# Лекция VIII - Гранични резултати за случайни величини

# Лекция VIII - Гранични резултати за случайни величини

- Сходимост по вероятност.
- Сходимост по разпределение.
- Неравенство на Чебишов
- Закони за големите числа
- Централна гранична теорема

# Сходимост на случайни величини

Нека $X_1, X_2, \ldots X_n, \ldots$ е редица от случайни величини. Интересен е въпросът, дали тази редица е сходяща и в какъв смисъл. Съществуват няколко вида сходимост на сл.в. - почти сигурно, по вероятност, по разпределение, слаба и т.н. Ние ще разгледаме два типа.

# Сходимост на случайни величини

Нека $X_1, X_2, \dots X_n, \dots$ е редица от случайни величини. Интересен е въпросът, дали тази редица е сходяща и в какъв смисъл. Съществуват няколко вида сходимост на сл.в. - почти сигурно, по вероятност, по разпределение, слаба и т.н. Ние ще разгледаме два типа.

## Дефиниция - Сходимост по вероятност $X_n \xrightarrow{P} X$

Казваме, че редицата е $X_1, X_2, \dots X_n, \dots$ е сходяща по вероятност към сл.в. $X$, ако за всяко $\varepsilon > 0$

$$\mathrm{P}\left(|X_n - X| > \varepsilon\right) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

# Сходимост на случайни величини

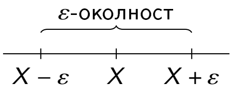
Нека $X_1, X_2, \ldots X_n, \ldots$ е редица от случайни величини. Интересен е въпросът, дали тази редица е сходяща и в какъв смисъл. Съществуват няколко вида сходимост на сл.в. - почти сигурно, по вероятност, по разпределение, слаба и т.н. Ние ще разгледаме два типа.

## Дефиниция - Сходимост по вероятност $X_n \xrightarrow{P} X$

Казваме, че редицата е $X_1, X_2, \ldots X_n, \ldots$ е сходяща по вероятност към сл.в. $X$, ако за всяко $\varepsilon > 0$

$$\mathrm{P}\left(|X_n - X| > \varepsilon\right) \to 0 \qquad \text{при} \qquad n \to \infty$$

Съгласно тази дефиниция, редицата $\{X_n\}$ е сходяща, ако вероятността случайните величини да попаднат извън $\varepsilon$-околност на $X$ клони към нула.




Еквивалентен начин да дефинираме сходимост по вероятност е да поискаме $\mathrm{P}\left(|X_n - X| < \varepsilon\right) \to 1$. т.е вероятността сл.в. да попаднат в $\varepsilon$-околността да клони към едно.

# Сходимост на случайни величини

Сходимостта по вероятност е по "слаба" от традиционната сходимост позната от анализа, при която бихме поискали всички сл.в., след някое място в редицата, да са в тази околност. Ще дадем един важен контрапример, който показва разликата между двете сходимости.

# Сходимост на случайни величини

Сходимостта по вероятност е по “слаба” от традиционната сходимост позната от анализа, при която бихме поискали всички сл.в., след някое място в редицата, да са в тази околност. Ще дадем един важен контрапример, който показва разликата между двете сходимости.

## Пример

Нека $\Omega = [0,1]$, събитията са интервалите, и вероятността на даден интервал е дължината му. Ще въведем следната редица от събития:

за $n = 1 : A_{1,1} = [0,1]$ $\quad$ $\mathrm{P}(A_{1,1}) = 1$

за $n = 2 : A_{2,1} = [0,1/2]$ $A_{2,2} = [1/2,1]$ $\quad$ $\mathrm{P}(A_{2,k}) = 1/2$

за $n = 3 : A_{3,1} = [0,1/3]$ $A_{3,2} = [1/3,2/3]$ $A_{3,3} = [2/3,1]$ $\quad$ $\mathrm{P}(A_{3,k}) = 1/3$

изобщо $A_{n,k} = [(k-1)/n, k/n]$ $\quad$ $\mathrm{P}(A_{n,k}) = 1/n$

# Сходимост на случайни величини

Сходимостта по вероятност е по "слаба" от традиционната сходимост позната от анализа, при която бихме поискали всички сл.в., след някое място в редицата, да са в тази околност. Ще дадем един важен контрапример, който показва разликата между двете сходимости.

## Пример

Нека $\Omega = [0, 1]$, събитията са интервалите, и вероятността на даден интервал е дължината му. Ще въведем следната редица от събития:

за $n = 1$ : $A_{1,1} = [0, 1]$ $\qquad$ $\mathrm{P}(A_{1,1}) = 1$

за $n = 2$ : $A_{2,1} = [0, 1/2]$ $A_{2,2} = [1/2, 1]$ $\qquad$ $\mathrm{P}(A_{2,k}) = 1/2$

за $n = 3$ : $A_{3,1} = [0, 1/3]$ $A_{3,2} = [1/3, 2/3]$ $A_{3,3} = [2/3, 1]$ $\qquad$ $\mathrm{P}(A_{3,k}) = 1/3$

изобщо $A_{n,k} = [(k-1)/n, k/n]$ $\qquad$ $\mathrm{P}(A_{n,k}) = 1/n$

Дефинираме случайни величини, които са индикатори на тези събития

$$X_{n,k}(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A_{n,k} \\ 0, & \omega \notin A_{n,k} \end{cases}$$

Редицата $X_{1,1}, X_{2,1}, X_{2,2}, X_{3,1}, \ldots$ ще клони по вероятност към нула, защото

$$\mathrm{P}\left(|X_{n,k} - 0| > \varepsilon\right) = \mathrm{P}\left(X_{n,k} > \varepsilon\right) = \mathrm{P}(X_{n,k} = 1) = 1/n \to 0$$

# Сходимост на случайни величини

Сходимостта по вероятност е по "слаба" от традиционната сходимост позната от анализа, при която бихме поискали всички сл.в., след някое място в редицата, да са в тази околност. Ще дадем един важен контрапример, който показва разликата между двете сходимости.

## Пример

Нека $\Omega = [0, 1]$, събитията са интервалите, и вероятността на даден интервал е дължината му. Ще въведем следната редица от събития:

за $n = 1$ : $A_{1,1} = [0, 1]$ — $\mathsf{P}(A_{1,1}) = 1$

за $n = 2$ : $A_{2,1} = [0, 1/2]$ $A_{2,2} = [1/2, 1]$ — $\mathsf{P}(A_{2,k}) = 1/2$

за $n = 3$ : $A_{3,1} = [0, 1/3]$ $A_{3,2} = [1/3, 2/3]$ $A_{3,3} = [2/3, 1]$ — $\mathsf{P}(A_{3,k}) = 1/3$

изобщо $A_{n,k} = [(k-1)/n, k/n]$ — $\mathsf{P}(A_{n,k}) = 1/n$

Дефинираме случайни величини, които са индикатори на тези събития

$$X_{n,k}(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A_{n,k} \\ 0, & \omega \notin A_{n,k} \end{cases}$$

Редицата $X_{1,1}, X_{2,1}, X_{2,2}, X_{3,1}, \ldots$ ще клони по вероятност към нула, защото

$$\mathsf{P}\left(|X_{n,k} - 0| > \varepsilon\right) = \mathsf{P}\left(X_{n,k} > \varepsilon\right) = \mathsf{P}(X_{n,k} = 1) = 1/n \to 0$$

От друга страна, което и $\omega$ да фиксираме, за $\forall n$ ще има множество, което съдържа $\omega$ и такива, който не, т.е. индикатори $X_{n,i}(\omega) = 0$ и $X_{n,j}(\omega) = 1$. Следователно редицата ще има две точки на сгъстяване 0 и 1 и няма как да е сходяща в смисъла на анализа.

