1.3.2 Pumping Лема

L е контекстно-свободен

$$\rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : \forall z \in L : |z| > n$$

$$\rightarrow \exists u, v, w, x, y : z = uvwxy \wedge |vx| \geq 1 \wedge |vwx| \leq n \wedge$$

$$\forall i \in \mathbb{N}_0 : uv^i wx^i y \in L$$

С думи:

Достатъчно дългите думи в един контекстно-свободен език остават в него с итериране на една или две нетривиални поддуми "‘pumping"’.

Доказателство на Pumping лемата

Нека $G = (V, \Sigma, P, S)$ е гарматика в нормална форма на Чомски за $L - \{\varepsilon\}$.

Нека $k = |V|$, $n = 2^k$,

$z \in L$ с $|z| = m \geq n$ произволна.

Да разгледаме синтактично дърво за z.

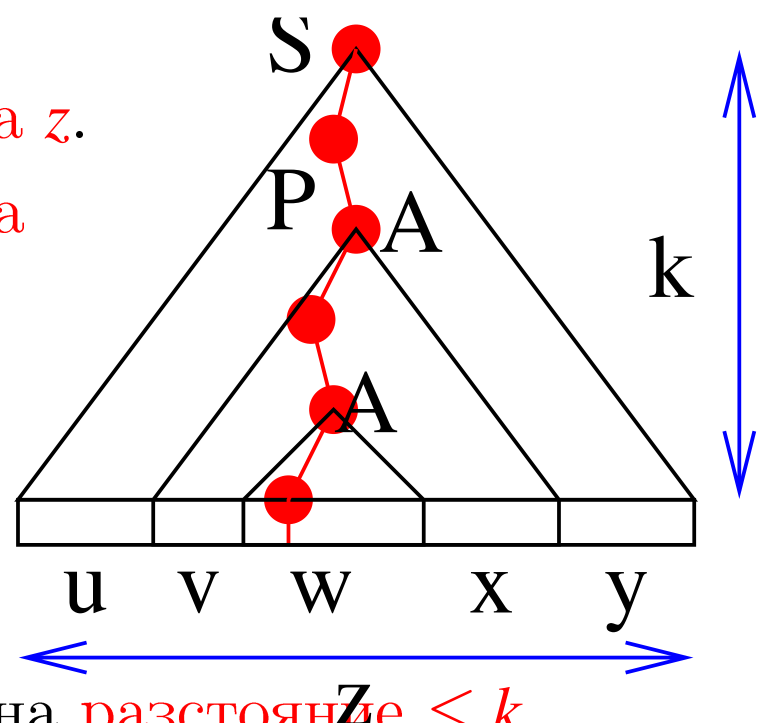
Макс. степен ≤ 2, има $\geq n = 2^k$ листа

$\rightarrow \exists$ път P с дължина $|P| > k$.

$\rightarrow \geq k+1$ променливи в P.

$\rightarrow \exists$ променлива $A \in P$:

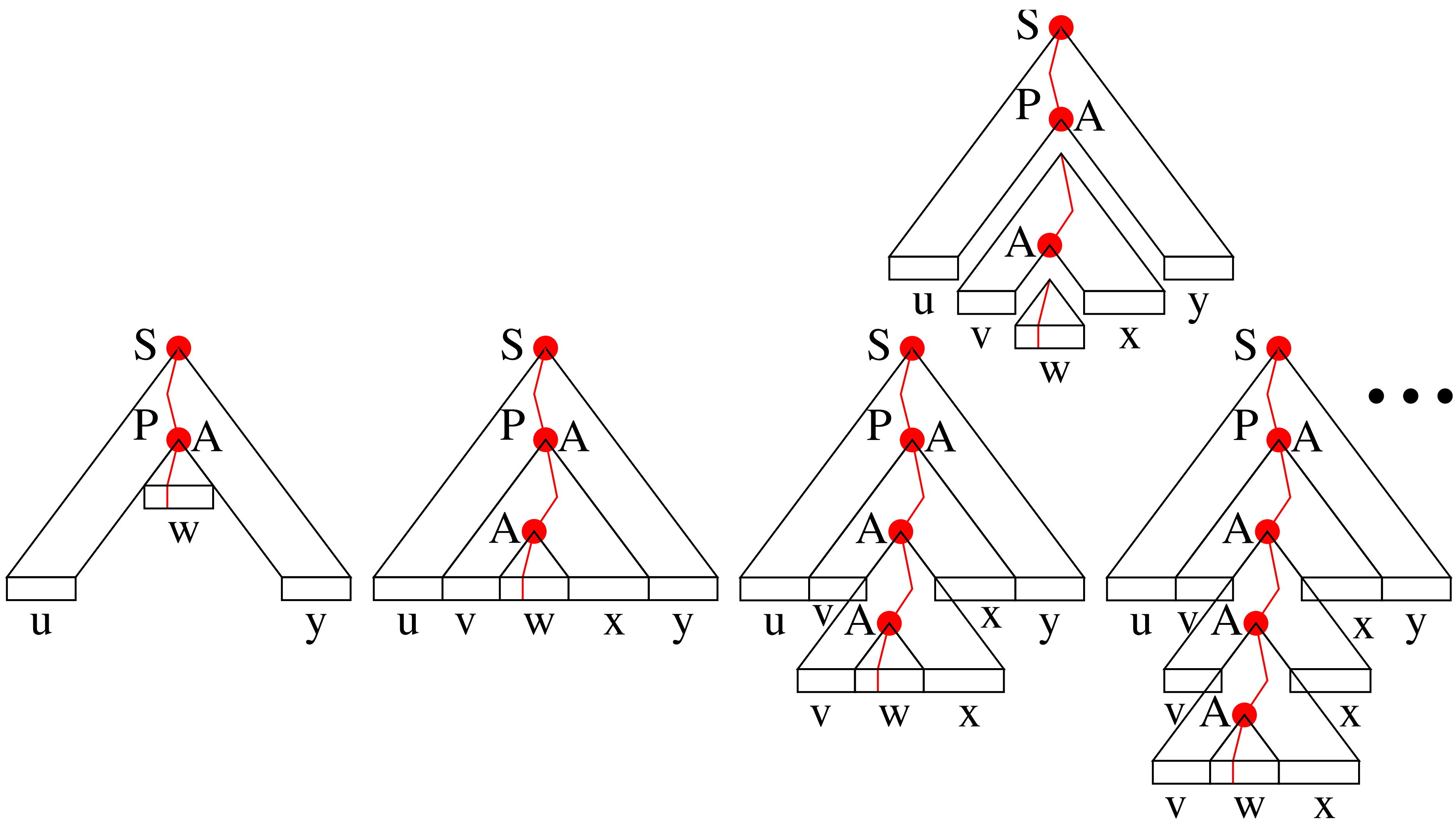
A се появява ≥ 2 пъти $(|vx| \geq 1)$.



Второто появяване отдолу нагоре е на разстояние $\leq k$.

$\rightarrow$ корен на поддърво за поддумата vwx с дължина $\leq n$

Конструкция на итерациите:



Лема: Едно двоично дърво (възлите със степен 0 или 2) с $\geq 2^k$ листа съдържа път P с дължина $\geq k$.

Д-во: Индукция по k.

Случай $k = 0$: 1 листо, дължина на път 0.

