Тема 1. Множества. Декартово произведение. Релации. Функции

Конвенция: Понятието множество е първично и не се дефинира.

1. **Аксиоматизация на множествата** - аксиоми за обема, отделянето, степенното множество и индуктивно генерираните множества.
   Аксиома за обема:
   $\forall x \forall y\ (\forall z\ (z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Rightarrow x = y)$
   Ако две множества имат едни и същи елементи, то те са равни.

   Схема за отделянето:
   Нека $\varphi(x, u_1, \dots, u_n)$ е теоретикомножествено свойство. Тогава за всяко множество A съществува множество B, чиито елементи са точно онези елементи от A, които имат свойство φ.
   $\forall u_1 \dots \forall u_n \forall A \exists B\ \forall x[x \in B \Leftrightarrow \left(x \in A\ \&\ \varphi(x, u_1, \dots, u_n)\right)]$

   Аксиома за степенното множество:
   $\forall A\ \exists B \forall x (x \subseteq A \Rightarrow x \in B)$
   За всяко множество A съществува множество B, измежду чиито елементи са всички подмножества на A.

   Пример: $\mathrm{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, $\ A = \{a, b\}$, то $P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, A\}$

   Аксиома за индуктивно генерираните множества:
   Нека M_0 е непразно множество, а F е множество от операции. Тогава M се строи по следния начин:
   1. База: $M_0 \subseteq M$, т.е. в M са всички елементи на M_0
   2. Инд. Предположение: Нека $M \neq \emptyset$ (така е, защото $\emptyset \neq M_0 \subseteq M$)
   3. Инд. Стъпка: Включваме в M всички елементи, които се получават от досега съществуващите в M чрез прилагане на операциите от F.
   4. Заключение: В M няма други елементи освен базовите и включението от инд. Стъпка
      $M \coloneqq < M_0, F >$

   $$M_0 \subseteq M, \qquad M = \bigcup_{i=0}^{n} M_i\,, \qquad M_i = M_{i-1} \cup \{f(m_i)\ |\ f \in F\ \&\ m_{i-1} \in M_{i-1}\}$$

2. **Математическа индукция**
   Принцип на слабата математическа индукция:
   Нека $m \in N$. За всяко свойство $\varphi(n)$, ако:
   1. $\varphi(m)$ е вярно и
   2. $(\forall k \geq m)[\varphi(k) \Rightarrow \varphi(k+1)]$,

   То $(\forall n \in N)[\varphi(n)]$

   Принцип на пълната математическа индукция:
   Нека $m \in N$. За всяко свойство $\varphi(n)$, ако:
   1. $\varphi(m)$ е вярно и
   2. $(\forall k > m)[\varphi(m)\ \&\ \varphi(m+1)\ \&\ \dots\ \&\ \varphi(k-1)\ \Rightarrow \varphi(k)]$,

   То $(\forall n \in N)[\varphi(n)]$

3. **Основни операции върху множества и техните свойства**
   Нека A и B са множества
   - Обединение: $A \cup B = \{x\ | x \in B \cup x \in A\}$
   - Сечение: $A \cap B = \{x\ |\ x \in A\ \wedge\ x \in B\}$
   - Допълнение: $\bar{A} = \{x\ |\ x \notin A\ \wedge\ x \in U\}$, $\ U$ − универсум (някакво надмножество на множествата, които ни интересуват)
   - Разлика: $A \setminus B = \{x\ |\ x \in A\ \wedge\ x \notin B\}$
   - Симетрична разлика: $A\,\Delta\,B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

- Степенно множество: $\mathcal{P}(A) = \{ x \mid x \subseteq A\}$

За редицата от множества $\{A_1, \dots, A_n\}$ имаме следните операции:

- Обединение: $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{ x \mid \exists i \left(1 \le i \le n \,\&\, x \in A_i\right\}$
- Сечение: $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{ x \mid \forall i(1 \le i \le n \rightarrow x \in A_i)\}$

Пример: Нека $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 1\}$ и $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 3\}$. Тогава:

- $A \cap B = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 3\}$
- $A \cup B = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 1\}$
- $A \,/\, \mathrm{B} = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x \le 3\}$
- $B \;/\, A = \emptyset$
- $A \triangle B = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x \le 3\}$

