Теореми за изпита по ЕАИ

Елизабет Великова Цветелин Цецков

March 8, 2024

Contents

1 Рабин-Скот(детерминизация на произволен автомат)

Теорема 1.1. $\forall A =< Q,\ \Sigma,\ \delta,\ s,\ F >$ - *краен автомат,* $\exists!\ A^{det} =< 2^Q,\ \Sigma,\ \delta',\ \{s\} \in 2^Q,\ F' \subseteq 2^Q >$ - *краен, детерминиран, тотален автомат:* $L(A) \equiv L(A')$

$\delta' \equiv \bar{\delta}\ :\ \bar{\delta}(M \subseteq Q,\ a \in \Sigma) = \bigcup\limits_{q \in M} \delta(q,\ a)$

Лема 1.1. *Ще докажем, че* $\hat{\delta}' \equiv \hat{\bar{\delta}}$

Доказателство. Нека $M \subseteq Q$

Индукция по думата w:

База: $w = \varepsilon \Rightarrow \hat{\delta}'(M,\ \varepsilon) = M = \hat{\bar{\delta}}(M,\ \varepsilon)$

ИХ: Нека твърдението е вярно за $u \in \Sigma^*, |u| = n$

ИС: Нека $w = au$, тогава:

$$\hat{\delta}'(M,\ au) = \hat{\delta}'(\delta'(M,\ a),\ u) = \hat{\delta}'(\bar{\delta}(M,\ a), u) \underset{\text{ИХ}}{=} \hat{\bar{\delta}}(\bar{\delta}(M,\ a), u) \underset{\text{def}}{=} \hat{\bar{\delta}}(M,\ au)$$ □

Нека $w \in L(A) \iff \hat{\bar{\delta}}(\{s\},\ w) \cap F \neq \emptyset \underset{\text{Лема 1.1}}{\iff} \hat{\delta}'(\{s\},\ w) \in F' \iff w \in L(a')$

2 Затвореност на езиците разпознавани от ДКА относно конкатенация

Теорема 2.1. *Нека* Σ *е азбука и* $A_1 =< Q_1,\ \Sigma,\ \delta_1,\ s_1,\ F_1 >$ *и* $A_2 =< Q_2,\ \Sigma,\ \delta_2,\ s_2,\ F_2 >$ *са тотални ДКА.*

$Q_1\ \cap\ Q_2\ = \emptyset$

Тогава нека $A =< Q_1 \cup Q_2,\ \Sigma,\ \delta,\ \{s_1\},\ F >\ \forall\ a \in \Sigma$

$$\Delta(q,a) = \begin{cases} \Delta_1(q,a),\ \textit{ако}\ q \in Q_1 \\ \ \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ F_1\ \cup\ F_2\ \cup\ \{s\},\ \textit{ако}\ s_1 \in F_1\ \cup\ s_2 \in F_2 \\ F_1\ \cup\ F_2,\ \textit{ако} s_1 \notin F_1\ \&\ s_2 \notin F_2 \end{cases} \tag{1}$$

δ :

1. *Ако сме в* Q_1*, то* $\delta\ =\ \delta_1$.

2. *Ако сме в* Q_2*, то* $\delta\ =\ \delta_2$.

$\forall a \in \Sigma\ :\ \delta(s,a) := \delta(s_1,a)\ \cup\ \delta(s_2,a)$

$$F := \begin{cases} F_1\ \cup\ F_2\ \cup\ \{s\},\ \textit{ако}\ s_1 \in F_1\ \cup\ s_2 \in F_2 \\ F_1\ \cup\ F_2,\ \textit{ако} s_1 \notin F_1\ \&\ s_2 \notin F_2 \end{cases} \tag{2}$$

3 Затвореност на езиците разпознавани от ДКА относно обединение

Теорема 3.1. *Нека* Σ *е азбука и* $A_1 =< Q_1,\ \Sigma,\ \delta_1,\ s_1,\ F_1 >$ *и* $A_2 =< Q_2,\ \Sigma,\ \delta_2,\ s_2,\ F_2 >$ *са тотални ДКА. Тогава нека* $A =< \{s\} \cup Q_1 \cup Q_2,\ \Sigma,\ \delta,\ \{s\},\ F >$

$\delta\ :$

1. *Ако сме в* Q_1*, то* $\delta\ =\ \delta_1$.

2. *Ако сме в* Q_2*, то* $\delta\ =\ \delta_2$.

