Лекция 8: Задачи върху S^m_n-теоремата. Ефективни оператори.

Още задачи върху S_n^m-теоремата:

Задача 3.8. Да се докаже, че съществува примитивно рекурсивна функция l, такава че за всички естествени a и b

$$\varphi_{l(a,b)}(x) = ax + b.$$

Доказателство. Смисълът на функцията $l(a,b)$ е, че по всяко a и b тя връща код на програма, пресмятаща линейната функция $ax + b$.

За да получим l, тръгваме от функцията $f(a,b,x) = ax+b$, която очевидно е изчислима. Прилагаме S_n^m-теоремата към нея, като този път трябва да параметризираме по първите ѝ два аргумента. Така получаваме, че за някоя примитивно рекурсивна функция $l(a,b)$ ще е в сила

$$\varphi_{l(a,b)}(x) = f(a,b,x) = ax + b$$

за всяко a, b и x. $\square$

Да напомним, че с C_a^n означавахме n-местната константна функция, която винаги връща a, т.е.

$$C_a^n(x_1, \dots, x_n) = a \quad \text{за всяко} \quad (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n.$$

Задача 3.9. Нека $n \geq 1$. Докажете, че съществува примитивно рекурсивна функция c_n, такава че за всички естествени a:

$$\varphi_{c_n(a)} = C_a^n.$$

С други думи, за всяко a, $c_n(a)$ връща някакъв индекс на C_a^n.

Решение. Да фиксираме някакво $n \geq 1$. Търсената от нас функция c_n трябва да е такава, че за всяко $\bar{x} \in \mathbb{N}^n$ да бъде вярно, че

$$\varphi_{c_n(a)}(\bar{x}) = C_a^n(\bar{x}), \quad \text{т.е.} \quad \varphi_{c_n(a)}(\bar{x}) = \underbrace{a}_{f(a,\bar{x})}.$$

Функцията $f(a,\bar{x}) \stackrel{\text{деф}}{=} a$ очевидно е изчислима и значи към нея може да се приложи S_n^m-теоремата. Според тази теорема ще съществува примитивно рекурсивна функция — да я наречем c_n, такава че за всяко a и $\bar{x}$:

$$\varphi_{c_n(a)}(\bar{x}) = f(a,\bar{x}), \quad \text{или все едно,} \quad \varphi_{c_n(a)}(\bar{x}) = a.$$

Но последното означава, че $\forall a\ \varphi_{c_n(a)} = C_a^n$. $\square$

Тази задача може да се обобщи, като местността n на константната функция C_a^n стане аргумент на параметризиращата функция c.

Задача 3.10. (Задача за ЕК) Докажете, че съществува примитивно рекурсивна функция $c(n,a)$, такава че за всички естествени n и a:

$$\varphi_{c(n,a)} = C_a^n.$$

Задача 3.11. а) Нека f е фиксирана едноместна изчислима функция. Докажете, че съществува едноместна примитивно рекурсивна функция p, такава че за всяко естествено n:

$$\varphi_{p(n)} = f^n.$$

б) Докажете, че съществува двуместна примитивно рекурсивна функция p, такава че за всички естествени a и n:

$$\varphi_{p(a,n)} = \varphi_a^n.$$

Решение. Разбира се, от втората подточка следва първата, но е поучително да ги разгледаме в реда, в който са формулирани в задачата.

а) Търсената функция $p(n)$ трябва да е такава, че за всички a и x:

$$\varphi_{p(n)}(x) \simeq f^n(x).$$

От *Твърдение* 1.17 знаем, че ако f е примитивно рекурсивна, то и нейната итерация $f^*(n,x) \stackrel{\text{деф}}{=} f^n(x)$ ще е такава. Дали това остава в сила ако заменим "примитивно" с "частично" рекурсивна? Абсолютно, при това, и доказателството е съвсем същото: примитивно рекурсивна схема за f^*:

$$\left|\begin{array}{l} f^*(0,x) = x \\ f^*(n+1,x) \simeq \underbrace{f(\dots f}_{n+1 \text{ пъти}}(x)\dots) \simeq f(\underbrace{f(\dots f}_{n \text{ пъти}}(x)\dots)) \simeq f(f^*(n,x)). \end{array}\right.$$

Сега просто прилагаме S_n^m-теоремата към изислимата функция $f^*(n,x)$, като параметризираме по първия ѝ аргумент n.

