Упражнение 5
Несобствени интеграли, част 2

Първо да припомним основните несобствени интеграли, които се използват за сравняване:

$$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^{\lambda}}\,dx \text{ и } \int_{-\infty}^{b}\frac{1}{x^{\lambda}}\,dx \text{ са } \begin{cases}\text{сходящи, ако } \lambda>1\\ \text{разходящи, ако } \lambda\leq 1\end{cases}$$

$(a>0)$ $\quad$ $(b<0)$

$$\int_a^{b}\frac{1}{(x-a)^{\lambda}}\,dx \text{ и } \int_a^{b}\frac{1}{(b-x)^{\lambda}}\,dx \text{ са } \begin{cases}\text{сходящи, ако } \lambda<1\\ \text{разходящи, ако } \lambda\geq 1\end{cases}$$

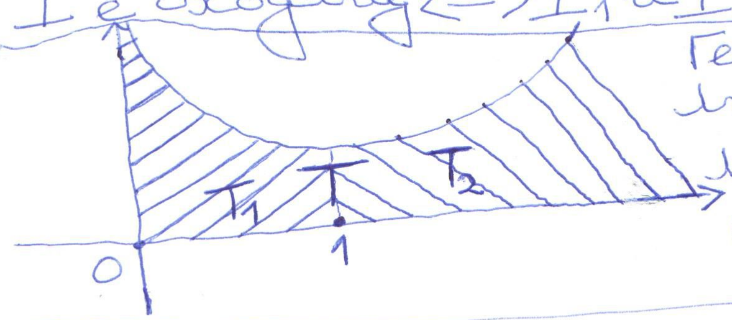
Зад. 1 Изследвайте за сходимост несобствения интеграл $I=\int_0^{+\infty}\frac{x^p \operatorname{arctg} x}{2+x^q}\,dx$ $(p,q\in\mathbb{R},\ q>0)$.

Решение: Особените точки са 0 (защото може $p<0$) и $+\infty$.

$$I=\underbrace{\int_0^{1}\frac{x^p \operatorname{arctg} x}{2+x^q}\,dx}_{I_1}+\underbrace{\int_1^{+\infty}\frac{x^p \operatorname{arctg} x}{2+x^q}\,dx}_{I_2}.$$

Понеже $\frac{x^p \operatorname{arctg} x}{2+x^q}>0$ за $x\in(0,+\infty)$, то

I е сходящ $\Longleftrightarrow$ I_1 и I_2 са сходящи (1).



Геометрично тълкуване на (1): Лицето $S(T)$ е крайно число.
$$\Updownarrow$$
Лицата $S(T_1)$ и $S(T_2)$ са крайни числа.

I_1: Особената точка е 0.

$$I_1 \sim \int_0^1 x^p \operatorname{arctg} x\,dx \sim \int_0^1 x^{p+1}\,dx=\int_0^1\frac{1}{(x-0)^{-p-1}}\,dx$$

$\frac{1}{2+x^q}\xrightarrow[x\to 0]{}\frac{1}{2}$ (по условие $q>0$) $\qquad$ $\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\xrightarrow[x\to 0]{}1$

Така I_1 е сходящ $\Longleftrightarrow -p-1<1$, т.е.

I_1 е сходящ $\Longleftrightarrow p>-2$ (2)

I_2: Особената точка е $+\infty$.

② $$I_2 \underset{\uparrow}{\sim} \int_1^{+\infty} \frac{x^p}{2+x^q}\,dx \underset{\uparrow}{\sim} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{q-p}}\,dx$$

$$\boxed{\operatorname{arctg} x \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}} \qquad \boxed{\frac{\frac{x^p}{2+x^q}}{\frac{1}{x^{q-p}}} = \frac{x^q}{2+x^q} = \frac{1}{\frac{2}{x^q}+1} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1 \left(\begin{matrix}\text{по условие}\\ q>0\end{matrix}\right)}$$

следователно

I_2 е сходящ $\Longleftrightarrow q-p>1$ (3)

От (1), (2) и (3) получаваме:

Отг. на зад. 1): I е сходящ $\Longleftrightarrow p>-2$ и $q-p>1$.

