Лекция XI - Проверка на хипотези

Лекция XI - Проверка на хипотези

- Проста срещу проста
- Грешка от I първи и II род
- Лема на Неймън - Пирсън
- Проста срещу сложна
- Хипотези за нормални извадки

Проверка на хипотези

В статистиката много често ни се налага да проверяваме истинността на някое твърдение. То може да е съвсем свободно формулирано, например - "лекарството подобрява състоянието на болните", или да носи в себе си конкретна информация - "5% от заболелите нямат определен симптом", или да бъде формално - "броят на заразяванията е експоненциално разпределена сл.в. с параметър $\lambda = 2$". Във всички случай ни е необходим критерии, с който да отсъдим дали твърдението е истина. Също така искаме да знаем вероятността за допускане на грешка.

Проверка на хипотези

В статистиката много често ни се налага да проверяваме истинността на някое твърдение. То може да е съвсем свободно формулирано, например - “лекарството подобрява състоянието на болните”, или да носи в себе си конкретна информация - “5% от заболелите нямат определен симптом”, или да бъде формално - “броят на заразяванията е експоненциално разпределена сл.в. с параметър $\lambda = 2$”. Във всички случай ни е необходим критерии, с който да отсъдим дали твърдението е истина. Също така искаме да знаем вероятността за допускане на грешка.

Проблемът с проверката на хипотези е изследван от Нейман и Пирсън през 30 години на XX век. Предложения подход в някакъв смисъл е аналогичен на разсъждение с допускане на противното. Допускаме, че хипотезата е вярна. Конструираме събитие A, което би се изпълнило с голяма вероятност при вярна хипотеза. Извършваме опит, правим наблюдения и ако събитието A не настъпи имаме основание да отхвърлим хипотезата. Това е така, защото вероятността събитието A да не настъпи при вярна хипотеза е много малка, т.е. наблюдаваме сбъдването на невероятното събитие $\overline{A}$. Хипотезата, която сме направили влиза в противоречие с наблюденията, затова я отхвърляме.

Ако събитието A настъпи ние нямаме основание да отхвърляме хипотезата.

Проверка на хипотези

Ще зададем подходящ математически модел за проверка на хипотези, като ще започнем от най-простия възможен случай. Ще предполагаме, че хипотезата се отнася за параметър θ, от който зависи сл.в. X. Както обикновено $\overrightarrow{\mathrm{X}} = (X_1, \dots, X_n)$ са независими наблюдения над нея. Проверяваме

$$\begin{array}{lll} \text{хипотеза} \quad H_0 & : & \theta = \theta_0 \\ \text{алтернатива } H_1 & : & \theta = \theta_1 \end{array}$$

срещу

Съвсем естествено е хипотезата и алтернативата да са взаимноизключващи, т.е. не могат да се едновременно верни.

Константите θ_0 и θ_1 са известни, предварително зададени, не се определят от данните. В случай като този хипотезата и алтернативата са прости, доколкото става дума за константи. За сложна алтернатива говорим тогава, когато вместо една единствена стойност θ_1 е зададено цяло множество T_1. Най-често използваните сложни алтернативи са от вида:

$$\underbrace{H_1 : \theta < \theta_0, \qquad H_1 : \theta > \theta_0,}_{\text{едностранни}} \qquad \underbrace{H_1 : \theta \neq \theta_0}_{\text{двустранна}}$$

Проверка на хипотези

Ще зададем подходящ математически модел за проверка на хипотези, като ще започнем от най-простия възможен случай. Ще предполагаме, че хипотезата се отнася за параметър θ, от който зависи сл.в. X. Както обикновено $\overrightarrow{\mathrm{X}} = (X_1, \ldots, X_n)$ са независими наблюдения над нея. Проверяваме

$$\begin{array}{lrcl} & \text{хипотеза } H_0 & : & \theta = \theta_0 \\ \text{срещу} & & & \\ & \text{алтернатива } H_1 & : & \theta = \theta_1 \end{array}$$

Съвсем естествено е хипотезата и алтернативата да са взаимноизключващи, т.е. не могат да се едновременно верни.

Константите θ_0 и θ_1 са известни, предварително зададени, не се определят от данните. В случай като този хипотезата и алтернативата са прости, доколкото става дума за константи. За сложна алтернатива говорим тогава, когато вместо една единствена стойност θ_1 е зададено цяло множество T_1. Най-често използваните сложни алтернативи са от вида:

$$\underbrace{H_1 : \theta < \theta_0, \qquad H_1 : \theta > \theta_0,}_{\text{едностранни}} \qquad\qquad \underbrace{H_1 : \theta \neq \theta_0}_{\text{двустранна}}$$

Основната ни цел е да конструираме множество W в n-мерното пространство, което наричаме **критична област**, и което е критерий за проверка на хипотезата:

$$\begin{array}{lcl} \text{Ако } \overrightarrow{\mathrm{X}} \in W & \Rightarrow & \text{Отхвърляме } H_0 \\ \text{Ако } \overrightarrow{\mathrm{X}} \notin W & \Rightarrow & \text{Приемаме } H_0 \end{array}$$

Грешки от I и II род

Възможно е разбира се да отхвърлим хипотезата H_0 дори когато е вярна. Тогава допускаме **грешка от I род**. Вероятността за грешка от първи род се нарича **ниво на съгласие**

$$\alpha = \mathrm{P}\left(\overrightarrow{\mathrm{X}} \in W | H_0\right)$$

Желателно е това число да бъде малко, обикновено то се избира предварително. Нивото на съгласие α не определя критичната област W еднозначно, съществуват много области с равно ниво на съгласие.

