Задача. 2.29. Нека G е група и $Z(G) = \{a \in G \mid ag = ga \ \forall g \in G\}$ (център на G). Да се докаже, че:

а) $Z(G)$ е абелева подгрупа на G и $Z(G) = G$ точно когато G е абелева група;

б) $Z(G)$, както и всяка подгрупа на $Z(G)$, е нормална подгрупа на G.

Решение.

а) $1 \in Z(G) \Rightarrow \emptyset \neq Z(G) \subseteq G$. Тогава $\forall a, b \in Z(G)$ и $\forall g \in G$:

1) $abg = agb = gab \Rightarrow ab \in Z(G)$;
2) $a^{-1}g = (g^{-1}a)^{-1} = (ag^{-1})^{-1} = ga^{-1} \Rightarrow a^{-1} \in Z(G)$;
3) $ab = ba$.

Следователно $Z(G)$ е абелева подгрупа на G, а фактът, че $Z(G) = G \Leftrightarrow G$ е абелева група е очевиден.

б) Нека $H \leq Z(G)$ и $a \in H$. Тогава $\forall g \in G \Rightarrow ag = ga \Rightarrow g^{-1}ag = a \in H \Rightarrow H \trianglelefteq G$.

■

Задача. 2.30. Да се намери центърът на групата:
а) $\mathbb{Q}_8$; б) D_4; в) D_n; г) S_n; д) A_n; е) $GL_n(F)$, $F = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$; ж) $SL_n(F)$, $F = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$; з) $GO_2(\mathbb{R})$; и) $SO_2(\mathbb{R})$.

Решение.

а) $\mathbb{Q}_8$ - от познатите релации в $\mathbb{Q}_8$, директно следва, че $Z(\mathbb{Q}_8) = \langle -1 \rangle \cong \mathbb{C}_2$;

б) D_4 - достатъчно е да се намерят всички елементи, които комутират едновременно с пораждащите A и B. Знаем, че $A^kB = BA^{-k}$, за $k = 0, 1, 2, 3$. Тогава $A^kB = BA^{-k} = BA^{4-k} = BA^k \Leftrightarrow k = 0, 2$. От друга страна, тъй като $A^2 \in \langle A \rangle$, то $AA^2 = A^2A$. Окончателно $Z(D_4) = \langle A^2 \rangle \cong \mathbb{C}_2$;

в) D_n - ще разгледаме два случая, в зависимост от четността на n. Отново както и в б) ще търсим елементите, които едновременно комутират с A и B.

1) Нека $n = 2m + 1$. Изпълнено е $A^kB = BA^{-k} = BA^{n-k} \neq BA^k$, $\forall k = 1, \dots, n-1$, така $Z(D_{2m+1}) = \{E\}$;
2) Нека $n = 2m$. Изпълнено е $A^kB = BA^{-k} = BA^{n-k} = BA^k \Leftrightarrow k = 0, m$ и очевидно $AA^m = A^mA$. Така получихме, че $Z(D_{2m}) = \langle A^m \rangle \cong \mathbb{C}_2$;

г) S_n - нека $\sigma, \rho \in S_n$ и $\sigma = (i_1 \dots i_k) \dots (j_1 \dots j_s)$. Изпълнено е:

$$\rho\sigma = \sigma\rho \Leftrightarrow \rho\sigma\rho^{-1} = \sigma \Leftrightarrow (\rho(i_1) \dots \rho(i_k)) \dots (\rho(j_1) \dots \rho(j_s)) =$$
$$= (i_1 \dots i_k) \dots (j_1 \dots j_s) \Leftrightarrow \rho = (1) \ (\rho \text{ запазва на място всяко } i \in \Omega_n).$$

Така $Z(S_n) = \{(1)\}$;

д) A_n - аналогично на предния пример за групата S_n. Тук може да се използва и факта, че A_n се поражда от всички тройни цикли и значи е достатъчно да се направи горната проверка за произволен троен цикъл. Отново получаваме $Z(A_n) = \{(1)\}$;[1]

е) $GL_n(F)$ е мултипликативната група на множеството $M_n(F)$[2], а от Линейната алгебра знаем, че една матрица $C \in M_n(F)$ комутира с всички матрици $A \in M_n(F)$ точно когато C е скаларна матрица, т. е. $C = \lambda E$, $\lambda \in F$. В нашия случай $\lambda \neq 0$. Окончателно $Z(GL_n(F)) = \{C = \lambda E \mid \lambda \in F^*\}$;

ж) $SL_n(F)$ - аналогично на предходната подточка, скаларните матрици с детерминанта 1 образуват центъра на $SL_n(F)$. В зависимост от четността на n имаме следните 2 случая:

1) $n = 2m+1 \Rightarrow Z(SL_{2m+1}(F)) = \{E\}$;
2) $n = 2m \Rightarrow Z(SL_{2m}(F)) = \{\pm E\} \cong \mathbb{C}_2$;

$$\left.\begin{array}{l}\text{з) } GO_2(\mathbb{R});\\ \text{и) } SO_2(\mathbb{R}).\end{array}\right\} - \text{ самостоятелно.}$$

■

Задача. 2.33. Да се намери факторгрупата: а) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $(n \in \mathbb{N})$; б) $m\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $(m, n \in \mathbb{N}, m \mid n)$; в) $\mathbb{R}^*/\mathbb{R}^+$; г) S_n/A_n, $(n \geq 2)$; д) A_4/K_4; е) $GL_n(F)/SL_n(F)$.

