Числови редове - Теория 1

Март 2020г.

1 Основни сведения за числовите редове

Нека е дадена числова редица $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$. Под **числов ред** ще разбираме формалната сума:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Да въведем понятието **частични (парциални) суми**. За всяко $n \in \mathbb{N}$ с S_n означваме сумата от първите n члена на редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ (оттам, парциални). По-точно, имаме:

$$\begin{cases} S_1 = a_1 \\ S_2 = a_1 + a_2 \\ S_3 = a_1 + a_2 + a_3 \\ \dots \\ S_n = a_1 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_i \end{cases}$$

За да изучаваме числовия ред, изучаваме редицата от парциалните му суми $\{S_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ и дефинираме:

$$S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} S \iff \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

С други думи, сумата на даден числов ред е границата при $n \to \infty$ от парциалните суми S_n на реда.

По аналогия с несобствените интеграли, ако съществува границата на редицата от парциални суми:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \right),$$

то говорим за **сходящ** числов ред. Обратно, ако горната граница не съществува, то числовия ред наричаме **разходящ**. Накрая, ако $S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} S$, то под **сума** на числовия ред ще разбираме именно числото S.

Примери

1. Геометрична прогресия - нека $x \in \mathbb{R}$ и разглеждаме числовия ред:

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} x^n$$

Лесно се проверява, че за $x \neq 1$ парциалните суми са $S_n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$. Тяхната граница при $n \to \infty$ съществува, ако $x \in (-1, 1)$, като

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \underbrace{\left(\frac{1}{1-x} \cdot \lim_{n\to\infty} x^{n+1}\right)}_{0} = \frac{1}{1-x} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

Разбира се, ако $x \notin (-1, 1)$, границата не съществува и редът е разходящ. В частност, за $x = 1$ се получава, че $S_n = n$ и $S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$.

2. От курса по ДИС 1 ни е известно, че неперовото число e е граница на

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$$

3. Хармоничен ред - твърдим, че следният ред е разходящ:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Доказателство. За фиксирано $k \in \mathbb{N}$ разписваме 2^k-тата парциална сума:

$$H_{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{\geq 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8}\right)}_{\geq 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}\right)}_{\geq 8 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{2}} + \dots +$$
$$+ \dots + \underbrace{\left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \frac{1}{2^{k-1}+2} + \dots + \frac{1}{2^k}\right)}_{\geq 2^{k-1} \cdot \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2}}$$

Следователно $H_{2^k} \geq \left(1 + \frac{1}{2}k\right) \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$. Границата от парциалните суми е “безкрайност”, т.е. по дефиниция хармоничният числов ред е разходящ.

2 Свойства на числовите редове

1. **Необходимо условие за сходимост на ред:**

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ е сходящ } \Rightarrow a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Необходимото условие в контрапозиция е критерий за проверка дали даден числов ред е разходящ; за целта е достатъчно да се убедим, че $a_n \not\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ - в такъв случай е невъзможно редът да е сходящ, тъй като е невъзможно редицата от парциални суми на реда да се схожда.

Доказателство. Дадено е, че редът е сходящ със сума S, т.е. по дефиниция $S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} S$. Нека $n \geq 2$ и сравняваме парциалните суми S_n и S_{n-1}:

$$\ominus \begin{cases} S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} S \\ \\ S_{n-1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} S \end{cases}$$

Вадим S_{n-1} от S_n и получаваме, че $a_n = S_n - S_{n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} S - S = 0$, т.е. $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Забележка: Това е необходимо, но не и достатъчно условие за сходимост на числов ред. Възможно е общият член a_n да клони към 0 при $n \to \infty$, но редът да е разходящ. Като пример можем да посочим хармоничния ред.

2. Линейност - нека $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ са сходящи редове, а $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогава:
    - $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ е сходящ, като $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$
    - $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n)$ е сходящ, като $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

3. Добавянето / Задраскването на краен брой членове на реда не влияе на неговата сходимост. Формално:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \underbrace{\sum_{n=1}^{k-1} a_n}_{const} + \sum_{n=k}^{\infty} a_n$$

   Ако изходният ред е сходящ, то той остава сходящ след премахване на краен брой членове. Същото остава вярно и за добавянето на краен брой нови членове. Сравнете с аналогичното свойство за сходимост при числовите редици.

