# 13. Степенни редове. Област и радиус на сходимост

# Степенни редове

Функционален ред от вида

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + \cdots \tag{1}$$

$$\text{или, накратко,} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n, \tag{2}$$

където $a, a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$, се нарича степенен.

Примери:

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots \quad \text{или, накратко,} \quad \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \tag{3}$$

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \quad \text{или, накратко,} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \tag{4}$$

### Теорема 1

Ако степенният ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ е сходящ за някое $x_0 \neq 0$, то той е сходящ и то абсолютно за всяко $x$ такова, че $|x| < |x_0|$.

### Следствие 1

Ако степенният ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ е сходящ за някое $x_0 \neq a$, то той е сходящ и то абсолютно за всяко $x$ такова, че $|x-a| < |x_0-a|$.

# Доказателство на Теорема 1

И така известно е, че числовият ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ е сходящ. Нека $x_1$ е произволно фиксирано такова, че $|x_1| < |x_0|$. За да установим твърдението на теоремата, трябва да докажем, че числовият ред $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x_1^n|$ е сходящ.

Ще си послужим с Принципа за сравняване на числови редове с неотрицателни членове (Теорема 1, Тема 6, ДИС 1).

Използваме, че

$$|a_n x_1^n| = |a_n x_0^n| \left|\frac{x_1}{x_0}\right|^n . \tag{5}$$

Да положим за краткост $q := \left|\frac{x_1}{x_0}\right|$. Тогава $0 \leq q < 1$.

Понеже $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ е сходящ, то $\lim_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$ (НУ за сход. на редове, Теорема 3, Тема 5, ДИС 1). Следователно съществува $C > 0$ такова, че

$$\left|a_n x_0^n\right| \le C \quad \forall n. \tag{6}$$

От (5) и (6) следва

$$\left|a_n x_1^n\right| \le Cq^n \quad \forall n. \tag{7}$$

Числовият ред $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ е сходящ, защото $q \in [0, 1)$. Следователно сходящ е и $\sum_{n=0}^{\infty} Cq^n$. Сега от (7) и Принципа за сравняване на числови редове с неотрицателни членове следва, че числовият ред $\sum_{n=0}^{\infty} \left|a_n x_1^n\right|$ е сходящ.

# Радиус на сходимост

## Теорема 2

За всеки степенен ред от вида $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ е в сила точно едно от следните твърдения:

(а) той е абсолютно сходящ за всяко $x \in \mathbb{R}$,

(б) той е сходящ само за $x = 0$,

(в) $\exists\, R > 0$ такова, че редът е абсолютно сходящ при $|x| < R$ и е разходящ при $|x| > R$.

## Следствие 2

За всеки степенен ред от вида $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ е в сила точно едно от следните твърдения:

(а) той е абсолютно сходящ за всяко $x \in \mathbb{R}$,

(б) той е сходящ само за $x = a$,

(в) $\exists\, R > 0$ такова, че редът е абсолютно сходящ при $|x-a| < R$ и е разходящ при $|x-a| > R$.

Числото $R$ се нарича радиус на сходимост на реда. Приема се, че ако е налице случай (б), $R = 0$, а ако е налице случай (а), $R = \infty$.

# Доказателство на Теорема 2

За да докажем теоремата, ще покажем, че ако нито (а), нито (б) не е изпълнено, то е изпълнено (в).

Нека $E$ е областта на сходимост на реда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

1) $E$ не е празно, защото всеки такъв ред е сходящ поне при $x = 0$.

2) $E$ е ограничено отгоре. Ако допуснем противното, ще излезе, че каквото и $x_1 \in \mathbb{R}$ да вземем, $|x_1|$ не е горна граница на $E$ и тогава, ще съществува $x_0 \in E$ такова, че $|x_1| < x_0$. Сега от Теорема 1 следва, че редът е сходящ в $x_1$. Това означава, че редът е сходящ за всяко $x$ — случай, който изключихме. Така установихме, че $E$ е ограничено отгоре.

3) Тогава от Принципа за непрекъснатост следва, че $E$ има точна горна граница. Да я означим с $R$, т.е. полагаме $R := \sup E$. Ще докажем, че това $R$ притежава свойствата, посочени във (в).

4) Ще докажем, че $R > 0$. Щом не е изпълнено (б), то в $E$ има поне едно число, различно от $0$; да го означим с $x_0$. Като приложим отново Т-ма 1, заключаваме, че редът е сходящ за всяко $x_1$ такова, че $|x_1| < |x_0|$. Следователно в $E$ има положителни числа, откъдето на свой ред следва, че $R > 0$.

5) Ще докажем, че редът е абсолютно сходящ за всяко $x$ такова, че $|x| < R$. Нека $x_1$ е произволно фиксирано такова, че $|x_1| < R$. Тогава от дефиницията на $R$ следва, че $\exists\, x_0 \in E$ такова, че $|x_1| < x_0$ (иначе $R$ нямаше да е най-малката горна граница на $E$). От Т-ма 1 следва, че редът е абсолютно сходящ в т. $x_1$.

6) Остана да покажем, че редът е разходящ при $|x| > R$. Ако допуснем, че редът е сходящ за някое $x_0$ такова, че $|x_0| > R$, то от Т-ма 1 ще следва, че той е сходящ за всяко $x$ такова, че $|x| < |x_0|$. Но тогава ще излезе, че в $E$ има числа $> R$, от което би излязло, че $R$ не е горна граница на $E$ — противоречие с избора на $R$.

С това доказателството на Т-ма 2 е завършено.

# Област на сходимост

Нека $R$ е радиусът на сходимост на степенния ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$, а $E$ е неговата област на сходимост. От Следствие 2 получаваме:

(а) ако $R=\infty$, то $E=\mathbb{R}$,

(б) ако $R=0$, то $E=\{a\}$,

(в) ако $0<R<\infty$, то $(a-R, a+R) \subseteq E \subseteq [a-R, a+R]$.