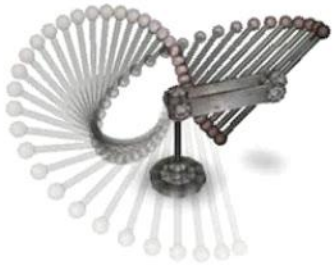
ТЕМА №12

Траектории



Съдържание

Тема 12: Траектории

- Движения по окръжност и дъга
- Движения по 3D равнина и 3D повърхнина
- Движения по цилиндър, конус и сфера
- Движения по зададена траектория

Движения по окружност

Кръгови траектории

Роля в компютърната графика

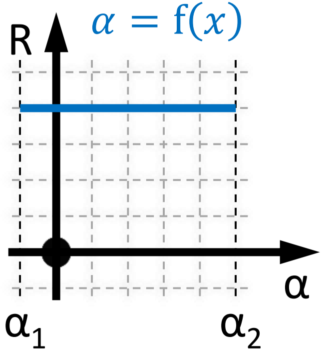
- Моделиране на всички въртящи движения (като стрелки на часовник)
- Моделиране на движение около обект (като спътник около планета)
- Моделиране на въртене на сцената (като пиле в микровълнова печка)
- Движение вътре във виртуалната сцена

Движение по окръжност

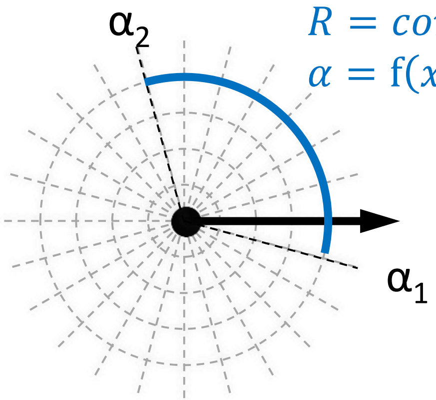
Свързани пространства

– Линейно движение в декартово
– Линейно движение в полярно
– Кръгово движение в декартово

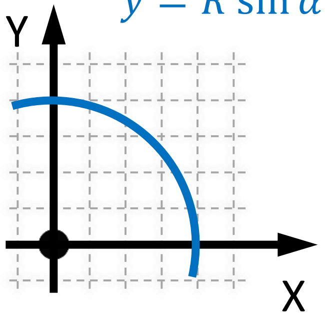
$$R = const$$
$$\alpha = \mathrm{f}(x)$$



$$R = const$$
$$\alpha = \mathrm{f}(x)$$



$$x = R\cos\alpha$$
$$y = R\sin\alpha$$



Посока на движение

- Поради своята едномерност има само две посоки

Посоката зависи от

- Промяната на ъгъла: $+\Delta\alpha$ или $-\Delta\alpha$
- Координатните оси: XY или YX
- Трансформацията: $\sin\alpha$ или $\cos\alpha$
- Знака на радиуса: $R_x > 0$ или $R_x < 0$

Скорост на движение

Ъглова скорост φ

- Промяна на ъгъла за една стъпка
- Не зависи от радиуса на окръжността

Линейна скорост v

- Изминато разстояние за една стъпка
- Зависи от ъгловата скорост
- Зависи от радиуса

Връзка между скоростите

– При ъглова скорост φ и радиус R
– Линейната скорост е $v = R\varphi$
(при ъгли измерени в радиани)

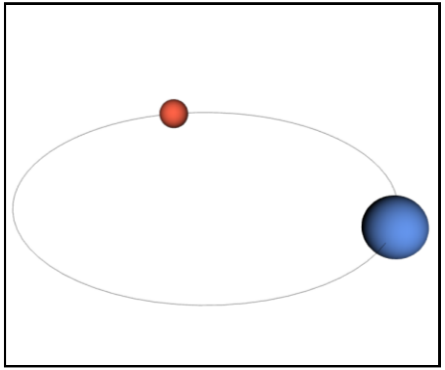
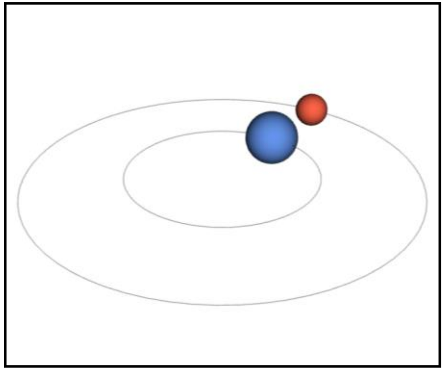
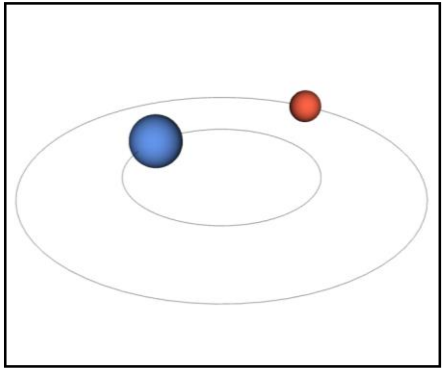
Можем да променим

