

Обратима матрица (част 2)

Опр // $A \in M_{n \times n}(F)$ е обратима $\Leftrightarrow \exists B \in M_{n \times n}(F)$
 $AB = BA = E$

$B = A^{-1}$ обратна на A и е единствена с това свойство

Твл // A е обратима матрица $\Leftrightarrow \det A \neq 0$
и в такъв случай:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

A_{ij} е аргументираният кол-во на елемент a_{ij} на място i, j

$A \in M_{n \times n}(F)$

$\chi(A) = n \Leftrightarrow A$ неособена матрица \Leftrightarrow редовете на A са лнз $\Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow A$ обратима матрица
стълбовете на A са лнз

$$E_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

матрица в която има 1 на място ij и останалите елементи са 0 5-10)

Св-во

$$E_{ij} A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ a_{ji} & \dots & a_{ji} \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} i$$

на мястото на i -ти ред стои
ред номер j
а всички останали редове са 0

Св-во

$$A E_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{ij} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & a_{ij} & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{ij} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} j$$

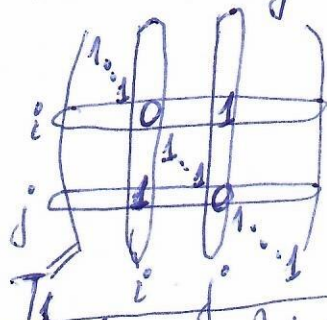
на мястото на j -ти стълб стои
 i -ти стълб а всички
останали са равни на 0
следователно

(6)

Т // Элементарните преобразувания ~~на матрица~~ ^{поредок} матрица могат да се реализират чрез умножаване отляво по подходяща неособена матрица.

Д. во // Ако λ е скалар $\lambda_1, \dots, \lambda_k$

a) $L_i \leftrightarrow L_j$



$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{ji} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{ki} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \bar{a}_{ji} & \dots & \bar{a}_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ \bar{a}_{ki} & \dots & \bar{a}_{kn} \end{pmatrix}$$

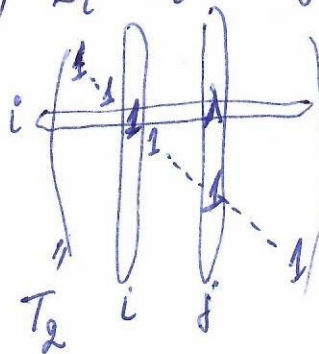
основно
 $E \cdot A = A$

$$T_1 = E - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}$$

$$\Gamma(T_1) = K; T_{1 \times K}$$

T_1 - неособена

b) $L_i' = L_i + \lambda L_j$



$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{ji} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{ki} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \bar{a}_{ji} + \lambda \bar{a}_{ji} & \dots & \bar{a}_{jn} + \lambda \bar{a}_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ \bar{a}_{ki} & \dots & \bar{a}_{kn} \end{pmatrix}$$

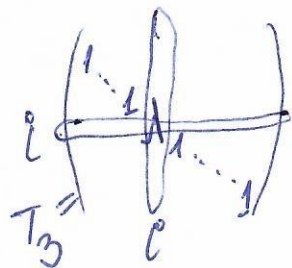
$$T_2 = E + \lambda E_{ij}$$

$$\Gamma(T_2) = K$$

T_2 - неособена

$$b) L_i' = \lambda L_i, \lambda \neq 0$$

(7)



$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \lambda \bar{a}_{11} & \dots & \lambda \bar{a}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda \bar{a}_{k1} & \dots & \lambda \bar{a}_{kn} \end{pmatrix}$$

$$T_3 = E + (\lambda - 1) E_{ii}$$

T_3 - неособенна
 $\varepsilon(T_3) = \kappa$

Аналогично:

Елементарните преобразувания по стълбове могат да се реализират чрез умножение отляво по подходяща неособенна матрица.

