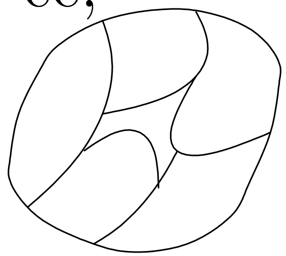
Припомняне: Релация на еквивалентност

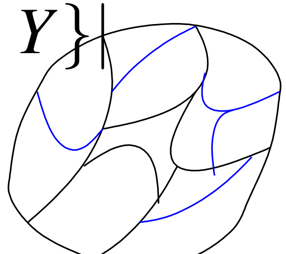
Една релация $R \subseteq Y \times Y$ се нарича релация на еквивалентност, ако R е:

- рефлексивна $\forall x : xRx$
- транзитивна $\forall xyz : xRy \wedge yRz \longrightarrow xRz$
- симетрична. $\forall xy : xRy \longrightarrow yRx$

Клас на еквивалентност: $[x] = \{y : xRy\}$. Класовете на еквивалентност са непразни и непресичащи се, т.е. всеки елемент на Y принадлежи точно на един клас на еквививалентност



Индекс: индекс$|R|:=$ $|$Клас на еквив.$| = |\{[x] : x \in Y\}|$



Прецизиране: R прецизира R' ($R \subseteq R'$)

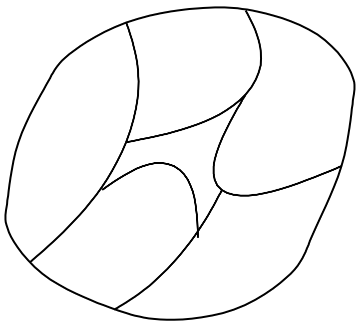
Лема: R прецизира $R' \longrightarrow \forall$ класове на еквивалентност $[x]_R : [x]_R \subseteq [x]_{R'}$

Д-во:

$$y \in [x]_R \Leftrightarrow (y,x) \in R$$

$$\xrightarrow{R \subseteq R'} (y,x) \in R'$$

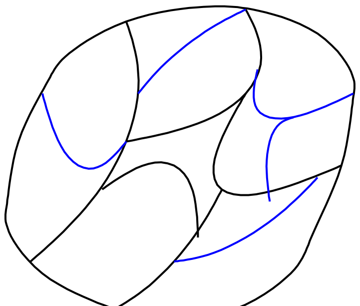
$$\Leftrightarrow y \in [x]_{R'}$$



Следствие: R прецизира $R' \longrightarrow |R| \geq |R'|$

Д-во: Разгледайте $\rho([x]_R) = [x]_{R'}$.

Проверете, че е добре дефинирана функция, която е върху (сюрективна).



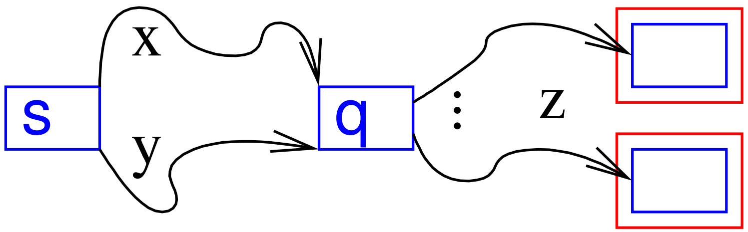
Релация на Нероуд

За езика L релацията на Нероуд е дефинирана като

$R_L := \{(x,y) \in \Sigma^* \times \Sigma^* : \forall z \in \Sigma^* : xz \in L \Leftrightarrow yz \in L\}$

Идея: класовете на еквивалентност съответстват на състоянията.

Защо?



DFA пораждат релация на еквивалентност

Нека $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ е DFA и $L(M) = L$.

$R_M := \left\{ (x,y) \in \Sigma^* \times \Sigma^* : \hat{\delta}(s,x) = \hat{\delta}(s,y) \right\}$.

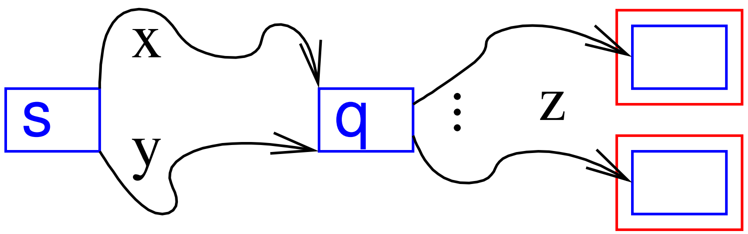
релация на еквивалентност! по един клас на еквивалентност (за достижимо от s) състояние.

Лема 1: R_M прецизира релацията на Нероуд $R_L =$

$$\{(x,y) \in \Sigma^* \times \Sigma^* : \forall z \in \Sigma^* : xz \in L \Leftrightarrow yz \in L\}$$

Д-во : $\forall (x,y) \in \Sigma^* \times \Sigma^* : \hat{\delta}(s,x) = \hat{\delta}(s,y) \longrightarrow$

$\forall z : \hat{\delta}(s,xz) = \hat{\delta}(s,yz) \longrightarrow \forall z : xz \in L \Leftrightarrow yz \in L$



Безкраен индекс на релацията на Нероуд

Наблюдение: индексът $|R_L| = \infty \longrightarrow L$ не е регулярен.

Д-во: Да допуснем, че L е регулярен.
$\longrightarrow \exists$ DFA $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F) : L(M) = L$.
$\longrightarrow R_M$ прецизира R_L.
$\longrightarrow |Q| \geq |R_M| \geq |R_L| = \infty$.
Противоречие.