Грешки от I и II род

Възможно е разбира се да отхвърлим хипотезата H_0 дори когато е вярна. Тогава допускаме **грешка от I род**. Вероятността за грешка от първи род се нарича **ниво на съгласие**

$$\alpha = \mathrm{P}\left(\overrightarrow{\mathrm{X}} \in W | H_0\right)$$

Желателно е това число да бъде малко, обикновено то се избира предварително. Нивото на съгласие α не определя критичната област W еднозначно, съществуват много области с равно ниво на съгласие.

Възможно е, също така, хипотезата да е невярна, но ние да я приемем, това се нарича **грешка от II род**, вероятността за нея бележим с

$$\beta = \mathrm{P}\left(\overrightarrow{\mathrm{X}} \notin W | H_1\right)$$

Противоположната вероятност $\pi = 1-\beta$ да отхвърлим хипотезата H_0, ако тя е погрешна, наричаме **мощност на критерия**. Стремим се да направим мощността възможно най-голяма.

		хипотеза която приемаме	
		H_0	H_1
вярна хипотеза	H_0	$\checkmark$	грешка от I род
	H_1	грешка от II род	$\checkmark$

Грешки от I и II род

Ако изберем по-голяма област W вероятността да попаднем в нея ще нарастне, съответно грешката от I род α ще е по-голяма, а β ще намалее. Обратно, ако изберем по-малка W вероятността да попаднем извън нея ще нарастне, т.е. β ще се увличи, а α ще намалее. В крайния случай $W = \emptyset$ явно $\alpha = 0$. Когато едната грешка расте другата намалява. Коя от двете грешки е по-опасна зависи от конкретните хипотези.

Грешки от I и II род

Ако изберем по-голяма област W вероятността да попаднем в нея ще нарастне, съответно грешката от I род α ще е по-голяма, а β ще намалее. Обратно, ако изберем по-малка W вероятността да попаднем извън нея ще нарастне, т.е. β ще се увличи, а α ще намалее. В крайния случай $W = \emptyset$ явно $\alpha = 0$. Когато едната грешка расте другата намалява. Коя от двете грешки е по-опасна зависи от конкретните хипотези. Например

$$H_0 \quad : \quad \text{виното е отровно}$$
$$H_1 \quad : \quad \text{виното не е отровно}$$

Грешката от I род е "виното е отровно, а ние приемаме че не е", очевидно това е изключително неприятна грешка.

Грешката от II род "виното не е отровно, но ние приемаме че е", няма да доведе до трагични последствия.

Грешки от I и II род

Ако изберем по-голяма област W вероятността да попаднем в нея ще нарастне, съответно грешката от I род α ще е по-голяма, а β ще намалее. Обратно, ако изберем по-малка W вероятността да попаднем извън нея ще нарастне, т.е. β ще се увличи, а α ще намалее. В крайния случай $W = \emptyset$ явно $\alpha = 0$. Когато едната грешка расте другата намалява. Коя от двете грешки е по-опасна зависи от конкретните хипотези. Например

$$H_0 \quad : \quad \text{виното е отровно}$$
$$H_1 \quad : \quad \text{виното не е отровно}$$

Грешката от I род е "виното е отровно, а ние приемаме че не е", очевидно тове е изключително неприятна грешка.

Грешката от II род "виното не е отровно, но ние приемаме че е", няма да доведе до трагични последствия.

Изборът на основна хипотеза се определя и от това коя от двете грешки искаме да избегнем. Така фиксираме максималната грешка от I род, която можем да си позволим да допуснем, обикновено това е число от порядък $\alpha = 0.05, 0.01, 0.001$ и т.н. и при това условие избираме такава област W, че грешката от II род да бъде възможно най-малка, т.е. фиксираме α и търсим минимум по β.

Ако съществува област върху която се изпълняват тези условия, то казваме че това е **оптимална критична област** (о.к.о.) и я бележим с W^*.

Лема на Нейман - Пирсън

Намирането на оптималната критична област се извършва по лемата на Нейман - Пирсън. Ще предполагаме, че разпределението на сл.в. X е известно, но то зависи от параметър θ, за който формулираме проста хипотеза срещу проста алтернатива.

$$
\begin{aligned}
H_0 &: \quad \theta = \theta_0 \\
H_1 &: \quad \theta = \theta_1
\end{aligned}
$$

Нека $\overrightarrow{\mathrm{X}} = (X_1, \dots, X_n)$ са наблюденията над X, а $L(x, \theta)$ е съответната функция на правдоподобие

$$
L(x, \theta) = \prod_{k=1}^{n} f_{X_k}(x_k, \theta), \qquad x = (x_1, x_2, \dots, x_n)
$$

Ще въведем означенията $L_0(x) = L(x, \theta_0)$ и $L_1(x) = L(x, \theta_1)$.

