Тема №4

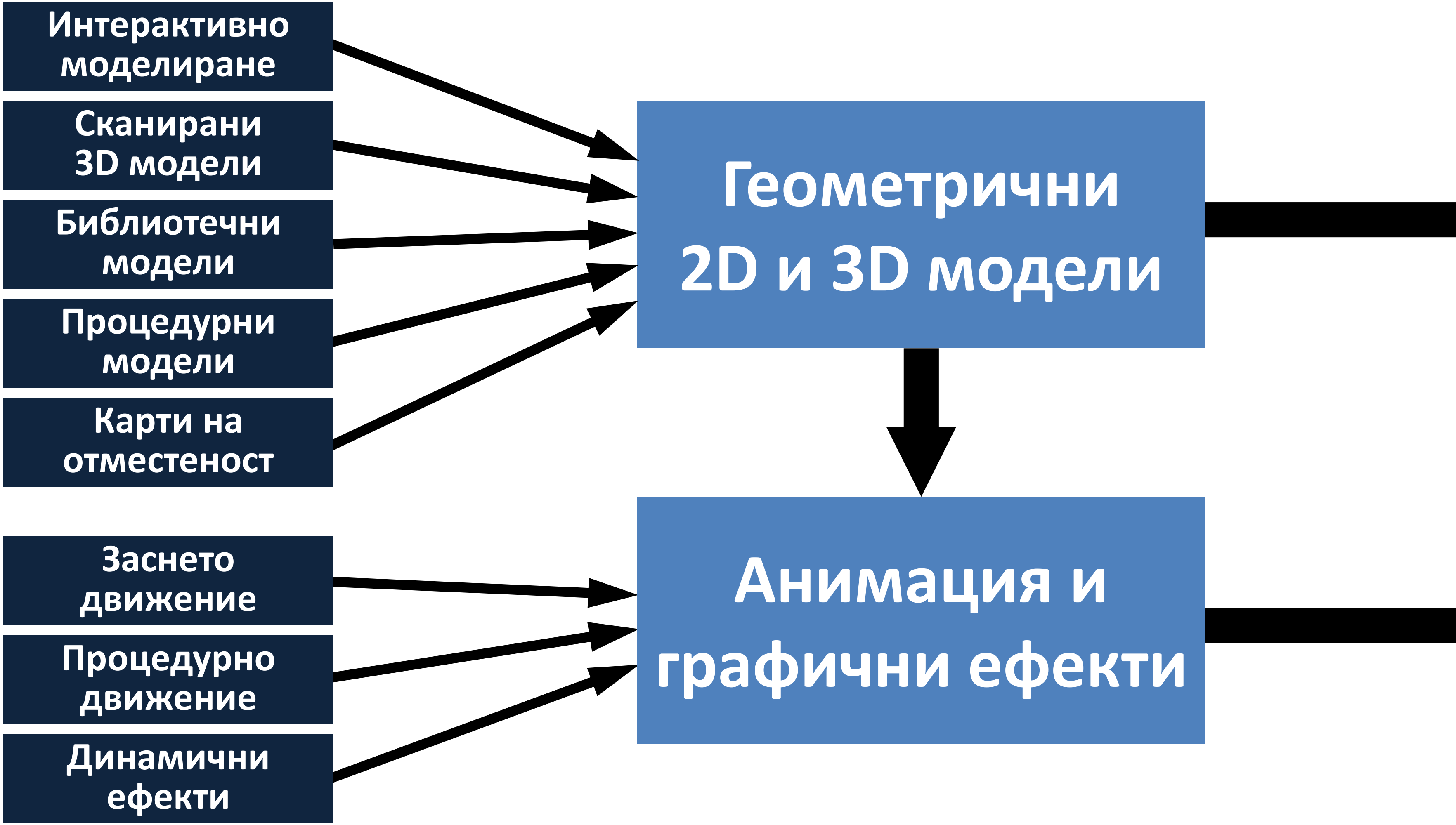
# Вектори

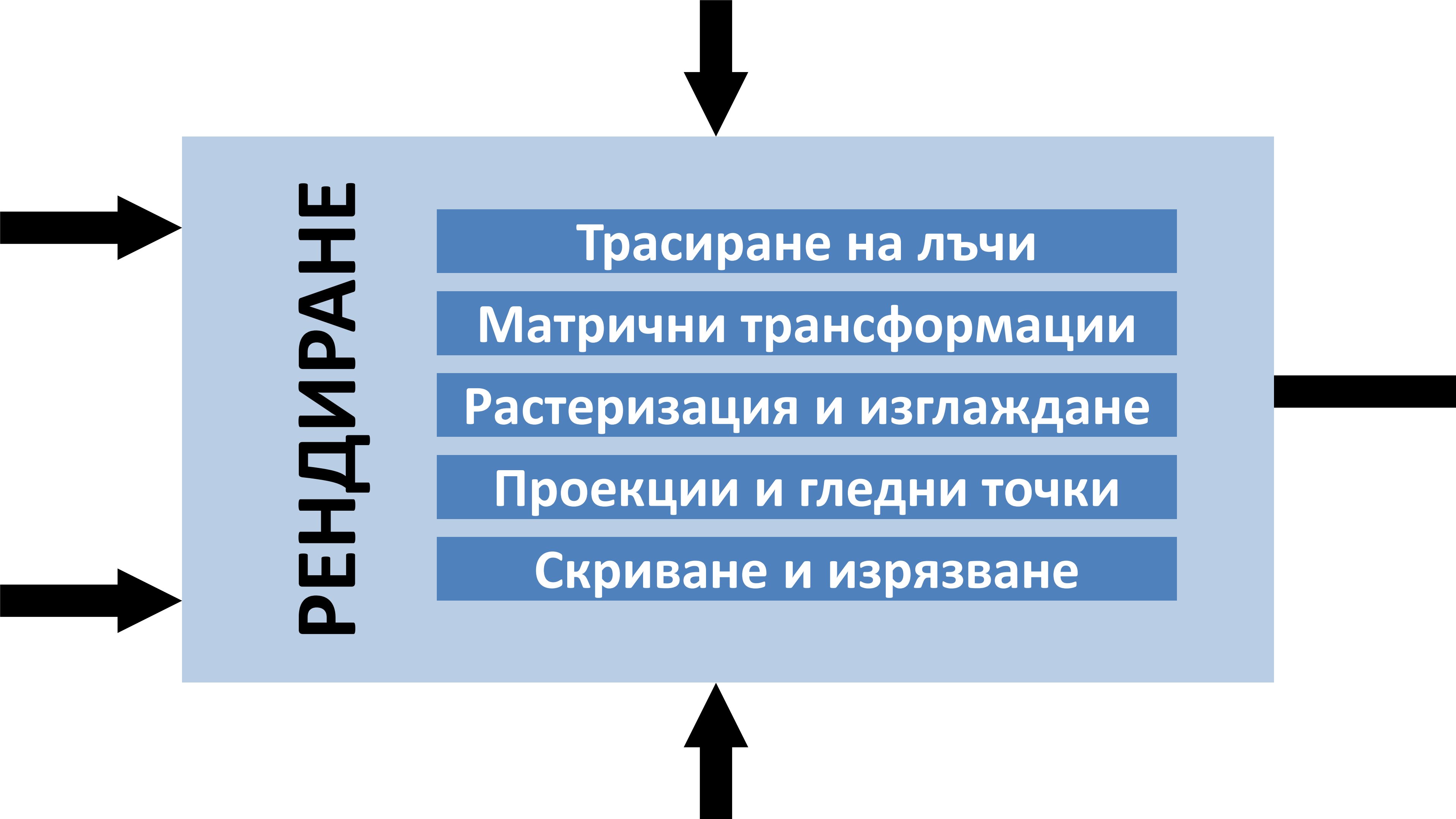
# Съдържание

**Тема 4: Вектори**

