Лекция 10.6.2021

1 Афинни изображения, еднаквости, подобности — продължение

Припомняне от по-миналия път

Матрица на линейно изображение (припомняне от алгебрата)

Нека U и V са крайномерни реални линейни пространства, $\dim U = m$, $\dim V = n$, $e = (e_1, \dots, e_m)$ и $f = (f_1, \dots, f_n)$ са базиси съответно на U и V и $\Phi : U \to V$ е линейно изображение. Тогава всеки от векторите $\Phi(e_1), \dots, \Phi(e_m) \in V$ е линейна комбинация на $f_1, \dots, f_n$, тоест съществуват числа $t_{ij} \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, такива че

$$
\begin{array}{rcl}
\Phi(e_1) & = & t_{11}f_1 + t_{21}f_2 + \cdots + t_{n1}f_n \\
\Phi(e_2) & = & t_{12}f_1 + t_{22}f_2 + \cdots + t_{n2}f_n \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\Phi(e_j) & = & t_{1j}f_1 + t_{2j}f_2 + \cdots + t_{nj}f_n \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\Phi(e_m) & = & t_{1m}f_1 + t_{2m}f_2 + \cdots + t_{nm}f_n
\end{array} \tag{1}
$$

тоест

$$\Phi(e_j) = \sum_{i=1}^{n} t_{ij} f_i, \quad j = 1, \dots, m. \tag{2}$$

Означаваме $T = (t_{ij})_{j=1,\dots,m}^{i=1,\dots,n}$, тоест T е матрицата $n \times m$, чиито стълбове са координатните вектори на $\Phi(e_1), \dots, \Phi(e_m)$ спрямо базиса f, тоест (i, j)-тият елемент на T е i-тата координата на $\Phi(e_j)$ спрямо базиса f.

Разглеждайки $f = (f_1, \dots, f_n)$ и $\Phi(e) = (\Phi(e_1), \dots, \Phi(e_m))$ като вектор-редове и считайки, че вектор може да се умножава с число отдясно, получаваме, че (1) (и еквивалентното му (2)) се записва в матричен вид като

$$\Phi(e) = f.T. \tag{3}$$

Матрицата T се нарича *матрица на* Φ *относно базисите* e *на* U *и* f *на* V. Когато $U = V$ и $e = f$, матрицата T се нарича *матрица на* Φ *относно базиса* e *на* U.

Нека $u \in U$ има спрямо базиса e координатен вектор $x \in \mathbb{R}^m$, а $\Phi(u) \in V$ има спрямо базиса f координатен вектор $y \in \mathbb{R}^n$. Тогава $y = Tx$.

Чрез координатните изображения това равенство се записва като $\varkappa_f(\Phi(u)) = T.\varkappa_e(u)$. От това е ясно, че за всяка $n \times m$ матрица T съществува единствено линейно изображение $\Phi : U \to V$, на което T е матрицата относно базисите e и f, а именно изображението, дефинирано с $\Phi(u) = \varkappa_f{}^{-1}(T.\varkappa_e(u))$.

От връзката между координатните вектори също така лесно следва:

1. Ако матрицата на линейното изображение $\Phi : U \to V$ спрямо базисите e на U и f на V е S, а матрицата на линейното изображение $\Psi : V \to W$ спрямо базисите f на V и g на W е T, то матрицата на линейното изображение $\Psi \circ \Phi : U \to W$ спрямо базисите e на U и g на W е TS.

2. Ако матрицата на линейното изображение $\Phi : U \to V$ спрямо базисите e на U и f на V е T, то Φ е линеен изоморфизъм $\Leftrightarrow$ матрицата T е обратима. В тоя случай матрицата на $\Phi^{-1} : V \to U$ относно базисите f на V и e на U е T^{-1}.

3. Ако матрицата на линейното изображение $\Phi : U \to V$ спрямо базисите e на U и f на V е T, а матриците на прехода от e към базиса e' на U и от f към базиса f' на V са съответно R и S, то матрицата на Φ спрямо базисите e' на U и f' на V е $T' = S^{-1}TR$. В частност, при $U = V$, $e = f$, $e' = f'$ имаме $R = S$ и следователно получаваме: Ако матрицата на линейното изображение $\Phi : U \to U$ спрямо базиса e на U е T, а матрицата на прехода от e към базиса e' на U е S, то матрицата на Φ спрямо базиса e' на U е $T' = S^{-1}TS$.

Афинни изображения, еднаквости, подобности

Определение 1 Нека A и B са афинни пространства, $\dim A = m$, $\dim B = n$, K и L са афинни координатни системи съответно в A и B и $F : A \to B$ е изображение. Нека изображението $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ е такова, че ако $P \in A$ има координатен вектор $x \in \mathbb{R}^m$ спрямо K, то $F(P) \in B$ има координатен вектор $y = \varphi(x) \in \mathbb{R}^n$ спрямо L. Тогава казваме, че $y = \varphi(x)$ *е уравнение на* F *спрямо* K *и* L и пишем $F : y = \varphi(x)$.
Ако $A = B$ и $K = L$, то казваме, че $y = \varphi(x)$ *е уравнение на* F *спрямо* K.

Забележка 1 $\varphi = \varkappa_L \circ F \circ \varkappa_K{}^{-1}$, така че φ се определя еднозначно от F.

Пример 1 Нека A е крайномерно афинно пространство и K е афинна координатна система в A. Тогава тъждественото изображение $A \to A$, $P \mapsto P$, има спрямо K уравнение $y = x$.

Пример 2 Нека A е крайномерно афинно пространство, моделирано върху линейното пространство U, K е афинна координатна система в A, $u \in U$ и координатният вектор на u спрямо K е s. Дефинираме $F : A \to A$ по следния начин: ако $P \in A$, то $F(P) = Q$, където $Q \in A$ е единствената точка, за която $\overrightarrow{PQ} = u$. F се нарича *транслация с вектора* u и има спрямо K уравнение $y = s + x$.

Всяка транслация е биекция — обратното изображение на транслацията с вектора u е транслацията с вектора $-u$.

Пример 3 Нека A е крайномерно афинно пространство, $K = Oe_1 \dots e_n$ е афинна координатна система в A, $C \in A$ има координатен вектор ζ спрямо K и $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$. Дефинираме $F : A \to A$ по следния начин: ако $P \in A$, то $F(P) = Q$, където $Q \in A$ е единствената точка, за която $\overrightarrow{CQ} = c.\overrightarrow{CP}$. F се нарича *хомотетия с център C и коефициент c* и има спрямо K уравнение $y = s + cx$, където $s = (1 - c)\zeta$.

Обратно, при $c \neq 1$ уравнението $y = s+cx$ е уравнение спрямо K на някоя хомотетия (а именно на тая, чийто център C има спрямо K координатен вектор $\zeta = \frac{1}{1-c} \cdot s$ и коефициентът ѝ е c).

Когато $C = O$, то $\zeta = 0$ и хомотетията с център O и коефициент c има спрямо K уравнение $y = cx$.

Всяка хомотетия е биекция — обратното изображение на хомотетията с център C и коефициент c е хомотетията с център C и коефициент $\frac{1}{c}$.

Пример 4 Нека A е крайномерно евклидово афинно пространство, $K = Oe_1 \dots e_n$ е ортонормирана координатна система в A и $d \in \mathbb{R}$, $d > 0$. Фиксираме едно $i \in \{1, \dots, n\}$. Изображението $F : A \to A$, което спрямо K има уравнения

$$F : \begin{cases} y_i = d.x_i & \\ y_j = x_j & \text{при } j \neq i \end{cases},$$

се нарича *дилатация по i-тата координатна ос на K с коефициент d*.
(F е изображението, при което всички координати остават същите с изключение на i-тата, която се „свива“ (при $d < 1$) или „разтяга“ (при $d > 1$) с коефициент на пропорционалност d. При $d = 1$ имаме тъждественото изображение.)

Уравненията на F могат да се напишат във вида $F : y = D_i x$, където D_i е диагоналната квадратна матрица от ред n, на която i-тият елемент по диагонала е d, а всички останали елементи по диагонала са 1.

Всяка дилатация е биекция — обратното изображение на дилатацията по i-тата координатна ос на K с коефициент d е дилатацията по i-тата координатна ос на K с коефициент $\frac{1}{d}$.

Определение 2 Нека A и B са афинни пространства, моделирани съответно върху линейните пространства U и V. Изображението $F : A \to B$ се нарича *афинно изображение*, ако съществува линейно изображение $\Phi : U \to V$ такова, че за всеки $P_1, P_2 \in A$ е изпълнено $\overrightarrow{F(P_1)F(P_2)} = \Phi\left(\overrightarrow{P_1P_2}\right)$. Ако освен това F е биекция, то F се нарича *афинен изоморфизъм* или *афинна трансформация*.

Пример 5 Тъждественото изображение и транслациите в афинно пространство са афинни изоморфизми — при тях $\Phi : U \to U$ е тъждественото изображение на U.

Пример 6 Хомотетиите в афинно пространство са афинни изоморфизми — при тях $\Phi : U \to U$ е умножението с c.

Пример 7 Нека A е афинно пространство, моделирано върху линейното пространство U, и $O \in A$ е фиксирана точка. Изображението *радиус-вектор с начало O*

$$r_O : A \to U, \quad P \mapsto r_O(P) = \overrightarrow{OP}$$

(тоест на точка се съпоставя радиус-векторът ѝ спрямо O), е афинен изоморфизъм — съответното $\Phi : U \to U$ е тъждественото изображение на U.

Пример 8 Нека U и V са линейни пространства и $\Phi : U \to V$ е линейно изображение. Тогава, разглеждайки U и V като афинни пространства, Φ е афинно изображение, като съответното линейно изображение е Φ. При това Φ е афинен изоморфизъм тогава и само тогава, когато е линеен изоморфизъм.

Пример 9 Успоредното проектиране на геометричното пространство в равнина е афинно изображение, което не е афинен изоморфизъм (тоест не е биекция). Същото важи за успоредното проектиране на геометричното пространство или геометричната равнина върху права.
Това са частни случаи на следната по-обща ситуация:

Нека A е афинно пространство, моделирано върху линейното пространство U, B е афинно подпространство на A, моделирано върху линейното подпространство V на U и W е допълнение на V в U, тоест $U = V \oplus W$. Тогава за всяка точка $P \in A$ съществува единствена точка $P' \in B$, за която $\overrightarrow{P'P} \in W$. Това се доказва аналогично на съществуването и единствеността на ортогоналната проекция, като вместо $V^\perp$ се пише W. Точката P' се нарича *проекция на P в B успоредно на W*. Така получаваме изображение $F : A \to B$, $P \mapsto P'$, което се нарича *проекция на A в B успоредно на W*. Това изображение е афинно изображение, което е афинен изоморфизъм само когато $B = A$ (и в тоя случай е тъждественото изображение).

Частен случай на успоредна проекция е ортогоналната проекция върху афинно подпространство B на крайномерно евклидово афинно пространство A (в тоя случай $W = V^\perp$). Значи ортогоналната проекция също е афинно изображение, което е афинен изоморфизъм само когато $B = A$ (и в тоя случай е тъждественото изображение).

Твърдение 1 *Нека A и B са афинни пространства, моделирани съответно върху линейните пространства U и V, а $F : A \to B$ е афинно изображение със съответно линейно изображение $\Phi : U \to V$.*

1. *Нека $O \in A$ е произволна точка. Тогава $r_{F(O)} \circ F = \Phi \circ r_O$.*

2. *F е афинен изоморфизъм $\Leftrightarrow$ Φ е линеен изоморфизъм.*

Следствие 1 *Нека A и B са крайномерни афинни пространства. Тогава съществува афинен изоморфизъм $F : A \to B \Leftrightarrow \dim A = \dim B$.*

Теорема 1 *Нека A и B са крайномерни афинни пространства, моделирани съответно върху линейните пространства U и V, а $K = Oe_1 \dots e_m$ и $L = Pf_1 \dots f_n$ са афинни координатни системи съответно в A и B. Тогава:*

1. *Изображението $F : A \to B$ е афинно $\Leftrightarrow$ уравнението на F спрямо K и L е от вида $y = s + Tx$. При това s е координатният вектор на $F(O)$ спрямо L, а T е матрицата на съответното на F линейно изображение $\Phi : U \to V$ спрямо базисите $e = (e_1, \dots, e_m)$ на U и $f = (f_1, \dots, f_n)$ на V.*

2. *Афинното изображение $F : A \to B$ е афинен изоморфизъм $\Leftrightarrow$ матрицата T в 1. е обратима.*

Пример 10 Дилатациите в крайномерно евклидово афинно пространство са афинни изоморфизми.

Пример 11 Нека A е n-мерно афинно пространство и K е афинна координатна система в A. Тогава координатното изображение $\varkappa_K : A \to \mathbb{R}^n$ е афинен изоморфизъм. Това следва от Теорема 1, защото уравнението му спрямо K и стандартната координатна система K^0 на $\mathbb{R}^n$ е $y = x$.

Определение 3 Нека A и B са евклидови афинни пространства. Изображението $F : A \to B$ се нарича *еднаквост* или *метрична трансформация* или *изометрия*, ако е биекция и запазва разстоянието между точките, тоест ако за всеки $P_1, P_2 \in A$ е изпълнено $|F(P_1)F(P_2)| = |P_1P_2|$.

Забележка 2 В горното определение „биекция“ може да се замени със „сюрекция“, защото от $|F(P_1)F(P_2)| = |P_1P_2|$ следва, че F е инекция.

Пример 12 В евклидово афинно пространство тъждественото изображение, транслациите и изображението радиус-вектор са еднаквости.

Теорема 2 *Нека A и B са крайномерни евклидови афинни пространства, а K и L са ортонормирани координатни системи съответно в A и B. Тогава изображението $F : A \to B$ е еднаквост $\Leftrightarrow$ уравнението на F спрямо K и L е от вида $y = s + Tx$, където матрицата T е ортогонална (и следователно $\dim A = \dim B$).*

Пример 13 От Теорема 2 още веднъж се вижда, че тъждественото изображение и транслациите в крайномерно евклидово афинно пространство са еднаквости, защото те имат уравнение от вида $y = s + Tx$, където $T = E$.

Пример 14 Нека A е n-мерно евклидово афинно пространство и K е ортонормирана координатна система в A. Тогава координатното изображение $\varkappa_K : A \to \mathbb{R}^n$ е еднаквост. Това следва от Теорема 2, защото уравнението му спрямо K и стандартната координатна система K^0 на $\mathbb{R}^n$ е $y = x$ и K^0 е ортонормирана.

Дотук беше припомнянето от по-миналия път.

Припомняне от миналия път

Афинни изображения, еднаквости, подобности — продължение

Определение 4 Нека A и B са евклидови афинни пространства. Изображението $F : A \to B$ се нарича *подобност*, ако е биекция и съществува $c > 0$ такова, че за всеки $P_1, P_2 \in A$ е изпълнено $|F(P_1)F(P_2)| = c|P_1P_2|$.

Забележка 3 В горното определение „биекция“ може да се замени със „сюрекция“, защото от $|F(P_1)F(P_2)| = c|P_1P_2|$ следва, че F е инекция.

Пример 15 Всяка еднаквост е подобност с коефициент $c = 1$.

Пример 16 Хомотетиите с коефициент c са подобности с коефициент c.