# Сходимост на случайни величини

## Дефиниция - Сходимост по разпределение $X_n \xrightarrow{d} X$

Казваме, че редицата е $X_1, X_2, \ldots X_n, \ldots$ е сходяща по разпределение към сл.в. $X$, ако съответната редица от функции на разпределение е сходяща, за всяка точка на непрекъснатост $x$, т.е.

$$\lim_{n \to \infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$$

# Сходимост на случайни величини

## Дефиниция - Сходимост по разпределение $X_n \xrightarrow{d} X$

Казваме, че редицата е $X_1, X_2, \ldots X_n, \ldots$ е сходяща по разпределение към сл.в. $X$, ако съответната редица от функции на разпределение е сходяща, за всяка точка на непрекъснатост $x$, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$$

Сходимостта по разпределение, носи по-скоро някаква статистическа информация. Казва как е разпределена границата на редицата, но не казва нищо за конкретната реализация. Например, при известни условия сумата на произволни случайни величини се оказва нормално разпределена и този факт ни дава възможност да направим изводи за поведението на сумата, дори без да познаваме отделните събираеми.

# Сходимост на случайни величини

## Дефиниция - Сходимост по разпределение $X_n \xrightarrow{d} X$

Казваме, че редицата е $X_1, X_2, \dots X_n, \dots$ е сходяща по разпределение към сл.в. $X$, ако съответната редица от функции на разпределение е сходяща, за всяка точка на непрекъснатост $x$, т.е.

$$\lim_{n \to \infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$$

Сходимостта по разпределение, носи по-скоро някаква статистическа информация. Казва как е разпределена границата на редицата, но не казва нищо за конкретната реализация. Например, при известни условия сумата на произволни случайни величини се оказва нормално разпределена и този факт ни дава възможност да направим изводи за поведението на сумата, дори без да познаваме отделните събираеми.

Следващото твърдение дава връзката между въведените сходимости.

## Твърдение

От сходимост по вероятност следва сходимост по разпределение, т.е.

$$X_n \xrightarrow{p} X \quad \Rightarrow \quad X_n \xrightarrow{d} X$$

**Док.** По условие за всяко $\varepsilon > 0$ при $n \to \infty$ е изпълнено

$$\mathsf{P}\left(|X_n - X| > \varepsilon\right) \to 0$$

но

$$\mathsf{P}\left(|X_n - X| > \varepsilon\right) = \mathsf{P}\left(X_n - X > \varepsilon\right) + \mathsf{P}\left(X - X_n > \varepsilon\right)$$

Следователно

$$\mathsf{P}\left(X_n - X > \varepsilon\right) \to 0 \qquad \text{и} \qquad \mathsf{P}\left(X - X_n > \varepsilon\right) \to 0 \qquad (\star)$$

**Док.** По условие за всяко $\varepsilon > 0$ при $n \to \infty$ е изпълнено

$$\mathrm{P}\left(|X_n - X| > \varepsilon\right) \to 0$$

но

$$\mathrm{P}\left(|X_n - X| > \varepsilon\right) = \mathrm{P}\left(X_n - X > \varepsilon\right) + \mathrm{P}\left(X - X_n > \varepsilon\right)$$

Следователно

$$\mathrm{P}\left(X_n - X > \varepsilon\right) \to 0 \qquad \text{и} \qquad \mathrm{P}\left(X - X_n > \varepsilon\right) \to 0 \qquad (\star)$$

Ще покажем, че от тези равенства следва

$$F_{X_n}(x) = \mathrm{P}(X_n < x) \;\; \to \;\; \mathrm{P}(X < x) = F_X(x)$$

# Сходимост на случайни величини

**Док.** По условие за всяко $\varepsilon > 0$ при $n \longrightarrow \infty$ е изпълнено

$$\mathrm{P}\left(|X_n - X| > \varepsilon\right) \longrightarrow 0$$

но

$$\mathrm{P}\left(|X_n - X| > \varepsilon\right) = \mathrm{P}\left(X_n - X > \varepsilon\right) + \mathrm{P}\left(X - X_n > \varepsilon\right)$$

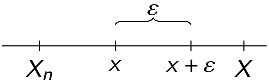
Следователно

$$\mathrm{P}\left(X_n - X > \varepsilon\right) \longrightarrow 0 \qquad \text{и} \qquad \mathrm{P}\left(X - X_n > \varepsilon\right) \longrightarrow 0 \qquad (\star)$$

Ще покажем, че от тези равенства следва

$$F_{X_n}(x) = \mathrm{P}(X_n < x) \quad \rightarrow \quad \mathrm{P}(X < x) = F_X(x)$$

Да допуснем, че $X_n < x$. Тогава за $X$ има две възможности:
- или $X < x + \varepsilon$
- или $X \geq x + \varepsilon$ и в този случай $X - X_n > \varepsilon$



# Сходимост на случайни величини

**Док.** По условие за всяко $\varepsilon > 0$ при $n \longrightarrow \infty$ е изпълнено

$$\mathrm{P}\left(|X_n - X| > \varepsilon\right) \longrightarrow 0$$

но

$$\mathrm{P}\left(|X_n - X| > \varepsilon\right) = \mathrm{P}\left(X_n - X > \varepsilon\right) + \mathrm{P}\left(X - X_n > \varepsilon\right)$$

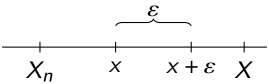
Следователно

$$\mathrm{P}\left(X_n - X > \varepsilon\right) \longrightarrow 0 \qquad \text{и} \qquad \mathrm{P}\left(X - X_n > \varepsilon\right) \longrightarrow 0 \qquad (\star)$$

Ще покажем, че от тези равенства следва

$$F_{X_n}(x) = \mathrm{P}(X_n < x) \ \longrightarrow \ \mathrm{P}(X < x) = F_X(x)$$

Да допуснем, че $X_n < x$. Тогава за $X$ има две възможности:
- или $X < x + \varepsilon$
- или $X \geq x + \varepsilon$ и в този случай $X - X_n > \varepsilon$




От допускането следва едно от двете описани събития, т.е.

$$\{X_n < x\} \ \subset \ \{X < x + \varepsilon\} \ \cup \ \{X - X_n > \varepsilon\}$$

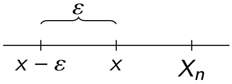
Което означава

$$\mathrm{P}(X_n < x) \ \leq \ \mathrm{P}(X < x + \varepsilon) \ + \ \mathrm{P}(X - X_n > \varepsilon)$$

По този начин получихме оценка отгоре за ф.р. $F_{X_n}(x) = \mathrm{P}(X_n < x)$.

Аналогично ще получим оценка отдолу. Да допуснем, че $X_n \geq x$. Тогава:

- или $X \geq x - \varepsilon$
- или $X < x - \varepsilon$ и в този случай $X_n - X > \varepsilon$

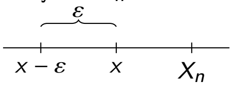



$$\{X_n \geq x\} \subset \{X \geq x - \varepsilon\} \cup \{X_n - X > \varepsilon\}$$

# Сходимост на случайни величини

Аналогично ще получим оценка отдолу. Да допуснем, че $X_n \geq x$. Тогава:

- или $X \geq x - \varepsilon$
- или $X < x - \varepsilon$ и в този случай $X_n - X > \varepsilon$




$$\{X_n \geq x\} \subset \{X \geq x - \varepsilon\} \cup \{X_n - X > \varepsilon\}$$

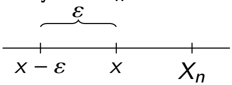
Ще изразим вероятностите на противоположните събития, които всъщност ни интересуват. Така получаваме оценка отодолу за функцията на разпределение.

$$1 - \mathrm{P}(X_n < x) \leq 1 - \mathrm{P}(X < x - \varepsilon) + \mathrm{P}(X_n - X > \varepsilon)$$

$$\mathrm{P}(X < x - \varepsilon) - \mathrm{P}(X_n - X > \varepsilon) \leq \mathrm{P}(X_n < x)$$

# Сходимост на случайни величини

Аналогично ще получим оценка отдолу. Да допуснем, че $X_n \geq x$. Тогава:
- или $X \geq x - \varepsilon$
- или $X < x - \varepsilon$ и в този случай $X_n - X > \varepsilon$




$$\{X_n \geq x\} \subset \{X \geq x - \varepsilon\} \cup \{X_n - X > \varepsilon\}$$

Ще изразим вероятностите на противоположните събития, които всъщност ни интересуват. Така получаваме оценка отодолу за функцията на разпределение.

$$1 - \mathrm{P}(X_n < x) \leq 1 - \mathrm{P}(X < x - \varepsilon) + \mathrm{P}(X_n - X > \varepsilon)$$

$$\mathrm{P}(X < x - \varepsilon) - \mathrm{P}(X_n - X > \varepsilon) \leq \mathrm{P}(X_n < x)$$

Нека да комбинираме двете оценки в една.

