### 1.1.4 Pumping лема (лема за покачването)

Ако $L$ регулярен език

$$\longrightarrow \exists n \in \mathbb{N} : \forall w \in L : |w| > n$$

$$\longrightarrow \exists u, v, x : w = uvx \wedge$$

1. $|v| \geq 1 \wedge$
2. $|uv| \leq n \wedge$
3. $\forall k \in \mathbb{N}_0 : uv^k x \in L$

С думи:

Достатъчно дългите думи на един регулярен език имат непразна поддума която можем да "pump"ваме (итерираме) без да напускаме езика.

# Д-во на Pumping лемата

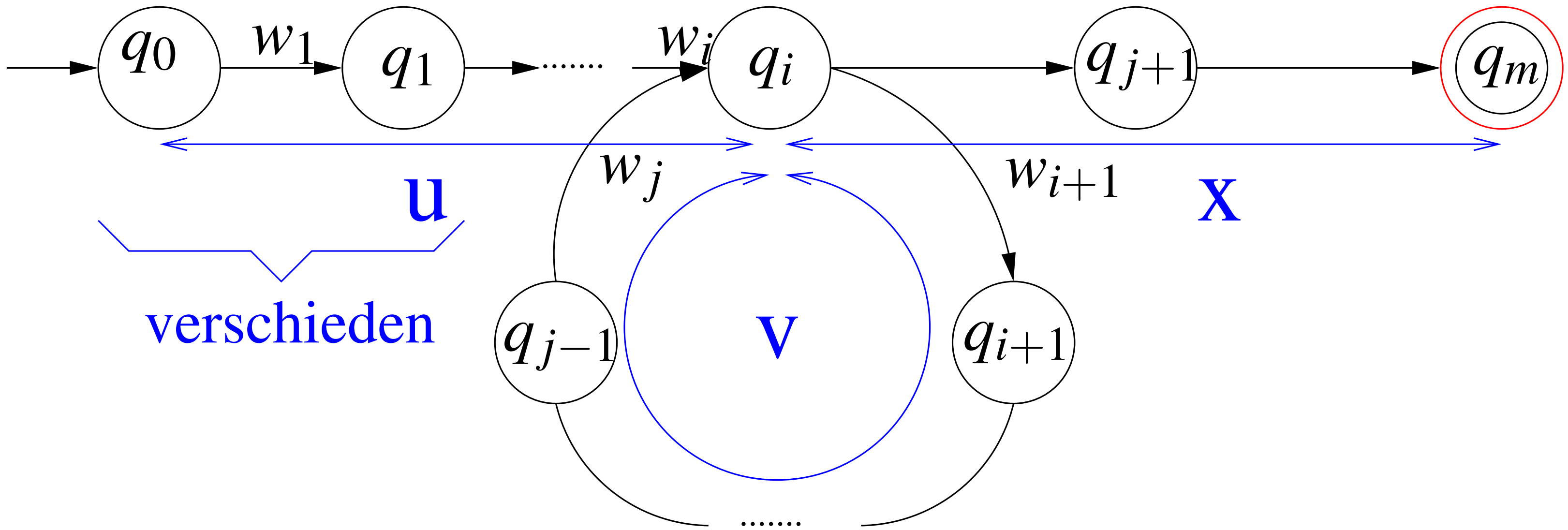
$L$ регулярен $\longrightarrow \exists n \in \mathbb{N} : \forall w \in L : |w| > n \longrightarrow \exists u, v, x :$

$w = uvx \wedge |v| \geq 1 \wedge |uv| \leq n \wedge \forall k \in \mathbb{N}_0 : uv^k x \in L$

Д-во: Нека $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ DFA и $L(A) = L$.

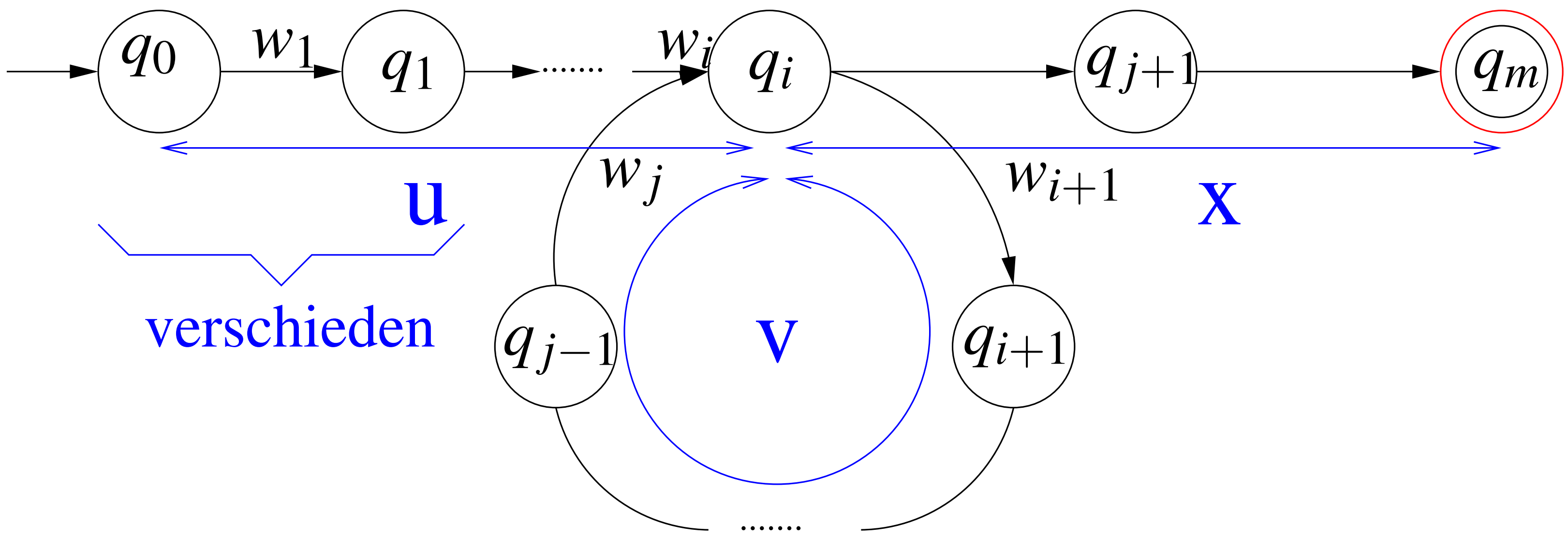
Нека $n = |Q|$ и $w \in L$ с $|w| = m \geq n$ (произволна).

