Хомоморфизми, нормални подгрупи и факторгрупи

Сайт:	learn.fmi.uni-sofia.bg	Разпечатано от:	Мартин Попов
Курс:	Алгебра 2, поток 1, летен семестър 2021/2022	Дата:	Thursday, 24 March 2022, 21:23
Книга:	Хомоморфизми, нормални подгрупи и факторгрупи		

Съдържание

1. Хомоморфизъм

Определение:

Нека са зададени две групи $(G, \circ)$ и $(L, *)$. Изображението $\varphi : G \to L$ се нарича хомоморфизъм, когато за произволни елементи $g, h \in G$ е изпълнено свойството:

$$\varphi(g \circ h) = \varphi(g) * \varphi(h).$$

Определение:
Казваме, че две групи са *изоморфни* (записваме $G \cong L$), когато съществува изображение $\varphi : G \to L$, което е *изоморфизъм*, т.е.:
- φ е хомоморфизъм
- φ е биекция.

Пример 1 ("тривиални" хомоморфизми) :
- Ако е дадена група $(G, \circ)$ и $(L, *)$ е произволна групата, винаги може да се състави "тривиалния" хомоморфизъм $\varepsilon(x) = e_L, \forall x \in G.$, който действа по следния начин на всеки елемент от G съпоставяме единичния елемент на групата L.
- Идентитета $\mathrm{id} : G \to G$ за произволна група $(G, \circ)$ също е "тривиален" хомоморфизъм.

1.1. Примери -1

Следващите няколко примера на хомоморфизми са от изображения, които сме разглеждали по Алгебра 1

Пример 2:

Да разгледаме множеството от всички обратими матрици от ред n с реални елементи $(GL_n(\mathbb{R}), .)$, което е група относно операцията умножение. От линейната алгебра е известно равенството

$$\det(A.B) = \det(A).\det(B),$$

затова ще разгледаме изображението, което на всяка матрица съпоставя числото, което е нейна детерминанта. По този начин получаваме, че $\det : GL_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$ е хомоморфизъм на групи, където с $\mathbb{R}^*$ сме отбелязали мултипликативната група на реалните числа.

Пример 3:

Да разгледаме произволно линейно изображение $\psi : V_1 \to V_2$, където пространствата са над едно и също поле F. Линейните пространства са групи, относно операцията събиране на вектори, а от дефиницията за линейно изображение имаме $\psi(a+b) = \psi(a) + \psi(b),\ \forall\, a, b \in V_1$, откъдето се получава, че всяко линейно изображение е хомоморфизъм на адитивните групи, съставени от векторите на линейните пространства.

Пример 4:

Известно ни е, че всяко ненулево комплексно число може да се запише в тригонометричен вид $z = r(\cos\alpha + i.\sin\alpha)$ и знаем по какъв начин се пресмята произведението на числа, записани в тригонометричен вид.

Нека на произволно реално число a да съпоставим, комплексното число с модул 1, което има за аргумент число a, т.е. да разгледаме изображението

$$\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*,\ \ \rho(a) = \cos(a) + i\sin(a),\ \forall\, a \in \mathbb{R}.$$

От формулата за умножение на числа, записани в тригонометричен вид, получаваме равенството

$$\begin{aligned} \rho(a+b) \quad &= \cos(a+b) + i.\sin(a+b) = \\ &= (\cos a + i.\sin a).(\cos b + i.\sin b) = \\ &= \rho(a).\rho(b) \end{aligned}$$

От това равенство получаваме, че ρ е хомоморфизъм за който групата на реалните числа $\mathbb{R}$ е записана адитивно, а $(\mathbb{C}^*, .)$ е мултипликативна група.

1.2. Свойства

Нека $\varphi : G \to L$ е хомоморфизъм на групи, тогава се установяват следните свойства на хомоморфизмите:

Свойство 1:

Ако $e_G \in G, e_L \in L$ са неутралните елементи (единичен или нулев в зависимост от записа в групата), тогава е изпълнено

$$\varphi(e_G) = e_L.$$

Доказателство:

Нека $\varphi(e_G) = u \in L$, тогава е изпълнено

$$u = \varphi(e_G) = \varphi(e_G \circ e_G) = u * u.$$

Получихме, че е изпълнено $u = u * u$, откъдето непосредствено намираме

$$u = u * u \Rightarrow u * u^{-1} = u * u * u^{-1},$$

откъдето установяваме $e_L = u$.

