Задача. Да се намери хомогенна система, пространството от решенията на която съвпада с $U = l(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots)$, където

а) $\mathbf{a}_1 = (1, 1, -4, 5)$, $\mathbf{a}_2 = (2, 1, -1, 3)$, $\mathbf{a}_3 = (3, 1, 2, 1)$.

Решение. Разглеждаме хомогенната система с коефициенти координатите на $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, а именно

$$\left|\begin{array}{rrrrrrrrr} x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 & + & 5x_4 & = & 0\\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & 0\\ 3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 0\end{array}\right. \qquad (1)$$

и ѝ намираме ФСР.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 & 5\\ 2 & 1 & -1 & 3\\ 3 & 1 & 2 & 1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 & 5\\ 0 & -1 & 7 & -7\\ 0 & -2 & 14 & -14\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 & 5\\ 0 & 1 & -7 & 7\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Полагаме $x_3 = p$, $x_4 = q$, тогава $x_2 = 7p - 7q$ и $x_1 = -7p + 7q + 4p - 5q = -3p + 2q$ и множеството от решенията на хомогенната система (1) е

$$\{(-3p + 2q, 7p - 7q, p, q) \mid p, q \in F\}$$

$$\left.\begin{array}{ll} p = 1, q = 0: & \mathbf{b}_1 = (-3, 7, 1, 0)\\ p = 0, q = 1: & \mathbf{b}_2 = (2, -7, 0, 1)\end{array}\right\} \text{ФСР}$$

Тогава търсената хомогенна система е с коефициенти координатите на $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, а именно

$$\left|\begin{array}{rrrrrrrr} - & 3x_1 & + & 7x_2 & + & x_3 & & = 0\\ & 2x_1 & - & 7x_2 & & & + \; x_4 & = 0\end{array}\right.$$

Действително, нека W е пространството от решенията на последната система. Тогава $\dim W = 2 = \dim U$. При това, $U \subseteq W$. Наистина, $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ са решения на (1), в частност удовлетворяват първото ѝ уравнение, т.е. $\mathbf{a}_1 \in W$. Аналогично $\mathbf{a}_2 \in W$. Следователно всеки вектор от U (бидейки линейна комбинация на $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$) е също решение на последната хомогенна система. Така $U \subseteq W$ и значи $U = W$.

б) $\mathbf{a}_1 = (1, 2, -1, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (-3, -5, 2, 1)$, $\mathbf{a}_3 = (1, 2, 3, 4)$, $\mathbf{a}_4 = (1, 3, 6, 11)$.

Решение.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1\\ -3 & -5 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 3 & 6 & 11\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 4\\ 0 & 0 & 4 & 3\\ 0 & 1 & 7 & 10\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 4\\ 0 & 0 & 4 & 3\\ 0 & 0 & 8 & 6\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 4\\ 0 & 0 & 4 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Полагаме $x_4 = p$, тогава $x_3 = -\dfrac{3p}{4}$, $x_2 = -\dfrac{3p}{4} - 4p = -\dfrac{19p}{4}$, $x_1 = \dfrac{38p}{4} - \dfrac{3p}{4} - p = \dfrac{31p}{4}$ и множеството от решенията на хомогенната система с коефициенти координатите на $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ е

$$\left\{\left(\frac{31p}{4}, -\frac{19p}{4}, -\frac{3p}{4}, p\right) \mid p \in F\right\}$$

$$p = 4: \mathbf{b} = (31, -19, -3, 4) \;\text{ е ФСР.}$$

Следователно търсената хомогенна система е

$$U: \left| \; 31x_1 - 19x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0 \right. .$$

Задача. Нека $U = l(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$, където $\mathbf{a}_1 = (1,1,2,2)$, $\mathbf{a}_2 = (1,-1,2,-2)$, а

$$W : \left| \begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & - & 2x_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

Да се намерят базиси на $U + W$ и $U \cap W$.

Решение. За намирането на базис на $U + W$ е удобно всяко едно от подпространствата U и W на F^4 да е зададено като линейна обвивка на система вектори. За целта намираме ФСР на W.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} (-1) \\ + \quad |:(-4) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Полагаме $x_2 = p$, $x_4 = q$ и тогава $x_3 = -q$, $x_1 = -p$. Следователно

$$W = \{(-p, p, -q, q) \mid p, q \in F\}$$

$$\left.\begin{array}{ll} p=1, q=0: & \mathbf{c}_1 = (-1,1,0,0) \\ p=0, q=1: & \mathbf{c}_2 = (0,0,-1,1) \end{array}\right\} \text{ФСР, т.е. базис на } W$$

Тогава $U + W = l(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) + l(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2) = l(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2)$

$$\begin{array}{c} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{c}_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} (-1) \\ + \\ + \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ |:(-2) \\ + \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ |:2 \\ + \end{matrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{f}_3 \\ \end{array}$$

Следователно векторите $\mathbf{f}_1 = (1,1,2,2)$, $\mathbf{f}_2 = (0,1,0,2)$, $\mathbf{f}_3 = (0,0,1,-1)$ образуват базис на $U + W$.

