Симетрична група

S_n $\quad M=\{1,2,\dots,n\}$ $\qquad$ $S_n = \{\varphi : M\to M \,/\, \text{биекция}\}$

$(\varphi\circ\psi)(x)=\varphi(\psi(x))$; $|S_n| = n!$

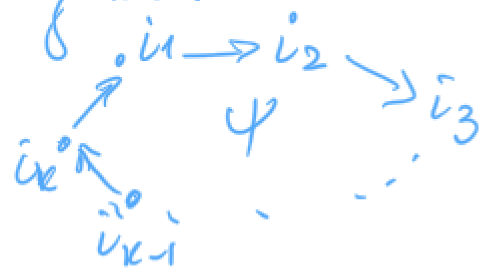
$\varphi \neq id$

Т/ $\varphi\neq id$, $\varphi\in S_n$
φ - се представя по единствен н-н като произведение на незав. цикли (единственост с точност до реда на множителите)

Тв/ Св-во (за $(G,\cdot)$ група)
Ако $a,b\in G$ и $ab=ba$
и $\langle a\rangle\cap\langle b\rangle=\{e\}$
$\Rightarrow |a\cdot b| = \text{НОК}(|a|,|b|)$

за упр

$\psi = (i_1,\dots,i_k)$
цикъл



$\psi, \ \tau=(j_1,\dots,j_s)$
независими
$\{i_1,\dots,i_k\}\cap\{j_1\dots j_s\}=\emptyset$

$\psi\circ\tau=\tau\circ\psi$

Ако

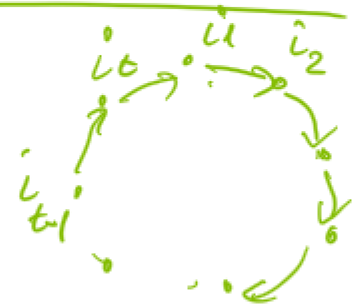
$\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k$ независими цикли

$\psi_i \circ \psi_j = \psi_j \circ \psi_i$ и $\langle \psi_i \rangle \cap \langle \psi_j \rangle = \{id\}$

$\Rightarrow |\psi_1 \circ \psi_2 \circ \dots \psi_k| = НОК(|\psi_1|, |\psi_2|, \dots, |\psi_k|)$

$\varphi = (i_1, \dots, i_t)$ $\quad \varphi^t(i_s) = i_s \quad s = 1, \dots, t$

$|\varphi| = t$



$\varphi \in S_n$ и представен като произв. на независ. цикли

φ нека има брой m_1 – цикъла с дълж. 1 (неподв. т.)

цикличната структура m_2 – цикли с дълж. 2

$[m_1, m_2, \dots, m_n]$ $\quad \vdots$

m_k – бр. цикли с дълж. k

$n = m_1 + 2m_2 + 3m_3 + \dots + n.m_n$ $\quad \vdots$

m_n

$|\varphi| = НОК\{k \mid m_k \neq 0\}$

$\boxed{|\varphi| = НОК\{k \mid m_k \neq 0\}}$

$\varphi \in S_n$

цикл. структура φ $[3, 2, 5, 7, 0, 1, 0 \dots 0]$

$\ \ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 6\ \ 7$

$n = ?$

$3\cdot 1 + 2\cdot 2 + 5\cdot 3 + 7\cdot 4 + 0\cdot 5 + 1\cdot 6 + 0 \dots 0 = 56$

$n = 56$

$|\varphi| = \text{НОК}(2,3,4,6) = 12$

$(x,y) = (y,x)$

$(x,y,z) = (y,z,x) = (z,x,y)$

$(x,z,y) = (z,y,x) = (y,x,z)$

$(xy)(zt) = (yx)(zt) = (xy)(tz) = (yx)(tz) = (zt)(xy) = (tz)(yx) = \dots$

$|S_4| = 24$

			рег
[4,0,0,0]	id	1 бр.	1
[2,1,0,0]	(x,y)	6 бр	2
[1,0,1,0]	(x,y,z)	8 бр	3
[0,0,0,1]	(x,y,z,t)	6 бр	4
[0,2,0,0]	(xy)(zt)	3 бр	2

