Тема 25

Симетрични оператори в крайномерни евклидови пространства. Основни свойства. Теорема за диагонализацията

def/ Крайномерно евклидово пространство (КЕП)

E е КЕП, ако е ЛП, в което е въведено скаларно произведение.

def/ Скаларно произведение

ф-я $(\cdot,\cdot): E \times E \to \mathbb{R}$, такова, че:

Неотрицателност 1) $(a,a) \geq 0$ и $(a,a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$

Симетричност 2) $(a,b) = (b,a)$

Линейност 3) $(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2, b) = \lambda_1 (a_1, b) + \lambda_2 (a_2, b)$

(и по двата аргумента от 2))

def/ Симетричен оператор

Нека E е КЕП. Линеен оператор $\varphi: E \to E$ наричаме симетричен, ако $(\varphi(a), b) = (a, \varphi(b))$, $\forall a,b \in E$.

def/ Симетрична матрица

Матрицата $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ за $\mathbb{F}$ поле е симетрична, ако $A^T = A$ т.е. $a_{ij} = a_{ji}$ за $i,j \in \{1,\dots,n\}$.

Th/ Матрицата на симетричен оператор в КЕП спрямо ортонормиран базис ($e_i \perp e_j$ т.е. $(e_i, e_j) = 0$ и $\|e_i\| = \sqrt{(e_i,e_i)} = 1$) е симетична

Д-во/ Нека E е КЕП с ортонормиран базис $e_1, \dots, e_n$, φ е сим. оператор с матрица A спрямо $e_1, \dots, e_n$.

Искаме $A = A^T \Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji}$, $i,j \in \{1,\dots,n\}$.

$\varphi(e_1) = a_{11} e_1 + a_{21} e_2 + \dots + a_{n1} e_n$ (I вц стобо - ЛК на базисните)

$\varphi(e_2) = a_{12} e_1 + a_{22} e_2 + \dots + a_{n2} e_n$

$\dots$

$\varphi(e_n) = a_{1n} e_1 + a_{2n} e_2 + \dots + a_{nn} e_n$

$$A: \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Имаме, че $(\varphi(a), b) = (a, \varphi(b))$ за $\forall a, b \in \mathcal{E}$ в частност това е в сила и за базисните в-ри.

Ако $\varphi(e_i) = a_{1i}e_1 + a_{2i}e_2 + \dots + a_{ii}e_i + \dots + a_{ni}e_n$

$\varphi(e_j) = a_{1j}e_1 + a_{2j}e_2 + \dots + a_{jj}e_j + \dots + a_{nj}e_n$

$$(\varphi(e_i), e_j) = (a_{1i}e_1 + a_{2i}e_2 + \dots + a_{ii}e_i + \dots + a_{ni}e_n, e_j) \overset{\text{лин.}}{=} a_{1i}\underbrace{(e_1, e_j)}_{0} + \dots + a_{ji}\underbrace{(e_j, e_j)}_{1} + \dots + a_{ni}\underbrace{(e_n, e_j)}_{0} = a_{ji}$$

$$(e_i, \varphi(e_j)) = (e_i, a_{1j}e_1 + a_{2j}e_2 + \dots + a_{nj}e_n) \overset{\text{лин.}}{=} a_{1j}\underbrace{(e_i, e_1)}_{0} + a_{2j}\underbrace{(e_i, e_2)}_{0} + \dots + a_{ij}\underbrace{(e_i, e_i)}_{1} + \dots + a_{nj}\underbrace{(e_i, e_n)}_{0} = a_{ij}$$

Т.е. получихме $a_{ji} = a_{ij}$ за $i, j \in \{1, \dots, n\}$ произволни $\Rightarrow A = A^T$ или A е симетрична ∎

Th/ Характеристичния полином на реална симетрична матрица A има характ. корени, които са реални числа.

$f_A(\lambda) = \det(A - \lambda.E)$, $A_{n\times n}$, $A = A^{-1}$ то $\deg(f_A) = n$

$n+1$ бр. коеф!

* С-ва на комплексно спрегнатото: $a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a = \bar{a}$, $\bar{\bar{a}} = a$, $\overline{a+b} = \bar{a} + \bar{b}$

$\alpha = a + bi = (a, b)$, $\bar{\alpha} = (a, -b) = a - bi$, $\overline{ab} = \bar{a}.\bar{b}$

Д-во:/ Допускаме, че съществува корен λ на f_A, т.ч. $\lambda \in \mathbb{C}$.

