# 1. Аксиоматизация на множествата – аксиоми за обема, отделянето, степенното множество и индуктивно генерираните множества.

През 1902 г. Bertrand Russell показва, че целият труд на Frege е неконсистентен, защото ползва "множество от множества" без ограничения.

**Определение 3**

*Множество, което не съдържа себе си, е обикновено.*
*Множество, което съдържа себе си, е необикновено.*

Примерът на Russell за необикновено множество:

> *The set of all those things that can be defined in less than 19 English words*

Тук ползваме само 16 думи, така че това множество е елемент на себе си.

**Определение 4**

*$\mathcal{O}$ е множеството от всички обикновени множества.*

Дали $\mathcal{O}$ е обикновено, или е необикновено?

- Да допуснем, че $\mathcal{O}$ е обикновено. Съгласно Определение 4 то е множеството от **обикновените** множества, следователно $\mathcal{O}$ е елемент на себе си. Но това го прави необикновено съгласно Определение 3. $\lightning$
- Да допуснем, че $\mathcal{O}$ е необикновено. Съгласно Определение 4 то е множеството от **обикновените** множества, следователно $\mathcal{O}$ не е елемент на себе си. Но това го прави обикновено съгласно Определение 3. $\lightning$

Това е *парадоксът на Russell*.

**- аксиома за обема**

За да няма парадокси са въведени *аксиоми* за множествата. Стандартната аксиоматизация е на Zermelo-Fraenkel (ZF). В този курс разглеждаме само част от ZF.

**Аксиома 1 (Аксиома за обема (extensionality))**

*Две множества са равни тстк съдържат едни и същи елементи.*

$$\forall X\ \forall Y\ (\forall z(z \in X \leftrightarrow z \in Y) \rightarrow X = Y)$$

Веднага следва, че редът, в който са записани елементите на дадено множество, както и наличието на повторения на елементи, е без значение.

**- аксиома за отделянето**

С предикат може да отделим подмножество от множество.

**Аксиома 2 (Аксиома за отделянето (separation))**

*Ако $X$ е множество и $\pi$ е предикат с домейн $X$, то съвкупността $Y$ от елементите на $X$, които имат свойството $\pi$, е множество.*

$$\forall X\ \exists Y\ \forall z\ (z \in Y \leftrightarrow \pi(z))$$

*Конструкторска нотация* (*set constructor notation* или *set builder notation*) за записване на "отделени множества":

$$Y = \{a \in X \mid \pi(a)\} \text{ е множество}$$

Изразът в скобите се чете "всички $a$ от $X$, за които $\pi(a)$". Алтернативен запис е

$$Y = \{a \in X : \pi(a)\} \text{ е множество}$$

Нека $A$ е множество, $\pi$ е предикат над него и
$B = \{a \in A : \pi(a)\}$. Казваме, че $B$ е *подмножество* на $A$ и пишем

$$B \subseteq A$$

Понякога пишем $A \supseteq B$ и казваме, че $A$ е *надмножество* на $B$.

От особен интерес са следните два екстремни случая:

- $\forall a \in A : \pi(a)$. В този случай $B = A$. Виждаме, че всяко множество е подмножество на себе си. Неслучайно символът "$\subseteq$" прилича на "$\leqslant$".
- $\neg\exists a \in A : \pi(a)$. В този случай $B$ няма елементи. Казваме, че $B$ е *празното множество* и пишем $B = \emptyset$ или $B = \{\}$. Празното множество е подмножество на всяко множество, включително и на себе си.

Забележете разликата между $\emptyset$ и $\{\emptyset\}$! Второто не е празното множество, а множеството, чийто единствен елемент е празното множество. В сила са

$$\emptyset \subseteq \{\emptyset\} \tag{1}$$
$$\emptyset \in \{\emptyset\} \tag{2}$$

но по различни причини. $\emptyset$ е подмножество на всяко множество, така че (1) е вярно независимо от множеството вдясно, докато (2) е вярно само защото множеството вдясно има елемент $\emptyset$.

Интересен е и случаят, в който $B \subseteq A$, но $B \neq A$. Тогава казваме, че $B$ е *същинско* подмножество на $A$ и пишем $B \subset A$, като "$\subset$" прилича на "$<$". За да е изпълнено $B \subset A$, то трябва да съществува $a \in A$, такъв че $a \notin B$. Понякога казваме, че $A$ е същинско надмножество на $B$ и пишем $A \supset B$.

**- аксиома за степенното множество**

**Аксиома 3 (Аксиома за степенното множество)**

*За всяко множество $X$ съществува множеството от всички негови подмножества, което наричаме степенното множество на $X$*

$$\forall X\ \exists Y\ \forall z\ (z \in Y \leftrightarrow z \subseteq X)$$

На английски казваме *the power set*. Степенното множество на $X$ бележим с $2^X$ или $\mathcal{P}(X)$ или $\mathrm{pow}(X)$.

Примери:

- Нека $X = \varnothing$. Тогава $2^X = \{\varnothing, \varnothing\} = \{\varnothing\}$.
- Нека $X = \{a, b, c\}$. Тогава

$$2^X = \big\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\big\}$$

**- индуктивно генериране на множества**

Множества, дефинирани чрез безкрайната процедура от аксиомата за индукцията, са *индуктивно генерирани множества*.

Най-простият пример за индуктивно генерирано множество е множеството $\mathbb{N}$ от естествените числа. При него $M_0 = \{0\}$, а $\mathcal{F}$ съдържа една единствена операция: добавяне на единица. На английски наричат тази операция *successor operation*, поради което е удачно да я бележим със “succ”; примерно, $\mathrm{succ}(0) = 1$, $\mathrm{succ}(1) = 2$, $\mathrm{succ}(99) = 100$ и така нататък.

Съгласно казаното дотук, нулата е естествено число, защото конструкцията на $\mathbb{N}$ започва с $\{0\}$.

- Прилагайки операцията succ по всевъзможните начини към $\{0\}$, получаваме 1. Добавяме 1 към $\mathbb{N}$ и то вече съдържа 0 и 1.
- Прилагайки операцията succ по всевъзможните начини към $\{0, 1\}$, получаваме 1 и 2. Добавяме 1 и 2 към $\mathbb{N}$ и то вече съдържа 0, 1 и 2.
- Прилагайки операцията succ по всевъзможните начини към $\{0, 1, 2\}$, получаваме 1, 2 и 3. Добавяме 1, 2 и 3 към $\mathbb{N}$ и то вече съдържа 0, 1, 2 и 3.
- И така нататък.

Пишем $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots, \}$, като "$\dots$" в десния край казва, че тази последователност е безкрайна.

## 2. Математическа индукция.

Тази аксиома не е част от ZF. Удачно е да мислим за нея като за конструкция, или безкрайна процедура, която генерира множество, стартирайки от някаква база и прилагайки итеративно някакви операции.

