2.2 Дефиниция на многомерния интеграл

В настоящия параграф ще дадем дефиниция на двоен интеграл (която лесно се прехвърля и за интеграл върху пространство с по-висока от две размерност). Ще напомним, че в едномерния случай имаме две еквивалентни дефиниции на определения интеграл - дефиниция на Риман и дефиниция на Дарбу. В многомерния случай ситуацията е по-сложна - въвеждат се четири дефиниции, специална дефиниция - съответно на Риман и Дарбу, и обща дефиниция - също на Риман и Дарбу. (Смисълът на тези думи ще бъде обяснен по-долу.)

Специална дефиниция на двойния интеграл. Нека $f(x, y)$ е функция, дефинирана в измеримо (и следователно ограничено) подмножество на равнината. Ще започнем с частния случай, когато дефиниционното множество е правоъгълник.

Двоен интеграл върху правоъгълник: дефиниция на Риман. Нека $f(x, y)$ е дефинирана в правоъгълника $\Delta = [a, b] \times [c, d]$. Да изберем делящи точки $x_0, \dots, x_n$, $y_0, \dots, y_m$ така че $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, $c = y_0 < y_1 < \dots < y_m = d$. Ще означим с Δ_{ij} правоъгълника $\Delta_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$; тогава

$$\Delta = \cup_{i=1}^{n} \cup_{j=1}^{m} \Delta_{ij}.$$

Да изберем по една точка $P_{ij} = (\xi_{ij}, \eta_{ij}) \in \Delta_{ij}$; това означава, че $\xi_{ij} \in [x_{i-1}, x_i]$, $\eta_{ij} \in [y_{j-1}, y_j]$.

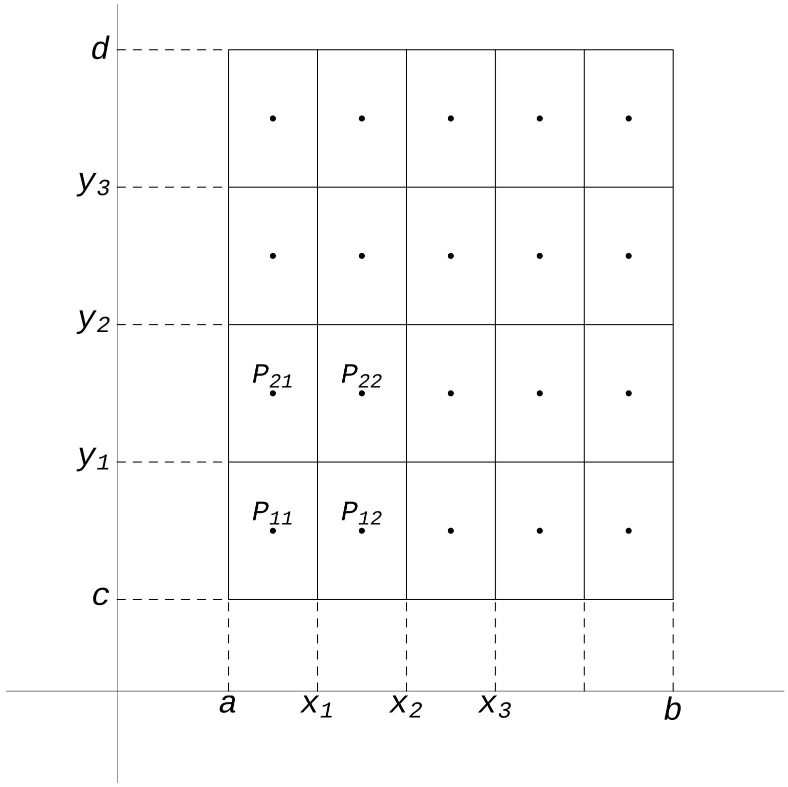
Съвокупността от всички делящи и междинни точки ще наричаме <u>разбиване</u> на Δ. За всяко такова разбиване τ ще означаваме с $R_\tau(f)$ (или просто R_τ) съответната <u>риманова сума</u>:

$$R_\tau(f) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(\xi_{ij}, \eta_{ij})(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(P_{ij})\, \mu(\Delta_{ij}).$$

Ще въведем понятието <u>диаметър</u> на разбиването τ:

$$\operatorname{diam} \tau = \max_{i=1,\dots,n, j=1,\dots,m} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_j - y_{j-1})^2}.$$

(Ще отбележим, че диаметърът не зависи от избора на междинните точки, а само от делящите.)



Разбиване на правоъгълника $\Delta = [a,b] \times [c,d]$

Дефиниция. *Казваме, че двойният интеграл от $f(x,y)$ по правоъгълника Δ е равен на числото $I(f)$, ако*

$$I(f) = \lim_{diam\,\tau \to 0} R_\tau(f).$$

Забележка. Лесно се вижда, че изискването "diam $\tau \to 0$" е равносилно с това, максималната дължина на подинтервалите $[x_{i-1}, x_i]$, $[y_{j-1}, y_j]$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$ също да клони към нула.

Двойният интеграл се означава по следния начин:

$$I(f) = \iint\limits_{\Delta} f(x,y)\, dxdy.$$

Ще опишем по-подробно понятието за граница, използвано в горната дефиниция:

Равенството $I(f) = \lim_{diam\,\tau \to 0} R_\tau(f)$ *означава, че за всяко* $\varepsilon > 0$ *съществува* $\delta > 0$*, така че за всяко разбиване* τ*, за което* $diam\,\tau < \delta$*, да имаме* $|I(f) - R_\tau(f)| < \varepsilon$.

Разбира се, тази граница не е длъжна да съществува; ако тя съществува, функцията $f(x,y)$ се нарича интегруема по Риман в Δ.