$\square$

Свойство 2:

Ако $g \in G$, тогава е изпълнено $\varphi(g^{-1}) = (\varphi(g))^{-1}$ (ако двете групи са записани мултипликативно).

Доказателство:

Използваме

$$\varphi(g).\, \varphi(g^{-1}) = \varphi(g.\, g^{-1}) = \varphi(e_G) = e_L \in L,$$

откъдето получаваме, че $(\varphi(g))^{-1} = \varphi(g^{-1})$.

$\square$

По своята същност това свойство е в сила и когато някоя от двете групи е записана адитивно, тогава в записа трябва да участват симетричните елементи (относно операцията в групата) на g и $\varphi(g)$ в съответните групи. Например, ако първата група е адитивно записана $(G, +)$, а втората е в мултипликативен запис $(L, .)$, тогава това свойство ще изглежда по следния начин $\varphi(-g) = (\varphi(g))^{-1}$.

1.3. Ядро и образ

Нека $\varphi : G \to L$ е хомоморфизъм на групи, които са записани мултипликативно.

Определение:

Множеството от всички елементи на групата G,които отиват в неутралния елемент (единичен или нулев в зависимост от записа) на групата L се нарича **ядро** на хомоморфизма и се отбелязва с $\mathtt{Ker}(\varphi)$.

$$\mathtt{Ker}(\varphi) = \{a \in G \mid \varphi(a) = e_L\} \subset G.$$

Определение:

Образ на хомоморфизма е множеството от образите на всички елементи от G под действието на изображението φ

$$\mathtt{Im}(\varphi) = \{\varphi(x) | \ x \in G\} \subset L$$

Твърдение:

Ако $\varphi : G \to L$ е хомоморфизъм на групи, тогава

- $\mathtt{Ker}(\varphi) < G$ (ядрото е подгрупа на G),
- $\mathtt{Im}(\varphi) < L$ (образът е подгрупа на L).

Доказателство:

Ако $a, b \in \mathtt{Ker}(\varphi)$, получаваме

$$\left.\begin{array}{rl} \varphi(a.\,b) = \varphi(a).\,\varphi(b) = e_L & \Rightarrow a.\,b \in \mathtt{Ker}(\varphi) \\ \varphi(a^{-1}) = e_L^{-1} = e_L & \Rightarrow a^{-1} \in \mathtt{Ker}(\varphi) \end{array}\right\} \Rightarrow \mathtt{Ker}(\varphi) < G.$$

Аналогично, ако $u, v \in \mathtt{Im}(\varphi)$, следователно съществуват елементи $x, y \in G$ от такива, че $u = \varphi(x),\ v = \varphi(y)$. Тогава

$$\left.\begin{array}{rl} \varphi(x.\,y) = \varphi(x).\,\varphi(y) = u.\,v & \Rightarrow u.\,v \in \mathtt{Im}(\varphi) \\ \varphi(x^{-1}) = (\varphi(x))^{-1} = u^{-1} & \Rightarrow u^{-1} \in \mathtt{Im}(\varphi) \end{array}\right\} \Rightarrow \mathtt{Im}(\varphi) < L.$$

$\square$

1.4. Примери -2

Пример 5

При изображението детерминанта $\det : GL_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$ ядрото се състои от всички матрици с детерминанта 1, а образът е множеството $\mathbb{R}^*$ на всички ненулеви реални числа.