б) Ясно е, че тук трябва да параметризираме по n и a. За целта първо трябва да съобразим, че функцията $\lambda a,n,x.\varphi_a^n(x)$ е изчислима. Да положим $F(a,n,x) \stackrel{\text{деф}}{\simeq} \varphi_a^n(x)$. За F имаме следната пр. рекурсивна схема:

$$\left|\begin{array}{l} F(a,0,x) \simeq \varphi_a^0(x) = x \\ F(a,n+1,x) \simeq \varphi_a^{n+1}(x) \simeq \varphi_a(\varphi_a^n(x)) \simeq \Phi_1(a,F(a,n,x)). \end{array}\right.$$

Съобразете, че F е изчислима и приложете към нея S_n^m-теоремата. □

За всяко $a \in \mathbb{N}$, нека W_a е дефиниционната област на функцията φ_a:

$$W_a \;=\; \{x|\,!\varphi_a(x)\}.$$

Задача 3.12. Докажете, че съществува примитивно рекурсивна функция s, такава че за всяко a, $W_{s(a)} = \{a\}$.

Доказателство. Търсим функция $f(a,x)$, която е такава, че след прилагане към нея на S_n^m-теоремата и получаване на примитивно рекурсивна s със свойството:

$$\varphi_{s(a)}(x) \simeq f(a,x),$$

да се окаже, че s е търсената, т.е. за нея да е изпълнено $W_{s(a)} = \{a\}$. Последното равенство означава, че за всяко a и x е в сила еквивалентността

$$!\varphi_{s(a)}(x) \iff x = a.$$

Ние търсим f, за която да е изпълнено $\varphi_{s(a)}(x) \simeq f(a,x)$, затова горната еквивалентност преписваме като

$$!f(a,x) \iff x = a.$$

Има много изчислими функции f горното свойство; бихме могли да вземем например

$$f(a,x) \simeq \begin{cases} 0, & \text{ако } a = x \\ \neg!, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Прилагаме S^m_n-теоремата към тази функция и получаваме, че за някоя примитивно рекурсивна s ще бъде изпълнено

$$\varphi_{s(a)}(x) \simeq f(a,x), \quad \text{и в частност,}$$

$$!\varphi_{s(a)}(x) \iff !f(a,x) \iff x = a$$

за всяко a и x. Това означава, че $W_{s(a)} = \{a\}$ за всяко a. □

В *Задача* 3.1 въведохме *код* на полином $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ с коефициенти от $\mathbb{N}$. Това беше числото $a = \tau(\langle a_0, \dots a_n\rangle)$, което кодира редицата от коефициентите му.
Да си припомним и означението

$$p_a = \text{полинома} \quad \text{с код } a.$$

Разбира се, всеки полином е изчислима функция и значи той може да бъде зададен и със свой индекс. Следващата задача ни казва, че съществува примитивно рекурсивна функция, която по код на полином връща негов индекс, т.е. има "равномерен" преход от кодовете на полиномите към техните индекси.

Задача 3.13. Да се докаже, че съществува примитивно рекурсивна функция h, такава че за всяко a

$$\varphi_{h(a)} = p_a.$$

Доказателство. В *Задача* 3.1 показахме, че е изчислима функцията

$$U(a,x) \stackrel{\text{деф}}{=} p_a(x).$$

Прилагаме S^m_n-теоремата към тази функция и получаваме, че за някоя примитивно рекурсивна h ще е изпълнено:

$$\varphi_{h(a)}(x) = U(a,x), \quad \text{или все едно} \quad \varphi_{h(a)}(x) = p_a(x)$$

за всяко a и x. □

3.3 Ефективни оператори

3.3.1 Определение и примери за оператори

Под *оператор* ще разбираме тотално изображение, което преработва функции във функции. Операторите ще означаваме с главни гръцки букви — $\Gamma, \Delta, ...$, евентуално с индекси.

