Метод на свиващите изображения за решаване на нелинейни уравнения

Разглеждаме $f(x) = x^3 - 9x + 2 = 0$. Търсим корените на $f(x) = 0$. От $f \in \pi_3 => f(x) = 0$ има не повече от три различни реални корена. Първата ни задача е да определим броя на положителните и отрицателните корени на уравнението и след това да локализираме корените в достатъчно малки интервали. Броят на положителните корени на уравнението зависи от смените на знаците в редицата от коефициенти на f: $S_f(a_0, a_1, a_2, a_3) = (1,0,-9,2)$. Имаме две смени на знака и следователно f има два положителни корена или с четно число по-малко. Определяме броя на отрицателните корени на f като намерим броя на положителните корени на $g(x) = -f(-x)$; $S_g = (1,0,-9,-2)$. Следователно g има един положителен корен, т. е. f има един отрицателен корен и два положителни. Една горна граница на положителните корени на f е числото $L_f = 1 + \sqrt[k]{\frac{A}{a_0}}$, където $A = \max_{a_i<0}|a_i|$, а k е индексът на първия отрицателен коефициент. Получаваме горна граница на положителните корени $L_f = 1 + \sqrt[2]{\frac{9}{1}} = 4$. За определяне на долна граница на положителните корени разглеждаме $g_1(x) = x^3 f\left(\frac{1}{x}\right) = 2x^3 - 9x^2 + 2 => L_{g_1} = 1 + \sqrt[1]{\frac{9}{2}} = \frac{11}{2}$. Следователно долна граница на положителните корени на f е $l_f = \frac{1}{L_{g_1}} = \frac{2}{11}$.

Определяме интервалите, в които са разположени корените:

$f(-4) = -26 < 0; f(-3) = 2 > 0$ следователно отрицателният корен на $f(x) = 0$ е $\alpha \in [-4,-3]$.

$f(0) = 2 > 0; f(1) = -6 < 0$. Локализираме първият положителен корен $\beta \in \left[\frac{2}{11}, 1\right]$.

$f(2) = -8 < 0; f(3) = 2 > 0$, от което получаваме, че последният корен на $f(x) = 0$ се намира в интервала $\gamma \in [2,3]$.

Свиващо изображение: Нека $x \in [a,b]$. Непрекъснатата функцията $\varphi(x)$ се нарича свиващо изображение на интервала $[a,b]$ в себе си с константа $q \in (0,1)$, ако:

$$\varphi([a,b]) \subseteq [a,b] \qquad (1)$$

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \le q|x-y|, \ \forall x,y \in [a,b]. \qquad (2)$$

От теоремата за крайните нараствания следва, че (2) е еквивалентно на

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| = |\varphi'(x_*)|.|x-y| \le q.|x-y|, \qquad \text{където } x_* \in (a,b), \qquad \forall x,y \in [a,b]$$

$$=> max|\varphi'(x)| \le q, \forall x \in [a,b] \qquad (3)$$

Теорема 1: Нека $\varphi(x)$ е непрекъснато свиващо изображение на $[a,b]$ в себе си с константа $q \in (0,1)$. Тогава:

1) Уравнението $\varphi(x) = x$ притежава единствен корен $\xi \in [a,b]$;
2) Нека $x_{n+1} = \varphi(x_n),\ n = 0,1,2,\dots$ Редицата $\{x_n\}$ клони към ξ при $n \to \infty$ при всяко начално приближение $x_0 \in [a,b]$. При това $|x_n - \xi| \le (b-a).q^n$ за всяко n.

Задача 1: Числено пресмятане на $\alpha \in [-4,-3]$ по метода на свиващите изображения.

Решение: Трансформираме уравнението $x^3 - 9x + 2 = 0$ в еквивалентно (в интервала $[-4,-3]$) уравнение:

$$x(x-3)(x+3) = -2 <=> x = -3 - \frac{2}{x(x-3)}.$$

Ще покажем, че функцията $\varphi(x) = -3 - \frac{2}{x(x-3)}$ удовлетворява условията (1) и (3). Имаме

$$\varphi'(x) = \frac{2(2x-3)}{x^2(x-3)^2} < 0, \forall x \in [-4,-3] => \varphi(x) \text{ е монотонно намаляваща функции}$$

$$=> \ \varphi([-4,-3]) = [\varphi(-3), \varphi(-4)] = \left[-3\frac{1}{9}, -3\frac{1}{14}\right] \subset [-4,-3]$$

При $x \in [-4,-3]$ имаме

$$|\varphi'(x)| = -\frac{2(2x-3)}{x^2(x-3)^2} \le \frac{2\big(3-2.(-4)\big)}{(-3)^2(-3-3)^2} = \frac{11}{162} < \frac{1}{14}.$$

