Съседни класове, теорема на Лагранж

Сайт: learn.fmi.uni-sofia.bg
Курс: Алгебра 2, поток 1, летен семестър 2021/2022
Книга: Съседни класове, теорема на Лагранж
Разпечатано от: Мартин Попов
Дата: Thursday, 24 March 2022, 21:24

Съдържание

1. Съседни класове

Дефиниция *(за мултипликативно записана група)***:**

Нека $(G, .)$ е мултипликативно записана група и $H < G$ е подгрупа на G.

- Ляв съседен клас на подгрупата H, определен от елемента $g \in G$ се нарича подмножеството $gH = \{gh|\ h \in H\} \subset G.$
- Десен съседен клас на подгрупата H, определен от елемента g е $Hg = \{hg|\ h \in H\} \subset G.$

Съседни класове могат да се определят и за адитивно записана група.

Дефиниция *(за адитивно записана група)***:**

Ако $(L, +)$ е адитивна група и $T < G$ е нейна подгрупа и $a \in L$, тогава:

- ляв съседен клас е $a + T = \{a + t|\ t \in T\}$,
- десен съседен клас е $T + a = \{t + a|\ t \in T\}$.

Съседните класове са основни за разбиране на много от следващите въпроси от алгебрата, както и в някои от приложенията на групите.

1.1. Примери 1

Пример 1.1:

Множеството от цели числа, които се делят на 4 е подгрупа на адитивната група на целите числа.

$$4\mathbb{Z} = \{4z|\ z \in \mathbb{Z}\} < \mathbb{Z}$$

Да разгледаме няколко съседни класа на тази подгрупа

$$\begin{aligned} 1+4\mathbb{Z} &= \{1+4z|\ z\in\mathbb{Z}\} = \{-3+4z|\ z\in\mathbb{Z}\} = -3+4\mathbb{Z} \\ 2+4\mathbb{Z} &= \{2+4z|\ z\in\mathbb{Z}\} = \{6+4z|\ z\in\mathbb{Z}\} = 6+4\mathbb{Z} \\ 4+4\mathbb{Z} &= \{4+4z|\ z\in\mathbb{Z}\} = \{0+4z|\ z\in\mathbb{Z}\} = 0+4\mathbb{Z} = 4\mathbb{Z} \end{aligned}$$

В този пример групата $\mathbb{Z}$ е Абелева и затова левите и десни съседни класове съвпадат.

Пример 1.2:

Нека да разгледаме групата S_3 и породената от цикъла $(1,2)$ подгрупа $H =< (1,2) >= \{\mathrm{id}, (1,2)\}$.

Пресмятаме левите и десни съседни класове са:

$\mathrm{id}.\, H =$	$\{\mathrm{id}, (1,2)\}$	$= H.\,\mathrm{id}$
$(1,2).\, H =$	$\{(1,2), (1,2).\,(1,2)\} = \{(1,2), \mathrm{id}\}$	$= H.\,(1,2)$
$(1,3).\, H =$	$\{(1,3), (1,3).\,(1,2)\} = \{(1,3), (1,2,3)\}$	
	$\{(1,3), (1,2).\,(1,3)\} = \{(1,3), (1,3,2)\}$	$= H.\,(1,3)$
$(2,3).\, H =$	$\{(2,3), (2,3).\,(1,2)\} = \{(2,3), (1,3,2)\}$	
	$\{(2,3), (1,2).\,(2,3)\} = \{(2,3), (1,2,3)\}$	$= H.\,(2,3)$
$(1,2,3).\, H =$	$\{(1,2,3), (1,2,3).\,(1,2)\} = \{(1,2,3), (1,3)\}$	
	$\{(1,2,3), (1,2).\,(1,2,3)\} = \{(1,2,3), (2,3)\}$	$= H.\,(1,2,3)$
$(1,3,2).\, H =$	$\{(1,3,2), (1,3,2).\,(1,2)\} = \{(1,3,2), (2,3)\}$	
	$\{(1,3,2), (1,2).\,(1,3,2)\} = \{(1,3,2), (1,3)\}$	$= H.\,(1,3,2)$