Двоен интеграл върху правоъгълник: дефиниция на Дарбу. Тук ще предположим предварително, че $f(x,y)$ е ограничена в Δ, и ще положим

$$m_{ij} = \inf f(P) : P \in \Delta_{ij}, \quad M_{ij} = \sup f(P) : P \in \Delta_{ij}.$$

Както в едномерния случай, за всяко разбиване τ ще образуваме съответната малка и голяма сума на Дарбу:

$$s_\tau(f) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} m_{ij}.\mu\left(\Delta_{ij}\right), \quad S_\tau(f) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} M_{ij}.\mu\left(\Delta_{ij}\right).$$

Лесно се вижда, че множествата от всички малки и от всички големи суми на Дарбу са ограничени; наистина, ако m и M са съответно долна и горна граница за функцията $f(x,y)$ върху Δ, то за всяко τ имаме неравенствата $m \leq m_{ij} \leq M_{ij} \leq M$ и следователно

$$m.\mu\left(\Delta\right) \leq s_\tau(f) \leq S_\tau(f) \leq M.\mu\left(\Delta\right).$$

Тогава можем да дефинираме числата $\underline{I}(f)$, $\overline{I}(f)$, наречени долен и горен интеграл от $f(x,y)$, с формулите

$$\underline{I}(f) = \sup_\tau s_\tau(f), \quad \overline{I}(f) = \inf_\tau S_\tau(f).$$

Малко по-надолу ще докажем, че винаги $\underline{I}(f) \leq \overline{I}(f)$; за нас е важен случая, когато те съвпадат.

Дефиниция. *Казваме, че функцията $f(x,y)$ е интегруема по Дарбу в Δ, ако $\underline{I}(f) = \overline{I}(f)$; общата им стойност се бележи с $I(f)$ и се нарича интеграл от f върху Δ.*

Двоен интеграл върху произволно измеримо множество – специална дефиниция. Нека $f(x,y)$ е дефинирана за $(x,y) \in \mathbf{D}$, където $\mathbf{D}$ е измеримо подмножество на равнината. Тъй като $\mathbf{D}$ е и ограничено, можем да изберем правоъгълник Δ, съдържащ $\mathbf{D}$. Да означим с $\widetilde{f}(x,y)$ или $\widetilde{f}(P)$, продължението на функцията f с нулеви стойности върху цялото Δ:

$$\widetilde{f}(P) = \begin{cases} f(P), & P \in \mathbf{D} \\ 0, & P \in \Delta \setminus \mathbf{D} \end{cases}$$

Дефиниция. *Ще дефинираме двойния интеграл от $f(x,y)$ върху $\mathbf{D}$ като равен на двойния интеграл от $\widetilde{f}(x,y)$ върху Δ, определен в предния абзац:*

$$\iint\limits_{\mathbf{D}} f(x,y)\, dxdy \overset{def}{=} \iint\limits_{\Delta} \widetilde{f}(x,y)\, dxdy.$$

Лесно се вижда, че стойността на интеграла не зависи от избора на правоъгълника Δ.

По този начин дефинициите на Риман и Дарбу се пренасят към случая на произволно измеримо дефиниционно множество; ще ги наричаме специални дефиниции, съответно на Риман и Дарбу.

Обща дефиниция на двойния интеграл. Ще дадем една по-обща дефиниция на разбиване. Нека $\mathbf{D}$ е измеримо множество в равнината, и нека $\mathbf{D}_i$, $i = 1, \ldots, n$, са измерими подмножества на $\mathbf{D}$, такива, че

$$\mathbf{D} = \cup_{i=1}^{n} \mathbf{D}_i \quad \text{и} \quad \mathbf{D}_i^o \cap \mathbf{D}_j^o = \emptyset \text{ за } i \neq j$$

- ще казваме, че в този случай имаме измеримо разбиване на $\mathbf{D}$ на непресичащи се множества. Ще казваме, че разбиването е специално, ако то се получава чрез разрязване по хоризонтални и вертикални линии, както беше направено в предишните точки на този параграф. Всъщност, разликата между общите и специални дефиниции (на Риман и

Дарбу) се състои в това, дали се използват произволни разбивания на дефиниционната област, или само специални.

Обща дефиниция на Риман. Нека $\mathbf{D}$ е измеримо множество в равнината, и $f(x,y)$ е функция, дефинирана в $\mathbf{D}$. Нека $\tau : \mathbf{D} = \cup_{i=1}^{n} \mathbf{D}_i$ е разбиване на измеримото множество $\mathbf{D}$. Да изберем по една точка $P_i \in \mathbf{D}_i$, $i = 1, \ldots, n$. Под риманова сума, съответстваща на разбиването τ и точките $\{P_i\}$, разбираме израза

$$R_\tau(f) = \sum_{i=1}^{n} f\left(P_i\right) \mu\left(\mathbf{D}_i\right).$$

Нуждаем се от определение на понятието диаметър на разбиването. Ще напомним, че ако $\mathbf{A}$ е ограничено подмножество в равнината, неговия диаметър е максималното разстояние [*] между две негови точки.

$$\operatorname{diam} \mathbf{A} = \sup_{P,Q \in \mathbf{A}} \rho(P,Q).$$

Ако τ е горното разбиване, дефинираме

$$\operatorname{diam} \tau = \max_{i=1,\ldots,n} \left(\operatorname{diam} \mathbf{D}_i\right).$$

Лесно се вижда, че за специални разбивания тази дефиниция съвпада с дадената по-горе. Сега можем да възпроизведем дефиницията на Риман. Отново дефинираме

$$I(f) = \lim_{\operatorname{diam} \tau \to 0} R_\tau(f),$$

като тук се разглеждат произволни измерими разбивания на $\mathbf{D}$.

Обща дефиниция на Дарбу. Аналогично на горното, полагаме

$$m_i = \inf f(P) : P \in \mathbf{D}_i,\ M_{ij} = \sup f(P) : P \in \mathbf{D}_i,$$

$$s_\tau(f) = \sum_{i=1}^{n} m_i \mu\left(\mathbf{D}_i\right), \quad S_\tau(f) = \sum_{i=1}^{n} M_i \mu\left(\mathbf{D}_i\right),$$

[*] Така, диаметърът на един правоъгълник е равен на неговия диагонал, а диаметърът на един кръг е равен на неговия диаметър.

и отново

$$\underline{I}(f) = \sup_{\tau} s_{\tau}(f), \quad \overline{I}(f) = \inf_{\tau} S_{\tau}(f).$$

Ще покажем, че $\underline{I}(f) \leq \overline{I}(f)$. Ще казваме, че разбиването τ' следва разбиването τ (записва се $\tau' \succ \tau$), ако τ' е получено от τ чрез допълнително разбиване на някои от неговите делящи множества.

