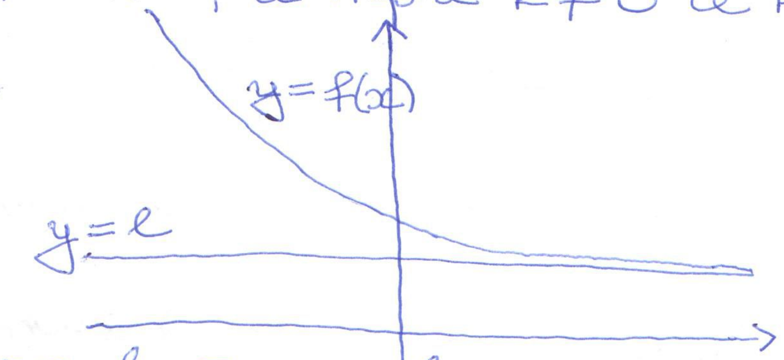
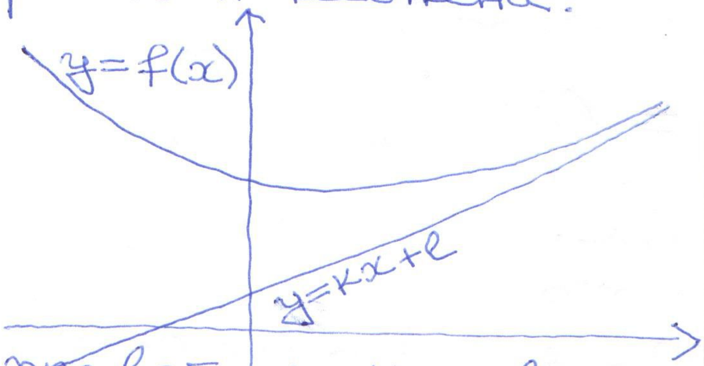
① Упражнение 22 за 1, 2 и 3 група

Асимптоти

Опр. 1 Нека $f(x)$ е дефинирана в $(a,+\infty)$. Правата $y=kx+l$ се нарича асимптота на $f(x)$ при $x\to+\infty$, ако $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(kx+l)]=0$. При $k=0$ асимптотата се нарича хоризонтална, а при $k\neq 0$ се нарича наклонена.