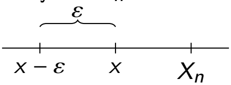
$$F_X(x - \varepsilon) - \mathrm{P}(X_n - X > \varepsilon) \leq F_{X_n}(x) \leq F_X(x + \varepsilon) + \mathrm{P}(X - X_n > \varepsilon)$$

По този начин от $(\star)$, при $n \to \infty$ получаваме.

$$F_X(x - \varepsilon) \leq F_{X_n}(x) \leq F_X(x + \varepsilon)$$

# Сходимост на случайни величини

Аналогично ще получим оценка отдолу. Да допуснем, че $X_n \geq x$. Тогава:
- или $X \geq x - \varepsilon$
- или $X < x - \varepsilon$ и в този случай $X_n - X > \varepsilon$




$$\{X_n \geq x\} \subset \{X \geq x - \varepsilon\} \cup \{X_n - X > \varepsilon\}$$

Ще изразим вероятностите на противоположните събития, които всъщност ни интересуват. Така получаваме оценка отодолу за функцията на разпределение.

$$1 - \mathrm{P}(X_n < x) \leq 1 - \mathrm{P}(X < x - \varepsilon) + \mathrm{P}(X_n - X > \varepsilon)$$

$$\mathrm{P}(X < x - \varepsilon) - \mathrm{P}(X_n - X > \varepsilon) \leq \mathrm{P}(X_n < x)$$

Нека да комбинираме двете оценки в една.

$$F_X(x - \varepsilon) - \mathrm{P}(X_n - X > \varepsilon) \leq F_{X_n}(x) \leq F_X(x + \varepsilon) + \mathrm{P}(X - X_n > \varepsilon)$$

По този начин от $(\star)$, при $n \to \infty$ получаваме.

$$F_X(x - \varepsilon) \leq F_{X_n}(x) \leq F_X(x + \varepsilon)$$

Ако $x$ е точка на непрекъснатост на $F_X(x)$, от "теоремата за милиционерите" следва търсената сходимост.

$$\lim_{n \to \infty} F_{X_n}(x) = F_X(x) \qquad \square$$

# Сходимост на случайни величини

Това твърдение показва, че ако сл.в. $X_1, X_2, \ldots X_n, \ldots$ се уеднаквяват стохастически, т.е. започват да взимат близки стойности то и разпределението им се уеднаквява. Обратното твърдение не е вярно, възможно е случайните виличини в редицата да са с подобно или даже еднакво разпределение и въпреки това да се държат съвсем различно. Както показва следващия контрапример.

Това твърдение показва, че ако сл.в. $X_1, X_2, \dots X_n, \dots$ се уеднаквяват стохастически, т.е. започват да взимат близки стойности то и разпределението им се уеднаквява. Обратното твърдение не е вярно, възможно е случайните виличини в редицата да са с подобно или даже еднакво разпределение и въпреки това да се държат съвсем различно. Както показва следващия контрапример.

## Пример

Нека $X_1, X_2, \dots X_n, \dots$ са независими и еднакво разпределени $N(0,1)$. След като всички сл.в. имат едно и също разпределение то очевидно можем да приемем, че те клонят към него $X_n \xrightarrow{d} X \in N(0,1)$.

Това твърдение показва, че ако сл.в. $X_1, X_2, \dots X_n, \dots$ се уеднакяват стохастически, т.е. започват да взимат близки стойности то и разпределението им се уеднаквява. Обратното твърдение не е вярно, възможно е случайните виличини в редицата да са с подобно или даже еднакво разпределение и въпреки това да се държат съвсем различно. Както показва следващия контрапример.

## Пример

Нека $X_1, X_2, \dots X_n, \dots$ са независими и еднакво разпределени $N(0,1)$. След като всички сл.в. имат едно и също разпределение то очевидно можем да приемем, че те клонят към него $X_n \xrightarrow{d} X \in N(0,1)$.

От друга страна, ако $X_n > \varepsilon/2$ и $X < -\varepsilon/2$ ще следва $X_n - X > \varepsilon$, тогава

$$\left\{X_n > \frac{\varepsilon}{2}, X < -\frac{\varepsilon}{2}\right\} \subset \{X_n - X > \varepsilon\}$$

Следователно

$$\mathsf{P}(X_n - X > \varepsilon) \geq \mathsf{P}\left(X_n > \frac{\varepsilon}{2}\right) \mathsf{P}\left(X < -\frac{\varepsilon}{2}\right) = \left[1 - \Phi\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right] \Phi\left(-\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

Това твърдение показва, че ако сл.в. $X_1, X_2, \dots X_n, \dots$ се уеднаквяват стохастически, т.е. започват да взимат близки стойности то и разпределението им се уеднаквява. Обратното твърдение не е вярно, възможно е случайните виличини в редицата да са с подобно или даже еднакво разпределение и въпреки това да се държат съвсем различно. Както показва следващия контрапример.

## Пример

Нека $X_1, X_2, \dots X_n, \dots$ са независими и еднакво разпределени $N(0,1)$. След като всички сл.в. имат едно и също разпределение то очевидно можем да приемем, че те клонят към него $X_n \xrightarrow{d} X \in N(0,1)$.

От друга страна, ако $X_n > \varepsilon/2$ и $X < -\varepsilon/2$ ще следва $X_n - X > \varepsilon$, тогава

$$\left\{X_n > \frac{\varepsilon}{2}, X < -\frac{\varepsilon}{2}\right\} \subset \{X_n - X > \varepsilon\}$$

Следователно

$$\mathsf{P}(X_n - X > \varepsilon) \geq \mathsf{P}\left(X_n > \frac{\varepsilon}{2}\right) \mathsf{P}\left(X < -\frac{\varepsilon}{2}\right) = \left[1 - \Phi\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right] \Phi\left(-\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

$\Phi()$ е ф.р. на $N(0,1)$, за която знаем, че $\Phi(0) = 1/2$. Това означава, че няма как при $n \to \infty$ тази вероятност да клони към нула, защото за $\varepsilon \to 0$ получаваме

$$\mathsf{P}(X_n - X > \varepsilon) \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Редицата не е сходяща по вероятност.

# Неравенство на Чебишов

Под името неравенство на Чебишов в литературата са познати няколко неравенства. Ние ще приведем, това което в последствие ще използваме за доказване на закон за големите числа.

## Неравенство на Чебишов

Нека $X$ е произволна случайна величина и $\mathsf{E}X$ съществува, тогава за всяко $\varepsilon$ изпълнено:

$$\mathsf{P}(|X - \mathsf{E}X| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathsf{D}X}{\varepsilon^2}$$

# Неравенство на Чебишов

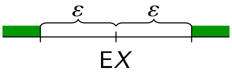
Под името неравенство на Чебишов в литературата са познати няколко неравенства. Ние ще приведем, това което в последствие ще използваме за доказване на закон за големите числа.

## Неравенство на Чебишов

Нека $X$ е произволна случайна величина и $\mathsf{E}X$ съществува, тогава за всяко $\varepsilon$ изпълнено:

$$\mathsf{P}(|X - \mathsf{E}X| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathsf{D}X}{\varepsilon^2}$$

Това неравенство добре описва и смисъла на понятието дисперсия. Вероятността сл.в. да е извън $\varepsilon$-околност на математическото очакване се оценява с дисперсията. Обърнете внимание, че няма изискване $\varepsilon$ да е пренебрежимо малко, то може да е произволно число.



