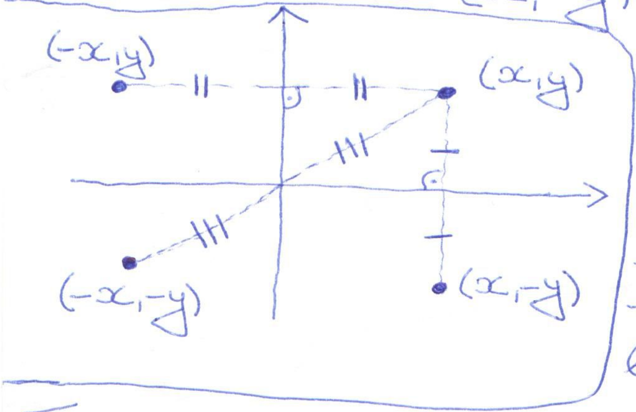
(1)

Упражнение 3
Определени интеграли, част 3

Зад. 1 Намерете лицето $S(T)$ на фигурата T, заградена от елипсата $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0, b>0)$.

Решение: Ако точката (x,y) лежи на елипсата, то и точките $(x,-y)$, $(-x,y)$, $(-x,-y)$ също лежат.

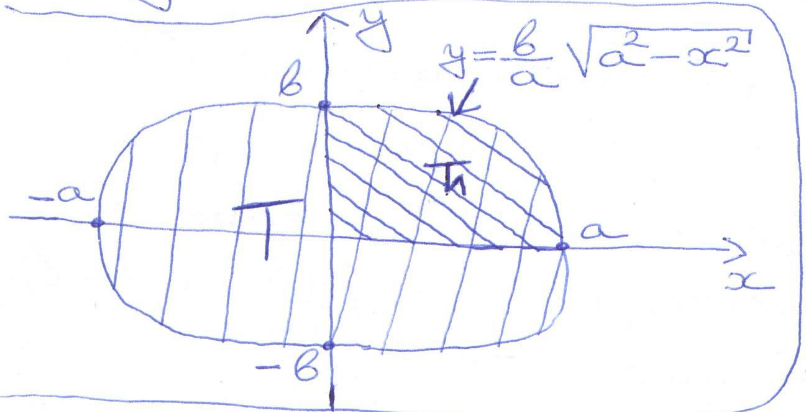


Сл. елипсата е симетрична спрямо абсцисната ос, ординатната ос и координатното начало и за да я построим е достатъчно да построим частта от нея, която лежи в 1-ви квадрант.

При $x\geq 0$ и $y \geq 0$ имаме

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow \frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2} \Leftrightarrow y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},\ x\in[0,a].$$



$$S(T)=4S(T_1)= \quad \boxed{x=a\sin t}$$

$$=4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx =$$

$$=\frac{4b}{a}\int_0^{\pi/2}\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\,d(a\sin t)=$$

$$=\frac{4b}{a}\int_0^{\pi/2} a\cos t\,d(a\sin t)=$$

$$=4ab\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt = 2ab\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)\,dt=$$

$$=2ab\Big(t\Big|_0^{\pi/2}+\underbrace{\frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^{\pi/2}}_{=0}\Big)=2ab\cdot\frac{\pi}{2}=\pi ab$$

