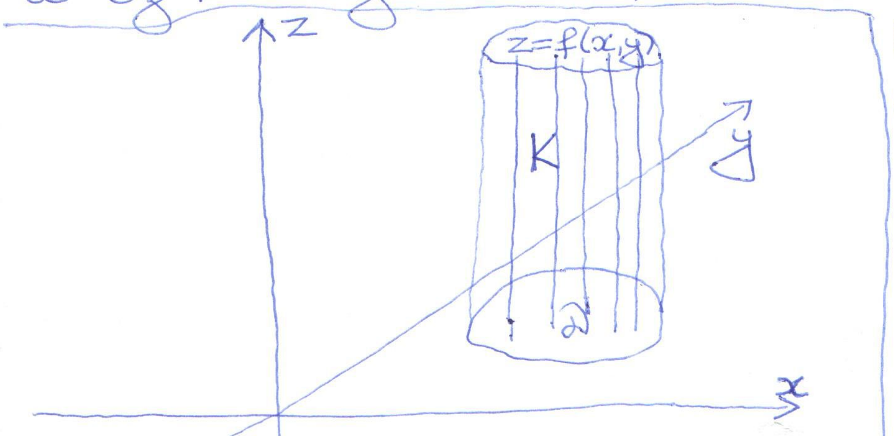
Упражнение 14
Двойни интеграли, част 3

Да припомним геометричния смисъл на двойния интеграл: ако $D \subset \mathbb{R}^2$ е компактно и измеримо м-во и $f: D \to \mathbb{R}$ е непрекъсната в D, то $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$ е ориентирания обем на тялото, заградено от D и графиката на f в D (т.е. обемът, взет със знак „+", ако $f(x,y) \geqq 0$ в D и взет със знак „−", ако $f(x,y) \leqq 0$ в D).



$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = V(K)$$

В частност, ако $s(D)$ е лицето на D, то

$$s(D) = \iint\limits_D 1\,dx\,dy.$$

Зад. 1 Пресметнете лицето $s(D)$ на множеството $D: x^2+(y-2)^2 \leqq 4 - 2\sqrt{2(x^2+y^2)}$.

Решение: Имаме, че $s(D) = \iint\limits_D 1\,dx\,dy$.

В този интеграл правим полярна смяна

$$\left| \begin{array}{l} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ \rho \geqq 0,\ 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi \end{array} \right.$$

. Както вече знаем $\Delta = \rho$.

Понеже $D: x^2+y^2 \leqq 4y - 2\sqrt{2(x^2+y^2)}$, то

$$D': \left| \begin{array}{l} \rho^2 \leqq 4\rho\sin\varphi - 2\sqrt{2}\,\rho \\ \rho \geqq 0,\ 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi \end{array} \right., \quad D': \left| \begin{array}{l} 0 \leqq \rho \leqq 4\left(\sin\varphi - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ \sin\varphi \geqq \frac{1}{\sqrt{2}},\ 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi \end{array} \right..$$

Окончателно

$$D': \left| \begin{array}{l} 0 \leqq \rho \leqq 4\left(\sin\varphi - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \rho(\varphi) \\ \frac{\pi}{4} \leqq \varphi \leqq \frac{3\pi}{4} \end{array} \right..$$

Тогава $s(D) = \iint\limits_D 1\,dx\,dy = \iint\limits_{D'} |\rho|\,d\rho\,d\varphi =$

$\Delta = \rho$

② $= \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \left[\int_0^{\rho(\varphi)} \rho \, d\rho \right] d\varphi = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{\rho^2}{2} \Big|_0^{\rho(\varphi)} d\varphi =$

$= \frac{1}{2} \int_{\pi/4}^{3\pi/4} 16 \left(\sin\varphi - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 d\varphi =$

$= 8 \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \left(\sin^2\varphi - \sqrt{2} \sin\varphi + \frac{1}{2} \right) d\varphi =$

$= 8 \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \left(\frac{1 - \cos 2\varphi}{2} - \sqrt{2} \sin\varphi + \frac{1}{2} \right) d\varphi =$

$= 8 \int_{\pi/4}^{3\pi/4} 1 \, d\varphi - 4 \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \cos 2\varphi \, d\varphi - 8\sqrt{2} \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \sin\varphi \, d\varphi =$

