Лекция 25.3.2021

1 Евклидови линейни пространства. Ортонормирани базиси. Ортогонално допълнение — продължение

Припомняне от миналия път

Тоя въпрос представлява по същество припомняне на неща, които са известни от курса по алгебра. Включен е и с цел фиксиране на терминологията (в курса по алгебра някои неща може да са формулирани по различен начин). Може да съдържа и някои по-маловажни факти, които в курса по алгебра са били пропуснати, но тук ще ни трябват. Написал съм доказателствата само на нещата, за които разбрах, че не са доказвани в курса по алгебра.

Дефиниции и примери

Нека U е реално линейно пространство.

Определение 1 *Скаларно произведение* в U е изображение

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : U \times U \to \mathbb{R}, \quad (u,v) \mapsto \langle u,v\rangle,$$

което има свойствата:

1. $\langle v,u\rangle = \langle u,v\rangle$ за $u,v \in U$ (*симетричност*)
2. $\langle u_1+u_2,v\rangle = \langle u_1,v\rangle + \langle u_2,v\rangle$ за $u_1,u_2,v \in U$ (*адитивност по първия аргумент*)
3. $\langle \lambda u,v\rangle = \lambda\langle u,v\rangle$ за $u,v \in U$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (*хомогенност по първия аргумент*)
4. $\langle u,u\rangle > 0$ за $u \in U$, $u \neq 0$ (*положителност*)
(Вместо *положителност* се казва още *положителна определеност* или *положителна дефинираност* или *положителна дефинитност.*)

$\langle u,v\rangle$ се нарича *скаларно произведение на векторите u и v.*

Забележка 1 Срещат се и други означения за скаларното произведение. Например uv, $u.v$, (u,v), $\langle u|v\rangle$.

Забележка 2 Условията 2. и 3. в горното определение заедно са еквивалентни на условието

$$\langle \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, v\rangle = \lambda_1\langle u_1,v\rangle + \lambda_2\langle u_2,v\rangle \quad \text{за } u_1,u_2,v \in U,\ \lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{R},$$

което се нарича *линейност по първия аргумент.*

Твърдение 1 *Нека $\langle \cdot, \cdot \rangle$ е скаларно произведение в U. Тогава:*

1. $\langle 0, v\rangle = 0 = \langle v, 0\rangle$ *за* $v \in U$.

2. $\langle u, v_1 + v_2\rangle = \langle u, v_1\rangle + \langle u, v_2\rangle$ *за* $u, v_1, v_2 \in U$ *(адитивност по втория аргумент)*

3. $\langle u, \lambda v\rangle = \lambda\langle u, v\rangle$ *за* $u, v \in U$, $\lambda \in \mathbb{R}$ *(хомогенност по втория аргумент)*

4. *За* $u \in U$ *е в сила* $\langle u, u\rangle \geq 0$ *и* $= \Leftrightarrow u = 0$.

5. $\left\langle \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i, \sum_{j=1}^{l} \mu_j v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} \lambda_i \mu_j \langle u_i, v_j\rangle$ *за* $u_i, v_j \in U$, $\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, k$, $j = 1, \ldots, l$.

Забележка 3 Условията 2. и 3. в горното твърдение заедно са еквивалентни на условието

$$\langle u, \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2\rangle = \lambda_1\langle u, v_1\rangle + \lambda_2\langle u, v_2\rangle \quad \text{за } u, v_1, v_2 \in U,\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},$$

което се нарича *линейност по втория аргумент*. Следователно скаларното произведение е линейно и по двата си аргумента, тоест е *билинейно*.

Така свойствата на скаларното произведение се резюмират накратко по следния начин: Скаларното произведение е симетрично, билинейно и положително дефинитно.

Определение 2 *Евклидово линейно пространство* е реално линейно пространство, в което е фиксирано едно скаларно произведение.

Пример 1 За $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, дефинираме $\langle x, y\rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$, тоест $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x^t y$. Това е скаларно произведение в $\mathbb{R}^n$. Нарича се *стандартно скаларно произведение в* $\mathbb{R}^n$. Винаги ще разглеждаме $\mathbb{R}^n$ като евклидово линейно пространство с това скаларно произведение, освен ако изрично не е казано друго.

Пример 2 Скаларното произведение на геометрични вектори удовлетворява четирите условия от Определение 1 и следователно е скаларно произведение в смисъла на това определение. Следователно векторите в геометричното пространство образуват 3-мерно евклидово линейно пространство. Аналогично векторите в геометричната равнина образуват 2-мерно евклидово линейно пространство и векторите върху геометрична права образуват 1-мерно евклидово линейно пространство.
(Тия неща вече сме ги видели и във въпрос 5.)

