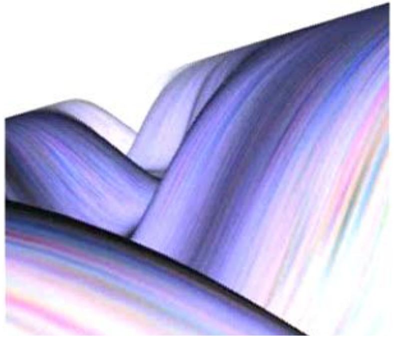
ТЕМА №20

Проекции



Съдържание

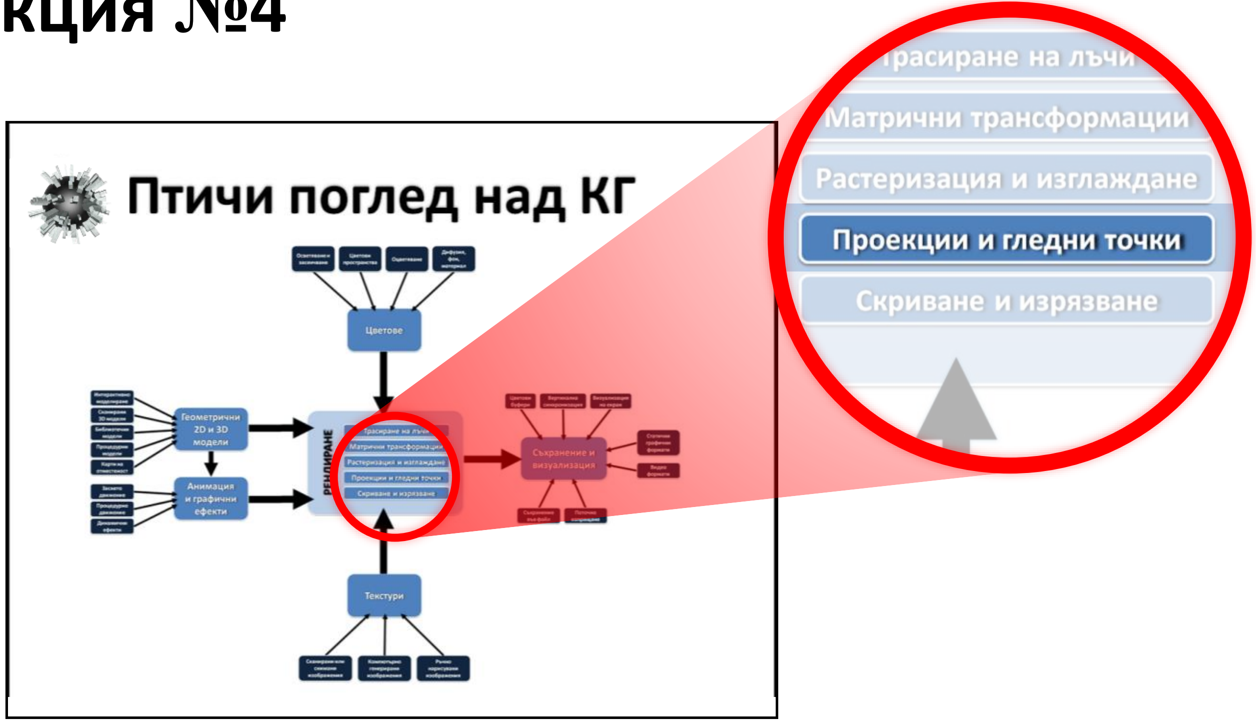
Тема 20: Проекции

- Гледна точка
- Движение на гледната точка
- Проекции
- Матрици на проекции

Гледна точка

Да си припомним

Лекция №4



Преди растеризацията

Дейности преди растеризацията

- Гледна точка – определяне коя част от модела виждаме и в каква ориентация
- Проекция – определяне на 2D образ на 3D модел
- Могат да се извършат заедно, но по-лесно е отделно

Гледна точка

Всяка сцена я включва

- Явна или неявна, винаги я има

Използване

- Определяне как се вижда сцената
- Движение из тримерен свят
- Плъзгане на образа и приближаване

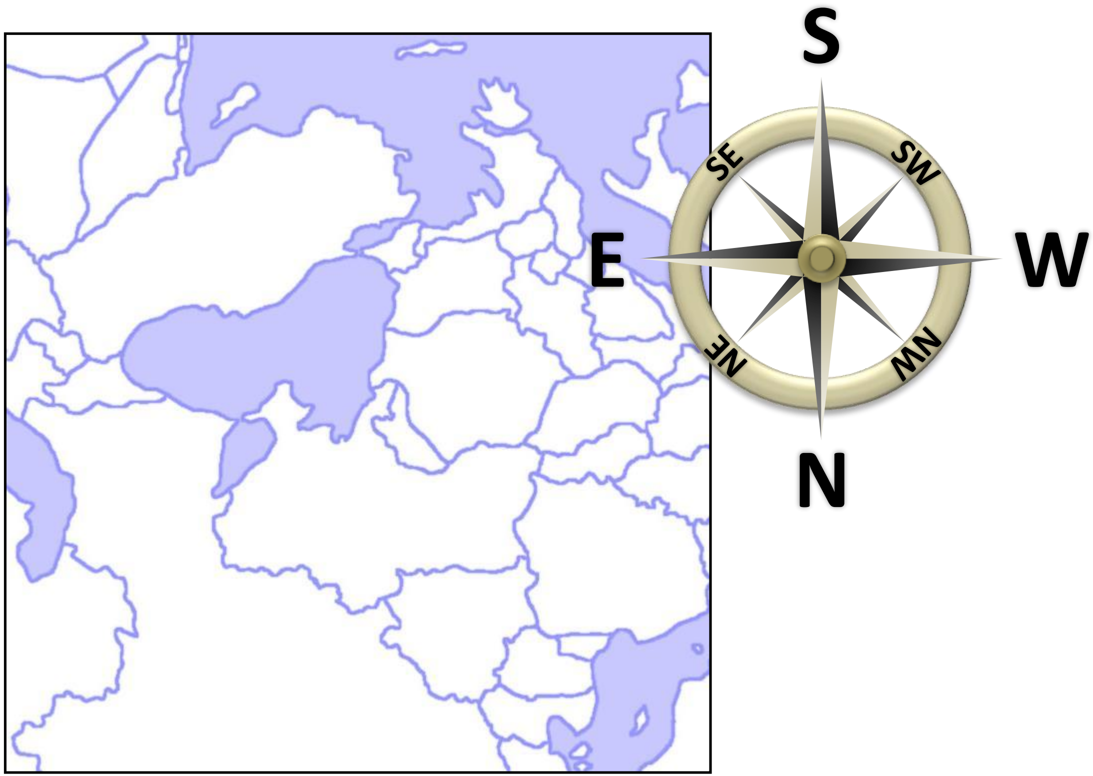
Неразличимост

Идеи за въртене в кръг

- Сцената се върти заедно с обектите ѝ
  (като чиния в микровълнова печка)
- Сцената е неподвижна, а ние се въртим около нея
  (като акула около тюлен)
- Неразличими математически и физически идеи
- Различими от практическа гледна точка
  (при статична сцена нещата са по-прости и по-бързи)

