Лекция 3.6.2021

1 Афинни изображения, еднаквости, подобности — продължение

Припомняне от миналия път

Матрица на линейно изображение (припомняне от алгебрата)

Нека U и V са крайномерни реални линейни пространства, $\dim U = m$, $\dim V = n$, $e = (e_1, \dots, e_m)$ и $f = (f_1, \dots, f_n)$ са базиси съответно на U и V и $\Phi : U \to V$ е линейно изображение. Тогава всеки от векторите $\Phi(e_1), \dots, \Phi(e_m) \in V$ е линейна комбинация на $f_1, \dots, f_n$, тоест съществуват числа $t_{ij} \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, такива че

$$\begin{array}{rcl}
\Phi(e_1) & = & t_{11}f_1 + t_{21}f_2 + \cdots + t_{n1}f_n \\
\Phi(e_2) & = & t_{12}f_1 + t_{22}f_2 + \cdots + t_{n2}f_n \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\Phi(e_j) & = & t_{1j}f_1 + t_{2j}f_2 + \cdots + t_{nj}f_n \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\Phi(e_m) & = & t_{1m}f_1 + t_{2m}f_2 + \cdots + t_{nm}f_n
\end{array} \tag{1}$$

тоест

$$\Phi(e_j) = \sum_{i=1}^{n} t_{ij} f_i, \quad j = 1, \dots, m. \tag{2}$$

Означаваме $T = (t_{ij})_{j=1,\dots,m}^{i=1,\dots,n}$, тоест T е матрицата $n \times m$, чиито стълбове са координатните вектори на $\Phi(e_1), \dots, \Phi(e_m)$ спрямо базиса f, тоест (i,j)-тият елемент на T е i-тата координата на $\Phi(e_j)$ спрямо базиса f.

Разглеждайки $f = (f_1, \dots, f_n)$ и $\Phi(e) = (\Phi(e_1), \dots, \Phi(e_m))$ като вектор-редове и считайки, че вектор може да се умножава с число отдясно, получаваме, че (1) (и еквивалентното му (2)) се записва в матричен вид като

$$\Phi(e) = f.T. \tag{3}$$

Матрицата T се нарича *матрица на* Φ *относно базисите* e *на* U *и* f *на* V. Когато $U = V$ и $e = f$, матрицата T се нарича *матрица на* Φ *относно базиса* e *на* U.

Нека $u \in U$ има спрямо базиса e координатен вектор $x \in \mathbb{R}^m$, а $\Phi(u) \in V$ има спрямо базиса f координатен вектор $y \in \mathbb{R}^n$. Тогава $y = Tx$.

Чрез координатните изображения това равенство се записва като $\varkappa_f(\Phi(u)) = T.\varkappa_e(u)$. От това е ясно, че за всяка $n \times m$ матрица T съществува единствено линейно изображение $\Phi : U \to V$, на което T е матрицата относно базисите e и f, а именно изображението, дефинирано с $\Phi(u) = {\varkappa_f}^{-1}(T.\varkappa_e(u))$.

От връзката между координатните вектори също така лесно следва:

1. Ако матрицата на линейното изображение $\Phi : U \to V$ спрямо базисите e на U и f на V е S, а матрицата на линейното изображение $\Psi : V \to W$ спрямо базисите f на V и g на W е T, то матрицата на линейното изображение $\Psi \circ \Phi : U \to W$ спрямо базисите e на U и g на W е TS.

2. Ако матрицата на линейното изображение $\Phi : U \to V$ спрямо базисите e на U и f на V е T, то Φ е линеен изоморфизъм $\Leftrightarrow$ матрицата T е обратима. В тоя случай матрицата на $\Phi^{-1} : V \to U$ относно базисите f на V и e на U е T^{-1}.

3. Ако матрицата на линейното изображение $\Phi : U \to V$ спрямо базисите e на U и f на V е T, а матриците на прехода от e към базиса e' на U и от f към базиса f' на V са съответно R и S, то матрицата на Φ спрямо базисите e' на U и f' на V е $T' = S^{-1}TR$. В частност, при $U = V$, $e = f$, $e' = f'$ имаме $R = S$ и следователно получаваме: Ако матрицата на линейното изображение $\Phi : U \to U$ спрямо базиса e на U е T, а матрицата на прехода от e към базиса e' на U е S, то матрицата на Φ спрямо базиса e' на U е $T' = S^{-1}TS$.

Афинни изображения, еднаквости, подобности

Определение 1 Нека A и B са афинни пространства, $\dim A = m$, $\dim B = n$, K и L са афинни координатни системи съответно в A и B и $F : A \to B$ е изображение. Нека изображението $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ е такова, че ако $P \in A$ има координатен вектор $x \in \mathbb{R}^m$ спрямо K, то $F(P) \in B$ има координатен вектор $y = \varphi(x) \in \mathbb{R}^n$ спрямо L. Тогава казваме, че $y = \varphi(x)$ *е уравнение на* F *спрямо* K *и* L и пишем $F : y = \varphi(x)$.
Ако $A = B$ и $K = L$, то казваме, че $y = \varphi(x)$ *е уравнение на* F *спрямо* K.

Забележка 1 $\varphi = \varkappa_L \circ F \circ {\varkappa_K}^{-1}$, така че φ се определя еднозначно от F.

Пример 1 Нека A е крайномерно афинно пространство и K е афинна координатна система в A. Тогава тъждественото изображение $A \to A$, $P \mapsto P$, има спрямо K уравнение $y = x$.

Пример 2 Нека A е крайномерно афинно пространство, моделирано върху линейното пространство U, K е афинна координатна система в A, $u \in U$ и координатният вектор на u спрямо K е s. Дефинираме $F : A \to A$ по следния начин: ако $P \in A$, то $F(P) = Q$, където $Q \in A$ е единствената точка, за която $\overrightarrow{PQ} = u$. F се нарича *транслация с вектора* u и има спрямо K уравнение $y = s + x$.

Всяка транслация е биекция — обратното изображение на транслацията с вектора u е транслацията с вектора $-u$.

