31. Итерационни методи за решаване на нелинейни уравнения.

Голяма част от методите за приближено пресмятане на корените на уравнения са итерационни. При тях се тръгва от някакво начално приближение x_0. На всяка стъпка се извършва определена числена процедура (итерация), чрез която на базата на вече намерените приближения се намира следващото. Така се получава една редица $x_1, x_2, \dots, x_n$, която клони към корена ξ на уравнението $f(x) = 0$. При достатъчно големи n числото x_n е приближение на корена ξ със зададена точност ε. Ще разгледаме един клас от итерационни методи, които се базират на така наречения *метод на свиващите изображения*.

Нека $f(x)$ е функция, определена в $[a, b]$. Изследваме уравнението $f(x) = 0$. Ще го запишем в еквивалентен вид: $x = \varphi(x)$, за да ни е по-удобно. Ако ξ е корен на уравнението $f(x) = 0$, то е корен и на $\xi = \varphi(\xi)$. Избираме точка x_0 от $[a, b]$ и построяваме редицата $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ по правилото $x_{n+1} = \varphi(x_n), n = 0, 1, \dots$

При определени предположения за функцията φ, редицата $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ е сходяща и клони към точка ξ, в която $\xi = \varphi(\xi)$. Това би означавало, че ξ е корен на уравнението $x = \varphi(x)$, тоест и на $f(x) = 0$. Така че трябва да определим кои са условията за φ, при които това ще стане.

Първо трябва да можем да построим редицата $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$. За целта всяка следваща точка трябва да принадлежи на дефиниционната област $[a, b]$ на φ. Ще докажем следващата лема:

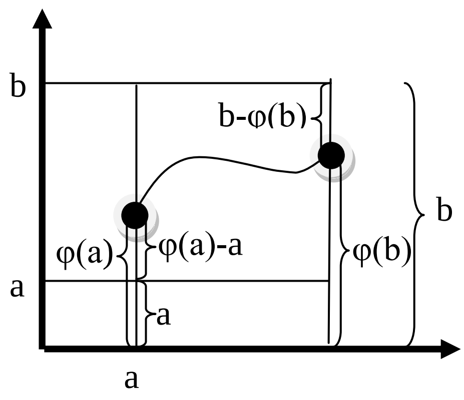
<u>Лема:</u> Ако φ е изображение на $[a, b]$ в себе си, то при произволно начално приближение x_0 от $[a, b]$, всички останали точки от редицата $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ принадлежат също на $[a, b]$.

Доказателство: Нека изберем произволно начално приближение x_0 от $[a, b]$, то $x_1 = \varphi(x_0)$ ще принадлежи също на $[a, b]$. Оттук $x_2 = \varphi(x_1) \in [a, b]$ и т.н.

Тогава достатъчно условие, за да можем да построим редицата $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ е да е изпълнено следното условие:

<u>Условие 1:</u> $\varphi(x) \in [a, b]$ *за всяко* $x \in [a, b]$.

Тъй като търсим корена на уравнението $x = \varphi(x)$, то ние търсим точка ξ от $[a, b]$, за която на $\xi = f(\xi)$. Точката ξ е неподвижна точка при изображението φ. Следващото условие гарантира **поне една неподвижна точка**:



<u>Условие 2:</u> φ е непрекъснато изображение на интервала $[a, b]$ в себе си.

Наистина, нека φ е непрекъсната функция, която удовлетворява условието. Ако $a = \varphi(a)$, то a е неподвижна точка. Аналогично, ако $b = \varphi(b)$, то b е неподвижна точка. Да допуснем, че $a \neq \varphi(a)$ и $b \neq \varphi(b)$. Тъй като φ е изображение на $[a, b]$ в себе си, то $\varphi(a) \in [a, b]$, $\varphi(b) \in [a, b]$ и следователно $a - \varphi(a) < 0$ и $b - \varphi(b) > 0$ (виж чертежа, за да разбереш защо). Разглеждаме функцията $r(x) = x - \varphi(x)$. Тя е непрекъсната в $[a, b]$ и $r(a) < 0$, $r(b) > 0$. Следователно съществува точка ξ от $[a, b]$ такава, че $r(\xi) = 0$, тоест $\xi = \varphi(\xi)$. Така доказахме следната лема:

<u>Лема:</u> Ако φ е непрекъснато изображение на интервала $[a, b]$ в себе си, то φ има неподвижна точка в $[a, b]$.