– Всяка от двете скорости, запазвайки другата

Примери

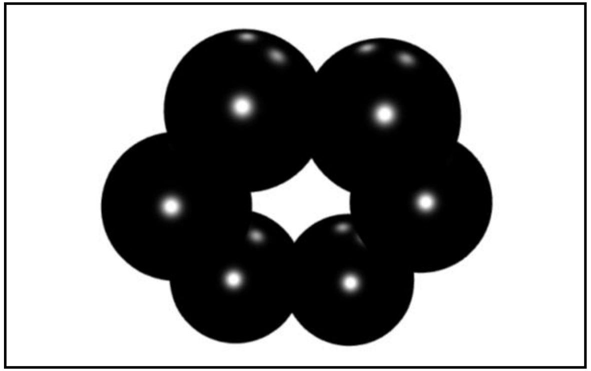
Варианти със скорости

- Противоположни посоки
- Равни ъглови, но различни линейни
- Равни линейни, но различни ъглови

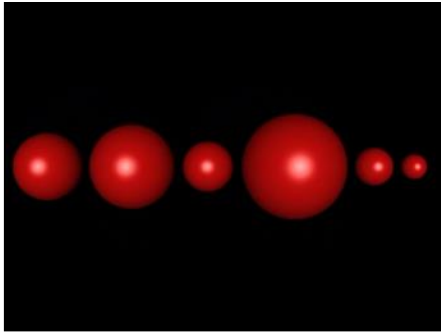
По-сложен пример

- Шест сфери по противоположни кръгови траектории в три взаимно перпендикулярни равнини

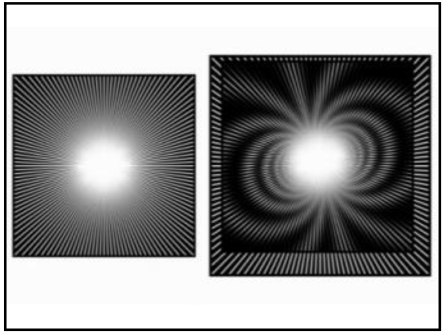


Още примери

- Сортиране по метода на мехурчето
- Ефект на Моаре́ с радиални линии
- Модел на Слънчевата система



“Bubble Sort”
http://youtu.be/gWkvvsJHbwY



“Moire Patterns - Moving Radials”
http://youtu.be/LU6plQYJAV4

“Solar System”
http://youtu.be/8KYvOdYzlys

Относително движение

Център на въртене не е (0,0)

- Композиция на транслация и въртене
- Допуска се променлив център

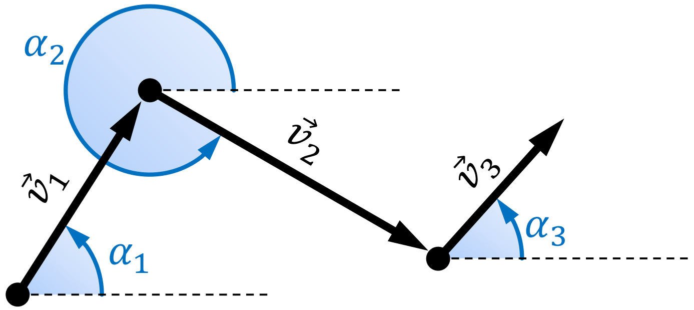
Примери

- Спътник около Луната около Земята около Слънцето
- Засилване на люлка с люлеене на краката

Вложено въртене

Движение около въртящ се център

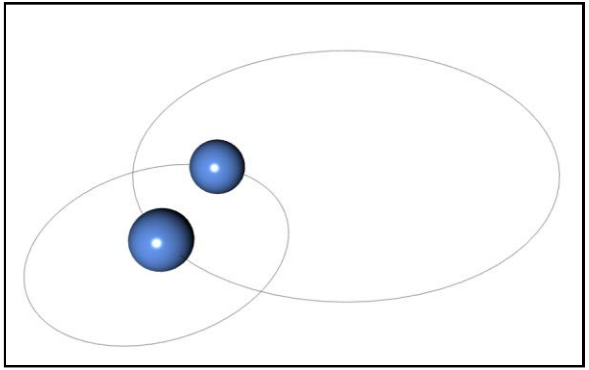
- Представяне като сума от вектори $p(t) = \sum \vec{v}_i(t)$, при $\vec{v}_i(t) = (R_i \cos \alpha_i(t), R_i \sin \alpha_i(t))$
- Или разписано $\left| \begin{array}{l} x = R_1 \cos \alpha_1(t) + R_2 \cos \alpha_2(t) + \cdots \\ y = R_1 \sin \alpha_1(t) + R_2 \sin \alpha_2(t) + \cdots \end{array} \right.$

