31. Определен интеграл. Дефиниция и свойства. Интегруемост на непрекъснатите функции. Теорема на Нютон-Лайбниц

Деф:

Разбиване на интервала $[a,b]$ наричаме всяко множество от точки $\tau \coloneqq \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, т.ч. $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Пишем още τ: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$
Точките $x_0, x_1, \dots, x_n$ се наричат **делящи**. Диаметър на разбиването наричаме
$\mathrm{d}(\tau) \coloneqq \max\limits_{i=1,\dots,n} (x_i - x_{i-1})$

Точките $c_1, c_2, \dots, c_n$ наричаме **междинни за разбиването** τ: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, ако
$c_i \in [x_{i-1}, x_i], \qquad i = 1, 2, \dots, n$

Деф:

Нека $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, τ: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ е разбиване на $[a,b]$ и $c_1, c_2, \dots, c_n$ са междинни точки за τ. Риманова сума на $f(x)$ по разбиването τ и междинните точки $c_1, c_2, \dots, c_n$ наричаме сумата

$$R_\tau \coloneqq R_\tau(f) \coloneqq \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1})$$

Деф: Риманов интеграл. Интегруемост по Риман

Нека $f: [a,b] \to \mathbb{R}$. Казваме, че римановите суми на $f(x)$ клонят към $I \in \mathbb{R}$ (или имат граница I) при диаметър на разбиването клонящ към 0 ($d(\tau) \to 0$), ако
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \quad |R_\tau(f) - I| < \varepsilon$
За всяко разбиване τ с $d(\tau) < \delta$ и всеки междинни точки. Пишем
$\lim\limits_{d(\tau)\to 0} R_\tau(f) = I$
Числото I се нарича **риманов определен интеграл** на $f(x)$ върху интерв. $[a,b]$ и се означава с

$$\int_a^b f(x)\, dx \coloneqq I = \lim_{d(\tau)\to 0} R_\tau(f)$$

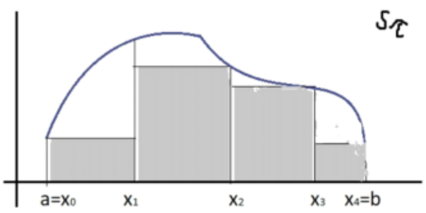
Ако $f(x)$ има риманов определен интеграл върху $[a,b]$,
казваме, че $f(x)$ е **интегруема** (в смисъл на Риман) върху $[a.b]$

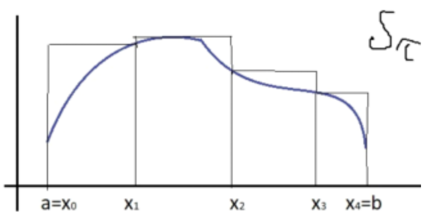
Деф: суми на Дарбу

Нека $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ е ограничена. За разбиване τ: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ на $[a,b]$ дефинираме съответно **малка и голяма сума на Дарбу** на $f(x)$ чрез

$$s_\tau \coloneqq s_\tau(f) \coloneqq \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}), \qquad m_i \coloneqq \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x),$$

$$S_\tau \coloneqq S_\tau(f) \coloneqq \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}), \qquad m_i \coloneqq \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x),$$





Твърдение:

При добавяне на нови делящи точки, малките суми на Дарбу не намаляват, а големите - не нарастват.

Доказателство:

Достатъчно е да докажем твърдението за една деляща точка, общият случай ще следва след повторение на тази стъпка.

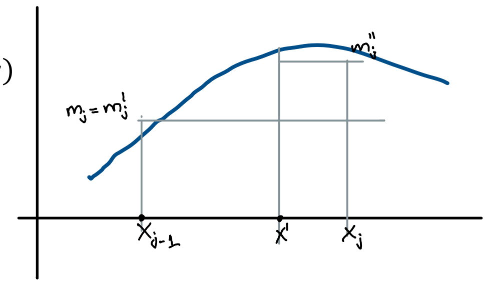
Ще разгледаме малките суми на Дарбу. Твърдението за големите се доказва аналогично или използвайки $S_\tau(f) = -s_\tau(-f)$.