Пример 3 Нека A е крайномерно афинно пространство, $K = Oe_1 \dots e_n$ е афинна координатна система в A, $C \in A$ има координатен вектор ζ спрямо K и $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$. Дефинираме $F : A \to A$ по следния начин: ако $P \in A$, то $F(P) = Q$, където $Q \in A$ е единствената точка, за която $\overrightarrow{CQ} = c.\overrightarrow{CP}$. F се нарича *хомотетия с център C и коефициент c* и има спрямо K уравнение $y = s + cx$, където $s = (1 - c)\zeta$.

Обратно, при $c \neq 1$ уравнението $y = s + cx$ е уравнение спрямо K на някоя хомотетия (а именно на тая, чийто център C има спрямо K координатен вектор $\zeta = \frac{1}{1-c} \cdot s$ и коефициентът ѝ е c).

Когато $C = O$, то $\zeta = 0$ и хомотетията с център O и коефициент c има спрямо K уравнение $y = cx$.

Всяка хомотетия е биекция — обратното изображение на хомотетията с център C и коефициент c е хомотетията с център C и коефициент $\frac{1}{c}$.

Пример 4 Нека A е крайномерно евклидово афинно пространство, $K = Oe_1 \dots e_n$ е ортонормирана координатна система в A и $d \in \mathbb{R}$, $d > 0$. Фиксираме едно $i \in \{1, \dots, n\}$. Изображението $F : A \to A$, което спрямо K има уравнения

$$F : \begin{cases} y_i = d.x_i & \\ y_j = x_j & \text{при } j \neq i \end{cases},$$

се нарича *дилатация по i-тата координатна ос на K с коефициент d*.
(F е изображението, при което всички координати остават същите с изключение на i-тата, която се „свива“ (при $d < 1$) или „разтяга“ (при $d > 1$) с коефициент на пропорционалност d. При $d = 1$ имаме тъждественото изображение.)

Уравненията на F могат да се напишат във вида $F : y = D_i x$, където D_i е диагоналната квадратна матрица от ред n, на която i-тият елемент по диагонала е d, а всички останали елементи по диагонала са 1.

Всяка дилатация е биекция — обратното изображение на дилатацията по i-тата координатна ос на K с коефициент d е дилатацията по i-тата координатна ос на K с коефициент $\frac{1}{d}$.

Определение 2 Нека A и B са афинни пространства, моделирани съответно върху линейните пространства U и V. Изображението $F : A \to B$ се нарича *афинно изображение*, ако съществува линейно изображение $\Phi : U \to V$ такова, че за всеки $P_1, P_2 \in A$ е изпълнено $\overrightarrow{F(P_1)F(P_2)} = \Phi\left(\overrightarrow{P_1P_2}\right)$. Ако освен това F е биекция, то F се нарича *афинен изоморфизъм* или *афинна трансформация*.

Пример 5 Тъждественото изображение и транслациите в афинно пространство са афинни изоморфизми — при тях $\Phi : U \to U$ е тъждественото изображение на U.

Пример 6 Хомотетиите в афинно пространство са афинни изоморфизми — при тях $\Phi : U \to U$ е умножението с c.

Пример 7 Нека A е афинно пространство, моделирано върху линейното пространство U, и $O \in A$ е фиксирана точка. Изображението *радиус-вектор с начало O*

$$r_O : A \to U, \quad P \mapsto r_O(P) = \overrightarrow{OP}$$

(тоест на точка се съпоставя радиус-векторът ѝ спрямо O), е афинен изоморфизъм — съответното $\Phi : U \to U$ е тъждественото изображение на U.

Пример 8 Нека U и V са линейни пространства и $\Phi : U \to V$ е линейно изображение. Тогава, разглеждайки U и V като афинни пространства, Φ е афинно изображение, като съответното линейно изображение е Φ. При това Φ е афинен изоморфизъм тогава и само тогава, когато е линеен изоморфизъм.

Пример 9 Успоредното проектиране на геометричното пространство в равнина е афинно изображение, което не е афинен изоморфизъм (тоест не е биекция). Същото важи за успоредното проектиране на геометричното пространство или геометричната равнина върху права.
Това са частни случаи на следната по-обща ситуация:

Нека A е афинно пространство, моделирано върху линейното пространство U, B е афинно подпространство на A, моделирано върху линейното подпространство V на U и W е допълнение на V в U, тоест $U = V \oplus W$. Тогава за всяка точка $P \in A$ съществува единствена точка $P' \in B$, за която $\overrightarrow{P'P} \in W$. Това се доказва аналогично на съществуването и единствеността на ортогоналната проекция, като вместо $V^{\perp}$ се пише W. Точката P' се нарича *проекция на P в B успоредно на W*. Така получаваме изображение $F : A \to B$, $P \mapsto P'$, което се нарича *проекция на A в B успоредно на W*. Това изображение е афинно изображение, което е афинен изоморфизъм само когато $B = A$ (и в тоя случай е тъждественото изображение).

Частен случай на успоредна проекция е ортогоналната проекция върху афинно подпространство B на крайномерно евклидово афинно пространство A (в тоя случай $W = V^{\perp}$). Значи ортогоналната проекция също е афинно изображение, което е афинен изоморфизъм само когато $B = A$ (и в тоя случай е тъждественото изображение).

Твърдение 1 *Нека A и B са афинни пространства, моделирани съответно върху линейните пространства U и V, а $F : A \to B$ е афинно изображение със съответно линейно изображение $\Phi : U \to V$.*

1. *Нека $O \in A$ е произволна точка. Тогава $r_{F(O)} \circ F = \Phi \circ r_O$.*

2. *F е афинен изоморфизъм $\Leftrightarrow$ Φ е линеен изоморфизъм.*

Следствие 1 *Нека A и B са крайномерни афинни пространства. Тогава съществува афинен изоморфизъм $F : A \to B \Leftrightarrow \dim A = \dim B$.*

Теорема 1 *Нека A и B са крайномерни афинни пространства, моделирани съответно върху линейните пространства U и V, а $K = Oe_1 \dots e_m$ и $L = Pf_1 \dots f_n$ са афинни координатни системи съответно в A и B. Тогава:*

1. *Изображението $F : A \to B$ е афинно $\Leftrightarrow$ уравнението на F спрямо K и L е от вида $y = s + Tx$. При това s е координатният вектор на $F(O)$ спрямо L, а T е матрицата на съответното на F линейно изображение $\Phi : U \to V$ спрямо базисите $e = (e_1, \dots, e_m)$ на U и $f = (f_1, \dots, f_n)$ на V.*

2. *Афинното изображение $F : A \to B$ е афинен изоморфизъм $\Leftrightarrow$ матрицата T в 1. е обратима.*

Пример 10 Дилатациите в крайномерно евклидово афинно пространство са афинни изоморфизми.