Следователно: Ако L е регулярен, то индексът $|R_L| < \infty$.

Автомат от класовете на еквивалентност

$R_L := \{(x,y) \in \Sigma^* \times \Sigma^* : \forall z \in \Sigma^* : xz \in L \Leftrightarrow yz \in L\}$

Идея: когато класовете на еквивалентност $[w_1], \ldots, [w_k]$ на R_L съответстват на състоянията на един DFA $M_\equiv$, тогава по лемата по-долу минималният автомат за L е:

$M_\equiv := (\{[w_1], \ldots, [w_k]\}, \Sigma, \delta_\equiv, [\varepsilon], F_\equiv)$ с
$F_\equiv := \{[w] : w \in L\}$ и
$\delta_\equiv([w], a) := [wa]$.

Лема: $\delta_\equiv$ е добре дефинирана
Лема: $\hat{\delta}_\equiv([\varepsilon], w) = [w]$
Лема: $L(M_\equiv) = L$

Минимален автомат

$R_L := \{(x,y) \in \Sigma^* \times \Sigma^* : \forall z \in \Sigma^* : xz \in L \Leftrightarrow yz \in L\}$

$M_{\equiv} := (\{[w_1], \ldots, [w_k]\}, \Sigma, \delta_{\equiv}, [\varepsilon], F_{\equiv})$, където

$F_{\equiv} := \{[w] : w \in L\}$ и

$\delta_{\equiv}([w], a) := [wa]$.

Лема: $\delta_{\equiv}$ е добре дефинирана

$xR_Ly \longrightarrow \forall a \in \Sigma : xaR_Lya$ дясно инвариантна

$xR_Ly \longrightarrow \forall z \in \Sigma^* : xz \in L \Leftrightarrow yz \in L$

$\longrightarrow \forall az \in \Sigma^* : x(az) \in L \Leftrightarrow y(az) \in L$

$\Leftrightarrow \forall a \in \Sigma : \forall z \in \Sigma^* : (xa)z \in L \Leftrightarrow (ya)z \in L$

$\longrightarrow \forall a \in \Sigma : xaR_Lya$ $\square$

Минимален автомат

$R_L := \{(x,y) \in \Sigma^* \times \Sigma^* : \forall z \in \Sigma^* : xz \in L \Leftrightarrow yz \in L\}$

$M_\equiv := (\{[w_1], \ldots, [w_k]\}, \Sigma, \delta_\equiv, [\varepsilon], F_\equiv)$, където

$F_\equiv := \{[w] : w \in L\}$ и

$\delta_\equiv([w], a) := [wa]$.

Лема: $\hat{\delta}_\equiv([x], y) = [xy]$

Индукция по $|y|$:

$\hat{\delta}_\equiv([x], \varepsilon) = [x]$.

$\hat{\delta}_\equiv([x], aw) \overset{\text{деф.}\hat{\delta}_\equiv}{=} \hat{\delta}_\equiv(\delta_\equiv([x], a), w) \overset{\text{деф.}\delta_\equiv}{=} \hat{\delta}_\equiv([xa], w) =$
$[xaw]$. $\square$

Минималният автомат: разпознава L

$R_L := \{(x,y) \in \Sigma^* \times \Sigma^* : \forall z \in \Sigma^* : xz \in L \Leftrightarrow yz \in L\}$

$M_\equiv := (\{[w_1], \ldots, [w_k]\}, \Sigma, \delta_\equiv, [\varepsilon], F_\equiv)$ с

$F_\equiv := \{[w] : w \in L\}$ и

$\delta_\equiv([w], a) := [wa]$.

Лема: $L(M_\equiv) = L$.

$w \in L(M_\equiv)$

$\Leftrightarrow \hat{\delta}_\equiv([\varepsilon], w) \in \{[w] : w \in L\}$ деф. $M_\equiv$

$\Leftrightarrow [w] \in \{[w] : w \in L\}$ предишната лема

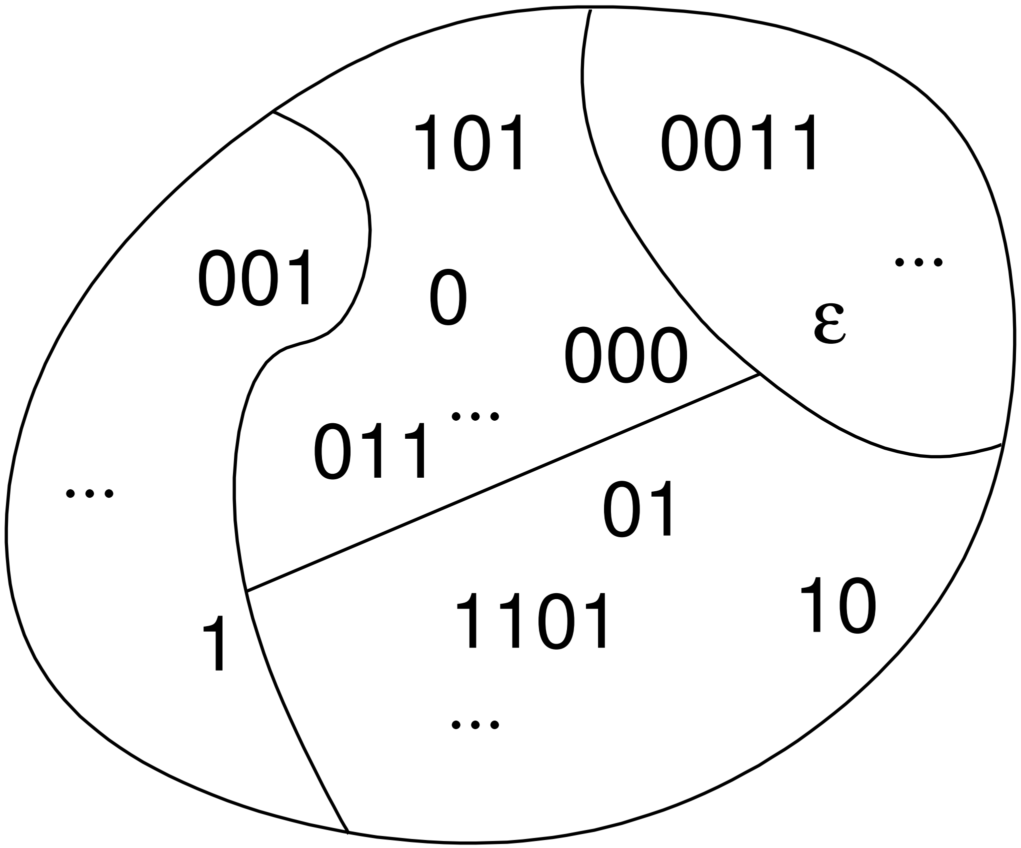
$\Leftrightarrow w \in L$ кл. на еквив. са или изцяло в, или извън L

