Лекция II - Формули за вероятността

Лекция II - Формули за вероятността

- Условна вероятност
- Независимост
- Пълна вероятност
- Формула на Бейс

Условна вероятност

Нека A и B са произволни събития, като поставяме единствено изискването B да не е невъзможно събитие, т.е. $\mathsf{P}(B) \neq 0$. Често възниква необходимост да се пресметне вероятността на събитието A, след като сме наблюдавали сбъдването на B.

Условна вероятност

Нека A и B са произволни събития, като поставяме единствено изискването B да не е невъзможно събитие, т.е. $\mathrm{P}(B) \neq 0$. Често възниква необходимост да се пресметне вероятността на събитието A, след като сме наблюдавали сбъдването на B.

Пример

Ако наблюдаваме случайното теглене на карта от тесте с 32 карти може да забележим, че изтеглената карта е "картинка" (вале, дама или поп), без да обърнем внимание коя точно е картата. Ако при това положение се опитаме да намерим вероятността да е дама, това което търсим всъщност е условна вероятност.

Условна вероятност

Нека A и B са произволни събития, като поставяме единствено изискването B да не е невъзможно събитие, т.е. $\mathrm{P}(B) \neq 0$. Често възниква необходимост да се пресметне вероятността на събитието A, след като сме наблюдавали сбъдването на B.

Пример

Ако наблюдаваме случайното теглене на карта от тесте с 32 карти може да забележим, че изтеглената карта е "картинка" (вале, дама или поп), без да обърнем внимание коя точно е картата. Ако при това положение се опитаме да намерим вероятността да е дама, това което търсим всъщност е условна вероятност. Нека да означим с A събитието - "изтеглена е дама", а с B - "изтеглена е картинка". Ние се опитваме да пресметнем вероятността на A, при условие че се е сбъднало B. Прието е тази вероятност да се означава с $\mathrm{P}(A \,|\, B)$. Ако разсъждаваме в термините на класическа вероятност, то търсената вероятност ще е дроб, на която в знаменателя ще са всички начини за изтегляне на картинка, а в числителя тези от тях, при които е изтеглена дама, т.е.

Условна вероятност

Нека A и B са произволни събития, като поставяме единствено изискването B да не е невъзможно събитие, т.е. $\mathrm{P}(B) \neq 0$. Често възниква необходимост да се пресметне вероятността на събитието A, след като сме наблюдавали сбъдването на B.

Пример

Ако наблюдаваме случайното теглене на карта от тесте с 32 карти може да забележим, че изтеглената карта е "картинка" (вале, дама или поп), без да обърнем внимание коя точно е картата. Ако при това положение се опитаме да намерим вероятността да е дама, това което търсим всъщност е условна вероятност. Нека да означим с A събитието - "изтеглена е дама", а с B - "изтеглена е картинка". Ние се опитваме да пресметнем вероятността на A, при условие че се е сбъднало B. Прието е тази вероятност да се означава с $\mathrm{P}(A \mid B)$. Ако разсъждаваме в термините на класическа вероятност, то търсената вероятност ще е дроб, на която в знаменателя ще са всички начини за изтегляне на картинка, а в числителя тези от тях, при които е изтеглена дама, т.е.

$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{\text{брой на дамите}}{\text{брой на картинките}} = \frac{\mathrm{P}(AB)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{4}{12}$$

Тази вероятност явно е различна от вероятността да изтеглим дама.

Условна вероятност

Това ни дава основание да въведем понятието условна вероятност по следния начин.

Дефиниция - Условна вероятност

Нека $\mathrm{P}(B) \neq 0$. Вероятността да се изпълни A, ако знаем че се е изпълнило B се дефинира като:

$$\mathrm{P}(A \,|\, B) = \frac{\mathrm{P}(AB)}{\mathrm{P}(B)}$$

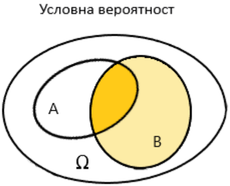
Условна вероятност

Това ни дава основание да въведем понятието условна вероятност по следния начин.

Дефиниция - Условна вероятност

Нека $\mathrm{P}(B) \neq 0$. Вероятността да се изпълни A, ако знаем че се е изпълнило B се дефинира като:

$$\mathrm{P}(A \mid B) = \frac{\mathrm{P}(AB)}{\mathrm{P}(B)}$$



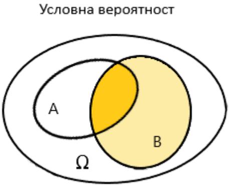
Условна вероятност

Това ни дава основание да въведем понятието условна вероятност по следния начин.

Дефиниция - Условна вероятност

Нека $\mathrm{P}(B) \neq 0$. Вероятността да се изпълни A, ако знаем че се е изпълнило B се дефинира като:

$$\mathrm{P}(A \,|\, B) = \frac{\mathrm{P}(AB)}{\mathrm{P}(B)}$$



Условната вероятност отговаря на аксиомите въведени за вероятността.

Условна вероятност

Условна вероятност

- Неотрицателност

$$\mathrm{P}(A \mid B) = \frac{\mathrm{P}(AB)}{\mathrm{P}(B)} \geq 0$$

Условна вероятност

- Неотрицателност

$$\mathrm{P}(A \mid B) = \frac{\mathrm{P}(AB)}{\mathrm{P}(B)} \geq 0$$

- Нормираност

$$\mathrm{P}(\Omega \mid B) = \frac{\mathrm{P}(\Omega B)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{\mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(B)} = 1$$

Условна вероятност

- Неотрицателност
$$\mathrm{P}(A \mid B) = \frac{\mathrm{P}(AB)}{\mathrm{P}(B)} \geq 0$$
- Нормираност
$$\mathrm{P}(\Omega \mid B) = \frac{\mathrm{P}(\Omega B)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{\mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(B)} = 1$$
- Адитивност

  Нека $A_1 A_2 = \emptyset$, то $A_1 B \cap A_2 B = \emptyset$ и тогава:

Условна вероятност

- Неотрицателност
$$\mathrm{P}(A \mid B) = \frac{\mathrm{P}(AB)}{\mathrm{P}(B)} \geq 0$$
- Нормираност
$$\mathrm{P}(\Omega \mid B) = \frac{\mathrm{P}(\Omega B)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{\mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(B)} = 1$$
- Адитивност

