Лекция 11.3.2021

1 Скаларно произведение в геометричното пространство — продължение

Припомняне от миналия път

Работим в геометричното пространство.

Определение 1 *Ъгъл между ненулевите вектори* u *и* v е ъгълът между произволни техни представители с общо начало. Означава се с $\sphericalangle(u, v)$.

Пример 1 При $u \neq 0$ имаме $\sphericalangle(u, u) = 0$.

Пример 2 При $u \neq 0$, $v \neq 0$ имаме $\sphericalangle(v, u) = \sphericalangle(u, v)$.

Оттук нататък считаме, че е фиксирана единична отсечка за измерване на дължини.

Определение 2 Базисът $e = (e_1, e_2, e_3)$ на линейното пространство на векторите в пространството се нарича *ортонормиран*, ако векторите e_1, e_2, e_3 са единични и взаимно перпендикулярни, тоест $|e_i| = 1$, $i = 1, 2, 3$, и $\sphericalangle(e_i, e_j) = \frac{\pi}{2}$ при $i \neq j$.

Забележка 1 Ясно е, че съществуват ортонормирани базиси, защото съществуват три взаимно перпендикулярни прави и върху всяка от тях можем да вземем по един единичен вектор.

Теорема 1 *Нека базисът* $e = (e_1, e_2, e_3)$ *на линейното пространство на векторите в пространството е ортонормиран и спрямо него векторът* u *има координати* (x_1, x_2, x_3). *Тогава* $|u| = \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2}$.

Определение 3 *Скаларно произведение на векторите* u *и* v е числото $\langle u, v\rangle \in \mathbb{R}$, дефинирано по следния начин:

а) Ако $u = 0$ или $v = 0$, то $\langle u, v\rangle = 0$.

б) Ако $u \neq 0$ и $v \neq 0$, то $\langle u, v\rangle = |u||v| \cos \sphericalangle(u, v)$.

Забележка 2 Срещат се и други означения за скаларното произведение. Например uv, $u.v$, (u, v).

Забележка 3 Ако $u = 0$ или $v = 0$, то $\sphericalangle(u, v)$ не е дефиниран. Но тъй като дължината на нулевия вектор е 0, то в тоя случай $\langle u, v\rangle = 0 = |u||v| \cos \varphi$ каквото и да е φ. Следователно, ако се уговорим да считаме, че нулевият вектор и другите вектори сключват произволен ъгъл, то тогава $\langle u, v\rangle = |u||v| \cos \sphericalangle(u, v)$ за всички вектори u и v.

Пример 3 При $u \neq 0$ имаме $\langle u, u\rangle = |u||u| \cos \sphericalangle(u, u) = |u||u| \cos 0 = |u|^2$, а също и при $u = 0$ имаме $\langle u, u\rangle = 0 = |u|^2$.

Теорема 2 (критерий за перпендикулярност на вектори)
Ненулевите вектори u и v са перпендикулярни $\Leftrightarrow \langle u, v\rangle = 0$.

Забележка 4 Ако приемем, че нулевият вектор е перпендикулярен на всеки вектор (което е в унисон с приемането, че сключва произволен ъгъл с всеки вектор — щом сключва произволен ъгъл значи сключва и прав ъгъл), то горната теорема е вярна и без изискването u и v да са ненулеви.

Теорема 3 *Нека базисът $e = (e_1, e_2, e_3)$ на линейното пространство на векторите в пространството е ортонормиран и спрямо него векторите u и v имат координати $u(x_1, x_2, x_3)$ и $v(y_1, y_2, y_3)$. Тогава $\langle u, v\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$.*

Забележка 5 В училището косинусовата теорема вероятно е формулирана само за истински триъгълници. Тя обаче важи и за изродени триъгълници OPQ, тоест когато O, P, Q са на една права, и доказателството в тоя случай е много просто.

Дотук беше припомнянето от миналия път.

Скаларно произведение в геометричното пространство — продължение

От Теорема 1, Теорема 2 и Теорема 3 веднага получаваме

Теорема 4 *Нека базисът $e = (e_1, e_2, e_3)$ на линейното пространство на векторите в пространството е ортонормиран и спрямо него ненулевите вектори u и v имат координати $u(x_1, x_2, x_3)$ и $v(y_1, y_2, y_3)$. Тогава:*

1. $u \perp v \Leftrightarrow x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = 0$.
2. $\cos \sphericalangle(u, v) = \dfrac{x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3}{\sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2}.\sqrt{{y_1}^2 + {y_2}^2 + {y_3}^2}}$, *тоест*
   $\sphericalangle(u, v) = \arccos \dfrac{x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3}{\sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2}.\sqrt{{y_1}^2 + {y_2}^2 + {y_3}^2}}$.

Теорема 5 *Скаларното произведение има следните (основни) свойства:*

1. $\langle v, u\rangle = \langle u, v\rangle$ *(симетричност)*
2. $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$ *(адитивност по първия аргумент)*
3. $\langle \lambda u, v\rangle = \lambda\langle u, v\rangle$ *за* $\lambda \in \mathbb{R}$ *(хомогенност по първия аргумент)*
4. $\langle u, u\rangle > 0$ *за* $u \neq 0$ *(положителност)*

Доказателство: Ще докажем свойствата чрез координати. Това е най-вече заради второто свойство, чието доказателство чрез дефиницията е неприятно, докато с координати е тривиално. Останалите три се доказват лесно и с дефиницията, но и с координати доказателствата им са тривиални.