Зад. 2 Изследвайте за сходимост несобствения интеграл $I=\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}x^{\beta}\,dx$ $(\alpha, \beta\in\mathbb{R})$.

Решение: Особените точки са 0 (защото може $\beta<0$) и $+\infty$.

$$I = \underbrace{\int_0^1 e^{-\alpha x}x^{\beta}\,dx}_{I_1} + \underbrace{\int_1^{+\infty} e^{-\alpha x}x^{\beta}\,dx}_{I_2}.$$

Понеже $e^{-\alpha x}x^{\beta}>0$ при $x\in(0,+\infty)$, то

I е сходящ $\Longleftrightarrow I_1$ и I_2 са сходящи (1).

I_1: Особената точка е 0.

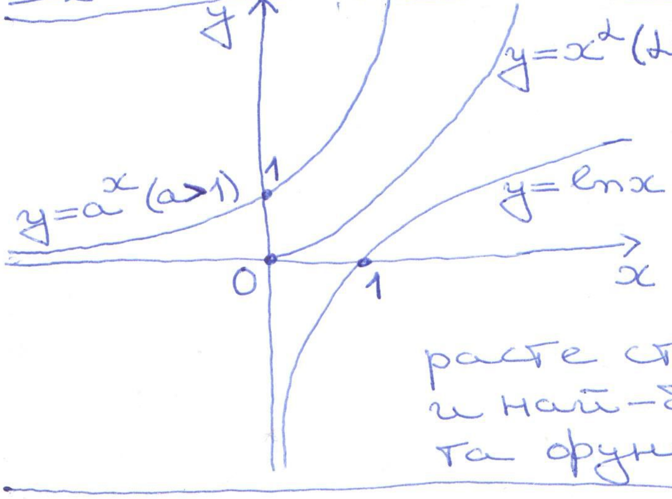
$$I_1 \underset{\uparrow}{\sim} \int_0^1 x^{\beta}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{(x-0)^{-\beta}}\,dx$$

$$\boxed{e^{-\alpha x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1}$$

Сл. I_1 е сходящ $\Longleftrightarrow -\beta<1$, т.е.

I_1 е сходящ $\Longleftrightarrow \beta>-1$ (2).

I_2: Особената точка е $+\infty$.



Факт, доказан на упражненията по ДИС-1 (чрез правилото на Лопитал): При $x\to+\infty$ най-бързо расте показателната функция $y=a^x$ $(a>1)$, по-бавно расте степенната функция $y=x^{\alpha}$ $(\alpha>0)$ и най-бавно расте логаритмичната функция $y=\ln x$. (*)

③ 1 сл. $\alpha < 0$

Сега, заради (*), имаме, че

$e^{-\alpha x} x^{\beta} > \frac{1}{x} > 0$ за всички достатъчно големи $x \in (1, +\infty)$.

Понеже $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ е разходящ, то по принципа за мажориране и I_2 също е разходящ.

Сл. I_2 е разходящ за $\alpha < 0$ и $\forall \beta$.

2 сл. $\alpha = 0$

Сега $I_2 = \int_1^{+\infty} x^{\beta}\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{-\beta}}\,dx$ и сл. I_2 е сходящ $\Leftrightarrow -\beta > 1 \Leftrightarrow \beta < -1$.

Сл. I_2 е сходящ при $\alpha = 0$ и $\beta < -1$.

3 сл. $\alpha > 0$

Сега, заради (*), имаме, че

$0 < e^{-\alpha x} x^{\beta} < \frac{1}{x^2}$ за всички достатъчно големи $x \in (1, +\infty)$.

Понеже $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ е сходящ, то по принципа за мажориране I_2 също е сходящ.

Сл. I_2 е сходящ при $\alpha > 0$ и $\forall \beta$.

Окончателно: I_2 е сходящ при $\alpha = 0, \beta < -1$ и при $\alpha > 0, \forall \beta$ (3).

т.е. I_2 е сходящ $\Leftrightarrow$ в него показателната функция е в знаменател (т.е. $\alpha > 0$) или изобщо я няма и оставащият интеграл е сходящ (т.е. при $\alpha = 0, \beta < -1$).

