Лекция I - Вероятност

Лекция I - Вероятност

- Класическа вероятност
- Геометрична вероятност
- Аксиоми за вероятността
- Вероятностно пространство

Исторически бележки

В теория на вероятностите се разглеждат случайни събития и се въвеждат математически модели описващи тези събития. Базовата идея е, че светът не е детерминиран, и често наблюдаваме явления които са въпрос на шанс.

Исторически бележки

В теория на вероятностите се разглеждат случайни събития и се въвеждат математически модели описващи тези събития. Базовата идея е, че светът не е детерминиран, и често наблюдаваме явления които са въпрос на шанс.

Първите търсения датират от XV - XVI век и най-често са свързани с различни хазартни игри. В тази област по-късно са работили Кардано, Ферма, Паскал, Бернули, Лаплас, Гаус и много други.

Исторически бележки

В теория на вероятностите се разглеждат случайни събития и се въвеждат математически модели описващи тези събития. Базовата идея е, че светът не е детерминиран, и често наблюдаваме явления които са въпрос на шанс.

Първите търсения датират от XV - XVI век и най-често са свързани с различни хазартни игри. В тази област по-късно са работили Кардано, Ферма, Паскал, Бернули, Лаплас, Гаус и много други.

До началото на XX век са годините на класическата теория на вероятностите. Тогава са открити ред важни резултати, включително "закон за големите числа" и "централна гранична теорема", които имат силата и универсалността на природни закони. Все още обаче не съществува строго аксиоматично изграждане на теорията. Това е един от известните проблеми в математиката формулиран от Хилберт.

Исторически бележки

В теория на вероятностите се разглеждат случайни събития и се въвеждат математически модели описващи тези събития. Базовата идея е, че светът не е детерминиран, и често наблюдаваме явления които са въпрос на шанс.

Първите търсения датират от XV - XVI век и най-често са свързани с различни хазартни игри. В тази област по-късно са работили Кардано, Ферма, Паскал, Бернули, Лаплас, Гаус и много други.

До началото на XX век са годините на класическата теория на вероятностите. Тогава са открити ред важни резултати, включително "закон за големите числа" и "централна гранична теорема", които имат силата и универсалността на природни закони. Все още обаче не съществува строго аксиоматично изграждане на теорията. Това е един от известните проблеми в математиката формулиран от Хилберт.

Колмогоров изгражда съвременната абстрактна теория на вероятностите, като предлага аксиоматика базирана на теория на мярката и лебеговия интеграл.

Исторически бележки

В теория на вероятностите се разглеждат случайни събития и се въвеждат математически модели описващи тези събития. Базовата идея е, че светът не е детерминиран, и често наблюдаваме явления които са въпрос на шанс.

Първите търсения датират от XV - XVI век и най-често са свързани с различни хазартни игри. В тази област по-късно са работили Кардано, Ферма, Паскал, Бернули, Лаплас, Гаус и много други.

До началото на XX век са годините на класическата теория на вероятностите. Тогава са открити ред важни резултати, включително "закон за големите числа" и "централна гранична теорема", които имат силата и универсалността на природни закони. Все още обаче не съществува строго аксиоматично изграждане на теорията. Това е един от известните проблеми в математиката формулиран от Хилберт.

Колмогоров изгражда съвременната абстрактна теория на вероятностите, като предлага аксиоматика базирана на теория на мярката и лебеговия интеграл.

В тези записки ние няма строго да следваме аксиоматичния подход, много честто ще работим с интуитивни представи и ще търсим практическото приложение.

Основни понятия

Ще започнем с някой основни понятия

Основни понятия

Ще започнем с някой основни понятия

- **Случаен опит** или **случаен експеримент** наричаме опит, изходът от който не може да бъде предварително определен, т.е не е известен.

Основни понятия

Ще започнем с някой основни понятия

- **Случаен опит** или **случаен експеримент** наричаме опит, изходът от който не може да бъде предварително определен, т.е не е известен.
- Резултата от един случаен опит наричаме **елементарно събитие** и бележим с ω.

Основни понятия

Ще започнем с някой основни понятия

- **Случаен опит** или **случаен експеримент** наричаме опит, изходът от който не може да бъде предварително определен, т.е не е известен.
- Резултата от един случаен опит наричаме **елементарно събитие** и бележим с ω.
- Всевъзможните изходи от един случаен опит наричаме **пространство на елементарните събития**, стандартното означение за него е Ω.

Основни понятия

Ще започнем с някой основни понятия

- **Случаен опит** или **случаен експеримент** наричаме опит, изходът от който не може да бъде предварително определен, т.е не е известен.
- Резултата от един случаен опит наричаме **елементарно събитие** и бележим с ω.
- Всевъзможните изходи от един случаен опит наричаме **пространство на елементарните събития**, стандартното означение за него е Ω.
- Всяко подмножество на Ω наричаме **случайно събитие**. Събитията обикновено се записват с главните букви A, B и т.н.

Основни понятия

Ще започнем с някой основни понятия

- **Случаен опит** или **случаен експеримент** наричаме опит, изходът от който не може да бъде предварително определен, т.е не е известен.
- Резултата от един случаен опит наричаме **елементарно събитие** и бележим с ω.
- Всевъзможните изходи от един случаен опит наричаме **пространство на елементарните събития**, стандартното означение за него е Ω.
- Всяко подмножество на Ω наричаме **случайно събитие**. Събитията обикновено се записват с главните букви A, B и т.н.

Пример

Хвърляме зар. Тогава, за пространството на елементарни събития получаваме:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Случайни събития са, например:
$A = \{$ пада се четно число$\} = \{2, 4, 6\}$
$B = \{$ пада се повече от две$\} = \{3, 4, 5, 6\}$

Пример

При хвърляне на два различни зара пространството на елементарни събития се състои от 36 елемента:

$$\Omega = \{(1,1),(1,2),\ldots,(1,6),(2,1),(2,2),\ldots,(6,6)\}$$

Пример

При хвърляне на два различни зара пространството на елементарни събития се състои от 36 елемента:

$$\Omega = \{(1,1),(1,2),\dots,(1,6),(2,1),(2,2),\dots,(6,6)\}$$

Пример

При стребла по мишена, докато бъде поразена броят, на направените изстрели е естествено число

$$\Omega = \{1,2,3,\dots\}$$

т.е. Ω е изброимо множество.

Основни понятия

Пример

При хвърляне на два различни зара пространството на елементарни събития се състои от 36 елемента:
$$\Omega = \{(1,1),(1,2),\dots,(1,6),(2,1),(2,2),\dots,(6,6)\}$$

Пример

При стребла по мишена, докато бъде поразена броят, на направените изстрели е естествено число
$$\Omega = \{1,2,3,\dots\}$$

т.е. Ω е изброимо множество.

Пример

При измерване на външната температура в момента получаваме реално число в някакъв интервал.
$$\Omega = \{t : -40 < t < 50\}$$

В този случай Ω е неизброимо множество с мощността на континуума.

Основни понятия

Казваме, че събитието A се е изпълнило или сбъднало, ако се е изпълнило някое елементарно събитие, което му принадлежи.

Доколкото събитията са множества, правилата за работа със събития съвпадат с операциите над множества. Едновременното сбъдване на събитията A и B означава, че се е сбъднало елементарно събитие принадлежащо и на двете. Да се изпълни поне едно от двете събития означава, че елементарното събитие принадлежи на поне едното и т.н.

Основни понятия

Казваме, че събитието A се е изпълнило или сбъднало, ако се е изпълнило някое елементарно събитие, което му принадлежи.

