Собствени вектори. Собствени стойности.

Твърдение 1. Нека $f = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ е полином с цели коефициенти и нека $\alpha = \dfrac{u}{v}$ е рационален корен на f, $u, v \in \mathbb{Z}$, $(u, v) = 1$. Тогава $u \mid a_n$, $v \mid a_0$.

Доказателство. Имаме

$$f(\alpha) = f\left(\frac{u}{v}\right) = a_0\left(\frac{u}{v}\right)^n + a_1\left(\frac{u}{v}\right)^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\left(\frac{u}{v}\right) + a_n = \frac{a_0u^n + a_1u^{n-1}v + \cdots + a_{n-1}uv^{n-1} + a_nv^n}{v^n} = 0,$$

следователно $a_0u^n + a_1u^{n-1}v + \cdots + a_{n-1}uv^{n-1} + a_nv^n = 0$. Оттук $u(-a_0u^{n-1} - a_1u^{n-2}v - \cdots - a_{n-1}v^{n-1}) = a_nv^n$ и значи $u \mid a_nv^n$. Тъй като $(u, v) = 1$, то $u \mid a_n$. Аналогично $v \mid a_0$.

□

Забележка Ако f е полином с цели коефициенти и старши коефициент ± 1 и α е рационален корен на f, то α е цяло число, делящо свободния член на f.

Пример. Да се намерят рационалните корени на полинома

а) $f = 6x^4 + 23x^3 + 19x^2 - 8x - 4$.

Рационалните корени на f търсим измежду числата $\alpha = \dfrac{u}{v}$, където $(u, v) = 1$, $u \mid 4$, $v \mid 6$. Следователно $u = \pm 1, \pm 2, \pm 4$, $v = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ и $\alpha \in \left\{\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{6}, \pm 2, \pm\frac{2}{3}, \pm 4, \pm\frac{4}{3}\right\}$.

	6	23	19	-8	-4
1	6	29	48	40	$36 \neq 0$
-1	6	17	2	-10	$6 \neq 0$
$\frac{1}{2}$	6	26	32	8	0
$-\frac{1}{3}$	6	24	24	0	

Следователно

$$\begin{aligned} f &= \left(x - \frac{1}{2}\right)(6x^3 + 26x^2 + 32x + 8) \\ &= \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right)(6x^2 + 24x + 24) \\ &= 6\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right)(x + 2)^2. \end{aligned}$$

б) $f = 4x^5 - 13x^3 - 8x^2 + 3x + 2$.

Рационалните корени на f търсим измежду числата $\alpha = \dfrac{u}{v}$, където $(u, v) = 1$, $u \mid 2$, $v \mid 4$. Следователно $u = \pm 1, \pm 2$, $v = \pm 1, \pm 2, \pm 4$ и $\alpha \in \left\{\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm 2\right\}$.

	4	0	-13	-8	3	2
1	4	4	-9	-17	-14	$-12 \neq 0$
-1	4	-4	-9	1	2	0
-1	4	-8	-1	2	0	
-1	4	-12	11	$-9 \neq 0$		
2	4	0	-1	0		

Следователно

$$\begin{aligned} f &= (x + 1)(4x^4 - 4x^3 - 9x^2 + x + 2) \\ &= (x + 1)^2(4x^3 - 8x^2 - x + 2) \\ &= (x + 1)^2(x - 2)(4x^2 - 1) \\ &= 4(x + 1)^2(x - 2)\left(x^2 - \frac{1}{4}\right) \\ &= 4(x + 1)^2(x - 2)\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Задача. Да се намерят собствените вектори и собствените стойности на линеен оператор φ, който в даден базис на V има матрица:

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

Решение. $f_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & -1-\lambda & 4 \\ 2 & 4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 2 \\ -2 & 3-\lambda & 4 \\ 2 & 3-\lambda & -1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} =$ $(3-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 2 \\ -4 & 0 & 5+\lambda \\ 2 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-3).1.(-1)^{3+2}[(2-\lambda)(5+\lambda)+8] = -(\lambda-3)(\lambda^2+3\lambda-18) = -(\lambda-3)^2(\lambda+6)$, следователно $\lambda_{1,2} = 3$, $\lambda_3 = -6$.

$\boxed{\lambda = 3}$ Търсим ФСР на хомогенната система с матрица

$$A - 3E = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & 4 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Полагаме $x_2 = p$, $x_3 = q$, тогава $x_1 = -2p + 2q$. Следователно множеството от решенията на системата е

$$\{(-2p+2q, p, q) \mid p, q \in F\}.$$

$$\left.\begin{matrix} p = 1, q = 0: & \boldsymbol{v}_1 = (-2, 1, 0) \\ p = 0, q = 1: & \boldsymbol{v}_2 = (2, 0, 1) \end{matrix}\right\} \text{ФСР}.$$

Следователно всички собствени вектори на φ, съответстващи на $\lambda = 3$, са от вида $\mu_1 \boldsymbol{v}_1 + \mu_2 \boldsymbol{v}_2$, където $\mu_1, \mu_2 \in F$, $(\mu_1, \mu_2) \neq (0, 0)$.