**Аксиома 4 (Аксиома за индукцията)**

*Нека е дадено непразно множество $M_0$, което наричаме базово множество, и непразно множество от операции $\mathcal{F}$, приложими в тази конструкция.*

- *Включваме елементите на $M_0$ в $M$, тоест, $M \leftarrow M_0$.*
- *Прилагаме неограничено следното:*
  - *Нека $M'$ е множеството от елементите, които се получават при всевъзможните прилагания на операциите от $\mathcal{F}$ върху текущото $M$;*
  - *Добавяме $M'$ към $M$, тоест, $M \leftarrow M \cup M'$.*

*Така полученото $M$ е множество. Пишем $M = (M_0, \mathcal{F})$.*

# 3. Основни операции върху множества и техните свойства.

**- операции**

Дефинираме няколко основни операции (действия) върху множества: обединение, сечение, разлика, симетрична разлика, допълнение.

Нека $A$ и $B$ са множества.

**Определение 7**

*Обединението на $A$ и $B$ е множеството:*

$$A \cup B = \{a \,|\, a \in A \vee a \in B\}$$

Обединението е аналог на логическия съюз дизюнкция.

Пример:

$$\{a, b, c, d\} \cup \{a, b, x, y\} = \{a, b, c, d, x, y\}$$

**Определение 8**

*Сечението на $A$ и $B$ е множеството:*

$$A \cap B = \{a \,|\, a \in A \wedge a \in B\}$$

Сечението е аналог на логическия съюз конюнкция. Сечението е комутативно.

Пример:

$$\{a, b, c, d\} \cap \{a, b, x, y\} = \{a, b\}$$

**Определение 9**

*Разликата A без B е множеството:*

$$A \backslash B = \{a \,|\, a \in A \wedge a \notin B\}$$

Разликата е аналог на логическия съюз импликация; по-точно, отрицание на импликация. Разликата не е комутативна.

Пример:

$$\{a, b, c, d\} \backslash \{a, b, x, y\} = \{c, d\}$$

**Определение 10**

*Симетричната разлика на A и B е множеството:*

$$A \vartriangle B = \{a \,|\, a \in A \bigoplus a \in B\}$$

Симетричната разлика е аналог на логическия съюз изключващо-или. Тя е комутативна.

Пример:

$$\{a, b, c, d\} \vartriangle \{a, b, x, y\} = \{c, d, x, y\}$$

**Определение 11**

*Нака е дадено универсално множество, или универсум, $U$. Допълнението на $A$ до $U$ е множеството:*

$$\overline{A^U} = \{a \,|\, a \in U \wedge a \notin A\}$$

Ако $U$ се подразбира, пишем просто "$\overline{A}$".

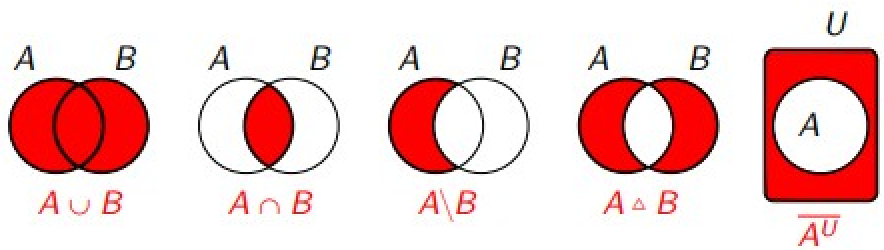
Разликата е аналог на логическия съюз отрицание.

Пример: ако $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, то

$$\overline{\{a, b, c, d\}} = \{e, f, g, h\}$$

ВАЖНО: най-голям универсум **няма**.

При две множества: две окръжности в общо положение.




**- свойства**

Напълно аналогични на съответните свойства на логическите съюзи. Примерно, обединението и сечението са идемпотентни, комутативни и асоциативни, понеже съответно дизюнкцията и конюнкцията са такива:

$$A \cup A = A, \quad A \cap A = A, \quad A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$$
$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

Обединетието и сечението дистрибутират едно спрямо друго:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Свойствата на константите се пренасят директно върху операции с множества, ако празното множество съответства на $\mathrm{F}$, а универсумът съответства на $\mathrm{T}$:

$$A \cup \varnothing = A, \quad A \cap \varnothing = \varnothing, \quad A \cup U = U, \quad A \cap U = A$$

Законът за двойното отрицание от логиката има следният аналог:

$$\overline{\overline{A}} = A$$

Аналозите на законите на De Morgan са

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Асоциативните операции като обединение и сечение може да се обобщават недвусмислено така за $k > 2$:

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k$$
$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k$$

Ползваме следната нотация:

$$\bigcup_{i=1}^{k} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k$$
$$\bigcap_{i=1}^{k} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k$$

## 4. Наредена двойка и наредена n-орка.

Искаме да въведем наредба – това е полезно и смислено. Примерно, има два елемента $a$ и $b$ и искаме да кажем, че $a$ е вляво от, или преди, $b$.

Как да го направим? "Ляво" и "дясно" са неформални поянтия. Лесно можем да въведем нотацията за наредба $(a, b)$, но как да кажем формално какво означава това?

Не искаме да въвеждаме ново първично понятие и нова първична нотация. "$(a, b)$" би трябвало да може да се изрази в езика на теорията на множествата.

**Определение 12**

*Всяко множество $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ наричаме наредена двойка с първи елемент $a$ и втори елемент $b$. Краткият запис е "$(a, b)$".*

Тъй като дефиницията ползва множество, със същия успех можехме да напишем $\{\{a, b\}, \{a\}\}$ и така нататък.

Следният важен резултат приемаме без доказателство.

**Теорема 1**

$(a, b) = (c, d)$ *тстк* $a = c$ *и* $b = d$.

Без формални обяснения приемаме, че понятията "наредена тройка" и така нататък имат очевиден смисъл. Нотациите са:

- $(a, b, c)$ за наредена тройка (triple).
- $(a, b, c, d)$ за наредена четворка (quadruple).
- $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ за наредена $k$-орка ($k$-tuple).

# 5. Декартово произведение и обобщено Декартово произведение на множества.

**- Декартово произведение**

Нека $A$ и $B$ са множества. *Декартовото произведение на $A$ и $B$* (Cartesian product) е множеството

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

Пример: нека $A = \{1, 2\}$ и $B = \{a, b, c\}$. Тогава

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$$
$$B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$$

В общия случай $A \times B \neq B \times A$. Тоест, операцията не е комутативна. Тя не е и асоциативна – защо?