* Под $\bar{A} = (\overline{a_{ij}})$ разбираме компл. спрегнатата матрица.

Нека разгледаме с-мата $(A - \lambda.E)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \theta$

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0 \end{cases}$$

$\det$ ѝ е $= 0 \rightarrow$ съществува ненулево комплексно решение $\beta^T = \langle \beta_1, \dots, \beta_n \rangle \neq \theta$ и $\beta^T \in \mathbb{C}^n$.

Тогава $(A - \lambda.E)\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = (A - \lambda.E).\beta = \theta$ т.е.

$A.\beta = \lambda.\beta$ /* умн. отляво с $\bar{\beta}^T$ стълбо θ

$$\bar{\beta}^T A.\beta = \lambda.\bar{\beta}^T.\beta = \lambda.\langle \bar{\beta}_1, \dots, \bar{\beta}_n \rangle.\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \lambda.(|\beta_1|^2 + \dots + |\beta_n|^2) = \lambda \underbrace{\sum_{i=1}^{n} |\beta_i|^2}_{\in \mathbb{R}}$$

стъпка 1. Спрягаме комплексно

$$\overline{(\beta^T A \beta)} = \beta^T . A . \overline{\beta} = \bar{\lambda} . \sum_{i=1}^{n} |\beta_i|^2 \quad (1)$$

A е с R коефициенти

стъпка 2. Транспонираме

$$(\beta^T . A . \overline{\beta})^T = \overline{\beta}^T A \beta = \bar{\lambda} . \sum_{i=1}^{n} |\beta_i|^2$$

$A = A^T$

стъпка 3. Спрягаме комплексно

$$\overline{(\overline{\beta}^T . A . \beta)} = \beta^T . A . \overline{\beta} = \lambda . \sum_{i=1}^{n} |\beta_i|^2 \quad (2)$$

$A \in \mathbb{R}_{n \times n}$

От (1) и (2) $(\bar{\lambda} - \lambda) \underbrace{\sum_{i=1}^{n} |\beta_i|^2}_{\neq 0 \text{ за } \beta \neq 0} = 0$

значи $\bar{\lambda} - \lambda = 0$ или

$\bar{\lambda} = \lambda$ т.е. $\lambda \in \mathbb{R}$. Абсурд! ∎

Нека V е ЛП над числово поле F с базис $e_1, .., e_n$ и φ е линеен оператор с матрица A спр. базиса.

Тогава нека $f_A(\lambda) = \det(A - \lambda . E)$ е харак. му полином и $\lambda_1, .., \lambda_k$ са харак. корени.

Казваме, че в-р $v \in V$ е собствен в-р на оператора φ, ако за $v \neq \vec{0}$, то $\varphi(v) = \lambda . v$ за някое $\lambda \in F$. Т.е. собствените в-ри са тези, които само сменят големината и/или посоката си под влияние на φ, но не се "завъртат". Числото λ наричаме собствено ст-т на оператора φ, съотв. на собст. в-р v.

Оказва се, че собст. ст-ти на φ съвпадат точно с корените на $f_A(\lambda)$.

Ако v е соб. в-р на φ с матр. A спр. фикс базис, на който съответства собст. ст-т λ, то от равенство $\varphi(v) = \lambda . v$ записано в матричен вид:

$$A v = \lambda . v \Leftrightarrow A v - \lambda v = \vec{0} \Leftrightarrow (A - \lambda . E) . v = \vec{0}$$

т.е. соб. в-р v съотв. на собст. ст-т λ е някакво реш. на ХС с матрица $A - \lambda . E$.

Th/ Всеки два собствени вектора съответстващи на различни собствени ст-ти са ортогонални

Д-во/ Нека $\mathcal{C}$ е сим. оператор в КЕП $\mathcal{E}$ и $\lambda_1 \neq \lambda_2$ са собст. ст-ти на $\mathcal{C}$. Нека $v_1 \to \lambda_1$ и $v_2 \to \lambda_2$

т.е. $\mathcal{C}(v_1) = \lambda_1 . v_1$ и $\mathcal{C}(v_2) = \lambda_2 . v_2$.