Остава да видим какви условия върху φ ще гарантират **сходимост на редицата $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ към неподвижната точка ξ**.

*<u>Дефиниция:</u> Казваме, че изображението $\varphi: [a, b] \to \mathbb{R}$ е **Липшицово** с константа $q > 0$, ако $\forall\, x, y \in [a, b]$ е изпълнено $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq q|x - y|$.*

*<u>Дефиниция:</u> Липшицово изображение с константа $q < 1$ наричаме φ **свиващо изображение**.*

<u>Теорема:</u> Нека φ е непрекъснато изображение на $[a, b]$ в себе си, което удовлетворява условието на Липшиц с константа $q < 1$. Тогава:

А) Изображението φ притежава единствена неподвижна точка ξ в $[a, b]$;

Б) При всяко начално приближение $x_0 \in [a, b]$ редицата $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, зададена с $x_{n+1} = \varphi(x_n), n = 0, 1, \dots$ е сходяща и има граница ξ.

При това е изпълнено

$$|x_n - \xi| \leq q^n (b - a).$$

Доказателство: По лемата към условие 2 φ има поне една неподвижна точка.

Да допуснем, че те са две: ξ_1, ξ_2 и $\xi_1 \neq \xi_2$ ($\xi_1, \xi_2 \in [a, b]$). Тогава:

$$0 < |\xi_1 - \xi_2| = |\varphi(\xi_1) - \varphi(\xi_2)| \leq q|\xi_1 - \xi_2|$$

Откъдето би трябвало да получим, че $q = 1$, но по условие $q < 1$ и достигаме до противоречие, което се дължи на допускането, че може да има повече от една неподвижна точка.

$$|x_n - \xi| = |\varphi(x_{n-1}) - \varphi(\xi)| \leq q|x_{n-1} - \xi| = q|\varphi(x_{n-2}) - \varphi(\xi)|$$
$$\leq q^2|x_{n-2} - \xi| \leq \cdots \leq q^n|x_0 - \xi|$$

Тъй като $x_0 \in [a, b]$ и $\xi \in [a, b]$, то $|x_0 - \xi| < b - a$. Така получаваме:

$$|x_n - \xi| \leq q^n(b - a)$$

От тази теорема следва достатъчното условие едно изображение да е свиващо, изразено в лемата:

<u>Лема:</u> *Ако φ е непрекъснато изображение на $[a, b]$ в $[a, b]$ и φ притежава производна в (a, b), като $|\varphi'(x)| \leq q < 1$, тогава φ е свиващо изображение.*

Доказателство: От теоремата за крайните нараствания следва, че

$$\varphi(x) - \varphi(y) = \varphi'(\xi)(x - y)$$

За някое ξ между x и y. Тогава

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| = |\varphi'(\xi)||x - y| \leq q|x - y|$$

Тоест φ е свиващо изображение.

<u>Следствие:</u> Нека ξ е корен на уравнението $x = \varphi(x)$. Да предположим, че φ има непрекъсната производна в околност $\mathfrak{U}$ на ξ и $|\varphi'(\xi)| < 1$. Тогава при достатъчно добро начално приближение x_0 итерационнитят процес, породен от φ, е сходящ. Нещо повече, съществува константа $C > 0$ и $0 < q < 1$ такива, че

$$|x_n - \xi| \leq Cq^n$$

за всяко n.

Доказателство: Тъй като $\varphi'(t)$ е непрекъсната функция в $\mathfrak{U}$ и $|\varphi'(\xi)| < 1$, то съществува околност $\mathfrak{U}_1 = (\xi - \varepsilon; \xi + \varepsilon)$ с $\varepsilon > 0$ и число $0 < q < 1$ такива, че

$$|\varphi'(t)| \leq q \text{ за всяко } t \in \mathfrak{U}_1.$$

Тогава ако $x_0 \in \mathfrak{U}_1$, то

$$|x_1 - \xi| = |\varphi(x_0) - \varphi(\xi)| = |\varphi'(\theta)||x_0 - \xi| \leq q|x_0 - \xi| \leq q\varepsilon < \varepsilon$$

където $\theta \in \mathfrak{U}_1$. Тоест $x_1 \in \mathfrak{U}_1$ и оттам $x_n \in \mathfrak{U}_1$ за всяко n. Следователно φ е свиващо изображение на интервала $\mathfrak{U}_1$ в себе си с константа $q < 1$.