Пример 11 Нека A е n-мерно афинно пространство и K е афинна координатна система в A. Тогава координатното изображение $\varkappa_K : A \to \mathbb{R}^n$ е афинен изоморфизъм. Това следва от Теорема 1, защото уравнението му спрямо K и стандартната координатна система K^0 на $\mathbb{R}^n$ е $y = x$.

Определение 3 Нека A и B са евклидови афинни пространства. Изображението $F : A \to B$ се нарича *еднаквост* или *метрична трансформация* или *изометрия*, ако е биекция и запазва разстоянието между точките, тоест ако за всеки $P_1, P_2 \in A$ е изпълнено $|F(P_1)F(P_2)| = |P_1P_2|$.

Забележка 2 В горното определение „биекция“ може да се замени със „сюрекция“, защото от $|F(P_1)F(P_2)| = |P_1P_2|$ следва, че F е инекция.

Пример 12 В евклидово афинно пространство тъждественото изображение, транслациите и изображението радиус-вектор са еднаквости.

Теорема 2 *Нека A и B са крайномерни евклидови афинни пространства, а K и L са ортонормирани координатни системи съответно в A и B. Тогава изображението $F : A \to B$ е еднаквост $\Leftrightarrow$ уравнението на F спрямо K и L е от вида $y = s + Tx$, където матрицата T е ортогонална (и следователно $\dim A = \dim B$).*

Доказателството на тая теорема ще направим след малко.

Пример 13 От Теорема 2 още веднъж се вижда, че тъждественото изображение и транслациите в крайномерно евклидово афинно пространство са еднаквости, защото те имат уравнение от вида $y = s + Tx$, където $T = E$.

Пример 14 Нека A е n-мерно евклидово афинно пространство и K е ортонормирана координатна система в A. Тогава координатното изображение $\varkappa_K : A \to \mathbb{R}^n$ е еднаквост. Това следва от Теорема 2, защото уравнението му спрямо K и стандартната координатна система K^0 на $\mathbb{R}^n$ е $y = x$ и K^0 е ортонормирана.

Дотук беше припомнянето от миналия път.

Афинни изображения, еднаквости, подобности — продължение

Доказателство на Теорема 2: Нека направляващите пространства на A и B са съответно U и V. Нека $K = Oe_1 \dots e_n$. Тъй като K е ортонормирана, то $e = (e_1, \dots, e_n)$ е ортонормиран базис на U.

Нека изображението $F : A \to B$ е еднаквост. По косинусовата теорема за $P, Q \in A$ имаме

$$\begin{aligned}\left\langle \overrightarrow{F(O)F(P)}, \overrightarrow{F(O)F(Q)} \right\rangle &= \frac{1}{2}\left(|F(O)F(P)|^2 + |F(O)F(Q)|^2 - |F(P)F(Q)|^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(|OP|^2 + |OQ|^2 - |PQ|^2\right) = \left\langle \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ} \right\rangle.\end{aligned}$$

Нека $E_i \in A$ е точката, за която $\overrightarrow{OE_i} = e_i$, $i = 1, \dots, n$. Нека $e'_i = \overrightarrow{F(O)F(E_i)}$, $i = 1, \dots, n$. От горното равенство следва

$$\langle e'_i, e'_j \rangle = \left\langle \overrightarrow{F(O)F(E_i)}, \overrightarrow{F(O)F(E_j)} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{OE_i}, \overrightarrow{OE_j} \right\rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1 \text{ при } i = j \\ 0 \text{ при } i \neq j \end{cases}.$$

Следователно $(e'_1, \dots, e'_n)$ е ортонормирана система във V. Ако допуснем, че $(e'_1, \dots, e'_n)$ не е базис на V, то съществува вектор $e'_{n+1} \in V$ такъв, че $(e'_1, \dots, e'_n, e'_{n+1})$ също е ортонормирана система. Нека $E'_{n+1} \in B$ е точката, за която $\overrightarrow{F(O)E'_{n+1}} = e'_{n+1}$. Тъй като F е биекция, то $E'_{n+1} = F(E_{n+1})$ за някоя точка $E_{n+1} \in A$. Нека $\overrightarrow{OE_{n+1}} = e_{n+1}$. Тогава за $i, j = 1, \dots, n+1$ получаваме

$$\langle e_i, e_j \rangle = \left\langle \overrightarrow{OE_i}, \overrightarrow{OE_j} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{F(O)F(E_i)}, \overrightarrow{F(O)F(E_j)} \right\rangle = \langle e'_i, e'_j \rangle = \begin{cases} 1 \text{ при } i = j \\ 0 \text{ при } i \neq j \end{cases},$$

тоест $(e_1, \dots, e_n, e_{n+1})$ е ортонормирана система в U. От това следва, че векторите $e_1, \dots, e_n, e_{n+1}$ са линейно независими, което е противоречие, защото $(e_1, \dots, e_n)$ е базис на U. Значи $(e'_1, \dots, e'_n)$ е базис на V (поради което $\dim B = \dim V = n = \dim A$), при това ортонормиран. Следователно $L' = F(O)e'_1 \dots e'_n$ е ортонормирана координатна система в B.

