Лекция 1

Аксиоми за вероятността P(A)

1. P(A) >= 0 за всяко А (позитивност)

2. P(Ω) = 1 (нормираност)

3. Ако А1,А2,.. – изброими и $A_iA_j = \emptyset$ за всяко i,j, такива, че $A_iA_j \in A$, тогава $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

Свойства на вероятностите

1. P($\overline{A}$) = P(Ω) – P(A) = 1 – P(A)

2. A ⊂ B => P(A) <= P(B)

3. P(A) <= 1

4. P(A ∪ B) = P(A) + P(B) – P(AB)

5. P(B ∩ $\overline{A}$) = P(B) – P(B ∩ A)

6. P(B) = P(BA ∪ B$\overline{A}$)

Независимост на събития – Две събития са независими ⇔ P(AB) = P(A).P(B)

Несъвместимост на събития – А и В са несъвместими, ако P(AB) = 0.

Независимост в съвкупност – Събитията A1..An са независими в съвкупност, ако за всяко k: 2<=k<=n и за всяко i: i<=i1..ik<=n => P(Ai1..Aik) = P(Ai1)..P(Aik). **Тв:** Ако А1..An – независими в съвкупност **=>** независими две по две.

Формула за произведение на вероятности – P(A1..An) = P(A1).P(A2|A1).P(A3|A1A2)..P(An|A1..An-1)

Формула за пълната вероятност – Пълна група от събития (хипотези): $\bigcup_{i=1}^{n} H_i = \Omega$ и за всяко i,j HiHj = ∅. => $\sum_{i=1}^{n} P(H_i) = 1$ => Формулата: $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P\left(H_i\right).P\left(H_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P\left(AH_i\right)$

Формула на Бейс - $\frac{P\left(H_k\right).P\left(H_k\right)}{\sum_{i=1}^{n} P\left(H_i\right).P\left(H_i\right)}$

Лекция 3

Случайна величина – обект, който може да взима за стойности случайни реални числа с някаква вероятност.

Дискретни случайни величини – взимат само краен или най-много изброим брой стойности. Формално: Нека Hj – някое разлагане на Ω, а xj са произв. различни R числа. ДСВ наричаме

$X(w) = \sum_j x_j I_{H_j}(w)$, където I – индикатор.

Непрекъснати случайни величини – взимат стойности в някое неизброимо множество.

Независимост при дискретни случайни величини – Нека X,Y – дискр. сл. в. => X _||_ Y, ако са независими всички двойки събития, породени от тях, т.е. X _||_ Y ⇔ ∀i,j: $P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)$ $P(Y = y_j)$.

Функция на разпределение – $F_X(x) = P(X < x)$, x – произв R число. Ако разполагаме с плътността не е проблем да намерим ф-ята ма разпределение, както и обратното. Съгласно усл. 3) от деф. на плътност: $F_X(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$

Математическо очакване – Мат. оч. на дискретната случ. велич. X нар. числото $EX = \sum_j x_j p_j$, където $p_j = P(X = x_j)$. Мат. оч. = средна стойност.

Свойства на математическото очакване

1. Ако C = const, то EC = C

2. E(cX) = cEX, където X е произволна сл.в., а c = const.

3. E(X + Y) = EX + EY, където X и Y са произволни сл.в.

4. Нека X _||_ Y, тогава E(XY) = EXEY

5. $Eg(X) = \sum_j g(x_j)p_j$ и g(x) – произв. ф-я.

6. E(aX +- bY) = aEX +- bEY

7. E(aX + b) = aEX + b

Дисперсия – мярка за разсейването на стойностите на една случ. в. около нейното мат. очак. $DX = EX^2 - (EX)^2$. Прието е $\sqrt{DX}$ да се нар. стандартно отклонение.