$(1x)(\ \ )$

$(12)(34)$

$(13)(24)$

$(14)(23)$

за

S_5

Опр. $(G, \cdot)$ група $\quad a \sim b$ когато $\exists\, c$

$$\boxed{b = c^{-1} a c}$$

$\varphi = (i_1, \ldots, i_t)$, $\quad \tau \in S_n$

$\psi = \tau^{-1} \circ \varphi \circ \tau$

$\psi = (\tau^{-1}(i_1), \tau^{-1}(i_2), \ldots, \tau^{-1}(i_t))$

$$\tau^{-1}(i_1) \xrightarrow{\tau} i_1 \xrightarrow{\varphi} i_2 \xrightarrow{\tau^{-1}} \tau^{-1}(i_2)$$

$$\tau^{-1}(i_2) \longrightarrow i_2 \longrightarrow i_3 \xrightarrow{\tau^{-1}} \tau^{-1}(i_3)$$

$$\psi = \tau^{-1} \varphi \tau = (\tau^{-1}(i_1), \tau^{-1}(i_2), \ldots, \tau^{-1}(i_t))$$

$\tau^{-1} = \mu$

$$\psi = \mu \varphi \mu^{-1} = (\mu(i_1), \mu(i_2), \ldots, \mu(i_t))$$

$$\mu \varphi_1 \varphi_2 \cdots \varphi_s \mu^{-1} = (\mu \varphi_1 \mu^{-1})(\mu \varphi_2 \mu^{-1}) \cdots (\mu \varphi_s \mu^{-1})$$

Тв) Ако φ представен като незав. цикли

$$\varphi = \psi_1 \circ \psi_2 \circ \dots \psi_s = (i_1^1 \dots i_{r_1}^1)(i_1^{(2)} \dots i_{r_2}^{(2)}) \dots (i_1^{(s)} \dots i_{r_s}^{(s)})$$

$$\mu\varphi\mu^{-1} = (\mu\psi_1\mu^{-1}) \circ \dots \circ (\mu\psi_s\mu^{-1}) =$$

$$= (\mu(i_1^1) \dots \mu(i_{r_1}^1))(\mu(i_1^{(2)}), \dots, \mu(i_{r_2}^{(2)})) \dots (\mu(i_1^{(s)}), \dots, \mu(i_{r_s}^{(s)}))$$

$$\mu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 1 & 7 & 6 & 8 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\varphi = (1,2,3)(4,5)(6,7,8)$$

$$\mu\varphi\mu^{-1} = (3,5,1)(7,6)(8,2,4)$$

$$\psi = \boxed{(2,6)}(1,5,4)(3,8,7) \text{ цел.}$$

$$(6,2)$$

$\varphi \sim \psi$?

$\varphi \to [0,1,2,0, \dots 0]$

$\psi \to [0,1,2,0 \dots 0]$.

$$\tau \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 7 & 6 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$\psi = \tau\varphi\tau^{-1}$

τ не е единствено

Въпроси???

Транспозиция
цикъл с дължина 2 $\longrightarrow \tau = (x, y)$, $\tau^2 = id$

① Всеки елемент от S_n може да се представи като произв. на транспозиции

$j \notin \{i_1, \dots, i_k\}$

$(i_1, \dots, i_k) = (i_1, i_k) \dots (i_1, i_5)(i_1, i_4)(i_1, i_3)(i_1, i_2)$

имаме най-разл. представяния

$(j, i_1)(j, i_k) \dots (j, i_3)(j, i_2)(j, i_1)$

различни числа

① $(b, c)(a, x) = (a, x)(b, c)$

② $(a, b)(a, x) = (a, x, b) = (b\, x)(a, b)$

③ $(b x)(a x) = (a, b, x) = (a x)(a b)$

④ $(a x)(a x) = id$

$\underline{\underline{T}} / \underline{\underline{S_n}}$

а) Ако $\tau_1 \circ \ldots \circ \tau_k = id$ и $\tau_1, \ldots, \tau_k$ транспозиции тогава $\underline{\underline{k}}$ е четно число

$\boxed{б)}$ $\varphi = \tau_1 \ldots \tau_k = \mu_1 \ldots \mu_s$, τ_i, μ_j са транспозиции тогава $k \equiv s \pmod 2$

Д-во а) $\boxed{\tau_1 \ldots \tau_k = id}$

x число което участва в някое τ_i

тръгваме от $x \to x-1 \to \ldots \to 1$

$\tau_k \to \tau_k'$ но е без x

$\tau_{k-2}, \tau_{k-1}' \longrightarrow$ без x τ_{k-1}'' $(\tau_{k-2}' \underline{\underline{\tau_{k-1}''}}$

$\tau_{k-3} \tau_{k-2}' \longrightarrow$ $\tau_{k-3}' \tau_{k-3}''$

$\tau_1 \tau_2' \longrightarrow \tau_1' \tau_2''$

Възможно ли е τ_1' в което има $\underline{\underline{x}}$

$(a,x) \underbrace{\tau_2'' \tau_3'' \ldots \tau_k''}_{\text{няма } x} = id$ Не

$\Rightarrow$ няма $\underline{\underline{x}}$

$(bc)(\underline{\underline{ax}}) = (ax)(bc)$

$(ab)(ax) = (bx)(ab)$

$(bx)(ax) = (ax)(ab)$

$(uv)(uv) = id$

$\tau_1 \dots \tau_k \longrightarrow \tau_1'' \dots \tau_s''$ $\qquad (uv)(uv) = id$

