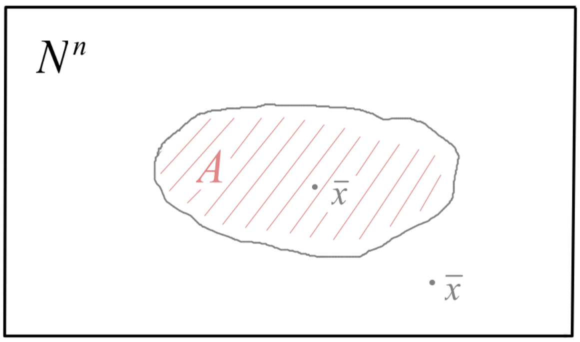
Лекция 11: Разрешими множества

4.1 Разрешими множества

В този раздел ще изучим основните свойства на *разрешимите множества*, които се явяват математическа формализация на алгоритмично разрешимите проблеми. На английски ще ги срещнете под най-различни имена: *decidable, solvable, computable, recursive.*

4.1.1 Характеристична функция на множество

Навсякъде под *множество* ще разбираме подмножество на някаква декартова степен на $\mathbb{N}$. Интуитивно, едно множество е разрешимо, ако има алгоритъм, който може да каже (да разреши, to decide) дали дадена n-торка $\bar{x}$ принадлежи на A или не (като и в двата случая този алгоритъм спира – разбира се, с различен резултат).



За да дефинираме формално понятието разрешимост, най-напред ще въведем *характеристична функция* на множество A.

Определение 4.1. *Характеристична функция* на множеството $A\subseteq\mathbb{N}^n$ наричаме функцията $\chi_A\colon \mathbb{N}^n \longrightarrow \mathbb{N}$, която се дефинира с равенството:

$$\chi_A(\bar{x}) = \begin{cases} 0, & \text{ако } \ \bar{x} \in A \\ 1, & \text{ако } \ \bar{x} \notin A. \end{cases}$$

Да обърнем внимание, че и тук, както при характеристичната функция на *предикат,* "позитивния" случай $\bar{x} \in A$ кодираме с 0, а негативния $\bar{x} \notin A$ — с 1.

Определение 4.2. Казваме, че множеството $A \subseteq \mathbb{N}^n$ е *разрешимо*, ако неговата характеристична функция χ_A е рекурсивна.

Да отбележим, че характеристичната функция на всяко множество A е *тотална*, тъй че условието за рекурсивност на χ_A съвпада с условието за изчислимост на χ_A.

Горната дефиниция за разрешимост на множество е съвсем аналогична на дефиницията за разрешимост на предикат.

Ясно е, че ако предикатът p е разрешим, то и множеството $A = \{\bar{x} \mid p(\bar{x}) = \mathit{true}\}$ е разрешимо и обратно, ако A е разрешимо, то е разрешим и предикатът p, който се дефинира с еквивалентността

$$p(\bar{x}) \ \stackrel{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} \ \bar{x} \in A.$$

Примери. Разрешими са множествата $\mathbb{N}^n$ за всяко $n \geq 1$, празното множество, множеството на четните числа, на простите числа, на съвършените числа и пр. Всички тези множества имат дори *примитивно* рекурсивни характеристични функции.

Задача 4.1. Докажете, че всяко крайно множество е разрешимо.

Решение. Нека $A \subseteq \mathbb{N}$. Ако A е празното множество, то χ_A е функцията $\lambda x.1$, която е примитивно рекурсивна. Ако $A = \{a_1, \dots, a_k\}$, то неговата характеристична функция се дефинира с разглеждане на случаи и също е примитивно рекурсивна:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{ако } \ x = a_1 \\ . & . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ 0, & \text{ако } \ x = a_k \\ 1, & \text{в останалите случаи.} \end{cases}$$

Ако $A = \{\bar{a}^1, \dots \bar{a}^k\} \subseteq \mathbb{N}^n$, за χ_A отново е вярно, че

$$\chi_A(\bar{x}) = \begin{cases} 0, & \text{ако} \quad \bar{x} = \bar{a}^1 \\ . & . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ 0, & \text{ако} \quad \bar{x} = \bar{a}^k \\ 1, & \text{в останалите случаи.} \end{cases}$$

Тук предикатите от вида $p_i(\bar{x}) \iff \bar{x} = \bar{a}^i$ са примитивно рекурсивни, защото ако $\bar{a}^i = (a_1^i, \dots, a_n^i)$, то p_i можем да препишем като

$$p_i(x_1, \dots, x_n) \iff x_1 = a_1^i \ \& \ \dots \ \& \ x_n = a_n^i.$$

Следователно χ_A е примитивно рекурсивна и значи A е разрешимо. $\square$

4.1.2 Основни свойства на разрешимите множества

В този раздел ще покажем някои основни факти, отнасящи се до разрешими множества, които ще използваме многократно по-нататък. Те са много близки по дух до свойствата на рекурсивните предикати, които доказахме в раздел 1.5.2.