Да се спрем първо на случая, когато тези оператори имат един аргумент. Тогава те ще са изображения от вида

$$\Gamma \colon \mathcal{F}_n \longrightarrow \mathcal{F}_k$$

за някои естествени $n \geq 1$ и $k \geq 1$. Константите n и k определят *типа на оператора* Γ, който ще означаваме с $(n \ \rightarrow \ k)$.

Примери:

1) операторът *идентитет*: $\Gamma_{id}(f) = f$, който е от тип $(k \ \rightarrow \ k)$.

2) *константният оператор* $\Gamma_c(f) = f_0$, за f_0 — фиксирана функция. Този оператор може да е от произволен тип $(n \ \rightarrow \ k)$;

3) операторът за *диагонализация* $\Gamma_d(f)(x) \simeq f(x,x)$,
който е от тип $(2 \rightarrow 1)$. Ако се чудите откъде идва името на този оператор, представете си стойностите на f, разположени в таблица с безкрайно много редове и стълбове, в която (i,j)-тият елемент е $f(i,j)$.

4) $\Gamma(f)(x) \simeq \texttt{if } x = 0 \texttt{ then } 1 \texttt{ else } x.f(x-1)$.
Този оператор е тясно свързан с рекурсивната дефиниция на функцията *факториел*; очевидно е от тип $(1 \ \rightarrow \ 1)$;

5) операторът за *минимизация* $\Gamma_\mu(f)(\bar{x}) \simeq \mu y[f(\bar{x},y) \simeq 0]$
от тип $(n+1 \ \rightarrow \ n)$.

Оператор на *произволен брой аргументи* е изображение от вида

$$\Gamma\colon \ \mathcal{F}_{n_1} \times \cdots \times \mathcal{F}_{n_k} \ \longrightarrow \ \mathcal{F}_m.$$

Типа на Γ ще означаваме с $(n_1, \ldots, n_k \ \rightarrow \ m)$.

Примери:

1) операторът *композиция*: $\Gamma_{comp}(f,g)(\bar{x}) \simeq f(g(\bar{x}))$ от тип $(1, n \ \rightarrow \ n)$;

2) операторът $\Gamma_{mult}(f,g)(\bar{x}) \simeq f(\bar{x}).g(\bar{x})$ от тип $(n, n \ \rightarrow \ n)$;

3) операторът *суперпозиция* $\Gamma_{sup}(f, g_1, \ldots, g_n) = f(g_1, \ldots, g_n)$
от тип $(n, k, \ldots, k \ \rightarrow \ k)$;

4) операторът `if then else`: $\Gamma(f,g,h)(\bar{x}) \simeq \texttt{if } f(\bar{x}) \simeq 0 \texttt{ then } g(\bar{x}) \texttt{ else } h(\bar{x})$,
който е от тип $(n, n, n \ \rightarrow \ n)$.

3.3.2 Ефективни оператори

Определение 3.2. Казваме, че операторът $\Gamma\colon \mathcal{F}_{n_1} \times \dots \times \mathcal{F}_{n_k} \longrightarrow \mathcal{F}_m$ е *ефективен*, ако съществува рекурсивна функция h, такава че за всички естествени $a_1, \dots, a_k$ е изпълнено:

$$\Gamma(\varphi^{(n_1)}_{a_1}, \dots, \varphi^{(n_k)}_{a_k}) \ = \ \varphi^{(m)}_{h(a_1,\dots,a_k)}.$$

Функцията h ще наричаме *индексна функция* на Γ.

Ако $\Gamma\colon \mathcal{F}_n \longrightarrow \mathcal{F}_k$ е оператор на една променлива, горното определение се свежда до съществуването на *едноместна* рекурсивна функция h, такава че за всяко a:

$$\Gamma(\varphi^{(n)}_a) \ = \ \varphi^{(k)}_{h(a)}.$$

Да обърнем внимание на две неща:

– операторът Γ действа върху *всички* частични функции, а условието за ефективност е само върху изчислимите.