Получихме, че е изпълнено

леви класове		десни класове	
$\mathrm{id}.\, H = (1,2).\, H$	$= \{\mathrm{id}, (1,2)\}$	$\{\mathrm{id}, (1,2)\}$	$= H.\,\mathrm{id} = H.\,(1,2)$
$(1,3).\, H = (1,2,3).\, H$	$= \{(1,3), (1,2,3)\}$	$\{(1,3), (1,3,2)\}$	$= H.\,(1,3) = H.\,(1,3,2)$
$(2,3).\, H = (1,3,2).\, H$	$= \{(2,3), (1,3,2)\}$	$\{(2,3), (1,2,3)\}$	$= H.\,(2,3) = H(1,2,3)$

1.2. Примери 2

Пример 1.3.

Знаем, че множеството от тримерните вектори $\mathbb{R}^3$ е Абелева група относно операцията събиране на вектори (+). Знаем, че решението на всяка хомогенна система е линейно подпространство, което е подгрупа на $\mathbb{R}^3$ и нека L да е решението на следната хомогенна система:

$$L : \left| \begin{array}{r} x+y+z=0 \\ x-y+3z=0 \end{array} \right.$$

Решавайки системата получаваме, всички елементи от подгрупата $L = \{(-2\beta, \beta, \beta) |\ \beta \in \mathbb{R}\}$.

Групата е комутативна и левите съседни класове съвпадат с десните. Съседният клас, определен от елемента $(1,2,3)$ е от вида

$$(1,2,3) + L = \{(1-2\beta, 2+\beta, 3+\beta) |\ \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Определяме на стълба от свободните членове на нехомогенната система, която има за решение вектора $(1,2,3)$, като пресмятаме $1+2+3=6$ и $1-2+3.3=8$. От знанията по линейна алгебра получаваме, че съседният клас $(1,2,3)+L$ съвпада с решението на нехомогенната линейна система, която има за решение $(1,2,3)$:

$$(1,2,3) + L : \left| \begin{array}{r} x+y+z=6 \\ x-y+3z=8 \end{array} \right.$$

Пример 1.4.

Разглеждаме групата $GL_2(\mathbb{R})$ от обратими 2×2 матрици с реални елементи и нейната подгрупа

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle|\ a \in \mathbb{R} \right\}$$

Да намерим левия и десния съседен клас, определени от елемента $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

За левия съседен клас имаме:

$$B.H = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle|\ a \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 3a \end{pmatrix} \middle|\ a \in \mathbb{R} \right\}$$

За десния съседен клас имаме:

$$H.B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \middle|\ a \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 3a & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \middle|\ a \in \mathbb{R} \right\}$$

Ясно е, че ляв и десен съседен клас са различни и $B.H \cap H.B = \{B\}$.

1.3. Свойства

Нека G е мултипликативно записана група, $H < G$ е нейна подгрупа и $g \in G$. Изпълнени са свойствата:

Свойство 1.

- Съседният клас $g.H$ е подгрупа на G тогава и само тогава, когато $g \in H$. В този случай е изпълнено $g.H = H$;
- Съседният клас $H.g$ е подгрупа на G тогава и само тогава, когато $g \in H$. В този случай е изпълнено $H.g = H$;

Доказателство:
Доказателството е еднотипно за ляв и за десен съседен клас, затова ще го направим само за десен съседен клас.

$\Longrightarrow)$ Ако съседният клас Hg е подгрупа, следователно съществува елемент $h_1 \in H$, такъв че да се получи единичния елемент $e = h_1.g \in Hg$ и следователно $g = h_1^{-1} \in H$.