Твърдение 2 *Ако U е евклидово линейно пространство и V е линейно подпространство на U, то ограничението върху V на скаларното произведение в U е скаларно произведение във V и следователно с него V е евклидово линейно пространство.*

Забележка 4 Винаги ще разглеждаме линейните подпространства на евклидово линейно пространство като евклидови линейни пространства със скаларното произведение от горното твърдение, освен ако изрично не е казано друго.

Дължини и ъгли в евклидово линейно пространство

Нека U е евклидово линейно пространство.

Определение 3 За $u \in U$ означаваме $|u| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$. Нарича се *дължина* или *норма на* u.
(Дефиницията е коректна поради 4. в Твърдение 1.)

Забележка 5 Друго често срещано означение за $|u|$ е $\|u\|$.

Твърдение 3 *За $u, v \in U$, $\lambda \in \mathbb{R}$ са в сила:*

1. $|u| \geq 0$ $u = \Leftrightarrow u = 0$.
2. $|\lambda u| = |\lambda||u|$.
3. $|u + v| \leq |u| + |v|$ *(неравенство на триъгълника).*

Забележка 6 Ако U е реално линейно пространство, то всяко изображение $|\cdot| : U \to \mathbb{R}$, което има трите свойства от Твърдение 3, се нарича *норма в* U. Така че Твърдение 3 казва, че дефинираната от нас дължина на вектори в евклидово линейно пространство е норма. Понякога тя се нарича *евклидова норма* за да се подчертае, че идва от скаларно произведение.

Теорема 1 (неравенство на Коши-Буняковски-Шварц) *Нека $u, v \in U$. Тогава*

$$|\langle u, v\rangle| \leq |u||v|$$

$u = \Leftrightarrow$ *u и v са линейно зависими.*
(Еквивалентни формулировки на неравенството:
$\langle u, v\rangle^2 \leq |u|^2|v|^2, \quad \langle u, v\rangle^2 \leq \langle u, u\rangle\langle v, v\rangle, \quad -|u||v| \leq \langle u, v\rangle \leq |u||v|$.*)*

Пример 3 В $\mathbb{R}^n$ имаме

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \quad |x| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Следователно:
Неравенството на Коши-Буняковски-Шварц е

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2},$$

тоест

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)$$

– това е доказал Коши.

Неравенството на триъгълника е

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}y_i^2}.$$

Твърдение 4 *За* $u, v \in U$ *е в сила* $|u+v|^2 = |u|^2 + |v|^2 + 2\langle u, v\rangle$ *и следователно* $\langle u, v\rangle = \frac{1}{2}(|u+v|^2 - |u|^2 - |v|^2)$.

Дотук беше припомнянето от миналия път.

Дължини и ъгли в евклидово линейно пространство — продължение

Определение 4 Нека векторите $u, v \in U$ са ненулеви. Единственото $\varphi \in [0, \pi]$, за което $\cos\varphi = \frac{\langle u,v\rangle}{|u||v|}$, се нарича *ъгъл между* u *и* v. Означава се с $\sphericalangle(u, v)$, тоест
$\sphericalangle(u, v) = \arccos\frac{\langle u,v\rangle}{|u||v|}$.
(Че такова φ съществува следва от неравенството на Коши-Буняковски-Шварц, защото от $-|u||v| \leq \langle u, v\rangle \leq |u||v|$ следва $-1 \leq \frac{\langle u,v\rangle}{|u||v|} \leq 1$.)

Пример 4 Ако $u \in U$ е ненулев, то $\sphericalangle(u, u) = 0$, $\sphericalangle(u, -u) = \pi$.
Това е така, защото

$$\sphericalangle(u, u) = \arccos\frac{\langle u, u\rangle}{|u||u|} = \arccos\frac{|u|^2}{|u|^2} = \arccos 1 = 0,$$

$$\sphericalangle(u, -u) = \arccos\frac{\langle u, -u\rangle}{|u||-u|} = \arccos\frac{-\langle u, u\rangle}{|u||u|} = \arccos\frac{-|u|^2}{|u|^2} = \arccos(-1) = \pi.$$

Твърдение 5 *Нека* $u, v \in U$ *са ненулеви вектори. Тогава:*

1. $\sphericalangle(v, u) = \sphericalangle(u, v)$.

2. $\langle u, v\rangle = |u||v|\cos\sphericalangle(u, v)$.

