Лекция 20.5.2021

1 Изпъкнали множества — продължение

Припомняне от миналия път

Нека $\mathcal{A}$ е афинно пространство, моделирано върху линейното пространство U.

Определение 1 Подмножеството C на $\mathcal{A}$ се нарича *изпъкнало*, ако за всеки две точки $P_0, P_1 \in C$ отсечката P_0P_1 лежи в C.

Забележка 1 В горната дефиниция няма значение дали се има предвид отворената или затворената отсечка P_0P_1, защото краищата ѝ P_0 и P_1 така или иначе са си в C.

Твърдение 1 *Ако B е афинно подпространство на $\mathcal{A}$ и $P_0, P_1 \in B$ са различни точки, то B съдържа правата, определена от P_0 и P_1.*

Следствие 1 *Всяко афинно подпространство е изпъкнало множество.*

Твърдение 2 *Полупространствата (и отворените, и затворените) са изпъкнали множества.*

Твърдение 3 *В геометричната равнина или геометричното пространство нека точките P_0, P_1, P_2 не са на една права и нека O е произволна точка. Тогава точката P лежи в $\substack{\text{отворения}\\ \text{затворения}}$ триъгълник $P_0P_1P_2$*
$\Leftrightarrow \exists \lambda_1, \lambda_2 \substack{>\\ \geq} 0,\ \lambda_1 + \lambda_2 \substack{<\\ \leq} 1$: $\overrightarrow{P_0P} = \lambda_1 \overrightarrow{P_0P_1} + \lambda_2 \overrightarrow{P_0P_2}$
$\Leftrightarrow \exists \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \substack{>\\ \geq} 0,\ \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1$: $\overrightarrow{OP} = \lambda_0 \overrightarrow{OP_0} + \lambda_1 \overrightarrow{OP_1} + \lambda_2 \overrightarrow{OP_2}$.

Твърдение 4 *В геометричното пространство нека точките P_0, P_1, P_2, P_3 не лежат в една равнина и нека O е произволна точка. Тогава точката P лежи в $\substack{\text{отворения}\\ \text{затворения}}$ тетраедър $P_0P_1P_2P_3$*
$\Leftrightarrow \exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \substack{>\\ \geq} 0,\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \substack{<\\ \leq} 1$: $\overrightarrow{P_0P} = \lambda_1 \overrightarrow{P_0P_1} + \lambda_2 \overrightarrow{P_0P_2} + \lambda_3 \overrightarrow{P_0P_3}$
$\Leftrightarrow \exists \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \substack{>\\ \geq} 0,\ \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$: $\overrightarrow{OP} = \lambda_0 \overrightarrow{OP_0} + \lambda_1 \overrightarrow{OP_1} + \lambda_2 \overrightarrow{OP_2} + \lambda_3 \overrightarrow{OP_3}$.

Последните две твърдения мотивират следната дефиниция.

Определение 2 Нека точките $P_0, \dots, P_k \in \mathcal{A}$ не лежат в $(k-1)$-мерно афинно подпространство на $\mathcal{A}$. $\substack{\textit{Отворен}\\ \textit{Затворен}}$ *k-мерен симплекс с върхове $P_0, \dots, P_k$* се нарича множеството

$$\left\{ P \in \mathcal{A} : \exists \lambda_1, \dots, \lambda_k \substack{>\\ \geq} 0, \lambda_1 + \dots + \lambda_k \substack{<\\ \leq} 1 : \overrightarrow{P_0P} = \lambda_1 \overrightarrow{P_0P_1} + \dots + \lambda_k \overrightarrow{P_0P_k} \right\}.$$

Пример 1 От дефиницията на отсечка следва, че 1-мерните отворени (съответно затворени) симплекси са отворените (съответно затворените) отсечки.

Пример 2 Твърдение 3 и Твърдение 4 показват, че 2-мерните отворени (съответно затворени) симплекси в геометричната равнина или геометричното пространство са отворените (съответно затворените) триъгълници, а 3-мерните отворени (съответно затворени) симплекси в геометричното пространство са отворените (съответно затворените) тетраедри.
Поради това и в произволно афинно пространство 2-мерните и 3-мерните симплекси се наричат съответно триъгълници и тетраедри.

Твърдение 5 *Нека точките $P_0, \dots, P_k \in \mathcal{A}$ не лежат в $(k-1)$-мерно афинно подпространство и нека O е произволна точка. Тогава*
k-мерният $\substack{\text{отворен}\\ \text{затворен}}$ симплекс $P_0 \dots P_k$

$$= \Big\{ P \in \mathcal{A} : \exists \lambda_1, \dots, \lambda_k \underset{\geq}{>} 0, \lambda_1 + \dots + \lambda_k \underset{\leq}{<} 1 :$$

$$\overrightarrow{OP} = (1 - \lambda_1 - \dots - \lambda_k)\overrightarrow{OP_0} + \lambda_1 \overrightarrow{OP_1} + \dots + \lambda_k \overrightarrow{OP_k} \Big\}$$

$$= \Big\{ P \in \mathcal{A} : \exists \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k \underset{\geq}{>} 0, \lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1 :$$

$$\overrightarrow{OP} = \lambda_0 \overrightarrow{OP_0} + \lambda_1 \overrightarrow{OP_1} + \dots + \lambda_k \overrightarrow{OP_k} \Big\} .$$

От второто равенство в горното твърдение получаваме

Следствие 2 *Редът на точките в дефиницията на симплекс няма значение.*

Дотук беше припомнянето от миналия път.

Изпъкнали множества — продължение

Твърдение 6 *Нека $K = Oe_1 \dots e_n$ е афинна координатна система в $\mathcal{A}$ и спрямо нея нележащите в $(k-1)$-мерно афинно подпространство точки $P_0, \dots, P_k$ имат координати $P_j(x^j)$, $j = 0, \dots, k$. Тогава спрямо K параметрични уравнения на k-мерния $\substack{\text{отворен}\\ \text{затворен}}$ симплекс $P_0 \dots P_k$ са*

$$x = (1 - \lambda_1 - \dots - \lambda_k)x^0 + \lambda_1 x^1 + \dots + \lambda_k x^k, \quad \lambda_1, \dots, \lambda_k \underset{\geq}{>} 0,\ \lambda_1 + \dots + \lambda_k \underset{\leq}{<} 1,$$

или еквивалентно,

$$x = \lambda_0 x^0 + \lambda_1 x^1 + \dots + \lambda_k x^k, \quad \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k \underset{\geq}{>} 0,\ \lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1.$$