Лема 1. *При допълнително разбиване малките суми се увеличават, а големите намаляват. По-точно, ако $\tau' \succ \tau$, то*

$$s_{\tau'}(f) \geq s_{\tau}(f), \quad S_{\tau'}(f) \leq S_{\tau}(f).$$

Доказателство. Достатъчно е да докажем твърдението, когато τ' е получено от τ чрез разбиване на едно от делящите множества на τ на две части. Наистина, в общия случай може да се счита, че τ' се получава от τ чрез краен брой такива стъпки; ако на всяка стъпка е доказано, че големите суми намаляват, оттук се вижда, че $S_{\tau'}(f) \leq S_{\tau}(f)$, и аналогично за малките суми.

Така, нека имаме разбиването $\tau : \mathbf{D} = \cup_{i=1}^{n} \mathbf{D}_i$, нека $\mathbf{D}_1$ е разбито на две измерими подмножества с непресичащи се вътрешности: $\mathbf{D}_1 = \mathbf{D}' \cup \mathbf{D}''$, и нека разбиването τ' се определя с $\mathbf{D} = \mathbf{D}' \cup \mathbf{D}'' \cup \mathbf{D}_2 \cup \ldots \cup \mathbf{D}_n$. Да означим с m', m'' точните долни граници на f върху множествата $\mathbf{D}'$, $\mathbf{D}''$, и съответно с M', M'' - нейните точни горни граници върху същите множества. Очевидно имаме $m', m'' \geq m_1$ и $M', M'' \leq M_1$. Тогава имаме

$$s_{\tau'}(f) - s_{\tau}(f) = m'.\mu\left(\mathbf{D}'\right) + m''.\mu\left(\mathbf{D}''\right) - m_1.\mu\left(\mathbf{D}_1\right) =$$

$$= m'.\mu\left(\mathbf{D}'\right) + m''.\mu\left(\mathbf{D}''\right) - m_1.\left(\mu\left(\mathbf{D}'\right) + \mu\left(\mathbf{D}''\right)\right) =$$

$$= \left(m' - m_1\right)\mu\left(\mathbf{D}'\right) + \left(m'' - m_1\right)\mu\left(\mathbf{D}''\right) \geq 0,$$

и по същия начин доказателството протича за големите суми (направете го!). ■

Лема 2. *Ако τ', τ'' са две разбивания на $\mathbf{D}$, то $s_{\tau'}(f) \leq S_{\tau''}(f)$ (т.е. коя да е малка сума на Дарбу не надминава коя да е голяма).*

Доказателство. Нека $\tau' : \mathbf{D} = \cup_{i=1}^{n} \mathbf{D}'_i$ и $\tau'' : \mathbf{D} = \cup_{j=1}^{m} \mathbf{D}''_j$. Да означим с τ разбиването

$$\tau : \mathbf{D} = \cup_{i=1}^{n} \cup_{j=1}^{m} \left(\mathbf{D}'_i \cap \mathbf{D}''_j\right).$$

Очевидно τ е измеримо разбиване, и лесно се вижда, че $\tau \succ \tau'$ и $\tau \succ \tau''$. От лема 1 имаме

$$s_{\tau'}(f) \le s_\tau(f) \le S_\tau(f) \le S_{\tau''}(f).$$

■

Забележка. *Ако τ и τ' са специални разбивания, то τ'' е също специално разбиване. Следователно твърдението на лема 2, както и следващото следствие, са валидни и за специалната дефиниция на Дарбу.*

Следствие. *За всяка функция f е изпълнено неравенството $\underline{I}(f) \le \overline{I}(f)$.*

Наистина, в лявата страна на неравенството $s_{\tau'}(f) \le S_{\tau''}(f)$ можем да вземем супремума по всички разбивания τ', с което получаваме $\underline{I}(f) \le S_{\tau''}(f)$. Вземайки отдясно инфимума по всички τ'', получаваме исканото неравенство. ■

От горните твърдения непосредствено следва:

Критерий за интегруемост по Дарбу. *Функцията $f(x, y)$ е интегруема (в общия или специалния смисъл) по Дарбу точно тогава, когато за всяко $\varepsilon > 0$ съществува разбиване τ (общо или специално) на дефиниционната област такова, че*

$$S_\tau(f) - s_\tau(f) < \varepsilon.$$

Наистина, ако горното условие е изпълнено, то веднага се вижда, че $\underline{I}(f) = \overline{I}(f)$; обратно, ако долният и горният интеграл съвпадат и са равни на I, то можем да намерим разбивания τ', τ'', така че

$$s_{\tau'}(f) > I - \varepsilon/2, \quad S_{\tau''}(f) < I + \varepsilon/2, \text{ и следователно } S_{\tau''}(f) - s_{\tau'}(f) < \varepsilon.$$

Да изберем разбиването τ такова, че $\tau \succ \tau', \tau''$. Тогава от установените в лема 2 неравенства следва, че $S_\tau(f) - s_\tau(f) < \varepsilon$. ■

Еквивалентност на различните дефиници на двойния интеграл*. По-горе изложихме четири различни дефиниции на двойния (и изобщо многомерния) интеграл: дефиниции на Риман

*Читателят, който не се интересува от доказателството на този факт, може да прескочи остатъка на параграфа.

и на Дарбу, всяка от тях в общ и специален вариант. Ще докажем, че тези дефиниции са еквивалентни, и по-точно, че е в сила твърдението:

Теорема (еквивалентност на дефинициите). *Ако една функция е интегруема по една от горните дефиниции, тя е интегруема и по всички останали, и съответните стойности на интеграла по всяка от тях съвпадат.*

Доказателство. Доказателството ще проведем по следната схема:

$$\begin{array}{ccc} \text{Риман обща} & \Rightarrow & \text{Риман специална} \\ \Uparrow & & \Downarrow \\ \text{Дарбу обща} & \Leftarrow & \text{Дарбу специална} \end{array}$$

Ще докажем всяка от горните импликации.