Нека сме фиксирали ортонормиран базис и спрямо него векторите u, v, w имат координати $u(x_1, x_2, x_3)$, $v(y_1, y_2, y_3)$, $w(z_1, z_2, z_3)$.

1. Следва от Теорема 3, защото $\langle u, v\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = y_1x_1 + y_2x_2 + y_3x_3 = \langle v, u\rangle$. (Следва също и директно от дефиницията, защото $\sphericalangle(u, v) = \sphericalangle(v, u)$.)

2. Следва от Теорема 3, защото $u + v$ има координати $(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$ и следователно

$$\begin{aligned}\langle u + v, w\rangle &= (x_1 + y_1)z_1 + (x_2 + y_2)z_2 + (x_3 + y_3)z_3 \\ &= (x_1z_1 + x_2z_2 + x_3z_3) + (y_1z_1 + y_2z_2 + y_3z_3) = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle.\end{aligned}$$

3. Следва от Теорема 3, защото λu има координати $(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$ и следователно

$$\langle \lambda u, v\rangle = (\lambda x_1)y_1 + (\lambda x_2)y_2 + (\lambda x_3)y_3 = \lambda(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) = \lambda\langle u, v\rangle.$$

   (Може да се докаже лесно и с дефиницията като се внимава как се изразява $\sphericalangle(\lambda u, v)$ чрез $\sphericalangle(u, v)$ в зависимост от знака на λ.)

4. Следва от Теорема 3, защото $\langle u, u\rangle = {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 > 0$, тъй като при $u \neq 0$ поне един от x-овете е различен от 0. (Следва също и директно от дефиницията, защото както видяхме в Пример 3 $\langle u, u\rangle = |u|^2 > 0$ при $u \neq 0$.) $\square$

Забележка 6 За $u = 0$ имаме $\langle u, u\rangle = 0$.

Забележка 7 Свойствата 2. и 3. в горната теорема заедно са еквивалентни на свойството

$$\langle \lambda u + \mu v, w\rangle = \lambda\langle u, w\rangle + \mu\langle v, w\rangle \qquad (\textit{линейност по първия аргумент})$$

Че линейността следва от 2. и 3. е ясно: Прилага се 2. и след това за всяко от събираемите се прилага 3.. Обратно, 2. следва като в линейността се вземе $\lambda = 1$ и $\mu = 1$, а 3. следва като в линейността се вземе $\mu = 0$ и произволно v, например $v = 0$.

Забележка 8 Поради симетричността на скаларното произведение, то е адитивно, хомогенно и линейно и по втория си аргумент. Така че скаларното произведение е билинейно, тоест линейно е и по двата си аргумента.

От Теорема 5 веднага получаваме

Следствие 1 *Скаларното произведение на вектори в геометричното пространство е скаларно произведение в смисъла от курса по алгебра и следователно векторите в геометричното пространство образуват 3-мерно евклидово линейно пространство в смисъла от курса по алгебра.*

Забележка 9 Всичко направено по-горе важи и в геометричната равнина (а и върху геометрична права), като навсякъде трябва да се махне третият базисен вектор и третата координата (а върху права — вторият и третият базисен вектор и втората и третата координата) и в Следствие 1 евклидовото линейно пространство е 2-мерно (а за права — 1-мерно).

2 Ориентация

Матрица на прехода между базиси (припомняне от алгебрата)

Нека V е n-мерно реално линейно пространство и $e = (e_1, \dots, e_n)$ и $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$ са базиси на V. Тогава всеки от $e'_1, \dots, e'_n$ е линейна комбинация на $e_1, \dots, e_n$, тоест съществуват числа $t_{ij} \in \mathbb{R}$, такива че

$$\begin{array}{rcl} e'_1 & = & t_{11}e_1 + t_{21}e_2 + \cdots + t_{n1}e_n \\ e'_2 & = & t_{12}e_1 + t_{22}e_2 + \cdots + t_{n2}e_n \\ \vdots & \vdots & \qquad\qquad\qquad \vdots \\ e'_j & = & t_{1j}e_1 + t_{2j}e_2 + \cdots + t_{nj}e_n \\ \vdots & \vdots & \qquad\qquad\qquad \vdots \\ e'_n & = & t_{1n}e_1 + t_{2n}e_2 + \cdots + t_{nn}e_n \end{array} \tag{1}$$

тоест

$$e'_j = \sum_{i=1}^{n} t_{ij}e_i, \quad j = 1, \dots, n. \tag{2}$$

Означаваме $T = (t_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$, тоест T е матрицата $n \times n$, чиито стълбове са координатните вектори на $e'_1, \dots, e'_n$ спрямо базиса e, тоест (i,j)-тият елемент на T е i-тата координата на e'_j спрямо базиса e.

