

Кортежи и списъци

Трифон Трифонов

Функционално програмиране, 2023/24 г.

20 декември 2023 г. – 3 януари 2024 г.

Тази презентация е достъпна под лиценза Creative Commons Признание-Некомерсиално-Споделяне на споделеното 4.0 Международен © ⓘ ⓘ ⓘ

Кортежи (tuples)

Кортежите са наредени n -торки от данни от произволен тип.

- **Примери:** $(1, 2)$, $(3.5, 'A', \text{False})$, $((\text{"square"}, (^2)), 1.0)$
- Тип кортеж от n елемента: (t_1, t_2, \dots, t_n)
- Стойности: наредени n -торки от вида (x_1, x_2, \dots, x_n) , където x_i е от тип t_i
- Позволяват “пакетиране” на няколко стойности в една
- Операции за наредени двойки:
 - $(,) :: a \rightarrow b \rightarrow (a, b)$ — конструиране на наредена двойка
 - $\text{fst} :: (a, b) \rightarrow a$ — първа компонента на наредена двойка
 - $\text{snd} :: (a, b) \rightarrow b$ — втора компонента на наредена двойка

Потребителски типове

- Типът (`String`, `Int`) може да означава:
 - име и ЕГН на човек
 - продукт с описание и количество
 - сонет на Шекспир и поредният му номер
- Удобно е да именуваме типовете, за да означаваме смисъла им
- `type` <конструктор> = <тип>
 - конструкторите са идентификатори, започващи с главна буква
- Примери:
 - `type Student = (String, Int, Double)`
 - `type Point = (Double, Double)`
 - `type Triangle = (Point, Point, Point)`
 - `type Transformation = Point -> Point`
 - `type Vector = Point`
 - `addVectors :: Vector -> Vector -> Vector`
 - `addVectors v1 v2 = (fst v1 + fst v2, snd v1 + snd v2)`

Особености на кортежите

- `fst` $(1,2,3) \rightarrow$ Грешка!
 - `fst` и `snd` работят само над наредени двойки!
- $((a,b),c) \neq (a,(b,c)) \neq (a,b,c)$
- Няма специален тип кортеж от един елемент...
- ...но има тип “празен кортеж” $()$ с единствен елемент $()$
 - в други езици такъв тип се нарича `unit`
 - използва се за означаване на липса на информация

Образци на кортежи

Образец на кортеж е конструкция от вида (p_1, p_2, \dots, p_n) .

Пасва на всеки кортеж от точно n елемента (x_1, x_2, \dots, x_n) , за който образецът p_i пасва на елемента x_i .

- `addVectors (x1, y1) (x2, y2) = (x1 + x2, y1 + y2)`
- `fst (x, _) = x`
- `snd (_, y) = y`
- `getYear :: Student -> Int`
- `getYear (_, year, _) = year`
- образците на кортежи могат да се използват за “разглобяване” на кортежи при дефиниция
- `(x,y) = (3.5, 7.8)`
- `let (name, _, grade) = student in (name, min (grade + 1) 6)`

Именувани образци

- намиране на студент с по-висока оценка

```
betterStudent (name1, year1, grade1) (name2, year2, grade2)  
  | grade1 > grade2 = (name1, year1, grade1)  
  | otherwise      = (name2, year2, grade2)
```

- ами ако имахме 10 полета?
- удобно е да използваме **именувани образци**
- <име>@<образец>

```
betterStudent s1@(_, _, grade1) s2@(_, _, grade2)  
  | grade1 > grade2 = s1  
  | otherwise      = s2
```

Списъци

Дефиниция

- ❶ Празният списък $[]$ е списък от тип $[a]$
 - ❷ Ако h е елемент от тип a и t е списък от тип $[a]$ то $(h : t)$ е списък от тип $[a]$
 - h — глава на списъка
 - t — опашка на списъка
-
- списъкът е последователност с произволна дължина от елементи от **еднакъв тип**
 - $(:)$:: $a \rightarrow [a] \rightarrow [a]$ е **дясноасоциативна** двуместна операция
 - $(1:(2:(3:(4:[])))) = 1:2:3:4:[] \neq (((((1:2):3):4):[]))$
 - $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ е по-удобен запис за $a_1:(a_2:\dots(a_n:[])\dots)$
 - $[1,2,3,4] = 1:[2,3,4] = 1:2:[3,4] = 1:2:3:[4] = 1:2:3:4:[]$