Свойства на дисперсията

1. DX >= 0

2. Dc = 0, където c – const.

3. $D(cX) = c^2DX$

4. Нека X _||_ Y, тогава D(X + Y) = DX + DY

5. Ако X !_||_ Y => $D(aX \pm bY) = a^2DX + b^2DY \pm 2ab.cov(X,Y)$

6. $D(aX + b) = a^2DX$

Пораждаща функция – Нека X – случ. в., чиито ст-сти са цели положителни числа. Поражд. ф-я е $gX(s) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X = k)s^k$

Пораждаща функция на сума – Нека X1..Xn – незав. сл. в., които взимат цели неотриц. ст-сти => $g_{X1+..+Xn}(s) = g_{x1}(s).g_{x2}(s)\dots g_{xn}(s)$

Лекция 5

Разпределения на дискретни случайни величини

1. Разпределение на Бернули

Опит на Бернули – опит, при който има само две възможности – „успех“ и „неуспех“

Схема на Бернули – извършват се последователни, независими опити на Бернули. Вероятността за успех на всеки опит е една и съща, ще я означим с p. Съотв. вер. за неуспех q = 1 – p също е еднаква за отделните опити. Няма огранич. за броя на опитите.

Разпределението – Извършваме един Бернулиев опит. Нека X – бр. на успехите => X = {0,1}

EX = p; **EX^2** = p; **DX** = p.q

2. Биномно разпределение – X е Bi(n,p)

X – бр. на успехите; n – бр. опити; p – вероятност за успех.

Вероятността за точно k на бр. успехи: $P(X = k) = (n\ k\ )p^k q^{n-k}$

EX = n.p; **DX** = n.p.q

3. Геометрично разпределение – X е Ge(p)

X – бр. на неуспехите до достигане на 1вия успех; p – вероятност за успех.

Вероятността за точно k успеха до 1вия успех: $P(X = k) = q^k p$

EX = q/p; **DX** = q/p^2.

4. Отрицателно биномно разпределение – X е NB(r,p)

X – бр. а неуспехите до достигане на r-тия успех; r – r-ти успех; p – вероятност за успех.

Вероятността за точно k неуспеха до r-тия успех: $P(X = k) = (r + k - 1\ r - 1\ )p^r q^k$

EX = r.q/p; **DX** = r.q/p^2

5. Поасоново разпределение – X е Po(λ)

Използваме го за описване на редки събити, т.е. извършват се мн. независими опити, но вероятността за успех при всеки от тях е малка. При това разпределение случ. в. X е биномно разпределена, т.е. X е Bi(n,p), но n -> ∞, а p -> 0.; X – бр. успехи.

Вероятността за точно k успеха: $P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$, където λ > 0 е const.

EX = λ; **DX** = λ

6. Хипергеометрично разпределение – X е HG(N,M,n)

Разглеждаме мн-во от общо N ел-та като M от тях са маркирани. От цялото мн-во избираме по случ. начин без повторение n ел-та. X – бр. на маркираните ел-ти, които са избрани.

Вероятността за точно k успеха: $P(X = k) = \frac{(M\ k\ )(N-M\ n-k\ )}{(N\ n\ )}$

EX = n.M/N; $DX = n\frac{M}{N}\frac{N-M}{N}\frac{N-n}{N-1}$

Лекция 6

Ковариация – cov(X,Y) = E(XY) – EX EY, където X,Y – случ. вел.

Корелация - $\rho_{X,Y} = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$, където DX същесвтува, т.е. не е безкрайност.