Доказателство: Ако точката P има спрямо K координатен вектор x, то и векторът $\overrightarrow{OP}$ има спрямо K координатен вектор x. Аналогично $\overrightarrow{OP_0}, \dots, \overrightarrow{OP_k}$ имат спрямо K координатни вектори съответно $x^0, \dots, x^k$. Тогава
$\overrightarrow{OP} = (1-\lambda_1-\dots-\lambda_k)\overrightarrow{OP_0}+\lambda_1\overrightarrow{OP_1}+\dots+\lambda_k\overrightarrow{OP_k} \Leftrightarrow x = (1-\lambda_1-\dots-\lambda_k)x^0+\lambda_1 x^1+\dots+\lambda_k x^k$
и от първото равенство в Твърдение 5 получаваме
$P \in \substack{\text{отворения}\\ \text{затворения}}$ симплекс $P_0 \dots P_k$
$\Leftrightarrow \exists \lambda_1, \dots, \lambda_k \substack{>\\ \geq} 0, \lambda_1 + \dots + \lambda_k \substack{<\\ \leq} 1 : \ \overrightarrow{OP} = (1-\lambda_1-\dots-\lambda_k)\overrightarrow{OP_0}+\lambda_1\overrightarrow{OP_1}+\dots+\lambda_k\overrightarrow{OP_k}$
$\Leftrightarrow \exists \lambda_1, \dots, \lambda_k \substack{>\\ \geq} 0, \lambda_1 + \dots + \lambda_k \substack{<\\ \leq} 1 : \ x = (1-\lambda_1-\dots-\lambda_k)x^0+\lambda_1 x^1+\dots+\lambda_k x^k$.
От това следват първите параметрични уравнения, а вторите следват по същия начин от второто равенство в Твърдение 5 или пък като в първите параметрични уравнения се положи $\lambda_0 = 1 - \lambda_1 - \dots - \lambda_k$.
(Всъщност в Твърдение 5 са написани векторни параметрични уравнения на двата вида симплекси, така че написвайки ги покоординатно получаваме скаларни параметрични уравнения.) $\square$

Твърдение 7 *Симплексите (и отворените, и затворените) са изпъкнали множества.*

Доказателство: Нека Q и R са произволни точки от $\substack{\text{отворения}\\ \text{затворения}}$ симплекс $P_0 \dots P_k$. Тогава, фиксирайки произволна точка O, имаме

$$\overrightarrow{OQ} = \sum_{i=0}^{k} \mu_i \overrightarrow{OP_i} \text{ за някои } \mu_i \substack{>\\ \geq} 0,\ i = 0, \dots, k : \ \sum_{i=0}^{k} \mu_i = 1,$$

$$\overrightarrow{OR} = \sum_{i=0}^{k} \nu_i \overrightarrow{OP_i} \text{ за някои } \nu_i \substack{>\\ \geq} 0,\ i = 0, \dots, k : \ \sum_{i=0}^{k} \nu_i = 1.$$

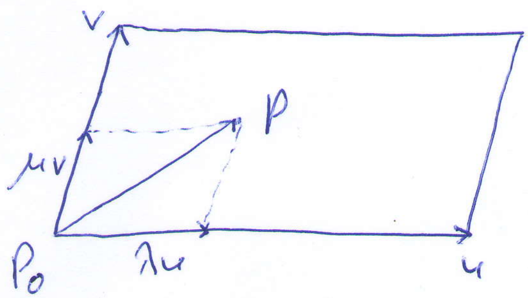
Нека точката P е от отворената отсечка QR. Тогава $\overrightarrow{OP} = \varkappa\overrightarrow{OQ}+\lambda\overrightarrow{OR}$ за някои $\varkappa, \lambda > 0$: $\varkappa + \lambda = 1$. Следователно $\overrightarrow{OP} = \sum_{i=0}^{k}(\varkappa\mu_i + \lambda\nu_i)\overrightarrow{OP_i}$ и

$$\underbrace{\varkappa}_{>0}\underbrace{\mu_i}_{\substack{>\\ \geq}0} + \underbrace{\lambda}_{>0}\underbrace{\nu_i}_{\substack{>\\ \geq}0} \substack{>\\ \geq} 0,\ i = 0, \dots, k, \quad \sum_{i=0}^{k}(\varkappa\mu_i + \lambda\nu_i) = \varkappa \underbrace{\sum_{i=0}^{k}\mu_i}_{=1} + \lambda \underbrace{\sum_{i=0}^{k}\nu_i}_{=1} = \varkappa + \lambda = 1.$$

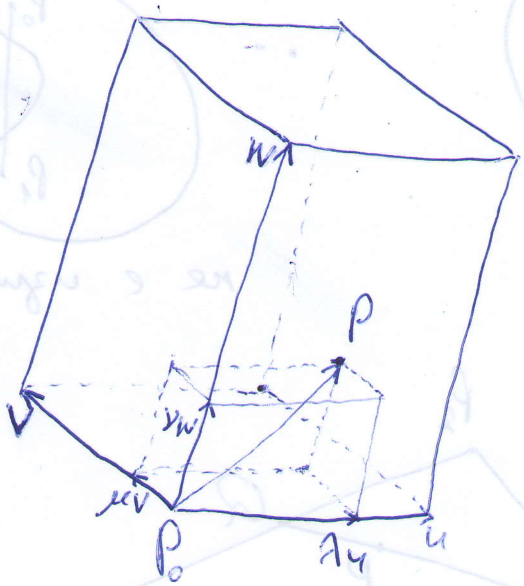
Значи P лежи в $\substack{\text{отворения}\\ \text{затворения}}$ симплекс $P_0 \dots P_k$. Следователно отворената отсечка QR се съдържа в тоя симплекс. Тъй като Q и R бяха произволни точки от симплекса, това означава, че той е изпъкнало множество. $\square$

Забележка 2 Ако в Определение 2 точките $P_0, \dots, P_k \in \mathcal{A}$ лежат в $(k-1)$-мерно афинно подпространство, то полученото множество можем да наречем изроден отворен (съответно затворен) k-мерен симплекс и за него горните три твърдения и следствието остават в сила и доказателствата са съвършено същите. Но прилагателното „k-мерен“ е неуместно, защото размерността на това множество е $< k$.

Ако Π е $\substack{\text{отворен}\\ \text{затворен}}$ успоредник в геометричната равнина или геометричното пространство, дефиниран с точката P_0 и неколинеарните вектори u и v, то
точката $P \in \Pi \Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P} = \lambda u + \mu v$, където $0 \substack{<\\ \leq} \lambda, \mu \substack{<\\ \leq} 1$.



Аналогично, ако Π е $\substack{\text{отворен}\\ \text{затворен}}$ паралелепипед в геометричното пространство, дефиниран с точката P_0 и некомпланарните вектори u, v, w, то
точката $P \in \Pi \Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P} = \lambda u + \mu v + \nu w$, където $0 \substack{<\\ \leq} \lambda, \mu, \nu \substack{<\\ \leq} 1$.