  Нека $A_1 A_2 = \emptyset$, то $A_1 B \cap A_2 B = \emptyset$ и тогава:
$$\mathrm{P}(A_1 \cup A_2 \mid B) = \frac{\mathrm{P}(A_1 B \cup A_2 B)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{\mathrm{P}(A_1 B) + \mathrm{P}(A_2 B)}{\mathrm{P}(B)} = \mathrm{P}(A_1 \mid B) + \mathrm{P}(A_2 \mid B)$$

Условна вероятност

- Неотрицателност

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \geq 0$$

- Нормираност

$$P(\Omega \mid B) = \frac{P(\Omega B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

- Адитивност

  Нека $A_1 A_2 = \emptyset$, то $A_1 B \cap A_2 B = \emptyset$ и тогава:

$$P(A_1 \cup A_2 \mid B) = \frac{P(A_1 B \cup A_2 B)}{P(B)} = \frac{P(A_1 B) + P(A_2 B)}{P(B)} = P(A_1 \mid B) + P(A_2 \mid B)$$

- Непрекъснатост

$$A_1 \supset A_2 \supset \dots A_n \supset \dots \supset \emptyset$$

  е монотонно намаляваща редица, същото е изпълнено и за редицата

$$A_1 B \supset A_2 B \supset \dots A_n B \supset \dots \supset \emptyset$$

  Тогава $\lim_{n \to \infty} P(A_n B) = 0$ и следователно $\lim_{n \to \infty} P(A_n \mid B) = 0$.

Условна вероятност

- Неотрицателност
$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \geq 0$$
- Нормираност
$$P(\Omega \mid B) = \frac{P(\Omega B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$
- Адитивност

  Нека $A_1 A_2 = \emptyset$, то $A_1 B \cap A_2 B = \emptyset$ и тогава:
$$P(A_1 \cup A_2 \mid B) = \frac{P(A_1 B \cup A_2 B)}{P(B)} = \frac{P(A_1 B) + P(A_2 B)}{P(B)} = P(A_1 \mid B) + P(A_2 \mid B)$$
- Непрекъснатост
$$A_1 \supset A_2 \supset \dots A_n \supset \dots \supset \emptyset$$
  е монотонно намаляваща редица, същото е изпълнено и за редицата
$$A_1 B \supset A_2 B \supset \dots A_n B \supset \dots \supset \emptyset$$
  Тогава $\lim\limits_{n \to \infty} P(A_n B) = 0$ и следователно $\lim\limits_{n \to \infty} P(A_n \mid B) = 0$.

След като са изпълнени аксиомите то условната вероятност притежава и всички свойства характерни за вероятността изобщо.

Независимост

Възможно е да се случи така, че сбъдването на събитието B да не влияе на вероятността за сбъдване на A, т.е. $\mathrm{P}(A \mid B) = \mathrm{P}(A)$. Съгласно дефиницията за условна вероятност тогава би трябвало:

$$\mathrm{P}(A \mid B) = \frac{\mathrm{P}(AB)}{\mathrm{P}(B)} = \mathrm{P}(A)$$

Така достигаме до следната дефиниция:

Независимост

Възможно е да се случи така, че сбъдването на събитието B да не влияе на вероятността за сбъдване на A, т.е. $\mathrm{P}(A \mid B) = \mathrm{P}(A)$. Съгласно дефиницията за условна вероятност тогава би трябвало:

$$\mathrm{P}(A \mid B) = \frac{\mathrm{P}(AB)}{\mathrm{P}(B)} = \mathrm{P}(A)$$

Така достигаме до следната дефиниция:

Дефиниция - Независимост на събития

Казваме, че събитията A и B са независими тогава и само тогава, когато

$$\mathrm{P}(AB) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B)$$

За означаване на независимостта използваме следния знак $A \perp\!\!\!\perp B$.

Независимост

Възможно е да се случи така, че сбъдването на събитието B да не влияе на вероятността за сбъдване на A, т.е. $\mathrm{P}(A \mid B) = \mathrm{P}(A)$. Съгласно дефиницията за условна вероятност тогава би трябвало:

$$\mathrm{P}(A \mid B) = \frac{\mathrm{P}(AB)}{\mathrm{P}(B)} = \mathrm{P}(A)$$

Така достигаме до следната дефиниция:

Дефиниция - Независимост на събития

Казваме, че събитията A и B са независими тогава и само тогава, когато

$$\mathrm{P}(AB) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B)$$

За означаване на независимостта използваме следния знак $A \perp\!\!\!\perp B$.

Директно от дефиницията за независимост следва че, ако $A \perp\!\!\!\perp B$, то и $B \perp\!\!\!\perp A$.

Понятието независимост означава и независимост в обичайния смисъл на думата, т.е. едното събитие не влияе и не носи информация за другото. Например, ако се хвърлят два зара, какво ще се падне на единия и другия зар са независими събития.

Независимост

Независимостта не винаги е очевидна. Понякога се налага да се направят конкретни пресмятания за да се установи дали са независими събитията. Ще се върнем към примера от началото на тази глава.

Пример

Тегли се карта от тесте от 32 карти. Дефинирани са събитията:
A - “изтеглена е дама”
B - “изтеглена е картинка”
C - “изтеглена е купа”

Независимост

Независимостта не винаги е очевидна. Понякога се налага да се направят конкретни пресмятания за да се установи дали са независими събитията. Ще се върнем към примера от началото на тази глава.

Пример

Тегли се карта от тесте от 32 карти. Дефинирани са събитията:

A - "изтеглена е дама"

B - "изтеглена е картинка"

C - "изтеглена е купа"

Оказва се, че събитията A и B са зависими, докато B и C са независими. Наистина.

Независимост

Независимостта не винаги е очевидна. Понякога се налага да се направят конкретни пресмятания за да се установи дали са независими събитията. Ще се върнем към примера от началото на тази глава.

Пример

Тегли се карта от тесте от 32 карти. Дефинирани са събитията:

A - “изтеглена е дама”

B - “изтеглена е картинка”

C - “изтеглена е купа”

Оказва се, че събитията A и B са зависими, докато B и C са независими. Наистина.

Купите са $1/4$ от всички карти, също така купите са $1/4$ и от картинките. Ако знаем че е изтеглена картинка, това няма да промени вероятността да е изтеглена купа, тя пак е $1/4$, т.е B не носи информация за C.

Независимост

Независимостта не винаги е очевидна. Понякога се налага да се направят конкретни пресмятания за да се установи дали са независими събитията. Ще се върнем към примера от началото на тази глава.