3 Редове с неотрицателен общ член. Принцип за сравнение, следствие

От особен интерес са числовите редове с неотрицателни членове, т.е. редовете, за които е в сила $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ с $a_n \geq 0 \; \forall \, n \in \mathbb{N}$. Съобразете, че това ограничение налага редицата от парциални суми $\{S_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ да е растяща $(S_n - S_{n-1} = a_n \geq 0)$. По-долу, когато говорим за редове, ще разбираме редове с неотрицателен общ член.

Принцип за сравнение

Нека са дадени редовете $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ и освен това $0 \leq a_n \leq b_n \ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Тогава:

$$(i) \text{ Ако } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ е сходящ, то } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ също е сходящ.}$$

$$(ii) \text{ Ако } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ е разходящ, то } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ също е разходящ.}$$

Доказателство. Нека $S_n = a_1 + \cdots + a_n$ и $\sigma_n = b_1 + \cdots + b_n$ са съответно парциални суми за двата реда. Тъй като те са с неотрицателни общи членове, редиците $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty}$ са растящи.

$$(i) \text{ Ако } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ е сходящ, то е валидно неравенството } S_n \leq \sigma_n \leq \sigma \text{ където } \lim_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma.$$

Следователно $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ е растяща и ограничена отгоре. Веднага можем да заключим, че редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ също е сходящ.

$$(ii) \text{ Ако } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ е разходящ, редицата от парциални суми } \{S_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ не е ограничена отгоре.}$$

Следователно и редицата $\{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty}$ е неограничена. Няма как редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ да бъде сходящ в този случай.

Следствие (Гранична форма на принципа)

Нека при условията на приницина за сравнение, ако $0 \leq a_n \leq b_n \ \forall\, n \in \mathbb{N}$ и допълнително $b_n > 0 \ \forall\, n \in \mathbb{N}$, съществува границата:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l, \text{ където } 0 < l < +\infty$$

Тогава редовете $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ са едновременно сходящи или разходящи.

Доказателство. Нека границата от условието на следствието съществува и $\frac{a_n}{b_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} l$ за $l > 0$ и $l < +\infty$. Разглеждаме околност $\left(\frac{l}{2}, 2l\right)$ на l. От теорията за граници на числови редици знаем:

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geq n_0 : \frac{a_n}{b_n} \in \left(\frac{l}{2}, 2l\right)$$

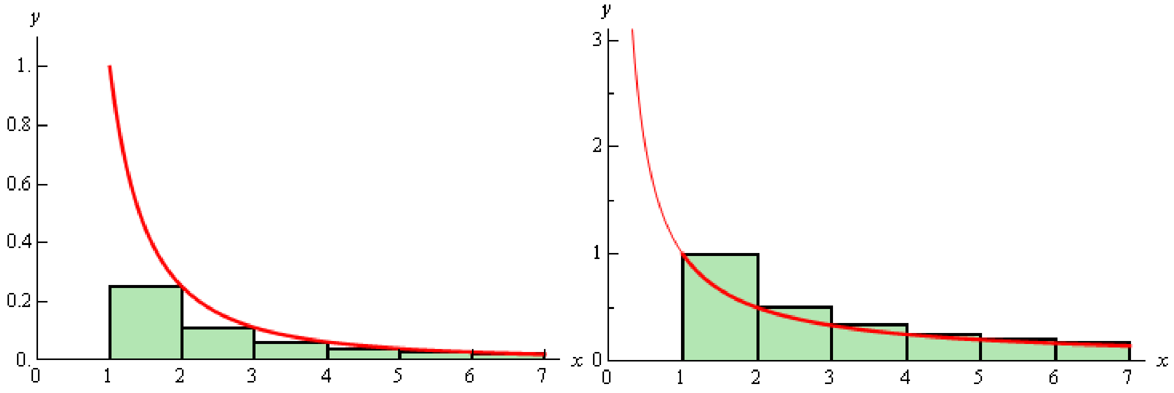
Тъй като $b_n > 0\ \forall\, n \in \mathbb{N}$, то неравенството приема вида $\frac{l}{2} \,.\, b_n \leq a_n \leq 2l \,.\, b_n$. Оттук нататък просто прилагаме критерия за сравнение.