Забележка 7 В линейното пространство на геометричните вектори в равнината или пространството от някакви геометрични съображения знаехме какво означава дължина на вектор и ъгъл между два вектора и дефинирахме скаларно произведение чрез формулата $\langle u, v\rangle = |u||v|\cos\sphericalangle(u, v)$. В произволно реално линейно пространство е по-удобно и кратко да се дефинира направо скаларно произведение вместо да се въвеждат първо някакви геометрични обекти, чрез които да дефинираме понятията дължина и ъгъл и след това чрез тях и тая формула да въведем скаларно произведение. След това, както направихме и ние, чрез скаларното произведение лесно се дефинират понятията дължина и ъгъл и, както се вижда от Определение 3 и Определение 4 (или 2. на Твърдение 5), те са свързани със скаларното произведение по същия начин както при класическите геометрични вектори, тоест $|u| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$ и $\langle u, v\rangle = |u||v|\cos\sphericalangle(u, v)$.

Следващото твърдение е още един пример, който потвърждава, че за въведените от нас понятия важат класически факти в обичайния си вид. Това, че косинусовата теорема в геометричната равнина или пространство може да се запише в тоя вид го видяхме в доказателството на Теорема 3 във въпрос 5 (формулата за скаларното произведение чрез координати).

Твърдение 6 (косинусова теорема) *Нека $u, v \in U$ са ненулеви вектори. Тогава*

$$|v-u|^2 = |u|^2 + |v|^2 - 2|u||v|\cos\sphericalangle(u,v).$$

Доказателство: Като приложим формулата от Твърдение 4 с $-u$ вместо u получаваме

$$|-u+v|^2 = |-u|^2 + |v|^2 + 2\langle -u, v\rangle = |u|^2 + |v|^2 - 2\langle u, v\rangle = |u|^2 + |v|^2 - 2|u||v|\cos\sphericalangle(u,v).$$

$\square$

Ортонормирани базиси

Нека U е евклидово линейно пространство.

Определение 5 Казваме, че векторите $u, v \in U$ са *ортогонални* (или *перпендикулярни*), и пишем $u \perp v$, ако $\langle u, v\rangle = 0$.

Твърдение 7

1. *$v \perp u \Leftrightarrow u \perp v$.*
2. *$u \perp 0$ за всяко $u \in U$.*
3. *$u \perp u \Leftrightarrow u = 0$.*
4. *Ако $u \perp v$ и $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, то $\lambda u \perp \mu v$.*
5. *Ако $u, v \in U$ са ненулеви, то $u \perp v \Leftrightarrow \sphericalangle(u,v) = \frac{\pi}{2}$.*

Определение 6 Векторът $u \in U$ се нарича *единичен*, ако $|u| = 1$.

Твърдение 8 *Ако $u \in U$ е ненулев, то $\frac{u}{|u|}$ е единичен.*

Определение 7 Казваме, че векторите $u_1, \dots, u_k \in U$ образуват

1. *ортогонална система*, ако всеки от тях е ортогонален на всеки от останалите, тоест ако $\langle u_i, u_j\rangle = 0$ при $i \neq j$.
2. *ортонормирана система*, ако образуват ортогонална система и всеки от тях е единичен, тоест ако $\langle u_i, u_j\rangle = \begin{cases} 0 \text{ при } i \neq j \\ 1 \text{ при } i = j \end{cases}$.

Забележка 8 Очевидно тая дефиниция може без изменение да се обобщи и за безкрайни системи от вектори.

Определение 8 Казваме, че базисът $e = (e_1, \dots, e_n)$ на U е *ортогонален* (съответно *ортонормиран*), ако $e_1, \dots, e_n$ е ортогонална (съответно ортонормирана) система.

Пример 5 Стандартният базис на $\mathbb{R}^n$ е ортонормиран.

Твърдение 9 *Ако векторите $u_1, \dots, u_k \in U$ образуват ортогонална система и $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, то и $\lambda_1 u_1, \dots, \lambda_k u_k$ образуват ортогонална система.*

Теорема 2 (Питагор) *Ако $u_1, \dots, u_k \in U$ е ортогонална система, то*

$$|u_1 + \dots + u_k|^2 = |u_1|^2 + \dots + |u_k|^2.$$

Твърдение 10 *Ако ненулевите вектори $u_1, \dots, u_k \in U$ образуват ортогонална система, то те са линейно независими.*

Следствие 1 *Ако $u_1, \dots, u_k \in U$ е ортонормирана система, то $u_1, \dots, u_k$ са линейно независими.*

