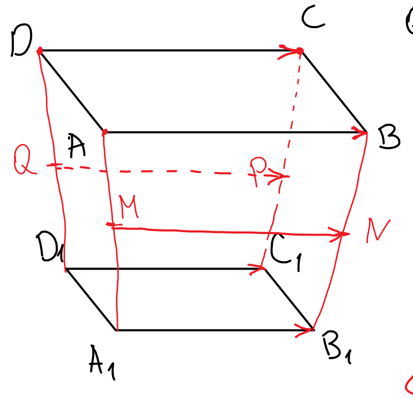
1 зад.
ABCD – успоредник
$A_1B_1C_1D_1$ – успоредник



M – среда на AA_1
N – –||– на BB_1
P – –||– на CC_1
Q – –||– на DD_1

?, че MNPQ е успоредник

Решение

ABCD – успоредник $\Leftrightarrow \vec{AB}=\vec{DC}$!

$A_1B_1C_1D_1$ – усп. $\Leftrightarrow \vec{A_1B_1}=\vec{D_1C_1}$!

За MNPQ е дост. да се покаже, че $\boxed{\vec{MN}=\vec{QP}}$

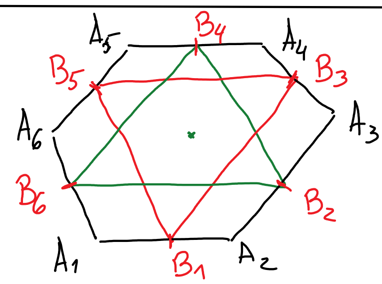
Осн.з. $\vec{OM}=\frac{1}{2}\cdot(\vec{OA}+\vec{OB})$

$$\vec{OM}=\frac{1}{2}\cdot(\vec{OA}+\vec{OA_1})$$
$$\vec{ON}=\frac{1}{2}\cdot(\vec{OB}+\vec{OB_1})$$
$$\vec{OP}=\frac{1}{2}\cdot(\vec{OC}+\vec{OC_1})$$
$$\vec{OQ}=\frac{1}{2}\cdot(\vec{OD}+\vec{OD_1})$$

$$\vec{MN}=\vec{ON}-\vec{OM}=\frac{1}{2}\cdot(\vec{OB}+\vec{OB_1}-\vec{OA}-\vec{OA_1})=\frac{1}{2}\cdot(\vec{AB}+\vec{A_1B_1})$$
$$\vec{QP}=\vec{OP}-\vec{OQ}=\frac{1}{2}\cdot(\vec{OC}+\vec{OC_1}-\vec{OD}-\vec{OD_1})=\frac{1}{2}\cdot(\vec{DC}+\vec{D_1C_1})$$

$\Rightarrow \vec{MN}=\vec{QP} \Rightarrow$ MNPQ е успоредник

2 зад.
$A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ – шестоъгълник
B_1 – средата на A_1A_2
$B_2 \to A_2A_3$, $B_3 \to A_3A_4$, $B_4 \to A_4A_5$, $B_5 \to A_5A_6$, $B_6 \to A_6A_1$



?, че $\triangle B_1B_3B_5$ и $\triangle B_2B_4B_6$ имат общ медицентър

Решение: $\begin{cases} \vec{OM}=\frac{1}{3}\cdot(\vec{OB_1}+\vec{OB_3}+\vec{OB_5}) !, & M \text{ – медиц. на } \triangle B_1B_3B_5 \\ \vec{ON}=\frac{1}{3}\cdot(\vec{OB_2}+\vec{OB_4}+\vec{OB_6}), & N \text{ – медиц. на } \triangle B_2B_4B_6 \end{cases}$

?, че $\vec{OM}=\vec{ON}$

$$\vec{OM}=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{\vec{OA_1}+\vec{OA_2}}{2}+\frac{\vec{OA_3}+\vec{OA_4}}{2}+\frac{\vec{OA_5}+\vec{OA_6}}{2}\right)$$
$$\vec{ON}=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{\vec{OA_2}+\vec{OA_3}}{2}+\frac{\vec{OA_4}+\vec{OA_5}}{2}+\frac{\vec{OA_6}+\vec{OA_1}}{2}\right)$$