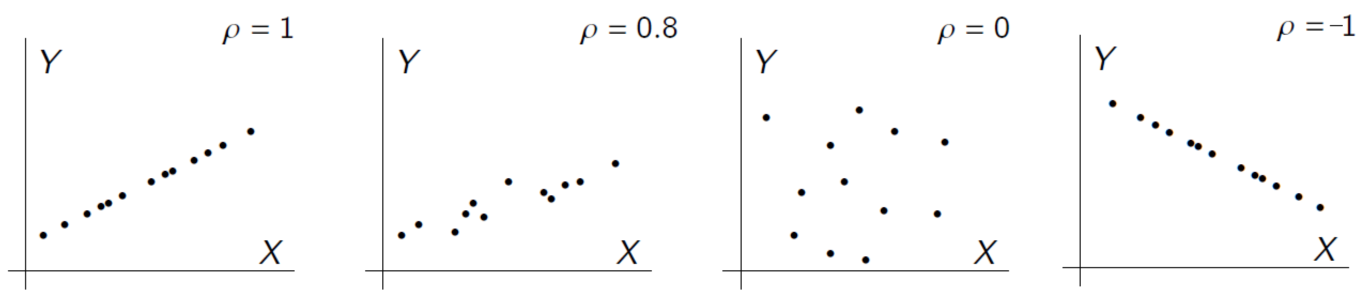
Тв. $|\rho_{X,Y}| <= 1$ **Док:** Нека разгледаме следната случайна величина $Z = \left[\frac{X-EX}{\sqrt{DX}} + \frac{Y-EY}{\sqrt{DY}}\right]^2 \geq 0$. Тя е неотриц. следователно и мат. й очакване е неотриц.

$0 \leq E\left[\frac{X-EX}{\sqrt{DX}} + \frac{Y-EY}{\sqrt{DY}}\right]^2 = \frac{E(X-EX)^2}{DX} + \frac{E(Y-EY)^2}{DY} + 2\frac{E(X-EX)(Y-EY)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} = \frac{DX}{DX} + \frac{DY}{DY} + 2\frac{cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} = 2 + 2\rho_{X,Y}$. Сега от $2 + 2\rho_{X,Y} \geq 0$ елементарно следва $\rho_{X,Y} \geq -1$. Аналогично, за да се докаже неравенството $\rho_{X,Y} \leq 1$ се разглежда случайната величина $\left[\frac{X-EX}{\sqrt{DX}} - \frac{Y-EY}{\sqrt{DY}}\right]^2 \geq 0$.

Тв. X и Y са линейно зависими ⇔ $|\rho_{X,Y}| = 1$. **Док:** Нека X, Y – лин. зависими, т.е. съществуват константи a и b, такива, че X = aY + b. Ще докажем, че $|\rho_{X,Y}| = 1$: EX = E(aY + b) = aEY + b; DX = D(aY + b) = D(aY) + Db = a^2DY. Следователно

$\rho_{X,Y} = \frac{E[(X-EX)(Y-EY)]}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} = \frac{E[(aY+b-(aEY+b))(Y-EY)]}{\sqrt{a^2DY}\sqrt{DY}} = \frac{E[a(Y-EY)(Y-EY)]}{|a|DY} = \frac{aE(Y-EY)^2}{|a|DY} = \frac{a}{|a|}$. Последният израз е равен на +- 1 в зависимост от закона на a. С това твърдението е доказано в едната посока. Другата посока: нека сега $|\rho_{X,Y}| = 1$. Ще докажем, че случайните величини X и Y са линейно зависими. За определеност ще приемем, че $\rho_{X,Y} = -1$. Ще разгледаме отново сучайната величина Z, която използвахме в предишното твърдение. Там доказахме, че: $EZ = E\left[\frac{X-EX}{\sqrt{DX}} + \frac{Y-EY}{\sqrt{DY}}\right]^2 = 2 + 2\rho_{X,Y}$. Тогава от направеното допускане $\rho_{X,Y} = -1$ ще следва, че EZ = 0. След като очакването на една неотрицателна случайна величина е 0, то и самата случайна величина е равна на 0. Наистина нека Z >= 0, но EZ = 0, ако допуснем, че съществува $z_k > 0$, такова че $p_k = P(Z = z_k) > 0$, то ще следва, че $EZ = z_k p_k + \sum_{i!=k} z_i p_i > 0$, което е противоречие. Следователно Z = 0. Но тогава ще е изпълнено и $\frac{X-EX}{\sqrt{DX}} + \frac{Y-EY}{\sqrt{DY}} = 0$. В това равенство EX, EY, DX, DY – конст. Това означава линейна зависимост между X и Y.

Графики при различни коефициенти на корелация:



Коефициентът няма връзка с наклона.

