п)

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1^2+1 & a_1a_2 & \dots & a_1a_{n-1} & a_1a_n \\ a_2a_1 & a_2^2+1 & \dots & a_2a_{n-1} & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1}a_1 & a_{n-1}a_2 & \dots & a_{n-1}^2+1 & a_{n-1}a_n \\ a_na_1 & a_na_2 & \dots & a_na_{n-1} & a_n^2+1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_1^2+1 & a_1a_2 & \dots & a_1a_{n-1} & a_1a_n \\ a_2a_1 & a_2^2+1 & \dots & a_2a_{n-1} & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1}a_1 & a_{n-1}a_2 & \dots & a_{n-1}^2+1 & a_{n-1}a_n \\ a_na_1 & a_na_2 & \dots & a_na_{n-1} & a_n^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1^2+1 & a_1a_2 & \dots & a_1a_{n-1} & a_1a_n \\ a_2a_1 & a_2^2+1 & \dots & a_2a_{n-1} & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1}a_1 & a_{n-1}a_2 & \dots & a_{n-1}^2+1 & a_{n-1}a_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$a_n \begin{vmatrix} a_1^2+1 & a_1a_2 & \dots & a_1a_{n-1} & a_1a_n \\ a_2a_1 & a_2^2+1 & \dots & a_2a_{n-1} & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1}a_1 & a_{n-1}a_2 & \dots & a_{n-1}^2+1 & a_{n-1}a_n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix} \begin{matrix} + \\ + \\ \\ + \\ -a_{n-1} \quad -a_2 \quad -a_1 \end{matrix} + \Delta_{n-1} =$$

$$a_n \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix} + \Delta_{n-1} = a_n^2 + \Delta_{n-1},$$

т.е. $\Delta_n = a_n^2 + \Delta_{n-1}$. Оттук

$$+\left|\begin{array}{ccccc} \Delta_n & = & a_n^2 & + & \Delta_{n-1} \\ \Delta_{n-1} & = & a_{n-1}^2 & + & \Delta_{n-2} \\ & \vdots & & & \\ \Delta_2 & = & a_2^2 & + & \Delta_1 \\ \Delta_1 & = & a_1^2 & + & 1 \end{array}\right.$$

и следователно $\Delta_n = a_n^2 + a_{n-1}^2 + \dots + a_1^2 + 1$.

Забележка. Ако $a_1a_2\dots a_n \neq 0$, можем да пресметнем Δ_n и по следния начин

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1^2+1 & a_1a_2 & \dots & a_1a_n \\ a_2a_1 & a_2^2+1 & \dots & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \dots & a_n^2+1 \end{vmatrix} = a_1a_2\dots a_n \begin{vmatrix} \frac{a_1^2+1}{a_1} & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & \frac{a_2^2+1}{a_2} & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & \frac{a_n^2+1}{a_n} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_1^2+1 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ a_1^2 & a_2^2+1 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2+1 \end{vmatrix} \begin{matrix} -1 \quad -1 \quad -1 \\ + \\ \\ + \\ + \end{matrix} = \begin{vmatrix} a_1^2+1 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ -1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} + \\ + \\ + \end{matrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1+\sum_{i=1}^n a_i^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1 + a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2$$

р)

$$\Delta_{n+1} = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & a_0 \\ -y & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -y & x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -y & x \end{vmatrix} =^{1} a_n(-1)^{1+1}x^n - y(-1)^{2+1}\Delta_n$$

Оттук

$$+\left|\begin{array}{lclcll} \Delta_{n+1} & = & a_nx^n & + & y\Delta_n & \\ \Delta_n & = & a_{n-1}x^{n-1} & + & y\Delta_{n-1} & .y \\ \Delta_{n-1} & = & a_{n-2}x^{n-2} & + & y\Delta_{n-2} & .y^2 \\ \vdots & & & & & \\ \Delta_2 & = & a_1x & + & y\Delta_1 & .y^{n-1} \\ \Delta_1 & = & a_0. & & & .y^n \end{array}\right.$$

Оттук

$$\Delta_{n+1} = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1}y + a_{n-2}x^{n-2}y^2 + \dots + a_1xy^{n-1} + a_0y^n.$$

* * *

Нека рекурентната връзка има вида $\Delta_n = a\Delta_{n-1} + b\Delta_{n-2}$, където a, b са константи, независещи от n. Нека уравнението $t^2 - at - b = 0$ има корени t_1 и t_2.

