Числови редове - Теория 2

Март 2020г.

1 Критерий на Раабе - Дюамел

Критерият на Раабе-Дюамел е приложим за числови редове с положителни членове и може да се схваща като *усилване* на критерия на Даламбер. Формално:

$$\text{Даден е ред } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ с } a_n > 0 \ \forall\, n \in \mathbb{N}. \text{ Разглеждаме редицата } \Bigg\{ n \underbrace{\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right)}_{\alpha_n} \Bigg\}_{n=1}^{\infty} .$$

$$(i) \text{ Ако съществува } \mu > 1, \text{ за което } n\alpha_n \geq \mu \ \ (\forall\, n \geq n_0)\,, \text{ то } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ е сходящ.}$$

$$(ii) \text{ Ако } n\alpha_n \leq 1 \ \ (\forall\, n \geq n_0)\,, \text{ то } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ е разходящ.}$$

Общият член на редицата $\{n\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ можем да запомним по-лесно, ако направим аналогия с критерия на Даламбер. Там изследвахме поведението на редицата $\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$. Достатъчно е да имаме предвид следното равенство :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{1+\alpha_n} \iff 1 + \alpha_n = \frac{a_n}{a_{n+1}} \iff \alpha_n = \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1$$

Доказателство. Ще използваме следното наблюдение при доказателството на случаите:

$$na_n - (n+1)\,a_{n+1} = n \,.\, a_{n+1} \,.\, \frac{a_n}{a_{n+1}} - n.a_{n+1} - a_{n+1} =$$

$$= n.a_{n+1} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - a_{n+1} = a_{n+1} \left[n \underbrace{\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right)}_{\alpha_n} - 1 \right] = a_{n+1}\,(n\alpha_n - 1)$$

Първо, нека съществува $\mu > 1$, за което $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geq n_0 : n\alpha_n \geq \mu$. Като заместим в горното равенство, получаваме:

$$na_n - (n+1)\,a_{n+1} = a_{n+1}\,(n\alpha_n - 1) \geq a_{n+1}\,(\mu - 1) \quad \forall\, n \geq n_0$$

Да фиксираме $p \geq n_0$ и да разгледаме следните p на брой неравенства:

$$\oplus \begin{cases} n_0.a_{n_0} - (n_0+1)\, a_{n_0+1} \geq (\mu - 1)\, a_{n_0+1} \\ (n_0+1)\, a_{n_0+1} - (n_0+2)\, a_{n_0+2} \geq (\mu-1)\, a_{n_0+2} \\ \cdots \\ (n_0+p-1)\, a_{n_0+p-1} - (n_0+p)\, a_{n_0+p} \geq (\mu-1)\, a_{n_0+p} \\ (n_0+p)\, a_{n_0+p} - (n_0+p+1)\, a_{n_0+p+1} \geq (\mu-1)\, a_{n_0+p+1} \end{cases}$$

Като съберем левите страни, имаме:

$$\begin{aligned} n_0.a_{n_0} - \cancel{(n_0+1)\, a_{n_0+1}} + \cancel{(n_0+1)\, a_{n_0+1}} - \cdots \\ \cdots - \cancel{(n_0+p)\, a_{n_0+p}} + \cancel{(n_0+p)\, a_{n_0+p}} - (n_0+p+1)\, a_{n_0+p+1} = \\ = n_0.a_{n_0} - (n_0+p+1)\, a_{n_0+p+1} \end{aligned}$$

Събираме и десните страни:

$$(\mu-1)\, a_{n_0+1} + \cdots + (\mu-1)\, a_{n_0+p+1} = (\mu-1) \sum_{n=n_0+1}^{n_0+p+1} a_n$$

Неравенството става:

$$n_0.a_{n_0} - (n_0+p+1)\, a_{n_0+p+1} \geq (\mu-1) \sum_{n=n_0+1}^{n_0+p+1} a_n \Longrightarrow \sum_{n=n_0+1}^{n_0+p+1} a_n \leq \frac{n_0.a_{n_0}}{\mu-1}$$

Пропуснахме да извадим другия член, разделен на $(\mu - 1)$, но той е положителен и неравенството остава в сила. Накрая транслираме сумата, така че сумационният индекс да започва от 1:

$$\sum_{n=1}^{n_0+p+1} a_n \leq \frac{n_0.a_{n_0}}{\mu-1} + a_1 + \cdots + a_{n_0}$$

Остава да кажем, че неравенството не зависи от избора на $p \geq n_0$. Пускаме $p \to \infty$, при което редицата от парциални суми на реда се оказва растяща и ограничена отгоре. Доказахме сходимост.

