Интерполиране със сплайни от първа степен

Задача 1. Да се докаже, че функциите $\left\{\frac{1}{x-a_i}\right\}_{i=0}^{n}$ образуват Чебишова система върху всеки интервал, несъдържащ $a_0,\ a_1, \dots, a_n$.

Доказателство: Всеки обобщен полином на тези функции има вида

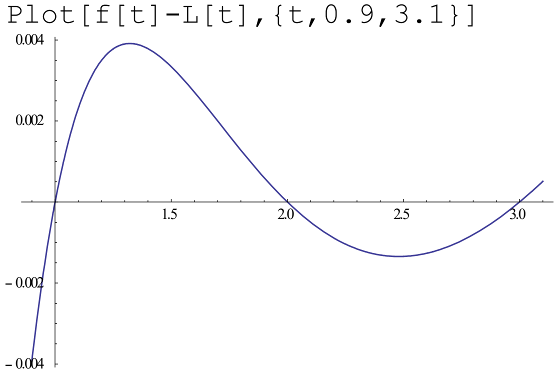
$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{x-a_k} = \frac{P_n(x)}{\omega(x)},\ P_n(x) \epsilon \pi_n.$$

Нулите на $\varphi(x)$ съвпадат с нулите на $P_n(x)$, а броят им не надвишава n. Следователно функциите $\left\{\frac{1}{x-a_i}\right\}_{i=0}^{n}$ образуват Чебишова система върху всеки интервал, несъдържащ $a_0,\ a_1, \dots, a_n$.

Задача 2. С помощта на *Wolfram Mathematica* да се построи обобщен полином по функциите $f_0(t) = \frac{1}{t+1}, f_1(t) = \frac{1}{t+2}, f_2(t) = \frac{1}{t+3},$ интерполиращ функцията $f(t) = e^{-t}$ във възлите $t_0 = 1, t_1 = 2, t_2 = 3$. Да се изобрази графиката на грешката в интервала $[1,3]$.

Решение:

```
f0[t_]:=1/(1+t);
f1[t_]:=1/(2+t);
f2[t_]:=1/(3+t);
f[t_]:=Exp[-t];
result=Solve[{a*f0[1]+b*f1[1]+c*f2[1]==f[1],
a*f0[2]+b*f1[2]+c*f2[2]==f[2],a*f0[3]+b*f1[3]+c*f2[3]==f[3]},{a,b,c}]
L[t_]:=Simplify[a*f0[t]+b*f1[t]+c*f2[t]/.result];
Plot[f[t]-L[t],{t,0.9,3.1}]
```



Сплайн функции от първа степен – начупена линия

Когато интерполираме със сплайни от първа степен ще използваме модулните функции вместо отсечените. Ще докажем, че те са линейно независими в интервала на интерполационните възли. Без ограничение на общността ще разглеждаме интервала [0,1].

Задача 3. Нека $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$. Докажете, че функциите $\{|x - x_i|\}_{i=0}^{n}$ са линейно независими в интервала [0,1].

Доказателство: Допускаме, че $f(x) = c_0|x - x_0| + c_1|x - x_1| + \cdots + c_n|x - x_n| \equiv 0$ в интервала [0,1].

Нека $x \in (x_k, x_{k+1}),\ k = 0 \div n - 1$. Тогава, разкривайки модулите имаме

$$f(x) = c_0(x - x_0) + c_1(x - x_1) + \ \ldots + c_k(x - x_k) - c_{k+1}(x - x_{k+1}) - \cdots - c_n(x - x_n)$$
$$= (c_0 + c_1 + \cdots + c_k - c_{k+1} - \cdots - c_n)x + A \equiv 0$$

$$=> (c_0 + c_1 + \cdots + c_k - c_{k+1} - \cdots - c_n) = 0, x \in (x_k, x_{k+1}).$$

Получаваме аналогично равенство, ако $x \in (x_{k-1}, x_k)$. Като извадим две такива последователни уравнения получаваме $2c_k = 0 => c_k = 0, k = 1 \div n - 1.$ Тогава

$$f(x) = c_0(x - 0) + c_n(1 - x) = (c_0 - c_n)x + c_n \equiv 0 => c_0 = c_n = 0.$$

Следователно функциите $\{|x - x_i|\}_{i=0}^{n}$ са линейно независими в интервала [0,1]. Техният брой е равен на размерността на множеството от сплайни от първа степен $S_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ и следователно те образуват базис.