$([w] \in \{[w] : w \in L\} \longrightarrow \exists x \in L : [x] = [w] \longrightarrow xR_L y \longrightarrow$

$\forall z : xz \in L \Leftrightarrow wz \in L \longrightarrow x\varepsilon \in L \Leftrightarrow w\varepsilon \in L)$

Пример

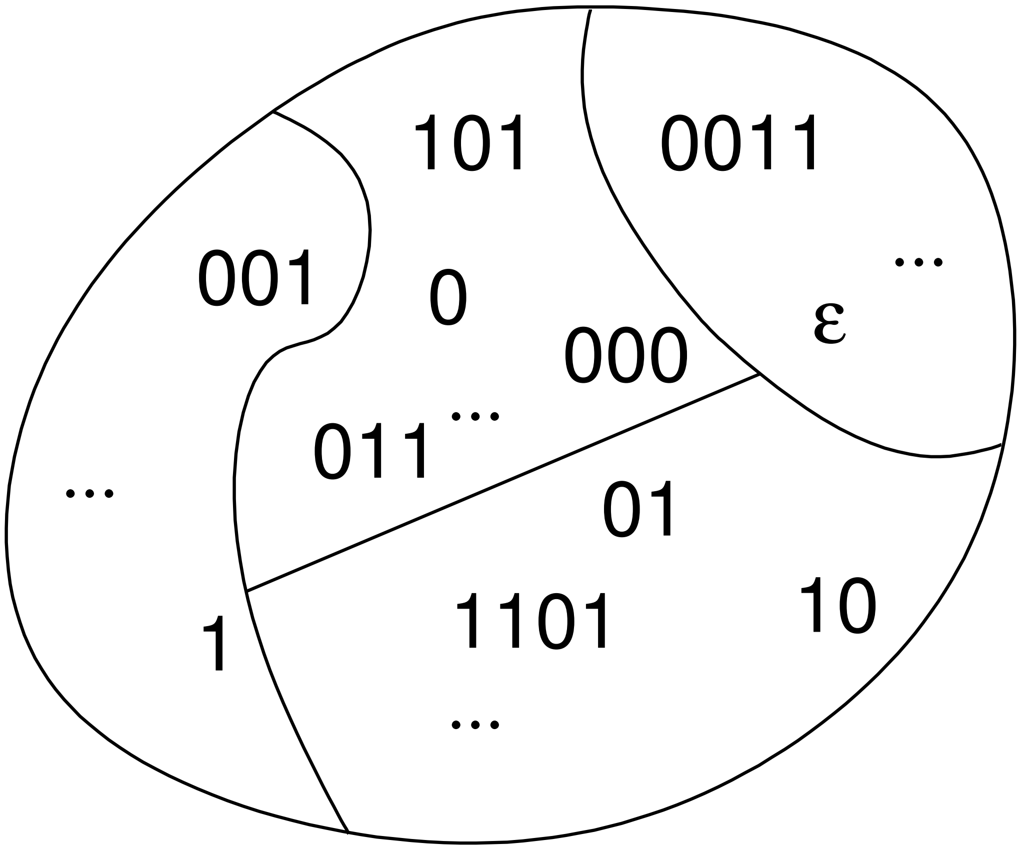
$L \subseteq \{0,1\}^*$ език, всички думи с четен брой единици и четен брой нули



Класовете на еквивалентност?