$\forall a \in \Sigma\ :\ \delta(s,a) := \delta(s_1,a)\ \cup\ \delta(s_2,a)$

$$F := \begin{cases} F_1\ \cup\ F_2\ \cup\ \{s\},\ \textit{ако}\ s_1 \in F_1\ \cup\ s_2 \in F_2 \\ F_1\ \cup\ F_2,\ \textit{ако} s_1 \notin F_1\ \&\ s_2 \notin F_2 \end{cases} \tag{3}$$

Доказателство. I Нека $w \in L_1 = L(A_1)$ w е произволна дума от езика L_1 Ако $w = \varepsilon$

$\implies s_1 \in F_1 \implies s \in F \implies w \in L(A)$

Ако $w = a.x$

$\implies \exists$ път $P_1\ =\ s_1 \xrightarrow{\text{a}} q_1 \xrightarrow{\text{x}} f_1 \in F_1 \subseteq F$

$\implies \exists$ път$P = s \xrightarrow{\text{a}} q_1 \xrightarrow{\text{x}} f_1 \in F$

$\implies w \in L(A)$

II Нека $w \in L_2 = L(A_2)$ w е произволна дума от езика L_2 Ако $w = \varepsilon$

$\implies s_2 \in F_2 \implies s \in F \implies w \in L(A)$

Ако $w = a.x$

$\implies \exists$ път $P_2\ =\ s_2 \xrightarrow{\text{a}} q_2 \xrightarrow{\text{x}} f_2 \in F_1 \subseteq F$

$\implies \exists$ път $P = s \xrightarrow{\text{a}} q_2 \xrightarrow{\text{x}} f_2 \in F$

$\implies w \in L(A)$

III Доказателство на $L(A) \subseteq\ L_1 \cup\ L_2$

Нека $w \in L(A))$ w е произволна дума от езика $L(A)$

$w = \varepsilon$

$\implies s \in F \implies s_1 \in F_1\ \cup\ s_2 \in F_2$

$\implies \varepsilon \in L_1\ \cup\ \varepsilon \in L_2$

$\implies \varepsilon \in L_1\ \cup\ L_2$

$w = a.x \implies \exists$ път $P = s \xrightarrow{\text{a}} q \xrightarrow{\text{x}} f \in F$

Ако $q = q_1 \in Q_1$

$\implies \exists$ път $P_1 = s \xrightarrow{\text{a}} q_1 \xrightarrow{\text{x}} f \in F_1$

само състояния достъпни от q_1 са в Q_1

$\implies ax = w \ \in L_1 \subseteq \ L_1 \ \cup \ L_2$

или $q = q_1 \in Q_2$

$\implies \exists$ път $P_2 = s \xrightarrow{\text{a}} q_2 \xrightarrow{\text{x}} f \in F_2$

само състояния достъпни от q_2 са в Q_2

$\implies ax = w \in L_2 \subseteq L_1 \ \cup \ L_2$

$\implies L(A) \subseteq L_1 \ \cup \ L_2 \ \checkmark$

$\square$

4 Допълнението на език разпознаван от ДКА е също език разпонзаван от ДКА

Теорема 4.1. *Нека $A =< Q,\ \Sigma,\ \delta,\ s,\ F >$ е тотален ДКА, знаем че БОО можем да го изискаме, налагаме го като изискване, защото всяка дума, за която не е дефиниран преход считаме, че не е в езика на автомата, но тя е в допълнението на езика и ни трябва начин, по който да разпознаем цялата дума, това може да стане като си поискаме автомата да е тотален, защото стигайки до състоянието на грешка, автомата след това автоматично прочита остатъка на дума и не променя своето състояние.*

Нека $A' =< Q,\ \Sigma,\ \delta,\ s,\ Q \backslash F >$. Ще докажем, че $L(A') = L(\bar{A})$.

$\overline{L} = \Sigma^\star - L$

Доказателство. Нека $L = L(A)$ за КДА $A =< Q, \Sigma, \delta, q_0, F >$. Тогава $\overline{L} = L(B)$, където B е КДА $< Q, \Sigma, \delta, q_0, Q - F >$. Това показва, че автоматът B е същият като A, но приемащите състояния на A са неприемащи при автомата B, и *vice versa* (Приемащи == финални). Тогава w е в $L(B) \iff \hat{\delta}(q_0, w)$ е в $Q - F$, което се появява $\iff$ когато w не е в $L(A)$. □

5 Затвореност на езиците разпознавни от ДКА относно операцията сечение

Нека Σ е азбука и $A_1 =< Q_1,\ \Sigma,\ \delta_1,\ s_1,\ F_1 >$ и $A_2 =< Q_2,\ \Sigma,\ \delta_2,\ s_2,\ F_2 >$ са тотални ДКА. Тогава нека $A =< Q_1 \times Q_2,\ \Sigma,\ \delta,\ (s_1,\ s_2),\ F_1 \times F_2 >$.

$\delta = \{(((q_1,\ q_2),\ a),\ (\delta_1(q_1,\ a),\ \delta_2(q_2,\ a))) \mid q_1 \in Q_1,\ q_2 \in Q_2,\ a \in \Sigma\}$

Конструкцията е същата, като на автомата разпознаващ обединението на двата езика с изключение на финалните състояния, тук ще искаме думата да бъде разпонзата и от двата автомата едновременно за да кажем, че е разпозната от конструирания автомат.

