① Упражнение 28 за 1, 2 и 3 група

Интеграли от рационална функция на x и радикали от една и съща дробно-линейна функция на x

Това са интегралите от вида

$$\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_2}{q_2}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_n}{q_n}}\right] dx,$$

където $R(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ е рационална функция и $p_1, p_2, \dots, p_n \in \mathbb{Z}$, $q_1, q_2, \dots, q_n \in \mathbb{N}$.

Чрез полагането $\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$, където $k = \text{НОК}(q_1, q_2, \dots, q_n)$ тези интеграли се свеждат до интеграли от рационална функция.

Пресметнете неопределените интеграли:

Зад. 1 $I = \int \frac{x + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})} dx$

Решение: Полагаме $x = t^6$, $t \in (0, +\infty)$.

$$I = \int \frac{t^6 + t^4 + t}{t^6(1+t^2)} dt^6 = \int \frac{t^5 + t^3 + 1}{\cancel{t^5}(1+t^2)} \cdot 6\cancel{t^5} dt =$$

$$= 6 \int \frac{t^3(t^2+1)+1}{1+t^2} dt = 6 \int \left(t^3 + \frac{1}{1+t^2}\right) dt =$$

$$= 6\left(\frac{t^4}{4} + \operatorname{arctg} t\right) + C, \text{ където } t = \sqrt[6]{x}.$$

Зад. 2 $I = \int \frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt[3]{2x-3}+1} dx$

Решение: Полагаме $2x - 3 = t^6$, $t \in (0, +\infty)$, т.е. $x = \frac{1}{2}(t^6 + 3)$, $t \in (0, +\infty)$.

$$I = \int \frac{t^3}{t^2+1} d\,\frac{1}{2}(t^6+3) = \int \frac{t^3}{t^2+1} \cdot \frac{1}{2} 6t^5 dt =$$

$$= 3 \int \frac{t^8}{t^2+1} dt$$

$$\begin{array}{l|l} t^8 & t^2+1 \\ \hline -\ t^8+t^6 & t^6-t^4+t^2-1 \\ \hline -t^6 & \\ -\ -t^6-t^4 & \\ \hline t^4 & \\ -\ t^4+t^2 & \\ \hline -t^2 & \\ -\ -t^2-1 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

$$t^8 = (t^6 - t^4 + t^2 - 1)(t^2 + 1) + 1$$

② $I = 3\int \frac{(t^6-t^4+t^2-1)(t^2+1)+1}{t^2+1}\,dt =$

$= 3\int \left(t^6-t^4+t^2-1+\frac{1}{t^2+1}\right)dt =$

$= 3\left(\frac{t^7}{7}-\frac{t^5}{5}+\frac{t^3}{3}-t+\operatorname{arctg} t\right)+C$, където $t=\sqrt[6]{2x-3}$.

Зад. 3 $I = \int \frac{1}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}}\,dx$

Решение: $I = \int \frac{1}{\sqrt[4]{\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^3(x+2)^8}}\,dx = \int \frac{1}{(x+2)^2\sqrt[4]{\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^3}}\,dx$

Полагаме $\frac{x-1}{x+2} = t^4$, $t\in(0,1)$

Оттук $d\frac{x-1}{x+2} = dt^4$, т.е. $\frac{1.(x+2)-(x-1).1}{(x+2)^2}dx = 4t^3dt$

или $\frac{3}{(x+2)^2}dx = 4t^3dt$ и а. $\frac{1}{(x+2)^2}dx = \frac{4}{3}t^3dt$.

$I = \int \frac{4t^3}{3t^3}dt = \frac{4}{3}\int 1\,dt = \frac{4}{3}t + C$, където $t=\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}}$.

Зад. 4 $I = \int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}}\,dx$ (Упътване: Положете $x=t^4$, $t\in(0,+\infty)$)

Ойлерови интеграли

Това са интегралите от вида

$\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$, където $R(x_1,x_2)$ е рационална функция и $a,b,c\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$, $b^2-4ac\neq 0$. Тези интеграли се свеждат към интеграли от рационална функция чрез трите субституции на Ойлер:

1) $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}\,x \pm t$, ако $a>0$;

2) $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm xt \pm \sqrt{c}$, ако $c>0$;

3) $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm t(x-x_1)$ или $\pm t(x-x_2)$, ако ax^2+bx+c има две различни реални нули x_1 и x_2.