$\Longleftarrow)$ Ако $g \in H$, тогава :

- За всеки елемент от съседния клас Hg е изпълнено $hg \in H$, защото произведението на два елемента от подгрупата H също е елемент на тази подгрупа, следователно $Hg \subset H$.
- За произволен елемент h от подгрупата е изпълнено $h = (hg^{-1})g \in Hg$ и следователно получавамe$H \subset Hg$.

Следователно $Hg = H$ е подгрупа.

$\square$

<u>*Забележка:*</u> В примера за групата S_3 и подгрупата $H =< (1,2) >= \{\mathrm{id}, (1,2)\}$. видяхме илюсрация на това свойство, когато получихме $(1,2).H = \{(1,2), \mathrm{id}\} = H.(1,2) = H$.

Свойство 2.
Ако подгрупата Hе крайна, тогава броят на елементите във всеки съседен клас на H е равен на броя на елементите в подгрупата $|H| = |g.H| = |H.g|$.

Доказателство:
Нека $H = \{e, h_1, h_2, \ldots, h_s\}$ е крайна подгрупа и gH е съседен клас. Изпълнено е

$$gh_i = gh_j \iff g^{-1}(gh_i) = g^{-1}(gh_j) \iff h_i = h_j$$

Следователно всички елементи $ge, gh_1, gh_2, \ldots, gh_s$ са различни помежду си и получаваме, че $|H| = |g.H| = s + 1$.

$\square$

1.4. Свойства -продължение 1

Свойство 3.

Нека $t \in G$, тогава е изпълнено

- $t \in g.H \iff t.H = g.H \iff t^{-1}g \in H$;
- $t \in H.g \iff H.t = H.g \iff tg^{-1} \in H$;

Доказателство:

Доказателството е еднотипно за ляв и за десен съседен клас, затова ще направим само за ляв съседен клас

$\Longrightarrow)$ $t \in g.H$, следователно съществува елемент $h_1 \in H$, такъв че $t = g.h_1$ и следователно $g = t.h_1^{-1}$ и $t^{-1}g = h_1^{-1} \in H$.

- За произволен елемент $t.y \in t.H$ от съседния клас $t.H$ (където $y \in H$) е изпълнено равенството $ty = (gh_1)y = g(h_1y) \in gH$, следователно $t.H \subset g.H$
- За произволен елемент $g.x \in gH, x \in H$, прилагаме равенството $g = t.h_1^{-1}$ и получаваме $gx = (th_1^{-1})x = t(h_1^{-1}x) \in tH$, следователно $g.H \subset t.H.$

Получихме, че двата леви съседни класа съвпадат $t.H = g.H$, т.е. представляват едно и също множество.

$\Longleftarrow)$ Ако $t.H = g.H$, имаме $t = t.e \in t.H = g.H$, следователно $t \in g.H$. От равенството $t = g.h_1$ имаме $t^{-1}g = h_1^{-1} \in H.$

$\square$

<u>*Забележка:*</u> От това свойство получаваме, че всеки елемент от един съседен клас може да представлява целия съседен клас и съответно съседния клас може да се записва по различни начини. Например, ако a, b, c са различни елементи на един и същи съседен клас gH, тогава можем да запишем този съседен клас като aH или bH или $cH = bH = aH = gH$. Затова всеки един елемент от съседния клас можем да го наречем представител на съседния клас.

Илюстрация на това свойство видяхме в примера за съседните класове на подгрупата $4\mathbb{Z}$. Например

$$1 + 4\mathbb{Z} = \{1 + 4z|\ z \in \mathbb{Z}\} = -3 + 4\mathbb{Z} = 5 + 4\mathbb{Z}$$

.

Поради тази причина, когато работим в групата $\mathbb{Z}_4$ от класовете остатъци по модул 4 (които са точно съседните класове) използваме, че имаме равенства $\overline{1} = \overline{-3} = \overline{5}$.