За намиране на базис на $U \cap W$ е удобно всяко едно от подпространствата U и W на F^4 да е зададено като пространство от решенията на хомогенна система. За целта разглеждаме хомогенната система с коефициенти координатите на $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ и ѝ намираме ФСР.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} (-1) \\ + \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ |:(-2) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Полагаме $x_3 = p$, $x_4 = q$, тогава $x_2 = -2q$, $x_1 = 2q - 2p - 2q = -2p$, така че множеството от решенията на разглежданата хомогенна система е

$$\{(-2p, -2q, p, q) \mid p, q \in F\}.$$

$$\left.\begin{array}{ll} p=1, q=0: & \mathbf{c}_1 = (-2,0,1,0) \\ p=0, q=1: & \mathbf{c}_2 = (0,-2,0,1) \end{array}\right\} \text{ФСР}$$

и тогава

$$U : \left| \begin{array}{ccccccccc} - & 2x_1 & & & + & x_3 & & = & 0 \\ & & - & 2x_2 & & & + \; x_4 & = & 0 \end{array} \right. .$$

Оттук

$$U \cap W : \left| \begin{array}{ccccccccc} - & 2x_1 & & & + & x_3 & & & = \; 0 \\ & & - & 2x_2 & & & + & x_4 & = \; 0 \\ & x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & = \; 0 \\ & x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & - & 2x_4 & = \; 0 \end{array} \right. .$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} + \\ \\ 2 \quad (-1) \\ + \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ |.(-1) \\ + \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ |:5 \quad 4 \\ + \end{matrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Полагаме $x_4 = p$, тогава $x_3 = -p$, $x_2 = \dfrac{p}{2}$, $x_1 = -\dfrac{p}{2}$ и

$$U \cap W = \left\{ \left(-\frac{p}{2}, \frac{p}{2}, -p, p \mid p \in F \right) \right\}$$

$$p = 2: \quad \mathbf{d} = (-1,1,-2,2) \text{ е ФСР, т.е. базис на } U \cap W.$$

Задача. Нека $U = l(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$, $W = l(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ където $\mathbf{a}_1 = (1, -1, 0, 2, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (0, 1, -2, 0, 0)$, $\mathbf{a}_3 = (2, 1, 0, 0, 1)$, $\mathbf{b}_1 = (1, 0, -2, 2, 0)$, $\mathbf{b}_2 = (2, -1, -2, 4, 0)$, $\mathbf{b}_3 = (1, 2, 1, 0, 1)$.

Да се намерят базиси на $U + W$ и $U \cap W$.

Решение. $U + W = l(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$.

$$\begin{array}{c} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -16 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{f}_3 \\ \\ \\ \mathbf{f}_4 \end{array}$$

Следователно векторите $\mathbf{f}_1 = (1, -1, 0, 2, 0)$, $\mathbf{f}_2 = (0, 1, -2, 0, 0)$, $\mathbf{f}_3 = (0, 0, 1, 2, 0)$, $\mathbf{f}_4 = (0, 0, 0, -16, 1)$ са базис на $U + W$.

За $U \cap W$ представяме U и W като пространства от решения на хомогенна система. За U разглеждаме хомогенна система с коефиценти координатите на $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Полагаме $x_3 = p$, $x_4 = q$, тогава $x_5 = -6p + 4q$, $x_2 = 2p$, $x_1 = 2p - 2q$ и множеството от решенията на разглежданата хомогенна система е

$$\{(2p - 2q, 2p, p, q, -6p + 4q) \mid p, q \in F\}$$

$$\left.\begin{array}{ll} p = 1, q = 0: & \mathbf{c}_1 = (2, 2, 1, 0, -6) \\ p = 0, q = 1: & \mathbf{c}_2 = (-2, 0, 0, 1, 4) \end{array}\right\} \text{ФСР}$$

Следователно

$$U : \left| \begin{array}{rcccccccccl} 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & & - & 6x_5 & = 0 \\ -2x_1 & & & & & + & x_4 & + & 4x_5 & = 0 \end{array} \right. .$$