$\Rightarrow \boxed{\vec{OM}=\vec{ON}}=\frac{1}{6}\cdot(\vec{OA_1}+\dots+\vec{OA_6})$

$M\equiv N \Rightarrow$ M е медиц. на $A_1\dots A_6$

3 зад. (Упражнение)
$A_1A_2\dots A_6$ – шестоъгълник

M_1 – медиц. на $\triangle A_1A_2A_3$
M_2 – $\triangle A_2A_3A_4$
M_3 – $\triangle A_3A_4A_5$
M_4 – $\triangle A_4A_5A_6$
M_5 – $\triangle A_5A_6A_1$
M_6 – $\triangle A_6A_1A_2$

?, че отсечките $\boxed{M_1M_4,\ M_2M_5,\ M_3M_6}$ имат обща среда.

$$\vec{OP_1}=\vec{OP_2}=\vec{OP_3}$$
M_1M_4, M_2M_5, M_3M_6

Линейна зависимост и независимост на вектори

Опр1: $\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_n$ – линейно зависими $\Leftrightarrow \exists(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\neq(0,\dots,0)$:
$$\alpha_1\cdot\vec{a}_1+\dots+\alpha_n\cdot\vec{a}_n=\vec{0}.$$

Опр. 2: $\vec{a_1}, \dots, \vec{a_n}$ – линейно независими, ако

$\alpha_1 \cdot \vec{a_1} + \dots + \alpha_n \cdot \vec{a_n} = \vec{o} \Longleftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0.$

Тв: Нека $\vec{a_1}, \dots, \vec{a_n}$ – $\boxed{\text{ЛНЗ}}$ и $\alpha_1 \cdot \vec{a_1} + \dots + \alpha_n \cdot \vec{a_n} = \beta_1 \cdot \vec{a_1} + \dots + \beta_n \cdot \vec{a_n} = \vec{v}$

$\Rightarrow \alpha_i = \beta_i$ за $i = 1, \dots, n$.

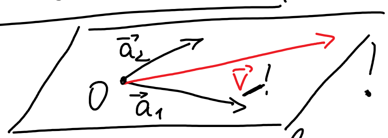
Геометрична интерпретация

1) $\vec{a_1}$ – л.з. $\Longleftrightarrow \vec{a_1} = \vec{o} \Rightarrow V_1 = \{\alpha_1 \cdot \vec{a_1}\} = \{\vec{o}\}$

$\vec{a_1}$ – л.н.з. $\Longleftrightarrow \vec{a_1} \neq \vec{o} \Rightarrow \ell(\vec{a_1}) = V_1 \overset{!}{=} \{\alpha_1 \cdot \vec{a_1}\}$ – линейно пространство, едномерно

2) $\underset{\neq \vec{o}}{\vec{a_1}}, \underset{\neq \vec{o}}{\vec{a_2}}$ – л.з. $\Longleftrightarrow \boxed{\vec{a_1} \parallel \vec{a_2}} \Longleftrightarrow \vec{a_2} = k \cdot \vec{a_1}$;

$\vec{a_1}, \vec{a_2}$ – л.н.з. $\Longleftrightarrow \vec{a_1} \nparallel \vec{a_2} \Rightarrow \ell(\vec{a_1}, \vec{a_2}) = V_2 = \{\alpha_1 \cdot \vec{a_1} + \alpha_2 \cdot \vec{a_2}\}$



двумерно линейно пространство

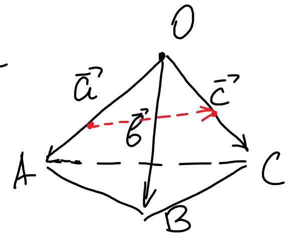
3) $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}$ – л.з. $\Longleftrightarrow$ компланарни