**- обобщено Декартово произведение**

Чрез неформално въведените понятия наредена тройка, наредена четворка и наредена $k$-торка можем да направим следните дефиниции. Нека $A$, $B$, $C$, $D$, $A_1$, $A_2$, ..., $A_k$ са множества.

$$A \times B \times C = \{(a, b, c) \mid a \in A \wedge b \in B \wedge c \in C\}$$
$$A \times B \times C \times D = \{(a, b, c, d) \mid a \in A \wedge b \in B \wedge c \in C \wedge d \in D\}$$
$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k = \{(a_1, a_2, \ldots, a_k) \mid a_1 \in A_1 \wedge a_2 \in A_2 \wedge \cdots \wedge a_k \in A_k\}$$

Може да пишем "$\bigtimes_{i=1}^{k} A_i$" наместо "$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k$".

# 6. Релация над n домейна.

**Определение 1**

*Нека $n \geqslant 1$ и $A_1$, $A_2$, ..., $A_n$ са множества, наречени съответно първи домейн, втори домейн, ..., n-ти домейн. Релация над декартовото произведение $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ се нарича всяко множество*

$$R \subseteq A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$$

*Казваме, че $R$ е n-местна, или n-арна.*

Ако $n = 2$, релацията е *двуместна*. Ако $R$ е двуместна и първият и вторият домейн съвпадат, тоест $A_1 = A_2 = A$, казваме, че *$R$ е релация над Декартовия квадрат $A^2$*.
Ако кажем "$R$ е релация" без повече уточнения, подразбираме, че $R$ е релация над някакъв Декартов квадрат.

$<, \leqslant, >, \geqslant$ и $=$ са релации над Декартовия квадрат $\mathbb{R}^2$. Съгласно определението, всяка от тях е множество от наредени двойки от реални числа. Вярно е, че $(1,2) \in <$, $(1,2) \in \leqslant$, $(1,1) \in \leqslant$, $(1,1) \notin <$, и така нататък.

Нека $S$ е множество. $\subseteq_S$ е релация над $2^S \times 2^S$, дефинирана така:

$$\forall a, b \in 2^S : (a, b) \in \subseteq_S \stackrel{\text{def}}{\leftrightarrow} a \subseteq b$$

Примерно, нека $S = \{a, b\}$. Вярно, че $(\{a\}, \{a, b, \}) \in \subseteq_S$, $(\{a, b\}, \{a\}) \notin \subseteq_S$, и така нататък.

Това е в сила **само** за двуместни релации, независимо от това дали първият и вторият домейн съвпадат или не.

Нека $R \subseteq A_1 \times A_2$. Наместо да пишем "$(x, y) \in R$", където $x \in A_1$ и $y \in A_2$, пишем много по-прегледното "$x\, R\, y$". Това е *инфиксен запис*: символът на релацията се записва между елементите.

Това е записът, познат ни от училище. Примерно, "$1 < 2$" вместо $(1,2) \in <$, "$2 \nless 1$" вместо "$(2,1) \notin <$, и така нататък.

# 7. Свойства на бинарните релации.

**Само** за релациите от вида $R \subseteq A^2$ дефинираме следните шест стойства.

- рефлексивност
- антирефлексивност
- симетричност
- антисиметричност
- силна антисиметричност
- транзитивност

Нека $A$ е крайно (недефинирано засега понятие!!).

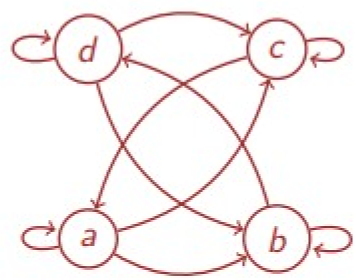
**- рефлексивност**

Нека $R \subseteq A^2$. $R$ е *рефлексивна* т.с.т.к. $\forall a \in A : aRa$.

В матрично представяне, по главния диагонал има само единици.

| | a | b | c | d |
|---|---|---|---|---|
| a | 1 | 1 | 1 | 0 |
| b | 0 | 1 | 0 | 1 |
| c | 1 | 0 | 1 | 0 |
| d | 0 | 1 | 1 | 1 |

В представяне с диаграми, всеки връх има примка.



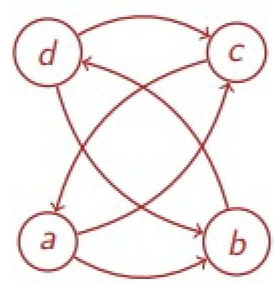

**- антирефлексивност**

Нека $R \subseteq A^2$. $R$ е *антирефлексивна* т.с.т.к. $\forall a \in A : \neg aRa$.

В матрично представяне, по главния диагонал има само нули.

| | a | b | c | d |
|---|---|---|---|---|
| a | 0 | 1 | 1 | 0 |
| b | 0 | 0 | 0 | 1 |
| c | 1 | 0 | 0 | 0 |
| d | 0 | 1 | 1 | 0 |

В представяне с диаграми, нито един връх няма примка.



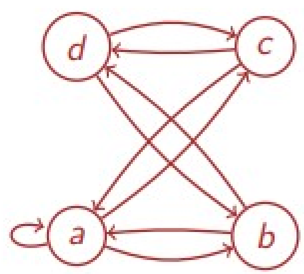

**- симтеричност**

Нека $R \subseteq A^2$. $R$ е *симетрична* т.с.т.к.
$\forall a, b \in A, a \neq b : aRb \rightarrow bRa$.

В матрично представяне, матрицата е симетрична спрямо главния диагонал. Съдържанието на главния диагонал е без значение.

| | a | b | c | d |
|---|---|---|---|---|
| a | 1 | 1 | 1 | 0 |
| b | 1 | 0 | 0 | 1 |
| c | 1 | 0 | 0 | 1 |
| d | 0 | 1 | 1 | 0 |

В представяне с диаграми, за всеки два различни върха, или има и двете стрелки от единия до другия, или няма нито едната стрелка от единия до другия.



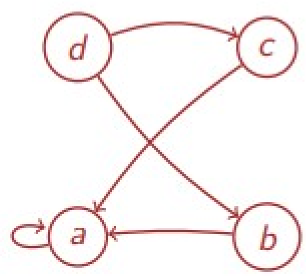

**- антисиметричност**

Нека $R \subseteq A^2$. $R$ е *антисиметрична* т.с.т.к.
$\forall a, b \in A, a \neq b : aRb \rightarrow \neg bRa$.

В матрично представяне, матрицата няма симетрична спрямо главния диагонал двойка единици. Съдържанието на главния диагонал е без значение.

| | a | b | c | d |
|---|---|---|---|---|
| a | 1 | 0 | 0 | 0 |
| b | 1 | 0 | 0 | 0 |
| c | 1 | 0 | 0 | 0 |
| d | 0 | 1 | 1 | 0 |

В представяне с диаграми, няма два различни върха, такива че има стрелка от първия до втория и от втория до първия.