Твърдение 4.1. (НДУ за разрешимост на множество) Множеството $A \subseteq \mathbb{N}^n$ е разрешимо тогава и само тогава, когато съществува рекурсивна функция f, такава че за всяко $\bar{x} \in \mathbb{N}^n$:

$$\bar{x} \in A \iff f(\bar{x}) = 0.$$

Доказателство. Ако A е разрешимо, то $f := \chi_A$ очевидно удовлетворява горното условие (като в добавка f е 0-1 функция).

Обратно, ако има рекурсивна функция f, за която горното условие е в сила, то очевидно за всяко $\bar{x} \in \mathbb{N}^n$ ще е изпълнено

$$\chi_A(\bar{x}) = sg(f(\bar{x}))$$

и следователно χ_A е рекурсивна. $\square$

Твърдение 4.2. (Основни свойства на разрешимите множества)

1) Нека $A \subseteq \mathbb{N}^n$ и $B \subseteq \mathbb{N}^n$ са разрешими множества. Тогава са разрешими и множествата $A \cup B$, $A \cap B$ и $\bar{A}$.

2) Нека $A \subseteq \mathbb{N}^n$ е разрешимо. Тогава са разрешими и множествата

$$\begin{aligned} C &= \{(\bar{x}, y) \mid \exists z_{z \leq y}\ (\bar{x}, z) \in A\} \quad \text{и} \\ D &= \{(\bar{x}, y) \mid \forall z_{z \leq y}\ (\bar{x}, z) \in A\}. \end{aligned}$$

3) Ако $A \subseteq \mathbb{N}^n$ и $B \subseteq \mathbb{N}^k$ са разрешими, то е разрешимо и тяхното декартово произведение $A \times B$.

Доказателство. 1) По определение:

$$\begin{aligned} \bar{x} \in A \cup B &\iff \bar{x} \in A \ \vee \ \bar{x} \in B \iff \chi_A(\bar{x}) = 0 \ \vee \ \chi_B(\bar{x}) = 0 \\ &\iff \underbrace{\chi_A(\bar{x}).\chi_B(\bar{x})}_{f(\bar{x})} = 0. \end{aligned}$$

Функцията f очевидно е рекурсивна, откъдето съгласно *Твърдение* 4.1 $A \cup B$ е разрешимо.

За $A \cap B$ ще имаме:

$$\begin{aligned} \bar{x} \in A \cap B &\iff \bar{x} \in A \ \& \ \bar{x} \in B \iff \chi_A(\bar{x}) = 0 \ \& \ \chi_B(\bar{x}) = 0 \\ &\iff \underbrace{\chi_A(\bar{x}) + \chi_B(\bar{x})}_{g(\bar{x})} = 0. \end{aligned}$$

където g е рекурсивна, и значи отново можем да приложим *Твърдение* 4.1.

За характеристичната функция на $\bar{A} = \mathbb{N}^n \setminus A$ очевидно

$$\chi_{\bar{A}} = \overline{sg} \circ \chi_A.$$

2) Условието за принадлежност към C можем да препишем така:

$$\begin{aligned} (\bar{x}, y) \in C &\iff (\bar{x}, 0) \in A \ \vee \ \dots \ \vee \ (\bar{x}, y) \in A \\ &\iff \chi_A(\bar{x}, 0) = 0 \ \vee \ \dots \ \vee \ \chi_A(\bar{x}, y) = 0 \iff \prod_{z \leq y} \chi_A(\bar{x}, z) \ = \ 0, \end{aligned}$$

откъдето се вижда, че $\chi_C(\bar{x}, y) = \prod_{z \leq y} \chi_A(\bar{x}, z)$ е рекурсивна.