Нека точката $P \in A$ има спрямо K координатен вектор $x \in \mathbb{R}^n$. Значи $\overrightarrow{OP}$ има спрямо базиса $(e_1, \dots, e_n)$ координатен вектор x и следователно $x_i = \left\langle \overrightarrow{OP}, e_i \right\rangle$, $i = 1, \dots, n$. Нека $F(P) \in B$ има спрямо L' координатен вектор $y' \in \mathbb{R}^n$. Значи $\overrightarrow{F(O)F(P)}$ има спрямо базиса $(e'_1, \dots, e'_n)$ координатен вектор y'. Следователно, използвайки доказаното чрез косинусовата теорема по-горе равенство, получаваме, че за $i = 1, \dots, n$ имаме

$$y'_i = \left\langle \overrightarrow{F(O)F(P)}, e'_i \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{F(O)F(P)}, \overrightarrow{F(O)F(E_i)} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OE_i} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{OP}, e_i \right\rangle = x_i.$$

Значи $y' = x$ (така че F се задава спрямо K и L' с уравнението $y' = x$). Тъй като L и L' са ортонормирани координатни системи в B, то смяната на координатите между тях има вида $y = s + Ty'$, където T е ортогонална матрица $n \times n$. Значи координатният вектор на $F(P)$ относно L е $y = s + Ty' = s + Tx$. Следователно уравнението на F спрямо K и L е $y = s + Tx$, като T е ортогонална матрица. С това е доказана правата посока.

Обратно, нека уравнението на F спрямо K и L е $y = s + Tx$, където матрицата T е ортогонална. Нека L' е координатната система в B, за която смяната на координатите между L и L' се дава с $y = s + Ty'$. Тъй като T е ортогонална и L е ортонормирана, то L' също е ортонормирана. Тогава от $y = s + Ty'$ и $y = s + Tx$ следва $s + Ty' = s + Tx$, тоест $Ty' = Tx$, тоест $y' = x$ (защото T е обратима), което означава, че уравнението на F спрямо K и L' е $y' = x$.

Нека $P_1, P_2 \in A$ имат спрямо K координатни вектори x^{P_1}, x^{P_2}. Тогава координатните вектори на $F(P_1), F(P_2) \in B$ спрямо L' са $y'^{F(P_1)} = x^{P_1}$, $y'^{F(P_2)} = x^{P_2}$ и тъй като K и L' са ортонормирани, получаваме

$$|F(P_1)F(P_2)| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(y_i'^{F(P_2)} - y_i'^{F(P_1)} \right)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i^{P_2} - x_i^{P_1} \right)^2} = |P_1P_2|.$$

Следователно F е еднаквост. С това е доказана и обратната посока. $\square$

Определение 4 Нека A и B са евклидови афинни пространства. Изображението $F : A \to B$ се нарича *подобност*, ако е биекция и съществува $c > 0$ такова, че за всеки $P_1, P_2 \in A$ е изпълнено $|F(P_1)F(P_2)| = c|P_1P_2|$.

Забележка 3 В горното определение „биекция“ може да се замени със „сюрекция“, защото от $|F(P_1)F(P_2)| = c|P_1P_2|$ следва, че F е инекция.
Това е така, защото ако $F(P_1) = F(P_2)$, то $0 = |F(P_1)F(P_2)| = c|P_1P_2|$ и следователно $|P_1P_2| = 0$, така че $P_1 = P_2$.

Пример 15 Всяка еднаквост е подобност с коефициент $c = 1$.

Пример 16 Хомотетиите с коефициент c са подобности с коефициент c.
Това е така, защото в Пример 6 видяхме, че $\overrightarrow{F(P_1)F(P_2)} = c.\overrightarrow{P_1P_2}$ и следователно $|F(P_1)F(P_2)| = \left|\overrightarrow{F(P_1)F(P_2)}\right| = \left|c.\overrightarrow{P_1P_2}\right| = c.\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right| = c.|P_1P_2|$.

Теорема 3 *Нека A и B са крайномерни евклидови афинни пространства, а K и L са ортонормирани координатни системи съответно в A и B. Тогава изображението $F : A \to B$ е подобност с коефициент $c \Leftrightarrow$ уравнението на F спрямо K и L е от вида $y = s + cTx$, където матрицата T е ортогонална (и следователно $\dim A = \dim B$).*

Доказателство: Нека $G : B \to B$ е хомотетията с център началото на L и коефициент $\frac{1}{c}$. От Пример 3 имаме, че уравнението на G спрямо L е $z = \frac{1}{c} \cdot y$.

За $P_1, P_2 \in A$ имаме $|(G \circ F(P_1))(G \circ F(P_2))| = \frac{1}{c} \cdot |F(P_1)F(P_2)|$. Следователно изображението $F : A \to B$ е подобност с коефициент c, тоест $|F(P_1)F(P_2)| = c.|P_1P_2|$ $\Leftrightarrow |(G \circ F(P_1))(G \circ F(P_2))| = |P_1P_2|$, тоест когато $G \circ F : A \to B$ е еднаквост. От Теорема 2 имаме , че $G \circ F$ е еднаквост $\Leftrightarrow G \circ F$ има спрямо K и L уравнение $z = r + Tx$, където T е ортогонална матрица. Нека $P \in A$ има спрямо K координатен вектор x, $F(P) \in B$ има спрямо L координатен вектор y, $G \circ F(P) \in B$ има спрямо L координатен вектор z. От Пример 3 имаме $z = \frac{1}{c} \cdot y$. Следователно $z = r + Tx \Leftrightarrow \frac{1}{c} \cdot y = r + Tx \Leftrightarrow y = s + cTx$, където $s = cr$. Значи изображението $F : A \to B$ е подобност с коефициент c
$\Leftrightarrow$ уравнението му спрямо K и L е от вида $y = s + cTx$, където матрицата T е ортогонална. $\square$

Пример 17 От Теорема 3 още веднъж се вижда, че хомотетиите в крайномерно евклидово афинно пространство са подобности, защото те имат уравнение от вида $y = s + cTx$, където $T = E$.