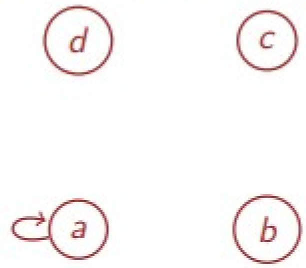


Симетричността и антисиметричността **не са** взаимно изключващи се съгласно формалните дефиниции. Може релация $R \subseteq A^2$ да е симетрична и антисиметрична.

В матрично представяне, извън главния диагонал са само нули. Съдържанието на главния диагонал е без значение.

$$\begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

В представяне с диаграми, за всеки два различни върха, и двете стрелки отсъстват. *Примките* са без значение.




Следните дефиниции са еквивалентни:

$$\forall a, b \in A : a \neq b \to (aRb \to \neg bRa)$$
$$\forall a, b \in A : aRb \wedge bRa \to a = b$$

Дефинираме прости съждения $p$, $q$, $r$ така: $\boxed{aRb}$ е $p$, $\boxed{bRa}$ е $q$, $\boxed{a = b}$ е $r$. Твърди се, че

$$\neg r \to (p \to \neg q) \equiv p \wedge q \to r$$

Наистина,

$$p \wedge q \to r \equiv \neg(p \wedge q) \vee r \equiv \neg p \vee \neg q \vee r \equiv$$
$$\neg\neg r \vee \neg p \vee \neg q \equiv \neg r \to (\neg p \vee \neg q) \equiv \neg r \to (p \to \neg q)$$

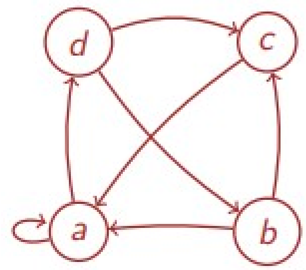
**- силна антисиметричност**

Нека $R \subseteq A^2$. $R$ е *силно антисиметрична* т.с.т.к. $\forall a, b \in A, a \neq b : aRb \oplus bRa$.

В матрично представяне, всяка двойка клетки, симетрични спрямо главния диагонал, съдържа противоположни стойности. Съдържанието на главния диагонал е без значение.

| | a | b | c | d |
|---|---|---|---|---|
| a | 1 | 0 | 0 | 1 |
| b | 1 | 0 | 1 | 0 |
| c | 1 | 0 | 0 | 0 |
| d | 0 | 1 | 1 | 0 |

В представяне с диаграми, за всеки два различни върха, точно едната стрелка е налична. Примките са без значение.

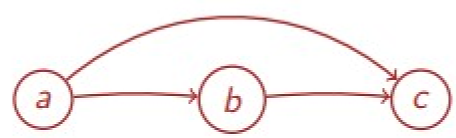



**- транзитивност**

Нека $R \subseteq A^2$. $R$ е *транзитивна* т.с.т.к. $\forall a, b, c \in A : aRb \wedge bRc \rightarrow aRc$. Нищо не налага $a$, $b$ и $c$ да са различни!

В матрично представяне транзитивността се описва тромаво, що се отнася до разчитане от човек.

В представяне с диаграми, типичното описание на транзитивността е следното.



Това описание на транзитивността е смислено само при $a \neq b \neq c \neq a$ (неравенството не е транзитивно!).

- Ако $a = b = c$, дали този елемент има примка или няма е без значение за транзитивността: ✓ или ✓.
- Ако $a = b \neq c$:
  - ако поне едината стрелка от единия до другия липсва, тази двойка "не пречи" на транзитивността: ✓, ✓, ✓, ✓.
  - ако и двете стрелки между тях са налице, ако поне единият няма примка, тази двойка "пречи" на транзитивността, иначе "не пречи": ✗, ✓.

## 8. Релации на еквивалентост и класове на еквивалентност.

**- релация на еквивалентност**

Релация е *релация на еквивалентност* т.с.т.к. е рефлексивна, симетрична и транзитивна.

От разгледаните досега релации над реалните числа само $=$ е релация на еквивалентност.

Ще разгледаме друга релация на еквивалентност. Нека $S$ е множеството от всички булеви стрингове с дължина четири.

$$S = \{0000, 0001, \ldots, 1110, 1111\}$$

Да въведем релация $R \subseteq S^2$ така: за всеки $a, b \in S$, $aRb$ тогава и само тогава, когато *$b$ е ротация на $a$*. $b$ е ротация на $a$ т.с.т.к. съществуват булеви стрингове $b_1$, $b_2$ със сумарна дължина четири (тоест, $|b_1| + |b_2| = 4$; $b_1$ или $b_2$ може да е празният стринг, тоест, може $|b_1| = 0$ или $|b_2| = 0$), такива че $b = b_1 b_2$ и $a = b_2 b_1$.

Примерно, 0001 е ротация на 0100 с $b_1 = 00$ и $b_2 = 01$, 0101 е ротация на 1010, и така нататък.

$R$ е релация на еквивалентност.

**- класове на еквивалентност**

Нека $R \subseteq A^2$ е релация на еквивалентност. За всеки $a \in A$ дефинираме множеството $[a] \stackrel{\text{def}}{=} \{b \in A \mid aRb\}$.

В примера от миналия слайд:

$$
\begin{aligned}
[0000] &= \{0000\} \\
[0001] &= \{0001, 0010, 0100, 1000\} \\
[0010] &= \{0001, 0010, 0100, 1000\} \\
[0011] &= \{0011, 0110, 1100, 1001\} \\
[0100] &= \{0001, 0010, 0100, 1000\} \\
[0101] &= \{0101, 1010\} \\
[0110] &= \{0011, 0110, 1100, 1001\} \\
[0111] &= \{0111, 1110, 1101, 1011\} \\
[1000] &= \{0001, 0010, 0100, 1000\} \\
&\ \ldots \\
[1111] &= \{1111\}
\end{aligned}
$$

**Теорема 1**

*Нека $R \subseteq A^2$ е релация на еквивалентност. Тогава фамилията $\{[a] \mid a \in A\}$ е разбиване на $A$.*

В примера със стрингове, те са 16 на брой, но фамилията $\{[a] \mid a \in A\}$ има само шест елемента:

$$
\big\{\{0000\}, \{1111\}, \{0001, 0010, 0100, 1000\},
\{0101, 1010\}, \{0011, 0110, 1100, 1001\}, \{0111, 1110, 1101, 1011\}\big\}
$$

Очевидно тази фамилия е разбиване на $S$.

Доказателство на Теорема 1:

- Всеки елемент на $A$ е в поне един елемент на фамилията: очевидно, понеже в $\{[a] \mid a \in A\}$, $a$ взема последователно стойностите на всички елементи от $A$ ✓.
- Всеки елемент на фамилията е непразен: очевидно, понеже $R$ е рефлексивна ✓.
- Всеки два различни елемента на фамилията имат празно сечение. Това е неочевидно.