От теоремата следва, че за всяко $x_0 \in \mathfrak{U}_1$:

$$|x_n - \xi| \leq C.q^n, \forall n \in \mathbb{N}, C = \xi + \varepsilon - \xi + \varepsilon = 2\varepsilon > 0$$

От всичко дотук можем да заключим, че $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ клони към корена ξ със скоростта на геометрична прогресия с частно q, $0 < q < 1$.

<u>*Дефиниция:*</u> *Казваме, че итерационният процес $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ има ред на сходимост $p > 1$, ако при достатъчно добро начално приближение x_0 съществуват константи $C > 0, 0 < q < 1$, такива че*

$$|x_n - \xi| \leq C.q^{p^n}, \forall n \in \mathbb{N} \text{ (}\xi\text{ е неподвижна точка на }\varphi\text{).}$$

<u>Теорема:</u> Нека φ притежава непрекъснати производни до ред p (включително) в околност на неподвижната точка за φ ξ. Нека

$$\boldsymbol{\varphi'(\xi) = \varphi''(\xi) = \cdots = \varphi^{(p-1)}(\xi) = 0, \varphi^{(p)} \neq 0}$$

Тогава итерационният процес, зададен от φ, има ред на сходимост p.

Доказателство: По формулата на Тейлор получаваме

$$\varphi(x) = \varphi(\xi) + \frac{\varphi'(\xi)}{1!}(x-\xi) + \cdots + \frac{\varphi^{(p-1)}(\xi)}{(p-1)!}(x-\xi)^{p-1} + \frac{\varphi^{(p)}\big(\xi + \theta(x-\xi)\big)}{p!}(x-\xi)^p$$

Където $|\theta| < 1$.

Тъй като ξ е неподвижна точка, то $\varphi(\xi) = \xi$. От условието имаме и че $\varphi^{(j)}(\xi) = 0$ за $j = 1, \dots, p-1$. Следователно:

$$\varphi(x) - \xi = \frac{\varphi^{(p)}\big(\xi + \theta(x-\xi)\big)}{p!}(x-\xi)^p$$

Следователно $|\varphi(x) - \xi| \leq M|x-\xi|^p$ при всяко x от достатъчно малка околност $\mathfrak{U}$ на ξ, където M е горната граница на $\frac{|\varphi^{(p)}(x)|}{p!}$. Щом като това е вярно за всяко x от въпросния интервал, то е вярно и за $x = x_n$:

$$\begin{aligned}|x_{n+1} - \xi| &= |\varphi(x_n) - \varphi(\xi)| \leq M|x_n - \xi|^p = M|\varphi(x_{n-1}) - \varphi(\xi)|^p \\ &\leq M\{M|x_{n-1} - \xi|^p\}^p = M^{p+1}|x_{n-1} - \xi|^{p^2} \\ &\leq M^{1+p+p^2}|x_{n-2} - \xi|^{p^3} \leq \cdots \leq M^{1+p+\cdots+p^n}|x_0 - \xi|^{p^{n+1}} \\ &= M^{\frac{p^{n+1}-1}{p-1}}|x_0 - \xi|^{p^{n+1}} = M^{\frac{1}{1-p}}\left(M^{\frac{1}{p-1}}|x_0 - \xi|\right)^{p^{n+1}}\end{aligned}$$

Когато x_0 е достатъчно близко до ξ, $M^{\frac{1}{p-1}}|x_0 - \xi| < q < 1$ и следователно

$$|x_{n+1} - \xi| \leq cq^{p^{n+1}} \text{ за всяко n,}$$

където сме положили $c = M^{\frac{1}{1-p}}$.