От (1), (2) и (3) получаваме:

Отг. на зад. 2: I е сходящ $\Leftrightarrow \alpha > 0, \beta > -1$.

Зад. 3 Изследвайте за сходимост несобствения интеграл $I = \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^p \ln^q x}\,dx$ $(p, q \in \mathbb{R})$

Упътване: Особената точка е $+\infty$.

Правим смяна на променливата $x = e^t$, $t \in (\ln 2, +\infty)$ и получаваме, че $I = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{1}{e^{pt} t^q}\,de^t = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{e^t}{e^{pt} t^q}\,dt = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{1}{e^{(p-1)t} t^q}\,dt$. Този интеграл е точно като интеграла I_2 от зад. 2 и с абсолютно същите разсъждения като тези от зад. 2 получаваме:

Отг. на зад. 3: I е сходящ $\Leftrightarrow p > 1, q \in \mathbb{R}$ или $p = 1, q > 1$.

④ Зад. 4 Изследвайте за сходимост несобствения интеграл $I=\int_0^1 x^p \ln x\,dx$ $(p\in\mathbb{R})$.

Упътване: Особената точка е 0 (заради $\ln x$, а и защото може $p<0$).

Правим смяна на променливата $x=e^{-t}$, $t\in(+\infty,0)$ и получаваме, че $I=\int_{+\infty}^{0} e^{-pt}(-t)\,de^{-t}=$

$$=\int_{+\infty}^{0} e^{-pt}(-t)(-e^{-t})\,dt=\int_{+\infty}^{0} e^{-(p+1)t}\,t\,dt=-\int_0^{+\infty} e^{-(p+1)t}\,t\,dt\sim$$

$$\sim\int_0^{+\infty} e^{-(p+1)t}\,t\,dt=\int_0^{+\infty}\frac{t}{e^{(p+1)t}}\,dt\underset{\substack{\uparrow\\ \text{0 не е особена точка}}}{\sim}\int_1^{+\infty}\frac{t}{e^{(p+1)t}}\,dt$$

Особена точка на последния интеграл е само $+\infty$ и той се изследва точно като интеграла I_2 от зад. 2.

Отг. на зад. 4: I е сходящ $\Leftrightarrow p>-1$.

Зад. 5 Пресметнете $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{\sqrt{(x^2-2x+8)^5}}\,dx$.

Решение: $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{[(x-1)+1]^2}{\sqrt{[(x-1)^2+7]^5}}\,d(x-1)\overset{t=x-1}{=}$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(t+1)^2}{\sqrt{(t^2+7)^5}}\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(t^2+7)+2t-6}{\sqrt{(t^2+7)^5}}\,dt=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{(t^2+7)^3}}}_{\text{четна функция}}\,dt+2\int_{-\infty}^{+\infty}\underbrace{\frac{t}{\sqrt{(t^2+7)^5}}}_{\text{нечетна функция}}\,dt-6\int_{-\infty}^{+\infty}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{(t^2+7)^5}}}_{\text{четна функция}}\,dt=$$

$$=2\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{(t^2+7)^3}}\,dt+2.0-12\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{(t^2+7)^5}}\,dt\overset{t=\sqrt{7}\,\mathrm{tg}\,u}{=}$$

$$=2\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\sqrt{(7\,\mathrm{tg}^2u+7)^3}}\,d(\sqrt{7}\,\mathrm{tg}\,u)-12\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\sqrt{(7\,\mathrm{tg}^2u+7)^5}}\,d(\sqrt{7}\,\mathrm{tg}\,u)=$$

$$=\frac{2}{7}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\sqrt{(\mathrm{tg}^2u+1)^3}}\,d\,\mathrm{tg}\,u-\frac{12}{49}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\sqrt{(\mathrm{tg}^2u+1)^5}}\,d\,\mathrm{tg}\,u=$$

$$=\frac{2}{7}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{\cos^2u}\right)^3}}\,d\,\mathrm{tg}\,u-\frac{12}{49}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{\cos^2u}\right)^5}}\,d\,\mathrm{tg}\,u=$$