$\boxed{\lambda = -6}$ Търсим ФСР на хомогенната система с матрица

$$A + 6E = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 5 & 4 \\ 0 & 9 & 9 \\ 0 & 18 & 18 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Полагаме $x_3 = p$, тогава $x_2 = -p$, $x_1 = -\frac{p}{2}$. Множеството от решенията на системата е $\left\{\left(-\frac{p}{2}, -p, p\right) \mid p \in F\right\}$. При $p = 2$: $\boldsymbol{v}_3 = (-1, -2, 2)$ — ФСР. Следователно всички собствени вектори на φ, съответстващи на $\lambda = -6$, са от вида $\mu \boldsymbol{v}_3$, където $0 \neq \mu \in F$.

б) $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ -3 & -2 & -2 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

Решение. $f_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 & 2 \\ -3 & -2-\lambda & -2 \\ 3 & 4 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 2-\lambda \\ 3 & 4 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 4-\lambda \end{vmatrix} =$ $(2-\lambda) \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & \lambda & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)1(-1)^{2+3}[(5-\lambda)\lambda - 6] = -(\lambda-2)(\lambda^2-5\lambda+6) = (\lambda-2)^2(\lambda-3)$, следователно $\lambda_{1,2} = 2$, $\lambda_3 = 3$.

$\boxed{\lambda = 2}$ Търсим ФСР на хомогенната система с матрица

$$A - 2E = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -3 & -4 & -2 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Полагаме $x_2 = p$, $x_3 = q$, тогава $x_1 = \dfrac{-4p - 2q}{3}$ и множеството от решенията е

$$\{\left(\frac{-4p-2q}{3}, p, q\right) \mid p, q \in F\}.$$

$$\left.\begin{array}{ll} p=3, q=0: & \boldsymbol{v}_1=(-4,3,0) \\ p=0, q=3: & \boldsymbol{v}_2=(-2,0,3) \end{array}\right\} \text{ФСР}.$$

Следователно всички собствени вектори на φ, съответстващи на $\lambda = 2$, са от вида $\mu_1 \boldsymbol{v}_1 + \mu_2 \boldsymbol{v}_2$, $\mu_1, \mu_2 \in F$, $(\mu_1, \mu_2) \neq (0,0)$.

$\boxed{\lambda = 3}$ Търсим ФСР на хомогенната система с матрица

$$A - 3E = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ -3 & -5 & -2 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Полагаме $x_3 = p$, тогава $x_2 = -p$, $x_1 = p$ и множеството от решенията на системата е $\{(p, -p, p) \mid p \in F\}$. При $p = 1$: $\boldsymbol{v}_3 = (1, -1, 1)$ — ФСР. Следователно всички собствени вектори на φ, съответстващи на $\lambda = 3$, са от вида $\mu \boldsymbol{v}_3$, където $0 \neq \mu \in F$.

Задача. В тримерното линейно пространство $\mathbb{V}$ с базис $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ е даден линеен оператор φ, такъв че $\varphi(\mathbf{a}_i) = \boldsymbol{b}_i$, $1 \le i \le 3$, където

$$\begin{array}{lllllll} \mathbf{a}_1 &=& 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 & \qquad & \mathbf{b}_1 &=& -14\mathbf{e}_1 + 14\mathbf{e}_2 + 8\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{a}_2 &=& \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 & & \mathbf{b}_2 &=& -7\mathbf{e}_1 + 6\mathbf{e}_2 + 5\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{a}_3 &=& \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 & & \mathbf{b}_3 &=& -10\mathbf{e}_1 + 10\mathbf{e}_2 + 6\mathbf{e}_3 \end{array}$$

Намерете:

а) матрицата A на φ в базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ и собствените стойности на φ;

Решение. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, следователно векторите $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ са линейно независими и значи са базис на V.