Лекция 7

Непрекъснати случ. величини

Плътност – така наричаме ф-ята $f_X(x)$, изпълняваща следните условия:

1. $f_X(x) >= 0$

2. $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$

3. $P(a \le X < b) = \int_{a}^{b} f_X(x)dx$ – дава вероятността за попадане на сл. в. X в някакво множ – като се сумират, в случая интегрират, вероятностите на благоприятните случаи.

Ако разполагаме с плътността не е проблем да намерим ф-ята ма разпределение, както и обратното. Съгласно усл. 3) от деф. на плътност: $F_X(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$

Математическо очакване – на непрек. сл. в. X наричаме $EX = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx$

Формула за очакване на ф-я от случ. велич. - $E_g(X) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_X(x)dx$, където X – непрек. сл. в., а g(x) – произв. ф-я.

Разпределения на непрекъснати случайни величини

1. Равномерно разпределение – X e U(a,b)

Нека [a,b] – произв. интервал в/у R права. Казваме, че случ. велич. X е равномерно разпределена в [a,b], ако вероятността да вземе коя да е ст-ст в този интервал е една и съща => плътността е константа.

Плътност: $f_X(x) = \{\frac{1}{b-a},\ x\in[a,b]\ 0,\ x \text{ не}\in[a,b]$

EX = (a + b)/2; **DX** = $(b - a)^2/12$

Функция на разпределение: $F_X(x) = \{0,\ x < a\ \frac{x-a}{b-a},\ a\le x < b\ 1,\ \ge b$

2. Нормално разпределение – X e N(μ,σ²)

Плътност: $f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, x е от (-∞,∞), σ > 0, μ е от R.

EX = μ; **DX** = σ^2

Функция на разпределение на Z e N(0,1): Φ(-q) = 1 – Φ(q)

3. Експоненциално разпределение – X e Ex(λ)

Експ. разпред. е непрекъснат аналог на геометричното разпред. Експ. разпределена случ. величина е „времето, изминало до първия успех“ при определени условия.

Плътност: $f_X(x) = \{\lambda e^{-\lambda x},\ x\ge 0\ 0,\ x < 0$ където λ > 0

EX = 1/λ; **DX** = $1/\lambda^2$

4. Гама разпределение – X e Γ(α,β)

Плътност: $f_X(x) = \{\frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)},\ x\ge 0\ 0,\ x < 0$ където α > 0, β > 0

EX = α/β; **DX** = α/β^2

5. Хи-квадрат разпределение – X е χ^2(n)

n – степени на свобода.

Плътност: $f_X(x) = \{\frac{x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})},\ \ x \geq 0\ 0,\ \ x\ <\ 0$

EX = n; **DX** = 2n

6. Разпределение на Стюдънт – X е t(n)

n – „степен на свобода“ – ест. число.

Кога възниква: Нека Z е N(0,1) и X е χ^2(n) са незав. случ. величини. Тогава $\frac{Z}{\sqrt{\frac{X}{n}}} \epsilon t(n)$.

Лекция 9

Неравенство на Чебишов – Нека X е произв. случайна величина и EX съществува, тогава за всяко ε е изпълнено: $P(|X\ -\ EX| \geq \varepsilon) \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}$. Използва се в доказателството на закон за големите числа.

__Док:__ Неравенството е изпълнено за произволни сл.в. Ще го докажем поотделно за дискретни и непрекъснати случ. величини. **1)** Нека X е дискр. сл.в. За удобство ще означим pi = P(X = xi). Знаем, че EX е число и тогава |X - EX| също е дискр. сл.в. Нека S е мн-вото от индекси на онези ст-сти xi на X, за които |xi - EX| >= ε. т.е. S = {i: |xi - EX| >= ε}. В частност мн-вото S може и да е празно. Вероятността, която се опитваме да оценим се получава чрез сумиране върху S.

$P(|X\ -\ EX| \geq\ \varepsilon)\ = \sum_{S} p_i$. За ел-тите от S е изпълнено $1 \leq \frac{|x_i - EX|}{\varepsilon}$ и следователно $1 \leq \frac{(x_i - EX)^2}{\varepsilon^2}$. Ако в горната сума умножим събираемите с този множител, то сумата само може да нарасне. Ако разширим границите на сумирането, то сумата също ще нарасне.