По същия начин за множеството D ще имаме:

$$\begin{aligned} (\bar{x}, y) \in D &\iff (\bar{x}, 0) \in A \ \& \ \dots \ \& \ (\bar{x}, y) \in A \\ &\iff \chi_A(\bar{x}, 0) = 0 \ \& \ \dots \ \& \ \chi_A(\bar{x}, y) = 0 \iff \sum_{z \leq y} \chi_A(\bar{x}, z) \ = \ 0. \end{aligned}$$

Понеже функцията $f(\bar{x}, y) = \sum_{z \leq y} \chi_A(\bar{x}, z)$ е рекурсивна, то по *Твърдение* 4.1 множеството D ще е разрешимо.

3) От определението за декартово произведение имаме за произволни $\bar{x} \in \mathbb{N}^n$ и $\bar{y} \in \mathbb{N}^k$:

$$\begin{aligned} (\bar{x}, \bar{y}) \in A \times B &\iff \bar{x} \in A \ \& \ \bar{y} \in B \iff \chi_A(\bar{x}) = 0 \ \& \ \chi_B(\bar{y}) = 0 \\ &\iff \chi_A(\bar{x}) + \chi_B(\bar{y}) = 0, \end{aligned}$$

откъдето отново от *Твърдение* 4.1 ще следва, че $A \times B$ е разрешимо. □

Понякога ще ни трябва и следното обобщение на *Твърдение* 4.2 2):

Следствие 4.1. Нека A е разрешимо множество, а $b(\bar{x})$ е рекурсивна функция. Тогава са разрешими и следните множества C^* и D^*:

$$\begin{aligned} C^* &= \{\bar{x} \mid \exists z_{z \leq b(\bar{x})}\ (\bar{x}, z) \in A\} \\ D^* &= \{\bar{x} \mid \forall z_{z \leq b(\bar{x})}\ (\bar{x}, z) \in A\}. \end{aligned}$$

Доказателство. Като използваме, че характеристичните функции на множествата C и D са рекурсивни, веднага получаваме същото и за χ_{C^*} и χ_{D^*}, защото

$$\chi_{C^*}(\bar{x}) \;=\; \chi_C(\bar{x}, b(\bar{x})) \quad \text{и} \quad \chi_{D^*}(\bar{x}) \;=\; \chi_D(\bar{x}, b(\bar{x})).$$

□

Твърдение 4.3. (Първообразът на разрешимо множество чрез рекурсивна функция е разрешимо множество) Нека $A \subseteq \mathbb{N}$ е разрешимо, а f е n-местна рекурсивна функция. Тогава е разрешимо и множеството

$$f^{-1}(A) \stackrel{\text{деф}}{=} \{\bar{x} \mid f(\bar{x}) \in A\}.$$

Доказателство. По дефиниция

$$\bar{x} \in f^{-1}(A) \iff f(\bar{x}) \in A$$

и следователно $\chi_{f^{-1}(A)} \;=\; \chi_A \circ f$ ще е рекурсивна като композиция на рекурсивни функции. □

Ако се питате дали подобно твърдение е вярно и за *образ* на разрешимо множество, отговорът е НЕ. Контрапример ще можем да дадем следващия път, когато се запознаем с *полуразрешимите* множества.

Следващото твърдение дава връзка между изчислителната сложност на функция f и нейната графика G_f.

Твърдение 4.4. Нека f е тотална функция. Тогава f е рекурсивна тогава и само тогава, когато нейната графика е разрешимо множество.

Доказателство. Нека f е n-местна рекурсивна функция. Тогава за всяко $\bar{x} \in \mathbb{N}^n$ и $y \in \mathbb{N}$ е вярно, че

$$(\bar{x}, y) \in G_f \iff f(\bar{x}) = y \iff \underbrace{|f(\bar{x}) - y|}_{g(\bar{x}, y)} = 0.$$

Тъй като функцията g е рекурсивна, то по *Твърдение* 4.1 множеството G_f ще е разрешимо.

За обратната посока използваме, че всяка функция f (включително и нетотална) можем да изразим чрез нейната графика по следния начин:

$$f(\bar{x}) \simeq \mu y[(\bar{x}, y) \in G_f] \simeq \mu y[\chi_{G_f}(\bar{x}, y) = 0].$$

От това изразяване се вижда, че ако G_f е разрешима, то χ_{G_f} е рекурсивна и следователно f ще е частично рекурсивна. Но по условие имаме, че тази функция е тотална, и значи тя е рекурсивна. □

Да отбележим, че изискването f да е тотална във формулировката на горното твърдение е съществено. Възможно е графиката на f да е разрешима, без непременно f да е тотална. Като най-прост пример можем да вземем графиката на никъде недефинираната функция $\emptyset^{(1)}$, която е разрешима (защото е празното множество), но $\emptyset^{(1)}$ не е тотална.