Решение. С изключение на д) всички останали примери бяха разгледани в задачата за съседни класове - зад. 2.1. От зад. 2.17., знаем че $A_n \lhd S_n$ и $SL_n(F) \lhd GL_n(F)$. Получаваме:

а) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{n\mathbb{Z}, \overline{1} + n\mathbb{Z}, \ldots, \overline{n-1} + n\mathbb{Z}\} = \langle \overline{1} + n\mathbb{Z}\rangle \cong \mathbb{C}_n$;

б) $m\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\frac{n}{m}\mathbb{Z}, \overline{1} + \frac{n}{m}\mathbb{Z}, \ldots, \overline{\frac{n}{m} - 1} + \frac{n}{m}\mathbb{Z}\} = \langle \overline{1} + \frac{n}{m}\mathbb{Z}\rangle \cong \mathbb{C}_{\frac{n}{m}}$;

Забележка. Тук остатъците $\overline{k}$ са по модул $\frac{n}{m}$. Възможно е да се запишат и по модул n. Например $2\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \{3\mathbb{Z}, \overline{1} + 3\mathbb{Z}, \overline{2} + 3\mathbb{Z}\} = \{6\mathbb{Z}, \overline{2} + 6\mathbb{Z}, \overline{4} + 6\mathbb{Z}\} \cong \mathbb{C}_3$.

в) $\mathbb{R}^*/\mathbb{R}^+ = \{\mathbb{R}^+, (-1)\mathbb{R}^+\} \cong \mathbb{C}_2$;

г) $S_n/A_n = \{A_n, (ij)A_n\} \cong \mathbb{C}_2$;

д) A_4/K_4 - от теоремата на Лагранж имаме: $|A_4/K_4| = \frac{12}{4} = 3$.
$A_4 = \{\underbrace{(1), (12)(34), (14)(23), (13)(24)}_{K_4}, (123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243)\}$. Достатъчно е да разгледаме само елементите от множеството $A_4 \setminus K_4$. Нека $\sigma, \tau \in A_4$ са два тройни цикъла. Те имат поне два общи елемента. Нека първо разгледаме случая, когато имат три общи символа, възможностите за това са следните:

[1] От г) и д) се вижда, че S_n и A_n са "силно" неабелеви групи.
[2] В действителност $M_n(F)$ е пръстен

- Ако циклите съвпадат, значи са в един и същи клас по K_4;
- Ако $\tau = \sigma^2$ и допуснем, че те са в един и същи съседен клас, ще получим $\sigma K_4 = \tau K_4 \Leftrightarrow \sigma^{-1}\tau = \sigma \in K_4$ ↯. Така всеки троен цикъл σ и неговият обратен σ^2 са в различни съседни класове по K_4.

Нека сега σ и τ имат само 2 общи елемента - те са в един и същи съседен клас по подгрупата K_4 точно когато общите им елементи са в обратен ред. Действително, нека $\sigma = (ikj)$, $\tau = (jkl)$, тогава

$$\left.\begin{array}{rl} & i\ j\ k\ l \\ \tau = (jkl) & i\ k\ l\ j \\ \sigma^{-1} = (ijk) & j\ i\ l\ k \end{array}\right] = (ij)(kl) \in K_4.$$

Нека сега $\sigma = (ijk)$, а $\tau = (jkl)$

$$\left.\begin{array}{rl} & i\ j\ k\ l \\ \tau = (jkl) & i\ k\ l\ j \\ \sigma^{-1} = (kji) & k\ j\ l\ i \end{array}\right] = (ikl) \notin K_4, \text{ т. е. } \sigma K_4 \cap \tau K_4 = \emptyset.$$

Така, получихме $A_4/K_4 = \{K_4, (123)K_4, (132)K_4\} = \langle (123)K_4\rangle \cong \mathbb{C}_3$.

Тук елементите в съответните съседни класове са както следва:

$\overline{(1)} = K_4 = \{(1), (12)(34), (14)(23), (13)(24)\}$,

$\overline{(123)} = \{(123), (142), (134), (243)\}$,

$\overline{(132)} = \{(132), (124), (143), (234)\}$;

е) $GL_n(F)/SL_n(F) = \{SL_n(F), a_1SL_n(F), \dots, a_kSL_n(F), \dots\} \cong F^*$, където $a_1, a_2, \dots, a_k, \dots \in F^*$.

■

Задача. 2.42. Нека G е група и $H \leq Z(G)$ (в частност $H = Z(G)$). Да се докаже, че ако G/H е циклична група, то G е абелева.