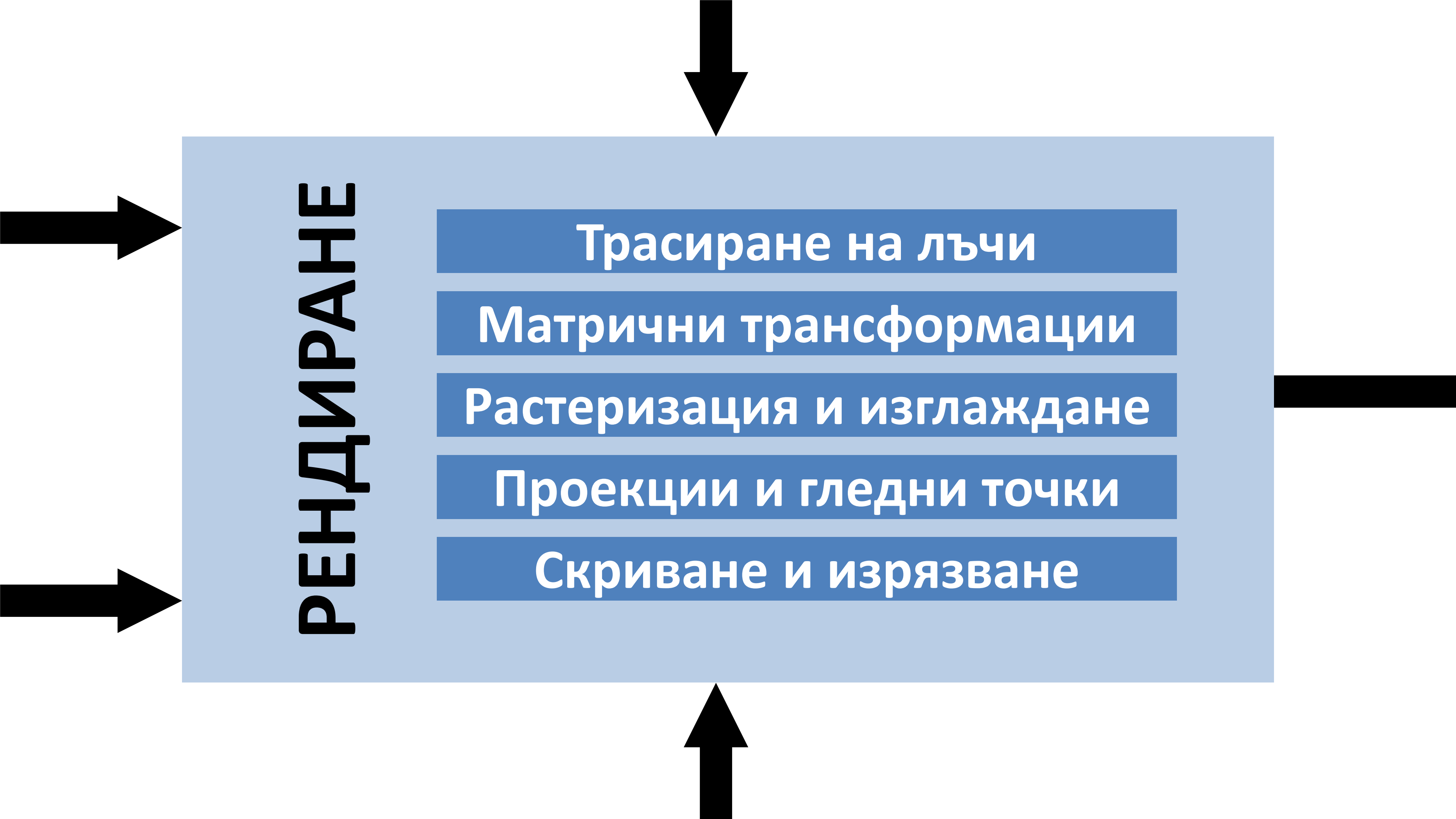
- Графична обработка
- Графични примитиви
- Точки и вектори
- Операции с точки и вектори