Задача 4. Нека $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1, I_1(f; x) \in S_1(x_1, x_{2,} \ldots, x_{n-1})$ е сплайн функция от първа степен, такъв че $I_1(f; x_i) = f(x_i), i = 0 \div n$. Да се намерят коефициентите c_k в представянето

$$I_1(f; x) = \sum_{k=0}^{n} c_k|x - x_k|.$$

Решение: От интерполационните условия имаме

$$I_1(f; x_i) = \sum_{k=0}^{n} c_k|x_i - x_k| = f(x_i), i = 0 \div n.$$

$$=> \sum_{k=0}^{i-1} c_k(x_i - x_k) + \sum_{k=i+1}^{n} c_k(x_k - x_i) = \sum_{k=0}^{i-1} c_k(x_i - x_k) - \sum_{k=i+1}^{n} c_k(x_i - x_k) = f(x_i).$$

Аналогично

$I_1(f; x_{i+1}) = \sum_{k=0}^{i} c_k(x_{i+1} - x_k) - \sum_{k=i+2}^{n} c_k(x_{i+1} - x_k) = f(x_{i+1}).$

От второто равенство изваждаме първото и получаваме

$$\sum_{k=0}^{i} c_k(x_{i+1} - x_i) - \sum_{k=i+1}^{n} c_k(x_{i+1} - x_i) = f(x_{i+1}) - f(x_i),$$

Делим двете страни на уравнението на $(x_{i+1} - x_i) \neq 0$

$$\sum_{k=0}^{i} c_k - \sum_{k=i+1}^{n} c_k = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = f[x_i, x_{i+1}], i = 0,1, \dots, n-1 \qquad (1)$$

$$=> \sum_{k=0}^{i-1} c_k - \sum_{k=i}^{n} c_k = f[x_{i-1}, x_i], i = 1, \dots, n \qquad (2).$$

Изваждаме почлено левите и десните страни на тези равенства и получаваме:

$$2c_i = f[x_i, x_{i+1}] - f[x_{i-1}, x_i]$$

$$=> c_i = \frac{f[x_i, x_{i+1}] - f[x_{i-1}, x_i]}{2}, i = 1 \div n-1 \qquad (3)$$

Остава да намерим c_0 и c_n. Използваме интерполация в краищата на интервала.

$$I_1(f; x_0) = \sum_{k=0}^{n} c_k(x_k - x_0) = f(x_0),$$

$$I_1(f; x_n) = \sum_{k=0}^{n} c_k(x_n - x_k) = f(x_n).$$

Събираме двете уравнения и получаваме:

$$\sum_{k=0}^{n} c_k = \frac{f(x_0) + f(x_n)}{x_n - x_0} \qquad (4).$$

Прилагаме равенството (1) за $i = 0$ и събираме с уравнението (4). Така намираме c_0

$$c_0 = \frac{1}{2}\left(f[x_0, x_1] + \frac{f(x_0) + f(x_n)}{x_n - x_0}\right) \qquad (5).$$

За да намерим c_n използваме уравнението (2) за $i = n$ и го изваждаме от уравнението (4). Получаваме

$$c_n = \frac{1}{2}\left(\frac{f(x_0) + f(x_n)}{x_n - x_0} - f[x_{n-1}, x_n]\right) \qquad (6).$$

Задача 5. Да се построи сплайн функция от първа степен $I_1(f; x) \in S_1(x_1, x_{2,} \dots, x_{n-1})$ за функцията $f(x) = \sqrt{x}$ с възли:

а) $x_k = \frac{k}{n}, k = 0,1, \dots, n$ при $n = 5$;

б) $x_k = \left(\frac{k}{n}\right)^4, k = 0,1, \dots, n$ при $n = 5$.

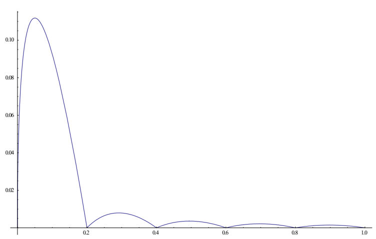
Да се визуализира графика на грешката, както и графика на функцията и сплайна едновременно. Сравнете грешките в двата случая.