# Неравенство на Чебишов

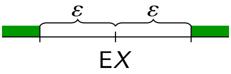
Под името неравенство на Чебишов в литературата са познати няколко неравенства. Ние ще приведем, това което в последствие ще използваме за доказване на закон за големите числа.

## Неравенство на Чебишов

Нека $X$ е произволна случайна величина и $\mathsf{E}X$ съществува, тогава за всяко $\varepsilon$ изпълнено:

$$\mathsf{P}(|X - \mathsf{E}X| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathsf{D}X}{\varepsilon^2}$$

Това неравенство добре описва и смисъла на понятието дисперсия. Вероятността сл.в. да е извън $\varepsilon$-околност на математическото очакване се оценява с дисперсията. Обърнете внимание, че няма изискване $\varepsilon$ да е пренебрежимо малко, то може да е произволно число.




**Док.** Неравенството е изпълнено за произволни сл.в. Ние ще го докажем поотделно за дискретни и непрекъснати сл.в.

# Неравенство на Чебишов

Нека $X$ е дискретна сл.в. За удобство ще означим $p_i = \mathrm{P}(X = x_i)$. Знаем, че $\mathrm{E}X$ е число и тогава $|X - \mathrm{E}X|$ също е дискретна сл.в. Нека $S$ е множеството от индекси на онези стойности $x_i$ на $X$, за който $|x_i - \mathrm{E}X| \geq \varepsilon$, т.е.

$$S = \{i : |x_i - \mathrm{E}X| \geq \varepsilon\}$$

# Неравенство на Чебишов

Нека $X$ е дискретна сл.в. За удобство ще означим $p_i = \mathrm{P}(X = x_i)$. Знаем, че $\mathrm{E}X$ е число и тогава $|X - \mathrm{E}X|$ също е дискретна сл.в. Нека $S$ е множеството от индекси на онези стойности $x_i$ на $X$, за който $|x_i - \mathrm{E}X| \geq \varepsilon$, т.е.

$$S = \{i : |x_i - \mathrm{E}X| \geq \varepsilon\}$$

В частност множеството $S$ може и да е празно. Вероятността, която се опитваме да оценим се получава чрез сумиране върху $S$.

$$\mathrm{P}(|X - \mathrm{E}X| \geq \varepsilon) = \sum_S p_i$$

# Неравенство на Чебишов

Нека $X$ е дискретна сл.в. За удобство ще означим $p_i = \mathrm{P}(X = x_i)$. Знаем, че $\mathrm{E}X$ е число и тогава $|X - \mathrm{E}X|$ също е дискретна сл.в. Нека $S$ е множеството от индекси на онези стойности $x_i$ на $X$, за който $|x_i - \mathrm{E}X| \geq \varepsilon$, т.е.

$$S = \{i : |x_i - \mathrm{E}X| \geq \varepsilon\}$$

В частност множеството $S$ може и да е празно. Вероятността, която се опитваме да оценим се получава чрез сумиране върху $S$.

$$\mathrm{P}(|X - \mathrm{E}X| \geq \varepsilon) = \sum_S p_i$$

За елементите от $S$ е изпълнено $1 \leq \frac{|x_i - \mathrm{E}X|}{\varepsilon}$ и следователно $1 \leq \frac{(x_i - \mathrm{E}X)^2}{\varepsilon^2}$. Ако в горната сума умножим събираемите с този множител, то сумата само може да нарасне. Ако разширим границите на сумиране то сумата също ще нарасне.

$$\mathrm{P}(|X - \mathrm{E}X| \geq \varepsilon) \leq \sum_S \frac{(x_i - \mathrm{E}X)^2}{\varepsilon^2}\, p_i \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(x_i - \mathrm{E}X)^2}{\varepsilon^2}\, p_i$$

# Неравенство на Чебишов

Нека $X$ е дискретна сл.в. За удобство ще означим $p_i = \mathrm{P}(X = x_i)$. Знаем, че $\mathrm{E}X$ е число и тогава $|X - \mathrm{E}X|$ също е дискретна сл.в. Нека $S$ е множеството от индекси на онези стойности $x_i$ на $X$, за който $|x_i - \mathrm{E}X| \geq \varepsilon$, т.е.

$$S = \{i : |x_i - \mathrm{E}X| \geq \varepsilon\}$$

В частност множеството $S$ може и да е празно. Вероятността, която се опитваме да оценим се получава чрез сумиране върху $S$.

$$\mathrm{P}(|X - \mathrm{E}X| \geq \varepsilon) = \sum_S p_i$$

За елементите от $S$ е изпълнено $1 \leq \frac{|x_i - \mathrm{E}X|}{\varepsilon}$ и следователно $1 \leq \frac{(x_i - \mathrm{E}X)^2}{\varepsilon^2}$. Ако в горната сума умножим събираемите с този множител, то сумата само може да нарасне. Ако разширим границите на сумиране то сумата също ще нарасне.

$$\mathrm{P}(|X - \mathrm{E}X| \geq \varepsilon) \leq \sum_S \frac{(x_i - \mathrm{E}X)^2}{\varepsilon^2}\, p_i \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(x_i - \mathrm{E}X)^2}{\varepsilon^2}\, p_i$$

За да завършим доказателството е достатъчно да използваме формулата за очакване на функция от сл.в.

$$\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - \mathrm{E}X)^2\, p_i = \mathrm{E}(X - \mathrm{E}X)^2 = \mathrm{D}(X)$$

# Неравенство на Чебишов

Нека сега $X$ е непрекъсната сл.в. с плътност $f_X(x)$. Следваме сходен подход - представяме вероятността като интеграл върху подходящо множество.

$$\mathsf{P}(|X - \mathsf{E}X| \geq \varepsilon) = \int_{|X - \mathsf{E}X| \geq \varepsilon} 1 \,.\, f_X(x)\, dx \leq$$

# Неравенство на Чебишов

Нека сега $X$ е непрекъсната сл.в. с плътност $f_X(x)$. Следваме сходен подход - представяме вероятността като интеграл върху подходящо множество.

$$P(|X - EX| \geq \varepsilon) = \int_{|X-EX|\geq\varepsilon} 1 \,.\, f_X(x)\, dx \leq$$

заменяме константата 1 в интеграла с $\frac{(x_i - EX)^2}{\varepsilon^2} \geq 1$ и разширяваме границите на интегриране

$$\leq \int_{|X-EX|\geq\varepsilon} \frac{(x_i - EX)^2}{\varepsilon^2} f_X(x)\, dx \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - EX)^2 f_X(x)\, dx = \frac{DX}{\varepsilon^2} \qquad \square$$

# Неравенство на Чебишов

Нека сега $X$ е непрекъсната сл.в. с плътност $f_X(x)$. Следваме сходен подход - представяме вероятността като интеграл върху подходящо множество.

$$\mathsf{P}(|X - \mathsf{E}X| \geq \varepsilon) = \int_{|X - \mathsf{E}X| \geq \varepsilon} 1 \,.\, f_X(x)\, dx \leq$$

заменяме константата 1 в интеграла с $\frac{(x_i - \mathsf{E}X)^2}{\varepsilon^2} \geq 1$ и разширяваме границите на интегриране

$$\leq \int_{|X - \mathsf{E}X| \geq \varepsilon} \frac{(x_i - \mathsf{E}X)^2}{\varepsilon^2} f_X(x)\, dx \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - \mathsf{E}X)^2 f_X(x)\, dx = \frac{\mathsf{D}X}{\varepsilon^2} \qquad \square$$

Неравенството на Чебишов дава само горна граница за вероятността. То не гарантира, че тя ще бъде достигната. Ако дисперсията е голяма, е възможно получената горна граница да бъде по-голяма от едно, тогава неравенството просто не дава никаква информация за вероятността. В частност, възможно е дисперсията да не съществува, т.е. да бъде безкрайна и неравенството ще е тривиално.

Неравенството на Чебишов е полезно, тогава когато получената вероятност е малка, респективно за големи стойности на $\varepsilon$.