Обратно, нека $n\alpha_n \leq 1 \; \forall\, n \geq n_0$. В този случай $a_{n+1}\,(n\alpha_n - 1) \leq 0$ (спомнете си за равенството от наблюдението по-горе). Следователно:

$$n.a_n - (n+1)\, a_{n+1} \leq 0 \iff n.a_n \leq (n+1)\, a_{n+1} \quad \forall\, n \geq n_0$$

Но тогава е в сила и:

$$n.a_n \geq n_0.a_{n_0} \iff a_n \geq \frac{1}{n} \,.\, n_0.a_{n_0} \quad \forall\, n \geq n_0$$

Неравенството издържа сумиране в ред. Получаваме:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \geq n_0.a_{n_0} \,.\, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Тъй като редът, който изследваме, се минорира от хармоничния ред, прилагаме принципа за сравнение и веднага получаваме разходимост.

Забележка: Редовете, за които можем да установим сходимост или разходимост с критерия на Раабе - Дюамел, се явяват строго надмножество на тези, за които критерият на Даламбер отговаря на същия въпрос. С други думи, ако за някой ред Даламбер дава отговор, то Раабе - Дюамел също дава отговор. Има редове, за които не можем да определим дали са сходящи с Даламбер, но можем да го направим с Раабе-Дюамел.

<u>Задача.</u> Да се изследва за сходимост редът:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!\,.\,2^n}{3.7.11\ldots(4n-1)}$$

В потвърждението на казаното в забележката, да опитаме първо с критерия на Даламбер:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\cancel{(2n-1)!!}\,.\,(2n+1)\,.\,\cancel{2^n}\,.\,2}{\cancel{3.7.11\ldots(4n-1)}\,(4n+3)} \cdot \frac{\cancel{3.7.11\ldots(4n-1)}}{\cancel{(2n-1)!!}\,.\,\cancel{2^n}} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{4n+2}{4n+3} = 1$$

Границата е 1 и се достига със стойности, по-малки от 1. Даламбер не дава отговор на въпроса за сходимост на реда. С критерия на Раабе-Дюамел получаваме:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\cancel{(2n-1)!!}\,.\,\cancel{2^n}}{\cancel{3.7.11\ldots(4n-1)}} \cdot \frac{\cancel{3.7.11\ldots(4n-1)}\,(4n+3)}{\cancel{(2n-1)!!}\,.\,(2n+1)\,.\,\cancel{2^n}\,.\,2} - 1 \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{4n+3}{4n+2} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\,.\,\frac{1}{4n+2} = \frac{1}{4}$$

Оказва се, че разглежданият ред е разходящ.

2 Критерий на Лайбниц за редове с алтернативно сменящи се знаци

Досега разглеждахме редове с неотрицателен общ член. Сега въвеждаме т.нар. *редове с алтернативно сменящи се (алтерниращи) знаци*. Това са редове от вида:

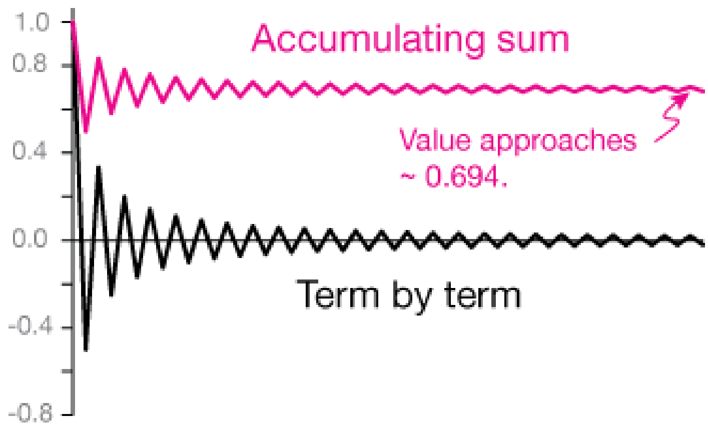
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\, a_n, \text{ където } a_n \geq 0 \;\forall\, n \in \mathbb{N}$$

Критерият на Лайбниц се използва, за да установим сходимост или разходимост на редове с алтернативно сменящи се знаци. Формално:

Нека е даден ред $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\, a_n,\ a_n \geq 0$. Ако са в сила условията:

$$\left.\begin{array}{l} (i) \quad a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \\ (ii)\ \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ е намаляваща} \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{ Редът } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\, a_n \text{ е сходящ.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$