Задача 4.2. Нека графиката на n-местната функция f е разрешима. Нека още f за някоя рекурсивна функция b, е вярно, че за всяко $\bar{x} \in \mathbb{N}^n$:

$$!f(\bar{x}) \implies f(\bar{x}) \leq b(\bar{x}).$$

Докажете, че f е изчислима функция с разрешима дефиниционна област.

Забележка. Ако за функциите $f(\bar{x})$ и $b(\bar{x})$ е изпълнена горната импликация, ще казваме, че *f се мажорира* от b и ще пишем $f \leq b$.

Решение. За произволно $\bar{x} \in \mathbb{N}^n$ имаме

$$\bar{x} \in Dom(f) \iff \exists y\ f(\bar{x}) \simeq y \iff \exists y_{y \leq b(\bar{x})}\ f(\bar{x}) \simeq y.$$

Тъй като ограничените квантори запазват разрешимостта (*Следствие* 4.1), то $Dom(f)$ ще е разрешимо.

За изчислимостта на f използваме отново наблюдението от доказателството на последното твърдение, а именно, че

$$f(\bar{x}) \simeq \mu y[\chi_{G_f}(\bar{x}, y) = 0].$$

□

4.1.3 Няколко задачи за разрешими множества

Нека A и B са множества от естествени числа. Дефинираме тяхната *директна сума $A \oplus B$* по следния начин:

$$A \oplus B \stackrel{\text{деф}}{=} \{2x \mid x \in A\} \cup \{2x + 1 \mid x \in B\}.$$

В следващата задача ще видим, че $A \oplus B$ "кодира" множествата A и B, като освен това запазва разрешимостта.

Задача 4.3. Нека $A \subseteq \mathbb{N}$ и $B \subseteq \mathbb{N}$. Докажете, че A и B са разрешими тогава и само тогава, когато тяхната директна сума $A \oplus B$ е разрешима.

Решение. Нека A и B са разрешими. Да разпишем условието за принадлежност към $A \oplus B$:

$$\begin{aligned} z \in A \oplus B &\iff (z \text{ е четно } \& \ \frac{z}{2} \in A) \ \vee \ (z \text{ е нечетно } \& \ \frac{z-1}{2} \in B) \\ &\iff rem(2,z) = 0 \ \& \ \chi_A([\frac{z}{2}]) = 0 \ \vee \ \underbrace{rem(2,z) = 1}_{\overline{sg}(rem(2,z))=0} \& \ \chi_B([\frac{z}{2}]) = 0 \\ &\iff \underbrace{(rem(2,z) + \chi_A([\frac{z}{2}])).(\overline{sg}(rem(2,z)) + \chi_B([\frac{z}{2}]))}_{f(z)} = 0 \\ &\iff f(z) = 0. \end{aligned}$$

Понеже функцията f е рекурсивна, съгласно *Твърдение* 4.1, $A \oplus B$ ще е разрешимо.

Друг начин да решим тази посока на задачата е да представим $A \oplus B$ като израз, в който участват разрешими множества и теоретико-множествени операции, които запазват разрешимостта. За целта да означим с E множеството на четните числа. Нека още

$$A_0 = \{z \mid [\frac{z}{2}] \in A\} \quad \text{и} \quad B_0 = \{z \mid [\frac{z}{2}] \in B\}.$$

Множествата A_0 и B_0 са първообрази на A и B чрез $f(z) = [\frac{z}{2}]$ и съгласно *Твърдение* 4.3 те са разрешими. Тогава $A \oplus B$ можем да представим така:

$$A \oplus B \ = \ (E \cap A_0) \ \cup \ (\bar{E} \cap B_0).$$

Сега прилагаме *Твърдение* 4.2 1), за да получим, че $A \oplus B$ е разрешимо.