Св-ва: Нека A, B и C са множества:

1. $A \cup A = A, \qquad A \cap A = A$ – идемпотентност
2. $A \cup B = B \cup A, \qquad A \cap B = B \cap A, \qquad A \triangle B = B \triangle A$ – комутативност
3. $(\mathrm{A}\, \sigma\, \mathrm{B})\, \sigma\, \mathrm{C} = \mathrm{A}\, \sigma\, (\mathrm{B}\, \sigma\, \mathrm{C}), \qquad \sigma \in \{\cup, \cap, \triangle\}$ – асоциативност
4. $U \cup A = U, \qquad U \cap A = A, \qquad \emptyset \cup A = A, \qquad \emptyset \cap A = \emptyset$
5. $A \cup \bar{A} = U, \qquad A \cap \bar{A} = \emptyset$ – свойства на допълнението
6. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \qquad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ – Закон на Де Морган

4. Наредена двойка и наредена n-орка

Деф: Наредена двойка

За два елемента a и b въвеждаме операцията наредена двойка $\langle a, b\rangle$. Наредената двойка $\langle a, b\rangle$ има следното характеристично качество:

$$a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2 \leftrightarrow \langle a_1, b_1\rangle = \langle a_2, b_2\rangle$$

Наредена двойка на Куратовски: $\langle a, b\rangle = \{\{a\}, \{a, b\}\}$

Деф: Наредена n-орка

Нека $a_1, \dots, a_n$ са произволни елементи, $n \ge 2$. Тогава означаваме

$\langle a_1, \dots, a_n\rangle = \left\langle a_1, \left\langle a_2, \langle \dots, a_n\rangle\right\rangle\right\rangle$ - наредена n-орка на елементите $a_1, \dots, a_n$

5. Декартово произведение и обобщено декартово произведение

Деф: Декартово произведение

За две множества A и B, определяме тяхното декартово произведение като $\mathrm{A} \times \mathrm{B} = \{\langle a, b\rangle \mid a \in A \,\&\, b \in B\}$

Деф: Обобщено декартово произведение

За краен брой множества $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \dots, \mathrm{A}_\mathrm{n}$, определяме $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{\langle a_1, a_2, \dots, a_n\rangle \mid a_1 \in A_1 \,\&\, a_2 \in A_2 \& \dots \& \, a_n \in A_n\}$

6. Релация над n домейна. Свойства на бинарни релации. Релации на еквивалентност и класове на еквивалентност. Релации на частична наредба.

Деф: Релация над n домейна

Нека $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \dots, \mathrm{A}_\mathrm{n}$ за $n \ge 2$ са множества. Всяко подмножество R на дек. произв. на $A_1, \dots, A_n$ снаричаме n-местна релация над $A_1, \dots, A_n$. За $n = 2$ казваме, че R е бинарна релация.

Деф: Нека $R \subseteq A \times B$

$Dom(R) = \{a \mid a \in A \,\&\, (\exists b \in B)[\langle a, b\rangle \in R]\}$ – домейн
$Rng(R) = \{b \mid b \in B \,\&\, (\exists a \in A)[\langle a, b\rangle \in R]\}$ – рейндж

Св-ва: Нека $R \subseteq A \times \mathrm{A}$ за произволно множество A. Нека $a, b \in A$ и $\langle a, b\rangle \in R$.

- R е рефлексивна $\leftrightarrow (\forall x \in A)[\langle x, x\rangle \in R]$
- R е антирефлексивна $\leftrightarrow (\forall x \in A)[\langle x, x\rangle \notin R]$ (ирефлексивна)
- R е транзитивна $\leftrightarrow \left(\forall x, y, z \in A\right)[\langle x, y\rangle \in R \& \langle y, z\rangle \in R \rightarrow \langle x, z\rangle \in R]$