Фигура 1: Критерий на Лайбниц

<u>Доказателство.</u> Знаем, че $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е намаляваща и $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Разглеждаме редицата от парциални суми $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$. По-точно, редицата от нечетни парциални суми $\{S_{2k+1}\}_{k=1}^{\infty}$ е намаляваща, понеже:

$$S_{2k+1} = S_{2k-1} - a_{2k} + a_{2k+1} \leq S_{2k-1}, \quad a_{n+1} \leq a_n \; \forall n \in \mathbb{N}$$

От своя страна, редицата от четни парциални суми $\{S_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$ е растяща, тъй като:

$$S_{2k} = S_{2k-2} + a_{2k-1} - a_{2k} \geq S_{2k-2}, \quad a_{n+1} \leq a_n \; \forall n \in \mathbb{N}$$

Тъй като от горното имаме

$$S_1 \geq S_{2k+1} = S_{2k} + a_{2k+1} \geq S_{2k} \geq S_2 \; \forall k \in \mathbb{N}$$

редицата от нечетни парциални суми $\{S_{2k+1}\}_{k=1}^{\infty}$ е намаляваща и ограничена отдолу от S_2, а редицата от четни парциални суми $\{S_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$ е растяща и ограничена отгоре от S_1. Нека:

$$S_{2k+1} \xrightarrow[k\to\infty]{} S \quad \text{и} \quad S_{2k} \xrightarrow[k\to\infty]{} S'$$

Да забележим, че $S_{2k+1} = S_{2k} + a_{2k+1} \xrightarrow[k\to\infty]{} S + 0 = S'$, откъдето заключаваме $S = S'$. Но тогава парциалните суми изобщо клонят към същата граница S, следователно редът е сходящ.

Забележка: Критерият на Лайбниц е първият от досега разглежданите, с който можем да оценим грешката от сумиране, т.е. разликата между реалната граница и резултата, получен след сумиране на краен брой членове. Точността се дава с:

$$\left.\begin{array}{l} S_{2k} \leq S \leq S_{2k+1} = S_{2k} + a_{2k+1} \\ S_{2k-1} - a_{2k} \leq S \leq S_{2k-1} \end{array}\right\} \Rightarrow |S - S_n| \leq a_{n+1}$$

Например, редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ очевидно е сходящ по критерия на Лайбниц. Сумата му е $\ln 2$, както ще докажем скоро. Това е сравнително бавно схождащ се ред - за да постигнем точност от 3 знака след десетичната запетая, трябва да сумираме първите 10^3+1 членове, т.е. потвърждава се оценката

$$|\ln 2 - S_n| \leq \frac{1}{n+1}$$

3 НДУ на Коши за сходимост на числов ред. Абсолютна и условна сходимост

Необходимото и достатъчно условие на Коши за сходимост на числов ред има вида:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ е сходящ} \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ \forall p \in \mathbb{N} : \left| \sum_{k=1}^{n+p} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k \right| < \varepsilon$$

Ако означим парциалните суми с $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, еквивалентно можем да запишем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ е сходящ} \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ \forall p \in \mathbb{N} : |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$$

Доказателството на НДУ на Коши за сходимост на ред е директно от НДУ на Коши за сходимост на редица, т.к. сходимостта на редицата от парциалните суми по дефиниция дава сходимост на реда.

Казваме, че редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ е **абсолютно сходящ**, ако е сходящ редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Ако редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ, но не е абсолютно сходящ, то казваме, че той е **условно сходящ**. Както при несобствените интеграли, абсолютната сходимост на числов ред влече и неговата обикновена сходимост.

Твърдение: Ако редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ е абсолютно сходящ, то той е сходящ.

Доказателство. Прилагаме НДУ на Коши за сходящия ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ \forall p \in \mathbb{N} : \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| \right| < \varepsilon$$

Тогава за $n \geq n_0$ и $p \in \mathbb{N}$ е в сила неравенството:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \varepsilon$$

4 Комутативен закон за числови редове

def. (*Разместване на* $\mathbb{N}$)

Всяка биекция $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ наричаме разместване или пермутация на $\mathbb{N}$. Можем да мислим, че $\{k_1, k_2, \dots, k_n, \dots\}$ е разместване на $\{1, 2, \dots, n, \dots\}$, ако всяко естествено число се среща в първата редица, при това точно веднъж.

Под действието на k редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ се изобразява в $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$. Така:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \underset{k}{\to} \sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n} - \text{ разместен}$$

Казваме, че за числовия ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty}$ е в сила **комутативният закон**, ако за всяко разместване $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ на $\mathbb{N}$ редовете $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ са едновременно сходящи или разходящи, като в случай на сходимост имат равни суми, т.е. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$.