Разглеждайки $e = (e_1, \dots, e_n)$ и $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$ като вектор-редове и считайки, че вектор може да се умножава с число отдясно, получаваме, че (1) (и еквивалентното му (2)) се записва в матричен вид като

$$e' = e.T. \tag{3}$$

Матрицата T се нарича *матрица на прехода от базиса e към базиса e'.*

Матрицата на прехода е обратима матрица.

(Дори имаме: Ако e е базис, T е матрица и $e' = e.T$, то e' е базис $\Leftrightarrow$ T е обратима.)

Твърдение 1 *1. Матрицата на прехода от базиса e към същия базис e е единичната матрица E, тоест $e = e.E$.*

2. Ако матрицата на прехода от базиса e към базиса e' е T, то матрицата на прехода от e' към e е T^{-1} (тоест матрицата на прехода в обратната посока е обратната матрица), тоест $e' = e.T \Rightarrow e = e'.T^{-1}$.

3. Ако матрицата на прехода от базиса e към базиса e' е S, а матрицата на прехода от e' към базиса e'' е T, то матрицата на прехода от e към e'' е ST, тоест $e' = e.S$, $e'' = e'.T \Rightarrow e'' = e.ST$.

Доказателството на това твърдение се съдържа във формулировката му.

Всичко дотук важи и за n-мерно линейно пространство над произволно поле. В последващите неща обаче полето не може да е произволно, защото ще използваме положителност и отрицателност. Затова ще разглеждаме линейни пространства над $\mathbb{R}$.

Ориентация

Нека V е n-мерно реално линейно пространство.

Определение 4 Нека $e = (e_1, \dots, e_n)$ и $f = (f_1, \dots, f_n)$ са два базиса на V и матрицата на прехода от e към f е T. Казваме, че *e е еднакво ориентиран с f*, и пишем $e \sim f$, ако $\det T > 0$. Казваме, че *e е противоположно ориентиран на f*, и пишем $e \not\sim f$, ако e не е еднакво ориентиран с f, тоест ако $\det T < 0$. (Тъй като T е обратима, $\det T \neq 0$.)

Пример 4 Ако $e = (e_1, \dots, e_n)$ е базис и $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, то и $f = (\lambda e_1, e_2, \dots, e_n)$ е базис и e е еднакво ориентиран с f при $\lambda > 0$ и противоположно ориентиран на f при $\lambda < 0$. Същото заключение е в сила, ако вместо e_1 с λ се умножи който и да е e_i. В частност, ако се смени знака на един от базисните вектори, то първоначалният базис е противоположно ориентиран на новополучения.

Това е така, защото матрицата на прехода T от e към f се получава от E чрез умножаване на първия (или в по-общия случай на i-тия) стълб с λ и следователно $\det T = \lambda \det E = \lambda$.

Пример 5 Ако $e = (e_1, \dots, e_n)$ е базис, то и $f = (e_2, e_1, e_3, \dots, e_n)$ е базис и e е противоположно ориентиран на f. Същото заключение е в сила, ако вместо e_1 и e_2 се разменят местата на които и да е e_i и e_j.

Това е така, защото матрицата на прехода T от e към f се получава от E чрез разменяне на местата на първия и втория (или в по-общия случай на i-тия и j-тия) стълб и следователно $\det T = -\det E = -1 < 0$.

Пример 6 Ако $n = 3$ и $e = (e_1, e_2, e_3)$ е базис, то и $f = (e_2, e_3, e_1)$ е базис и e е еднакво ориентиран с f.

Това е така, защото матрицата на прехода от e към f е $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ и следователно $\det T = 1 > 0$.

Теорема 6 *1. Релацията еднаква ориентираност на базиси е релация на еквивалентност в множеството на всички базиси на V.*

2. Класовете на еквивалентност относно тая релация са два: ако f е един базис на V, то те са $\{e : e \sim f\}$ и $\{e : e \not\sim f\}$.

Доказателство:

1. Трябва да се докаже, че $\sim$ е рефлексивна, симетрична и транзитивна.

рефлексивност Нека e е базис на V. По 1. на Твърдение 1 матрицата на прехода от e към e е E. Тъй като $\det E = 1 > 0$, то $e \sim e$.

симетричност Нека e и f са базиси на V и $e \sim f$. Следователно за матрицата на прехода T от e към f имаме $\det T > 0$. По 2. на Твърдение 1 матрицата на прехода от f към e е T^{-1}. Тъй като $\det(T^{-1}) = \frac{1}{\det T} > 0$, то $f \sim e$.

транзитивност Нека e, f, g са базиси на V и $e \sim f$, $f \sim g$. Следователно за матриците на прехода S от e към f и T от f към g имаме $\det S > 0$ и $\det T > 0$. По 3. на Твърдение 1 матрицата на прехода от e към g е ST. Тъй като $\det(ST) = \det S . \det T > 0$, то $e \sim g$.

Следователно $\sim$ е релация на еквивалентност.

2. Множеството $\{e : e \sim f\}$ е клас на еквивалентност, а именно класът на f. Значи трябва да се докаже, че и множеството $\{e : e \not\sim f\}$ също е клас на еквивалентност.