Пример

Тегли се карта от тесте от 32 карти. Дефинирани са събитията:

A - "изтеглена е дама"

B - "изтеглена е картинка"

C - "изтеглена е купа"

Оказва се, че събитията A и B са зависими, докато B и C са независими. Наистина.

Купите са $1/4$ от всички карти, също така купите са $1/4$ и от картинките. Ако знаем че е изтеглена картинка, това няма да промени вероятността да е изтеглена купа, тя пак е $1/4$, т.е B не носи информация за C.

По съвсем различен начин стои въпросът с дамите. Дамите са $1/8$ от всички карти, но само $1/3$ от всички картинки. Така фактът, че е изтеглена картинка променя вероятността за изтеглена дама, т.е. A и B са зависими.

Независимост

Независимостта не винаги е очевидна. Понякога се налага да се направят конкретни пресмятания за да се установи дали са независими събитията. Ще се върнем към примера от началото на тази глава.

Пример

Тегли се карта от тесте от 32 карти. Дефинирани са събитията:

A - "изтеглена е дама"

B - "изтеглена е картинка"

C - "изтеглена е купа"

Оказва се, че събитията A и B са зависими, докато B и C са независими. Наистина.

Купите са $1/4$ от всички карти, също така купите са $1/4$ и от картинките. Ако знаем че е изтеглена картинка, това няма да промени вероятността да е изтеглена купа, тя пак е $1/4$, т.е B не носи информация за C.

По съвсем различен начин стои въпросът с дамите. Дамите са $1/8$ от всички карти, но само $1/3$ от всички картинки. Така фактът, че е изтеглена картинка променя вероятността за изтеглена дама, т.е. A и B са зависими.

Проверете това формално, като използвате дефиницията за независимост.

Какво можете да кажете за независимостта на A и C.

Независимост

Пример - Различими или неразличими зарове?

Хвърляме два еднакви правилни зара.

Независимост

Пример - Различими или неразличими зарове?

Хвърляме два еднакви правилни зара.Вероятността да се падне единица на всеки зар е $\frac{1}{6}$. Да намерим вероятността за $\{1, 1\}$. Ще разгледаме два случая.

Независимост

Пример - Различими или неразличими зарове?

Хвърляме два еднакви правилни зара.Вероятността да се падне единица на всеки зар е $\frac{1}{6}$. Да намерим вероятността за $\{1,1\}$. Ще разгледаме два случая.

Различими зарове

$\{1,1\}$ $\{1,2\}$ $\{1,3\}\dots\{1,6\}$
$\{2,1\}$ $\{2,2\}$ $\{2,3\}\dots\{2,6\}$
...
$\{6,1\}$ $\{6,2\}$ $\{6,3\}\dots\{6,6\}$

Брой на всички случай 36.
Вероятност на всеки случай $\frac{1}{36}$

$$P(\{1,1\}) = \frac{1}{36} = \frac{1}{6}.\frac{1}{6}$$

Неразличими зарове

$\{1,1\}$
$\{2,1\}$ $\{2,2\}$
...
$\{6,1\}$ $\{6,2\}$ $\{6,3\}\dots\{6,6\}$

Брой на всички случай 21.
Вероятност на всеки случай $\frac{1}{21}$

$$P(\{1,1\}) = \frac{1}{21} \neq \frac{1}{6}.\frac{1}{6}$$

Независимост

Пример - Различими или неразличими зарове?

Хвърляме два еднакви правилни зара.Вероятността да се падне единица на всеки зар е $\frac{1}{6}$. Да намерим вероятността за $\{1,1\}$. Ще разгледаме два случая.

Различими зарове

{1,1} {1,2} {1,3}. . . {1,6}
{2,1} {2,2} {2,3}. . . {2,6}
. . .
{6,1} {6,2} {6,3}. . . {6,6}

Брой на всички случай 36.
Вероятност на всеки случай $\frac{1}{36}$

$$P(\{1,1\}) = \frac{1}{36} = \frac{1}{6}.\frac{1}{6}$$

Неразличими зарове

{1,1}
{2,1} {2,2}
. . .
{6,1} {6,2} {6,3} . . . {6,6}

Брой на всички случай 21.
Вероятност на всеки случай $\frac{1}{21}$

$$P(\{1,1\}) = \frac{1}{21} \neq \frac{1}{6}.\frac{1}{6}$$

Ако приемем заровете за неразличими, ще се окаже, че те са зависими. Това е абсурд, няма как точките паднали се на единия зар да влияят на точките падащи се на другия. Затова, трябва винаги да смятаме заровете за различими, независимо дали ние ги различаваме или не, те са физически различни и се държат като различни.

Независимост

Възниква следния въпрос, ако $A \perp\!\!\!\perp B$, то какво може да се каже за независимостта на $\overline{A}$ и $\overline{B}$.

Независимост

Възниква следния въпрос, ако $A \perp\!\!\!\perp B$, то какво може да се каже за независимостта на $\overline{A}$ и $\overline{B}$.

Твърдение

Нека $A \perp\!\!\!\perp B$, тогава $A \perp\!\!\!\perp \overline{B}$, $\quad \overline{A} \perp\!\!\!\perp B \quad$ и $\quad \overline{A} \perp\!\!\!\perp \overline{B}$.

Независимост

Възниква следния въпрос, ако $A \perp\!\!\!\perp B$, то какво може да се каже за независимостта на $\overline{A}$ и $\overline{B}$.

Твърдение

Нека $A \perp\!\!\!\perp B$, тогава $A \perp\!\!\!\perp \overline{B}$, $\quad \overline{A} \perp\!\!\!\perp B \quad$ и $\quad \overline{A} \perp\!\!\!\perp \overline{B}$.

Док. От $A \perp\!\!\!\perp B$ следва $\mathrm{P}(AB) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$.

Независимост

Възниква следния въпрос, ако $A \perp\!\!\!\perp B$, то какво може да се каже за независимостта на $\overline{A}$ и $\overline{B}$.

Твърдение

Нека $A \perp\!\!\!\perp B$, тогава $A \perp\!\!\!\perp \overline{B}$, $\quad \overline{A} \perp\!\!\!\perp B \quad$ и $\quad \overline{A} \perp\!\!\!\perp \overline{B}$.

Док. От $A \perp\!\!\!\perp B$ следва $\mathsf{P}(AB) = \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B)$.