Тъй като ортогоналните матрици са обратими, от Теорема 1, Теорема 2 и Теорема 3 получаваме

Следствие 2 *Еднаквостите и подобностите са афинни изоморфизми.*

Теорема 4 *Нека A и B са афинни пространства, моделирани съответно върху линейните пространства U и V, C е афинно подпространство на A, моделирано върху линейното подпространство W на U, и $F : A \to B$ е афинно изображение със съответно линейно изображение $\Phi : U \to V$. Тогава $F(C)$ е афинно подпространство на B, моделирано върху линейното подпространство $\Phi(W)$ на V. Ако освен това F е афинен изоморфизъм, то $\dim F(C) = \dim C$.*

Доказателство: Нека $P_0 \in C$ е фиксирана точка. Тогава $C = \left\{P \in A : \overrightarrow{P_0P} \in W\right\}$. Нека D е афинното подпространство на B, което съдържа $F(P_0)$ и е моделирано върху линейното подпространство $\Phi(W)$ на V. Следователно $D = \left\{Q \in B : \overrightarrow{F(P_0)Q} \in \Phi(W)\right\}$. Ще докажем, че $F(C) = D$.

Нека $Q \in F(C)$. Значи $Q = F(P)$ за някоя точка $P \in C$. Следователно $\overrightarrow{P_0P} \in W$. Тогава $\overrightarrow{F(P_0)Q} = \overrightarrow{F(P_0)F(P)} = \Phi\left(\overrightarrow{P_0P}\right) \in \Phi(W)$. Значи $Q \in D$. Следователно $F(C) \subset D$.

Нека $Q \in D$. Следователно $\overrightarrow{F(P_0)Q} \in \Phi(W)$, тоест $\overrightarrow{F(P_0)Q} = \Phi(w)$ за някое $w \in W$. Нека $P \in A$ е точката, за която $\overrightarrow{P_0P} = w$. Тъй като $w \in W$, имаме $P \in C$. От $\overrightarrow{F(P_0)F(P)} = \Phi\left(\overrightarrow{P_0P}\right) = \Phi(w) = \overrightarrow{F(P_0)Q}$ следва $Q = F(P)$. Значи $Q \in F(C)$. Следователно $D \subset F(C)$.

Значи $D = F(C)$.

Ако F е афинен изоморфизъм, то Φ е линеен изоморфизъм и следователно $\dim F(C) = \dim \Phi(W) = \dim W = \dim C$. □

Забележка 4 От Следствие 2 е ясно, че Теорема 4 важи в частност за еднаквостите и подобностите, тоест образът на афинно подпространство при еднаквост или подобност е афинно подпространство със същата размерност.

Твърдение 2 *1. Композицията на афинни изображения, афинни изоморфизми, еднаквости, подобности е съответно афинно изображение, афинен изоморфизъм, еднаквост, подобност. При това съответното на композицията линейно изображение е композицията на линейните изображения, съответстващи на композираните изображения.*

2. Обратното изображение на афинен изоморфизъм, еднаквост, подобност е съответно афинен изоморфизъм, еднаквост, подобност. При това съответното на обратното изображение линейно изображение е обратното на линейното изображение, съответстващо на разглежданото изображение.

Доказателство:

1. Нека A, B, C са афинни пространства, моделирани съответно върху линейните пространства U, V, W, и $F : A \to B$ и $G : B \to C$ са афинни изображения със съответни линейни изображения $\Phi : U \to V$ и $\Psi : V \to W$. Нека $P_1, P_2 \in A$. Тогава

$$\begin{aligned}\overrightarrow{(G \circ F(P_1))(G \circ F(P_2))} &= \overrightarrow{G(F(P_1))G(F(P_2))} = \Psi\left(\overrightarrow{F(P_1)F(P_2)}\right) = \Psi\left(\Phi\left(\overrightarrow{P_1P_2}\right)\right) \\ &= \Psi \circ \Phi\left(\overrightarrow{P_1P_2}\right).\end{aligned}$$

Следователно $G \circ F : A \to C$ е афинно изображение със съответно линейно изображение $\Psi \circ \Phi : U \to W$.

Ако освен това F и G са афинни изоморфизми, то по 2. на Твърдение 1 Φ и Ψ са линейни изоморфизми. Следователно $\Psi \circ \Phi$ е линеен изоморфизъм и по 2. на Твърдение 1 $G \circ F$ е афинен изоморфизъм.

Нека A, B, C са евклидови афинни пространства. Ако $F : A \to B$ и $G : B \to C$ са еднаквости, то за $P_1, P_2 \in A$ имаме

$$|(G \circ F(P_1))(G \circ F(P_2))| = |G(F(P_1))G(F(P_2))| = |F(P_1)F(P_2)| = |P_1P_2|.$$

Освен това $G \circ F$ е биекция, защото е композиция на биекции. Следователно $G \circ F$ е еднаквост.

Ако $F : A \to B$ и $G : B \to C$ са подобности съответно с коефициенти c и d, то за $P_1, P_2 \in A$ имаме

$$|(G \circ F(P_1))(G \circ F(P_2))| = |G(F(P_1))G(F(P_2))| = d|F(P_1)F(P_2)| = dc|P_1P_2|.$$

Освен това $G \circ F$ е биекция, защото е композиция на биекции. Следователно $G \circ F$ е подобност с коефициент dc.

2. Нека $F : A \to B$ е афинен изоморфизъм със съответен линеен изоморфизъм Φ. Тогава за $Q_1, Q_2 \in B$ имаме

$$\overrightarrow{Q_1Q_2} = \overrightarrow{F(F^{-1}(Q_1))F(F^{-1}(Q_2))} = \Phi\left(\overrightarrow{F^{-1}(Q_1)F^{-1}(Q_2)}\right)$$

и следователно $\overrightarrow{F^{-1}(Q_1)F^{-1}(Q_2)} = \Phi^{-1}\left(\overrightarrow{Q_1Q_2}\right)$. Значи $F^{-1} : B \to A$ е афинен изоморфизъм със съответен линеен изоморфизъм Φ^{-1}.

Нека $F : A \to B$ е еднаквост. Тогава за $Q_1, Q_2 \in B$ имаме

$$|Q_1Q_2| = |F(F^{-1}(Q_1))F(F^{-1}(Q_2))| = |F^{-1}(Q_1)F^{-1}(Q_2)|$$

и следователно $F^{-1} : B \to A$ е еднаквост.