   Тъй като $\sim$ е релация на еквивалентност, множеството на всички базиси се разбива на класове на еквивалентност. Един от тях е класът на f. Следователно множеството от останалите базиси, а именно $\{e : e \not\sim f\}$, е обединението на останалите класове на еквивалентност. Ако покажем, че всеки два елемента на $\{e : e \not\sim f\}$ са еквивалентни, то това множество ще се съдържа в един клас на еквивалентност. Така ще получим, че $\{e : e \not\sim f\}$ е един клас на еквивалентност, освен ако е празно.

   Че всеки два елемента на $\{e : e \not\sim f\}$ са еквивалентни се вижда както по-горе при транзитивността: Ако $e \not\sim f$ и $g \not\sim f$, то за матриците на прехода S от e към f и T от f към g имаме $\det S < 0$ и $\det T < 0$. Тогава за матрицата на прехода ST от e към g получаваме $\det(ST) = \det S . \det T > 0$, така че $e \sim g$.

   А че $\{e : e \not\sim f\}$ не е празно е ясно, защото негов елемент може да се построи например като в Пример 4 — чрез смяна на знака на някой от векторите в f.

   Значи освен класът на f, тоест $\{e : e \sim f\}$, има още точно един клас на еквивалентност, а именно $\{e : e \not\sim f\}$. □

Забележка 10 Поради горната теорема в релацията ориентираност на базиси двата базиса играят симетрична роля, така че вместо e е еднакво ориентиран с f можем да казваме *e и f са еднакво ориентирани*, а вместо e е противоположно ориентиран на f — *e и f са противоположно ориентирани.*

Определение 5 1. *Ориентация* в крайномерно реално линейно пространство е клас на еквивалентност относно релацията еднаква ориентираност на базиси.

2. Казваме, че крайномерно реално линейно пространство е *ориентирано*, ако е избрана едната от двете възможни ориентации. Избраната ориентация се нарича *положителна*, а другата – *отрицателна*.

Забележка 11 Избор на ориентация може да се зададе чрез избор на базис: взима се класът на еквивалентност на базиса.

Определение 6 Базис в ориентирано линейно пространство се нарича *положително ориентиран* (съответно *отрицателно ориентиран*), ако задава положителната (съответно отрицателната) ориентация.

Пример 7 Дефинираната от стандартния базис на $\mathbb{R}^n$ ориентация се нарича *стандартна ориентация* в $\mathbb{R}^n$. По подразбиране $\mathbb{R}^n$ се счита ориентирано по тоя начин.

3 Векторно произведение

Работим в геометричното пространство, като считаме че са фиксирани единична отсечка за измерване на дължини и ориентация.

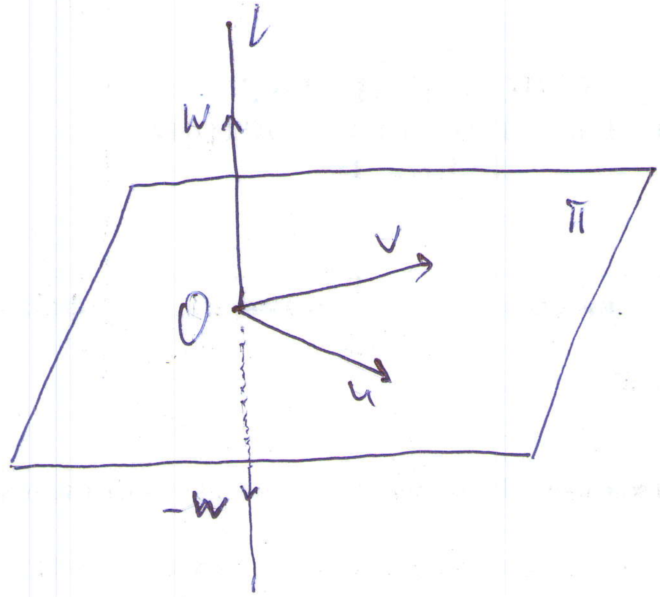
Определение 7 *Векторно произведение на векторите u и v* е векторът $u \times v$, дефиниран по следния начин:

а) Ако u и v са колинеарни, то $u \times v = 0$.

б) Ако u и v не са колинеарни, то $u \times v$ е единственият вектор, който удовлетворява условията:
$|u \times v| = |u||v| \sin \sphericalangle(u, v)$,
$u \times v$ е перпендикулярен на u и v,
$(u, v, u \times v)$ е положително ориентиран базис (казва се още *дясна тройка*).

Коректност: Трябва да се докаже, че в б) наистина съществува единствен вектор удовлетворяващ трите условия.

Да си изберем една точка O, която да ни служи за начална точка, в която да нанасяме векторите. Тъй като u и v не са колинеарни, то съществува единствена равнина π през O, с която те са компланарни. Нека l е правата през O, която е перпендикулярна на π. Тогава всеки вектор w, който е перпендикулярен на u и v, е колинеарен с l.