Пример 6:

При разгледаното изображение за аргумента на комплексно число

$$\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*, \quad \rho(a) = \cos(a) + i\sin(a), \ \forall\, a \in \mathbb{R},$$

на произволно реално число a сме съпоставили комплексното число с модул 1, което има за аргумент число a и по този начин получаваме, че :

- $\mathtt{Im}(\rho) = \{z \in \mathbb{C}^* \mid |z| = 1\}$.
- Всички числа кратни на 2π "отиват" в 1, следователно ядрото е $\mathtt{Ker}(\rho) = \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Пример 7: (линейна система)

Да разгледаме линейното изображение $\lambda : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, което действа по следния начин на вектора $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ съпоставяме

$$\lambda(x) = (\lambda_1(x), \lambda_2(x), \lambda_3(x), \lambda_4(x)), \quad \text{където} \ \left| \begin{array}{l} \lambda_1(x) = 3x_1 - 2x_2 - x_3, \\ \lambda_2(x) = -x_1 + x_2 + x_3, \\ \lambda_3(x) = -4x_1 + 3x_2 + 2x_3, \\ \lambda_4(x) = 2x_1 - 3x_2 - 4x_3, \end{array} \right.$$

Тогава ядрото на този хомоморфизъм (което е точно ядрото на това линейно изображение) е решението на хомогенната система

$$\mathtt{Ker}(\lambda) : \left| \begin{array}{ll} 3x_1 - 2x_2 - x_3 & = 0, \\ -x_1 + x_2 + x_3 & = 0, \\ -4x_1 + 3x_2 + 2x_3 & = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 & = 0, \end{array} \right. , \quad \mathtt{Ker}(\lambda) = \{(\alpha, 2\alpha, -\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Образът, се състои от тези вектори $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_4 \end{pmatrix}$, за които нехомогенната линейна система има решение и от линейната алгебра е известно, че

$$\left| \begin{array}{ll} 3x_1 - 2x_2 - x_3 & = b_1, \\ -x_1 + x_2 + x_3 & = b_2, \\ -4x_1 + 3x_2 + 2x_3 & = b_3, \\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 & = b_4, \end{array} \right. \text{има решение} \Leftrightarrow \quad b \in \mathtt{Im}(\lambda) = \ell(c_1, c_2, c_3),$$

където $c_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $c_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$, $c_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ са стълбовете на матрицата на системата.

1.5. Свойство на ядрото

Твърдение:

Нека $\varphi : G \to L$ е хомоморфизъм на групи, които са записани мултипликативно и нека $H = \mathtt{Ker}(\varphi)$ Тогава е изпълнено:

- $t \in gH \;\Leftrightarrow\; \varphi(t) = \varphi(g)$;
- $t \in Hg \;\Leftrightarrow\; \varphi(t) = \varphi(g)$;
- $Hg = gH,\ \forall g \in G$.

Доказателство:

- Ако е изпълнено, че $t \in gH$, от изразяването $t = g.\,h_1,\ h_1 \in \mathtt{Ker}(\varphi)$ получаваме, че $\varphi(t) = \varphi(gh_1) = \varphi(g).\,e_L = \varphi(g)$;
- Аналогично $t \in Hg \Rightarrow t = h_2.\,g,\ h_2 \in \mathtt{Ker}(\varphi)$ и получаваме, че $\varphi(t) = \varphi(h_2.\,g) = e_L.\,\varphi(g) = \varphi(g)$;
- Обратно, нека да е в сила $\varphi(t) = \varphi(g),$ тогава:
    - от изразяването $e_L = (\varphi(g))^{-1}.\,\varphi(t) = \varphi(g^{-1}).\,\varphi(t) = \varphi(g^{-1}.\,t),$ следва $g^{-1}.\,t \in \mathtt{Ker}(\varphi) \Rightarrow t \in gH$
    - от изразяването $e_L = \varphi(t).\,(\varphi(g))^{-1} = \varphi(t.\,g^{-1})$ следва $t.\,g^{-1} \in \mathtt{Ker}(\varphi)$ и $t \in Hg$
- Нека $g \in G$ е произволен елемент. Видяхме, че

$$t \in gH \;\Leftrightarrow\; \varphi(t) = \varphi(g) \;\Leftrightarrow\; t \in Hg.$$

  От тук следва $Hg = gH,\ \forall g \in G$

□

Оказва се, че свойството всички леви съседни класове на една подгрупа да съвпадат със съседните десни съседни класове е много важно и поради това има специален термин за такива подгрупи.