## 9. Релации на частична наредба.

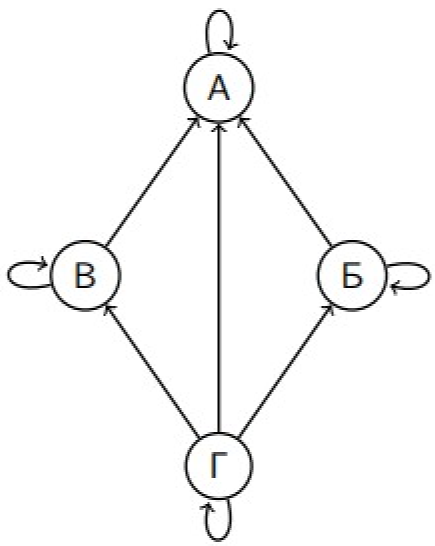
Релация е *релация на частична наредба* т.с.т.к. е рефлексивна, антисиметрична и транзитивна.

От разгледаните релации върху реалните числа, $=$, $\leqslant$ и $\geqslant$ са частични наредби. $\subseteq_S$ също е частична наредба.

Частични наредби се появяват, например, при класиране по повече от един критерии. Нека класираме програмисти по *C* и *Java*, с оценка $(x, y)$, където $x$ е оценката по *C*, а $y$, по *Java*. Нека няма еднакви оценки по никой от езиците. Ясно ли е как да класираме?

Не непременно. Ако Албена има $(6, 6)$, Борис има $(5, 5)$, Владо има $(4, 4)$ и Гергана има $(3, 3)$, нещата са ясни. Но ако Борис има $(5, 4)$, а Владо има $(4, 5)$, те двамата стават несравними.

При частичните наредби може (но не непременно!) да има несравними елементи. $a$ и $b$ са несравними, ако $\neg aRb$ и $\neg bRa$.




**- влагане на частична наредба в линейна (пълна) наредба**

Ако $R \subseteq A^2$ е частична наредба, $R' \subseteq A^2$ е линейна наредба и $R \subseteq R'$, казваме, че $R$ *се влага в* $R'$. Алтернативно, казваме, че $R'$ *е линейно разширение на* $R$.

При $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, броят на линейните разширения варира много: от 1 (самата $R$ е линейна наредба) до $n!$ (няма сравними елементи в $R$).

**- верига и контур**

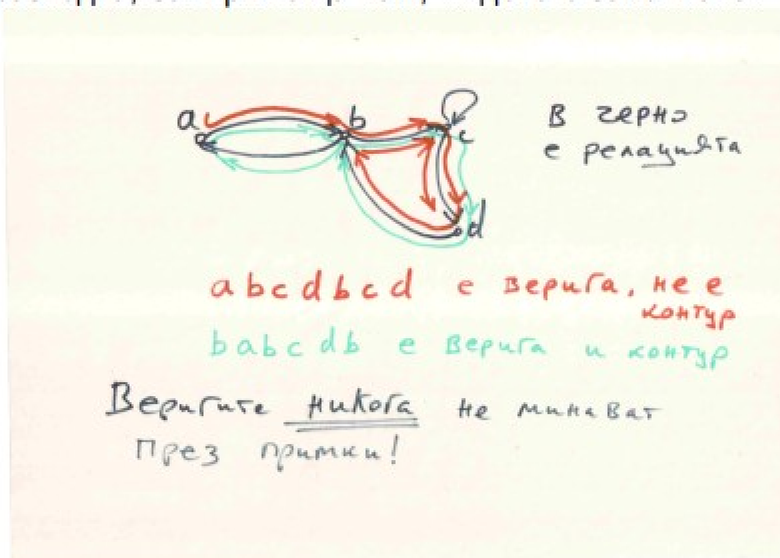
Ако $R \subseteq A^2$ е **произволна** релация и $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, *верига в* $R$ е всяка редица

$$a_{i_0}, a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}$$

където $i_0, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$, ако $a_{i_j} R a_{i_{j+1}}$ и $a_{i_j} \neq a_{i_{j+1}}$ за $0 \leqslant j < k$. Ограничение за $k$ няма; иначе казано, $k \geqslant 0$. Тогава един единствен елемент е верига.

Ако $a_{i_0} = a_{i_k}$ и $k > 0$, веригата е *контур*. Лесно се вижда, че $k > 0$ налага $k > 1$. Един единствен елемент не е контур.

Веригата е нещо като разходка в диаграмата, която не може да минава през примки, но може да повтаря върхове. Контурът е разходка, завършваща там, където е започнала.




**Теорема 2**

*Нека $R \subseteq A^2$ е рефлексивна и транзитивна. Тогава $R$ е частична наредба т.с.т.к. тя няма контури.*

**Доказателство, 1.** Нека $R$ е частична наредба. Ще докажем, че $R$ няма контури. Допускаме противното: $R$ има контур

$$a_{i_0}, a_{i_1}, \ldots, a_{k_{i-1}}, a_{i_k} = a_{i_0}$$

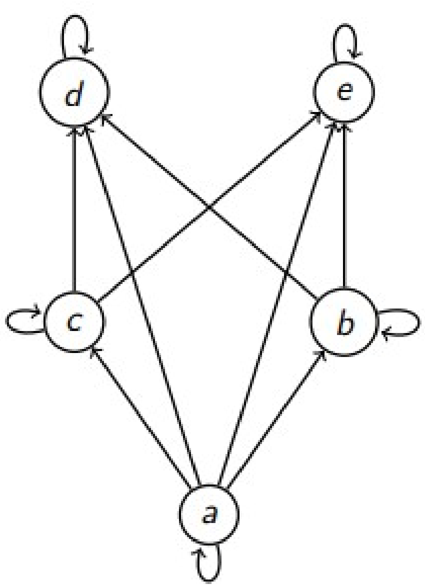
Щом $a_{i_0} R a_{i_1}$ и $a_{i_1} R a_{i_2}$, то от транзитивността на $R$ следва, че $a_{i_0} R a_{i_2}$. Щом $a_{i_0} R a_{i_2}$ и $a_{i_2} R a_{i_3}$, то от транзитивността на $R$ следва, че $a_{i_0} R a_{i_3}$. И така нататък. Щом $a_{i_0} R a_{i_{k-2}}$ и $a_{i_{k-2}} R a_{i_{k-1}}$, то от транзитивността на $R$ следва, че $a_{i_0} R a_{i_{k-1}}$. Но $a_{i_{k-1}} R a_{i_0}$ от определението на "контур". Тогава $R$ не е антисиметрична. ✓

**- минимален и максимален елемент**

Нека $R \subseteq A^2$ е частична наредба. За всеки $a \in A$, казваме, че $a$ *е минимален в* $R$, ако $\neg \exists b \in A, b \neq a : bRa$. Съгласно правилата на предикатната логика, това е еквивалентно на $\forall b \in A, b \neq a : \neg bRa$.