Следователно $\varphi(x)$ е свиващо изображение в интервала $[-4,-3]$ с константа $q = \frac{1}{14}$ и съгласно **Теорема 1**, итерационният процес

$$x_0 = -3, x_{n+1} = -3 - \frac{2}{x_n(x_n-3)}, n = 0,1,2,\dots$$

ще клони към корена α на уравнението $f(x) = 0$. Ще осъществим итерациниия процес за намиране на корена α с точност $Eps = 10^{-15}$ с помощта на *Wolfram Mathematica*:

```
Eps=10^(-15);n=0; x=-3;
While[1/14^n≥Eps,x=-3-2/(x*(x-3));n++];
{n,N[x,16]}
```

Резултатът от изпълнението на програмата е:

$$\{14, -3.105482616526304\}$$

Т.е. 14 итерации са необходими за намиране на $\alpha = -3.105482616526304$ с точност $Eps = 10^{-15}$.

Задача 2: Числено пресмятане на $\beta \in \left[\frac{2}{11}, 1\right]$ по метода на свиващите изображения.

Решение: Трансформираме уравнението $x^3 - 9x + 2 = 0$ в еквивалентно

$$x = \frac{1}{9}(x^3 + 2).$$

Ще покажем, че функцията

$$\varphi(x) = \frac{1}{9}(x^3 + 2)$$

удовлетворява условията (1) и (3). Имаме

$$\varphi'(x) = \frac{x^2}{3} > 0, \forall x \in \left[\frac{2}{11}, 1\right] => \varphi(x) \text{ е монотонно растяща функци}$$

$$=> \ \varphi\left(\left[\frac{2}{11}, 1\right]\right) = \left[\varphi\left(\frac{2}{11}\right), \varphi(1)\right] \subset \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \subset \left[\frac{2}{11}, 1\right]$$

$$0 < \varphi'(x) \leq \frac{1}{3}x^2 \leq \frac{1}{27}, \forall x \in \left[\frac{2}{11}, \frac{1}{3}\right].$$

Получаваме, че $\varphi(x)$ е свиващо изображение с константа $q = \frac{1}{27}$ в интервала $\left[\frac{2}{11}, 1\right]$ и итерационният процес

$$x_0 = \frac{2}{11},\ x_{n+1} = \frac{1}{9}(x_n^3 + 2), n = 0,1,2, \ldots$$

ще клони към корена β на уравнението $f(x) = 0$. Ще намерим корена β с точност $Eps = 10^{-15}$ с помощта на *Wolfram Mathematica*:

```
Eps=10^(-15);n=0; x=2/11;
While[1/27^n≥Eps,x=(x^3+2)/9;n++];
{n,N[x,16]}
```

Резултатът от изпълнението на програмата е:

$$\{11{,}0.2234620716692352\}$$

Т.е. 11 итерации са необходими за намиране на $\beta = 0.2234620716692352$ с точност $Eps = 10^{-15}$.

Задача 3: Числено пресмятане на $\gamma \in [2,3]$ по метода на свиващите изображения.

Решение: Трансформираме уравнението $x^3 - 9x + 2 = 0$ в еквивалентно (в интервала $[2,3]$) уравнение:

$$x(x-3)(x+3) = -2 <=> x = 3 - \frac{2}{x(x+3)}.$$

Ще покажем, че функцията $\varphi(x) = 3 - \frac{2}{x(x+3)}$ удовлетворява (1) и (3). Имаме

$$\varphi'(x) = \frac{2(2x+3)}{x^2(x+3)^2} > 0, \forall x \in [2,3] \ => \varphi(x) \text{ е монотонно растяща функци}$$

$$=> \varphi([2,3]) = [\varphi(2), \varphi(3)] = \left[2\frac{4}{5}, 2\frac{8}{9}\right] \subset [2,3]$$

При $x \in [2,3]$ имаме

$$|\varphi'(x)| = \frac{2(2x+3)}{x^2(x+3)^2} \leq \frac{2(2.3+3)}{2^2.5^2} < \frac{9}{50}.$$

Следователно $\varphi(x)$ е свиващо изображение в интервала $[2,3]$ с константа $q = \frac{9}{50}$ и съгласно **Теорема 1**, итерационният процес

$$x_0 = 3, x_{n+1} = 3 - \frac{2}{x_n(x_n+3)}, n = 0,1,2,\ldots$$

ще клони към корена γ на уравнението $f(x) = 0$. Ще осъществим итерациниия процес за намиране на корена γ с точност $Eps = 10^{-15}$ с помощта на *Wolfram Mathematica*:

```
Eps=10^(-15);n=0; x=3;
While[(9/50)^n≥Eps,x=3-2/(x*(x+3));n++];
{n,N[x,16]}
```

Резултатът от изпълнението на програмата е:

$$\{21, 2.882020544857068\}$$

Необходими са 21 итерации за численото намиране на последния корен $\gamma = 2.882020544857068$ на уравнението $f(x) = 0$ с точност $Eps = 10^{-15}$.