Това мотивира следната дефиниция.

Определение 3 Нека $P_0 \in \mathcal{A}$, а $v_1, \ldots, v_k \in U$ са линейно независими.
$\substack{\text{Отворен}\\ \text{Затворен}}$ k-мерен паралелепипед, определен от точката P_0 и векторите $v_1, \ldots, v_k$, се нарича множеството

$$\left\{ P \in \mathcal{A} : \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \substack{(0,1)\\ [0,1]} : \overrightarrow{P_0P} = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k \right\}.$$

Пример 3 1-мерните отворени (съответно затворени) паралелепипеди са отворените (съответно затворените) отсечки.
2-мерните отворени (съответно затворени) паралелепипеди в геометричната равнина или геометричното пространство са отворените (съответно затворените) успоредници. Поради това и в произволно афинно пространство 2-мерните паралелепипеди се наричат успоредници.
3-мерните отворени (съответно затворени) паралелепипеди в геометричното пространство са си отворените (съответно затворените) паралелепипеди.

Твърдение 8 *Нека $K = Oe_1 \dots e_n$ е афинна координатна система в $\mathcal{A}$ и спрямо нея точката $P_0 \in \mathcal{A}$ и линейно независимите вектори $v_1, \dots, v_k \in U$ имат координати $P_0(x^0)$, $v_j(\xi_j)$, $j = 1, \dots, k$. Тогава спрямо K параметрични уравнения на k-мерния отворен (съответно затворен) паралелепипед, определен от P_0 и $v_1, \dots, v_k$ са*

$$x = x^0 + \lambda_1 \xi_1 + \dots + \lambda_k \xi_k, \quad 0 \underset{\leq}{<} \lambda_1, \dots, \lambda_k \underset{\leq}{<} 1.$$

Доказателство: Ако точката P има спрямо K координатен вектор x, то векторът $\overrightarrow{P_0P}$ има спрямо K координатен вектор $x - x^0$. Тъй като $v_1, \dots, v_k$ имат спрямо K координатни вектори съответно $\xi_1, \dots, \xi_k$, то
$\overrightarrow{P_0P} = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k \Leftrightarrow x - x^0 = \lambda_1 \xi_1 + \dots + \lambda_k \xi_k \Leftrightarrow x = x^0 + \lambda_1 \xi_1 + \dots + \lambda_k \xi_k$
и от Определение 3 получаваме
$P \in \begin{smallmatrix}\text{отворения}\\ \text{затворения}\end{smallmatrix}$ паралелепипед, определен от P_0 и $v_1, \dots, v_k$
$\Leftrightarrow \exists \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \begin{smallmatrix}(0,1)\\ [0,1]\end{smallmatrix} : \overrightarrow{P_0P} = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k$
$\Leftrightarrow \exists \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \begin{smallmatrix}(0,1)\\ [0,1]\end{smallmatrix} : \ x = x^0 + \lambda_1 \xi_1 + \dots + \lambda_k \xi_k.$
От това следва, че паралелепипедът има исканите параметрични уравнения. □

Твърдение 9 *Паралелепипедите (и отворените, и затворените) са изпъкнали множества.*

Доказателство: Нека Q и R са произволни точки от $\begin{smallmatrix}\text{отворения}\\ \text{затворения}\end{smallmatrix}$ паралелепипед, определен от точката P_0 и векторите $v_1, \dots, v_k$. Тогава

$$\overrightarrow{P_0Q} = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_k v_k \text{ за някои } \mu_i \in \begin{smallmatrix}(0,1)\\ [0,1]\end{smallmatrix}, \ i = 1, \dots, k,$$

$$\overrightarrow{P_0R} = \nu_1 v_1 + \dots + \nu_k v_k \text{ за някои } \nu_i \in \begin{smallmatrix}(0,1)\\ [0,1]\end{smallmatrix}, \ i = 1, \dots, k.$$

Нека точката P е от отворената отсечка QR. Тогава $\overrightarrow{P_0P} = \varkappa \overrightarrow{P_0Q} + \lambda \overrightarrow{P_0R}$ за някои $\varkappa, \lambda > 0$: $\varkappa + \lambda = 1$. Следователно $\overrightarrow{P_0P} = \sum_{i=1}^{k} (\varkappa \mu_i + \lambda \nu_i) v_i$ и

$$\underbrace{\varkappa}_{>0} \underbrace{\mu_i}_{\underset{\geq}{>} 0} + \underbrace{\lambda}_{>0} \underbrace{\nu_i}_{\underset{\geq}{>} 0} \underset{\geq}{>} 0, \quad \underbrace{\varkappa}_{>0} \underbrace{\mu_i}_{\underset{\leq}{<} 1} + \underbrace{\lambda}_{>0} \underbrace{\nu_i}_{\underset{\leq}{<} 1} \underset{\leq}{<} \varkappa + \lambda = 1, \qquad i = 1, \dots, k, .$$

Значи P лежи в $\begin{smallmatrix}\text{отворения}\\ \text{затворения}\end{smallmatrix}$ паралелепипед, определен от P_0 и $v_1, \dots, v_k$. Следователно отворената отсечка QR се съдържа в тоя паралелепипед. Тъй като Q и R бяха произволни точки от паралелепипеда, това означава, че той е изпъкнало множество. □

Забележка 3 Ако в Определение 3 векторите $v_1, \dots, v_k \in U$ са линейно зависими, то полученото множество можем да наречем изроден отворен (съответно затворен) k-мерен паралелепипед и за него горните две твърдения остават в сила и доказателствата са съвършено същите. Но прилагателното „k-мерен“ е неуместно, защото размерността на това множество е $< k$.

Твърдение 10 *Произволно сечение на изпъкнали множества е изпъкнало множество.*

Доказателство: Нека C_i, $i \in I$, са изпъкнали множества. Нека $P_0, P_1 \in \bigcap\limits_{i \in I} C_i$. Следователно $P_0, P_1 \in C_i$ за всяко $i \in I$. Тъй като за всяко $i \in I$ множеството C_i е изпъкнало, то за всяко $i \in I$ отсечката P_0P_1 се съдържа в C_i. Значи отсечката P_0P_1 се съдържа в $\bigcap\limits_{i \in I} C_i$. Следователно $\bigcap\limits_{i \in I} C_i$ е изпъкнало множество. □

2 Нормални вектори на афинно подпространство. Разстояние между афинни подпространства

Нека A е евклидово афинно пространство, моделирано върху линейното пространство U.

Определение 4 Нека B е афинно подпространство на A, моделирано върху линейното пространство V. Тогава ортогоналното на V линейно пространство $V^{\perp}$ се нарича *нормално* или *ортогонално*, или *перпендикулярно на* B *пространство*, а векторите от $V^{\perp}$ се наричат *нормални* или *ортогонални*, или *перпендикулярни на* B *вектори*.