Лема на Нейман - Пирсън

Намирането на оптималната критична област се извършва по лемата на Нейман - Пирсън. Ще предполагаме, че разпределението на сл.в. X е известно, но то зависи от параметър θ, за който формулираме проста хипотеза срещу проста алтернатива.

$$\begin{aligned} H_0 &: \quad \theta = \theta_0 \\ H_1 &: \quad \theta = \theta_1 \end{aligned}$$

Нека $\overrightarrow{\mathrm{X}} = (X_1, \dots, X_n)$ са наблюденията над X, а $L(x, \theta)$ е съответната функция на правдоподобие

$$L(x, \theta) = \prod_{k=1}^{n} f_{X_k}(x_k, \theta), \qquad x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Ще въведем означенията $L_0(x) = L(x, \theta_0)$ и $L_1(x) = L(x, \theta_1)$.

Лема на Нейман - Пирсън

При проверка на проста хипотеза срещу проста алтернатива с ниво на съгласие α, ако W^* е такава, че $\mathrm{P}\left(\overrightarrow{\mathrm{X}} \in W^* \mid H_0\right) = \alpha$ и съществува константа $K = K(\alpha)$ за която

$$\begin{aligned} L_1(x) &\geq K\, L_0(x), \qquad \forall x \in W^* \\ L_1(x) &\leq K\, L_0(x), \qquad \forall x \notin W^* \end{aligned}$$

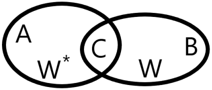
Тогава W^* е оптимална критична област.

Лема на Нейман - Пирсън

Док. Нека W е произволна друга критична област за която грешката от I род е точно α

$$\mathsf{P}\left(\overrightarrow{\mathrm{X}} \in W | H_0\right) = \alpha$$

Ще докажем че върху W^* грешката от II род е по-малка отколкото върху W, или което е същото, че мощността е по-голяма. Ще въведем означенията

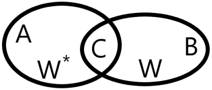


$$C = W \cap W^*, \qquad A = W \setminus W^*, \qquad B = W^* \setminus W$$

Док. Нека W е произволна друга критична област за която грешката от I род е точно α

$$\mathrm{P}\left(\overrightarrow{\mathrm{X}} \in W | H_0\right) = \alpha$$

Ще докажем че върху W^* грешката от II род е по-малка отколкото върху W, или което е същото, че мощността е по-голяма. Ще въведем означенията



$$C = W \cap W^*, \qquad A = W \setminus W^*, \qquad B = W^* \setminus W$$

Ако е изпълнена хипотеза H_0, то съвместната плътност на наблюденията е L_0 и α може да се пресметне чрез съответния n-мерен интеграл.

$$\alpha = \mathrm{P}\left(\overrightarrow{\mathrm{X}} \in W^* | H_0\right) = \int_{W^*} L_0(x)\, dx = \int_A L_0(x)\, dx + \int_C L_0(x)\, dx$$

$$\alpha = \mathrm{P}\left(\overrightarrow{\mathrm{X}} \in W\, | H_0\right) = \int_W L_0(x)\, dx = \int_B L_0(x)\, dx + \int_C L_0(x)\, dx$$

Следователно

$$\int_A L_0(x)\, dx = \int_B L_0(x)\, dx$$

Лема на Нейман - Пирсън

Нека π^* и π са мощностите съответно върху W^* и W.

$$\pi^* = \mathrm{P}\left(\overrightarrow{\mathrm{X}} \in W^* \mid H_1\right), \qquad \pi = \mathrm{P}\left(\overrightarrow{\mathrm{X}} \in W \mid H_1\right)$$

Ще разгледаме разликата

$$\pi^* - \pi = \int_{W^*} L_1(x)\, dx - \int_W L_1(x)\, dx =$$

$$= \left(\int_A + \int_C\right) L_1(x)\, dx - \left(\int_B + \int_C\right) L_1(x)\, dx = \int_A L_1(x)\, dx - \int_B L_1(x)\, dx$$

Лема на Нейман - Пирсън

Нека π^* и π са мощностите съответно върху W^* и W.

$$\pi^* = \mathsf{P}\left(\overrightarrow{\mathrm{X}} \in W^* \mid H_1\right), \qquad \pi = \mathsf{P}\left(\overrightarrow{\mathrm{X}} \in W \mid H_1\right)$$