Нека $q_0, \ldots, q_m$ състояния.




$(\exists i < j \leq n : q_i = q_j) \longrightarrow |v| \geq 1,\ |uv| \leq n,\ uv^k x$ са също в езика

# Д-во на Pumping лемата




$$w = w_1 \dots w_m;\ u = w_1 \dots w_i;\ v = w_{i+1} \dots w_j;\ x = w_{j+1} \dots w_m$$

$$(q_0, w) \vdash^* (q_i, w_{i+1} \dots w_j \dots w_m) \vdash^* (q_j, w_{j+1} \dots w_m) \Rightarrow$$

$$(q_0, w_1 \dots w_i) \vdash^* (q_i, \varepsilon)\ \&\ (q_i, w_{i+1} \dots w_j) \vdash^* (q_j, \varepsilon)\ \&\ q_i = q_j$$

$$\Rightarrow (q_0, w_1 \dots w_i w_{j+1} \dots w_m) \vdash^* (q_m, \varepsilon) \Rightarrow (q_0, ux) \vdash^* (q_m, \varepsilon)$$

$$\&\ (q_0, uv^k x) \vdash^* (q_i, v^k x) \vdash^* (q_j, v^{k-1} x) \vdash^* \dots \vdash^* (q_j, vx) \vdash^*$$

$$(q_j, x) \vdash^* (q_m, \varepsilon).$$

# Пример: $L = \{a^k b^k : k \in \mathbb{N}\}$

Да допуснем, че $L$ е регулярен.

Нека $n$ е числото от Pumping лемата и нека

$w = a^n b^n = uvx$ в съответствие с Pumping лемата, тогава

$ux \in L$.

$|uv| \leq n, |v| \geq 1 \longrightarrow v = a^\ell$ за $\ell \geq 1$.

$ux = a^{n-\ell} b^n \in L$.

Противоречие. ■

# Пример: Балансирани скоби $L_{()}$

Да допуснем, че $L$ е регулярен.

Нека $n$ е числото от Pumping лемата за $L$ и да разгледаме $w = (^n)^n = uvx$ съгласно Pumping лемата $ux \in L_{()}$ и $|v| > 1$ и $|uv| \leq n$.

Тогава $v = (^i$, $i \neq 0$

и $ux = (^{n-i})^n \notin L_{()}$ Противоречие.

## $L = \{0^p : p \text{ is a prime number}\}$

Да допуснем, че $L$ е регулярен.

Нека $n$ е числото от Pumping лемата за $L$.

Нека $p \geq n+2$ е просто число.($\exists$ безкрайно много прости числа) $\longrightarrow 0^p \in L = uvw$, $|v| \geq 1$, $|uw| \geq 2$.

Pumping-лема: $uv^{|uw|}w \in L$.

$\longrightarrow |uw| + |uw| \cdot |v| = |uw|(1+|v|)$ е просто число.

Два нетривиални делителя $|uw| \geq 2$ и $(1+|v|) \geq 2$.

Противоречие. ■

$$L = \left\{ 0^{n^2} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

Да допуснем, че $L$ е регулярен.

Нека $n$ е числото от Pumping лемата за $L$.

Нека $\longrightarrow 0^{n^2} \in L = uvw$, $|v| \geq 1$, $|uv| \leq n$.

Pumping-лема: $uv^2w \in L$.

$\longrightarrow n^2 < |uv^2w| \leq n^2 + n < (n+1)^2$.

Противоречие. ■

# Pumping-лемата

не е достатъчно условие за регулярност

Пример: $L = \left\{c^m a^\ell b^\ell : m, \ell \geq 0\right\} \cup \{a,b\}^*$ не е регулярен,

но

ако $n \geq 1$ е произволно и $x \in L$ с $|x| \geq n$.

1. $x \in a^* b^*$:

$$x = \underbrace{\varepsilon}_{u} \underbrace{a}_{v} \underbrace{a^m b^{n-m-1}}_{w}$$

1. $|v| = 1 \geq 1$
2. $|uv| = 1 \leq n$
3. $uv^i w = a^i a^m b^{n-m-1} \in a^* b^* \subseteq L$

# Pumping-лемата

не е достатъчно условие за регулярност

Пример: $L = \{c^m a^\ell b^\ell : m, \ell \geq 0\} \cup \{a,b\}^*$ не е регулярен,

Нека $n$ е произволно, $w \in L$ произволно с $|w| \geq n$.

1. Ако $w \in a^* b^*$: го видяхме.
2. Ако $w = c^m a^\ell b^\ell$, $m \geq 1$:

Разгледайте $w = \underbrace{\varepsilon}_{u} \underbrace{c}_{v} \underbrace{c^{m-1} a^\ell b^\ell}_{x}$

1. $|v| = 1 \geq 1$
2. $|uv| = 1 \leq n$
3. $uv^i x = c^{m-1+i} a^\ell b^\ell \in L$