1/ Риман обща $\Rightarrow$ Риман специална: Принципът на доказателството може да бъде формулиран така: ако границата съществува за общи разбивания с диаметър, клонящ към нула, то тя съществува и за частния случай на специални разбивания. Това разсъждение е вярно в случая, когато дефиниционната област е правоъгълник, но в общия случай то трябва да бъде проведено по-прецизно. Римановите суми за $f(x, y)$ и за нейното продължение $\widetilde{f}(x, y)$ могат да се различават близо до контура на дефиниционната област. Ще използваме следната

Лема 3. *Нека* $\mathbf{D}$ *е измеримо подмножество на равнината, и* Δ *е правоъгълник, съдържащ* $\mathbf{D}$. *Тогава за всяко* $\varepsilon > 0$ *може да се намери* $\delta > 0$ *такова, че за всяко специално разбиване* $\tau : \Delta = \cup_{i=1}^{n} \cup_{j=1}^{m} \Delta_{ij}$ *с* $\operatorname{diam} \tau < \delta$ *сумата от лицата на тези правоъгълници* Δ_{ij}, *които имат общи точки с контура* $b\mathbf{D}$ *на* $\mathbf{D}$, *да бъде по-малка от* ε.

Доказателство. Тъй като $\mathbf{D}$ е измеримо, то $b\mathbf{D}$ е пренебрежимо по Пеано-Жордан. Да изберем елементарно множество $\mathbf{E}$ такова, че $b\mathbf{D} \subset \mathbf{E}^0$ и $\mu(\mathbf{E}) < \varepsilon$. Тогава двете компактни множества $b\mathbf{D}$ и $b\mathbf{E}$ не се пресичат, и следователно разстоянието между тях $\rho\,(b\mathbf{D}, b\mathbf{E})$ е положително (виж §1.3, упр. 3). Да го означим с δ. Тогава, ако $\operatorname{diam} \tau < \delta$, то за всеки правоъгълник Δ_{ij}, който има общи точки с $b\mathbf{D}$, е изпълнено $\Delta_{ij} \subset E$. Следователно сумата на лицата на всички такива правоъгълници не надминава лицето на $\mathbf{E}$, т.е е по-малко от ε. (Да отбележим, че доказателството е в сила и за общи разбивания. Освен това, твърдението остава вярно, ако вместо $b\mathbf{D}$ се разглежда произволно затворено и пренебрежимо подмножество на $\mathbf{D}$.) ■

Доказателство на импликацията 1/. Нека f е интегруема върху $\mathbf{D}$ в смисъл на общата дефиниция на Риман, и нека I да е съответния интеграл. Да изберем правоъгълник Δ, съдържащ $\mathbf{D}$, и нека $\widetilde{f}(x, y)$ е продължението на f с нула върху цялото Δ, което беше използвано по-горе в специалните дефиниции. Да фиксираме $\varepsilon > 0$, и да вземем такова $\delta_1 > 0$, така че за всяко разбиване τ на $\mathbf{D}$ с $\operatorname{diam}\tau < \delta_1$ да имаме $|I - R_\tau(f)| < \varepsilon$. Да изберем δ, съответстваща на ε както в лема 3.

Нека сега $\widetilde{\tau}$: $\Delta = \cup_{i=1}^{n}\cup_{j=1}^{m}\Delta_{ij}$ е специално разбиване на правоъгълника Δ с $\operatorname{diam}\widetilde{\tau} < \min(\delta, \delta_1)$, и $\widetilde{P}_{ij} \in \Delta_{ij}$. Нека означим с τ съответното разбиване на $\mathbf{D}$, породено от множествата $\mathbf{D}_{ij} = \mathbf{D} \cap \Delta_{ij}$, и да изберем точките $P_{ij} \in \mathbf{D}_{ij}$ така, че $P_{ij} = \widetilde{P}_{ij}$ в случая, когато Δ_{ij} се съдържа във вътрешността на $\mathbf{D}$ (ако Δ_{ij} пресича $b\mathbf{D}$, то може да имаме $\widetilde{P}_{ij} \notin \mathbf{D}$). Нека $R_\tau f$ да е римановата сума, съответстваща на общото разбиване τ и на междинните точки P_{ij}. По построение $|I - R_\tau f| < \varepsilon$. От друга страна,

$$R_{\widetilde{\tau}}\widetilde{f} - R_\tau f = \sum_{\Delta_{ij}\cap b\mathbf{D}\neq\emptyset}\left(\widetilde{f}\left(\widetilde{P}_{ij}\right) - f\left(P_{ij}\right)\right)\mu\left(\Delta_{ij}\right)$$

и следователно, ако означим с C една горна граница за $|f(P)|$, получаваме

$$\left|R_{\widetilde{\tau}}\widetilde{f} - R_\tau f\right| \leq 2C\sum_{\Delta_{ij}\cap b\mathbf{D}\neq\emptyset}\mu\left(\Delta_{ij}\right) < 2C\varepsilon$$

В крайна сметка получаваме

$$\left|I - R_{\widetilde{\tau}}\widetilde{f}\right| \leq |I - R_\tau f| + \left|R_{\widetilde{\tau}}\widetilde{f} - R_\tau f\right| < (1 + 2C)\varepsilon$$

и може да бъде направено произволно малко. ■

2/ Риман специална $\Rightarrow$ Дарбу специална: Да изберем $\varepsilon > 0$. За всички разбивания τ на дефиниционната област Δ на $\widetilde{f}$ с достатъчно малък диаметър имаме

$$R_\tau\widetilde{f} = \sum_{i,j}\widetilde{f}\left(P_{ij}\right)\mu\left(\Delta_{ij}\right) \in (I - \varepsilon, I + \varepsilon)$$

независимо от избора на междинните точки P_{ij}. Променяйки тези точки, можем да накараме функционалните стойности $\widetilde{f}\left(P_{ij}\right)$ да клонят към минималната m_{ij} или максималната M_{ij} стойности на функцията в Δ_{ij}; тогава римановата сума $R_\tau \widetilde{f}$ ще клони съответно към малката $s_\tau \widetilde{f}$ или към голямата $S_\tau \widetilde{f}$ суми на Дарбу за τ. Чрез граничен преход получаваме, че

$$I - \varepsilon \le s_\tau \widetilde{f} \le S_\tau \widetilde{f} \le I + \varepsilon,$$

откъдето $S_\tau \widetilde{f} - s_\tau \widetilde{f} \le 2\varepsilon$. Според критерия на Дарбу, доказан по-горе, това означава, че $\widetilde{f}$ е интегруема по Дарбу върху Δ.