Примери

- `[False] :: [Bool]`
- `["Иван", 4.5] :: ⊥`
- `[1]:2 :: ⊥`
- `[[1,2],[3],[4,5,6]] :: [[Int]]`
- `([1,2],[3],[4,5,6]) :: ([Int],[Int],[Int])`
- `[(1,2),(3),(4,5,6)] :: ⊥`
- `((1,2),(3),(4,5,6)) :: ((Int,Int),Int,(Int,Int,Int))`
- `[[]] :: [[a]]`
- `[]:[] :: [[a]]`
- `[1]: [[]] :: [[Int]]`
- `[]:[1] :: ⊥`
- `[[1,2,3],[]] :: [[Int]]`
- `[[1,2,3],[[]]] :: ⊥`
- `[1,2,3]:[4,5,6]:[[]] :: [[Int]]`

Низове

- В Haskell низовете са представени като списъци от символи
- `type String = [Char]`
- Всички операции над списъци важат и над низове
- **Примери:**
 - `['H', 'e', 'l', 'l', 'o'] == "Hello"`
 - `'H': 'e': 'l': 'l': 'o': [] == "Hello"`
 - `'H': 'e': "llo" == "Hello"`
 - `"" == [] :: [Char]`
 - `[[1,2,3], ""] :: ⊥`
 - `["12", ['3'], []] :: [String]`

Основни функции за списъци

- `head :: [a] -> a` — връща главата на (непразен) списък
 - `head [[1,2],[3,4]] -> [1,2]`
 - `head [] -> Грешка!`
- `tail :: [a] -> [a]` — връща опашката на (непразен) списък
 - `tail [[1,2],[3,4]] -> [[3,4]]`
 - `tail [] -> Грешка!`
- `null :: [a] -> Bool` — проверява дали списък е празен
- `length :: [a] -> Int` — дължина на списък

Образци и списъци

Много удобно е да използваме образци на списъци:

- $p_h:p_t$ — пасва на всеки непразен списък l , за който:
 - образецът p_h пасва на главата на l
 - образецът p_t пасва на опашката на l
- **Внимание:** обикновено слагаме скоби $(h:t)$, понеже операцията $:$ е с много нисък приоритет
- $[p_1, p_2, \dots, p_n]$ — пасва на всеки списък от точно n елемента $[x_1, x_2, \dots, x_n]$, за който образецът p_i пасва на елемента x_i
- **Примери:**
 - `head (h:_) = h`
 - `tail (_,t) = t`
 - `null [] = True`
 - `null _ = False`
 - `length [] = 0`
 - `length (_,t) = 1 + length t`

Случаи по образци (case)

- `case` <израз> `of` { <образец> `->` <израз> }⁺
- `case` <израз> `of` <образец₁> `->` <израз₁>
...
 <образец_n> `->` <израз_n>
- ако <израз> пасва на <образец₁>, връща <израз₁>, иначе:
- ...
- ако <израз> пасва на <образец_n>, връща <израз_n>, иначе:
- **Грешка!**
- Използването на образци в дефиниции всъщност е синтактична захар за конструкцията `case`!
- `case` може да се използва навсякъде, където се очаква израз

Генератори на списъци

Можем да генерираме списъци от последователни елементи

- $[a..b] \rightarrow [a, a+1, a+2, \dots, b]$
- Пример: $[1..5] \rightarrow [1, 2, 3, 4, 5]$
- Пример: $['a'..'e'] \rightarrow "abcde"$
- Синтактична захар за `enumFromTo from to`

- $[a, a + \Delta x .. b] \rightarrow [a, a + \Delta x, a + 2\Delta x, \dots, b']$, където b' е най-голямото число $\leq b$, за което $b' = a + k\Delta x$
- Пример: $[1, 4..15] \rightarrow [1, 4, 7, 10, 13]$
- Пример: $['a', 'e'..'z'] \rightarrow "aeimquy"$
- Синтактична захар за `enumFromThenTo from then to`