Аналогично, $a$ *е максимален в* $R$, ако $\neg \exists b \in A, b \neq a : aRb$. Съгласно правилата на предикатната логика, това е еквивалентно на $\forall b \in A, b \neq a : \neg aRb$.

Може да има повече от един минимален и повече от един максимален елемент. Може да няма минимален или максимален елемент.




$a$ е минималният, $d$ и $e$ са максималните.


Всеки елемент е и минимален, и максимален.

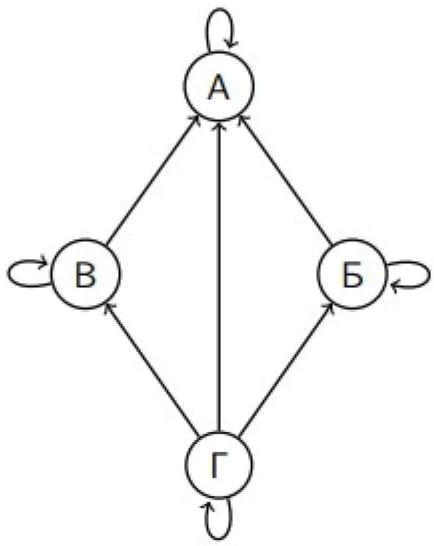
Ако $R$ е линейна наредба и $A$ е крайно множество, има точно един минимален и точно един максимален елемент (които съвпадат т.с.т.к. множеството има точно един елемент). Обратното не е вярно: може да има точно един минимален и точно един максимален елемент, но наредбата да не е линейна – вижте примера на страница 31.

Ако $A$ е безкрайно, може да няма минимален или максимален елемент. Например, $\leqslant$ няма максимален елемент върху естествените числа, но има минимален елемент – нулата. Върху целите числа тя няма нито минимален, нито максимален елемент.

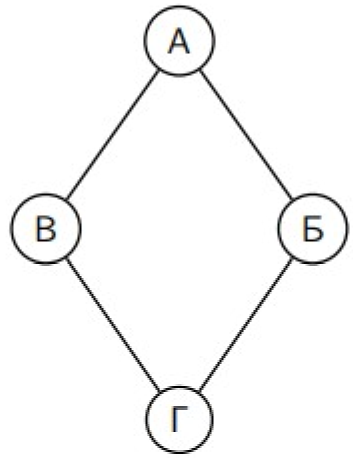
## 10. Диаграми на Хассе

Удобен начин за изобразяване на малки релации на частична наредба. Започваме от диаграмата на релацията. Изпускаме примките – те се подразбират. Рисуваме диаграмата така, че стрелките сочат нагоре; може да не е директно нагоре, но краят на всяка стрелка да е по-високо от началото ѝ. Изпускаме стрелките, чието наличие следва от транзитивността – те се подразбират. Премахваме посоките на стрелките – и те се подразбират (отдолу нагоре).

Резултатът от тези опростявания се нарича *диаграма на Hasse*. Тя съдържа само съществената информация за релацията.

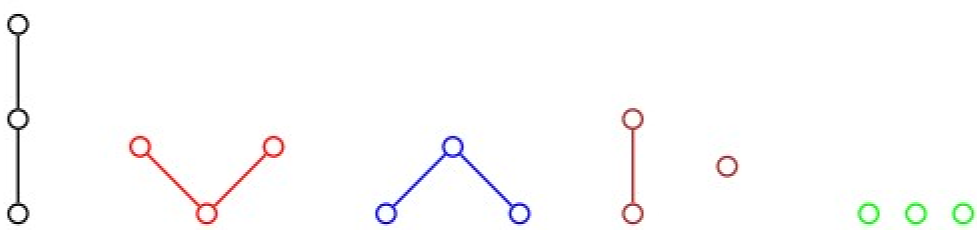



Релацията от страница 31




Нейната диаграма на Hasse.

Правим всички диаграми на Hasse на три елемента без имена на елементите. Те са пет на брой. После съобразяваме за всяка от тях по колко различни начина можем да раздадем имената.



6 3 3 6 1

Общо, $6 + 3 + 3 + 6 + 1 = 19$ частични наредби при три елемента.

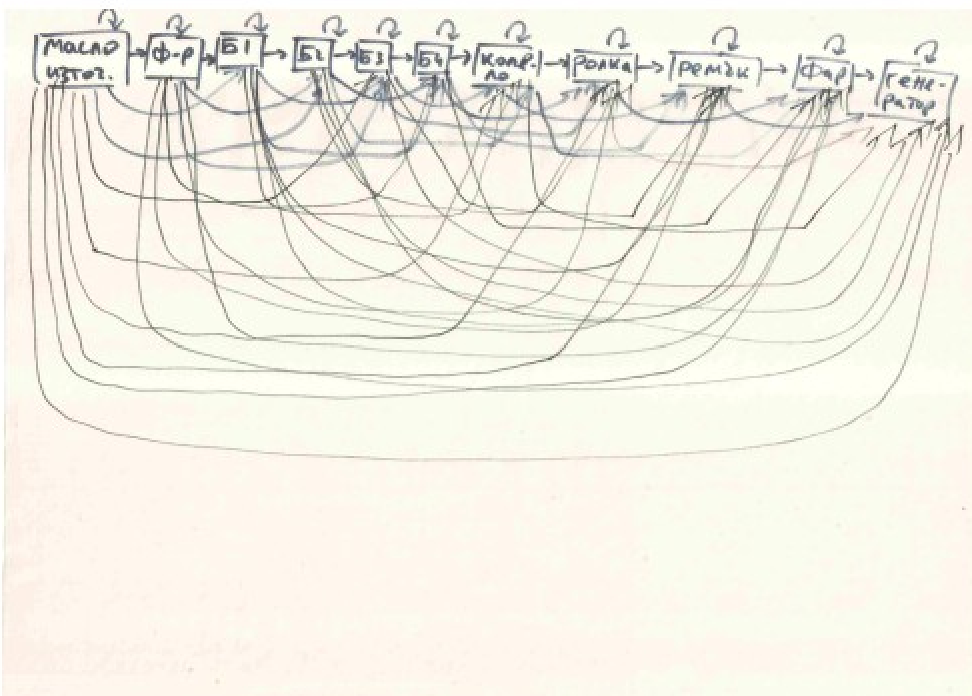
# 11. Релации на пълна наредба.

Релация е *релация на линейна наредба* т.с.т.к. е рефлексивна, силно антисиметрична и транзитивна.

Не може да има несравними двойки елементи заради силната антисиметричност.

Ако $R \subseteq A^2$ е линейна наредба и $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, то $R$ има точно $\frac{n(n+1)}{2}$ елемента.

Линейните наредби са частен случай на частичните – всяка линейна е частична, но обратното не е вярно.