Пример

$L \subseteq \{0,1\}^*$ език, всички думи с четен брой единици и четен брой нули

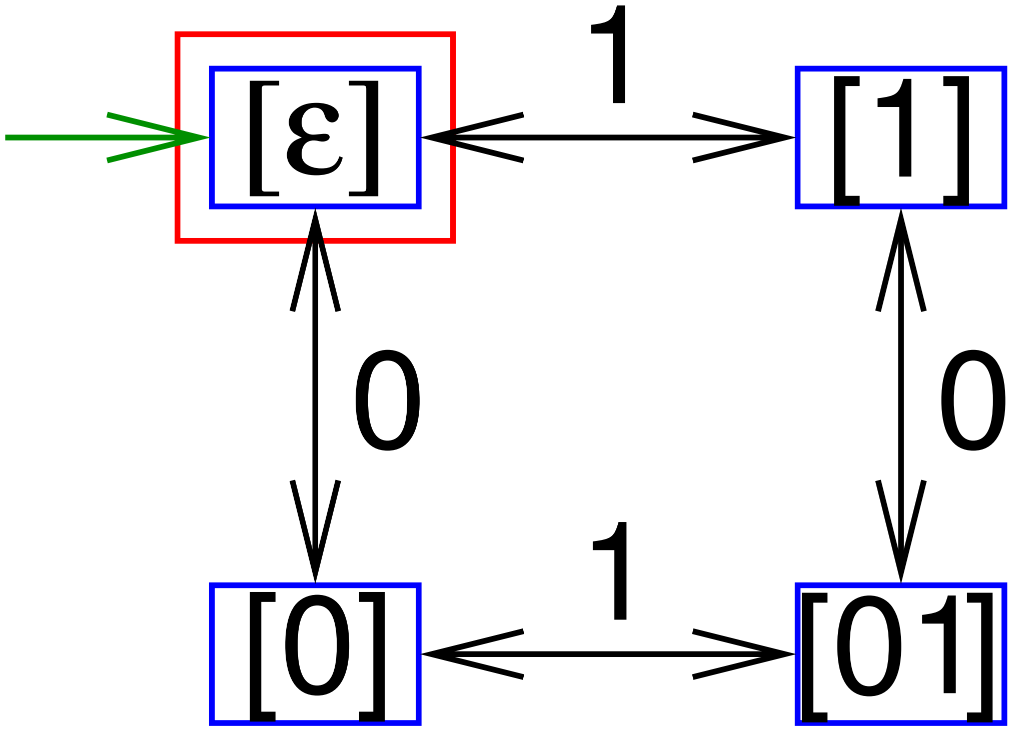


Класовете на еквивалентност:

$[\varepsilon], [0], [1], [01]$

Пример

$L \subseteq \{0,1\}^*$ език, всички думи с четен брой единици и четен брой нули



Теорема на Майхил-Нероуд

Нека

$R_L := \{(x,y) \in \Sigma^* \times \Sigma^* : \forall z \in \Sigma^* : xz \in L \Leftrightarrow yz \in L\}$.

L не е регулярен $\longrightarrow |R_L| = \infty$

Теорема на Майхил-Нероуд: L регулярен $\iff |R_L| < \infty$.

Нека $|R_L| = k < \infty$

$M_{\equiv} := (\{[w_1], \ldots, [w_k]\}, \Sigma, \delta_{\equiv}, [\varepsilon], F_{\equiv})$

Тогава $L(M_{\equiv}) = L$

Ако L е реулярен и $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ произволен DFA с $L(M) = L$, то R_M прецизира R_L. Следователно $|R_L| \leq |Q|$, т.е. $M_{\equiv}$ е минимален автомат (с най-малък брой състояния), разпознаващ L.

Един автомат се нарича свързан, ако всяко състояние е достижимо от началното.

Следствие: Всички минимални автомати за L са изоморфни на $M_{\equiv}$.

Д-во: Нека $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ е свързан DFA, $L(M) = L$ и $|Q| = |R_L|$. Ще покажем, че $M \cong M_{\equiv}$, т.е. M е изоморфен на $M_{\equiv}$.

За всяко $q \in Q$ има дума w, такава че $\hat{\delta}(s, w) = q$.

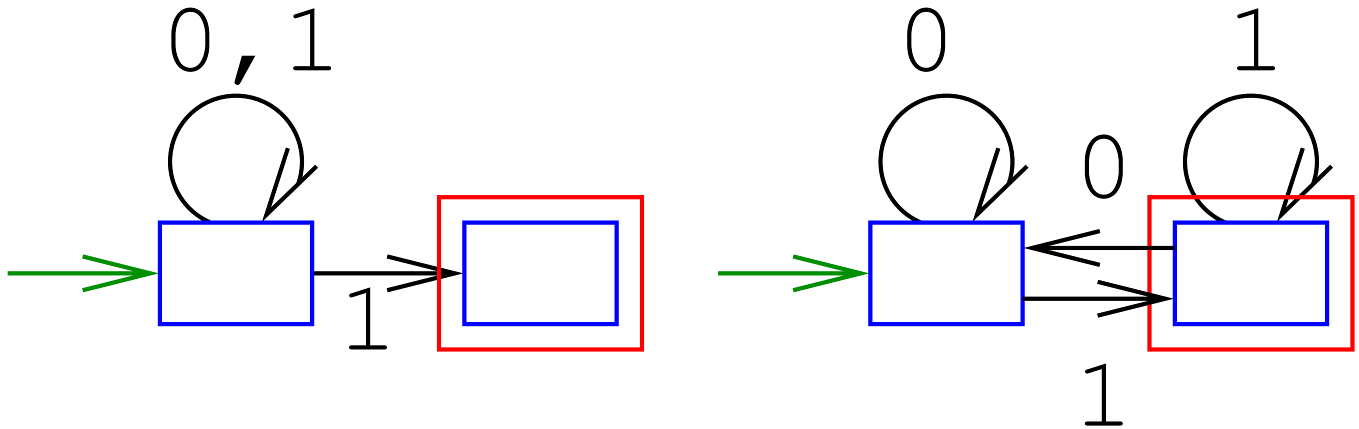
Дефинираме $\kappa(q) = [w]$.