Теорема 3 *Нека A и B са крайномерни евклидови афинни пространства, а K и L са ортонормирани координатни системи съответно в A и B. Тогава изображението $F : A \to B$ е подобност с коефициент $c \Leftrightarrow$ уравнението на F спрямо K и L е от вида $y = s + cTx$, където матрицата T е ортогонална (и следователно $\dim A = \dim B$).*

Пример 17 От Теорема 3 още веднъж се вижда, че хомотетиите в крайномерно евклидово афинно пространство са подобности, защото те имат уравнение от вида $y = s+cTx$, където $T = E$.

Тъй като ортогоналните матрици са обратими, от Теорема 1, Теорема 2 и Теорема 3 получаваме

Следствие 2 *Еднаквостите и подобностите са афинни изоморфизми.*

Теорема 4 *Нека A и B са афинни пространства, моделирани съответно върху линейните пространства U и V, C е афинно подпространство на A, моделирано върху линейното подпространство W на U, и $F : A \to B$ е афинно изображение със съответно линейно изображение $\Phi : U \to V$. Тогава $F(C)$ е афинно подпространство на B, моделирано върху линейното подпространство $\Phi(W)$ на V. Ако освен това F е афинен изоморфизъм, то $\dim F(C) = \dim C$.*

Забележка 4 От Следствие 2 е ясно, че Теорема 4 важи в частност за еднаквостите и подобностите, тоест образът на афинно подпространство при еднаквост или подобност е афинно подпространство със същата размерност.

Твърдение 2

1. *Композицията на афинни изображения, афинни изоморфизми, еднаквости, подобности е съответно афинно изображение, афинен изоморфизъм, еднаквост, подобност. При това съответното на композицията линейно изображение е композицията на линейните изображения, съответстващи на композираните изображения.*

2. *Обратното изображение на афинен изоморфизъм, еднаквост, подобност е съответно афинен изоморфизъм, еднаквост, подобност. При това съответното на обратното изображение линейно изображение е обратното на линейното изображение, съответстващо на разглежданото изображение.*

Определение 5 Нека A и B са афинни пространства и $M \subset A$ и $N \subset B$. Казваме, че *M и N са афинно еквивалентни*, ако съществува афинна трансформация $F : A \to B$ такава, че $F(M) = N$. Ако освен това A и B са евклидови, то казваме, че *M и N са еднакви* или *метрично еквивалентни*, ако съществува еднаквост (тоест метрична трансформация) $F : A \to B$ такава, че $F(M) = N$, и казваме, че *M и N са подобни*, ако съществува подобност $F : A \to B$ такава, че $F(M) = N$.

Твърдение 3 *Всеки две подобни подмножества са афинно еквивалентни, а всеки две еднакви подмножества са подобни и афинно еквивалентни.*

Твърдение 4 *Афинната еквивалентност, еднаквостта и подобността на подмножества на афинно пространство A (евклидово в последните два случая) са релации на еквивалентност в множеството на всички подмножества на A.*

Твърдение 5 *Всеки две k-мерни афинни подпространства на крайномерно афинно пространство (съответно крайномерно евклидово афинно пространство) са афинно (съответно метрично) еквивалентни.*

Теорема 5 *Всеки афинен изоморфизъм на n-мерни евклидови афинни пространства може да се представи като композиция на еднаквост и n дилатации по взаимно перпендикулярни оси с общо начало, тоест ако A и B са n-мерни евклидови афинни пространства и $F : A \to B$ е афинен изоморфизъм, то съществуват еднаквост $G : A \to B$, ортонормирана координатна система в A и за $i = 1, \ldots, n$ дилатация H_i по i-тата ѝ координатна ос с някакъв коефициент d_i, такива че $F = G \circ H_1 \circ \cdots \circ H_n$.*

Основният момент в доказателството беше следната алгебрична лема.

Лема 1 *Всяка обратима матрица T може да се представи във вида $T = RSDS^t$, където R и S са ортогонални матрици, а D е диагонална матрица с положителни елементи по диагонала.*

Забележка 5 Очевидно произведението на матриците $D_1, \ldots, D_n$ е D независимо от реда, в който са подредени. Така че композицията на дилатациите $H_1, \ldots, H_n$ е една и съща независимо от реда, в който са подредени, тоест можем да ги пермутираме по произволен начин.

Освен това при представянето на F като композиция на еднаквост и дилатации може първо да действа еднаквостта, а след това дилатациите, тоест $F = H_1 \circ \cdots \circ H_n \circ G$, където $G : A \to B$ е еднаквост, а $H_1, \ldots, H_n$ са дилатации по осите на някоя ортонормирана координатна система в B. (В общия случай тая еднаквост и дилатации са различни от тия във формулировката на теоремата.) Това следва като теоремата се приложи за $F^{-1} : B \to A$, тоест $F^{-1} = G \circ H_1 \circ \cdots \circ H_n$, откъдето $F = H_n^{-1} \circ \cdots \circ H_1^{-1} \circ G^{-1}$, и се вземе предвид, че обратните изображения на дилатация и еднаквост са съответно дилатация по същата ос и еднаквост.

Забележка 6 От Теорема 5 следва, че афинно еквивалентните фигури на дадена фигура в n-мерно евклидово афинно пространство се получават като се вземат еднаквите на нея фигури и се деформират (тоест разтегнат или сплескат с някакъв коефициент на пропорционалност) по направленията на n перпендикулярни прави с общо начало.

Забележка 7 Както е известно от курса по алгебра, в линейната алгебра може да не се прави разлика между изоморфните линейни пространства, защото те имат едни и същи линейно-алгебрични свойства. Тъй като крайномерните линейни пространства са изоморфни тогава и само тогава, когато имат една и съща размерност, то от гледна точка на линейната алгебра има по същество единствено n-мерно линейно пространство, а именно $\mathbb{R}^n$. По същия начин в афинната геометрия (тоест теорията на афинните пространства) може да не се прави разлика между афинните пространства, между които има афинен изоморфизъм, а в евклидовата геометрия (тоест теорията на евклидовите афинни пространства) може да не се прави разлика между евклидовите афинни пространства, между които има еднаквост. Така че от гледна точка на афинната геометрия има по същество единствено n-мерно афинно пространство, а именно $\mathbb{R}^n$, а от гледна точка на евклидовата геометрия има по същество единствено n-мерно евклидово афинно пространство, а именно $\mathbb{R}^n$.

Твърдение 6 *Нека U е n-мерно реално линейно пространство и $\Phi : U \to U$ е линеен изоморфизъм.*

1. *Нека $e = (e_1, \dots, e_n)$ е базис на U. Тогава базисите e и $\Phi(e) = (\Phi(e_1), \dots, \Phi(e_n))$ са еднакво (съответно противоположно) ориентирани $\Leftrightarrow$ матрицата на Φ спрямо e има положителна (съответно отрицателна) детерминанта.*

2. *Ако за един базис e на U базисите e и $\Phi(e)$ са еднакво (съответно противоположно) ориентирани, то за всеки базис e' на U базисите e' и $\Phi(e')$ са еднакво (съответно противоположно) ориентирани.*

Забележка 8 От доказателството на 2. в горното твърдение следва, че за линейно изображение $\Phi : U \to U$ коректно може да се дефинира $\det \Phi$ чрез $\det \Phi = \det T$, където T е матрицата на Φ спрямо някой базис на U.

От Твърдение 6 следва коректността на 1. в следващата дефиниция.

Определение 6

1. Нека U е крайномерно реално линейно пространство и $\Phi : U \to U$ е линеен изоморфизъм. Казваме, че Φ *запазва (съответно сменя) ориентацията*, ако за един, а следователно и за всеки, базис e на U базисите e и $\Phi(e)$ имат една и съща (съответно противоположна) ориентация. (С други думи, когато $\det \Phi$ в смисъла на Забележка 8 е положителна (съответно отрицателна).)

2. Нека A е крайномерно афинно пространство и $F : A \to A$ е афинен изоморфизъм. Казваме, че F *запазва (съответно сменя) ориентацията*, ако съответният на F линеен изоморфизъм Φ запазва (съответно сменя) ориентацията.

3. Нека A е крайномерно евклидово афинно пространство. Еднаквост $F : A \to A$, която запазва ориентацията, се нарича *движение*.

Забележка 9 Терминът „движение“ идва от това, че едно множество се получава от друго чрез „движение“ (тоест запазваща ориентацията еднаквост) когато второто чрез непрекъснато преместване (без да се деформира) може да се докара да съвпадне с първото.

Твърдение 7
1. *Нека A е n-мерно афинно пространство, $K = Oe_1, \dots, e_n$ е афинна координатна система в A и афинният изоморфизъм $F : A \to A$ има спрямо K уравнение $y = s + Tx$. Тогава F запазва (съответно сменя) ориентацията $\Leftrightarrow \det T > 0$ (съответно $\det T < 0$).*

2. *Нека A е n-мерно евклидово афинно пространство, $K = Oe_1, \dots, e_n$ е ортонормирана координатна система в A и еднаквостта $F : A \to A$ има спрямо K уравнение $y = s + Tx$. Тогава F е движение, тоест запазваща ориентацията еднаквост, $\Leftrightarrow T$ е специална ортогонална матрица (тоест ортогонална матрица с положителна детерминанта, тоест с $\det T = 1$), а е сменяща ориентацията еднаквост $\Leftrightarrow T$ е ортогонална матрица с отрицателна детерминанта, тоест с $\det T = -1$.*

Пример 18 Тъждественото изображение, транслациите, хомотетиите, дилатациите са запазващи ориентацията афинни изоморфизми.

Пример 19 Тъждественото изображение и транслациите в евклидово афинно пространство са движения.

Дотук беше припомнянето от миналия път.

Афинни изображения, еднаквости, подобности — продължение

Пример 20 Нека A е n-мерно евклидово афинно пространство, а B е k-мерно афинно подпространство на A. За $P \in A$ нека P' е ортогоналната проекция на P върху B. Тогава съществува единствена точка $P'' \in A$, за която P' е среда на отсечката PP'', а именно точката P'', за която $\overrightarrow{P'P''} = -\overrightarrow{P'P}$. Тая точка P'' се нарича *ортогонално симетрична на P относно B*. По такъв начин получаваме изображение $F : A \to A$, $P \mapsto P''$, което се нарича *ортогонална симетрия относно B*. При четно (съответно нечетно) $n - k$ това изображение е движение, тоест запазваща ориентацията еднаквост, (съответно сменяща ориентацията еднаквост).
Това е така, защото: В доказателството на Твърдение 6 видяхме, че ако вземем ортонормирана координатна система $K = Oe_1 \dots e_n$ в A така, че $O \in B$ и $e_1, \dots, e_k \parallel B$, то B има спрямо K общо уравнение $B : x_i = 0$, $i = k+1, \dots, n$. Щом $e_1, \dots, e_k \parallel B$, то направляващото пространство на B е $V = l(e_1, \dots, e_k)$ и значи нормалното пространство на B е $V^{\perp} = l(e_{k+1}, \dots, e_n)$, защото базисът $(e_1, \dots, e_n)$ е ортонормиран. Нека $P \in A$ има спрямо K координатен вектор x. Тогава ортогоналната ѝ проекция P' върху B има спрямо K координатен вектор

$$x' = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Това е така, защото от общото уравнение на B следва, че точката P' с тоя координатен вектор лежи върху B, а освен това $\overrightarrow{P'P}$ има спрямо K координатен вектор

$$x - x' = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_{k+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

и значи $\overrightarrow{P'P} = \sum_{i=k+1}^{n} x_i e_i \in l(e_{k+1}, \ldots, e_n) = V^{\perp}$. Нека ортогонално симетричната на P относно B точка P'' има спрямо K координатен вектор x''. Тогава от равенството $\overrightarrow{P'P''} = -\overrightarrow{P'P}$, написано покоординатно, получаваме $x'' - x' = -(x - x')$. Следователно

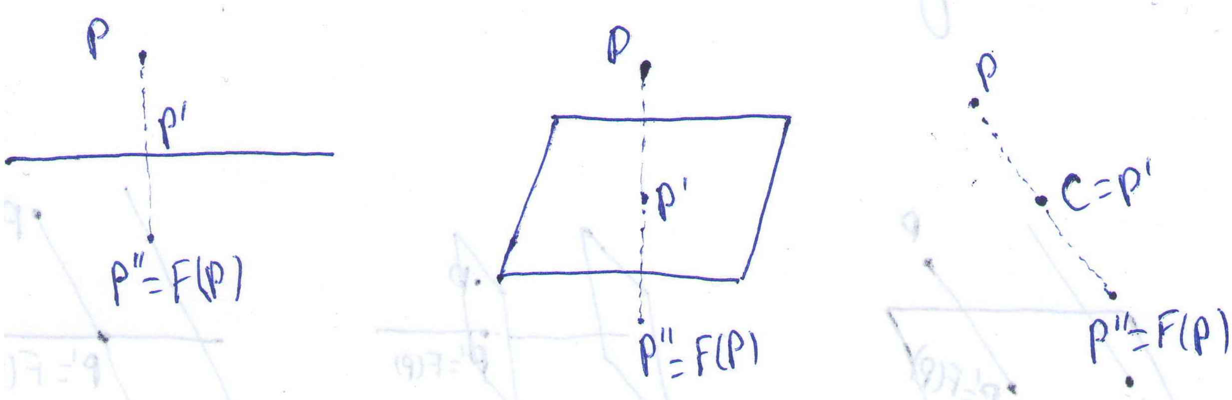
$$x'' = 2x' - x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ -x_{k+1} \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix}.$$

Значи ортогоналната симетрия F относно B има спрямо K уравнение

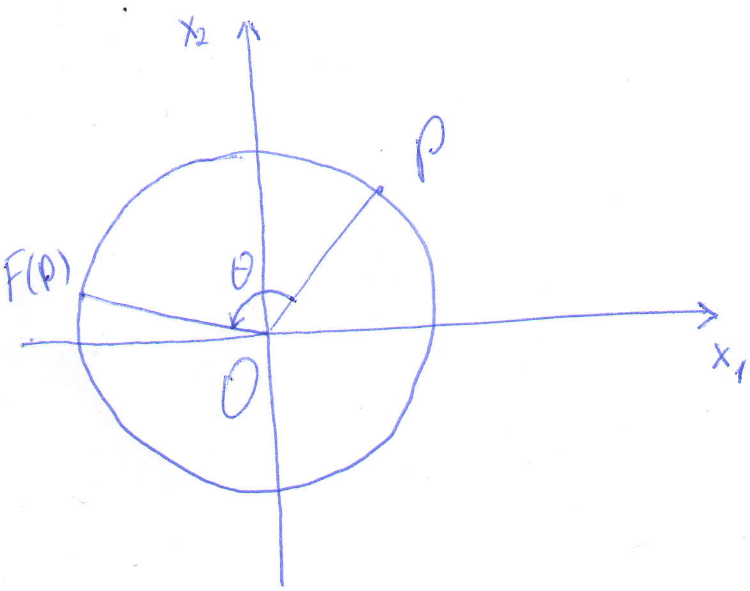
$$\left\{ \begin{array}{lcr} y_1 & = & x_1 \\ & \vdots & \\ y_k & = & x_k \\ y_{k+1} & = & -x_{k+1} \\ & \vdots & \\ y_n & = & -x_n \end{array} \right. ,$$

тоест $y = Tx$, където T е диагоналната матрица, на която първите k елемента по диагонала са 1, а останалите $n-k$ са -1. Тъй като T е ортогонална матрица и $\det T = (-1)^{n-k}$, то по Теорема 2 и Твърдение 7 F е еднаквост, която при четно (съответно нечетно) $n-k$ запазва (съответно сменя) ориентацията.

