Права в равнина

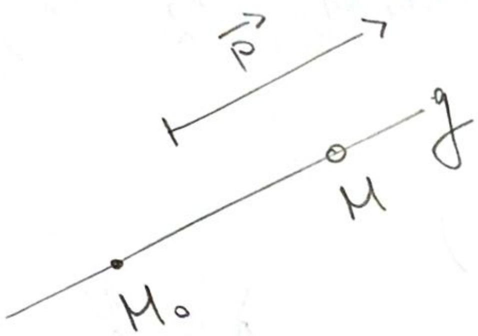
1

2019.07.01

1. Параметрично уравнение на права

$K = Oxy$

$$g \begin{cases} \parallel \vec{p}(a,b) \neq (0,0) \\ \ni M_0(x_0, y_0) \end{cases}$$



$M(x,y)$ - произволна

$\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{p} \Rightarrow \overrightarrow{M_0M} = s.\vec{p}$

$M(x,y) \Longleftrightarrow s$

$\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0} = s.\vec{p}$

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + s.\vec{p}$. Тогава

$$\boxed{g: \vec{r}(s) = \vec{r_0} + s.\vec{p}}$$, където

$\overrightarrow{OM}(x,y) = \vec{r}$ $\vec{p}(a,b)$

$\overrightarrow{OM_0}(x_0, y_0)$

$$g: \begin{cases} x = x_0 + s.a \\ y = y_0 + s.b \end{cases}, \quad s \in R$$

Това е координатно параметрично уравнение на права

$\times \times \times$

$M_1(x_1, y_1)$

$M_2(x_2, y_2)$, $\quad g \parallel \overrightarrow{M_1M_2}\,(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$

$$g: \begin{cases} x = x_1 + \lambda(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + \lambda(y_2 - y_1) \end{cases}, \quad \lambda \in R$$

$\times \times \times$

2. Общо уравнение на права в равнината

Теорема | 1) Ако т. $M(x, y) \in g$, то координатите на M удовлетворяват усл. от вида

$$\begin{cases} A.x + B.y + C = 0 \\ (A, B) \neq (0, 0) \end{cases}$$

2) Ако т. $M(x, y)$: $A.x + B.y + C = 0$, $(A, B) \neq (0, 0)$, то $\exists!\, g : M \in g$

От 1) и 2) $\Rightarrow$ $A.x + B.y + C = 0$ е уравнение на точно една права в равнината

Д-во

I Нека $M(x, y) \in g \begin{cases} \ni M_0(x_0, y_0) \\ \parallel \vec{p}(a, b) \end{cases}$

От $(1) \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + s.a \quad / .b \\ y = y_0 + s.b \quad / .(-a) \end{cases} (+) \Rightarrow$

$$b.x - a.y - (b.x_0 - a.y_0) = 0$$

Полагаме $\boxed{\begin{array}{l} A = b \\ B = -a \end{array}} \Rightarrow (A, B) \neq (0, 0)$

$$C = -b.x_0 + a.y_0$$

За $\forall M \in g \Rightarrow A.x + B.y + C = 0$, където

$g \parallel \vec{p}(\underset{-B}{a}, \underset{A}{b}) \Rightarrow g \parallel \vec{p}(-B, A)$ ■

II Нека т. $M(x,y)$

Дефиниране:

$$A\cdot x + B\cdot y + C = 0, \quad (A,B) \neq (0,0)$$

Избиране (x_0, y_0), за които

$$Ax_0 + By_0 + C = 0$$

Избиране $\vec{p}(-B, A)$. Тогава

$$\boxed{\exists!\, g \begin{cases} \ni M_0(x_0, y_0) \\ \parallel \vec{p}(-B, A) \end{cases}} \overset{(1)}{\Longrightarrow}$$

Единствена права през точка и колинеарен вектор

$$g: \begin{cases} x = x_0 + s(-B) & /\cdot A \\ y = y_0 + s\cdot A & /\cdot(+B) \end{cases} \overset{(+)}{\Longrightarrow}$$

$\Rightarrow \forall M \ni g$ удовлетворява

$$Ax + By = \underbrace{Ax_0 + By_0}_{-C} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall M \ni g: Ax + By + C = 0$$

С точност до конст. $\delta: (A+\delta)x + (B+\delta)y + (C+\delta) = 0$

3. Декартово уравнение на права

Oxy

Нека $g \nparallel Oy \iff B \neq 0$

$\forall g \parallel Oy$ нямат декартови уравнения.