3/ Дарбу специална $\Rightarrow$ Дарбу обща: Нека, както и по-горе, е дадена функцията f с дефиниционна област $\mathbf{D}$, Δ е правоъгълник, съдържащ $\mathbf{D}$, и $\widetilde{f}$ е продължението на f с нулеви стойности. Предполагаме, че $\widetilde{f}$ е интегруема по специалната дефиниция на Дарбу в Δ. Да фиксираме $\varepsilon > 0$, и нека $\widetilde{\tau}$: $\Delta = \cup_{i=1}^{n} \cup_{j=1}^{m} \Delta_{ij}$ е специално разбиване на Δ такова, че $S_{\widetilde{\tau}} \widetilde{f} - s_{\widetilde{\tau}} \widetilde{f} < \varepsilon$. Отново ще означим с τ съответното разбиване на $\mathbf{D}$: $\tau :\ \mathbf{D} = \cup_{i,j} \left(\Delta_{ij} \cap \mathbf{D}\right)$. Очевидно имаме

$$s_{\widetilde{\tau}} \widetilde{f} \le s_\tau f, \quad S_{\widetilde{\tau}} \widetilde{f} \ge S_\tau f$$

(докажете!) и следователно $S_\tau f - s_\tau f < \varepsilon$, т.е. критерият на Дарбу е удовлетворен.

4/ Дарбу обща $\Rightarrow$ Риман обща: В това доказателство основната тежест се носи от следната теорема, чието доказателство ще дадем по-нататък:

Теорема на Дарбу. *Ако $f(x,y)$ е ограничена функция върху измеримото множество $\mathbf{D}$, и τ пробягва всички разбивания на $\mathbf{D}$ от общ вид, то са налице съотношенията*

$$\lim_{\operatorname{diam} \tau \to 0} s_\tau f = \underline{I}(f), \qquad \lim_{\operatorname{diam} \tau \to 0} S_\tau f = \overline{I}(f).$$

Ако сметнем теоремата на Дарбу за доказана, то твърдението се получава чрез прилагане на лемата за полицаите към очевидното неравенство

$$s_\tau f \le R_\tau f \le S_\tau f.$$

По-подробно, нека f е интегруема върху $\mathbf{D}$ според общата дефиниция на Дарбу. Тогава по горната теорема за всяко $\varepsilon > 0$ можем да намерим $\delta > 0$, така че за всяко разбиване τ с $\operatorname{diam} \tau < \delta$ да имаме

$s_\tau f > I(f) - \varepsilon$, $S_\tau f < I(f) + \varepsilon$, и следователно за всяко такова τ ще бъде изпълнено $I(f) - \varepsilon < R_\tau f < I(f) + \varepsilon$.

Доказаните импликации позволяват да се твърди, че ако една от дефинициите е изпълнена, то са изпълнени и останалите три, и, разбира се, стойността на интеграла се получава една и съща. Остава само да докажем теоремата на Дарбу. ■

Доказателство на теоремата на Дарбу. Ще докажем твърдението за малките суми, за големите то се доказва аналогично.

Да фиксираме $\varepsilon > 0$. По дефиниция можем да намерим измеримо разбиване τ^* на $\mathbf{D}$: $\tau^* : \mathbf{D} = \cup_{i=1}^{k} \mathbf{D}_i^*$ такова, че

$$s_{\tau^*} f = \sum_{i=1}^{k} m_i^* \mu\left(\mathbf{D}_i^*\right) > \underline{I}(f) - \varepsilon,$$

където $m_i^* = \inf\limits_{P \in \mathbf{D}_i^*} f(P)$.

Нека $\mathbf{A}$ е обединението на контурите на всички $\mathbf{D}_i^*$:

$$\mathbf{A} = \cup_{i=1}^{k} b\mathbf{D}_i^*.$$

Тъй като всички множества $\mathbf{D}_i^*$ са измерими, то по критерия за измеримост от предния параграф получаваме, че $\mathbf{A}$ е пренебрежимо множество. Лесно се вижда, че то е и затворено. Нека изберем $\delta > 0$ както в лема 3. Това означава, че ако $\tau : \mathbf{D} = \cup_{j=1}^{n} \mathbf{D}_j$ е произволно покритие на $\mathbf{D}$ с $\operatorname{diam} \tau < \delta$, то

$$\sum_{\mathbf{D}_j \cap \mathbf{A} \neq \emptyset} \mu\left(\mathbf{D}_j\right) < \varepsilon.$$

Теоремата ще бъде доказана, ако успеем да покажем, че за всички такива τ съответната малка сума $s_\tau f$ е достатъчно близко до $\underline{I}(f)$.

В доказателството на лема 2 ние видяхме как се конструира разбиване, което да следва две дадени разбивания. Тук ще намерим разбиване τ_1, което да следва τ и τ^*. Това разбиване има вида

$$\tau_1 : \mathbf{D} = \cup_{j=1}^{n} \cup_{i=1}^{k} \left(\mathbf{D}_i^* \cap \mathbf{D}_j\right).$$

От една страна, от факта, че $\tau_1 \succ \tau^*$ според лема 2 следва, че

$$s_{\tau_1} f \geq s_{\tau^*} f > \underline{I}(f) - \varepsilon.$$

От друга страна, след като $\tau_1 \succ \tau$, ние можем да разгледаме разбиването τ_1 като получено от разбиването τ чрез раздробяване на неговите делящи множества. Важно е да отбележим, че при това се раздробяват само тези множества от τ, които имат общи точки с някои от контурите на $\mathbf{D}_i^*$, т.е. с множеството $\mathbf{A}$.

Да напишем сумата $s_\tau f$ във вида

$$s_\tau f = \sum_{j=1}^{n} m_j \mu(\mathbf{D}_j) = \Sigma' + \Sigma'',$$

където в Σ' участват само тези j, за които $\mathbf{D}_j \cap \mathbf{A} \neq \emptyset$, а в Σ'' – всички останали. Ако числото C е горна граница за стойностите на $|f(P)|$, то

$$|\Sigma'| < C.\varepsilon.$$

Ще направим същото и за сумата $s_{\tau_1} f$, съответстваща на разбиването τ_1. Имаме

$$s_{\tau_1} f = \widetilde{\Sigma}' + \widetilde{\Sigma}'',$$

където във $\widetilde{\Sigma}'$ участват събираемите, получени от множества, имащи общи точки със $\mathbf{A}$, а в $\widetilde{\Sigma}''$ – всички останали. Тъй като множествата, участващи във Σ'', не се раздробяват, то

$$\Sigma'' = \widetilde{\Sigma}''.$$

Оценявайки сумата $\widetilde{\Sigma}'$ по същия начин, както Σ', получаваме, че

$$\left|\widetilde{\Sigma}'\right| < C.\varepsilon.$$

Следователно,

$$s_{\tau_1} f - s_\tau f = \widetilde{\Sigma}' - \Sigma' \leq \left|\widetilde{\Sigma}'\right| + |\Sigma'| < 2C.\varepsilon.$$

Комбинирайки това с неравенството $s_{\tau_1} f > \underline{I}(f) - \varepsilon$, получаваме неравенството

$$s_\tau f > s_{\tau_1} f - 2C.\varepsilon > \underline{I}(f) - (2C+1)\varepsilon,$$

изпълнено за всички разбивания τ с $\operatorname{diam} \tau < \delta$.