Като частни случаи получаваме, че ортогоналната симетрия относно права в геометричната равнина, тоест осевата симетрия, и относно равнина в геометричното пространство са сменящи ориентацията еднаквости, а относно права в геометричното пространство е движение, тоест запазваща ориентацията еднаквост. Също така ортогоналната симетрия относно точка, тоест централната симетрия, в геометричната равнина е движение, тоест запазваща ориентацията еднаквост, а в геометричното пространство е сменяща ориентацията еднаквост.



Пример 21 Нека A е двумерно евклидово афинно пространство, K е ортонормирана координатна система в A с начало O, $\theta \in \mathbb{R}$ и $T = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Тогава T е специална ортогонална и следователно изображението $F : A \to A$, чието уравнение спрямо K е $y = Tx$, е движение. F се нарича *ротация на ъгъл θ около O*.



Твърдение 8 *1. Композицията на линейни изоморфизми е запазващ ориентацията линеен изоморфизъм, когато и двата запазват или и двата сменят ориентацията, и е сменящ ориентацията линеен изоморфизъм, когато единият от тях запазва ориентацията, а другият сменя ориентацията.*

2. Обратното изображение на запазващ (съответно сменящ) ориентацията линеен изоморфизъм е запазващ (съответно сменящ) ориентацията линеен изоморфизъм.

Доказателство: Нека U е крайномерно реално линейно пространство и e е базис на U.

1. Нека линейните изоморфизми $\Phi, \Psi : U \to U$ имат спрямо e матрици съответно S, T. Тогава матрицата на $\Psi \circ \Phi : U \to U$ спрямо e е TS и $\det(TS) = \det T \det S$. Следователно $\Psi \circ \Phi$ запазва ориентацията, тоест $\det(TS) > 0$, когато $\det T > 0$, $\det S > 0$ или $\det T < 0$, $\det S < 0$, тоест когато Φ и Ψ и двата запазват ориентацията или и двата сменят ориентацията, и $\Psi \circ \Phi$ сменя ориентацията, тоест $\det(TS) < 0$, когато $\det T > 0$, $\det S < 0$ или $\det T < 0$, $\det S > 0$, тоест когато единият от Φ и Ψ запазва ориентацията, а другият сменя ориентацията.

2. Нека линейният изоморфизъм $\Phi : U \to U$ има спрямо e матрица T. Тогава матрицата на $\Phi^{-1} : U \to U$ спрямо e е T^{-1} и $\det(T^{-1}) = \frac{1}{\det T}$. Следователно Φ^{-1} запазва (съответно сменя) ориентацията, тоест $\det(T^{-1}) > 0$ (съответно $\det(T^{-1}) < 0$), когато $\det T > 0$ (съответно $\det T < 0$), тоест когато Φ запазва (съответно сменя) ориентацията. □

Твърдение 9 *1. Композицията на афинни трансформации (съответно еднаквости) е запазваща ориентацията афинна трансформация (съответно еднаквост), когато и двете запазват или и двете сменят ориентацията, и е сменяща ориентацията афинна трансформация (съответно еднаквост), когато едната от тях запазва ориентацията, а другата сменя ориентацията.*

2. Обратното изображение на запазваща (съответно сменяща) ориентацията афинна трансформация или еднаквост е съответно запазваща (съответно сменяща) ориентацията афинна трансформация или еднаквост.

Доказателство: Следва от Твърдение 2 и Твърдение 8. □

Определение 7 Нека A е крайномерно афинно пространство и $M, N \subset A$. Казваме, че *M и N са ориентирано афинно еквивалентни*, ако съществува запазваща ориентацията афинна трансформация $F : A \to A$ такава, че $F(M) = N$. Ако освен това A е евклидово, то казваме, че *M и N са ориентирано метрично еквивалентни*, ако съществува движение $F : A \to A$ такова, че $F(M) = N$.

Твърдение 10 *Ориентираната афинна еквивалентност и ориентираната метрична еквивалентност на подмножества на афинно пространство A (евклидово във втория случай) са релации на еквивалентност в множеството на всички подмножества на A.*

Доказателство: Същото като на Твърдение 4, като вместо Твърдение 2 се използва Твърдение 9. $\square$

Твърдение 11 *Всеки две k-мерни афинни подпространства на крайномерно афинно пространство (съответно крайномерно евклидово афинно пространство) са ориентирано афинно (съответно метрично) еквивалентни.*

Доказателство: В доказателството на Твърдение 5 нищо не се променя, ако на някой от базисните вектори се смени знакът. Значи можем да считаме, че построените там координатни системи K и L са еднакво ориентирани и следователно че построената там афинна (метрична) трансформация запазва ориентацията. $\square$

2 Фигури от втора степен

Нека $\mathcal{A}$ е n-мерно афинно пространство и K е афинна координатна система в $\mathcal{A}$.

Определение 8 Подмножеството S на $\mathcal{A}$ се нарича *хиперповърхнина от втора степен* (при $n = 2$ *крива от втора степен*, при $n = 3$ *повърхнина от втора степен*), ако спрямо K има уравнение $F(x) = 0$, където $F(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j + 2\sum_{i=1}^{n} a_{i,n+1}x_i + a_{n+1,n+1}$ и матрицата $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ от коефициентите на квадратичната част е ненулева симетрична матрица. (Ако означим $a = (a_{1,n+1}, \dots, a_{1,n})$ и го разглеждаме като ред, а x разглеждаме като стълб, то $F(x) = x^tAx + 2ax + a_{n+1,n+1}$.)

Забележка 10 Дефиницията е коректна, тоест спрямо друга афинна координатна система K' уравнението на S е от същия вид, но с други коефициенти: ако смяната на координатите между K и K' се задава с $x = s + Tx'$, то спрямо K' уравнението на S е $x'^tA'x' + 2a'x' + a'_{n+1,n+1} = 0$, където $A' = T^tAT$, $a' = (a + s^tA)T$, $a'_{n+1,n+1} = a_{n+1,n+1} + 2as$.

Забележка 11 Считаме, че точките могат да имат и комплексни координати, тоест разширили сме $\mathcal{A}$ до комплексно афинно пространство.

Формално това може да се направи по следния начин: Нека направляващото пространство на $\mathcal{A}$ е U. От U построяваме комплексно линейно пространство U^c както $\mathbb{C}$ се построява от $\mathbb{R}$: Дефинираме $U^c = U \times U$. Дефинираме събиране и умножение с комплексно число в U^c чрез $(u_1, v_1) + (u_2, v_2) = (u_1 + u_2, v_1 + v_2)$ и $(x + iy).(u, v) = (xu - yv, xv + yu)$. Отъждествяваме U с подмножеството $U \times \{0\}$ на U^c като $U \ni u \leftrightarrow (u, 0) \in U^c$. При това отъждествяване за $w = (u, v) \in U^c$ имаме $w = u + iv$ и събирането и умножението с комплексно число стават $(u_1 + iv_1) + (u_2 + iv_2) = (u_1 + u_2) + i(v_1 + v_2)$ и $(x + iy).(u + iv) = (xu - yv) + i(xv + yu)$. С така дефинираните операции U^c е линейно пространство над $\mathbb{C}$. При това, ако $(e_1, \dots, e_n)$ е базис на U (над $\mathbb{R}$), то $(e_1, \dots, e_n)$ е базис и на U^c (над $\mathbb{C}$), така че ако U е n-мерно (над $\mathbb{R}$), то и U^c е n-мерно (над $\mathbb{C}$). Дефинираме $\mathcal{A}^c = \mathcal{A} \times U$. Отъждествяваме $\mathcal{A}$ с подмножеството $\mathcal{A} \times \{0\}$ на $\mathcal{A}^c$ като $\mathcal{A} \ni P \leftrightarrow (P, 0) \in \mathcal{A}^c$. (Това е причината да вземем $\mathcal{A}^c = \mathcal{A} \times U$, а не $\mathcal{A}^c = \mathcal{A} \times \mathcal{A}$: искаме да разглеждаме $\mathcal{A}$ като „първа координата“ в $\mathcal{A}^c$, но в $\mathcal{A}$ нямаме никаква специална точка P_0, така че да отъждествим по естествен начин $\mathcal{A}$ с $\mathcal{A} \times \{P_0\}$, а в U имаме — 0.)

За $P, Q \in \mathcal{A}^c$ дефинираме $\overrightarrow{PQ} \in U^c$ по следния начин: ако $P = (P', u)$, $Q = (Q', v)$, то $\overrightarrow{PQ} = \underbrace{\left(\overrightarrow{P'Q'}, v - u\right)}_{\in U \times U = U^c} = \overrightarrow{P'Q'} + i(v-u) \in U^c$. По такъв начин $\mathcal{A}^c$ става комплексно афинно пространство, моделирано върху U^c. Ако $K = Oe_1 \dots e_n$ е афинна координатна система в $\mathcal{A}$, то, тъй като $O \in \mathcal{A}^c$ и $(e_1, \dots, e_n)$ е базис и на U^c, можем да разглеждаме K и като афинна координатна система в $\mathcal{A}^c$. Всички неща, които знаем за реални афинни пространства (с изключение на нещата, които включват скаларно произведение) важат по същия начин и за комплексни афинни пространства, като всички коефициенти и параметри в уравненията са комплексни вместо реални.

Твърдение 12 *Нека хиперповърхнините от втора степен S и S' имат спрямо K уравнения*
$$S : \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} a_{i,n+1} x_i + a_{n+1,n+1} = 0 \text{ и } S' : \sum_{i,j=1}^{n} a'_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} a'_{i,n+1} x_i + a'_{n+1,n+1} = 0.$$
Тогава $S = S' \Leftrightarrow$ съществува $\rho \in \mathbb{R}$, $\rho \neq 0$, такова че $a'_{ij} = \rho a_{ij}$ за всички i, j (тоест когато уравнението на S' е уравнението на S, умножено с ρ).

Обратната посока на това твърдение е очевидна, а правата няма да я доказваме за да спестим време.

Забележка 12 В горното твърдение е съществено, че допускаме точки с комплексни координати. Ако разглеждаме само обичайните реални точки, то не е вярно. Например при $n = 2$ да разгледаме кривите с уравнения ${x_1}^2 + {x_2}^2 + 1 = 0$ и ${x_1}^2 + 1 = 0$. Тия уравнения нямат реални решения, така че ако разглеждаме кривите като реални криви те и двете са празното множество и значи съвпадат. Но уравненията им не са пропорционални.

Тъй като формулата за смяната на координатната система и уравненията на афинните трансформации имат един и същ вид, от сметката в Забележка 10 следва също

Твърдение 13 *Образът на хиперповърхнина от втора степен при афинна трансформация (а следователно и при метрична трансформация, тоест еднаквост, когато A е евклидово) е хиперповърхнина от втора степен.*

Определение 9 От Твърдение 13 следва, че множеството от хиперповърхнините от втора степен в A се разбива на класове на еквивалентност относно релацията афинна еквивалентност, а когато A е евклидово и относно релацията метрична еквивалентност, тоест еднаквост. Тия класове се наричат *афинни класове на фигури от втора степен* и съответно *метрични класове на фигури от втора степен.*

Забележка 13 Тъй като формулата за смяната на координатите при смяна на афинни координатни системи и уравненията на афинните трансформации имат един и същ вид, то две фигури от втора степен да са афинно еквивалентни, тоест едната да се получава от другата с афинна трансформация, е същото като да може да се намери друга афинна координатна система, така че уравнението на едната фигура спрямо нея да е същото като уравнението на другата фигура спрямо първоначалната.

Аналогично, тъй като формулата за смяната на координатите при смяна на ортонормирани координатни системи и уравненията на метричните трансформации имат един и същ вид, то две фигури от втора степен да са метрично еквивалентни, тоест едната да се получава от другата с метрична трансформация, е същото като да може да се намери друга ортонормирана координатна система, така че уравнението на едната фигура спрямо нея да е същото като уравнението на другата фигура спрямо първоначалната.

Теорема 6 (афинна класификация на хиперповърхнините от втора степен) *Съществуват краен брой афинни класове фигури от втора степен в n-мерно афинно пространство. Те се задават от хиперповърхнините, които спрямо дадена афинна координатна система имат някое от следните уравнения:*

$$\begin{array}{lll}
{x_1}^2+\dots+{x_p}^2-{x_{p+1}}^2-\dots-{x_{p+q}}^2 = 1, & & 1\le p+q\le n,\\
{x_1}^2+\dots+{x_p}^2-{x_{p+1}}^2-\dots-{x_{p+q}}^2 = 0, & n\ge p\ge q\ge 0, & 1\le p+q\le n,\\
{x_1}^2+\dots+{x_p}^2-{x_{p+1}}^2-\dots-{x_{p+q}}^2-2x_{p+q+1} = 0, & n\ge p\ge q\ge 0, & 1\le p+q\le n-1.
\end{array}$$

Теорема 7 (метрична класификация на хиперповърхнините от втора степен) *Съществуват безбройно много метрични класове фигури от втора степен в n-мерно евклидово афинно пространство. Те се задават от хиперповърхнините, които спрямо дадена ортонормирана координатна система имат някое от следните уравнения:*

$$\frac{{x_1}^2}{{a_1}^2}+\dots+\frac{{x_p}^2}{{a_p}^2}-\frac{{x_{p+1}}^2}{{a_{p+1}}^2}-\dots-\frac{{x_{p+q}}^2}{{a_{p+q}}^2} = 1, \quad \begin{array}{l} 1\le p+q\le n,\\ a_1\ge\dots\ge a_p>0,\\ a_{p+1}\ge\dots\ge a_{p+q}>0,\end{array}$$

$$\frac{{x_1}^2}{{a_1}^2}+\dots+\frac{{x_p}^2}{{a_p}^2}-\frac{{x_{p+1}}^2}{{a_{p+1}}^2}-\dots-\frac{{x_{p+q}}^2}{{a_{p+q}}^2} = 0, \quad \begin{array}{l} n\ge p\ge q\ge 0,\ 1\le p+q\le n,\\ a_1\ge\dots\ge a_p>0,\\ a_{p+1}\ge\dots\ge a_{p+q}>0,\end{array}$$

$$\frac{{x_1}^2}{{a_1}^2}+\dots+\frac{{x_p}^2}{{a_p}^2}-\frac{{x_{p+1}}^2}{{a_{p+1}}^2}-\dots-\frac{{x_{p+q}}^2}{{a_{p+q}}^2}-2x_{p+q+1} = 0, \quad \begin{array}{l} n\ge p\ge q\ge 0,\ 1\le p+q\le n-1,\\ a_1\ge\dots\ge a_p>0,\\ a_{p+1}\ge\dots\ge a_{p+q}>0.\end{array}$$

Забележка 14 Неравенствата между p и q в Теорема 6 са за да се осигури поне едно събираемо от втора степен (за да е фигура от втора степен) и когато няма свободен член броят на събираемите с коефициент $+1$ да е не по-малък от броя на събираемите с коефициент -1. Последното може да се постигне чрез преномериране на координатите, което е афинна трансформация.