$B = 0$
$\Uparrow$

Пример: $x = 0 \equiv Oy$, $g_1 : x + C = 0 \Rightarrow g_1 \parallel Oy$

$y = 0 \equiv Ox$ $\quad g_2 : y + C = 0 \Rightarrow g_2 \parallel Ox$

$\Downarrow$
$A = 0$

Тогава

$$g : Ax + By + C = 0$$

Преобразуване

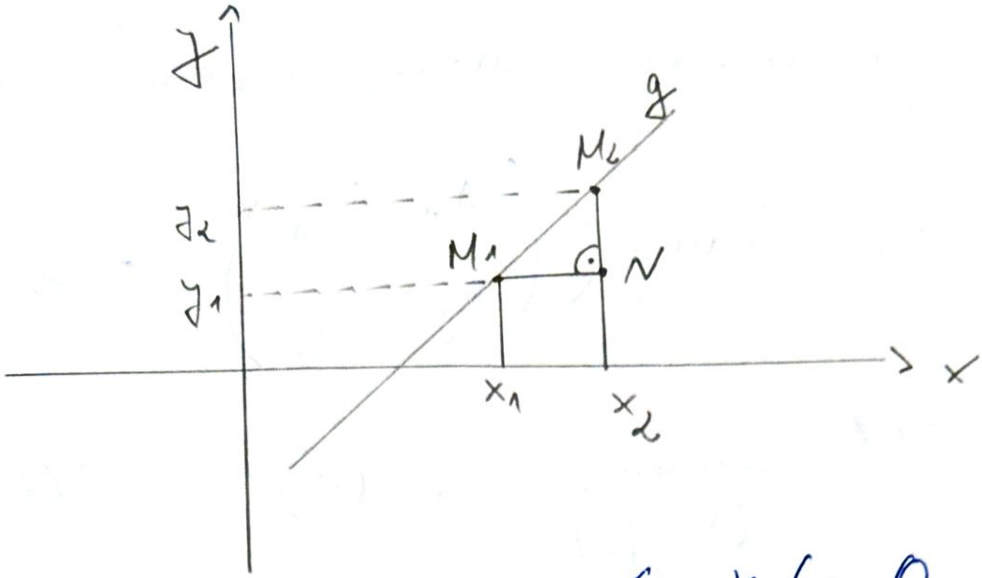
$$g : y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

или

$$g : y = k \cdot x - n$$

наричаме декартово уравнение на права

Пример Нека фиксираме ОКС



$\alpha = \sphericalangle(g, Ox^+)$

Разглеждаме $\triangle M_1M_2N$

$$tg(\alpha) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$M_1, M_2 \ni g$

$$\left| \begin{aligned} y_1 &= k x_1 + n \\ y_2 &= k x_2 + n \end{aligned} \right. \quad (-) \Rightarrow tg(\alpha) = k$$

$$g: y = \underset{\substack{\shortparallel \\ tg(\alpha) = f'(x_0)}}{k} \cdot x + n$$

4. Взаимно положение на две прави

$$(*) \left| \begin{aligned} g_1&: A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \\ g_2&: A_2 x + B_2 y + C_2 = 0 \end{aligned} \right. , \text{ където } (A_i, B_i) \neq (0,0), \; i = 1, 2$$

Тази система има решения в сл. случаи:

1 сл) $\operatorname{Rank}\left(\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix}\right) = 2$, $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$

$\Rightarrow \exists!$ решение (x_0, y_0) на $(*)$ $\Rightarrow \exists!$ т. $M_0 = g_1 \cap g_2$