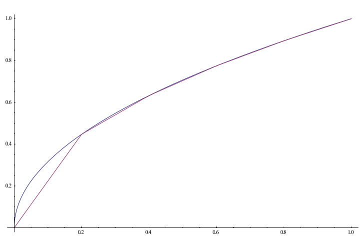
Решение:

а) От формули (3), (5) и (6) за коефициентите в представянето на сплайна $I_1(f;x)$ като линейна комбинация на модулните функции.

В конкретната задача $x_n - x_0 = 1$. В програмата ще запазим същите означения.

```
n=5;
Do[x[k]=k/n,{k,0,n}];
f[t_]:=Sqrt[t];
c[0]=(f[x[0]]+f[x[n]]+(f[x[1]]-f[x[0]])/(x[1]-x[0]))/2;
c[n]=(f[x[0]]+f[x[n]]-(f[x[n]]-f[x[n-1]])/(x[n]-x[n-1]))/2;
Do[c[i]=((f[x[i+1]]-f[x[i]])/(x[i+1]-x[i])-
(f[x[i]]-f[x[i-1]])/(x[i]-x[i-1]))/2,{i,1,n-1}];
I1[t_]:=Sum[c[k]*Abs[t-x[k]],{k,0,n}];
Plot[f[t]-I1[t],{t,0,1},PlotRange→All]
Plot[{f[t],I1[t]},{t,0,1}]
```





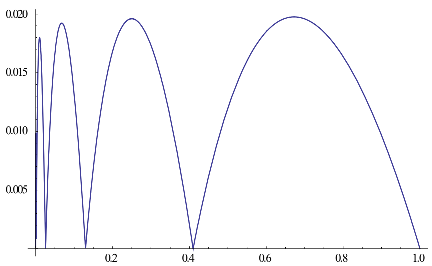
Първата графика е на грешката, а втората е сравнителна графика на функцията и сплайна.

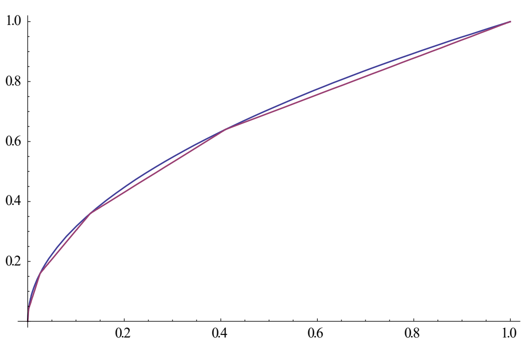
Наблюдения: От първата графика на грешката забелязваме, че грешката е най-голяма в левия край на интервала. Това се дължи на факта, че функцията $f(x)$ бързо нараства, както е видно от втората графика на сплайна и функцията едновременно. В син цвят е графика на функцията $f(x) = \sqrt{x}$, а в червен цвят е графиката на сплайна $I_1(f;x)$.

Моля студентите да стартират програмата с други стойности на n, например 10 и 50. Направете съответните изводи.

б) За подточка б) е необходимо да се промени формулата за изчисляване на интерполационните възли. Ето програмата:

```
n=5;
Do[x[k]=(k/n)^4,{k,0,n}];
f[t_]:=Sqrt[t];
c[0]=(f[x[0]]+f[x[n]]+(f[x[1]]-f[x[0]])/(x[1]-x[0]))/2;
c[n]=(f[x[0]]+f[x[n]]-(f[x[n]]-f[x[n-1]])/(x[n]-x[n-1]))/2;
Do[c[i]=((f[x[i+1]]-f[x[i]])/(x[i+1]-x[i])-
(f[x[i]]-f[x[i-1]])/(x[i]-x[i-1]))/2,{i,1,n-1}];
I1[t_]:=Sum[c[k]*Abs[t-x[k]],{k,0,n}];
Plot[f[t]-I1[t],{t,0,1},PlotRange→All]
Plot[{f[t],I1[t]},{t,0,1}]
```





Наблюдения и изводи: Забелязваме, че грешката значително намалява при втория случай. Това е така, защото интерполационните възли са сгъстени в левия край на интервала, където функцията стръмно нараства.

Моля студентите да стартират втория вариант на програмата с други стойности на n, например 10 и 50. Направете съответните изводи. Сравнете двата случая за различните стойности на n.