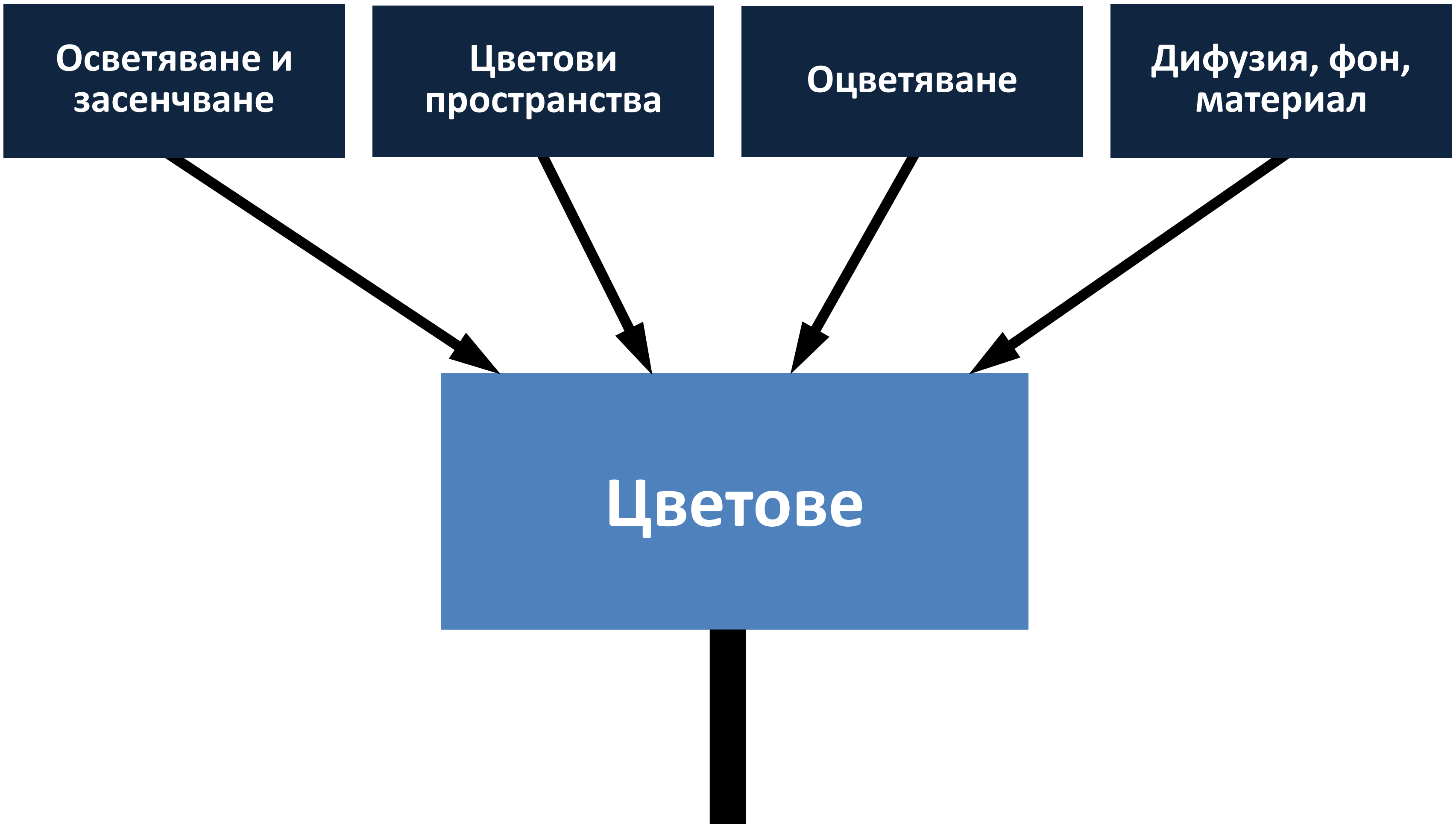
# Графична обработка


Интерактивно моделиране
Сканирани 3D модели
Библиотечни модели
Процедурни модели
Карти на отместеност
Геометрични 2D и 3D модели
Заснето движение
Процедурно движение
Динамични ефекти
Анимация и графични ефекти


РЕНДИРАНЕ
Трасиране на лъчи
Матрични трансформации
Растеризация и изглаждане
Проекции и гледни точки
Скриване и изрязване

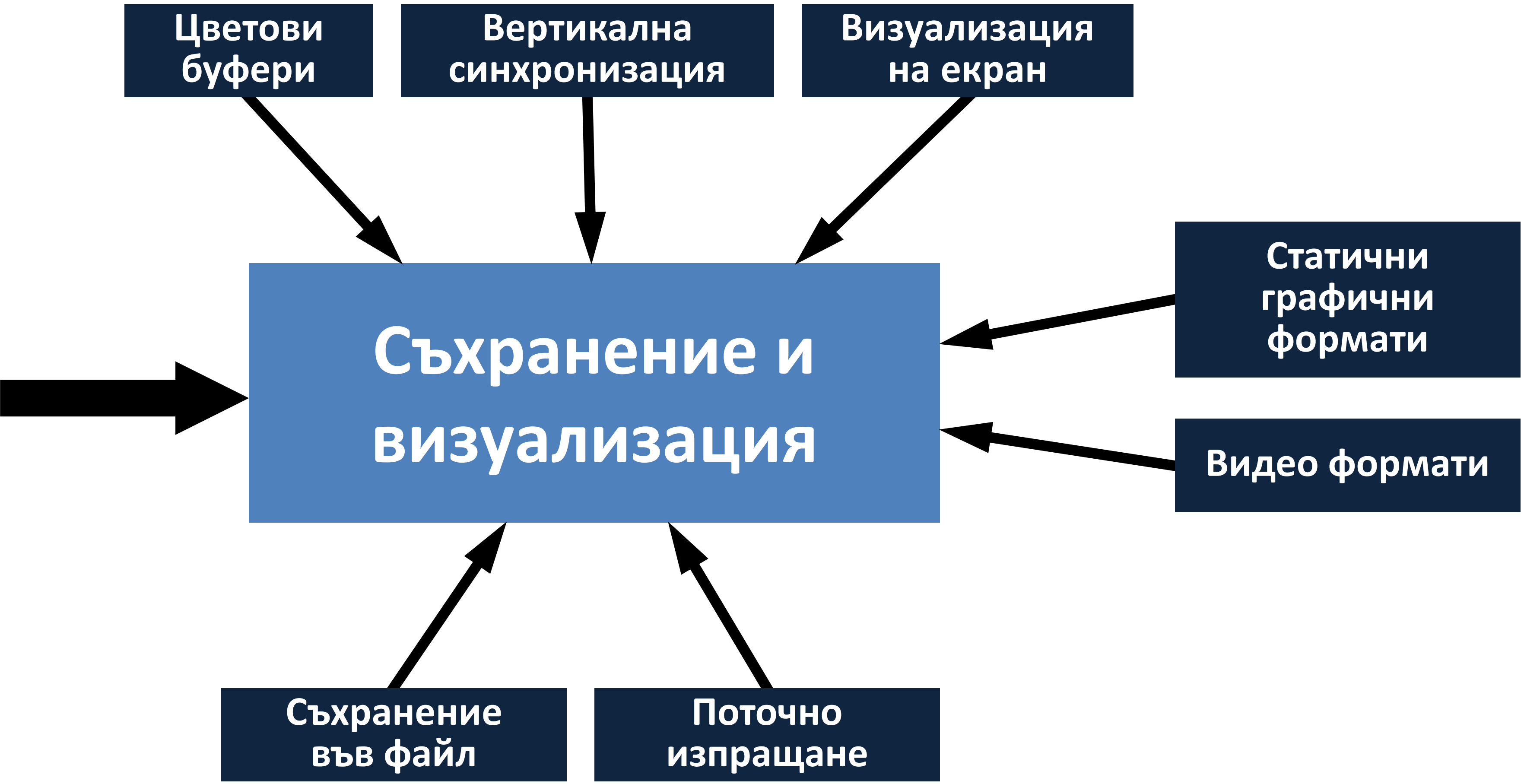

Текстури
Сканирани или снимани изображения
Компютърно генерирани изображения
Ръчно нарисувани изображения