Това какво е и на какво е?

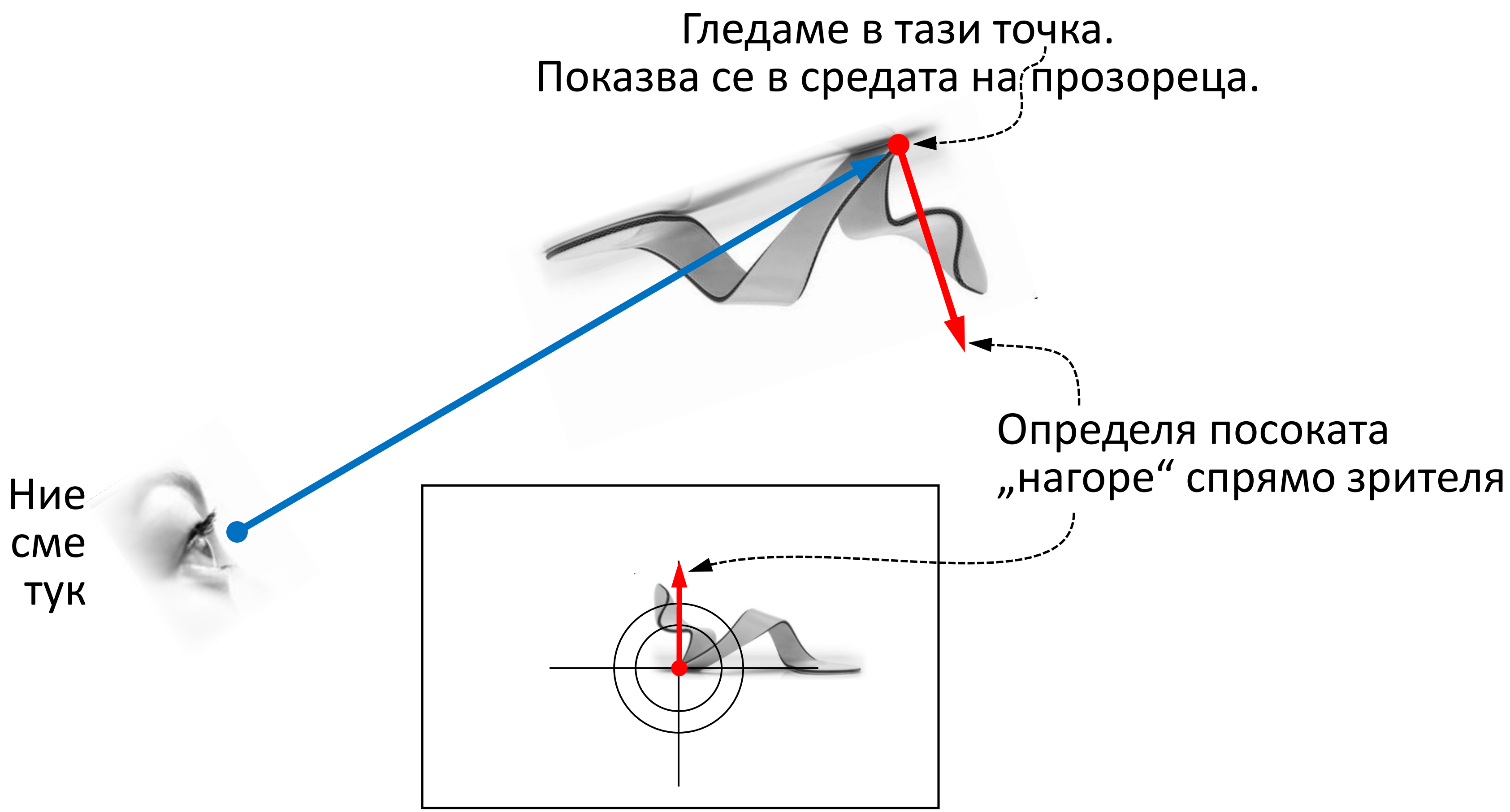
– Карта на част от Европа



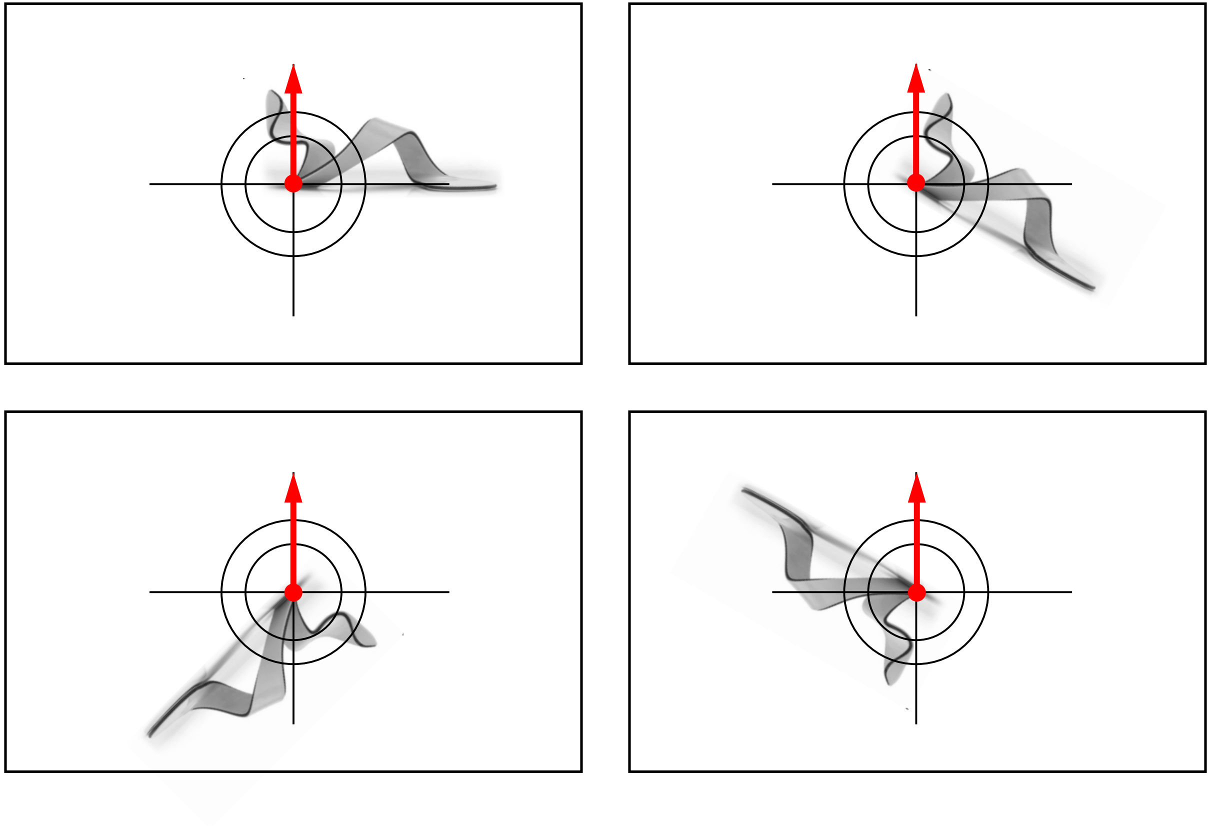
Елементи

Гледната точка не е просто 3D точка

- Определя положението на зрителя спрямо сцената
  (3D точка)
- Определя посоката на гледане
  (друга 3D точка или ненулев вектор)
- Определя ориентацията на образа
  (трета неколинеарна 3D точка или неколинеарен 3D вектор)


Гледаме в тази точка.