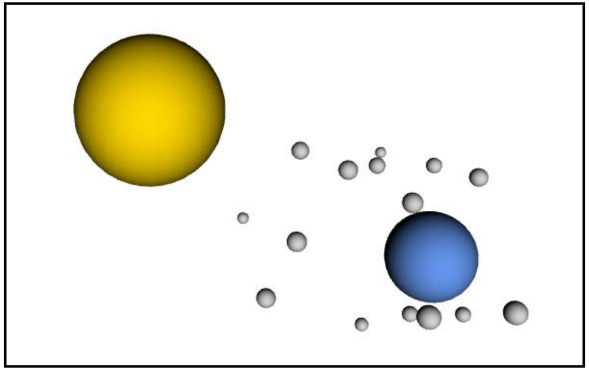


Примери

Примери за вложени въртения

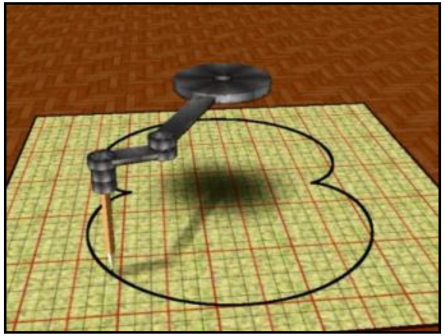
- Въртене около въртящ се обект
- Слънце + Земя + рояк от *n* на брой спътника



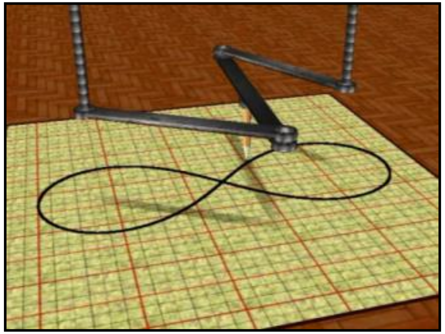


Примери с виртуални механизми

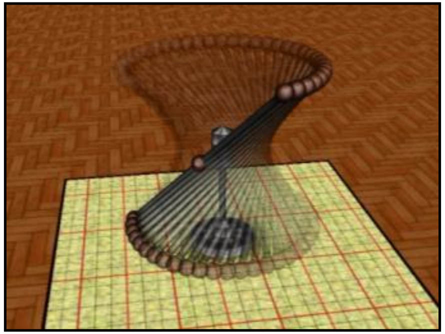
- Механизъм за нефроида
- Механизъм за лемниската на Бернули
- Механизъм за хиперболоид



“Nephroidograph 2”
http://youtu.be/KHWMnc2wh74



“Lemniscatograph”
http://youtu.be/-znDMqdKWbk



“Hyperboloidograph”
http://youtu.be/n83oRmdNcYQ

Движения по дуга

Варианти на движение

Движение по елипса

- Аналогично на движение по окръжност
- Два различни радиуса по X и по Y

Движение по дъга

- Аналогично на движение по окръжност
- Ъгълът е в определен интервал

Люлеене

- Движение напред-назад по дъга
- В декартовото пространство $R\alpha$ това е движение напред-назад по отсечка

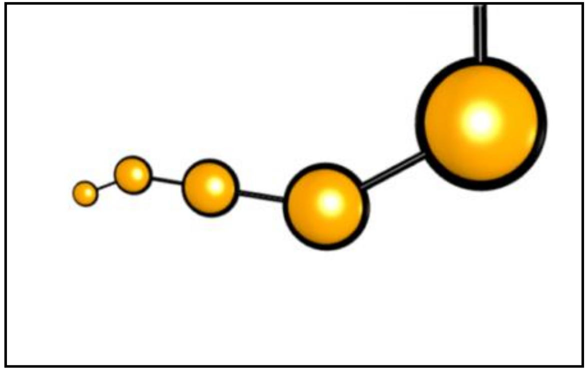
Подобно на движение по отсечка

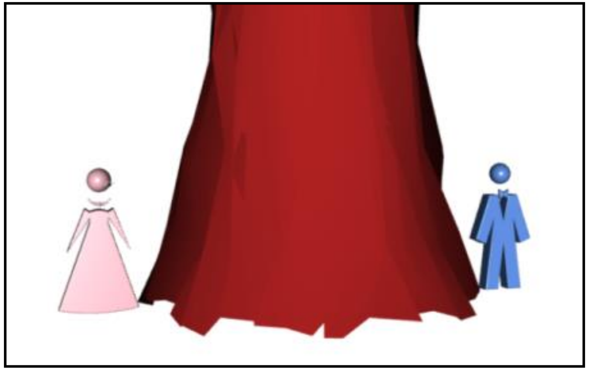
- Реализира се чрез вектор-ъгъл
- Линейна комбинация на ъгли
- Или параметрично