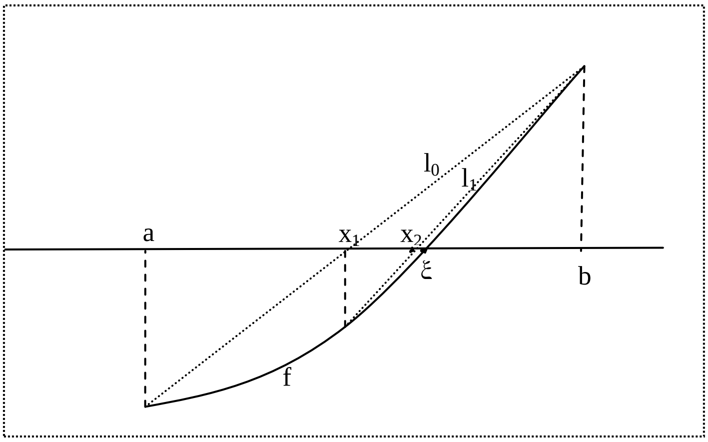
Метод на хордите

Нека $[a; b]$ е даден краен интервал и $f(x)$ е два пъти диференцируема в него функция, която удовлетворява условията:

- $f(a).f(b) < 0$
- $f'(x)f''(x) \neq 0, \forall x \in [a; b]$

От първото условие следва съществуването на точка $\xi \in (a;\, b)$ такава, че $f(\xi) = 0$. От второто условие следва, че $f'(x)$ и $f''(x)$ не се анулират в $[a; b]$, тоест имат постоянен знак в този интервал. От тук следва, че $f(x)$ е строго монотонна функция, при това или е вдлъбната, или е изпъкнала. От където следва, че съществува единствена точка ξ, за която $f(\xi) = 0$.

Принципът за получаване на приближенията $x_0, x_1, \dots$ е следния: за a и b пресмятаме $f.f''$. Тъй като f'' има постоянен знак в целия интервал, а $f(a)$ и $f(b)$ имат различни знаци, то точно за една от стойностите a и b ще е изпълнено условието $f.f'' > 0$. Този край на интервала се използва за постоянен край на всички хорди. За стойността на x_0 взимаме другия край на интервала.



На графиката е показан начина на получаване на началното приближение и след това на всяко следващо приближение в случая, когато $f' > 0, f'' > 0$. От тези условия, следва че $f(b).f''(b) > 0$. Тоест ще изберем $x_0 = a$.

Сега трябва да намерим представяне на x_{n+1} чрез x_n. За определеност ще смятаме, че $f''(x) > 0$ (както е на графиката). Тъй като l_{n+1} свързва точките $\big(x_n,\ f(x_n)\big)$ и $\big(b, f(b)\big)$, то правата има уравнение

$$\begin{aligned} l_{n+1} &= f(x_n)\frac{x-b}{x_n-b} + f(b)\frac{x-x_n}{b-x_n} \\ &= f(x_n)\frac{x-b-x_n+x_n}{x_n-b} + f(b)\frac{x-x_n}{b-x_n} \\ &= f(x_n)\frac{x_n-b}{x_n-b} + f(x_n)\frac{x-x_n}{x_n-b} + f(b)\frac{x-x_n}{b-x_n} \\ &= f(x_n) + \frac{f(b)-f(x_n)}{b-x_n}(x-x_n) = f(x_n) + f[x_n,b](x-x_n) \end{aligned}$$

Приближението x_{n+1} е решение на уравнението $l_{n+1} = 0$. Следователно

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f[x_n,b]} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(b)-f(x_n)}(b-x_n)$$

Това е и формулата за намиране на последователните приближения на корена ξ по метода на хордите.

Трябва да докажем, че наистина x_n клони към ξ при $n \to \infty$. Ще използваме, че в случая функцията f е изпъкнала. От нея може да се види, че редицата $x_0, x_1, \ldots$ е монотонна и ограничена редица и следователно е и сходяща. Нека α е нейната граница. Тогава, правейки граничен преход във формулата за метода на хордите

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(b)-f(x_n)}(b-x_n)$$

получаваме следното

$$\alpha = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f(b)-f(\alpha)}(b-\alpha)$$

откъдето

$$f(\alpha) = 0$$

Следователно $\alpha = \xi$, тъй като функцията е монотонна и следователно има само един корен. Тогава сходимостта към ξ е доказана.
От формулата се вижда, че методът на хордите е итерационен процес, породен от функцията

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f(b) - f(x)}(b - x)$$

Очевидно уравнението $\varphi(x) = x$ е еквивалентно на $f(x) = 0$. Нека намерим $\varphi'(\xi)$:

$$\varphi'(x) = 1 - f'(x)\frac{(b - x)}{f(b) - f(x)} - f(x)\left(\frac{(b - x)}{f(b) - f(x)}\right)'$$