$$=\frac{2}{7}\int_0^{\pi/2}\cos^3u\cdot\frac{1}{\cos^2u}\,du-\frac{12}{49}\int_0^{\pi/2}\cos^5u\cdot\frac{1}{\cos^2u}\,du=$$

$$=\frac{2}{7}\int_0^{\pi/2}\cos u\,du-\frac{12}{49}\int_0^{\pi/2}\cos^3u\,du=$$

$$=\frac{2}{7}\sin u\Big|_0^{\pi/2}-\frac{12}{49}\int_0^{\pi/2}(1-\sin^2u)\,d\sin u=$$

$$=\frac{2}{7}-\frac{12}{49}\left(\sin u-\frac{\sin^3u}{3}\right)\Big|_0^{\pi/2}=\frac{2}{7}-\frac{12}{49}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{7}-\frac{8}{49}=\frac{6}{49}.$$

Отг. на зад. 5: $I=\frac{6}{49}$.

5 Упражнение: Пресметнете $I=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{\sqrt{(x^2+4x+9)^5}}dx$

Отг. $I=\frac{26}{75}$.

Зад. 6 Пресметнете $I=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^3}{e^{|2x-1|}}dx$

Решение: Полагаме $t=2x-1$, т.е. $x=\frac{t+1}{2}$.

$x\in(-\infty,+\infty) \Rightarrow t\in(-\infty,+\infty)$

$$I=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\left(\frac{t+1}{2}\right)^3}{e^{|t|}}\,d\frac{t+1}{2}=\frac{1}{16}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{(t+1)^3}{e^{|t|}}\,d(t+1)=$$

$$=\frac{1}{16}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{t^3+3t^2+3t+1}{e^{|t|}}dt=\frac{1}{16}\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\underbrace{\frac{t^3+3t}{e^{|t|}}}_{\text{нечетна функция}}dt+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\underbrace{\frac{3t^2+1}{e^{|t|}}}_{\text{четна функция}}dt\right]=$$

$$=\frac{1}{16}\left[0+2\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{3t^2+1}{e^{|t|}}dt\right]=$$

$$=\frac{1}{8}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{3t^2+1}{e^{t}}dt=\frac{1}{8}\int\limits_{0}^{+\infty}(3t^2+1)e^{-t}dt=-\frac{1}{8}\int\limits_{0}^{+\infty}(3t^2+1)\,de^{-t}=$$

$$=-\frac{1}{8}\left[\frac{3t^2+1}{e^t}\Big|_0^{+\infty}-\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-t}d(3t^2+1)\right]=-\frac{1}{8}\left[(0-1)-6\int\limits_{0}^{+\infty}te^{-t}dt\right]=$$

при $t\to+\infty$ показателната функция расте по-бързо от степенната функция

$$=\frac{1}{8}\left[1+6\int\limits_{0}^{+\infty}te^{-t}dt\right]=$$

$$=\frac{1}{8}\left[1-6\int\limits_{0}^{+\infty}t\,de^{-t}\right]=$$

$$=\frac{1}{8}\left[1-6\frac{t}{e^t}\Big|_0^{+\infty}+6\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-t}dt\right]=\frac{1}{8}\left[1-6.(0-0)-6e^{-t}\Big|_0^{+\infty}\right]=$$

$=\frac{1}{8}\left[1-6(0-1)\right]=\frac{7}{8}$. Отг. на зад. 6: $I=\frac{7}{8}$.

Упражнение: Пресметнете $I=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^3}{e^{|3x+2|}}dx$ Отг. $I=-\frac{40}{81}$.

Зад. 7 Пресметнете несобствените интеграли:

а) $I=\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{x^2-3}{x^4+9}dx$; б) $J=\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{x^2+2}{x^4+4}dx$.

Решение: а) $I=\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{1-\frac{3}{x^2}}{x^2+\frac{9}{x^2}}dx=\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{1}{\left(x+\frac{3}{x}\right)^2-6}\,d\left(x+\frac{3}{x}\right)$.