Забележка: Обикновено се казва, че $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ **мажорира (ограничава отгоре)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Обратно, може да се каже, че $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **минорира (ограничава отдолу)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$. Това трябва да ни напомня за принципа за сравнение. Например, по-нататък ще обсъждаме критериите на Даламбер и Коши; при тяхното доказателство използваме, че даден числов ред се мажорира от геометричната прогресия, за която вече се убедихме, че е сходящ ред. По силата на принципа за сравнение, това влече сходимост и на разглеждания ред.

4 Интегрален критерий на Коши-Маклорен

Нека $f : [1, +\infty] \to [0, +\infty)$ е монотонно намаляваща. Тогава:

$$\int\limits_{1}^{+\infty} f\,(x)\ dx \text{ е сходящ} \iff \sum_{n=1}^{\infty} f\,(n) \text{ е сходящ.}$$



Фигура 1: Сходимост и разходимост по критерия на Коши-Маклорен

Както при несобствените интеграли, можем да въведем *скала* за сходимост на числови редове. Тя се явява частен случай на интегралния критерий на Коши-Маклорен за функцията $f\,(x) = \frac{1}{x^\lambda}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\lambda} \text{ е сходящ} \iff \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^\lambda} \text{ е сходящ}$$

Доказателство. Нека $n \in \mathbb{N}$ и разглеждаме x в интервала $[n, n+1]$, т.е $n \leq x \leq n+1$. Като използваме, че f е намаляваща, достигаме до неравенството $f(n) \geq f(x) \geq f(n+1)$. Интегрираме това неравенство в $[n, n+1]$:

$$f(n)\,.\,1 = \int_{n}^{n+1} f(n)\,dx \geq \int_{n}^{n+1} f(x)\,dx \geq \int_{n}^{n+1} f(n+1)\,dx = f(n+1)\,.\,1$$

Следователно:

$$f(n) \geq \int_{n}^{n+1} f(x)\,dx \geq f(n+1)$$

Фиксираме N - горна граница на сумиране (идеята ни е да разглеждаме парциални суми S_N). По-горе интегрирахме неравенството, нека сега сумираме горните двойни неравенства до N:

$$\sum_{n=1}^{N} f(n) \geq \sum_{n=1}^{N} \int_{n}^{n+1} f(x)\,dx \geq \sum_{n=1}^{N} f(n+1)$$

В последната сума за $f(n+1)$ можем да сменим сумационния индекс n, така че тази сума да "прилича" на сумата за $f(n)$. Нека положим $n+1 = m$, тогава:

$$\sum_{n=1}^{N} f(n+1) = \sum_{m=2}^{N+1} f(m) = \sum_{m=1}^{N+1} f(m) - f(1) = \sum_{n=1}^{N+1} f(n) - f(1)$$

Накрая върнахме индекса n, тъй като изборът на сумационнен индекс не влияе на сумата. Да заместим в горното неравенство:

$$\sum_{n=1}^{N} f(n) \geq \sum_{n=1}^{N} \int_{n}^{n+1} f(x)\,dx = \int_{1}^{N} f(x)\,dx \geq \sum_{n=1}^{N+1} f(n) - f(1)$$

Връщаме се към условията на критерия.

$$(a)\quad \underbrace{\int_{1}^{+\infty} f(x)\,dx}_{\text{сходящ}} \geq \int_{1}^{N} f(x)\,dx \overset{\forall N \geq 2}{\geq} \sum_{n=1}^{N} f(n) - f(1) \Longrightarrow \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} f(n)}_{\text{сходящ}} \leq \int_{1}^{+\infty} f(x)\,dx + f(1)$$

$$(b)\quad \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} f(n)}_{\text{сходящ}} \geq \sum_{n=1}^{N} f(n) \overset{\forall N \geq 2}{\geq} \int_{1}^{N} f(x)\,dx \Longrightarrow \underbrace{\int_{1}^{+\infty} f(x)\,dx}_{\text{сходящ}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