Ще покажем, че $L(A) = L(A_1) \cap L(A_2)$.

Доказателство. От законите на ДеМорган знаем, че $L \cap M = \overline{\overline{L} \cup \overline{M}}$, както и че $L \cup M = \overline{\overline{L} \cap \overline{M}}$.

Имаме доказателство на това, че обединението запазва регулярността, както и на това, че допълнението има същия ефект върху новополучения език.

□

6 За всеки език L разпознаван от краен автомат съществува НКА, който разпознава L^{rev}

I. Доказателство по идея на Иво Стратев

Доказателство. Нека БОО $N =< Q,\ \Sigma,\ \delta,\ s,\ F >$ е НКА. Ако ни е даден ДКА, то можем да използваме естествения изоморфизъм между Q и $\{\{q\} \mid q \in Q\}$, който на състояние $q \in Q$ съпоставя неговия синглетон, тоест $q \mapsto \{q\}$. От горното твърдение е ясно и че БОО можем да поискаме $|F| = 1$, тоест $F = \{f\}$. Сега ще построим автомат R, такъв че $L(R) = L(N)^{rev}$. Нека $R =< Q,\ \Sigma,\ \nabla,\ f,\ \{s\} >$, където $\nabla = \{((q,\ a),\ \{p \in Q \mid q \in \Delta(p,\ a)\}) \mid q \in Q,\ a \in \Sigma\}$.

Идеята ни този път се базира на факта, че началното състояние е единствено, тогава ако и крайното е единствено то за дадена дума ω от $L(N)$ можем да разглеждаме изчислението като път в граф и гледайки го на обратно получаваме, че $\omega^{rev} \in L(N)^{rev}$. Тоест обръщайки стрелките в графа на автомата N и разменяйки ролите на s и f получаваме автомат за $L(N)^{rev}$, той обаче в повечето случай ще бъде недетерминиран, защото е възможно различни състояния с една и съща буква да са отивали в едно и също, тогава в новия автомат от това състояние с една и съща буква ще има преход към различни състояния.

Нека вземем произволна дума $\omega \in L(R) \iff$

$$\exists a_1,\ \ldots,\ a_{|\omega|} \in \Sigma,\ q_0,\ q_1,\ \ldots,\ q_{|\omega|} \in Q\ :\ \omega = \prod_{i=1}^{|\omega|} a_i\ \wedge\ q_0 = f$$

$$\wedge\ q_{|\omega|} = s\ \wedge\ \forall i \in \{0,\ \ldots,\ |\omega| - 1\}\ q_{i+1} \in \nabla(q_i,\ a_{i+1})$$

$$\iff \forall i \in \{1,\ \ldots,\ |\omega|\}\ q_{i-1} \in \Delta(q_i,\ a_i)$$

$$\iff f = q_0 \in \Delta^*(q_{|\omega|},\ a_{|\omega|} \ldots a_1) = \Delta^*(s,\ \omega^{rev})$$

$$\iff \omega^{rev} \in L(N) \iff (\omega^{rev})^{rev} = \omega \in L(N)^{rev}$$

$$\iff \forall \alpha \in L(R) \iff \alpha \in L(N)^{rev} \iff L(R) = L(N)^{rev} \quad \square$$

$\square$

II. Втори вид доказателство - не е нужно за момента, но чрез индукция

7 Теорема на Клини

Теорема 7.1. $\forall A =< Q,\ \Sigma,\ \delta,\ s\ , F >: \exists\ L \subseteq \Sigma^*$ *- регулярен:* $L(A) = L$

Доказателство. Ще считаме, че $|F| = 1$, ако не е дефинираме $\forall f \in F : L_f \equiv L(A_f) : A_f =< Q,\ \Sigma,\ \delta,\ s,\ \{f\} >$, тогава $L \equiv \bigcup\limits_{f \in F} L_f$

Ще считаме също, че $Q = \{1,\ \ldots,\ n\} : |Q| = n$, както и $F = \{n\}$

Дефинираме $A_{i,j} =< Q,\ \Sigma,\ \delta, s = i,\ \{j\} >: L_{i,j} = L(A_{i,j})$. Следователно $L = L_{1,n}$. Ще търсим в общия случай - регулярен израз $\alpha_{i,j} : L(\alpha_{i,j}) \equiv L_{i,j}$.

Дефинираме също: $\forall m \in \{1, \ldots, n\} : L^m_{i,j} = \{w | i \xrightarrow{w} j$като по пътя има състояния с номера $\leq$ m$\}$. Тогава $L^n_{1,n} \equiv L$.

