① Упражнение 26 за 1, 2 и 3 група

Интегриране по части

Теорема Ако $f(x)$ и $g(x)$ са непрекъснато диференцируеми в интервала $\Delta \subset \mathbb{R}$, то в Δ имаме, че $\int f(x)\,dg(x) = f(x)g(x) - \int g(x)\,df(x)$.

Пресметнете неопределените интеграли:

Зад. 1 $I = \int x \cos x \, dx$

Решение: $I = \int x \, d\sin x = x\sin x - \int \sin x \, dx =$
$= x\sin x + \cos x + C.$

Зад. 2 $I = \int x^3 \ln x \, dx$

Решение: $I = \frac{1}{4}\int \ln x \, dx^4 =$
$= \frac{1}{4}\left(x^4 \ln x - \int x^4 \, d\ln x\right) = \frac{1}{4}\left(x^4 \ln x - \int x^4 \cdot \frac{1}{x}\, dx\right) =$
$= \frac{1}{4}\left(x^4 \ln x - \frac{x^4}{4}\right) + C.$

Зад. 3 $I = \int \operatorname{arctg} x \, dx$

Решение: $I = x \operatorname{arctg} x - \int x \, d\operatorname{arctg} x =$
$= x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2}\, dx =$
$= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}\, d(1+x^2) =$
$= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$

Зад. 4 $I = \int \arcsin x \, dx$

Решение: $I = x \arcsin x - \int x \, d\arcsin x =$
$= x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx =$
$= x \arcsin x + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, d(1-x^2) =$
$= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$

$\int \frac{1}{\sqrt{u}}\, du = \int u^{-\frac{1}{2}}\, du = \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C =$
$= 2\sqrt{u} + C$ $\quad u = 1-x^2$

Зад. 5 $I = \int \sin(\ln x)\, dx$,
$J = \int \cos(\ln x)\, dx$

Решение: $I = x\sin(\ln x) - \int x \, d\sin(\ln x) =$
$= x \sin(\ln x) - \int x \cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x}\, dx =$
$= x\sin(\ln x) - J.$

② $J = x\cos(\ln x) - \int x\, d\cos(\ln x) =$

$= x\cos(\ln x) + \int x\sin(\ln x)\cdot\frac{1}{x}dx =$

$= x\cos(\ln x) + I.$

$$\begin{cases} I = x\sin(\ln x) - J \\ J = x\cos(\ln x) + I \end{cases} \iff \begin{cases} J + I = x\sin(\ln x) \\ J - I = x\cos(\ln x) \end{cases}.$$

Отг. на зад. 5: $J = \frac{x}{2}\left(\sin(\ln x) + \cos(\ln x)\right) + c$

$I = \frac{x}{2}\left(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)\right) + c$

Зад. 6 $I = \int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$, $a > 0$

Решение: $I = x\sqrt{a^2-x^2} - \int x\, d\sqrt{a^2-x^2} =$

$= x\sqrt{a^2-x^2} - \int \frac{(a^2-x^2)-a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx =$

$= x\sqrt{a^2-x^2} - \int\sqrt{a^2-x^2}\,dx + a^2\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx =$

$= x\sqrt{a^2-x^2} - I + a^2\int\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}d\frac{x}{a} = x\sqrt{a^2-x^2} - I + a^2\arcsin\frac{x}{a} + C$

Оказа се, че $I = x\sqrt{a^2-x^2} - I + a^2\arcsin\frac{x}{a} + C$.

Това е уравнение за I, което се решава лесно.

Отг. на зад. 6: $I = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\arcsin\frac{x}{a}\right) + C$.

Зад. 7 $I = \int\sqrt{a^2+x^2}\,dx$, $a \neq 0$

Решение: $I = x\sqrt{a^2+x^2} - \int x\, d\sqrt{a^2+x^2} =$

$= x\sqrt{a^2+x^2} - \int\frac{(x^2+a^2)-a^2}{\sqrt{a^2+x^2}}dx =$

$= x\sqrt{a^2+x^2} - \int\sqrt{a^2+x^2}\,dx + a^2\int\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}dx =$

$= x\sqrt{a^2+x^2} - I + a^2\ln\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right| + C.$

Оказа се, че $I = x\sqrt{a^2+x^2} - I + a^2\ln\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right| + C$.

Това е уравнение за I, което се решава лесно.

Отг. на зад. 7: $I = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2+x^2} + a^2\ln\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right|\right) + C$.

③ Зад. 8 Нека $I_n = \int \frac{1}{(x^2+a^2)^n} dx$, където $n \in \mathbb{N}$, $a \neq 0$.

Док. че $I_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\left[\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + (2n-1) I_n\right]$.

Забележка: Понеже $I_1 = \int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1} d\frac{x}{a} =$
$= \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$, то рекурентната формула от зад. 8 ни позволява да пресметнем всичките интеграли I_n, $n \in \mathbb{N}$.