Всъщност може би най- краткият начин да решим тази посока на задачата е да забележим, че характеристичната функция на $A \oplus B$ се изразява чрез характеристичните на A и B по следния начин:

$$\chi_{A \oplus B}(z) = \begin{cases} \chi_A([\frac{z}{2}]), & \text{ако } z \text{ е четно} \\ \chi_B([\frac{z}{2}]), & \text{ако } z \text{ е нечетно.} \end{cases}$$

За обратната посока, да приемем, че директната сума $A \oplus B$ е разрешимо множество. Лесно се съобразява, че за всяко естествено x са в сила еквивалентностите:

$$x \in A \iff 2x \in A \oplus B \quad \text{и} \quad x \in B \iff 2x + 1 \in A \oplus B.$$

Сега вече можем да приложим *Твърдение* 4.3 или пък директно да изразим характеристичните функции на A и B:

$$\chi_A(x) = \chi_{A \oplus B}(2x) \quad \text{и} \quad \chi_B(x) = \chi_{A \oplus B}(2x + 1).$$

От тези равенства, в частност, се вижда, че ако имаме разрешаващ алгоритъм за $A \oplus B$, можем да разрешаваме алгоритмично A и B, и следователно $A \oplus B$ кодира в едно двете множества A и B. $\square$

Да дефинираме и *директното произведение* $A \otimes B$ на две множества от естествени числа A и B както следва:

$$A \otimes B \stackrel{\text{деф}}{=} \{\Pi(x,y) \mid x \in A \;\&\; y \in B\}.$$

Твърдим, че за директното произведение $A \otimes B$ е вярно същото като за $A \oplus B$, но само ако A и B не са празни множества.

Задача 4.4. Нека $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{N}$ и $\emptyset \neq B \subseteq \mathbb{N}$. Докажете, че A и B са разрешими тогава и само тогава, когато директното им произведение $A \otimes B$ е разрешимо.

Решение. Правата посока на задачата е ясна; имаме

$$z \in A \otimes B \iff L(z) \in A \;\&\; R(z) \in B \iff \chi_A(L(z)) + \chi_B(R(z)) = 0.$$

Да отбележим, че тук никъде не използваме, че A и B не са празни. За обратната посока, обаче, това ще е важно.

Наистина, ако $A = \emptyset$, то $A \otimes B$ също ще е $\emptyset$, и следователно ще е разрешимо, докато в същото време B може да е произволно сложно. Така че от $A \otimes B$ — разрешимо в общия случай *не следва*, че A и B ще са разрешими. Освен това, при $A = \emptyset$ директното произведение $A \otimes B = \emptyset$ и следователно то не може да "запомни" в себе си B.

Нека сега A и B са непразни множества с разрешимо декартово произведение $A \otimes B$. Ако разпишем директно условието за принадлежност към A от дефиницията на $A \otimes B$, ще получим

$$x \in A \iff \exists y(y \in B \;\&\; \Pi(x,y) \in A \otimes B),$$

което намесва и B и очевидно не дава начин да видим, че A е разрешимо.

Затова разсъждаваме другояче: щом $B \neq \emptyset$, ще съществува поне едно $y_0 \in B$. Да фиксираме едно такова y_0. Тогава очевидно

$$x \in A \iff \Pi(x, y_0) \in A \otimes B.$$

Получихме, че $\chi_A(x) = \chi_{A \otimes B}(\Pi(x, y_0))$ и значи χ_A е рекурсивна. Аналогично разсъждаваме, за да покажем, че и χ_B е рекурсивна.

Ако, обаче, поискаме да разберем дали дадено число x е в A, като разполагаме с програмата, разпознаваща $A \otimes B$ (т.е. като знаем $\chi_{A \otimes B}$), виждаме, че има проблем: за да пресметнем $\chi_A(x)$ ни трябва конкретно y_0 от B, а ние не го знаем (знаем само, че такова съществува).

Всъщност, като разполагаме с $\chi_{A\otimes B}$, все пак можем да намерим *алгоритмично* елемент $y_0 \in B$. За целта намираме първото $z \in A\otimes B$. Знаем, че то трябва да е във вида $\Pi(x_0, y_0)$ за някои $x_0 \in A$ и $y_0 \in B$. Тогава

$$y_0 = R(\mu z[\chi_{A\otimes B}(z) = 0]).$$

Сега преписваме χ_A само чрез $\chi_{A\otimes B}$ (без y_0):

$$\chi_A(x) = \chi_{A\otimes B}(\Pi(x, R(\mu z[\chi_{A\otimes B}(z) = 0]))).$$

Ясно е вече, че като разполагаме с програма, разпознаваща $A\otimes B$, можем да напишем програма, разпознаваща A. $\square$

Следващата задача е още една илюстрация на явлението, което наблюдавахме току-що — че едно е да знаем, че дадено множество е разрешимо, а съвсем друго е разполагаме с алгоритъм, който го разрешава.