Доколкото събитията са множества, правилата за работа със събития съвпадат с операциите над множества. Едновременното сбъдване на събитията A и B означава, че се е сбъднало елементарно събитие принадлежащо и на двете. Да се изпълни поне едно от двете събития означава, че елементарното събитие принадлежи на поне едното и т.н.

- $A \cap B = AB$ - едновременно сбъдване на двете събития

Основни понятия

Казваме, че събитието A се е изпълнило или сбъднало, ако се е изпълнило някое елементарно събитие, което му принадлежи.

Доколкото събитията са множества, правилата за работа със събития съвпадат с операциите над множества. Едновременното сбъдване на събитията A и B означава, че се е сбъднало елементарно събитие принадлежащо и на двете. Да се изпълни поне едно от двете събития означава, че елементарното събитие принадлежи на поне едното и т.н.

- $A \cap B = AB$ - едновременно сбъдване на двете събития
- $A \cup B$ - сбъдване на поне едното от двете събития

Основни понятия

Казваме, че събитието A се е изпълнило или сбъднало, ако се е изпълнило някое елементарно събитие, което му принадлежи.

Доколкото събитията са множества, правилата за работа със събития съвпадат с операциите над множества. Едновременното сбъдване на събитията A и B означава, че се е сбъднало елементарно събитие принадлежащо и на двете. Да се изпълни поне едно от двете събития означава, че елементарното събитие принадлежи на поне едното и т.н.

- $A \cap B = AB$ - едновременно сбъдване на двете събития
- $A \cup B$ - сбъдване на поне едното от двете събития
- $A \subset B$ - винаги когато се сбъдва A се сбъдва и B, т.е. от A следва B

Основни понятия

Казваме, че събитието A се е изпълнило или сбъднало, ако се е изпълнило някое елементарно събитие, което му принадлежи.

Доколкото събитията са множества, правилата за работа със събития съвпадат с операциите над множества. Едновременното сбъдване на събитията A и B означава, че се е сбъднало елементарно събитие принадлежащо и на двете. Да се изпълни поне едно от двете събития означава, че елементарното събитие принадлежи на поне едното и т.н.

- $A \cap B = AB$ - едновременно сбъдване на двете събития
- $A \cup B$ - сбъдване на поне едното от двете събития
- $A \subset B$ - винаги когато се сбъдва A се сбъдва и B, т.е. от A следва B
- $\overline{A}$ - не се сбъдва A, т.е. сбъдва се противоположното събитие

Основни понятия

Казваме, че събитието A се е изпълнило или сбъднало, ако се е изпълнило някое елементарно събитие, което му принадлежи.

Доколкото събитията са множества, правилата за работа със събития съвпадат с операциите над множества. Едновременното сбъдване на събитията A и B означава, че се е сбъднало елементарно събитие принадлежащо и на двете. Да се изпълни поне едно от двете събития означава, че елементарното събитие принадлежи на поне едното и т.н.

- $A \cap B = AB$ - едновременно сбъдване на двете събития
- $A \cup B$ - сбъдване на поне едното от двете събития
- $A \subset B$ - винаги когато се сбъдва A се сбъдва и B, т.е. от A следва B
- $\overline{A}$ - не се сбъдва A, т.е. сбъдва се противоположното събитие

Прието е $\emptyset$ да се нарича **невъзможно събитие** , а Ω **сигурно събитие**.
Ако $AB = \emptyset$ казваме, че събитията са **несъвместими**.

Основни понятия

Казваме, че събитието A се е изпълнило или сбъднало, ако се е изпълнило някое елементарно събитие, което му принадлежи.

Доколкото събитията са множества, правилата за работа със събития съвпадат с операциите над множества. Едновременното сбъдване на събитията A и B означава, че се е сбъднало елементарно събитие принадлежащо и на двете. Да се изпълни поне едно от двете събития означава, че елементарното събитие принадлежи на поне едното и т.н.

- $A \cap B = AB$ - едновременно сбъдване на двете събития
- $A \cup B$ - сбъдване на поне едното от двете събития
- $A \subset B$ - винаги когато се сбъдва A се сбъдва и B, т.е. от A следва B
- $\overline{A}$ - не се сбъдва A, т.е. сбъдва се противоположното събитие

Прието е $\emptyset$ да се нарича **невъзможно събитие** , а Ω **сигурно събитие**. Ако $AB = \emptyset$ казваме, че събитията са **несъвместими**.

Естествено за събитията са изпълнени: асоциативен, комутативен и дистрибутивен закон, както и закони на Де Морган.

Класическа дефиниция на вероятност

Нека при провеждането на някакъв опит са възможни само краен брой елементарни събития и те се случват с една и съща честота. Това би се получило например, ако се хвърля правилен зар. Тогава, можем да въведем следното понятие:

Класическа дефиниция на вероятност

Нека при провеждането на някакъв опит са възможни само краен брой елементарни събития и те се случват с една и съща честота. Това би се получило например, ако се хвърля правилен зар. Тогава, можем да въведем следното понятие:

Дефиниция - Класическа вероятност

Вероятност на събитието A наричаме отношението на броя на благоприятните случай, т.е. тези случай при които събитието A се изпълнява, към броя на всички възможности при извършането на някакъв прост опит, т.е.

$$\mathrm{P}(A) = \frac{\text{Брой на благоприятните случай}}{\text{Брой на всички случай}} = \frac{\#A}{\#\Omega}$$

Класическа дефиниция на вероятност

Нека при провеждането на някакъв опит са възможни само краен брой елементарни събития и те се случват с една и съща честота. Това би се получило например, ако се хвърля правилен зар. Тогава, можем да въведем следното понятие:

Дефиниция - Класическа вероятност

Вероятност на събитието A наричаме отношението на броя на благоприятните случай, т.е. тези случай при които събитието A се изпълнява, към броя на всички възможности при извършането на някакъв прост опит, т.е.

$$\mathsf{P}(A) = \frac{\text{Брой на благоприятните случай}}{\text{Брой на всички случай}} = \frac{\#A}{\#\Omega}$$

Ясно е, че за така дефинираната вероятност е изпълнено:

Класическа дефиниция на вероятност

Нека при провеждането на някакъв опит са възможни само краен брой елементарни събития и те се случват с една и съща честота. Това би се получило например, ако се хвърля правилен зар. Тогава, можем да въведем следното понятие:

Дефиниция - Класическа вероятност

Вероятност на събитието A наричаме отношението на броя на благоприятните случаи, т.е. тези случаи при които събитието A се изпълнява, към броя на всички възможности при извършането на някакъв прост опит, т.е.

$$\mathrm{P}(A) = \frac{\text{Брой на благоприятните случаи}}{\text{Брой на всички случаи}} = \frac{\#A}{\#\Omega}$$

Ясно е, че за така дефинираната вероятност е изпълнено:

- $0 \leq \mathrm{P}(A) \leq 1$

Класическа дефиниция на вероятност

Нека при провеждането на някакъв опит са възможни само краен брой елементарни събития и те се случват с една и съща честота. Това би се получило например, ако се хвърля правилен зар. Тогава, можем да въведем следното понятие:

Дефиниция - Класическа вероятност

Вероятност на събитието A наричаме отношението на броя на благоприятните случаи, т.е. тези случаи при които събитието A се изпълнява, към броя на всички възможности при извършането на някакъв прост опит, т.е.

$$\mathrm{P}(A) = \frac{\text{Брой на благоприятните случаи}}{\text{Брой на всички случаи}} = \frac{\#A}{\#\Omega}$$

Ясно е, че за така дефинираната вероятност е изпълнено:

- $0 \leq \mathrm{P}(A) \leq 1$
- $\mathrm{P}(\emptyset) = 0$ и $\mathrm{P}(\Omega) = 1$