1.5. Свойства -продължение 2

Свойство 4:

Нека $H < G$ е подгрупа и са дадени два елемента $t, g \in G$. Тогава:

- $gH \cap tH = \begin{cases} \emptyset, & \text{когато } t \notin gH \\ tH = gH, & \text{когато } t \in gH \end{cases}$
- $Hg \cap Ht = \begin{cases} \emptyset, & \text{когато } t \notin Hg \\ Ht = Hg, & \text{когато } t \in Hg \end{cases}$

Доказателство:

Нека да допуснем, че два леви съседни класа tH и gH имат общ елемент $a \in tH \cap gH$. От Свойство 3 получаваме:

$$\left.\begin{aligned} a \in gH \Rightarrow \quad & aH = gH \\ a \in tH \Rightarrow \quad & aH = tH \end{aligned}\right\} \Longrightarrow tH = aH = gH.$$

По същия начин се получава и за десните съседни класове.

$\square$

<u>*Забележка:*</u> Да се обърне внимание, че в това свойство се говори сечението на два съседни класа от еднакъв тип - или само за два леви съседни класа, или за двойка десни съседни класа.

Ако се разгледа сечението на един ляв с един десен съседен клас, тогава може да се получи всякакво пресичане на съседните класове. Да разгледаме отново примера за групата S_3 нейната подгрупа$H =< (1,2) >= \{\mathrm{id}, (1,2)\}$. там се получи

леви класове		десни класове	
$\mathrm{id}.\, H = (1,2).\, H$	$= \{\mathrm{id}, (1,2)\}$	$\{\mathrm{id}, (1,2)\}$	$= H.\,\mathrm{id} = H.\,(1,2)$
$(1,3).\, H = (1,2,3).\, H$	$= \{(1,3), (1,2,3)\}$	$\{(1,3), (1,3,2)\}$	$= H.\,(1,3) = H.\,(1,3,2)$
$(2,3).\, H = (1,3,2).\, H$	$= \{(2,3), (1,3,2)\}$	$\{(2,3), (1,2,3)\}$	$= H.\,(2,3) = H(1,2,3)$

Виждаме, че е изпълнено

$$\begin{aligned} (1,3)H \cap H(1,3) &= \{(1,3)\} \\ (1,3)H \cap H(2,3) &= \{(1,2,3)\} \end{aligned}.$$

2. Разбиване на съседни класове

Свойство 5.

Ако G е група и H е нейна подгрупа, тогава G може да се представи като обединение на непресичащи се леви съседни класове, както и G е обединение на непресичащи се десни съседни класове.

$$G = \bigcup_{g \in G} gH = \bigcup_{g \in G} Hg$$

Доказателство:

Ясно е че, за всеки елемент $x \in G$ е изпълнено, че той принадлежи и на левия и на десен съседен клас, на който x е представител:

$x = x.e \in xH; x = e.x \in Hx$. Факта, че съседните класове са непресичащи доказахме в свойство 4.

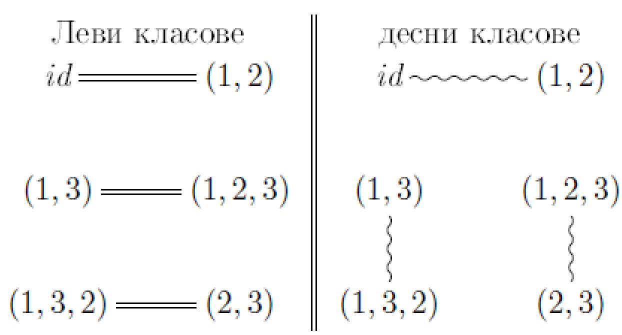
Забележка: При фиксирана подгрупа H, в множеството от всички елементи на групата G може да се въведе $a \smile_L b \Leftrightarrow a \in bH$ и лесно се проверява, че това е релация на еквивалентност. Свойството показва разбиването на групата на класове на еквивалентност относно тази релация "$\smile_L$". По аналогичен начин може да се въведе релация при която два елемента са в релация когато принадлежат на един и същ десен съседен клас $a \frown_R b \Leftrightarrow a \in bH$. Тогава разбиването на непресичащи се десни съседни класове е разбиване на класове на еквивалнтност при тази релация "$\frown_R$".