Следствие 2 *Всяка ортонормирана система от n вектора в n-мерно евклидово линейно пространство е ортонормиран базис.*

Лема 1 *Ако $e_1, \dots, e_k$ е ортонормирана система в U и $k < \dim U$, то съществува $e_{k+1} \in U$, така че $e_1, \dots, e_k, e_{k+1}$ е ортонормирана система.*

Забележка 9 В лемата може и $k = 0$. В тоя случай това, което се твърди в нея, е, че ако $0 < \dim U$, то съществува $e_1 \in U$, така че e_1 е ортонормирана система, тоест ако $U \neq \{0\}$, то съществува единичен вектор $e_1 \in U$ (което е ясно от Твърдение 8).

Теорема 3 *Ако U е крайномерно и $e_1, \dots, e_k$ е ортонормирана система в U, която не е базис на U, то тя може да се допълни до ортонормиран базис на U.*

От тая теорема при $k = 0$ получаваме:

Теорема 4 *Във всяко крайномерно евклидово линейно пространство съществува ортонормиран базис.*

Следствие 3 *Във всяко крайномерно ориентирано евклидово линейно пространство съществува положително ориентиран ортонормиран базис.*

Забележка 10 Доказателството на Теорема 4 (по-същество, доказателството на Лема 1) дава алгоритъм за построяване на ортонормиран базис $(e_1, \dots, e_n)$ тръгвайки от произволен базис $(f_1, \dots, f_n)$, който се нарича метод на Грам-Шмит.

Забележка 11 Теорема 4 не е вярна в безкрайномерния случай, тоест не всяко безкрайномерно евклидово линейно пространство притежава ортонормиран базис.
(В безкрайномерния случай вместо ортонормирани базиси се използват максимални ортонормирани системи.)

Теорема 5 *Нека $e = (e_1, \ldots, e_n)$ е базис на U. Тогава следните условия са еквивалентни:*

1. *e е ортонормиран базис.*

2. *Ако $u \in U$ има спрямо e координатен вектор $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, то $|u| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}$.*

3. *Ако $u, v \in U$ имат спрямо e координатни вектори $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, то $\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.*

4. *Ако $u \in U$ има спрямо e координатен вектор $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, то $x_i = \langle u, e_i \rangle$, тоест $u = \sum_{i=1}^{n} \langle u, e_i \rangle e_i$.*

Забележка 12 Горната теорема показва, че в координати относно ортонормиран базис дължина и скаларно произведение се пресмятат както в $\mathbb{R}^n$. Тя най-често се прилага по следния начин: Ако базисът e е ортонормиран, то дължината на вектор се пресмята чрез координатите му по формулата в 2., скаларното произведение на вектори се пресмята чрез координатите им по формулата в 3., а координатите на вектор се пресмятат по формулата от 4. (последното приложение се среща по-рядко).

Замествайки получените в горната теорема формули за скаларното произведение и дължината чрез координати спрямо ортонормиран базис в дефинициите на ортогоналност на вектори и ъгъл между вектори, получаваме

Следствие 4 *Нека $e = (e_1, \dots, e_n)$ е ортонормиран базис на U и спрямо него $u, v \in U$ имат координатни вектори $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Тогава:*

1. *$u \perp v \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 0$.*
2. *Ако $u \neq 0$, $v \neq 0$, то*

$$\cos \sphericalangle(u, v) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {y_i}^2}}, \quad \text{тоест} \quad \sphericalangle(u, v) = \arccos \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {y_i}^2}}.$$

Следващото твърдение показва, че в координати относно ортонормиран базис формулите за дължината и за скаларното произведение имат най-прост вид.

Твърдение 11 *Нека $e = (e_1, \dots, e_n)$ е произволен базис на U и спрямо него $u, v \in U$ имат координатни вектори $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Тогава*

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} x_i y_j, \quad |u| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} x_i x_j},$$

където $g_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$, $i, j = 1, \dots, n$.

Ортогонално допълнение

Нека U е евклидово линейно пространство.

Определение 9 Нека $V \subset U$. *Ортогонално множество на V* се нарича множеството $V^\perp = \{u \in U : \ \forall v \in V \ \ u \perp v\} = \{u \in U : \ \forall v \in V \ \ \langle u, v \rangle = 0\}$.

Пример 6 $\emptyset^\perp = U$.
Това е така, защото всяко $u \in U$ е ортогонално на всички елементи на $\emptyset$.