1 сл.) $b = 0$, т.е. $\Delta_n = a\Delta_{n-1}$. Тогава $\Delta_1, \Delta_2, \dots,$ е геометрична прогресия с частно a и следователно $\Delta_n = a^{n-1}\Delta_1$.

2 сл.) Нека $b \neq 0$ и нека уравнението $t^2 - at - b = 0$ има корени t_1 и t_2. Тогава $t_1 + t_2 = a$, $t_1t_2 = -b$ и следователно $\Delta_n = (t_1 + t_2)\Delta_{n-1} - t_1t_2\Delta_{n-2}$, откъдето

$$\Delta_n - t_1\Delta_{n-1} = t_2(\Delta_{n-1} - t_1\Delta_{n-2}).$$

Означаваме с $d_1 = \Delta_2 - t_1\Delta_1$, $d_2 = \Delta_3 - t_1\Delta_2, \dots, d_{n-1} = \Delta_n - t_1\Delta_{n-1}$. Тогава $d_1, d_2, \dots$ е геометрична прогресия с частно t_2 и следователно $d_{n-1} = t_2^{n-2}d_1$. Оттук

$$-\left|\begin{array}{lcll} \Delta_n - t_1\Delta_{n-1} & = & t_2^{n-2}(\Delta_2 - t_1\Delta_1) & .t_2 \\ \Delta_n - t_2\Delta_{n-1} & = & t_1^{n-2}(\Delta_2 - t_2\Delta_1) & .t_1 \end{array}\right.$$

2.1) $t_1 \neq t_2$. Тогава $\Delta_n = \dfrac{t_2^{n-1}(\Delta_2 - t_1\Delta_1) - t_1^{n-1}(\Delta_2 - t_2\Delta_1)}{t_2 - t_1}$. Следователно

$$\Delta_n = C_1t_1^n + C_2t_2^n, \quad \text{където} \quad C_1 = \frac{t_2\Delta_1 - \Delta_2}{t_1(t_2 - t_1)}, \quad C_2 = \frac{\Delta_2 - t_1\Delta_1}{t_2(t_2 - t_1)}.$$

2.2) $t_1 = t_2 = t$, т.е. $\Delta_n - t\Delta_{n-1} = t^{n-2}(\Delta_2 - t\Delta_1)$. Означаваме с $b_2 = \Delta_2 - t\Delta_1$, $b_3 = \Delta_3 - t\Delta_2, \dots,$ $b_n = \Delta_n - t\Delta_{n-1}$, тогава $b_2, b_3, \dots$ е геометрична прогресия с частно t и $b_n = t^{n-2}b_2$. Разглеждаме сумата

$$b_n + tb_{n-1} + t^2b_{n-2} + \dots + t^{n-2}b_2 = t^{n-2}b_2 + t.t^{n-3}b_2 + \dots + t^{n-2}b_2 = (n-1)t^{n-2}b_2.$$

От друга страна

$$b_n + tb_{n-1} + t^2b_{n-2} + \dots + t^{n-2}b_2 = \Delta_n - t\Delta_{n-1} + t(\Delta_{n-1} - t\Delta_{n-2}) + t^2(\Delta_{n-2} - t\Delta_{n-3}) + \dots + t^{n-2}(\Delta_2 - t\Delta_1) =$$

$$\Delta_n - t^{n-1}\Delta_1.$$

Оттук $\Delta_n = t^{n-1}\Delta_1 + (n-1)t^{n-2}(\Delta_2 - t\Delta_1) = 2t^{n-1}\Delta_1 - t^{n-2}\Delta + n.t^{n-2}(\Delta_2 - t\Delta_1)$. Следователно

$$\Delta_n = C_1t^n + nC_2t^n, \quad \text{където} \quad C_1 = \frac{2t\Delta_1 - \Delta_2}{t^2}, \quad C_2 = \frac{\Delta_2 - t\Delta_1}{t^2}.$$

[1] Развиваме детерминантата по първи стълб.

$* * *$

Следователно, ако рекурентната връзка има вида $\Delta_n = a\Delta_{n-1} + b\Delta_{n-2}$, където a, b са константи, независещи от n и уравнението $t^2 - at - b = 0$ има корени t_1 и t_2, то

а) Ако $t_1 \neq t_2$, то $\Delta_n = C_1 t_1^n + C_2 t_2^n$.

