Задачи по теория — реални числа, редици и редове
КН, 1 к., I п.

Някои задачи от посочените тук или подобни на тях се падат на изпита по теория. Задачите обозначени със $*$ са по-сложни или имат по-дълги решения. Такива **не** се падат на изпита.

1. Нека A и B са две множества от реални числа. Сумата и разликата им се определя чрез
$$A + B := \{a + b : a \in A,\ b \in B\}$$
и
$$A - B := \{a - b : a \in A,\ b \in B\}.$$
При предположение, че A и B са ограничени и непразни, покажете, че $A + B$ и $A - B$ са също ограничени и непразни и изразете техните точни горни и долни граници чрез точните горни и долни граници на A и B.

2. Нека A е множество от реални числа. Определяме множеството
$$-A := \{-a : a \in A\}.$$
При предположение, че A е ограничено и непразно, покажете, че и $-A$ е ограничено и непразно и изразете неговите точни горна и долна граници чрез точните горна и долна граници на A.

3. Докажете, че ако $\lim a_n = \ell$, то $\lim |a_n| = |\ell|$.

4. Докажете, че ако $\lim a_n = 0$ и $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, то $\lim \dfrac{1}{a_n} = +\infty$.

5. Докажете, че ако $\lim a_n = +\infty$ и $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, то $\lim \dfrac{1}{a_n} = 0$.

6. Докажете, че ако $\lim a_n = \ell$ и $a > \ell$, то съществува $\nu \in \mathbb{R}$ такова, че $a_n < a$ при $n > \nu$.

7. * Докажете, че редът $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ е разходящ.

8. * (Коши) Нека $\{a_n\}$ е намаляваща редица от неотрицателни числа. Докажете, че редът $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ тогава и само тогава, когато е сходящ редът $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$. С помощта на това твърдение, покажете, че $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ е сходящ тогава и само тогава, когато $\alpha > 1$.