В лекция I показахме, че вероятността на произволно събитие може да сепредстави като следната сума $\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(AB) + \mathsf{P}(A\overline{B})$. Тогава

Независимост

Възниква следния въпрос, ако $A \perp\!\!\!\perp B$, то какво може да се каже за независимостта на $\overline{A}$ и $\overline{B}$.

Твърдение

Нека $A \perp\!\!\!\perp B$, тогава $A \perp\!\!\!\perp \overline{B}$, $\quad \overline{A} \perp\!\!\!\perp B \quad$ и $\quad \overline{A} \perp\!\!\!\perp \overline{B}$.

Док. От $A \perp\!\!\!\perp B$ следва $\mathrm{P}(AB) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$.

В лекция I показахме, че вероятността на произволно събитие може да се представи като следната сума $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(AB) + \mathrm{P}(A\overline{B})$. Тогава

$$\mathrm{P}(A\overline{B}) = \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(AB) = \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A)(1 - \mathrm{P}(B)) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(\overline{B})$$

Независимост

Възниква следния въпрос, ако $A \perp\!\!\!\perp B$, то какво може да се каже за независимостта на $\overline{A}$ и $\overline{B}$.

Твърдение

Нека $A \perp\!\!\!\perp B$, тогава $A \perp\!\!\!\perp \overline{B}$, $\quad \overline{A} \perp\!\!\!\perp B \quad$ и $\quad \overline{A} \perp\!\!\!\perp \overline{B}$.

Док. От $A \perp\!\!\!\perp B$ следва $\mathrm{P}(AB) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$.

В лекция I показахме, че вероятността на произволно събитие може да сепредстави като следната сума $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(AB) + \mathrm{P}(A\overline{B})$. Тогава

$$\mathrm{P}(A\overline{B}) = \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(AB) = \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A)(1 - \mathrm{P}(B)) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(\overline{B})$$

От тук следва $A \perp\!\!\!\perp \overline{B}$. Аналогично се доказват и останалите равенства. $\square$

Независимост

Възниква следния въпрос, ако $A \perp\!\!\!\perp B$, то какво може да се каже за независимостта на $\overline{A}$ и $\overline{B}$.

Твърдение

Нека $A \perp\!\!\!\perp B$, тогава $A \perp\!\!\!\perp \overline{B}$, $\quad \overline{A} \perp\!\!\!\perp B \quad$ и $\quad \overline{A} \perp\!\!\!\perp \overline{B}$.

Док. От $A \perp\!\!\!\perp B$ следва $\mathsf{P}(AB) = \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B)$.

В лекция I показахме, че вероятността на произволно събитие може да сепредстави като следната сума $\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(AB) + \mathsf{P}(A\overline{B})$. Тогава

$$\mathsf{P}(A\overline{B}) = \mathsf{P}(A) - \mathsf{P}(AB) = \mathsf{P}(A) - \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B) = \mathsf{P}(A)(1 - \mathsf{P}(B)) = \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(\overline{B})$$

От тук следва $A \perp\!\!\!\perp \overline{B}$. Аналогично се доказват и останалите равенства. $\square$

Лесно е да се съобрази, че празното събитие $\emptyset$ е независимо от всяко друго. Същото важи и за цялото събитие Ω.

Независимост

Възниква следния въпрос, ако $A \perp\!\!\!\perp B$, то какво може да се каже за независимостта на $\overline{A}$ и $\overline{B}$.

Твърдение

Нека $A \perp\!\!\!\perp B$, тогава $A \perp\!\!\!\perp \overline{B}$, $\quad \overline{A} \perp\!\!\!\perp B \quad$ и $\quad \overline{A} \perp\!\!\!\perp \overline{B}$.

Док. От $A \perp\!\!\!\perp B$ следва $\mathrm{P}(AB) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$.

В лекция I показахме, че вероятността на произволно събитие може да сепредстави като следната сума $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(AB) + \mathrm{P}(A\overline{B})$. Тогава

$$\mathrm{P}(A\overline{B}) = \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(AB) = \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A)(1 - \mathrm{P}(B)) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(\overline{B})$$

От тук следва $A \perp\!\!\!\perp \overline{B}$. Аналогично се доказват и останалите равенства. $\square$

Лесно е да се съобрази, че празното събитие $\emptyset$ е независимо от всяко друго. Същото важи и за цялото събитие Ω.

За повече от две събития въвеждаме понятието независимост по аналогичен начин.

Независимост

Дефиниция - Независимост в съвкупност

Казваме, че събитията $A_1, A_2, \ldots, A_n$ са **независими в съвкупност** (или просто независими), ако за всяко цяло число k, $2 \leq k \leq n$ и всеки набор от индекси $i_1, i_2, \ldots i_k$ е изпълнено

$$\mathrm{P}(A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_n}) = \mathrm{P}(A_{i_1}) \mathrm{P}(A_{i_2}) \ldots \mathrm{P}(A_{i_n})$$

Независимост

Дефиниция - Независимост в съвкупност

Казваме, че събитията $A_1, A_2, \ldots, A_n$ са **независими в съвкупност** (или просто независими), ако за всяко цяло число k, $2 \leq k \leq n$ и всеки набор от индекси $i_1, i_2, \ldots i_k$ е изпълнено

$$\mathrm{P}(A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_n}) = \mathrm{P}(A_{i_1})\mathrm{P}(A_{i_2}) \ldots \mathrm{P}(A_{i_n})$$

Естествения въпрос, който следва е, ако събитията са независими две по две, т.е. всяко с всяко, то дали това означава , че те са независими в съвкупност.

Независимост

Дефиниция - Независимост в съвкупност

Казваме, че събитията $A_1, A_2, \ldots, A_n$ са **независими в съвкупност** (или просто независими), ако за всяко цяло число k, $2 \leq k \leq n$ и всеки набор от индекси $i_1, i_2, \ldots i_k$ е изпълнено

$$\mathrm{P}(A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_n}) = \mathrm{P}(A_{i_1})\mathrm{P}(A_{i_2}) \ldots \mathrm{P}(A_{i_n})$$

Естествения въпрос, който следва е, ако събитията са независими две по две, т.е. всяко с всяко, то дали това означава , че те са независими в съвкупност. Отговорът се дава от следния контрапример

Пример

Хвърляме тетраедър, на който едната страна е бяла, другата зелена, третата червена, а върху четвъртата страна има и трите цвята. Дефинираме събития A , B и C на долната страна се пада, съответно бяло, зелено червено. Елементарно се пресмятат вероятностите

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(C) = \frac{1}{2}, \qquad \mathrm{P}(AB) = \mathrm{P}(BC) = \mathrm{P}(AC) = \frac{1}{4}$$

Това означава, че събитията са независими две по две.