правата $y=l$ е хоризонтална асимптота на $f(x)$ при $x\to+\infty$

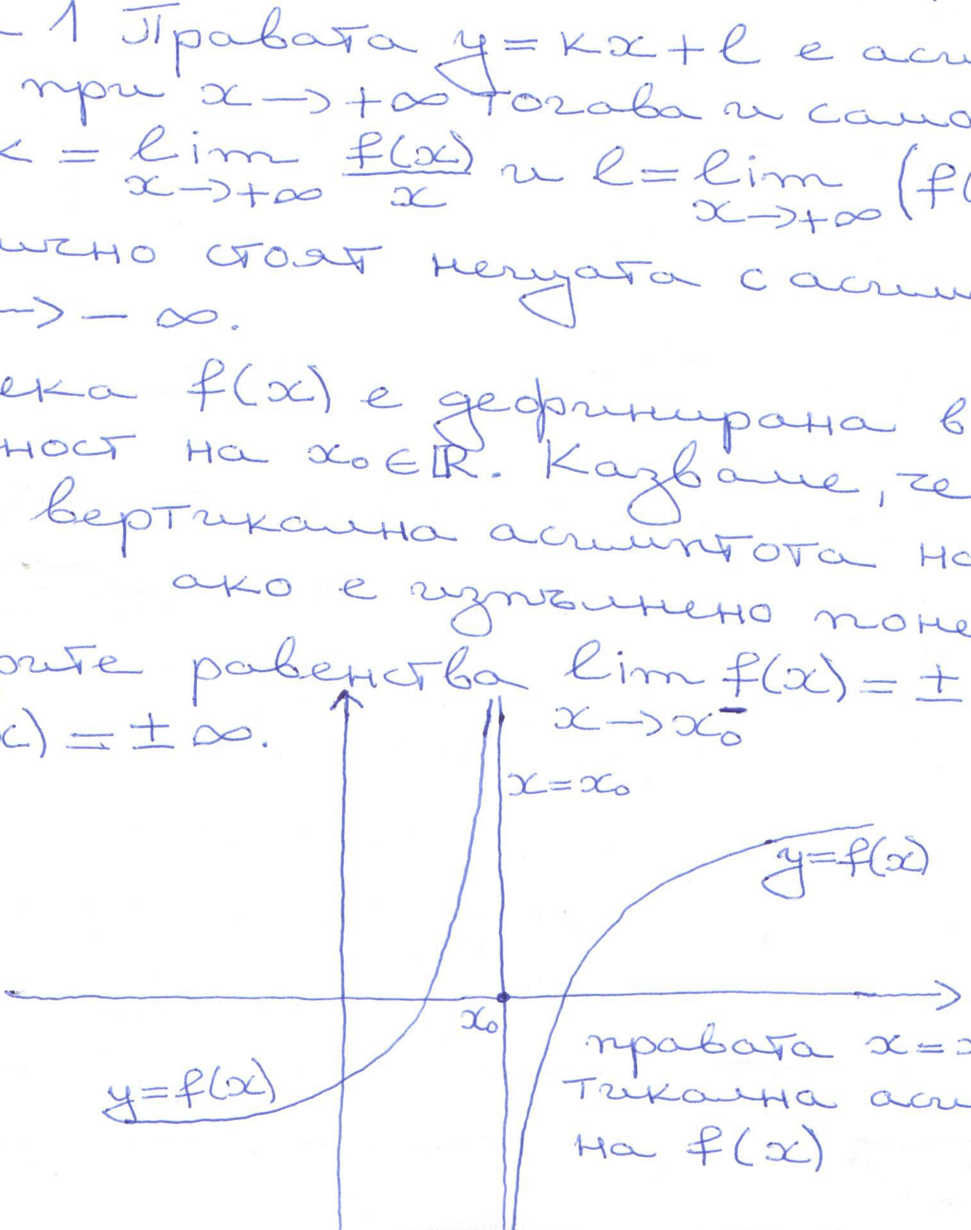


правата $y=kx+l$ е наклонена асимптота на $f(x)$ при $x\to+\infty$

Теорема 1 Правата $y=kx+l$ е асимптота на $f(x)$ при $x\to+\infty$ тогава и само тогава, когато $k=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ и $l=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-kx)$.

Аналогично стоят нещата с асимптотите при $x\to-\infty$.

Опр. 2 Нека $f(x)$ е дефинирана в прободена околност на $x_0\in\mathbb{R}$. Казваме, че правата $x=x_0$ е вертикална асимптота на $f(x)$, ако е изпълнено поне едно от четирите равенства $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\pm\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\pm\infty$.



правата $x=x_0$ е вертикална асимптота на $f(x)$

(2) Зад. 1 Намерете асимптотата на функцията $f(x)=\frac{5x^3-x^2+1}{x^2+x+1}$ при $x\to-\infty$.

Решение: $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5x^3-x^2+1}{x^3+x^2+x}=$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{5-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=5,$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-5x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{5x^3-x^2+1}{x^2+x+1}-5x\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-6x^2-5x+1}{x^2+x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-6-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=-6.$$

Сл. правата $y=5x-6$ е търсената асимптота.

Зад. 2 Намерете асимптотата на функцията $f(x)=\sqrt[3]{9x^2-8x^3}$ при $x\to+\infty$.

