$\varphi \vee \psi$

• $A \vee B$ $\quad \{\langle a, b\rangle \mid a \in A$ или $b \in B\}$

$U \times B \cup A \times U$
универсум

$\langle \mathbb{N}, +, \cdot, = \rangle \quad \{0\}: x + x = y$ — φ_1

$\{0,1\}: y \cdot y = y$ — φ_2

$\{1\};$

$\varphi\{x/z\}$ → x заменяване с t.

z – нова промен. не участваща нито в φ_1 нито в φ_2

$\varphi_1\{x/z\} \wedge \varphi_2\{x/z\} \quad z + z = z \wedge z \cdot z = z$

$\boxed{22.12/16}$ лекции

$\varphi = \forall x_1 \ldots \forall x_n \theta \quad \theta$ - безкванторна

$SI(\varphi) = \{\psi \mid \psi = \theta[x_1/\tau_1, \ldots, x_n/\tau_n], \tau_1, \ldots, \tau_n$ - термове$\}$

$SI(\Gamma) = \bigcup_{\varphi \in \Gamma} SI(\varphi)$

$\models \forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n \theta \Rightarrow \forall x_2 \ldots \forall x_n \theta[x_1/\tau_1]$ Ако τ_1 е затворен терм то замяната е допустима.

Нека τ_1 не е затворен терм

$\forall x_2' \ldots \forall x_n' \underbrace{\theta[x_2/x_2', \ldots, x_n/x_n']}_{\theta'}$

$x_2' \ldots x_n'$ - (променливи така че замяната е допустима) нови, различни и не участващи в термовете $\tau_1, \ldots, \tau_n$

$\theta[x_1/\tau_1, x_2/\tau_2, \ldots] = \theta'[x_2'/\tau_2, \ldots, x_n'/\tau_n]$

$\boxed{\text{T4) Слаба форма на Th. на Ербран}}$ Нека Γ е мн-во от затворени универсални форм. в ПНФ. Тогава следните са екв.

(i) Γ има модел;

(ii) Γ има свободен ербр. модел.

(iii) $SI(\Gamma)$ е булево изпълнимо

Имаме модел A. На серия $SI(\Gamma)$ → за (i) → (iii)

Док

(iii) → (ii)

Нека I е булева интерпрет. такава, че $\forall$ форм. $\psi \in SI(\Gamma)$ $I(\psi) = И$.

Деф. свободната ербранова структ. H_I така:

$\langle \tau_1 \ldots \tau_n \rangle \in p^{H_I} \Leftrightarrow I(p(\tau_1, \ldots, \tau_n)) = И$

С индукция относно построението на безкванторните формули доказваме следното: За $\forall$ безкванторна формула φ е в сила еквивалентността: $H_I \models_{id} \varphi \Leftrightarrow I(\varphi) = И$ - индукция

Следователно за всяка $\psi \in SI(\Gamma)$ $H_I \models_{id} \psi$, т.е. $H_I \models_{id} SI(\Gamma)$. Трябва да проверим, че при произволна оц. v в H_I, $H_I \models_v SI(\Gamma)$, $\tau^{H_I}[v] = \tau[x_1/v(x_1), \ldots, x_n/v(x_n)]$ където променливите на терма τ: $Var[\tau] \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$ (и индуктивно термове) $H_I \models_v \varphi \Leftrightarrow H_I \models_{id} \varphi[x_1/v(x_1), \ldots, x_n/v(x_n)]$, $Var^{free}[\varphi] \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$ за произволна безкванторна формула φ

Предикатни езици с формално равенство

L е с формално равенство ($\doteq$)

$(\tau_1 \doteq \tau_2)$.