Ще разгледаме разликата

$$\pi^* - \pi = \int_{W^*} L_1(x)\, dx - \int_W L_1(x)\, dx =$$

$$= \left(\int_A + \int_C\right) L_1(x)\, dx - \left(\int_B + \int_C\right) L_1(x)\, dx = \int_A L_1(x)\, dx - \int_B L_1(x)\, dx$$

$A \subset W^*$ следователно за $\forall x \in A$ е изпълнено $L_1(x) \geq K L_0(x)$, аналогично $B \cap W^* = \emptyset$, тогава от $x \in B$ следва $x \notin W^*$ и съгласно условието на лемата $L_1(x) \leq K\, L_0(x)$, т.е. $-L_1(x) \geq -K\, L_0(x)$. Тези неравенства ни дават възможност да оценим $\pi^* - \pi$

$$\pi^* - \pi \geq \int_A K L_0(x)\, dx - \int_B K L_0(x)\, dx = K\left(\int_A L_0(x)\, dx - \int_B L_0(x)\, dx\right) = 0$$

Областта W беше произволно избрана, доказахме, че върху нея мощността е по-малка, отколкото мощността върху W^*. Това означава, че върху W^* мощността достига максимум. $\square$

Хипотези за нормално разпределени сл.в.

Лемата на Нейман-Пирсън дава начин за конструиране на оптимална критична област при проверка на хипотези. С нейна помощ ще разгледаме хипотези за математическото очакване на нормално разпределена сл.в.

Нека $X \in N(\mu, \sigma^2)$ като предполагаме, че дисперсията σ^2 е известна. При зададено ниво на съгласие α ще проверим

$$\begin{aligned} H_0 &: \quad \mu = \mu_0 \\ H_1 &: \quad \mu = \mu_1 \end{aligned}$$

Тук μ_0 и μ_1 са известни константи, за определеност ще приемем, че $\mu_0 < \mu_1$.

Лемата на Нейман-Пирсън дава начин за конструиране на оптимална критична област при проверка на хипотези. С нейна помощ ще разгледаме хипотези за математическото очакване на нормално разпределена сл.в.

Нека $X \in N(\mu, \sigma^2)$ като предполагаме, че дисперсията σ^2 е известна. При зададено ниво на съгласие α ще проверим

$$\begin{aligned} H_0 &: \quad \mu = \mu_0 \\ H_1 &: \quad \mu = \mu_1 \end{aligned}$$

Тук μ_0 и μ_1 са известни константи, за определеност ще приемем, че $\mu_0 < \mu_1$. В лекция XI изведохме функцията на правдоподобие при нормално разпределени наблюдения.

$$L(\overrightarrow{\mathrm{X}}, \mu) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x_k-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\sigma\right)^n} e^{-\sum_{k=1}^{n} \frac{(x_k-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Съгласно лемата трябва да намерим област W^* такава, че

$$\alpha = \mathrm{P}\left(\overrightarrow{\mathrm{X}} \in W^* \mid H_0\right) = \mathrm{P}\left(L_1(x) \geq K\, L_0(x) \mid H_0\right)$$

Където L_0 и L_1 са функциите на правдоподобие, ако са изпълнени съответно H_0 и H_1. Ще заместим в горния израз и щу преобразуваме.

Целта ни е да достигнем до достатъчно прост вид на израза такъв, че да можем да пресметнем вероятността.

$$\alpha = \mathrm{P}\left(\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\sigma\right)^n} e^{-\sum_{k=1}^n \frac{(x_k-\mu_1)^2}{2\sigma^2}} \geq K \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\sigma\right)^n} e^{-\sum_{k=1}^n \frac{(x_k-\mu_0)^2}{2\sigma^2}} \mid H_0\right) =$$

$$= \mathrm{P}\left(e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{k=1}^n \left[(x_k-\mu_1)^2-(x_k-\mu_0)^2\right]} \geq K \mid H_0\right)$$

$$= \mathrm{P}\left(e^{\frac{2(\mu_1-\mu_0)}{2\sigma^2}\sum_{k=1}^n x_k} e^{-\frac{n(\mu_1^2-\mu_0^2)}{2\sigma^2}} \geq K \mid H_0\right) =$$

Хипотези за нормално разпределени сл.в.

Целта ни е да достигнем до достатъчно прост вид на израза такъв, че да можем да пресметнем вероятността.

$$\alpha = \mathrm{P}\left(\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\sigma\right)^n} e^{-\sum_{k=1}^n \frac{(x_k-\mu_1)^2}{2\sigma^2}} \geq K \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\sigma\right)^n} e^{-\sum_{k=1}^n \frac{(x_k-\mu_0)^2}{2\sigma^2}} \mid H_0 \right) =$$

$$= \mathrm{P}\left(e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{k=1}^n \left[(x_k-\mu_1)^2-(x_k-\mu_0)^2\right]} \geq K \mid H_0 \right)$$

$$= \mathrm{P}\left(e^{\frac{2(\mu_1-\mu_0)}{2\sigma^2}\sum_{k=1}^n x_k} e^{-\frac{n(\mu_1^2-\mu_0^2)}{2\sigma^2}} \geq K \mid H_0 \right) =$$

Втората експонента $e^{-\frac{n(\mu_1^2-\mu_0^2)}{2\sigma^2}}$ е константа от гледна точка на наблюденията x_k. Ще направим тази константа част от K и ще означим новата константа с K_1

$$= \mathrm{P}\left(e^{\frac{2(\mu_1-\mu_0)}{2\sigma^2}\sum_{k=1}^n x_k} \geq K_1 \mid H_0 \right) =$$

Хипотези за нормално разпределени сл.в.