Решение: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\frac{9}{x}-8}=-2,$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(-2)x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{9x^2-8x^3}+2x\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\sqrt[3]{\frac{9}{x}-8}+2\right)\right]\overset{t=\frac{1}{x}}{=}\lim_{t\to0^+}\frac{\sqrt[3]{9t-8}+2}{t}\overset{\Lambda}{=}$$

$$\overset{\Lambda}{=}\lim_{t\to0^+}\frac{\frac{1}{3}(9t-8)^{-\frac{2}{3}}\cdot9}{1}=3\cdot(-8)^{-\frac{2}{3}}=3\cdot(-2)^{-2}=\frac{3}{4}.$$

Сл. правата $y=-2x+\frac{3}{4}$ е търсената асимптота

Изследване на функции

Много процеси в природата и техниката се описват чрез функции.

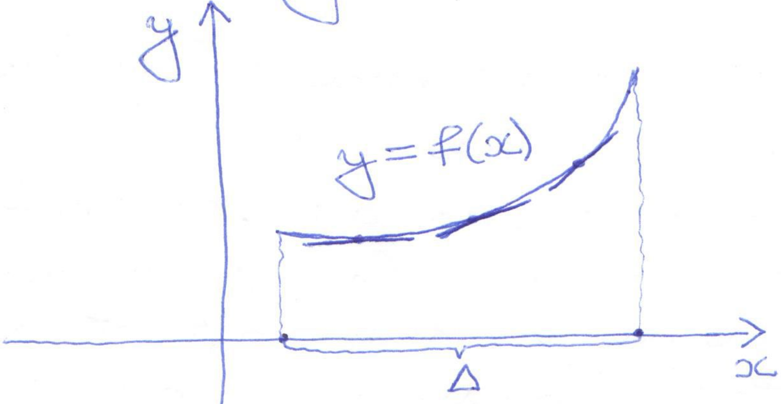
Основната задача на диференциалното смятане е изследването на функции.

Знанията, които вече имаме за граници, непрекъснатост, производни и асимптоти, ни позволяват да решим тази задача.

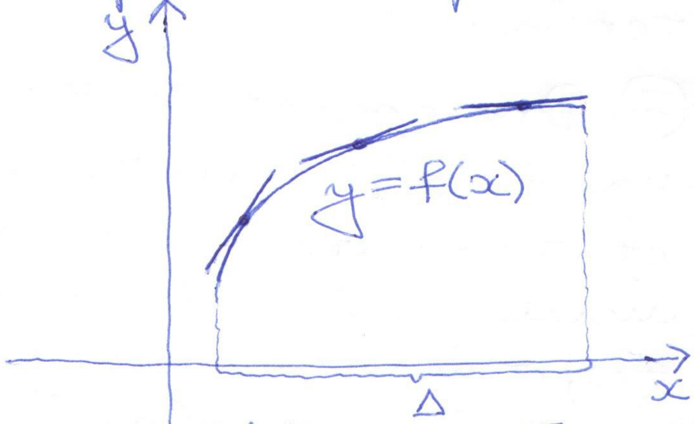
(3) Опр. 1 Нека $f(x)$ е диференцуируема в интервала Δ. Казваме, че:

1) $f(x)$ е изпъкнала в Δ, ако графиката на $f(x)$ лежи над всички свои допирателни при $x \in \Delta$;

2) $f(x)$ е вдлъбната в Δ, ако графиката на $f(x)$ лежи под всички свои допирателни при $x \in \Delta$.



$f(x)$ е изпъкнала в Δ



$f(x)$ е вдлъбната в Δ

Теорема 1 Нека $f(x)$ е двукратно диференцуируема в интервала Δ. Тогава:

1) ако $f''(x) > 0$ в Δ, то $f(x)$ е изпъкнала в Δ;

2) ако $f''(x) < 0$ в Δ, то $f(x)$ е вдлъбната в Δ.

И така: $f'(x)$ „отговаря" за растенето и намаляването на $f(x)$, а $f''(x)$ „отговаря" за изпъкналостта и вдлъбнатостта на $f(x)$.