Рекурсивни функции над списъци

- $(++) :: [a] \rightarrow [a] \rightarrow [a]$ — слепва два списъка
 - $[1..3] ++ [5..7] \rightarrow [1,2,3,5,6,7]$

$[] ++ ys = ys$

$(x:xs) ++ ys = x:xs ++ ys$

- $reverse :: [a] \rightarrow [a]$ — обръща списък
 - $reverse [1..5] \rightarrow [5,4,3,2,1]$

$reverse [] = []$

$reverse (x:xs) = reverse xs ++ [x]$

- $(!!) :: [a] \rightarrow Int \rightarrow a$ — елемент с пореден номер (от 0)
 - $"Haskell" !! 2 \rightarrow 's'$
- $elem :: Eq a \Rightarrow a \rightarrow [a] \rightarrow Bool$ — проверка за принадлежност на елемент към списък
 - $3 \text{ 'elem' } [1..5] \rightarrow True$

Полиморфни функции

Функциите `head`, `tail`, `null`, `length`, `reverse` и операциите `++` и `!!` са **полиморфни**

- работят над списъци с елементи от произволен тип `[t]`
- `t` се нарича **типова променлива**
- свойството се нарича **параметричен типов полиморфизъм**
- подобно на шаблоните в C++
- **да не се бърка с подтипов полиморфизъм, реализиран с виртуални функции!**
- `[]` е **полиморфна константа**

Класове от типове (typeclasses)

Функцията `elem` има специални изисквания към типа на елементите на списъка: трябва да могат да бъдат сравнявани с `==` или `/=`

- `elem :: Eq t => t -> [t] -> Bool`
- `Eq` е **клас от типове**
- `Eq` е класът на тези типове, за които има операции `==` и `/=`
 - можем да си мислим за класовете от типове като за “интерфейси”
- `Eq t` наричаме **класово ограничение** за типа `t` (class constraint)
- множеството от всички класови ограничения наричаме **контекст**
- **инстанция** на клас от типове наричаме всеки тип, за който са реализирани операциите зададени в класа
- инстанции на `Eq` са:
 - `Bool`, `Char`, всички числови типове (`Int`, `Integer`, `Float`, `Double`)
 - списъчните типове `[t]`, за които `t` е инстанция на `Eq`
 - кортежните типове (t_1, \dots, t_n) , за които t_i са инстанции на `Eq`

Стандартни класове

Някои от по-често използваните класове на Haskell:

- `Eq` — типове с равенство
- `Ord` — типове с (линейна) наредба
 - операциите `==`, `/=`, `>=`, `<=`, `<`, `>`
 - специалната функция `compare`, която сравнява два елемента и връща `LT`, `GT` или `EQ` в зависимост от резултата
 - функциите `min` и `max`
- `Show` — типове, чиито елементи могат да бъдат извеждани в низ
 - функция `show :: a -> String`
- `Read` — типове, чиито елементи могат да бъдат въвеждани от низ
 - функция `read :: String -> a`
- `Num` — числови типове
- `Integral` — целочислени типове
- `Floating` — типове с плаваща запетая
- **числата в Haskell са полиморфни константи!**

Отделяне на списъци (list comprehension)

Отделянето на списъци е удобен начин за дефиниране на нови списъци чрез използване на дадени такива

- `[<израз> | <генератор> {, <генератор> | <условие>}]`
- `<генератор>` е от вида `<образец> <- <израз>`, където
 - `<израз>` е от тип списък `[a]`
 - `<образец>` пасва на елементи от тип `a`
- `<условие>` е произволен израз от тип `Bool`
- За всеки от елементите генериран от `<генератор>`, които удовлетворяват **всички** `<условие>`, пресмята `<израз>` и натрупва резултатите в списък

Примери за отделяне на списъци

- `[2 * x | x <- [1..5]]` \longrightarrow `[2,4,6,8,10]`
- `[x^2 | x <- [1..10], odd x]` \longrightarrow `[1,9,25,49,81]`
- `[name | (name, _, grade) <- students, grade >= 3]`
- `[x^2 + y^2 | (x, y) <- vectors, x >= 0, y >= 0]`
- Ако имаме повече от един генератор, се генерират всички възможни комбинации от елементи (декартово произведение)
- `[x++(' ':y) | x <- ["green", "blue"], y <- ["grass", "sky"]]`
 \longrightarrow `["green grass", "green sky", "blue grass", "blue sky"]`
- `[(x,y) | x <- [1,2,3], y <- [5,6,7], x + y <= 8]`
 \longrightarrow `[(1,5), (1,6), (1,7), (2,5), (2,6), (3,5)]`
- **Задача.** Да се генерират всички Питагорови тройки в даден интервал.