Доказателство с индукция по m:

База: $m = 0 \implies$

$$\alpha^0_{i,j} = \bigcup_{i \xrightarrow{a} j} a \tag{4}$$

При $i = j$

$$\alpha^0_{i,j} = \bigcup_{i \xrightarrow{a} j} a \cup \{\varepsilon\} \tag{5}$$

При $i \neq j$ $L^0_{i,j} = \{w | i \xrightarrow{w} j$без междинни състояния$\} \implies a \in L^0_{i,j} \iff \exists i \xrightarrow{a} j \iff L(\alpha^0_{i,j}) \subseteq L(a) \implies L(\alpha^0_{i,j}) = \bigcup\limits_{i \xrightarrow{a} j} a$

ИХ: Нека е вярно за $\forall i,\ j,\ m < n :$

$$L^m_{i,j} = L(\alpha^m_{i,j}) \tag{6}$$

ИС: Разглеждаме $L^{m+1}_{i,j}$.(Представяме си картинката на проф. Соскова с автоматите - може да мине през състояние с номер $m + 1$, а може и да не мине).

I сл $i \xrightarrow{w}^{\leq m} j \underset{\text{по ИХ}}{\iff} w \in L(\alpha^m_{i,j}) = L^m_{i,j}$

II сл Минава през $m+1 \implies \exists\ u, v, x \in \Sigma^* :\ w = uv^*x$ и $i \xrightarrow{u} m+1 \xrightarrow{v} m+1 \xrightarrow{v} m+1 \xrightarrow{v} \ldots \xrightarrow{x} j$.

Тогава получаваме:

$$\alpha^{m+1}_{i,j} = \alpha^m_{i,j} + \alpha^m_{i,m+1}\ (\alpha^m_{m+1,m+1})^*\ \alpha^m_{m+1,j} \tag{7}$$

Остава само да докажем, че $L^{m+1}_{i,j} \equiv L(\alpha^{m+1}_{i,j})$. Стандартно доказване за еднаквост на 2 езика.

I сл $w \in L^m_{i,j} \iff i \xrightarrow{w}^{\leq m} j \underset{\text{по ИХ}}{\iff} w \in L(\alpha^m_{i,j})$

II сл $w \in L_{i,j}^{m+1} \setminus L_{i,j}^{m} \iff \exists u,\ v_1,\ v_2,\ \dots,\ v_p,\ x \in \Sigma^* :\ i \xrightarrow{u}^{\leq m} m+1 \xrightarrow{v_1}^{\leq m} m+1 \xrightarrow{v_2}^{\leq m} m+1 \xrightarrow{v_3}^{\leq m} \dots \xrightarrow{v_p}^{\leq m} m+1 \xrightarrow{x}^{\leq m} j \implies w = u\ v_1\ v_2\ \dots\ v_p\ x$, но от преходите следват следните заключения: $u \in L_{i,m+1}^{m}$, $\forall i :\ v_i \in L_{m+1,m+1}^{m}$, $x \in L_{m+1,j}^{m}$. По ИХ имаме регулярни изрази за всеки от тези езици. $\implies w \in L(\underbrace{\alpha_{i,m+1}^{m}\ (\alpha_{m+1,m+1}^{m})^*\ \alpha_{m+1,j}^{m}}_{\beta})$

$\implies w \in L_{i,j}^{m} \cup L_{i,m+1}^{m}\ (L_{m+1,m+1}^{m})^*\ L_{m+1,j}^{m} \underset{\text{по ИХ}}{\iff} w \in \alpha_{i,j}^{m} + \alpha_{i,m+1}^{m}\ (\alpha_{m+1,m+1}^{m})^*\ \alpha_{m+1,j}^{m} \underset{\text{по постоение}}{\iff} w \in L(\alpha_{i,j}^{m+1}) \underset{w \text{ произволно}}{\implies} L_{i,j}^{m+1} \subseteq L(\alpha_{i,j}^{m+1})$

Обратната посока е значително по-кратка:

I сл $w \in L(\alpha_{i,j}^{m+1}) \underset{\text{по ИХ}}{\implies} w \in L_{i,j}^{m}$

II сл $w \in L(\beta$[1]$) \implies w = u\ v_1\ v_2\ \dots\ v_p\ x$, като за $u,\ v_i,\ x$ важат горните ограничения

$u \in L(\alpha_{i,m+1}^{m}) \underset{\text{по ИХ}}{\implies} L_{i,m+1}^{m}$

$v_i \in L(\alpha_{m+1,m+1}^{m}) \underset{\text{по ИХ}}{\implies} L_{m+1,m+1}^{m}$

$x \in L(\alpha_{m+1,j}^{m}) = L_{m+1,j}^{m}$

$\implies w \in L_{i,j}^{m} \cup L_{i,m+1}^{m}\ (L_{m+1,m+1}^{m})^*\ L_{m+1,j}^{m} = L_{i,j}^{m+1}$

$\square$

[1] Виж малко по-нагоре

8 Лема за покачване(Pumping lemma)