Семантична разлика между $\doteq$ и $=$

$\mathcal{A} \models_v (\tau_1 \doteq \tau_2) \Leftrightarrow \tau_1^{\mathcal{A}}[v] = \tau_2^{\mathcal{A}}[v]$

$\boxed{\text{Нестандартна семантика на равенството}}$ $\doteq^{\mathcal{A}}$ - бинарна релация

Γ - формули от език L → стандартни модели на Γ (модели на Γ с стандарт. равенство); → нестандартни модели на Γ

$\Gamma \cup \{\forall x (x \doteq x), \forall x \forall y ((x \doteq y) \Rightarrow (y \doteq x)), \forall x \forall y \forall z (((x \doteq y) \& (y \doteq z)) \Rightarrow (x \doteq z)), \forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n (((x_1 \doteq y_1) \& \ldots \& (x_n \doteq y_n)) \Rightarrow (p(x_1 \ldots x_n) \Leftrightarrow p(y_1 \ldots y_n))),$
$\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n ((x_1 \doteq y_1) \& \ldots \& (x_n \doteq y_n) \Rightarrow (f(x_1, \ldots, x_n) \doteq f(y_1, \ldots, y_n)))\}$

Нека $\mathcal{A}$ - нестандартен модел на разширеното множество

$\stackrel{\circ}{=}^{\mathcal{A}}$ - релация на еквивалентност в A (множеството)

$\mathcal{A}/_{\stackrel{\circ}{=}^{\mathcal{A}}}$ - фактор структура (става стандартно $(=)$ е $(\stackrel{\circ}{=})$)

Булеви (съждителни) формули

Съждителни променливи - изброимо множ. $P_0, P_1, \ldots$

Индуктивна деф. съждителни формули:

- съждит. промен. са съжд. формули
- ако φ съжд. ф., то $\neg\varphi$ е съжд. ф.
- ако φ_1 и φ_2 са съж., то $(\varphi_1 \sigma \varphi_2)$ къд. $\sigma \in \{\&, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$ е съжд. формула)

I_0 : Съжд. пром $\to \{И, Л\}$.

I_0 може еднозначно да се продължи до I : Съжд. ф. $\to \{И, Л\}$
$\forall$ съжд. ф.

$I(P) = I_0(P)$; $I(\neg\varphi) = H_\neg(I(\varphi))$; ...

$\varphi \stackrel{\mathcal{B}}{\models\!\dashv} \psi$: за $\forall$ булева интерпретация I, $I(\varphi) = I(\psi)$.

Литерал: формула от вида P, или $\neg P$

Елементарна дизюнкция: дизюнкция от литерали
- всеки литерал е елементарна дизюнкция.
- ако θ_1 и θ_2 са елементарни дизюнкции то $\theta_1 \vee \theta_2$ е елементарна дизюнкция: $P \vee \neg Q$, $(P \vee \neg Q) \vee (M \vee N)$, $P \vee (\neg Q \vee (M \vee N))$, $P \vee ((\neg Q \vee M) \vee N)$

от вида $(L \vee L')$ — литерали

$\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3) \models\!\dashv (\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3$

$\varphi \vee \psi \models\!\dashv \psi \vee \varphi$

$\varphi \vee \varphi \models\!\dashv \varphi$

Елементарна дизюнк. $\mapsto$ множ. на всички литерали участващи в дизюнк.
D_E

def/ Дизюнкт: Наричаме крайно множество от литерали
$E \mapsto D_E$

def// Ако (I - изображение от променливите в $\emptyset$) I : Промен $\to \{И, Л\}$

$I(\neg P) = H_\neg(I(P))$

$I \models D_E \leftrightharpoons$ има литерал $L \in D_E$, $I(L) = И$.

За $\forall$ булева интерпретация I е в сила еквивалентността
$I \models E \longleftrightarrow I \models D_E$

Т.е. празния дизюнкт има стойност Л при всяка булева интерпр.

■ - означение на (празно множ. от дизюнкт) празен дизюнкт
$I \not\models$ ■

∘ Един дизюнкт D е ~~верен~~ изпълним $\longleftrightarrow$ когато е $\neq$ от празния ($D \neq$ ■) празния винаги е Л. ■

∘ Кога един дизюнкт D е тавтологичен $\leftrightharpoons$ за $\forall$ булева интерпретация I,
$I \models D$ D е тавтолог. $\longleftrightarrow$ има $P \in D$ такова, че $\neg P \in D$.