Показва се в средата на прозореца.
Ние
сме
тук
Определя посоката
„нагоре“ спрямо зрителя

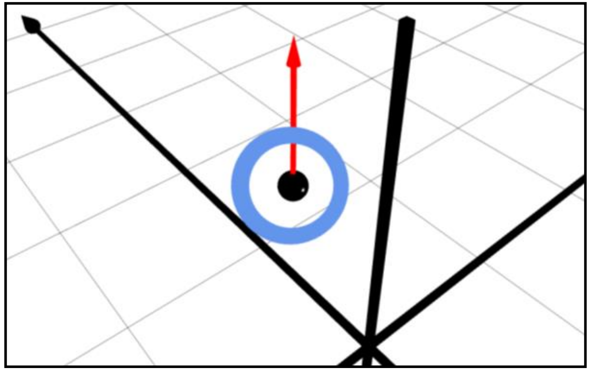
Вектори „нагоре“



Пример

Плавен преход към гледна точка

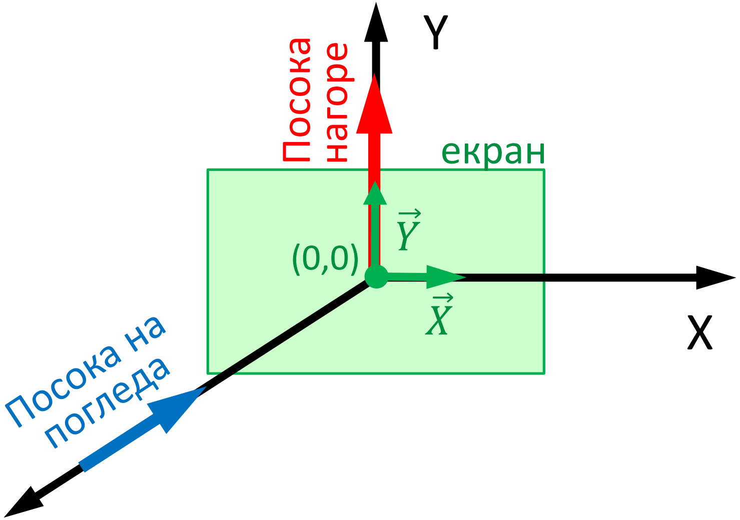
– Демонстрация на гледна точка



Традиционни чертежи

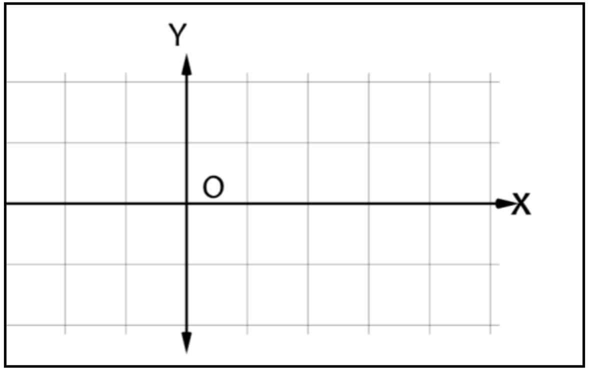
Традиционни 2D чертежи

- В средата на екрана е $(0,0)$
- Оста $\vec{X}$ е надясно, а $\vec{Y}$ е нагоре



Как се постига?