Класическа дефиниция на вероятност

Нека при провеждането на някакъв опит са възможни само краен брой елементарни събития и те се случват с една и съща честота. Това би се получило например, ако се хвърля правилен зар. Тогава, можем да въведем следното понятие:

Дефиниция - Класическа вероятност

Вероятност на събитието A наричаме отношението на броя на благоприятните случай, т.е. тези случай при които събитието A се изпълнява, към броя на всички възможности при извършането на някакъв прост опит, т.е.

$$\mathrm{P}(A) = \frac{\text{Брой на благоприятните случай}}{\text{Брой на всички случай}} = \frac{\#A}{\#\Omega}$$

Ясно е, че за така дефинираната вероятност е изпълнено:

- $0 \leq \mathrm{P}(A) \leq 1$
- $\mathrm{P}(\emptyset) = 0 \quad$ и $\quad \mathrm{P}(\Omega) = 1$
- $\mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - \mathrm{P}(A)$

Класическа дефиниция на вероятност

Нека при провеждането на някакъв опит са възможни само краен брой елементарни събития и те се случват с една и съща честота. Това би се получило например, ако се хвърля правилен зар. Тогава, можем да въведем следното понятие:

Дефиниция - Класическа вероятност

Вероятност на събитието A наричаме отношението на броя на благоприятните случай, т.е. тези случай при които събитието A се изпълнява, към броя на всички възможности при извършането на някакъв прост опит, т.е.

$$\mathrm{P}(A) = \frac{\text{Брой на благоприятните случай}}{\text{Брой на всички случай}} = \frac{\#A}{\#\Omega}$$

Ясно е, че за така дефинираната вероятност е изпълнено:

- $0 \leq \mathrm{P}(A) \leq 1$
- $\mathrm{P}(\emptyset) = 0 \quad$ и $\quad \mathrm{P}(\Omega) = 1$
- $\mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - \mathrm{P}(A)$
- Ако $AB = \emptyset$, тогава $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$

Класическа дефиниция на вероятност

Ще приведем един прост пример.

Класическа дефиниция на вероятност

Ще приведем един прост пример.

Пример

Хвърлят се два различими зара. Нека A е събитието “сумата от падналите се точки не е шест” . Ще определим вероятността на A.

Класическа дефиниция на вероятност

Ще приведем един прост пример.

Пример

Хвърлят се два различими зара. Нека A е събитието "сумата от падналите се точки не е шест" . Ще определим вероятността на A.

По-лесно е да се пресметне вероятността на обратното събитие $\overline{A}$.

$$\mathsf{P}\left(\overline{A}\right) = \frac{\#\{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}}{\#\Omega} = \frac{5}{36}$$

Тогава $\mathsf{P}(A) = 1 - \mathsf{P}(\overline{A}) = 31/36$.

Класическа дефиниция на вероятност

Ще приведем един прост пример.

Пример

Хвърлят се два различими зара. Нека A е събитието "сумата от падналите се точки не е шест" . Ще определим вероятността на A.

По-лесно е да се пресметне вероятността на обратното събитие $\overline{A}$.

$$\mathrm{P}\left(\overline{A}\right) = \frac{\#\{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}}{\#\Omega} = \frac{5}{36}$$

Тогава $\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(\overline{A}) = 31/36$.

Това че модела е елементарен, не пречи в него да се формулират някой съвсем не тривиални задачи.

Класическа дефиниция на вероятност

Ще приведем един прост пример.

Пример

Хвърлят се два различими зара. Нека A е събитието "сумата от падналите се точки не е шест" . Ще определим вероятността на A.

По-лесно е да се пресметне вероятността на обратното събитие $\overline{A}$.

$$\mathrm{P}\left(\overline{A}\right) = \frac{\#\{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}}{\#\Omega} = \frac{5}{36}$$

Тогава $\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(\overline{A}) = 31/36$.

Това че модела е елементарен, не пречи в него да се формулират някой съвсем не тривиални задачи.

Задача

На опашка за билети са се наредили двайсет човека, десет от тях имат само една банкнота от 10лв, а останалите една банкнота от 20лв. Всеки иска да купи билет от 10лв. Каква е вероятността никой да не чака за връщане на ресто, ако в касата първоначално няма пари?

Геометрична вероятност

Когато пространството на елементарните събития Ω е неизброимо, разбира се не е възможно въвеждането на класическа вероятност, тъй като не може да се говори за брой на елементарните събития. Тогава, за дефиниране на вероятност вместо "брой" се използва мярка - μ, Под мярка разбираме лебеговата мярка, т.е. ако множеството е едномерно, мярката е дължината. При двумерни множества използваме лицето, в тримерни обема и т.н.

Геометрична вероятност

Когато пространството на елементарните събития Ω е неизброимо, разбира се не е възможно въвеждането на класическа вероятност, тъй като не може да се говори за брой на елементарните събития. Тогава, за дефиниране на вероятност вместо "брой" се използва мярка - μ, Под мярка разбираме лебеговата мярка, т.е. ако множеството е едномерно, мярката е дължината. При двумерни множества използваме лицето, в тримерни обема и т.н.

Дефиниция - Геометрична вероятност

Нека Ω е някакъв геометричен обект. Тогава вероятността на събитието A се дефинира като

$$\mathrm{P}(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

Геометрична вероятност

Когато пространството на елементарните събития Ω е неизброимо, разбира се не е възможно въвеждането на класическа вероятност, тъй като не може да се говори за брой на елементарните събития. Тогава, за дефиниране на вероятност вместо "брой" се използва мярка - μ, Под мярка разбираме лебеговата мярка, т.е. ако множеството е едномерно, мярката е дължината. При двумерни множества използваме лицето, в тримерни обема и т.н.

Дефиниция - Геометрична вероятност

Нека Ω е някакъв геометричен обект. Тогава вероятността на събитието A се дефинира като

$$\mathrm{P}(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

За да бъде моделът на геометричната вероятност смислен би следвало да поискаме, също както при класическа вероятност, елементарните събития да са с еднаква честота. В случая, това би означавало вероятността да попаднем във всяка точка на пространството да е една и съща, т.е. вероятността да попаднем в някое множество да зависи само от мярката на множеството, а не от неговото положение, форма и т.н.

Геометрична вероятност

Когато пространството на елементарните събития Ω е неизброимо, разбира се не е възможно въвеждането на класическа вероятност, тъй като не може да се говори за брой на елементарните събития. Тогава, за дефиниране на вероятност вместо "брой" се използва мярка - μ, Под мярка разбираме лебеговата мярка, т.е. ако множеството е едномерно, мярката е дължината. При двумерни множества използваме лицето, в тримерни обема и т.н.

Дефиниция - Геометрична вероятност

Нека Ω е някакъв геометричен обект. Тогава вероятността на събитието A се дефинира като

$$\mathrm{P}(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

За да бъде моделът на геометричната вероятност смислен би следвало да поискаме, също както при класическа вероятност, елементарните събития да са с еднаква честота. В случая, това би означавало вероятността да попаднем във всяка точка на пространството да е една и съща, т.е. вероятността да попаднем в някое множество да зависи само от мярката на множеството, а не от неговото положение, форма и т.н.

Геометричната вероятност има същите свойства като класическата вероятност.

Геометрична вероятност

Пример

По график автобус се движи на интервали от 15 минути. Каква е вероятността да чакаме пристигането на автобуса по-малко от 5 минути.

Пример

По график автобус се движи на интервали от 15 минути. Каква е вероятността да чакаме пристигането на автобуса по-малко от 5 минути.

Ние пристагаме на спирката в случаен момент, спрямо графика на автобуса. Нека с X означим времето за чакане. Ясно е, че X е реално число в интервала $[0, 15]$, при това вероятността да вземе коя да е стойност в този интервал е една и съща.