$$\begin{array}{lll|lllllll} \varphi(\boldsymbol{a}_1) &=& & 2\varphi(\boldsymbol{e}_1) + \varphi(\boldsymbol{e}_2) + \varphi(\boldsymbol{e}_3) &=& \boldsymbol{b}_1 &=& (-14, & 14, & 8)_{\boldsymbol{e}} \\ \varphi(\boldsymbol{a}_2) &=& & \varphi(\boldsymbol{e}_1) + \varphi(\boldsymbol{e}_2) &=& \boldsymbol{b}_2 &=& (-7, & 6, & 5)_{\boldsymbol{e}} \\ \varphi(\boldsymbol{a}_3) &=& & \varphi(\boldsymbol{e}_1) + \varphi(\boldsymbol{e}_2) + \varphi(\boldsymbol{e}_3) &=& \boldsymbol{b}_3 &=& (-10, & 10, & 6)_{\boldsymbol{e}} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & (-7, & 6, & 5) \\ 2 & 1 & 1 & (-14, & 14, & 8) \\ 1 & 1 & 1 & (-10, & 10, & 6) \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & (-7, & 6, & 5) \\ 0 & -1 & 1 & (0, & 2, & -2) \\ 0 & 0 & 1 & (-3, & 4, & 1) \end{array}\right) \Big| .(-1) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & (-7, & 6, & 5) \\ 0 & 1 & 0 & (-3, & 2, & 3) \\ 0 & 0 & 1 & (-3, & 4, & 1) \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & (-4, & 4, & 2) \\ 0 & 1 & 0 & (-3, & 2, & 3) \\ 0 & 0 & 1 & (-3, & 4, & 1) \end{array}\right)$$

Следователно $\varphi(\boldsymbol{e}_1) = (-4, 4, 2)_{\boldsymbol{e}}$, $\varphi(\boldsymbol{e}_2) = (-3, 2, 3)_{\boldsymbol{e}}$, $\varphi(\boldsymbol{e}_3) = (-3, 4, 1)_{\boldsymbol{e}}$ и φ има матрица

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \varphi(\boldsymbol{e}_1) & \varphi(\boldsymbol{e}_2) & \varphi(\boldsymbol{e}_3) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ A = & \begin{pmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 4 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

в базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$.

$$f_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -4-\lambda & -3 & -3 \\ 4 & 2-\lambda & 4 \\ 2 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4-\lambda & 0 & -3 \\ 4 & -2-\lambda & 4 \\ 2 & 2+\lambda & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+2) \begin{vmatrix} -4-\lambda & 0 & -3 \\ 4 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$(\lambda+2) \begin{vmatrix} -4-\lambda & 0 & -3 \\ 6 & 0 & 5-\lambda \\ -2 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+2)1(-1)^{2+3}[-(4+\lambda)(5-\lambda)+18] = -(\lambda+2)(\lambda^2-\lambda-2) = -(\lambda+2)(\lambda-2)(\lambda+1).$$

Следователно $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 2$ са характеристичните корени на φ. Тъй като те са цели числа, т.е. елементи на F, то те са собствените стойности на φ.

б) базис на V от собствени вектори на φ;

Решение. $\boxed{\lambda = -2}$. Търсим ФСР на хомогенната система с матрица

$$A + 2E = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -3 \\ 4 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Полагаме $x_3 = p$, тогава $x_2 = -p$, $x_1 = 0$ и множеството от решенията е

$$\{(0, -p, p) \mid p \in F\}.$$

$$\text{при } p = 1: \ \boldsymbol{v}_1 = (0, -1, 1) \text{ — ФСР}$$

$\boxed{\lambda = -1}$. Търсим ФСР на хомогенната система с матрица

$$A + E = \begin{pmatrix} -3 & -3 & -3 \\ 4 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Имаме $x_2 = 0$, полагаме $x_1 = p$, тогава $x_3 = -p$ и множеството от решенията е

$$\{(p, 0, -p) \mid p \in F\}.$$

$$\text{при } p = 1: \ \boldsymbol{v}_2 = (1, 0, -1) \text{ — ФСР}$$

$\boxed{\lambda = 2}$. Търсим ФСР на хомогенната система с матрица

$$A - 2E = \begin{pmatrix} -6 & -3 & -3 \\ 4 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Полагаме $x_3 = p$, тогава $x_2 = p$, $x_1 = -p$ и множеството от решенията е

$$\{(-p, p, p) \mid p \in F\}.$$

$$\text{при } p = 1: \ \boldsymbol{v}_3 = (-1, 1, 1) \text{ — ФСР}$$

Тъй като собствените вектори $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ на φ съответстват на различни собствени стойности, то те са линейно независими и значи образуват базис на V.

в) матрица T, такава че $T^{-1}AT = D$ — диагонална матрица.

Решение. Матрицата на φ в базиса $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ от собствени вектори е

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \varphi(\boldsymbol{v}_1) & \varphi(\boldsymbol{v}_2) & \varphi(\boldsymbol{v}_3) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Нека

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ T = T_{\boldsymbol{e} \to \boldsymbol{v}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & -0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Тогава $D = T^{-1}AT$.

г) A^{2020}.