Аналогична е причината за неравенствата между p и q, а също и за неравенствата между a-тата в Теорема 7, защото преномерирането на координатите на ортонормирана координатна система е метрична трансформация.
Това е така, защото преномерирането на координатите се задава с уравнението $y = Tx$, където стълбовете на T са стълбовете на единичната матрица, но пермутирани по същия начин както са пермутирани координатите. Следователно T е ортогонална, така че тая трансформация е метрична, когато координатната система е ортонормирана, и афинна, когато координатната система е афинна.

Забележка 15 Броят на афинните класове е краен, защото двойките (p, q), които удовлетворяват неравенствата в Теорема 6, е краен. Метричните класове са безбройно много, защото при тях участват още коефициентите a, а броят на a-тата, които удовлетворяват неравенствата в Теорема 7 е безкраен.

Забележка 16 Поради Забележка 13 Теорема 6 може да се интерпретира по следния начин: За всяка хиперповърхнина от втора степен в афинно пространство съществува афинна координатна система, спрямо която уравнението ѝ е някое от уравненията от Теорема 6. Поради това тия уравнения се наричат *афинни канонични уравнения на фигурите от втора степен.*

Аналогично Теорема 7 може да се интерпретира по следния начин: За всяка хиперповърхнина от втора степен в евклидово афинно пространство съществува ортонормирана координатна система, спрямо която уравнението ѝ е някое от уравненията от Теорема 7. Поради това тия уравнения се наричат *метрични канонични уравнения на фигурите от втора степен.*

Доказателство на Теорема 7 (само за информация, не сме го правили на лекциите и не е нужно да се помни): Ще използваме наготово следния факт, който вече използвахме във въпроса за афинните трансформации:
Всяка симетрична реална матрица A може да се представи във вида $A = TA'T^t$, където T е ортогонална матрица, а A' е диагонална матрица.

Прилагаме тоя факт за симетричната матрица A, задаваща квадратичната част на нашата хиперповърхнина. Следователно $T^tAT = A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$. При това поне едно λ е различно от 0, защото в противен случай бихме имали $A' = 0$ и следователно $A = TA'T^t = 0$, което е противоречие. Правим метричната трансформация с уравнение $y = T^tx$. (Това е метрична трансформация, защото T, а следователно и T^t, е ортогонална матрица и координатната система е ортонормирана.) Тогава $x = Ty$ и както в Забележка 10 получаваме

$$x^tAx + 2ax + a_{n+1,n+1} = y^tT^tAy + 2aTy + a_{n+1,n+1} = y^tA'y + 2a'y + a'_{n+1,n+1},$$

където $a' = aT$, $a'_{n+1,n+1} = a_{n+1,n+1}$. Значи с тая метрична трансформация хиперповърхнината с уравнение $x^tAx+2ax+a_{n+1,n+1} = 0$ се праща в хиперповърхнината с уравнение $x^tA'x + 2a'x + a'_{n+1,n+1} = 0$, тоест $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i {x_i}^2 + 2\sum_{i=1}^{n} {a'}_{i,n+1}x_i + {a'}_{n+1,n+1} = 0$. Можем да считаме, че ненулевите λ-и са $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, а нулевите (ако има такива) са $\lambda_{r+1}, \ldots, \lambda_n$. (Това може да се постигне с преномериране на координатите, което както видяхме в Забележка 14 е метрична трансформация.) Тогава

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} \lambda_i {x_i}^2 + 2\sum_{i=1}^{n} a'_{i,n+1}x_i + a'_{n+1,n+1} \\
&= \sum_{i=1}^{r} \lambda_i {x_i}^2 + 2\sum_{i=1}^{r} a'_{i,n+1}x_i + 2\sum_{i=r+1}^{n} a'_{i,n+1}x_i + a'_{n+1,n+1} \\
&= \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \left(x_i + \frac{a'_{i,n+1}}{\lambda_i}\right)^2 + 2\sum_{i=r+1}^{n} a'_{i,n+1}x_i + a'_{n+1,n+1} - \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \left(\frac{a'_{i,n+1}}{\lambda_i}\right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{r} \lambda_i {y_i}^2 + 2\sum_{i=r+1}^{n} a''_{i,n+1}y_i + a''_{n+1,n+1},
\end{aligned}$$

където

$$y_i = \begin{cases} x_i + \frac{a'_{i,n+1}}{\lambda_i}, & i = 1, \ldots, r \\ x_i & i = r+1, \ldots, n \end{cases},$$

$$a''_{i,n+1} = a'_{i,n+1},\ i = r+1, \ldots, n, \qquad a''_{n+1,n+1} = a'_{n+1,n+1} - \sum_{i=1}^{r} \frac{{a'_{i,n+1}}^2}{\lambda_i}.$$

Правим транслацията (и следователно метрична трансформация) с уравнение

$$y_i = \begin{cases} x_i + \frac{a'_{i,n+1}}{\lambda_i}, & i = 1, \ldots, r \\ x_i & i = r+1, \ldots, n \end{cases}.$$

Тогава горното пресмятане показва, че нашата хиперповърхнина се праща в хиперповърхнината с уравнение $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i {x_i}^2 + 2\sum_{i=r+1}^{n} a''_{i,n+1}x_i + a''_{n+1,n+1} = 0$.

Да разгледаме първо случая, когато събираемото $\sum_{i=r+1}^{n} a''_{i,n+1}x_i$ отсъства, тоест когато всички λ-и са ненулеви, тоест $r = n$, или пък има нулеви λ-и, тоест $r < n$, но $a''_{i,n+1} = 0$, $i = r+1, \ldots, n$. Тогава уравнението е $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i {x_i}^2 + a''_{n+1,n+1} = 0$.

Ако $a''_{n+1,n+1} \neq 0$, то това уравнение е еквивалентно на $\sum_{i=1}^{r} \left(-\frac{\lambda_i}{a''_{n+1,n+1}} \right) {x_i}^2 = 1$. Тъй като можем да преномерираме координатите, което е метрична трансформация, можем да считаме, че първо са събираемите с положителни коефициенти, а след това събираемите с отрицателни коефициенти, тоест

$$-\frac{\lambda_i}{a''_{n+1,n+1}} \begin{cases} > 0, \ i = 1, \dots, p \\ < 0, \ i = p+1, \dots, p+q \end{cases},$$

където $q = r - p$. Означаваме

$$a_i = \begin{cases} \sqrt{-\frac{\lambda_i}{a''_{n+1,n+1}}}, & i = 1, \dots, p \\ \sqrt{\frac{\lambda_i}{a''_{n+1,n+1}}}, & i = p+1, \dots, p+q \end{cases}.$$

Тогава уравнението става

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{{x_i}^2}{{a_i}^2} - \sum_{i=p+1}^{p+q} \frac{{x_i}^2}{{a_i}^2} = 1,$$

тоест от първия вид във формулировката на теоремата, защото условията $a_1 \geq \cdots \geq a_p$ и $a_{p+1} \geq \cdots \geq a_{p+q}$ могат да се осигурят чрез преномериране на координатите (което е метрична трансформация).

Ако $a''_{n+1,n+1} = 0$, то уравнението е $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i {x_i}^2 = 0$. Отново можем да считаме, че първо са събираемите с положителни коефициенти, тоест

$$\lambda_i \begin{cases} > 0, \ i = 1, \dots, p \\ < 0, \ i = p+1, \dots, p+q \end{cases},$$

където $q = r - p$. Означаваме

$$a_i = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}, & i = 1, \dots, p \\ \frac{1}{\sqrt{-\lambda_i}}, & i = p+1, \dots, p+q \end{cases}.$$

Тогава уравнението става

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{{x_i}^2}{{a_i}^2} - \sum_{i=p+1}^{p+q} \frac{{x_i}^2}{{a_i}^2} = 0.$$

Освен това можем да считаме, че $p \geq q$, защото иначе ще умножим уравнението с -1 (което дава уравнение на същата хиперповърхнина) и ще преномерираме координатите, така че отново първо са събираемите с положителни коефициенти, а след това събираемите с отрицателни коефициенти. И отново можем да осигурим условията $a_1 \geq \cdots \geq a_p$ и $a_{p+1} \geq \cdots \geq a_{p+q}$ чрез преномериране на координатите. Следователно получаваме уравнение от втория вид във формулировката на теоремата.

Да разгледаме сега случая, когато събираемото $\sum_{i=r+1}^{n} a''_{i,n+1}x_i$ присъства, тоест поне един от коефициентите $a''_{i,n+1}$, $i = r+1, \ldots, n$, е различен от 0. С евентуално преномериране на координатите можем да осигурим, че $a''_{r+1,n+1} \neq 0$. Ако поне още един коефициент $a''_{i,n+1}$ е различен от 0 (това може да се случи само при $n > 2$), то правим метричната трансформация $y = Tx$, където T е ортогоналната матрица, чиито редове се получават по метода на Грам-Шмит за построяване на ортонормиран базис от редовете на матрицата S, където S е единичната матрица, на която редът с номер $r+1$ е заместен с реда $(\underbrace{0, \ldots, 0}_{r}, a''_{r+1,n+1}, \ldots, a''_{n,n+1})$. (Първите r реда на S образуват ортонормирана система, така че с Грам-Шмит се започва всъщност от реда с номер $r+1$.) Тъй като първите r реда на T са като на единичната матрица, а редът с номер $r+1$ е редът с номер $r+1$ на S, разделен на дължината си $a'''_{r+1,n} := \sqrt{\sum_{i=r+1}^{n} {a''_{i,n+1}}^2}$, то за $i = 1, \ldots, r$ имаме $y_i = x_i$, а $y_{r+1} = \frac{1}{a'''_{r+1,n}} \sum_{i=r+1}^{n} a''_{i,n+1}x_i$, тоест $\sum_{i=r+1}^{n} a''_{i,n+1}x_i = a'''_{r+1,n}y_{r+1}$. Следователно след горната метрична трансформация получаваме хиперповърхнината с уравнение $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i {x_i}^2 + 2a'''_{r+1,n}x_{r+1} + a''_{n+1,n+1} = 0$. Разделяйки това уравнение на $-a'''_{r+1,n}$ получаваме уравнение на същата хиперповърхнина, което има вида $\sum_{i=1}^{r} a'''_i {x_i}^2 - 2x_{r+1} + a'''_{n+1,n+1} = 0$. Ако освен $a''_{r+1,n+1}$ никой от останалите коефициенти $a''_{i,n+1}$ не е различен от 0, то можем да направим същото, но то всъщност се свежда до разделяне на уравнението на $-a''_{r+1,n+1}$. Така че и в двата случая стигаме до хиперповърхнина с уравнение от вида $\sum_{i=1}^{r} a'''_i {x_i}^2 - 2x_{r+1} + a'''_{n+1,n+1} = 0$, тоест $\sum_{i=1}^{r} a'''_i {x_i}^2 - 2\left(x_{r+1} - \frac{a'''_{n+1,n+1}}{2}\right) = 0$. Правим транслацията (и следователно метрична трансформация) с уравнение

$$y_i = \begin{cases} x_{r+1} - \frac{a'''_{n+1,n+1}}{2}, & i = r+1 \\ x_i & i \neq r+1 \end{cases}.$$

Тогава нашата хиперповърхнина се праща в хиперповърхнината с уравнение $\sum_{i=1}^{r} a'''_i {x_i}^2 - 2x_{r+1} = 0$. Тъй като можем да преномерираме координатите, което е метрична трансформация, аналогично на по-горе можем да считаме, че първо са събираемите с положителни коефициенти, а след това събираемите с отрицателни коефициенти, тоест

$$a_i''' \begin{cases} > 0, \ i = 1, \dots, p \\ < 0, \ i = p+1, \dots, p+q \end{cases},$$

където $q = r - p$. Означаваме

$$a_i = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a_i'''}}, & i = 1, \dots, p \\ \frac{1}{\sqrt{-a_i'''}}, & i = p+1, \dots, p+q \end{cases}.$$

Тогава уравнението става

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{{x_i}^2}{{a_i}^2} - \sum_{i=p+1}^{p+q} \frac{{x_i}^2}{{a_i}^2} - 2x_{r+1} = 0,$$

тоест от третия вид във формулировката на теоремата, защото условията $a_1 \geq \dots \geq a_p$ и $a_{p+1} \geq \dots \geq a_{p+q}$ могат да се осигурят чрез преномериране на координатите (което е метрична трансформация).

С това теоремата е доказана. □

Доказателство на Теорема 6 (само за информация, не сме го правили на лекциите и не е нужно да се помни): Повтаряме буквално доказателството на Теорема 7. Тъй като обаче работим относно афинна координатна система, то трансформациите, които се извършват, няма да са метрични, а само афинни. Но това не проваля нищо, защото за тая теорема ни трябват само афинни трансформации. Накрая, след като са получени уравненията от Теорема 7, се прави трансформацията с уравнения

$$y_i = \begin{cases} \frac{x_i}{a_i}, \ i = 1, \dots, p+q \\ x_i, \ i = p+q+1, \dots, n \end{cases}$$

(това очевидно е афинна трансформация). С тая трансформация нашата хиперповърхнина се праща в хиперповърхнина, чието уравнение е същото но без параметрите a, тоест получаваме уравненията от формулировката на Теорема 6. □

При $n = 2$ от Теорема 6 и Теорема 7 получаваме:

Теорема 8 (афинна класификация на кривите от втора степен в равнината) *Съществуват 9 афинни класа криви от втора степен:*

№	наименование	представител/ афинно канонично уравнение	бележки
1	*имагинерна елипса*	$q_1 : {x_1}^2 + {x_2}^2 + 1 = 0$	*Няма реални точки.*
2	*елипса*	$q_2 : {x_1}^2 + {x_2}^2 - 1 = 0$	
3	*хипербола*	$q_3 : {x_1}^2 - {x_2}^2 + 1 = 0$	
4	*парабола*	$q_4 : {x_1}^2 - 2x_2 = 0$	
5	*две комплексно спрегнати пресичащи се прави*	$q_5 : {x_1}^2 + {x_2}^2 = 0$	*Състои се от две комплексно спрегнати пресичащи се прави и има единствена реална точка – пресечната им точка. За q_5 това са правите $x_1 - \mathrm{i}x_2 = 0$ и $x_1 + \mathrm{i}x_2 = 0$ и точката $(0,0)$.*
6	*две комплексно спрегнати успоредни прави*	$q_6 : {x_1}^2 + 1 = 0$	*Няма реални точки. Състои се от две комплексно спрегнати успоредни прави. За q_6 това са правите $x_1 - \mathrm{i} = 0$ и $x_1 + \mathrm{i} = 0$.*
7	*две реални пресичащи се прави*	$q_7 : {x_1}^2 - {x_2}^2 = 0$	*Състои се от две реални пресичащи се прави. За q_7 това са правите $x_1 - x_2 = 0$ и $x_1 + x_2 = 0$ и пресечната им точка е $(0,0)$.*
8	*две реални успоредни прави*	$q_8 : {x_1}^2 - 1 = 0$	*Състои се от две реални успоредни прави. За q_8 това са правите $x_1 - 1 = 0$ и $x_1 + 1 = 0$.*
9	*една двойна права*	$q_9 : {x_1}^2 = 0$	*Състои се от една реална права. За q_9 това е правата $x_1 = 0$.*

Теорема 9 (метрична класификация на кривите от втора степен в равнината) *Съществуват безбройно много метрични класове криви от втора степен. Те се задават от кривите с уравнения:*

представител/ метрично канонично уравнение	афинен клас
$\frac{{x_1}^2}{{a_1}^2} + \frac{{x_2}^2}{{a_2}^2} + 1 = 0,\ a_1 \geq a_2 > 0$	*имагинерна елипса*
$\frac{{x_1}^2}{{a_1}^2} + \frac{{x_2}^2}{{a_2}^2} - 1 = 0,\ a_1 \geq a_2 > 0$	*елипса*
$\frac{{x_1}^2}{{a_1}^2} - \frac{{x_2}^2}{{a_2}^2} + 1 = 0,\ a_1 > 0,\ a_2 > 0$	*хипербола*
${x_1}^2 - 2px_2 = 0,\ p > 0$	*парабола*
${x_1}^2 + a^2{x_2}^2 = 0,\ a \geq 1$	*две комплексно спрегнати пресичащи се прави*
${x_1}^2 + a^2 = 0,\ a > 0$	*две комплексно спрегнати успоредни прави*
${x_1}^2 - a^2{x_2}^2 = 0,\ a \geq 1$	*две реални пресичащи се прави*
${x_1}^2 - a^2 = 0,\ a > 0$	*две реални успоредни прави*
${x_1}^2 = 0$	*една двойна права*

Забележка 17 Теорема 9 всъщност е доказана на упражненията — това е алгоритъмът за канонизация. А Теорема 8 следва от нея по същия начин както Теорема 6 следва от Теорема 7 — виж доказателството на Теорема 6.