Тъй като u и v не са колинеарни, то $u \neq 0$, $v \neq 0$ и $\sphericalangle(u,v) \neq 0, \pi$, така че $|u||v|\sin\sphericalangle(u,v) \neq 0$. Следователно има точно два вектора, които са колинеарни с l и имат дължина $|u||v|\sin\sphericalangle(u,v)$. Ако означим единия от тях с w, то другият е противоположният му $-w$. Векторите u, v, w са некомпланарни, защото иначе бихме имали, че w е компланарен с π и тъй като той е колинеарен с перпендикулярната права l, то той е 0, което противоречи на това, че дължината му е $|u||v|\sin\sphericalangle(u,v) \neq 0$. Следователно u, v, w са линейно независими, така че (u, v, w) е базис на линейното пространство на векторите в пространството и значи и $(u, v, -w)$ е такъв. Но базисите (u, v, w) и $(u, v, -w)$ са противоположно ориентирани. Значи точно един от тях е положително ориентиран. Следователно съществува точно един вектор (w или $-w$), който удовлетворява трите условия в б). Така че наистина дефиницията в б) е коректна.

Забележка 12 Друго означение за векторното произведение е $\wedge$, тоест $u \wedge v$.

Забележка 13 Ако $u \neq 0$, $v \neq 0$ и $u \parallel v$, то $\sphericalangle(u,v) = 0$ или π и следователно $\sin\sphericalangle(u,v) = 0$. Така че и в тоя случай е в сила равенството $|u \times v| = |u||v|\sin\sphericalangle(u,v)$. Ако $u = 0$ или $v = 0$, то $\sphericalangle(u,v)$ не е дефиниран. Но тъй като дължината на нулевия вектор е 0, то в тоя случай $|u \times v| = 0 = |u||v|\sin\varphi$ каквото и да е φ. Следователно, ако се уговорим да считаме, че нулевият вектор и другите вектори сключват произволен ъгъл, то тогава $|u \times v| = |u||v|\sin\sphericalangle(u,v)$ за всички вектори u и v.

При същата уговорка нулевият вектор е перпендикулярен на всеки вектор, така че и второто условие в б) е изпълнено при произволни u и v (тоест и при $u \parallel v$).

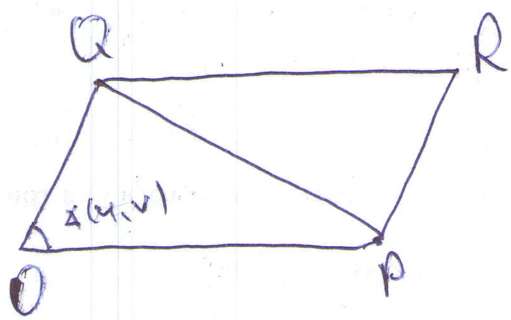
Но третото условие въобще няма смисъл при $u \parallel v$, защото нулевият вектор не може да бъде елемент на базис.

Теорема 7 (критерий за колинеарност на вектори)
Векторите u и v са колинеарни $\Leftrightarrow$ $u \times v = 0$.

Доказателство: Правата посока е а) на Определение 7. Обратната посока следва от б) на Определение 7, защото когато u и v не са колинеарни имаме $|u \times v| = |u||v| \sin \sphericalangle(u, v) \neq 0$ (това го видяхме в доказателството на коректността). $\square$

Теорема 8 *Ако векторите u и v не са колинеарни, то лицето на успоредника, построен върху u и v, е $|u \times v|$, а лицето на триъгълника, построен върху u и v, е $\frac{1}{2}|u \times v|$.*

Доказателство: Нека O е произволна точка, P, Q са точките, за които $\overrightarrow{OP} = u$, $\overrightarrow{OQ} = v$, а R е точката, за която $OPRQ$ е успоредник. Под *успоредника, построен върху u и v*, се разбира именно успоредникът $OPRQ$. (Ако се тръгне от друга начална точка $\widetilde{O}$, ще се получи друг успоредник, но той е еднакъв на $OPRQ$ и значи има същото лице.)



Имаме $S_{OPRQ} = |OP|.|OQ|. \sin \sphericalangle POQ = |u|.|v|. \sin \sphericalangle(u, v) = |u \times v|$.

Под *триъгълника, построен върху u и v*, се разбира триъгълникът OPQ.

Имаме $S_{OPQ} = \frac{1}{2} S_{OPRQ} = \frac{1}{2}|u \times v|$. $\square$

Теорема 9 *Нека $e = (e_1, e_2, e_3)$ е положително ориентиран ортонормиран базис на пространството на геометричните вектори и спрямо него векторите u и v имат координати $u(x_1, x_2, x_3)$, $v(y_1, y_2, y_3)$. Тогава координатите на $u \times v$ спрямо e са*
$u \times v \left(\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right)$, *тоест* $u \times v(x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1)$.

Доказателство: Нека w е векторът, чиито координати спрямо e са дадените във формулировката, тоест $w(x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1)$. Трябва да докажем, че $u \times v = w$.

Нека първо $u \parallel v$.

Ако $u = 0$, то $x_i = 0$, $i = 1, 2, 3$, и следователно всички координати на w са 0. Значи $w = 0$.

Ако $u \neq 0$, то $v = \lambda u$ за някое $\lambda \in \mathbb{R}$. Следователно $y_i = \lambda x_i$, $i = 1, 2, 3$, и пак получаваме, че всички координати на w са 0. Значи пак $w = 0$.