Отрязване на списъци

- `init :: [a] -> [a]` — списъка без последния му елемент
 - `init [1..5] → [1,2,3,4]`
- `last :: [a] -> a` — последния елемент на списъка
 - `last "Haskell" → l`
- `take :: Int -> [a] -> [a]` — първите n елемента на списък
 - `take 4 "Hello, world!" → "Hell"`
- `drop :: Int -> [a] -> [a]` — списъка без първите n елемента
 - `drop 2 [1,3..10] → [5,7,9]`
- `splitAt :: Int -> [a] -> ([a], [a])`
 - `splitAt n l = (take n l, drop n l)`

Агрегиращи функции

- `maximum :: Ord a => [a] -> a` — максимален елемент
- `minimum :: Ord a => [a] -> a` — минимален елемент
- `sum :: Num a => [a] -> a` — сума на списък от числа
- `product :: Num a => [a] -> a` — произведение на списък от числа
- `and :: [Bool] -> Bool` — конюнкция на булеви стойности
- `or :: [Bool] -> Bool` — дизюнкция на булеви стойности
- `concat :: [[a]] -> [a]` — конкатенация на списък от списъци
- **Примери:**
 - `[(sum 1, product 1) | 1 <- 11, maximum 1 == 2*minimum 1]`
 - `and [or [mod x k == 0 | x <- row] | row <- matrix]`

λ-функции

- $\backslash \{ \text{<параметър> } \}^+ \rightarrow \text{<тяло>}$
- $\backslash \text{<параметър}_1> \dots \text{<параметър}_n> \rightarrow \text{<тяло>}$
- анонимна функция с n параметъра
- всеки $\text{<параметър}_i>$ всъщност е образец
- параметрите са видими само в рамките на <тяло>
- **Примери:**
 - $\text{id} = \backslash x \rightarrow x$
 - $\text{const} = \backslash x y \rightarrow x$
 - $(\backslash x \rightarrow 2 * x + 1) 3 \longrightarrow 7$
 - $(\backslash x 1 \rightarrow 1 ++ [x]) 4 [1..3] \longrightarrow [1,2,3,4]$
 - $(\backslash (x,y) \rightarrow x^2 + y) (3,5) \longrightarrow 14$
 - $(\backslash f x \rightarrow f (f x)) (*3) 4 \longrightarrow 36$
- отсичането на операции може да се изрази чрез λ-функции:
 - $(\text{<операция> } \text{<израз>}) = \backslash x \rightarrow x \text{ <операция> } \text{<израз>}$
 - $(\text{<израз> } \text{<операция>}) = \backslash x \rightarrow \text{<израз> } \text{<операция> } x$

Свойства на λ -функциите

- $\backslash x_1 x_2 \dots x_n \rightarrow \langle \text{тяло} \rangle$
 $\iff \backslash x_1 \rightarrow \backslash x_2 \rightarrow \dots \backslash x_n \rightarrow \langle \text{тяло} \rangle$
- $f x = \langle \text{тяло} \rangle$
 $\iff f = \backslash x \rightarrow \langle \text{тяло} \rangle$
- $f x y = \langle \text{тяло} \rangle$
 $\iff f x = \backslash y \rightarrow \langle \text{тяло} \rangle$
 $\iff f = \backslash x y \rightarrow \langle \text{тяло} \rangle$
- $f x_1 \dots x_n = \langle \text{тяло} \rangle$
 $\iff f x_1 \dots x_{n-1} = \backslash x_n \rightarrow \langle \text{тяло} \rangle$
 $\iff \dots$
 $\iff f = \backslash x_1 \dots x_n \rightarrow \langle \text{тяло} \rangle$
- $\backslash x y \rightarrow f x y$
 $\iff \backslash x \rightarrow f x$
 $\iff f$