Оттук нататък A е n-мерно и $K = Oe_1 \dots e_n$ е ортонормирана координатна система в A.

Твърдение 11 *Нека афинното подпространство B на A има спрямо K уравнения*

$$B : a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n + b_i = 0, \quad i = 1, \dots, m. \tag{1}$$

Тогава:

1. *Векторите $N_1, \dots, N_m$, чиито координати спрямо K са $N_i(a_{i1}, \dots, a_{in})$, $i = 1, \dots, m$, са нормални на B и нормалното пространство на B е тяхната линейна обвивка.*

2. *(1) е общо уравнение на $B \Leftrightarrow N_1, \dots, N_m$ са линейно независими, тоест когато $(N_1, \dots, N_m)$ е базис на нормалното пространство на B.*

Доказателство: Нека V е направляващото пространство на B.

1. Имаме $v(\xi_1, \dots, \xi_n) \in V \Leftrightarrow a_{i1}\xi_1 + \dots + a_{in}\xi_n = 0$, $i = 1, \dots, m$, $\Leftrightarrow \langle v, N_i \rangle = 0$, $i = 1, \dots, m$, (защото K е ортонормирана) $\Leftrightarrow v \perp N_i$, $i = 1, \dots, m$. Следователно $N_1, \dots, N_m \in V^\perp$, тоест $N_1, \dots, N_m$ са нормални на B.

   Горната еквивалентност всъщност означава, че $V = \{N_1, \dots, N_m\}^\perp$ и тъй като $\{N_1, \dots, N_m\}^\perp = l(N_1, \dots, N_m)^\perp$, то $V = l(N_1, \dots, N_m)^\perp$. Следователно $V^\perp = l(N_1, \dots, N_m)^{\perp\perp} = l(N_1, \dots, N_m)$ и от това също е ясно, че $N_1, \dots, N_m \in V^\perp$.

2. (1) е общо уравнение на $B \Leftrightarrow m = n - \dim B \Leftrightarrow m = n - \dim V \Leftrightarrow m = \dim V^\perp$ $\Leftrightarrow m = \dim l(N_1, \dots, N_m) \Leftrightarrow N_1, \dots, N_m$ са линейно независими, тоест когато $(N_1, \dots, N_m)$ е базис на $l(N_1, \dots, N_m) = V^\perp$. $\square$

Твърдение 12 *Нека $P_0 \in A$, W е линейно подпространство на U и $W = l(N_1, \dots, N_m)$. Нека спрямо K координатите на P_0 и $N_1, \dots, N_m$ са $P_0(x_1^0, \dots, x_n^0)$, $N_i(a_{i1}, \dots, a_{in})$, $i = 1, \dots, m$. Тогава съществува единствено афинно подпространство B на A, за което $P_0 \in B$ и W е нормалното пространство на B, и спрямо K то има уравнения*

$$B : a_{i1}(x_1 - x_1^0) + \dots + a_{in}(x_n - x_n^0) = 0, \quad i = 1, \dots, m. \tag{2}$$

В частност, ако $(N_1, \dots, N_m)$ е базис на W, то (2) е общо уравнение на B.

Доказателство: Ако имаме афинно подпространство на A, което е моделирано върху линейното подпространство V на U и за което W е нормалното пространство, то $W = V^\perp$ и следователно $V = V^{\perp\perp} = W^\perp$. Но ние знаем, че съществува единствено афинно подпространство B на A, което съдържа P_0 и е моделирано върху $W^\perp$. И неговото нормално пространство ще е $W^{\perp\perp} = W$. Така че наистина съществува единствено афинно подпространство B на A, което съдържа P_0 и има нормално пространство W.

Тъй като (2) е линейна система, то тя задава спрямо K някое афинно подпространство. То съдържа P_0, защото координатите на P_0 очевидно удовлетворяват (2), а по 1. на Твърдение 11 нормалното му пространство е $l(N_1, \dots, N_m)$, тоест W. Значи това афинно подпространство е B, тоест наистина B се задава спрямо K с уравненията (2).

Последното изречение в твърдението следва от 2. на Твърдение 11. $\square$

Частни случаи:

1. Хиперравнина:

   Твърдение 11′ *Нека хиперравнината B в A има спрямо K общо уравнение $a_1x_1 + \dots + a_nx_n + b = 0$. Тогава векторът N, чиито координати спрямо K са $(a_1, \dots, a_n)$, е нормален на B и образува базис на нормалното пространство на B, тоест нормалните вектори на B са векторите от вида λN, $\lambda \in \mathbb{R}$.*

   Твърдение 12′ *Нека точката $P_0 \in A$ и ненулевият вектор $N \in U$ имат спрямо K координати $P_0(x_1^0, \dots, x_n^0)$, $N(a_1, \dots, a_n)$. Тогава съществува единствена хиперравнина B в A през P_0, за която N е нормален вектор, и спрямо K тя има общо уравнение $a_1(x_1 - x_1^0) + \dots + a_n(x_n - x_n^0) = 0$.*

2. Права в 2-мерно евклидово афинно пространство (в частност, в геометричната равнина):
   В Твърдение 11′ и Твърдение 12′ $n = 2$ и „хиперравнина“ се заменя с „права“.

3. Равнина в 3-мерно евклидово афинно пространство (в частност, в геометричното пространство):
   В Твърдение 11′ и Твърдение 12′ $n = 3$ и „хиперравнина“ се заменя с „равнина“.

4. Права в 3-мерно евклидово афинно пространство (в частност, в геометричното пространство):
   Нека координатите са (x, y, z) вместо (x_1, x_2, x_3).

   Твърдение 11′ᵛ *Нека правата l в A има спрямо K общо уравнение*

   $$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} .$$

   Тогава векторите N_1 и N_2, чиито координати спрямо K са $N_i(A_i, B_i, C_i)$, $i = 1, 2$, са нормални на l и образуват базис на нормалното пространство на l.