– Гледаме от точка $(0,0,n > 0)$
– Гледаме към точка $(0,0,0)$
– Посоката нагоре е $(0,1,0)$



Реализация

Реализация на гледната точка

- Естествено, че чрез матрица

В матрицата са включени

- Транслация
  (за да може гледаната точка да е в средата на екрана)
- Ротации
  (за да нагласят координатните ѝси и посоката „нагоре“)
- Понякога и мащабиране

Движение на гледната точка

Движение

Гледната точка като графичен обект

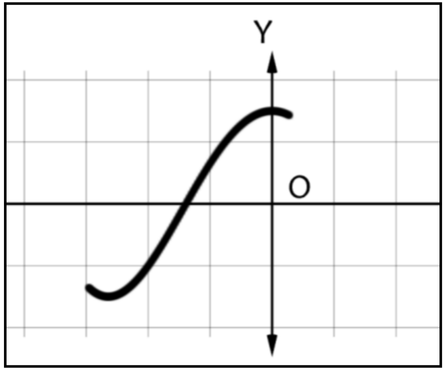
- Може да се променя с времето
- Създава илюзия за движение

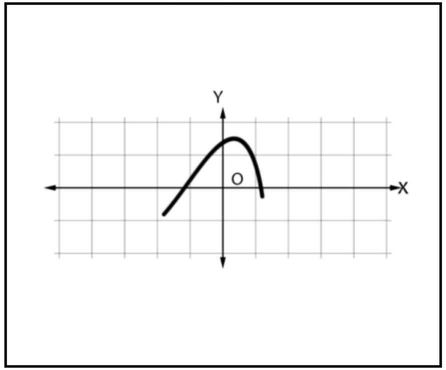
Възприемане от зрителя

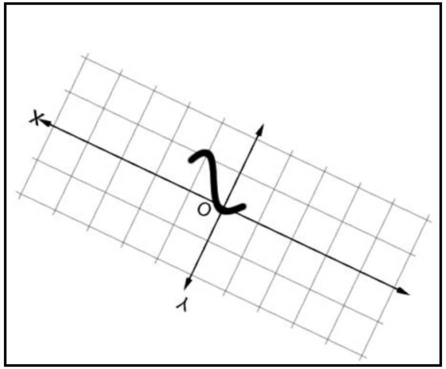
- Промяна на посоката на гледане е като въртене
- Промяна на точката, от която се гледа – преместване

Различни движения в 2D

- Плъзгане – транслация
- Мащабиране
- Ротация



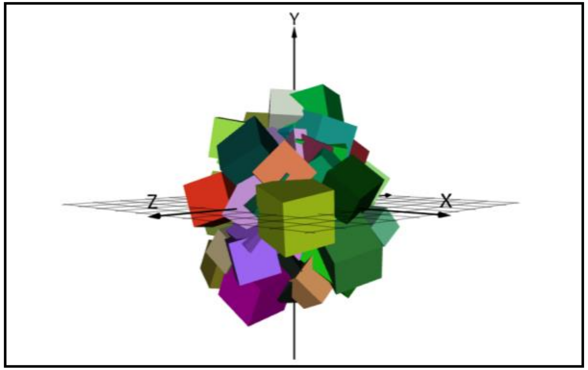


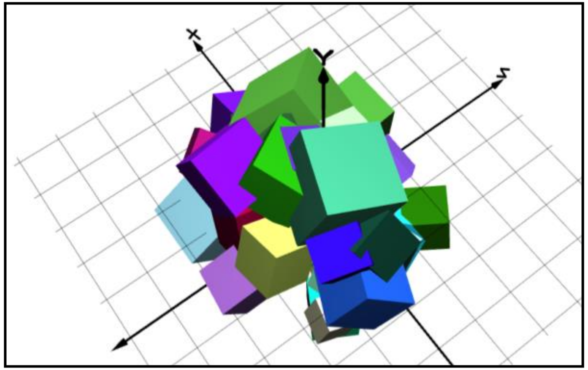


Въртене в кръг

Чрез полярни/сферични координати

- Могат да се наслагват допълнителни движения (за близост, за издигнатост)





Внимание! Опасност!

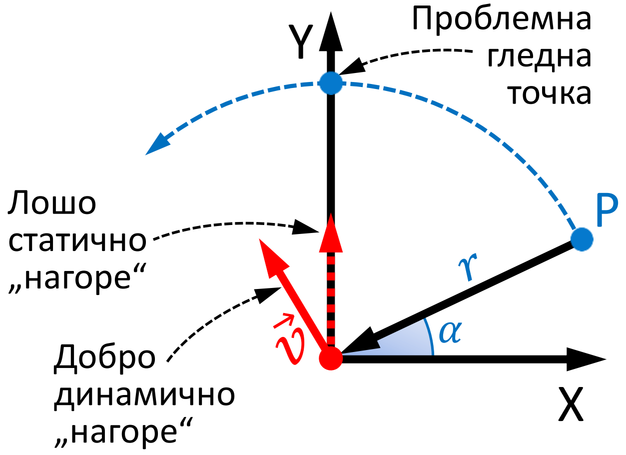
- Ако при движението „прелетим“ над вектора „нагоре“ се получава проблем

Решение

- Посоката „нагоре“ се променя динамично
- Конкретни решения за конкретни случаи

Пример с въртене в равнината XY

– Ако „нагоре“ е $(0,1,0)$, то проблемна точка за наблюдение е $(0, r, 0)$



$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

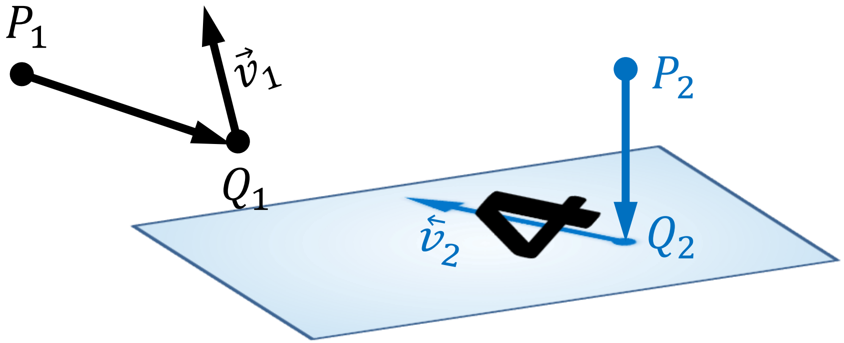
$$\begin{cases} p_x = r\cos\alpha \\ p_y = r\sin\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_x = \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\alpha \\ v_y = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\alpha \end{cases}$$

Преход

Плавен преход между гледни точки

- Чрез линейна комбинация и $k \in [0,1]$
- Можем да меним k линейно, полиномиално или тригонометрично (тема 13, сл. 7, 12)

