Писмен изпит по ДИС1 - решения

сп. Компютърни науки

15.02.2021

Задача 1. *(25 точки) Пресметнете границата*

$$L = \lim_{x\to 1}(2-x)^{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{2}\right)}.$$

Решение. Имаме неопределеност от вида $[1^\infty]$. Иползваме, че в такъв случай

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x\to x_0}(f(x)-1)g(x)}.$$

Последователно намираме

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}(2-x)^{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{2}\right)} &= e^{\lim_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{2}\right)}\\ &= e^{\lim_{t\to 0} t\operatorname{tg}\left(\frac{\pi-\pi t}{2}\right)}\\ &= e^{\lim_{t\to 0}\frac{t}{\operatorname{tg}\frac{\pi t}{2}}} = e^{\frac{2}{\pi}}.\end{aligned}$$

Задача 2. *(25 точки) Изследвайте и начертайте графиката на функцията*

$$f(x) = x + \frac{1}{x}.$$

Решение.

1.) Д. С. - всяко $x \neq 0$.

2.) $f(-x) = -f(x)$ - функцията е нечетна. Можем да я изследваме само за $x > 0$ и да напрвим заключение за отрицателните x поради симетрията.

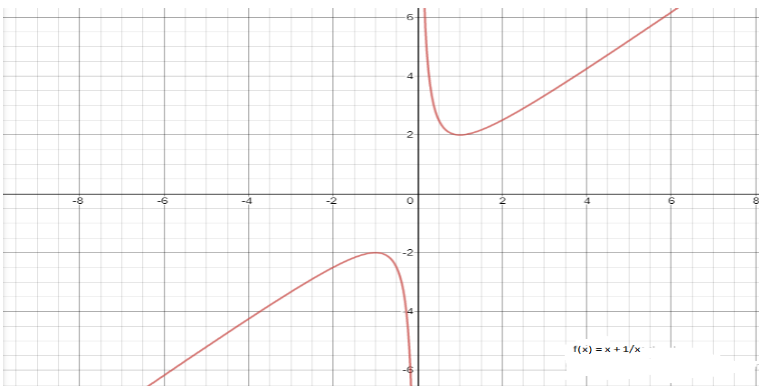
3.) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

4.) $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$.

5.) $f'(x) = \frac{x^2-1}{x^2}$ - функцията има локален максимум $f(-1) = -2$ и локален минимум $f(1) = 2$.

6.) $f''(x) = \frac{2}{x^3}$ - в нулата имаме смяна на изпъкналост и вдлъбнатост.

7.) Правата $y = x$ е наклонена асимптота.



Задача 3. *Пресметнете неопределените интеграли:*
а.) (13 точки)

$$I = \int \frac{\cos x}{2 - \cos^2 x} dx \;;$$

б.) (12 точки)

$$I = \int x^2 e^x dx \;.$$

Решение.
а.)

$$\int \frac{\cos x}{2 - \cos^2 x} dx = \int \frac{1}{2 - (1 - \sin^2 x)} d \sin x$$
$$= \operatorname{arctg} \sin x + c.$$

б.) Интегрираме два пъти по части. Намираме

$$\begin{aligned}
\int x^2 e^x dx &= \int x^2 de^x \\
&= x^2 e^x - \int e^x dx^2 \\
&= x^2 e^x - 2 \int x e^x dx \\
&= x^2 e^x - 2 \int x de^x \\
&= x^2 e^x - 2x e^x + 2 \int e^x dx \\
&= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + c.
\end{aligned}$$

Задача 4. *(25 точки) Пресметнете неопределения интеграл*

$$I = \int \frac{x}{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x^2}}} dx \;.$$

Решение.

$$I = \int x(1 + x^{\frac{2}{3}})^{-\frac{1}{2}} dx.$$

Интегралът е от вида

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx.$$

В случая $\frac{m+1}{n} = 3$, затова ще полагаме $1 + x^{\frac{2}{3}} = t^2$. Намираме $x = (t^2 - 1)^{\frac{3}{2}}$ и $dx = \frac{3}{2}(t^2 - 1)^{\frac{1}{2}} 2t dt$.

$$I = \int (t^2 - 1)^{\frac{3}{2}} t^{-1} \frac{3}{2} (t^2 - 1)^{\frac{1}{2}} 2t dt = 3 \int (t^2 - 1)^2 dt = \frac{3}{5} t^5 - 2t^3 + 3t + c.$$

Заместваме $t = \sqrt{1 + x^{\frac{2}{3}}}$.