2. Нормална подгрупа

Определение:

Подгрупата H на групата G се нарича нормална подгрупа, когато за произволен елемент $g \in G$ е изпълнено $gH = Hg$ и се записва по следния начин $H \lhd G$.

Пример: (тривиални нормални подгрупи)

За всяка група има две тривиални нормални подгрупи и това са:

- подгрупата, която се състои само от единичния елемент $E = \{e\} \lhd G$, е нормална подгрупа, защото е изпълнено $gE = \{g\} = Eg$,
- цялата група G може да се разглежда и като подгрупа и тогава $gG = G = Gg$ и $G \lhd G$

Пример:

Ако групата G е Абелева, тогава за всяка подгрупа H е изпълнено $gH = Hg$ и всяка подгрупа е нормална подгрупа.

Пример:

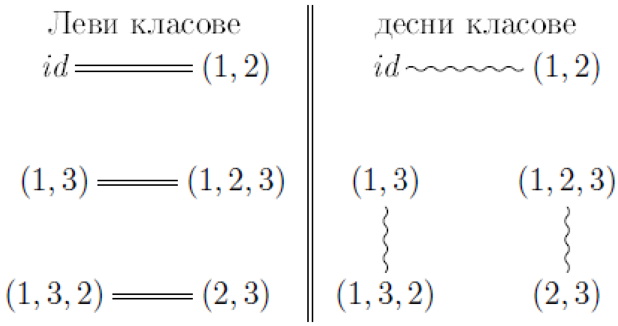
От предишното твърдение видяхме, че ако съществува хомоморфизъм на групи $\varphi : G \to L$, тогава $\mathtt{Ker}(\varphi) \lhd G$ (ядро е нормална подгрупа на G).

2.1. Примери (не нормални подгрупи)

Пример:

В раздела за съседен клас разгледахме следните примери, за подгрупи, които **не са нормални подгрупи**:

- В симетричната група S_3 подгрупата $H = \{id, (1,2)\}$ не е нормална подгрупа, защото установихме, че $(1,3)H \neq H(1,3)$.



- В пълната линейна група $GL_2(\mathbb{R})$ разгледахме подгрупата $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \; a \in \mathbb{R} \right\}$ и левия и десния съседен клас определени от елемента $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$. Получихме, че $B.\,H \neq H.\,B$ и $B.\,H \cap H.\,B = \{B\}$. Ясно е, че подгрупата H **не е нормална подгрупа** на $GL_2(\mathbb{R})$.

2.2. Еквивалентни твърдения за нормални подгрупи

Определение:
Елементите h, t се наричат спрегнати елементи в групата G, ако съществува елемент $g \in G$, така че да е изпълнено равенството $t = ghg^{-1}$.

Задача за упражнение: Да се докаже, че спрягането е релация на еквивалентност в G.

Твърдение:
Нека G е група и H е подгрупа, тогава следните твърдения са еквивалентни:

(1) $H \lhd G$ (H е нормална подгрупа);

(2) $ghg^{-1} \in H, \ \forall g \in G, \ \ \forall h \in H;$

(3) $gHg^{-1} = \{ghg^{-1} \ | h \in H\} = H, \forall g \in G.$

Доказателство:

$(1) \Rightarrow (2)$ Нека $g \in G$. Ако е изпълнено $gH = Hg$, тогава за произволен елемент $h \in H$ имаме $gh \in gH = Hg$ следователно съществува $h_1 \in H$ такъв че $gh = h_1 g$ от където непосредствено се получава $ghg^{-1} = h_1 \in H$.

$(2) \Rightarrow (3)$ Нека е изпълнено $ghg^{-1} \in H$ за произволни $g \in G, \ h \in H$, което означава, че е изпълнено включването $gHg^{-1} \subset H$.