Задача 4.5. Разрешимо ли е множеството A, което се дефинира като:

$$A = \{n \mid \text{в десетичния запис на числото } \pi \text{ има блок от } n \text{ седмици }\}?$$

(Тук имаме предвид, че ако π е от вида $3,1415\dots\underbrace{7\dots7}_{n\text{ пъти}}\dots$, то $n \in A$.)

Решение. Формално логически имаме два случая:

Случай 1: A е крайно. Тогава A е разрешимо, съгласно *Задача* 4.1.

Случай 2: A е безкрайно. Тогава всъщност $A = \mathbb{N}$, което се вижда веднага от факта, че

$$n \in A \implies \forall m_{m\leq n}\ m \in A.$$

Наистина, нека m е произволно естествено число. Щом A е безкрайно, ще съществува число $n \geq m$, което е в A. Но тогава от горното наблюдение получаваме, че числата по-малки от n също ще са в A, и значи там ще е и произволното m, от което тръгнахме.

Видяхме, че и в двата възможни случая за A излезе, че A е разрешимо. Но кой е алгоритъмът, който го разрешава? Отговорът на този въпрос по никакъв начин не следва от разсъжденията по-горе, защото те не ни дават отговор на въпроса дали множеството A е крайно или безкрайно. $\square$

Задача 4.6. Нека h е едноместна рекурсивна функция, за която е изпълнено условието $h(n) \geq n$ за всяко n. Докажете, че множеството $A = \{h(0), h(1), \dots\}$ е разрешимо.

Решение. От дефиницията на h имаме, че за всяко x:

$$x \in A \iff \exists n\, h(n) = x \iff \exists n_{n\leq \underbrace{h(n)}_{x}} \underbrace{h(n) = x}_{(n.x)\in G_h} \iff \exists n_{n\leq x}\ (n.x) \in G_h.$$

Понеже h е рекурсивна, нейната графика ще е разрешима, съгласно *Твърдение* 4.4. Сега прилагаме *Следствие* 4.1 и стигаме до извода, че A наистина е разрешимо. $\square$

4.1.4 Характеризации на непразните разрешими подмножества на $\mathbb{N}$

По-надолу с $Range(f)$ ще означаваме множеството от стойностите на функцията f, с други думи

$$Range(f) \stackrel{\text{деф}}{=} \{\ y \mid \exists \bar{x}\ f(\bar{x}) \simeq y\ \}.$$

Когато f е едноместна и тотална, очевидно $Range(f) = \{f(0), f(1), \dots\}$. Ако за едно множество $A \subseteq \mathbb{N}$ е изпълнено

$$A = \{f(0), f(1), \dots\},$$

ще казваме, че f ***изброява*** елементите на A. Ако функцията f е строго растяща, тя изброява елементите на A в строго растящ ред. Ако f е нестрого растяща (т.е. $\forall x \forall y\ (x \leq y \implies f(x) \leq f(y))$, тя изброява елементите на A в ненамаляващ ред.

Оказва се, че *безкрайните* разрешими множества можем да характеризираме като точно тези множества, които могат да се изброят в строго растящ ред.

Твърдение 4.5. Безкрайното множество от естествени числа A е разрешимо тогава и само тогава, когато съществува рекурсивна строго растяща функция h, такава че $A = \{h(0), h(1), \dots\}$.

Доказателство. Нека $A \subseteq \mathbb{N}$ е безкрайно и разрешимо. Ще конструираме рекурсивна функция h, която го изброява във възходящ ред. Всъщност функцията h с това свойство е единствена и тя се определя от следната рекурсивна схема:

$$\left|\begin{array}{l} h(0) = \mu z[z \in A] \\ h(n+1) = \mu z[z \in A \ \&\ z > h(n)]. \end{array}\right.$$

Да се убедим. Най-напред, тъй като A е безкрайно, h очевидно ще е тотална функция. От определението ѝ се вижда още, че $h(n+1) > h(n)$ за всяко n, т.е. h е строго растяща. Освен това по дефиниция $Range(h) \subseteq A$. Обратното включване също е вярно (съобразете го). Следователно $A = Range(h)$.