- R е симетрична ↔ $(\forall x, y \in A)[\langle x, y\rangle \in R \to \langle y, x\rangle \in R]$
- R е антисиметрична ↔ $(\forall x, y \in A)[\langle x, y\rangle \in R \,\&\, \langle y, x\rangle \in R \to x = y]$
- R е силно антисиметрична ↔ $(\forall x, y \in A)[x \neq y \Rightarrow \langle x, y\rangle \in R \; XOR \; \langle y, x\rangle \in R]$
- R е асиметрична ↔ $(\forall x, y \in A)[\langle x, y\rangle \in R \to \langle y, x\rangle \notin R]$

Деф: Индексно множество

Множество, чиито елементи служат за индекси на друго множество като е прието бройката на елементите да се записва като долен ляв индекс:

$I_n \coloneqq \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq n\}$

$J_n \coloneqq \{x \in \mathbb{N} \mid 0 \leq x \leq n-1\}$

Деф: Фамилия от множества

Нека $I \neq \emptyset$ индексно множество и с всеки елемент $i \in I$ е свързано множество A_i. Тогава $\{A_i \mid i \in I\} = \{A_i\}_{i \in I}$ наричаме фамилия от множества, индексирана с I.

Фамилията $\{A_i\}_{i \in I}$ е разбиване на A, ако:

1. $\forall i \in I \, (A_i \neq \emptyset)$
2. $\bigcup_{i \in I} A_i = A$
3. $\forall i \in I \, \forall j \in I \, (A_i \cap A_j \neq \emptyset \to A_i = A_j)$

Деф: Релация на еквивалентност

Нека $A \neq \emptyset$ е множество. Релация R над A наричаме релация на еквивалентност, ако R е симетрична, рефлексивна и транзитивна.

Деф: Клас на еквивалентност

Нека A е множество, $a \in A$ и R е релация на еквивалентност над A. Класът на еквивалентност на a по отношение на R е множеството:

$[a]_R = \{\, b \in A \mid \langle a, b\rangle \in R\}$

Всяка релация на еквивалентност над множество поражда разбиване на множеството

Деф: Релация на (строга) частична наредба

1. Казваме, че R над A е релация на частична наредба, ако R е рефлексивна, антисиметрична и транзитивна.
2. Казваме, че R над A е релация на строга частична наредба, ако R е антирефлексивна, антисиметрична и транзитивна.

7. Диаграми на Хассе. Релации на пълна наредба. Минимален и максимален елемент в релация на частична наредба

Деф: Диаграми на Хассе - графично представяне на бинарна релация $R \subseteq A \times A$, в която:

- Всеки елемент на A се изобразява като връх
- За всеки елемент $(a, b) \in R$ поставяме стрелка от a към b

Деф: Пълна наредба

Нека A е множество и R е релация над A. R е пълна наредба над A, ако е (строга) частична наредба и всеки два различни елемента от A са сравними по отношение на R

$\forall a \in A \, \forall b \in A \, (a \neq b \to (\langle a, b\rangle \in R \vee \langle b, a\rangle \in R))$

(рефлексивна, транзитивна и силно антисиметрична)

Релациите $\leq$ и $<$ над естествените числа са пример за пълна наредба.

Деф: Минимален и максимален елемент в частична наредба

Нека R е частична наредба над множеството A. Казваме, че $a \in A$ е:

- Минимален елемент по отношение на R, ако не съществува друг по-малък елемент
  $\forall b \in A \, (a \neq b \to \langle b, a\rangle \notin R)$
- Максимален елемент по отношение на R, ако не съществува друг по-голям елемент
  $\forall b \in A (a \neq b \to \langle a, b\rangle \neq R)$

Теорема: Всяка частична наредба $R \neq \emptyset$ над крайно множество A притежава минимален и максимален елемент.

8. **Влагане на частична наредба в пълна наредба - топологично сортиране**

Теорема:

Нека $A \neq \emptyset$ е крайно множество и R е частична наредба над A. Съществува пълна наредба S над A, т.ч. $R \subseteq S$.

Д-во:

Нека за определеност R е нестрога частична наредба.

Нека $|A| = n$, по условие $A \neq \emptyset$ и $|A| < \infty$

Ще докажем, че елементите на A могат да се подредят в редица. Съгласно предната теорема, A има максимален и минимален елемент по отношение на R.