Реализация

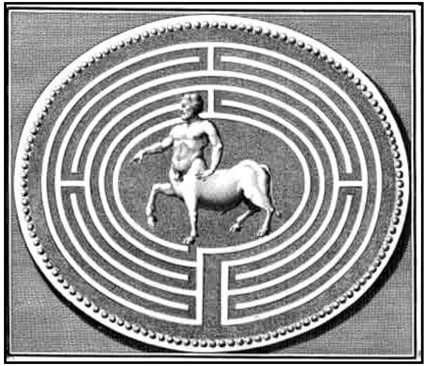
Реализация на два модела

- Петорно махало
- Младеж, девойка и … муха
  (да се гледа на гладно)





Лабиринт



http://www.mlahanas.de/Greeks/Mythology/Labyrinth.html

Кръгов лабиринт

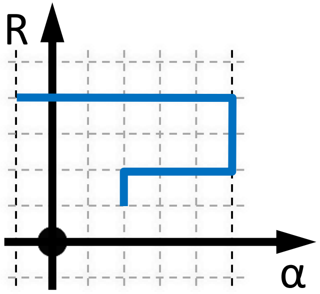
- Дъги от концентрични окръжности ($R = const$)
- Радиални отсечки ($\alpha = const$)

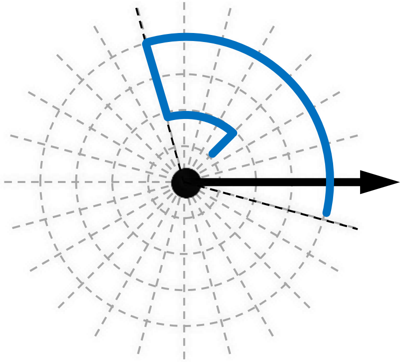
Най-удобни са полярни координати

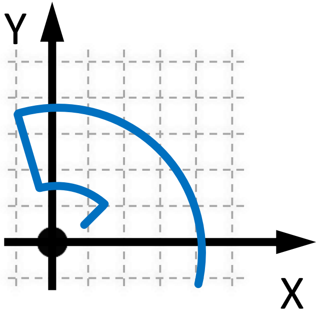
- И за движения по дъгите
- И за движения по отсечките

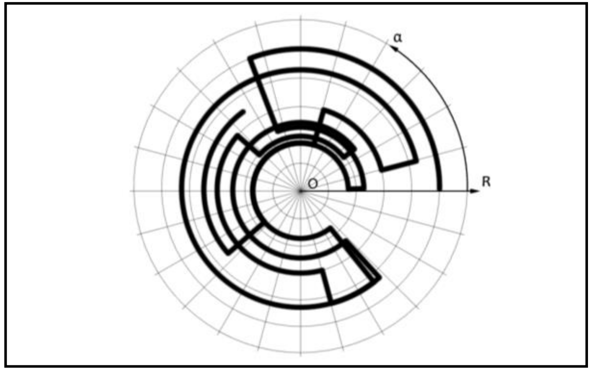
Реализация

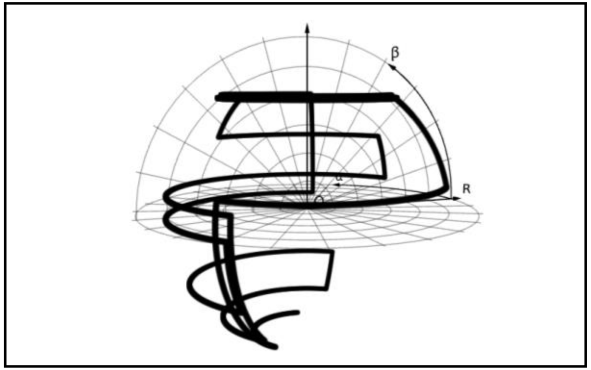
– Случайна траектория в полярни координати











Движения по
3D равнина

Движение по повърхност

Общи концепции

- Дефинира се чрез два (минимум!) параметъра
- Параметрите имат собствена координатна система, често нелинейна