Пример 7 $\{0\}^\perp = U$.
Това е така, защото всяко $u \in U$ е ортогонално на 0, тоест на всички елементи на $\{0\}$.

Пример 8 $U^\perp = \{0\}$.
Това е така, защото: Ако $u \in U^\perp$, то, тъй като $u \in U$, получаваме $u \perp u$ и следователно $u = 0$. А 0 наистина е в $U^\perp$, защото $0 \perp v$ за всяко $v \in U$. Значи $U^\perp = \{0\}$.

Забележка 13 Първите два примера показват, че може различни множества да имат едно и също ортогонално множество.

Твърдение 12 *Нека V и W са подмножества на U. Тогава:*

1. *$V^\perp$ е линейно подпространство на U.*
2. *Ако $V \subset W$, то $V^\perp \supset W^\perp$.*
3. *$V^\perp = l(V)^\perp$.*
4. *$(V^\perp)^\perp \supset V$.*
5. *$V \bigcap V^\perp = \begin{cases} \emptyset, & \text{ако } 0 \notin V \\ \{0\}, & \text{ако } 0 \in V \end{cases}$.*
6. *Ако V е крайномерно линейно подпространство на U, то $U = V \oplus V^\perp$.*
7. *Ако V е крайномерно линейно подпространство на U, то $(V^\perp)^\perp = V$.*
8. *Ако U е крайномерно и V е линейно подпространство на U, то*
$$\dim V^\perp = \dim U - \dim V.$$
9. *Ако V и W са линейни подпространства на U, то $(V + W)^\perp = V^\perp \bigcap W^\perp$.*

Доказателство:

3. Тъй като $V \subset l(V)$, то от 2. следва $V^\perp \supset l(V)^\perp$.

   За обратното включване: Нека $u \in V^\perp$. Тогава $\langle u, v\rangle = 0$ за всяко $v \in V$. Произволен елемент $w \in l(V)$ има вида $w = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k$, където $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, $v_1, \ldots, v_k \in V$. Тогава $\langle u, w\rangle = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \underbrace{\langle u, v_i\rangle}_{0} = 0$. Значи $\langle u, w\rangle = 0$ за всяко $w \in l(V)$, което означава, че $u \in l(V)^\perp$. Следователно $V^\perp \subset l(V)^\perp$.

   Значи $V^\perp = l(V)^\perp$.

4. Нека $v \in V$. Тогава за всяко $u \in V^\perp$ имаме $\langle u, v\rangle = 0$. Това означава, че $v \in (V^\perp)^\perp$. Следователно $V \subset (V^\perp)^\perp$.

6. Тъй като V е крайномерно, то съществува ортонормиран базис $(e_1, \ldots, e_k)$ на V. Нека $u \in U$. Дефинираме $u^{\|} = \sum_{i=1}^{k} \langle u, e_i \rangle e_i$, $u^{\perp} = u - u^{\|}$. От самата дефиниция на $u^{\|}$ следва $u^{\|} \in V$. Ще докажем, че $u^{\perp} \in V^{\perp}$. За $j = 1, \ldots, k$ имаме

$$\langle u^{\perp}, e_j \rangle = \langle u, e_j \rangle - \langle u^{\|}, e_j \rangle = \langle u, e_j \rangle - \sum_{i=1}^{k} \langle u, e_i \rangle \underbrace{\langle e_i, e_j \rangle}_{\substack{0 \text{ при } i \neq j \\ 1 \text{ при } i = j}} = \langle u, e_j \rangle - \langle u, e_j \rangle = 0.$$

Това означава, че $u^{\perp} \in \{e_1, \ldots, e_k\}^{\perp}$. Но по 3. имаме $\{e_1, \ldots, e_k\}^{\perp} = l(e_1, \ldots, e_k)^{\perp}$, а тъй като $(e_1, \ldots, e_k)$ е базис на V, то $l(e_1, \ldots, e_k) = V$. Така че $\{e_1, \ldots, e_k\}^{\perp} = V^{\perp}$ и следователно $u^{\perp} \in V^{\perp}$.

И така, V е линейно подпространство, от 1. знаем, че $V^{\perp}$ също е линейно подпространство, и за всяко $u \in U$ имаме, че $u = u^{\|} + u^{\perp}$, като $u^{\|} \in V$, $u^{\perp} \in V^{\perp}$. Това означава, че $U = V + V^{\perp}$. Освен това от 5. следва $V \cap V^{\perp} = \{0\}$, защото $0 \in V$, тъй като V е линейно подпространство. Следователно сумата е директна, тоест $U = V \oplus V^{\perp}$.