2 сл) $\operatorname{Rank}\left(\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix}\right) \wedge \operatorname{Rank}\left(\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}\right)$

Тогава $(*)$ няма решение $\Rightarrow$ $=2$

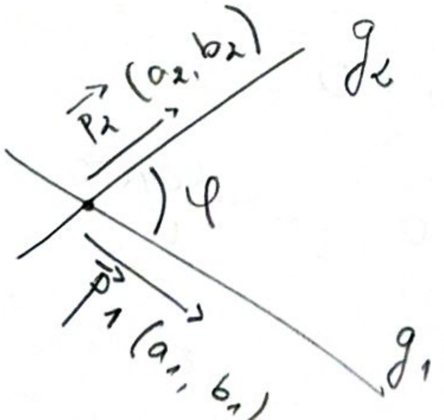
$g_1 \parallel g_2$

3 сл) $\operatorname{Rank}\left(\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}\right) = \underline{1}$ или

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$. Тогава

$$g_1 \equiv g_2$$

5. Ъгъл между две прави



$$(\vec{p_1}, \vec{p_2}) = |\vec{p_1}| \cdot |\vec{p_2}| \cdot \cos(\varphi)$$

$$\cos(\varphi) = \frac{(\vec{p_1}, \vec{p_2})}{|\vec{p_1}| \cdot |\vec{p_2}|}$$ за произволна координатна с-ма.

Ако разгледаме ОКС:

$$(\vec{p_1}, \vec{p_2}) = a_1 . a_2 + b_1 . b_2$$

$$|\vec{p_i}| = \sqrt{(a_i)^2 + (b_i)^2}$$

x x x

Ако разгледаме ОКС в равнината:

$K = Oxy$

$g_1 : A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \Rightarrow \vec{p_1}(-B_1, A_1)$

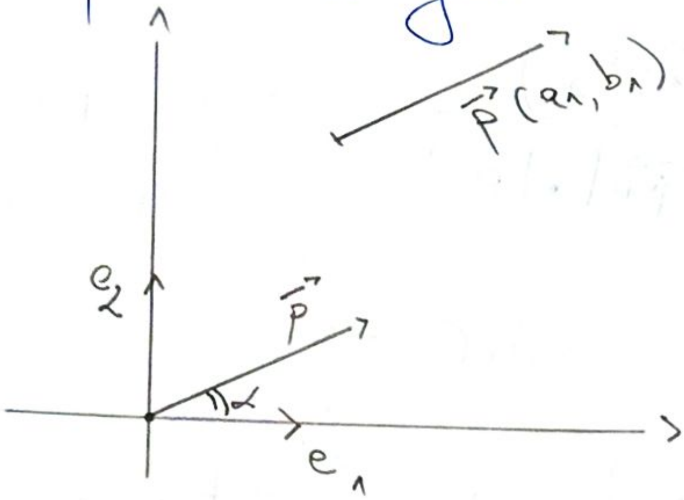
$g_2 : A_2 x + B_2 y + C_2 = 0 \Rightarrow \vec{p_2}(-B_2, A)$

$$\cos(\sphericalangle(g_1, g_2)) = \frac{A_1 . A_2 + B_1 . B_2}{|\vec{p_1}| . |\vec{p_2}|}$$

6. Нормално уравнение на права

Разглеждаме ОКС $K = Oxy$

II Директорни косинуси



$\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2 \Rightarrow (\vec{e}_1, \vec{e}_2) = 0$