Направления

- Движенията са по две направления
- Доминантни направления

Тривиални примери на движение

- По 3D равнина
- По параметрична повърхнина

Нетривиални примери

- По цилиндър
- По конус и пресечен конус
- По сфера

Движения в 3D равнина

Представяне на равнината

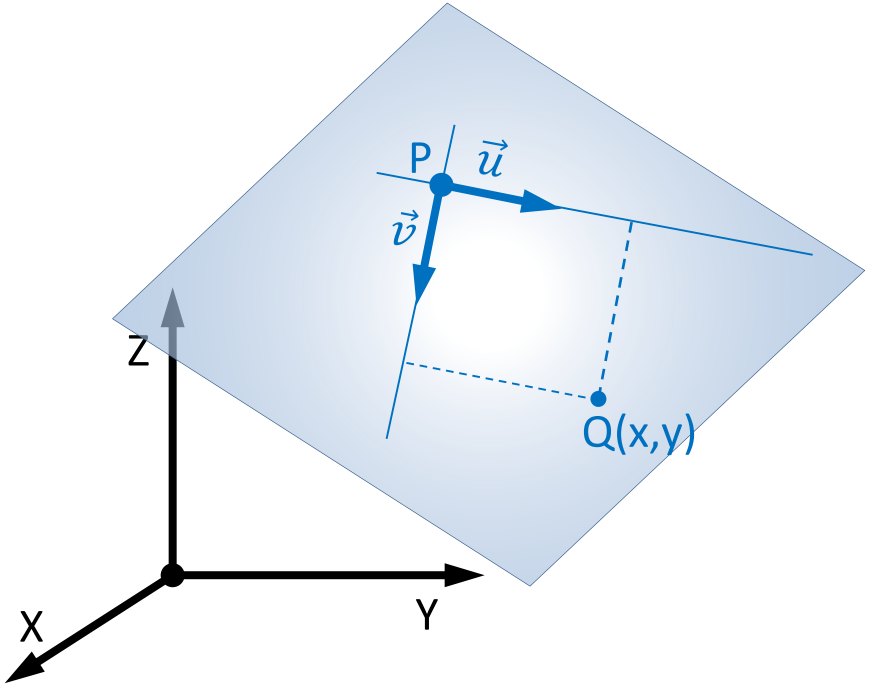
- Точка от равнината $\vec{P}$
- Вектори $\vec{u}$ и $\vec{v}$, като $|\vec{u}| = |\vec{v}| = 1$ и $\vec{u} \perp \vec{v}$

Всяка точка Q от равнината

- Линейна комбинация $Q = x\vec{u} + y\vec{v}$
- Координати на Q спрямо локалната координатна система $Q(x, y)$

Афинна координатна система

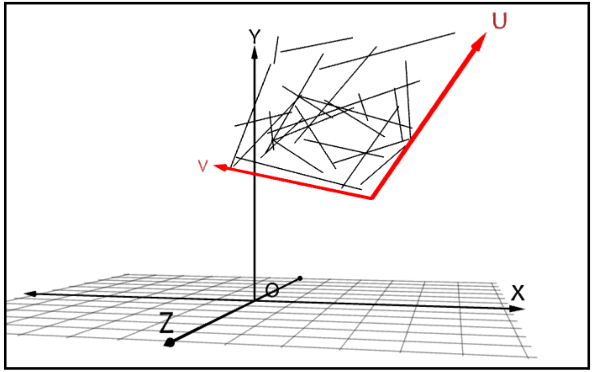
– При $\vec{u} \times \vec{v} \neq 0$ (т.е. те са ненулеви и неколинеарни)

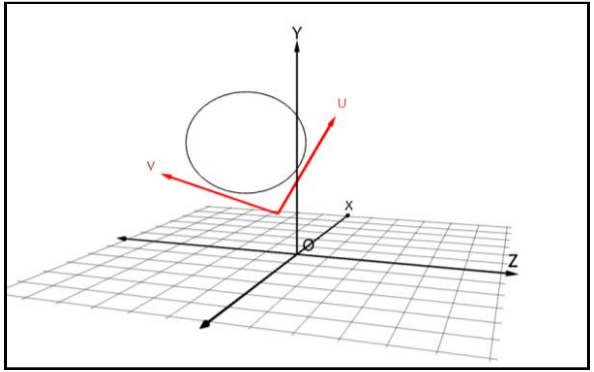


Примери

Движение в равнина

– Случайни отсечки в случайни равнини
– Окръжност в случайни равнини





Нормиране

- Различни начини
- Ето най-лесен, но не и най-бърз

$$\vec{u} \leftarrow (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{v}$$

$$\vec{u} \leftarrow \frac{1}{\sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}} \vec{u}$$

$$\vec{v} \leftarrow \frac{1}{\sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}} \vec{v}$$

Движения по
3D повърхнина

Параметрична повърхнина

Повърхнината е параметрична

- Стойностите на параметрите са локалните координати на точките
- Няма изискване за биекция
  (различни локални координати могат да съответстват на една и съща точка от повърхнината)

Пример

Движение по повърхнина

– Листни въшки маршируват по повърхността на цвета на ипомея (по народному: грамофонче)

https://floristics.info/ru/stati/sadovodstvo/2077-ipomeya-posadka-ukhod-vyrashchivanie.html