б) Ако $t_1 = t_2 = t$ то $\Delta_n = C_1 t^n + nC_2 t^n$.

$* * *$

с)

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha+\beta & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix} =^{2} (\alpha+\beta)\Delta_{n-1} - \alpha\beta \begin{vmatrix} 1 & \alpha\beta & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix} =$$

$$(\alpha+\beta)\Delta_{n-1} - \alpha\beta\Delta_{n-2}.$$

Уравнението $t^2 - (\alpha+\beta)t + \alpha\beta = 0$ има корени α и β.

1 сл.) $\alpha \neq \beta$. Тогава $\Delta_n = C_1\alpha^n + C_2\beta^n$. При $n = 1$, $n = 2$ имаме

$$\begin{array}{ccccc} \Delta_1 & = & \alpha+\beta & = & C_1\alpha + C_2\beta \\ \Delta_2 & = & \alpha^2+\beta^2+\alpha\beta & = & C_1\alpha^2 + C_2\beta^2 \end{array}.$$

Оттук $\beta^2 = C_2\beta(\beta-\alpha)$, т.е. $C_2 = \dfrac{\beta}{\beta-\alpha}$, $\alpha C_1 = \alpha + \beta - \dfrac{\beta^2}{\beta-\alpha} = \dfrac{\beta^2-\alpha^2-\beta^2}{\beta-\alpha}$, т.е. $C_1 = \dfrac{-\alpha}{\beta-\alpha}$. Оттук

$$\Delta_n = \frac{-\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}}{\beta-\alpha}.$$

2 сл.) $\alpha = \beta$. Тогава $\Delta_n = C_1\alpha^n + nC_2\alpha^n$. При $n = 1$, $n = 2$ имаме

$$\begin{array}{ccccc} \Delta_1 & = & 2\alpha & = & C_1\alpha + C_2\alpha \\ \Delta_2 & = & 3\alpha^2 & = & C_1\alpha^2 + 2C_2\alpha^2 \end{array}.$$

Оттук $C_1 = C_2 = 1$ и значи

$$\Delta_n = (1+n)\alpha^n.$$

Забележка. $\Delta_n = \begin{vmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ c & a & b & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & a & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c & a & b \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c & a \end{vmatrix} = a\Delta_{n-1} - bc\Delta_{n-2}.$

т)

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -2\Delta_{n-1} + 3\Delta_{n-2}.$$

[2] Развиваме детерминантата по първи ред.

Уравнението $t^2+2t-3=0$ има корени $t_1=-3$ и $t_2=1$. Следователно $\Delta_n = C_1(-3)^n + C_2.1^n$. При $n=1$, $n=2$ имаме

$$\begin{array}{rcccl} \Delta_1 & = & -2 & = & -3C_1+C_2 \\ \Delta_2 & = & 7 & = & 9C_1+C_2 \end{array}.$$

Оттук $12C_1=9$, т.е. $C_1=\dfrac{3}{4}$, $C_2=-2+\dfrac{9}{4}=\dfrac{1}{4}$. Следователно

$$\Delta_n = \frac{3}{4}(-3)^n + \frac{1}{4}1^n = \frac{1-(-3)^{n+1}}{4}.$$

у)

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 6 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 6 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 9 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 9 & 6 \end{vmatrix} = 6\Delta_{n-1} - 9\Delta_{n-2}.$$

Уравнението $t^2-6t+9=0$ има корени $t_{1,2}=3$. Следователно $\Delta_n = C_1 3^n + nC_2 3^n$. При $n=1$, $n=2$ имаме

$$\begin{array}{rcccl} \Delta_1 & = & 6 & = & 3C_1+3C_2 \\ \Delta_2 & = & 27 & = & 9C_1+18C_2 \end{array}.$$

Оттук $C_1=C_2=1$ и

$$\Delta_n = (1+n).3^n.$$

ф) $\Delta_n = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -3 & -1 \end{vmatrix}$

х)

$$\Delta_{n+1} = \begin{array}{r} \rightarrow \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} h & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ hx & h & -1 & \dots & 0 & 0 \\ hx^2 & hx & h & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ hx^{n-1} & hx^{n-2} & hx^{n-3} & \dots & h & -1 \\ hx^n & hx^{n-1} & hx^{n-2} & \dots & hx & h \end{vmatrix} = h\Delta_n - 1.(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} hx & -1 & \dots & 0 & 0 \\ hx^2 & h & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ hx^{n-1} & hx^{n-3} & \dots & h & -1 \\ hx^n & hx^{n-2} & \dots & hx & h \end{vmatrix} =$$

$$h.\Delta_n + x.\Delta_n = (h+x)\Delta_n.$$

Следователно $\Delta_{n+1} = (h+x)^n\Delta_1 = (h+x)^n h$.