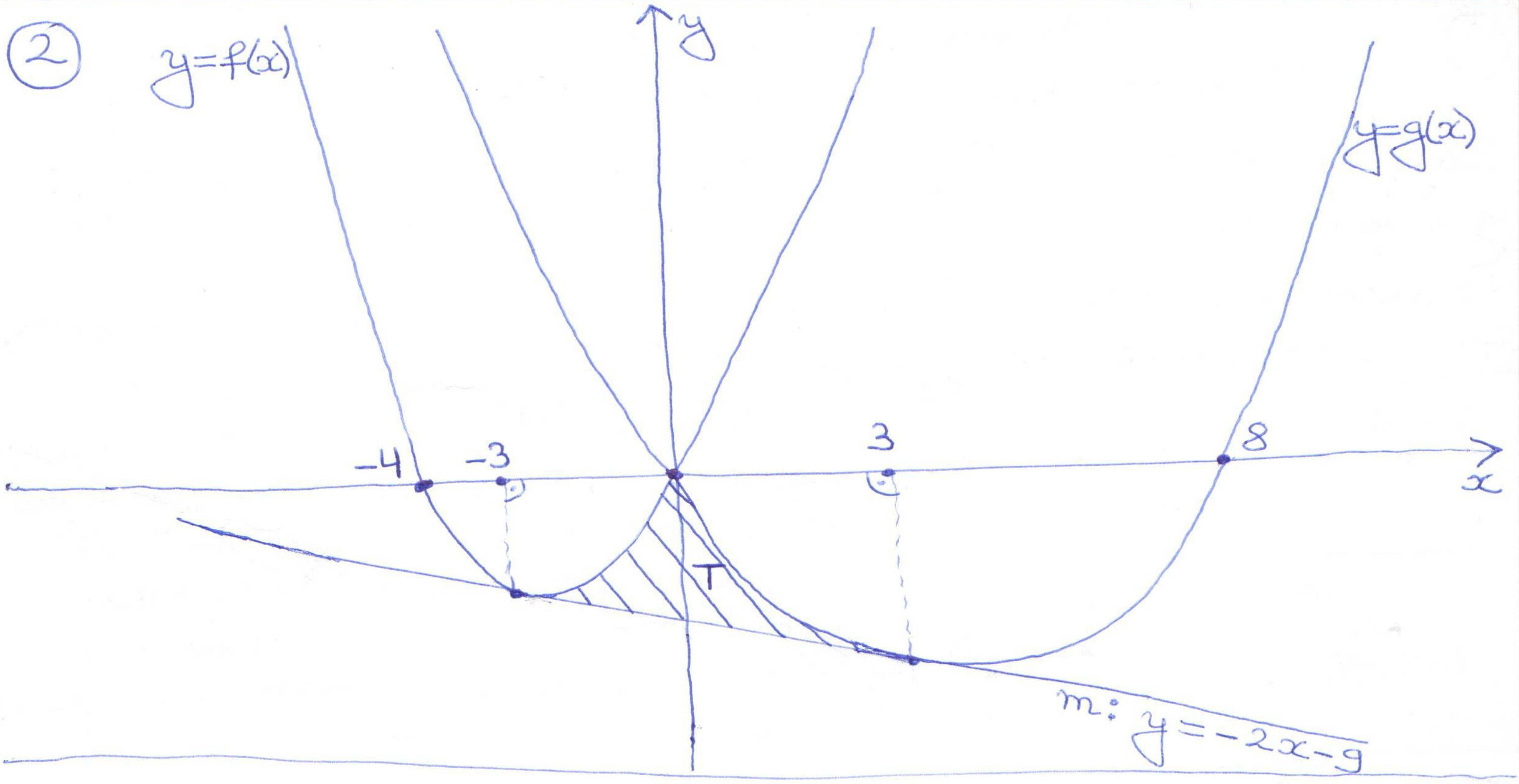
Отг. на зад. 1: $S(T)=\pi ab$.

Забележка: От зад. 1 при $a=b=r$ получаваме, че лицето на кръг с радиус r е πr^2.

Зад. 2 Нека m е общата допирателна към параболите $f(x)=x^2+4x$ и $g(x)=x^2-8x$. Намерете лицето $S(T)$ на фигурата T, заградена от двете параболи и правата m.

Решение:

2

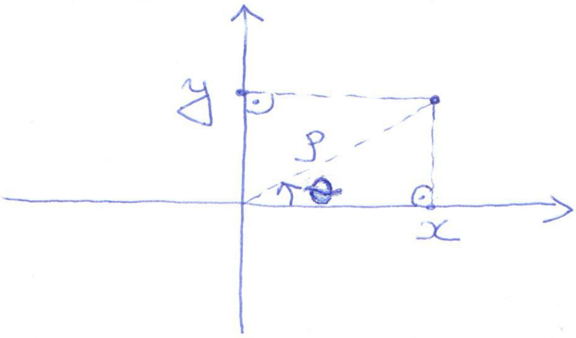


Допирателната към параболата $y=f(x)$ в точката $(x_1, f(x_1))$ е $y=f(x_1)+f'(x_1)(x-x_1)$, т.е.
$y=(x_1^2+4x_1)+(2x_1+4)(x-x_1)$ или все едно
$y=(2x_1+4)x-x_1^2$; имаме, че $y(0)=-x_1^2$, $y(1)=2x_1+4-x_1^2$.
Допирателната към параболата $y=g(x)$ в точката $(x_2, g(x_2))$ е $y=g(x_2)+g'(x_2)(x-x_2)$, т.е.
$y=(x_2^2-8x_2)+(2x_2-8)(x-x_2)$ или все едно
$y=(2x_2-8)x-x_2^2$; имаме, че $y(0)=-x_2^2$, $y(1)=2x_2-8-x_2^2$.
Двете допирателни съвпадат $\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}-x_1^2=-x_2^2\\ 2x_1+4-x_1^2=2x_2-8-x_2^2\end{array}\right. \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}x_1^2=x_2^2\\ x_1+2=x_2-4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}x_2=-x_1\\ 2x_1=-6\end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}x_1=-3\\ x_2=3\end{array}\right.$.

Тогава $m: y=-2x-9$.
Имаме, че $S(T)=\int_{-3}^{0}[(x^2+4x)-(-2x-9)]dx+\int_{0}^{3}[(x^2-8x)-(-2x-9)]dx$
$=\int_{-3}^{0}(x+3)^2 d(x+3)+\int_{0}^{3}(x-3)^2 d(x-3)=$
$=\frac{1}{3}(x+3)^3\Big|_{-3}^{0}+\frac{1}{3}(x-3)^3\Big|_{0}^{3}=$
$=\frac{1}{3}(27-0)+\frac{1}{3}(0-(-27))=9+9=18$.

Отг. на зад. 2: $S(T)=18$.

③ ② Пресмятане на лице на криволинеен сектор



(x,y) – правоъгълни координати

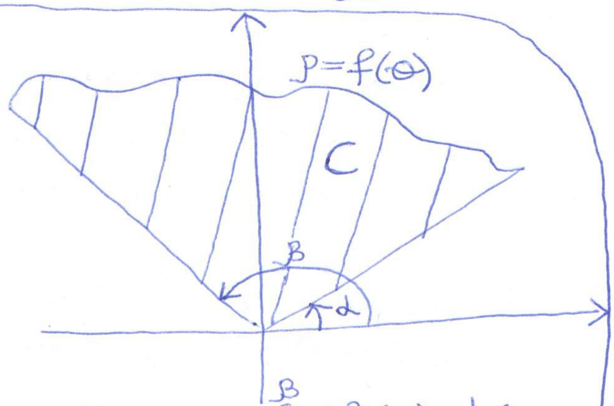
(ρ,θ) – полярни координати

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}$$

Лицето $s(C)$ на криволинейния сектор

$C: \begin{cases} \alpha\leqq\theta\leqq\beta \\ 0\leqq\rho\leqq f(\theta) \end{cases}$, където $f(\theta)$ е неотрицателна и непрекъсната в $[\alpha,\beta]$, е

$$s(C)=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f^2(\theta)\,d\theta.$$

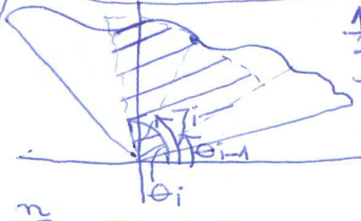


$$s(C)=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f^2(\theta)\,d\theta$$

Обяснение на формулата:

$s(T)=\frac{1}{2}r^2\varphi$ формула за лице на кръгов сектор

$$\left(\frac{s(T)}{\pi r^2}=\frac{\varphi}{2\pi} \Rightarrow s(T)=\frac{1}{2}\varphi r^2\right)$$