Целта ни е да достигнем до достатъчно прост вид на израза такъв, че да можем да пресметнем вероятността.

$$\alpha = \mathrm{P}\left(\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\sigma\right)^n} e^{-\sum_{k=1}^n \frac{(x_k-\mu_1)^2}{2\sigma^2}} \geq K \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\sigma\right)^n} e^{-\sum_{k=1}^n \frac{(x_k-\mu_0)^2}{2\sigma^2}} \mid H_0\right) =$$

$$= \mathrm{P}\left(e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{k=1}^n \left[(x_k-\mu_1)^2-(x_k-\mu_0)^2\right]} \geq K \mid H_0\right)$$

$$= \mathrm{P}\left(e^{\frac{2(\mu_1-\mu_0)}{2\sigma^2}\sum_{k=1}^n x_k} e^{-\frac{n(\mu_1^2-\mu_0^2)}{2\sigma^2}} \geq K \mid H_0\right) =$$

Втората експонента $e^{-\frac{n(\mu_1^2-\mu_0^2)}{2\sigma^2}}$ е константа от гледна точка на наблюденията x_k. Ще направим тази константа част от K и ще означим новата константа с K_1

$$= \mathrm{P}\left(e^{\frac{2(\mu_1-\mu_0)}{2\sigma^2}\sum_{k=1}^n x_k} \geq K_1 \mid H_0\right) =$$

Ще логаритмуваме двете страни на израза и нека $K_2 = \ln K_1$

$$= \mathrm{P}\left(\frac{2(\mu_1-\mu_0)}{2\sigma^2}\sum_{k=1}^n x_k \geq K_2 \mid H_0\right) =$$

Хипотези за нормално разпределени сл.в.

По допускане $\mu_0 < \mu_1$, следователно $\frac{2(\mu_1-\mu_0)}{2\sigma^2}$ е положителна константа, ако разделим двете страни на на нея, то знакът на неравенството няма да се промени. По този начин окончатено получаваме

$$= \mathrm{P}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k \geq K_3 \mid H_0\right) = \alpha$$

Хипотези за нормално разпределени сл.в.

По допускане $\mu_0 < \mu_1$, следователно $\frac{2(\mu_1 - \mu_0)}{2\sigma^2}$ е положителна константа, ако разделим двете страни на на нея, то знакът на неравенството няма да се промени. По този начин окончатено получаваме

$$= \mathrm{P}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k \geq K_3 \mid H_0\right) = \alpha$$

При зададена конкретна стойност на α не е проблем да се определи K_3, достатъчно е да се знае разпределението на $\sum x_k$. При изпълнена хипотеза $H_0 : X_k \in N(\mu_0, \sigma^2)$. В лекция XII показахме, че $\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \in N(0,1)$. Това ни позволява да запишем вероятността по следния начин.

$$\mathrm{P}\left(\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \geq K_4 \mid H_0\right) = \alpha$$

Хипотези за нормално разпределени сл.в.

По допускане $\mu_0 < \mu_1$, следователно $\frac{2(\mu_1 - \mu_0)}{2\sigma^2}$ е положителна константа, ако разделим двете страни на на нея, то знакът на неравенството няма да се промени. По този начин окончатено получаваме

$$= \mathrm{P}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k \geq K_3 \mid H_0\right) = \alpha$$

При зададена конкретна стойност на α не е проблем да се определи K_3, достатъчно е да се знае разпределението на $\sum x_k$. При изпълнена хипотеза $H_0 : X_k \in N(\mu_0, \sigma^2)$. В лекция XII показахме, че $\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \in N(0,1)$. Това ни позволява да запишем вероятността по следния начин.

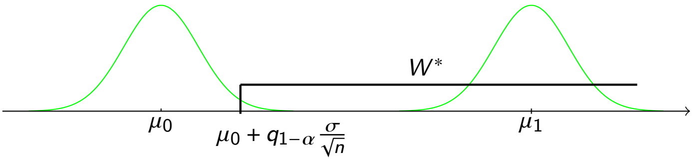
$$\mathrm{P}\left(\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \geq K_4 \mid H_0\right) = \alpha$$

Константата K_4 се намира от таблица за $N(0,1)$ като $\alpha - 1$ квантил, т.е. $K_4 = q_{1-\alpha}$. Последното събитие, което получихме е еквивалентно на $\overrightarrow{\mathrm{X}} \in W^*$, или казано по друг начин, то задава вида на оптималната критична област

$$W^* = \left\{\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \geq K_4\right\} = \left\{\overline{X} \geq \mu_0 + q_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\}$$

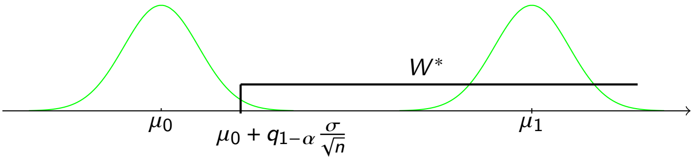
Хипотези за нормално разпределени сл.в.