– искаме не само Γ да преработва изчислими в изчислими, но да го прави по *равномерен* начин, което ще рече — да има изчислима функция, която по индекса на аргументите на Γ да връща индекса на резултата.

Всички "естествени" оператори са ефективни, в частност, операторите от горните примери. Да проверим ефективността на добре познатия ни оператор за минимизация.

Задача 3.14. Докажете, че е ефективен операторът за минимизация $\Gamma_\mu\colon \mathcal{F}_2 \longrightarrow \mathcal{F}_1$, дефиниран като:

$$\Gamma_\mu(f)(x) \simeq \mu y[f(x,y) \simeq 0].$$

Решение. Търсим рекурсивна функция $h(a)$, такава че за всяко a и x

$$\varphi_{h(a)}(x) \simeq \Gamma_\mu(\varphi^{(2)}_a)(x) \stackrel{\text{деф}}{\simeq} \underbrace{\mu y[\varphi^{(2)}_a(x,y) \simeq 0]}_{F(a,x)}.$$

Очакваме да получим функцията h от S^m_n-теоремата, затова разглеждаме функцията $F(a,x)$, както е означена по-горе. Тя е изчислима, защото можем да я препишем като

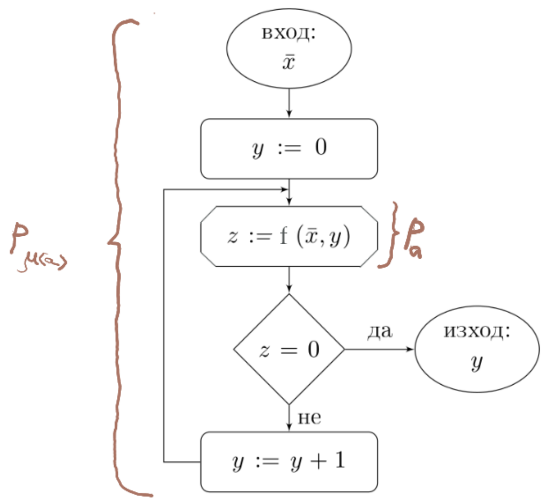
$$F(a,x) \simeq \mu y[\Phi_2(a,x,y) \simeq 0]$$

и да приложим Теоремата за универсалната функция, според която УФ Φ_2 е изчислима. Сега вече, прилагайки S^m_n-теоремата към тази функция F, стигаме до (дори примитивно) рекурсивна функция h, такава че

$$\varphi_{h(a)}(x) \simeq \mu y[\varphi^{(2)}_a(x,y) \simeq 0]$$

за всяко a и x. Оттук $\varphi_{h(a)} = \Gamma_\mu(\varphi_a^{(2)})$ за всяко a и следователно Γ_μ е ефективен оператор. □

Да напомним, че миналия път доказахме, че операцията минимизация запазва изчислимостта. Сега виждаме, че всъщност тя я запазва *равномерно*, т.е. по кода на програмата, пресмятаща $f(x, y)$, можем алгоритмично да получим кода на програмата, пресмятаща $\mu y[f(x, y) \simeq 0]$.



3.3.3 НДУ за ефективност на оператор

Разсъжденията в решението на предишната *Задача* 3.14 ни насочват към следващото твърдение, което се явява НДУ са ефективност на оператор. Ще го използваме, когато по-нататък се налага да доказваме, че даден оператор е ефективен.

Твърдение 3.4. (Необходимо и достатъчно условие за ефективност на оператор) Операторът $\Gamma\colon \mathcal{F}_{n_1} \times \cdots \times \mathcal{F}_{n_k} \longrightarrow \mathcal{F}_m$ е ефективен тогава и само тогава, когато е изчислима функцията

$$F(a_1, \dots, a_k, x_1, \dots, x_m) \stackrel{\text{деф}}{\simeq} \Gamma(\varphi_{a_1}^{(n_1)}, \dots, \varphi_{a_k}^{(n_k)})(x_1, \dots, x_m).$$