За W разглеждаме хомогенна система с коефиценти координатите на $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Полагаме $x_3 = p$, $x_4 = q$, тогава $x_5 = -7p + 2q$, $x_2 = 2p$, $x_1 = 2p - 2q$ и множеството от решенията на разглежданата хомогенна система е

$$\{(2p - 2q, 2p, p, q, -7p + 2q) \mid p, q \in F\}$$

$$\left.\begin{array}{ll} p = 1, q = 0: & \mathbf{d}_1 = (2, 2, 1, 0, -7) \\ p = 0, q = 1: & \mathbf{d}_2 = (-2, 0, 0, 1, 2) \end{array}\right\} \text{ФСР}$$

Следователно

$$W : \left| \begin{array}{rcccccccccl} 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & & - & 7x_5 & = 0 \\ -2x_1 & & & & & + & x_4 & + & 2x_5 & = 0 \end{array} \right. .$$

Оттук

$$U \cap W : \left| \begin{array}{rcccccccccl} 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & & - & 6x_5 & = 0 \\ -2x_1 & & & & & + & x_4 & + & 4x_5 & = 0 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & & - & 7x_5 & = 0 \\ -2x_1 & & & & & + & x_4 & + & 2x_5 & = 0 \end{array} \right. .$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 & -6 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & -7 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Имаме $x_5 = 0$. Полагаме $x_2 = p$, $x_3 = q$, тогава $x_4 = -2p - q$, $x_1 = \dfrac{-2p-q}{2}$. Следователно

$$U \cap W = \left\{ \left(\frac{-2p-q}{2}, p, q, -2p-q, 0 \right) \mid p, q \in F \right\}.$$

$$\left.\begin{array}{ll} p=1, q=0: & \mathbf{f}_1 = (-1, 1, 0, -2, 0) \\ p=0, q=1: & \mathbf{f}_2 = (-1, 0, 2, -2, 0) \end{array}\right\} \text{ФСР, т.е. базис на } U \cap W.$$

Задача. Нека

$$\begin{array}{rcl} U &=& \{(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \mid a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 0\} \\ W &=& \{(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) \mid b_3 + b_4 + b_5 = b_1 + b_2\} \end{array}$$

са подмножества на F^5. Докажете, че U и W са подпространства на F^5. Да се определят размерностите им и да се намери базис на $U \cap W$.

Решение. Имаме

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \in U & \Longleftrightarrow & a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 0 \\ & \Longleftrightarrow & \mathbf{a} \text{ е решение на хомогенната система} \\ & & |\, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0. \end{array}$$

Следователно

$$U : \left|\, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \right.$$

Аналогично

$$W : \left|\, x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 0 \right.$$

Следователно $\dim U = \dim W = 4$.

$$U \cap W : \left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 0 \end{array} \right.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Полагаме $x_2 = p$, $x_4 = q$, $x_5 = r$, тогава $x_3 = -q - r$, $x_1 = -p + q + r - q - r = -p$ и

$$U \cap W = \{(-p, p, -q-r, q, r) \mid p, q, r \in F\}.$$

$$\left.\begin{array}{ll} p=1, q=0, r=0: & \mathbf{c}_1 = (-1, 1, 0, 0, 0) \\ p=0, q=1, r=0: & \mathbf{c}_2 = (0, 0, -1, 1, 0) \\ p=0, q=0, r=1: & \mathbf{c}_3 = (0, 0, -1, 0, 1) \end{array}\right\} \text{ФСР, т.е. базис на } U \cap W$$

Оттук $\dim(U + W) = 4 + 4 - 3 = 5 = \dim F^5$ и значи $U + W = F^5$.

Задача. Нека $V = M_n(F)$, S — множеството от всички симетрични матрици (т.е. $A^t = A$), T — множеството от всички антисиметрични матрици (т.е. $A^t = -A$). Докажете, че $S, T \leq V$ и $V = S \oplus T$.

Решение. Имаме $\emptyset \neq S \subseteq V$, тъй като $\mathbf{0} \in S$. Нека $A, B \in S$, т.е. $A^t = A$, $B^t = B$, и нека $\lambda \in F$. Тогава

$$\begin{array}{rcl} (A+B)^t &=& A^t + B^t = A + B, \text{ т.е. } A + B \in S, \\ (\lambda A)^t &=& \lambda A^t = \lambda A, \text{ т.е. } \lambda A \in S. \end{array}$$

Следователно $S \leq V$. Аналогично се установява $T \leq V$.

Нека $A = (a_{ij}) \in M_n(F)$. Дефинираме матрици $B = (b_{ij})_{n \times n}$ и $C = (c_{ij})_{n \times n}$ по следния начин

$$b_{ij} = \frac{a_{ij} + a_{ji}}{2}, \qquad c_{ij} = \frac{a_{ij} - a_{ji}}{2}, \ 1 \leq i, j \leq n.$$

Тогава $B \in S$ (тъй като $b_{ji} = b_{ij}$), $C \in T$ (тъй като $c_{ji} = -c_{ij}$) и $A = B + C$. Следователно $V = S + T$.

