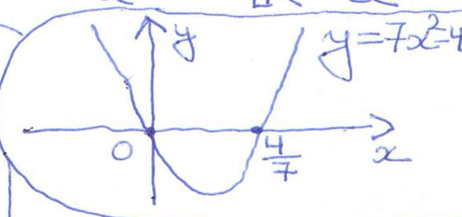
① Упражнение 20 за 1, 2 и 3 група

Теорема на Рол: Ако $f(x)$ е непрекъсната в $[a,b]$, диференцируема в (a,b) и $f(a)=f(b)$, то $f'(x)$ има нула в (a,b) (т.е. $\exists\, c \in (a,b)$, такова че $f'(c)=0$).

Зад. 1 Докажете, че уравнението $7x^2-4x-\cos 3x=0$ има точно 2 реални корена.

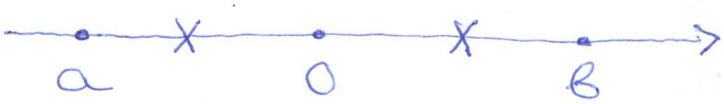
Решение: Нека $f(x)=7x^2-4x-\cos 3x$, $x\in\mathbb{R}$. Трябва да док. че $f(x)$ има точно 2 различни реални нули.
Имаме, че $f(x)$ е непрекъсната в $\mathbb{R}$ и $f(0)=-1$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty$.



$y=\cos 3x$ пък е ограничена функция

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty \Rightarrow \exists\, a\in(-\infty,0)$, такова че $f(a)>0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \Rightarrow \exists\, b\in(0,+\infty)$, такова че $f(b)>0$.



По теоремата на Болцано $f(x)$ има поне една нула в $(a,0)$ и поне една нула в $(0,b)$. Сл. $f(x)$ има поне 2 различни реални нули.

Да допуснем, че $f(x)$ има повече от 2 (т.е. поне 3) различни реални нули.

Тогава по теоремата на Рол $f'(x)=14x-4+3\sin 3x$ ще има поне 2 различни реални нули, а $f''(x)=14+9\cos 3x$ ще има поне 1 реална нула
($f''(x)=0 \iff \cos 3x=-\frac{14}{9}$, а пък $-\frac{14}{9}\notin[-1,1]$)
Сл. $f(x)$ има точно 2 различни реални нули.

② Теорема на Лагранж. Ако $f(x)$ е непрекъсната в $[a,b]$ и диференцируема в (a,b), то съществува $c \in (a,b)$, такова че
$f(b)-f(a)=f'(c).(b-a)$.

Следствие 1 (критерий за константност)
Ако $f(x)$ е диференцируема в интервала Δ и $f'(x)=0$ в Δ, то $f(x)=\text{const}$ в Δ.

Следствие 2 (критерий за монотонност)
Нека $f(x)$ е диференцируема в интервала Δ. Тогава:

1) ако $f'(x)>0$ в Δ, то $f(x)$ е строго растяща в Δ;

2) ако $f'(x)<0$ в Δ, то $f(x)$ е строго намаляваща в Δ.

Идея за доказателство на двете следствия

$a \in \Delta$ е фиксирано, $b \in \Delta$ е произволно, c е точката от т-мата на Лагранж

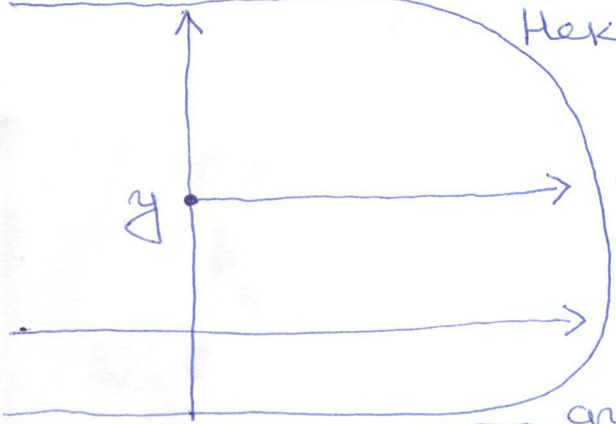
$f(b)-f(a)=f'(c).(b-a)$

Зад. 2 Док. че
$$\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=\begin{cases}\frac{\pi}{2}, & \text{ако } x\in(0,+\infty)\\ -\frac{\pi}{2}, & \text{ако } x\in(-\infty,0)\end{cases}$$