Следователно при $u \parallel v$ имаме $w = 0 = u \times v$.

Нека сега u и v не са колинеарни. За да докажем, че $u \times v = w$ трябва да докажем, че w удовлетворява трите условия в б) на Определение 7.

Тъй като e е ортонормиран базис имаме (второто равенство се получава лесно с разкриване на скобите и директна проверка)

$$\begin{aligned}
|w|^2 &= (x_2y_3 - x_3y_2)^2 + (x_3y_1 - x_1y_3)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2 \\
&= \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)\left(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2\right) - (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)^2 = |u|^2|v|^2 - \langle u, v\rangle^2 \\
&= |u|^2|v|^2 - |u|^2|v|^2\cos^2 \sphericalangle(u,v) = |u|^2|v|^2\left(1 - \cos^2 \sphericalangle(u,v)\right) = |u|^2|v|^2 \sin^2 \sphericalangle(u,v).
\end{aligned}$$

Тогава от $|u| \geq 0$, $|v| \geq 0$ и $\sin \sphericalangle(u,v) \geq 0$ (защото $0 \leq \sphericalangle(u,v) \leq \pi$) следва $|w| = |u||v| \sin \sphericalangle(u,v)$, с което е проверено първото условие.

По-долу ще ни трябва, че $w \neq 0$. Това е така, защото от неколинеарността на u и v следва $|u| > 0$, $|v| > 0$ и $\sin \sphericalangle(u,v) > 0$ (защото $\sphericalangle(u,v) \neq 0, \pi$) и значи $|w| = |u||v| \sin \sphericalangle(u,v) > 0$.

Тъй като e е ортонормиран базис имаме

$$\begin{aligned}
\langle w, u\rangle &= (x_2y_3 - x_3y_2)x_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)x_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)x_3 &= 0, \\
\langle w, v\rangle &= (x_2y_3 - x_3y_2)y_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)y_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)y_3 &= 0.
\end{aligned}$$

Следователно $w \perp u, v$, с което е проверено второто условие.

Матрицата от координатите спрямо базиса e на векторите u, v, w е

$$T = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_2 & y_2 & x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_3 & y_3 & x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}.$$

Развивайки по третия стълб получаваме

$$\begin{aligned}
\det T &= \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}(x_2y_3 - x_3y_2) + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}(x_3y_1 - x_1y_3) + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}(x_1y_2 - x_2y_1) \\
&= (x_2y_3 - x_3y_2)^2 + (x_3y_1 - x_1y_3)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2 = |w|^2 > 0.
\end{aligned}$$

Следователно T е обратима матрица, което означава, че и (u, v, w) е базис на линейното пространство на векторите в пространството. И T е матрицата на прехода от базиса e към базиса (u, v, w) и $\det T > 0$, така че двата базиса са еднакво ориентирани. Тъй като e е положително ориентиран, от това следва, че и (u, v, w) е положително ориентиран базис, с което е проверено и третото условие.

Следователно и когато u и v не са колинеарни имаме $w = u \times v$.

С това теоремата е доказана. $\square$

Забележка 14 Формулата за координатите на $u \times v$ от Теорема 9 може да се помни по следните начини:

$$u \times v = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & e_1 \\ x_2 & y_2 & e_2 \\ x_3 & y_3 & e_3 \end{vmatrix}$$

(първият стълб са координатите на u, вторият стълб са координатите на v, третият стълб са базисните вектори). Пресмята се формално тая детерминанта, тоест все едно, че e-тата са букви, означаващи някакви числа, и се получава $u \times v = z_1.e_1 + z_2.e_2 + z_3.e_3$ (където z-овете са някакви числа), което означава, че координатите на $u \times v$ са (z_1, z_2, z_3). Всъщност като се развие детерминантата по третия стълб се получава следната явна формула за z_1, z_2, z_3:

$$u \times v = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}.e_1 + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}.e_2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.e_3,$$

тоест координатите на $u \times v$ са $\left(\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right)$ (както и трябваше да се получи).

Друг начин е да се помни, че координатите на $u \times v$ са минорите от втори ред на матрицата $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix}$ — матрицата от координатите на u и v. По-точно, i-тата координата е минорът, който се получава като се задраска i-тия ред, като само при $i = 2$ се взима със знак $-$. Или пък винаги се взима с $+$, но при писането на i-тия минор винаги се започва от следващия ред след i-тия, като се счита, че редовете са подредени циклично, тоест след третия следва първият.

Теорема 10 *Векторното произведение има следните свойства:*

1. $v \times u = -u \times v$ *(антисиметричност)*
2. $(u + v) \times w = u \times w + v \times w, \quad u \times (v + w) = u \times v + u \times w$ *(адитивност по двата аргумента)*
3. $(\lambda u) \times v = \lambda(u \times v), \quad u \times (\lambda v) = \lambda(u \times v),$ *където* $\lambda \in \mathbb{R}$ *(хомогенност по двата аргумента)*

Доказателство: Ще докажем теоремата като използваме формулата за координатите от Теорема 9. Свойствата 1. и 3. се доказват лесно и чрез дефиницията, но трябва да се разглеждат случаи в зависимост от това дали u и v са колинеарни или не и дали $\lambda > 0$, $\lambda < 0$ или $\lambda = 0$. При доказателството с координати няма разглеждане на случаи и е съвсем кратко. Също така, доказателството на свойството 2. с дефиницията е доста дълго и изисква допълнителна подготовка, а с координати е съвсем кратко и просто.