$|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = \underline{1}$

$\measuredangle(\vec{e}_1, \vec{p}) = \alpha$

$\measuredangle(\vec{e}_2, \vec{p}) = \beta = 90° - \alpha$

$\vec{p}(a_1, b_1)$ – единичен

$a_1^2 + b_1^2 = \underline{1}$ $\qquad \vec{e}_1(1, 0)$

$\qquad\qquad\qquad \vec{e}_2(0, 1)$

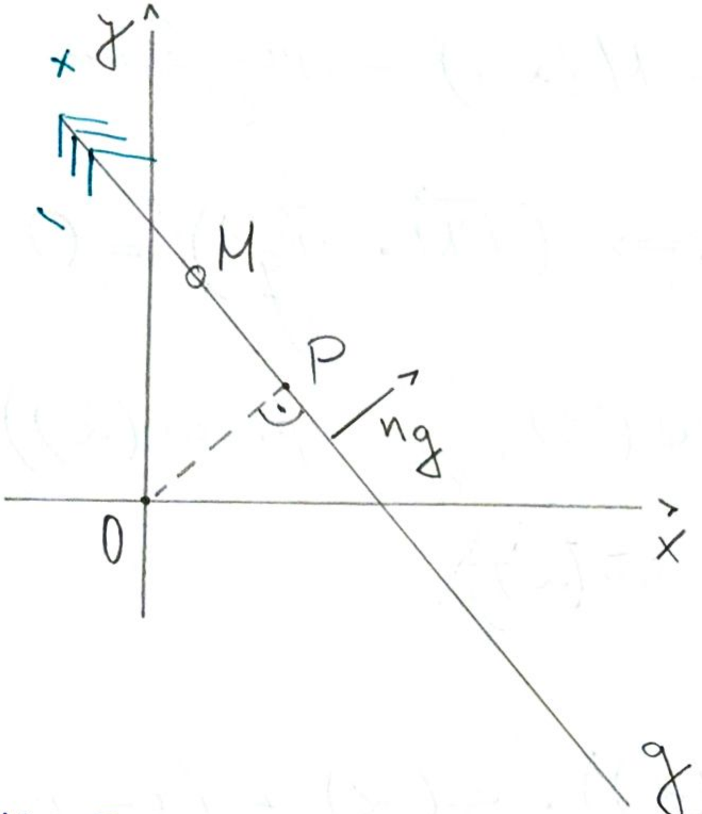
Тогава

$$(\vec{e}_1 . \vec{p}) = \underbrace{|\vec{e}_1|}_{1} . \underbrace{|\vec{p}|}_{1} . \cos(\alpha) = \cos(\alpha)$$

$$(\vec{e}_1 . \vec{p}) = a_1 . 1 + b_1 . 0 = a_1 = \cos(\alpha)$$

$$\cos(\beta) = \cos(90° - \alpha) = b_1$$

$\vec{p}(\cos(\alpha), \cos(\beta))$ – директорни косинуси



т. P – ортогоналната проекция на O в/у g

$\overrightarrow{OP} \perp g$

Избираме

$\vec{n}_g \perp g, \ \vec{n}_g \parallel \overrightarrow{OP}$

$|\vec{n}_g| = 1$

$\vec{n}_g \ (\cos(\alpha), \sin(\alpha))$

$\alpha = \sphericalangle(\vec{n}_g, \vec{e}_1)$

$\overrightarrow{OP} = p \cdot \vec{n}_g, \ p \geq 0$, като $p = 0$, когато $g \ni$ т. O

Тогава

$\overrightarrow{OP} \ (p \cdot \cos(\alpha), p \cdot \sin(\alpha))$

Избираме т. $M(x,y)$ – произволно от g

$$\vec{PM} \perp \vec{n}_g \iff (\vec{PM} \cdot \vec{n}_g) = 0$$

$$\left|\begin{array}{l} \vec{PM}(x - p\cdot\cos(\alpha),\ y - p\cdot\sin(\alpha)) \\ \vec{n}_g(\cos(\alpha),\ \sin(\alpha)) \end{array}\right. \iff$$

$$(x - p\cdot\cos(\alpha))\cdot\cos(\alpha) + (y - p\cdot\sin(\alpha))\sin(\alpha) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$x\cdot\cos(\alpha) + y\cdot\sin(\alpha) - p = 0$$