$= 8 . \varphi \Big|_{\pi/4}^{3\pi/4} - 2 . \sin 2\varphi \Big|_{\pi/4}^{3\pi/4} + 8\sqrt{2} \cos\varphi \Big|_{\pi/4}^{3\pi/4} =$

$= 4\pi - 2(-1-1) + 8\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 4\pi + 4 - 16 = 4\pi - 12.$

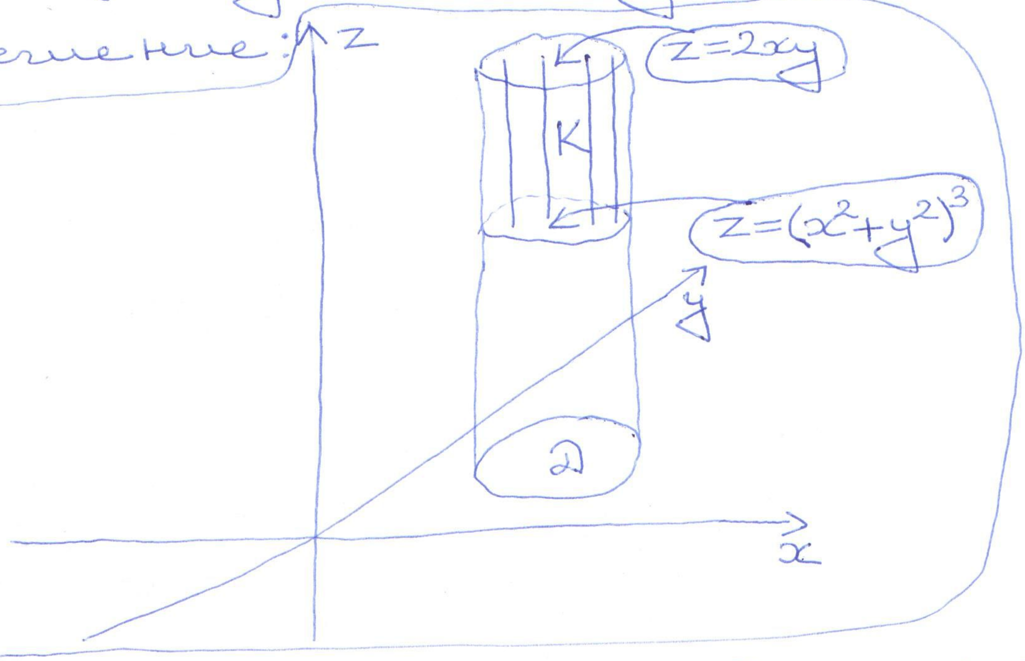
Отг. на зад. 1: $S(D) = 4(\pi - 3)$.

Упражнение: Намерете лицето $S(D)$ на множеството $D: x^2 + (y-3)^2 \leq 9 - 3\sqrt{2(x^2+y^2)}$.

Отг. $S(D) = 9(\pi - 3)$.

Зад. 2 Пресметнете обема $V(K)$ на тялото $K: (x^2+y^2)^3 \leq z \leq 2xy$.

Решение:



Имаме, че $V(K) = \iint_D \left[2xy - (x^2+y^2)^3 \right] dx\,dy$,

където $D: (x^2+y^2)^3 \leq 2xy$.

(Да отбележим, че в D $xy \geq 0$, така че D лежи в 1-ви и 3-ти квадрант; за да е чертежът по-ясен, на него ситуацията е опростена.)

③ Понеже $\mathcal{D}$ е симетрично спрямо координатното начало в равнината Oxy (ако $(x,y)\in\mathcal{D}$, то и $(-x,-y)\in\mathcal{D}$) и подинтегралната функция е четна спрямо x и y (стойността ѝ в (x,y) е равна на стойността ѝ в $(-x,-y)$), то

$$V(K)=2\iint_{\mathcal{D}_1}\left[2xy-(x^2+y^2)^3\right]dx\,dy,$$ където

$$\mathcal{D}_1:\begin{cases}(x^2+y^2)^3\leqq 2xy\\ x\geqq 0,\ y\geqq 0\end{cases}$$ ($\mathcal{D}_1$ е частта от $\mathcal{D}$, която лежи в 1-ви квадрант).

Правим полярна смяна $\begin{cases}x=\rho\cos\varphi\\ y=\rho\sin\varphi\\ \rho\geqq 0,\ 0\leqq\varphi\leqq 2\pi\end{cases}$.