Теоремата на Дарбу е доказана, с което приключва и доказателството на еквивалентността на четирите дефиниции на двойния интеграл.
■

2.3 Основни свойства на многомерния интеграл

Тук ще изброим и докажем основните свойства на двойния интеграл. Те не се различават особено от свойствата на едномерния риманов интеграл, изучени в първата част. В предния параграф ние въведохме няколко еквивалентни дефиниции на интеграла, и при доказателството на всяко свойство ще използваме тази от тях, която е най-удобна за случая. Интеграла от $f(x,y)$ върху $\mathbf{D}$ ще означаваме с $\iint_{\mathbf{D}} f(x,y)\,dxdy$ или просто с $I(f)$.

Свойство 1. Линейност и хомогенност. Ако функциите $f(x,y)$ и $g(x,y)$ са интегруеми върху $\mathbf{D}$, то и $f(x,y)+g(x,y)$, $\lambda f(x,y)$ са също интегруеми, и

$$\iint_{\mathbf{D}} (f(x,y)+g(x,y))\,dxdy = \iint_{\mathbf{D}} f(x,y)dxdy + \iint_{\mathbf{D}} f(x,y)dxdy,$$

$$\iint_{\mathbf{D}} \lambda f(x,y)dxdy = \lambda \iint_{\mathbf{D}} f(x,y)\,dxdy.$$

Доказателство. Ще използваме дефиницията на Риман (без значение - обща или специална). Нека $\tau : \mathbf{D} = \cup_{i=1}^{n} \mathbf{D}_i$ е какво да е разбиване на $\mathbf{D}$ и $P_i \in \mathbf{D}_i$. Имаме

$$R_\tau(f+g) = \sum_{i=1}^{n} \left(f\left(P_i\right)+g\left(P_i\right)\right)\mu\left(\mathbf{D}_i\right) = R_\tau(f)+R_\tau(g),\ R_\tau(\lambda f) = \lambda R_\tau(f),$$

откъдето чрез граничен преход при $\operatorname{diam}\tau \to 0$ получаваме исканите равенства. ■

Свойство 2. Позитивност. Ако $f(x,y) \geq 0$ навсякъде върху $\mathbf{D}$, то и $I(f) \geq 0$.

Доказателство. Очевидно за всяко разбиване τ ще имаме $R_\tau(f) \geq 0$, откъдето чрез граничен преход получаваме $I(f) \geq 0$. ■

Позитивността на интеграла автоматично влече след себе си още няколко свойства.

Свойство 3. Монотонност. Ако $f(x,y) \geq g(x,y)$ навсякъде върху $\mathbf{D}$, то $I(f) \geq I(g)$ (с други думи, неравенствата могат да се интегрират).

Доказателство. Тъй като $f(x,y) - g(x,y) \geq 0$, то по свойство 2 имаме $I(f-g) \geq 0$, откъдето по свойство 1 получаваме $I(f) - I(g) \geq 0$. ■

Свойство 4. Ако функцията $f(x,y)$ е интегруема върху $\mathbf{D}$, то нейният модул $|f(x,y)|$ е също интегруем, и $|I(f)| \leq I(|f|)$.

Доказателство. Нека предположим, че вече сме доказали, че $|f(x,y)|$ е интегруема. Ще докажем исканото неравенство. Наистина, навсякъде е изпълнено неравенството

$$-|f(x,y)| \leq f(x,y) \leq |f(x,y)|,$$

откъдето по свойство 3 следва, че

$$-I(|f|) \leq I(f) \leq I(|f|).$$

Следователно,

$$|I(f)| = \max(I(f), -I(f)) \leq I(|f|).$$

Малко по-трудно е да докажем, че от интегруемостта на f следва интегруемостта на $|f|$. За целта ще използваме критерия на Дарбу за интегруемост, доказан в предния параграф. Нека $\tau : \mathbf{D} = \cup_{i=1}^{n} \mathbf{D}_i$ е произволно разбиване на $\mathbf{D}$. Да означим с m_i, M_i съответно точната долна и горна граница на $f(x,y)$ върху $\mathbf{D}_i$, а с $\widetilde{m_i}$, $\widetilde{M_i}$ - точната долна и горна граница на $|f(x,y)|$ върху същото множество. Очевидно имаме $\widetilde{M_i} - \widetilde{m_i} \leq M_i - m_i$ (докажете!), откъдето

$$S_\tau(|f|) - s_\tau(|f|) = \sum_{i=1}^{n} \left(\widetilde{M_i} - \widetilde{m_i}\right) \mu(\mathbf{D}_i) \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) \mu(\mathbf{D}_i) = S_\tau(f) - s_\tau(f).$$

Тъй като f е интегруема, по критерия на Дарбу за всяко $\varepsilon > 0$ съществува разбиване τ такова, че $S_\tau(f) - s_\tau(f) < \varepsilon$. Тогава за това разбиване ще имаме и $S_\tau(|f|) - s_\tau(|f|) < \varepsilon$, т.е функцията $|f|$ удовлетворява условието на критерия на Дарбу и следователно е интегруема. ■

Забележка. В част I беше даден пример на неинтегруема по Риман функция $f(x)$ такава, че $|f(x)|$ е интегруема. Подобен пример лесно може да се построи и за функция на две (или повече) променливи.