Нормално уравнение на права

Връзка м/у общо и нормално уравнение

Нека $g: Ax + By + C = 0$

$g: \cos(\alpha)\cdot x + \cos(\beta)\cdot y - p = 0$

Тогава

$$\begin{array}{l} \cos(\alpha) = k\cdot A \\ \sin(\alpha) = k\cdot B \end{array} \quad , \quad \sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

$$-p = k\cdot C$$

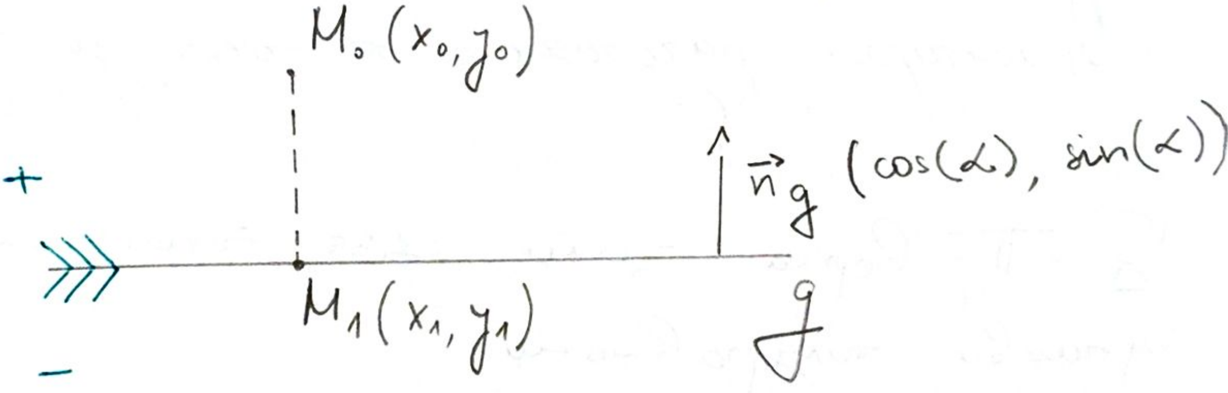
$$k^2(A^2+B^2)=1$$

$$k=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Тогава:

$$g: \frac{Ax+By+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=0$$

7. Разстояние от точка до права в ОКС



$$g: x.\cos(\alpha)+y.\sin(\alpha)-p=0$$

$$M_1 \in g, \quad \overrightarrow{M_1M_0} \perp g, \quad \overrightarrow{M_1M_0} \parallel \vec{n}_g$$

Запис | δ – ориентирано разстояние

$$\exists!\, \delta: \overrightarrow{M_1M_0} = \delta.\vec{n}_g, \quad \delta\in\mathbb{R}$$

$$\overrightarrow{M_1M_0}\,(x_0-x_1, y_0-y_1) \equiv (\delta.\cos(\alpha), \delta.\sin(\alpha))$$

$$\left| \begin{array}{l} x_0 = x_1 + \delta \cdot \cos(\alpha) \quad / \cdot \cos(\alpha) \\ y_0 = y_1 + \delta \cdot \sin(\alpha) \quad / \cdot \sin(\alpha) \end{array} \right. \quad (+) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \; x_0 \cdot \cos(\alpha) + y_0 \cdot \sin(\alpha) = \underbrace{x_1 \cos(\alpha) + y_1 \sin(\alpha)}_{p} + \delta \right.$$

(защото $M_1 \in g$)

$$\Rightarrow \delta = x_0 \cdot \cos(\alpha) + y_0 \sin(\alpha) - p$$

Ориентирано разстояние от точка до права

Проверка дали две точки са в еднакви полуравнини:

$g: \; 5x - 3y + 7 = 0$

т. $A(10, 11)$

т. $B(0, 1)$

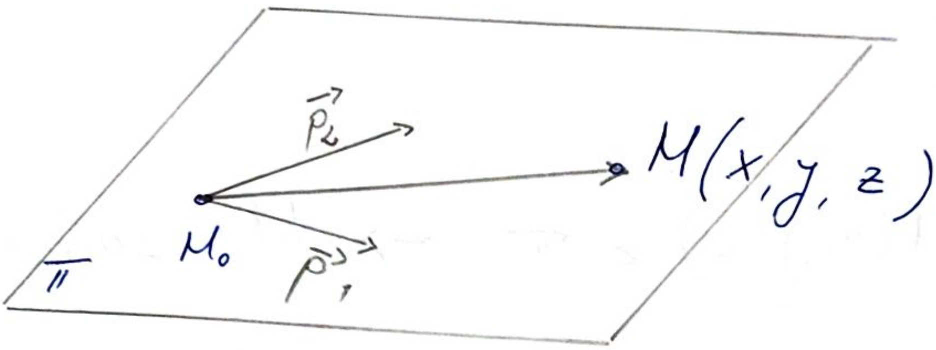
1/ Заместваме последователно (x_A, y_A) и (x_B, y_B) в тричлена $Ax + By + C = 0$

2/ Проверяваме дали получените стойности са от еднакво знаци.

Равнина в пространството

1. Параметрични уравнения

$K = Oxyz$, $p_1(a_1, b_1, c_1)$, $\vec{p_2}(a_2, b_2, c_2)$



$$\left.\begin{array}{l} M_0 \in \pi \\ \vec{p_1} \parallel \pi \\ \vec{p_2} \parallel \pi \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \overrightarrow{M_0M} = \lambda \vec{p_1} + \mu \cdot \vec{p_2} \Rightarrow \\ \pi: \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0} = \lambda \vec{p_1} + \mu \cdot \vec{p_2} \\ \pi: \vec{r} = \vec{r_0} + \lambda \vec{p_1} + \mu \vec{p} \end{array}$$

$$\Rightarrow \pi: \begin{cases} x = x_0 + \lambda a_1 + \mu \cdot a_2 \\ y = y_0 + \lambda b_1 + \mu \cdot b_2 \\ z = z_0 + \lambda c_1 + \mu \cdot c_2 \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

x x x

$\overrightarrow{M_0M}$; $\vec{p_1}, \vec{p_2}$ са линейно зависими $\Leftrightarrow$

$$(*) \quad \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

Теорема | $M(x, y, z) \in \pi \iff$

$\exists!\ Ax + By + Cz + D = 0$

$(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$

Д-во | I

Нека т. $M(x, y, z) \in \pi \Rightarrow M$ удовлетворява $(*)$

Развиваме $(*)$ по 1-ви ред. Полагаме

$$A = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$B = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$C = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$D = -A \cdot x_0 - B \cdot y_0 - C \cdot z_0 \Rightarrow$

$\pi: Ax + By + Cz + D = 0, \ (A, B, C) \neq (0, 0, 0)$ ■

II

Нека т. $M(x, y, z)$ удовлетворява

$(\#)$ $Ax + By + Cz + D = 0$, където $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Нека } (x_0, y_0, z_0) \text{ удовлетворява } (\#) \\ \vec{p_1}(-B, A, 0) \\ \vec{p_2}\left(-\frac{C}{A}, 0, 1\right) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

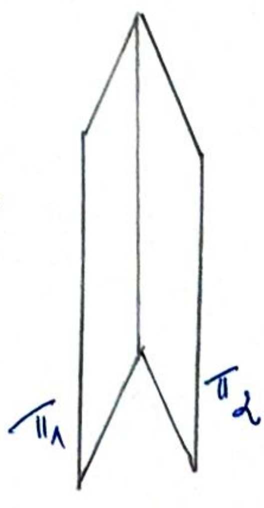
$$\exists!\ \pi \begin{cases} \ni M_0(x_0, y_0, z_0) \\ \parallel \vec{p_1}(-B, A, 0) \\ \parallel \vec{p_2}\left(-\frac{C}{A}, 0, 1\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ -B & A & 0 \\ -\frac{C}{A} & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