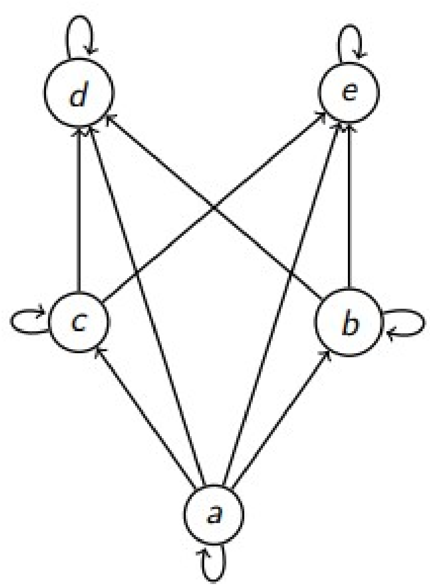


# 12. Минимален и максимален елемент в релация на частична наредба.

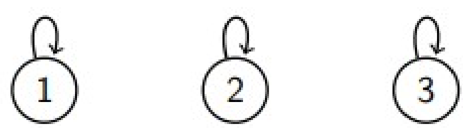
Нека $R \subseteq A^2$ е частична наредба. За всеки $a \in A$, казваме, че $a$ *е минимален в* $R$, ако $\neg \exists b \in A, b \neq a : bRa$. Съгласно правилата на предикатната логика, това е еквивалентно на $\forall b \in A, b \neq a : \neg bRa$.

Аналогично, *a е максимален в* $R$, ако $\neg \exists b \in A, b \neq a : aRb$. Съгласно правилата на предикатната логика, това е еквивалентно на $\forall b \in A, b \neq a : \neg aRb$.

Може да има повече от един минимален и повече от един максимален елемент. Може да няма минимален или максимален елемент.




$a$ е минималният, $d$ и $e$ са максималните.




Всеки елемент е и минимален, и максимален.

Ако $R$ е линейна наредба и $A$ е крайно множество, има точно един минимален и точно един максимален елемент (които съвпадат т.с.т.к. множеството има точно един елемент). Обратното не е вярно: може да има точно един минимален и точно един максимален елемент, но наредбата да не е линейна – вижте примера на страница 31.

Ако $A$ е безкрайно, може да няма минимален или максимален елемент. Например, $\leqslant$ няма максимален елемент върху естествените числа, но има минимален елемент – нулата. Върху целите числа тя няма нито минимален, нито максимален елемент.

## 13. Влагане на частична наредба в пълна наредба – топологично сортиране.

**- влагане**

Ако $R \subseteq A^2$ е частична наредба, $R' \subseteq A^2$ е линейна наредба и $R \subseteq R'$, казваме, че $R$ *се влага в* $R'$. Алтернативно, казваме, че $R'$ *е линейно разширение на* $R$.

При $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, броят на линейните разширения варира много: от 1 (самата $R$ е линейна наредба) до $n!$ (няма сравними елементи в $R$).

**- топологично сортиране**

**Теорема 5**

*Нека $A$ е крайно множество, $|A| = n$ и $R \subseteq A^2$ е частична наредба. Тогава съществува поне едно линейно разширение $R'$ на $R$.*

Доказателството е конструктивно: с алгоритъм, известен като *Topological Sorting*. Няма да строим самото линейно разширение $R'$, а ще построим $B[1, \ldots, n]$, в който ще разположим елементите на $A$. Разполагането на елементи на множество в масив задава еднозначно линейна наредба. Формално, $B$ и $R'$ са съвършено различни обекти; най-малкото, $|R'| = \frac{n(n+1)}{2}$. Но $R'$ може да бъде конструирана лесно от $B$.

Вход: крайно $A$, като $|A| = n$; частична наредба $R \subseteq A^2$
Изход: масив $B$, реализиращ линейно разширение $R'$ на $R$

1. $i \leftarrow 1$
2. избираме произволен $a \in A$, който е минимален елемент на $R$
3. $B[i] \leftarrow a$, изтриваме $a$ от $A$ и от $R$, правим $i{+}{+}$
4. ако $i = n + 1$, върни $B$, в противен случай иди на 2.

Алгоритъмът е коректен, тъй като в началото има поне един минимален елемент съгласно Теорема 4, а при всяка следващо достигане на ред 2 пак има поне един минимален елемент, тъй като изтриване на елемент от релацията не може да образува цикъл, ерго тя остава частична наредба след всяко изтриване на ред 3.

# 14. Частични и тотални функции.

**Определение 1 (Частична функция)**

*Нека $X$ и $Y$ са множества. Частична функция с домейн $X$ и кодомейн $Y$ е всяка релация $f \subseteq X \times Y$, такава че за всяко $x \in X$ съществува не повече от едно $y \in Y$, такова че $(x, y) \in f$.*

**Определение 2 (Тотална функция)**

*Нека $X$ и $Y$ са множества. Тотална функция с домейн $X$ и кодомейн $Y$ е всяка релация $f \subseteq X \times Y$, такава че за всяко $x \in X$ съществува точно едно $y \in Y$, такова че $(x, y) \in f$.*

**Определение (Частична функция)**

*Нека $X$ и $Y$ са множества. Частична функция с домейн $X$ и кодомейн $Y$ е всяка релация $f \subseteq X \times Y$, такава че*

$$\begin{aligned}\forall x \in X \big( & (\neg \exists y \in Y : (x, y) \in f) \vee \\ & ((\exists y \in Y : (x, y) \in f) \wedge \\ & (\forall w, z \in Y : (x, w) \in f \wedge (x, z) \in f \rightarrow w = z))\big)\end{aligned}$$

Или по-просто

**Определение (Частична функция)**

*Нека $X$ и $Y$ са множества. Частична функция с домейн $X$ и кодомейн $Y$ е всяка релация $f \subseteq X \times Y$, такава че*

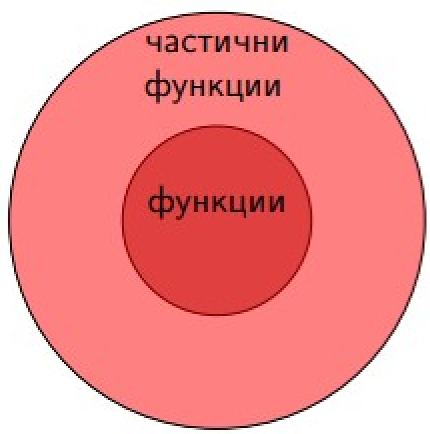
$$\begin{aligned}\forall x \in X \big( & (\neg \exists y \in Y : (x, y) \in f) \vee \\ & (\forall w, z \in Y : (x, w) \in f \wedge (x, z) \in f \rightarrow w = z))\big)\end{aligned}$$

### Определение (Тотална функция)

*Нека $X$ и $Y$ са множества. Тотална функция с домейн $X$ и кодомейн $Y$ е всяка релация $f \subseteq X \times Y$, такава че*

$$\forall x \in X\big((\exists y \in Y : (x, y) \in f) \wedge \\ (\forall w, z \in Y : (x, w) \in f \wedge (x, z) \in f \to w = z)\big)$$

Тоталните функции се срещат по-често в практиката, затова само "функция" е "тотална функция". При дадени $X$ и $Y$, очевидно тоталните са строго подмножество на частичните. Следователно, само "функция" е частен случай на "частична функция": всяка функция е частична функция, но не всяка частична функция е функция.
Това води до противоречие с приетото разбиране за прилагателните, с които отделяме подмножества като в аксиомата за отделянето.