Нека τ_1: $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ е разбиване на $[a, b]$ и τ_2 е разбиването на $[a, b]$, което се получава от τ_1 с добавяне на деляща точка x'. Нека $x' \in (x_{j-1}, x_j)$. Тогава

$$s_{\tau_2} - s_{\tau_1} = m_j'\left(x' - x_{j-1}\right) + m_j''\left(x_j - x'\right) - m_j\left(x_j - x_{j-1}\right),$$

където

$$m_j := \inf_{x \in [x_{j-1}, x_j]} f(x), \qquad m_j' := \inf_{x \in [x_{j-1}, x']} f(x), \qquad m_j'' := \inf_{x \in [x', x_j]} f(x)$$



Имаме $m_j', m_j'' \geq m_j$. Следователно

$$s_{\tau_2} - s_{\tau_1} = \underbrace{m_j'}_{\geq m_j}\left(x' - x_{j-1}\right) + \underbrace{m_j''}_{\geq m_j}\left(x_j - x'\right) - m_j\left(x_j - x_{j-1}\right)$$

$$s_{\tau_2} - s_{\tau_1} \geq m_j\left(x' - x_{j-1} + x_j - x' - x_j + x_{j-1}\right) = 0$$

,

Деф: Горен и долен интервал на Дарбу

Нека $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ е ограничена. **Горен интеграл** на Дарбу наричаме

$\bar{I} = \inf_\tau S_\tau$ – долна граница на големите суми

Долен интеграл на Дарбу наричаме

$$\underline{I} = \sup_\tau s_\tau \quad - \quad \text{горна граница на малките суми}$$

Ако $\underline{I} = \bar{I}$, казваме, че $f(x)$ е интегруема върху $[a, b]$ и общата стойност на $\underline{I}$ и $\bar{I}$ наричаме **определн интеграл** на $f(x)$ върху $[a, b]$

Твърдение:

Функцията f е интегруема по Риман в $[a, b]$ т.с.т.к. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \tau$ - разбиване на $[a, b]$, т.ч .$S_\tau - s_\tau < \varepsilon$

Доказателство:

Нека $f(x)$ е интегруема, тогава $I = \underline{I} = \bar{I}$, т.е.

$I := \sup_\tau s_\tau = \inf_\tau S_\tau$

Нека $\varepsilon > 0$ е произволно. Числото $I - \frac{\varepsilon}{2}$ не е горна граница на множеството от малките суми на Дарбу, следователно съществува s_{τ_1}, т.ч.

$$s_{\tau_1} > I - \frac{\varepsilon}{2}$$

Аналогично, $I + \frac{\varepsilon}{2}$ не е долна граница на множеството от големите суми на Дарбу, следователно съществува S_{τ_2}, т.ч.

$$S_{\tau_2} < I + \frac{\varepsilon}{2}$$

Получихме, че $S_{\tau_2} - s_{\tau_1} < I + \frac{\varepsilon}{2} - \left(I - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon$

Образуваме разбиването $\tau := \tau_1 \cup \tau_2$. От предното твърдение следва че

$S_\tau - s_\tau \leq S_{\tau_2} - s_{\tau_1} < \varepsilon$

Обратно, нека $\varepsilon > 0$ е произволно. Тогава съществува разбиване τ, т.ч. $S_\tau - s_\tau < \varepsilon$. Следователно $\bar{I} - \underline{I} \leq S_\tau - s_\tau < \varepsilon$. Така установихме, че $0 \leq \bar{I} - \underline{I} < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$.