9. Тъй като $V + W \supset V$ и $V + W \supset W$, то от 2. следва $(V+W)^{\perp} \subset V^{\perp}$ и $(V+W)^{\perp} \subset W^{\perp}$ и значи $(V + W)^{\perp} \subset V^{\perp} \bigcap W^{\perp}$.

   За обратното включване: Нека $u \in V^{\perp} \bigcap W^{\perp}$. Тогава $\langle u, v \rangle = 0$ за всяко $v \in V$ и $\langle u, w \rangle = 0$ за всяко $w \in W$. Тъй като всеки елемент на $V + W$ има вида $v + w$, където $v \in V$, $w \in W$, и $\langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle = 0$, то $u \in (V + W)^{\perp}$. Следователно $V^{\perp} \bigcap W^{\perp} \subset (V + W)^{\perp}$.

   Значи $(V + W)^{\perp} = V^{\perp} \bigcap W^{\perp}$. □

Забележка 14 Свойството 8. в горното твърдение е вярно и когато U е безкрайномерно, а V е крайномерно (и следователно при произволно U и крайномерно V), ако се уговорим да считаме $\infty -$ (крайно число) $= \infty$.

Определение 10 Ако V е крайномерно линейно подпространство на U, то $V^{\perp}$ се нарича *ортогонално допълнение на V в U* (заради разлагането $U = V \oplus V^{\perp}$).
Ако $u \in U$ и относно разлагането $U = V \oplus V^{\perp}$ имаме $u = u^{\|} + u^{\perp}$, то $u^{\|} \in V$ се нарича *ортогонална проекция на u във V*, а $u^{\perp} \in V^{\perp}$ се нарича *ортогонална* (или *нормална*) *към V компонента на u*.

От доказателството на 6. на Твърдение 12 получаваме:

Твърдение 13 *Нека V е крайномерно линейно подпространство на U и $(e_1, \ldots, e_k)$ е ортонормиран базис на V. Тогава за $u \in U$ имаме*

$$u^{\|} = \sum_{i=1}^{k} \langle u, e_i \rangle e_i, \quad u^{\perp} = u - u^{\|} = u - \sum_{i=1}^{k} \langle u, e_i \rangle e_i.$$

Забележка 15 Ако U е крайномерно, то 6., 7., 8. на Твърдение 12, Определение 10 и Твърдение 13 важат за всяко линейно подпространство на U (защото всяко линейно подпространство на крайномерно линейно пространство е крайномерно).

2 Афинни пространства

Дефиниция и примери

Определение 11 Нека V е реално линейно пространство. Непразното множество A се нарича *афинно пространство, моделирано върху* V (или *с направляващо пространство* V), ако е зададено изображение

$$A \times A \to V : \quad (P, Q) \mapsto \overrightarrow{PQ},$$

което има свойствата:

1. $\forall P \in A$ и $\forall v \in V$ $\exists! Q \in A : \overrightarrow{PQ} = v$.

2. $\forall P, Q, R \in A$ е в сила $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$
   (правило на триъгълника за събиране на вектори).

Елементите на A се наричат *точки*.
Размерност на A се нарича размерността на V.

Пример 9 Едноточковото множество $A = \{O\}$ е афинно пространство, моделирано върху тривиалното линейно пространство $V = \{0\}$, тоест е 0-мерно афинно пространство. Това е така, защото:
$A \times A$ има единствен елемент (O, O), а V има единствен елемент 0. Значи има единствено изображение $A \times A \to V$, което се задава с $(O, O) \mapsto 0$, тоест $\overrightarrow{OO} = 0$. Проверката на двете свойства от определението за това изображение е тривиална:

1. Единствената възможност за P е $P = O$, а единствената възможност за v е $v = 0$. Значи трябва да се докаже, че съществува единствена точка $Q \in A$, за която е изпълнено $\overrightarrow{OQ} = 0$. Но в A така или иначе си има единствена точка, а именно O. Така че горното трябва да се провери за $Q = O$ и то наистина е вярно: $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OO} = 0$. Значи първото свойство е изпълнено.

2. Единствената възможност за P, Q, R е $P = Q = R = O$. Тогава имаме

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{OO} + \overrightarrow{OO} = 0 + 0 = 0 = \overrightarrow{OO} = \overrightarrow{PR}.$$

   Значи и второто свойство е изпълнено.