(На $\forall$ литерал му съпоставяме друг литерал наречен противоп.)

$L \mapsto L^{\partial} = \begin{cases} \neg P, & \text{ако } L = P \\ P, & \text{ако } L = \neg P \end{cases}$

$\boxed{\text{ТВ}}$ Има алгоритъм, който по дадена съждителна формула построява крайна конюнкция от вида $E_1 \& E_2 \& \ldots \& E_n$, такава, че φ е (еквивалентна с) $\varphi \models\!\dashv E_1 \& \ldots \& E_n$ и $E_1, \ldots, E_n$ са елементарни дизюнкции

$\varphi \mapsto E_1 \&, \ldots \& E_n \longmapsto \{D_{E_1}, \ldots, D_{E_n}\}$ $\leq n$ ≥ 1

пр. за $(P \vee \neg Q) \& (\neg Q \vee P) \& (Q \vee M)$

на $\forall$ формула съпоставяме (крайно) множество от дизюнкти

$\{\{P, \neg Q\}, \{Q, M\}\}$

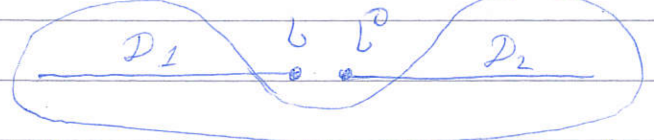
def Нека S е множ. от дизюнкти, I е бул. интерпр.
I модел за S, $I \models S$, ако $\forall$ дизюнкт $D \in S$ то $I \models D$

$\varphi \longmapsto S_\varphi$ – множ. от дизюнкти ($S_\varphi \neq \emptyset$, S_φ е крайно)
св За всяка бул. интерпр. I. $I \models \varphi \longleftrightarrow I \models S_\varphi$.

$I \models \emptyset$ (празното множ. от дизюнкти е вярно при $\forall$ бул. интерпр.)
$I \not\models \blacksquare$
Нека Γ е множ. от затворени формули ~~[illegible]~~. $S_\Gamma \leftrightharpoons \bigcup_{\varphi \in \Gamma} S_\varphi$
$I \models \Gamma \longleftrightarrow I \models S_\Gamma$

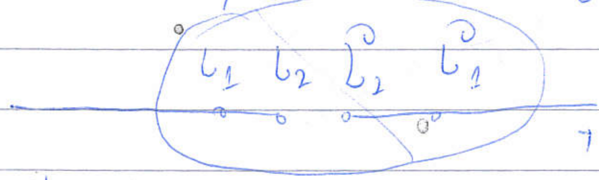
Метод на съждителната резолюция

def Нека D_1 и D_2 са дизюнкти. Казваме, че правилото за резолюцията е приложимо относно D_1 и D_2 относно литерал L, ако $L \in D_1$, $L^\partial \in D_2$
Резултата от това прилагане е дизюнктът $(D_1 \setminus \{L\}) \cup (D_2 \setminus \{L^\partial\})$. ($L^\partial$ – ендуално)



$D_1 = \{P, Q, \neg M\}$ $\qquad D_2 = \{N, \neg Q, \neg P\}$
$R_P(D_1, D_2) = \{Q, \neg M\} \cup \{N, \neg Q\} = \{Q, \neg Q, \neg M, N\}$

def За един дизюнкт D казваме че **резолвента** на D_1 и D_2 ако има литерал L: $D = R_L(D_1, D_2)$



– не така както горното (чертеж)
т.е. не се решат 2 неща в ед.

Тв Нека I е булева интерпр., а D_1 и D_2 са дизюнкти.
Нека D е резолвента на D_1 и D_2.
Ако $I \models \{D_1, D_2\}$, то $I \models \{D_1, D_2, D\}$

ако $I(P) = и$, $I(Q) = л$ тогава нека
Пр: $\{P, Q\}$ $\{\neg P, \neg Q\}$ – не е вярно че е $\neg И$
$\underbrace{\qquad}_{I}$ $\blacksquare$ неизпълнимо, относ. дизюнктно $\blacksquare$

$D_1 \setminus \{L\}$ – изваждане ел. L от D_1.