Илюстрация на това свойство можем да видим в следните примери:

- Групата $\mathbb{Z}$ се разбива на съседни класове, според остатъка, който дава числото при делене на 4:

$$\mathbb{Z} = 4\mathbb{Z} \cup 1 + 4\mathbb{Z} \cup 2 + 4\mathbb{Z} \cup 3 + 4\mathbb{Z}$$

- Ако разгледаме групата S_3 и нейната подгрупа $H = \{\mathrm{id}, (1,2)\}$, получаваме, че разбиването на леви съседни класове е различно от разбиването на десни съседни класове:



- Какво представлява разбиването на адитивната група на тримерните вектори $\mathbb{R}^3$ на съседни класове по групата L - решение на хомогенната система

$$L: \left| \begin{array}{r} x + y + z = 0 \\ x - y + 3z = 0 \end{array} \right.$$

2.1. Индекс на подгрупа

Нека със $LC_G(H) = \{gH | g \in G\}$ бележим множеството от левите съседни класове, а със $RC_G(H) = \{Hg | g \in G\}$ - множеството на десните съседни класове. Тогава :

Свойство 6:

Ако G е група и H е нейна подгрупа, тогава има *биективно съответствие* между множеството на всички леви съседни класове и множеството на десните съседни класове:

$$\exists\, \Phi : LC_G(H) \to RC_G(H),\ \Phi \text{ е биекция.}$$

Ако групата има краен брой леви съседни класове, тогава броят на левите съседни класове е равен на броят на десните съседни класове.

Доказателство:

Да разгледаме изображението

$$\Phi : LC_G(H) \to RC_G(H), \text{ където } \Phi(gH) = Hg^{-1} .$$

Проверяваме последователно:

- *Коректно ли е дефинирано?* Ако $gH = tH$ от свойство 3 следва $t^{-1}g \in H$, но имаме $(t^{-1})(g^{-1})^{-1} = t^{-1}g \in H$ и прилагайки отново същото свойство за десните съседни класове получаваме $Ht^{-1} = Hg^{-1}$. Получихме, че дефиницията на $\Phi(gH)$ е коректна и образът на един съседен клас не зависи от това кой от неговите елементи сме взели да го представлява при определянето на изображението.
- *Инекция ли е?* Ако $\Phi(gH) = \Phi(tH)$, тогава $Hg^{-1} = Ht^{-1}$, прилагаме свойство 3 $(t^{-1})(g^{-1})^{-1} = t^{-1}g \in H$, откъдето получаваме $gH = tH$ и установяваме че изображението е инекция.
- *Сюрекция ли е?* Ако разгледаме съседния клас Hg имаме $\Phi(g^{-1}.H) = H.(g^{-1})^{-1} = Hg$ }

Щом имаме биективно съотношение между множеството на левите съседни класове и множеството на десните съседни класове, тогава тези множества са равномощни. В частния случай на крайни множества получаваме, че броя на левите съседни класове е равен на броя на десните съседни класове.

□

Определение:

Броят на левите съседни класове на подгрупата H в групата G, който е равен на броя на десните съседни класове, се нарича индекс на H в G и се бележи с $|G : H|$.

В разглежданите примери, за подгрупата $4\mathbb{Z}$ на $\mathbb{Z}$ имаме $|\mathbb{Z} : 4\mathbb{Z}| = 4$, а за подгрупата $H = \{\mathrm{id}, (1,2)\} < S_3$ е изпълнено $|S_3 : H| = 3$.

2.2. Теорема на Лагранж

Теорема на Лагранж:

Ако G е крайна група и H е подгрупа, тогава е изпълнено $|G| = |H|.|G:H|$.