* $\vec{a_1} = \vec{a_2} = \vec{a_3} = \vec{o}$
* $\vec{a_1} = \vec{o}$, $\vec{a_2}, \vec{a_3} \neq \vec{o}$
* $\vec{a_1} \parallel \vec{a_2} \parallel \vec{a_3}$
* $\vec{a_1} \parallel \vec{a_2} \nparallel \vec{a_3}$
* $\vec{a_1} \nparallel \vec{a_2} \nparallel \vec{a_3} \nparallel \vec{a_1}$ – компланарни с 1 равнина

$\boxed{\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}}$ – л.н.з. $\Longleftrightarrow$ не са компланарни

$V_3 = \ell(\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}) = \{\vec{v} = \alpha_1 \cdot \vec{a_1} + \alpha_2 \vec{a_2} + \alpha_3 \vec{a_3}\}$

линейно п-во с $\dim V_3 = 3$



* Всеки 4 вектора в геометрично простр. са л.з.

---

1 зад. (Основна)

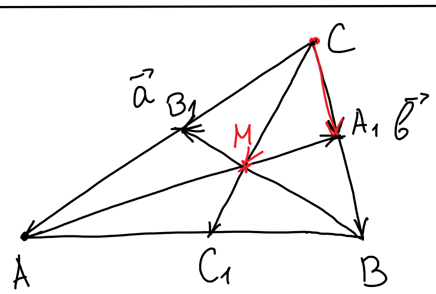
$\triangle ABC$, $\vec{CA} = \vec{a}$, $\vec{CB} = \vec{b}$ – ЛНЗ

AA_1, BB_1, CC_1 – медиани

а) Да се изразят $\vec{AA_1}, \vec{BB_1}$ и $\vec{CC_1}$ чрез $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

б) ?, че отс. AA_1, BB_1 и CC_1 се пресичат в 1 т. M и да се определи отношението, в което тя ги дели;

в) ?, че $\vec{OM} = \frac{1}{3} \cdot (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$



$\vec{AB} = \vec{CB} - \vec{CA}$

$\vec{AB} = \vec{b} - \vec{a}$

а) $\vec{AA_1} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{AC} + \vec{AB}) = \frac{1}{2} \cdot (-\vec{a} + \vec{b} - \vec{a}) = \frac{\vec{b}}{2} - \vec{a}$

II н. $\vec{AA_1} = \vec{CA_1} - \vec{CA} = \frac{\vec{b}}{2} - \vec{a}$ //

$\vec{BB_1} = \frac{\vec{a}}{2} - \vec{b} = \vec{CB_1} - \vec{CB} = \frac{\vec{a}}{2} - \vec{b}$ //

в) ?, че $\vec{OM} = \frac{1}{3}\cdot(\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC})$

$$\vec{BB_1} = \frac{\vec a}{2} - \vec b = \vec{CB_1} - \vec{CB} = \frac{\vec a}{2} - \vec b$$
$$\vec{CC_1} = \frac{1}{2}\cdot(\vec{CA}+\vec{CB}) = \frac{\vec a + \vec b}{2}$$

б) Разгл. AA_1 и BB_1, ще док., че $AA_1 \cap BB_1 = M$ (прави линии).
Разгл. $\vec{AA_1}$ и $\vec{BB_1}$. Ще док., че са ЛНЗ.