- деф на κ е коректна
  т.е. $\hat{\delta}(s, w_1) = \hat{\delta}(s, w) \longrightarrow w_1 R_L w \longrightarrow [w_1] = [w]$.
  $w_1 z \in L \iff \hat{\delta}(s, w_1 z) \in F \iff \hat{\delta}(\hat{\delta}(s, w_1), z) \in F \iff \hat{\delta}(\hat{\delta}(s, w), z) \in F \iff \hat{\delta}(s, wz) \in F \iff wz \in L$

- κ е биекция
  (еднозначна) Нека $q \neq q_1$ и $\hat{\delta}(s, w_1) = q_1$.
  Допускаме, че
  $\kappa(q) = \kappa(q_1) \longrightarrow [w] = [w_1]$ & $w \neg R_M w_1 \longrightarrow |R_M| > |R_L|$.
  Противоречие.
  (върху) $\forall w(q = \hat{\delta}(s, w) \longrightarrow \kappa(q) = [w])$.
- $\kappa(s) = [\varepsilon]$ $(\hat{\delta}(s, \varepsilon) = s)$
- $\kappa(\delta(q, a)) = \delta_{\equiv}(\kappa(q), a)$
  $q = \hat{\delta}(s, w) \longrightarrow \delta(q, a) = \hat{\delta}(s, wa) \longrightarrow \kappa(\delta(q, a)) =$
  $[wa] = \delta_{\equiv}([w], a) = \delta_{\equiv}(\kappa(q), a)$
- $f \in F \iff \kappa(f) \in F_{\equiv}$.

Един контрапример NFA

Има структурно различни минимални NFAs за $(0 \cup 1)^*1$.



Упражнение: Напишете функцията на прехода.

Конструкция

на минималния автомат

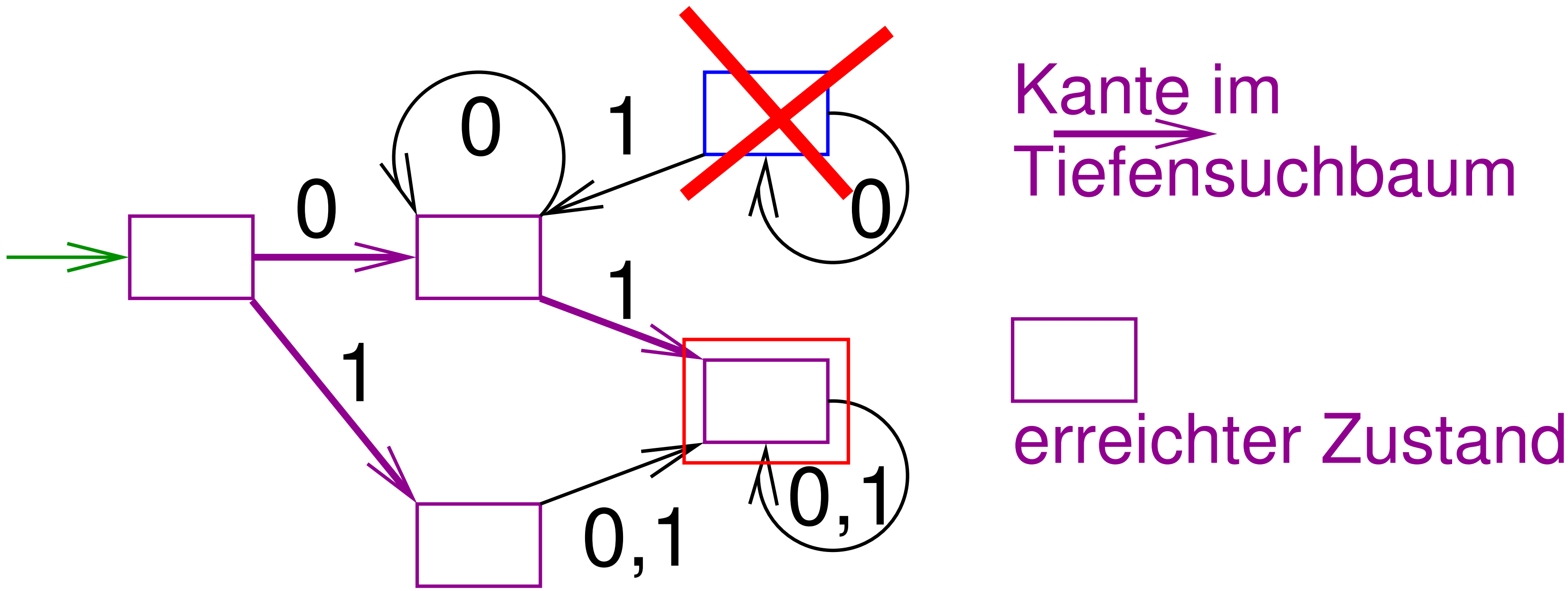
Махаме състоянията, недостижими от s.

Алгоритъм: Търсене в дълбочина в графа G_A за s.

Маркираме всички достижими състояния.

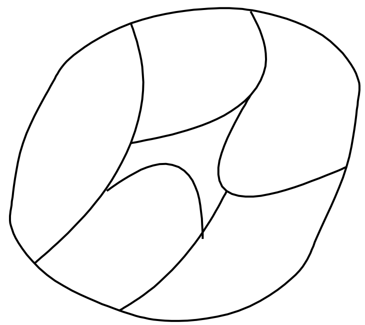
Махаме недостижимите състояния.