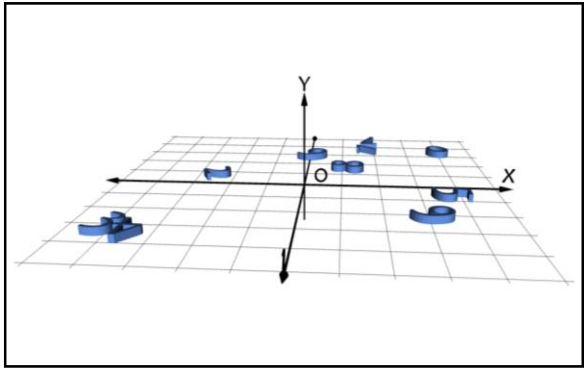


$$P = (1-k)P_1 + kP_2$$
$$Q = (1-k)Q_1 + kQ_2$$
$$\vec{v} = (1-k)\vec{v}_1 + k\vec{v}_2$$

Илюстрация на преход

Плочка с разбъркани цифри

- Последователно се доближаваме до всяка от тях



Слалом

Последна задача за подтемата

- Поредица конуси
- Минаваме на зиг-заг покрай тях

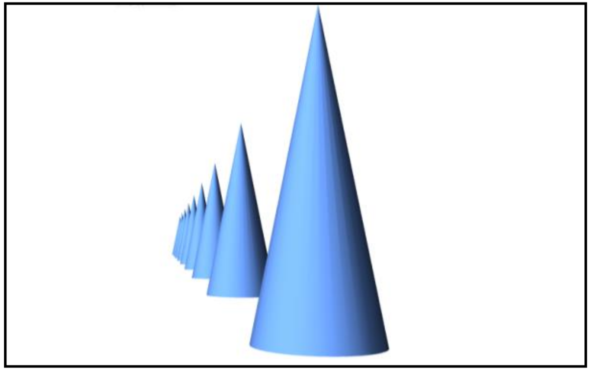
Допълнителен проблем

- Крайно пространство
- А искаме безкрайно движение и то все напред
- Как да се реши това? (бонус 3т.)

Реализация

– Разстоянията между конусите са Δd

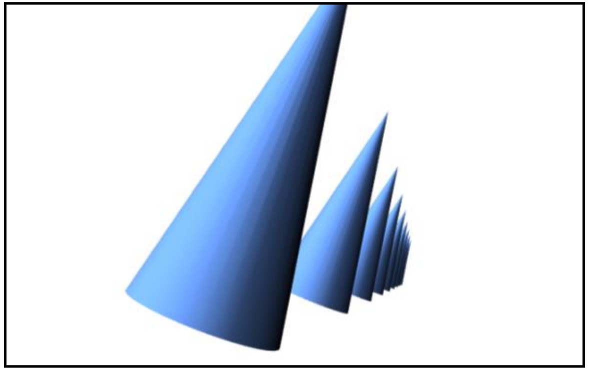
– Движенията на гледната точка е само по оста Z и е:
$$z = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{\Delta d}t + \frac{\pi}{6}\right)$$



А с накланяне?

– Посоката „нагоре“ става променлива

$$\vec{v}\left(\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{\Delta d}t+\frac{5\pi}{6},1,0\right)$$



– От къде идват коефициентите?

От тук

- Изборът им е по естетически причини
- Максималният наклон се влияе от $\frac{1}{2}$
- Избързването или забавянето на накланянето спрямо завиването се определя от $\frac{5\pi}{6}$
- Завиването точно покрай конусите се контролира от $\frac{\pi}{\Delta d}t$ и $\frac{5\pi}{6}$
- Скоростта по оста Z е избрана да е линейната $z(t) = t$, за да са по-леки сметките

Проекции

Етимология

Етимология на „проекция“

- Лат. „projectus“ – (из)хвърлям напред

Разнообразие от производни

- Проект и проектант
- Проектор и проекция
- Прожектор и прожекция
- Инк-джет (принтер), джет (воден)
- Инжекция и инжекцион

Езикови, а не математически

Проекции в КГ

Основна цел

- Създаване на 2D модел на 3D обект
- Възпроизвеждане как човек възприема 3D обекти

Кога, къде и как се прави

- След обработването на гледната точка
- Преди растеризирането
- С матрици в хомогенни координати

Координатите

Глобални координати — Първични координати с които са дефинирани 3D обектите

↓

Визуални координати — Вторични координати след трансформирането според гледната точка. Те са 3D.

↓ Ето там са проекциите

Екранни координати — Третични 2D координати при проектирането върху екранната плоскост.

Основни термини

Проекция

- Превръщането на 3D в 2D
- Самият 2D образ на 3D обект

Център на проекция

- Точка, спрямо която се проектира

Проекционна равнина

- Равнина, в която се намира проекцията

- **Проекционни прави**
  - Прави, които свързват центъра с точки от 3D обекта и 2D проекцията
- **Убежна точка**
  - 2D точка, в която успоредни прави се събират след проектирането си

