Упражнение 25 за 1, 2 и 3 група

Има 3 основни метода за пресмятане на неопределени интеграли:

1) интегриране чрез внасяне зад диференциала;

2) интегриране по части;

3) интегриране чрез смяна на променливата (нарича се още интегриране чрез субституция).

Ще ги разгледаме последователно.

Интегриране чрез внасяне зад диференциала

По определение $\int f(x)\,dg(x) = \int f(x)g'(x)\,dx$.

Оттук следва, че:

1) $\int f(x)\,dg(x) = \int f(x)\,d(g(x)+c)$;

2) $\int f(x)\,d(cg(x)) = \int c f(x)\,dg(x) = c\int f(x)\,dg(x)$

Теорема Ако $\int f(u)\,du = F(u)+c$, то

$$\int f(\varphi(x))\,d\varphi(x) = F(\varphi(x)) + c.$$

Пресметнете неопределените интеграли:

Зад. 1 $I = \int (2x-3)^5\,dx$

Решение: $I = \frac{1}{2}\int (2x-3)^5\,d(2x-3) =$

$= \frac{1}{2}\,\frac{(2x-3)^6}{6} + c.$

$\int u^5\,du = \frac{u^6}{6} + c$

$u = 2x-3$

Зад. 2 $I = \int \frac{1}{(x-4)^6}\,dx$

Решение: $I = \int (x-4)^{-6}\,d(x-4) = \frac{(x-4)^{-5}}{-5} + c =$

$= -\frac{1}{5(x-4)^5} + c.$

$\int u^{-6}\,du = \frac{u^{-5}}{-5} + c$

$u = x-4$

(2) Зад. 3 $I = \int \sin 5x \, dx$

Решение: $I = \frac{1}{5} \int \sin 5x \, d(5x) = -\frac{1}{5} \cos 5x + C.$

$\int \sin u \, du = -\cos u + C$

$u = 5x$

Зад. 4 $I = \int e^{8x} dx$

Решение: $I = \frac{1}{8} \int e^{8x} d(8x) = \frac{1}{8} e^{8x} + C.$

$\int e^{u} du = e^{u} + C$

$u = 8x$

Зад. 5 $I = \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$, $a > 0$

Решение: $I = \int \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{x}{a})^2}} d\left(\frac{x}{a}\right) = \arcsin \frac{x}{a} + C.$

$\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du = \arcsin u + C$

$u = \frac{x}{a}$

Зад. 6 $I = \int \frac{1}{a^2 + x^2} dx$, $a \neq 0$

Решение: $I = \frac{1}{a} \int \frac{1}{1 + (\frac{x}{a})^2} d\frac{x}{a} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$

$\int \frac{1}{1+u^2} du = \operatorname{arctg} u + C$

$u = \frac{x}{a}$

Зад. 7 $I = \int \operatorname{tg} x \, dx$

Решение: $I = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{1}{\cos x} d\cos x =$

$= -\ln|\cos x| + C.$

$\int \frac{1}{u} du = \ln|u| + C$

$u = \cos x$

Зад. 8 $I = \int \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx$

Решение: $I = \int \frac{1}{\sqrt{x} \sqrt{1-x}} dx = 2 \int \frac{1}{\sqrt{1 - (\sqrt{x})^2}} d\sqrt{x} =$

$= 2 \arcsin \sqrt{x} + C$

$\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du = \arcsin u + C$

$u = \sqrt{x}$

③ Зад. 9 $I = \int \frac{1}{3+\cos^2 x} dx$

Решение: $I = \int \frac{1}{3(\sin^2 x + \cos^2 x) + \cos^2 x} dx =$

$= \int \frac{1}{3\sin^2 x + 4\cos^2 x} dx = \int \frac{1}{\cos^2 x\,(3\,tg^2 x + 4)} dx =$

$= \int \frac{1}{3\,tg^2 x + 4} d\,tg\,x = \int \frac{1}{4\left(\frac{3\,tg^2 x}{4} + 1\right)} d\,tg\,x =$