Решение. Нека $G/H = \langle gH\rangle = \{H, gH, g^2H, \dots, g^kH, \dots\}$ и
$G = H \cup gH \cup g^2H \cup \dots \cup g^kH \cup \dots$. Всеки елемент $a \in G$ лежи в някой съседен клас, т. е. $a = g^s h_s$, където $h_s \in H$.
Нека $x, y \in G$ и $x = g^i h_i$, $y = g^j h_j$, за $h_i, h_j \in H \leq Z(G)$. Имаме:
$xy = g^i h_i g^j h_j = g^i g^j h_i h_j = g^{i+j} h_i h_j$,
$yx = g^j h_j g^i h_i = g^j g^i h_j h_i = g^{i+j} h_i h_j$ (тук използвахме, че $h_i, h_j \in Z(G)$).
Получихме, че $xy = yx$, $\forall x, y \in G$, следователно G е абелева група.

■

Задача. 2.34. Да се докаже, че:
а) $\mathbb{Q}_8/Z(\mathbb{Q}_8) \cong K_4$; б) $D_4/Z(D_4) \cong K_4$; в) $S_4/K_4 \cong S_3$.

Решение. Задачата може да бъде решена с помощта на зад. 2.42 или директно, ще представим и двата начина.

а) I начин.

Знаем, че $Z(\mathbb{Q}_8) = \langle -1\rangle = \{\pm 1\}$. Тогава $|\mathbb{Q}_8/Z(\mathbb{Q}_8)| = \dfrac{8}{2} = 4$. С точност до изоморфизъм имаме точно две групи от ред 4: $\mathbb{C}_4$ и K_4. Ако $\mathbb{Q}_8/Z(\mathbb{Q}_8) \cong \mathbb{C}_4 \overset{2.42}{\Longrightarrow} \mathbb{Q}_8$ е абелева ↯ $\Rightarrow \mathbb{Q}_8/Z(\mathbb{Q}_8) \cong K_4$.

II начин.

Нека $a, b \in \mathbb{Q}_8$. Тогава $aZ(\mathbb{Q}_8) = bZ(\mathbb{Q}_8) \Leftrightarrow a^{-1}b \in Z(\mathbb{Q}_8) \Leftrightarrow a = b$ или $a = -b$. Така, във факторгрупата $\mathbb{Q}_8/Z(\mathbb{Q}_8)$ изчезва знакът "-".

Можем да отъждествим елементите $\begin{array}{rl} 1 \leftrightarrow & -1 \\ i \leftrightarrow & -i \\ j \leftrightarrow & -j \\ k \leftrightarrow & -k \end{array}$.

Тогава $\mathbb{Q}_8/Z(\mathbb{Q}_8) = \{Z(\mathbb{Q}_8), iZ(\mathbb{Q}_8), jZ(\mathbb{Q}_8), kZ(\mathbb{Q}_8)\} = \{\overline{1}, \overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$.

От релацията $i^2 = j^2 = k^2 = -1 \Rightarrow \overline{i}^2 = \overline{j}^2 = \overline{k}^2 = \overline{1}$. От останалите релации в $\mathbb{Q}_8$ получаваме следните релации във факторгрупата $\mathbb{Q}_8/Z(\mathbb{Q}_8)$:

$\begin{array}{l} \overline{ij} = \overline{ji} = \overline{k} \\ \overline{jk} = \overline{kj} = \overline{i} \\ \overline{ki} = \overline{ik} = \overline{l} \end{array}$. Така $\mathbb{Q}_8/Z(\mathbb{Q}_8)$ е четириелементна абелева група, всеки неин неединичен елемент е от ред 2, релациите са точно каквито са в групата K_4, откъдето следва, че $\mathbb{Q}_8/Z(\mathbb{Q}_8) \cong K_4$.

б) $D_4/Z(D_4) \cong K_4$.

I начин.

Аналогично на а), от факта, че $Z(D_4) = \langle A^2 \rangle \cong \mathbb{C}_2$, следва че $|D_4/Z(D_4)| = \dfrac{8}{2} = 4$. Така $D_4/Z(D_4) \cong \mathbb{C}_4$ или $D_4/Z(D_4) \cong K_4$, но D_4 е неабелева група и значи $D_4/Z(D_4) \cong K_4$.

II начин.

Нека $g_1, g_2 \in D_4$. Тогава $g_1Z(D_4) = g_2Z(D_4) \Leftrightarrow g_1g_2^{-1} \in Z(D_4) \Leftrightarrow g_1 = g_2$ или $g_1 = A^2g_2$. Във факторгрупата, ротацията на ъгъл π изчезва.

В $D_4/Z(D_4)$ отъждествяваме елементите $\begin{array}{rl} E \leftrightarrow & A^2 \\ A \leftrightarrow & A^3 \\ B \leftrightarrow & A^2B \\ AB \leftrightarrow & A^3B \end{array}$.

Така $D_4/Z(D_4) = \{Z(D_4), A.Z(D_4), B.Z(D_4), AB.Z(D_4)\} = \{\overline{E}, \overline{A}, \overline{B}, \overline{AB}\}$.

Аналогично на случая $\mathbb{Q}_8/Z(\mathbb{Q}_8)$ и тук директно следва, че $\overline{A}^2 = \overline{B}^2 = \overline{AB}^2 = \overline{E}$, както и $\begin{array}{rcl} \overline{A}.\overline{B} = & \overline{B}.\overline{A} = & \overline{AB} \\ \overline{B}.\overline{AB} = & \overline{AB}.\overline{B} = & \overline{A} \\ \overline{A}.\overline{AB} = & \overline{AB}.\overline{A} = & \overline{B} \end{array}$, така $D_4/Z(D_4) \cong K_4$.