Решение:
Нека $f(x)=\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.
Имаме, че $f(x)$ е диференцируема в $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ и $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=$
$$=\frac{1}{1+x^2}-\frac{\cancel{x^2}}{x^2+1}\cdot\frac{1}{\cancel{x^2}}=0,\quad x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}.$$
По критерия за константност
$f(x)=c_1$ при $x\in(-\infty,0)$ и $f(x)=c_2$ при $x\in(0,+\infty)$.
Понеже $f(-1)=2\operatorname{arctg}(-1)=-\frac{\pi}{2}$ и $f(1)=2\operatorname{arctg}1=$
$=\frac{\pi}{2}$, то $f(x)=-\frac{\pi}{2}$ в $(-\infty,0)$ и $f(x)=\frac{\pi}{2}$ в $(0,+\infty)$.

③ Зад. 3 Док. че $\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}\dfrac{x-y}{1+xy}$, ако $x>0$ и $y>0$.

Решение:



Фиксираме $y>0$.
Нека $f(x) = \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y - \operatorname{arctg}\dfrac{x-y}{1+xy}$ за $x \in (0,+\infty)$

Трябва да док. че $f(x) = 0$ за $x \in (0,+\infty)$.
Имаме, че $f(x)$ е диференцируема за $x \in (0,+\infty)$ и

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \overset{\boxed{\operatorname{arctg} y = \text{const}}}{0} - \frac{1}{1+\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)^2} \cdot \frac{1.(1+xy)-(x-y).y}{(1+xy)^2} =$$

$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{\cancel{(1+xy)^2}}{(1+xy)^2+(x-y)^2} \cdot \frac{1+y^2}{\cancel{(1+xy)^2}} =$$

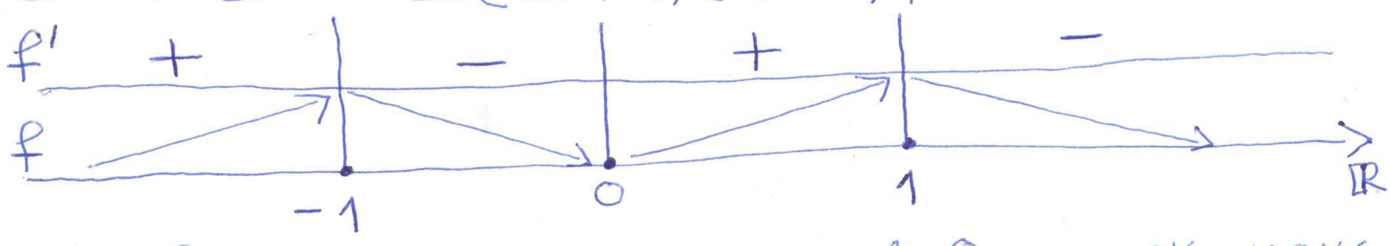
$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1+y^2}{1+x^2y^2+x^2+y^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{\cancel{1+y^2}}{(1+x^2)\cancel{(1+y^2)}} = 0$$

за $x \in (0,+\infty)$. По критерия за константност $f(x) = \text{const}$ в $(0,+\infty)$ и понеже $f(y)=0$, то $f(x)=0$ при $x \in (0,+\infty)$.

Зад. 4 Намерете лок. екстремуми на функцията $f(x) = x^2 e^{-x^2}$.

Решение: $f(x)$ е диференцируема в $\mathbb{R}$ и

$$f'(x) = 2x.e^{-x^2} + x^2.e^{-x^2}(-2x) = -2xe^{-x^2}(x^2-1)$$
$$= -2e^{-x^2}x(x+1)(x-1),\ x \in \mathbb{R}.$$



Сл. $f(x)$ има лок. мин. в 0 и лок. макс. в ± 1.

С критерия за монотонност се доказват и много неравенства, но примери за това ще разглеждаме в следващото упражнение.