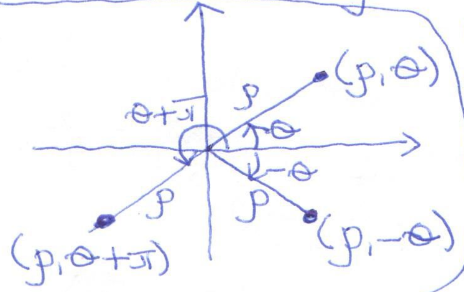


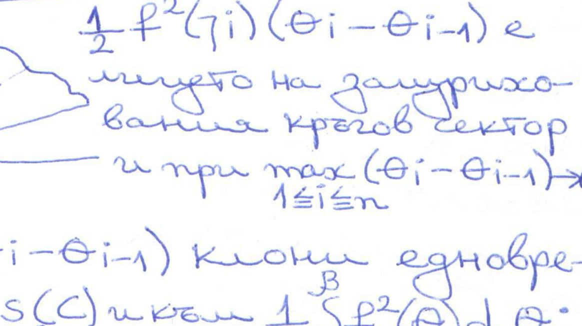
$\frac{1}{2}f^2(\eta_i)(\theta_i-\theta_{i-1})$ е лицето на защрихования кръгов сектор и при $\max\limits_{1\leqq i\leqq n}(\theta_i-\theta_{i-1})\to 0$

$\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n} f^2(\eta_i)(\theta_i-\theta_{i-1})$ клони едновременно към $s(C)$ и към $\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f^2(\theta)\,d\theta$; сл. $s(C)=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f^2(\theta)\,d\theta$

Зад. 1 Намерете лицето $s(C)$ на фигурата C, заградена от кривата $\rho^2=a^2\cos 2\theta$ $(a>0)$.

Решение: Ако точката (ρ,θ) лежи на кривата, то и точките $(\rho,-\theta)$ и $(\rho,\theta+\pi)$ също лежат, така че кривата е симетрична спрямо абсцисната ос и спрямо координатното начало.





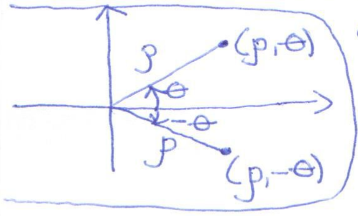
$$s(C)=4s(C_1)=$$
$$=4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}a^2\cos 2\theta\,d\theta=$$
$$=a^2\int_0^{\pi/4}\cos 2\theta\,d2\theta=$$
$$=a^2\sin 2\theta\Big|_0^{\pi/4}=a^2(1-0)=a^2.$$

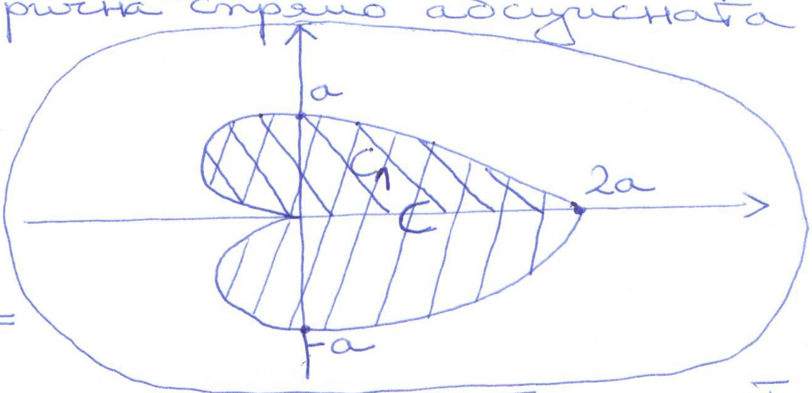
Забележка: Кривата от зад. 1 се нарича лемниската (лат. – панделка) на Бернули

Отг. на зад. 1: $s(C)=a^2$.

(4) Зад. 2 Намерете лицето $s(C)$ на фигурата C, заградена от кривата $\rho = a(1+\cos\theta)$ $(a>0)$.

Решение: Ако точката (ρ, θ) лежи на кривата, то и точката $(\rho, -\theta)$ също лежи, така че кривата е симетрична спрямо абсцисната ос.





$$s(C) = 2s(C_1) =$$

$$= \cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\int_0^{\pi} a^2(1+\cos\theta)^2\,d\theta =$$