Независимост

Дефиниция - Независимост в съвкупност

Казваме, че събитията $A_1, A_2, \dots, A_n$ са **независими в съвкупност** (или просто независими), ако за всяко цяло число k, $2 \le k \le n$ и всеки набор от индекси $i_1, i_2, \dots i_k$ е изпълнено

$$\mathrm{P}(A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_n}) = \mathrm{P}(A_{i_1}) \mathrm{P}(A_{i_2}) \dots \mathrm{P}(A_{i_n})$$

Естествения въпрос, който следва е, ако събитията са независими две по две, т.е. всяко с всяко, то дали това означава , че те са независими в съвкупност. Отговорът се дава от следния контрапример

Пример

Хвърляме тетраедър, на който едната страна е бяла, другата зелена, третата червена, а върху четвъртата страна има и трите цвята. Дефинираме събития A , B и C на долната страна се пада, съответно бяло, зелено червено. Елементарно се пресмятат вероятностите

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(C) = \frac{1}{2}, \qquad \mathrm{P}(AB) = \mathrm{P}(BC) = \mathrm{P}(AC) = \frac{1}{4}$$

Това означава, че събитията са независими две по две. От друга страна $\mathrm{P}(ABC) = \dfrac{1}{4}$, следователно събитията не са независими в съвкупност.

Вероятност на сечение

Ако събитията $A_1, A_2, \ldots, A_n$ са независими, то вероятността да се изпълнят едновременно е

$$\mathsf{P}(A_1 A_2 \ldots A_n) = \mathsf{P}(A_1)\mathsf{P}(A_2)\ldots\mathsf{P}(A_n)$$

Вероятност на сечение

Ако събитията $A_1, A_2, \ldots, A_n$ са независими, то вероятността да се изпълнят едновременно е

$$\mathsf{P}(A_1 A_2 \ldots A_n) = \mathsf{P}(A_1)\mathsf{P}(A_2)\ldots\mathsf{P}(A_n)$$

Вероятността за едновременно сбъдване на произволни събития се дава в следното твърдение.

Вероятност на сечение

Ако събитията $A_1, A_2, \ldots, A_n$ са независими, то вероятността да се изпълнят едновременно е

$$\mathrm{P}(A_1 A_2 \ldots A_n) = \mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}(A_2)\ldots\mathrm{P}(A_n)$$

Вероятността за едновременно сбъдване на произволни събития се дава в следното твърдение.

Твърдение

$$\mathrm{P}(A_1 A_2 \ldots A_n) = \mathrm{P}(A_1)\,\mathrm{P}(A_2|A_1)\,\mathrm{P}(A_3|A_1 A_2)\ldots\mathrm{P}(A_n|A_1 A_2 \ldots A_{n-1})$$

Вероятност на сечение

Ако събитията $A_1, A_2, \ldots, A_n$ са независими, то вероятността да се изпълнят едновременно е

$$\mathrm{P}(A_1 A_2 \ldots A_n) = \mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}(A_2)\ldots\mathrm{P}(A_n)$$

Вероятността за едновременно сбъдване на произволни събития се дава в следното твърдение.

Твърдение

$$\mathrm{P}(A_1 A_2 \ldots A_n) = \mathrm{P}(A_1)\,\mathrm{P}(A_2|A_1)\,\mathrm{P}(A_3|A_1 A_2)\ldots\mathrm{P}(A_n|A_1 A_2 \ldots A_{n-1})$$

Док. Доказателството се провежда с индукция по n. За $n = 2$ директно от дефиницията на условна вероятност следва

$$\mathrm{P}(A_1 A_2) = \mathrm{P}(A_1)\,\mathrm{P}(A_2|A_1)$$

Вероятност на сечение

Ако събитията $A_1, A_2, \ldots, A_n$ са независими, то вероятността да се изпълнят едновременно е

$$\mathrm{P}(A_1 A_2 \ldots A_n) = \mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}(A_2)\ldots\mathrm{P}(A_n)$$

Вероятността за едновременно сбъдване на произволни събития се дава в следното твърдение.

Твърдение

$$\mathrm{P}(A_1 A_2 \ldots A_n) = \mathrm{P}(A_1)\,\mathrm{P}(A_2|A_1)\,\mathrm{P}(A_3|A_1A_2)\ldots\mathrm{P}(A_n|A_1A_2\ldots A_{n-1})$$

Док. Доказателството се провежда с индукция по n. За $n = 2$ директно от дефиницията на условна вероятност следва

$$\mathrm{P}(A_1A_2) = \mathrm{P}(A_1)\,\mathrm{P}(A_2|A_1)$$

Разглеждаме $A_1A_2\ldots A_{n-1}$ като едно цяло събитие, тогава

$$\mathrm{P}(A_1A_2\ldots A_n) = \mathrm{P}((A_1A_2\ldots A_{n-1})A_n) = \mathrm{P}(A_1\ldots A_{n-1})\,\mathrm{P}(A_n|A_1\ldots A_{n-1}) =$$

Прилагаме индукционното предположение за $\mathrm{P}(A_1\ldots A_{n-1})$

$$= \mathrm{P}(A_1)\,\mathrm{P}(A_2|A_1)\,\ldots\mathrm{P}(A_{n-1}|A_1A_2\ldots A_{n-2})\,\mathrm{P}(A_n|A_1\ldots A_{n-1}) \qquad \square$$

Вероятност на сечение

Пример

Какъв е най-малкият брой хора, които трябва да се изберат по случаен начин, така че вероятността рождените дни на поне двама от тях да съвпаднат да е по-голяма от $1/2$?

Вероятност на сечение

Пример

Какъв е най-малкият брой хора, които трябва да се изберат по случаен начин, така че вероятността рождените дни на поне двама от тях да съвпаднат да е по-голяма от 1/2?

В случая е по-удобно да пресметнем вероятността на противоположното събитие. Вероятността всички да са родени в различни дни, трябва да е по-малка от 1/2. Избираме хората последователно и за всеки човек дефинираме събитие

$$A_k = \{ \text{ рождения ден на к-тия човек е различен от предходните} \}$$

$k = 1 \dots n$.

Вероятност на сечение

Пример

Какъв е най-малкият брой хора, които трябва да се изберат по случаен начин, така че вероятността рождените дни на поне двама от тях да съвпаднат да е по-голяма от $1/2$?