Доказателство. Нека Γ е ефективен оператор. Тогава за някоя рекурсивна функция h ще бъде изпълнено

$$\Gamma(\varphi_{a_1}^{(n_1)}, \dots, \varphi_{a_k}^{(n_k)})(\bar{x}) \simeq \varphi_{h(a_1, \dots, a_k)}^{(m)}(\bar{x})$$

за всички $\bar{a} \in \mathbb{N}^k, \bar{x} \in \mathbb{N}^m$. Тогава за F можем да запишем:

$$F(\bar{a}, \bar{x}) \stackrel{\text{деф}}{\simeq} \Gamma(\varphi_{a_1}^{(n_1)}, \ldots, \varphi_{a_k}^{(n_k)})(\bar{x}) \simeq \varphi_{h(\bar{a})}^{(m)}(\bar{x}) \simeq \Phi_m(h(\bar{a}), \bar{x}),$$

и значи F е изчислима, съгласно Теоремата за универсалната функция.

Обратно, нека функцията $F(a_1, \ldots, a_k, x_1, \ldots, x_m)$ от условието на твърдението е изчислима. Прилагаме S_n^m-теоремата, като параметризираме по променливите $(a_1, \ldots, a_k)$. Така получаваме, че за някоя (дори) *примитивно* рекурсивна функция h ще е изпълнено

$$\varphi_{h(\bar{a})}^{(m)}(\bar{x}) \simeq F(\bar{a}, \bar{x}),$$

или все едно,

$$\varphi_{h(\bar{a})}^{(m)}(\bar{x}) \simeq \Gamma(\varphi_{a_1}^{(n_1)}, \ldots, \varphi_{a_k}^{(n_k)})(\bar{x}).$$

Горното равенство е за всички $\bar{a} \in \mathbb{N}^k$ и $\bar{x} \in \mathbb{N}^m$, следователно

$$\varphi_{h(\bar{a})}^{(m)} = \Gamma(\varphi_{a_1}^{(n_1)}, \ldots, \varphi_{a_k}^{(n_k)})$$

за всички $\bar{a} \in \mathbb{N}^k$. $\square$

Забележка. От горното твърдение следва, в частност, че ако един оператор има рекурсивна индексна функция, той има и примитивно рекурсивна индексна функция.

Да приложим току-що доказаното, за да видим, че е ефективен операторът композиция.

Задача 3.15. Да се докаже, че операторът $\Gamma_{comp} : \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathcal{F}_1$, който се дефинира с равенството

$$\Gamma_{comp}(f, g)(x) \simeq f(g(x)).$$

Решение. Разглеждаме функцията

$$F(a, b, x) \simeq \Gamma_{comp}(\varphi_a, \varphi_b)(x) \simeq \varphi_a(\varphi_b(x)).$$

Тя е изчислима, защото можем да я препишем като

$$F(a, b, x) \simeq \Phi_1(a, \Phi_1(b, x)).$$

Тогава съгласно *Твърдение* 3.4 операторът Γ_{comp} ще е ефективен, т.е. за някоя рекурсивна функция *comp* ще е изпълнено

$$\Gamma_{comp}(\varphi_a, \varphi_b) = \varphi_{comp(a,b)}$$

за всички естествени a и b. $\square$

Задача 3.16. Докажете, че операторът за итерация $\Gamma_{it} : \mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathcal{F}_2$, дефиниран като

$$\Gamma_{it}(\varphi_a) = \varphi_a^*$$

е ефективен.

Решение. В решението на *Задача* 3.11 б) вече съобразихме, че функцията $F(a, n, x) \stackrel{\text{деф}}{\simeq} \varphi_a^n(x)$ е изчислима. Но

$$\varphi_a^n(x) \simeq \varphi_a^*(n, x), \quad \text{а} \quad \varphi_a^*(n, x) \stackrel{\text{деф}}{\simeq} \Gamma_{it}(\varphi_a)(n, x).$$

Излезе, че $F(a, n, x) \simeq \Gamma_{it}(\varphi_a)(n, x)$ и тази функция е изчислима. Сега прилагаме *Твърдение* 3.4, за да получим, че операторът Γ_{it} е ефективен.

$\square$