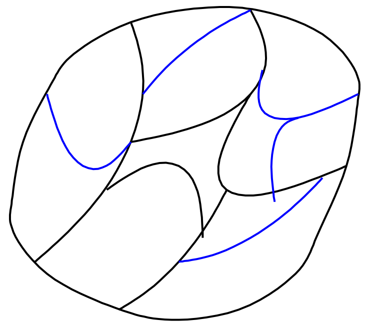
Изпълнение — Примери



Еквивалентни състояния

Идея: разгледайте DFA $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$
(без недостижими състояния)
M не е минимален $\longrightarrow$
R_M прецизира $R_L \longrightarrow \exists q \neq r \in Q:$
$[w]_M \dot{\cup} [w']_M \subseteq K$, $\hat{\delta}(s,w) = q, \hat{\delta}(s,w') = r$
за някой клас на екв. K за R_L
q, r се наричат еквивалентни ($q \equiv r$),
т.е.:
$q \equiv r \Leftrightarrow \forall w \in \Sigma^* : \hat{\delta}(q,w) \in F \Leftrightarrow \hat{\delta}(r,w) \in F$





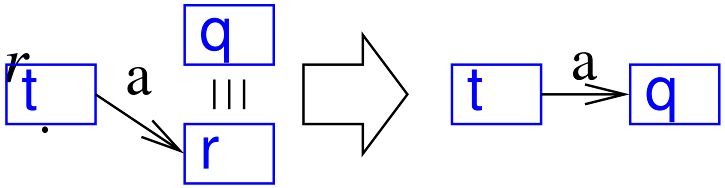
Махане на еквивалентните състояния

Да разгледаме $q \neq r \in Q : q \equiv r$ и $r \neq s$

Махаме r:

$M' := (Q \setminus \{r\}, \Sigma, \delta', s, F \setminus \{r\})$ където

$$\delta'(t,a) := \begin{cases} q & \text{ако } \delta(t,a) = r \\ \delta(t,a) & \text{иначе} \end{cases}$$



Лема: $L(M') = L$

Д-во:Упражнение

Минимизация на състоянията

Първа стъпка:

Function minDFA(M)

 махаме състоянията недостижими от s

 while $\exists q, r \in Q : q \equiv r \wedge q \neq r \wedge r \neq s$ do

  махаме r от M

 return M

Проблем: Как да намерим еквиваленнните състояния?

$q \equiv r$ iff $\forall z \in \Sigma^* : \hat{\delta}(q, z) \in F \Leftrightarrow \hat{\delta}(r, z) \in F$

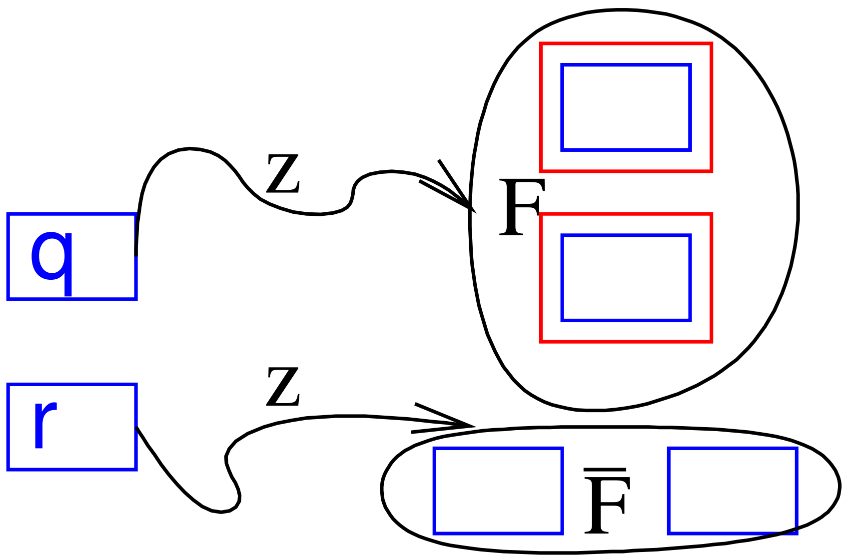
Кванторът е по не крайно множество!

Нееквивалентни състояния

$q \equiv r$ iff $\forall z \in \Sigma^* : \hat{\delta}(q,z) \in F \Leftrightarrow \hat{\delta}(r,z) \in F$

$q \not\equiv r$ iff $\exists z \in \Sigma^* : \hat{\delta}(q,z) \in F \not\Leftrightarrow \hat{\delta}(r,z) \in F$

z е свидетел за нееквивалентност.



Проблем: да се намерят свидетели за нееквивалентност

Най-къси свидетели за нееквивалентност

$\forall q \in F, r \notin F : \varepsilon$ е свидетел за $q \not\equiv r$.

Нека $w = aw'$ е най-къс свидетел за $q \not\equiv r$.

Наблюдение: w' е свидетел за $q' := \delta(q,a) \not\equiv \delta(r,a) =: r'$

Лема: w' е най-къс свидетел за $q' \not\equiv r'$

Доказателство с допускане на противното: Да допуснем:

w'' е по-къс свидетел за $q' \not\equiv r'$

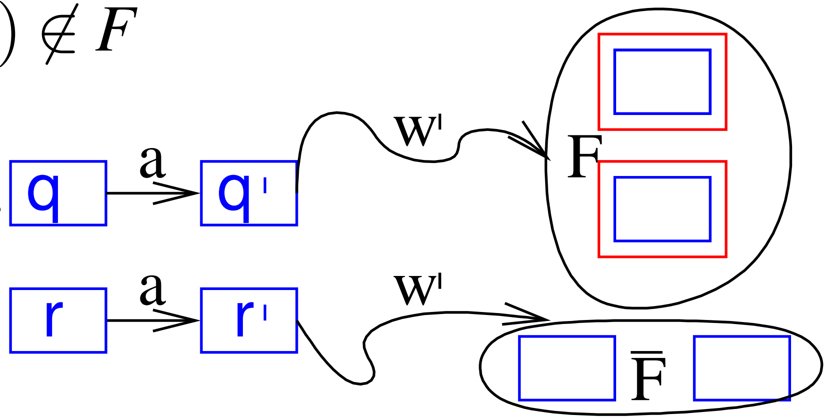
$\longrightarrow \hat{\delta}(q', w'') \in F \wedge \hat{\delta}(r', w'') \notin F$ БОО

$\longrightarrow \hat{\delta}(\delta(q,a), w'') \in F \wedge \hat{\delta}(\delta(r,a), w'') \notin F$

$\longrightarrow \hat{\delta}(q, aw'') \in F \wedge \hat{\delta}(r, aw'') \notin F$

$\longrightarrow aw''$ е по-къс свидетел за $q \not\equiv r$

Противоречие.