На практика често казваме "изображение" (mapping) вместо "функция". Това обаче не е определение: а какво е "изображение"?

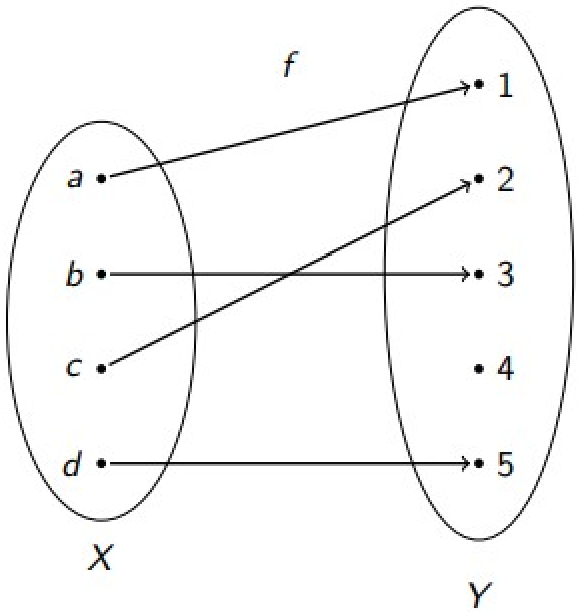
Предпочитаме да не въвеждаме "функция" като ново първично понятие, а да използваме вече изградени понятия и да дефинираме "функция" чрез тях.

И така, формално, функция е вид релация.

# 15. Инекции, биекции и сюрекции.

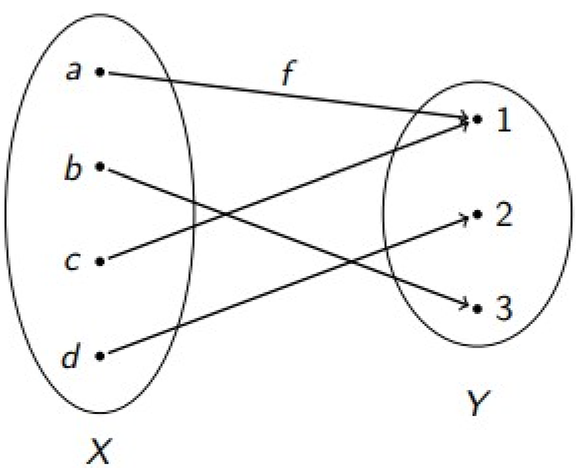
**- инекция**

Нека $f : X \to Y$. $f$ е *инекция*, ако
$\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \to x_1 = x_2$.



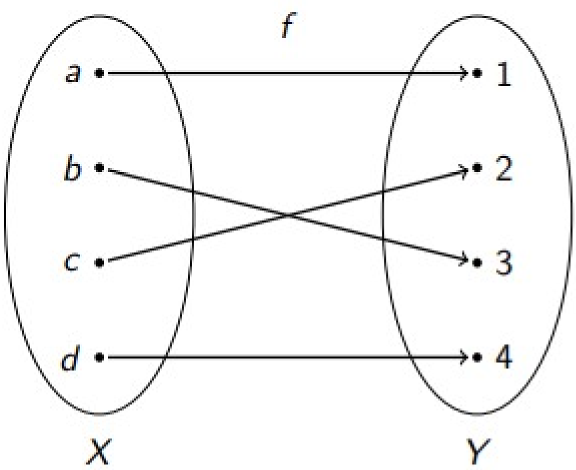

- **сюрекция**

Нека $f : X \to Y$. $f$ е *сюрекция*, ако $\forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y$.
Неформално: кодомейнът да бъде "покрит" от изображението.




- **биекция**

Нека $f : X \to Y$. $f$ е *биекция*, ако е инекция и сюрекция. Още се казва *взаимно еднозначно изображение*.




Сядането на хора в зала е частична функция с домейн хората и кодомейн столовете, ако никой не седи на повече от един стол; възможно е да има правостоящи.

Ако няма правостоящи, сядането е функция.

Ако на никой стол не седи повече от един човек, сядането е инекция.

Ако няма празни столове, сядането е сюрекция.

Ако всеки човек седи на отделен стол и няма празни столове, сядането е биекция. Очевидно броят на столовете е равен на броя на хората.

Нека $f : X \to Y$ е биекция. *Обратната функция на* $f$ се бележи с $f^{-1}$. Тя е с домейн $Y$ и кодомейн $X$ и се дефинира така:

$$\forall y \in Y : f^{-1}(y) = x, \text{ където } x \text{ е уникалният елемент на } X, \\ \text{такъв че } f(x) = y$$

## 16. Дефиниция на крайно множество и на кардиналност на крайно множество.

Дефинирането на "крайно множество" става чрез биекция между него и някое множество $\{1, 2, \ldots, n\}$.

**Определение 3 (крайно множество, кардиналност)**

*Множество $A$ е крайно, ако*

- $A = \varnothing$, *в който случай кардиналността на $A$ е 0,*
- *или съществува $n \in \mathbb{N}^+$, такова че съществува биекция $f : A \to \{1, 2, \ldots, n\}$; тогава кардиналността на $A$ е $n$.*

Кардиналността на $A$ е броят на елементите и се бележи с $|A|$. "Мощност на множество" е синоним на "кардиналност на множество". Множества са *равномощни*, ако между тях съществува биекция.

## 17. Дефиниция на изброимо безкрайно множество.

**Определение 5 (изброимо безкрайно множество)**

*Множество $A$ е изброимо безкрайно, ако е равномощно на $\mathbb{N}$.*

## 18. Принцип на Дирихле.

Ако $X$ и $Y$ са крайни множества и $|X| > |Y|$, то не съществува инекция $f : X \to Y$.

Алтернативна формулировка: ако има $m$ ябълки в $n$ чекмеджета и $m > n$, то в поне едно чекмедже има повече от една ябълка.

Обобщен принцип на Dirichlet: ако има $kn + 1$ ябълки в $n$ чекмеджета, то в поне едно чекмедже има повече от $k$ ябълки.