в) $S_4/K_4 \cong S_3$.

I начин.

$|S_4/K_4 \cong S_3| = \dfrac{24}{4} = 6$. Знаем, че с точност до изоморфизъм, групите от ред 6 са само две - $\mathbb{C}_6$ и $D_3 \cong S_3$. Отново, от зад. 2.42 следва, че ако $S_4/K_4 \cong \mathbb{C}_6$, то S_4 е абелева група $\lightning$. Така $S_4/K_4 \cong S_3$.

II начин.

Проверката за вида на факторгрупата да се направи самостоятелно! Може да се използва зад. 2.33. д), като в този случай допълнително трябва да се направи проверка и за нечетните пермутации.

Получава се: $S_4/K_4 = \{K_4, (12)K_4, (13)K_4, (23)K_4, (123)K_4, (132)K_4\}$.

Съседните класове изглеждат по следния начин:

$\overline{(1)} = K_4 = \{(1), (12)(34), (14)(23), (13)(24)\}$,

$\overline{(12)} = \{(12), (34), (1324), (1423)\}$,

$\overline{(13)} = \{(13), (24), (1234), (1432)\}$,

$\overline{(23)} = \{(23), (14), (1243), (1342)\}$,

$\overline{(123)} = \{(123), (142), (134), (243)\}$,

$\overline{(132)} = \{(132), (124), (143), (234)\}$.

Накрая, трябва да се докаже, че $S_4/K_4 = \langle\overline{(123)}, \overline{(23)}\rangle \cong S_3$.

■

Задача. 2.35. Да се докаже, че:
в) $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^* \cong \mathbb{U}$; г) $\mathbb{C}^*/\mathbb{U} \cong \mathbb{R}^+$; д) $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+ \cong \mathbb{U}$; е) $\mathbb{U}/\mathbb{C}_n \cong \mathbb{U}$.

Решение. Нека припомним, че $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}^* \mid |z| = 1\}$ е групата на кръга. Елементите ѝ са всички комплексни числа z, лежащи на единичанта окръжност - $z = \cos\psi + i\sin\psi$ и както знаем, тя е подгрупа на $\mathbb{C}^*$.

в) Трябва да докажем, че $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^* \cong \mathbb{U}$. За целта ще използваме първата теорема за хомоморфизмите на групи. Алгоритъмът е следния: първо, трябва да намерим подходящо изображение $\varphi : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{U}$, което впоследствие да докажем, че е епиморфизъм на групи (сюрективен хомоморфизъм) и накрая да проверим, че $Ker\varphi = \mathbb{Z}$, с което желаното твърдение ще е доказано. Това е стратегията, която се използва във всички задачи от този тип.

За да конструираме търсеното изображение $\varphi : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{U}$, ще допуснем, че е изпълнено $Ker\varphi = \mathbb{R}^*$, което ще ни позволи да определим (с точност до изоморфизъм) вида на факторгрупата $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^*$.[3]

Нека $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$. Тогава е изълнено $z_1\mathbb{R}^* = z_2\mathbb{R}^* \Leftrightarrow z_1^{-1}z_2 \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow z_1^{-1}z_2 = \overline{z_1^{-1}z_2} \Leftrightarrow \dfrac{z_1}{\overline{z_1}} = \dfrac{z_2}{\overline{z_2}}$.

(Тук използвахме, че едно комплексно число $z = a+bi$ е реално, точно когато $b = 0$, т. е. точно когато $z = a + bi = a - bi = \overline{z}$). Конструираме изображението

$$\varphi : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{U}$$
$$\varphi(z) = \frac{z}{\overline{z}} \in \mathbb{U}, \text{ защото е изпълнено } \left|\frac{z}{\overline{z}}\right| = \frac{|z|}{|\overline{z}|} = 1.$$

1) $\varphi(z_1z_2) = \dfrac{z_1z_2}{\overline{z_1z_2}} = \dfrac{z_1}{\overline{z_1}}\dfrac{z_2}{\overline{z_2}} = \varphi(z_1)\varphi(z_2)$

2) Ще докажем, че φ е сюрекция: $\forall\omega \in \mathbb{U}$, $\omega = \cos\psi + i\sin\psi \in \mathbb{U}$, $\exists z = |z|(cos\rho + isin\rho) \in \mathbb{C}^*$, така че $\varphi(z) = \dfrac{z}{\overline{z}} = \omega$, (тук $\rho = 2k\pi + \psi$) така $\mathbb{U} = Im\varphi$.

[3] В действителност можем да докажем директен изоморфизъм (хомоморфизъм и биекция) ψ между $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^*$ и $\mathbb{U}$. Тук обаче е нужна проверка за коректността на изображението ψ.

3) $Ker\varphi = \{z \in \mathbb{C}^* \mid \varphi(z) = \dfrac{z}{\overline{z}} = 1\} = \{z \in \mathbb{C}^* \mid z = \overline{z}\} = \mathbb{R}^*$,

откъдето по теоремата за хомоморфизмите, следва че $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^* \cong \mathbb{U}$.