Пример

По график автобус се движи на интервали от 15 минути. Каква е вероятността да чакаме пристигането на автобуса по-малко от 5 минути.

Ние пристагаме на спирката в случаен момент, спрямо графика на автобуса. Нека с X означим времето за чакане. Ясно е, че X е реално число в интервала $[0, 15]$, при това вероятността да вземе коя да е стойност в този интервал е една и съща. Тогава $\Omega = \{X : 0 \leq X \leq 15\}$ и събитието търсено в задачата е $A = \{X < 5\}$.

Геометрична вероятност

Пример

По график автобус се движи на интервали от 15 минути. Каква е вероятността да чакаме пристигането на автобуса по-малко от 5 минути.

Ние пристагаме на спирката в случаен момент, спрямо графика на автобуса. Нека с X означим времето за чакане. Ясно е, че X е реално число в интервала $[0, 15]$, при това вероятността да вземе коя да е стойност в този интервал е една и съща. Тогава $\Omega = \{X : 0 \leq X \leq 15\}$ и събитието търсено в задачата е $A = \{X < 5\}$.

Ω е едномерно множество, следователно мярката μ е дължината.

Пример

По график автобус се движи на интервали от 15 минути. Каква е вероятността да чакаме пристигането на автобуса по-малко от 5 минути.

Ние пристагаме на спирката в случаен момент, спрямо графика на автобуса. Нека с X означим времето за чакане. Ясно е, че X е реално число в интервала $[0, 15]$, при това вероятността да вземе коя да е стойност в този интервал е една и съща. Тогава $\Omega = \{X : 0 \leq X \leq 15\}$ и събитието търсено в задачата е $A = \{X < 5\}$.

Ω е едномерно множество, следователно мярката μ е дължината.

$$\mathrm{P}(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{5}{15}$$

Геометрична вероятност

Пример

По график автобус се движи на интервали от 15 минути. Каква е вероятността да чакаме пристигането на автобуса по-малко от 5 минути.

Ние пристагаме на спирката в случаен момент, спрямо графика на автобуса. Нека с X означим времето за чакане. Ясно е, че X е реално число в интервала $[0, 15]$, при това вероятността да вземе коя да е стойност в този интервал е една и съща. Тогава $\Omega = \{X : 0 \leq X \leq 15\}$ и събитието търсено в задачата е $A = \{X < 5\}$.

Ω е едномерно множество, следователно мярката μ е дължината.

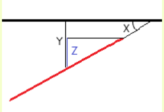
$$\mathrm{P}(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{5}{15}$$

Пример

В равнината са прекарани успоредни линии на разстояние L една от друга. Върху равнината се пуска игла с дължина k, като $k < L$. Каква е вероятността иглата да застъпи някоя от линиите?

Пример

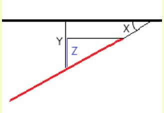
В началото трябва да въведем подходящ математически модел описващ опита. Положението на иглата в равнината се определя от нейното изместване спрямо линиите, както и от ъгъла, който сключва с тях.



Нека X е острият ъгъл, който иглата сключва с линиите. Ясно е, че $0 \leq X \leq \pi/2$.

Пример

В началото трябва да въведем подходящ математически модел описващ опита. Положението на иглата в равнината се определя от нейното изместване спрямо линиите, както и от ъгъла, който сключва с тях.

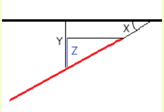


Нека X е острият ъгъл, който иглата сключва с линиите. Ясно е, че $0 \leq X \leq \pi/2$.

Нека Y е разстоянието от средата на иглата до по-близката линия. Тъй като разстоянието между линиите е L, то Y не може да бъде по-голямо от $L/2$.

Пример

В началото трябва да въведем подходящ математически модел описващ опита. Положението на иглата в равнината се определя от нейното изместване спрямо линиите, както и от ъгъла, който сключва с тях.



Нека X е острият ъгъл, който иглата сключва с линиите. Ясно е, че $0 \leq X \leq \pi/2$.

Нека Y е разстоянието от средата на иглата до по-близката линия. Тъй като разстоянието между линиите е L, то Y не може да бъде по-голямо от $L/2$.

Така получаваме двумерно пространство на елементарните събития.

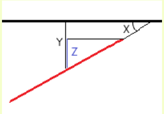
$$\Omega \ : \left| \begin{array}{l} 0 \leq X \leq \pi/2 \\ 0 \leq Y \leq L/2 \end{array} \right.$$

Мярката, която ще използваме за намиране на вероятността е лицето.

Геометрична вероятност

Пример

В началото трябва да въведем подходящ математически модел описващ опита. Положението на иглата в равнината се определя от нейното изместване спрямо линиите, както и от ъгъла, който сключва с тях.



Нека X е острият ъгъл, който иглата сключва с линиите. Ясно е, че $0 \leq X \leq \pi/2$.

Нека Y е разстоянието от средата на иглата до по-близката линия. Тъй като разстоянието между линиите е L, то Y не може да бъде по-голямо от $L/2$.

Така получаваме двумерно пространство на елементарните събития.

$$\Omega \; : \; \left| \begin{array}{l} 0 \leq X \leq \pi/2 \\ 0 \leq Y \leq L/2 \end{array} \right.$$

Мярката, която ще използваме за намиране на вероятността е лицето.

Сега трябва да установим условията при които иглата ще застъпва линия. Ако със Z означим отклонението на края на иглата спрямо нейната среда. То при $Z < Y$ иглата няма да достига до по-близката линия, т.е. няма да имаме пресичане. Докато при $Z > Y$ иглата ще настъпи линия.

Геометрична вероятност

Пример

Z лесно може да се изрази чрез дължината на иглата и ъгъла ѝ спрямо линиите. Наистина $Z = k/2 \sin X$. Тогава събитието A, че иглата настъпва линия може да се запише като

$$A \; : \; Y < k/2 \sin X$$

Геометрична вероятност

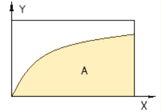
Пример

Z лесно може да се изрази чрез дължината на иглата и ъгъла ѝ спрямо линиите. Наистина $Z = k/2 \sin X$. Тогава събитието A, че иглата настъпва линия може да се запише като

$$A \ : \ Y < k/2 \sin X$$

Съгласно дефиницията за геометрична вероятност

$$\mathrm{P}(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{\text{лицето на защрихованата част}}{\text{лицето на правоъгълника}} =$$



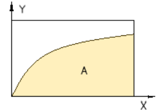
Геометрична вероятност

Пример

Z лесно може да се изрази чрез дължината на иглата и ъгъла ѝ спрямо линиите. Наистина $Z = k/2 \sin X$. Тогава събитието A, че иглата настъпва линия може да се запише като

$$A \; : \; Y < k/2 \sin X$$

Съгласно дефиницията за геометрична вероятност



$$\mathrm{P}(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{\text{лицето на защрихованата част}}{\text{лицето на правоъгълника}} =$$

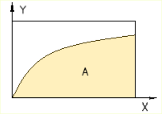
$$= \frac{\int_0^{\pi/2} \frac{k}{2} \sin x \, dx}{\frac{\pi}{2} \frac{L}{2}} = \frac{\frac{k}{2}}{\frac{\pi L}{4}} = \frac{2k}{\pi L}$$

Пример

Z лесно може да се изрази чрез дължината на иглата и ъгъла ѝ спрямо линиите. Наистина $Z = k/2 \sin X$. Тогава събитието A, че иглата настъпва линия може да се запише като

$$A \ : \ Y < k/2 \sin X$$

Съгласно дефиницията за геометрична вероятност



$$\mathrm{P}(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{\text{лицето на защрихованата част}}{\text{лицето на правоъгълника}} =$$

$$= \frac{\int_0^{\pi/2} \frac{k}{2} \sin x \, dx}{\frac{\pi}{2} \frac{L}{2}} = \frac{\frac{k}{2}}{\frac{\pi L}{4}} = \frac{2k}{\pi L}$$

Тази задача дава възможност за експериментално пресмятане на π. Ако извършваме опита многократно и записваме броя T на застъпване на линия и броя на опитите N, то $\frac{T}{N} \to \mathrm{P}(A)$. Следователно за $N \to \infty$

$$\pi = \frac{2kN}{TL}$$

Подобни методи на пресмятане се наричат Монте Карло.

