax - B)^2 dx$ да бъде минимална. НДУ за минимум са $S_A' = S_B' = 0$. Диференцираме и получаваме система две линейни уравнения относно неизвестните A и B:

$$\frac{\partial S}{\partial A} = 2\int_0^1 (e^x - Ax - B)(-x)dx = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial B} = 2\int_0^1 (e^x - Ax - B)(-1)dx = 0$$

$$\left| \begin{array}{l} 2A + 3B = 6 \\ \frac{A}{2} + B = -1 + e \end{array} \right.$$

Окончателно намираме ПНДСКП от първа степен $P(x) = (18 - 6e)x + 4e - 10$.

Задача 5: Да се намери ПНДСКП от трета степен за $f(x) = 63x^5$ при $\mu(x) \equiv 1, x \in [-1,1]$.

Решение: Функцията е нечетна, теглото е четно, интервалът е симетричен относно нулата. Следователно ПНДСКП е също нечетна функция. Тогава $P(x) = Ax^3 + Bx$. Търсим коефициентите A и B, така че величината $S(A,B) = \int_a^b \mu(x)[f(x) - P(x)]^2 dx = \int_{-1}^1 (63x^5 - Ax^3 - Bx)^2 dx$ да бъде минимална. НДУ за минимум са $S_A' = S_B' = 0$. Диференцираме и получаваме система две линейни уравнения относно неизвестните A и B:

$$\frac{\partial S}{\partial A} = 2\int_{-1}^1 (63x^5 - Ax^3 - Bx)(-x^3)dx = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial B} = 2\int_{-1}^1 (63x^5 - Ax^3 - Bx)(-x)dx = 0$$

$$\left| \begin{array}{l} \frac{A}{7} + \frac{B}{5} = 7 \\ \frac{A}{5} + \frac{B}{3} = 9 \end{array} \right.$$

Окончателно намираме ПНДСКП от трета степен $P(x) = 70x^3 - 15x$.