   Твърдение 12′ᵛ *Нека точката $P_0 \in A$ и линейно независимите вектори $N_1, N_2 \in U$ имат спрямо K координати $P_0(x_0, y_0, z_0)$, $N_i(A_i, B_i, C_i)$, $i = 1, 2$. Тогава съществува единствена права l в A през P_0, за която N_1 и N_2 са нормални вектори, и спрямо K тя има общо уравнение*

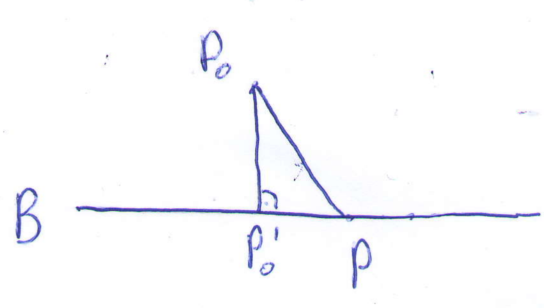
   $$\begin{cases} A_1(x - x_0) + B_1(y - y_0) + C_1(z - z_0) = 0 \\ A_2(x - x_0) + B_2(y - y_0) + C_2(z - z_0) = 0 \end{cases} .$$

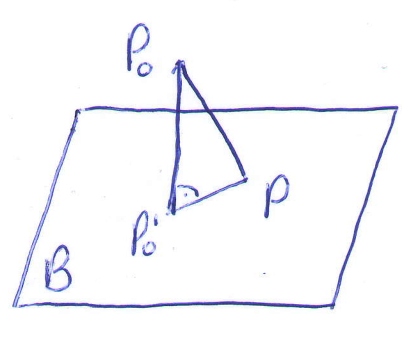
Твърдение 13 *Нека B е афинно подпространство на A и $P_0 \in A$. Тогава:*

1. *Съществува единствена точка $P'_0 \in B$, за която векторът $\overrightarrow{P'_0P_0}$ е перпендикулярен на B.*

2. *Ако $P \in B$, то $|PP_0| \geq |P'_0P_0|$ и $= \Leftrightarrow P = P'_0$.*

Доказателство: Ако ви е нужна някаква нагледна представа, можете да си мислите за права в геометричната равнина или геометричното пространство или за равнина в геометричното пространство.





Нека V е направляващото пространство на B.

1. Първо ще докажем единствеността, защото това ще ни подсети как да конструираме P_0' за да докажем съществуването.

   Нека $P_0' \in B$ е такава, че $\overrightarrow{P_0'P_0} \perp B$. Нека $P \in B$. Тогава $\overrightarrow{PP_0} = \underbrace{\overrightarrow{PP_0'}}_{\in V} + \underbrace{\overrightarrow{P_0'P_0}}_{\in V^\perp}$. Това означава, че относно разлагането $U = V \oplus V^\perp$ имаме $\overrightarrow{PP_0} = \overrightarrow{PP_0}^\parallel + \overrightarrow{PP_0}^\perp$, където $\overrightarrow{PP_0}^\parallel = \overrightarrow{PP_0'}$, $\overrightarrow{PP_0}^\perp = \overrightarrow{P_0'P_0}$.

   Ако и $P \in B$ е такава, че $\overrightarrow{PP_0} \perp B$, то $\overrightarrow{PP_0} \in V^\perp$ и следователно $\overrightarrow{PP_0}^\parallel = 0$, тоест $\overrightarrow{PP_0'} = 0$. Значи $P = P_0'$. С това единствеността е доказана.

   Съществуване: Нека P е произволна точка от B. Нека относно разлагането $U = V \oplus V^\perp$ имаме $\overrightarrow{PP_0} = \overrightarrow{PP_0}^\parallel + \overrightarrow{PP_0}^\perp$. Тъй като $P \in B$ и $\overrightarrow{PP_0}^\parallel \in V$, то съществува единствена точка $P_0' \in B$ такава, че $\overrightarrow{PP_0'} = \overrightarrow{PP_0}^\parallel$. Следователно $\overrightarrow{P_0'P_0} = \overrightarrow{PP_0} - \overrightarrow{PP_0'} = \overrightarrow{PP_0} - \overrightarrow{PP_0}^\parallel = \overrightarrow{PP_0}^\perp \in V^\perp$, тоест $\overrightarrow{P_0'P_0} \perp B$. С това е доказано и съществуването.

2. За произволно $P \in B$ имаме както по-горе $\overrightarrow{PP_0} = \underbrace{\overrightarrow{PP_0'}}_{\in V} + \underbrace{\overrightarrow{P_0'P_0}}_{\in V^\perp}$. Тогава от теоремата на Питагор получаваме $\left|\overrightarrow{PP_0}\right|^2 = \left|\overrightarrow{PP_0'}\right|^2 + \left|\overrightarrow{P_0'P_0}\right|^2 \geq \left|\overrightarrow{P_0'P_0}\right|^2$ и $= \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{PP_0'}\right| = 0$, тоест когато $\overrightarrow{PP_0'} = 0$. Следователно $|PP_0| \geq |P_0'P_0|$ и $= \Leftrightarrow P = P_0'$. □

Определение 5 Нека B е афинно подпространство на A и $P_0 \in A$. Тогава единствената точка $P_0' \in B$, за която векторът $\overrightarrow{P_0'P_0}$ е перпендикулярен на B, се нарича *ортогонална проекция на P_0 върху B*, а $|P_0'P_0|$ се нарича *разстояние от P_0 до B* и се означава с $d(P_0, B)$.

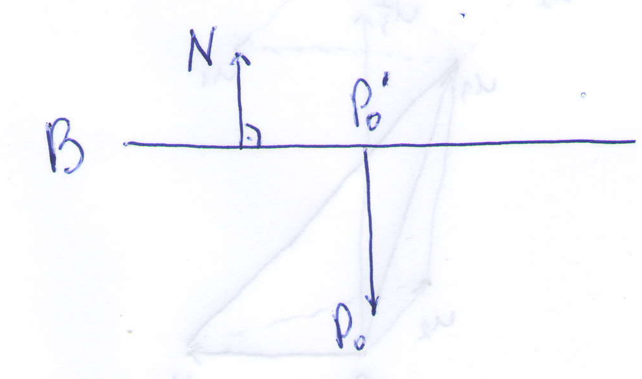
Пример 4 Нека $P_0 \in B$. Тогава $\overrightarrow{P_0P_0} = 0$ е перпендикулярен на B и следователно $P_0' = P_0$ и $d(P_0, B) = |P_0P_0'| = 0$.

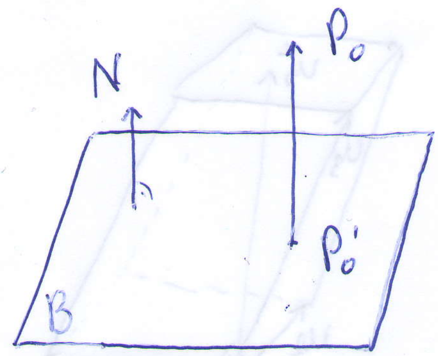
Използвайки въведената в Определение 5 терминология, от Твърдение 13 директно получаваме:

Твърдение 14 *Ако B е афинно подпространство на A и $P_0 \in A$, то $\min\{|PP_0| : P \in B\}$ съществува, достига се за ортогоналната проекция P_0' на P_0 върху B и е равен на разстоянието от P_0 до B.*

Твърдение 15 *Нека спрямо K хиперравнината B в A има общо уравнение $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + b = 0$, а точката $P_0 \in A$ има координатен вектор x^0. Означаваме $F(x) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + b$. Тогава $d(P_0, B) = \frac{|F(x^0)|}{\sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}}$, а ортогоналната проекция P_0' на P_0 върху B има спрямо K координатен вектор $x' = x^0 - \frac{F(x^0)}{a_1^2 + \cdots + a_n^2} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.*

Доказателство: Ако ви е нужна някаква нагледна представа, можете да си мислите за права в геометричната равнина или за равнина в геометричното пространство.