Трансформация (map)

- `map :: (a -> b) -> [a] -> [b]`
- `map f l = [f x | x <- l]`
- `map _ [] = []`
- `map f (x:xs) = f x : map f xs`
- **Примери:**
 - `map (^2) [1,2,3] -> [1,4,9]`
 - `map (!!1) [[1,2,3],[4,5,6],[7,8,9]] -> [2,5,8]`
 - `map sum [[1,2,3],[4,5,6],[7,8,9]] -> [6,15,24]`
 - `map ("a "++) ["cat", "dog", "pig"] -> ["a cat", "a dog", "a pig"]`
 - `map (\f -> f 2) [(^2),(1+),(*3)] -> [4,3,6]`

Филтриране (filter)

- `filter :: (a -> Bool) -> [a] -> [a]`
- `filter p l = [x | x <- l, p x]`
- `filter _ [] = []`
`filter p (x:xs)`
 | `p x` = `x : rest`
 | `otherwise` = `rest`
 where `rest = filter p xs`
- Примери:
 - `filter odd [1..5] → [1,3,5]`
 - `filter (\f -> f 2 > 3) [(^2),(+1),(*3)] → [(^2),(*3)]`
 - `map (filter even) [[1,2,3],[4,5,6],[7,8,9]] → [[2],[4,6],[8]]`
 - `map (\x -> map (\f -> filter f x) [(<0),(==0),(>0)])`
 `[[-2,1,0],[1,4,-1],[0,0,1]]`
 `→ [[[-2],[0],[1]], [[-1],[],[1,4]], [[],[0,0],[1]]]`

Отделяне на списъци с `map` и `filter`

Отделянето на списъци е синтактична захар за `map` и `filter`

- [<израз> | <образец> <- <списък>, <условие>]

↔

```
map (\<образец> -> <израз>)
  (filter (\<образец> -> <условие>) <списък>)
```
- [<образец> | <образец> <- <списък>, <условие₁>, <условие₂>]

↔

```
filter (\<образец> -> <условие2>)
  (filter (\<образец> -> <условие1>) <списък>)
```
- [<израз> | <образец₁> <- <списък₁>, <образец₂> <- <списък₂>]

↔

```
concat (map (\<образец1> ->
  map (\<образец2> -> <израз>) <списък2>)
  <списък1>)
```

Дясно свиване (foldr)

- `foldr :: (a -> b -> b) -> b -> [a] -> b`
- `foldr op nv [x1, x2, ..., xn] =`
`x1 'op' (x2 'op' ... (xn 'op' nv) ...)`
- `foldr _ nv [] = nv`
`foldr op nv (x:xs) = x 'op' foldr op nv xs`
- Примери:
 - `sum = foldr (+) 0`
 - `product = foldr (*) 1`
 - `concat = foldr (++) []`
 - `and = foldr (&&) True`
 - `or = foldr (||) False`
 - `map f = foldr (\x r -> f x : r) []`
 - `filter p = foldr (\x r -> (if p x then (x:) else id) r) []`

Ляво свиване (foldl)

- `foldl :: (b -> a -> b) -> b -> [a] -> b`
- `foldl op nv [x1, x2, ..., xn] =`
`(... ((nv 'op' x1) 'op' x2) ...) 'op' xn`
- `foldl _ nv [] = nv`
`foldl op nv (x:xs) = foldl op (nv 'op' x) xs`
- Пример:
 - `flip f x y = f y x`
 - `reverse = foldl (flip (:)) []`

Свиване на непразни списъци (`foldr1` и `foldl1`)

- `foldr1` :: (a -> a -> a) -> [a] -> a
- `foldr1` op $[x_1, x_2, \dots, x_n]$ =
 x_1 'op' (x_2 'op' ... (x_{n-1} 'op' x_n) ...)
- `foldr1` _ [x] = x
`foldr1` op (x:xs) = x 'op' `foldr1` op xs
- `foldl1` :: (a -> a -> a) -> [a] -> a
- `foldl1` op $[x_1, x_2, \dots, x_n]$ =
 $(\dots ((x_1$ 'op' $x_2)$...) 'op' x_n
- `foldl1` op (x:xs) = `foldl` op x xs
- Примери:
 - `maximum` = `foldr1` max
 - `minimum` = `foldr1` min
 - `last` = `foldl1` (_ x -> x)

