Развитие на det по ред и по стълб 1

Пример

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 5 \\ 7 & -4 & 6 \end{vmatrix} = 4\cdot(-1)^3 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} + 5(-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= -14\cdot 4 + 19\cdot 1 + 29\cdot 5$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 14 & 21 & 35 \\ 7 & -4 & 6 \end{vmatrix} = 14(-1)^3 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} + 21(-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} + 35(-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= -14\cdot 14 + 19\cdot 21 + 29\cdot 35$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ x & y & z \\ 7 & -4 & 6 \end{vmatrix} = x\cdot(-1)^3 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} + y(-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} + z(-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= -14x + 19y + 29z$$

(2)

T/ (фалшиво развитие)

Нека $A \in M_{n\times n}(F)$ и $i \neq j$, $i,j \in \{1,\dots,n\}$

Тогава:

$$0 = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \dots + a_{in}A_{jn}$$ (фалшиво развитие по ред)

$$0 = a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \dots + a_{ni}A_{nj}$$ (фалшиво разв. по стълб)

Д-во

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ a_{j1} & \dots & a_{jn} \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{j1}A_{j1} + \dots + a_{jn}A_{jn}$$

$$0 = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$ развиваме по ред с №j

$$= a_{i1}A_{j1} + \dots + a_{in}A_{jn} = 0$$

за тези две det адюнгир. количества на j-ти ред са равни

за стълбове е аналогично

Детерминанта на Вандермонд

Започвайки от последния ред от всеки ред вадим предишния умножен по a_1

$$W(a_1,\dots,a_n)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2-a_1 & \cdots & a_n-a_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_2^{n-2}-a_1a_2^{n-3} & \cdots & a_n^{n-2}-a_1a_n^{n-3} \\ 0 & a_2^{n-1}-a_1a_2^{n-2} & \cdots & a_n^{n-1}-a_1a_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= 1A_{11}+0A_{21}+\dots+0A_{n1} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_2-a_1 & \cdots & a_n-a_1 \\ a_2(a_2-a_1) & \cdots & a_n(a_n-a_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_2^{n-2}(a_2-a_1) & \cdots & a_n^{n-2}(a_n-a_1) \end{vmatrix} = (a_2-a_1)\cdots(a_n-a_1)\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ a_2 & & a_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_2^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$W(a_1,\dots,a_n)=(a_2-a_1)\cdots(a_n-a_1)\,W(a_2,\dots,a_n)=$$

$$=(a_2-a_1)\cdots(a_n-a_1)(a_3-a_2)\cdots(a_n-a_2)\,W(a_3,\dots,a_n)=$$

$$= \cdots$$

$$=(a_2-a_1)\cdots(a_n-a_1)(a_3-a_2)\cdots(a_n-a_2)\cdots(a_n-a_{n-1})\underbrace{W(a_n)}_{=1}$$

$$W(a_1,\dots,a_n)=\prod_{i>j}(a_i-a_j)$$

Формули на Крамер

(4)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 & | t_1 \\ \dots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = b_n & | t_n \end{cases}$$

Нека матр. A на систем. е неособена ($\det A \neq 0$)

$\det A = \Delta \neq 0$

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \dots + a_{ni}A_{nj} = \begin{cases} \det A, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

$$(a_{11}t_1 + \dots + a_{n1}t_n)x_1 + (a_{12}t_1 + \dots + a_{n2}t_n)x_2 + \dots + (a_{1n}t_1 + \dots + a_{nn}t_n)x_n = b_1t_1 + \dots + b_nt_n$$

за $t_1 = A_{11}; t_2 = A_{21}; \dots ; t_n = A_{n1}$

$$(\underbrace{a_{11}A_{11} + \dots + a_{n1}A_{n1}}_{=\Delta})x_1 + (\underbrace{a_{12}A_{11} + \dots + a_{n2}A_{n1}}_{=0})x_2 + \dots + (\underbrace{a_{1n}A_{11} + \dots + a_{nn}A_{n1}}_{=0})x_n = b_1A_{11} + \dots + b_nA_{n1}$$

$$\Delta x_1 = b_1A_{11} + \dots + b_nA_{n1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ b_n & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Delta_n$$

в Δ се заменя първи стълб със стълба от свободни членове

$$\Rightarrow \Delta x_1 = \Delta_1 \Rightarrow x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$$

за да определим x_k, използваме адюнгираните количества на k-ти стълб в det A 5

$t_1 = A_{1k}, \dots, t_n = A_{nk}$

$$(a_{11}A_{1k} + \dots + a_{n1}A_{nk})x_1 + \dots + (a_{1k}A_{1k} + \dots + a_{nk}A_{nk})x_k + \dots + (a_{1n}A_{1k} + \dots + a_{nn}A_{nk})x_n = b_1A_{1k} + \dots + b_nA_{nk}$$

$$0x_1 + \dots + \Delta x_k + \dots + 0x_n = \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1,k-1} & b_1 & a_{1,k+1} \dots a_{1n} \\ \dots & & \dots \\ a_{n1} \dots a_{n,k-1} & b_n & a_{n,k+1} \dots a_{nn} \end{vmatrix} = \Delta_k$$

$$\Rightarrow \Delta x_k = \Delta_k \Rightarrow \boxed{x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}}$$