При $n = 3$ от Теорема 6 и Теорема 7 получаваме следните две теореми, които са само за информация и не е нужно да се помнят:

Теорема 10 (афинна класификация на повърхнините от втора степен в пространството)
Съществуват 17 афинни класа повърхнини от втора степен:

№	наименование	представител/ афинно канонично уравнение	бележки
1	*имагинерен елипсоид*	$q_1 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1 = 0$	*Няма реални точки.*
2	*елипсоид*	$q_2 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0$	
3	*двоен хиперболоид*	$q_3 : x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 1 = 0$	
4	*елиптичен параболоид*	$q_4 : x_1^2 + x_2^2 - 2x_3 = 0$	
5	*прост хиперболоид*	$q_5 : x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 1 = 0$	
6	*хиперболичен параболоид*	$q_6 : x_1^2 - x_2^2 - 2x_3 = 0$	
7	*имагинерен конус*	$q_7 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$	*Само една реална точка. За q_7 тя е $(0,0,0)$.*
8	*имагинерен елиптичен цилиндър*	$q_8 : x_1^2 + x_2^2 + 1 = 0$	*Няма реални точки.*
9	*конус*	$q_9 : x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$	
10	*елиптичен цилиндър*	$q_{10} : x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$	
11	*хиперболичен цилиндър*	$q_{11} : x_1^2 - x_2^2 - 1 = 0$	
12	*параболичен цилиндър*	$q_{12} : x_1^2 - 2x_2 = 0$	
13	*две комплексно спрегнати пресичащи се равнини*	$q_{13} : x_1^2 + x_2^2 = 0$	*Състои се от две комплексно спрегнати пресичащи се равнини и реалните точки лежат върху пресечната им права. За q_{13} това са равнините $x_1 - \mathrm{i}x_2 = 0$ и $x_1 + \mathrm{i}x_2 = 0$ и пресечната им права е $x_1 = 0$, $x_2 = 0$.*
14	*две комплексно спрегнати успоредни равнини*	$q_{14} : x_1^2 + 1 = 0$	*Няма реални точки. Състои се от две комплексно спрегнати успоредни равнини. За q_{14} това са равнините $x_1 - \mathrm{i} = 0$ и $x_1 + \mathrm{i} = 0$.*
15	*две реални пресичащи се равнини*	$q_{15} : x_1^2 - x_2^2 = 0$	*Състои се от две реални пресичащи се равнини. За q_{15} това са равнините $x_1 - x_2 = 0$ и $x_1 + x_2 = 0$ и те се пресичат по правата $x_1 = 0$, $x_2 = 0$.*
16	*две реални успоредни равнини*	$q_{16} : x_1^2 - 1 = 0$	*Състои се от две реални успоредни равнини. За q_{16} това са равнините $x_1 - 1 = 0$ и $x_1 + 1 = 0$.*
17	*една двойна равнина*	$q_{17} : x_1^2 = 0$	*Състои се от една реална равнина. За q_{17} това е равнината $x_1 = 0$.*

Теорема 11 (метрична класификация на повърхнините от втора степен в пространството *Съществуват безбройно много метрични класове повърхнини от втора степен. Те се задават от повърхнините с уравнения:*

представител/ метрично канонично уравнение	**афинен клас**
$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}+\frac{x_3^2}{a_3^2}+1=0,\ a_1\geq a_2\geq a_3>0$	*имагинерен елипсоид*
$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}+\frac{x_3^2}{a_3^2}-1=0,\ a_1\geq a_2\geq a_3>0$	*елипсоид*
$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}-\frac{x_3^2}{a_3^2}+1=0,\ a_1\geq a_2>0,\ a_3>0$	*двоен хиперболоид*
$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}-2x_3=0,\ a_1\geq a_2>0$	*елиптичен параболоид*
$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}-\frac{x_3^2}{a_3^2}-1=0,\ a_1\geq a_2>0,\ a_3>0$	*прост хиперболоид*
$\frac{x_1^2}{a_1^2}-\frac{x_2^2}{a_2^2}-2x_3=0,\ a_1\geq a_2>0$	*хиперболичен параболоид*
$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}+x_3^2=0,\ a_1\geq a_2\geq 1$	*имагинерен конус*
$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}+1=0,\ a_1\geq a_2>0$	*имагинерен елиптичен цилиндър*
$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}-x_3^2=0,\ a_1\geq a_2>0$	*конус*
$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}-1=0,\ a_1\geq a_2>0$	*елиптичен цилиндър*
$\frac{x_1^2}{a_1^2}-\frac{x_2^2}{a_2^2}+1=0,\ a_1>0,\ a_2>0$	*хиперболичен цилиндър*
$x_1^2-2px_2=0,\ p>0$	*параболичен цилиндър*
$x_1^2+a^2x_2^2=0,\ a\geq 1$	*две комплексно спрегнати пресичащи се равнини*
$x_1^2+a^2=0,\ a>0$	*две комплексно спрегнати успоредни равнини*
$x_1^2-a^2x_2^2=0,\ a\geq 1$	*две реални пресичащи се равнини*
$x_1^2-a^2=0,\ a>0$	*две реални успоредни равнини*
$x_1^2=0$	*една двойна равнина*

Окръжност, елипса, хипербола, парабола

Работим в геометричната равнина (или в произволно двумерно евклидово афинно пространство).

Окръжност

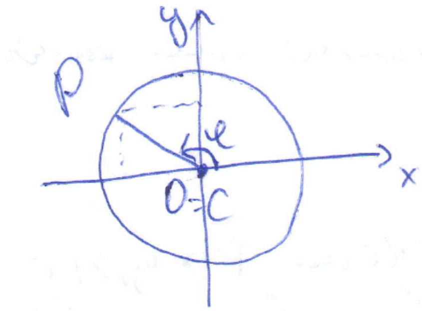
Определение 10 *Окръжност с център точката C и радиус $R>0$* е множеството k от точките, които са на разстояние R от C, тоест $k=\{P:\ |CP|=R\}$.

Нека $K=Oxy$ е ортонормирана координатна система и спрямо нея C има координати (α,β). Ако P има спрямо K координати (x,y), то $|CP|=\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}$. Следователно $P(x,y)\in k\Leftrightarrow\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}=R\Leftrightarrow(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$. Значи k има спрямо K уравнение $k:(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$.

Следователно окръжностите са алгебрични криви от втора степен.

Ако $C=O$, то $\alpha=0$, $\beta=0$ и горното уравнение става $k:x^2+y^2=R^2$. Това уравнение се нарича *централно или канонично уравнение на окръжност.*

Нека $C = O$. Нека $P(x,y) \in k$ и $\varphi = \sphericalangle\left(Ox, \overrightarrow{OP}\right)$ — ориентиран ъгъл, $\varphi \in [0, 2\pi)$.



Тогава $x = R\cos\varphi$, $y = R\sin\varphi$. Обратно, ако P има координати $x = R\cos\varphi$, $y = R\sin\varphi$, то $x^2 + y^2 = R^2$ и следователно $P \in k$. Значи k има спрямо K параметрични уравнения

$$k : \begin{cases} x = R\cos\varphi \\ y = R\sin\varphi \end{cases}, \quad \varphi \in [0, 2\pi).$$

При произволен център C с координати (α, β) аналогично получаваме

$$k : \begin{cases} x = \alpha + R\cos\varphi \\ y = \beta + R\sin\varphi \end{cases}, \quad \varphi \in [0, 2\pi).$$

Елипса

Определение 11 Множеството k от точките, сборът на разстоянията на които до две дадени точки е дадена константа, се нарича *елипса*.

Горната дефиниция е еквивалентна на следната „алгебрична“ дефиниция:

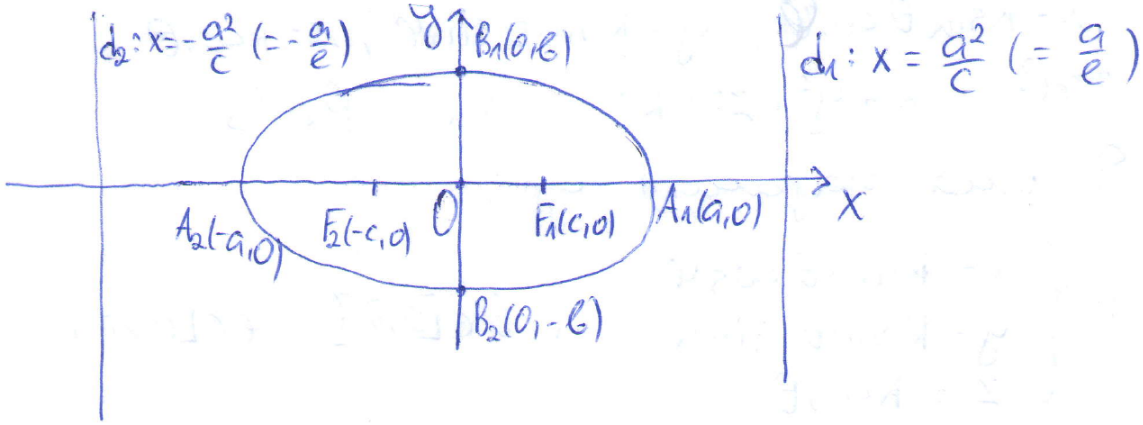
Определение 12 *Елипса* е множество k, което спрямо някоя ортонормирана координатна система $K = Oxy$ има уравнение от вида $k : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, където $a > b > 0$. Това уравнение се нарича *канонично уравнение на елипса* .

Въпреки че в доказателството на еквивалентността на двете дефиниции няма нищо сложно, няма да го правим за да спестим време.

От Определение 12 е ясно, че елипсите са алгебрични криви от втора степен.

Забележка 18 Ако в Определение 12 $a = b$ (или в Определение 11 двете дадени точки съвпадат), то получаваме окръжност с център O (или съвпадащите дадени точки) и радиус $R = a = b$ (или половината от дадената константата, тоест от сбора на разстоянията). Поради това понякога окръжностите се разглеждат като частен случай на елипсите.

Нека имаме ситуацията от Определение 12. Тогава:



Точката O се нарича *център на* k, а точките $A_1(a,0)$, $A_2(-a,0)$, $B_1(0,b)$, $B_2(0,-b)$ — *върхове на* k. Числата a и b се наричат съответно *голяма полуос на* k и *малка полуос на* k. Числото $c=\sqrt{a^2-b^2}$ се нарича *линеен ексцентрицитет на* k, а числото $e=\frac{c}{a}$ — *числен ексцентрицитет на* k или накратко само *ексцентрицитет на* k. Тъй като $a>b$, то $a>c>0$ и следователно $0<e<1$. Точките $F_1(c,0)$ и $F_2(-c,0)$ се наричат *фокуси на* k. Това са двете дадени точки от Определение 11, а дадената константа (тоест сборът на разстоянията) е $2a$. Правите d_1 и d_2, които спрямо K имат уравнения $d_1 : x=\frac{a^2}{c}$ $\left(=\frac{a}{e}=\frac{c}{e^2}\right)$ и $d_2 : x=-\frac{a^2}{c}$ $\left(=-\frac{a}{e}=-\frac{c}{e^2}\right)$, се наричат *директриси на* k, *съответни на фокусите* F_1 *и* F_2.

Забележка 19 За окръжност, тоест при $a=b$, получаваме $c=0$ и следователно $e=\frac{c}{a}=0$. Поради това за окръжност по дефиниция ексцентрицитетът се счита $e=0$.

Ако $P(x,y)\in k$, то $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$ и значи точката $Q\left(\frac{x}{a},\frac{y}{b}\right)$ е от единичната окръжност. Следователно съществува единствено $\varphi\in[0,2\pi)$ такова, че $\frac{x}{a}=\cos\varphi$, $\frac{y}{b}=\sin\varphi$. Значи $x=a\cos\varphi$, $y=b\sin\varphi$. Обратно, ако $P(x,y)$ и $x=a\cos\varphi$, $y=b\sin\varphi$, то очевидно $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ и следователно $P\in k$. Значи k има спрямо K параметрични уравнения

$$k : \left\{\begin{array}{rcl} x & = & a\cos\varphi \\ y & = & b\sin\varphi \end{array}\right., \quad \varphi\in[0,2\pi).$$

Хипербола

Определение 13 Множеството k от точките, абсолютната стойност на разликата на разстоянията на които до две дадени точки е дадена константа, се нарича *хипербола*.

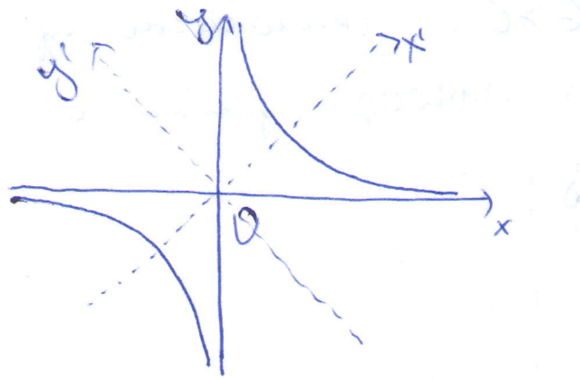
Горната дефиниция е еквивалентна на следната „алгебрична“ дефиниция:

Определение 14 *Хипербола* е множество k, което спрямо някоя ортонормирана координатна система $K=Oxy$ има уравнение от вида $k : \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, където $a>0$, $b>0$. Това уравнение се нарича *канонично уравнение на хипербола* .

Въпреки че в доказателството на еквивалентността на двете дефиниции няма нищо сложно, няма да го правим за да спестим време.