Лема 8.1. $L \subseteq \Sigma^*$ - *регулярен* $\implies$
$\exists n \in \mathbb{N}: \ \forall w \in L, \ |w| \geq n:$

1. $\exists x, y, z \in \Sigma^*: \ w = xyz$
2. $|xy| \leq n$
3. $|y| > 0$
4. $\forall i \in \mathbb{N} xy^i z \in L$

Доказателство. $L \subseteq \Sigma^*$ - регулярен $\underset{7}{\implies} \exists A =< Q, \ \Sigma, \ \delta, \ s, \ F >: \ L(A) \equiv L$, нека $|Q| = n$,
$w \in L, \ |w| \geq n \implies w = a_1 \ a_2 \ \dots \ a_k, \ k \geq n$
$w \in L \implies \exists \ s \xrightarrow{a_1} q_1 \xrightarrow{a_2} q_2 \xrightarrow{a_3} \dots \xrightarrow{a_{k-1}} q_{k-1} \xrightarrow{a_k} f \in F$ - общо $k+1$ прехода, но състоянията са $n \leq k \underset{\text{по принципа на Дирихле}^2}{\implies} \exists i \neq j : q_i \equiv q_j$. Избираме първото повторение. Тогава $\exists x, \ y, \ z \in \Sigma^*$: $s \xrightarrow{y} q_i \xrightarrow{y} q_i \xrightarrow{z} f$, с което доказахме 1. Проверяваме условията 2, 3, 4:

2: $|xy| \overset{?}{\leq} n$. Знаем, че $s \xrightarrow{x} q_i \xrightarrow{y} q_i$, ако положим $|xy| = j \implies$ има $j+1$ преходи

3: $|y| \overset{?}{>} 0$. Това е по построение, защото $i \neq j \implies y \neq \varepsilon \implies |y| > 0$

4: $\forall i \in \mathbb{N}: \ xy^i z \overset{?}{\in} L$. Знаем, че $s \xrightarrow{x} q_i \xrightarrow{y} q_i \xrightarrow{z} f \implies$ можем да повторим цикъла n на брой пъти и ще останем в езика, защтото $s \xrightarrow{x} q_i \xrightarrow{y} q_i \xrightarrow{y} \dots \xrightarrow{y} q_i \xrightarrow{z} f \implies \forall n \in \mathbb{N}: \ xy^n z \in L$ □

[2] Принципа на гълъбовата дупка???

9 Теорема на Майхил-Нероуд

Малко дефиниции: за $L \subseteq \Sigma^*$

Дефиниция 9.1. $R_L \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$

$\forall u,\ v \in \Sigma^* u\ R_L\ v \iff \forall\ z \in \Sigma^* :\ (uz \in L \leftrightarrow vz \in L)$

R_L - релация на еквивалентност

R_L - дясно инвариантна

Дефиниция 9.2. $R_A \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$

$\forall u,\ v \in \Sigma^* u\ R_A\ v \iff \hat{\delta}(s, x) = \hat{\delta}(s, y)$

R_A - релация на еквивалентност

R_A - дясно инвариантна

Лема 9.1. $R_A \subseteq R_L$

Доказателство. Нека $x,\ y \in \Sigma^* :\ \ x\ R_A\ y \iff \hat{\delta}(s,\ x) = \hat{\delta}(s,\ x)$, за $\forall z \in \Sigma^* :\ \hat{\delta}(s,\ xz) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(s,\ x),\ z) \underset{x\ R_A\ y}{=} \hat{\delta}(\hat{\delta}(s,\ y),\ z) = \hat{\delta}(s,\ yz) := q$. За q имаме 2 възможности $q \in F \vee q \notin F$:

1. $q \in F \implies xz \in L \wedge yz \in L$
2. $q \notin F \implies xz \notin L \wedge yz \notin L$

От тук можем да заключим, че: $(xz \in L \iff yz \in L) \implies x\ R_L\ y \implies R_A \subseteq R_L$ □

Теорема 9.1 (Майхил-Нероуд)**.** $L \subseteq \Sigma^* :\ L$ *- регулярен* $\iff |R_L| < \infty$

Доказателство. $\implies L$ - регулярен $\implies \exists\ A$ - детерминиран краен тотален автомат: $L(A) \equiv L$

По Лема 9.1 знаем, че $R_A \subseteq R_L \implies |R_A| \geq |R_L|$, но знам, че:

$$|R_A| = |Q| < \infty \implies |R_L| \leq |R_A| < \infty \implies |R_L| < \infty \tag{8}$$

$\Longleftarrow\ |R_L| = k < \infty \implies [w_1],\ [w_2],\ \dots\ [w_k]$. Дефинираме автомата на Нероуд: $M =< Q_\equiv,\ \Sigma, \delta_\equiv,\ s_\equiv,\ F_\equiv >$, където:

$Q_\equiv = \{[w] \mid w \in L\}$

$\delta_\equiv([w],\ a) = [wa],\ \forall w \in \Sigma^*,\ a \in \Sigma$

$s_\equiv = [\varepsilon]$

$F_\equiv = \{[w] \mid w \in L\}$

Твърдим, че $L(M) \equiv L$, след коректностите се доказва лесно.