РЕНДИРАНЕ
Трасиране на лъчи
Матрични трансформации
Растеризация и изглаждане
Проекции и гледни точки
Скриване и изрязване

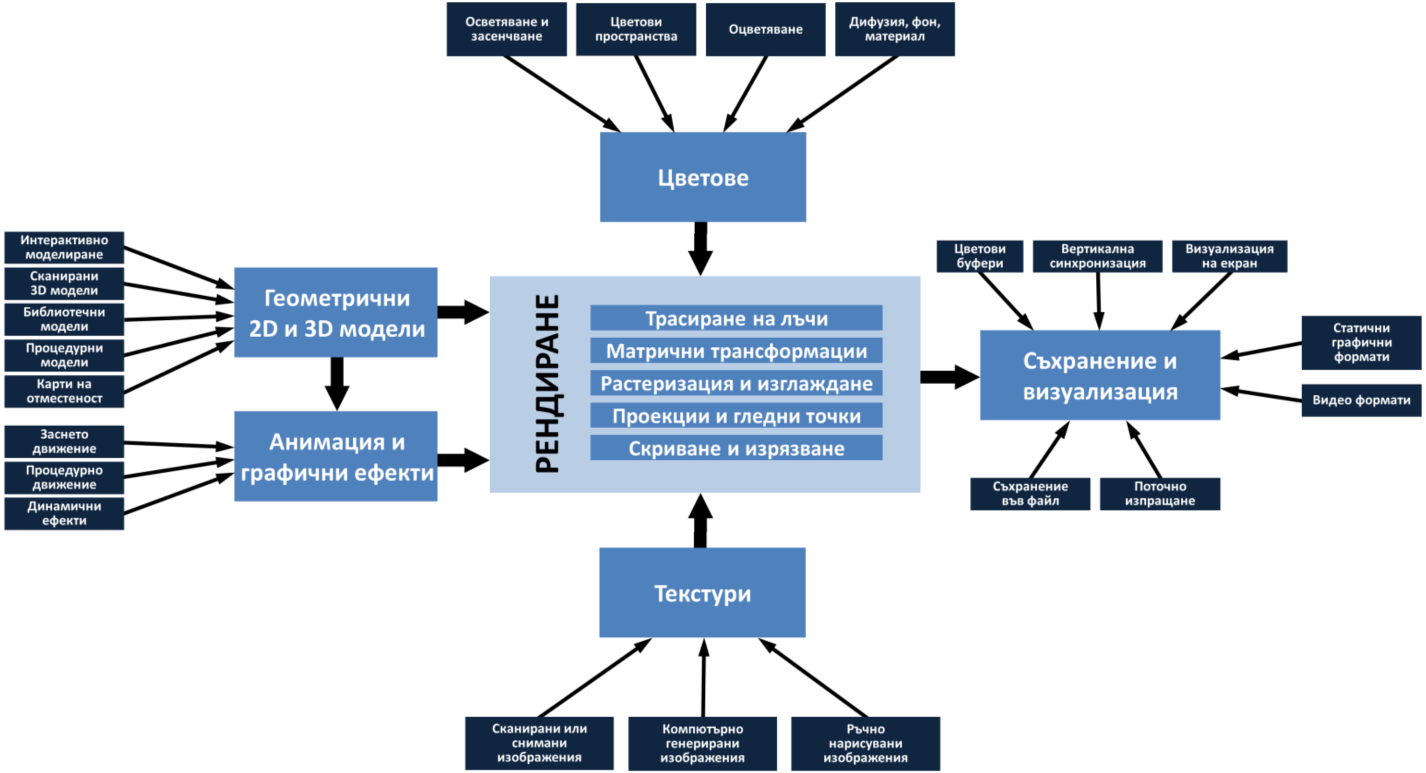

Осветяване и засенчване
Цветови пространства
Оцветяване
Дифузия, фон, материал
Цветове

Не тук.
Виж надолу!

Снимка: FreeDigitalPhotos.net


Цветови буфери
Вертикална синхронизация
Визуализация на екран
Съхранение и визуализация
Статични графични формати
Видео формати
Съхранение във файл
Поточно изпращане

# Птичи поглед над КГ



# Графични примитиви

# Примитивни обекти

## Характеристики

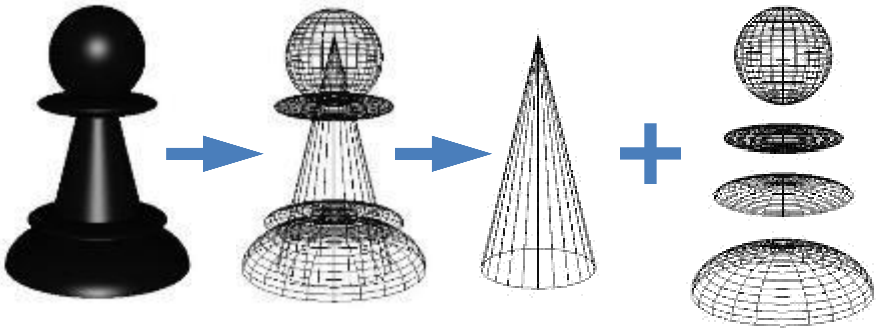
- Най-базисни обекти
- Могат да са прости или сложни
- Използвани за правене на по-сложни

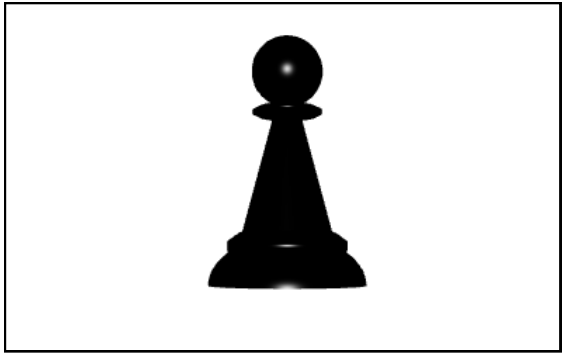
## Най-чести примитиви

- Точка, отсечка, квадрат
- Сфера, конус, цилиндър, тор

# Модел на пешка

– Сфери, полусфери и конус





# Йерархия

**Йерархия на примитивите**

- Нулевомерни: точки, вектори, …
- Едномерни: отсечки, криви на Безие, …
- Двумерни: полигони, NURBS, …
- Тримерни: кубове, сфери, конуси, …