Обща дефиниция на вероятност

Моделът на класическата вероятност се използва когато се разглеждат елементарни опити, като хвърляне на зар, теглене на карта или избор на топка от урна. Но този модел е неприложим, ако елементарните събития не са равновероятни. Например, хвърля се зар, който поради нарушен баланс по-често пада на едната си страна. Затова се налага дефинирането на вероятност в по общ случай.

Удобно би било да въведем вероятност за всяко елементарно събитие или изобщо за всички събития. Това обаче не винаги е възможно.

Обща дефиниция на вероятност

Моделът на класическата вероятност се използва когато се разглеждат елементарни опити, като хвърляне на зар, теглене на карта или избор на топка от урна. Но този модел е неприложим, ако елементарните събития не са равновероятни. Например, хвърля се зар, който поради нарушен баланс по-често пада на едната си страна. Затова се налага дефинирането на вероятност в по общ случай.

Удобно би било да въведем вероятност за всяко елементарно събитие или изобщо за всички събития. Това обаче не винаги е възможно.

Например, ако хвърляме две еднакви монети, за всяка монета има две възможности ще ги означим с E-ези и T-тура. Тогава възможните елементарни събития са четири: (E, E), (E, T), (T, E) и (T, T), но тъй като монетите са еднакви ние не можем да различим (E, T) и (T, E). Това означава, че съществуват ненаблюдаеми (неразличими) елементарни събития. Ние по-скоро виждаме съвкупното събитие $\{(E, T), (T, E)\}$. В този случай е по-удобно да дефинираме неговата вероятност, а не тази на елементарните събития.

Обща дефиниция на вероятност

Моделът на класическата вероятност се използва когато се разглеждат елементарни опити, като хвърляне на зар, теглене на карта или избор на топка от урна. Но този модел е неприложим, ако елементарните събития не са равновероятни. Например, хвърля се зар, който поради нарушен баланс по-често пада на едната си страна. Затова се налага дефинирането на вероятност в по общ случай.

Удобно би било да въведем вероятност за всяко елементарно събитие или изобщо за всички събития. Това обаче не винаги е възможно.

Например, ако хвърляме две еднакви монети, за всяка монета има две възможности ще ги означим с E-ези и T-тура. Тогава възможните елементарни събития са четири: (E, E), (E, T), (T, E) и (T, T), но тъй като монетите са еднакви ние не можем да различим (E, T) и (T, E). Това означава, че съществуват ненаблюдаеми (неразличими) елементарни събития. Ние по-скоро виждаме съвкупното събитие $\{(E, T), (T, E)\}$. В този случай е по-удобно да дефинираме неговата вероятност, а не тази на елементарните събития.

Ако Ω е неизброимо множество, например интервал върху реалната права, няма да е възможно да се въведе вероятност за всички събития, т.е за всички подмножества. Това е известен проблем в теория на мярката.

Обща дефиниция на вероятност

Моделът на класическата вероятност се използва когато се разглеждат елементарни опити, като хвърляне на зар, теглене на карта или избор на топка от урна. Но този модел е неприложим, ако елементарните събития не са равновероятни. Например, хвърля се зар, който поради нарушен баланс по-често пада на едната си страна. Затова се налага дефинирането на вероятност в по общ случай.

Удобно би било да въведем вероятност за всяко елементарно събитие или изобщо за всички събития. Това обаче не винаги е възможно.

Например, ако хвърляме две еднакви монети, за всяка монета има две възможности ще ги означим с E-ези и T-тура. Тогава възможните елементарни събития са четири: (E, E), (E, T), (T, E) и (T, T), но тъй като монетите са еднакви ние не можем да различим (E, T) и (T, E). Това означава, че съществуват ненаблюдаеми (неразличими) елементарни събития. Ние по-скоро виждаме съвкупното събитие $\{(E, T), (T, E)\}$. В този случай е по-удобно да дефинираме неговата вероятност, а не тази на елементарните събития.

Ако Ω е неизброимо множество, например интервал върху реалната права, няма да е възможно да се въведе вероятност за всички събития, т.е за всички подмножества. Това е известен проблем в теория на мярката.

Поради тези причини, вероятност се въвежда не върху всички събития, а само върху един специален клас.

Обща дефиниция на вероятност

Нека Ω е произволно множество и нека $\mathcal{A}$ е съвкупност от подмножества на Ω. Казваме, че $\mathcal{A}$ е **сигма алгебра**, ако са изпълнени условията:

Обща дефиниция на вероятност

Нека Ω е произволно множество и нека $\mathcal{A}$ е съвкупност от подмножества на Ω. Казваме, че $\mathcal{A}$ е **сигма алгебра**, ако са изпълнени условията:

- $\emptyset \in \mathcal{A}$ и $\Omega \in \mathcal{A}$

Обща дефиниция на вероятност

Нека Ω е произволно множество и нека $\mathcal{A}$ е съвкупност от подмножества на Ω. Казваме, че $\mathcal{A}$ е **сигма алгебра**, ако са изпълнени условията:

- $\emptyset \in \mathcal{A}$ и $\Omega \in \mathcal{A}$
- Ако $A \in \mathcal{A}$, то $\overline{A} \in \mathcal{A}$

Обща дефиниция на вероятност

Нека Ω е произволно множество и нека $\mathcal{A}$ е съвкупност от подмножества на Ω. Казваме, че $\mathcal{A}$ е **сигма алгебра**, ако са изпълнени условията:

- $\emptyset \in \mathcal{A}$ и $\Omega \in \mathcal{A}$
- Ако $A \in \mathcal{A}$, то $\overline{A} \in \mathcal{A}$
- Ако $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$, то $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$ и $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$

Обща дефиниция на вероятност

Нека Ω е произволно множество и нека $\mathcal{A}$ е съвкупност от подмножества на Ω. Казваме, че $\mathcal{A}$ е **сигма алгебра**, ако са изпълнени условията:

- $\emptyset \in \mathcal{A}$ и $\Omega \in \mathcal{A}$
- Ако $A \in \mathcal{A}$, то $\overline{A} \in \mathcal{A}$
- Ако $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$, то $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$ и $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$

Разбира се тази дефиниция е преопределена, не е необходимо да се включват едновременно изброимите сечения и обединения. Ако използваме само обединенията и допълнителните събития, то по закона на Де Морган ще получим сеченията, както и обратно.

Обща дефиниция на вероятност

Нека Ω е произволно множество и нека $\mathcal{A}$ е съвкупност от подмножества на Ω. Казваме, че $\mathcal{A}$ е **сигма алгебра**, ако са изпълнени условията:

- $\emptyset \in \mathcal{A}$ и $\Omega \in \mathcal{A}$
- Ако $A \in \mathcal{A}$, то $\overline{A} \in \mathcal{A}$
- Ако $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$, то $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$ и $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$

Разбира се тази дефиниция е преопределена, не е необходимо да се включват едновременно изброимите сечения и обединения. Ако използваме само обединенията и допълнителните събития, то по закона на Де Морган ще получим сеченията, както и обратно.