$s = k - \underline{2 \cdot p}$ (p - брой пъти когато сме използвали правилото $(uv)(uv) = id$)

и получихме $\tau_1'' \dots \tau_s'' = id$ и няма $\underline{x}$ в записа

Продължаваме да махаме от числата които участват в транспозициите

На всяка стъпка намаляваме бр. на транспозициите с четно число и накрая остават 0 остават

$\Rightarrow k \equiv 0 \pmod 2$

T.a

б) $\tau_1 \dots \tau_k = \mu_1 \dots \mu_s = \varphi$

$\mu_i^2 = id \quad \mu_i^{-1} = \mu_i$

$\tau_1 \dots \tau_k \mu_s \mu_{s-1} \dots \mu_1 = id$

$k + s \equiv 0 \ (2) \Rightarrow k \equiv s \pmod 2$

$A_n = \{\varphi \in S_n \mid \varphi$ - четна перм.$\}$ $\quad A_n \cap B_n = \emptyset$

$B_n = \{\varphi \in S_n \mid \varphi$ - нечетна перм$\}$ $\quad A_n \cup B_n = S_n$

$\mu : S_n \to S_n \qquad \mu(A_n) \subset B_n \qquad \mu^2 = \underline{\underline{id}}$

$\mu(\varphi) = (1,2) \circ \varphi \qquad \mu(B_n) \subset A_n \qquad \mu$ е елемент от $S(S_n)$

φ - четно $\xrightarrow{\mu}$ нечетно

φ нечетно $\to$ четно $\qquad \Longrightarrow \mu(A_n) = B_n$

$\mu(B_n) = A_n$

ТВ

$\Longrightarrow |A_n| = |B_n| = \dfrac{n!}{2}$

$A_n < S_n$

Алтернативна

A_n е група (приложен.) $\qquad$ четна $\circ$ четна = четна

id - четна перм

$\varphi = \tau_1 \cdots \tau_s \qquad \varphi$ - четна $\Rightarrow \varphi^{-1}$ - четна

$\varphi^{-1} = \tau_s \tau_{s-1} \cdots \tau_1$

подгрупа

Опр. Нека $\varphi = \tau_1 \dots \tau_k$ (τ_i - транспозиции)

φ е четен елемент на S_n ако $\underline{k}$ е четно число

φ нечетен елемент ако k нечетно число

---

id $\rightarrow$ четна пермутация (ел. от S_n)

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$$

φ е четна перм.

$\Leftrightarrow$ $i_1, \dots, i_n$ четна перм.

(т.е. има четен брой инверсии както по Ал.)

$\varphi (S, K)$

φ - четно

ψ - четно

τ - нечетно

μ - нечетно

$\varphi \circ \psi$ - четна

$\varphi \circ \tau$ - нечетно

$\mu \circ \tau$ - четно

(x, y, z) - четно

Зад. $(i_1 \dots i_k)$ е четна перм.

$\Leftrightarrow$ k - нечетно число

Т. Кейли // Всяка група G е изоморфна на подгрупа на симетр. група $S(G)$

$|G| = n \Rightarrow G \cong H < S_n$

Д-во $(G, \cdot)$ $\quad S(G) = \{\varphi : G \to G \mid \varphi$ - биекция$\}$

$a \in G \to \varphi_a : G \to G \quad \varphi_a(x) = ax \in G \ (x \in G)$

$\varphi_a(x) = \varphi_a(y) \Rightarrow ax = ay \Leftrightarrow a^{-1}(ax) = a^{-1}(ay) \Leftrightarrow x = y$

$t \in G \quad \varphi_a(x) = t \Rightarrow ax = t \Rightarrow x = a^{-1}t$ т.е. $t = \varphi_a(a^{-1}t)$

$\Rightarrow \varphi_a \in$ биекция т.е. $\varphi_a \in S(G)$

$H = \{\varphi_a \mid a \in G\} \subset S(G)$

$(\varphi_a \circ \varphi_b)(x) = \varphi_a(\varphi_b(x)) = \varphi_a(bx) = a(bx) = (ab)x = \varphi_{ab}(x)$