Сканиране на списъци (`scanl`, `scanr`)

`scanr` и `scanl` връщат историята на пресмятането на `foldr` и `foldl`

- `scanr` :: (a -> b -> b) -> b -> [a] -> [b]
- `scanr` op nv [x₁, x₂, ..., x_n] =
 [x₁ 'op' (x₂ 'op' ... (x_n 'op' nv) ...),
 x₂ 'op' (... (x_n 'op' nv) ...),
 ...
 x_n 'op' nv,
 nv]
- `scanl` :: (b -> a -> b) -> b -> [a] -> [b]
- `scanl` op nv [x₁, x₂, ..., x_n] =
 [nv,
 nv 'op' x₁,
 (nv 'op' x₁) 'op' x₂,
 ...
 (... ((nv 'op' x₁) 'op' x₂) ...) 'op' x_n]

Съшиване на списъци (`zip`, `zipWith`)

- `zip` :: `[a] -> [b] -> [(a,b)]`
 - `zip` $[x_1, x_2, \dots, x_n] [y_1, y_2, \dots, y_n] \longrightarrow [(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)]$
 - ако единият списък е по-къс, спира когато свърши той
- `unzip` :: `[(a,b)] -> ([a],[b])`
 - разделя списък от двойки на два списъка с равна дължина
 - `unzip` $[(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)] \longrightarrow ([x_1, x_2, \dots, x_n], [y_1, y_2, \dots, y_n])$
- `zipWith` :: `(a -> b -> c) -> [a] -> [b] -> [c]`
 - “съшива” два списъка с дадена двуместна операция
 - `zipWith` $\text{op } [x_1, x_2, \dots, x_n] [y_1, y_2, \dots, y_n] \longrightarrow [\text{op } x_1 y_1, \text{op } x_2 y_2, \dots, \text{op } x_n y_n]$
- Примери:
 - `zip` $[1..3] [5..10] \longrightarrow [(1,5), (2,6), (3,7)]$
 - `zipWith` $(*) [1..3] [5..10] \longrightarrow [5,12,21]$
 - `zip` = `zipWith` `(,)`
 - `unzip` = `foldr` $\backslash(x,y) (xs,ys) \rightarrow (x:xs,y:ys)) ([], [])$

Разбивания на списъци

- `takeWhile :: (a -> Bool) -> [a] -> [a]`
 - връща първите елементи на списъка, за които е вярно условието
 - `takeWhile p = foldr (\x r -> if p x then x:r else []) []`
 - `takeWhile (<0) [-3..3] → [-3,-2,-1]`
- `dropWhile :: (a -> Bool) -> [a] -> [a]`
 - премахва първите елементи на списъка, за които е вярно условието
 - `dropWhile (<0) [-3..3] → [0,1,2,3]`
- `span :: (a -> Bool) -> [a] -> ([a], [a])`
 - `span p l = (takeWhile p l, dropWhile p l)`
 - `span (<0) [-3..3] → ([-3,-2,-1], [0,1,2,3])`
- `break :: (a -> Bool) -> [a] -> ([a], [a])`
 - `break p l = (takeWhile q l, dropWhile q l)`
 `where q x = not (p x)`
 - `break (>0) [-3..3] → ([-3,-2,-1,0], [1,2,3])`

Логически квантори (`any`, `all`)

- `any :: (a -> Bool) -> [a] -> Bool`
 - проверява дали предикатът е изпълнен за **някой елемент** от списъка
 - `any p l = or (map p l)`
 - `elem x = any (==x)`
- `all :: (a -> Bool) -> [a] -> Bool`
 - проверява дали предикатът е изпълнен за **всички елементи** на списъка
 - `all p l = and (map p l)`
 - `sorted l = all (\(x,y) -> x <= y) (zip l (tail l))`