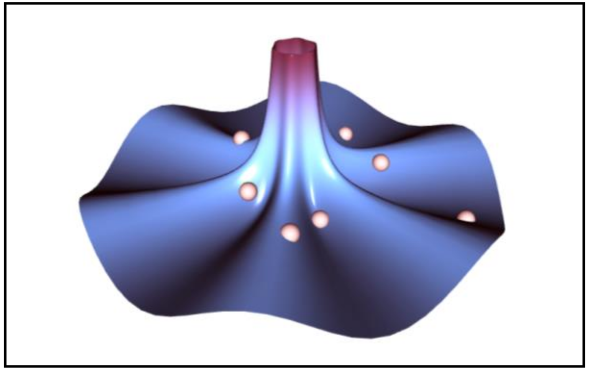
Уравнение

- Уравнението се използва за създаване на повърхнината и за движението

$$x(u,v) = \frac{1.15}{v+0.1}\cos u$$

$$y(u,v) = 9v^2 + \sin 6u$$

$$z(u,v) = \frac{1.5}{v+0.1}\sin u$$



Движения по цилиндър и конус

Цилиндър

Параметрично движение

- Комбинация от две движения
- Едно кръгово движение (напр. по XZ)
- Едно линейно движение (напр. по Y)

$$
\begin{aligned}
x(u,v) &= R\cos u \\
y(u,v) &= v \\
z(u,v) &= R\sin u
\end{aligned}
$$

Доминантна скорост

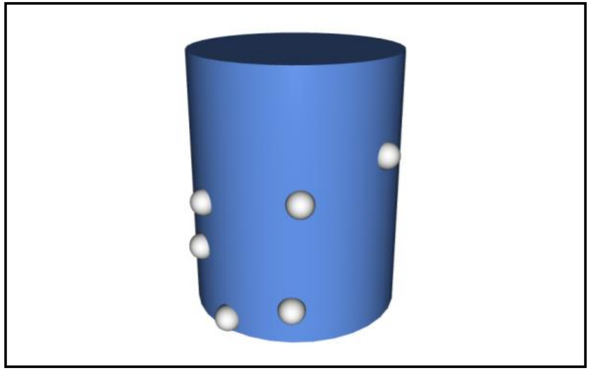
Скоростта по направления

- Това е локалната скорост – с колко се променя параметър за един кадър
- Различна е от глобалните скорости

Интересно наблюдение

- При различни локалните скорости, движението се възприема от човек по различен начин

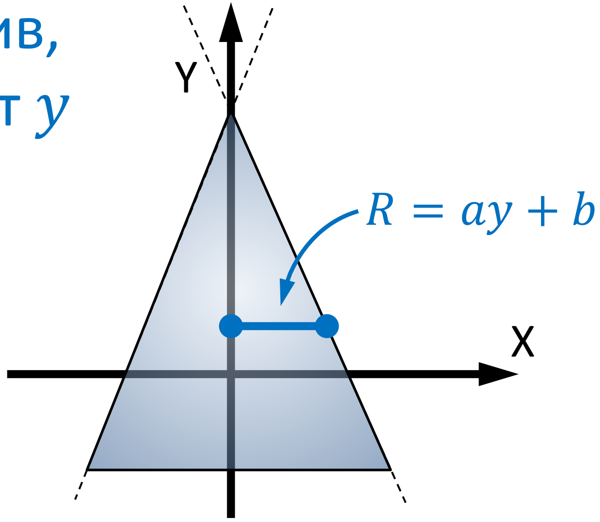
- **Доминантна скорост**
  - Скорост по един параметър, визуално значително по-голяма от тази по другия параметър
- **Пример**
  - Движения по цилиндър
  - С и без доминантни скорости



Конус

Параметрично движение

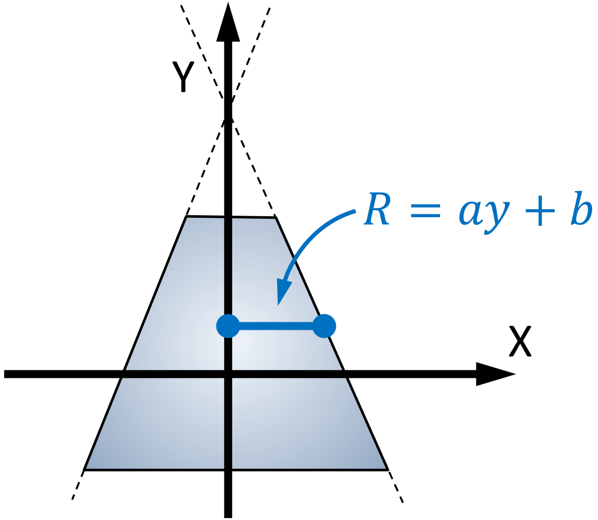
- Подобно на движение по цилиндър
- Радиусът е променлив,
  но зависи линейно от y