имаме, че $\Delta=\rho$ и $\mathcal{D}_1':\begin{cases}\rho^6\leqq 2\rho^2\cos\varphi\sin\varphi\\ \rho\cos\varphi\geqq 0,\ \rho\sin\varphi\geqq 0\\ \rho\geqq 0,\ 0\leqq\varphi\leqq 2\pi\end{cases}$ т.е.

$$\mathcal{D}_1':\begin{cases}\rho^4\leqq\sin 2\varphi\\ \rho\geqq 0,\ 0\leqq\varphi\leqq\frac{\pi}{2}\end{cases}.$$

Окончателно $\mathcal{D}_1':\begin{cases}0\leqq\varphi\leqq\frac{\pi}{2}\\ 0\leqq\rho\leqq\sqrt[4]{\sin 2\varphi}=\rho(\varphi)\end{cases}$. Тогава

$\Delta=\rho$

$$V(K)=2\iint_{\mathcal{D}_1'}\left[2\rho^2\cos\varphi\sin\varphi-\rho^6\right].|\rho|\,d\rho\,d\varphi=$$

$$=2\int_0^{\pi/2}\left[\int_0^{\rho(\varphi)}(2\rho^3\cos\varphi\sin\varphi-\rho^7)\,d\rho\right]d\varphi=$$

$$=2\int_0^{\pi/2}\left[\left(\sin 2\varphi\,\frac{\rho^4}{4}-\frac{\rho^8}{8}\right)\Big|_{\rho=0}^{\rho=\rho(\varphi)=\sqrt[4]{\sin 2\varphi}}\right]d\varphi=$$

$$=2\int_0^{\pi/2}\left[\frac{\sin^2 2\varphi}{4}-\frac{\sin^2 2\varphi}{8}\right]d\varphi=\frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\sin^2 2\varphi\,d\varphi=$$

$$=\frac{1}{8}\int_0^{\pi/2}(1-\cos 4\varphi)\,d\varphi=\frac{1}{8}\left(\varphi\Big|_0^{\pi/2}-\frac{1}{4}\underbrace{\sin 4\varphi\Big|_0^{\pi/2}}_{=0}\right)=$$

$$=\frac{1}{8}\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{16}.$$

Отг. на зад. 2: $V(K)=\dfrac{\pi}{16}$.

Упражнение: Пресметнете обема $V(K)$ на тялото $K:(x^2+y^2)^2\leqq z\leqq x^2-y^2$.
Отг. $V(K)=\frac{1}{9}$

Зад. 3 Пресметнете обема $V(K)$ на тялото $K:(x^2+y^2+z^2+5)^2\leqq 36(x^2+y^2)$.

Решение: Ако $(x,y,z)\in K$, то $(\pm x,\pm y,\pm z)\in K$,

(4) така че K има един и същ вид във всеки от осемте октанта и ако K_1 е частта от K, която лежи в $1^{-ви}$ октант, то $V(K) = 8V(K_1)$.

Имаме, че $K_1: \begin{cases} (x^2+y^2+z^2+5)^2 \leqq 36(x^2+y^2) \\ x \geqq 0, y \geqq 0, z \geqq 0 \end{cases}$,

$K_1: \begin{cases} x^2+y^2+z^2+5 \leqq 6\sqrt{x^2+y^2} \\ x \geqq 0, y \geqq 0, z \geqq 0 \end{cases}$,

$K_1: \begin{cases} z^2 \leqq 6\sqrt{x^2+y^2} - (x^2+y^2) - 5 \\ x \geqq 0, y \geqq 0, z \geqq 0 \end{cases}$,

$K_1: \begin{cases} 0 \leqq z \leqq \sqrt{6\sqrt{x^2+y^2} - (x^2+y^2) - 5} \\ \left.\begin{matrix} 6\sqrt{x^2+y^2} - (x^2+y^2) - 5 \geqq 0 \\ x \geqq 0, y \geqq 0 \end{matrix}\right\} \mathcal{D} \end{cases}$.

Тогава $V(K_1) = \iint\limits_{\mathcal{D}} \sqrt{6\sqrt{x^2+y^2} - (x^2+y^2) - 5}\, dx\, dy$.

Правим полярна смяна $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ \rho \geqq 0, 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi \end{cases}$.