Пример 10 Нека V е реално линейно пространство. Тогава $A = V$ е афинно пространство, моделирано върху V, с изображението

$$V \times V \to V : \quad (P, Q) \mapsto \overrightarrow{PQ} = Q - P.$$

Това е така, защото:

1. За дадени $P \in A = V$ и $v \in V$ търсим Q, такова че $\overrightarrow{PQ} = v$, тоест $Q - P = v$. И наистина съществува, и то единствено, такова Q, а именно $Q = v + P$. Така че първото свойство е изпълнено.

2. За дадени $P, Q, R \in A = V$ имаме

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = (Q - P) + (R - Q) = R - P = \overrightarrow{PR}.$$

   Значи и второто свойство е изпълнено.

Когато линейно пространство се разглежда като афинно, винаги се има предвид тоя пример.

Пример 11 Частен случай на предишния пример: $\mathbb{R}^n$ е n-мерно афинно пространство, моделирано върху себе си.

Пример 12 Геометричното пространство е 3-мерно афинно пространство, моделирано върху линейното пространство на векторите в пространството.
Геометричната равнина е 2-мерно афинно пространство, моделирано върху линейното пространство на векторите в равнината (компланарни с равнината).
Геометричната права е 1-мерно афинно пространство, моделирано върху линейното пространство на векторите върху правата (колинеарни с правата).
Това е така, защото първото свойство сме го проверили в края на въпрос 1, а второто всъщност е дефиницията за събиране на геометрични вектори от въпрос 2.

Тоя пример показва, че всичко, което важи за афинни пространства, важи и в класическата геометрия на пространството и равнината. Така че работейки с афинни пространства получаваме възможността от една страна да формулираме едновременно общите неща от афинната геометрия на пространството и на равнината (а и на права) вместо да ги повтаряме два или три пъти с незначителни изменения, а от друга страна без никакви затруднения да се занимаваме с афинна геометрия в пространства с произволна размерност, тоест да не се ограничаваме с малките размерности 1, 2, 3. (Афинната геометрия е частта от геометрията, в която не се интересуваме от измервания. В нея се интересуваме от взаимното положение на някакви фигури, например пресичане на прави или равнини, или успоредност на прави или равнини, или прави или равнини, минаващи през някакви точки.)

Твърдение 14 *В афинно пространство са в сила свойствата:*

1. $\overrightarrow{PQ} = 0 \Leftrightarrow P = Q$.
2. $\overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{PQ}$.
3. $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$.
4. *Ако* $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$, *то* $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{QS}$ *(свойство на успоредника).*

Доказателство:

1. Ако във второто свойство в определението вземем трите точки да съвпадат, получаваме $\overrightarrow{PP} + \overrightarrow{PP} = \overrightarrow{PP}$ и следователно $\overrightarrow{PP} = 0$. С това е доказана обратната посока.

   Щом $\overrightarrow{PP} = 0$, то ако $\overrightarrow{PQ} = 0$, от единствеността в първото свойство в определението, приложено за P и $v = 0$, следва, че $Q = P$. С това е доказана и правата посока.

2. Ако във второто свойство в определението вземем $R = P$, получаваме $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{PP} = 0$ и следователно $\overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{PQ}$.

3. Това всъщност е второто свойство в определението за точките O, P, Q: $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ}$ и следователно $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$.

4. Ако $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$, то, прилагайки за дясната страна 3. за точките P, R, S, получаваме $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PS} - \overrightarrow{PR}$. Следователно $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PS} - \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QS}$, като второто равенство следва от 3. за точките P, Q, S. □

Ако човек сравни горното доказателство на свойството на успоредника с доказателството на същото свойство от въпрос 1, то може би ще се засили в голяма степен вярата му в правдоподобността на твърдението, че изграждането на геометрията въз основа на понятията линейно пространство и афинно пространство е значително по-просто от класическия подход, известен от училището.

Забележка 16 В горните неща (с изключение на Пример 12) никъде не се използват някакви специфични свойства на полето на реалните числа, така че те важат без промяна и ако V е линейно пространство над произволно поле F.

Ориентация

Определение 12

1. *Ориентация* в крайномерно афинно пространство е ориентация в направляващото линейно пространство.
2. Казваме, че крайномерно афинно пространство е *ориентирано*, ако е избрана едната от двете възможни ориентации (тоест, ако направляващото пространство е ориентирано). Избраната ориентация се нарича *положителна*, а другата – *отрицателна*.