Пример

Най-простата възможна сигма алгебра е $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$. Наричаме я тривиална, тя е безинтересна.

Обща дефиниция на вероятност

Нека Ω е произволно множество и нека $\mathcal{A}$ е съвкупност от подмножества на Ω. Казваме, че $\mathcal{A}$ е **сигма алгебра**, ако са изпълнени условията:

- $\emptyset \in \mathcal{A}$ и $\Omega \in \mathcal{A}$
- Ако $A \in \mathcal{A}$, то $\overline{A} \in \mathcal{A}$
- Ако $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$, то $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$ и $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$

Разбира се тази дефиниция е преопределена, не е необходимо да се включват едновременно изброимите сечения и обединения. Ако използваме само обединенията и допълнителните събития, то по закона на Де Морган ще получим сеченията, както и обратно.

Пример

Най-простата възможна сигма алгебра е $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$. Наричаме я тривиална, тя е безинтересна.

Можем да създадем сигма алгебра, породена от едно единствено събитие $\mathcal{A} = \{\emptyset, A, \overline{A}, \Omega\}$. Не е трудно да се съобрази, че това наистина е сигма алгебра, т.е. всевъзможните сечения, обединения и допълнения на тези събития водят до същите събития.

Обща дефиниция на вероятност

Сигма алгебрата е клас, затворен относно операциите: допълнение, обединение и сечение. Ние ще въведем вероятност само върху елементите на сигма алгебрата. Това ни гарантира, че ако знаем вероятността на някои събития то ще знаем и вероятността на техните сечения, обединения и т.н.

Обща дефиниция на вероятност

Сигма алгебрата е клас, затворен относно операциите: допълнение, обединение и сечение. Ние ще въведем вероятност само върху елементите на сигма алгебрата. Това ни гарантира, че ако знаем вероятността на някои събития то ще знаем и вероятността на техните сечения, обединения и т.н.

Дефиниция - Вероятност

Вероятността P е функция, дефинирана върху сигма алгебрата $\mathcal{A}$ от подмножества на Ω, която удовлетворява аксиомите

Обща дефиниция на вероятност

Сигма алгебрата е клас, затворен относно операциите: допълнение, обединение и сечение. Ние ще въведем вероятност само върху елементите на сигма алгебрата. Това ни гарантира, че ако знаем вероятността на някои събития то ще знаем и вероятността на техните сечения, обединения и т.н.

Дефиниция - Вероятност

Вероятността P е функция, дефинирана върху сигма алгебрата $\mathcal{A}$ от подмножества на Ω, която удовлетворява аксиомите

- **Неотрицателност**. $\mathsf{P}(A) \geq 0, \quad$ за всяко събитие $A \in \mathcal{A}$.

Обща дефиниция на вероятност

Сигма алгебрата е клас, затворен относно операциите: допълнение, обединение и сечение. Ние ще въведем вероятност само върху елементите на сигма алгебрата. Това ни гарантира, че ако знаем вероятността на някои събития то ще знаем и вероятността на техните сечения, обединения и т.н.

Дефиниция - Вероятност

Вероятността P е функция, дефинирана върху сигма алгебрата $\mathcal{A}$ от подмножества на Ω, която удовлетворява аксиомите

- **Неотрицателност**. $\mathsf{P}(A) \geq 0, \quad$ за всяко събитие $A \in \mathcal{A}$.
- **Нормираност**. $\mathsf{P}(\Omega) = 1$

Обща дефиниция на вероятност

Сигма алгебрата е клас, затворен относно операциите: допълнение, обединение и сечение. Ние ще въведем вероятност само върху елементите на сигма алгебрата. Това ни гарантира, че ако знаем вероятността на някои събития то ще знаем и вероятността на техните сечения, обединения и т.н.

Дефиниция - Вероятност

Вероятността P е функция, дефинирана върху сигма алгебрата $\mathcal{A}$ от подмножества на Ω, която удовлетворява аксиомите

- **Неотрицателност**. $\mathrm{P}(A) \geq 0, \quad$ за всяко събитие $A \in \mathcal{A}$.
- **Нормираност**. $\mathrm{P}(\Omega) = 1$
- **Адитивност**. Ако $AB = \emptyset$, то $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$

Обща дефиниция на вероятност

Сигма алгебрата е клас, затворен относно операциите: допълнение, обединение и сечение. Ние ще въведем вероятност само върху елементите на сигма алгебрата. Това ни гарантира, че ако знаем вероятността на някои събития то ще знаем и вероятността на техните сечения, обединения и т.н.

Дефиниция - Вероятност

Вероятността P е функция, дефинирана върху сигма алгебрата $\mathcal{A}$ от подмножества на Ω, която удовлетворява аксиомите

- **Неотрицателност**. $\mathrm{P}(A) \geq 0, \quad$ за всяко събитие $A \in \mathcal{A}$.
- **Нормираност**. $\mathrm{P}(\Omega) = 1$
- **Адитивност**. Ако $AB = \emptyset$, то $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$
- **Непрекъснатост**. За всяка монотонно намаляваща редица $A_1 \supset A_2 \supset \ldots A_n \supset \ldots$, клоняща към празното множество - $\emptyset$ е изпълнено $\lim_{n \to \infty} \mathrm{P}(A_n) = 0$.

Обща дефиниция на вероятност

Сигма алгебрата е клас, затворен относно операциите: допълнение, обединение и сечение. Ние ще въведем вероятност само върху елементите на сигма алгебрата. Това ни гарантира, че ако знаем вероятността на някои събития то ще знаем и вероятността на техните сечения, обединения и т.н.

Дефиниция - Вероятност

Вероятността P е функция, дефинирана върху сигма алгебрата $\mathcal{A}$ от подмножества на Ω, която удовлетворява аксиомите

- **Неотрицателност**. $\mathsf{P}(A) \geq 0, \quad$ за всяко събитие $A \in \mathcal{A}$.
- **Нормираност**. $\mathsf{P}(\Omega) = 1$
- **Адитивност**. Ако $AB = \emptyset$, то $\mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B)$
- **Непрекъснатост**. За всяка монотонно намаляваща редица $A_1 \supset A_2 \supset \ldots A_n \supset \ldots$, клоняща към празното множество - $\emptyset$ е изпълнено $\lim\limits_{n \to \infty} \mathsf{P}(A_n) = 0$.

Прието е функциите, които на множество съпоставят число да се наричат мерки, така че вероятността е неотрицателна, нормирана, адитивна, непрекъсната мярка.

Обща дефиниция на вероятност

Тройката $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ наричаме **вероятностно пространство**. Това всъщност е математическия модел на някакъв случаен експеримент. Вероятността може да бъде дефинирана по различни начини, стремежът ни е да изберем модел, който най-добре описва действителността.

Класическата вероятност, която въведохме в началото на лекцията отговаря на аксиомите за вероятност, но тя е само една от възможностите, далеч не единствената.

Обща дефиниция на вероятност

Тройката $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ наричаме **вероятностно пространство**. Това всъщност е математическия модел на някакъв случаен експеримент. Вероятността може да бъде дефинирана по различни начини, стремежът ни е да изберем модел, който най-добре описва действителността.

Класическата вероятност, която въведохме в началото на лекцията отговаря на аксиомите за вероятност, но тя е само една от възможностите, далеч не единствената.

Пример

Хвърляме монета, тогава $\Omega = \{E, T\}$.

Обща дефиниция на вероятност

Тройката $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ наричаме **вероятностно пространство**. Това всъщност е математическия модел на някакъв случаен експеримент. Вероятността може да бъде дефинирана по различни начини, стремежът ни е да изберем модел, който най-добре описва действителността.