- База: Нека a_1 е един такъв минимален елемент на A.
- Предположение: Нека сме построили редицата $a_1, \dots, a_i$ $- i$ на брой различни елемента на A
- Стъпка: Ако $i = n$, край на конструкцията и $A = \{a_1, \dots, a_n\}$.
  Иначе множеството $A_i = A \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$ е непразно, а $R \cap (A_i \times A_i)$ е частична наредба над A_i. Прилагаме предишната теорема, за да изберем минимален елемент a_{i+1} на A_i по отношение на $R \cap (A_i \times A_i)$.

След като сме подредили елементите на A като $a_1, \dots, a_n$ дефинираме релацията $S = \left\{\left\langle a_i, a_j \right\rangle \;\middle|\; 1 \leq i \leq j \leq n\right\}$. Ще покажем, че S е пълна наредба над A.

- Всеки елемент $a \in A$ присъства някъде в редицата, т.е. $a = a_i$ за някое i и от $i \leq i$, то $\langle a_i, a_i \rangle \in S \Rightarrow S$ е рефлексивна
- Антисиметричността и транзитивността на S следват от антисиметричността и транзитивността на $\leq$ над $\mathbb{N}$
- Нека $a, b \in A$, тогава за някои i, j имаме, че $a = a_i$ и $b = a_j$. Ако $i \leq j$, то $\langle a, b \rangle \in S$, иначе $\langle b, a \rangle \in S$

Следователно S е пълно наредено множество.

Проверка, че $R \subseteq S$:

- Нека $\langle a, b \rangle \in R$. Тогава за някои i, j имаме, че $a = a_i$ и $b = a_j$. Допускаме, че $j < i$, т.е. $\langle b, a \rangle \in R$ и се връщаме на стъпка j в конструирането на редицата. Елементът b е избран като минимален на A_j спрямо $R \cap (A_i \times A_i)$ и не се среща в $a_1, \dots, a_{j-1}$. Също а не се среща в $\mathrm{a}_1, \dots, \mathrm{a}_{j-1}$, защото $i > j$, значи $a_i \in A_j = A \setminus \left\{a_1, \dots, a_{j-1}\right\}$.
  Така $\langle a, b \rangle \in R \cap (A_i \times A_i)$, но това противоречи на минималността на R. Следователно $i \leq j$ и $\langle a, b \rangle \in S$

9. **Частични и тотални функции. Инекции, биекции, сюрекции**

Деф: Тотална функция

Релацията $R \subseteq A \times B$ се нарича **тотална функция** от A в B, ако:

- $Dom(R) = A$, т.е. $(\forall a \in A)\ (\exists\, b \in B)\ [\langle a, b \rangle \in R]$
- За всеки елемент $a \in A$ съществува точно един елемент $b \in B$, т.е. $(\forall a \in A)(\forall b_1, b_2 \in B)[(\langle a, b_1 \rangle \in R \wedge \langle a, b_2 \rangle \in R) \rightarrow b_1 = b_2]$

Означаваме функциите като $f: A \rightarrow B$ и вместо $\langle a, b \rangle \in f$ пишем $f(a) = b$

Деф: Казваме, че функцията f е:

- **Инекция**, ако $(\forall a_1, a_2 \in A)[a_1 \neq a_2 \rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)]$
- **Сюрекция**, ако $(\forall b \in B)(\exists a \in A)[f(a) = b]$
- **Биекция**, ако е инекция и сюрекция

10. **Дефиниране на крайно множество, кардиналност на крайно множество, изброимо безкрайно множество. Принцип на Дирихле**

Деф: Крайно множество, кардиналност

Множество A е **крайно**, ако $\exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, т.ч. има биекция между A и $J_n = \{0, \dots, n-1\}$ (вкл. и $A = \emptyset$). Числото n наричаме **кардиналност** на A и бележим с $|A| = n$

Деф: Изброимо безкрайно множество

Нека A е множество. Казваме, че A е изброимо безкрайно множество, ако има биекция между A и $w = \mathbb{N}$ естествените числа.

Принцип на Дирихле: Нека X и Y са крайни множества като $|X| > |Y|$. Тогава за всяка тотална функция $f: X \rightarrow Y$ съществува $a \neq b \in X$, т.ч. $f(a) = f(b)$