Изследването на функция $f(x)$ може да се извърши например по следната схема:

(1) Определя се дефиниционното множество $\mathcal{D}$ на $f(x)$.

(2) Определя се за кои $x \in \mathcal{D}$ $f(x)$ е непрекъсната и за кои $x \in \mathcal{D}$ $f(x)$ е диференцуируема.

(3) Определя се дали $f(x)$ е четна или нечетна.

4) 4) Намират се асимптотите на $f(x)$, ако има такива.

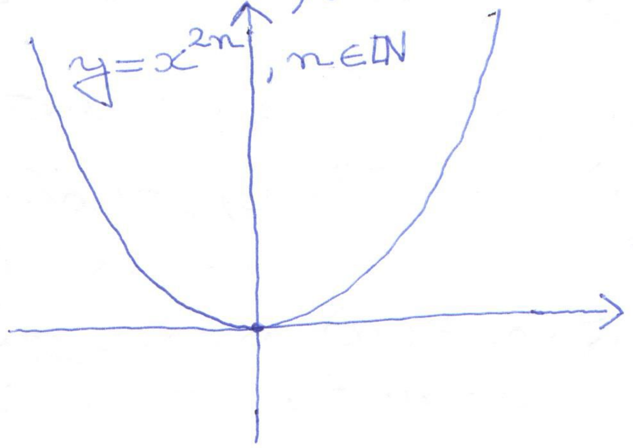
5) Определя се знака на $f'(x)$, а оттам и интервалите на растене и намаляване на $f(x)$.

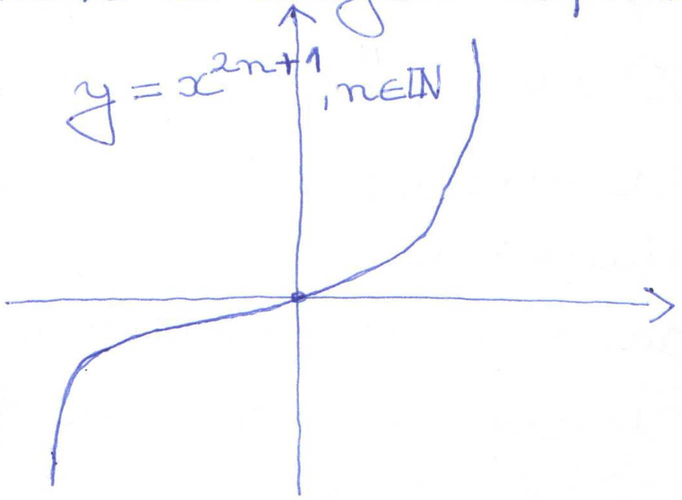
6) Определя се знака на $f''(x)$, а оттам и интервалите на изпъкналост и вдлъбнатост на $f(x)$.

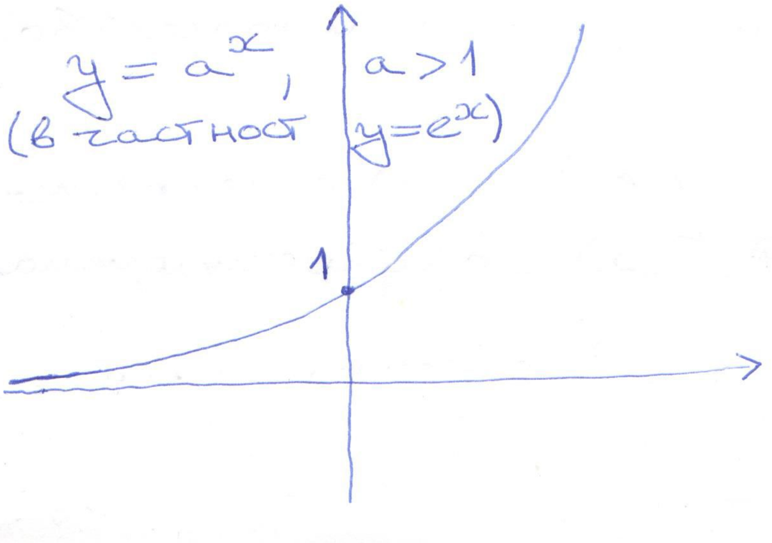
7) Определят се някои характерни особености на $f(x)$: нулите на $f(x)$, знака на $f(x)$, стойностите на $f(x)$ в точките на лок. екстремуми и в инфлексните точки (това са точките, отделящи интервал на изпъкналост от интервал на вдлъбнатост), дали $f(x)$ е периодична и т.н.