Нека сега $D \in S \cap T$. Тогава $d_{ji} = d_{ij} = -d_{ij}$, $1 \leq i, j \leq n$, следователно $2d_{ij} = 0$ и значи $d_{ij} = 0$, $1 \leq i, j \leq n$. Оттук $D = \mathbf{0}$, така че $S \cap T = \{\mathbf{0}\}$. Окончателно $V = S \oplus T$.

Задача. Нека V е линейно пространство над F, $\dim V = n$ и $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ е базис на V. Докажете, че

$$\begin{array}{rcl} U & = & \{\alpha_1\mathbf{e}_1 + \dots + \alpha_n\mathbf{e}_n \mid \alpha_1 + \dots + \alpha_n = 0\} \\ W & = & \{\beta_1\mathbf{e}_1 + \dots + \beta_n\mathbf{e}_n \mid \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_n\} \end{array}$$

са подпространства на V и $V = U \oplus W$.

Решение. Нека $\mathbf{v} \in V$ и нека $\mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{e}_1 + \dots + \lambda_n\mathbf{e}_n$. Да означим с $\lambda = \dfrac{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}{n}$. Тогава

$$\mathbf{v} = \underbrace{(\lambda_1 - \lambda)\mathbf{e}_1 + \dots + (\lambda_n - \lambda)\mathbf{e}_n}_{\mathbf{u} \in U} + \underbrace{\lambda\mathbf{e}_1 + \dots + \lambda\mathbf{e}_n}_{\mathbf{w} \in W}.$$

Следователно $V = U + W$.

Нека сега $\mathbf{v} \in U \cap W$. Тогава $\mathbf{v} = \gamma\mathbf{e}_1 + \dots + \gamma\mathbf{e}_n$ (тъй като $\mathbf{v} \in W$), а от друга страна $n\gamma = 0$ (тъй като $\mathbf{v} \in U$). Следователно $\gamma = 0$ и значи $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, т.е. $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$.

Задача. Нека $U = l(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$, $W = l(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ са подпространства на F^4, където $\mathbf{a}_1 = (2, 3, 11, 5)$, $\mathbf{a}_2 = (1, 1, 5, 2)$, $\mathbf{a}_3 = (0, 1, 1, 1)$, $\mathbf{b}_1 = (2, 1, 3, 2)$, $\mathbf{b}_2 = (1, 1, 3, 4)$, $\mathbf{b}_3 = (5, 2, 6, 2)$. Да се докаже, че $F^4 = U \oplus W$. Да се представи векторът $\mathbf{v} = (2, 0, 0, 3)$, като сума $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$, $\mathbf{u} \in U$, $\mathbf{w} \in W$

Решение.

$$\begin{array}{c} \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 11 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \end{array}$$

Следователно векторите $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 5, 2)$, $\mathbf{u}_2 = (0, 1, 1, 1)$ образуват базис на U.

$$\begin{array}{c} \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 6 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -3 & -6 \\ 0 & -3 & -9 & -18 \end{pmatrix} \mid .(-1) \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{w}_2 \\ \end{array}$$

Следователно вектори $\mathbf{w}_1 = (1, 1, 3, 4)$, $\mathbf{w}_2 = (0, 1, 3, 6)$ образуват базис на W.

Тогава $U + W = l(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) + l(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) = l(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$

$$\begin{array}{c} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{w}_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Следователно $\dim(U + W) = 4 = \dim F^4$, откъдето $U + W = F^4$. При това, $\dim(U \cap W) = \dim(U + W) - \dim U - \dim W = 0$, т.е. $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$, така че $F^4 = U \oplus W$.

Векторите $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{w}_1\mathbf{w}_2$ са базис на F^4 и нека $\alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2 + \alpha_3\mathbf{w}_1 + \alpha_4\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}$.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{w}_1 & \mathbf{w}_2 & \mathbf{v} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 6 & 3 \end{array}\right) \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -10 \\ 0 & 1 & 2 & 6 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 1 \end{array}\right) \mid : -2 \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & -7 \end{array}\right) \mid : 7 \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right),$$

откъдето $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = -1$, $\alpha_3 = 3$, $\alpha_4 = -1$. Следователно

$$\mathbf{v} = -1.\mathbf{u}_1 - 1.\mathbf{u}_2 + 3\mathbf{w}_1 - 1.\mathbf{w}_2 = \underbrace{-(1, 1, 5, 2) - (0, 1, 1, 1)}_{\mathbf{u} \in U} + \underbrace{3(1, 1, 3, 4) - (0, 1, 3, 6)}_{\mathbf{w} \in W} = (-1, -2, -6, -3) + (3, 2, 6, 6) = \mathbf{u} + \mathbf{w}.$$