**Някои от примитивите са съставни**

- Например сфера като мрежа от триъгълници

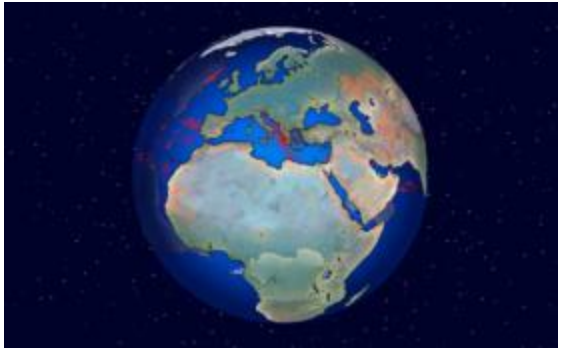
# Точки и вектори

# За какво се ползват

## Освен за рисуване на точки

- За определяне на координати на други елементи
- За рисуване на системи от частици

"Fireworks"
http://youtu.be/OkyjuXrOb9I



"Seismic Membranes"
http://youtu.be/KVRov7VWHno

# Точки и вектори

**Характеристики**

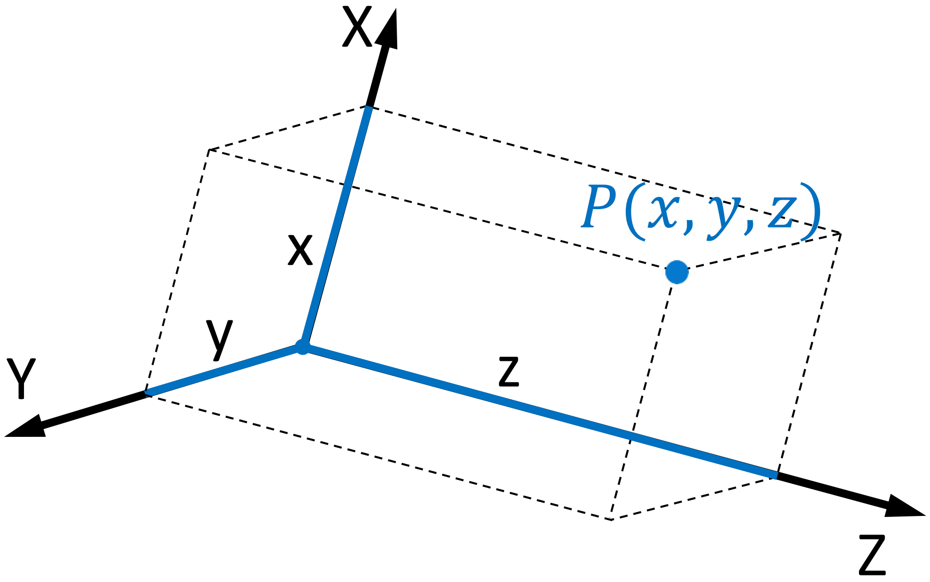
- Дефинират се с тройка числа $(x, y, z)$

**Тройствена представа**

- Абсолютни координати (точка)
- Относителни коорд. (радиус-вектор)
- Разстояния (вектор)
- Посоки (вектор)