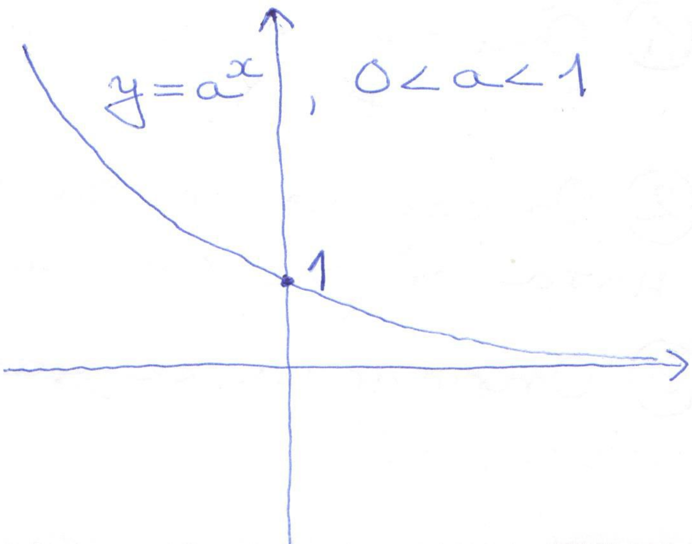
8) Начертава се графиката на $f(x)$.

Графики на най-важните функции (те могат да се начертаят, като се следва горната схема):