Нека $e = (e_1, e_2, e_3)$ е положително ориентиран ортонормиран базис на пространството на геометричните вектори и спрямо него векторите u, v, w имат координати $u(x_1, x_2, x_3)$, $v(y_1, y_2, y_3)$, $w(z_1, z_2, z_3)$.

1. Имаме

$$u \times v \left(\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right), \quad v \times u \left(\begin{vmatrix} y_2 & x_2 \\ y_3 & x_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} y_3 & x_3 \\ y_1 & x_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} y_1 & x_1 \\ y_2 & x_2 \end{vmatrix} \right).$$

Тъй като при размяна на местата на два стълба на матрица детерминантата ѝ си сменя знака, то

$$v \times u \left(- \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right).$$

Значи координатите на $v \times u$ са $-$(съответните координати на $u \times v$). Следователно $v \times u = -u \times v$.

2. Имаме

$$u \times w \left(\begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_3 & z_3 \\ x_1 & z_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \right), \quad v \times w \left(\begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} y_3 & z_3 \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \right).$$

Тъй като $u + v(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$, то

$$(u + v) \times w \left(\begin{vmatrix} x_2 + y_2 & z_2 \\ x_3 + y_3 & z_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_3 + y_3 & z_3 \\ x_1 + y_1 & z_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 + y_1 & z_1 \\ x_2 + y_2 & z_2 \end{vmatrix} \right).$$

Знаем, че когато някой стълб на матрица е сума на два стълба, то детерминантата ѝ е сумата на детерминантите на двете матрици, съответният стълб на които е един от тия два стълба. Следователно

$$(u + v) \times w \left(\begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_3 & z_3 \\ x_1 & z_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_3 & z_3 \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \right).$$

Значи координатите на $(u + v) \times w$ са сумите на съответните координати на $u \times w$ и $v \times w$. Следователно $(u + v) \times w = u \times w + v \times w$.

Второто равенство $u \times (v + w) = u \times v + u \times w$ се доказва по същия начин (като тоя път вторите стълбове ще са суми), а всъщност следва и от вече доказаната адитивност по първия аргумент и антисиметричността по следния начин:

$$u \times (v + w) = -(v + w) \times u = -(v \times u + w \times u) = (-v \times u) + (-w \times u) = u \times v + u \times w.$$

3. Имаме

$$u \times v \left(\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right).$$

Тъй като $\lambda u(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$, то

$$(\lambda u) \times v \left(\begin{vmatrix} \lambda x_2 & y_2 \\ \lambda x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \lambda x_3 & y_3 \\ \lambda x_1 & y_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \lambda x_1 & y_1 \\ \lambda x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right).$$

Знаем, че когато някой стълб на матрица се умножи с число, то детерминантата на получената матрица е детерминантата на първоначалната, умножена със същото число. Следователно

$$(\lambda u) \times v \left(\lambda \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \lambda \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}, \lambda \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right).$$

Значи координатите на $(\lambda u) \times v$ са съответните координати на $u \times v$, умножени с λ. Следователно $(\lambda u) \times v = \lambda(u \times v)$.

Второто равенство $u \times (\lambda v) = \lambda(u \times v)$ се доказва по същия начин (като тоя път вторите стълбове ще са умножени с λ), а всъщност следва и от вече доказаната хомогенност по първия аргумент и антисиметричността по следния начин:

$$u \times (\lambda v) = -(\lambda v) \times u = -(\lambda(v \times u)) = \lambda(-v \times u) = \lambda(u \times v). \qquad \square$$

Забележка 15 Свойствата 2. и 3. в горната теорема заедно са еквивалентни на свойството

$$(\lambda u + \mu v) \times w = \lambda(u \times w) + \mu(v \times w), \quad u \times (\lambda v + \mu w) = \lambda(u \times v) + \mu(u \times w)$$

(*линейност по двата аргумента*)

тоест векторното произведение е билинейно.

4 Смесено произведение

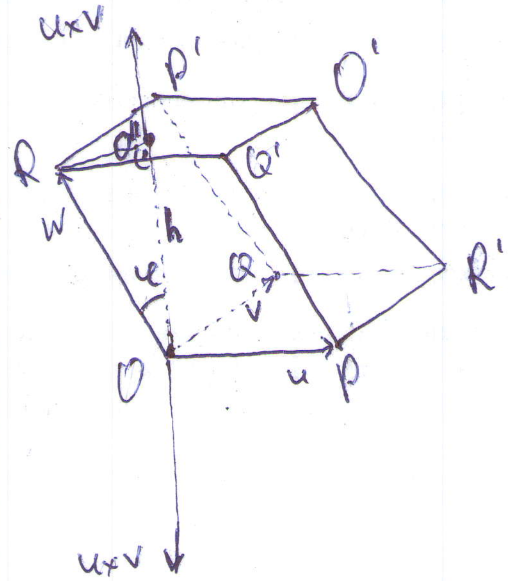
Работим в геометричното пространство, като считаме че са фиксирани единична отсечка за измерване на дължини и ориентация.