С други думи, в (a) заключаваме сходимост за реда, понеже той има неотрицателен общ член (редицата от парциални суми е растяща) и е ограничен отгоре (понеже имаме, че несобственият интеграл е сходящ). В (b) разсъждаваме аналогично - ако си спомним за $F(p)$, дефинирана като функция на горната граница на интеграла от $f(x)$, то $F(p)$ расте $p \to \infty$, но функцията е ограничена отгоре, т.е. съществува граница и несобственият интеграл е сходящ.

Задача. С интегралния критерий на Коши-Маклорен скалата за числови редове е очевидна:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\lambda}} : \begin{cases} \text{сходящ, за } \lambda > 1 \\ \\ \text{разходящ, за } \lambda \leq 1 \end{cases}$$

Както при несобствените интеграли, често в решаването на задачи е удобно да използваме релацията $\sim$ за оценка на редове. Тя се използва по абсолютно същия начин, но при интегралите се налагаше да посочим граница на функции; тук границите са на числови редици. Например:

Изследвайте за сходимост числовия ред $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{7n^5 - 3n}}{n^3 + 3}$.

Като приложим, че:

$$\frac{\sqrt{7n^5 - 3n}}{n^3 + 3} = \frac{n^{\frac{5}{2}}\sqrt{7 - \frac{3}{n^4}}}{n^3\left(1 + \frac{3}{n^3}\right)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{7 - \frac{3}{n^4}}}{1 + \frac{3}{n^3}} \text{ и } \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{7 - \frac{3}{n^4}}}{1 + \frac{3}{n^3}} = \sqrt{7} > 0$$

получаваме асимптотичната еквивалентност $\frac{\sqrt{7n^5-3n}}{n^3+3} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$. Директно заместваме в реда и прилагаме скалата:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{7n^5 - 3n}}{n^3 + 3} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ - разходящ, т.к } \lambda = \frac{1}{2} < 1$$

Забележка: Виждаме, че съществуват много прилики между теорията на несобствените интеграли и тази на числовите редове. Ето още една - в упражнението върху несобствени интеграли 1-ви род дадохме критерий, по който лесно можем да установим дали следните интеграли са сходящи или разходящи:

$$\int_{2}^{\infty} \frac{dx}{x^{\lambda}(\ln x)^{\mu}} \text{ и } \int_{2}^{\infty} \frac{dx}{x^{\lambda}(\ln x)^{\mu}(\ln\ln x)^{\nu}} \text{ и } \cdots$$

При редовете имаме същата закономерност - ако линейната част е на степен $\lambda > 1$, не гледаме логаритмите и директно твърдим сходимост; ако $\lambda = 1$, то поглеждаме към степента на $\ln x$ и отново проверяваме дали $\mu > 1$ (сходимост) или $\mu = 1$ (гледаме $\ln\ln x$) и т.н. Аналогията е полезна и се осмисля по-лесно синтактично:

$$\sum_{2}^{\infty} \frac{dx}{x^{\lambda}(\ln x)^{\mu}} \text{ и } \sum_{2}^{\infty} \frac{dx}{x^{\lambda}(\ln x)^{\mu}(\ln\ln x)^{\nu}} \text{ и } \cdots$$

Казано накратко, сходимостта е при едни и същи условия за интеграли и суми от горния вид.