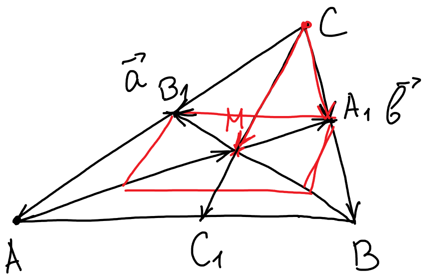
$\alpha\cdot\vec{AA_1} + \beta\cdot\vec{BB_1} = \vec 0$, $\alpha = ?, \beta = ?$

$\alpha\cdot\left(\frac{\vec b}{2} - \vec a\right) + \beta\cdot\left(\frac{\vec a}{2} - \vec b\right) - \vec 0 \Rightarrow \frac{\alpha}{2}\cdot\vec b - \alpha\cdot\vec a + \frac{\beta}{2}\cdot\vec a - \beta\cdot\vec b = \vec 0$

$$\left| \begin{array}{l} \vec a\cdot\left(-\alpha + \frac{\beta}{2}\right) + \vec b\cdot\left(\frac{\alpha}{2} - \beta\right) = \vec 0 \\ \vec a, \vec b - \text{ЛНЗ} \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} -\alpha + \frac{\beta}{2} = 0 \\ \frac{\alpha}{2} - \beta = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \alpha = \beta = 0 \Rightarrow$$ $\vec{AA_1}$ и $\vec{BB_1}$ са ЛНЗ (в една равнина)
$\Rightarrow \exists!$ т. $M = AA_1 \cap BB_1$

Ще док., че $M \in CC_1$, $\vec{CM} \overset{?}{=} k\cdot\vec{CC_1}$



$\vec{CM} = \vec{CA} + \vec{AM}$, $\vec{AM} \parallel \vec{AA_1} \Rightarrow \exists!\ x: \vec{AM} = x\cdot\vec{AA_1}$!

$\vec{CM} = \vec a + x\cdot\left(\frac{\vec b}{2} - \vec a\right)$ (1)

$\vec{CM} = \vec{CB} + \vec{BM}$, $\vec{BM} \parallel \vec{BB_1} \Rightarrow \exists!\ y: \vec{BM} = y\cdot\vec{BB_1}$

$\vec{CM} = \vec b + y\cdot\left(\frac{\vec a}{2} - \vec b\right)$ (2)

От (1) и (2) $\Rightarrow$ $\vec a + x\cdot\left(\frac{\vec b}{2} - \vec a\right) = \vec b + y\cdot\left(\frac{\vec a}{2} - \vec b\right)$

$\vec a\cdot\left(1 - x - \frac{y}{2}\right) + \vec b\cdot\left(\frac{x}{2} - 1 + y\right) = \vec 0$, $\vec a$ и $\vec b$ – ЛНЗ

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} 1 - x - \frac{y}{2} = 0 \\ \frac{x}{2} - 1 + y = 0 \end{array} \right. \Rightarrow x = \frac{2}{3} \qquad y = \frac{2}{3}$$

$\Rightarrow$ 1) $\boxed{\vec{AM} = \frac{2}{3}\cdot\vec{AA_1}}$ (A —2x— M —x— A_1) | 2) $\boxed{\vec{BM} = \frac{2}{3}\cdot\vec{BB_1}}$ $\boxed{BM : MB_1 = 2 : 1}$

3) $\vec{CM} = \vec a + \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{\vec b}{2} - \vec a\right) = \frac{1}{3}\cdot\vec a + \frac{1}{3}\cdot\vec b = \frac{\vec a + \vec b}{3}$, $\vec{CC_1} = \frac{\vec a + \vec b}{2}$ / · ?

$$\boxed{\vec{CM} = \frac{2}{3}\cdot\vec{CC_1}}$$

в) $\vec{CM} = \frac{2}{3}\cdot\vec{CC_1}$ (Упр.)

?, че $\vec{OM} = \frac{1}{3}\cdot(\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC})$

Зад. (Основна)

?, че $OM = \frac{1}{3}\cdot(OA + OB + OC)$

---

2 зад. (Основна)

(Упр.)

$A \neq B$

O – произволна

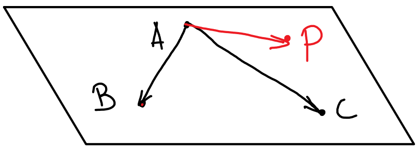
?, че $\boxed{\text{т. } P \in AB} \iff \boxed{\begin{cases} \vec{OP} = \alpha\cdot\vec{OA} + \beta\cdot\vec{OB} \\ \alpha + \beta = 1 \end{cases}}$

б) A, B, C – не лежат на 1 пр.