Определение 8 *Смесено произведение на векторите* u, v, w се нарича реалното число $\langle u, v, w \rangle = \langle u \times v, w \rangle$ (тоест векторното произведение $u \times v$, умножено скаларно с w).

Забележка 16 Други означения за смесеното произведение са (u, v, w) и uvw.

Теорема 11 *Ако векторите u, v, w не са компланарни, то обемът на паралелепипеда, построен върху u, v, w, е $|\langle u, v, w \rangle|$, а обемът на тетраедъра, построен върху u, v, w, е $\frac{1}{6}|\langle u, v, w \rangle|$.*

Доказателство: Нека O е произволна точка, а P, Q, R са точките, за които $\overrightarrow{OP} = u$, $\overrightarrow{OQ} = v$, $\overrightarrow{OR} = w$. Нека $OPR'QRQ'O'P'$ е паралелепипедът, чиито ръбове през върха O са OP, OQ, OR (с O', P', Q', R' сме означили точките, които лежат съответно диагонално срещу O, P, Q, R). Под *паралелепипеда, построен върху* u, v, w, се разбира именно паралелепипедът $OPR'QRQ'O'P'$. (Ако се тръгне от друга начална точка $\widetilde{O}$ се получава друг паралелепипед, но той е еднакъв на $OPR'QRQ'O'P'$ и значи има същия обем.)



Ще считаме успоредника $OPR'Q$ за основа на паралелепипеда $OPR'QRQ'O'P'$. Нека O'' е петата на перпендикуляра от O към срещуположната основа $RQ'O'P'$. Тогава $h = |OO''|$ е височината на паралелепипеда и обемът му е $V = S_{OPR'Q}.h$.

Тъй като $OPR'Q$ е успоредникът, построен върху векторите u и v, от предишния въпрос знаем, че $S_{OPR'Q} = |u \times v|$.

Нека $\varphi = \sphericalangle\left(\overrightarrow{OO''}, w\right)$. От правоъгълния триъгълник $OO''R$ имаме

$$h = |OO''| = |OR|\cos\varphi = |w|\cos\varphi.$$

Тъй като $\overrightarrow{OO''} \perp u, v$, то $\overrightarrow{OO''} \parallel u \times v$. Следователно

$$\varphi = \begin{cases} \sphericalangle(u \times v, w) & \text{при } u \times v \uparrow\uparrow \overrightarrow{OO''}, \text{ тоест при } \sphericalangle(u \times v, w) \leq \frac{\pi}{2}, \\ \pi - \sphericalangle(u \times v, w) & \text{при } u \times v \uparrow\downarrow \overrightarrow{OO''}, \text{ тоест при } \sphericalangle(u \times v, w) \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

(Всъщност не е възможно $\sphericalangle(u \times v, w) = \frac{\pi}{2}$, защото тогава R лежи в равнината OPQ, тоест u, v, w са компланарни, което противоречи на условието. Но това не е съществено за доказателството.) Значи

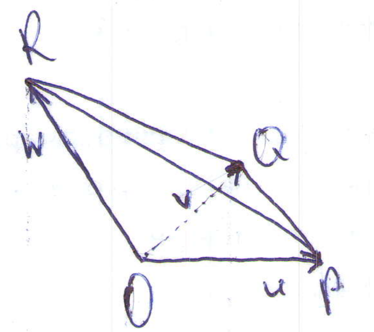
$$\cos\varphi = \begin{cases} \cos\sphericalangle(u \times v, w) & \text{при } \sphericalangle(u \times v, w) \leq \frac{\pi}{2}, \text{ тоест при } \cos\sphericalangle(u \times v, w) \geq 0, \\ -\cos\sphericalangle(u \times v, w) & \text{при } \sphericalangle(u \times v, w) \geq \frac{\pi}{2}, \text{ тоест при } \cos\sphericalangle(u \times v, w) \leq 0. \end{cases}$$

Това означава, че $\cos\varphi = |\cos\sphericalangle(u \times v, w)|$. Следователно $h = |w|.|\cos\sphericalangle(u \times v, w)|$.

Така получаваме

$$\begin{aligned} V &= S_{OPR'Q}.h = \underbrace{|u \times v|}_{\geq 0}.\underbrace{|w|}_{\geq 0}.|\cos\sphericalangle(u \times v, w)| = ||u \times v|.|w|.\cos\sphericalangle(u \times v, w)| \\ &= |\langle u \times v, w\rangle| = |\langle u, v, w\rangle|. \end{aligned}$$

Под *тетраедъра, построен върху* u, v, w, се разбира тетраедърът $OPQR$.



Имаме

$$V_{OPQR} = \frac{1}{3} S_{OPQ}.h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} S_{OPR'Q}.h = \frac{1}{6} V_{\text{паралелепипеда}} = \frac{1}{6} |\langle u, v, w \rangle|. \qquad \square$$