За да докажем и обратното включване да вземем произволен елемент $h_2 \in H$, той може да се изрази $h_2 = g(g^{-1}h_2 g)g^{-1} = gh_3 g^{-1}$. Непосредствено се вижда, че елементът h_3 е спрегнат на елемента h_2 и затова е от подгрупата

$$\begin{array}{ll} h_3 = g^{-1}h_2 g = (g^{-1})h_2(g^{-1})^{-1} \Rightarrow & h_3 \in H \\ & \Downarrow \\ & h_2 = gh_3 g^{-1} \in gHg^{-1} \quad \Rightarrow H \subset gHg^{-1} \end{array}$$

От където непосредствено получаваме, че$H = gHg^{-1}$.

$(3) \Rightarrow (1)$ Нека е изпълнено $gHg^{-1} = H, \forall g \in G.$ и да разгледаме един произволен ляв съседен клас gH и да видим произволен елемент от него $gh_4 \in gH$. Изпълнено е, че $gh_4 g^{-1} = h_5 \in H$, откъдето получаваме $gh_4 = h_5 g \in Hg$ и следователно принадлежи на десния съседен клас, откъдето следва $gH \subset Hg$.

За да се установи обратното включване се взема произволен елемент от десния съседен клас $h_6 g \in Hg$, тогава $g^{-1}h_6 g \in g^{-1}Hg = H$, следователно съществува елемент $h_7 \in H$, за който е изпълнено $g^{-1}h_6 g = h_7 \Rightarrow h_6 g = gh_7 \in gH$, откъдето се получава $gH \subset Hg$. Следователно е изпълнено $gH = Hg.$

$\square$

При решаването на конкретни задачи, най-лесно се доказва, че една подгрупа е нормална подгрупа при използване на проверката $ghg^{-1} \in H, \ \forall g \in G, \ \ \forall h \in H.$

2.3. Подгрупи с индекс 2

Твърдение:

Всяка подгрупа с индекс 2 е нормална подгрупа.

Доказателство:

Нека G е група, която има подгрупа H и $|G:H|=2$ (индекса е 2).

Ако вземем произволен елемент $a \notin H$, за него е изпълнено $aH \cap H = \emptyset$.

Индексът е 2 и групата се разбива на обединение на *два* непресичащи се леви класове, тогава $G = H \cup aH$. Аналогично и за десен съседен клас, от $a \notin H$ следва $Ha \cap H = \emptyset$.

Поучава се $G = H \cup Ha$ и следователно левият и десен съседен клас съвпадат $aH = Ha = G \setminus H$. Следователно подгрупата е нормална подгрупа $H \lhd G$.

□

От това твърдение се получава, че алтернативната подгрупа е нормална подгрупа на симетричната група $A_n \lhd S_n$.

2.4. Примери

Пример:

Да разгледаме групата G от обратими матрици, разглеждана с операцията умножение на матрици и подмножеството H, където

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0 \right\}, \quad H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| b \in \mathbb{R} \right\}$$

Показахме, че H не е нормална подгрупа на $GL_2(\mathbb{R})$. Да установим, че H е нормална подгрупа на групата G.

- Първо установяваме, че H е подгрупа на G, защото за произволни матрици $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & b_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ от H е изпълнено:

$$\left. \begin{array}{r} B_1 . B_2 = \begin{pmatrix} 1 & b_1 + b_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad B_1 . B_2 \in H \\ B_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad B_1^{-1} \in H \end{array} \right\} \Rightarrow H < G.$$

- После проверяваме че за произволна $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$ и произволна $C = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$ е изпълнено:

$$C . B_1 . C^{-1} = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & \frac{-c}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & ab_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H.$$

По този начин се получи, че H е нормална подгрупа на G.

Пример:

Нека да разгледаме цикличната подгрупа $H =< \sigma >$ на S_4, породена от елемента $\sigma = (1, 2, 3, 4)$. Спрегнатите на цикъла $\sigma = (1, 2, 3, 4)$ са всички цикли с дължина 4 от S_4, които са 6 броя, а в подгрупата H единствените цикли с дължина 4 са $\sigma = (1, 2, 3, 4)$ и $\sigma^{-1} = (4, 3, 2, 1)$. По този начин установяваме, че за H не е изпълнено условието от твърдението и H **не е нормална подгрупа** на S_4.