Т / Всяко елементарно преобразувание по ред n е (2)
 матрица може да се реализира чрез n -тонона $n \times n$ не
 отляво по първоначална неособена матрица.

Т / Ако A е неособена (обратима) матрица \Rightarrow съществува
 последователност от елементарни преобразувания по
 редове, които превеждат A до E . Ако тези
 преобразувания (в същия ред) се приложат към E ,
 ще се получи A^{-1} .

Д-во Всяко преобр. има матрица, която го реализира,
 където T_i е матрицата на преобр. № i .

$$T_3(\dots(T_2(T_1 A))) = E$$

$$(T_3 \dots T_2 T_1) A = E$$

$$\underbrace{\hspace{1cm}}_{=T}$$

$$TA = E \quad | \cdot A^{-1}$$

$$TAA^{-1} = EA^{-1}$$

$$T = A^{-1}$$

$$\Rightarrow T = A^{-1} (T_3 \dots T_2 T_1) E$$

$$\Rightarrow A^{-1} = T_3(\dots T_2(T_1 E) \dots)$$

$$(A|E) \sim \dots \sim (E|A^{-1})$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; A^{-1} = ?$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array} \right); A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

празна страница

матричное уравнение

Если A - обратная матрица $A_{n \times n}$

$$AX = B_{n \times k}$$

$$\Rightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}B$$
$$X = A^{-1}B$$

$$(A|B) \sim (T_1 A | T_1 B) \sim \dots$$
$$\sim \dots ((T_s \dots T_1) A | (T_s \dots T_1) B) =$$
$$= (E | A^{-1}B)$$

$$T_s \dots T_1 = A^{-1}$$

преобразуется по
реове

$$Y A = C_{s \times n} A_{n \times n}$$

$$(YA)A^{-1} = CA^{-1}$$
$$Y = CA^{-1}$$

$$\left(\begin{array}{c} A \\ C \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{c} AR_1 \\ CR_1 \end{array} \right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{c} AR_1 \dots R_k \\ CR_1 \dots R_k \end{array} \right)$$
$$= \left(\begin{array}{c} AA^{-1} \\ CA^{-1} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} E \\ CA^{-1} \end{array} \right)$$

преобразуется по
столбове

Матричен запис на система линейни уравнения

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{k1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n = b_k \end{cases} \quad \text{матр. } A \text{ стълб от ст. сл. } b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}$$

Ако $A \in n \times n$ матрица (обратима)

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1}A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} (A | \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}) &\sim (T_1 A | T_1 b) \sim (T_2(T_1 A) | T_2(T_1 b)) \sim \\ &\sim \dots \sim (E | T b) = (E | A^{-1} b) \end{aligned}$$

Да се реши матрицното $y-e$

$$X \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 9 \\ 1 & 5 & -2 & 7 \\ 3 & 22 & 1 & 15 \\ -1 & 2 & 3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 87 & 1 & 4 \\ -2 & 4 & 6 & 5 \\ 5 & -3 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 7 & -6 & 5 & -15 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & -6 & 7 & -20 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 6 & 5 & -20 \\ 0 & 0 & 2 & 15 \\ 19 & -18 & 14 & -55 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 14 & -1 & 10 & -35 \\ 0 & 0 & 2 & 15 \\ -2 & 3 & -1 & -10 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -8 & -7 & 7 & -4 \\ 3 & 9 & -3 & 8 \\ 1 & -8 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 9 \\ 1 & 5 & -2 & 7 \\ 3 & 22 & 1 & 15 \\ -1 & 2 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 87 & 1 & 4 \\ -2 & 4 & 6 & 5 \\ 5 & -3 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & -7 & 5 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 7 & -6 \\ -1 & 7 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 77 & 5 & -10 \\ -2 & 14 & 2 & 19 \\ 5 & -28 & 14 & -27 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -8 & -7 & 7 & -4 \\ 3 & 9 & -3 & 8 \\ 1 & -8 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

празна стр.