Следователно $\underline{I} = \bar{I}$ и $f(x)$ е интегруема върху $[a, b]$

Твърдение:

Всяка непрекъсната функция в краен и затворен интервал е интегруема по Риман

Доказателство:

Нека $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ е непрекъсната. Нека $\varepsilon > 0$ е произволно. От теоремата на Кантор имаме, че $f(x)$ е равномерно непрекъсната в $[a, b]$. Т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \quad \left|f(x_1) - f(x_2)\right| < \epsilon \qquad \forall x_1, x_2 \in [a, b], \text{ т.ч. } \left|x_1 - x_2\right| < \delta$$

Избираме разбиване τ, т.ч. $d(\tau) < \delta$. Нека образуваме S_τ и s_τ с подходящ избор на $M_i, m_i,\ i \in \{1, \dots, n\}$
Тогава

$$S_\tau - s_\tau = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1})$$

Имаме, че $M_i - m_i < \frac{\varepsilon}{b-a}$ за $i \in \{1, \dots, n\}$, защото $d(\tau) < \delta$ и

$$S_\tau - s_\tau < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = \varepsilon$$

Следователно f е интегруема върху $[a, b]$.

Свойства на римановия интеграл:

1. **Линейност**
   Нека $f, g: [a, b] \to \mathbb{R}$ са интегруеми и $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Тогава:
   $$\int_a^b (\lambda. f(x) + \mu. g(x))\, dx = \lambda \int_a^b f(x)\, dx + \mu \int_a^b g(x)\, dx$$
2. **Монотонност**
   Нека $f, g: [a, b] \to \mathbb{R}$ са интегруеми.
   a. Ако $f(x) \geq 0$ в $[a, b]$, то (**неотрицателност**)
   $$\int_a^b f(x)\, dx \geq 0$$
   b. Ако $f(x) \leq g(x)$ в $[a, b]$, то (**монотонност**)
   $$\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx$$
   c. Ако $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ е интегруема, то интегруема е и функцията $|f(x)|$, при това
   $$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$$
3. **Адитивност**
   Нека $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ е интегруема и $c \in (a, b)$.
   $$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$$
4. Switch sign tweak
   $$\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx$$

Твърдение: Теорема за средните стойности

Нека $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ е непрекъсната. Тогава съществува $c \in [a, b]$, т.ч.

$$\int_a^b f(x)\, dx = f(x)(b - a)$$

Доказателство:

От теоремата на Вайерщрас, щом $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ е непрекъсната, то тя има НМ и НГ стойност. Да ги означим съответно с m и M. Тогава

$$\min_{x \in [a,b]} f(x) = m \leq f(x) \leq M = \max_{x \in [a,b]} f(x), \qquad x \in [a, b]$$

След като интегрираме тези неравенства и вземем предвид колко е стойността на определен интеграл от константа, получаваме

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a) \Rightarrow m \leq \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx \leq M$$

Числата m и M са стойности от непрекъснатата функция $f(x)$.

Знаем, че всяка непрекъсната функция в [a, b] приема всички стойности между максимума и минимума си, следователно съществува $c \in [a, b]$, т.ч.

$$f(x) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Твърдение: Теорема на Нютон-Лайбниц

Нека $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ е непрекъсната, то $\forall x \in [a, b]$ е изпълнено

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

Доказателство:

f е непрекъсната в $[a, b]$, следователно тя е непрекъсната и в $[a, x] \subseteq [a, b]$ и от предната теорема е интегруема в $[a, x]$. Нека

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

И образуваме диференчното й частно

Нека $x_0 \in [a, b]$ е произволно фиксирано и $h \neq 0$ е т.ч. $x_0 + h \in [a, b]$. За диференчното частно на $F(x)$ в т. x_0 имаме

$$\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_a^{x_0+h} f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt\right) = \frac{1}{\mathrm{h}}\int_{\mathrm{x}_0}^{x_0+h} f(t)dt == \frac{1}{h}f(c_h)\left[(x_0+h) - x_0\right]$$

$$= f(c_h)$$

Където c_h е между x_0 и $x_0 + h$. Щом c_h е между x_0 и $x_0 + h$, то $c_h \to x_0$ при $h \to 0$. Ако x_0 съвпада с край на интервала, то h клони към 0 само от едната страна, така че $x_0 + h \in [a, b]$.

Функцията $f(x)$ е непрекъсната в т. x_0. Следователно

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x_0+h) - F(x_0\ )}{h} = f(x_0)$$

Следователно $F(x)$ е диференциуема в т. x_0 и $F'(x_0) = f(x_0)$