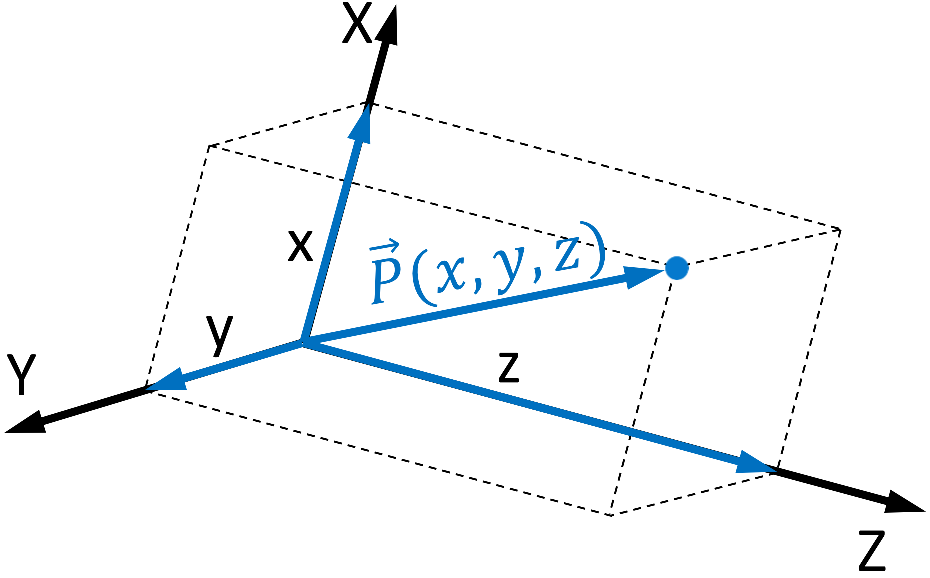
# Точки в пространството

– Абсолютни координати в 3D



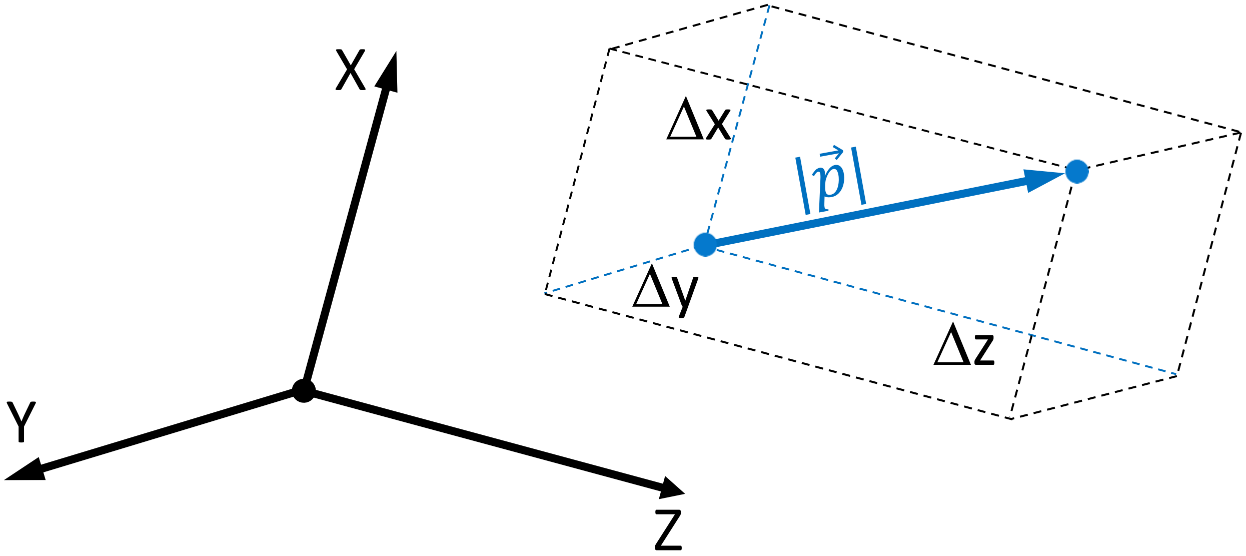
# Радиус-вектори

– Относителни координати спрямо $(0,0,0)$



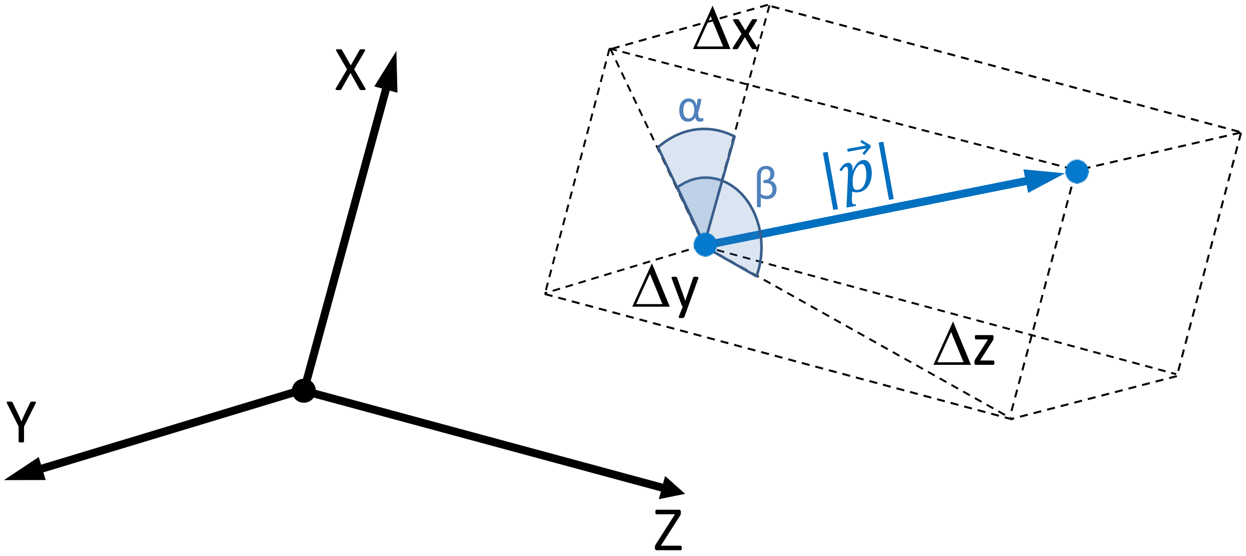
# Разстояния и магнитуди

– Определяне на разстояние/магнитуд



# Посоки

- Определяне на посока в 3D
- Това не е достатъчно за пълна ориентация



# Операции с точки и вектори

# Изписване

## Изписване на вектори (и точки)

$$(x, y, z) \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

## При вектор зададен с точки $X_1$ и $X_2$

$$\left| \begin{array}{l} \Delta x = x_2 - x_1 \\ \Delta y = y_2 - y_1 \\ \Delta z = z_2 - z_1 \end{array} \right. \qquad (\Delta z, \Delta y, \Delta z) \qquad \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}$$

# Дължина

**Дължина на вектор $\vec{p}$**

– $|\vec{p}| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$

**Единичен вектор**

– Вектор с дължина 1

# Събиране и изваждане

## Събиране и изваждане на вектори

- Може да се събира или изважда само с друг вектор

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} \quad \vec{q} = \begin{pmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{pmatrix} \quad \vec{p} \pm \vec{q} = \begin{pmatrix} p_x \pm q_x \\ p_y \pm q_y \\ p_z \pm q_z \end{pmatrix}$$

- Използват се пресмятане на координатите на обекти при движението им

# Умножения

**Разнообразия на умноженията**

- Умножение със скалар (т.е. число)
- Скаларно умножение с вектор
- Векторно умножение с вектор

**В компютърната графика**

- И трите се ползват
- И то за важни неща

# Умножение със скалар

**Умножение със скалар (число)**

$$k\vec{u}(u_x, u_y, u_z) = (ku_x, ku_y, ku_z)$$

**Геометричен смисъл**

- Мащабира (удължава, скъсява) вектор
- Запазва посоката при $k > 0$, обръща я при $k < 0$

# Единичен вектор

## Създаване на единичен вектор

– $\vec{u}(u_x, u_y, u_z) \quad k = \frac{1}{|\vec{u}|} \quad \vec{e}_u = \left(\frac{u_x}{|\vec{u}|}, \frac{y}{|\vec{u}|}, \frac{u_z}{|\vec{u}|}\right)$

## Геометричен смисъл

– Дължината му е 1 и е със същата посока
(работи само над ненулеви вектори)

– Използва се в много графични алгоритми
(за опростяване на изчисленията)

# Скаларно умножение

## Умножение, а резултатът е скалар

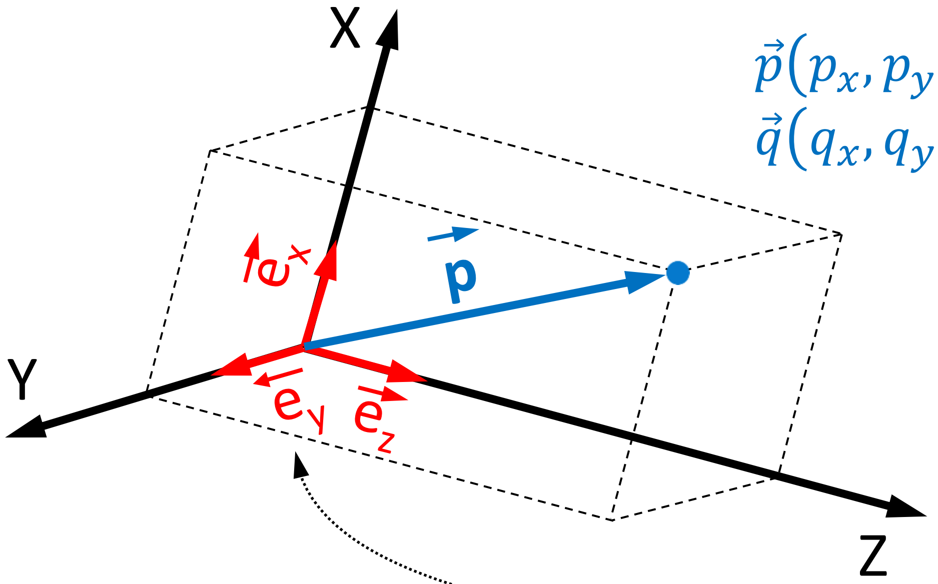
- Ъгъл φ между двата вектора
  $\vec{p} \cdot \vec{q} = |\vec{p}||\vec{q}| \cos \varphi$

## Геометричен/графичен смисъл

- Проверка за перпендикулярност
- Осветеност на повърхност
- Намиране на лицеви повърхности (не лице!)