Свойство 5. (Връзка между интеграла и мярката). За всяко измеримо множество $\mathbf{D}$ имаме:

$$\iint_{\mathbf{D}} 1\, dxdy = \mu(\mathbf{D}).$$

Доказателство. Очевидно за произволно разбиване $\tau : \mathbf{D} = \cup_{i=1}^{n} \mathbf{D}_i$ е в сила $R_\tau(1) = \sum_{i=1}^{n} \mu(\mathbf{D}_i) = \mu(\mathbf{D})$. ■

Свойство 6. (Теорема за средните стойности). Нека $\mathbf{D}$ е затворено, измеримо и линейно свързано множество (виж §1.3. за дефиниция на линейно свързано множество), и $f(x,y)$ е непрекъсната* върху D. Тогава съществува точка $P_0 \in \mathbf{D}$ такава, че

$$\iint_{\mathbf{D}} f(x,y)\, dxdy = f(P_0)\, \mu(\mathbf{D}).$$

Доказателство. Да означим с m и M съответно точната долна и горна граница на стойностите на $f(x,y)$ върху $\mathbf{D}$. Според теоремите на Вайерщрас (теореми 7 и 8 на §1.3) тези граници се достигат, т.е. съществуват точки $P_{min}, P_{max} \in \mathbf{D}$ такива, че $f(P_{min}) = m$, $f(P_{max}) = M$. Интегрирайки неравенствата $m \leq f(x,y) \leq M$, получаваме $m\mu(\mathbf{D}) \leq \iint_{\mathbf{D}} f(x,y)dxdy \leq M\mu(\mathbf{D})$, (виж свойство 5), откъдето

$$f(P_{min}) = m \leq \frac{1}{\mu(\mathbf{D})} \iint_{\mathbf{D}} f(x,y)\, dxdy \leq M = f(P_{max}).$$

По теоремата за междинните стойности (теорема 11 на §1.3) всяко число, намиращо се между две стойности на функцията, е също стойност на функцията, откъдето следва съществуването на точка $P_0 \in \mathbf{D}$ такава, че $f(P_0) = \frac{1}{\mu(\mathbf{D})} \iint_{\mathbf{D}} f(x,y)dxdy$. ■

Забележка. Числото $f(P_0) = \frac{1}{\mu(\mathbf{D})} \iint_{\mathbf{D}} f(x,y)dxdy$ се нарича средна стойност на функцията $f(x,y)$ върху $\mathbf{D}$.

Свойство 7. (Адитивност по множество). Нека $\mathbf{D} = \mathbf{D}' \cup \mathbf{D}''$ е разбиване на измеримото множество $\mathbf{D}$ на две измерими подмножества $\mathbf{D}'$ и $\mathbf{D}''$ с непресичащи се вътрешности, и $f(x,y)$ е функция, дефинирана върху $\mathbf{D}$. Тогава

*По-долу ще покажем, че всяка непрекъсната функция върху затворено и измеримо множество е интегруема.

1/ $f(x,y)$ е интегруема върху $\mathbf{D}$ точно тогава, когато тя е интегруема върху $\mathbf{D}'$ и $\mathbf{D}''$, и

2/ имаме

$$\iint_{\mathbf{D}} f(x,y)\,dxdy = \iint_{\mathbf{D}'} f(x,y)\,dxdy + \iint_{\mathbf{D}''} f(x,y)\,dxdy.$$

Доказателство. И тук ще докажем най-напред лесната част, т.е. 2/. Да предположим, че е известно, че f е интегруема върху $\mathbf{D}$, $\mathbf{D}'$ и $\mathbf{D}''$. Нека $\tau' : \mathbf{D}_1 = \cup_{i=1}^n \mathbf{D}_i'$ е разбиване на $\mathbf{D}'$, и $\tau'' : \mathbf{D}'' = \cup_{j=1}^m \mathbf{D}_i''$ е разбиване на $\mathbf{D}''$. Елементите на тези две разбивания образуват разбиване на $\mathbf{D}$:

$$\tau : \mathbf{D} = \left(\cup_{i=1}^n \mathbf{D}_i'\right) \cup \left(\cup_{j=1}^m \mathbf{D}_j''\right).$$

Да изберем и междинните точки $P_i' \in \mathbf{D}_i'$, $P_j'' \in \mathbf{D}_j''$. Тогава, чрез граничен преход в равенството

$$R_\tau(f) = R_{\tau'}(f) + R_{\tau''}(f)$$

при $\operatorname{diam}\tau'$ и $\operatorname{diam}\tau''$ клонящи към нула (тогава очевидно и $\operatorname{diam}\tau$ клони към нула) получаваме по дефиницията на Риман равенството 2/.

За доказателството на твърдението 1/ ще използваме критерия на Дарбу за интегруемост. Нека е дадено, че f е интегруема върху $\mathbf{D}'$ и върху $\mathbf{D}''$. Нека τ', τ'' са разбивания съответно на $\mathbf{D}'$ и $\mathbf{D}''$ такива, че

$$S_{\tau'}(f) - s_{\tau'}(f) < \varepsilon,\ S_{\tau''}(f) - s_{\tau'}(f) < \varepsilon.$$

Нека τ е разбиването на $\mathbf{D}$, образувано от елементите на τ_1 и τ_2 както по-горе. Тогава

$$S_\tau(f) = S_{\tau'}(f) + S_{\tau''}(f),\ s_\tau(f) = s_{\tau'}(f) + s_{\tau''}(f)$$

и следователно

$$S_\tau(f) - s_\tau(f) < 2\varepsilon,$$

т.е. функцията $f(x,y)$ е интегруема върху $\mathbf{D}$.

Обратно, нека f да е интегруема върху $\mathbf{D}$, и нека $\tau : \mathbf{D} = \cup_{i=1}^n \mathbf{D}_i$ е разбиване на $\mathbf{D}$ такова, че $S_\tau(f) - s_\tau(f) < \varepsilon$. Да образуваме породеното от него разбиване τ' на $\mathbf{D}'$: $\tau' : \mathbf{D}' = \cup_{i=1}^n \mathbf{D}_i'$, където $\mathbf{D}_i' = \mathbf{D}_i \cap \mathbf{D}'$. Да означим с m_i, M_i съответно точната долна и горна граница на $f(x,y)$ върху $\mathbf{D}_i$, а с m_i', M_i' - точната долна и горна граница на тази функция върху $\mathbf{D}_i'$. Лесно се вижда, че $M_i' - m_i' \le M_i - m_i$, и следователно

$$S_{\tau'}(f) - s_{\tau'}(f) \le S_\tau(f) - s_\tau(f) < \varepsilon,$$

т.е. f е интегруема върху $\mathbf{D}'$. Абсолютно по същия начин се вижда, че f е интегруема и върху $\mathbf{D}''$. ■

Упражнения.