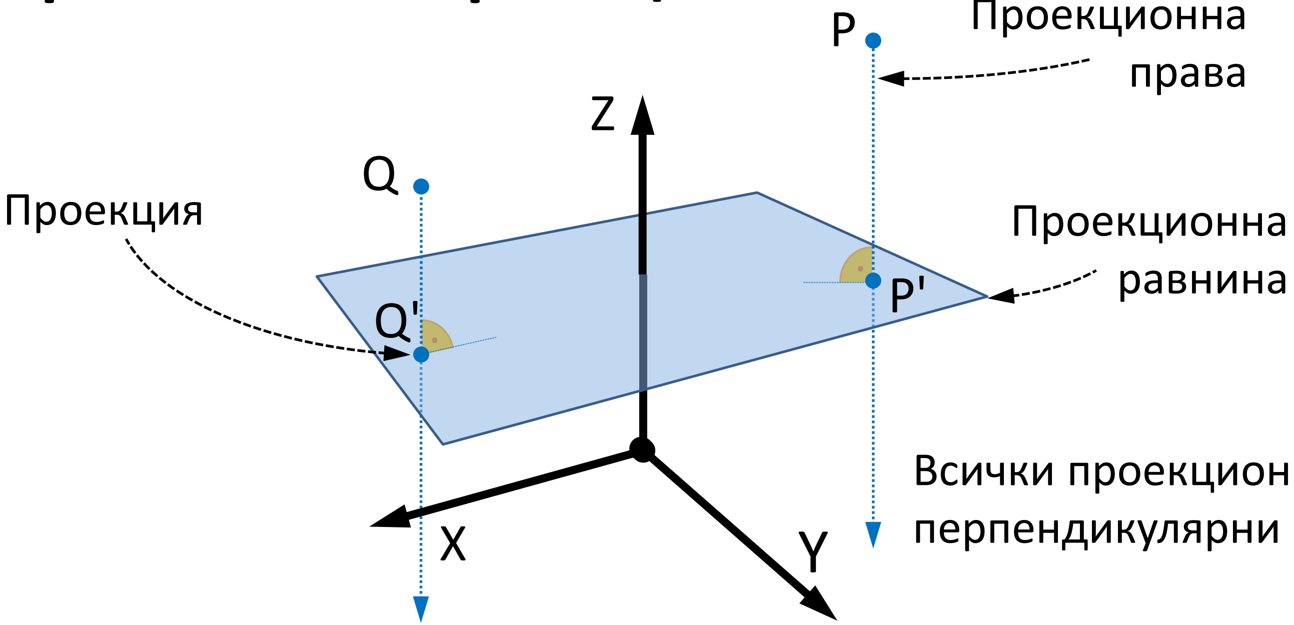
Видове проекции

Някои видове проекции

- *Централна* – центърът е крайна точка
- *Паралелна* – проекционните прави са успоредни, центърът е безкрайна точка
- *Ортогонална* – паралелна проекция с проекционни прави перпендикулярни на проекционната равнина

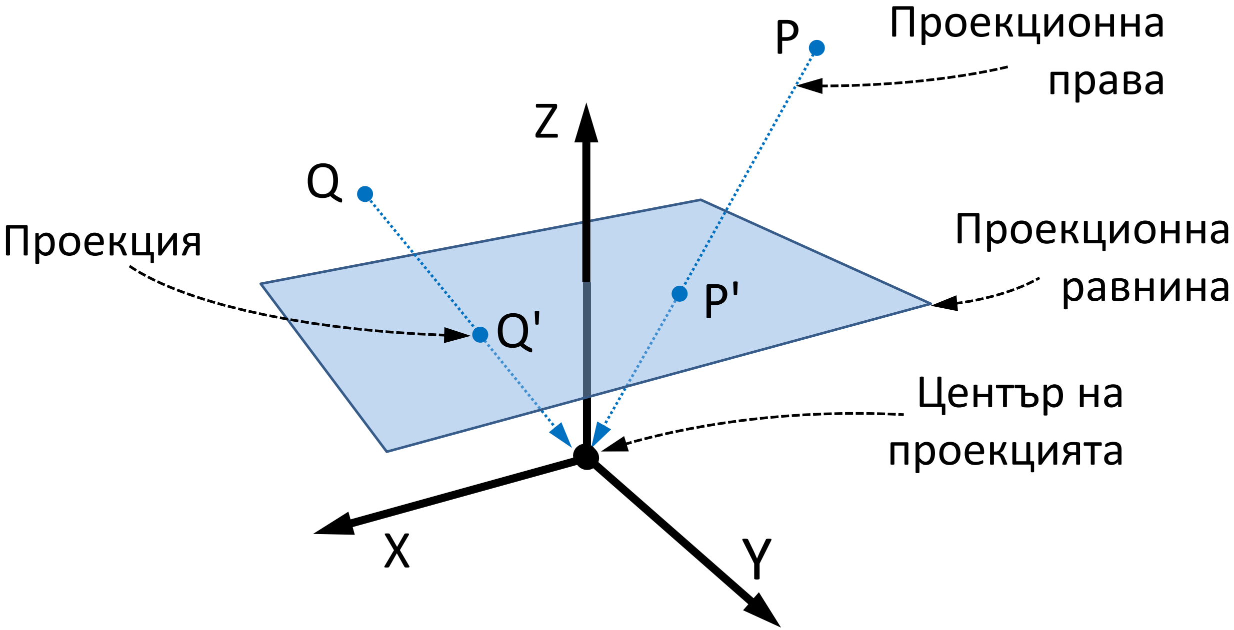
Примери с проекции

Ортогонална проекция



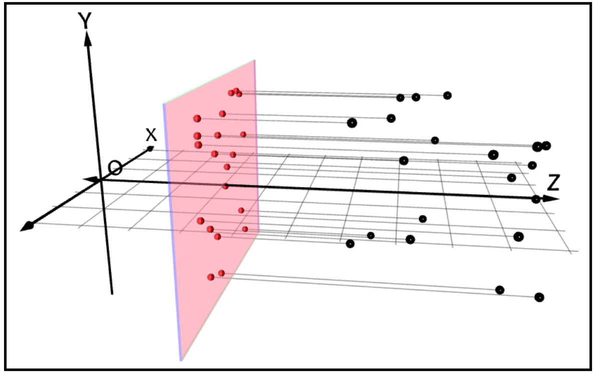
Всички проекционни прави са
перпендикулярни на равнината