Остана да видим, че е h изчислима. За целта да препишем дефиницията ѝ така:

$$\left|\begin{array}{l} h(0) = \mu z[\chi_A(z) = 0] = a_0 \\ h(n+1) = \underbrace{\mu z[\chi_A(z) + \chi_{>}(z, h(n)) = 0]}_{H(n,h(n))}, \end{array}\right.$$

където $H(n, y) \overset{\text{деф}}{\simeq} \mu z[\chi_A(z) + \chi_>(z, y) = 0]$ очевидно е изчислима. Тогава и h ще е изчислима, и понеже тя е тотална, значи общо е рекурсивна.

Обратно, нека $A = \{h(0), h(1), \dots\}$ за някоя рекурсивна строго растяща функция h. По определение

$$x \in A \iff \exists n\ h(n) = x.$$

Знаем, че множеството $G_h = \{(n, x) \mid h(n) = x\}$ е разрешимо, но как да ограничим квантора за съществуване пред него, за да можем да използваме *Следствие* 4.1?

Една горна граница за всяко n, такова че $h(n) = x$, очевидно се явява функцията $b(x) = \mu n[h(n) \geq x]$. Тази функция е тотална, защото A е безкрайно. Освен това тя е изчислима, значи общо b е рекурсивна. Сега вече множеството A ще е разрешимо, защото за него ще е вярно, че

$$x \in A \iff \exists n\ h(n) = x \iff \exists n_{n \leq b(x)}\ h(n) = x.$$

Разбира се, можехме и директно да съобразим, че

$$x \in A \iff h(b(x)) = x,$$

откъдето веднага $\chi_A(x) = sg(|h(b(x)) - x|)$ ще е рекурсивна. □

Да отбележим, че тази посока на твърдението можехме да получим и като следствие от *Задача* 4.6, защото когато h е строго растяща, със сигурност $h(n) \geq n$. Проверката е с индукция по n: за $n = 0$ то се превръща в очевидното $h(0) \geq 0$, а допускайки, че $h(n) \geq n$ за някое n, за $n + 1$ ще имаме:

$$h(n+1) > h(n) \overset{\text{и.х.}}{\geq} n.$$

Но $h(n+1)$ и n са естествени числа, тъй че от $h(n+1) > n$ със сигурност $h(n+1) \geq n + 1$.

Следващото твърдение характеризира *непразните* разрешими множества от естествени числа: това са точно множествата, които могат да се изброят алгоритмично в ненамаляващ ред.

Твърдение 4.6. Непразното множество от естествени числа A е разрешимо тогава и само тогава, когато съществува рекурсивна нестрого растяща функция h, такава че $A = \{h(0), h(1), \dots\}$.

Доказателство. Нека $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{N}$ е разрешимо. Искаме да построим рекурсивна и нестрого растяща функция h, която да изброява неговите елементи. Тук не можем да разсъждаваме както в предишното твърдение, полагайки

$$\left| \begin{array}{l} h(0) = \mu z[z \in A] \\ h(n+1) = \mu z[z \in A \ \&\ z > h(n)], \end{array} \right.$$

защото ако A е крайно множество, h няма да е тотална функция. Затова решаваме да разгледаме поотделно случаите, в които A е крайно и безкрайно.

Случай 1: A е крайно. Тогава $A = \{a_0, \dots, a_k\}$ за някое $k \geq 0$, като предполагаме, че $a_0 < \dots < a_k$. Тогава можем да вземем следната функция h:

$$h(n) = \begin{cases} a_0, & \text{ако} \quad n = 0 \\ . & . \quad . \quad . \quad . \\ a_k, & \text{ако} \quad n \geq k. \end{cases}$$

Имаме $h(0) < \dots < h(k-1) = h(k) = h(k+1) = \dots$, т.е. h е нестрого растяща. Тя очевидно е рекурсивна и изброява елементите на A.

Случай 2: A е безкрайно. Но тогава можем да използваме предишното *Твърдение* 4.5 и да получим, че $A = \mathit{Range}(h)$ дори за *строго растяща* рекурсивна h.