Искаме $(v_1, v_2) = 0$

$(\mathcal{C}(v_1), v_2) = (\lambda_1 v_1, v_2) \overset{лин}{=} \lambda_1 (v_1, v_2) = (v_1, \mathcal{C}(v_2)) = (v_1, \lambda_2 v_2) \overset{лин}{=}$
$\lambda_2 (v_1, v_2)$ т.е. $\underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\lambda_1 \neq \lambda_2} . (v_1, v_2) = 0$

$\Rightarrow (v_1, v_2) = 0 \Leftrightarrow v_1 \perp v_2$ ∎

def/ Ортогонално допълнение

Нека $\mathcal{E}$ е КЕП и нека $U \leq \mathcal{E}$ лин. подпр-во.

$\mathcal{C}$ $U^{\perp} = \{x \in \mathcal{E} \mid x \perp y, y \in U^{\perp}\} = \{x \in \mathcal{E} \mid (x, y) = 0, y \in U\}$

def/ $\mathcal{C}$-инвариантно ЛП (затворено отн. $\mathcal{C}$)

Нека $\mathcal{C}: \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ е линеен оператор и $U \leq \mathcal{E}$.

Казваме, че U е $\mathcal{C}$-инв., ако $\forall v \in U$, то $\mathcal{C}(v) \in U$.

def/ Линейна обвивка

$\underset{\text{в-ри}}{x_1, \dots, x_k} \in V$, V ЛП

$\ell(x_1, \dots, x_k) \leq V$

най-малкото подпр-во съд. всички ЛК на $x_1, \dots, x_k$

$V = \ell(e_1, \dots, e_n)$ за $\dim V = n$.

Th/ Съществува ортонормиран базис на пр-вото, в който матрицата на сим. оператор е диагонална

Ако $\mathcal{E}$ е КЕП и $\mathcal{C}$ е сим. оператор, то съществува ортонормиран базис на $\mathcal{E}$, който е от собствени в-ри на $\mathcal{C}$ т.е. спрямо него $\mathcal{C}$ има матрица $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = \underset{\text{собст. ст-ти}}{diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)}$

Д-во/ С индукция по размерността на пр-вото

Нека $\dim \mathcal{E} = n$.

За $n=1$: $e_1 = 1$ (единич. в-р)

$e_1 \in \mathcal{E}$, то $\mathcal{E} = \ell(e_1)$, $\mathcal{C}(e_1) = \lambda_1 . e_1 \in \mathcal{E}$ и $(\lambda)_{1 \times 1}$

Нека е в сила твърдението за $\dim E \leq n-1$

Нека $\dim E = n$

Нека λ_1 е собств. ст-т на φ и v_1' е собств. в-р на φ, съотв. на λ_1. Тогава $v_1 = \frac{1}{|v_1'|} v_1'$, $|v_1| = 1$ е собств. в-р на φ с дълж. 1.

Означаваме $U = \ell(v_1)$ и нека $U^{\perp}$ е ортог. допълн.

$$U^{\perp} = \{ x \in E \mid x \perp v_1 \Leftrightarrow (x, v_1) = 0 \}$$

Ще покажем, че $U^{\perp}$ е φ-инв.

Нека $x \in U^{\perp}$

$$(\varphi(x), v_1) \underset{\varphi \text{ сим}}{=} (x, \varphi(v_1)) = (x, \lambda_1 v_1) \underset{\text{лин}}{=} \lambda_1 \underbrace{(x, v_1)}_{0} = 0$$

Значи $\varphi(x) \in U^{\perp}$ и $E = U \oplus U^{\perp}$, а $\dim U = 1$ значи $\dim U^{\perp} = n-1$ и е в сила инд. хип. за него. И следв. ортонор. базис от собств. в-ри за $U^{\perp}$ $v_2, \dots, v_n$ т.ч.

$U^{\perp}: \begin{pmatrix} \lambda_2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ за $v_2 \to \lambda_2, \dots, v_n \to \lambda_n$.

Следва всички те са ортогонални на v_1 и $|v_1| = 1$. Значи $v_1, \dots, v_n$ образува базис на E, в който

$\varphi: \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$

∎