Тогава тъй като $f(\xi) = 0$, получаваме

$$\varphi'(\xi) = 1 - f'(\xi)\frac{(b - \xi)}{f(b) - \underbrace{f(\xi)}_{=0}} = \frac{f(b) - f'(\xi)(b - \xi)}{f(b)}$$

Ще представим $f(b)$ по два начина чрез фомуата на Тейлор:

$$f(b) = f(\xi) + f'(\xi)(b - \xi) + \frac{f''(\theta_1)}{2}(b - \xi)^2$$

и

$$f(b) = f(\xi) + f'(\theta_2)(b - \xi)$$

където θ_1 и θ_2 са някакви точки от (a, b).
Заместваме двете представяния в израза за производната на φ в точката ξ съответно в числителя и знаменателя и получаваме следното:

$$\varphi'(\xi) = \frac{f(\xi) + f'(\xi)(b - \xi) + \frac{f''(\theta_1)}{2}(b - \xi)^2 - f'(\xi)(b - \xi)}{f(\xi) + f'(\theta_2)(b - \xi)}$$
$$= \frac{2f(\xi) + f''(\theta_1)(b - \xi)^2}{2\big(f(\xi) + f'(\theta_2)(b - \xi)\big)}$$

Но тъй като ξ е корен на f, то $f(\xi) = 0$. Заместваме в горното и получаваме:

$$\varphi'(\xi) = \frac{f''(\theta_1)(b - \xi)}{2f'(\theta_2)}$$

Нека

$$M = \max_{t\in[a,b]}|f''(t)|, \qquad m = \min_{t\in[a,b]}|f'(t)|$$

От условието, че $f'(t) \neq 0$, следва че и $m \neq 0$. Тогава

$$|\varphi'(\xi)| \leq \frac{M}{2m}|b - \xi|$$

Очевидно $|\varphi'(\xi)|$ може да стане по-малко от произволно предварително избрано $q < 1$, стига $|b - \xi|$ да е достатъчно малко, тоест стига интервалът $[a, b]$ да е достатъчно малък. Тоест ако сме отделили корена ξ в достатъчно малък интервал $[a, b]$, то

$$|\varphi'(\xi)| < q < 1$$

Оттук итерационният процес породен от φ, тоест методът на хордите) е сходящ със скорост на геометричната прогресия

$$|x_n - \xi| \leq const. q^n$$

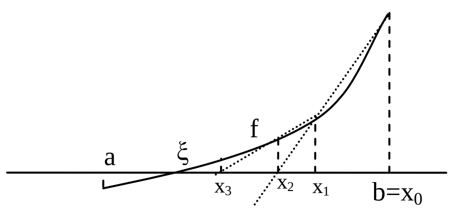
Методът на секущите

Нека отново $[a;b]$ е даден краен интервал и $f(x)$ е два пъти диференцируема в него функция, която удовлетворява условията:

- $f(a).f(b) < 0$
- $f'(x)f''(x) \neq 0, \forall x \in [a;b]$

При методът на секущите приближението x_{n+1} се получава въз основа на двете приближения x_n и x_{n-1}. Избираме $x_0 = a$ или $x_0 = b$, за което е изпълнено условието $f(x_0)f''(x_0) > 0$ (нека за илюстрацията $x_0 = b$). След това избираме точка x_1, която да е между x_0 и корена ξ. Начинът, по който избираме x_1 е следния: избираме случайно число c от интервала $[a;b]$ и проверяваме дали $f(x_0)f(c) > 0$. Ако е вярно, значи че x_0 и c са с един и същи знак, което означава, че са от една и съща страна на ξ. Тоест в този случай c изпълнява условията ни и го избираме за x_1. В противен случай харесаното от нас по произволен начин число и избраното първоначално приближение са от двете различни страни на корена и не можем да го изберем за x_1. Но поне можем да намалим интервала $[a;b]$ като му отрежем частта между c и края на интервала, различен от x_0.

След като вече сме определили началните две приближения, построяваме всеко следващо приближение по следния начин: построяваме секущата l_n през точките $(x_n, f(x_n))$ и $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ и взимаме пресечната ѝ точка с абцисата за x_{n+1}.