в) $\mathbb{C}^*/\mathbb{U} \cong \mathbb{R}^+$.

Нека $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$. Тогава е изълнено $z_1\mathbb{U} = z_2\mathbb{U} \Leftrightarrow z_1^{-1}z_2 \in \mathbb{U} \Leftrightarrow |z_1^{-1}z_2| = 1 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2|$.

$$\varphi : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{R}^+$$
$$\varphi(z) = |z|.$$

1) $\varphi(z_1z_2) = |z_1z_2| = |z_1||z_2| = \varphi(z_1)\varphi(z_2)$

2) Ще докажем, че φ е сюрекция: $\forall r \in \mathbb{R}^+$, $\exists z = a + bi \in \mathbb{C}^*$, така че $\varphi(z) = |z| = \sqrt{a^2+b^2} = r$, (например $|a| = r$, $b = 0$) така $\mathbb{U} = Im\varphi$.

3) $Ker\varphi = \{z \in \mathbb{C}^* \mid \varphi(z) = |z| = 1\} = \mathbb{U}$,

откъдето по теоремата за хомоморфизмите, следва че $\mathbb{C}^*/\mathbb{U} \cong \mathbb{R}^+$.

$\left.\begin{array}{l} \text{д) } \mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+ \cong \mathbb{U}; \\ \text{е) } \mathbb{U}/\mathbb{C}_n \cong \mathbb{U}. \end{array}\right\}$ – самостоятелно.

Подсказка:

д) $z_1^{-1}z_2 \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow z_1^{-1}z_2 = |z_1^{-1}z_2| \Leftrightarrow \dfrac{z_1}{|z_1|} = \dfrac{z_2}{|z_2|}$.

$$\varphi : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{U}$$
$$\varphi(z) = \frac{z}{|z|}.$$

е) $z_1^{-1}z_2 \in \mathbb{C}_n \Leftrightarrow (z_1^{-1}z_2)^n = 1 \Leftrightarrow z_1^n = z_2^n$.

$$\varphi : \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{U}$$
$$\varphi(z) = z^n.$$

■

Задача. 2.37. Нека F е числово поле и $M = \{(a,c) \mid a, c \in F, a \neq 0\}$. В M въвеждаме бинарна операция умножение по правилото $(a_1,c_1)(a_2,c_2) = (a_1a_2, a_1c_2 + c_1a_2)$. Да се докаже, че M е абелева група, множеството $N = \{(1,c) \mid c \in F\}$ е подгрупа на M, която е изоморфна на групата F и факторгрупата M/N е изоморфна на групата F^*.

Решение. Ще докажем, че M е абелева група:

1) Асоциативност:

$$[(a_1,c_1)(a_2,c_2)]\,(a_3,c_3) = (a_1a_2, a_1c_2+c_1a_2)(a_3,c_3) = \\ = (a_1a_2a_3, a_1a_2c_3+a_1c_2a_3+c_1a_2a_3) \quad (1)$$

$$(a_1,c_1)\,[(a_2,c_2)(a_3,c_3)] = (a_1,c_1)(a_2a_3, a_2c_3+c_2a_3) = \\ = (a_1a_2a_3, a_1a_2c_3+a_1c_2a_3+c_1a_2a_3) \quad (2)$$

Получихме $(1) = (2)$.

2) Съществуване на единичен елемент $(x,y) \in M$:

$(x,y)(a,c) = (a,c)(x,y) = (a,c) \Leftrightarrow$

$\left| \begin{array}{rl} xa = & ax = a \\ xc+ya = ay + cx = c \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{r} x = 1 \\ ay + c = c \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 0 \end{array} \right. .$

Получихме, че $(1,0) \in M$ е единичен елемент.

3) Съществуване на обратен елемент $(m,n) = (a,c)^{-1} \in M$ за всеки елемент $(a,c) \in M$:

$(m,n)(a,c) = (a,c)(m,n) = (1,0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{rl} ma = & am = 1 \\ mc+na = an + cm = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{rr} m = & a^{-1} \\ n = & -\,ca^{-2} \end{array} \right.$, (тук $a \neq 0 \Rightarrow \exists a^{-1}$).

Получихме, че $(a,c)^{-1} = (a^{-1}, -ca^{-2}) \in M$.

4) Комутативност:

$(a_1,c_1)(a_2,c_2) = (a_1a_2, a_1c_2+c_1a_2) = (a_2a_1, a_2c_1+c_2a_1) = (a_2,c_2)(a_1,c_1)$.

Така получихме, че M е абелева група.

Ще докажем, че $N = \{(1,c) \mid c \in F\}$ е подгрупа на M. Очевидно $\emptyset \neq N \subset M$.

1) $(1,c_1)(1,c_2) = (1, c_1+c_2) \in N$.

2) $(1,c)^{-1} = (1,-c) \in N$.

Получихме, че $N < M$ и тъй като M е абелева, то $N \lhd M$.