От Определение 14 е ясно, че хиперболите са алгебрични криви от втора степен.

Забележка 20 Хиперболата всъщност е позната от училище. Например графиката на функцията $y = \frac{1}{x}$ е хипербола.

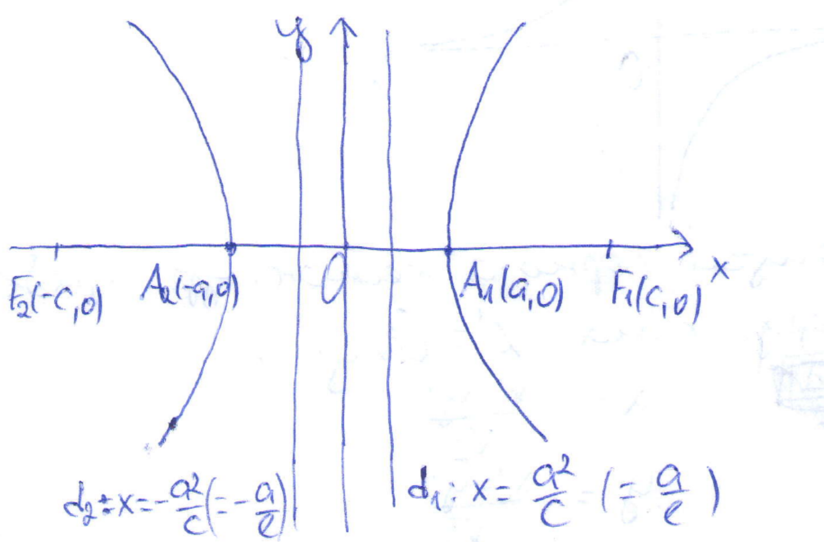


За да се получи горното канонично уравнение трябва да се вземе координатната система $K' = Ox'y'$, която се получава от K чрез смяната

$$x = \frac{x' - y'}{\sqrt{2}}$$
$$y = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}}$$

Тогава уравнението $xy = 1$ става $\frac{x'^2}{2} - \frac{y'^2}{2} = 1$, тоест $a = b = \sqrt{2}$.

Нека имаме ситуацията от Определение 14. Тогава:



Точката O се нарича *център на* k, а точките $A_1(a,0)$ и $A_2(-a,0)$ — *върхове на* k. Числата a и b се наричат съответно *реална полуос на* k и *имагинерна полуос на* k. Причината за тая терминология е следната: Ако допуснем и точки с комплексни координати, то точките $B_1(0,bi)$ и $B_2(0,-bi)$ лежат върху k. Те се наричат *имагинерни върхове на* k, а A_1 и A_2 се наричат също *реални върхове на* k. Числото $c=\sqrt{a^2+b^2}$ се нарича *линеен ексцентрицитет на* k, а числото $e=\frac{c}{a}$ — *числен ексцентрицитет на* k или накратко само *ексцентрицитет на* k. Тъй като $c>a$, то $e>1$. Точките $F_1(c,0)$ и $F_2(-c,0)$ се наричат *фокуси на* k. Това са двете дадени точки от Определение 13, а дадената константа (тоест абсолютната стойност на разликата на разстоянията) е $2a$. Правите d_1 и d_2, които спрямо K имат уравнения $d_1: x=\frac{a^2}{c}\ \left(=\frac{a}{e}=\frac{c}{e^2}\right)$ и $d_2: x=-\frac{a^2}{c}\ \left(=-\frac{a}{e}=-\frac{c}{e^2}\right)$, се наричат *директриси на* k*, съответни на фокусите* F_1 *и* F_2.

Преди да напишем параметрични уравнения на хипербола ще припомним някои прости факти за хиперболичните функции $\operatorname{ch}\varphi=\frac{e^{\varphi}+e^{-\varphi}}{2}$ и $\operatorname{sh}\varphi=\frac{e^{\varphi}-e^{-\varphi}}{2}$. За тях е в сила следният аналог на теоремата на Питагор: $\operatorname{ch}^2\varphi-\operatorname{sh}^2\varphi=1$. Освен това те са непрекъснати, $\operatorname{ch}\varphi>0$ (и дори $\operatorname{ch}\varphi\geq 1$), $\operatorname{sh}\varphi$ е монотонно растяща и $\lim\limits_{\varphi\to-\infty}\operatorname{sh}\varphi=-\infty$, $\lim\limits_{\varphi\to+\infty}\operatorname{sh}\varphi=+\infty$. Така че $\operatorname{sh}\varphi$ взима всички реални стойности и то за точно една стойност на аргумента.

Следователно, ако $P(x,y)$ е от десния клон на k (тоест тоя с $x>0$), то съществува единствено $\varphi\in\mathbb{R}$ такова, че $\frac{y}{b}=\operatorname{sh}\varphi$. Тогава от $\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$ следва

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2=1+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1+\operatorname{sh}^2\varphi=\operatorname{ch}^2\varphi$$

и значи $\frac{x}{a}=\operatorname{ch}\varphi$ (защото $x>0$). Така получихме, че съществува единствено $\varphi\in\mathbb{R}$ такова, че $\frac{x}{a}=\operatorname{ch}\varphi$, $\frac{y}{b}=\operatorname{sh}\varphi$. Значи $x=a\operatorname{ch}\varphi$, $y=b\operatorname{sh}\varphi$. Обратно, ако $P(x,y)$ и $x=a\operatorname{ch}\varphi$, $y=b\operatorname{sh}\varphi$, то очевидно $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ и $x>0$ и следователно P е върху десния клон на k. Значи десният клон на k има спрямо K параметрични уравнения

$$k:\left\{\begin{array}{rcl} x&=&a\operatorname{ch}\varphi\\ y&=&b\operatorname{sh}\varphi\end{array}\right.,\quad \varphi\in\mathbb{R}.$$

Аналогично левият клон на k (тоест тоя с $x<0$) има спрямо K параметрични уравнения

$$k:\left\{\begin{array}{rcr} x&=&-a\operatorname{ch}\varphi\\ y&=&b\operatorname{sh}\varphi\end{array}\right.,\quad \varphi\in\mathbb{R}.$$

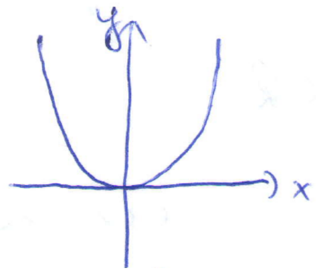
Парабола

Параболата е известна от училището като графика на функция, така че и тук ще дадем „алгебрична“ дефиниция:

Определение 15 *Парабола* е множество k, което спрямо някоя ортонормирана координатна система $K=Oxy$ има уравнение от вида $k: y^2=2px$, където $p>0$. Това уравнение се нарича *канонично уравнение на парабола* .

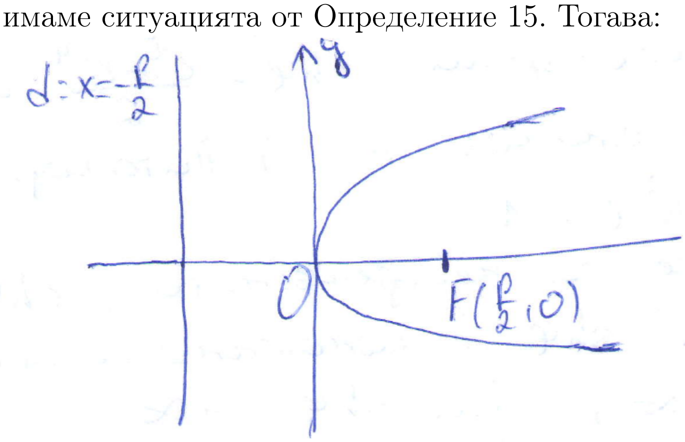
От Определение 15 е ясно, че параболите са алгебрични криви от втора степен.

Забележка 21 Параболата с уравнението от Определение 15 е „легнала“. А от училището параболата е известна като графиката на квадратната функция, например $y = x^2$ или $y = ax^2$, и тия параболи са „изправени“.



Няма никаква фундаментална причина едното да се предпочете пред другото. Аз съм избрал за канонично уравнение уравнението от Определение 15, защото така е направено в повечето учебници на български. Със същия успех за канонично уравнение можеше да се избере $x^2 = 2py$ и тогава параболите с канонично уравнение щяха да са „изправени“.

Нека имаме ситуацията от Определение 15. Тогава:



Точката O се нарича *връх на* k, а оста Ox — *ос на* k. Числото p се нарича *параметър на* k. За парабола *ексцентрицитетът* е по дефиниция $e = 1$. Точката $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ се нарича *фокус на* k, а правата d, която спрямо K има уравнение $d : x = -\frac{p}{2}$, се нарича *директриса на* k.

Тъй като уравнението $y^2 = 2px$ е еквивалентно на $x = \frac{y^2}{2p}$, то можем да вземем за параметър y и получаваме, че k има спрямо K параметрични уравнения

$$k : \begin{cases} x = \dfrac{\varphi^2}{2p} \\ y = \varphi \end{cases}, \quad \varphi \in \mathbb{R}.$$

Друга еквивалентна геометрична дефиниция на елипса, хипербола и парабола се дава от следното твърдение:

Твърдение 14 *Нека F е точка, d е права, която не минава през F и $e > 0$ е константа. Тогава множеството от точките, за които отношението на разстоянията до F и до d е e, тоест $k = \left\{P : \frac{|PF|}{d(P,d)} = e\right\}$, е*

$$\begin{array}{r} \text{елипса при } e < 1 \\ \text{хипербола при } e > 1 \\ \text{парабола при } e = 1 \end{array}.$$

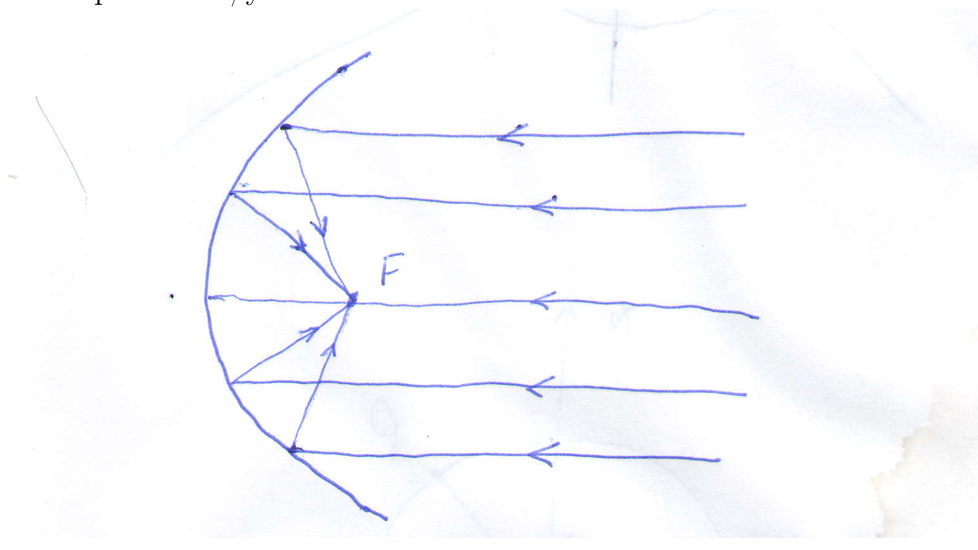
При това F е фокус, d е съответната му директриса, а e е ексцентрицитетът на k. Обратно, за всяка елипса, хипербола или парабола k отношението на разстоянията от точките на k до фокус и до съответната му директриса е константа — ексцентрицитетът на k.

Въпреки че в доказателството на това твърдение няма нищо сложно, няма да го правим за да спестим време. Същото важи и за следващото твърдение.

Твърдение 15 (оптично свойство на елипса, хипербола, парабола)
Нека k е елипса, хипербола или парабола и лъч, минаващ през фокус на k се отразява от k. Тогава

при елипса отразеният лъч минава през другия фокус на k.
при хипербола противоположният на отразения лъч минава през другия фокус на k.
при парабола отразеният лъч е успореден (и еднопосочен) на оста на k.

Забележка 22 Оптичното свойство на параболите се използва при параболичните антени. Тъй като източникът на сигнала е много далече, то може да се счита, че сигналът се движи по успоредни лъчи. Ако антената се насочи така, че оста е успоредна на тия лъчи, то всеки от тях след отразяването си от антената ще мине през фокуса, така че във фокуса се слага приемника/усилвателя.



Сфера, цилиндър, конус

Работим в геометричното пространство (или в произволно тримерно евклидово афинно пространство).

Сфера

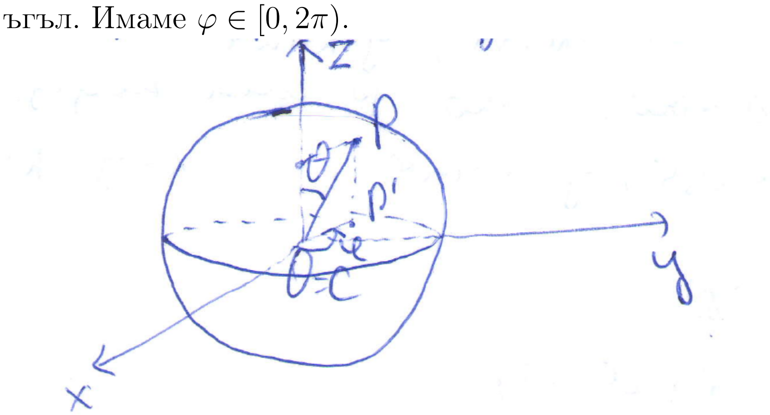
Определение 16 *Сфера с център точката C и радиус $R > 0$* е множеството S от точките, които са на разстояние R от C, тоест $S = \{P : \ |CP| = R\}$.

Нека $K = Oxyz$ е ортонормирана координатна система и спрямо нея C има координати (α, β, γ). Ако P има спрямо K координати (x, y, z), то
$|CP| = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2}$. Следователно
$P(x,y,z) \in S \Leftrightarrow \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2} = R \Leftrightarrow (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = R^2$.
Значи S има спрямо K уравнение $S : (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = R^2$.

Следователно сферите са алгебрични повърхнини от втора степен.

Ако $C = O$, то $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ и горното уравнение става $S : x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Това уравнение се нарича *централно или канонично уравнение на сфера*.

Нека $C = O$. Нека $P(x, y, z) \in S$. Означаваме $\theta = \sphericalangle\left(Oz, \overrightarrow{OP}\right)$. Имаме $\theta \in [0, \pi]$. Нека P' е ортогоналната проекция на P в равнината Oxy и $\varphi = \sphericalangle\left(Ox, \overrightarrow{OP'}\right)$ — ориентиран ъгъл. Имаме $\varphi \in [0, 2\pi)$.