3. Факторгрупа

По определението имаме, че когато подгрупата $H \lhd G$ е нормална подгрупа, тогава множеството на левите съседни класове съвпада с множество на десните съседни класове. В този случай множеството от всички съседни класове бележим по следния начин:

$$G \diagup H = \{gH \mid g \in G.\}$$

Ще въведем операция в множеството от всички съседни класове по следния начин

$$(gH).(tH) = (g.t)H.$$

Понеже всеки съседен клас е подмножество на групата и той може да се изрази по различни начини в зависимост от това, кой елемент от съседния клас сме взели да го представлява, затова първо трябва да си отговорим на въпроса:

"Коректна ли е написаната дефиниция за операция при съседни класове?"

Нека да вземем двата съседни класа $gH,\ tH$ да се представляват от други елементи

$$\begin{array}{ll} g_1H = gH, & \text{където } g_1 = gh_1 \in gH \\ t_1H = tH, & \text{където } t_1 = th_2 \in tH \end{array}.$$

Пресмятаме g_1t_1 като използваме, че H е нормална подгрупа и прилагаме твърдението, че спрегнати на елементи от H също принадлежат на H:

$$\begin{aligned} g_1.t_1 = \quad & (gh_1)(th_2) = g(h_1t)h_2 = \\ = \quad & g(t.t^{-1})(h_1t)h_2 = (gt)(t^{-1}h_1t)h_2 = \\ = \quad & gt(h_3)h_2 = gt.h_4 \in (gt)H \\ & \text{където } h_3 = t^{-1}h_1t\ \in H;\ \ h_4 = h_3.h_2 \in H. \end{aligned}$$

Получихме $g_1.t_1 \in (gt)H$, следователно $(g_1t_1)H = (gt)H$ и окончателно се получи, че при H е нормална подгрупа, така дефинираното произведение не зависи от елемента, който сме взели да представлява съседния клас.

Определение:

Ако H е нормална подгрупа, определя се бинарна операция в множеството от съседни $G \diagup H$ по следния начин:

$$(gH).(tH) = (g.t)H.$$

Забележка: Когато групата е записана адитивно $(L,+)$, тогава и операцията между съседните класове се записва с "+" и при $T \lhd L$ записваме: $(a+T)+(b+T) = (a+b)+T$

3.1. Факторгрупата е група

Твърдение:
Когато подгрупата $H \lhd G$ е нормална подгрупа на G, тогава множеството от съседните класове

$$G/H = \{gH \mid g \in G\}$$

е група, относно въведената операция $(gH).(tH) = (g.t)H$.

Доказателство:
Показахме, че въведената операция между съседни класове е коректно определена и е бинарна за G/H. Проверяваме дали G/H е група:

- *Асоциативност:* Следва непосредствено от асоциативността на групата G:

$$\begin{aligned}(gH.tH).pH = & \ (gtH).pH = ((gt)p)H = \\ = & \ (g(tp))H = gH.(tpH) = \\ = & \ gH.(tH.pH).\end{aligned}$$

- *Единичен елемент:* Подгрупата H, разглеждана като съседен клас $eH = H$ играе ролята на единичен елемент в G/H, защото: $H.gH = eH.gH = (eg)H = gH$.

- *Всеки елемент има обратен:* Ако gH произволен елемент от G/H, тогава

$$gH.g^{-1}H = (g.g^{-1}).H = eH = H,$$

следователно $(gH)^{-1} = g^{-1}H$.

$\square$

Определение:
Когато $H \lhd G$ е нормална подгрупа, групата $G/H = \{gH \mid g \in G\}$, с разглежданата операция $(gH).(tH) = (g.t)H$ се нарича факторгрупа на групата G факторизирана по H.

Свойство: Ако $H \lhd G$ е нормална подгрупа на G и индексът $|G:H|$ е крайно число, тогава $|G/H| = |G:H| = \dfrac{|G|}{|H|}$.