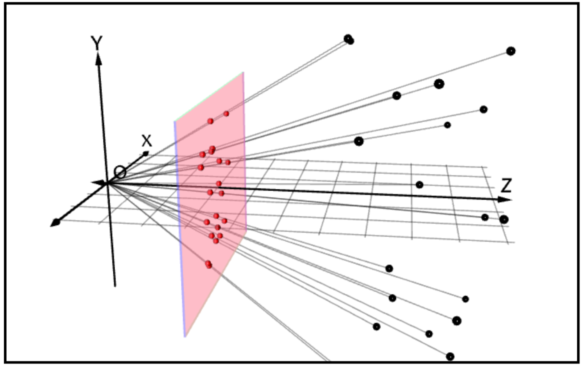
Централна проекция



Да видим двете проекции

- Ортогонална проекция
- Централна проекция

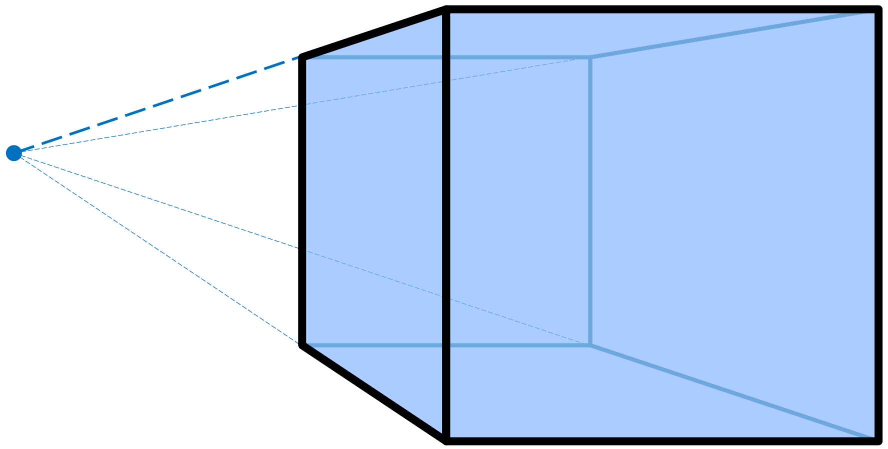




Перспективни проекции

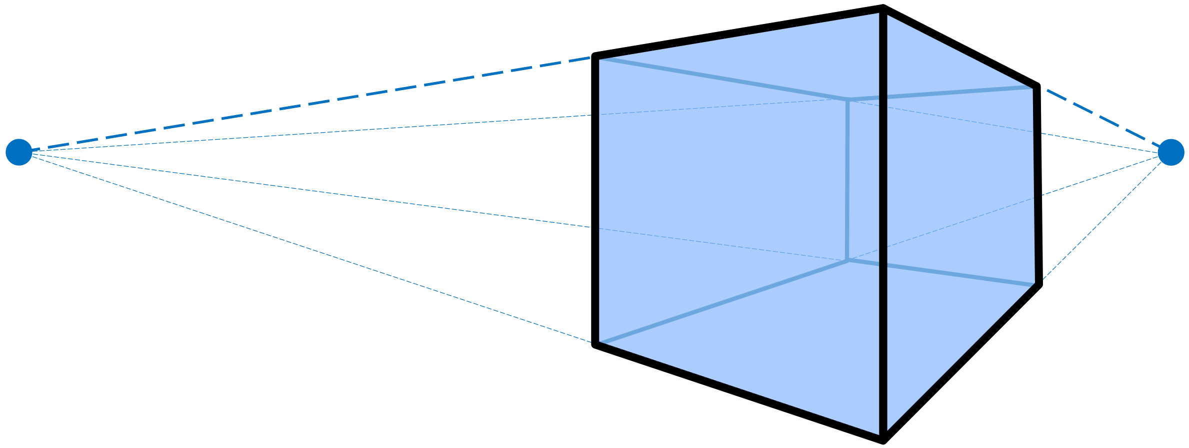
Едноточкова – една убежна точка

- Безкрайна 3D точка се проектира в крайна 2D точка



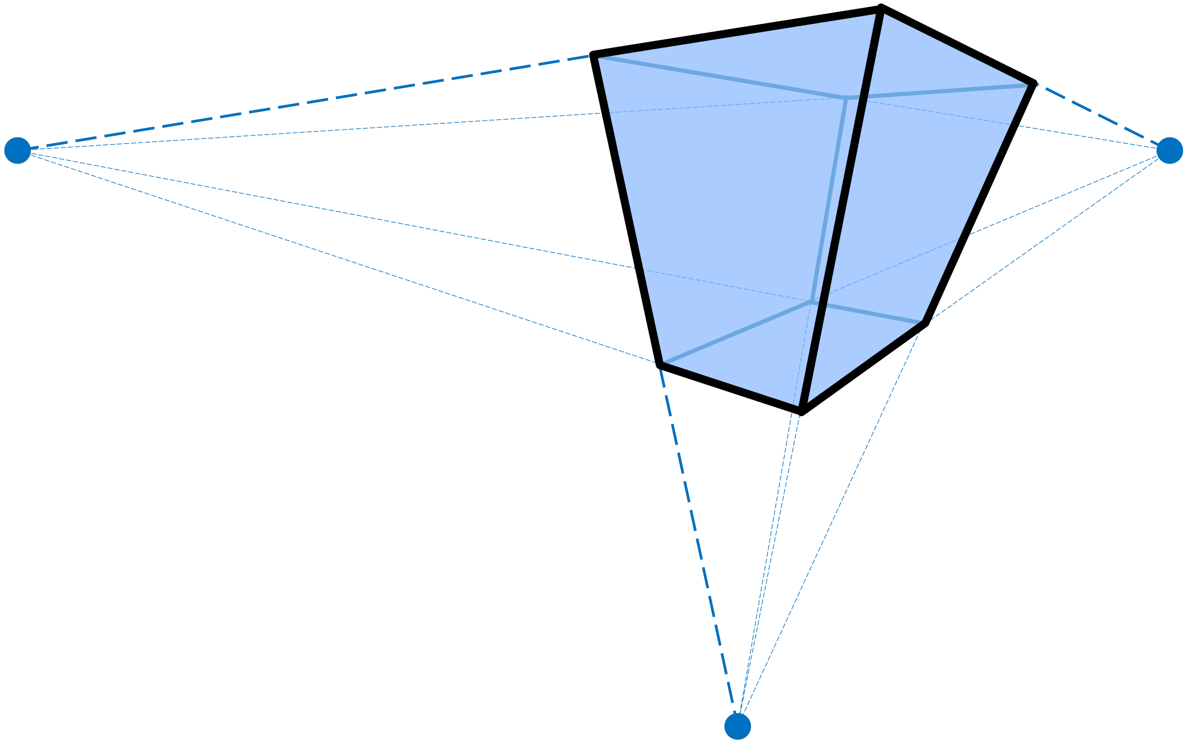
Двуточкова перспектива

– Вертикалните линии са все още успоредни
– Помежду си и спрямо екрана



Триточкова перспектива

– Представяне на сгради в анимационни филми



Матрици
на проекции

Ортогонална проекция

За удобство предполагаме

– Проективната равнина е успоредна на равнината XY и на разстояние f от нея

– Проективните лъчи са успоредни на оста Z

Проектиране на точка

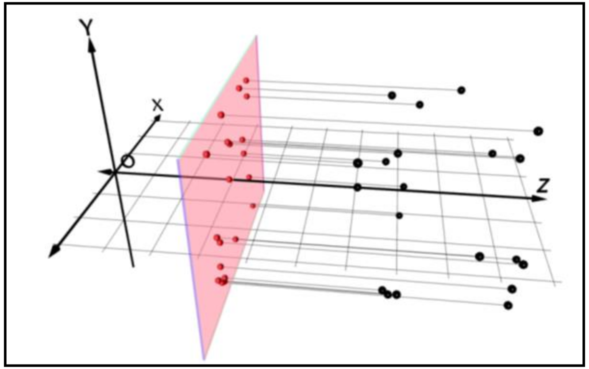
– Проектирането е тривиално
$P(x, y, z) \rightarrow P'(x, y, f)$

- А като матрица?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f \\ 1 \end{pmatrix}$$

Забележете как първо зануляваме z, а после го наfваме

- А като програма?