т. O – произволна

$\boxed{P \in (ABC)} \iff \boxed{\begin{cases} \vec{OP} = \alpha\cdot\vec{OA} + \beta\cdot\vec{OB} + \gamma\cdot\vec{OC} \\ \alpha + \beta + \gamma = 1 \end{cases}}$

б) $P \in (ABC)$



$\vec{AB}, \vec{AC}$ – ЛНЗ

$\vec{AB}, \vec{AC}$ и $\vec{AP}$ – компланарни (л.з.) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists(x, y) : \boxed{\vec{AP} = x\cdot\vec{AB} + y\cdot\vec{AC}}$

$\vec{AP} = \vec{OP} - \vec{OA}$, $\quad \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$, $\quad \vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA}$

$\vec{OP} - \vec{OA} = x\cdot(\vec{OB} - \vec{OA}) + y\cdot(\vec{OC} - \vec{OA})$

$\begin{cases} \vec{OP} = \vec{OA}\cdot\underbrace{(1 - x - y)}_{\alpha} + \underbrace{x}_{\beta}\cdot\vec{OB} + \underbrace{y}_{\gamma}\cdot\vec{OC} \\ \alpha + \beta + \gamma = 1 \end{cases}$

$\boxed{\begin{matrix} \alpha = 1 - x - y \\ \beta = x \\ \gamma = y \end{matrix}}$

Коеф. α, β и γ са единствени и не зависят от т. O.

Нека $\begin{cases} \vec{OP} = \alpha\cdot\vec{OA} + \beta\cdot\vec{OB} + \gamma\cdot\vec{OC} \\ \alpha + \beta + \gamma = 1 \Rightarrow \alpha = 1 - \beta - \gamma \end{cases}$

$\Rightarrow \vec{OP} = (1 - \beta - \gamma)\cdot\vec{OA} + \beta\cdot\vec{OB} + \gamma\cdot\vec{OC}$

$\vec{OP} = \vec{OA} - \beta\cdot\vec{OA} - \gamma\cdot\vec{OA} + \beta\cdot\vec{OB} + \gamma\cdot\vec{OC}$

$\vec{AP} = \beta\cdot(\vec{OB} - \vec{OA}) + \gamma\cdot(\vec{OC} - \vec{OA})$

$\vec{AP} = \beta\cdot\vec{AB} + \gamma\cdot\vec{AC}$, $\Rightarrow \vec{AP}, \vec{AB}, \vec{AC}$ са л.з. (компланан.)

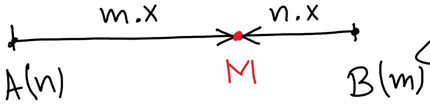
$\Rightarrow P \in (ABC)$

---

3 зад. (Основна)

$A \neq B$, $m, n \in \mathbb{R}^+$

т. O – произволна



$\iff \boxed{\vec{OM} = \frac{n}{m+n}\cdot\vec{OA} + \frac{m}{m+n}\cdot\vec{OB}}$

?, че M дели вътрешно AB в отнош. $m:n$, считано от A $\iff \vec{OM} = \frac{n}{m+n}\cdot\vec{OA} + \frac{m}{m+n}\cdot\vec{OB}$

Д-во:

I) Нека M дели AB вътр. в отн. $m:n$ $\Rightarrow \vec{AM} \parallel \vec{BM} \Rightarrow \boxed{\exists!\, k \Rightarrow \vec{AM} = k\cdot\vec{BM}}$