## Пример

В лекция IV разгледахме пример с играч на рулетка, който залага 10лв. При това той може да заложи на червено и тогава евентуалната му печалба е 10лв., или да заложи на едно число при печалба 350лв. С $X_1$ съответно $Y_1$ ще означим печалбите в двата случая. Пресметнахме $\mathsf{E}X_1 = \mathsf{E}Y_1 = -0.27$, а също $\mathsf{D}X_1 \approx 99.9$ и $\mathsf{D}Y_1 \approx 3408$.

Сега ще използваме неравенството на Чебишов за да оценим вероятността след 100 изиграни игри играчът да е спечелил поне 700лв.

# Неравенство на Чебишов

## Пример

В лекция IV разгледахме пример с играч на рулетка, който залага 10лв. При това той може да заложи на червено и тогава евентуалната му печалба е 10лв., или да заложи на едно число при печалба 350лв. С $X_1$ съответно $Y_1$ ще означим печалбите в двата случая. Пресметнахме $\mathrm{E}X_1 = \mathrm{E}Y_1 = -0.27$, а също $\mathrm{D}X_1 \approx 99.9$ и $\mathrm{D}Y_1 \approx 3408$.

Сега ще използваме неравенството на Чебишов за да оценим вероятността след 100 изиграни игри играчът да е спечелил поне 700лв.

Нека $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_{100}$ е печалбата от 100 игри. Печалбите в отделните игри са независими сл.в. Тогава $\mathrm{E}X = \mathrm{E}X_1 + \mathrm{E}X_2 + \ldots =$ -27лв и съответно $\mathrm{D}X = \mathrm{D}X_1 + \mathrm{D}X_2 + \ldots = 9990$. Ще изберем $\varepsilon = 727$

$$\mathrm{P}(X \geq 700) \leq \mathrm{P}(|X + 27| \geq 727) \leq \frac{9900}{727^2} \approx 0.0189$$

Аналогично за $Y = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_{100}$

# Неравенство на Чебишов

## Пример

В лекция IV разгледахме пример с играч на рулетка, който залага 10лв. При това той може да заложи на червено и тогава евентуалната му печалба е 10лв., или да заложи на едно число при печалба 350лв. С $X_1$ съответно $Y_1$ ще означим печалбите в двата случая. Пресметнахме $\mathrm{E}X_1 = \mathrm{E}Y_1 = -0.27$, а също $\mathrm{D}X_1 \approx 99.9$ и $\mathrm{D}Y_1 \approx 3408$.

Сега ще използваме неравенството на Чебишов за да оценим вероятността след 100 изиграни игри играчът да е спечелил поне 700лв.

Нека $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_{100}$ е печалбата от 100 игри. Печалбите в отделните игри са независими сл.в. Тогава $\mathrm{E}X = \mathrm{E}X_1 + \mathrm{E}X_2 + \ldots =$ -27лв и съответно $\mathrm{D}X = \mathrm{D}X_1 + \mathrm{D}X_2 + \ldots = 9990$. Ще изберем $\varepsilon = 727$

$$\mathrm{P}(X \geq 700) \leq \mathrm{P}(|X + 27| \geq 727) \leq \frac{9900}{727^2} \approx 0.0189$$

Аналогично за $Y = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_{100}$

$$\mathrm{P}(Y \geq 700) \leq \mathrm{P}(|Y + 27| \geq 727) \leq \frac{340800}{727^2} \approx 0.64$$

Както можеше да се очаква за сл.в, която е с по-малка дисперсия - в случая $X$, вероятността да е далеч от очакването си е по-малка, едва 2%.

Все пак това са само оценки отгоре, ако искаме да пресметнем вероятността на събитията, разполагаме и с по-точни методи.

# Закон за големите числа

Интуитивно е ясно, че ако разполагаме с няколко наблюдениа на сл.в, средното аритметично от тях ще даде по точна информация за случайната величина, отколкото едно единствено измерване. Формалното обяснение на този факт се дава от законите за големи числа.

# Закон за големите числа

Интуитивно е ясно, че ако разполагаме с няколко наблюдениа на сл.в, средното аритметично от тях ще даде по точна информация за случайната величина, отколкото едно единствено измерване. Формалното обяснение на този факт се дава от законите за големи числа.

## Закон за големите числа - ЗГЧ

Нека $X_1, X_2, \dots X_n, \dots$ е редица от случайни величини, казваме че тя изпълнява, или че за нея е в сила "закон за големите числа" (ЗГЧ), ако

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mathsf{E}X_i) \xrightarrow{P} 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

# Закон за големите числа

Интуитивно е ясно, че ако разполагаме с няколко наблюдения на сл.в, средното аритметично от тях ще даде по точна информация за случайната величина, отколкото едно единствено измерване. Формалното обяснение на този факт се дава от законите за големи числа.

## Закон за големите числа - ЗГЧ

Нека $X_1, X_2, \dots X_n, \dots$ е редица от случайни величини, казваме че тя изпълнява, или че за нея е в сила "закон за големите числа" (ЗГЧ), ако

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mathsf{E}X_i) \xrightarrow{P} 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

Ако сл.в. са еднакво разпределени, то математическото им очакване съвпада и ЗГЧ може да бъде записан в следния еквивалентен вид.

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \xrightarrow{P} \mathsf{E}X_1 \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

Този запис дава и смисъла на понятието "математическо очакване" - то е усреднения резултат от измерването на сл.в. при извършване на безкраен брой опити.

# Закон за големите числа

Разбира се, законът за големите числа не е изпълнен за всяка редица от сл.в. Ще докажем няколко теореми, които задават условия над редицата, за да е в сила ЗГЧ.

# Закон за големите числа

Разбира се, законът за големите числа не е изпълнен за всяка редица от сл.в. Ще докажем няколко теореми, които задават условия над редицата, за да е в сила ЗГЧ.

## Теорема на Марков

Ако за редицата $X_1, X_2, \dots X_n, \dots$ е изпълнено

$$\frac{1}{n^2} \mathrm{D} \left( \sum_{i=1}^{n} X_i \right) \longrightarrow 0 \qquad \text{при} \qquad n \longrightarrow \infty$$

то е в сила ЗГЧ.

# Закон за големите числа

Разбира се, законът за големите числа не е изпълнен за всяка редица от сл.в. Ще докажем няколко теореми, които задават условия над редицата, за да е в сила ЗГЧ.

## Теорема на Марков

Ако за редицата $X_1, X_2, \dots X_n, \dots$ е изпълнено

$$\frac{1}{n^2}\mathrm{D}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

то е в сила ЗГЧ.

**Док.**Съгласно дефиницията за сходимост по вероятност (стр.2), за да е изпълнен ЗГЧ следната вероятност трябва да клони към нула

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mathrm{E}X_i)\right| > \varepsilon\right) =$$

Разбира се, законът за големите числа не е изпълнен за всяка редица от сл.в. Ще докажем няколко теореми, които задават условия над редицата, за да е в сила ЗГЧ.

## Теорема на Марков

Ако за редицата $X_1, X_2, \ldots X_n, \ldots$ е изпълнено

$$\frac{1}{n^2} \mathrm{D}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

то е в сила ЗГЧ.

**Док.**Съгласно дефиницията за сходимост по вероятност (стр.2), за да е изпълнен ЗГЧ следната вероятност трябва да клони към нула

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mathrm{E}X_i)\right| > \varepsilon\right) =$$

Ще преобразуваме този израз и ще приложим неравенството на Чебишов (стр.8) към сл.в. $\sum_{i=1}^{n} X_i$

$$= \mathrm{P}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} X_i - \mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\right| > n\,\varepsilon\right) \le \frac{\mathrm{D}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)}{n^2\varepsilon^2} \to 0 \qquad \square$$

# Закон за големите числа

Проверката на условието в теоремата на Марков често е трудно технически, затова тя се използва по-скоро за теоретични цели. По удобни за работа са следващите две теореми, който ще докажем като непосредствени следствия от теоремата на Марков.