Нека $F : A \to B$ е подобност с коефициент c. Тогава за $Q_1, Q_2 \in B$ имаме

$$|Q_1Q_2| = |F(F^{-1}(Q_1))F(F^{-1}(Q_2))| = c|F^{-1}(Q_1)F^{-1}(Q_2)|$$

и следователно $|F^{-1}(Q_1)F^{-1}(Q_2)| = \frac{1}{c} \cdot |Q_1Q_2|$. Значи $F^{-1} : B \to A$ е подобност с коефициент $\frac{1}{c}$. $\square$

Определение 5 Нека A и B са афинни пространства и $M \subset A$ и $N \subset B$. Казваме, че *M и N са афинно еквивалентни*, ако съществува афинна трансформация $F : A \to B$ такава, че $F(M) = N$. Ако освен това A и B са евклидови, то казваме, че *M и N са еднакви* или *метрично еквивалентни*, ако съществува еднаквост (тоест метрична трансформация) $F : A \to B$ такава, че $F(M) = N$, и казваме, че *M и N са подобни*, ако съществува подобност $F : A \to B$ такава, че $F(M) = N$.

Твърдение 3 *Всеки две подобни подмножества са афинно еквивалентни, а всеки две еднакви подмножества са подобни и афинно еквивалентни.*

Доказателство: Следва от това, че всяка подобност е афинна трансформация, а всяка еднаквост е подобност. $\square$

Твърдение 4 *Афинната еквивалентност, еднаквостта и подобността на подмножества на афинно пространство A (евклидово в последните два случая) са релации на еквивалентност в множеството на всички подмножества на A.*

Доказателство:

рефлексивност Нека $M \subset A$. Ако означим с F тъждественото изображение $A \to A$, то F е афинна трансформация (еднаквост, подобност) и $F(M) = M$. Значи M и M са афинно еквивалентни (еднакви, подобни).

симетричност Нека $M \subset A$ и $N \subset A$ са афинно еквивалентни (еднакви, подобни). Следователно съществува афинна трансформация (еднаквост, подобност) F такава, че $F(M) = N$. Тогава $M = F^{-1}(N)$ и по 2. на Твърдение 2 F^{-1} е афинна трансформация (еднаквост, подобност). Значи N и M са афинно еквивалентни (еднакви, подобни).

транзитивност Нека $L \subset A$ и $M \subset A$ са афинно еквивалентни (еднакви, подобни) и $M \subset A$ и $N \subset A$ са афинно еквивалентни (еднакви, подобни). Следователно съществуват афинни трансформации (еднаквости, подобности) F и G такива, че $F(L) = M$ и $G(M) = N$. Тогава $(G \circ F)(L) = G(F(L)) = G(M) = N$ и по 1. на Твърдение 2 $G \circ F$ е афинна трансформация (еднаквост, подобност). Значи L и N са афинно еквивалентни (еднакви, подобни).

Следователно афинната еквивалентност (еднаквостта, подобността) е релация на еквивалентност. □

Твърдение 5 *Всеки две k-мерни афинни подпространства на крайномерно афинно пространство (съответно крайномерно евклидово афинно пространство) са афинно (съответно метрично) еквивалентни.*

Доказателство: Нека B и C са k-мерни афинни подпространства на n-мерното афинно (евклидово афинно) пространство A. Взимаме афинна (ортонормирана) координатна система $K = Oe_1 \dots e_n$ в A така, че $O \in B$ и $e_1, \dots, e_k \parallel B$. Следователно B има спрямо K параметрични уравнения $B : x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_k e_k$, $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, тоест

$$B : \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & \lambda_1 \\ & \vdots & \\ x_k & = & \lambda_k \\ x_{k+1} & = & 0 \\ & \vdots & \\ x_n & = & 0 \end{array} \right. , \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R},$$

откъдето изключвайки параметрите получаваме, че B има спрямо K общо уравнение $B : x_i = 0$, $i = k+1, \dots, n$. Аналогично взимаме афинна (ортонормирана) координатна система L в A така, че спрямо нея C има общо уравнение $C : y_i = 0$, $i = k+1, \dots, n$. Нека $F : A \to A$ е изображението, което се задава спрямо K и L с уравнението $F : y = x$. От Теорема 1 (Теорема 2) следва, че F е афинна (метрична) трансформация. От общите уравнения на B и C е ясно, че $F(B) = C$. Следователно B и C са афинно (метрично) еквивалентни. □

Теорема 5 *Всеки афинен изоморфизъм на n-мерни евклидови афинни пространства може да се представи като композиция на еднаквост и n дилатации по взаимно перпендикулярни оси с общо начало, тоест ако A и B са n-мерни евклидови афинни пространства и $F : A \to B$ е афинен изоморфизъм, то съществуват еднаквост $G : A \to B$, ортонормирана координатна система в A и за $i = 1, \dots, n$ дилатация H_i по i-тата ѝ координатна ос с някакъв коефициент d_i, такива че $F = G \circ H_1 \circ \cdots \circ H_n$.*

Доказателство: Нека уравнението на F спрямо някакви ортонормирани координатни системи K и L в A и B е $y = s + Tx$. Тъй като F е афинен изоморфизъм, матрицата T е обратима (по 2. на Теорема 1). Основният момент в доказателството е следната алгебрична лема, която ще докажем по-долу.

Лема 1 *Всяка обратима матрица T може да се представи във вида $T = RSDS^t$, където R и S са ортогонални матрици, а D е диагонална матрица с положителни елементи по диагонала.*

Прилагаме лемата за матрицата T от уравнението на F. Нека $G : A \to B$ е изображението, чието уравнение спрямо K и L е $y = s+Rx$. Тъй като R е ортогонална и K и L са ортонормирани, то G е еднаквост (по Теорема 2). Нека $H : A \to A$ е изображението, чието уравнение спрямо K е $y = SDS^tx$. Тогава $F = G \circ H$, защото ако точката $P \in A$ има спрямо K координатен вектор x, то $H(P)$ има спрямо K координатен вектор SDS^tx и следователно $G \circ H(P)$ има спрямо L координатен вектор $s+RSDS^tx = s+Tx$, което е координатният вектор спрямо L на $F(P)$ и значи $G \circ H(P) = F(P)$. Така че е достатъчно да докажем, че H е композиция на n дилатации по осите на някоя ортонормирана координатна система.

