Условни средни стойности - пример

6 май 2023 г.

Задача 1 Нека X е дискретна случайна величина, а $\{H_k\}_{k\geq 1}$ е пълна група от събития. Да се докаже, че при $\mathbf{E}X < \infty$ е в сила

$$\mathbf{E}X = \sum_k \mathbf{E}(X|H_k)\mathbf{P}(H_k).$$

Решение От $\mathbf{E}X < \infty$ следва, че двойните редове по-долу са абсолютно сходящи, което ни дава право да сменим редът на сумиране:

$$\sum_k \mathbf{E}(X|H_k)\mathbf{P}(H_k) = \sum_k \sum_{x\in X(\Omega)} x\mathbf{P}(X = x|H_k)\mathbf{P}(H_k)$$

$$= \sum_{x\in X(\Omega)} x \sum_k \mathbf{P}(X = x|H_k)\mathbf{P}(H_k) = \sum_{x\in X(\Omega)} x\mathbf{P}(X = x) = \mathbf{E}X.$$

Задача 2 Чувалче съдържа n подаръка, номерирани с числата от 1 до n. По случаен начин са извадени няколко подаръка, като всеки от подаръците може да е сред извадените с вероятност p. Да се определи средната стойност на сумата от номерата на извадените подаръци. Ще се промени ли търсената средна стойност, ако е известно, че са извадени точно k подаръка?

Решение Нека A_k са събитията: k е сред извадените подаръци, и нека I_{A_k} е характеристичната функция на A_k. Тогава $X = \sum_{k=1}^n kI_{A_k}$ е сумата от номерата на извадените подаръци. Следователно $\mathbf{E}X = \sum_{k=1}^n k\mathbf{E}I_{A_k} = \sum_{k=1}^n kp = \frac{n(n+1)p}{2}$.

Забележка 0.1. *Задача 2 може да бъде решена чрез приложение на задача 1. Нека* $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ *и за всяко непразно* $\alpha \subset A$ *да означим с* $S_\alpha = \sum_{a\in\alpha} a$*. Нека* $\{H_\alpha\}$ *са сбъбитията: извадените подаръци са с номера принадлежащи на* α*. Тогава* $\mathbf{P}(H_\alpha) = p^{|\alpha|}(1-p)^{n-|\alpha|}$ *и*

$$\mathbf{E}X = \sum_{\alpha\subset A} \mathbf{E}(X|H_\alpha)\mathbf{P}(H_\alpha)$$

$$= \sum_{\alpha\subset A} \sum_{l\in X(\Omega)} l\mathbf{P}(X = l|H_\alpha)\mathbf{P}(H_\alpha) = \sum_{\alpha\subset A} S_\alpha . p^{|\alpha|}(1-p)^{n-|\alpha|}$$

$$= \sum_{k=1}^n \sum_{\alpha\subset A,\ |\alpha|=k} S_\alpha . p^k(1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^n p^k(1-p)^{n-k} \sum_{\alpha\subset A,\ |\alpha|=k} S_\alpha$$

$$= \sum_{k=1}^{n} p^k (1-p)^{n-k} \sum_{m=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} m = \frac{n(n+1)}{2} p \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} p.$$

Използваме въведените означения в 0.1, и нека B_k е събитието: извадени са точно k подаръка. Следователно $\mathbf{P}(B_k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, $H_\alpha \subset \{X = S_\alpha\}$ и

$$B_k = \bigcup_{\alpha \subset A,\ |\alpha| = k} H_\alpha.$$

Пресмятаме

$$\mathbf{E}(X|B_k) = \sum_{l \in X(\Omega)} l.\mathbf{P}(X = l | B_k) = \frac{1}{\mathbf{P}(B_k)} \sum_{l \in X(\Omega)} l.\mathbf{P}(X = l, B_k)$$

$$= \frac{1}{\mathbf{P}(B_k)} \sum_{l \in X(\Omega)} l.\mathbf{P}(X = l, \bigcup_{\alpha \subset A,\ |\alpha| = k} H_\alpha)$$

$$= \frac{1}{\mathbf{P}(B_k)} \sum_{l \in X(\Omega)} \sum_{\alpha \subset A,\ |\alpha| = k} l.\mathbf{P}(X = l, H_\alpha)$$

$$= \frac{1}{\mathbf{P}(B_k)} \sum_{\alpha \subset A,\ |\alpha| = k} \sum_{l \in X(\Omega)} l.\mathbf{P}(X = l, H_\alpha)$$

$$= \frac{1}{\mathbf{P}(B_k)} \sum_{\alpha \subset A,\ |\alpha| = k} S_\alpha.\mathbf{P}(X = S_\alpha, H_\alpha)$$

$$= \frac{1}{\mathbf{P}(B_k)} \sum_{\alpha \subset A,\ |\alpha| = k} S_\alpha.\mathbf{P}(H_\alpha)$$

$$= \frac{p^k (1-p)^{n-k}}{\mathbf{P}(B_k)} \sum_{\alpha \subset A,\ |\alpha| = k} S_\alpha$$

$$= \frac{1}{\binom{n}{k}} \sum_{j=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} j = \frac{k}{n} \times \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\Longrightarrow \mathbf{E}(X|B_k) = \frac{k(n+1)}{2}.$$