В случая е по-удобно да пресметнем вероятността на противоположното събитие. Вероятността всички да са родени в различни дни, трябва да е по-малка от $1/2$. Избираме хората последователно и за всеки човек дефинираме събитие

$$A_k = \{ \text{ рождения ден на к-тия човек е различен от предходните} \}$$

$k = 1 \ldots n$. Явно е, че търсим сечението на тези събития

$$\mathrm{P}(A_1 A_2 \ldots A_n) = \mathrm{P}(A_1)\,\mathrm{P}(A_2|A_1)\,\mathrm{P}(A_3|A_1 A_2) \ldots \mathrm{P}(A_n|A_1 A_2 \ldots A_{n-1}) =$$

Вероятност на сечение

Пример

Какъв е най-малкият брой хора, които трябва да се изберат по случаен начин, така че вероятността рождените дни на поне двама от тях да съвпаднат да е по-голяма от 1/2?

В случая е по-удобно да пресметнем вероятността на противоположното събитие. Вероятността всички да са родени в различни дни, трябва да е по-малка от 1/2. Избираме хората последователно и за всеки човек дефинираме събитие

$$A_k = \{ \text{ рождения ден на к-тия човек е различен от предходните} \}$$

$k = 1 \ldots n$. Явно е, че търсим сечението на тези събития

$$\mathrm{P}(A_1 A_2 \ldots A_n) = \mathrm{P}(A_1)\,\mathrm{P}(A_2|A_1)\,\mathrm{P}(A_3|A_1 A_2) \ldots \mathrm{P}(A_n|A_1 A_2 \ldots A_{n-1}) =$$

Ще приемем, че всички възможни рождени дни са 365 и при това са равновероятни. Трябва да определим n такова, че

$$= \frac{365}{365} \cdot$$

Пример

Какъв е най-малкият брой хора, които трябва да се изберат по случаен начин, така че вероятността рождените дни на поне двама от тях да съвпаднат да е по-голяма от 1/2?

В случая е по-удобно да пресметнем вероятността на противоположното събитие. Вероятността всички да са родени в различни дни, трябва да е по-малка от 1/2. Избираме хората последователно и за всеки човек дефинираме събитие

$$A_k = \{ \text{ рождения ден на к-тия човек е различен от предходните}\}$$

$k = 1 \dots n$. Явно е, че търсим сечението на тези събития

$$\mathrm{P}(A_1 A_2 \dots A_n) = \mathrm{P}(A_1)\,\mathrm{P}(A_2|A_1)\,\mathrm{P}(A_3|A_1 A_2) \dots \mathrm{P}(A_n|A_1 A_2 \dots A_{n-1}) =$$

Ще приемем, че всички възможни рождени дни са 365 и при това са равновероятни. Трябва да определим n такова, че

$$= \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot$$

Вероятност на сечение

Пример

Какъв е най-малкият брой хора, които трябва да се изберат по случаен начин, така че вероятността рождените дни на поне двама от тях да съвпаднат да е по-голяма от 1/2?

В случая е по-удобно да пресметнем вероятността на противоположното събитие. Вероятността всички да са родени в различни дни, трябва да е по-малка от 1/2. Избираме хората последователно и за всеки човек дефинираме събитие

$$A_k = \{ \text{ рождения ден на к-тия човек е различен от предходните}\}$$

$k = 1 \dots n$. Явно е, че търсим сечението на тези събития

$$\mathrm{P}(A_1 A_2 \dots A_n) = \mathrm{P}(A_1)\,\mathrm{P}(A_2|A_1)\,\mathrm{P}(A_3|A_1 A_2)\dots\mathrm{P}(A_n|A_1 A_2 \dots A_{n-1}) =$$

Ще приемем, че всички възможни рождени дни са 365 и при това са равновероятни. Трябва да определим n такова, че

$$= \frac{365}{365}\cdot\frac{364}{365}\cdot\frac{363}{365}\dots\frac{366-n}{365} < \frac{1}{2}$$

Вероятност на сечение

Пример

Какъв е най-малкият брой хора, които трябва да се изберат по случаен начин, така че вероятността рождените дни на поне двама от тях да съвпаднат да е по-голяма от 1/2?

В случая е по-удобно да пресметнем вероятността на противоположното събитие. Вероятността всички да са родени в различни дни, трябва да е по-малка от 1/2. Избираме хората последователно и за всеки човек дефинираме събитие

$$A_k = \{\text{ рождения ден на к-тия човек е различен от предходните}\}$$

$k = 1 \dots n$. Явно е, че търсим сечението на тези събития

$$\mathrm{P}(A_1A_2\dots A_n) = \mathrm{P}(A_1)\,\mathrm{P}(A_2|A_1)\,\mathrm{P}(A_3|A_1A_2)\dots\mathrm{P}(A_n|A_1A_2\dots A_{n-1}) =$$

Ще приемем, че всички възможни рождени дни са 365 и при това са равновероятни. Трябва да определим n такова, че

$$= \frac{365}{365}\cdot\frac{364}{365}\cdot\frac{363}{365}\cdots\frac{366-n}{365} < \frac{1}{2}$$

От тук получаваме $n = 23$, което в известен смисъл противоречи на интуицията. Интересно е, че при $n = 70$ вероятността да има хора с един и същ рожден ден е 0.999.

Формула за пълната вероятност

Нека събитията $H_1, H_2, \ldots H_n$ са всички възможности при извършване на някакъв опит, т.е. нямат сечение и образуват покритие на Ω.

$$\forall i, j : \quad H_i H_j = \emptyset$$

$$\bigcup_{i=1}^{n} H_i = \Omega$$

Формула за пълната вероятност

Нека събитията $H_1, H_2, \ldots H_n$ са всички възможности при извършване на някакъв опит, т.е. нямат сечение и образуват покритие на Ω.

$$\forall i, j : \quad H_i H_j = \emptyset$$

$$\bigcup_{i=1}^{n} H_i = \Omega$$

Прието е такива множества да се наричат **пълна група от събития**. Също така ще ги наричаме **хипотези**. Ясно е, че за хипотезите е изпълнено:

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(H_i) = 1$$

Формула за пълната вероятност

Нека събитията $H_1, H_2, \ldots H_n$ са всички възможности при извършване на някакъв опит, т.е. нямат сечение и образуват покритие на Ω.

$$\forall i, j : \quad H_i H_j = \emptyset$$

$$\bigcup_{i=1}^{n} H_i = \Omega$$

Прието е такива множества да се наричат **пълна група от събития**. Също така ще ги наричаме **хипотези**. Ясно е, че за хипотезите е изпълнено:

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(H_i) = 1$$

Нека A е произволно събитие зависещо по някакъв начин от хипотезите H_i . Пресмятането на вероятността на A често е по-лесно, ако самото A се разложи според хипотезите.