Ще докажем, че $N \cong F$. От доказаните свойства за N, както и фактът, че F е адитивна група, се досещаме за вида на изображението:

$$\varphi : M \longrightarrow F$$
$$\varphi((1,c)) = c.$$

- Трябва да проверим, че φ е хомоморфизъм на групи:

  $\varphi((1,c_1)(1,c_2)) = \varphi((1,c_1+c_2)) = c_1+c_2 = \varphi((1,c_1)) + \varphi((1,c_2))$.

- Очевидно φ е биекция.

  Така получихме, че $N \cong F$.

Остана да докажем, че $M/N \cong F^*$. Да предположим, че N съвпада с ядрото на търсеното изображение ψ. Тогава за факторгрупата M/N получаваме
$(a_1,c_1)N=(a_2,c_2)N \Leftrightarrow (a_1,c_1)^{-1}(a_2,c_2)\in N \Leftrightarrow (a_1^{-1},-c_1a_1^{-2})(a_2,c_2)\in N \Leftrightarrow (a_1^{-1}a_2,*)\in N \Leftrightarrow a_1^{-1}a_2=1 \Leftrightarrow a_1=a_2$ (тук $*$ е елемент на F и точният му вид няма значение). Конструираме изображението

$$\psi : M \longrightarrow F^*$$
$$\psi((a,c))=a.$$

1) $\psi((a_1,c_1)(a_2,c_2))=\psi((a_1a_2,a_1c_2+c_1a_2))=a_1a_2=\psi((a_1,c_1))\psi((a_2,c_2))$.

2) Ще докажем, че ψ е сюрекция: $\forall a\in F^*$: $\exists (a,c)\in M$, така че $\psi((a,c))=a$ и $F^*=Im\psi$.

3) $Ker\psi=\{(a,c)\in M \mid \psi((a,c))=a=1\}=\{(1,c)\mid c\in F\}=N$,
откъдето по теоремата за хомоморфизмите, следва че $M/N\cong F^*$.

■

Задача. 2.38. Нека F е числово поле и $G=\{(a,b,c)\mid a,b,c\in F, a\neq 0, b\neq 0\}$. В G въвеждаме бинарна операция умножение по правилото
$(a_1,b_1,c_1)(a_2,b_2,c_2)=(a_1a_2,b_1b_2,a_1c_2+c_1b_2)$. Да се докаже, че:

а) G е неабелева група;

б) множеството $H=\{(1,b,c)\mid b,c\in F\, b\neq 0\}$ е неабелева нормална подгрупа на G и $G/H\cong F^*$;

в) множеството $K=\{(a,a,c)\mid a,c\in F\, a\neq 0\}$ е нормална подгрупа на G, която е изоморфна на M от зад.2.37 и $G/K\cong F^*$.

Решение. а)

1) Асоциативност:

$$[(a_1,b_1,c_1)(a_2,b_2,c_2)]\,(a_3,b_3,c_3)=(a_1a_2,b_1b_2,a_1c_2+c_1b_2)(a_3,b_3,c_3)= \\ =(a_1a_2a_3,b_1b_2b_3,a_1a_2c_3+a_1c_2b_3+c_1b_2b_3) \quad (3)$$

$$(a_1,b_1,c_1)\,[(a_2,b_2,c_2)(a_3,b_3,c_3)]=(a_1,b_1,c_1)(a_2a_3,b_2b_3,a_2c_3+c_2b_3)= \\ =(a_1a_2a_3,b_1b_2b_3,a_1a_2c_3+a_1c_2b_3+c_1b_2b_3) \quad (4)$$

Получихме (3) = (4).

2) Съществуване на единичен елемент $(x,y,z)\in G$:
$(x,y,z)(a,b,c)=(a,b,c)(x,y,z)=(a,b,c) \Leftrightarrow$

$$\left|\begin{array}{l} xa= \quad ax=a \\ yb= \quad by=b \\ xc+zb=az+cy=c \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x=1 \\ y=1 \\ c+zb=c \\ az+c=c \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x=1 \\ y=1 \\ z=0 \end{array}\right. \text{(тук } a\neq 0 \text{ и } b\neq 0).$$

Така получихме, че $(1,1,0)\in G$ е единичен елемент.

3) Съществуване на обратен елемент $(m,n,t) = (a,b,c)^{-1} \in G$ за всеки елемент $(a,b,c) \in G$:
$(m,n,t)(a,b,c) = (a,b,c)(m,n,t) = (1,1,0) \Leftrightarrow$
$$\left| \begin{array}{rl} ma = & am = 1 \\ nb = & bn = 1 \\ mc + tb = & at + cn = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{rl} m = & a^{-1} \\ n = & b^{-1} \\ t = & -ca^{-1}b^{-1} \end{array} \right. \text{(тук } a^{-1} \neq 0,\ b^{-1} \neq 0).$$
Получихме, че $(a,b,c)^{-1} = (a^{-1}, b^{-1}, -ca^{-1}b^{-1}) \in G$.

4) Комутативност:

$$(a_1,b_1,c_1)(a_2,b_2,c_2) = (a_1a_2, b_1b_2, a_1c_2 + c_1b_2) \tag{5}$$

$$(a_2,b_2,c_2)(a_1,b_1,c_1) = (a_1a_2, b_1b_2, a_2c_1 + c_2b_1) \tag{6}$$

Получихме (5) $\neq$ (6), откъдето следва, че G е неабелева група.