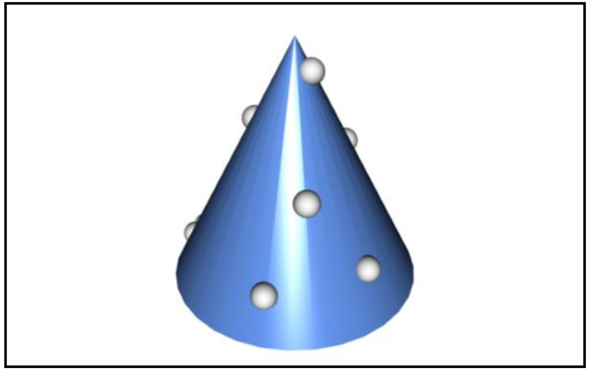


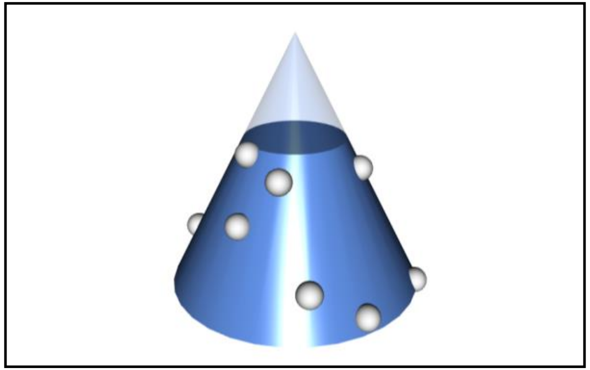
$$y(u,v) = f(v)$$
$$R(y) = ay + b$$
$$x(u,v) = R\cos u$$
$$z(u,v) = R\sin u$$

За пресечен конус

- Абсолютно същите формули като при конуса
- Разлика има в ограничение на $y(u, v)$ отгоре







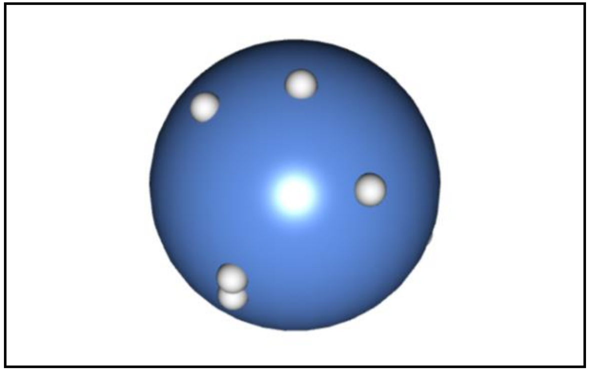
Движения
по сфера

Сфера

Параметрично движение

- Параметричното пространство на повърхността на сфера е с параметри два ъгъла

$$x(u,v) = R\cos u\cos v$$
$$y(u,v) = R\sin v$$
$$z(u,v) = R\sin u\cos v$$



Блуждаене по сфера

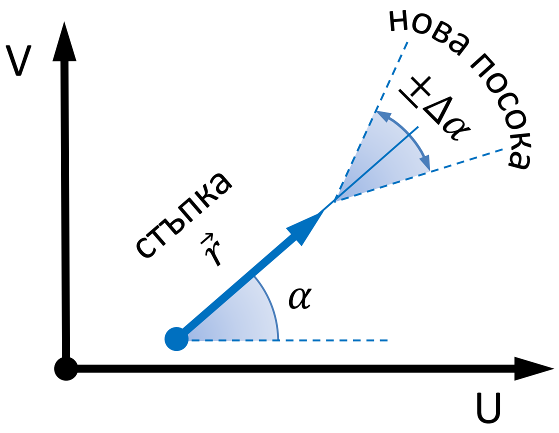
- Има избрана посока на движение
- Малка стъпка в тази посока и сменяме леко посоката вляво или вдясно

Реализация

- Удобно е да решим задачата в параметричното 2D пространство
- Ето как

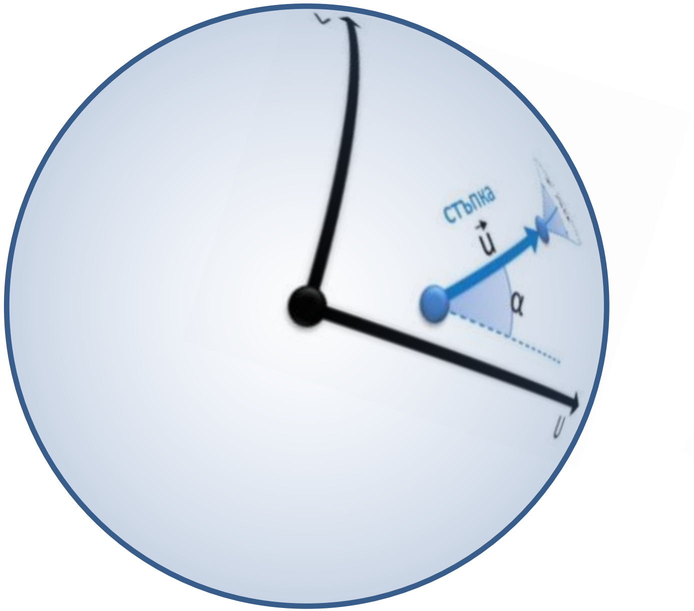
- Правим параметрично на параметричното пространството
- Едното е полярно, другото сферично