Тогава
$$z = |OP|\cos\theta = R\cos\theta, \quad |OP'| = |OP|\sin\theta = R\sin\theta.$$
Тъй като $P'(x, y, 0)$, то както при окръжността получаваме
$$x = |OP'|\cos\varphi = R\sin\theta\cos\varphi, \quad y = |OP'|\sin\varphi = R\sin\theta\sin\varphi.$$
Значи $x = R\sin\theta\cos\varphi$, $y = R\sin\theta\sin\varphi$, $z = R\cos\theta$. Обратно, ако P има координати $x = R\sin\theta\cos\varphi$, $y = R\sin\theta\sin\varphi$, $z = R\cos\theta$, то с двукратно прилагане на теоремата на Питагор лесно следва $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ и следователно $P \in S$. Значи S има спрямо K параметрични уравнения
$$S : \begin{cases} x = R\sin\theta\cos\varphi \\ y = R\sin\theta\sin\varphi \\ z = R\cos\theta \end{cases}, \quad \theta \in [0, \pi], \ \varphi \in [0, 2\pi).$$

При произволен център C с координати (α, β, γ) аналогично получаваме

$$S : \begin{cases} x = \alpha + R \sin\theta \cos\varphi \\ y = \beta + R \sin\theta \sin\varphi \\ z = \gamma + R \cos\theta \end{cases}, \quad \theta \in [0, \pi],\ \varphi \in [0, 2\pi).$$

Забележка 23 Двата полюса се получават за безбройно много стойности на параметрите: северният $(0, 0, R)$ за $\theta = 0$ и всяко φ, южният $(0, 0, -R)$ за $\theta = \pi$ и всяко φ.

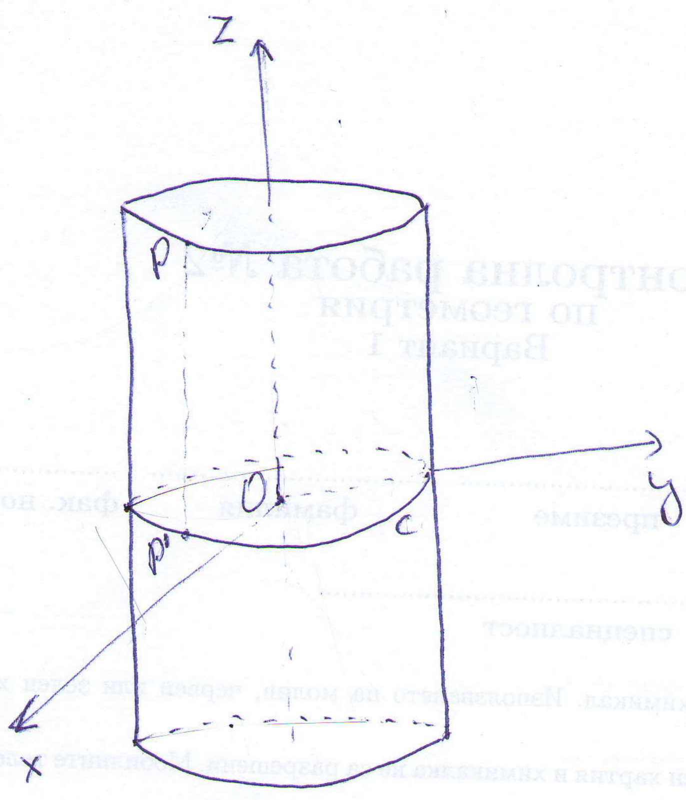
Цилиндър

Определение 17 Нека c е окръжност и π е равнината на c. Повърхнината S, състояща се от всички точки върху всички прави, които са перпендикулярни на π и минават през точка на c, се нарича *прав кръгов цилиндър*. Тия прави се наричат *образуващи на* S, а правата, която е перпендикулярна на π и минава през центъра на c, се нарича *ос на* S.

Нека $K = Oxyz$ е ортонормирана координатна система, за която началото O е центърът на c, а равнината Oxy е π. Тогава спрямо нея c се задава с уравненията

$$c : \begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ z = 0 \end{cases},$$

където R е радиусът на c.



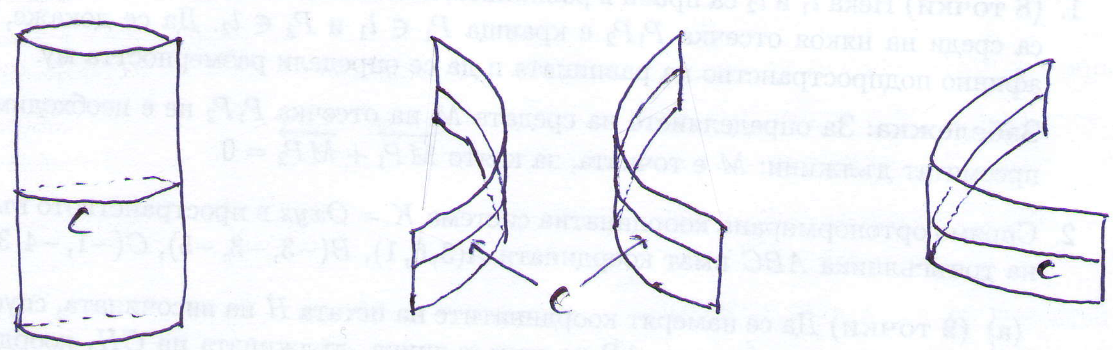
Ортогоналната проекция на $P(x,y,z)$ в равнината Oxy е $P'(x,y,0)$. Тъй като $P \in S \Leftrightarrow P' \in c$, получаваме $P(x,y,z) \in S \Leftrightarrow x^2 + y^2 = R^2$. Значи S има спрямо K уравнение $S : x^2 + y^2 = R^2$.

Следователно правите кръгови цилиндри са алгебрични повърхнини от втора степен.

Тъй като уравнението на S спрямо K е като уравнението на окръжността c спрямо координатната система Oxy в равнината π, а z не участва в уравнението и значи при дадени x и y, които удовлетворяват уравнението, може да взима произволни стойности, то параметрични уравнения на S спрямо K могат да се получат като се вземат параметрични уравнения на c спрямо координатната система Oxy, а за втори параметър се вземе z. Значи S има спрямо K параметрични уравнения

$$S : \begin{cases} x = R\cos\varphi \\ y = R\sin\varphi \\ z = \zeta \end{cases}, \quad \varphi \in [0, 2\pi),\ \zeta \in \mathbb{R}.$$

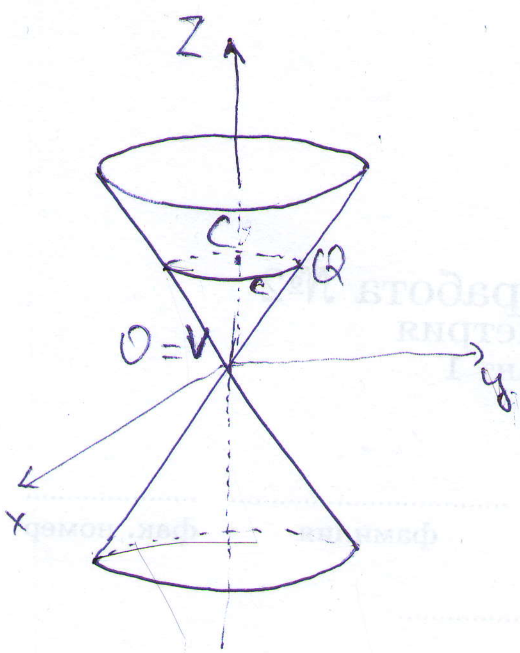
По същия начин се дефинират *елиптичен цилиндър*, *хиперболичен цилиндър*, *параболичен цилиндър*: в Определение 17 вместо окръжност c е съответно елипса, хипербола, парабола. И ако пак изберем ортонормираната координатна система $K = Oxyz$ така, че равнината Oxy е π, по същия начин се вижда, че S има спрямо K същото уравнение, каквото е уравнението на c спрямо координатната система Oxy в равнината π. Значи и елиптичните цилиндри, хиперболичните цилиндри и параболичните цилиндри са алгебрични повърхнини от втора степен. По същия начин се получават и параметрични уравнения на S спрямо K: координатите x и y се задават от параметрични уравнения на c спрямо координатната система Oxy в равнината π, а за втори параметър се взима z.



Конус

Определение 18 Нека c е окръжност с център C, π е равнината на c и O е точка от правата, която е перпендикулярна на π и минава през C, като $O \neq C$. Повърхнината S, състояща се от всички точки върху всички прави, които минават през O и точка на c, се нарича *прав кръгов конус*. Тия прави се наричат *образуващи на* S, правата OC се нарича *ос на* S, а точката O се нарича *връх на* S.

Нека $K = Oxyz$ е ортонормирана координатна система, за която началото O е върхът на S, а равнината Oxy е успоредна на π, тоест Oz е оста на S.



Тогава спрямо K имаме $C(0,0,d)$ за някое $d \neq 0$ и $\pi : z = d$ и следователно

$$c : \begin{cases} x^2 + y^2 & = & R^2 \\ z & = & d \end{cases},$$

където R е радиусът на c. Значи $Q(\xi, \eta, \zeta) \in c \Leftrightarrow \xi^2 + \eta^2 = R^2$ и $\zeta = d$. Следователно всевъзможните образуващи OQ на S са правите с параметрични уравнения от вида

$$\begin{cases} x = \lambda\xi \\ y = \lambda\eta \\ z = \lambda d \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

където $\xi^2 + \eta^2 = R^2$.

От това получаваме, че $P(x,y,z) \in S \Leftrightarrow x = \lambda\xi$, $y = \lambda\eta$, $z = \lambda d$ за някои $\lambda, \xi, \eta \in \mathbb{R}$ такива, че $\xi^2 + \eta^2 = R^2$. Тъй като $z = \lambda d$ е еквивалентно на $\lambda = \frac{z}{d}$, то $P(x,y,z) \in S \Leftrightarrow x = \frac{z}{d} \cdot \xi$, $y = \frac{z}{d} \cdot \eta$ за някои $\xi, \eta \in \mathbb{R}$ такива, че $\xi^2 + \eta^2 = R^2$. При $z = 0$ равенствата $x = \frac{z}{d} \cdot \xi$, $y = \frac{z}{d} \cdot \eta$ са еквивалентни на $x = 0$, $y = 0$, тоест на $P = O$, а при $z \neq 0$ са еквивалентни на $\xi = \frac{d}{z} \cdot x$, $\eta = \frac{d}{z} \cdot y$. Следователно $P(x,y,z) \in S \Leftrightarrow P = O$ или $z \neq 0$ и $\xi = \frac{d}{z} \cdot x$, $\eta = \frac{d}{z} \cdot y$ удовлетворяват $\xi^2 + \eta^2 = R^2$, тоест $\frac{d^2}{z^2} \cdot (x^2 + y^2) = R^2$, тоест $\frac{d^2}{R^2} \cdot (x^2 + y^2) = z^2$. Последното уравнение обаче се удовлетворява и от координатите $(0,0,0)$ на O. Следователно $P(x,y,z) \in S \Leftrightarrow \frac{d^2}{R^2} \cdot (x^2 + y^2) = z^2$, тоест $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = z^2$, където сме означили $a = \frac{R}{|d|}$. Значи S има спрямо K уравнение $S : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = z^2$.

Следователно правите кръгови конуси са алгебрични повърхнини от втора степен.

По-горе видяхме, че всевъзможните образуващи на S са правите с параметрични уравнения от вида

$$\begin{cases} x = \lambda \xi \\ y = \lambda \eta \\ z = \lambda d \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

където $\xi^2 + \eta^2 = R^2$. Тъй като последното е уравнение на окръжност с радиус R в равнината, то всевъзможните такива (ξ, η) могат да се получат от параметрични уравнения на окръжност с радиус R в равнината, тоест например по формулите

$$\begin{cases} \xi = R \cos \varphi \\ \eta = R \sin \varphi \end{cases}, \quad \varphi \in [0, 2\pi).$$

Значи всевъзможните образуващи на S са правите с параметрични уравнения от вида

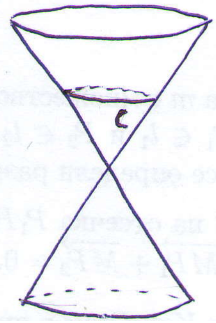
$$\begin{cases} x = \lambda R \cos \varphi \\ y = \lambda R \sin \varphi \\ z = \lambda d \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

където $\varphi \in [0, 2\pi)$. Тъй като менейки $\varphi \in [0, 2\pi)$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ по тия формули получаваме координатите на всички точки от S, то S има спрямо K параметрични уравнения

$$S : \begin{cases} x = \lambda R \cos \varphi \\ y = \lambda R \sin \varphi \\ z = \lambda d \end{cases}, \quad \varphi \in [0, 2\pi), \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ако в Определение 18 c е елипса вместо окръжност, то получената повърхнина S се нарича *(елиптичен) конус*. Ако изберем ортонормираната координатна система K както по-горе, то със същите разсъждения получаваме, че S има спрямо K уравнение $S : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2$. Значи всички (елиптични) конуси са повърхнини от втора степен. По същия начин се получават и параметрични уравнения на S спрямо K:

$$S : \begin{cases} x = \lambda a \cos \varphi \\ y = \lambda b \sin \varphi \\ z = \lambda d \end{cases}, \quad \varphi \in [0, 2\pi), \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

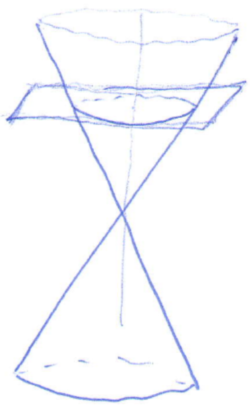


Конични сечения

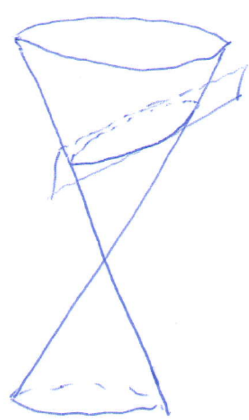
Последващото е само за информация и няма да доказваме съдържащите се в него твърдения.

Нека S е прав кръгов конус. Интересуваме се какви са кривите, които се получават при пресичането на S с равнина π.

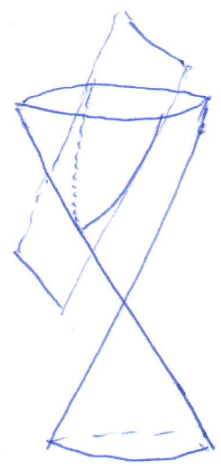
Ако π е перпендикулярна на оста на S, то пресечната крива е окръжност.



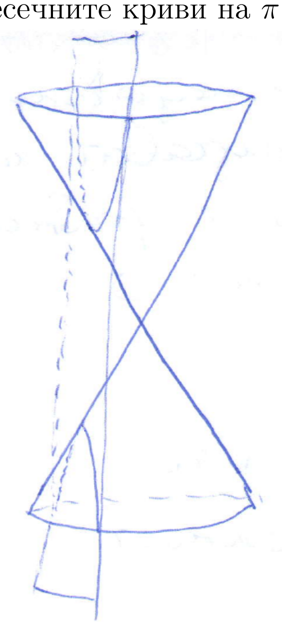
Ако наклоним малко π, то пресечната крива става елипса.



Ако наклоним още π, така че да стане успоредна на някоя образуваща на S, то пресечната крива става парабола.



Ако наклоним още повече π, то пресечната крива става хипербола (и двата ѝ клона са пресечните криви на π с двете половини на конуса).



Поради тия неща окръжността, елипсата, хиперболата и параболата общо се наричат *конични сечения*. И често понятието конично сечение се разпространява и върху всички криви от втора степен, тоест използва се като синоним на крива от втора степен.