$P(|X\ -\ EX| \geq\ \varepsilon) \leq \sum_{S} \frac{\left(x_i - EX\right)^2}{\varepsilon^2} p_i \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\left(x_i - EX\right)^2}{\varepsilon^2} p_i$. За да завършим доказателството е достатъчно да използваме формулата на ф-ята от сл.в. $\sum_{i=1}^{\infty} (x_i\ -\ EX)^2 p_i\ =\ E(X\ -\ EX)^2\ =\ D(X)$.

2) Нека сега X е непрек. сл.в. с плътност $f_X(X)$. Следваме сходен подход – представяме вероятността като интеграл върху подходящо мнво. $P(|X\ -\ EX| \geq \varepsilon) = \int_{|X-EX| \geq \varepsilon}^{\infty} 1. f_X(x)dx$.

Заменяме константата 1-ца в интеграла с $\frac{(x_i - EX)^2}{\varepsilon^2} \geq 1$ и разширяваме границите на интегриране. => $\int_{|X-EX| \geq \varepsilon}^{\infty} 1. f_X(x)dx \leq \leq \int_{|X-EX| \geq \varepsilon}^{\infty} \frac{\left(x_i - EX\right)^2}{\varepsilon^2}. f_X(x)dx\ \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(x_i\ -\ EX\right)^2. f_X(x)dx\ = \frac{DX}{\varepsilon^2}$

Закон за големите числа – Нека X1..Xn.. е редица от случ.в., казваме, че за нея е в сила ЗГЧ, ако $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i\ -\ EX_i\right) \rightarrow 0$ (над стрелката тр са има “P”) при n -> ∞.

За да е в сила ЗГЧ, трябва да са изпълнени няколко теореми, които задават условия над редицата:

1. Теорема на Марков – Ако за редицата X1..Xn.. е изп. $\frac{1}{n^2}D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\to 0$ при $n\to\infty$, то е в сила ЗГЧ.

Док: Съгласно деф за сходимост по вероятност, за да е изпълнен ЗГЧ, вероятността тр да клони към 0. $P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - EX_i\right)\right| > \varepsilon\right)$ ще преобразуваме този израз и ще приложим неравенството на Чебишов към сл.в. $\sum_{i=1}^{n} X_i$ т.е. $P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - EX_i\right)\right| > \varepsilon\right) = P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\right| > n\varepsilon\right) \le \frac{D\left(\sum_{i-1}^{n} X_i\right)}{n^2\varepsilon^2}\to 0$

2. Теорема на Чебишов – Ако случ. величини X1..Xn.. са независими и дисперсиите им са ограничени, т.е. $DX_i <= C$, то е в сила ЗГЧ.

Док: $\frac{1}{n^2}D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D\left(X_i\right) \le \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} C = \frac{C}{n}\to 0$ при n -> ∞

3. Теорема Ако сл.в. X1..Xn.. са незав., еднакво разпределени и дисперсията им съществува, т.е. е крайна $DX_1=\sigma^2$, то е в сила ЗГЧ.

Док: $\frac{1}{n^2}D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D\left(X_i\right) = \frac{n\sigma^2}{n^2}\to 0$ при n -> ∞

Лекция 10

Централна гранична теорема – Нека X1..Xn.. са незав., еднакво разпред. сл. в. и нека $EX_k = \mu$, $DX_k = \sigma^2 < \infty$, т.е. очакването и дисперсията съществуват, тогава: $\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\to N(0, 1)$ над стрелката тр да има "d", под стрелката тр да има "n-> ∞"