Теорема 1. Ако $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ е абсолютно сходящ, то за него е в сила комутативният закон.

Доказателство. Разглеждаме $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - абсолютно сходящ, т.е. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ е сходящ. Нека $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ е едно разместване на $\mathbb{N}$. Искаме да покажем, че от сходимостта на $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ следва сходимостта на $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_{k_n}|$. Съобразете, че:

$$\forall\, n_0 \in \mathbb{N}\ \exists\, m \in \mathbb{N} : \{k_1, k_2, \dots, k_{n_0}\} \subset \{1, \dots, m\}$$

Казано по-просто, за всяко $n_0 \in \mathbb{N}$ при разместването $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ на $\mathbb{N}$ (а всъщност, за всяко разместване на $\mathbb{N}$) можем да намерим естествено число $m \in \mathbb{N}$, така че всички членове на "разместената" редица на естествените числа да са по-малки от m. Формалният запис ни казва точно това - каквото и n_0 да изберем, след като приложим биекцията k към $\mathbb{N}$ и вземем множеството от първите n_0 члена, то можем да го ограничим отгоре с число m, така че то да бъде същинско подмножество на $\{1, 2, \dots, m\}$. Например, $m \coloneqq \max\{k_1, \dots, k_{n_0}\}$.

В контекста на горното наблюдение лесно се вижда, че е в сила веригата неравенства:

$$\sum_{n=1}^{n_0} |a_{k_n}| \leq \sum_{i=1}^{m} |a_i| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{, тъй като } \{k_1, k_2, \dots, k_{n_0}\} \subset \{1, \dots, m\}$$

Следователно $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ мажорира $\sum\limits_{n=1}^{n_0} |a_{k_n}|$ за произволен избор на n_0. Остава да заключим, че $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_{k_n}|$ е сходящ, оттам че $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ е абсолютно сходящ.

Остана да покажем, че $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$, т.е. че парциалните суми се схождат към една и съща стойност:

$$\left.\begin{aligned} S_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k \xrightarrow[k\to\infty]{} S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \\ \sigma_n = a_{k_1} + a_{k_2} + \cdots + a_{k_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \sigma = \sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n} \end{aligned}\right\} S \stackrel{?}{=} \sigma$$

Еквивалентно, ще докажем, че за малко положително $\varepsilon > 0$ е изпълнено $|\sigma - S| < \varepsilon$. Нека запишем:

$$|\sigma - S| \le |\sigma - \sigma_n| + |\sigma_n - S_k| + |S_k - S|$$

От знанията ни за редици, очевидно:

$$\exists\, k_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, k \ge k_0 : |S_k - S| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, n \ge n_0 : |\sigma_n - \sigma| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Използваме, че $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ е сходящ и от необходимото и достатъчно условие на Коши:

$$\exists\, \tilde{k} \in \mathbb{N}\ \forall\, k \ge \tilde{k}\ \forall\, p \in \mathbb{N} : \sum_{i=k}^{k+p} |a_i| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Фиксираме k, което е по-голямо както от k_0, така и от $\tilde{k}$. Важното е, че можем да изберем $n \ge n_0$ и $p \in \mathbb{N}$ такива, че за да са в сила включванията:

$$\{1, 2, \ldots, k\} \subset \{k_1, k_2, \ldots, k_n\} \subset \{1, 2, \ldots, k + p\}$$

Тогава:

$$|\sigma_n - S_k| \le \sum_{i=k+1}^{k+p} |a_i| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Това неравенство се нуждае от известно обяснение: от първото от горните включвания сме сигурни, че всички членове на сумата S_k са се съкратили, а от второто включване сме сигурни, че останалите несъкратени членове, участващи в σ_n, са с номера между $k+1$ и $k+p$. След това прилагаме неравенството на триъгълника и безопасно увеличаваме сумата, като добавим модулите на евентуално липсващите елементи с номера между $k+1$ и $k+p$. При така внимателно подбраните k и n се убедихме, че $|\sigma - S| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$ за произволно отнапред фиксирано ε. Следователно $S = \sigma$.

<u>**Теорема 2.**</u> **(Риман)** Ако редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ е условно сходящ, то за всеки две стойности $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$ съществува разместване $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ на $\mathbb{N}$ такова, че ако $\{S_k\}_{k=1}^{\infty}$ е редицата от парциални суми за $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$, то:

$$\liminf S_k = \alpha \quad \text{и} \quad \limsup S_k = \beta$$

Пояснение: Нека е дадена числова редица $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$. Числото $l \in \mathbb{R}$, което е точка на сгъстяване на $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ и за което е изпълнено:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 : b_n > l - \varepsilon,$$

наричаме **най - лява точка на сгъстяване** на редицата $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ и бележим с $l = \liminf b_n$. Аналогично се дефинира **най - дясна точка на сгъстяване**.