Класическата вероятност, която въведохме в началото на лекцията отговаря на аксиомите за вероятност, но тя е само една от възможностите, далеч не единствената.

Пример

Хвърляме монета, тогава $\Omega = \{E, T\}$.

Можем да приемем модела на класическа вероятност, т.е. че монетата е правилна $\mathrm{P}(E) = \mathrm{P}(T) = 0.5$. Това обаче не следва от аксиомите, а е наш избор.

Обща дефиниция на вероятност

Тройката $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ наричаме **вероятностно пространство**. Това всъщност е математическия модел на някакъв случаен експеримент. Вероятността може да бъде дефинирана по различни начини, стремежът ни е да изберем модел, който най-добре описва действителността.

Класическата вероятност, която въведохме в началото на лекцията отговаря на аксиомите за вероятност, но тя е само една от възможностите, далеч не единствената.

Пример

Хвърляме монета, тогава $\Omega = \{E, T\}$.

Можем да приемем модела на класическа вероятност, т.е. че монетата е правилна $\mathrm{P}(E) = \mathrm{P}(T) = 0.5$. Това обаче не следва от аксиомите, а е наш избор.

Можем да изберем модел с неправилна монета, при който тура се пада по-често $\mathrm{P}(E) = 0.4, \mathrm{P}(T) = 0.6$. Аксиомите отново ще бъдат удовлетворени.

Така получаваме различни вероятностни пространства.

Обща дефиниция на вероятност

Тройката $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ наричаме **вероятностно пространство**. Това всъщност е математическия модел на някакъв случаен експеримент. Вероятността може да бъде дефинирана по различни начини, стремежът ни е да изберем модел, който най-добре описва действителността.

Класическата вероятност, която въведохме в началото на лекцията отговаря на аксиомите за вероятност, но тя е само една от възможностите, далеч не единствената.

Пример

Хвърляме монета, тогава $\Omega = \{E, T\}$.

Можем да приемем модела на класическа вероятност, т.е. че монетата е правилна $\mathrm{P}(E) = \mathrm{P}(T) = 0.5$. Това обаче не следва от аксиомите, а е наш избор.

Можем да изберем модел с неправилна монета, при който тура се пада по-често $\mathrm{P}(E) = 0.4, \mathrm{P}(T) = 0.6$. Аксиомите отново ще бъдат удовлетворени.

Така получаваме различни вероятностни пространства.

Както отбелязохме вероятността е мярка. Друга мярка, която познавате е лицето, свойствата на вероятността са подобни на свойствата на лицето.

Свойства на вероятността

Свойства на вероятността

- $\mathsf{P}(\emptyset) = 0$

Свойства на вероятността

- $P(\emptyset) = 0$

  Док. $\emptyset \cap \emptyset = \emptyset \quad$ и $\quad \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$, следователно

$$P(\emptyset) = P(\emptyset \cup \emptyset) = P(\emptyset) + P(\emptyset)$$

Свойства на вероятността

- $\mathrm{P}(\emptyset) = 0$

  Док. $\emptyset \cap \emptyset = \emptyset$ и $\emptyset \cup \emptyset = \emptyset$, следователно

$$\mathrm{P}(\emptyset) = \mathrm{P}(\emptyset \cup \emptyset) = \mathrm{P}(\emptyset) + \mathrm{P}(\emptyset)$$

- $\mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - \mathrm{P}(A)$

Свойства на вероятността

- $\mathsf{P}(\emptyset) = 0$

  Док. $\emptyset \cap \emptyset = \emptyset$ и $\emptyset \cup \emptyset = \emptyset$, следователно

$$\mathsf{P}(\emptyset) = \mathsf{P}(\emptyset \cup \emptyset) = \mathsf{P}(\emptyset) + \mathsf{P}(\emptyset)$$

- $\mathsf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathsf{P}(A)$

  Док. $A\,\overline{A} = \emptyset$ и също така $A \cup \overline{A} = \Omega$. Тогава

$$1 = \mathsf{P}(\Omega) = \mathsf{P}(A \cup \overline{A}) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(\overline{A})$$

Свойства на вероятността

- $\mathrm{P}(\emptyset) = 0$
  Док. $\emptyset \cap \emptyset = \emptyset$ и $\emptyset \cup \emptyset = \emptyset$, следователно
  $$\mathrm{P}(\emptyset) = \mathrm{P}(\emptyset \cup \emptyset) = \mathrm{P}(\emptyset) + \mathrm{P}(\emptyset)$$
- $\mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - \mathrm{P}(A)$
  Док. $A\,\overline{A} = \emptyset$ и също така $A \cup \overline{A} = \Omega$. Тогава
  $$1 = \mathrm{P}(\Omega) = \mathrm{P}(A \cup \overline{A}) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(\overline{A})$$
- Ако $B \subset A$, то $\mathrm{P}(B) \leq \mathrm{P}(A)$

Свойства на вероятността

- $\mathsf{P}(\emptyset) = 0$

  Док. $\emptyset \cap \emptyset = \emptyset$ и $\emptyset \cup \emptyset = \emptyset$, следователно

  $$\mathsf{P}(\emptyset) = \mathsf{P}(\emptyset \cup \emptyset) = \mathsf{P}(\emptyset) + \mathsf{P}(\emptyset)$$

- $\mathsf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathsf{P}(A)$

  Док. $A\,\overline{A} = \emptyset$ и също така $A \cup \overline{A} = \Omega$. Тогава

  $$1 = \mathsf{P}(\Omega) = \mathsf{P}(A \cup \overline{A}) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(\overline{A})$$

- Ако $B \subset A$, то $\mathsf{P}(B) \leq \mathsf{P}(A)$

  Док. За произволни събития A и B е изпълнено:

  $$A = A\Omega = A(B \cup \overline{B}) = AB \cup A\overline{B}$$

  Тогава от адитивността следва

  $$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(AB) + \mathsf{P}(A\overline{B}) \qquad (*)$$

  От друга страна, ако $B \subset A$, то $AB = B$ и $\mathsf{P}(AB) = \mathsf{P}(B)$.

  $$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(B) + \mathsf{P}(A\overline{B}) \geq \mathsf{P}(B)$$

  В последното равенство използвахме, че $\mathsf{P}(A\,\overline{B}) \geq 0$.

Свойства на вероятността

- $0 \leq \mathrm{P}(A) \leq 1$

Свойства на вероятността

- $0 \leq \mathsf{P}(A) \leq 1$
  Док. От $A \subset \Omega$ следва $\mathsf{P}(A) \leq \mathsf{P}(\Omega) = 1$

Свойства на вероятността

- $0 \leq \mathsf{P}(A) \leq 1$
  Док. От $A \subset \Omega$ следва $\mathsf{P}(A) \leq \mathsf{P}(\Omega) = 1$
- $\mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(AB)$

Свойства на вероятността

- $0 \leq \mathrm{P}(A) \leq 1$

  Док. От $A \subset \Omega$ следва $\mathrm{P}(A) \leq \mathrm{P}(\Omega) = 1$
- $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(AB)$

  Док. Отново ще използваме представянето $A = AB \cup A\overline{B}$, както и аналогичното $B = AB \cup \overline{A}B$. Тогава

  $$A \cup B = (AB \cup A\overline{B}) \cup (AB \cup \overline{A}B) = AB \cup A\overline{B} \cup \overline{A}B$$

  При това събитията от дясната страна на равенството нямат сечение. Така, ако приложим адитивността два пъти последователно, ще получим:

  $$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(AB) + \mathrm{P}(A\overline{B}) + \mathrm{P}(\overline{A}B)$$