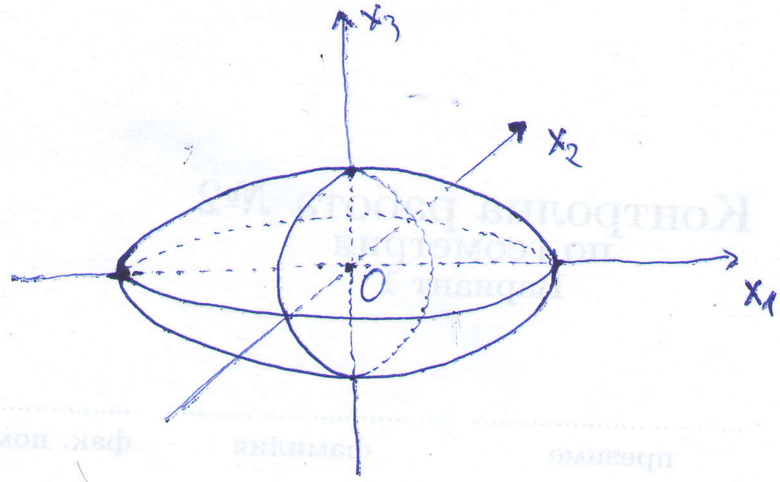
Древните гърци са открили елипсата, хиперболата и параболата именно като пресечни криви на прав кръгов конус с равнина.

17-те вида повърхнини

Ще нарисувам и коментирам накратко някои от 17-те вида повърхнини. (Това е само за информация и не е нужно да се помни.)

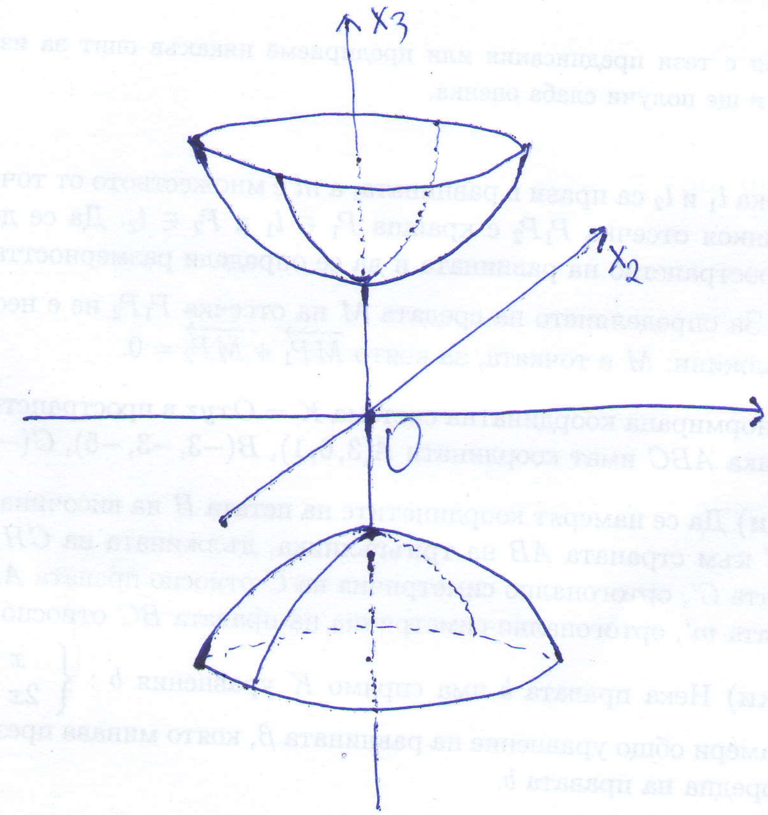
Имагинерният елипсоид няма реални точки, така че няма какво да се рисува.

Елипсоид:



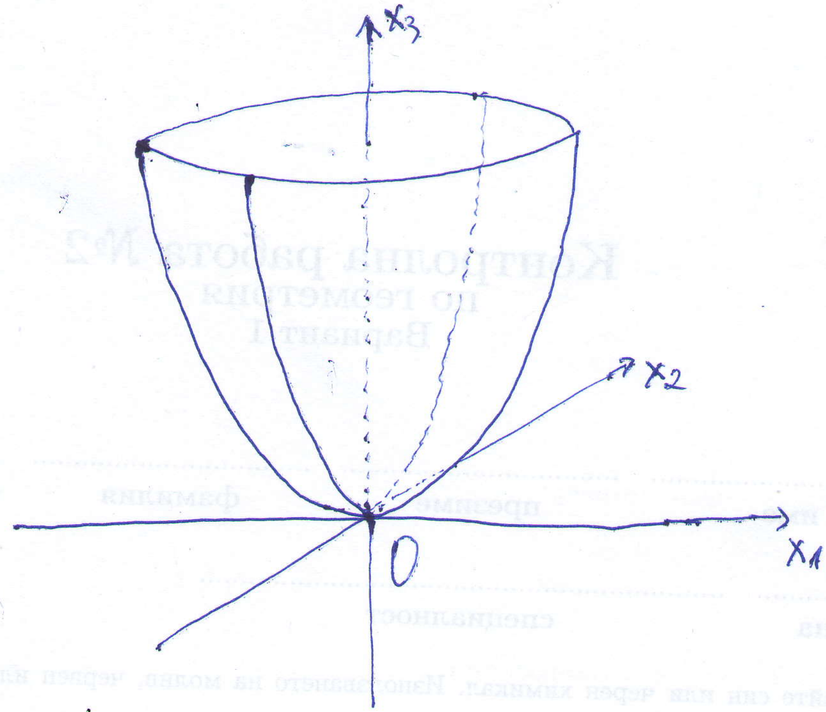
Сеченията с всички равнини, които не са празни или една точка, са елипси. Най-лесно това се вижда за равнините, които са успоредни на координатните равнини, а за координатните равнини е съвсем очевидно. В частните случаи, когато
$a_1 = a_2$ или $a_2 = a_3$, се нарича ротационен елипсоид, защото се получава чрез завъртане на елипса в равнината Ox_1x_3 съответно около Ox_3 или Ox_1. Сеченията с равнините, които са успоредни на Ox_1x_2 в първия случай и на Ox_2x_3 във втория случай, са окръжности. Най-частният случай е когато $a_1 = a_2 = a_3$ — тогава имаме сфера с радиус $R = a_1 = a_2 = a_3$.

Двоен хиперболоид:



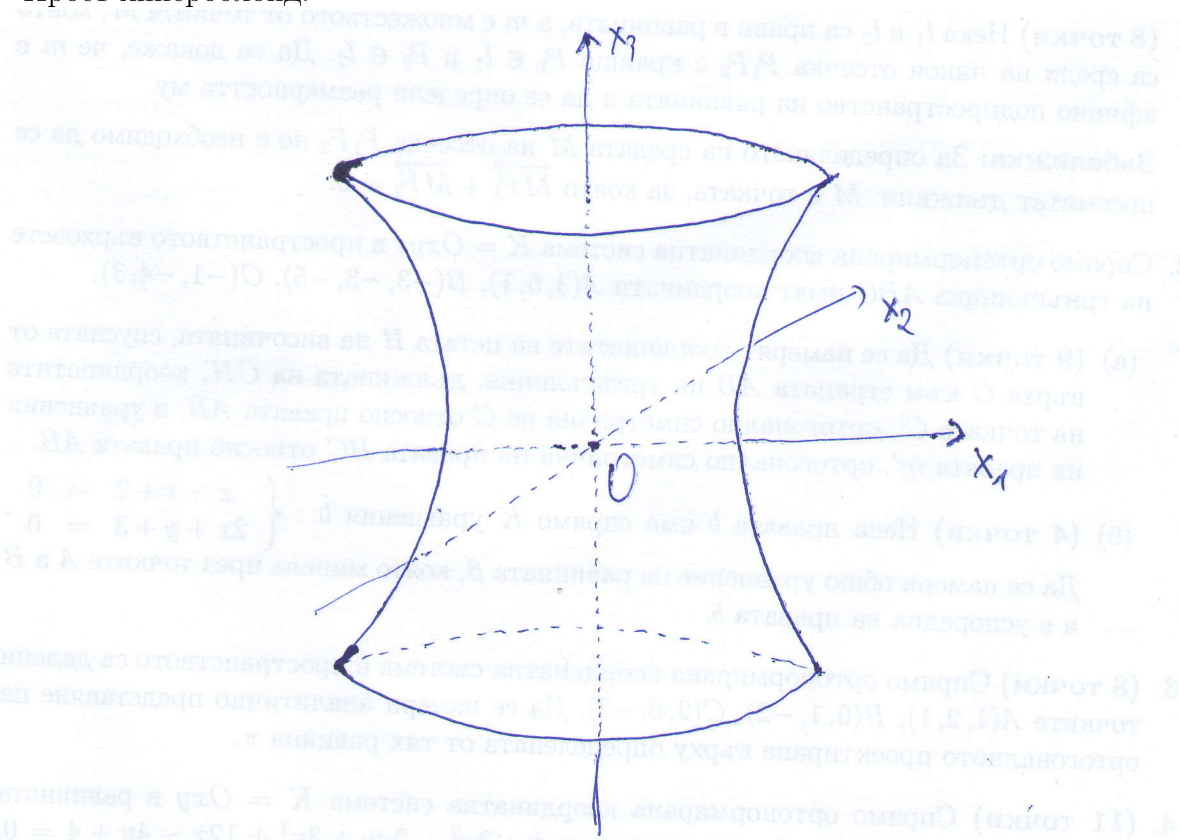
Сеченията с хоризонталните равнини (тоест успоредни на Ox_1x_2), които не са празни или една точка, са елипси, а сеченията с вертикалните равнини (тоест перпендикулярни на Ox_1x_2), са хиперболи. Състои се от две „несвързани“ части.

Елиптичен параболоид:



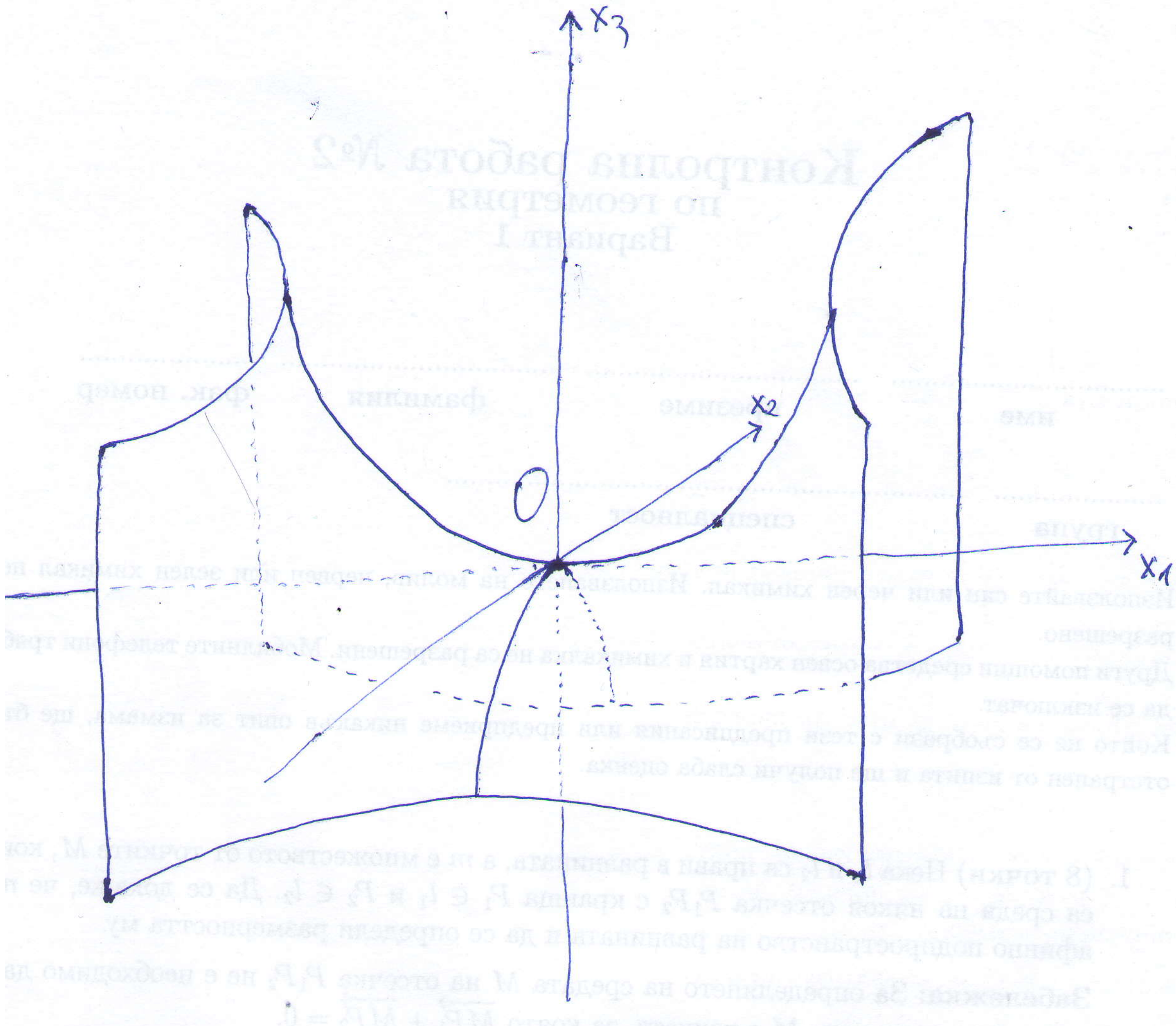
Сеченията с хоризонталните равнини (тоест успоредни на Ox_1x_2), които не са празни или една точка, са елипси, а сеченията с вертикалните равнини (тоест перпендикулярни на Ox_1x_2), са параболи.

Прост хиперболоид:



Сеченията с хоризонталните равнини (тоест успоредни на Ox_1x_2), са елипси, а сеченията с вертикалните равнини (тоест перпендикулярни на Ox_1x_2), са хиперболи. За разлика от двойния хиперболоид се състои от една „свързана“ част.

Хиперболичен параболоид:



Сеченията с хоризонталните равнини (тоест успоредни на Ox_1x_2), са хиперболи, а сеченията с вертикалните равнини (тоест перпендикулярни на Ox_1x_2), са параболи. Прилича на седло.

Интересното при простия хиперболоид и хиперболичния параболоид е, че върху тях има прави (можете да се опитате да ги намерите), и то две системи от прави. Дори през всяка точка минават две прави, които лежат върху повърхнината. И въпреки че са „изтъкани“ от прави, те изглеждат съвсем „криви“.

Имагинерният конус има само една реална точка и аз съм убеден, че една точка ще можете да си нарисувате сами.

Имагинерният елиптичен цилиндър няма реални точки, така че няма какво да се рисува.

Конус, елиптичен цилиндър, хиперболичен цилиндър, параболичен цилиндър рисувахме и коментирахме по-горе.

На две комплексно спрегнати пресичащи се равнини реалните точки образуват една права и една права можете да си нарисувате сами.

Две комплексно спрегнати успоредни равнини нямат реални точки, така че няма какво да се рисува.

Две реални пресичащи се равнини, две реални успоредни равнини и една двойна равнина също можете да си нарисувате сами.