③ Пресметнете неопределените интеграли:

Зад. 1 $I=\int \frac{1}{(x+4)\sqrt{x^2+3x-4}}\,dx$

Решение: Приложими са първата и третата субституции на Ойлер. Ще използваме първата (пресметнете сами интеграла чрез третата).

Полагаме $\sqrt{x^2+3x-4}=x+t$.

$$\cancel{x^2}+3x-4=\cancel{x^2}+2xt+t^2$$

$$(3-2t)x=t^2+4\quad,\quad x=\frac{t^2+4}{3-2t},$$

$$\sqrt{x^2+3x-4}=x+t=\frac{t^2+4}{3-2t}+t=\frac{-t^2+3t+4}{3-2t},$$

$$x+4=\frac{t^2+4}{3-2t}+4=\frac{t^2-8t+16}{3-2t}=\frac{(t-4)^2}{3-2t},$$

$$dx=d\,\frac{t^2+4}{3-2t}=\left(\frac{t^2+4}{3-2t}\right)'dt=\frac{2t(3-2t)-(t^2+4)(-2)}{(3-2t)^2}\,dt=$$

$$=\frac{-2t^2+6t+8}{(3-2t)^2}\,dt=\frac{2(-t^2+3t+4)}{(3-2t)^2}\,dt$$

$$I=\int\frac{1}{\frac{(t-4)^2}{\cancel{3-2t}}\cdot\frac{\cancel{-t^2+3t+4}}{\cancel{3-2t}}}\cdot\frac{2\cancel{(-t^2+3t+4)}}{\cancel{(3-2t)^2}}\,dt=2\int\frac{1}{(t-4)^2}\,dt=$$

$$=2\int(t-4)^{-2}\,d(t-4)=2\,\frac{(t-4)^{-1}}{-1}+c=-\frac{2}{t-4}+c,$$

където $t=\sqrt{x^2+3x-4}-x$.

Зад. 2 $I=\int\frac{x}{\sqrt{(7x-10-x^2)^3}}\,dx$

Решение: $I=\int\frac{x}{(7x-10-x^2)\sqrt{7x-10-x^2}}\,dx$

$$x^2-7x+10=(x-2)(x-5)\Rightarrow 7x-10-x^2=(x-2)(5-x)$$

Приложима е само третата субституция на Ойлер. Полагаме $\sqrt{7x-10-x^2}=t(x-2)$

$$\cancel{(x-2)}(5-x)=t^2(x-2)^{\cancel{2}}\quad,\quad(5-x)=t^2(x-2),$$

$$5+2t^2=x(t^2+1)\quad,\quad x=\frac{2t^2+5}{t^2+1}$$

(4) $\sqrt{7x-10-x^2} = t(x-2) = t\left(\frac{2t^2+5}{t^2+1} - 2\right) = \frac{3t}{t^2+1}$,

$7x - 10 - x^2 = \frac{9t^2}{(t^2+1)^2}$,

$dx = d\left(\frac{2t^2+5}{t^2+1}\right) = \left(\frac{2t^2+5}{t^2+1}\right)' dt =$

$= \frac{4t(t^2+1) - (2t^2+5)2t}{(t^2+1)^2} dt = \frac{-6t}{(t^2+1)^2} dt$

$$I = \int \frac{\frac{2t^2+5}{\cancel{t^2+1}}}{\frac{9t^2}{\cancel{(t^2+1)^2}} \cdot \frac{3t}{\cancel{t^2+1}}} \cdot \frac{-6t}{\cancel{(t^2+1)^2}} dt = \int \frac{(2t^2+5)(-6t)}{27t^3} dt$$

$$= -\frac{2}{9} \int \frac{2t^2+5}{t^2} dt = -\frac{2}{9} \int \left(2 + \frac{5}{t^2}\right) dt =$$

$= -\frac{2}{9}\left(2t - \frac{5}{t}\right) + C$, където $t = \frac{\sqrt{7x-10-x^2}}{x-2}$.

Зад. 3 $I = \int \frac{1}{x\sqrt{x^2+x+1}} dx$

Упътване: Приложими са първата и втората субституции на Ойлер, така че интегралът може да се пресметне поне по два различни начина.