3. Взаимно положение на две равнини

$\pi_1: A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$

$\pi_2: A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$

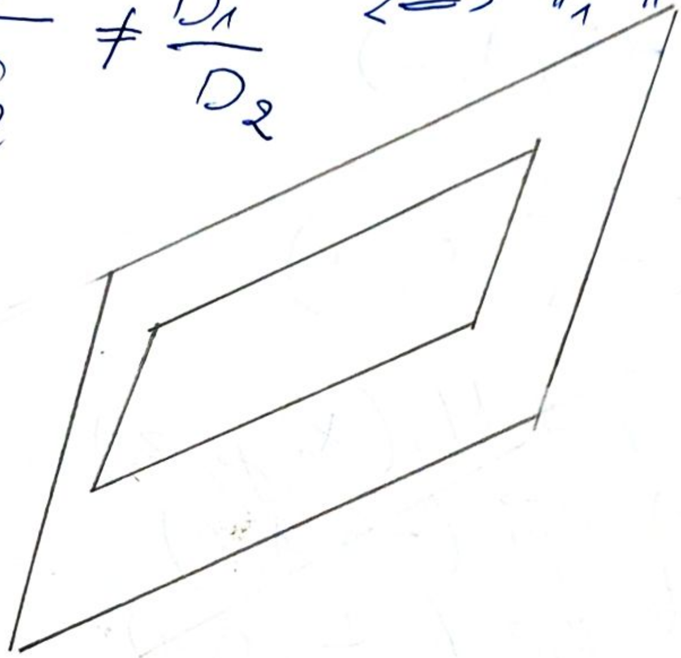
I сл/ $\text{Rank}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 2 \Longleftrightarrow$



II сл./ $\operatorname{Rank}\left(\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}\right) = 1$

$\operatorname{Rank}\left(\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix}\right) = 2$

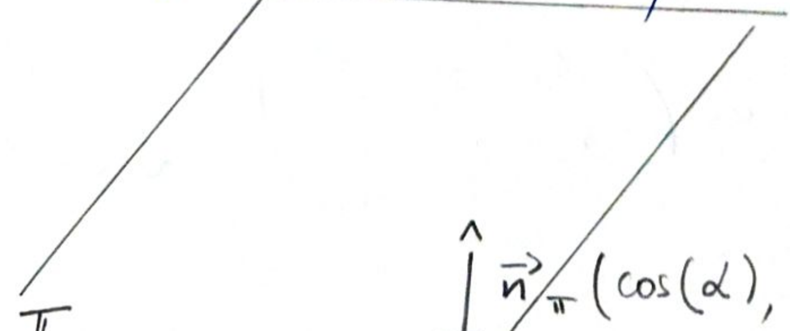
$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{B_2} \neq \frac{D_1}{D_2} \iff \pi_1 \parallel \pi_2$



III сл./

$\operatorname{Rank}\left(\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix}\right) = 1 \iff \pi_1 \equiv \pi_2$

4. Нормално уравнение на равнина в ОКС



$\vec{n}_\pi(\cos(\alpha), \cos(\beta), \cos(\gamma))$

$\alpha = \sphericalangle(\vec{n}_\pi, \vec{e}_1)$

$\beta = \sphericalangle(\vec{n}_\pi, \vec{e}_2)$

$\gamma = \sphericalangle(\vec{n}_\pi, \vec{e}_3)$

$(*)$ $\pi: \; x \cdot \cos(\alpha) + y \cdot \cos(\beta) + z \cdot \cos(\gamma) - p = 0,$

$p = |\vec{OP}|$

P - ортогонална проекция на O в/у π

× × ×

Ако $\pi: \; Ax + By + Cz + D = 0$

$\vec{n}(A, B, C), \; |\vec{n}| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = \delta$

$$\vec{n}_\pi = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} \Rightarrow \vec{n}_\pi\left(\underset{\cos(\alpha)}{\underset{|||}{\frac{A}{\delta}}}, \underset{\cos(\beta)}{\underset{|||}{\frac{B}{\delta}}}, \underset{\cos(\gamma)}{\underset{|||}{\frac{C}{\delta}}}\right)$$

$$\pi: \; \frac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0 \quad (**)$$

$$\delta(M_0, \pi) = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$