□

Лема 9.2. *δ_M е коректно дефинирана (δ_M задава функция), т.е не зависи от думата в скобите, ако класа на еквивалентност е същия*

Доказателство. Нека $u,\ w \in \Sigma^* :\ u\ R_L w$. За тях имаме:

$$\delta_{\equiv}([w],\ a) = [wa] \delta_{\equiv}([u],\ a) = [ua] \tag{9}$$

$[wa] \stackrel{?}{\equiv} [ua]$

Знаем, че R_L е дясно инвариантна $\implies$ $wa\ R_L ua$ $\implies$ $[wa] \equiv [ua]$ $\implies$ $\delta_{\equiv}$ е добре дефинирана функция. □

Лема 9.3. $\hat{\delta}_{\equiv}([u],\ v) = [uv]$

Доказателство. Индукция по думата v:

База: $v = \varepsilon \implies \hat{\delta}_{\equiv}([u],\ \varepsilon) = [u]$

ИХ: Нека е вярно за някое v

ИС: Нека $v' = av$

$$\hat{\delta}_{\equiv}([u],\ av) = \hat{\delta}_{\equiv}(\delta_{\equiv}([u],\ a),\ v) = \hat{\delta}_{\equiv}([ua],\ v) \underset{\text{по ИХ}}{=} [uav] \tag{10}$$

□

Лема 9.4. $L(M) = L$

Доказателство. I $\subseteq$ $w \in L \implies [w] \in F_{\equiv}$

$\underset{\text{по Лема 9.3}}{\implies} [w] = \hat{\delta}_{\equiv}([\varepsilon], w) \in F_{\equiv} \iff w \in L(M) \implies L \subseteq L(M)$

II $\supseteq$ $w \in L(M) \implies \hat{\delta}_{\equiv}([\varepsilon],\ w) = [w] \in F_{\equiv}$

$\exists x \in L :\ ([w] \equiv [x] \iff x R_L w)$

$\iff \forall x \in \Sigma^* :\ wz \in L \iff xz \in L$

$z := \varepsilon :\ w \in L \iff x \in L$

$x \in L \implies w \in L \implies L(M) \subseteq L$

Следователно $L(M) \equiv L$ □

Дефиниция 9.3. $A =< Q, \Sigma, \delta, s, F >$ е минимален автомат $\iff$ $\forall A' =< Q', \Sigma, \delta', s', F' >$: $L(A) \equiv L(A') \wedge |Q| \leq |Q'|$

Теорема 9.2. *Минималния детерминиран*[3] *тотален свързан автомат е единствен с точност до изоморфизъм*

Доказателство. Нека $A =< Q, \Sigma, \delta, s, F >$ - детерминиран тотален свързан минимален автомат. Установяваме изоморфизъм $\varphi : A \longrightarrow M$

Проверяваме, че:

1. φ е коректно зададена
2. φ е биекция от $Q \longrightarrow \Sigma^*/R_L$
3. φ е изоморфизъм на автомати: $\varphi(s) = [\varepsilon],\ \varphi(\delta(q,\ a)) = \delta_{\equiv}(\varphi(q), a)$ и $f \in F \iff \varphi(F) \in F_{\equiv}$

Коректност на φ - Ако $\exists w \in \Sigma^* :\ s \xrightarrow{w} p \wedge s \xrightarrow{w} q \underset{\text{A - детерминиран}}{\Longrightarrow} p = q$

φ е биекция ☐

[3]Можем да си го поискаме детерминиран заради Теоремата на Рабин-Скот

10 Разрешими проблеми за регулярни езици

10.1 Word problem т.е. дали дадена дума принадлежи на езика?

$w \in L$? Обхождаме КДА A. Т.е. програма, която имитира работата на автомата.

(Пускаме тази програма над думата.)

Симулираме A с вход w.

Дали има крайно състояние, което е достижимо?

Има алгоритъм:

По дадена дума w и съответно описание на езика L:

$$? \; w \in L : \begin{cases} \text{да, ако } w \in L \\ \text{не, ако } w \notin L \end{cases} \tag{11}$$

Езици, за които има такъв алгоритъм се наричат разрешими.

По-общо, ако има алгоритъм, винаги завръшващ и разрешава даден проблем P, P - разрешим проблем.

10.2 Проблемът за празнотата на езика

I. Начин

$L = \emptyset$?

По даден краен автомат A да разпознаем дали $L(A) = \emptyset$. (Може и КДА, може и НКДА)

Обхождаме с DFS (в дълбочина) от s кои са достижими. Ако няма заключителни състояния от F, които са достижими от s $-$ $L(A) = \emptyset$.