Да изучим накратко поведението на функцията $f(x)=x+\frac{3}{x}$ при $x\in(0,+\infty)$. Имаме, че при $x\in(0,+\infty)$

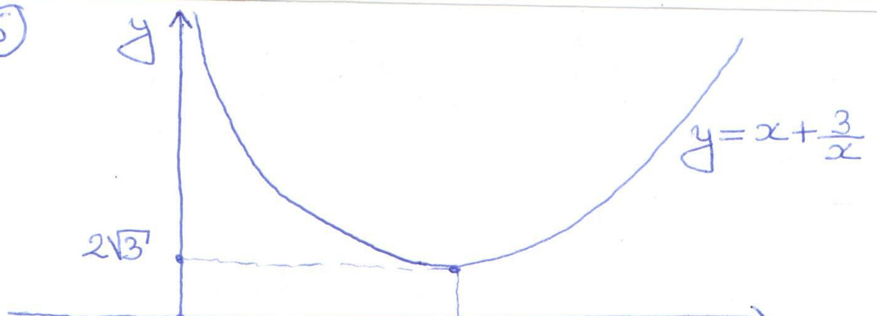
$f'(x)=1-\frac{3}{x^2}=\frac{x^2-3}{x^2}=\frac{(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{x^2}$.

x	0		$\sqrt{3}$	
f'		$-$		$+$
f		$\searrow$		$\nearrow$

$f(\sqrt{3})=2\sqrt{3}$

Освен това $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(x+\frac{3}{x}\right)=0+(+\infty)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\frac{3}{x}\right)=(+\infty)+0=+\infty$.



Тогава $I=\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{1}{\left(x+\frac{3}{x}\right)^2-6}\,d\left(x+\frac{3}{x}\right)=$

$$=\int\limits_{0}^{\sqrt{3}}\frac{1}{\left(x+\frac{3}{x}\right)^2-6}\,d\left(x+\frac{3}{x}\right)+\int\limits_{\sqrt{3}}^{+\infty}\frac{1}{\left(x+\frac{3}{x}\right)^2-6}\,d\left(x+\frac{3}{x}\right)\overset{y=x+\frac{3}{x}}{=}$$

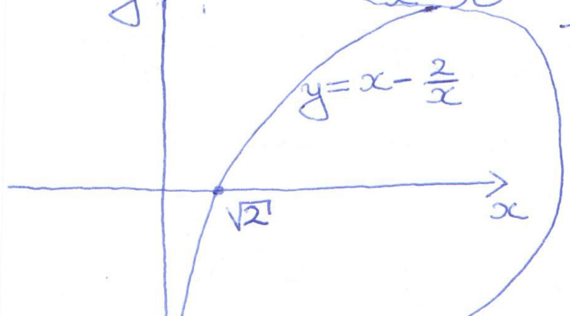
$$=\int\limits_{+\infty}^{2\sqrt{3}}\frac{1}{y^2-6}\,dy+\int\limits_{2\sqrt{3}}^{+\infty}\frac{1}{y^2-6}\,dy=$$

$$=-\int\limits_{2\sqrt{3}}^{+\infty}\frac{1}{y^2-6}\,dy+\int\limits_{2\sqrt{3}}^{+\infty}\frac{1}{y^2-6}\,dy=0.$$

Отг. на а): $I=0$.

б) $J=\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{1+\frac{2}{x^2}}{x^2+\frac{4}{x^2}}\,dx=\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{1}{\left(x-\frac{2}{x}\right)^2+4}\,d\left(x-\frac{2}{x}\right).$

Да изследваме накратко поведението на функцията $g(x)=x-\frac{2}{x}$ при $x\in(0,+\infty)$. Имаме, че при $x\in(0,+\infty)$ $g'(x)=1+\frac{2}{x^2}>0$ и значи $g(x)$ е строго растяща в $(0,+\infty)$. Освен това $\lim\limits_{x\to 0+}g(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$.



Тогава $J=\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{1}{\left(x-\frac{2}{x}\right)^2+4}\,d\left(x-\frac{2}{x}\right)\overset{y=x-\frac{2}{x}}{=}$

$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{y^2+4}\,dy=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\left(\frac{y}{2}\right)^2+1}\,d\frac{y}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{y}{2}\Big|_{-\infty}^{+\infty}=\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]=\frac{\pi}{2}.$$

Отг. на б): $J=\frac{\pi}{2}$.