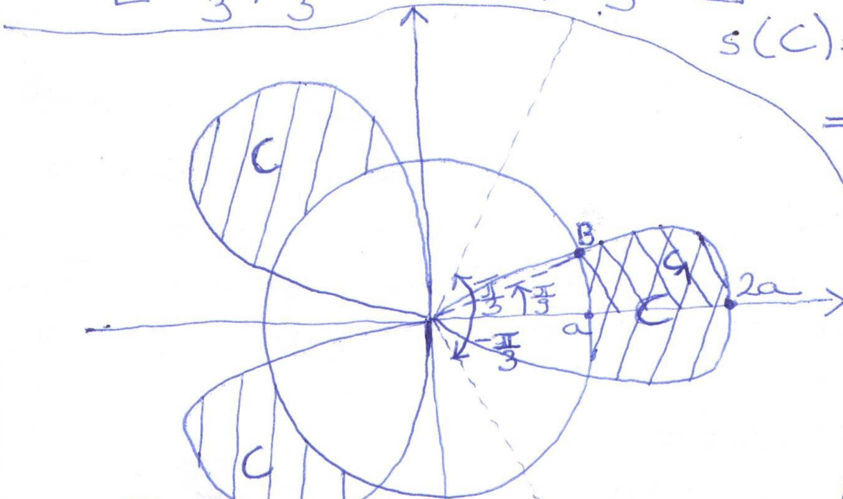
$$= a^2\int_0^{\pi}\left(1+2\cos\theta+\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)d\theta = a^2\Big[\theta\Big|_0^{\pi} + \underbrace{2\sin\theta\Big|_0^{\pi}}_{0} + \frac{1}{2}\theta\Big|_0^{\pi} +$$

$$+\underbrace{\frac{1}{4}\sin 2\theta\Big|_0^{\pi}}_{0}\Big] = a^2\left[\pi+\frac{\pi}{2}\right] = \frac{3\pi a^2}{2}.$$ Отг. на зад. 2: $s(C) = \frac{3\pi a^2}{2}$.

Забележка: Кривата от зад. 2 се нарича кардиоида.

Зад. 3 Намерете лицето $s(C)$ на фигурата C, заградена от кривата $\rho = 2a\cos 3\theta$ $(a>0)$ и лежаща вън от окръжността $\rho = a$.

Решение: Ако точката (ρ,θ) лежи на кривата $\rho = 2a\cos 3\theta$, то и точките $(\rho,-\theta)$ и $(\rho, \theta+\frac{2\pi}{3})$ също лежат, така че кривата е симетрична спрямо абсцисната ос и има един и същ вид при $\theta\in[-\pi, -\frac{\pi}{3}]$, $\theta\in[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$ и $\theta\in[\frac{\pi}{3}, \pi]$.



$$s(C) = 6s(C_1) = 6\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/9}(4a^2\cos^2 3\theta - a^2)\,d\theta$$

$$= 12a^2\int_0^{\pi/9}\cos^2 3\theta\,d\theta - 3a^2\cdot\int_0^{\pi/9}1\,d\theta =$$

$$= 4a^2\int_0^{\pi/9}\cos^2 3\theta\,d3\theta - 3a^2\theta\Big|_0^{\pi/9} =$$

$$= 4a^2\int_0^{\pi/3}\cos^2 u\,du - 3a^2\left(\frac{\pi}{9}-0\right) =$$

$$= 2a^2\int_0^{\pi/3}(1+\cos 2u)\,du - \frac{\pi a^2}{3} =$$

$$= 2a^2\left(u\Big|_0^{\pi/3} + \frac{1}{2}\sin 2u\Big|_0^{\pi/3}\right) - \frac{\pi a^2}{3} =$$

$$= 2a^2\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right) - \frac{\pi a^2}{3}$$

За т. $B(\rho,\theta)$:

$$\begin{cases}\rho = a\\ \rho = 2a\cos 3\theta\\ \theta\in(0,\frac{\pi}{6})\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\rho = a\\ \cos 3\theta = \frac{1}{2}\\ 3\theta\in(0,\frac{\pi}{2})\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\rho = a\\ \theta = \frac{\pi}{9}\end{cases}$$

$B(a, \frac{\pi}{9})$

Отг. на зад. 3: $s(C) = a^2\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Забележка: Кривата $\rho = 2a\cos 3\theta$ от зад. 3 се нарича трилистник.

3 Пресмятане на дължина на крива

Дължината $\ell(\Gamma)$ на кривата $\Gamma: \begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases}, t\in[\alpha,\beta]$, където $f(t)$ и $g(t)$ са непрекъснато диференцируеми в $[\alpha,\beta]$, е $\ell(\Gamma)=\int_\alpha^\beta \sqrt{f'(t)^2+g'(t)^2}\, dt$.