$|\vec{AM}| = |k|\cdot|\vec{BM}|$

$m\cdot x = |k|\cdot n\cdot x \quad /:x$

$|k| = \frac{m}{n}$

$\vec{AM} \uparrow\downarrow \vec{BM} \Rightarrow k < 0$

$\Rightarrow \boxed{k = -\frac{m}{n}}$

$m \cdot x = |k| \cdot n \cdot x \quad | : x$

$|k| = \dfrac{m}{n}$

$\Rightarrow \boxed{k = -\dfrac{m}{n}}$

$\underbrace{\vec{AM}}_{\vec{OM}-\vec{OA}} = -\dfrac{m}{n} \cdot \underbrace{\vec{BM}}_{\vec{OM}-\vec{OB}} \Rightarrow \underbrace{\vec{OM}-\vec{OA} = -\dfrac{m}{n}\cdot(\vec{OM}-\vec{OB})}_{n}$

$n\cdot\vec{OM} - n\cdot\vec{OA} = m\cdot\vec{OB} - m\cdot\vec{OM} \quad | + m\cdot\vec{OM}$

$(n+m)\cdot\vec{OM} = n\cdot\vec{OA} + m\cdot\vec{OB} \quad | : (m+n)$

$\vec{OM} = \dfrac{n}{m+n}\cdot\vec{OA} + \dfrac{m}{m+n}\cdot\vec{OB}$

II Нека $\vec{OM} = \dfrac{n}{m+n}\cdot\vec{OA} + \dfrac{m}{m+n}\cdot\vec{OB}$ Изб. т. $O \equiv$ т. M

$\underbrace{\vec{MM}}_{\vec{0}} = \dfrac{n}{m+n}\cdot\vec{MA} + \dfrac{m}{m+n}\cdot\vec{MB} \quad | \cdot (n+m)$

$n\cdot\vec{MA} + m\cdot\vec{MB} = \vec{0}$

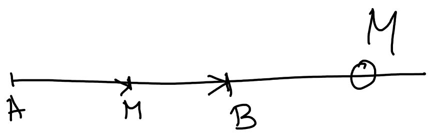
$\vec{MA} = -\dfrac{m}{n}\cdot\vec{MB} \quad | \cdot(-1)$

$\boxed{\vec{AM} = \dfrac{m}{n}\cdot\vec{MB}}$, $\dfrac{m}{n} > 0$ $\Rightarrow$

$M \in AB$

$\vec{AM} \uparrow\uparrow \vec{MB} \Rightarrow M$ е вътрешна за AB

$\boxed{|\vec{AM}| : |\vec{MB}| = m : n}$



Няма операция деление на вектори!

---

4 зад. (Основна)

$\triangle ABC$, $\vec{CA} = \vec{a}$, $\vec{CB} = \vec{b}$ – ЛНЗ

AA_0, BB_0, CC_0 – вътрешни ъглополовящи на $\triangle ABC$

а) Да се изразят $\vec{AA_0}$, $\vec{BB_0}$ и $\vec{CC_0}$ чрез $\vec{a}$ и $\vec{b}$,

б) ?, че всяка ъглопол. разделя срещуположната страна в отношение, равно на отнош. на прилежащите страни.

а) 1) Нека $|AC_0| : |C_0B| = m : n$

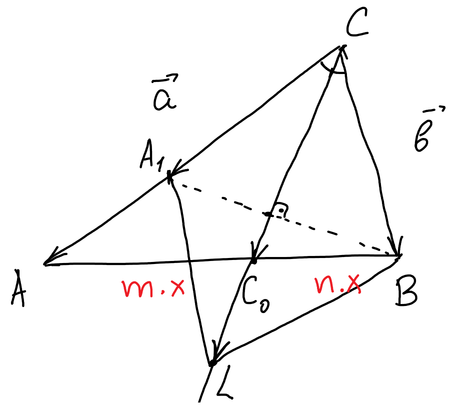
От осн. зад. $\Rightarrow \vec{CC_0} = \dfrac{n}{m+n}\cdot\vec{CA} + \dfrac{m}{m+n}\cdot\vec{CB}$ (1)

