E – Евклидово пр-во (лин. пр-во над $\mathbb{R}$) със скаларно произведение

$\forall a, b \in E \to (a, b) \in \mathbb{R}$

1) $(a, b) = (b, a)$

2) $(\lambda a, b) = \lambda (a, b)$

3) $(a+b, c) = (a, c) + (b, c)$

4) $(a, a) > 0, \quad \forall a \neq \theta$

$|a| = \sqrt{(a, a)} \in \mathbb{R} \ (\geq 0)$

$a \perp b$, когато $(a, b) = 0$

$b_1, \dots b_n$ базис на E

$a = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$

$c = c_1 b_1 + \dots + c_n b_n$

$$(a, c) = \sum_{i,j} a_i c_j (b_i, b_j)$$

Опр. $e_1, \dots, e_n$ е ортонормиран базис на E, ако:

- $e_1, \dots e_n$ – базис
- $e_i \perp e_j$ за $i \neq j$
- $|e_i| = 1$, за $i = 1, \dots n$

Тв/ За всяко крайномерно Евклидово пространство съществува ортонормиран базис.

Ако $e_1, \dots, e_n$ ортонормиран базис тогава:

$a = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$

$c = c_1 e_1 + \dots + c_n e_n$

$$(a, c) = a_1 c_1 + \dots + a_n c_n = \sum_{i=1}^{n} a_i c_i$$

$$|a| = \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}$$

I/ (детерминанта на Грам)

Нека E - Евклидово пространство и $a_1, a_2, \dots, a_k \in E$

Тогава

$$\Gamma(a_1, \dots, a_k) = \begin{vmatrix} (a_1, a_1) & (a_1, a_2) & \dots & (a_1, a_k) \\ (a_2, a_1) & (a_2, a_2) & \dots & (a_2, a_k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_k, a_1) & (a_k, a_2) & \dots & (a_k, a_k) \end{vmatrix} \geq 0$$

и $\Gamma(a_1, \dots, a_k) = 0 \iff a_1, \dots, a_k$ са линейно зависими

Д-во I сл.// $a_1, a_2, \dots, a_k$ са ЛЗ

$\Rightarrow \exists\ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ и $\lambda_1, \dots, \lambda_k \neq 0, 0, \dots 0$:

$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k = \theta$

$$\begin{matrix} (a_1, \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k) = 0 \\ \vdots \\ (a_k, \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k) = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda_1 (a_1, a_1) + \dots + \lambda_k (a_1, a_k) = 0 \\ \vdots \\ \lambda_1 (a_k, a_1) + \dots + \lambda_k (a_k, a_k) = 0 \end{vmatrix}$$

системата има ненулево решение $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$

$\Rightarrow$ матрицата на системата има детерминанта $\Gamma(a_1, \dots, a_k) = 0$

II сл. // $a_1, \dots, a_k$ са ЛНЗ. Нека $U = \ell(a_1, \dots, a_k)$

$\Rightarrow \exists\ e_1, \dots, e_k$ ортонормиран базис на U

Нека $a_i = a_{i1} e_1 + a_{i2} e_2 + \dots + a_{ik} e_k$, $i = 1, \dots, k$

$$(a_i, a_j) = a_{i1} a_{j1} + a_{i2} a_{j2} + \dots + a_{ik} a_{jk} = \sum_{s=1}^{k} a_{is} a_{js}$$

$$\Gamma(a_1, \dots, a_k) = \begin{vmatrix} \sum a_{1s}^2 & \sum a_{1s} a_{2s} & \cdots & \sum a_{1s} a_{ks} \\ \sum a_{2s} a_{1s} & \sum a_{2s}^2 & \cdots & \sum a_{2s} a_{ks} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum a_{ks} a_{1s} & \sum a_{ks} a_{2s} & \cdots & \sum a_{ks}^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{k1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{k2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1k} & a_{2k} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} = \Delta \cdot \Delta^t = \Delta^2 \geqq 0$$

Но редовете на Δ са ЛНЗ $\Rightarrow \Delta \neq 0 \Rightarrow \Delta^2 > 0$

$\Rightarrow \Gamma(a_1, a_2, \dots, a_k) > 0$ за $a_1, \dots, a_k$ ЛНЗ

Тв/ Нека $a, b \in E$ - Евклидово пр-во
Тогава: $|(a,b)| \leq |a| \cdot |b|$ $\boxed{\text{неравенство на Коши-Буняковски}}$

Д-во
$$\Gamma(a,b) = \begin{vmatrix} (a,a) & (a,b) \\ (a,b) & (b,b) \end{vmatrix} \geq 0 \Rightarrow (a,a)(b,b) - (a,b)^2 \geq 0$$
$$\Rightarrow (a,b)^2 \leq (a,a)(b,b)$$
$$|(a,b)| \leq |a| \cdot |b|$$

равенство има точно когато a, b са пропорционални

Ако $e_1, \dots, e_n$ ортонормиран базис на E
$a = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$; $b = b_1 e_1 + \dots + b_n e_n$
$$\Rightarrow |a_1 b_1 + \dots + a_n b_n| \leq \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + \dots + b_n^2}$$

Тв// Нека $a, b \in E$ - Евклидово пр-во
Тогава: $|a+b| \leq |a| + |b|$ $\boxed{\text{неравенство на триъгълника}}$

Д-во//
$$|a+b|^2 = (a+b, a+b) = (a,a) + 2(a,b) + (b,b) =$$
$$= |a|^2 + 2(a,b) + |b|^2 \leq |a|^2 + 2|a| \cdot |b| + |b|^2 =$$
$$= (|a| + |b|)^2 \Longrightarrow \boxed{|a+b| \leq |a| + |b|}$$

Дефиниране на ъгъл в Евклидово пр-во

Нека $a, b \in E$ - Евклидово пр-во и $a \neq 0$ и $b \neq 0$

$$|(a,b)| \le |a|\cdot|b| \Rightarrow -1 \le \frac{(a,b)}{|a|\cdot|b|} \le 1$$

$\Rightarrow \exists$ ъгъл $\varphi \in [0;\pi]$: $\cos\varphi = \dfrac{(a,b)}{|a|\cdot|b|}$

Този ъгъл φ се нарича ъгъл между a, b

$\varphi = \measuredangle(a,b)$

$$\Rightarrow (a,b) = |a|\cdot|b|\cos\varphi, \quad \varphi = \measuredangle(a,b)$$

$$a \perp b \Leftrightarrow (a,b) = 0 \Leftrightarrow \measuredangle(a,b) = \frac{\pi}{2}$$

Пример|| Спрямо стандартен ортонормиран базис

$a = (1, 2, 3, 4) \quad b = (1, -1, 1, -1)$.

$|a| = \sqrt{1+4+9+16} = \sqrt{30} \quad |b| = \sqrt{1+1+1+1} = \sqrt{4} = 2$

$(a,b) = 1.1 + 2\cdot(-1) + 3.1 + 4\cdot(-1) = -2$

$\cos\varphi = \dfrac{(a,b)}{|a|\cdot|b|} = \dfrac{-2}{2\sqrt{30}} = -\dfrac{1}{\sqrt{30}} \qquad \varphi = \measuredangle(a,b)$