ц)

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2^2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 3^3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & (n-2)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 & (n-1)^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \leftarrow \end{array} =$$

$$-1.(-1)^{n+n-1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2^2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 3^3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & (n-1)^2 \end{vmatrix} + 1.(-1)^{n+n}\Delta_{n-1} = (n-1)^2\Delta_{n-2} + \Delta_{n-1},$$

т.е. $\Delta_n = \Delta_{n-1} + (n-1)^2\Delta_{n-2}$. Имаме $\Delta_1 = 1 = 1!$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 = 2!$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2^2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 6 = 3!$. Ще докажем, че $\Delta_n = n!$ за всяко $n \in \mathbb{N}$. Нека $n > 3$ и да предположим, че твърдението е в сила за всяко естествено $m < n$. Тогава

$$\Delta_n = \Delta_{n-1} - (n-1)^2\Delta_{n-2} \overset{\text{и.п.}}{=} (n-1)! + (n-1)^2(n-2)! = (n-1)!(1+n-1) = n.(n-1)! = n!.$$

ч) (Детерминанта на Вандермонд)

$$W(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_{n-1}^2 & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_{n-1}^{n-1} & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n \geq i > j \geq 1} (x_i - x_j).$$

Пример. Да се реши системата чрез формули на Крамер.

$$\left| \begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & + & 3x_3 & = & -2 \\ 4x_1 & + & 25x_2 & + & 9x_3 & = & 4 \end{array} \right.$$

Имаме

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 4 & 25 & 9 \end{vmatrix} = W(2,5,3) = (5-2)(3-2)(3-5) = 3.1.(-2) = -6 \neq 0 \\ \Delta_1 &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 5 & 3 \\ 4 & 25 & 9 \end{vmatrix} = W(-2,5,3) = 7.5.(-2) = -70 \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 4 & 4 & 9 \end{vmatrix} = W(2,-2,3) = -4.1.5 = -20 \\ \Delta_3 &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 4 & 25 & 4 \end{vmatrix} = W(2,5,-2) = 3.(-4).(-7) = 84 \end{aligned}$$

Следователно $x_1 = \dfrac{-70}{-6} = \dfrac{35}{3}$, $x_2 = \dfrac{-20}{-6} = \dfrac{10}{3}$, $x_3 = \dfrac{84}{-6} = -14$ и $\left(\dfrac{35}{3}, \dfrac{10}{3}, -14\right)$ е единственото решение на системата.

Задача. Да се пресметнат $AB - BA$ и $f(B)$, където

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \ f(x) = 2x^2 - 3x + 4$$

Решение.

$$\begin{aligned} AB - BA &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -6 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 8 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -4 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(B) &= 2B^2-3B+4E\\
&= 2\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&-1&0\\1&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&-1&0\\1&0&2\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&-1&0\\1&0&2\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\\
&= 2\begin{pmatrix}1&0&-3\\0&2&-1\\3&1&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&-3&3\\-3&7&0\\-3&0&-2\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}3&-3&-3\\-3&11&-2\\3&2&4\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Задача. Да се пресметне детерминантата

а)

$$\Delta_n=\begin{vmatrix}1+x_1y_1&1+x_1y_2&\dots&1+x_1y_n\\1+x_2y_1&1+x_2y_2&\dots&1+x_2y_n\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1+x_ny_1&1+x_ny_2&\dots&1+x_ny_n\end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix}1&x_1&0&\dots&0\\1&x_2&0&\dots&0\\1&x_3&0&\dots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&x_n&0&\dots&0\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1&1&1&\dots&1\\y_1&y_2&y_3&\dots&y_n\\0&0&0&\dots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\dots&0\end{vmatrix}=\begin{cases}0, & n>2,\\(x_2-x_1)(y_2-y_1), & n=2,\\x_1y_1+1, & n=1.\end{cases}$$

