4) координати на вектори спрямо базис

Мартин 82134

Въпрос 2

Нека V_1, V_2 – лин. пр-ва над F

$\varphi: V_1 \to V_2$ е лин. изображение

ако:

1) $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b) \quad \forall a, b \in V_1$

2) $\varphi(\lambda a) = \lambda \varphi(a) \quad \forall a \in V_1, \forall \lambda \in F$

~~(Примери за лин изобр.)~~

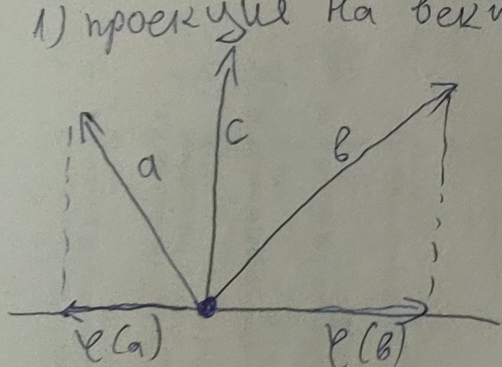
$\mathrm{Im}\,\varphi = \{\varphi(x) \mid x \in V_1\}$, $\forall \varphi(x) \in V_2$ наричаме образ на φ

$\mathrm{Ker}\,\varphi = \{x \mid \varphi(x) = \theta\}, x \in V_1$ наричаме ядро на φ

и $\mathrm{Im}\,\varphi = \varphi(V_1)$

Примери:

1) проекция на вектори върху права

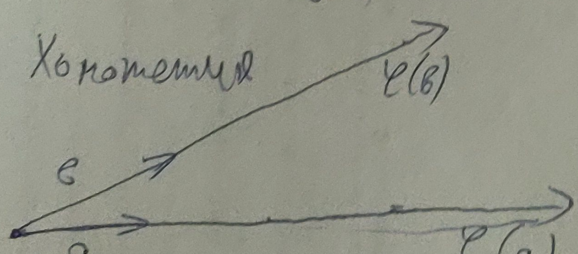


$\varphi(a), \varphi(b)$ – образи, т.е. $\in \mathrm{Im}\,\varphi$

$\varphi(c) = \theta \Rightarrow c \in \mathrm{Ker}\,\varphi$

c е подмн. на вект., които са перпенд. на правата

2) Хомотетия

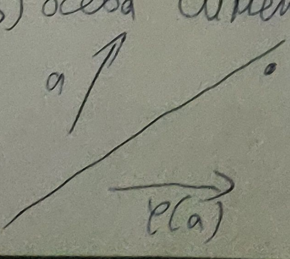


$\varphi(a), \varphi(b) \in \mathrm{Im}\,\varphi$

$\varphi(\theta) = \theta \Rightarrow \theta \in \mathrm{Ker}\,\varphi$

в този случай само $\theta \in V_1$ дава θ във V_2

3) осева симетрия



ядрото са векторите, ~~които~~ чиито всички точки съвпадат с точки от осевата права

образ са всички останали

Мартин 82134

4) координати на вектори спрямо базис

$б(a_1e_1+\dots+a_ne_n) = (a_1,\dots,a_n)$ в Ker б имаме θ

в Im б цялото V_2

Т-ма за ранг и дефект:

Д-во: Имаме крайномерни лин. пр-ва V_1, V_2 над F и $\varphi: V_1 \to V_2$ тогава $r(\varphi)+d(\varphi) = \dim V_1$

Знаем, че $\operatorname{Ker}\varphi$ е подпр. на V_1

нека $e_1,\dots,e_m$ - базис на $\operatorname{Ker}\varphi \Rightarrow d(\varphi)=m$

допълваме до базис на V_1

$e_1,\dots,e_m, g_1,\dots,g_k$ и $\dim V_1 = m+k$

нека:

$a_1 = \varphi(g_1),\dots,a_k = \varphi(g_k)$

ще док., че $a_1,\dots,a_k$ е базис на $\operatorname{Im}\varphi$

$c \in \operatorname{Im}\varphi$ и $c = \varphi(b)$ и $b = \lambda_1e_1+\dots+\lambda_me_m+\mu_1g_1+\dots+\mu_kg_k$

$c = \underbrace{\lambda_1\varphi(e_1)+\dots+\lambda_m\varphi(e_m)}_{=\theta}+\mu_1a_1+\dots+\mu_ka_k$

но $\Rightarrow c \in l(a_1,\dots,a_k) \Rightarrow \operatorname{Im}\varphi \subset l(a_1,\dots,a_k)$

но $a_1,\dots,a_k \Rightarrow l(a_1,\dots,a_k) \subset \operatorname{Im}\varphi \Rightarrow \operatorname{Im}\varphi = l(a_1,\dots,a_k)$

нека $\alpha_1a_1+\dots+\alpha_ka_k = \theta$. ще док., че $a_1,\dots,a_k$ са ЛНЗ

и че са базис на $\operatorname{Im}\varphi$, но нема време

$\Rightarrow a_1,\dots,a_k$ базис на $\operatorname{Im}\varphi \Rightarrow \dim\operatorname{Im}\varphi = k = r(\varphi)$