$\Rightarrow \varphi_a \circ \varphi_b = \varphi_{ab} \in H$

$(\varphi_a)^{-1} = \varphi_{a^{-1}} \quad \Rightarrow \varphi_{a^{-1}} \circ \varphi_a(x) = a^{-1}(ax) = x = id(x)$

$H < S(G)$ $\qquad$ ще док. $G \cong H$

$\Phi : G \longrightarrow H < S(G)$

$\Phi(a) = \varphi_a$

$$\boxed{\varphi_a \circ \varphi_b = \varphi_{ab}}$$

$- \ \Phi(a) \circ \Phi(b) = \Phi(a.b)$

$a \longrightarrow \Phi(a) = \varphi_a$

$b \longrightarrow \Phi(b) = \varphi_b$

$\varphi_a \overset{?}{=} \varphi_b \Longleftrightarrow \varphi_a(x) = \varphi_b(x), \forall x \in G$

$ax = bx \quad (\exists x^{-1}$

$\Updownarrow$

$a = b$

$\Longrightarrow \Phi$ инекция

$H = \{ \varphi_a \mid a \in G \} \Longrightarrow \Phi$ е сюрекция

$\varphi_a = \Phi(a)$

$\Longrightarrow \Phi$ е изоморфизъм

$G \cong H < S(G)$

Съседни класове, Т. на Лагранж

$(G, \cdot)$, $H < G$, $a \in G$

$aH = \{ax \mid x \in H\}$ ляв съседен клас

$Ha = \{xa \mid x \in H\}$ десен със. клас

$aH \subset G$, $Ha \subset G$

$(L, +)$, $T < L$, $a \in L$

$a + T = \{a + x \mid x \in T\}$

$T + a = \{x + a \mid x \in T\}$

Св-ва на със. класове

Св-во 1 $aH < G \iff a \in H \iff aH = H$

Д-во $aH < G \Rightarrow e \in aH \Rightarrow \exists x_1 \in H : ax_1 = e \Rightarrow a = x_1^{-1} \in H$

$a \in H \Rightarrow h \in H : h = a\underbrace{(a^{-1}h)}_{\in H} \in aH \Rightarrow aH \supset H$

$\underset{H}{a}\underset{H}{x} \in aH \subset H \Rightarrow aH = H$

$aH = H \Rightarrow a = ae \in H \Rightarrow aH = H < G$

Св-во 1' $Ha < G \iff a \in H \iff Ha = H$

Св-во 2 $b \in aH \Leftrightarrow bH = aH$

Нека $b \in aH \Rightarrow b = ah_1, \; h_1 \in H$

$t \in bH \Rightarrow t = bh_2 = a\underbrace{(h_1 h_2)}_{\in H}, \; h_2 \in H$

$\Rightarrow t \in aH \Rightarrow \boxed{bH \subset aH}$

Нека $u \in aH \Rightarrow u = ah_3, \; h_3 \in H$

$b = ah_1 \Rightarrow a = bh_1^{-1}$

$u = b\underbrace{h_1^{-1}h_3}_{\in H}$

$u \in bH$

$\Rightarrow aH \subset bH \Rightarrow aH = bH$

$\Leftarrow$ Ако $bH = aH$

$b = be \in bH = aH \Rightarrow b \in aH$

св-во 2'

$c \in Ha \Leftrightarrow Ha = Hc$

за ~~упр.~~

Св-во 3

$$aH \cap bH = \begin{cases} \emptyset & \text{ако } b \notin aH \\ aH = bH, & \text{ако } b \in aH \end{cases}$$

Свойство 3'

$$Ha \cap Hb = \begin{cases} \emptyset & b \notin Ha \\ Ha = Hb, & b \in Ha \end{cases}$$

Нека $aH \cap bH \neq \emptyset \Rightarrow \exists\, c \in aH \cap bH$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} c \in aH \Rightarrow cH = aH \\ c \in bH \Rightarrow cH = bH \end{array}\right\} \Rightarrow aH = bH \text{ т.е. } b \in aH$$

Пр. $S_3 = \{id, (12), (13), (23), (123), (132)\}$; $H = \langle (13) \rangle = \{id, (13)\}$

$idH = H$; $(13)H = H$

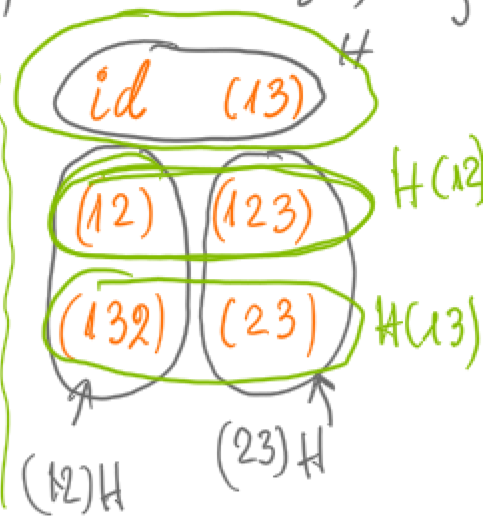
$(12)H = \{(12), \underset{=(132)}{(12)(13)}\} = (132)H$