Видяхме, че и в двата възможни случая за A съществува рекурсивна растяща h, която изброява елементите на това множество. Горното разсъждение формално беше коректно, но то не ни помага да *конструираме* функцията h, ако разполагаме с програма, пресмятаща характеристичната функция на A. Програмата за χ_A в общия случай не ни дава възможност да определим кой от двата случая — A е крайно или A е безкрайно — е налице. Това, разбира се, не означава, че не може да се подходи другояче към задачата. Наистина, оказва се, че е възможно да се намери обща функция h, без да се разглеждат случаите за A. Това ще формулираме като задача за ЕК, след като завършим доказателството на твърдението.

Сега да се насочим към обратната посока. Нека h е рекурсивна растяща функция, която изброява елементите на A в ненамаляващ ред, т.е. имаме

$$A = \{h(0), h(1), \dots\}, \quad \text{където} \quad h(0) \leq h(1) \leq \dots$$

Тук отново е удобно да разгледаме двата случая за мощността на A.

Случай 1: A е крайно. Вече се убедихме, че всяко крайно множество е разрешимо.

Случай 2: A е безкрайно. Тук можем да действаме по аналогия с доказателството на предишното твърдение. Разликата е, че сега h е *нестрого* растяща, но въпреки това, щом $\mathit{Range}(h) = A$ е безкрайно, функцията

$$b(x) = \mu n[h(n) \geq x]$$

ще е тотална и изчислима, т.е. рекурсивна. Тогава отново за всяко x:

$$x \in A \iff \exists n_{n \leq b(x)}\ h(n) = x.$$

Следователно A е разрешимо множество. $\square$

Задача 4.7. (задача за ЕК) Нека $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{N}$ е разрешимо. *Конструирайте* чрез χ_A рекурсивна нестрого растяща функция h, такава че $A = \{h(0), h(1), \dots\}$.

Да използваме характеризацията на безкрайните разрешими множества от по-горе, за да решим следната задача:

Задача 4.8. Нека A и B са безкрайни и разрешими множества от естествени числа. Докажете, че съществува рекурсивна биекция $h\colon A \longrightarrow B$. При какво условие за A и B тази функция h може да се разшири до рекурсивна биекция върху цялото $\mathbb{N}$?

Решение. От *Твърдение* 4.5 знаем, че за множествата A и B съществуват рекурсивни строго растящи функции g и h, такива че $Range(f) = A$ и $Range(g) = B$, т.е.

$$A = \{f(0), f(1), \dots\} \quad \text{и} \quad B = \{g(0), g(1), \dots\}.$$

Идеята ни е ясна — да дефинираме h така, че n-тият елемент на A да отива в n-тия елемент на B, т.е.

$$h(f(n)) = g(n).$$

Тогава очевидно $h\colon A \longrightarrow B$ ще бъде инективна и сюрективна. Върху точките извън $Range(f)$ нямаме изисквания за h.

Значи можем да положим

$$h(x) = \begin{cases} g(\mu n[f(n) = x]), & \text{ако } x \in Range(f) \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Ако $x \in Range(f)$, то съществува единствено $n\colon f(n) = x$, и тогава минимизацията $\mu n[f(n) = x]$ го намира, а $h(x) \stackrel{\text{деф}}{=} g(\mu n[f(n) = x])$ изпраща този n-ти елемент на A в n-тия елемент на B. Така осигуряваме, че $h(f(n)) = g(n)$ за всяко n. Тъй като предикатът $p(x) \iff x \in Range(f)$ е разрешим, то h ще е рекурсивна.

Ако искаме $h\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ да е биективна, очевидно трябва допълненията на A и B да са с една и съща мощност, т.е. или и двете да са безкрайни, или да са крайни и да имат един и същ брой елементи. Довършете конструкцията на h за тези два случая, като за първия случай използвате, че $\bar{A}$ и $\bar{B}$ също са разрешими. $\square$

Задача 4.9. (задача за ЕК) Нека f и g са едноместни рекурсивни функции, като g е биективна. Нека още $f(x) \geq g(x)$ за всяко $x \in \mathbb{N}$. Докажете, че $Range(f)$ е разрешимо множество.

Задача 4.10. (задача за ЕК) Нека f и g са едноместни рекурсивни функции, като g е обратима и $Range(g)$ е разрешимо множество. Нека още $f(x) \geq x$ за всяко $x \in \mathbb{N}$. Докажете, че е разрешимо множеството $\{g(x) \mid x \in Range(f)\}$.