1. Докажете неравенствата:*

а) (интегрално неравенство на Хьолдер)

$$\iint_{\mathbf{D}} |\, f(x,y)\, g(x,y)|\; dxdy \leq$$

$$\leq \left(\iint_{\mathbf{D}} |\, f(x,y)|^p \; dxdy\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\iint_{\mathbf{D}} |g(x,y)|^q \; dxdy\right)^{\frac{1}{q}},$$

където $f(x,y)$ и $g(x,y)$ са интегруеми функции върху $\mathbf{D}$, $p>1$, $q>1$ и $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$.

Упътване: Можем да считаме, че $\mathbf{D}=[a,b]\times[c,d]$ е правоъгълник. Вземете специално разбиване на $\mathbf{D}$, при което интервалите $[a,b]$ и $[c,d]$ се делят на равни части. Разгледайте съответната риманова сума за интеграла, стоящ отляво, и приложете неравенството на Хьолдер за суми (виж част I, §2.10. зад. 10).

б) (интегрално неравенство на Йенсен)

$$\varphi\left(\frac{\iint_{\mathbf{D}} p(x,y)\, f(x,y)\, dxdy}{\iint_{\mathbf{D}} p(x,y)\, dxdy}\right) \leq \frac{\iint_{\mathbf{D}} p(x,y)\, \varphi\left(f(x,y)\right)\, dxdy}{\iint_{\mathbf{D}} p(x,y)\, dxdy},$$

където $\varphi(x)$ е изпъкнала и непрекъсната функция на една променлива, $f(x,y)$ е непрекъсната в $\mathbf{D}$ и взема стойности в дефиниционното множество на $\varphi(x)$, $p(x,y)$ е интегруема и неотрицателна в $\mathbf{D}$.

Упътване: приложете неравенството на Йенсен (част I, §2.10) за изпъкналата функция $\varphi(x)$ към римановите суми (образувани както в точка а/) за интеграла $\iint_{\mathbf{D}} p(x,y)\, f\left(f(x,y)\right)\, dx$.

*Неравенствата, както и тяхните доказателства, са напълно идентични с тези в едномерния случай, разгледани в част I, §4.2, зад. 2.

в) (интегрално неравенство на Минковски)

$$\left(\iint_{\mathbf{D}} |f(x,y)+g(x,y)|^p \; dxdy\right)^{\dfrac{1}{p}} \leq$$

$$\leq \left(\iint_{\mathbf{D}} |f(x,y)|^p \; dxdy\right)^{\dfrac{1}{p}} + \left(\iint_{\mathbf{D}} |g(x,y)|^p \; dxdy\right)^{\dfrac{1}{p}},$$

където $f(x,y)$ и $g(x,y)$ са интегруеми функции в $\mathbf{D}$ и $p > 1$.

Упътване: подинтегралната функция в левия интеграл се мажорира от сумата $|f(x,y)+g(x,y)|^{p-1} \cdot |f(x,y)| + |f(x,y)+g(x,y)|^{p-1} \cdot |g(x,y)|$. Приложете към всяко от събираемите неравенството на Хьолдер от точка а/.

2.4 Класове интегруеми функции.

Използвайки критерия на Дарбу, ще дадем някои достатъчни условия за интегруемост. Най-просто, и най-често използвано, е следното твърдение:

Теорема 1. *Ако функцията $f(x, y)$ е непрекъсната върху затвореното и измеримо множество $\mathbf{D}$, тя е интегруема върху него.*

Доказателство. Най-напред ще отбележим, че $\mathbf{D}$ е ограничено (това влиза в дефиницията на измеримост) и затворено, т.е. то е компактно, и за функцията f са в сила теоремите на Вайерщрас и Кантор (виж §1.3). Специално, теоремата на Кантор (виж §1.3, теор. 10) гласи, че всяка непрекъсната функция върху $\mathbf{D}$ е и равномерно непрекъсната.

Приложено към функцията f, това означава следното: за всяко $\varepsilon > 0$ можем да намерим $\delta > 0$, така че за всеки две точки $P, Q \in \mathbf{D}$, за които $\rho(P, Q) < \delta$, е изпълнено $|f(P) - f(Q)| < \varepsilon$.

Нека сега фиксираме $\varepsilon > 0$, и нека $\tau : \mathbf{D} = \cup_{i=1}^{n} \mathbf{D}_i$ е измеримо разбиване на $\mathbf{D}$ с $\operatorname{diam} \tau < \delta$. Тогава за всеки две точки P, Q, принадлежащи на едно и също множество $\mathbf{D}_i$, ще имаме $\rho(P, Q) < \delta$ и следователно $|f(P) - f(Q)| < \varepsilon$. Ако накараме $f(P)$ да се доближава към максималната стойност M_i на f върху $\mathbf{D}_i$, а $f(Q)$ - към минималната и стойност m_i, получаваме, че за всяко $i = 1, \ldots, n$ е изпълнено $M_i - m_i \leq \varepsilon$. Следователно

$$S_\tau(f) - s_\tau(f) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\, \mu(\mathbf{D}_i) \leq \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \mu(\mathbf{D}_i) = \varepsilon \mu(\mathbf{D})$$

и по критерия на Дарбу получаваме твърдението на теоремата. ∎

В някои случаи изискването за непрекъснатост навсякъде е прекалено силно и не обхваща някои важни случаи като например стъпаловидните функции. Оказва се, че то може съществено да се отслаби, като се поиска функцията да е ограничена и множеството на нейните точки на прекъсване да е пренебрежимо:

Теорема 2. *Нека функцията $f(x, y)$ е дефинирана и ограничена върху измеримото множество $\mathbf{D}$. Да предположим, че съществува пренебрежимо подмножество $\mathbf{A}$ на $\mathbf{D}$, така че $f(x, y)$ е непрекъсната във всички точки на $\mathbf{D} \setminus \mathbf{A}$. Тогава f е интегруема върху $\mathbf{D}$.*