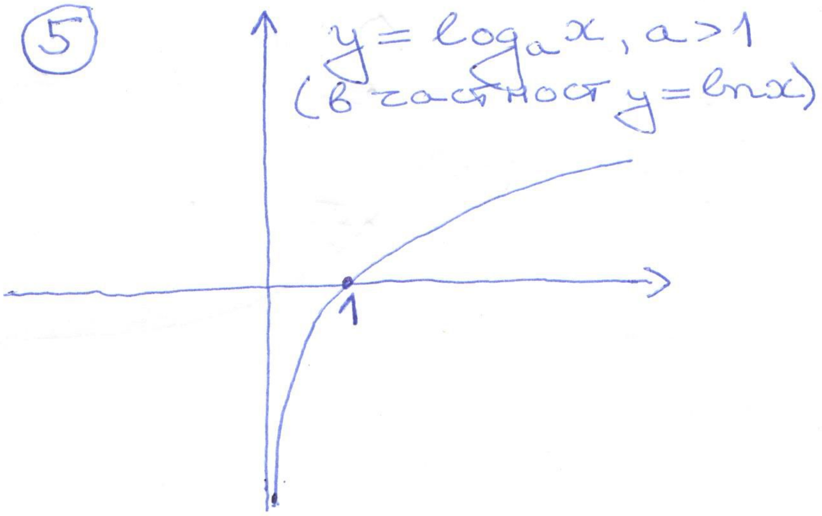


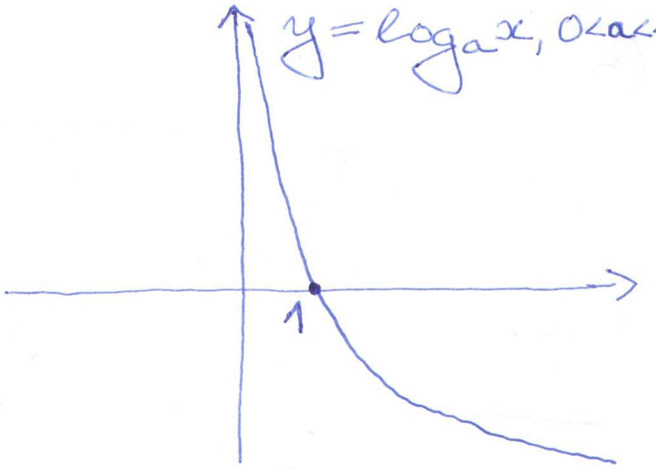


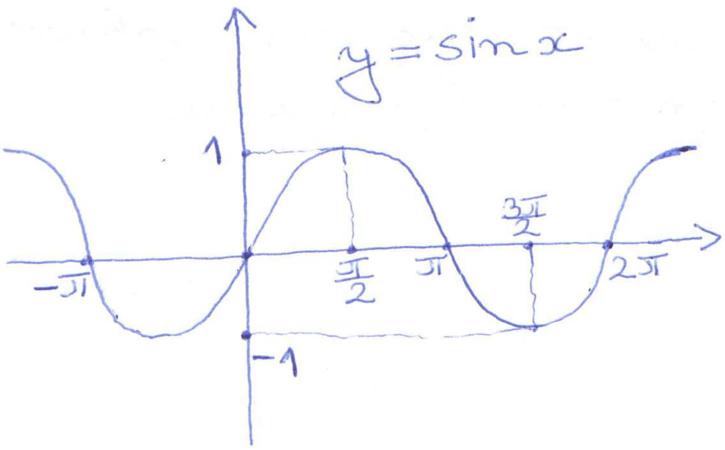


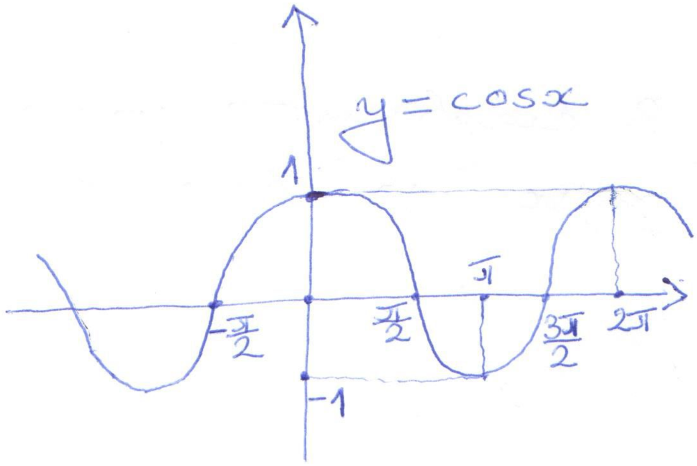


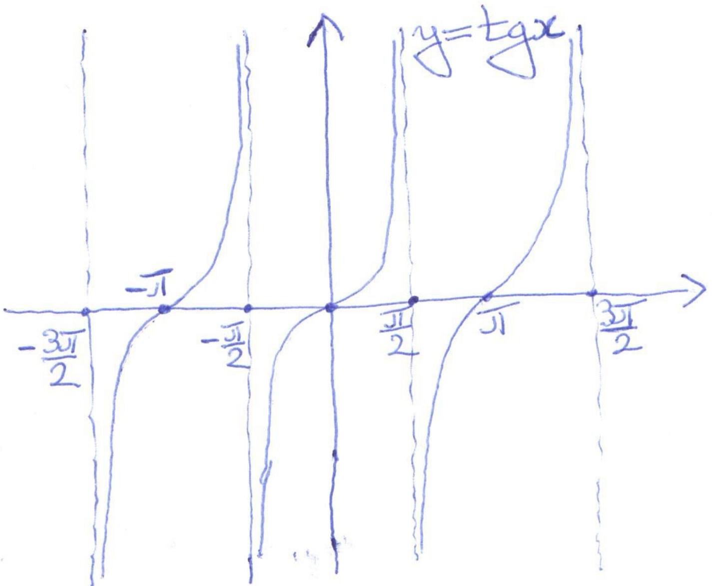
5

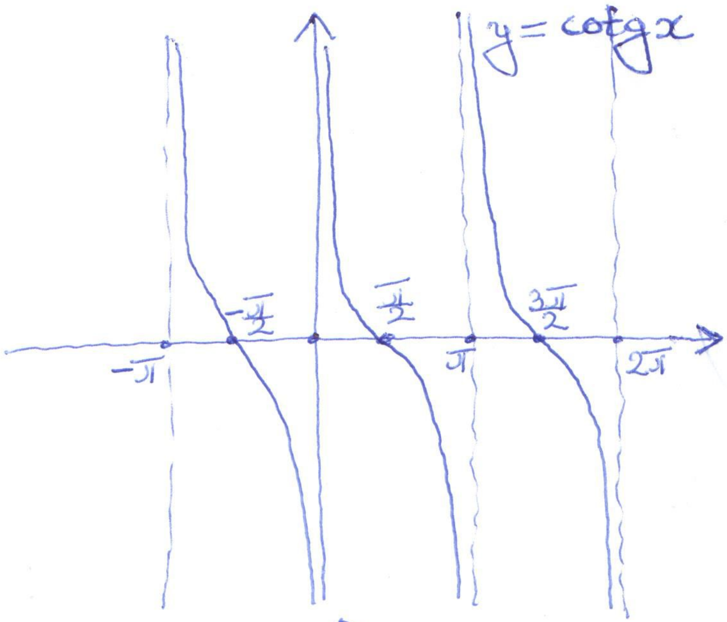

$y = \log_a x,\ a > 1$
(в частност $y = \ln x$)
1

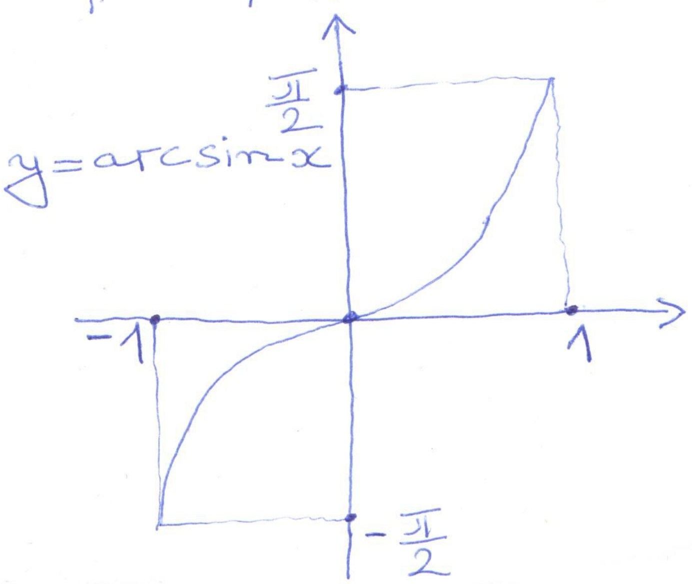