В частност ако Γ е графика на функция, т.е. ако $\Gamma: y=f(x), x\in[\alpha,\beta]$, то $\Gamma: \begin{cases} x=t \\ y=f(t) \end{cases}, t\in[\alpha,\beta]$

и $\ell(\Gamma)=\int_\alpha^\beta \sqrt{1+f'(x)^2}\, dx$.

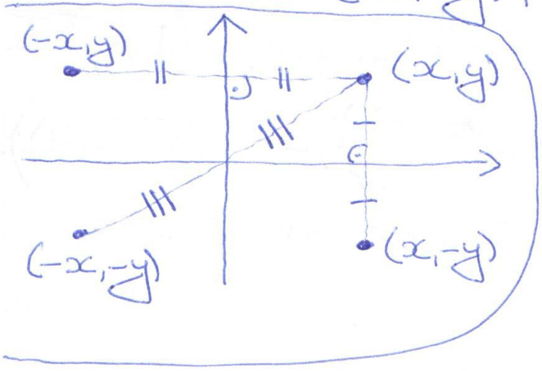
Ако пък $\Gamma: \rho=f(\theta),\ \theta\in[\alpha,\beta]$, то $\Gamma: \begin{cases} x=f(\theta)\cos\theta \\ y=f(\theta)\sin\theta \\ \theta\in[\alpha,\beta] \end{cases}$

и $\ell(\Gamma)=\int_\alpha^\beta \sqrt{(f'(\theta)\cos\theta-f(\theta)\sin\theta)^2+(f'(\theta)\sin\theta+f(\theta)\cos\theta)^2}\, d\theta =$

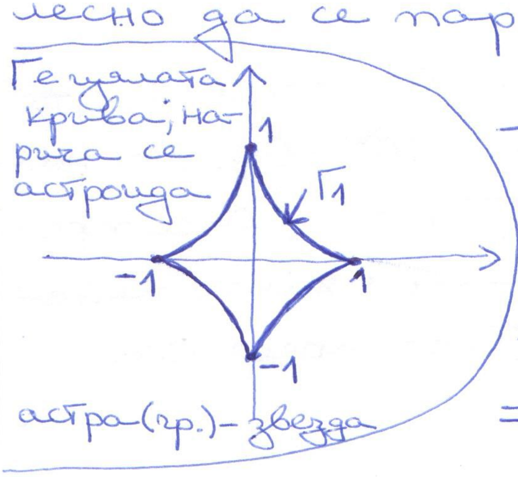
$= \int_\alpha^\beta \sqrt{f(\theta)^2+f'(\theta)^2}\, d\theta$.

Зад. 1 Намерете дължината $\ell(\Gamma)$ на кривата $\Gamma: x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$.

Решение: Ако точката (x,y) лежи на кривата Γ, то и точките $(x,-y)$, $(-x,y)$, $(-x,-y)$ също лежат.



Сл. кривата Γ е симетрична спрямо абсцисната ос, ординатната ос и координатното начало. Тогава, ако Γ_1 е частта от Γ, лежаща в 1-ви квадрант, то $\ell(\Gamma)=4\ell(\Gamma_1)$. Но Γ_1 може лесно да се параметризира: $\Gamma_1: \begin{cases} x=\cos^3 t \\ y=\sin^3 t \end{cases}, t\in[0,\frac{\pi}{2}]$.



Тогава $\ell(\Gamma)=4\ell(\Gamma_1)=$

$=4\int_0^{\pi/2}\sqrt{(-3\cos^2 t\sin t)^2+(3\sin^2 t\cos t)^2}\, dt=$

$=4\int_0^{\pi/2}\sqrt{9\cos^4 t\sin^2 t+9\sin^4 t\cos^2 t}\, dt=$

$=4\int_0^{\pi/2}\sqrt{9\cos^2 t\sin^2 t\underbrace{(\cos^2 t+\sin^2 t)}_{1}}\, dt=$