Или т.е. $L = \emptyset \iff \ f \ \in F \ : \ f$ е достижимо от s.

• Търсенето в дълбочина е за линейно време и за двата автомата

II. Начин

$L(A) \neq \emptyset \iff$ има дума $w \in L(A)$ $|w| < |Q|$

$\Longleftarrow$ очевидно

$\Longrightarrow$ Нека допуснем, че няма дума $w \in L(A)$ и $|w| < |Q|$

$\Longrightarrow \forall\ w \in L(A)$ $|w| \geq |Q|$

Избираме най-късата $w \in L(A)$

По Pumping lemma ->

$w = xyz$ $y \neq \epsilon$ $|xy| \leq n$ $xz \in L(A)$ $|xz| < |w|$ противоречи на това, че w е най-късата дума в $L(A)$.

Допускането е грешно $\Longrightarrow$ $\exists\ w \in L(A)\ :\ |w| < |Q|$

10.3 Проблемът за пълнота

По даден автомат А ? $L(A) = \Sigma^\star$

$L(A) = \Sigma^\star \iff \neg \exists\, q \in Q \setminus F \ : \ q$ е достижимо от $s>$

• търсене в дълбочина, линейно време, но само за КДА.

(Еквивалентно: Празнота на $\overline{L}$)

Пълнота на НКДА: Правим го на КДА, не е известен по-добър алгоритъм.

• Дали има дума. От s се достига в незаключително състоание.

•$L = L(A) = \emptyset$

$\longrightarrow L(\overline{A}) = \Sigma^* \setminus L$

$\longrightarrow L(A) = \Sigma^*$

A ? $L(A) = \Sigma^*$? $L(\overline{A}) = \emptyset$

10.4 Проблемът за крайност на езика

а) По автомат $A\ :\ L = L(A)$ е краен?

L е безкраен $\iff$ има цикъл и да има път от началото до някое състояние на цикъла, както и от някое състояние на цикъла до някое заключително.

б) $L(A)$ е $\infty \iff \exists\ w \in L(A)\ :\ n \leq |w| < 2n$, т.е. $n = |Q|$ от P.L.

$\Longleftarrow$ по P.L. $w \in L(A)\ :\ |w| \geq n$

$w = xyz,\ y \neq \epsilon,\ \forall\ i\ xy^iz \in L(A)$ и от тук P.L. осигурва $|L| = \infty$

$\Longrightarrow$ Нека $L(A) = \infty$. $n = |Q|$

Допускаме, че всяка дума $|w| \geq n \longrightarrow |w| \geq 2n$

$w \in L(A)$ (не може всяка дума $w \in L(A)$ да е $|w| \leq n$, защото са краен брой, а $L(A) = \infty$)

Избираме най-късата дума $w \in L(A)$, т.е. с минимална дължина $|w| \geq n$, допускаме, че $|w| \geq 2n$.

Но такава по P.L. $\Longrightarrow\ w = xyz,\ y \neq \epsilon \parallel |y| \leq n,\ n \leq |xz| < |w|,\ xz \in L(A)$ противоречи с избора на w, т.е. допускането е грешно.

$\Longrightarrow$ има дума $w \in L(A)\ :\ n \leq |w| \leq 2n$

10.5 Проблемът за еквивалентност

По дадени $A_1 \& A_2$ - КДА ? $L(A_1) = L(A_2)$

I. Начин

Доказателство. $A_1 \& A_2$ - КДТА и минимизираме и проверяваме дали са изоморфни.

Защото минималният автомат е "единствен". □

II. Начин

Доказателство. $L \& L'$ са рег. езици, дефинирани с КДА.

$A =< Q, \Sigma, \delta, s, F > \& A' =< Q', \Sigma, \delta', s', F' >$. Нека $Q \cap Q' = \emptyset$.

Дали $L = L'$?

Нека да разгледаме $A_\cup \ := < Q \cup Q',\ \Sigma, \delta_\cup, s, F \cup F' >$,

$$\delta_\cup(q, a) = \begin{cases} \delta(q, a), \text{ ако } q \in Q \\ \delta'(q, a), \text{ ако } q \in Q' \end{cases} \tag{12}$$

Намираме класовете на еквивалентност от състояния на $A_\cup$. $L = L' \iff s \equiv s'$.

• Не знам трябва ли да пиша и още, защото имаше в нейните записки, но не мога да разбера напълно написаното :"))).

□

11 Йерархия на Чомски

Трябва ли ни, не ни ли трябва?

12 Нормална форма на Чомски

Граматиката $G' = < V, \Sigma, P, S >$ е в НФЧ, ако $P \subseteq V \times \Sigma \cup V \times VV$.