Решение. От $D = T^{-1}AT$ получаваме $A = TDT^{-1}$. Следователно

$$A^{2020} = \underbrace{TDT^{-1}TDT^{-1} \dots TDT^{-1}}_{\text{2020 пъти}} = TD^{2020}T^{-1} = T \begin{pmatrix} 2^{2020} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{2020} \end{pmatrix} T^{-1}.$$

Задача. Нека $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ е базис на $\mathbb{V}$ и $\varphi \in \operatorname{Hom}\mathbb{V}$. Да се намери базис на $\mathbb{V}$, в който φ има диагонална матрица, както и тази диагонална матрица, ако

а) φ има матрица

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

в базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$.

$$f_A(\lambda) = -\lambda^3 - 6\lambda^2 - 3\lambda + 10 = -(\lambda-1)(\lambda+2)(\lambda+5)$$

б) φ действа по правилото

$\varphi(\alpha_1\boldsymbol{e}_1+\alpha_2\boldsymbol{e}_2+\alpha_3\boldsymbol{e}_3+\alpha_4\boldsymbol{e}_4) = (\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_4)\boldsymbol{e}_1+(-\alpha_1-2\alpha_2-3\alpha_4)\boldsymbol{e}_2+2\alpha_3\boldsymbol{e}_3+(\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_4)\boldsymbol{e}_4$ за всяко $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in F$.

Решение.

$$\begin{array}{lllllcrcrcrcr}
\alpha_1 = 1 & \alpha_2 = 0 & \alpha_3 = 0 & \alpha_4 = 0: & \varphi(\boldsymbol{e}_1) & = & \boldsymbol{e}_1 & - & \boldsymbol{e}_2 & & & + & \boldsymbol{e}_4 \\
\alpha_1 = 0 & \alpha_2 = 1 & \alpha_3 = 0 & \alpha_4 = 0: & \varphi(\boldsymbol{e}_2) & = & 2\boldsymbol{e}_1 & - & 2\boldsymbol{e}_2 & & & + & 2\boldsymbol{e}_4 \\
\alpha_1 = 0 & \alpha_2 = 0 & \alpha_3 = 1 & \alpha_4 = 0: & \varphi(\boldsymbol{e}_3) & = & & & & & 2\boldsymbol{e}_3 & & \\
\alpha_1 = 0 & \alpha_2 = 0 & \alpha_3 = 0 & \alpha_4 = 1: & \varphi(\boldsymbol{e}_4) & = & 3\boldsymbol{e}_1 & - & 3\boldsymbol{e}_2 & & & + & 3\boldsymbol{e}_4
\end{array}$$

Следователно φ има матрица

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} \varphi(\boldsymbol{e}_1) & \varphi(\boldsymbol{e}_3) & \varphi(\boldsymbol{e}_3) & \varphi(\boldsymbol{e}_4) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\
A = & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}
\end{array}$$

в базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$.

$$f_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 & 3 \\ -1 & -2-\lambda & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ -1 & -2-\lambda & -3 \\ 1 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$(2-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & -\lambda & 0 \\ -1 & -2-\lambda & -3 \\ 1 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\lambda\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2+\lambda & 3 \\ 1 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\lambda\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1+\lambda & 3 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\lambda[(1+\lambda)(3-\lambda)-3] =$$

$(\lambda-2)\lambda(\lambda^2-2\lambda) = (\lambda-2)^2\lambda^2$. Следователно $\lambda_{1,2} = 0$, $\lambda_{3,4} = 2$.

$\boxed{\lambda = 0}$ Търсим ФСР на хомогенната система с матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Имаме $x_3 = 0$, полагаме $x_2 = p$, $x_4 = q$, тогава $x_1 = -2p - 3q$ и множеството от решенията е

$$\{(-2p-3q, p, 0, q) \mid p, q \in F\}.$$

$$\left.\begin{array}{ll} p = 1, q = 0: & \boldsymbol{v}_1 = (-2, 1, 0, 0) \\ p = 0, q = 1: & \boldsymbol{v}_2 = (-3, 0, 0, 1) \end{array}\right\} \text{ФСР.}$$

$\boxed{\lambda = 2}$ Търсим ФСР на хомогенната система с матрица

$$A - 2E = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & -6 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Полагаме $x_3 = p$, $x_4 = q$, тогава $x_2 = -q$, $x_1 = q$ и множеството от решенията е

$$\{(q, -q, p, q) \mid p, q \in F\}.$$

$$\left.\begin{array}{ll} p=1, q=0: & \boldsymbol{v}_3=(0,0,1,0) \\ p=0, q=1: & \boldsymbol{v}_4=(1,-1,0,1) \end{array}\right\} \text{ФСР}.$$

Следователно $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ е базис на V от собствени вектори на φ и матрицата на φ в този базис е

$$D=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$