По Твърдение $11'$ векторът N, чиито координати спрямо K са $(a_1, \ldots, a_n)$, е нормален на B и образува базис на нормалното пространство на B. Тъй като и $\overrightarrow{P_0'P_0}$ е нормален на B, то съществува единствено $\lambda \in \mathbb{R}$ такова, че $\overrightarrow{P_0'P_0} = \lambda N$. Следователно

$$d(P_0, B) = \left|\overrightarrow{P_0'P_0}\right| = |\lambda|.|N| = |\lambda|.\sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}.$$

Нека координатният вектор спрямо K на P_0' е x'. Тогава координатният вектор спрямо K на $\overrightarrow{P_0'P_0}$ е $x^0 - x'$ и от $\overrightarrow{P_0'P_0} = \lambda N$ получаваме $x^0 - x' = \lambda.\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$. Следователно $x' = x^0 - \lambda.\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, тоест $x_i' = x_i^0 - \lambda a_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Значи за да намерим $d(P_0, B)$ и x' е достатъчно да определим λ.

От $P_0' \in B$ следва $F(x') = 0$, тоест $\sum_{i=1}^n a_i x_i' + b = 0$. Значи $\sum_{i=1}^n a_i(x_i^0 - \lambda a_i) + b = 0$, тоест $\underbrace{\left(\sum_{i=1}^n a_i x_i^0 + b\right)}_{F(x^0)} - \lambda \sum_{i=1}^n a_i^2 = 0$. Следователно $\lambda = \dfrac{F(x^0)}{\sum_{i=1}^n a_i^2}$. Така получаваме

$$d(P_0, B) = |\lambda|.\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} = \frac{|F(x^0)|}{\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}}, \qquad x' = x^0 - \lambda.\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = x^0 - \frac{F(x^0)}{\sum_{i=1}^n a_i^2} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Забележка 4 Тъй като за дължината на нормалния вектор $N(a_1, \dots, a_n)$ на B имаме $|N| = \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}$, то $\overrightarrow{P_0'P_0} = \frac{F(x^0)}{\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}}\frac{N}{|N|}$. Числото $\delta(P_0, B) = \frac{F(x^0)}{\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}}$ се нарича *ориентирано разстояние от* P_0 *до* B. Имаме $d(P_0, B) = |\delta(P_0, B)|$. Също, отворените полупространства относно B са $\{P_0(x^0) \in A : F(x^0) > 0\}$ и $\{P_0(x^0) \in A : F(x^0) < 0\}$ и следователно те могат да се напишат и като
$\{P_0 \in A : \delta(P_0, B) > 0\}$ (тоест отвореното полупространство, в което „сочи“ N)
и
$\{P_0 \in A : \delta(P_0, B) < 0\}$ (тоест отвореното полупространство, в което „сочи“ $-N$).

Забележка 5 Ако нормалният вектор $N(a_1, \dots, a_n)$ на B е единичен, то уравнението $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + b = 0$ се нарича *нормално уравнение на* B *спрямо* K и
$d(P_0, B) = |F(x^0)|$.

Частни случаи:

1. Права в 2-мерно евклидово афинно пространство (в частност, в геометричната равнина):
   В Твърдение 15 и забележките след него $n = 2$ и „хиперравнина“ се заменя с „права“, а „полупространство“ с „полуравнина“.

2. Равнина в 3-мерно евклидово афинно пространство (в частност, в геометричното пространство):
   В Твърдение 15 и забележките след него $n = 3$ и „хиперравнина“ се заменя с „равнина“.

Твърдение 16 *Нека* B_1 *и* B_2 *са афинни подпространства на* A*, моделирани съответно върху линейните пространства* V_1 *и* V_2*. Тогава:*

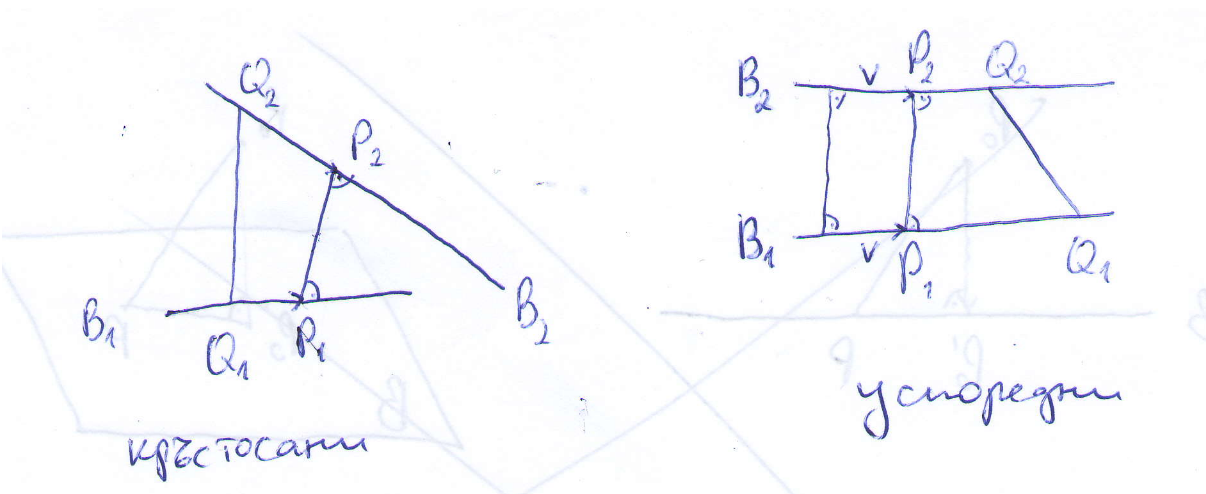
1. *Съществуват точки* $P_1 \in B_1$*,* $P_2 \in B_2$*, за които векторът* $\overrightarrow{P_1P_2}$ *е перпендикулярен на* B_1 *и* B_2*.*

2. *Векторът* $\overrightarrow{P_1P_2}$ *в 1. е единствен, тоест ако* $Q_1 \in B_1$*,* $Q_2 \in B_2$ *са такива, че* $\overrightarrow{Q_1Q_2}$ *е перпендикулярен на* B_1 *и* B_2*, то* $\overrightarrow{Q_1Q_2} = \overrightarrow{P_1P_2}$*.*

3. *Точките* P_1 *и* P_2 *в 1. са единствени* $\Leftrightarrow V_1 \bigcap V_2 = \{0\}$*.*

4. *Ако* $Q_1 \in B_1$*,* $Q_2 \in B_2$*, то* $|Q_1Q_2| \geq |P_1P_2|$ *и* $= \Leftrightarrow \overrightarrow{Q_1Q_2}$ *е перпендикулярен на* B_1 *и* B_2*, тоест когато* $\overrightarrow{Q_1Q_2} = \overrightarrow{P_1P_2}$ *(поради 2.).*

Доказателство: Ако ви е нужна някаква нагледна представа, можете да си мислите за прави в геометричното пространство.