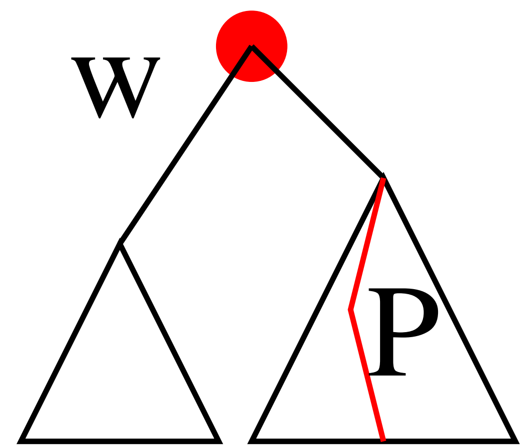
Случай $k \rightsquigarrow k+1$:

$\geq 2^{k+1}$ листа. Коренът w има степен 2.

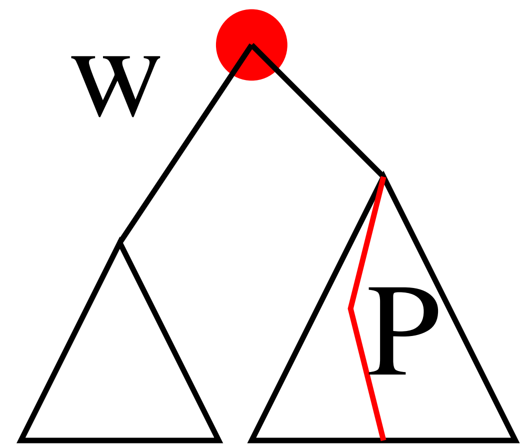
Поне едно поддърво има $\geq 2^k$ листа

и съдържа път P с дължина $\geq k$.

Така wP има дължина $\geq k+1$.



Следствие: Ако в едно двоично дърво (възлите със степен 0 или 2) всеки път е с дължина $\leq k$, то има $\leq 2^k$ листа.



$L = \{a^m b^m c^m : m \geq 1\}$ не е контекстно-свободен

Допускаме, че L е контекстно-свободен.

Нека n е числото от Pumping лемата.

Да разгледаме $z = a^n b^n c^n$ и представянето

$z = uvwxy$ от Pumping лемата като

$|vwx| \leq n$, $|vx| \geq 1$, $uv^0wx^0y = uwy \in L$.

vx не може да съдържа a-тата, b-тата и c-тата.

$\longrightarrow$ балансът на a-тата, b-тата и c-тата в uwy е нарушен.

$\longrightarrow$ $uwy \notin L$

Противоречие.

Следствие: тип 2$\neq$тип 1

$L = \left\{ww : w \in \{a,b\}^*\right\}$ не е контекстно-свободен

Допускаме, че L е контекстно-свободен.

Нека n е числото от Pumping лемата.

Да разгледаме $z = a^n b^n a^n b^n$ и декомпозицията

$z = uvwxy$ от Pumping лемата с $|vwx| \leq n$, $|vx| \geq 1$,

$z' := uwy \in L$.

Случай $vx = a^k b^j$ е в лявата половина:

$\longrightarrow z' = a^{n-k} b^{n-j} a^n b^n$. Противоречие.

Случай vx лежи в дясната половина: (аналогично)

Случай vx лежи в средата: $vx = b^k a^j$

$\longrightarrow z' = a^n b^{n-k} a^{n-j} b^n$. Противоречие.

Правила за д-во с Pumping Лемата

1. Нека n е числото от Pumping лемата.
2. Да разгледаме $z = ???$ $(|z| \geq n)$ и представянето $z = uvwxy$ от Pumping лемата с $|vwx| \leq n$, $|vx| \geq 1$
   - Всяка дума z с $|z| \geq n$. “Изобретателната” част !
   - Изборът на думата — д-вото да е просто
   - Тъй като $|vwx| \leq n$ съдържа блокове с дължина n имаме следните случаи
3. Случаи за всички възможни декомпозиции $z = uvwxy$. За всеки случай: Намираме $i \geq 0$, такова че $uv^iwx^iy \notin L(G)$.

   Типични стойности: $i = 0$, $i = 2$.

   Предизвикателство: Броят на случаите по-малък.