Метод на хордите, секущите и допирателните за решаване нелинейни уравнения

Разглеждаме уравнението $f(x) = 0$, където

$$f(x) = x^4 - 9x^3 + 18x - 5.$$

Кратък анализ показва, че уравнението притежава четири реални корена (един отрицателен и три положителни). Да ги означим с α, β, γ и δ. Те са разположени съответно в

$$\alpha \in (-2,-1), \beta \in (0,1), \gamma \in (1,2), \delta \in (8,9).$$

Ще пресметнем корена α, прилагайки методите на хордите, секущите и допирателните; за последния корен δ ще приложим комбиниран метод Нютон-хорди. Отбелязваме, че производните на $f(x)$ са

$$f'(x) = 4x^3 - 27x^2 + 18, f''(x) = 12x^2 - 54x, f'''(x) = 36x - 54.$$

Задача 4: Да се пресметне числено α.

Решение: $f''(x) > 0, f'''(x) < 0 => f''(x)$ е монотонно намаляваща, $f'(x)$ е монотонно растяща в интервала $[-2,-1]$. Получаваме $M = \max_{x\in[-2,-1]} |f''(x)| = f''(-2) = 156, m = \min_{x\in[-2,-1]} |f'(x)| = f'(-1) = 13 => \frac{M}{2m} = 6.$

а) Метод на хордите

Съгласно Лекцията, неподвижен е левият край на интервала, а началното приближение е десния край $x_0 = -1$. Следователно

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n + 2)}{f(x_n) - f(-2)}, \qquad n = 0,1, \ . \ . \ .$$

Ще използваме *Wolfram Mathematica* за численото намиране на α по метода на хордите. Програмата е:

```
x=-1.;
f[x_]:=x^4-9x^3+18x-5;
Do[x=x-f[x](x+2)/(f[x]-f[-2]),{n,1,40}];
N[x,16]
```

Резултатът е:

$$\alpha = -1.4348927728140948$$

Тъй като нямаме оценка за близостта на последното приближение за сега не знаем с каква точност сме пресметнали корена α.

б) Метод на секущите

От казаното за метода на секущите в Лекцията следва, че са ни нужни две първоначални приближения x_0 и x_1, които трябва да удовлетворяват условието $f(x_i)f''(x_i) > 0, i = 0,1$. Можем да изберем $x_0 = -2, x_1 = -1.5$ и да се възползваме от апостериорната оценка

$$|x_{n+1}-\alpha| \le 6|x_{n+1}-x_n|.|x_{n+1}-x_{n-1}|$$

(напомняме, че $\frac{M}{2m}=6$). Следната програмата на *Wolfram Mathematica* пресмята числено корена α по метода на секущите с точност $Eps = 10^{-16}$:

```
f[x_]:=x^4-9x^3+18x-5;
x=-1.5;y=-2;z=-3;n=0;Eps=10^(-16);
While[6Abs[(x-y) (x-z)]≥ Eps,z=y;y=x;x=y-f[y](y-z)/(f[y]-
f[z]);n++];
{n,N[x,16]}
```

Резултатът от изпълнението на програмата е:

$$\{6, -1.434892772814095\}$$

Тази числена стойност е получена само след шест итерации и е с поне 15 верни цифри след десетичната точка. За сравнение подобен резултат получихме по метода на хордите за 40 итерации. Това сравнение ясно показва предимството на метода на секущите пред метода на хордите.

в) Метод на допирателните (метод на Нютон)

Началното приближение x_0 трябва да е наляво от корена. Можем да изберем $x_0 = -1.6$ и да използваме апостериорната оценка

$$|x_{n+1}-\alpha| \le 6(x_{n+1}-x_n)^2.$$

Програмата на *Wolfram Mathematica* за численото пресмятане на корена α по метода на допирателните с точност $Eps = 10^{-16}$ е:

```
f[x_]:=x^4-9x^3+18x-5;
y=-2;x=-1.6;n=0;Eps=10^(-16);
While[6(x-y) ^2≥ Eps,y=x;x=y-f[y]/f'[y];n++];
{n,N[x,16]}
```

Резултатът от изпълнението на програмата е:

$$\{5, -1.434892772814095\}$$

Това означава, че за пет итерации е пресметнат коренът α с 16 верни цифри.

Задача 5: Да се намери числено по комбинирания метод Нютон-хорди коренът $\delta \in (8,9)$ на уравнението $f(x) = x^4 - 9x^3 + 18x - 5 = 0$.

Решение: Лесно се проверява, че в интервала $[8,9]$, където е разположен коренът δ, функцията $f(x)$ е изпъкнала и монотонно растяща. Следната програма пресмята δ с комбиниран метод Нютон-хорди с точност $Eps = 10^{-16}$. За начално приближение по метода на Нютон се избира $x_0 = 9$, а по метода на хордите $y_0 = 8$.

```
f[x_]:=x^4-9x^3+18x-5;
y=8;x=9;n=0;Eps=10^(-16);
While[x-y≥2  Eps,x=x-f[x]/f'[x];y=y-f[y](y-x)/(f[y]-f[x]);n++];
```

```
{n,N[x,16]}
```

Резултатът е:

$$\{4,8.773562648169252\}$$

Т.е. само след четири итерации намерихме корена $\delta = 8.773562648169252$ с точност 10^{-16}. Едно предимство на комбинирания метод е, че при него не са налага да използваме апостериорни оценки и свързаните с тях оценки за големината на производните на функцията $f(x)$. При предположения за монотонност и изпъкналост/вдлъбнатост на $f(x)$, търсеният корен винаги се намира между последните намерени по двата метода приближения на корена.