Имаме, че $\Delta = \rho$ и

$\mathcal{D}': \begin{cases} 6\rho - \rho^2 - 5 \geqq 0 \\ \rho\cos\varphi \geqq 0, \rho\sin\varphi \geqq 0 \\ \rho \geqq 0, 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi \end{cases}$, $\mathcal{D}': \begin{cases} \rho^2 - 6\rho + 5 \leqq 0 \\ \rho \geqq 0 \\ 0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2} \end{cases}$,

$\mathcal{D}': \begin{cases} (\rho-1)(\rho-5) \leqq 0 \\ \rho \geqq 0 \\ 0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2} \end{cases}$. Окончателно $\mathcal{D}': \begin{cases} 1 \leqq \rho \leqq 5 \\ 0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2} \end{cases}$.

Тогава $V(K_1) = \iint\limits_{\mathcal{D}'} \sqrt{6\rho - \rho^2 - 5} \cdot \underbrace{|\rho|}_{\Delta = \rho}\, d\rho\, d\varphi =$

$= \int_1^5 \left[\int_0^{\pi/2} \rho\sqrt{6\rho - \rho^2 - 5}\, d\varphi \right] d\rho =$

$= \int_1^5 \left[\rho\sqrt{6\rho - \rho^2 - 5} \int_0^{\pi/2} 1\, d\varphi \right] d\rho = \int_1^5 \left[\rho\sqrt{6\rho - \rho^2 - 5} \cdot \varphi \Big|_0^{\pi/2} \right] d\rho$

$= \frac{\pi}{2} \int_1^5 \rho\sqrt{6\rho - \rho^2 - 5}\, d\rho = \frac{\pi}{2} \int_1^5 \rho\sqrt{4 - (\rho^2 - 6\rho + 9)}\, d\rho =$ ($t = \rho - 3$)

$= \frac{\pi}{2} \int_1^5 \rho\sqrt{4 - (\rho-3)^2}\, d\rho = \frac{\pi}{2} \int_1^5 [(\rho-3)+3]\sqrt{4 - (\rho-3)^2}\, d(\rho-3) =$

$= \frac{\pi}{2} \int_{-2}^{2} (t+3)\sqrt{4 - t^2}\, dt =$

⑤ $= \frac{\pi}{2}\left[\int_{-2}^{2} \underbrace{t\sqrt{4-t^2}}_{\text{нечетна функция}}\,dt + 3\int_{-2}^{2}\underbrace{\sqrt{4-t^2}}_{\text{четна функция}}\,dt\right] =$

$= \frac{\pi}{2}\left[0 + 3.2\int_0^2 \sqrt{4-t^2}\,dt\right] = 3\pi\int_0^2\sqrt{4-t^2}\,dt \overset{t=2\sin u}{=}$

$= 3\pi\int_0^{\pi/2}\sqrt{4-4\sin^2 u}\,d(2\sin u) = 3\pi\int_0^{\pi/2}\sqrt{4\cos^2 u}\,.\,2\cos u\,du =$

$= 12\pi\int_0^{\pi/2}\cos^2 u\,du = 6\pi\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2u)\,du =$

$= 6\pi\left(u\Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{2}\underbrace{\sin 2u\Big|_0^{\pi/2}}_{=0}\right) = 6\pi.\frac{\pi}{2} = 3\pi^2.$

и така, $V(K_1) = 3\pi^2$, а пък $V(K) = 8V(K_1)$.

Отг. на зад. 3: $V(K) = 24\pi^2$.

Упражнение: Пресметнете обема $V(K)$ на тялото
$K: (x^2+y^2+z^2+6)^2 \leqq 49(x^2+y^2)$.

Отг. $V(K) = \frac{175\pi^2}{4}$.

Зад. 4 Пресметнете обема $V(K)$ на тялото
$K: \sqrt[3]{x^2+4y^2} + \sqrt[3]{z^2} \leqq 1$.

Решение: Последователно получаваме, че

$K: \sqrt[3]{z^2} \leqq 1 - \sqrt[3]{x^2+4y^2}$,

$K: z^2 \leqq \left(1-\sqrt[3]{x^2+4y^2}\right)^3$,

$$K: \left|\begin{array}{l} x^2+4y^2 \leqq 1 \; \} D \\ -\left(1-\sqrt[3]{x^2+4y^2}\right)^{\frac{3}{2}} \leqq z \leqq \left(1-\sqrt[3]{x^2+4y^2}\right)^{\frac{3}{2}} \end{array}\right.$$

Тогава $V(K) = 2\iint_D \left(1-\sqrt[3]{x^2+4y^2}\right)^{\frac{3}{2}} dx\,dy$.