Доказателство:

От свойство 5 имаме, че G се разбива на непресичащи се леви съседни класове

$$G = g_1H \cup g_2H \cup \ldots \cup g_mH$$

Броят на съседните класове е точно индекса на подгрупата H в групата G и всеки съседен клас има толкова елементи, колкото в H (показахме, че $|g_iH| = |H|$), откъдето получаваме

$$|G| = |g_1H| + |g_2H| + \ldots + |g_mH| = m.|H| = |G:H|.|H|.$$

□

2.3. Следствия от Теоремата на Лагранж

Нека $|G|$ е крайна група и $|H|$ подгрупа. От факта, че $|G|$, $|H|$, $|G:H|$ са цели числа, получаваме:

Следствие 1:

Ако G е крайна група и H е подгрупа, тогава е изпълнено:

а) $|H|$ дели реда на групата $|G|$;

б) индексът $|G:H|$ дели реда на групата |G|.

Следствие 2:

Ако G е крайна група тогава редът на всеки елемент $g \in G$ дели реда на групата.

Доказателство:

Нека $g \in G$, знаем, че редът на цикличната подгрупа, породена от g е равен на реда на елемента($\mathrm{ord}(g) = |g| = |<g>|$) .
Прилагаме предното следствие и получаваме $\mathrm{ord}(g) \mid |G|$.

$\square$

Следствие 3:

Ако групата G е от ред просто число, тогава G е изоморфна на циклична група от ред p.

$$|G| = p, \quad p \text{ просто число } \Rightarrow G \simeq C_p$$

Доказателство:

Нека $|G| = p$ и нека $g \in G, g \neq e$ е нееединичен елемент от групата. Знаем, че редът на g не е 1 и дели реда на групата, който е просто число p. От това следва, че $\mathrm{ord}(g) = p$ и следователно цикличната група породена от елемента g има p елемента, колкото е реда на цялата група ($\mathrm{ord}(g) = |<g>| = p = |G|$). Следователно групата е циклична и $G = <g>$.

$\square$

3. Някои крайни групи

Използвайки Теоремата на Лагранж може да се определи, че всички групи от ред просто число са изоморфни на цикличната група от съответния ред.

Оказва се, че използвайки теоремата на Лагранж и нейните следствия би могло да се определи вида на някои групи, които имат ред произведение на две прости числа, а също и някои свойства на други крайни групи.

3.1. Елементи от ред 2 в крайна група

Свойство:

Във всяка група от ред четно число има елемент от ред 2.

Доказателство:

Нека $|G| = 2k$ и нека съставим всички подмножества от вида $\{a, a^{-1}\}$. Лесно не вижда, че е изпълнено:

$$\{a, a^{-1}\} \cap \{b, b^{-1}\} = \begin{cases} \emptyset, & b \notin \{a, a^{-1}\} \\ \{a, a^{-1}\} = \{b, b^{-1}\}, & b \in \{a, a^{-1}\} \end{cases}$$

Равенството $a = a^{-1}$ е изпълнено, когато $a.\, a = a.\, a^{-1} = e$. В една група единствените елементи, за които имаме $a^2 = e$ са единичния елемент и елементите от ред 2.

Нека B е подмножеството от елементи от ред 2, и T е подмножеството, съставено от всички елементи, които имат ред повече от 2 и е изпълнено $G = \{e\} \cup B \cup T$. Подмножеството T може да се разбие на непресичащи се подмножества от по два елемента от вида $\{a, a^{-1}\}$ и следователно T има четен брой елементи. Ясно е, че $|G| = 1 + |B| + |T|$, откъдето получаваме че $|B| = |G| - |T| - 1$ е нечетно число и следователно в групата има поне един елемент от ред 2.

□

Свойство:

Ако в една група всеки неединичен елемент е от ред 2, тогава групата е Абелева.