Δ_k се получава от Δ, като се замести k-ти стълб със стълба от свободни членове

I/ (формули на Крамер)

$$(*) \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Когато матрицата на системата (*) има $\Delta = \det A \neq 0$, тогава системата има единствено решение, което се пресмята:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta};\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$$

Връзка между минори на матрица и ранг

(6)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix}; \quad s \le \min\{k, n\} \quad \left| \begin{array}{l} \{i_1, \ldots, i_s\} \subset \{1, \ldots, k\} \\ \{j_1, \ldots, j_s\} \subset \{1, \ldots, n\} \end{array} \right.$$

Вземат се общите елементи, които са в пресечните точки на редовете с номера $i_1, \ldots, i_s$ със стълбовете с номера $j_1 \ldots j_s$

$$M_s = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \cdots & a_{i_1 j_s} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \cdots & a_{i_2 j_s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_s j_1} & a_{i_s j_2} & \cdots & a_{i_s j_s} \end{vmatrix}$$ минор от ред s

За Матрицата $A_{k \times n}$ има $\binom{k}{s}$ начина да се изберат s ~~стълба~~ реда и $\binom{n}{s}$ начина да се изберат s стълба

$\Rightarrow$ ~~За~~ Матрицата $A_{k \times n}$ има $\binom{k}{s} \cdot \binom{n}{s}$ минори от ред s

7

I/ Нека $A \in M_{k \times n}(F)$. Тогава е изпълнено:

$r(A) = r \iff$ съществува минор на A, който е ненулев от ред r и всеки минор от ред $r+1$ е нулев.

(⇒) $r(A) = r \Rightarrow r(\text{rows}A) = r \Rightarrow$ МЛНП на редовете има r реда с номера $i_1, \dots, i_r$

$r(\text{columns}A) = r \Rightarrow$ МЛНП на стълбовете има номера $j_1, \dots, j_r$

$$M_r = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & \cdots & a_{i_1 j_r} \\ - & - & - \\ a_{i_r j_1} & \cdots & a_{i_r j_r} \end{vmatrix} \neq 0$$

Всеки $r+1$ реда са линейно зависими и всеки $r+1$ стълба са лин. зависими

$\Rightarrow$ във всеки минор от ред $r+1$ има ЛЗ редове $\Rightarrow$ всички минори от ред $r+1$ са нулеви.

Минора определен от тези стълбове които образуват МЛНП на стълбовете и от тези редове, които образуват МЛНП на редовете се нарича $\boxed{\text{базисен минор.}}$

($\Leftarrow$) Нека $i_1, \dots, i_r$ и $j_1 \dots j_r$ са такива че определят ненулев минор и всеки минор от ред $r+1$ е нулев.

$\Rightarrow$ Редовете $i_1, \dots, i_r$ са ЛНЗ, също и стълбовете с номера $j_1 \dots j_r$ са ЛНЗ

$$M_r = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & \cdots & a_{i_1 j_r} \\ - & - & - \\ a_{i_r j_1} & \cdots & a_{i_r j_r} \end{vmatrix} \neq 0$$

Нека $t \in \{1, \dots k\}$ и $s \in \{1, \dots n\}$ произволни индекси

M_{r+1} е или минор от ред $r+1$ и $M_{r+1} = 0$ или M_{r+1} има равни редове/стълбове $= 0$

развива се по последен ред

$$M_{r+1} = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & \cdots & a_{i_1 j_r} & a_{i_1 s} \\ - & - & - & - \\ a_{i_r j_1} & \cdots & a_{i_r j_r} & a_{i_r s} \\ a_{t j_1} & \cdots & a_{t j_r} & a_{t s} \end{vmatrix} = a_{t j_1} A_{r+1,1} + a_{t j_2} A_{r+1,2} + \dots + a_{t j_r} A_{r+1,r} + a_{ts} A_{r+1,r+1}$$

адюнгираните кол-ва не зависят от избора на t / зависят само от $i_1 \dots i_r$)

$$0 = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{1 j_1} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{k j_1} \end{pmatrix}}_{C_{j_1}} A_{r+1,1} + \dots + \underbrace{\begin{pmatrix} a_{1 j_r} \\ \vdots \\ a_{k j_r} \end{pmatrix}}_{C_{j_r}} A_{r+1,r} + \underbrace{\begin{pmatrix} a_{1s} \\ \vdots \\ a_{ks} \end{pmatrix}}_{C_s} \underbrace{A_{r+1,r+1}}_{\substack{= M_r \\ \neq 0}}$$

$C_s = -\frac{1}{M_r}\left(A_{r+1,1} C_{j_1} + \dots + A_{r+1,r} C_{j_r}\right)$

$\Rightarrow C_s \in \ell(C_{j_1}, \dots, C_{j_r})$

$\Rightarrow C_{j_1} \dots C_{j_r}$ е МЛНП на стълбовете