2) постр. т. $A_1 \in CA^{\rightarrow}$: $|\vec{CA_1}| = |\vec{CB}| = |\vec{b}|$

постр. ромб CA_1LB

$\vec{CL} = \vec{CA_1} + \vec{CB}$

$\vec{CC_0} \uparrow\uparrow \vec{CL} \Rightarrow \exists!\, k>0 : \vec{CC_0} = k\cdot\vec{CL} \mid \vec{CA_1} \uparrow\uparrow \vec{a}$



$CL = CA_1 + CB$

$\vec{CC_0} \uparrow\uparrow \vec{CL} \Rightarrow \exists!\, k>0 : \vec{CC_0} = k\cdot\vec{CL}$

$\vec{CC_0} = k\cdot(\underset{?}{\vec{CA_1}}+\vec{CB})$

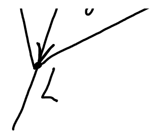
$\vec{CA_1}\uparrow\uparrow\vec{a}$

$\Downarrow$

$\exists!\, x>0 \quad \vec{CA_1} = x\cdot\vec{a}$

$|\vec{CA_1}| = x\cdot|\vec{a}|$

$|\vec{b}| = x\cdot|\vec{a}| \Rightarrow x = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \to \vec{CC_0}$



$$\vec{CC_0} = k\cdot\left(\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\cdot\vec{a}+\vec{b}\right) \quad (2)$$

$$\vec{CC_0} = \frac{n}{m+n}\cdot\vec{a} + \frac{m}{m+n}\cdot\vec{b} \quad (1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{n}{m+n}}\cdot\vec{a} + \boxed{\frac{m}{m+n}}\cdot\vec{b} = \boxed{\left(k\cdot\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\right)}\cdot\vec{a} + \boxed{k}\cdot\vec{b}$$, $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – ЛНЗ

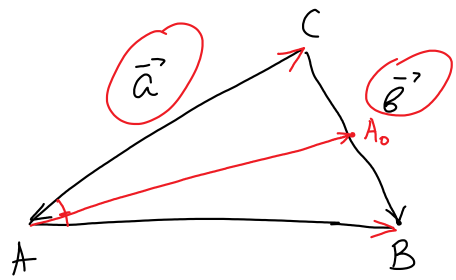
$$\left|\begin{array}{l} \frac{n}{m+n} = k\cdot\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \\ \frac{m}{m+n} = k \end{array}\right.$$

$(:) \Rightarrow \frac{n}{m} = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|} \Rightarrow$ б)

$(+) \Rightarrow 1 = k\cdot\left(\underbrace{\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}+1}_{|\vec{a}|}\right) \Rightarrow k = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|} \to (2)$

$$\vec{CC_0} = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}\cdot\vec{a} + \frac{|\vec{a}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}\cdot\vec{b} \quad (*)$$

$\vec{AA_0} = ?$ через $\vec{AC}$ и $\vec{AB}$



От $(*) \Rightarrow \vec{AA_0} = \frac{|\vec{AB}|}{|\vec{AC}|+|\vec{AB}|}\cdot\vec{AC} + \frac{|\vec{AC}|}{|\vec{AC}|+|\vec{AB}|}\cdot\vec{AB}$

$\vec{AC} = -\vec{a}, \quad \vec{AB} = \vec{b}-\vec{a} = \vec{CB}-\vec{CA}$

$$\vec{AA_0} = \frac{|\vec{b}-\vec{a}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}-\vec{a}|}\cdot(-\vec{a}) + \frac{|\vec{a}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}-\vec{a}|}\cdot(\vec{b}-\vec{a}) = -\vec{a}\cdot 1 + \frac{|\vec{a}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}-\vec{a}|}\cdot\vec{b}$$

$$\vec{BB_0} = -\vec{b} + \frac{|\vec{b}|}{|\vec{b}|+|\vec{a}-\vec{b}|}\cdot\vec{a}$$