5 Критерий на Даламбер

Критерият на Даламбер е приложим за числови редове с положителни членове и служи за установяване на сходимост или разходимост. Формално:

$$\text{Даден е ред } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ с } a_n > 0\ \forall n \in \mathbb{N}. \text{ Разглеждаме редицата } \left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\}_{n=1}^{\infty}.$$

$$(i) \text{ Ако съществува } \mu < 1, \text{ за което } \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \mu\ \ (\forall n \geq n_0)\,, \text{ то } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ е сходящ.}$$

$$(ii) \text{ Ако } \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1\ \ (\forall n \geq n_0)\,, \text{ то } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ е разходящ.}$$

Доказателство. Последователно разглеждаме (i) и (ii). Нека първо съществува подходящо $\mu < 1$ и попадаме в условията на сходимостта - да я докажем:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \mu < 1\ \forall n \geq k \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{a_{k+1}}{a_k} \leq \mu \\[2ex] \dfrac{a_{k+2}}{a_{k+1}} \leq \mu \\[2ex] \dots \\[2ex] \dfrac{a_{k+n}}{a_{k+n-1}} \leq \mu \end{array} \right\} \frac{\cancel{a_{k+1}}}{a_k} \cdot \frac{\cancel{a_{k+2}}}{\cancel{a_{k+1}}} \cdot \frac{\cancel{a_{k+3}}}{\cancel{a_{k+2}}} \cdots \frac{a_{k+n}}{\cancel{a_{k+n-1}}} \leq \mu^n \Rightarrow \frac{a_{k+n}}{a_k} \leq \mu^n$$

От неравенството накрая извличаме $0 < a_{k+n} \leq a_k \mu^n$. То издържа сумирането в ред, т.е. остава вярно:

$$0 < \sum_{n=1}^{\infty} a_{k+n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_k \mu^n = a_k \sum_{n=1}^{\infty} \mu^n$$

Последният ред е сходяща геометрична прогресия, която мажорира реда в условието на критерия. От принципа за сравнение получаваме, че той е сходящ.

Обратно, нака от известно място нататък $(\forall n \geq k)$ се получава, че $a_{n+1} \geq a_n$. Разходимостта е почти очевидна - трябва само да забележим, че понеже сме наложили $a_n > 0$, то за всички достатъчно големи n е изпълнено, че $a_n \geq a_k > 0$. Общият член не клони към 0 - нарушава се необходимото условие! Следователно редът е разходящ.

На практика при решаването на задачи е полезна следната *гранична форма* на критерия на Даламбер:

Следствие (Гранична форма)

Нека при условията на критерия имаме още, че съществува границата:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$$

Тогава:

$$(i)\ \text{Ако } l < 1,\ \text{ то } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ е сходящ.}$$

$$(ii)\ \text{Ако } l > 1,\ \text{ то } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ е разходящ.}$$

Доказателство. Нека първо $l < 1$ и искаме да покажем сходимост. Ясно е, че можем да намерим $\mu < 1$, за което $l < \mu < 1$. Разглеждаме околност $(-\infty, \mu)$ на l и отново използваме, че от известен номер насетне всички членове на редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ попадат в тази околност. Следователно:

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geq n_0 : \frac{a_{n+1}}{a_n} < \mu \Rightarrow \text{ Прилагаме Даламбер, } (i).$$

Сега $l > 1$, значи със сходни разсъждения се вижда, че след някой индекс всички членове на редицата изпълняват неравенството $a_{n+1} > a_n$, по-точно:

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geq n_0 : \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Rightarrow \text{ Прилагаме Даламбер, } (ii).$$

Задача. Нека се опитаме с критерия на Даламбер да изследваме за сходимост реда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} e^n$$

Ще приложим граничната форма:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} e^{n+1}\right)}{\left(\frac{n!}{n^n} e^n\right)} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\cancel{n}! \,.\, \cancel{e^n} \,.\, e}{(n+1)^n} \cdot \frac{n^n}{\cancel{n}! \,.\, \cancel{e^n}} \right) = e \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = e \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} = \frac{e}{e}$$

Получихме 1 и в такива случаи критерият на Даламбер не дава отговор на поставения въпрос. Това обаче е в случай, че се приближаваме към $l = 1$ със стойности по-малки от 1, а тук не е така; наистина, да обърнем внимание, че:

$$\frac{e}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \geq 1\ \forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} e^n \text{ е разходящ.}$$

Изводът е, че ако все пак получим $l = 1$ с Даламбер, все пак можем да проверим дали тази граница се достига с по-малки или по-големи стойности. Ако се достига с по-големи стойности - редът е разходящ; ако се достига с по-малки - критерият не дава отговор.