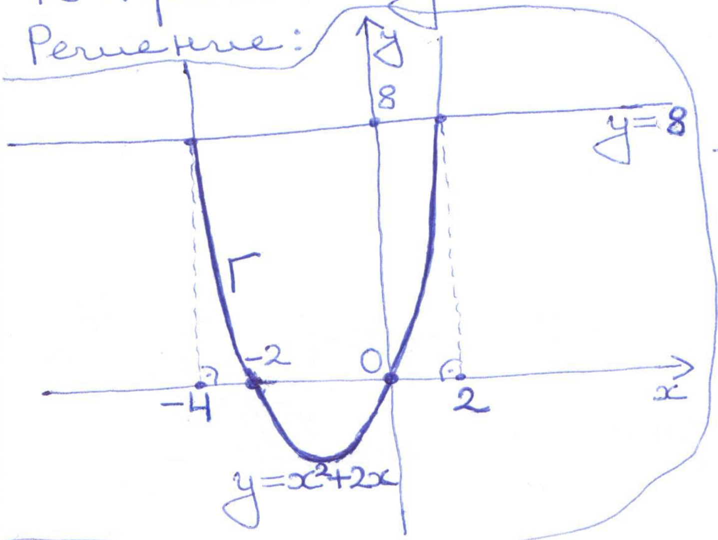
⑥ $= 12\int_0^{\pi/2} \cos t \sin t \, dt = 3\int_0^{\pi/2} 2\sin t \cos t \, d(2t) =$

$= 3\int_0^{\pi/2} \sin 2t \, d2t = 3(-\cos 2t)\Big|_0^{\pi/2} = -3(-1-1) = (-3)(-2) = 6.$

Отг. на зад. 1: $l(\Gamma) = 6$.

Зад. 2 Намерете дължината $l(\Gamma)$ на дъгата Γ, която правата $y=8$ отсича от параболата $y=x^2+2x$.

Решение:



Имаме, че $x^2+2x=8 \iff x^2+2x-8=0 \iff x=2$ или $x=-4$.

Тогава $l(\Gamma) = \int_{-4}^{2} \sqrt{1+(2x+2)^2}\, dx = \frac{1}{2}\int_{-4}^{2} \sqrt{1+(2x+2)^2}\, d(2x+2) \overset{t=2x+2}{=}$

$= \frac{1}{2}\int_{-6}^{6} \underbrace{\sqrt{1+t^2}}_{\text{четна функция}}\, dt = \int_0^6 \sqrt{1+t^2}\, dt = I.$

$I = \int_0^6 \sqrt{1+t^2}\, dt = \left(t\sqrt{1+t^2}\right)\Big|_0^6 - \int_0^6 t \, d\sqrt{1+t^2} =$

$= \left(t\sqrt{1+t^2}\right)\Big|_0^6 - \int_0^6 \frac{(t^2+1)-1}{\sqrt{1+t^2}}\, dt = \left(t\sqrt{1+t^2}\right)\Big|_0^6 - \int_0^6 \sqrt{1+t^2}\, dt +$

$+ \int_0^6 \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\, dt = \left(t\sqrt{1+t^2}\right)\Big|_0^6 - I + \ln\left|t+\sqrt{1+t^2}\right|\Big|_0^6.$

Сл. $I = \frac{1}{2}\left[\left(t\sqrt{1+t^2}\right)\Big|_0^6 + \ln\left|t+\sqrt{1+t^2}\right|\Big|_0^6\right]$, а $l(\Gamma) = I$.

Отг. на зад. 2: $l(\Gamma) = \frac{1}{2}\left(6\sqrt{37} + \ln(6+\sqrt{37})\right)$.

Зад. 3 Намерете дължината $l(\Gamma)$ на кривата $\Gamma: \rho = \theta, \ \theta \in [0, 4\pi]$.

Упътване: $l(\Gamma) = \int_0^{4\pi} \sqrt{1+\theta^2}\, d\theta$ съгласно изведения вече факт, че ако $\Gamma: \rho = f(\theta), \ \theta \in [\alpha, \beta]$, то $l(\Gamma) = \int_\alpha^\beta \sqrt{f(\theta)^2 + f'(\theta)^2}\, d\theta$ (в случая $f(\theta) = \theta$). По-нататък $\int_0^{4\pi} \sqrt{1+\theta^2}\, d\theta$ се пресмята точно както интеграла I от предната задача.