б) Нека $S_k=x_1^k+x_2^k+\dots+x_n^k$, $k=0,1,2,\dots$

$$\Delta_n=\begin{vmatrix}S_0&S_1&S_2&\dots&S_{n-1}\\S_1&S_2&S_3&\dots&S_n\\S_2&S_3&S_4&\dots&S_{n+1}\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\S_{n-1}&S_n&S_{n+1}&\dots&S_{2n-2}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&\dots&1\\x_1&x_2&\dots&x_n\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\x_1^{n-1}&x_2^{n-1}&\dots&x_n^{n-1}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1&x_1&x_1^2&\dots&x_1^{n-1}\\1&x_2&x_2^2&\dots&x_2^{n-1}\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&x_n&x_n^2&\dots&x_n^{n-1}\end{vmatrix}=$$

$$[W(x_1,x_2,\dots,x_n)]^2=\prod_{n\ge i>j\ge 1}(x_i-x_j)^2.$$

в)

$$\Delta_{n+1}=\begin{vmatrix}(a_0+b_0)^n&(a_0+b_1)^n&\dots&(a_0+b_n)^n\\(a_1+b_0)^n&(a_1+b_1)^n&\dots&(a_1+b_n)^n\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\(a_n+b_0)^n&(a_n+b_1)^n&\dots&(a_n+b_n)^n\end{vmatrix}\overset{(*)}{=}$$

$$\begin{vmatrix}a_0^n&a_0^{n-1}&a_0^{n-2}&\dots&a_0&1\\a_1^n&a_1^{n-1}&a_1^{n-2}&\dots&a_1&1\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\a_n^n&a_n^{n-1}&a_n^{n-2}&\dots&a_n&1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1&1&\dots&1\\\binom{n}{1}b_0&\binom{n}{1}b_1&\dots&\binom{n}{1}b_n\\\binom{n}{2}b_0^2&\binom{n}{2}b_1^2&\dots&\binom{n}{2}b_n^2\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\binom{n}{n-1}b_0^{n-1}&\binom{n}{n-1}b_1^{n-1}&\dots&\binom{n}{n-1}b_n^{n-1}\\b_0^n&b_1^n&\dots&b_n^n\end{vmatrix}=\Delta_1\Delta_2,$$

където

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= (-1)^{n+n-1+\dots+2+1}\begin{vmatrix}1&a_0&\dots&a_0^{n-1}&a_0^n\\1&a_1&\dots&a_1^{n-1}&a_1^n\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\1&a_n&\dots&a_n^{n-1}&a_n^n\end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}W(a_0,a_1,\dots,a_n)=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\prod_{n\ge i>j\ge 0}(a_i-a_j),\\
\Delta_2 &= \binom{n}{1}\binom{n}{2}\dots\binom{n}{n-1}W(b_0,b_1,\dots,b_n)=\binom{n}{1}\binom{n}{2}\dots\binom{n}{n-1}\prod_{n\ge i>j\ge 0}(b_i-b_j).
\end{aligned}$$

Следователно
$$\Delta_{n+1} = \binom{n}{1}\binom{n}{2}\cdots\binom{n}{n-1}\prod_{n\geq i>j\geq 0}(b_i - b_j)(a_j - a_i).$$

Тук използвахме формулата

$$(*)\qquad (a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n.$$

г)
$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \dfrac{1-a_1^nb_1^n}{1-a_1b_1} & \dfrac{1-a_1^nb_2^n}{1-a_1b_2} & \dots & \dfrac{1-a_1^nb_n^n}{1-a_1b_n} \\ \dfrac{1-a_2^nb_1^n}{1-a_2b_1} & \dfrac{1-a_2^nb_2^n}{1-a_2b_2} & \dots & \dfrac{1-a_2^nb_n^n}{1-a_2b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{1-a_n^nb_1^n}{1-a_nb_1} & \dfrac{1-a_n^nb_2^n}{1-a_nb_2} & \dots & \dfrac{1-a_n^nb_n^n}{1-a_nb_n} \end{vmatrix} \overset{(*)}{=} \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ b_1^2 & b_2^2 & \dots & b_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1^{n-1} & b_2^{n-1} & \dots & b_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$
$$W(a_1, a_2, \dots, a_n)W(b_1, b_2, \dots, b_n) = \prod_{n\geq i>j\geq 1}(a_i - a_j)(b_i - b_j).$$