Първо ще докажем 2., 3., 4., защото това ще ни подсети как да конструираме P_1 и P_2 в 1..

Нека $P_1 \in B_1$, $P_2 \in B_2$ са като в 1., тоест $\overrightarrow{P_1P_2} \perp B_1, B_2$.

Нека $Q_1 \in B_1$, $Q_2 \in B_2$. Тогава

$$\overrightarrow{Q_1Q_2} = \overrightarrow{Q_1P_1} + \overrightarrow{P_1P_2} + \underbrace{\overrightarrow{P_2Q_2}}_{-\overrightarrow{Q_2P_2}} = \underbrace{\Big(\underbrace{\overrightarrow{Q_1P_1}}_{\in V_1} - \underbrace{\overrightarrow{Q_2P_2}}_{\in V_2} \Big)}_{\in V_1+V_2} + \underbrace{\overrightarrow{P_1P_2}}_{\in \underbrace{V_1^{\perp} \bigcap V_2^{\perp}}_{=(V_1+V_2)^{\perp}}} .$$

Следователно относно разлагането $U = (V_1 + V_2) \oplus (V_1 + V_2)^{\perp}$ имаме $\overrightarrow{Q_1Q_2} = \overrightarrow{Q_1Q_2}^{\parallel} + \overrightarrow{Q_1Q_2}^{\perp}$, където $\overrightarrow{Q_1Q_2}^{\parallel} = \overrightarrow{Q_1P_1} - \overrightarrow{Q_2P_2}$, $\overrightarrow{Q_1Q_2}^{\perp} = \overrightarrow{P_1P_2}$.

2. Нека $Q_1 \in B_1$, $Q_2 \in B_2$ са такива, че $\overrightarrow{Q_1Q_2} \perp B_1, B_2$. Следователно $\overrightarrow{Q_1Q_2} \in V_1^{\perp} \bigcap V_2^{\perp} = (V_1 + V_2)^{\perp}$. Значи $\overrightarrow{Q_1Q_2} = \overrightarrow{Q_1Q_2}^{\perp} = \overrightarrow{P_1P_2}$. С това 2. е доказано.

3. Нека отново $Q_1 \in B_1$, $Q_2 \in B_2$ са такива, че $\overrightarrow{Q_1Q_2} \perp B_1, B_2$. От доказаното в 2. тогава имаме $\overrightarrow{Q_1Q_2} \in (V_1 + V_2)^{\perp}$ и следователно $\overrightarrow{Q_1Q_2}^{\parallel} = 0$, тоест $\overrightarrow{Q_1P_1} - \overrightarrow{Q_2P_2} = 0$. Значи $\underbrace{\overrightarrow{Q_1P_1}}_{\in V_1} = \underbrace{\overrightarrow{Q_2P_2}}_{\in V_2} \in V_1 \bigcap V_2$.

   Нека $V_1 \bigcap V_2 = \{0\}$. Тогава $\overrightarrow{Q_1P_1} = 0 = \overrightarrow{Q_2P_2}$. Следователно $Q_1 = P_1$ и $Q_2 = P_2$, тоест получаваме единствеността на P_1 и P_2.

   Обратно, нека $V_1 \bigcap V_2 \neq \{0\}$. Тогава съществува $v \in V_1 \bigcap V_2$, $v \neq 0$. Тъй като $P_1 \in B_1$ и $v \in V_1$, то съществува единствена точка $Q_1 \in B_1$ такава, че $\overrightarrow{Q_1P_1} = v$. Аналогично, тъй като $P_2 \in B_2$ и $v \in V_2$, то съществува единствена точка $Q_2 \in B_2$ такава, че $\overrightarrow{Q_2P_2} = v$. Поради $v \neq 0$ имаме $Q_1 \neq P_1$, $Q_2 \neq P_2$. Следователно

$$\overrightarrow{Q_1Q_2} = \left(\overrightarrow{Q_1P_1} - \overrightarrow{Q_2P_2}\right) + \overrightarrow{P_1P_2} = (v - v) + \overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{P_1P_2} \perp B_1, B_2.$$

   Значи при $V_1 \bigcap V_2 \neq \{0\}$ точките P_1 и P_2 в 1. не са единствени.

   Стова 3. е доказано.

4. Нека $Q_1 \in B_1$, $Q_2 \in B_2$. Както видяхме по-горе, $\overrightarrow{Q_1Q_2} = \underbrace{\left(\overrightarrow{Q_1P_1} - \overrightarrow{Q_2P_2}\right)}_{\in V_1+V_2} + \underbrace{\overrightarrow{P_1P_2}}_{\in (V_1+V_2)^\perp}$.

   Тогава от теоремата на Питагор получаваме
   $\left|\overrightarrow{Q_1Q_2}\right|^2 = \left|\overrightarrow{Q_1P_1} - \overrightarrow{Q_2P_2}\right|^2 + \left|\overrightarrow{P_1P_2}\right|^2 \geq \left|\overrightarrow{P_1P_2}\right|^2$ и $= \Leftrightarrow \overrightarrow{Q_1P_1} - \overrightarrow{Q_2P_2} = 0$, тоест когато $\overrightarrow{Q_1Q_2} = \overrightarrow{P_1P_2}$. Следователно $|Q_1Q_2| \geq |P_1P_2|$ и $= \Leftrightarrow \overrightarrow{Q_1Q_2} = \overrightarrow{P_1P_2}$, тоест когато $\overrightarrow{Q_1Q_2} \perp B_1, B_2$ (поради 2.). С това е доказано 4..