Док $I \models \{D_1, D_2\}$ $\quad D = R_L(D_1, D_2) = (D_1 \setminus \{L\}) \cup (D_2 \setminus \{L^\partial\})$

1сл $I \models L$
Тогава $I \not\models L^\partial$. $I \models D_2$. Следов. има литерал M и нека си вземем такъв лит. M и че $I \models M$, $M \in D_2$. Значи $L^\partial \neq M$ (следва от $I \not\models L^\partial$ и $I \models M$)

$M \in D_2 \setminus \{L^\partial\}$. Следователно $M \in D$. Етогаво при $I \models D$.
2сл $I \not\models L$

$I \models D_1$. Избираме литерал $K \in D_1$, $I \models K$. Следов. $L \neq K$, значи $K \in D_1 \setminus \{L\} \subseteq D$ тогава $K \in D$, $I \models D$.

Нека S множ. от дизюнкти. Дефинираме следната редица от множ. от дизюнкти.
$S_0 \leftrightharpoons S$
$S_{n+1} \leftrightharpoons S_n \cup \{D \mid D$ е резолвента на 2 дизюнкта D_1, D_2 от $S_n\}$
$S = S_0 \subseteq S_1 \subseteq \dots \qquad S^* \leftrightharpoons \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n$
Тв (Коректност на правилото за резолюцията)
Ако $\blacksquare \in S^*$, то S е неизпълнимо
Док
Нека $\blacksquare \in S^*$. Тогава S^* е неизпълнимо
За докажем, че S е изпълнимо множ. (чрез индук)
Нека I е бул. интерпр. $I \models S$.
С инд. относно n ще док., че $I \models S_n$
Б. ин. – $n = 0$ $\quad S_0 = S$ и по условие $I \models S_0$
– Нека $I \models S_n$. Нека $D \in S_{n+1}$ $\nearrow D \in S_n$, $I \models D$
$D \in \{D \mid D$ е резолвента на $D_1, D_2 \in S_n\}$ ~~[illegible] - резолвента~~
$D = R_L(D_1, D_2)$, $D_1, D_2 \in S_n$
$I \models S_n \rightarrow I \models \{D_1, D_2\}$ По горх. тв. $I \models D$
Значи $I \models S_{n+1}$.
Тогава за $\forall n$. $I \models S_n$.

различно от достигнатото до момента

Нека $D \in S^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n$. Избираме n_0: $D \in S_{n_0}$

Значи $I \not\models D$, следователно $I \not\models S^*$ (защото S е изпълнима)

Пр. $S_0 = \{\{p_0\}, \{\neg p_0, p_1\}, \{\neg p_1, p_2\}, \{\neg p_2, p_3\}, \dots\}$

$S_1 = S_0 \cup \{\{p_1\}, \{\neg p_0, p_2\}, \{\neg p_1, p_3\}, \dots, \{\neg p_k, p_{k+2}\}, \dots\}$

$\{\{p_0\}, \{p_1\}, \{p_2\}\} \in S_2$

$\{p_k\} \in S_k$ то $m > k$ $\{p_m\} \notin S_k$

Пр. $S = \{\{p_0\}, \{\neg p_0, p_1\}, \{\neg p_0, \neg p_1, p_2\}, \{\neg p_0, \neg p_1, \neg p_2, p_3\}, \dots\}$

Деф. Нека S е множ. от дизюнкции. Резолютивен извод от S наричаме крайна редица от дизюнкти $D_1, D_2, \dots D_n$ такава, че всеки неин член е от S или е резолвента на 2 предходни члена. Ако $D_1, \dots, D_n$ е резолютивен извод от S то казваме че D_n е резолютивно изводим от S. (означаване)

$S \vdash^{R} D_n$ (от S резолютивно се извежда D_n)

~~(Е има само елементи~~

Ако функцираме ако S^* поне 1 дизюнкция е (резолютивно изводима?) ...