# Изчисляване на $\vec{p} \cdot \vec{q}$

## Ползваме единичните осеви вектори




$$\vec{p}(p_x, p_y, p_z) = p_x\vec{e}_x + p_y\vec{e}_y + p_z\vec{e}_z$$
$$\vec{q}(q_x, q_y, q_z) = q_x\vec{e}_x + q_y\vec{e}_y + q_z\vec{e}_z$$

Ако не сте виждали вектор
с обратна стрелка, ето – вижте сега

# Самото изчисление

- И умножаваме смело

$$\vec{p}\cdot\vec{q} = (p_x\vec{e}_x + p_y\vec{e}_y + p_z\vec{e}_z)\cdot(q_x\vec{e}_x + q_y\vec{e}_y + q_z\vec{e}_z)$$

$$= p_x\vec{e}_x\cdot q_x\vec{e}_x + p_x\vec{e}_x\cdot q_y\vec{e}_y + p_x\vec{e}_x\cdot q_z\vec{e}_z + p_y\vec{e}_y\cdot q_x\vec{e}_x + p_y\vec{e}_y\cdot q_y\vec{e}_y + p_y\vec{e}_y\cdot q_z\vec{e}_z + p_z\vec{e}_z\cdot q_x\vec{e}_x + p_z\vec{e}_z\cdot q_y\vec{e}_y + p_z\vec{e}_z\cdot q_z\vec{e}_z$$

- Със задоволство си спомняме, че

$$\vec{e}_x\cdot\vec{e}_x = \vec{e}_y\cdot\vec{e}_y = \vec{e}_z\cdot\vec{e}_z = 1$$

$$\vec{e}_x\cdot\vec{e}_y = \vec{e}_y\cdot\vec{e}_z = \vec{e}_z\cdot\vec{e}_x = 0$$

- И от тук със замах получаваме

$$\vec{p}\cdot\vec{q} = p_xq_x + p_yq_y + p_zq_z$$

**Пример** $(2,2,0) \cdot (0,1,0)$

– Лежат в една равнина **OMG**

– Ъгълът между тях е $45^{o}$

$$(2,2,0) \cdot (0,1,0) = 2\sqrt{2} \cdot 1 \cdot \cos 45° = 2\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = 2$$

– Алтернативен първокласен метод

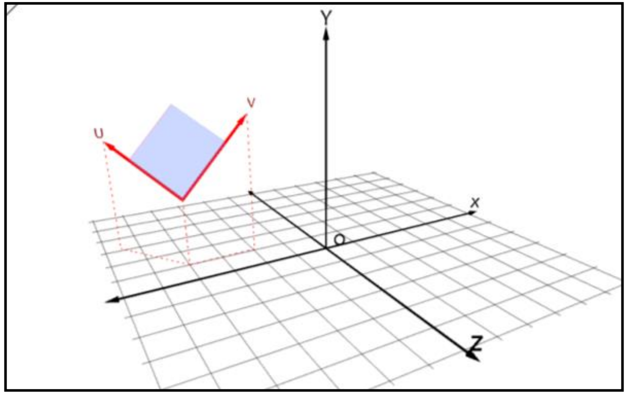
(„Първокласен” не само в смисъл на качествен, но и защото първокласник го може)

$$(2,2,0) \cdot (0,1,0) = 2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 2$$

# Още един пример

- Перпендикулярни ли са $\vec{p}(4,0,1)$ и $\vec{q}(-2,3,8)$
- $(4,0,1) \cdot (-2,3,8) = -8 + 0 + 8 = 0$

# Построяване на перпендикуляр:



# Векторно умножение

**Умножение, а резултатът е вектор**

– Ъгъл $\varphi$ между двата вектора

$$\vec{p} \times \vec{q} = \vec{r}, \qquad |\vec{r}| = |\vec{p}||\vec{q}| \sin \varphi$$

**Геометричен смисъл**

– Намиране на нормални вектори

– Лице на успоредник (не лицевост!)

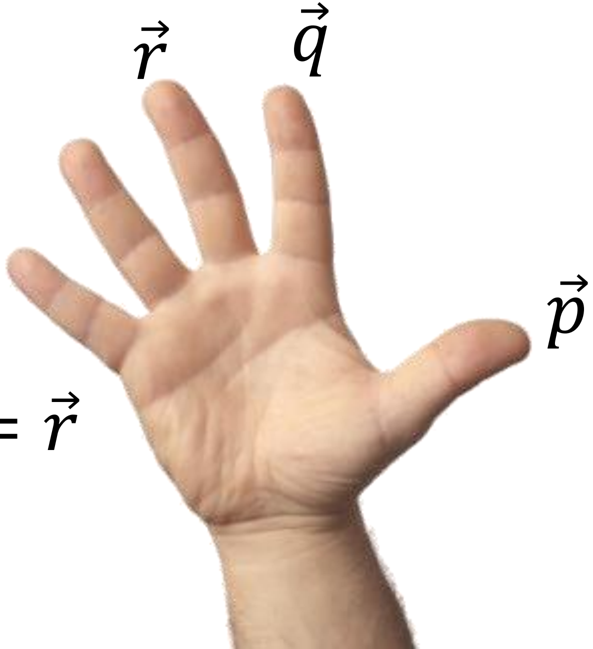
## Накъде сочи векторът?

- Той е перпендикулярен на равнината, в която са двата вектора-множителя
- Той е в полупространството, от което посоката на въртене от първия към втория вектор е положителна (т.е. обратно на часовниковата стрелка)