Проверявахме хипотези за очакването μ на нормално разпределена сл.в. като имахме две възможности, μ_0 и μ_1, т.е трябва да изберем една от двете плътности показани по-долу в зелено.



Хипотези за нормално разпределени сл.в.

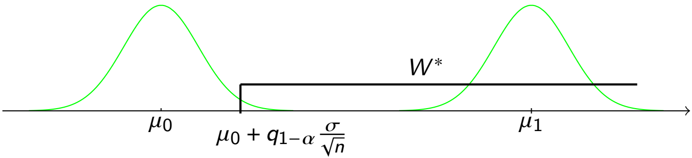
Проверявахме хипотези за очакването μ на нормално разпределена сл.в. като имахме две възможности, μ_0 и μ_1, т.е трябва да изберем една от двете плътности показани по-долу в зелено.



При допускането $\mu_0 < \mu_1$ съвсем естествено получихме оптимална критичната област във вид на интервал за среднототаритметичното на наблюденията. Ако $\overline{X}$ е по-голямо от някаква гранична стойност отхвърляме H_0 и приемаме H_1.

Хипотези за нормално разпределени сл.в.

Проверявахме хипотези за очакването μ на нормално разпределена сл.в. като имахме две възможности, μ_0 и μ_1, т.е трябва да изберем една от двете плътности показани по-долу в зелено.



При допускането $\mu_0 < \mu_1$ съвсем естествено получихме оптимална критичната област във вид на интервал за среднототаритметичното на наблюденията. Ако $\overline{X}$ е по-голямо от някаква гранична стойност отхвърляме H_0 и приемаме H_1.

Аналогично, ако $\mu_0 > \mu_1$ тогава критичната област ще е в обратна посока

$$W^* = \left\{ \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \leq K_4 \right\}$$

В този случай константата $K_4 = q_\alpha = -q_{1-\alpha}$ ще е отрицателна.

$$W^* = \left\{ \overline{X} \leq \mu_0 - q_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right\}$$

Пример

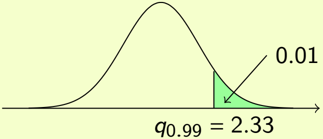
Нека $X \in N(\mu, 1)$. С ниво на съгласие $\alpha = 0.01$ проверяваме

$$H_0 \quad : \quad \mu = 1$$
$$H_1 \quad : \quad \mu = 3$$

Ако направените наблюдения са: 1.5, 1.9, 2.9 можем ли да примем за вярна хипотезата H_0?

Пресмятаме $\overline{X} = 2.1$, тази стойност е по близо до 3, отколкото до 1. Дали това е достатъчно да отхвърлим H_0 и да приемем H_1?

В нашия случай критичната област е от типа $W^* = \left\{ \overline{X} \geq \mu_0 + q_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right\}$



От $\mu_0 = 1$, $\sigma = 1$ и $q = 2.33$ за о.к.о. получаваме $W^* = \left\{ \overline{X} \geq 2.35 \right\}$

Но $2.1 \ngeq 2.35$ следователно $\overrightarrow{\mathrm{X}} \notin W^*$, тогава приемаме H_0. Наблюденията са по-големи от 1, но не достатъчно за да отхвърлим H_0 с ниво на съгласие $\alpha = 0.01$. При друго ниво на съгласие изводът би могъл да е различен.

Мощност на критерия

След като разполагаме с критичната област не е проблем да пресметнем мощността на критерия π, т.е. вероятността да отхвърлим хипотезата H_0, ако тя наистина е погрешна. При $\mu_0 < \mu_1$

$$\pi = \mathrm{P}\left(\overrightarrow{\mathrm{X}} \in W^* \mid H_1\right) = \mathrm{P}\left(\overline{X} \geq \mu_0 + q_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \mid H_1\right)$$

Вероятността трябва да бъде сметната при условие, че е изпълнена алтернативата H_1. Тогава $\overline{X} \in N(\mu_1, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$, следователно $Z = \frac{\overline{X}-\mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} \in N(0,1)$. След съответното стандартизиране получаваме

$$\pi^* = \mathrm{P}\left(Z \geq \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\mu_0 - \mu_1) + q_{1-\alpha}\right)$$

Мощност на критерия

След като разполагаме с критичната област не е проблем да пресметнем мощността на критерия π, т.е. вероятността да отхвърлим хипотезата H_0, ако тя наистина е погрешна. При $\mu_0 < \mu_1$

$$\pi = \mathrm{P}\left(\overrightarrow{\mathrm{X}} \in W^* \mid H_1\right) = \mathrm{P}\left(\overline{X} \geq \mu_0 + q_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \mid H_1\right)$$