1. $\epsilon-$елиминиране
2. елиминиране на (единичните) правила от вида $A \Rightarrow B$
3. елиминиране на правилата с дълга дясна част

13 Контекстно-свободна граматика към стеков автомат

Теорема 13.1. *По всяка конт.-свободна граматика G можем да построим стеков автомат M, такъв че $L(G) = L_s(M)$.*

Доказателство. Нека е дадена к.-с. граамтика $G =< V, \Sigma, R, s >$ в НФЧ.

Построяваме стеков автомат $M =< Q = \{q\}, \Sigma, \Gamma = \Sigma \cup V, \delta, s = q, \# = s, F = \emptyset >$, който ще разпознава $L(G)$.

I. $\delta(q, \epsilon, A) \ni (q, \alpha),$ ако $A \Rightarrow \alpha \in P$

II. $\delta(q, a, a) \ni (q, \epsilon),\ a \in \Sigma$

За да покажем, че $L(M) = L(G)$, ще докажем лема:

Лема 13.1. *Ако $w \in \Sigma^*, \alpha \in \{\epsilon\} \cup V(\Sigma \cup V)^*$, то*

$s \implies^* w\alpha$ *(ляв извод)* $\iff (q, w, S) \vdash^* (q, \epsilon, \alpha)$

Следствие от Лемата: $\alpha = \epsilon \ \forall\ w \in \Sigma^*$

$w \in L(G) \iff S \implies^* w$ *(ляв извод)* $\iff (q, w, s) \vdash^* (q, \epsilon, \epsilon) \iff w \in L(M)$

Доказателство. на лемата

$(\implies)$ Нека $S \xrightarrow{n} w\alpha.\ w \in \Sigma^*,\ \alpha \in \{\epsilon\} \cup V(V \cup \Sigma)^*$

Тогава има извод $u_0 = S \implies u_1 \ldots \implies u_n = w\alpha.$

С индукция по n (дължината на извода) ще покажем, че $(q, w, S) \vdash^* (q, \epsilon, \alpha)$

$S \implies^* w\alpha \longrightarrow (q, w, S) \vdash^* (q, \epsilon, \alpha)$:

1) n = 0:

$u_0 = S = w\alpha \longrightarrow w = \epsilon \& \alpha = S \longrightarrow (q, w, S) \vdash^* (q, \epsilon, \alpha)$

$(q, w, s) \vdash^* (q, \epsilon, \alpha)$

$(q, w = \epsilon, s) \vdash^* (q, \epsilon, \alpha = s)$ ✓

$s \equiv w\alpha\ w = \epsilon\ \&\ \alpha = s$

2) Нека твърдението е вярно за n.

$S \xrightarrow{n+1} w\alpha$ най-ляв извод

$s \xrightarrow{n} xAB \implies w\alpha,\ \ x \in \Sigma^*, A \in V, B \in (\Sigma \cup V)^*$

$A \longrightarrow \gamma \in P$

$xAB \implies x\gamma B = w\alpha$

Сл.

$w = xy$ за някое $y \in \Sigma^*$

$x\gamma B = xy\alpha \longrightarrow \sigma B = y\alpha$

За $s \xrightarrow{n} x(= w)AB(\alpha)$ по И.П.

$(q, x, s) \vdash^* (q, \epsilon, AB)$

Същият преход:

$(q, xy, S) \vdash^* (q, y, AB) \vdash (q, xy, S) \vdash (q, \epsilon, \alpha)\ \ y \in \Sigma^*$

у пъти преходи от II. тип

(II $(q, a, a) \vdash (q, \epsilon, \epsilon)$

$A \longrightarrow \gamma \in P$

$(\Longleftarrow)$

Нека $(q, w, s) \vdash^* (q, \epsilon, \alpha)$

Индукция по броя n на преходите от тип I ($q, \epsilon, A) \vdash (q, \epsilon, \gamma),\ A \longrightarrow \gamma \in P)$

1) n = 0

S не е терминал $\longrightarrow$ няма преходи

$w = \epsilon, \alpha = S$

$S \xrightarrow{*} w(= \epsilon)\alpha(= S)$ т.е. $S \xrightarrow{*} S$ ✓

2) $n \ \longrightarrow\ n + 1$ n пъти тип I. $(\star)(q, w, S) \vdash (q, y, AB) \vdash^{n+1} (q, y, \gamma B) \vdash^* (q, \epsilon, \alpha)$

преходи от тип II.

$A \longrightarrow \gamma \in P,\ y \in \Sigma^*$

$w = xy$ за някое $x \in \Sigma^*$

y е начало на γB

$\gamma B = y\alpha$

От ($\star$:

n пъти преходи от тип I.

$q, x(= w), S) \vdash (q, \epsilon, AB(= \alpha))$

И.П. $\implies S \implies {}^*xAB \implies x\gamma B = xy\alpha = w\alpha$

$S \implies w\alpha$

• Проверете за правотата на доказателството за всеки случай със записките на проф. Соскова. :)))

□

□

14 Стеков автомат към контекстно-свободна граматика - няма да има