1. Нека $Q_1 \in B_1$, $Q_2 \in B_2$ са произволни. Нека относно разлагането
   $U = (V_1+V_2) \oplus (V_1+V_2)^\perp$ имаме $\overrightarrow{Q_1Q_2} = \overrightarrow{Q_1Q_2}^\parallel + \overrightarrow{Q_1Q_2}^\perp$. Тъй като $\overrightarrow{Q_1Q_2}^\parallel \in V_1+V_2$, то съществуват $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$ такива, че $\overrightarrow{Q_1Q_2}^\parallel = v_1 + v_2$. От $Q_1 \in B_1$, $v_1 \in V_1$ следва, че съществува единствена точка $P_1 \in B_1$ такава, че $\overrightarrow{Q_1P_1} = v_1$. Аналогично, от $Q_2 \in B_2$, $-v_2 \in V_2$ следва, че съществува единствена точка $P_2 \in B_2$ такава, че $\overrightarrow{Q_2P_2} = -v_2$. Следователно

   $$\begin{aligned} \overrightarrow{P_1P_2} &= \overrightarrow{Q_1Q_2} - \left(\overrightarrow{Q_1P_1} - \overrightarrow{Q_2P_2}\right) = \overrightarrow{Q_1Q_2} - (v_1+v_2) = \overrightarrow{Q_1Q_2} - \overrightarrow{Q_1Q_2}^\parallel \\ &= \overrightarrow{Q_1Q_2}^\perp \in (V_1+V_2)^\perp = V_1^\perp \bigcap V_2^\perp. \end{aligned}$$

   Значи $\overrightarrow{P_1P_2} \perp B_1, B_2$. С това е доказано и 1.. □

Определение 6 Нека B_1 и B_2 са афинни подпространства на A. Тогава $|P_1P_2|$, където $P_1 \in B_1$, $P_2 \in B_2$ и $\overrightarrow{P_1P_2}$ е перпендикулярен на B_1 и B_2, се нарича *разстояние между B_1 и B_2* и се означава с $d(B_1, B_2)$.
(Дефиницията е коректна: Точки P_1 и P_2 с нужните свойства съществуват по 1. на Твърдение 16, а независимостта от избора на P_1 и P_2 следва от 2. на Твърдение 16.)

Пример 5 Нека $B_1 \bigcap B_2 \neq \emptyset$. Тогава, ако $P_0 \in B_1 \bigcap B_2$, то $\overrightarrow{P_0P_0} = 0$ е перпендикулярен на B_1 и B_2 и следователно $d(B_1, B_2) = |P_0P_0| = 0$.

Използвайки въведената в Определение 6 терминология, от Твърдение 16 директно получаваме:

Твърдение 17 *Ако B_1 и B_2 са афинни подпространства на A, то* $\min\{|P_1P_2| : P_1 \in B_1, P_2 \in B_2\}$ *съществува и е равен на разстоянието между B_1 и B_2.*

Забележка 6 Нещата за разстояние от точка до афинно подпространство са частен случай на нещата за разстояние между афинни подпространства: В Твърдение 16, Определение 6 и Твърдение 17 взимаме $B_1 = B$, $B_2 = \{P_0\}$ и получаваме съответно Твърдение 13, Определение 5 и Твърдение 14.

3 Детерминанта на Грам. Обем на паралелепипед и на симплекс

Детерминанта на Грам

Нека U е евклидово линейно пространство.

Определение 7 *Матрица на Грам на системата вектори* $u_1, \dots, u_k \in U$ се нарича $k \times k$-матрицата $G(u_1, \dots, u_k)$, чийто (i,j)-ти елемент е $\langle u_i, u_j \rangle$, тоест

$$G(u_1, \dots, u_k) = \begin{pmatrix} \langle u_1, u_1 \rangle & \langle u_1, u_2 \rangle & \dots & \langle u_1, u_k \rangle \\ \langle u_2, u_1 \rangle & \langle u_2, u_2 \rangle & \dots & \langle u_2, u_k \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle u_k, u_1 \rangle & \langle u_k, u_2 \rangle & \dots & \langle u_k, u_k \rangle \end{pmatrix}.$$

$\det G(u_1, \dots, u_k)$ се нарича *детерминанта на Грам на системата вектори* $u_1, \dots, u_k$.

Лема 1 *Нека* $u_1, \dots, u_k, v \in U$ *и* $v^\perp$ *е ортогоналната към* $l(u_1, \dots, u_k)$ *компонента на* v *(която съществува, защото* $l(u_1, \dots, u_k)$ *е крайномерно). Тогава*
$\det G(u_1, \dots, u_k, v) = \det G(u_1, \dots, u_k). \left|v^\perp\right|^2$.

Доказателство: Тъй като $l(u_1, \dots, u_k)$ е крайномерно, то

$$U = l(u_1, \dots, u_k) \oplus l(u_1, \dots, u_k)^\perp.$$

Нека относно това разлагане $v = v^\parallel + v^\perp$. Тъй като $v^\parallel \in l(u_1, \dots, u_k)$, то $v^\parallel = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j u_j$ за някои $\lambda_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, k$. Имаме

$$\begin{aligned} \langle u_i, v \rangle &= \left\langle u_i, v^\parallel \right\rangle + \underbrace{\left\langle u_i, v^\perp \right\rangle}_{=0} = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \langle u_i, u_j \rangle, \qquad i = 1, \dots, k, \\ \langle v, v \rangle &= \left\langle v, v^\parallel \right\rangle + \left\langle v, v^\perp \right\rangle = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \langle v, u_j \rangle + \underbrace{\left\langle v^\parallel, v^\perp \right\rangle}_{=0} + \left\langle v^\perp, v^\perp \right\rangle = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \langle v, u_j \rangle + \left|v^\perp\right|^2. \end{aligned}$$

Значи $(k+1)$-вият стълб на $G(u_1, \dots, u_k, v)$ е

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j (j\text{-ти стълб на } G(u_1, \dots, u_k, v)) + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \left|v^\perp\right|^2 \end{pmatrix}.$$

Следователно, изваждайки $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j$(j-ти стълб на $G(u_1, \ldots, u_k, v)$) от $(k+1)$-вия стълб на $G(u_1, \ldots, u_k, v)$, получаваме

$$\begin{aligned}
\det G(u_1, \ldots, u_k, v) &= \det \begin{pmatrix} \langle u_1, u_1 \rangle & \ldots & \langle u_1, u_k \rangle & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \langle u_k, u_1 \rangle & \ldots & \langle u_k, u_k \rangle & 0 \\ \langle v, u_1 \rangle & \ldots & \langle v, u_k \rangle & \left| v^{\perp} \right|^2 \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} \langle u_1, u_1 \rangle & \ldots & \langle u_1, u_k \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle u_k, u_1 \rangle & \ldots & \langle u_k, u_k \rangle \end{pmatrix} . \left| v^{\perp} \right|^2 = \det G(u_1, \ldots, u_k) . \left| v^{\perp} \right|^2 . \quad \square
\end{aligned}$$