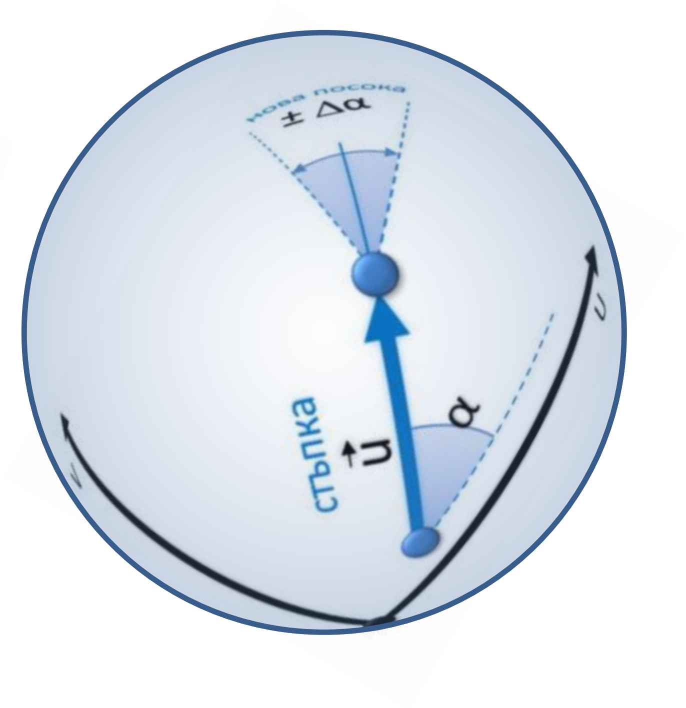
$$\underbrace{\begin{array}{l}\alpha_i = \alpha_{i-1} + \psi(-\Delta\alpha, \Delta\alpha) \\ r = const\end{array}}$$
$$\downarrow$$
$$\underbrace{\begin{array}{l}u_i(r, \alpha_i) = u_{i-1} + r\cos\alpha_i \\ v_i(r, \alpha_i) = v_{i-1} + r\sin\alpha_i\end{array}}$$
$$\downarrow$$
$$\begin{array}{l}x(u, v) = R\cos u\cos v \\ y(u, v) = R\sin v \\ z(u, v) = R\sin u\cos v\end{array}$$



Ето пълната картинка

- Две възможни наслагвания на параметричното uv-пространство



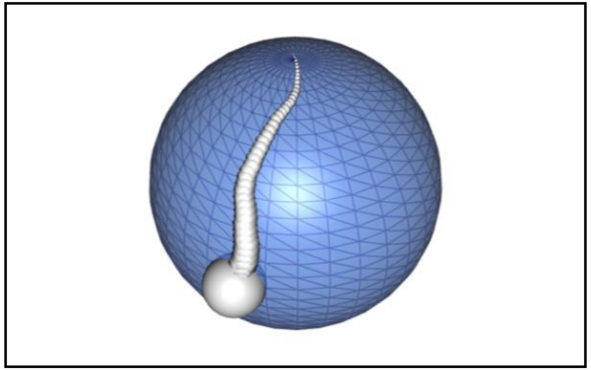


Пример

Блуждаещ червей

Не ултравиолетово

– Чрез uv-движение
– То е полярно-зависимо



Движения по зададена траектория

Зададена траектория

Основна идея

- Множество от 3D точки описва крива или повърхнина
- След подходящо заглаждане тази крива или повърхнина определя движението на обект

Реализация

- Криви на Безие, сплайн-повърхнини, …

Криви и повърхнини

С това ще се мъчим чак в теми 23 и 24

- Т.е. за днес приключваме с темите за Тест №1

Въпроси?

Повече информация

[AGO1] стр. 68-71, 87-88
[MORT] стр. 289-291
[PARE] стр. 50-51, 476-478

А също и:

- Cylindrical coordinates
  http://mathworld.wolfram.com/CylindricalCoordinates.html
- Parametric Surfaces
  http://www.math.oregonstate.edu/home/programs/undergrad/CalculusQuestStudyGuides/vcalc/parsurf/parsurf.html
- Main cone construction
  http://www.math.union.edu/research/student/1998/tolin/maincone.htm

Край