Централна проекция

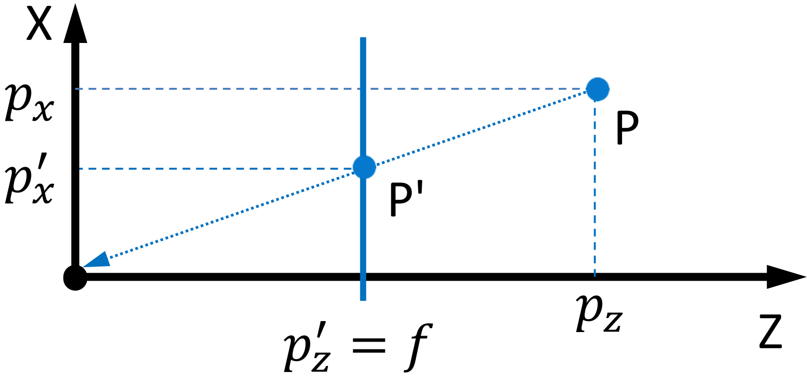
За удобство предполагаме

- Проективната равнина е успоредна на равнината XY и на разстояние f от нея
- Центърът на проекцията е $(0,0,0)$

Проектиране на точка

- Проектирането $P(x,y,z) \to P' = \frac{f}{z}P$ в хомогенни координати става $P' = \left(\frac{f}{z}x, \frac{f}{z}y, f, 1\right) = \left(x, y, z, \frac{z}{f}\right)$

– Защо $P' = \frac{f}{z} P$?



$$\frac{p_x'}{p_x} = \frac{p_z'}{p_z} = \frac{f}{p} \Rightarrow p_x' = \frac{f}{p_z} p_x$$

– Аналогично получаваме $p_y' = \frac{f}{p_z} p_y$ и $p_z' = \frac{f}{p_z} p_z = f$

– Матрицата на проекцията е тази

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z/f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ z/f \end{pmatrix}$$

– … и е абсолютно напълно тотално негодна. Защо?

Защото

– В матрицата участва координата z

– Матрицата трябва да е всеобща и да не зависи от точките, над които се прилага

Справяне с матрицата

Имаме

- От последния ред на лошата матрица
  $\frac{z}{f} = [0]x + [0]y + [0]z + \left[\frac{z}{f}\right]1$

Искаме

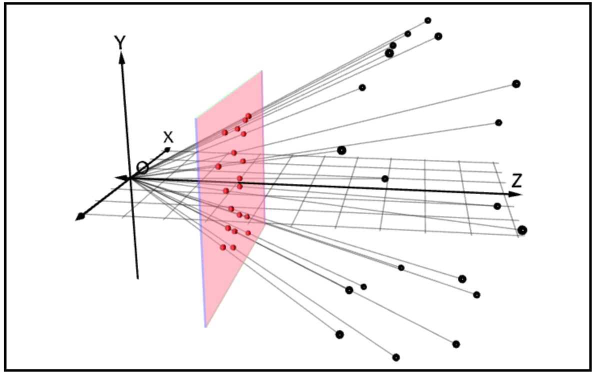
- В квадратните скоби да няма x, y или z
- Използваме, че има още едно z
- Елементарно и хитро: $\frac{z}{f} = [0]x + [0]y + \left[\frac{1}{f}\right]z + [0]1$

Новата матрица

– Матрица без зависимост от точките

– $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/f & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ z/f \end{pmatrix}$$

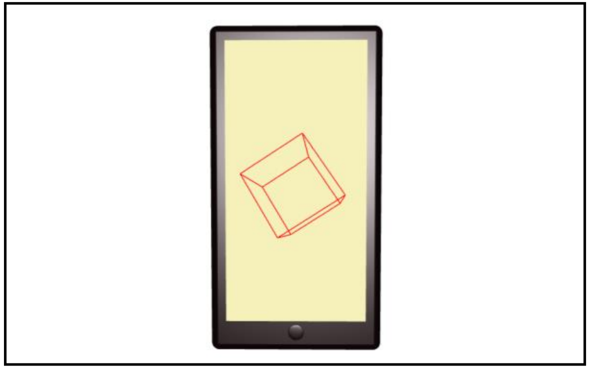
– Да я проверим, все пак



По-сложен пример

Простоват смартфон

– Показва перспективна проекция на куб, който се върти някъде пред екрана



В резюме за матриците

Трансформационна и проективна

Ротация, мащабиране, отражение, скосяване

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Транслация

Глобално мащабиране

Перспектива

(при $a_{41}, a_{42}, a_{43} \neq 0$ се получават 1/2/3-точкови перспективи)

Сложност на проекциите

- Често матриците са доста по-сложни
- Включени са допълнителни действия

Примерно

- Координатата z не се нулира, а се запазва за Z-Buffer
- 3D сцената се изрязва до дадена зона (*frustum*)
- Дълбочината се нормализира до $[-1,1]$
- Центърът на проекцията не е $(0,0,0)$
- Матрицата е вградена в друга матрица

Въпроси?

Повече информация

[ALZH] гл. 5
[AGO1] стр. 161-166
[BAGL] стр. 136-137
[KLAW] стр. 121-128
[VINC] стр. 103-105
[ZHDA] стр. 247-252

[LENG] стр. 111-131
[MORT] стр. 313-321
[PARE] стр. 31-39, 46-48
[SEAK] стр. 34
[AGO2] стр. 111-121, 138

А също и:

- Perspective projections
  http://web.iitd.ac.in/~hegde/cad/lecture/L9_persproj.pdf
- Perspective and Orthographic Projection Matrix
  http://www.scratchapixel.com/lessons/3d-advanced-lessons/perspective-and-orthographic-projection-matrix/

Край