Най-къси свидетели за нееквивалентност

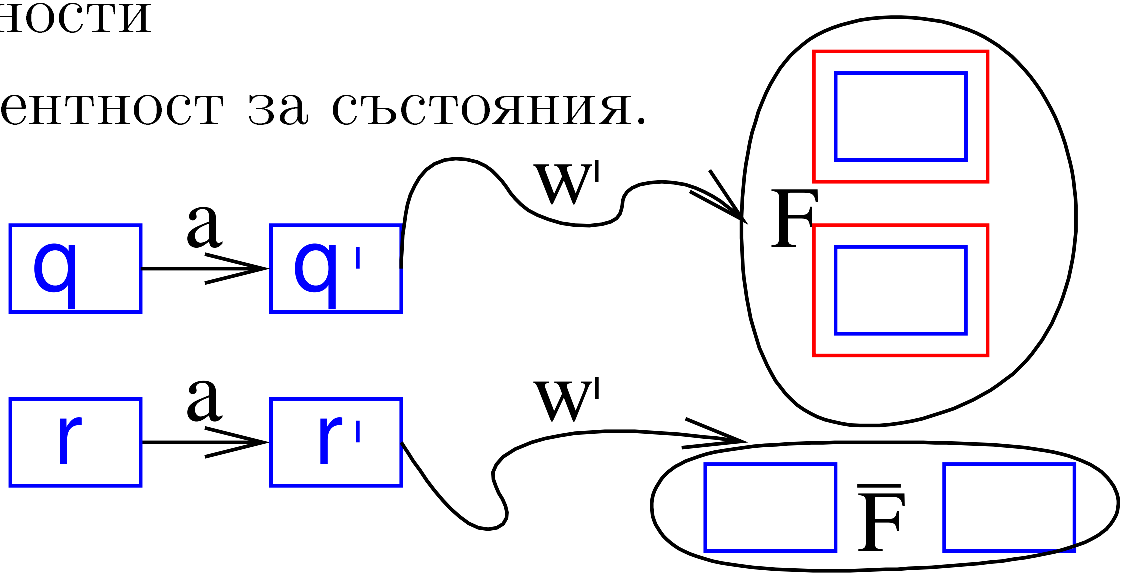
ε свидетелства $q \not\equiv r$, ако $q \in F, r \notin F$ или $r \in F, q \notin F$.

Ако $w = aw'$ е най-къс свидетел за $q \not\equiv r$, то
w' е най-къс свидетел за $q' := \delta(q,a) \not\equiv \delta(r,a) =: r'$

Обратно: ако $q' \not\equiv r'$ и
$\exists a \in \Sigma(q' := \delta(q,a)\ \&\ \delta(r,a) = r')$, то $q \not\equiv r$

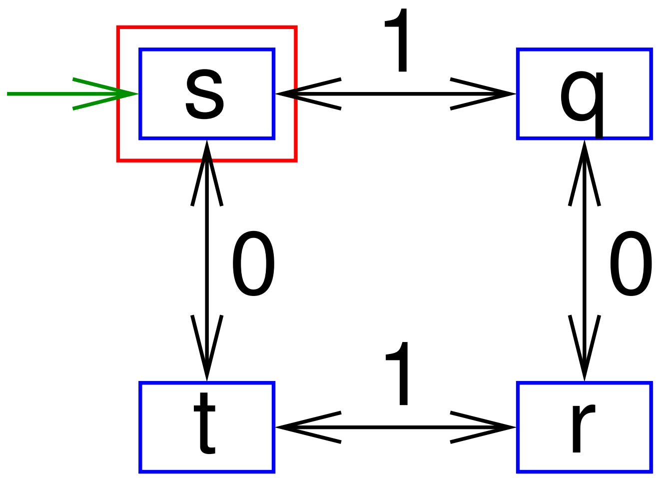
$\leadsto$ всички нееквивалентности

$\leadsto$ класовете на еквивалентност за състояния.



Пример

$L \subseteq \{0,1\}^*$ език, всички думи с четен брой нули и
четен брой нули



$0 = 0\varepsilon$ е най-къс свидетел
за $t \not\equiv r$.

$\rightsquigarrow \varepsilon$ е най-късият свидетел
за $s = \delta(t,0) \not\equiv \delta(r,0) = q$.

Тест с една буква

Нека N_k е множеството от всички нееквивалентни двойки от състояния със свидетелите с дължина $\leq k$.

$N_0 = \{\{q,r\} : q \in F \not\Leftrightarrow r \in F\}$

$N_{k+1} = \{\{q,r\} : \exists a \in \Sigma(\{\delta(q,a),\delta(r,a)\} \in N_k)\} \cup N_k$

Нека r е първото, за което $N_r = N_{r+1}$. Тогава:

Лема: $\{q,r\} \in N_r \Longleftrightarrow q \not\equiv r$.