Вероятността трябва да бъде сметната при условие, че е изпълнена алтернативата H_1. Тогава $\overline{X} \in N(\mu_1, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$, следователно $Z = \frac{\overline{X}-\mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} \in N(0,1)$. След съответното стандартизиране получаваме

$$\pi^* = \mathrm{P}\left(Z \geq \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\mu_0 - \mu_1) + q_{1-\alpha}\right)$$

Пример

Ще пресметнем мощността в предишния пример.

$$\pi = \mathrm{P}\left(Z \geq \frac{\sqrt{3}}{1}(1-3) + 2.33\right) = \mathrm{P}\left(Z \geq -1.13\right) = 0.8708$$

Мощността не е голяма, приблизително 87%, т.е. съществува 13% вероятност за грешка от II род.

Мощност на критерия

Увеличаването на броя на наблюденията води до нарастване на мощността на критерия, т.е. повечето наблюдения водят до по-точни критерии. Възможно е да фиксираме мощността π, която искаме да достигнем и при това условие да намерим броя на необходимите наблюдения. За целта трябва да решим спрямо n неравенството

$$\mathsf{P}\left(Z \geq \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\mu_0 - \mu_1) + q_{1-\alpha} \right) \geq \pi$$

Нека $q_{1-\pi}$ е граничната стойност $\mathsf{P}\left(Z \geq q_{1-\pi} \right) = \pi$, тогава решението на неравенството е

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\mu_0 - \mu_1) + q_{1-\alpha} \leq q_{1-\pi}$$

Откъдето не е трудно да се изрази n.

Мощност на критерия

Увеличаването на броя на наблюденията води до нарастване на мощността на критерия, т.е. повечето наблюдения водят до по-точни критерии. Възможно е да фиксираме мощността π, която искаме да достигнем и при това условие да намерим броя на необходимите наблюдения. За целта трябва да решим спрямо n неравенството

$$\mathrm{P}\left(Z \geq \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\mu_0 - \mu_1) + q_{1-\alpha} \right) \geq \pi$$

Нека $q_{1-\pi}$ е граничната стойност $\mathrm{P}\left(Z \geq q_{1-\pi} \right) = \pi$, тогава решението на неравенството е

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\mu_0 - \mu_1) + q_{1-\alpha} \leq q_{1-\pi}$$

Откъдето не е трудно да се изрази n.

Пример

В примера, който изследвахме ще определим n такова, че мощността на критерия да е по-голяма от 0,95.

$$\pi = \mathrm{P}\left(Z \geq \frac{\sqrt{n}}{1}(1 - 3) + 2.33 \right) \geq 0.95$$

$$\frac{\sqrt{n}}{1}(1 - 3) + 2.33 \leq q_{0.05} = -q_{0.95} = -1.645$$

Оттук пресмятаме $n = 4$.

Проста хипотеза срещу сложна алтернатива

Разглеждаме проста хипотеза срещу сложна алтернатива.

$$\begin{aligned} H_0 &: \quad \theta = \theta_0 \\ H_1 &: \quad \theta = T_1 \end{aligned}$$

където T_1 е множество, което не съдържа θ_0. Наричаме H_1 сложна, защото не задава единствена стойност, а цяло множество. Тази задача лесно се свежда до предишния случай на проверка на проста хипотеза срещу проста алтернатива. Избираме фиксирано $\theta_1 \in T_1$ и проверяваме

$$\begin{aligned} H_0 &: \quad \theta = \theta_0 \\ H_1 &: \quad \theta = \theta_1 \end{aligned}$$

Проста хипотеза срещу сложна алтернатива

Разглеждаме проста хипотеза срещу сложна алтернатива.

$$H_0 \quad : \quad \theta = \theta_0$$
$$H_1 \quad : \quad \theta = T_1$$

където T_1 е множество, което не съдържа θ_0. Наричаме H_1 сложна, защото не задава единствена стойност, а цяло множество. Тази задача лесно се свежда до предишния случай на проверка на проста хипотеза срещу проста алтернатива. Избираме фиксирано $\theta_1 \in T_1$ и проверяваме

$$H_0 \quad : \quad \theta = \theta_0$$
$$H_1 \quad : \quad \theta = \theta_1$$

По лемата на Нейман Пирсън получаваме съответната оптимална критична област W^*. Ако се окаже, че получената област не зависи от конкретния избор на θ_1, т.е. при всяка възможна стойност получаваме една и съща област, тогава логично тя е областа за проверка на проста хипотеза срещу сложна алтернатива. Ако областта зависи от избора на θ_1, този метод не работи.

Ако се вгледате внимателно в критичната област за проверка на проста срещу проста хипотеза, която изведохме (стр.11), ще забележите, че ние работихме в общ случай с две константи $\mu_0 < \mu_1$, а критичната област изобщо не зависи от μ_1, нейното значение се загуби.