$(23)H = \{(23), \underset{=(123)}{(23)(13)}\} = (123)H$

$Hid = H$; $H(13) = H$

$H(12) = \{(12), \underset{=(123)}{(13)(12)}\}$

$H(23) = \{(23), \underset{=(132)}{(13)(23)}\}$



<u>Св-во</u> само при краен бр

$$G = \bigcup_{a \in G} aH = a_1H \cup a_2H \cup \dots \cup a_sH$$

$$G = \bigcup_{a \in G} Ha$$

<u>Св-во</u>

$$aH = bH \Leftrightarrow b \in aH \Leftrightarrow a^{-1}b \in H$$

<u>Св-во</u>

$$Ha = Hb \Leftrightarrow b \in Ha \Leftrightarrow ab^{-1} \in H$$

$aH = bH \Rightarrow b \in aH$ т.е. $b = ah_1$, $h_1 \in H$

$$a^{-1}b = h_1 \in H$$

ако $a^{-1}b = h_2 \Rightarrow b = ah_2 \in aH$

$Ha = Hb \Leftarrow b \in Ha$

$b = h_3 a \Rightarrow e = h_3 a b^{-1}$

$$h_3^{-1} = ab^{-1} \in H$$

<u>Св-во</u> Ако $|H| < \infty$

$\Rightarrow |aH| = |H| = |Ha|$

$$ah_1 = ah_2 \overset{\exists a^{-1}}{\Leftrightarrow} h_1 = h_2 \Leftrightarrow h_1 a = h_2 a$$

Тв. Нека $H < G$

$L_H = \{aH \mid a \in G\}$; $R_H = \{Ha \mid a \in G\}$

Тогава L_H и R_H са равномощни

<u>Д-во</u> $\Phi : L_H \to R_H$

$\Phi(aH) = Ha^{-1}$

1) Φ коректно деф. ли е?

$aH = bH \Leftrightarrow a^{-1}b \in H$

$\Phi(aH) = Ha^{-1}$
$\Phi(bH) = Hb^{-1}$
$\Leftrightarrow a^{-1}(b^{-1})^{-1} \in H$

$aH = bH \Rightarrow \Phi(aH) = \Phi(bH)$ (*)

(*) → коректна е деф.
→ инекция

$Hx \in R_H$

$\Phi(x^{-1}H) = H(x^{-1})^{-1} = Hx$

$\Rightarrow \Phi$ е сюрекция

$\Rightarrow \Phi$ биекция

Сл. Броя на левите със. класове е равен на броя на десните със. кл.

Опр. $H<G$ Броя на левите със. класове на H в G (= на бр. на десните със. класове) се нарича **индекс** на H в G ($|G:H|$)

Т. Лагранж/ Ако $(G,\cdot)$ е крайна група $|G|<\infty$ и $H<G$, тогава $|G|=|H|\cdot|G:H|$

Дво// G - крайна $\Rightarrow G=eH\cup a_2H\cup\ldots\cup a_tH$ непресич.

$t=|G:H|$ $\quad a_iH\cap a_jH=\emptyset$

$$|G|=\underbrace{|eH|}_{=|H|}+\underbrace{|a_2H|}_{=|H|}+\ldots+\underbrace{|a_tH|}_{=|H|}=t\cdot|H|$$

$|G|=|G:H|\cdot|H|$ Лагранж

$(1,3)(2,4)(\cancel{1,5})(3,2)(5,4)(2,1)(25)(34) = id$

$(15)(12)(34)$

$(\cancel{15})\ (\cancel{15})\ (14)\ (12)(34)$

(32)

$(13)\ (24)$

$(13)(\cancel{24})(32)(\cancel{14})(12)(34)$

$(\cancel{34})\ (12)$

$(34)\ (13)$

$(\cancel{24})\ (23)$

$(13)(23)(13)(12)$

$\cancel{(13)}\ \cancel{(13)}\ (12)\ (12)$

$id = id$

$(bc)(ax) = (ax)(bc)$

$(ab)(ax) = (bx)(ab)$

$(bx)(ax) = (ax)(ab)$

$(uv)(uv) = id$

$\cancel{= (1)(2,5)(3,4)}$

$\cancel{5}\ \cancel{4}\ \cancel{3}$