Доказателство:

Нека $g \in G,\ g \neq e$ от условието имаме $\mathrm{ord}(g) = 2 \Rightarrow g^2 = e \Rightarrow g = g^{-1}$, за единичние елемент също е в сила $e = e^{-1}$. Да вземем два произволни елемента от групата g, h, тогава е изпълнено

$$gh(hg)^{-1} = gh(g^{-1}h^{-1}) = gh.\, (gh) = (gh)^2 = e \ \Rightarrow gh = hg$$

Получихме че два произволни елемента комутират , следователно групата е Абелева.

□

3.2. Групи от ред 4

За описанието на някои от групите ще ни се наложи да използваме директно произведение на групи.

Определение:

Нека $(G,*)$ и $(L,\circ)$ са групи. Декартовото произведение на множествата $G\times L=\{(g,l)|g\in G, l\in L\}$ е група, относно операцията

$(g_1,l_1)\times(g_2,l_2)=(g_1*g_2,l_1\circ l_2)$.

Тази група $(G\times L,\times)$ се нарича директно произведение на групите $(G,*)$ и $(L,\circ)$. Единичният елемент на тази група е $e=(e_1,e_2)$, където e_1,e_2 са единичните елементи на G и L съответно.

Твърдение:

Всяка група Gот ред 4 е комутативна и изоморфна на C_4 или на $C_2\times C_2$.

Доказателство:

Използва се следствието, че реда на всеки елемент от групата дели реда на групата. Следователно възможните редове на елементи от групата са 1,2,4 които са делителите на $4=|G|$. Във произволна група имаме единствен елемент от ред 1 и това е единичния елемент e. Имаме две възможности

- В G има елемент g от ред 4, тогава цикличната група, породена от този елемент е от ред 4 (точно колкото е реда на G), следователно групата е циклична и $G=<g>$.
- Всички нееденични елементи от G са от ред 2, тогава групата е Абелева. Ще покажем, че в този случай групата е изоморфна на $C_2\times C_2=\{(1,1),(1,-1),(-1,1),(-1,-1),(-1,-1)\}$ с операцията покоординатно умножение. Нека $G=\{e,g,h,t\}$, тогава определяме кой може да бъде елемнта gh:
  - ако $gh=e$, тогава $g=h^{-1}=h$, което е невъзможно,
  - ако $gh=g$ ще следва $h=e$ невъзможно е,
  - ако $gh=h$, получава се $g=e$, невъзможно е,
  - ако $gh=t=hg$, това остана единствено възможно.

След като знаем , че групата е Абелева и $gh=t$ можем еднозначно да попълним таблицата за операцията в групата и да сравним двете таблици.

$$\text{За } G=\{e,g,h,gh\}\quad \begin{array}{c|cccc} . & e & g & h & gh \\ \hline e & e & g & h & gh \\ g & g & e & gh & h \\ h & h & gh & e & g \\ gh & gh & h & g & e \end{array}$$

$$\begin{array}{r|cccc} . & (1,1) & (1,-1) & (-1,1) & (-1,-1) \\ \hline (1,1) & (1,1) & (1,-1) & (-1,1) & (-1,-1) \\ (1,-1) & (1,-1) & (1,1) & (-1,-1) & (-1,1) \\ (-1,1) & (-1,1) & (-1,-1) & (1,1) & (1,-1) \\ (-1,-1) & (-1,-1) & (-1,1) & (1,-1) & (1,1) \end{array}$$

Вижда се, че таблиците са еднотипни и ако направим изображението $\varphi:G\to C_2\times C_2$, където $\varphi(e)=(1,1)$, $\varphi(g)=(1,-1)$, $\varphi(h)=(-1,1)$ и $\varphi(gh)=(-1,-1)$ се получава че , φ е изоморфизъм.

Окончателно получихме, че група от ред 4 е изоморфна на C_4 (в случай 1) или на $C_2\times C_2$ (в случай 2).