Забележка 17 Ориентация върху права се нарича още *посока върху правата*, а ориентирана права – *ос*. Ориентация в равнина се нарича още *посока на въртене в равнината.*

Пример 13 $\mathbb{R}^n$, разглеждано като линейно пространство, се счита ориентирано чрез стандартната ориентация (тоест чрез дефинираната от стандартния базис ориентация). Следователно получаваме *стандартна ориентация* в $\mathbb{R}^n$, разглеждано като афинно пространство.

Евклидови афинни пространства

Определение 13 *Евклидово афинно пространство* е афинно пространство, чието направляващо линейно пространство е евклидово линейно пространство (тоест в направляващото пространство е фиксирано едно скаларно произведение).

Пример 14 Нека U е евклидово линейно пространство. Тогава U, разглеждано като афинно пространство, моделирано върху себе си, е евклидово афинно пространство.
В частност, $\mathbb{R}^n$ е евклидово афинно пространство.

Пример 15 При фиксирана единична отсечка получаваме скаларно произведение в линейното пространство на векторите в геометричното пространство. Следователно геометричното пространство става 3-мерно евклидово афинно пространство. Аналогично геометричната равнина става 2-мерно евклидово афинно пространство, а геометричната права става 1-мерно евклидово афинно пространство.

Тоя пример показва, че всичко, което важи за евклидови афинни пространства, важи и в класическата геометрия на пространството и равнината. Така че работейки с евклидови афинни пространства получаваме възможността от една страна да формулираме едновременно общите неща от евклидовата геометрия на пространството и на равнината (а и на права) вместо да ги повтаряме два или три пъти с незначителни изменения, а от друга страна без никакви затруднения да се занимаваме с евклидова геометрия в пространства с произволна размерност, тоест да не се ограничаваме с малките размерности 1, 2, 3.

Нека A е евклидово афинно пространство.

Определение 14 *Разстояние между точките* $P, Q \in A$ се нарича дължината на вектора $\overrightarrow{PQ}$. Означава се с $|PQ|$, тоест $|PQ| = \left|\overrightarrow{PQ}\right|$.

Твърдение 15 *За* $P, Q, R \in A$ *са в сила:*

1. $|PQ| \geq 0$ *и* $= \Leftrightarrow P = Q$.

2. $|QP| = |PQ|$.

3. $|PR| \leq |PQ| + |QR|$ *(неравенство на триъгълника).*

Доказателство: Свойствата следват лесно от свойствата на дължината (нормата) от въпроса за евклидови линейни пространства със същите номера и свойствата от Твърдение 14 със същите номера:

1. $|PQ| = \left|\overrightarrow{PQ}\right| \geq 0$ и $= \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} = 0 \Leftrightarrow P = Q$.

2. $|QP| = \left|\overrightarrow{QP}\right| = \left|-\overrightarrow{PQ}\right| = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = |PQ|$.

3. $|PR| = \left|\overrightarrow{PR}\right| = \left|\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}\right| \leq \left|\overrightarrow{PQ}\right| + \left|\overrightarrow{QR}\right| = |PQ| + |QR|$. □

Определение 15 Ако $O, P, Q \in A$, $O \neq P$, $O \neq Q$, то дефинираме $\sphericalangle POQ = \sphericalangle\left(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}\right)$.

Пример 16 Ако $O, P \in A$, $O \neq P$, то $\sphericalangle POP = 0$.

Твърдение 16 *Нека $O, P, Q \in A$, $O \neq P$, $O \neq Q$. Тогава $\sphericalangle QOP = \sphericalangle POQ$.*

Доказателство: Следва от симетрията на ъгъла между вектори:
$\sphericalangle QOP = \sphericalangle\left(\overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OP}\right) = \sphericalangle\left(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}\right) = \sphericalangle POQ$. □

Твърдение 17 (косинусова теорема) *Нека $O, P, Q \in A$, $O \neq P$, $O \neq Q$. Тогава*

$$|PQ|^2 = |OP|^2 + |OQ|^2 - 2|OP||OQ| \cos \sphericalangle POQ.$$

Доказателство: Следва от косинусовата теорема за вектори от въпроса за евклидови линейни пространства:

$$\begin{aligned} |PQ|^2 = \left|\overrightarrow{PQ}\right|^2 = \left|\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}\right|^2 &= \left|\overrightarrow{OP}\right|^2 + \left|\overrightarrow{OQ}\right|^2 - 2\left|\overrightarrow{OP}\right|\left|\overrightarrow{OQ}\right| \cos \sphericalangle\left(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}\right) \\ &= |OP|^2 + |OQ|^2 - 2|OP||OQ| \cos \sphericalangle POQ. \end{aligned}$$ □