$= \frac{1}{2\sqrt{3}} \int \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}\,tg\,x}{2}\right)^2 + 1} d\left(\frac{\sqrt{3}\,tg\,x}{2}\right) =$

$= \frac{1}{2\sqrt{3}}\, arctg\left(\frac{\sqrt{3}\,tg\,x}{2}\right) + C.$

Зад. 10 $I = \int \frac{1}{(x+a)(x+b)} dx$, $a \neq b$

Решение: $I = \frac{1}{a-b} \int \frac{(x+a)-(x+b)}{(x+a)(x+b)} dx =$

$= \frac{1}{a-b} \int \left(\frac{1}{x+b} - \frac{1}{x+a}\right) dx =$

$= \frac{1}{a-b} \left(\int \frac{1}{x+b} dx - \int \frac{1}{x+a} dx\right) =$

$= \frac{1}{a-b} \left(\int \frac{1}{x+b} d(x+b) - \int \frac{1}{x+a} d(x+a)\right) =$

$= \frac{1}{a-b} \left(\ln|x+b| - \ln|x+a|\right) + C = \frac{1}{a-b} \ln\left|\frac{x+b}{x+a}\right| + C.$

Зад. 11 $I = \int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx$

Решение: $I = \int \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx = \int \frac{1}{(e^x)^2+1} de^x = arctg\,e^x + C.$

Зад. 12 $I = \int \frac{1}{\sin x} dx$

Решение: $I = \int \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} dx =$

$= \int \frac{1}{tg\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}} d\frac{x}{2} = \int \frac{1}{tg\frac{x}{2}} d\,tg\frac{x}{2} = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C$

$\frac{1}{\cos^2 u} du = d\,tg\,u$

$u = \frac{x}{2}$

④ Зад. 13 $I = \int x(1-2x)^{17}dx$

Решение: ще използваме, че $x = \frac{1}{2}[1-(1-2x)]$

Имаме, че $I = \int \frac{1}{2}[1-(1-2x)](1-2x)^{17} d\frac{1}{2}[1-(1-2x)] =$

$= -\frac{1}{4}\int [1-(1-2x)](1-2x)^{17} d(1-2x) =$

$= -\frac{1}{4}\int [(1-2x)^{17} - (1-2x)^{18}] d(1-2x) =$

$= -\frac{1}{4}\left[\frac{(1-2x)^{18}}{18} - \frac{(1-2x)^{19}}{19}\right] + c.$

Зад. 14 $I = \int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}dx$, $J = \int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}dx$

Решение: $I + J = \int \frac{\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x}dx = \int 1 dx = x + c_1$

$J - I = \int \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}dx = \int \frac{1}{\sin x + \cos x} d(\sin x + \cos x)$

$= \ln|\sin x + \cos x| + c_2$

$\begin{cases} J + I = x + c_1 \\ J - I = \ln|\sin x + \cos x| + c_2 \end{cases}$

Отг. на зад. 14:
$J = \frac{1}{2}(x + \ln|\sin x + \cos x|) + c$
$I = \frac{1}{2}(x - \ln|\sin x + \cos x|) + c$

Зад. 15 $I = \int \frac{1}{\cos^4 x}dx$

Решение: $I = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}dx =$

$= \int (tg^2 x + 1)\, d\, tg\, x = \frac{tg^3 x}{3} + tg\, x + c.$

Зад. 16 $I = \int \frac{x^2+1}{x^4+1}dx$

Решение: $I = \int \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x^2}}dx = \int \frac{1}{(x-\frac{1}{x})^2 + 2} d(x - \frac{1}{x}) =$

$= \int \frac{1}{\left(\frac{x^2-1}{x}\right)^2 + 2} d\frac{x^2-1}{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{\left(\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}\right)^2 + 1} d\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}} =$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\, arctg\, \frac{x^2-1}{x\sqrt{2}} + c.$