б) Очевидно $\emptyset \neq H \subset G$. Получаваме:

1) $(1,b_1,c_1)(1,b_2,c_2) = (1, b_1b_2, c_2 + c_1b_2) \in H$, защото от $b_1 \neq 0, b_2 \neq 0 \Rightarrow b_1b_2 \neq 0$;
2) $(1,b,c)^{-1} = (1, b^{-1}, -cb^{-1}) \in H$, защото от $b \neq 0 \Rightarrow b^{-1} \neq 0$;
3) $(1,b_2,c_2)(1,b_1,c_1) = (1, b_1b_2, c_1 + c_2b_1) \neq (1, b_1b_2, c_2 + c_1b_2) =$
$= (1,b_1,c_1)(1,b_2,c_2)$. Така получихме, че H е неабелева подгрупа на G. Чрез теоремата за хомоморфизмите на групи ще докажем желания изоморфизъм и ще получим наготово факта, че H е нормална подгрупа на G.

Нека допуснем, че $H = Ker\varphi$ на търсения хомоморфизъм φ. Получаваме:

$(a_1,b_1,c_1)H = (a_2,b_2,c_2)H \Leftrightarrow (a_1^{-1}, b_1^{-1}, -c_1a_1^{-1}b_1^{-1})(a_2,b_2,c_2) \in H \Leftrightarrow (a_1^{-1}a_2, b_1^{-1}b_2, *) \in H \Leftrightarrow a_1^{-1}a_2 = 1 \Leftrightarrow a_1 = a_2$, (тук * е елемент на F и точният му вид не ни интересува).

Конструираме следното изображение φ:

$$\varphi : G \longrightarrow F^*$$
$$\varphi((a,b,c)) = a.$$

1) Проверяваме, че φ е хомоморфизъм на групи:
$$\varphi((a_1,b_1,c_1)(a_2,b_2,c_2)) = \varphi((a_1a_2, b_1b_2, a_1c_2 + c_1b_2)) = a_1a_2 =$$
$$= \varphi((a_1,b_1,c_1))\varphi((a_2,b_2,c_2));$$
2) Ще докажем, че φ е сюрекция: $\forall a \in F^*$: $\exists (a,b,c) \in G$, така че $\varphi((a,b,c)) = a$ и $F^* = Im\varphi$;
3) $Ker\varphi = \{(a,b,c) \in G \mid \varphi((a,b,c)) = a = 1\} = \{(1,b,c) \mid b,c \in F, b \neq 0\} = H$,

откъдето по теоремата за хомоморфизмите, следва че $G/H \cong F^*$ и $H \lhd G$.

в) Да се направи самостоятелна проверка за това, че $K \lhd G$ и $K \cong M$, където M е групата от зад. 2.37.

Подсказка:

$$\psi : K \longrightarrow M$$

$$\psi((a, a, c)) = (a, c).$$

Остана да се докаже, че $G/K \cong F^*$. Правим проверката за съседните класове на G по K. Аналогично на направената проверка в б), получаваме:

$(a_1, b_1, c_1)K = (a_2, b_2, c_2)K \Leftrightarrow (a_1^{-1}, b_1^{-1}, -c_1 a_1^{-1} b_1^{-1})(a_2, b_2, c_2) \in K \Leftrightarrow (a_1^{-1}a_2, b_1^{-1}b_2, *) \in K \Leftrightarrow a_1^{-1}a_2 = b_1^{-1}b_2 \Leftrightarrow a_1 b_1^{-1} = a_2 b_2^{-1}$.

Конструираме изображението δ:

$$\delta : G \longrightarrow F^*$$

$$\delta((a, b, c)) = ab^{-1}.$$

1) Проверяваме, че δ е хомоморфизъм на групи:

$$\delta((a_1, b_1, c_1)(a_2, b_2, c_2)) = \delta((a_1 a_2, b_1 b_2, a_1 c_2 + c_1 b_2)) = a_1 a_2 (b_1 b_2)^{-1} =$$

$$= a_1 b_1^{-1} a_2 b_2^{-1} = \delta((a_1, b_1, c_1))\delta((a_2, b_2, c_2));$$

2) Ще докажем, че δ е сюрекция: $\forall d \in F^*$: $\exists a, b \in F^*$, така че $d = ab^{-1}$ (например $a = d$, $b = 1$) и тогава $\exists (a, b, c) \in G$, така че $\delta((a, b, c)) = ab^{-1} = d$, откъдето $F^* = Im\delta$;

3) $Ker\delta = \{(a, b, c) \in G \mid \delta((a, b, c)) = ab^{-1} = 1\} = \{(a, b, c) \in G \mid a, b, c \in F, a = b, a \neq 0\} = K$.

Сега, по теоремата за хомоморфизмите на групи, следва че $G/K \cong F^*$ и $K \lhd G$.