Тук използвахме равенството

$$(*)\qquad 1 - a^nb^n = (1-ab)(1 + ab + a^2b^2 + \cdots + a^{n-1}b^{n-1}), \quad \text{откъдето} \quad \frac{1-a^nb^n}{1-ab} = 1 + ab + a^2b^2 + \cdots + a^{n-1}b^{n-1}.$$

Задача. Нека $\alpha, \beta \in F$ и $f(t) = t^2 - \alpha t - \beta$. Нека $U = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \in F^n \mid a_{k+2} = \alpha a_{k+1} + \beta a_k, 1 \le k \le n-2\}$.

а) Докажете, че U е линейно пространство над F и определете размерността му.

Решение. **Първи начин.** Имаме

$$U : \left| \begin{array}{ccccccccccccc} \beta x_1 & + & \alpha x_2 & - & x_3 & & & & & & & = & 0 \\ & & \beta x_2 & + & \alpha x_3 & - & x_4 & & & & & = & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & \beta x_{n-2} & + & \alpha x_{n-1} & - & x_n & = & 0 \end{array} \right.$$

и следователно $U \le F^n$. Тъй като матрицата A на системата има ранг $n-2$, то $\dim U = n - \operatorname{rank} A = n-(n-2) = 2$.

Втори начин. Имаме $\emptyset \ne U \subseteq F^n$, тъй като $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0) \in U$. Нека $\mathbf{u}_1 = (a_1, a_2, \dots, a_n), \mathbf{u}_2 = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in U$, т.е. $a_{k+2} = \alpha a_{k+1} + \beta a_k$, $b_{k+2} = \alpha b_{k+1} + \beta b_k$, $1 \le k \le n-2$, $\lambda \in F$. Тогава

$$\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n) \in U,$$

тъй като $a_{k+2} + b_{k+2} = \alpha a_{k+1} + \beta a_k + \alpha b_{k+1} + \beta b_k = \alpha(a_{k+1} + b_{k+1}) + \beta(a_k + b_k)$, $1 \le k \le n-2$,

$$\lambda \mathbf{u}_1 = (\lambda a_1 \lambda a_2, \dots, \lambda a_n) \in U,$$

тъй като $\lambda a_{k+2} = \lambda(\alpha a_{k+1} + \beta a_k) = \alpha(\lambda a_{k+1}) + \beta(\lambda a_k)$, $1 \le k \le n-2$.

Следователно $U \le F^n$. Нека $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in U$ са такива, че $u_1 = 1$, $u_2 = 0$, $v_1 = 0$, $v_2 = 1$. Тогава $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ са линейно независими. Ще покажем, че $U = l(\mathbf{u}, \mathbf{v})$. Нека $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in U$, т.е. $a_{k+2} = \alpha a_{k+1} + \beta a_k$, $1 \le k \le n-2$. Ще покажем, че $\mathbf{a} = a_1 \mathbf{u} + a_2 \mathbf{v}$, т.е. $a_k = a_1 u_k + a_2 v_k$, $1 \le k \le n$. Ще проведем индукция по k, $1 \le k \le n$.

При $k = 1$, $a_1 = a_1.1 + a_2.0 = a_1 u_1 + a_2 v_1$.

При $k = 2$, $a_2 = a_1.0 + a_2.1 = a_1 u_2 + a_2 v_2$.

Нека сега $2 < k \le n$ и твърдението е вярно за $i < k$. Имаме

$$a_k = \alpha a_{k-1} + \beta a_{k-2} \stackrel{\text{и.п.}}{=} \alpha(a_1 u_{k-1} + a_2 v_{k-1}) + \beta(a_1 u_{k-2} + a_2 v_{k-2}) = a_1(\alpha u_{k-1} + \beta u_{k-2}) + a_2(\alpha v_{k-1} - \beta v_{k-2}) = a_1 u_k + a_2 v_k.$$

б) Да се намерят всички елементи на U от вида $\mathbf{u}_\lambda = (\lambda, \lambda^2, \dots, \lambda^n)$, където $\lambda \in F$.