Док: От условието следва, че $E\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} EX_k = n\mu$ и $D\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} DX_k = n\sigma^2$, с цел опростяване на записа, ще използваме сл.в. X, която е разпределена точно както зададената редица. Това е възможно, тъй като X1..Xn.. са еднакво разпределени. Допускаме, че $M_X(t)$ – функция, пораждаща моментите на X съществува за |t| < ε. Ще означим с m(t) ф-ята, праждаща моменти на X – μ, т.е. $m(t) = M_{X-\mu}(t) = E(e^{t(X-\mu)}) = e^{-t\mu} E(e^{tX}) = e^{-t\mu} M_x(t)$ и явно m(t) също съществува за |t| < ε. Освен това, съгласно св-ва 1),2),3) на ф-иите, пораждащи моменти е изпълнено, че m(0) = 1; m'(0) = E(X - μ) = 0; m''(0) = $E(X-\mu)^2 = \sigma^2$. Ще развием m(t) в реда на Тейлор около точката t = 0. $m(t) = m(0) + m'(0)t + (m''(0)\, t^2)/2 + O(t^3) = 1 + (\sigma^2 t^2)/2 + O(t^3)$. Тук $O(t^3)$ е стандартен запис, показващ, че събираемото е равно на константа по t^3. Ще разгледаме сумата $\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ и ще означим с M(t,n) нейната ф-я, пораждаща моменти.

$M(t,n) = E\left[\exp exp\left(t\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right] = E\left[\exp exp\left(t\frac{X_1-\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) \dots \exp exp\left(t\frac{X_n-\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right] = E\left[\exp exp\left(t\frac{X_1-\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right]\dots E[exp$

. Очакването в лявата част на последното равенство разглеждаме като m() – ф-я, пораждаща моменти на X – μ с аргумент $\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}$. Ще използваме развитието на m(t) в ред на Тейлор, което изведохме: $M(t,n) = \left[m\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right]^n = \left[1 + \frac{\sigma^2 t^2}{2\sigma^2 n} + O\left(\frac{t^3}{\sigma^3 n^{3/2}}\right)\right]^n = \left[1 + \frac{t^2}{2n} + O\left(\frac{t^3}{n^{3/2}}\right)\right]^n$. Интересува ни границата на този израз при n->∞. Събираемото $O(t^3/n^{3/2})$ клони към 0 и то с порядък по-бързо от предишното събираемо, тъй като има в знаменател по-висока стапен на n. Следователно основната тежест в асимптотиката се носи от $t^2/2n$. Прилагаме известната граница за експонента $M(t,n) = e^{t^2/2}$. Това е ф-ята, пораждаща моментите на N(0,1). Според Th на Къртис, сходимостта на ф-ята, пораждаща моменти означава, че имаме и сходимост по разпределение към същата случайна величина, т.е. $\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \to N(0,1)$ над стрелката тр да има "d", под стрелката тр да има "n->∞"

Лекция 11

Неизместена оценка – казваме, че θ^ е неизместена оценка за θ, ако Eθ^(X_1..X_n) = θ. (бтв X1..Xn е хубаво да ги заместиш с X и стрека над него като вектор).

Оценката за очакването μ^ е неизместена, защото

$$E\mu` = E\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} EX_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mu = \mu$$

Оценката за дисперсията σ^2 при известно очакване μ е неизместена

$$E\sigma`^2 = E\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (X_k - \mu)^2\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(X_k - \mu)^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} DX_k = \sigma^2$$

Оценката за дисперсията σ^2 при неизвестно очакване μ е изместена

$$E\sigma`^2 = E\left(\overline{X^2_n}\right) - E\left(\overline{X}_n\right)^2 = E\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k^2\right) - E\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} EX_k^2 - \frac{1}{n^2}E\left(\sum_{k=1}^{n} X_k^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i} X_i X_j\right) = \frac{n-1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} EX$$

...

Точкова оценка – Нека $\vec{X}$ = (X_1,…,X_n) – независими наблюдения над X. Нека разпределенеието на случ. велич. X зависи от неизвестен параметър θ. Функцията $\hat{\theta} = \hat{\theta}(\vec{X})$ **,** представляваща стойността на θ, наричаме точкова оценка / статистика за параметъра θ.