$\Longrightarrow$ $\{q,r\} \in N_k$ за първи път. Индукция по k:
$k = 0$. $q \not\equiv r$.
$k > 0$. $\{\delta(q,a),\delta(r,a)\} \in N_{k-1} \longrightarrow \delta(q,a) \not\equiv \delta(r,a) \longrightarrow q \not\equiv r$
$\Longleftarrow$ Предишната лема и индукционната хипотеза.

Нека $E = Q \times Q \setminus N_r$ - всички двойки еквив. състояния.

Един лесен алгоритъм

$N := \emptyset$ // маркирани двойки

$N' := \{\{q, r\} \subseteq Q : q \in F \not\Leftrightarrow r \in F\}$ // следващите маркирани двойки

while $N' \neq \emptyset$ do

$\quad N := N \cup N'$

$\quad N' := \{\{q, r\} \subseteq Q : \exists a \in \Sigma : \{\delta(q, a), \delta(r, a)\} \in N\} \setminus N$

Общо време: $\mathscr{O}\left(|\Sigma| \cdot |Q|^3\right)$

Инициализация: $\mathscr{O}\left(|Q|^2\right)$

Време за цикъла: $\mathscr{O}\left(|\Sigma| \cdot |Q|^2\right)$

Колко цикъла? Сигурно $\leq |Q|^2$.

По-точно наблюдение: $\leq |Q|$ цикли

Минимален автомат

$q \equiv r \Leftrightarrow \forall z \in \Sigma^* : \hat{\delta}(q,z) \in F \Leftrightarrow \hat{\delta}(r,z) \in F$

релация на еививалентност

Нека $[q]$ е класът на еквивалентност съдържащ q.

$M' := (Q', \Sigma, \delta', [s], F')$, където

$Q' =: \{[q] : q \in Q\}$

$F' := \{[q] : [q] \cap F \neq \emptyset\}$ и

$\delta'([q],a) := [\delta(q,a)]$.

Лема 1: δ' е добре дефинирана

Лема 2: $\hat{\delta}'([s],w) = [\hat{\delta}(s,w)]$, следователно $L(M') = L(M)$

Лема 3: M' е с минимален брой състояния.

Минимален автомат

$q \equiv r \Leftrightarrow \forall z \in \Sigma^* : \hat{\delta}(q,z) \in F \Leftrightarrow \hat{\delta}(r,z) \in F$

Лема 1: δ' е добре дефинирана т.е.

ако $q \equiv p \longrightarrow \forall a \in \Sigma : \delta(q,a) \equiv \delta(p,a)$

Ако $\exists a \in \Sigma : \delta(q,a) \not\equiv \delta(p,a)$, то $q \not\equiv p$. $\square$

Лема 2.: $\hat{\delta}'([q],w) = [\hat{\delta}(q,w)]$, $q \in Q, w \in \Sigma^*$.

Индукция по $|w|$:

$\hat{\delta}'([q],\varepsilon) = [q] = [\hat{\delta}(q,\varepsilon)]$.

$\hat{\delta}'([q],aw) \overset{\text{деф.}\hat{\delta}'}{=} \hat{\delta}'(\delta'([q],a),w) \overset{\text{деф.}\delta'}{=} \hat{\delta}'([\delta(q,a)],w) \overset{\text{ИП}}{=}$
$[\hat{\delta}(\delta(q,a),w)] = [\hat{\delta}(q,aw)]$. $\square$

Следствие: $w \in L(M') \Leftrightarrow w \in L(M)$

$w \in L(M') \longrightarrow \hat{\delta}'([s], w) \in F' \longrightarrow$

$[\hat{\delta}(s, w)] \in F' \longrightarrow$ Лема 2

$\hat{\delta}(s, w) \equiv f \ \& \ f \in F \longrightarrow$ деф на F'

$\hat{\delta}(\hat{\delta}(s, w), \varepsilon) \in F \longrightarrow$ деф на $\equiv$

$\hat{\delta}(s, w) \in F \longrightarrow w \in L(M).$

$w \in L(M) \longrightarrow \hat{\delta}(s, w) \in F \longrightarrow$

$[\hat{\delta}(s, w)] \in F' \longrightarrow$ деф на F'

$\hat{\delta}'([s], w) \in F' \longrightarrow w \in L(M').$ Лема 2

$\square$

Така $L(M') = L(M)$.

Лема 3: M' е с минимален брой състояния.

M' е свързан (без недостижими състояния от s) и детерминиран автомат:
$\forall q \in Q \exists w \in \Sigma^* (\hat{\delta}(s,w) = q \longrightarrow \hat{\delta}'([s],w) = [q])$ по Лема 2.

Нека $L = L(M)$. Знаем, че $R_{M'}$ прецизира R_L.
Следовтелно $|R_{M'}| \geq |R_L|$.
Ще покажем, че R_L прецизира $R_{M'}$ т.е. $|R_{M'}| \leq |R_L|$.

Нека uR_Lv, $u,v \in \Sigma^*$. Да допуснем, че $u \neg R_{M'} v$.
$\hat{\delta}'([s],u) \neq \hat{\delta}'([s],v) \longrightarrow [\hat{\delta}(s,u)] \neq [\hat{\delta}(s,v)]$ (по Лема 2) $\longrightarrow$
$\hat{\delta}(s,u) \not\equiv \hat{\delta}(s,v)$
Тогава съществува дума w, такава че:
$\hat{\delta}(s,uw) \in F \not\Leftrightarrow \hat{\delta}(s,vw) \in F \longrightarrow$
$uw \in L \not\Leftrightarrow vw \in L$. Противоречие. $\square$