Оказва се, че когато алтернативите са едностранни описаният метод работи и за проверка на “проста срещу сложна” могат да се използват вече изведените критични области.

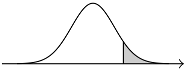
Нека $X \in N(\mu, \sigma^2)$ и основната хипотеза е

$$H_0 \; : \; \mu = \mu_0$$

- При алтернатива

$$H_1 \; : \; \mu > \mu_0$$

критичната област е $W^* = \left\{ \overline{X} \geq \mu_0 + q_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right\}$



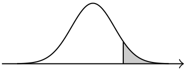
Хипотези за нормално разпределени сл.в.

Оказва се, че когато алтернативите са едностранни описаният метод работи и за проверка на “проста срещу сложна” могат да се използват вече изведените критични области.

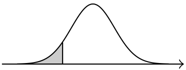
Нека $X \in N(\mu, \sigma^2)$ и основната хипотеза е

$$H_0 \ : \ \mu = \mu_0$$

- При алтернатива
$$H_1 \ : \ \mu > \mu_0$$
критичната област е $W^* = \left\{ \overline{X} \geq \mu_0 + q_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right\}$



- При алтернатива
$$H_1 \ : \ \mu < \mu_0$$
критичната област е $W^* = \left\{ \overline{X} \leq \mu_0 - q_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right\}$



Хипотези за нормално разпределени сл.в.

Оказва се, че когато алтернативите са едностранни описаният метод работи и за проверка на "проста срещу сложна" могат да се използват вече изведените критични области.

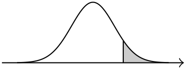
Нека $X \in N(\mu, \sigma^2)$ и основната хипотеза е

$$H_0 \; : \; \mu = \mu_0$$

- При алтернатива

$$H_1 \; : \; \mu > \mu_0$$

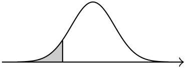
критичната област е $W^* = \left\{ \overline{X} \geq \mu_0 + q_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right\}$



- При алтернатива

$$H_1 \; : \; \mu < \mu_0$$

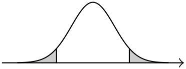
критичната област е $W^* = \left\{ \overline{X} \leq \mu_0 - q_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right\}$



- При алтернатива

$$H_1 \; : \; \mu \neq \mu_0$$

критичната област е $W^* = \left\{ |\overline{X}| \geq \mu_0 + q_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right\}$



В този случай се използва съвсем резлична теория, на която ние няма да се спираме.

$N(\mu, \sigma^2)$

Хипотезите за очакването на нормалното разпределение, които проверихме дотук се отнасят само за случая на известна дисперсия. Ако дисперсията е неизвестна един възможен подход е да я оценим от данните. Тогава обаче директното приложение на лемата на Нейман-Пирсън е невъзможно, защото в нея се изисква при изпълнена хипотеза H_0 функцията на правдоподобие да е точно определена. Подходът е с използване на така нареченото "частно на правдоподобие". Ние няма да навлизаме в детайлите, ще дадем само крайния резултат. На практика се получават аналогични критични области, разликата е, че в тях неизвестната дисперсия σ^2 е заменена с оценката за нея S^2. Така например при алтернатива $H_1 : \mu > \mu_0$ критичната област е

$$W = \left\{ \frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \geq q_{1-\alpha} \right\} = \left\{ \overline{X} \geq \mu_0 + q_{1-\alpha} \frac{S}{\sqrt{n}} \right\}$$

Както доказахме в лекция XII случайната величнина тук е с разпределение на Стюдънт с $n-1$ степени на свобода. Съответно квантила $q_{1-\alpha}$ се намира от таблици на Стюдънт.

Ясно е как ще изглеждат критичните области и в другите два случая.

$N(\mu, \sigma^2)$

Хипотезите за очакването на нормалното разпределение, които проверихме дотук се отнасят само за случая на известна дисперсия. Ако дисперсията е неизвестна един възможен подход е да я оценим от данните. Тогава обаче директното приложение на лемата на Нейман-Пирсън е невъзможно, защото в нея се изисква при изпълнена хипотеза H_0 функцията на правдоподобие да е точно определена. Подходът е с използване на така нареченото "частно на правдоподобие". Ние няма да навлизаме в детайлите, ще дадем само крайния резултат. На практика се получават аналогични критични области, разликата е, че в тях неизвестната дисперсия σ^2 е заменена с оценката за нея S^2. Така например при алтернатива $H_1 : \mu > \mu_0$ критичната област е

$$W = \left\{ \frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \geq q_{1-\alpha} \right\} = \left\{ \overline{X} \geq \mu_0 + q_{1-\alpha} \frac{S}{\sqrt{n}} \right\}$$

Както доказахме в лекция XII случайната величнина тук е с разпределение на Стюдънт с $n-1$ степени на свобода. Съответно квантила $q_{1-\alpha}$ се намира от таблици на Стюдънт.

Ясно е как ще изглеждат критичните области и в другите два случая.

21.6.2023 ЕК