3.2. Примери

Пример
Нека да разгледаме симетричната група S_n, която се разбива на две подмножества

- четни елементи $A_n = \{\varphi \in S_n | \ \varphi \text{ четен}\}$;
- нечетни елементи $B_n = \{\varphi \in S_n | \ \varphi \text{ нечетен}\}$;

Знаем, че A_n е нормална подгрупа на S_n с индекс 2 и B_n е съседен клас на A_n . Тогава факторгрупата е $S_n \diagup A_n = \{A_n, B_n\}$ и прилагайки известните правила за четност на композицията на две транспозиции получаваме таблицата за умножение във факторгрупата

$.$	A_n	B_n
A_n	A_n	B_n
B_n	B_n	A_n

Пример:
Да разгледаме групата $\mathbb{Z}_n = \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{n-1}\}$ от класовете остатъци по модул n. Непосредствено се вижда, че класовете остатъци по модул n са съседни класове на подгрупата $n\mathbb{Z}$:

$$\overline{k} = \{k + nz \mid z \in \mathbb{Z}\} = k + n\mathbb{Z}.$$

Определихме операцията в $\mathbb{Z}_n$ по следния начин:

$$\overline{a} + \overline{b} = \overline{a+b}$$

и ако класовете остатъци $\overline{a}, \overline{b}$ се запишат като съседни класове получаваме

$$(a + n\mathbb{Z}) + (b + n\mathbb{Z}) = (a + b) + n\mathbb{Z}.$$

Следователно методът, по който сме получили групата от класовете остатъци по модул n, е точно начина за факторизиране на адитивната група $\mathbb{Z}$ по подгрупата $n\mathbb{Z}$, затова може да напишем

$$\mathbb{Z} \diagup n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_n.$$

Задача за упражнение: Да се докаже, че факторгрупа на циклична група е циклична група.

4. Теорема за хомоморфизмите

Една от основните зависимости при групите е теоремата за хомоморфизмите, която свързва понятията ядро, образ и факторгрупа при поризволен хомоморфизъм.

В последствие тази зависимост ще бъде продължена и до аналогична теорема за хомоморфизмите при пръстени. В Линейната алгебра аналог на тази теорема е теоремата за ранга и дефекта на линейно изображение.

4.1. Естествен хомоморфизъм

Лема:
Нека $H \lhd G$ е нормална подгрупа, тогава изображението $\eta : G \to G \diagup H$, където $\eta(g) = gH$ е хомоморфизъм, който има ядро $\mathtt{Ker}(\eta) = H$ и се нарича *естествен хомоморфизъм*.

Доказателство:
Нека $g, t \in G$ са произволни елементи от групата. Изпълнено е:

$$\eta(gt) = (gt)H = gH \,.\, tH = \eta(g) \,.\, \eta(t),$$

откъдето получаваме, че η е хомоморфизъм. Определяме ядрото на хомоморфизма $\mathtt{Ker}(\eta) = \{g \in G |\ \eta(g) = gH = eH = H\}$ и като приложим свойството, че $gH = H \Leftrightarrow g \in H,$ получаваме, че $\mathtt{Ker}(\eta) = H.$

□

Следствие:
Нека G е група и $H < G$ е подгрупа. Тогава е изпълнено:

$$H \lhd G \iff \exists\, \varphi : G \to L(\text{хомоморфизъм}) \text{ и } H = \mathtt{Ker}(\varphi).$$

Доказателство:
$\Leftarrow$) Това е основните свойства на ядрото и е доказано в точка 1.5.
$\Rightarrow$) В лемата доказахме, че, когато $H \lhd G$ е нормална подгрупа, тогава H е ядро на естествения хомоморфизъм.

□

4.2. Теоремата

Теорема *(Теорема за хомоморфизмите при групи)*

Нека $\varphi : G \to L$ е хомоморфизъм за групи. Тогава е изпълнено:

- $\mathtt{Ker}(\varphi) \lhd G$;
- $\mathtt{Im}(\varphi) \cong G \diagup \mathtt{Ker}(\varphi)$.