■

Задача. 2.39. Нека $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Q}, a \neq 0 \right\}$. Да се докаже, че:

а) G е група относно умножението на матрици. Да се намерят $Z(G)$ и всички елементи и подгрупи от краен ред на G;

б) множеството $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{Q}^* \right\}$ е максимална подгрупа на G и $M \cong \mathbb{Q}^*$;

в) множеството $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{Q} \right\}$ е нормална подгрупа на G, $H \cong \mathbb{Q}$ и $G/H \cong \mathbb{Q}^*$.

Решение. а) Забелязваме, че $\forall A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G, detA = a \neq 0$, откъдето $\emptyset \neq G \subset GL_2(\mathbb{Q})$. Ще докажем, че $G < GL_2(\mathbb{Q})$. Наистина,

1) $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 & a_1b_2 + b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$, защото от $a_1 \neq 0, a_2 \neq 0 \Rightarrow a_1a_2 \neq 0$;

2) $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a^{-1} & -ba^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$, защото $a^{-1} \neq 0$.

$Z(G) = \{X \in G \mid XA = AX, \forall A \in G\}$, т. е.
$\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow xb + y = ay + b \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow b(x-1) = y(a-1), \forall a, b \in \mathbb{Q}, a \neq 0.$

Числата x и y, които удовлетворяват горното уравнение са точно тези, които удовлетворяват "особените" случаи, а именно: ако $a = 1$, то $b(x-1) = 0, \forall b \in \mathbb{Q} \Rightarrow x = 1$. Ако $b = 0$, то $y(a-1) = 0, \forall a \in \mathbb{Q}^* \Rightarrow y = 0$. Така получихме, че центърът на G се състои само от единичната матрица, т. е. $Z(G) = \{E\} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$.

Ще определим елементите на G от краен ред (забележете, че $|G| = \infty$). Нека $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$ и $|A| = n < \infty$, $n \in \mathbb{N}$. Точният вид на уравнението $A^n = E$ получаваме индуктивно:
$A^n = \begin{pmatrix} a^n & b(a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a + 1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{ll} a^n & = 1 \\ b(a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a + 1) & = 0 \end{array} \right. .$

В зависимост от четността на n, разглеждаме следните два случая:

1) n - нечетно. Тогава $a = 1$ и $nb = 0 \Leftrightarrow b = 0$. Така, в този случай получихме, че $|A| = 1$ и $A = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2) нека сега n е четно. Тогава $a = \pm 1$ и ако $a = 1$ получаваме 1). Така $a = -1$ и $b(\underbrace{-1 + 1 - 1 + 1 \cdots - 1 + 1}_{n \text{ събираеми}}) = b.0 = 0, \forall b \in \mathbb{Q}$. Най-малкото естествено число n, за което това е изпълнено е най-малкото четно число - 2. Така, матриците от краен ред в този случай са тези $A \in G$, за които $|A| = 2$ и $A = \begin{pmatrix} -1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \forall b \in \mathbb{Q}$.

Трябва да опишем подгрупите на G, които са от краен ред. Те трябва да се състоят само от елементи от краен ред. Естествен избор са подгрупите, породени от матриците от горните два случая, а именно: $\{E\} < G$ и $\langle\begin{pmatrix} -1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\rangle \cong \mathbb{C}_2$. Остава да проверим, дали две различни матрици от ред 2 могат да породят крайна подгрупа. Нека $B = \begin{pmatrix} -1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (тук $b \neq c$). За произведението им получаваме $BC = \begin{pmatrix} 1 & b-c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и очевидно $|BC| = \infty$. Окончателно, подгрупите от краен ред се изчерпват с горепосочените $\{E\}$ и $\langle \begin{pmatrix} -1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rangle \cong \mathbb{C}_2$, $\forall b \in \mathbb{Q}$.

б) Първо ще докажем, че $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{Q}^* \right\} < G$. Действително, изпълнено е, че $\emptyset \neq M \subset G$.

1) $\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M$, защото $a_1 a_2 \neq 0$;

2) $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M$, защото $a^{-1} \neq 0$.

Ще докажем, че $M \underset{max}{<} G$. Нека K е произволна подгрупа на G, със свойството $M < K \leq G$. Ще докажем, че $K = G$.

Нека разгледаме матриците $A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in K \setminus M$ (тук $b_1 \neq 0$) и $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G \setminus M$ (тук $b \neq 0$). Ще докажем, че съществуват матрици $X, Y \in M$, така че $A = XA_1Y \in K$, с което доказателството ще бъде завършено.

Наистина, нека $X = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и нека допуснем, че

$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Получаваме

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 xy & b_1 x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left| \begin{aligned} a_1 xy &= a \\ b_1 x &= b \end{aligned} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{aligned} x &= bb_1^{-1} \in \mathbb{Q}^* \\ y &= ab^{-1}a_1^{-1}b_1 \in \mathbb{Q}^* \end{aligned} \right.$$

(тук използвахме, че $b, a_1, b_1 \in \mathbb{Q}^*$).

Остана да докажем, че $M \cong \mathbb{Q}^*$. Да разгледаме изображението

$$\varphi : M \longrightarrow \mathbb{Q}^*$$
$$\varphi \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = a.$$

- Очевидно φ е биекция;
- $\varphi\left(\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = a_1 a_2 = \varphi \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \varphi \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

в) Докажете самостоятелно.

■