Нека K' е координатната система в A, за която смяната на координатите между K и K' е $x = Sx'$. Тъй като K е ортонормирана и S е ортогонална матрица, то и K' е ортонормирана. Тогава замествайки в уравнението на H спрямо K координатите спрямо K чрез координатите спрямо K' получаваме $Sy' = SDS^tSx' = SDx'$ (защото $S^tS = E$ поради това, че S е ортогонална), тоест $y' = Dx'$. Значи уравнението спрямо K' на H е $y' = Dx'$.

Тъй като D е диагонална, тоест $D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$, то очевидно $D = D_1 \dots D_n$, където D_i е диагоналната квадратна матрица от ред n, на която i-тият елемент по диагонала е d_i, а всички останали елементи по диагонала са 1. Нека $H_i : A \to A$ е изображението, чието уравнение спрямо K' е $y' = D_ix'$. Тъй като $d_i > 0$, то H_i е дилатация по i-тата координатна ос на K', $i = 1, \dots, n$. И от $D = D_1 \dots D_n$ следва (аналогично на по-горе за $F = G \circ H$), че $H = H_1 \circ \dots \circ H_n$, тоест H е композиция на дилатации по осите на K'.

Следователно $F = G \circ H = G \circ H_1 \circ \dots \circ H_n$, тоест F е композиция на еднаквостта G и дилатациите $H_1, \dots, H_n$ по осите на ортонормираната координатна система K'. □

Доказателство на Лема 1: (само за информация, на лекцията не го правихме)

Ще използваме наготово следния факт, който би трябвало да е известен от курса по алгебра (а може и да не е):
Всяка симетрична реална матрица M може да се представи във вида $M = S\Lambda S^t$, където S е ортогонална матрица, а Λ е диагонална матрица.

(Как се прави това при $n = 2$ всъщност е известно от алгоритъма за канонизация на криви от втора степен от упражненията. При произволно n е същото, но в случая на кратни собствени стойности има дребни усложнения при построяването на ортонормирания базис, съставящ стълбовете на S, — налага се прилагането на метода на Грам-Шмит.)

Разглеждаме матрицата $M = T^tT$. Тя е симетрична, защото $(T^tT)^t = T^t(T^t)^t = T^tT$. От алгебричния факт следва, че съществуват ортогонална матрица S и диагонална матрица $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ такива, че $T^tT = S\Lambda S^t$. Тъй като S е ортогонална и значи $S^t = S^{-1}$, това равенство е еквивалентно на $\Lambda = S^tT^tTS$, тоест $\Lambda = (TS)^tTS$. От това следва, че λ_i, който е елемента на Λ на (i, i)-то място, е произведението на i-тия ред на $(TS)^t$ и i-тия стълб на TS. Но редовете на $(TS)^t$ са стълбовете на TS. Значи λ_i е произведението на i-тия стълб на TS и i-тия стълб на TS, тоест ако $TS = (a_{jk})_{j,k=1,\ldots,n}$, то $\lambda_i = \sum\limits_{j=1}^{n} {a_{ji}}^2$. Следователно $\lambda_i \geq 0$. При това не е възможно $\lambda_i = 0$, защото тогава ще имаме $a_{ji} = 0$, $j = 1, \ldots, n$, тоест i-тият стълб на TS ще е 0. Това обаче е невъзможно, защото TS е обратима като произведение на две обратими матрици. Следователно $\lambda_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$.

Нека $d_i = \sqrt{\lambda_i}$, $i = 1, \ldots, n$, и $D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$. Тогава $d_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$, тоест D е диагонална матрица с положителни елементи по диагонала. Освен това имаме

$$D^2 = \begin{pmatrix} d_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = \Lambda.$$

Следователно

$$\left(SDS^t\right)\left(SDS^t\right) = SD\underbrace{S^tS}_{=E}DS^t = SD^2S^t = S\Lambda S^t = T^tT.$$

От това получаваме $T = (T^t)^{-1}(SDS^t)(SDS^t) = RSDS^t$, където $R = (T^t)^{-1}(SDS^t)$. Матрицата R е ортогонална, защото

$$\begin{aligned} RR^t &= \left(T^t\right)^{-1}\left(SDS^t\right)\left(SDS^t\right)^t\left(\left(T^t\right)^{-1}\right)^t = \left(T^t\right)^{-1}\left(SDS^t\right)\left(\left(S^t\right)^t\underbrace{D^t}_{=D}S^t\right)\left(\left(T^{-1}\right)^t\right)^t \\ &= \left(T^t\right)^{-1}\underbrace{\left(SDS^t\right)\left(SDS^t\right)}_{=T^tT}T^{-1} = \left(T^t\right)^{-1}T^tTT^{-1} = E. \end{aligned}$$

Следователно $T = RSDS^t$, където R и S са ортогонални матрици, а D е диагонална матрица с положителни елементи по диагонала. $\square$

Забележка 5 Очевидно произведението на матриците $D_1, \ldots, D_n$ е D независимо от реда, в който са подредени. Така че композицията на дилатациите $H_1, \ldots, H_n$ е една и съща независимо от реда, в който са подредени, тоест можем да ги пермутираме по произволен начин.

Освен това при представянето на F като композиция на еднаквост и дилатации може първо да действа еднаквостта, а след това дилатациите, тоест $F = H_1 \circ \cdots \circ H_n \circ G$, където $G : A \to B$ е еднаквост, а $H_1, \ldots, H_n$ са дилатации по осите на някоя ортонормирана координатна система в B. (В общия случай тая еднаквост и дилатации са различни от тия във формулировката на теоремата.) Това следва като теоремата се приложи за $F^{-1} : B \to A$, тоест $F^{-1} = G \circ H_1 \circ \cdots \circ H_n$, откъдето $F = H_n^{-1} \circ \cdots \circ H_1^{-1} \circ G^{-1}$, и се вземе предвид, че обратните изображения на дилатация и еднаквост са съответно дилатация по същата ос и еднаквост.