# Закон за големите числа

Проверката на условието в теоремата на Марков често е трудно технически, затова тя се използва по-скоро за теоретични цели. По удобни за работа са следващите две теореми, който ще докажем като непосредствени следствия от теоремата на Марков.

## Теорема на Чебишов

Ако сл.в. $X_1, X_2, \ldots X_n, \ldots$ са независими и дисперсиите им са ограничени, т.е. $\mathrm{D}X_i \leq C$, то е в сила ЗГЧ.

# Закон за големите числа

Проверката на условието в теоремата на Марков често е трудно технически, затова тя се използва по-скоро за теоретични цели. По удобни за работа са следващите две теореми, който ще докажем като непосредствени следствия от теоремата на Марков.

## Теорема на Чебишов

Ако сл.в. $X_1, X_2, \dots X_n, \dots$ са независими и дисперсиите им са ограничени, т.е. $\mathrm{D}X_i \leq C$, то е в сила ЗГЧ.

**Док.** Ще покажем, че е изпълнено усовието в теоремата на Марков. От независимотта на сл.в. следва

$$\frac{1}{n^2}\mathrm{D}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{D}(X_i) \leq \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} C = \frac{C}{n} \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \longrightarrow \infty \qquad \square$$

# Закон за големите числа

Проверката на условието в теоремата на Марков често е трудно технически, затова тя се използва по-скоро за теоретични цели. По удобни за работа са следващите две теореми, който ще докажем като непосредствени следствия от теоремата на Марков.

## Теорема на Чебишов

Ако сл.в. $X_1, X_2, \ldots X_n, \ldots$ са независими и дисперсиите им са ограничени, т.е. $\mathrm{D}X_i \leq C$, то е в сила ЗГЧ.

**Док.** Ще покажем, че е изпълнено усовието в теоремата на Марков. От независимотта на сл.в. следва

$$\frac{1}{n^2}\mathrm{D}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{D}(X_i) \leq \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} C = \frac{C}{n} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty \qquad \square$$

## Теорема

Ако сл.в. $X_1, X_2, \ldots X_n, \ldots$ са независими, еднакво разпределени и дисперсията им съществува, т.е. е крайна $\mathrm{D}X_1 = \sigma^2$, то е в сила ЗГЧ.

# Закон за големите числа

Проверката на условието в теоремата на Марков често е трудно технически, затова тя се използва по-скоро за теоретични цели. По удобни за работа са следващите две теореми, който ще докажем като непосредствени следствия от теоремата на Марков.

## Теорема на Чебишов

Ако сл.в. $X_1, X_2, \ldots X_n, \ldots$ са независими и дисперсиите им са ограничени, т.е. $\mathrm{D}X_i \leq C$, то е в сила ЗГЧ.

**Док.** Ще покажем, че е изпълнено усовието в теоремата на Марков. От независимотта на сл.в. следва

$$\frac{1}{n^2}\mathrm{D}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{D}(X_i) \leq \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} C = \frac{C}{n} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty \qquad \square$$

## Теорема

Ако сл.в. $X_1, X_2, \ldots X_n, \ldots$ са независими, еднакво разпределени и дисперсията им съществува, т.е. е крайна $\mathrm{D}X_1 = \sigma^2$, то е в сила ЗГЧ.

**Док.**

$$\frac{1}{n^2}\mathrm{D}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{D}(X_i) = \frac{n\sigma^2}{n^2} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty \qquad \square$$

# Закон за големите числа

Най-силния закон за големите числа, т.е. този, който налага най-малко ограничения върху сл.в., се дава от теоремата на Хинчин. За съжаление доказателството и изисква по-задълбочени математически познания отколкото предполагаме в тези лекции. По-точно трябва да се познават характеристичните функции, т.е. трансформациите на Фурие или интегралите в комплексната равнина. Затова само ще формулираме тази теорема.

## Теорема Хинчин

Ако сл.в. $X_1, X_2, \ldots X_n, \ldots$ са независими, еднакво разпределени и с крайно математическо очакване, то е в сила ЗГЧ.

# Закон за големите числа

Най-силния закон за големите числа, т.е. този, който налага най-малко ограничения върху сл.в., се дава от теоремата на Хинчин. За съжаление доказателството и изисква по-задълбочени математически познания отколкото предполагаме в тези лекции. По-точно трябва да се познават характеристичните функции, т.е. трансформациите на Фурие или интегралите в комплексната равнина. Затова само ще формулираме тази теорема.

## Теорема Хинчин

Ако сл.в. $X_1, X_2, \ldots X_n, \ldots$ са независими, еднакво разпределени и с крайно математическо очакване, то е в сила ЗГЧ.

Подобни условия се налагат над статистическите извадки. Най-често се извършват множество независими наблюдения над една и съща случайна величина. т.е предполага се че имаме независими и еднакво разпределени копия на сл.в. Затова, в общия случай за статистическите данни важи законът за големите числа.

# Закон за големите числа

Ще завършим темата с теоремата на Бернули. Тя е формулирана и доказана преди законите за големи числа, но се явява техен частен случай. Извършваме независими опити с вероятност за успех на всеки опит $p$ и $X_n$ е резултата от $n$-тия опит, т.е. $X_n \in Bi(1, p)$. Ясно е, че $\mathrm{E}X_n = p$ и $\mathrm{D}X_n = pq$, тогава съгласно предходните теореми редицата ще изпълнява ЗГЧ.

## Теорема на Бернули

Ако $X_n \in Bi(1, p)$ са независими сл.в., то при $n \longrightarrow \infty$

# Закон за големите числа

Ще завършим темата с теоремата на Бернули. Тя е формулирана и доказана преди законите за големи числа, но се явява техен частен случай. Извършваме независими опити с вероятност за успех на всеки опит $p$ и $X_n$ е резултата от $n$-тия опит, т.е. $X_n \in Bi(1, p)$. Ясно е, че $\mathrm{E}X_n = p$ и $\mathrm{D}X_n = pq$, тогава съгласно предходните теореми редицата ще изпълнява ЗГЧ.

## Теорема на Бернули

Ако $X_n \in Bi(1, p)$ са независими сл.в., то при $n \longrightarrow \infty$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{P} p$$

# Закон за големите числа

Ще завършим темата с теоремата на Бернули. Тя е формулирана и доказана преди законите за големи числа, но се явява техен частен случай. Извършваме независими опити с вероятност за успех на всеки опит $p$ и $X_n$ е резултата от $n$-тия опит, т.е. $X_n \in Bi(1, p)$. Ясно е, че $\mathrm{E}X_n = p$ и $\mathrm{D}X_n = pq$, тогава съгласно предходните теореми редицата ще изпълнява ЗГЧ.

## Теорема на Бернули

Ако $X_n \in Bi(1, p)$ са независими сл.в., то при $n \longrightarrow \infty$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{P} p$$

$\sum_{i=1}^{n} X_i$ всъщност е броя на успехите при провеждането на $n$ опита, така тази теорема дава смисъла на понятието "вероятност", т.е. вероятността за сбъдване на събитие е числото, към което клони честотата на успехите.

# Закон за големите числа

Ще завършим темата с теоремата на Бернули. Тя е формулирана и доказана преди законите за големи числа, но се явява техен частен случай. Извършваме независими опити с вероятност за успех на всеки опит $p$ и $X_n$ е резултата от $n$-тия опит, т.е. $X_n \in Bi(1, p)$. Ясно е, че $\mathrm{E}X_n = p$ и $\mathrm{D}X_n = pq$, тогава съгласно предходните теореми редицата ще изпълнява ЗГЧ.

## Теорема на Бернули

Ако $X_n \in Bi(1, p)$ са независими сл.в., то при $n \to \infty$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{P} p$$

$\sum_{i=1}^{n} X_i$ всъщност е броя на успехите при провеждането на $n$ опита, така тази теорема дава смисъла на понятието "вероятност", т.е. вероятността за сбъдване на събитие е числото, към което клони честотата на успехите.