Сега трябва да намерим изразяване на x_{n+1} чрез x_n и x_{n-1}.

$$l_n(x) = f(x_n) + f[x_{n-1}, x_n](x - x_n)$$

Следователно x_{n+1} се определя от уравнението

$$f(x_n) + f[x_{n-1}, x_n](x - x_n) = 0$$

$$\Rightarrow\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f[x_{n-1}, x_n]} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_{n-1}) - f(x_n)}(x_{n-1} - x_n)$$

Ако началните приближения x_0 и x_1 удовлетворяват условието $|x_0 - \xi| \leq Cq^{r^0}$, $|x_1 - \xi| \leq Cq^{r^1}$, където $0 < q < 1$, C е константата такава, че $\frac{M}{2m}C < 1$, $M = \max_{t\in[a,b]}|f''(t)|$, $m = \min_{t\in[a,b]}|f'(t)|$ и $r = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (ред на сходимост на метода на секущите). Тогава

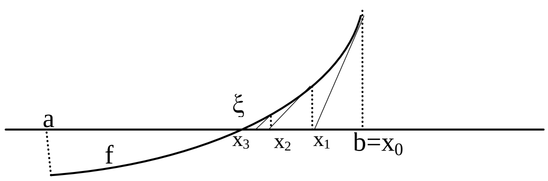
$$|x_n - \xi| \leq Cq^{r^n} \text{ за всяко } n.$$

Метод на Нютон (метод на допирателните)

Нека отново $[a;b]$ е даден краен интервал и $f(x)$ е два пъти диференцируема в него функция, която удовлетворява условията:

- $f(a).f(b) < 0$
- $f'(x)f''(x) \neq 0, \forall x \in [a;b]$

Избираме $x_0 = a$ или $x_0 = b$, за което е изпълнено условието $f(x_0)f''(x_0) > 0$ (нека за илюстрацията $x_0 = b$). Следващото приближение x_1 намираме като пресечна точка на оста x с допирателната d_0 към графиката на функцията $y = f(x)$ в точката x_0. Така x_{n+1} е нулата на допирателната d_n към f в точката x_n.



$$d_n(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$$

Следователно x_{n+1} е решение на уравнението

$$f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) = 0$$

$$\Rightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Това е формулата на Нютон за приближено пресмятане на корена на уравнението $f(x) = 0$.

Получаваме итерационен процес породен от $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Също така $\varphi(x) = x \Leftrightarrow f(x) = 0$ т.е. са еквивалентни. Освен това $\varphi'(x) = 1 - \frac{f'(x).f'(x) - f(x).f''(x)}{(f'(x))^2} \Rightarrow \varphi'(\xi) = 1 - \frac{f'(\xi).f'(\xi) - f(\xi).f''(\xi)}{(f'(\xi))^2} = 1 - \frac{(f'(\xi))^2 - 0}{(f'(\xi))^2} = 0$ използвахме, че $f(\xi) = 0$. От друга страна имаме:

$$\varphi''(x) = 0 - \left(\frac{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}{\left(f'(x)\right)^2}\right)' =$$

$$= -0 + \frac{\left(f(x).f''(x)\right)'\left(f'(x)\right)^2 - f(x)f''(x)2f'(x)f''(x)}{\left(2f'(x)f''(x)\right)^2} =$$

$$= \frac{\left(f(x).f''(x)\right)'\left(f'(x)\right)^2}{\left(2f'(x)f''(x)\right)^2} - f(x)\frac{f''(x)2f'(x)f''(x)}{\left(2f'(x)f''(x)\right)^2} =$$

$$= \frac{f'(x).f''(x) + f(x)f'''(x)}{\left(2f''(x)\right)^2} - f(x)\frac{f''(x)2f'(x)f''(x)}{\left(2f'(x)f''(x)\right)^2} =$$

$$= \frac{f'(x)}{2f''(x)} + f(x)\frac{f'''(x)}{\left(2f''(x)\right)^2} - f(x)\frac{f''(x)2f'(x)f''(x)}{\left(2f'(x)f''(x)\right)^2}$$

Окончателно получаваме: $\varphi''(\xi) = \frac{f'(\xi)}{2f''(\xi)}$, което в общия случай е различно от нула. Т.е. φ е два пъти диференцируема и само първата и производна е 0. От теоремата получаваме, че итерационния процес породен от φ е сходящ с ред на сходимост 2 при всяко достатъчно добро първоначално приближение. С други думи съществуват константи C и $q \in (0; 1)$ такива, че

$$|x_n - \xi| \leq Cq^{2^n}$$