# Как се помни това?

## Използваме дясната ръка

- Координатната система $PQR$ е дясна




$$\vec{p} \times \vec{q} = \vec{r}$$

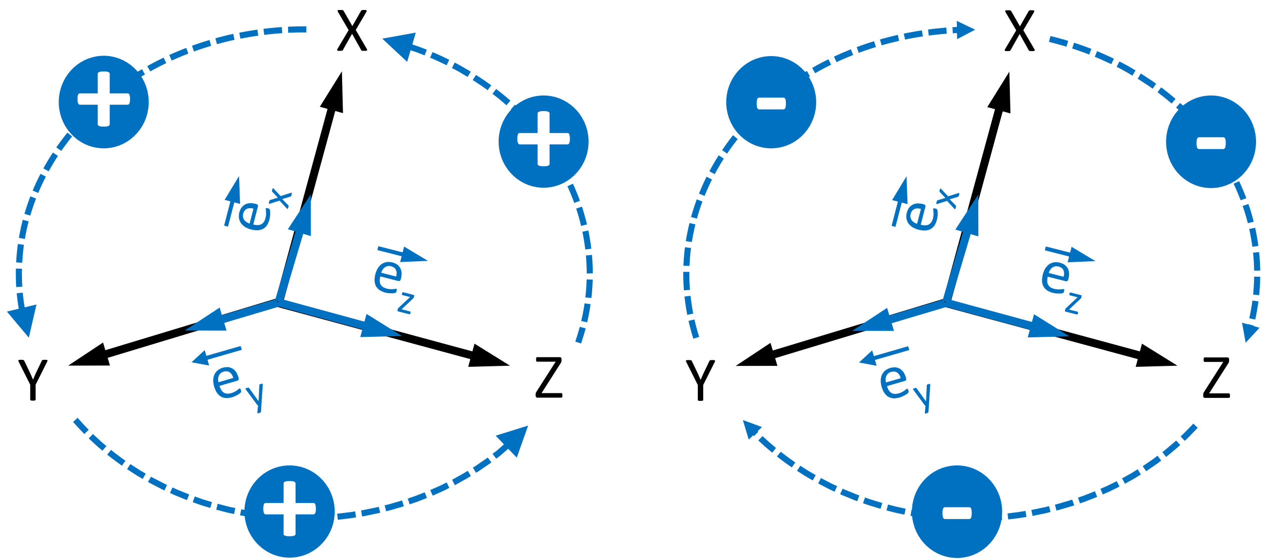
Снимка: FreeDigitalPhotos.net

# А единичните вектори?

$$\vec{e}_x \times \vec{e}_x = 0 \qquad \vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z \qquad \vec{e}_y \times \vec{e}_x = -\vec{e}_z$$

$$\vec{e}_y \times \vec{e}_y = 0 \qquad \vec{e}_y \times \vec{e}_z = \vec{e}_x \qquad \vec{e}_z \times \vec{e}_y = -\vec{e}_x$$

$$\vec{e}_z \times \vec{e}_z = 0 \qquad \vec{e}_z \times \vec{e}_x = \vec{e}_y \qquad \vec{e}_x \times \vec{e}_z = -\vec{e}_y$$



# Изчисляване на $\vec{p}\times\vec{q}$

## Ползваме единичните осеви вектори

$$\vec{p}\times\vec{q} = \left(p_x\vec{e}_x + p_y\vec{e}_y + p_z\vec{e}_z\right)\times\left(q_x\vec{e}_x + q_y\vec{e}_y + q_z\vec{e}_z\right)$$

$$\begin{aligned}
= {} & p_x\vec{e}_x\times q_x\vec{e}_x + p_x\vec{e}_x\times q_y\vec{e}_y + p_x\vec{e}_x\times q_z\vec{e}_z + \\
& p_y\vec{e}_y\times q_x\vec{e}_x + p_y\vec{e}_y\times q_y\vec{e}_y + p_y\vec{e}_y\times q_z\vec{e}_z + \\
& p_z\vec{e}_z\times q_x\vec{e}_x + p_z\vec{e}_z\times q_y\vec{e}_y + p_z\vec{e}_z\times q_z\vec{e}_z
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= {} & p_x\vec{e}_x\times q_y\vec{e}_y + p_x\vec{e}_x\times q_z\vec{e}_z + \\
& p_y\vec{e}_y\times q_x\vec{e}_x + p_y\vec{e}_y\times q_z\vec{e}_z + \\
& p_z\vec{e}_z\times q_x\vec{e}_x + p_z\vec{e}_z\times q_y\vec{e}_y
\end{aligned}$$

- След векторното произведение на единичните осеви вектори

$$\begin{aligned} = \quad & p_x q_y \vec{e}_z - p_x q_z \vec{e}_y - \\ & - p_y q_x \vec{e}_z + p_y q_z \vec{e}_x + \\ & + p_z q_x \vec{e}_y - p_z q_y \vec{e}_x \end{aligned}$$

- Прегрупираме

$$\begin{aligned} = \quad & \left(p_y q_z - p_z q_y\right)\vec{e}_x + \\ & + \left(p_z q_x - p_x q_z\right)\vec{e}_y + \\ & + \left(p_x q_y - p_y q_x\right)\vec{e}_z \end{aligned}$$

– И сме готови

$$\vec{p} \times \vec{q} = \begin{vmatrix} p_y & p_z \\ q_y & q_z \end{vmatrix} \vec{e}_x + \begin{vmatrix} p_z & p_x \\ q_z & q_x \end{vmatrix} \vec{e}_y + \begin{vmatrix} p_x & p_y \\ q_x & q_y \end{vmatrix} \vec{e}_z$$

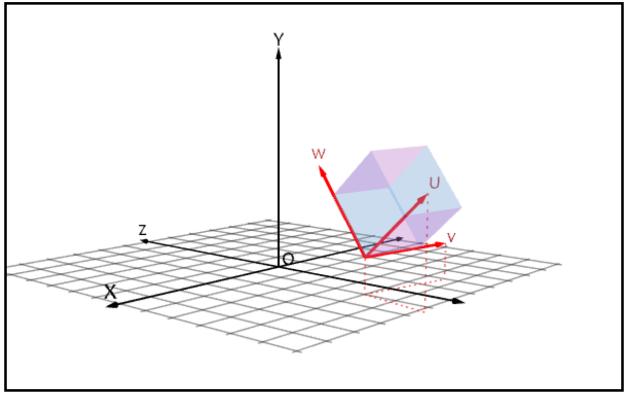
$$\vec{p} \times \vec{q} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ p_x & p_y & p_z \\ q_x & q_y & q_z \end{vmatrix}$$

# Пример

– Перпендикуляр на онези два вектора

$$\vec{p} \times \vec{q} = (0 \cdot 8 - 1 \cdot 3)\vec{e}_x + (-1 \cdot 2 - 4 \cdot 8)\vec{e}_y + (4 \cdot 3 + 0 \cdot 2)\vec{e}_z =$$
$$= -3\vec{e}_x - 34\vec{e}_y + 12\vec{e}_z = (-3, -34, 12)$$

– Да проверим метода



# Въпроси?

# Повече информация

| | |
|---|---|
| [BAGL] | стр. 8-12, 26-27 |
| [LASZ] | стр. 69-78 |
| [KLAW] | стр. 13-15 |
| [VINC] | стр. 31-49 |
| [MORT] | стр. 1-14, 165-170 |
| [LEGN] | стр. 11-26 |
| [PARE] | стр. 409-411, 420-425 |

# Край