Свойства на вероятността

- $0 \le \mathrm{P}(A) \le 1$

  Док. От $A \subset \Omega$ следва $\mathrm{P}(A) \le \mathrm{P}(\Omega) = 1$

- $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(AB)$

  Док. Отново ще използваме представянето $A = AB \cup A\overline{B}$, както и аналогичното $B = AB \cup \overline{A}B$. Тогава

  $$A \cup B = (AB \cup A\overline{B}) \cup (AB \cup \overline{A}B) = AB \cup A\overline{B} \cup \overline{A}B$$

  При това събитията от дясната страна на равенството нямат сечение. Така, ако приложим адитивността два пъти последователно, ще получим:

  $$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(AB) + \mathrm{P}(A\overline{B}) + \mathrm{P}(\overline{A}B)$$

  Към това равенство ще прибавим и извадим $\mathrm{P}(AB)$

  $$\mathrm{P}(A \cup B) = \left[\mathrm{P}(AB) + \mathrm{P}(A\overline{B})\right] + \left[\mathrm{P}(\overline{A}B) + \mathrm{P}(AB)\right] - \mathrm{P}(AB) =$$

  $$= \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(AB)$$

Свойства на вероятността

- Принцип за включване и изключване

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_i P(A_i) - \sum_{i,j} P(A_i A_j) + \ldots + (-1)^{n+1} P(A_1 A_2 \ldots A_n)$$

Свойства на вероятността

- Принцип за включване и изключване

$$\mathrm{P}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_i \mathrm{P}(A_i) - \sum_{i,j} \mathrm{P}(A_i A_j) + \ldots + (-1)^{n+1} \mathrm{P}(A_1 A_2 \ldots A_n)$$

Док. Доказателството се извършва по индукция. Ще допуснем че равенството е изпълнено за $n-1$ на брой събития и ще го докажем за n. Съгласно предишното свойство

$$\mathrm{P}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \mathrm{P}((A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n-1}) \cup A_n) = \qquad (\star)$$

$$= \mathrm{P}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n-1}) + \mathrm{P}(A_n) - \mathrm{P}((A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n-1}) \cap A_n)$$

Свойства на вероятността

- Принцип за включване и изключване

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_i P(A_i) - \sum_{i,j} P(A_i A_j) + \ldots + (-1)^{n+1} P(A_1 A_2 \ldots A_n)$$

Док. Доказателството се извършва по индукция. Ще допуснем че равенството е изпълнено за $n-1$ на брой събития и ще го докажем за n. Съгласно предишното свойство

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P((A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n-1}) \cup A_n) = \qquad (\star)$$

$$= P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n-1}) + P(A_n) - P((A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n-1}) \cap A_n)$$

Прилагаме индукционното предположение за първото и третото събираемо

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n-1}) = \sum_{1 \le i \le n-1} P(A_i) - \sum_{1 \le i,j \le n-1} P(A_i A_j) + \sum_{1 \le i,j,k \le n-1} P(A_i A_j A_k) - \ldots$$

Свойства на вероятността

- Принцип за включване и изключване

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_i P(A_i) - \sum_{i,j} P(A_iA_j) + \ldots + (-1)^{n+1} P(A_1A_2 \ldots A_n)$$

Док. Доказателството се извършва по индукция. Ще допуснем че равенството е изпълнено за $n-1$ на брой събития и ще го докажем за n. Съгласно предишното свойство

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P((A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n-1}) \cup A_n) = \qquad (\star)$$

$$= P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n-1}) + P(A_n) - P((A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n-1}) \cap A_n)$$

Прилагаме индукционното предположение за първото и третото събираемо

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n-1}) = \sum_{1 \le i \le n-1} P(A_i) - \sum_{1 \le i,j \le n-1} P(A_iA_j) + \sum_{1 \le i,j,k \le n-1} P(A_iA_jA_k) - \ldots$$

$$P((A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n-1}) \cap A_n) = P(A_1A_n \cup A_2A_n \cup \ldots \cup A_{n-1}A_n) =$$

$$= \sum_{1 \le i \le n-1} P(A_iA_n) - \sum_{1 \le i,j \le n-1} P(A_iA_jA_n) + \sum_{1 \le i,j,k \le n-1} P(A_iA_jA_kA_n) + \ldots$$

Ще заместим последните равенства в $(\star)$

Свойства на вероятността

$$\mathsf{P}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{1 \le i \le n-1} \mathsf{P}(A_i) + \mathsf{P}(A_n) - \sum_{1 \le i,j \le n-1} \mathsf{P}(A_i A_j) - \sum_{1 \le i \le n-1} \mathsf{P}(A_i A_n) +$$

$$+ \sum_{1 \le i,j,k \le n-1} \mathsf{P}(A_i A_j A_k) + \sum_{1 \le i,j \le n-1} \mathsf{P}(A_i A_j A_n) - \ldots + (-1)^{n+1} \mathsf{P}(A_1 A_2 \ldots A_n)$$

Ще разгледаме поотделно всички единични, двойни, тройни и т.н. суми. Ясно е, че

$$\sum_{1 \le i \le n-1} \mathsf{P}(A_i) + \mathsf{P}(A_n) = \sum_{1 \le i \le n} \mathsf{P}(A_i)$$

Свойства на вероятността

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{1 \le i \le n-1} P(A_i) + P(A_n) - \sum_{1 \le i,j \le n-1} P(A_i A_j) - \sum_{1 \le i \le n-1} P(A_i A_n) +$$

$$+ \sum_{1 \le i,j,k \le n-1} P(A_i A_j A_k) + \sum_{1 \le i,j \le n-1} P(A_i A_j A_n) - \ldots + (-1)^{n+1} P(A_1 A_2 \ldots A_n)$$

Ще разгледаме поотделно всички единични, двойни, тройни и т.н. суми. Ясно е, че

$$\sum_{1 \le i \le n-1} P(A_i) + P(A_n) = \sum_{1 \le i \le n} P(A_i)$$

Двойните суми са две. Първата съдържа всички възможни двойки сечения на първите $n-1$ събития. Втората сума се състои от всички сечения на събитието A_n с някое от първите $n-1$ събития. Ако съберем тези две суми, ще получим всички възможни двойни сечения изобщо, т.е.

$$\sum_{1 \le i,j \le n-1} P(A_i A_j) + \sum_{1 \le i \le n-1} P(A_i A_n) = \sum_{1 \le i,j \le n} P(A_i A_j)$$

Аналогично се работи със сумите от тройни сечения и т.н. С това доказателството е завършено.

Свойства на вероятността

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{1\le i\le n-1} P(A_i) + P(A_n) - \sum_{1\le i,j\le n-1} P(A_iA_j) - \sum_{1\le i\le n-1} P(A_iA_n) +$$

$$+ \sum_{1\le i,j,k\le n-1} P(A_iA_jA_k) + \sum_{1\le i,j\le n-1} P(A_iA_jA_n) - \ldots + (-1)^{n+1} P(A_1A_2\ldots A_n)$$

Ще разгледаме поотделно всички единични, двойни, тройни и т.н. суми. Ясно е, че

$$\sum_{1\le i\le n-1} P(A_i) + P(A_n) = \sum_{1\le i\le n} P(A_i)$$

Двойните суми са две. Първата съдържа всички възможни двойки сечения на първите $n-1$ събития. Втората сума се състои от всички сечения на събитието A_n с някое от първите $n-1$ събития. Ако съберем тези две суми, ще получим всички възможни двойни сечения изобщо, т.е.

$$\sum_{1\le i,j\le n-1} P(A_iA_j) + \sum_{1\le i\le n-1} P(A_iA_n) = \sum_{1\le i,j\le n} P(A_iA_j)$$

Аналогично се работи със сумите от тройни сечения и т.н. С това доказателството е завършено.