Решение: $I_{n+1} = \int \frac{1}{(x^2+a^2)^{n+1}} dx = \frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2+a^2)-x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}} dx =$

$$= \frac{1}{a^2}\left[\int \frac{(x^2+a^2)}{(x^2+a^2)^{n+1}} dx - \int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}} dx\right] =$$

$$= \frac{1}{a^2}\left[I_n - \frac{1}{2}\int \frac{x}{(x^2+a^2)^{n+1}} d(x^2+a^2)\right] =$$

$\frac{1}{u^{n+1}} du = u^{-n-1} du = d\frac{u^{-n}}{-n} = -\frac{1}{n} d\frac{1}{u^n}$

$u = x^2+a^2$

$$= \frac{1}{a^2}\left[I_n + \frac{1}{2n}\int x \, d\frac{1}{(x^2+a^2)^n}\right] =$$

$$= \frac{1}{a^2}\left[I_n + \frac{1}{2n}\left(\frac{x}{(x^2+a^2)^n} - I_n\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2na^2}\left[\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + (2n-1) I_n\right].$$

Зад. 9 Нека $I_n = \int \operatorname{tg}^n x \, dx$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Док. че $I_n = \frac{\operatorname{tg}^{n-1} x}{n-1} - I_{n-2}$ за $n \geqq 2$.

Решение: При $n \geqq 2$ имаме, че

$$I_n = \int \operatorname{tg}^n x \, dx = \int \operatorname{tg}^{n-2} x \cdot \operatorname{tg}^2 x \, dx =$$

$$= \int \operatorname{tg}^{n-2} x \cdot \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \operatorname{tg}^{n-2} x \cdot \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} dx =$$

$$= \int \operatorname{tg}^{n-2} x \cdot \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx = \int \operatorname{tg}^{n-2} x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int \operatorname{tg}^{n-2} x \, dx =$$

$$= \int \operatorname{tg}^{n-2} x \, d\operatorname{tg} x - I_{n-2} = \frac{\operatorname{tg}^{n-1} x}{n-1} - I_{n-2}.$$

Забележка: Понеже $I_0 = \int 1 \, dx = x + C$ и

$I_1 = \int \operatorname{tg} x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{1}{\cos x} d\cos x = -\ln|\cos x| + C$,

то рекурентната формула от зад. 9 ни позволява да пресметнем всичките интеграли I_n, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

④ Интегриране чрез смяна на променливата (нарича се още интегриране чрез субституции)

Теорема Нека $\Delta_1 \subset \mathbb{R}$ и $\Delta_2 \subset \mathbb{R}$ са интервали, $\varphi: \Delta_1 \longrightarrow \Delta_2$ е непрекъснато диференцируема в Δ_1, като $\varphi'(t) \neq 0$ в Δ_1, и $f(x)$ е непрекъсната в Δ_2.
Тогава ако $\int f[\varphi(t)]\,d\varphi(t) = F(t) + c$, то

$\int f(x)\,dx = F[\psi(x)] + c$, където $\psi(x)$ е обратната функция на $\varphi(t)$.

Най-често използвани смени на променливата:

1) $a^2 - x^2 \longrightarrow$ полагане $x = a\sin t$ или $x = a\cos t$;

2) $a^2 + x^2 \longrightarrow$ полагане $x = a\,tg\,t$ или $x = a\,cotg\,t$;

3) $x^2 - a^2 \longrightarrow$ полагане $x = \frac{a}{\sin t}$ или $x = \frac{a}{\cos t}$.

Пресметнете неопределените интеграли:

Зад. 1 $I = \int \frac{1}{(4+x^2)^2}\,dx$.

Решение: Правим смяна $x = 2\,tg\,t$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (нашия е втория случай с $a=2$).

$$I = \int \frac{1}{(4+4tg^2t)^2}\,d(2tgt) = \frac{1}{8}\int \frac{1}{(1+tg^2t)^2}\,dtgt =$$

$$= \frac{1}{8}\int \frac{1}{\left(1+\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}\right)^2}\,dtgt = \frac{1}{8}\int \cos^4 t\,dtgt =$$

$$= \frac{1}{8}\int \cos^4 t \cdot \frac{1}{\cos^2 t}\,dt = \frac{1}{8}\int \cos^2 t\,dt =$$

$$= \frac{1}{16}\int (1+\cos 2t)\,dt = \frac{1}{16}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) + c,$$

където $t = arctg\,\frac{x}{2}$.

⑤ Зад. 2 $I = \int \sqrt{9-x^2}\, dx$.

Решение: Полагаме $x = 3\sin t$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (налице е първия случай с $a=3$).

$I = \int \sqrt{9-9\sin^2 t}\, d(3\sin t) = \int \sqrt{9\cos^2 t}\, d(3\sin t) =$

$= \int 3\cos t\, d3\sin t = \int 3\cos t . 3\cos t\, dt =$

$= 9\int \cos^2 t\, dt = \frac{9}{2}\int (1+\cos 2t)\, dt =$

$= \frac{9}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) + C$, където $t = \arcsin \frac{x}{3}$.

Зад. 3 $I = \int \frac{\sqrt{x^2-16}}{x}\, dx$.

Решение: Правим смяна $x = \frac{4}{\sin t}$, $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ (налице е третия случай с $a=4$).

$I = \int \frac{\sqrt{\frac{16}{\sin^2 t} - 16}}{\frac{4}{\sin t}}\, d\left(\frac{4}{\sin t}\right) = \int \frac{\sqrt{\frac{16\cos^2 t}{\sin^2 t}}}{\frac{4}{\sin t}} . 4\left(-\frac{\cos t}{\sin^2 t}\right) dt =$

$= \int \frac{4\cos t}{\sin t} \cdot \left(-\frac{\cos t}{\sin t}\right) dt = -4\int \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}\, dt =$

$= -4\int \frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}\, dt = -4\int \left(\frac{1}{\sin^2 t} - 1\right) dt =$

$= -4(-\cot t - t) + C = 4(\cot t + t) + C$,

където $t = \arcsin \frac{4}{x}$.

В следващите упражнения ще видим и други примери за интегриране чрез субституции.