I ОФН: 82134 Т 8

Дуални пространства

V – лин. пространство над F и $f: V \to F$ лин. изображение

f се нарича линейна функция (линеен функционал)

тогава $f(\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n) = \lambda_1 f(a_1) + \dots + \lambda_n f(a_n)$

– Нека $f: F^n \to F$ е лин. ф-я, тогава $\exists\, a_1, \dots, a_n \in F$:

$f(x_1, \dots, x_n) = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$

$x = (x_1, \dots, x_n) = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \in F^n$

$\Rightarrow f(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1 f(e_1) + \dots + x_n f(e_n)$ и $f(e_i) = a_i \in F$

$\quad \| $

$x_1 a_1 + \dots + x_n a_n = f(x)$

$L_n(F) = \{ f(x) \mid f(x): F^n \to F \text{ – лин. ф-я} \}$

$f(x) = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n \in L_n(F)$, $g(x) = b_1 x_1 + \dots + b_n x_n \in L_n(F)$

$\to f + g = (a_1 + b_1) x_1 + \dots + (a_n + b_n) x_n \in L_n(F)$

$\lambda f = (\lambda a_1) x_1 + \dots + (\lambda a_n) x_n \in L_n(F) \Rightarrow L_n(F)$ е лин. пространство

$\Rightarrow$ базис на $L_n(F)$ е $x_1, \dots, x_n \Rightarrow \dim L_n = n$

T8

дон: 82134

Ако $\varphi : L_n(F) \to F$ е лин. функционал

$\to \exists\, b_1, \dots, b_n \in F : \varphi(f) = \varphi(a_1x_1 + \dots + a_nx_n) = a_1b_1 + \dots + a_nb_n$

$\varphi(x_i) = b_i$ $\qquad a_1\varphi(x_1) + \dots + a_n\varphi(x_n)$

$F^n = \{\varphi(x) \mid \varphi(x) : L_n(F) \to F$ е лин. функционал$\}$

ако U е подпр. на $L_n(F)$, тогава:

$U^0 = \{a \in F^n \mid f(a) = 0, \forall f \in U\}$ – анулатор

$U^0 \subset F^n$ е решение на хомогенната система:

$$U^0 : \begin{cases} f_1(x) = 0 \\ \vdots \\ f_k(x) = 0 \end{cases}$$

за $f_1(x), \dots, f_k(x)$ – базис на U

$\dim U^0 = n - \dim U$ (U^0 е решение на хом. система)

$\{0x_1 + \dots + 0x_n\}^0 = F^n$; $(L_n(F))^0 = \{\theta\}$

ако W е подпр на F^n, тогава:

$W^0 = \{f(x) \in L_n(F) \mid f(a) = 0, \forall a \in W\}$

F^n

ФН: 82134

T8

U, W - подпр. на F^n

1) $U \subset W \Rightarrow U^0 \supset W^0$

2) $(U+W)^0 = U^0 \cap W^0$

3) $(U \cap W)^0 = U^0 + W^0$

4) $(U^0)^0 = U$

5) $\dim U + \dim U^0 = n$

M, S - подпр. на $L_n(F)$

1) $M \subset S \Rightarrow M^0 \supset S^0$

2) $(M+S)^0 = M^0 \cap S^0$

3) $(M \cap S)^0 = M^0 + S^0$

4) $(M^0)^0 = M$

5) $\dim M + \dim M^0 = n$

$$\left.\begin{aligned} a &= (a_1, \dots, a_n) \\ b &= (b_1, \dots, b_n) \end{aligned}\right\} \in F^n \quad \begin{aligned} &\to f_a(x) = a_1x_1 + \dots + a_nx_n \\ &\to f_b(x) = b_1x_1 + \dots + b_nx_n \end{aligned}$$

на F^n съпоставяме $L_n(F)$

$f_a(b) = a_1b_1 + \dots + a_nb_n = b_1a_1 + \dots + b_na_n = f_b(a)$

$\varphi : F^n \times F^n \to F$ - вътрешно произведение $\varphi(a,b) = \langle a, b \rangle$

$\langle a, b \rangle = a_1b_1 + \dots + a_nb_n$

- линейна по двата аргумента, но и симетрична