Теоремата на Бернули означава, и че всяко събитие с ненулева вероятност има надежда да се сбъдне при достатъчен брой опити, т.е. правете опити...

# Централна гранична теорема

Централна гранична теорема (ЦГТ) е изключително важен резултат със следствия далеч извън рамките на теория на вероятностите. ЦГТ е дотолкова фундаментална, че можем спокойно да я наречем природен закон, такъв като гравитацията например.

# Централна гранична теорема

Централна гранична теорема (ЦГТ) е изключително важен резултат със следствия далеч извън рамките на теория на вероятностите. ЦГТ е дотолкова фундаментална, че можем спокойно да я наречем природен закон, такъв като гравитацията например.

Съществуват различни доказателства на централна гранична теорема, но при всички тях се използват помощна функция от аналитичния апарат на теория на вероятностите.

Най често това е характеристична функция, която се дефинира с равенството

$$\varphi_X(t) = \mathsf{E} e^{itX} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itX} f_X(x) dx$$

# Централна гранична теорема

Централна гранична теорема (ЦГТ) е изключително важен резултат със следствия далеч извън рамките на теория на вероятностите. ЦГТ е дотолкова фундаментална, че можем спокойно да я наречем природен закон, такъв като гравитацията например.

Съществуват различни доказателства на централна гранична теорема, но при всички тях се използват помощна функция от аналитичния апарат на теория на вероятностите.

Най често това е характеристична функция, която се дефинира с равенството

$$\varphi_X(t) = \mathrm{E}e^{itX} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itX} f_X(x)dx$$

Всъшност, това е познатата трансформация на Фурие. Тя винаги съществува, доколкото $\left|e^{itX}\right| = 1$. Предвид известната формула на Ойлер $e^{it} = \sin t + i\cos t$, характеристичните функции представят случайните величини в базис синусоиди. За намиране на характеристичните функции обаче се налага пресмятането на интеграли в комплексната област, което е извън рамките на тези лекции. Затова ние, само ще формулираме ЦГТ без да я доказваме.

# Централна гранична теорема

Нека $X_1, X_2, \dots X_n, \dots$ е редица от случайни величини. Казваме, че централна гранична теорема (ЦГТ) е в сила, ако

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - \mathsf{E}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)}{\sqrt{\mathsf{D}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0,1) \qquad (\star)$$

Очакването и дисперсията тук са константи, т.е. просто нормиращ множител. Основният извод е, че сумата от какви да е сл.в. клони към нормално разпределение. Разбира се това не е изпълнено за съвсем произволни сл.в. Съществуват няколко теореми, всяка от тях носи името ЦГТ, който налагат условия върху редицата, така че горната сходимост да е в сила.

ЦГТ обяснява и защо нормалното разпределение е толкова често срещано, всяка сл.в. която може да се представи като сума, при някой най-общи условия се оказва нормалното разпределена.

# Централна гранична теорема

Нека $X_1, X_2, \ldots X_n, \ldots$ е редица от случайни величини. Казваме, че централна гранична теорема (ЦГТ) е в сила, ако

$$\frac{\sum_{k=1}^n X_k - \mathsf{E}\left(\sum_{k=1}^n X_k\right)}{\sqrt{\mathsf{D}\left(\sum_{k=1}^n X_k\right)}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0,1) \qquad (\star)$$

Очакването и дисперсията тук са константи, т.е. просто нормиращ множител. Основният извод е, че сумата от какви да е сл.в. клони към нормално разпределение. Разбира се това не е изпълнено за съвсем произволни сл.в. Съществуват няколко теореми, всяка от тях носи името ЦГТ, който налагат условия върху редицата, така че горната сходимост да е в сила.

ЦГТ обяснява и защо нормалното разпределение е толкова често срещано, всяка сл.в. която може да се представи като сума, при някой най-общи условия се оказва нормалното разпределена.

## Централна гранична теорема

Нека $X_1, X_2, \ldots X_n, \ldots$ са независими, еднакво разпределени сл.в. и нека $\mathsf{E}X_k = \mu$, $\mathsf{D}X_k = \sigma^2 < \infty$, т.е. очакването и дисперсията съществуват, тогава

$$\frac{\sum_{k=1}^n X_k - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0,1)$$

# Следствия от централна гранична теорема

Много често в статистиката се извършват независими наблюдения над една случайна величина. Например, изследват се пациенти приели едно и също лекарство, или се измерват дефектите на детайли произведени от една машина и.т.н. В този случай разполагаме с наблюдения $X_1, \ldots, X_n$, които са независими и еднакво разпределени и явно централна гранична теорема ще бъде валидна, стига наблюденията да са достатъчно на брой. Стандартното означение за средно аритметично е $\overline{X_n} = \frac{\sum X_k}{n}$, чрез него ЦГТ в статистически задачи обикновено обикновено се записва в следния вид

$$\frac{\overline{X_n} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \xrightarrow[n \to \infty]{d} N(0, 1)$$

# Следствия от централна гранична теорема

Много често в статистиката се извършват независими наблюдения над една случайна величина. Например, изследват се пациенти приели едно и също лекарство, или се измерват дефектите на детайли произведени от една машина и.т.н. В този случай разполагаме с наблюдения $X_1, \dots, X_n$, които са независими и еднакво разпределени и явно централна гранична теорема ще бъде валидна, стига наблюденията да са достатъчно на брой. Стандартното означение за средно аритметично е $\overline{X_n} = \frac{\sum X_k}{n}$, чрез него ЦГТ в статистически задачи обикновено обикновено се записва в следния вид

$$\frac{\overline{X_n} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0,1)$$

Централна гранична теорема твърди, че има сходимост към нормално разпределение, но не казва нищо за скоростта на тази сходимост. Съществуват отделни изследвания по темата - теорема на Бер например. В статистически изследвания често се приема че 30 наблюдения са достатъчни за да се разглежда $\overline{X_n}$ като нормално разпределена сл.в. Този извод обаче е твърде произволен, по-скоро трябва да се изследват конкретните данни.

# Следствия от централна гранична теорема

Първите доказателство на централна гранична теорема са свързани с нейни частни случаи в схема на Бернули. Още в 1733г. Моавър използва нормално разпределение за да опише броя на успехите при хвърляне на монета, този резултат по-късно е доразвит от Лаплас.

Нека разгледаме схема на Бернули, т.е. последователни независими опити с вероятност за успех при всеки от тях $p$. От една страна броят на успехите $X$ при $n$ опита е биномно разпределена сл.в. $X \in Bi(n, p)$.

# Следствия от централна гранична теорема

Първите доказателство на централна гранична теорема са свързани с нейни частни случаи в схема на Бернули. Още в 1733г. Моавър използва нормално разпределение за да опише броя на успехите при хвърляне на монета, този резултат по-късно е доразвит от Лаплас.

Нека разгледаме схема на Бернули, т.е. последователни независими опити с вероятност за успех при всеки от тях $p$. От една страна броят на успехите $X$ при $n$ опита е биномно разпределена сл.в. $X \in Bi(n, p)$.

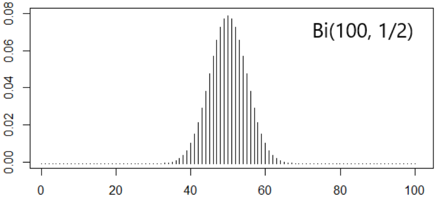
От друга страна можем да представим $X$ като сума от отделните опити, т.е. $X = X_1 + \ldots + X_n$, където $X_k$ е резултата на $k$-тия опит. И тогава, съгласно ЦГТ, $X$ трябва да клони към нормално разпределение. Наистина не е трудно да се види, че условието на ЦГТ е спазено - $X_k$ са независими, еднакво разпределени с очакване $\mathrm{E}X_k = p$ и дисперсия $\mathrm{D}X_k = pq$. Следователно, би трябвало да очакваме за $n \to \infty$ биномното разпределение да клони към нормално.

# Следствия от централна гранична теорема

Първите доказателство на централна гранична теорема са свързани с нейни частни случаи в схема на Бернули. Още в 1733г. Моавър използва нормално разпределение за да опише броя на успехите при хвърляне на монета, този резултат по-късно е доразвит от Лаплас.