Правим обобщена полярна смяна (при нея се опростява израза x^2+4y^2) $\left|\begin{array}{l} x = \rho\cos\varphi \\ y = \frac{1}{2}\rho\sin\varphi \\ \rho \geqq 0,\ 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi \end{array}\right.$.

Имаме, че $\Delta = \begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\varphi \\ y'_\rho & y'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \frac{1}{2}\sin\varphi & \frac{1}{2}\rho\cos\varphi \end{vmatrix} =$

$= \frac{1}{2}\rho\cos^2\varphi + \frac{1}{2}\rho\sin^2\varphi = \frac{1}{2}\rho$. По-нататък

$D': \left|\begin{array}{l} \rho^2\cos^2\varphi + \cancel{4}.\frac{1}{\cancel{4}}\rho^2\sin^2\varphi \leqq 1 \\ \rho \geqq 0,\ 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi \end{array}\right.$, $D': \left|\begin{array}{l} \rho^2 \leqq 1 \\ \rho \geqq 0,\ 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi \end{array}\right.$.

⑥ Окончателно $\mathcal{D}': \begin{cases} 0 \leq \rho \leq 1 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$. Тогава $\boxed{\Delta = \frac{1}{2}\rho}$

$$V(K) = 2 \iint_{\mathcal{D}'} \left(1 - \sqrt[3]{\rho^2\cos^2\varphi + \cancel{4}\cdot\frac{1}{\cancel{4}}\rho^2\sin^2\varphi}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \left|\frac{1}{2}\rho\right| d\rho\, d\varphi =$$

$$= \iint_{\mathcal{D}'} \rho\left(1 - \rho^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} d\rho\, d\varphi = \int_0^1 \left[\int_0^{2\pi} \rho\left(1 - \rho^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} d\varphi\right] d\rho =$$

$$= \int_0^1 \left[\rho\left(1 - \rho^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} \int_0^{2\pi} 1\, d\varphi\right] d\rho = \int_0^1 \left[\rho\left(1 - \rho^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \varphi\Big|_0^{2\pi}\right] d\rho =$$

$$= 2\pi \int_0^1 \rho\left(1 - \rho^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} d\rho.$$

Последният интеграл е интеграл от диференциален бином, а такива интеграли изучавахме на упражненията по ДИС-1.

В случая имаме, че $m = 1$, $n = \frac{2}{3}$, $p = \frac{3}{2}$.

$\frac{m+1}{n} = \frac{2}{\frac{2}{3}} = 3 \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ полагаме $1 - \rho^{\frac{2}{3}} = t^2$, $t \in [1, 0]$.

Оттук $\rho^{\frac{2}{3}} = 1 - t^2$, $\rho = (1 - t^2)^{\frac{3}{2}}$ и

$$V(K) = 2\pi \int_1^0 (1 - t^2)^{\frac{3}{2}} t^3\, d(1 - t^2)^{\frac{3}{2}} =$$

$$= 2\pi \int_1^0 (1 - t^2)^{\frac{3}{2}} t^3 \frac{3}{\cancel{2}} (1 - t^2)^{\frac{1}{2}} (-\cancel{2}t)\, dt =$$

$$= 6\pi \int_0^1 (1 - t^2)^2 t^4\, dt = 6\pi \int_0^1 (1 - 2t^2 + t^4) t^4\, dt =$$

$$= 6\pi \int_0^1 (t^4 - 2t^6 + t^8)\, dt = 6\pi \left(\frac{t^5}{5} - 2\frac{t^7}{7} + \frac{t^9}{9}\right)\Big|_0^1 =$$

$$= 6\pi \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{7} + \frac{1}{9}\right) = 6\pi \frac{9.7 - 2.5.9 + 5.7}{5.7.9} =$$

$$= 6\pi \frac{63 - 90 + 35}{315} = 6\pi \frac{8}{315} = \frac{16\pi}{105}.$$

Отг. на зад. 4: $V(K) = \frac{16\pi}{105}$.

Упражнение: Пресметнете обема $V(K)$ на тялото

$K: \sqrt[3]{9x^2 + y^2} + \sqrt[3]{z^2} \leq 1$.

Отг. $V(K) = \frac{32\pi}{315}$.