Дуални пространства (F^n и $L_n(F)$)

Опр./ Нека V е линейно пр-во над поле F

Изображението $f: V \to F$, за което: $\begin{cases} f(a+b)=f(a)+f(b) \\ f(\lambda a)=\lambda f(a) \end{cases}$ $\forall \lambda \in F; \forall a,b \in V$

се нарича линейна функция (линеен функционал)

Ако $f: V \to F$ е линейна ф-я, тогава

$$f(\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k) = \lambda_1 f(a_1) + \dots + \lambda_k f(a_k); \quad \begin{cases} \lambda_i \in F \\ a_i \in V \end{cases}$$

Твърдение// F-поле, и $f: F^n \to F$ е линейна функция

тогава $\exists c_1, \dots, c_n \in F$, такива че

$$f(x_1, \dots, x_n) = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n$$

Д-во/ базис

$e_1 = (1, 0, \dots, 0)$

$e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$

$\vdots$

$e_n = (0, \dots, 0, 1)$

$x = (x_1, \dots, x_n) \in F^n \Rightarrow x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n; \; x_i \in F$

$x = (x_1, 0, \dots, 0) + (0, x_2, \dots, 0) + \dots + (0, \dots, 0, x_n)$

$f(x) = f(x_1, \dots, x_n) = f(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n)$

$= x_1 f(e_1) + \dots + x_n f(e_n)$

$f(e_i) = c_i \in F$

$f(x) = x_1 c_1 + \dots + x_n c_n = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n$

$L_n(F) = \{ f(x) \mid f(x): F^n \to F$ - линейна функция$\} =$

$= \{ f(x) = c_1x_1 + \dots + c_nx_n \mid c_1, \dots, c_n \in F \}$

Ако $f(x) = c_1x_1 + \dots + c_nx_n$ и $g(x) = d_1x_1 + \dots + d_nx_n \in L_n(F)$

тогава $f + g = (c_1 + d_1)x_1 + \dots + (c_n + d_n)x \in L_n(F)$

$\lambda \in F$: $\lambda f = (\lambda c_1)x_1 + \dots + (\lambda c_n)x_n \in L_n(F)$

$\Rightarrow L_n(F)$ е линейно пространство над полето F

Базис на пространството $L_n(F)$

функциите

$$\left.\begin{aligned} u_1(x) &= 1x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n \\ u_2(x) &= 0x_1 + 1x_2 + 0x_3 + \dots + 0x_n \\ &\vdots \\ u_n(x) &= 0x_1 + \dots + 0x_{n-1} + 1x_n \end{aligned}\right\} \Rightarrow \dim L_n(F) = n$$

Ако $(c_1, \dots, c_n) = c \in F^n \longrightarrow f_c(x) = c_1x_1 + \dots + c_nx_n \in L_n(F)$

<u>Твърдение</u>// F-поле и $\varphi : L_n(F) \to F$ е линеен функционал, тогава съществуват $a_1, \dots, a_n \in F$ такива че $\varphi(f) = \varphi(c_1x_1 + \dots + c_nx_n) = c_1a_1 + \dots + c_na_n$

<u>Д-во</u> Нека $\varphi : L_n(F) \to F$ линеен функционал

$\varphi(f+g) = \varphi(f) + \varphi(g)$ и $\varphi(\lambda f) = \lambda\varphi(f)$, $f, g \in L_n(F)$, $\lambda \in F$

$f = c_1x_1 + \dots + c_nx_n = c_1u_1 + \dots + c_nu_n$ $\quad \boxed{u_i = x_i}$

$\Rightarrow \varphi(f) = \varphi(c_1u_1 + \dots + c_nu_n) = c_1\varphi(u_1) + \dots + c_n\varphi(u_n)$

Ако $\varphi(u_k) = a_k \in F$, $k = 1, \dots, n$

$\Rightarrow \varphi(f) = c_1a_1 + \dots + c_na_n$

пространството от линейните функции на F^n е $L_n(F)$

простран-вото от лин. функционали на $L_n(F)$ е F^n

Съответствие между подпространствата на F^n и $L_n(F)$

1) Нека M е подпространство на $L_n(F)$

$$M^0 = \{ a \in F^n \mid f(a) = 0, \ \forall f \in M \}$$ нулиращо пр-во и анулатор

