5. Редове от реални числа. Сходящи редове. Аритметични действия със сходящи редове. Необходимо условие за сходимост на редове. Необходимо и достатъчно условие на Коши за сходимост на редове

Сума на безбройно много реални числа

Дадена е редицата $\{a_n\}$.

Образуваме сумите:

$$\begin{aligned} S_1 &:= a_1, \\ S_2 &:= a_1 + a_2, \\ &\dots \\ S_n &:= a_1 + a_2 + \dots + a_n, \\ &\dots \end{aligned} \tag{1}$$

Така се получаваме редицата

$$S_1, S_2, \dots, S_n, \dots \tag{2}$$

Ако тя е сходяща, естествено е да разглеждаме границата ѝ като сума на безбройно многото числа $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$

Редове от реални числа

Дефиниция

Всеки израз от вида

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \quad \text{или} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \tag{3}$$

където $a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, ще наричаме безкраен ред от реални числа (накратко, ред).

Числата $a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, се наричат членове на реда (3).

Сумата $S_n := a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ се нарича
n-та частична сума на реда (3).

Дефиниция — продължение

Ако $\{S_n\}$ е сходяща, казваме, че редът (3) е сходящ, а нейната граница $S := \lim S_n$ наричаме сума на този ред

и пишем

$$S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \quad \text{или} \quad S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{4}$$

Ред, който не е сходящ, се нарича разходящ.
Разходящите редове нямат сума.

Пример 1

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \cdots$$

Имаме

$$S_n := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \tag{5}$$

$$\Longrightarrow \quad \lim S_n = 2 \tag{6}$$

$$\Longrightarrow \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \cdots = 2 \tag{7}$$

или още

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2. \tag{8}$$

Пример 2

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + 1 - 1 + \cdots$$

Имаме

$$S_{2n-1} = 1 \quad \text{и} \quad S_{2n} = 0. \tag{9}$$

и редицата от частични суми на реда $\{S_n\}$ има вида

$$1, 0, 1, 0, \ldots, 1, 0, \ldots \tag{10}$$

Следователно $\{S_n\}$ е разходяща $\implies$ редът е разходящ и няма сума.

Елементарни свойства на редовете

Твърдение.

Добавянето или премахването на краен брой членове на даден ред не променя неговата сходимост (макар че изобщо[a] променя сумата му).

[a] т.е. в общия случай

Аритметични действия — сума

Теорема 1.

Ако $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ са сходящи, то сходящ е $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$, при това

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n. \tag{11}$$

Д-во: Да положим

$$A := \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad A_n := a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$
$$B := \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \quad B_n := b_1 + b_2 + \cdots + b_n.$$

Тогава $A = \lim A_n$ и $B = \lim B_n$.

За частичните суми на третия ред имаме

$$S_n := \sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k \\ = A_n + B_n \tag{12}$$

$$\Longrightarrow \quad \lim S_n = \lim A_n + \lim B_n = A + B. \tag{13}$$

$\Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ е сходящ и

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Аритметични действия — произведение с число

Теорема 2.

Ако $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ и $c \in \mathbb{R}$, то сходящ е $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$, при това

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{14}$$

Д-во: В означенията на предното д-во имаме

$$\begin{aligned} C_n &:= \sum_{k=1}^{n} ca_k = c \sum_{k=1}^{n} a_k \\ &= cA_n \end{aligned} \tag{15}$$

$$\Longrightarrow \quad \lim C_n = \lim(cA_n) = c \lim A_n = cA. \tag{16}$$

$\Longrightarrow \quad \sum^{\infty} ca_n$ е сходящ и е в сила (14).

НУ за сходимост на редове

Теорема 3.

Ако $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ, то $\lim a_n = 0$.

Обратното не е вярно. Пример: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ е разходящ.

Следствие.

Ако $\lim a_n \neq 0$ (в частност, ако границата не съществува), то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е разходящ.

Д-во на Теорема 3: Имаме $a_n = S_n - S_{n-1}$, $n = 2, 3, \ldots$.
Следователно $\lim a_n = \lim S_n - \lim S_{n-1} = S - S = 0$.

НДУ на Коши за сходимост на редове

Теорема 4 (НДУ на Коши за сходимост на редове).

Редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ

$$\iff \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{R} : \quad \left| \sum_{n=k}^{k+p} a_n \right| < \varepsilon \quad \text{при} \quad k > \nu, \quad p \in \mathbb{N}.$$

Д-во: Прилагаме НДУ на Коши за сходимост на редици към редицата от частичните суми на реда (самостоятелно).

Пример

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \cdots$$

За "опашката" на реда имаме

$$\begin{aligned} \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} &= \frac{1}{2^k} \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-k-1}} \\ &= \frac{1}{2^k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \\ &= \frac{1}{2^{k-1}} \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty. \end{aligned} \tag{17}$$