Забележка 6 От Теорема 5 следва, че афинно еквивалентните фигури на дадена фигура в n-мерно евклидово афинно пространство се получават като се вземат еднаквите на нея фигури и се деформират (тоест разтегнат или сплескат с някакъв коефициент на пропорционалност) по направленията на n перпендикулярни прави с общо начало.

Забележка 7 Както е известно от курса по алгебра, в линейната алгебра може да не се прави разлика между изоморфните линейни пространства, защото те имат едни и същи линейно-алгебрични свойства. Тъй като крайномерните линейни пространства са изоморфни тогава и само тогава, когато имат една и съща размерност, то от гледна точка на линейната алгебра има по същество единствено n-мерно линейно пространство, а именно $\mathbb{R}^n$. По същия начин в афинната геометрия (тоест теорията на афинните пространства) може да не се прави разлика между афинните пространства, между които има афинен изоморфизъм, а в евклидовата геометрия (тоест теорията на евклидовите афинни пространства) може да не се прави разлика между евклидовите афинни пространства, между които има еднаквост. Така че от гледна точка на афинната геометрия има по същество единствено n-мерно афинно пространство, а именно $\mathbb{R}^n$, а от гледна точка на евклидовата геометрия има по същество единствено n-мерно евклидово афинно пространство, а именно $\mathbb{R}^n$.

Твърдение 6 *Нека U е n-мерно реално линейно пространство и $\Phi : U \to U$ е линеен изоморфизъм.*

1. *Нека $e = (e_1, \ldots, e_n)$ е базис на U. Тогава базисите e и $\Phi(e) = (\Phi(e_1), \ldots, \Phi(e_n))$ са еднакво (съответно противоположно) ориентирани $\Leftrightarrow$ матрицата на Φ спрямо e има положителна (съответно отрицателна) детерминанта.*

2. *Ако за един базис e на U базисите e и $\Phi(e)$ са еднакво (съответно противоположно) ориентирани, то за всеки базис e' на U базисите e' и $\Phi(e')$ са еднакво (съответно противоположно) ориентирани.*

Доказателство:

1. Нека матрицата на Φ спрямо e е T. От (1) (или еквивалентните му (2) или (3)) с $f = e$ следва, че T всъщност е матрицата на прехода от базиса e към базиса $\Phi(e)$. Следователно e и $\Phi(e)$ са еднакво (съответно противоположно) ориентирани $\Leftrightarrow$ $\det T$ е положителна (съответно отрицателна).

2. Нека матрицата на Φ спрямо e е T, а матрицата на прехода от e към e' е S. Тогава матрицата на Φ спрямо e' е $T' = S^{-1}TS$ и следователно $\det T' = \det T$. От това и 1. получаваме твърдението в 2. □

Забележка 8 От доказателството на 2. в горното твърдение следва, че за линейно изображение $\Phi : U \to U$ коректно може да се дефинира $\det \Phi$ чрез $\det \Phi = \det T$, където T е матрицата на Φ спрямо някой базис на U.

От Твърдение 6 следва коректността на 1. в следващата дефиниция.

Определение 6

1. Нека U е крайномерно реално линейно пространство и $\Phi : U \to U$ е линеен изоморфизъм. Казваме, че Φ *запазва (съответно сменя) ориентацията*, ако за един, а следователно и за всеки, базис e на U базисите e и $\Phi(e)$ имат една и съща (съответно противоположна) ориентация. (С други думи, когато $\det \Phi$ в смисъла на Забележка 8 е положителна (съответно отрицателна).)

2. Нека A е крайномерно афинно пространство и $F : A \to A$ е афинен изоморфизъм. Казваме, че F *запазва (съответно сменя) ориентацията*, ако съответният на F линеен изоморфизъм Φ запазва (съответно сменя) ориентацията.

3. Нека A е крайномерно евклидово афинно пространство. Еднаквост $F : A \to A$, която запазва ориентацията, се нарича *движение*.

Забележка 9 Терминът „движение“ идва от това, че едно множество се получава от друго чрез „движение“ (тоест запазваща ориентацията еднаквост) когато второто чрез непрекъснато преместване (без да се деформира) може да се докара да съвпадне с първото.

Твърдение 7

1. *Нека A е n-мерно афинно пространство, $K = Oe_1, \dots, e_n$ е афинна координатна система в A и афинният изоморфизъм $F : A \to A$ има спрямо K уравнение $y = s + Tx$. Тогава F запазва (съответно сменя) ориентацията $\Leftrightarrow$ $\det T > 0$ (съответно $\det T < 0$).*

2. *Нека A е n-мерно евклидово афинно пространство, $K = Oe_1, \dots, e_n$ е ортонормирана координатна система в A и еднаквостта $F : A \to A$ има спрямо K уравнение $y = s + Tx$. Тогава F е движение, тоест запазваща ориентацията еднаквост, $\Leftrightarrow$ T е специална ортогонална матрица (тоест ортогонална матрица с положителна детерминанта, тоест с $\det T = 1$), а е сменяща ориентацията еднаквост $\Leftrightarrow$ T е ортогонална матрица с отрицателна детерминанта, тоест с $\det T = -1$.*

Доказателство:

1. От Теорема 1 знаем, че T е матрицата спрямо базиса $e = (e_1, \dots, e_n)$ на съответния на F линеен изоморфизъм Φ. Следователно F запазва (съответно сменя) ориентацията $\Leftrightarrow$ Φ запазва (съответно сменя) ориентацията $\Leftrightarrow$ $\det T > 0$ (съответно $\det T < 0$).

2. От Теорема 2 знаем, че T е ортогонална, така че това следва директно от 1.. $\square$

Пример 18 Тъждественото изображение, транслациите, хомотетиите, дилатациите са запазващи ориентацията афинни изоморфизми.
Това е така, защото от уравненията в Пример 1, Пример 2, Пример 3, Пример 4 се вижда, че матрицата T е съответно E, E, cE, D_i и следователно детерминантата ѝ е съответно $1 > 0$, $1 > 0$, $c^n > 0$, $d > 0$.

Пример 19 Тъждественото изображение и транслациите в евклидово афинно пространство са движения.
Това е така, защото от уравненията в Пример 1 и Пример 2 се вижда, че матрицата T е E, тоест специална ортогонална.