Формула за пълната вероятност

Нека събитията $H_1, H_2, \ldots H_n$ са всички възможности при извършване на някакъв опит, т.е. нямат сечение и образуват покритие на Ω.

$$\forall i, j : \quad H_i H_j = \emptyset$$

$$\bigcup_{i=1}^{n} H_i = \Omega$$

Прието е такива множества да се наричат **пълна група от събития**. Също така ще ги наричаме **хипотези**. Ясно е, че за хипотезите е изпълнено:

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(H_i) = 1$$

Нека A е произволно събитие зависещо по някакъв начин от хипотезите H_i . Пресмятането на вероятността на A често е по-лесно, ако самото A се разложи според хипотезите.

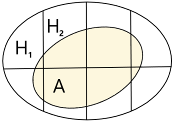
Твърдение - Формула за пълната вероятност

Ако $H_1, H_2, \ldots H_n$ образуват пълна група от събития, то за произволно събитие A е изпълнено:

$$\mathrm{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A|H_i)\, \mathrm{P}(H_i)$$

Формула за пълната вероятност

Док. Нека $H_1, H_2, \dots H_n$ са хипотези, тогава



$$A = A\Omega = AH_1 \cup AH_2 \cup \dots \cup AH_n$$

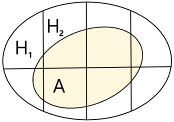
като събитията в това обединение са непресичащи се. От адитивността на вероятността следва

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(AH_1 \cup AH_2 \cup \dots AH_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(AH_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A|H_i)\,\mathrm{P}(H_i)$$

В последното равенство използвахме формулата за сечение на събития $\square$

Формула за пълната вероятност

Док. Нека $H_1, H_2, \dots H_n$ са хипотези, тогава



$$A = A\Omega = AH_1 \cup AH_2 \cup \dots \cup AH_n$$

като събитията в това обединение са непресичащи се. От адитивността на вероятността следва

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(AH_1 \cup AH_2 \cup \dots AH_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(AH_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A|H_i)\,\mathrm{P}(H_i)$$

В последното равенство използвахме формулата за сечение на събития $\square$

Формулата за пълна вероятност ни дава възможност да описваме сложни модели с включени много събития зависещи едно от друго.

Пример

Момче има в левия си джоб 1 монета от 1лв. и 2 от 2лв., а в десния 2 монети по 1лв. и 3 по 2лв. От случайно избран джоб момчето вади монета. Каква е вероятността тя да е от 1лв?

Формула за пълната вероятност

Пример

Момчето най-напред избира джоб, след което вади монета от него, затова ще формулираме хипотезите за джоба който е избрало момчето:

$H_1 = \{$избран е левия джоб$\}$, $\quad H_2 = \{$ избран е десния джоб$\}$

Нека $A = \{$ извадена е монета от 1лв$\}$, т.е. A е събитието което търсим.

Формула за пълната вероятност

Пример

Момчето най-напред избира джоб, след което вади монета от него, затова ще формулираме хипотезите за джоба който е избрало момчето:

$H_1 = \{$избран е левия джоб$\}$, $\quad H_2 = \{$ избран е десния джоб$\}$

Нека $A = \{$ извадена е монета от 1лв$\}$, т.е. A е събитието което търсим.

Ясно е че, $\mathsf{P}(H_1) = \mathsf{P}(H_2) = 1/2$. Остава да пресметнем вероятността да бъде извадена монета от 1лв, ако е избран левия, съответно десния джоб:

$$\mathsf{P}(A|H_1) = \frac{1}{3} \qquad \text{и} \qquad \mathsf{P}(A|H_2) = \frac{2}{5}$$

Сега, от формулата за пълната вероятност получаваме:

$$\mathsf{P}(A) = \frac{1}{2}.\frac{1}{3} + \frac{1}{2}.\frac{2}{5} = \frac{11}{30}$$

Формула за пълната вероятност

Пример

Момчето най-напред избира джоб, след което вади монета от него, затова ще формулираме хипотезите за джоба който е избрало момчето:

$H_1 = \{$избран е левия джоб$\}$, $H_2 = \{$ избран е десния джоб$\}$

Нека $A = \{$ извадена е монета от 1лв$\}$, т.е. A е събитието което търсим.

Ясно е че, $\mathsf{P}(H_1) = \mathsf{P}(H_2) = 1/2$. Остава да пресметнем вероятността да бъде извадена монета от 1лв, ако е избран левия, съответно десния джоб:

$$\mathsf{P}(A|H_1) = \frac{1}{3} \qquad \text{и} \qquad \mathsf{P}(A|H_2) = \frac{2}{5}$$

Сега, от формулата за пълната вероятност получаваме:

$$\mathsf{P}(A) = \frac{1}{2}.\frac{1}{3} + \frac{1}{2}.\frac{2}{5} = \frac{11}{30}$$

Тази вероятност е различна от вероятността, която бихме получили, ако смятахме че от всички монети по случаен начин се избира една, т.е. ако всичките монети лежаха в един джоб. Тогава вероятността би била $3/8$.

Пример

В кутия има N билета, от които M са печаливши. Последоватлено, без връщане M човека си теглят билет. Кога е най-изгодно да се изтегли билет?

Формула на Бейс

Формулата на Бейс в известен смисъл е обратна на формулата за пълната вероятност. Постановката на задачата е подобна. Отново имаме хипотези $H_1, H_2, \dots H_n$ и събитие A, което зависи от тях. В този случай обаче сме наблюдавали сбъдването на събитието A, и при това условие се опитваме да намерим вероятността на някоя от хипотезите.

Прието е вероятноста за сбъдване на някоя хипотеза, изчислена преди провеждането на опита, т.е. $\mathsf{P}(H_k)$ да се нарича **априорна**. Вероятноста да се е била сбъднала някоя хипотеза, след като сме наблюдавали резултата от опита, т.е. $\mathsf{P}(H_k|A)$ се нарича **апостериорна**.

Апостериорните вероятности се изчисляват по следната формула.