Нека разгледаме схема на Бернули, т.е. последователни независими опити с вероятност за успех при всеки от тях $p$. От една страна броят на успехите $X$ при $n$ опита е биномно разпределена сл.в. $X \in Bi(n, p)$.

От друга страна можем да представим $X$ като сума от отделните опити, т.е. $X = X_1 + \ldots + X_n$, където $X_k$ е резултата на $k$-тия опит. И тогава, съгласно ЦГТ, $X$ трябва да клони към нормално разпределение. Наистина не е трудно да се види, че условието на ЦГТ е спазено - $X_k$ са независими, еднакво разпределени с очакване $\mathrm{E}X_k = p$ и дисперсия $\mathrm{D}X_k = pq$. Следователно, би трябвало да очакваме за $n \to \infty$ биномното разпределение да клони към нормално.




На графиката са биномните вероятности $\mathrm{P}(X = k)$, с максимум при $k = 50$. Контурът наистина напомня на нормално разпределение.

# Следствия от централна гранична теорема

За сходимостта на биномно разпределение към нормално се отнася резултатът на Моавър - Лаплас.

## Интегрална теорема на Моавър - Лаплас

Нека $X \in Bi(n, p)$ и $\sqrt{npq} \to \infty$ тогава за $a < b$

$$\mathrm{P}\left(a \leq \frac{X - np}{\sqrt{npq}} \leq b\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

# Следствия от централна гранична теорема

За сходимостта на биномно разпределение към нормално се отнася резултатът на Моавър - Лаплас.

## Интегрална теорема на Моавър - Лаплас

Нека $X \in Bi(n, p)$ и $\sqrt{npq} \to \infty$ тогава за $a < b$

$$\mathrm{P}\left(a \leq \frac{X - np}{\sqrt{npq}} \leq b\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

Това е оригиналната формулировка на теоремата. Вероятността за попадане на сл.в. в интервал $[a, b]$ клони към интеграл от нормална плътност върху същия интервал.

Класическото доказателство на теоремата на Бернули, която формулирахме в края на IX лекция, се извършва с помощта на интегралната теорема на Моавър - Лаплас. Ще предоставим на уважаемия читател възможността да се сети как точно се извършва това.

# Следствия от централна гранична теорема

За сходимостта на биномно разпределение към нормално се отнася резултатът на Моавър - Лаплас.

## Интегрална теорема на Моавър - Лаплас

Нека $X \in Bi(n, p)$ и $\sqrt{npq} \to \infty$ тогава за $a < b$

$$\mathrm{P}\left(a \leq \frac{X - np}{\sqrt{npq}} \leq b\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Това е оригиналната формулировка на теоремата. Вероятността за попадане на сл.в. в интервал $[a, b]$ клони към интеграл от нормална плътност върху същия интервал.

Класическото доказателство на теоремата на Бернули, която формулирахме в края на IX лекция, се извършва с помощта на интегралната теорема на Моавър - Лаплас. Ще предоставим на уважаемия читател възможността да се сети как точно се извършва това.

## Пример

Собственик на казино отчита , че средно 10 000 пъти на ден се залага жетон от 10лв. на черно или червено на масите в казиното. Той се пита каква е вероятността да спечели по-малко от 2000 лева от този залог.

## Пример

В лекция IV намерихме разпределението, очакването и дисперсията на печалбата на играча при този залог. Съвсем аналогично се пресмята печалбата на казиното. Нека $X$ е печалбата за собственика от една игра.

| $X$ | $-10$ | $10$ |
|---|---|---|
| P | 18/37 | 19/37 |

$$\mathrm{E}X = \frac{10}{37}, \qquad \mathrm{E}X^2 = 100, \qquad \mathrm{D}X = \frac{136800}{1369}$$

# Следствия от централна гранична теорема

## Пример

В лекция IV намерихме разпределението, очакването и дисперсията на печалбата на играча при този залог. Съвсем аналогично се пресмята печалбата на казиното. Нека $X$ е печалбата за собственика от една игра.

| $X$ | $-10$ | $10$ |
|---|---|---|
| P | $18/37$ | $19/37$ |

$$\mathrm{E}X = \frac{10}{37}, \qquad \mathrm{E}X^2 = 100, \qquad \mathrm{D}X = \frac{136800}{1369}$$

Нека $Y$ е печалбата от 10 000 игри, т.е. $Y$ е сумата от 10 000 сл.в. от типа на $X$. Тогава съвсем спокойно можем да приемем, че $Y$ е нормално разпределена, $\mathrm{E}Y = 10\,000\mathrm{E}X \approx 2702$, $\mathrm{D}Y = 10\,000\mathrm{D}X$ и $\sigma = \sqrt{\mathrm{D}Y} \approx 999$

За намиране на търсената вероятност прилагаме ЦГТ.

# Следствия от централна гранична теорема

## Пример

В лекция IV намерихме разпределението, очакването и дисперсията на печалбата на играча при този залог. Съвсем аналогично се пресмята печалбата на казиното. Нека $X$ е печалбата за собственика от една игра.

| $X$ | $-10$ | $10$ |
|---|---|---|
| P | 18/37 | 19/37 |

$$\mathrm{E}X = \frac{10}{37}, \qquad \mathrm{E}X^2 = 100, \qquad \mathrm{D}X = \frac{136800}{1369}$$

Нека $Y$ е печалбата от 10 000 игри, т.е. $Y$ е сумата от 10 000 сл.в. от типа на $X$. Тогава съвсем спокойно можем да приемем, че $Y$ е нормално разпределена, $\mathrm{E}Y = 10\,000\mathrm{E}X \approx 2702$, $\mathrm{D}Y = 10\,000\mathrm{D}X$ и $\sigma = \sqrt{\mathrm{D}Y} \approx 999$

За намиране на търсената вероятност прилагаме ЦГТ.

$$\mathrm{P}(Y < 2000) = \mathrm{P}\left(\frac{Y - 2702}{999} < \frac{2000 - 2702}{999}\right) = \mathrm{P}(Z < -0.70)$$

И от таблицата за нормално разпределение за $Z \in N(0,1)$ отчитаме

$$\mathrm{P}(Z < -0.70) = \Phi(-0.7) = 1 - \Phi(0.7) = 1 - 0.7580 = 0.242$$

Приблизително в една четвърт от дните печалбата на собственика ще е под 2000лв.

# Следствия от централна гранична теорема

## Пример

В лекция IV намерихме разпределението, очакването и дисперсията на печалбата на играча при този залог. Съвсем аналогично се пресмята печалбата на казиното. Нека $X$ е печалбата за собственика от една игра.

| $X$ | $-10$ | $10$ |
|---|---|---|
| P | $18/37$ | $19/37$ |

$$\mathrm{E}X = \frac{10}{37}, \qquad \mathrm{E}X^2 = 100, \qquad \mathrm{D}X = \frac{136800}{1369}$$

Нека $Y$ е печалбата от 10 000 игри, т.е. $Y$ е сумата от 10 000 сл.в. от типа на $X$. Тогава съвсем спокойно можем да приемем, че $Y$ е нормално разпределена, $\mathrm{E}Y = 10\,000\mathrm{E}X \approx 2702$, $\mathrm{D}Y = 10\,000\mathrm{D}X$ и $\sigma = \sqrt{\mathrm{D}Y} \approx 999$

За намиране на търсената вероятност прилагаме ЦГТ.

$$\mathrm{P}(Y < 2000) = \mathrm{P}\left(\frac{Y - 2702}{999} < \frac{2000 - 2702}{999}\right) = \mathrm{P}(Z < -0.70)$$

И от таблицата за нормално разпределение за $Z \in N(0,1)$ отчитаме

$$\mathrm{P}(Z < -0.70) = \Phi(-0.7) = 1 - \Phi(0.7) = 1 - 0.7580 = 0.242$$

Приблизително в една четвърт от дните печалбата на собственика ще е под 2000лв.