Без да даваме формално доказателство, нека все пак се опитаме да разясним смисъла на теоремата. Оказва се, че ако един числов ред е условно сходящ, то каквато и стойност S да изберем, можем така да разместим членовете на реда, че неговата сума да е точно S. Очевидно за такъв ред няма как да бъде в сила комутативният закон.

Наистина, нека $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ е разходящ. Дефинираме:

$$p_n := \frac{a_n + |a_n|}{2} = \max\{a_n, 0\}$$

$$q_n := \frac{|a_n| - a_n}{2} = -\min\{a_n, 0\}$$

Очевидно $p_n + q_n = |a_n|$ и $p_n - q_n = a_n$ за всяко $n \in \mathbb{N}$. Следователно:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (p_n + q_n) \text{ - разходящ, но } \sum_{n=1}^{\infty} (p_n - q_n) \text{ - сходящ!}$$

Горният резултат е интересен предвид факта, че редовете $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n$ са разходящи.

<u>Пример.</u> В параграфа за критерия на Лайбниц разгледахме примера:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$$

В сборника на Проданов, Хаджииванов и Чобанов (глава 8, параграф 13, задача 54) нагледно може да се види как определени размествания на $\mathbb{N}$ водят до промяна на границата на парциалните суми на горния ред. Например, ако първо се сумират първите p положителни члена, след това - първите q отрицателни, после - следващите p положителни, след това - следващите q отрицателни, и т.н., то новият ред остава сходящ, но сумата му става $\ln 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{p}{q}$.

5 Умножение на числови редове

Дадени са $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$. Дефинираме:

$$\begin{cases} c_0 = a_0 b_0 \\ c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0 \\ c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 \\ \dots \\ c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \dots + a_k b_0 \end{cases}$$

def. Числовият ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_k$ се нарича **ред - произведение** (в смисъл на Коши) на редовете $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$. Бележим:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_0 b_k + \dots + a_k b_0) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k$$

Теорема 1. (Коши) Ако са дадени абсолютно сходящи редове $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$, то техният ред-произведение също е абсолютно сходящ и сумата му е равна на $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n\right)$.

Доказателство. Нека $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ е биекция, която съпоставя двойката $(n_k, m_k) \in \mathbb{N}^2$ на дадено число $k \in \mathbb{N}$. Разглеждаме следния ред:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} b_{m_k}$$

Неговите парциални суми имат вида $S_k = a_{n_1} b_{m_1} + \dots + a_{n_k} b_{m_k}$. Ако фиксираме k, винаги можем да намерим достатъчно голямо $k_0 \in \mathbb{N}$, за да са в сила включванията:

$$\{n_1, n_2, \dots, n_k\} \subset \{1, 2, \dots, k_0\}$$
$$\{m_1, m_2, \dots, m_k\} \subset \{1, 2, \dots, k_0\}$$

Тогава:

$$|S_k| \le |a_{n_1} b_{m_1}| + \dots + |a_{n_k} b_{m_k}| \le \left(\sum_{i=0}^{k_0} |a_i|\right)\left(\sum_{i=0}^{k_0} |b_i|\right) \le \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)$$

Неравенството е в сила независимо от избора на k. Да заключим, че $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_{n_k} b_{m_k}|$ е сходящ, т.е. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n_k} b_{m_k}$ е абсолютно сходящ.

За абсолютно сходящите редове е в сила комутативният закон, така че б.о.о. можем да считаме, че $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n_k} b_{m_k}$ е подреден по квадрати:

$$\begin{cases} S_1 = a_0 b_0 \\ S_4 = a_0 b_0 + a_0 b_1 + a_1 b_0 + a_1 b_1 = (a_0 + a_1)(b_0 + b_1) \\ S_9 = a_0 b_0 + a_0 b_1 + a_0 b_2 + a_1 b_0 + \cdots + a_2 b_2 = (a_0 + a_1 + a_2)(b_0 + b_1 + b_2) \\ \ldots \end{cases}$$

Изобщо,

$$S_{n^2} = (a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1})(b_0 + b_1 + \cdots + b_{n-1}) \xrightarrow[n \to \infty]{} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k \right)$$

Теорема 2 (Мертенс) Ако $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ е абсолютно сходящ, а $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ е сходящ, то редът-произведение е сходящ със сума:

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right)$$