Решение. Имаме $\mathbf{u}_\lambda \in U \iff \lambda^{k+2} = \alpha\lambda^{k+1} + \beta\lambda^k$, $1 \le k \le n-2 \iff \lambda^k(\lambda^2 - \alpha\lambda - \beta) = 0$, $1 \le k \le n-2 \iff \lambda = 0$ или λ е корен на $f(t) = t^2 - \alpha t - \beta$ (т.е. $\lambda = \dfrac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4\beta}}{2}$), лежащ в F.

в) Докажете, че ако $\alpha^2 + 4\beta = 0$, $\alpha \ne 0$, векторите

$$\mathbf{e}_1 = \left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha^2}{2^2}, \dots, \frac{\alpha^n}{2^n}\right), \qquad \mathbf{e}_2 = \left(\frac{\alpha}{2}, 2\frac{\alpha^2}{2^2}, \dots, n\frac{\alpha^n}{2^n}\right)$$

образуват базис на U.

Решение. Тъй като $\alpha^2 + 4\beta = 0$, то $f(t) = t^2 - \alpha t - \beta$ има двукратен корен $\dfrac{\alpha}{2}$ $(0 \ne \alpha \in F)$. Следователно, предвид б), векторът $\mathbf{e}_1 \in U$. Векторът $\mathbf{e}_2 \in U$, тъй като $\alpha e_{2,k+1} + \beta e_{2,k} = \alpha(k+1)\dfrac{\alpha^{k+1}}{2^{k+1}} + \beta k \dfrac{\alpha^k}{2^k} = \dfrac{(k+1)\alpha^{k+2}}{2^{k+1}} - \dfrac{k\alpha^{k+2}}{2^{k+2}} = \dfrac{\alpha^{k+2}(2k+2-k)}{2^{k+2}} = (k+2)\dfrac{\alpha^{k+2}}{2^{k+2}} = e_{2,k+2}$, $1 \le k \le n-2$.

Тъй като $\dim U = 2$, и очевидно $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ са линейно независими, то $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ са базис на U.

Задача. Да се намерят всички комплексни числа z, за които

$$|z+i|+|z-i|=2.$$

Решение. Нека $z=a+ib$, $a,b\in\mathbb{R}$. Тогава $z\pm i=a+i(b\pm 1)$ и следователно уравнението приема вида

$$\sqrt{a^2+(b+1)^2}+\sqrt{a^2+(b-1)^2}=2,$$

т.е.

$$\sqrt{a^2+(b+1)^2}=2-\sqrt{a^2+(b-1)^2}.$$

При

$$2-\sqrt{a^2+(b-1)^2}\geq 0 \qquad (*)$$

последното уравнение е еквивалентно на

$$a^2+(b+1)^2=4-4\sqrt{a^2+(b-1)^2}+a^2+(b-1)^2,$$

т.е.

$$\sqrt{a^2+(b-1)^2}=1-b.$$

При

$$1-b\geq 0 \qquad (**)$$

това уравнение е еквивалентно на

$$a^2+(b-1)^2=(1-b)^2,$$

т.е. $a^2=0$. Следователно $a=0$. Оттук и $(*)$

$$\sqrt{(b-1)^2}\leq 2,$$

или все едно

$$-2\leq b-1\leq 2,$$

откъдето $-1\leq b\leq 3$. Оттук и $(**)$ получаваме

$$-1\leq b\leq 1.$$

Забележка. Ако при двете повдигания на квадрат не сме отчели $(*)$ и $(**)$, то получавайки $a=0$, т.е. $z=ib$, $b\in\mathbb{R}$, трябва да се върнем в първоначалното уравнение, което приема вида

$$|i(b+1)|+|i(b-1)|=2,$$

т.е.

$$|b+1|+|b-1|=2.$$

1 сл.) $b<-1$. Тогава $b+1<0$, $b-1<0$ и уравнението приема вида $-(b+1)-(b-1)=2$, откъдето $b=-1$ и значи в този случай нямаме решение.

2 сл.) $-1\leq b\leq 1$. Тогава $b+1\geq 0$, $b-1\leq 0$ и уравнението приема вида $b+1-(b-1)=2$ и значи всяко $b\in[-1;1]$ е решение.

3 сл.) $b>1$. Тогава $b+1>0$, $b-1>0$ и уравнението приема вида $(b+1)+(b-1)=2$, откъдето $b=1$ и значи в този случай нямаме решение.