Максимално правдоподобна оценка и метод на максимално правдоподобие – Идеята на метода на макс правдоподобие е неизвестният параметър θ да се ибере по такъв начин, че направените наблюдения да се окажат с най-голяма вероятност. Това се свежда до намиранена максимумана функцията на правдоподобие по θ. $\vec{X}$ = (X_1,…,X_n) са независими наблюдения над сл.в. X с ф-я на разпределение F_X(x, θ). М.п.о за неизвестния параметър θ е тази ст-ст $\hat{\theta}$, за която ф-ята на правдоподобие достига максимум. Ф-я на правдоподобие: $L\left(\vec{X}, \theta\right) = \prod_{k=1}^{n} f_{X_k}(x_k, \theta)$.

Лекция 12

Доверителен интервал – Нека X1..Xn са независими наблюдения над сл.в. X. Ще предполагаме, че типа на разпределението на X е известно, но то зависи от неизвестен параметър θ, който е възможно и да е многомерен. Търсим интервал $I = I(\vec{X})$, такъв че $P(\theta \in I) \geq \gamma$. Константата γ се нарича ниво на доверие, което е предварително зададено. Нивото на доверие зависи от най-голямата вероятност, с която можем да си позволим да допуснем грешка от гледна точка на щетите, които ще понесем при грешка в статистиката.

Доверителен интервал за μ при известна σ²: $I = (\overline{X} - q\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{X} + q\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ за q е N(0,1), където $\overline{X}$ е средно аритметично на наблюденията над X; q е (1 + γ)/2 квантил; n – бр. наблюдения; σ – стандартно отклонение.

Доверителен интервал за μ при неизвестна σ²: $I = (\overline{X} - q\frac{S}{\sqrt{n}};\ \overline{X} + q\frac{S}{\sqrt{n}})$ за q е t(n-1), където q е (1 + γ)/2 квантил на разпределение на Стюдънт при n-1 степени на свобода, а γ – ниво на доверие; $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \overline{X})^2$; S е оценка за дисперсията.

Доверителен интервал за σ² при известно μ: $I = (\frac{\sum_{k=1}^{n}(X_k-\mu)^2}{q_2};\ \frac{\sum_{k=1}^{n}(X_k-\mu)^2}{q_1})$ за q1,q2 е $\chi^2(n)$

Доверителен интервал за σ² при неизвестно μ: $I = (\frac{\sum_{k=1}^{n}(X_k-\overline{X})^2}{q_2};\ \frac{\sum_{k=1}^{n}(X_k-\overline{X})^2}{q_1})$ за q1,q2 е $\chi^2(n-1)$

Квантил от ред p – стойността x_p, за която $P(X < x_p) = p$, т.е. $F_X(x_p) = p$, където p е от [0,1]. С други думи 100 * p% от данните се намират преди x_p или по друг начин – p представлява частта от данните, които се намират преди x_p.

Квартил – Квартилите са общо 3 – Q1, Q2, Q3. Те са съответно квантили от ред 0.25, 0.50, 0.75. Q2 съвпада с медианата. Квантилите разделят данните на 4 равни части. При Q1 25% от данните се намират преди този квантил, при Q2 – 50% и при Q3 – 75%.

Медиана - стойността M, за която P(X < M) = 1/2, т.е. $F_X(M) = 1/2$. С други думи M е средата на наблюденията, т.е. 1/2 от данните се намират преди M.

p-value – достигнатото ниво на съгласие, с други думи: това е показател за вземане на решение в статистическия софтуер. Това също е вероятността, с която приетата хипотеза е вярна или невярна.

Лекция 14

Проста линейна регресия – Това е линейна зависимост между променливите X (предиктор = независима променлива) и Y (отклик = зависима променлива): $Y = \beta_0 + \beta_1.X + \varepsilon$, където ε е грешка, нарушаваща зависимостта, а β_0 и β_1 са коефициенти със следните оценки:

$\beta_1 = \frac{\sum_{k=1}^{n}(y_k-\overline{y})(x_k-x)}{\sum_{k=1}^{n}(x_k-\overline{x})^2}$ и $\beta_0 = \overline{y} - b_1\overline{x}$