□

3.3. Групи от ред 6

Твърдение:

Всяка група от ред 6 е изоморфна на цикличната група C_6 или на симетричната група S_3.

Доказателство:

Нека G е група от ред 6. Доказахме, че в групата има елемент от ред 2.

Да разгледаме двете възможности:

- Ако допуснем, че всички нееднинични елементи на групата са от ред 2, тогава групата е Абелева. Нека да вземем два различни нееднинични елементи от групата g, h и да разгледаме подмножеството $H = \{e, g, h, gh\}$. Лесно се вижда, че умножавайки два елемента от H получаваме пак елемент от H и за обратните елементи имаме $e^{-1} = e, g^{-1} = g$, $h^{-1} = h$, $(gh)^{-1} = gh$, следователно H е подгрупа на G. От следствието на теоремата на Лагранж се получава, че 4 дели 6, което е противоречие. Следователно в групата има елемент от ред, по-голям от 2.
- Ако в групата има елемент от ред по-голям от 2. Тогава възможните редове на този елемент са числата 3 или 6. Ще докажем, че винаги в G има елемент от ред 3:
    - ако допуснем, че в групата има елемент a от ред 6, като го повдигнем на квадрат ще получим, че a^2 е от ред 3, следователно в G има елемент от ред 3

По този начин показахме, че в група от ред 6 винаги има поне един елемент от ред 2 и поне един елемент от ред 3. Нека a е един елемент от ред 2 ($\operatorname{ord}(a) = 2$) и b е един елемент от ред 3.

Разглеждаме подгрупата $B = \{e, b, b^2\}$, породена от елемента b, която е от ред 3 и от теоремата на Лагранж имаме $|G : B| = 2.$ Ясно е, че елемента a не пренадлежи на тази подгрупа, следователно $B \cap aB = \emptyset$ и получаваме, че всички елементи на групата са $G = B \cup aB = \{e, b, b^2, a, ab, ab^2\}$. От друга страна $B \cap Ba = \emptyset$, следователно

$Ba = aB \Rightarrow \{a, ba, b^2a\} = \{a, ab, ab^2\}$.

За елемента ba има две възможности:

Случай 1: ако $ba = ab$, тогава двата елемента комутират и реда на елемента ab е 6, следователно в група от ред 6 има елемнт от ред 6, откъдето получаваме,че групата е циклична $G =< ab >$.

Случай 2: ако $ba = ab^2$, тогава $b^2a = ab$. От тези равенства еднозначно може да се попълни таблицата за умножение в групата.

$.$	e	b	b^2	a	ab	ab^2
e	e	b	b^2	a	ab	ab^2
b	b	b^2	e	ab^2	a	ab
b^2	b^2	e	b	ab	ab^2	a
a	a	ab	ab^2	e	b	b^2
ab	ab	ab^2	a	b^2	e	b
ab^2	ab^2	a	ab	b	b^2	e

Това означава, че ако в някоя некомутативна група от ред 6 с a бележим произволен елемент от ред 2 и с b произволен елемнет от ред 3, еднозначно се получава таблицата за умножение в групата, т.е. всички такива групи са изоморфни помежду си.

Пример на некомутативна група от ред 6 е симетричната група S_3 и затова можем да твърдим, че всяка некомутативна група от ред 6 е изоморфна на симетричната S_3.

Един изоморфизъм може да се получи, когато се разгледа изображението

$\psi : G \to S_3$, където $\psi(b) = (1,2,3)$ и $\psi(a) = (1,2)$ и образите на останалите елементи се получат от условието, че $\psi(g.h) = \psi(g).\psi(h)$.

Естествено този изоморфизъм не е единствен, защото от таблицата можем да определим, че в групата $G = \{e, b, b^2, a, ab, ab^2\}$ има 2 елемента от ред 3, които са b, b^2 и три елемента от ред 2 - a, ab, ab^2.

□