Твърдение - Формула на Бейс

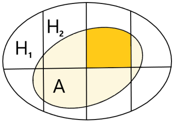
Ако $H_1, H_2, \dots H_n$ образуват пълна група от събития, а A е произволно събитие, то:

$$\mathsf{P}(H_k|A) = \frac{\mathsf{P}(A|H_k)\,\mathsf{P}(H_k)}{\sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(A|H_i)\,\mathsf{P}(H_i)}$$

Формула на Бейс

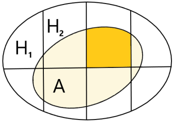
Док. Съгласно дефиницията за условна вероятност

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_kA)}{P(A)}$$



Формула на Бейс

Док. Съгласно дефиницията за условна вероятност

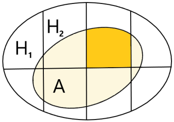


$$\mathrm{P}(H_k|A) = \frac{\mathrm{P}(H_k A)}{\mathrm{P}(A)}$$

За да завършим доказателството е достатъчно да приложим формулите за сечение в числителя и за пълна вероятност в знаменателя. □

Формула на Бейс

Док. Съгласно дефиницията за условна вероятност



$$\mathrm{P}(H_k|A) = \frac{\mathrm{P}(H_k A)}{\mathrm{P}(A)}$$

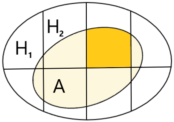
За да завършим доказателството е достатъчно да приложим формулите за сечение в числителя и за пълна вероятност в знаменателя. $\square$

Пример

Ще продължим предишния пример. Нека момчето е извадило монета от един лев. Каква е вероятността монетата да е била в левия джоб?

Формула на Бейс

Док. Съгласно дефиницията за условна вероятност



$$\mathrm{P}(H_k|A) = \frac{\mathrm{P}(H_k A)}{\mathrm{P}(A)}$$

За да завършим доказателството е достатъчно да приложим формулите за сечение в числителя и за пълна вероятност в знаменателя. $\square$

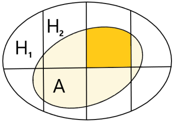
Пример

Ще продължим предишния пример. Нека момчето е извадило монета от един лев. Каква е вероятността монетата да е била в левия джоб?

Знаем априорната вероятност момчето да избере левия джоб $\mathrm{P}(H_1) = \frac{1}{2}$. Това, което търсим е апостериорната вероятност $\mathrm{P}(H_1|A)$.

Формула на Бейс

Док. Съгласно дефиницията за условна вероятност



$$\mathrm{P}(H_k|A) = \frac{\mathrm{P}(H_k A)}{\mathrm{P}(A)}$$

За да завършим доказателството е достатъчно да приложим формулите за сечение в числителя и за пълна вероятност в знаменателя. □

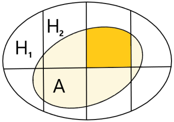
Пример

Ще продължим предишния пример. Нека момчето е извадило монета от един лев. Каква е вероятността монетата да е била в левия джоб?

Знаем априорната вероятност момчето да избере левия джоб $\mathrm{P}(H_1) = \frac{1}{2}$. Това, което търсим е апостериорната вероятност $\mathrm{P}(H_1|A)$.

$$\mathrm{P}(H_1|A) = \frac{\mathrm{P}(A|H_1)\,\mathrm{P}(H_1)}{\mathrm{P}(A|H_1)\,\mathrm{P}(H_1) + \mathrm{P}(A|H_2)\,\mathrm{P}(H_2)} =$$

Док. Съгласно дефиницията за условна вероятност



$$\mathrm{P}(H_k|A) = \frac{\mathrm{P}(H_k A)}{\mathrm{P}(A)}$$

За да завършим доказателството е достатъчно да приложим формулите за сечение в числителя и за пълна вероятност в знаменателя. $\square$

Пример

Ще продължим предишния пример. Нека момчето е извадило монета от един лев. Каква е вероятността монетата да е била в левия джоб?

Знаем априорната вероятност момчето да избере левия джоб $\mathrm{P}(H_1) = \frac{1}{2}$. Това, което търсим е апостериорната вероятност $\mathrm{P}(H_1|A)$.

$$\mathrm{P}(H_1|A) = \frac{\mathrm{P}(A|H_1)\,\mathrm{P}(H_1)}{\mathrm{P}(A|H_1)\,\mathrm{P}(H_1) + \mathrm{P}(A|H_2)\,\mathrm{P}(H_2)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}\frac{1}{2} + \frac{2}{5}\frac{1}{2}} = \frac{5}{11}$$

Предизвикателство!

Задача

Иван и Асен играят следната игра. Иван взима три зара и написва върху страните им цифрите от 1 до 18. Асен си избира един зар, след това Иван избира зар. Играчите хвърлят заровете. Печели този, който хвърли повече.

Предизвикателство!

Задача

Иван и Асен играят следната игра. Иван взима три зара и написва върху страните им цифрите от 1 до 18. Асен си избира един зар, след това Иван избира зар. Играчите хвърлят заровете. Печели този, който хвърли повече.

Да се покаже, че играта е печеливша за Иван, т.е. той може по такъв начин да напише числата върху заровете, че какъвто и зар да избере Асен, да има друг зар с който да се хвърли повече (с вероятност над една втора).

Предизвикателство!

Задача

Иван и Асен играят следната игра. Иван взима три зара и написва върху страните им цифрите от 1 до 18. Асен си избира един зар, след това Иван избира зар. Играчите хвърлят заровете. Печели този, който хвърли повече.

Да се покаже, че играта е печеливша за Иван, т.е. той може по такъв начин да напише числата върху заровете, че какъвто и зар да избере Асен, да има друг зар с който да се хвърли повече (с вероятност над една втора).

Това означава, че няма транзитивност когато оценяваме вероятности, т.е. от $A > B$ и $B > C$ не следва $A > C$!

Предизвикателство!

Задача

Иван и Асен играят следната игра. Иван взима три зара и написва върху страните им цифрите от 1 до 18. Асен си избира един зар, след това Иван избира зар. Играчите хвърлят заровете. Печели този, който хвърли повече.

Да се покаже, че играта е печеливша за Иван, т.е. той може по такъв начин да напише числата върху заровете, че какъвто и зар да избере Асен, да има друг зар с който да се хвърли повече (с вероятност над една втора).

Това означава, че няма транзитивност когато оценяваме вероятности, т.е. от $A > B$ и $B > C$ не следва $A > C$!