Доказателство:

- В точка 1.5 доказахме основното свойство на ядрото на хомоморфизъм $g.\,(\mathtt{Ker}(\varphi)) = (\mathtt{Ker}(\varphi)).\,g$, откъдето следва че $\mathtt{Ker}(\varphi) \lhd G$.
- В същото твърдение показахме, че

$$t \in gH \;\Leftrightarrow\; \varphi(t) = \varphi(g).$$

Това ни дава основание *коректно* да дефинираме изображение

$$\widetilde{\varphi} : G \diagup \mathtt{Ker}(\varphi) \to \mathtt{Im}(\varphi) \subset L, \text{ където } \widetilde{\varphi}(gH) = \varphi(g).$$

Ще покажем, че това изображение е търсения изоморфизъм:

- $\widetilde{\varphi}$ *е хомоморфизъм*, защото

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi}(g_1H.\,g_2H) = & \quad \widetilde{\varphi}((g_1 \,.\, g_2)H) = \\ = & \quad \varphi(g_1 \,.\, g_2) = \varphi(g_1).\,\varphi(g_2) = \\ = & \quad \widetilde{\varphi}(g_1H).\,\widetilde{\varphi}(g_2H). \end{aligned}$$

- $\widetilde{\varphi}$ *е инекция*, защото ако $g_1H \neq g_2H$, тогава $\varphi(g_1) \neq \varphi(g_2)$, откъдето се получава, че $\widetilde{\varphi}(g_1H) \neq \widetilde{\varphi}(g_2H)$.
- $\widetilde{\varphi}$ е сюрекция, защото за произволен елемент $t = \varphi(u) \in \mathtt{Im}(\varphi)$ е изпълнено $t = \widetilde{\varphi}(uH) \in \mathtt{Im}\tilde{(}\varphi)$.

По този начин, се получава че $\widetilde{\varphi}$ е търсеното изображение. Схематично смисъла на доказаното може да се изобрази на следната диаграма

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, dotted, "\eta"'] & \mathtt{Im}(\varphi) \subset L \\ G \diagup \mathtt{Ker}(\varphi) \arrow[ur, squiggly, "\widetilde{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

Казваме, че диаграмата е комутативна в смисъл, че по който и от двата пътя да се мине от върха G до върха $\mathtt{Im}(\varphi) \subset L$ се получава едно и също, т.е. $\varphi = \widetilde{\varphi} \circ \eta$.

4.3. Примери

Пример:

Да разгледаме изображението детерминанта $\det : GL_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$, за което установихме че е хомоморфизъм и има ядро

$$\mathtt{Ker}(\det) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\} = SL_n(\mathbb{R}),$$

което се състои от всички матрици с детерминанта 1 (тази група се нарича специална линейна група от степен n). Образът е множеството $\mathbb{R}^*$ на всички ненулеви реални числа и като приложим теоремата за хомоморфизмите получаваме $GL_n(\mathbb{R}) \diagup SL_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^*$.

Пример:

Да приложим теоремата за хомоморфизмите към изображението $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*, \ \ \rho(a) = \cos(a) + i\sin(a), \ \forall\, a \in \mathbb{R}.$

Тригонометричните функции са переодични с период 2π, откъдето получаваме, че ядрото е $\mathtt{Ker}(\rho) = \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} = < 2\pi >$. Образът е множеството от комплексните числа с модул 1: $\mathtt{Im}(\rho) = U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, получаваме $\mathbb{R} \diagup < 2\pi > \ \cong U.$

Пример:

Ако разгледаме отново групата G, с операцията умножение на матрици и нормалната подгрупа H, където

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0 \right\}, \ \ H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, b \in \mathbb{R} \right\}$$

Да установим, коя е факторгрупата $G \diagup H$.

Изображението $\varphi : G \to \mathbb{R}^*$, където $\varphi(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) = a = \det \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ е хомоморфизъм на групи и намираме ядрото и образа $\mathtt{Ker}(\varphi) = H; \ \ \mathtt{Im}(\varphi) = \mathbb{R}^*,$
като приложим теоремата за хомоморфизмите при групи се получава $G \diagup H \cong \mathbb{R}^*$.