$y = \log_a x,\ 0 < a < 1$
1

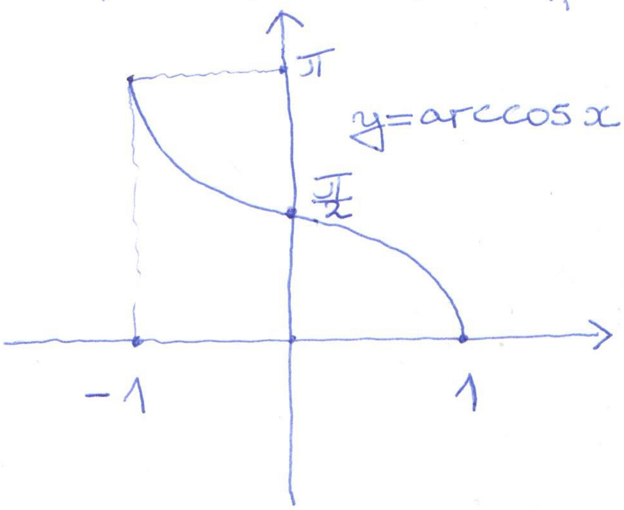

$y = \sin x$
1
-1
$-\pi$
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$
2π

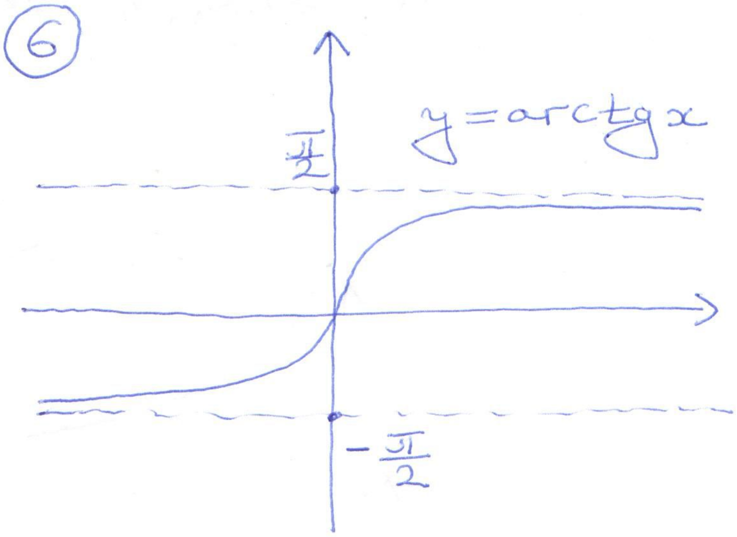

$y = \cos x$
1
-1
$-\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$
2π

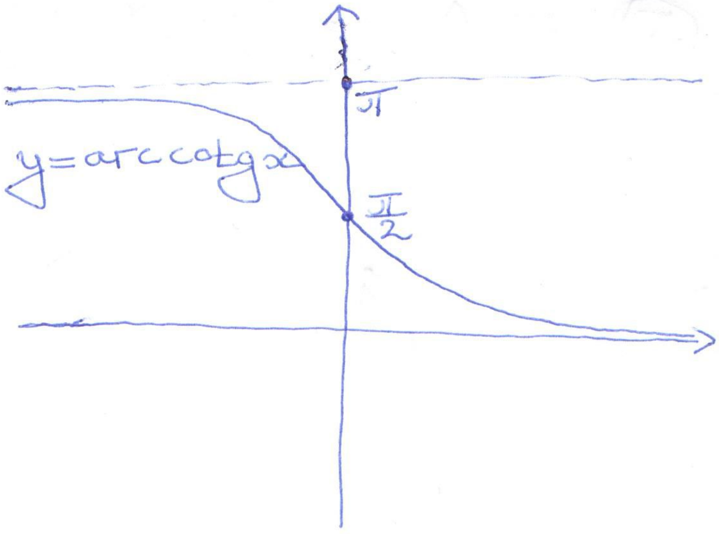

$y = \operatorname{tg} x$
$-\frac{3\pi}{2}$
$-\pi$
$-\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$


$y = \operatorname{cotg} x$
$-\pi$
$-\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$
2π


$y = \arcsin x$
$\frac{\pi}{2}$
$-\frac{\pi}{2}$
-1
1


$y = \arccos x$
π
$\frac{\pi}{2}$
-1
1





В следващото упражнение ще изследваме подробно няколко конкретни функции.