Ако $f_1(x), \dots, f_k(x)$ базис на M

$$M_0 : \begin{cases} f_1(x) = 0 \\ \vdots \\ f_k(x) = 0 \end{cases}$$

M_0 е реш. на хом. система

$\Rightarrow \dim M_0 = n - r(f_1, \dots, f_k) = n - k$

$$\boxed{\dim M_0 = n - \dim M}$$

$$(L_n(F))^0 = \{0\} \qquad \| \qquad \{0x_1 + \dots + 0x_n\}^0 = F^n$$

Ако U подпр-во на F^n

U^0 - нулиращи функции за векторите от U

$U^0 = \{ f(x) \in L_n(F) \mid f(a) = 0, \forall a \in U \}$

има линейна система която има решение U

тази система има матрица с ранг $n - \dim U$

$\Rightarrow g_1(x), \dots, g_t(x)$ линейните функции от тази система

$U^0 = \ell(g_1, \dots, g_t)$; $\dim U^0 = n - \dim U$

Ако $U \subset W$ подпространства на F^n

$\Rightarrow U^0 \supset W^0$

Нека U, W подпр-ва на F^n

Тогава:

1) Ако $U \subset W \Rightarrow U^0 \supset W^0$

2) $(U+W)^0 = U^0 \cap W^0$

3) $(U \cap W)^0 = U^0 + W^0$

4) $(U^0)^0 = U$

5) $\dim U + \dim U^0 = n$

Нека T и M са подпр-ва на $L_n(F)$

Тогава:

1) Ако $T \subset M \Rightarrow T^0 \supset M^0$

2) $(T+M)^0 = T^0 \cap M^0$

3) $(T \cap M)^0 = T^0 + M^0$

4) $(T^0)^0 = T$

5) $\dim T + \dim T^0 = n$

Ако $c=(c_1,\dots,c_n)$ $\quad f_c(x)=c_1x_1+\dots+c_nx_n$

$F^n \Leftrightarrow L_n(F)$

$$\Rightarrow f_c(x)+f_d(x)=c_1x_1+\dots+c_nx_n+d_1x_1+\dots+d_nx_n=$$
$$=(c_1+d_1)x_1+\dots+(c_n+d_n)x_n=$$
$$=f_{c+d}(x)$$

$$\lambda f_c(x)=\lambda(c_1x_1+\dots+c_nx_n)=(\lambda c_1)x_1+\dots+(\lambda c_n)x_n=f_{\lambda c}(x)$$

$$f_c(a+b)=f_c(a)+f_c(b) \qquad a,b\in F^n$$
$$\mu\in F$$
$$f_c(\mu a)=\mu f_c(a)$$

$$\left.\begin{aligned} f_c(a)&=c_1a_1+c_2a_2+\dots+c_na_n \\ f_a(c)&=a_1c_1+a_2c_2+\dots+a_nc_n \end{aligned}\right\} \Rightarrow f_c(a)=f_a(c)$$

$a=(a_1,\dots,a_n)\in F^n,\quad c=(c_1,\dots,c_n)\in F^n$

$f_c(x)=c_1x_1+\dots+c_nx_n \Rightarrow f_c(a)=c_1a_1+\dots+c_na_n$

$f_a(x)=a_1x_1+\dots+a_nx_n \Longrightarrow f_a(c)=a_1c_1+\dots+a_nc_n$

$\psi: F^n\times F^n \longrightarrow F$ вътрешно произведение

$\psi(a,b)=\langle a,b\rangle$

$\langle a,c\rangle = a_1c_1+\dots+a_nc_n = f_c(a)=f_a(c)$

Св-ва

$a,b,c,d \in F^n$, $\lambda,\mu\in F$

$\langle a+b,c\rangle = f_c(a+b)=f_c(a)+f_c(b)=\langle a,c\rangle+\langle b,c\rangle$

$\langle \lambda a,c\rangle = f_c(\lambda a)=\lambda f_c(a)=\lambda\langle a,c\rangle$

$\langle a,c+d\rangle = f_{c+d}(a)=f_c(a)+f_d(a)=\langle a,c\rangle+\langle a,d\rangle$

$\langle a,\mu c\rangle = f_{\mu c}(a)=\mu f_c(a)=\mu\langle a,c\rangle$

$\langle a,c\rangle = f_c(a)=f_a(c)=\langle c,a\rangle$