6 Критерий на Коши

Критерият на Коши се използва за редове с неотрицателен общ член. Подобно на Даламбер, той се опитва да установи сходимост или разходимост на реда. Формално:

$$\text{Даден е ред } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ с } a_n \geq 0. \text{ Разглеждаме редицата } \{\sqrt[n]{a_n}\}_{n=1}^{\infty}.$$

$$(i) \text{ Ако съществува } \mu < 1, \text{ за което } \sqrt[n]{a_n} \leq \mu \, (\forall \, n \geq n_0), \text{ то } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ е сходящ.}$$

$$(ii) \text{ Ако съществува подредица } \{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{a_n\}_{n=1}^{\infty},$$

$$\text{такава че } \sqrt[n_k]{a_{n_k}} \geq 1, \text{ то } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ е разходящ.}$$

Доказателство. Да се съсредоточим върху първия случай, където съществува $\mu < 1$, за което е изпълнено $\sqrt[n]{a_n} \leq \mu \; \forall \, n \geq n_0$. Повдигаме страните на n-та степен и получаваме $0 \leq a_n \leq \mu^n \; \forall \, n \geq n_0$. Неравенството издържа сумиране в ред, следователно:

$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^n \text{ - сходящ}$$

Както при Даламбер в случая на $\mu < 1$, имаме сходяща геометрична прогресия, която мажорира реда, който се изследва. Веднага заключаваме, че той е сходящ.

Сега, нека съществува подредица $\sqrt[n_k]{a_{n_k}}$, за която $a_{n_k} \geq 1 \; \forall \, k \geq k_0$. Както при Даламбер, общият член не клони към 0 - получихме разходимост на числовия ред.

Следствие (Гранична форма)

Нека при условията на критерия имаме още, че съществува границата:

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = l$$

Тогава:

$$(i) \text{ Ако } l < 1, \text{ то } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ е сходящ.}$$

$$(ii) \text{ Ако } l > 1, \text{ то } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ е разходящ.}$$

Доказателство. Разсъжденията са аналогични на тези, които приложихме при следствието от критерия на Даламбер. Ако $l < 1$, взимаме $\mu < 1$, за което $l < \mu < 1$ и разглеждаме околност $(-\infty, \mu)$ на l. Тогава:

$$\exists \, n_0 \in \mathbb{N} \; \forall \, n \geq n_0 : \sqrt[n]{a_n} < \mu \Rightarrow \text{ Прилагаме Коши, } (i).$$

Ако $l > 1$, разглеждаме околност $(1, +\infty)$ на l:

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : \sqrt[n]{a_n} > 1 \Rightarrow \text{ Прилагаме Коши, } (ii).$$

<u>Задача.</u> Да се изследва за сходимост реда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n^2}$$

Удобно е да приложим Коши, понеже в общия член имаме степенуване. Наистина,

$$\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n^2}} = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{-n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{e} < 1$$

С граничната форма на критерия на Коши установихме сходимост на горния ред.

<u>Задача.</u> Да се изследва за сходимост реда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n}$$

Отново Коши:

$$\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n}} = \frac{n+1}{n+2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

Клоним към граница 1 със стойности по-малки от 1 - критерият на Коши не дава отговор. Използвайте необходимото условие за сходимост и покажете, че $a_n \not\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Редът се оказва разходящ.

<u>Пример.</u> Нека $p, q > 0$ и разглеждаме числовия ред $p + pq + p^2q + p^2q^2 + \cdots$. Не е трудно да се види, че за $n = 2k$ (четно) общият член е $a_n = p^k q^k$, а за $n = 2k+1$ (нечетно) общият член е $a_n = p^{k+1} q^k$.

Да приложим критерия на Даламбер:

$$n = 2k+1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{k\to\infty} \frac{a_{2k+2}}{a_{2k+1}} = \lim_{k\to\infty} \frac{p^{k+1}q^{k+1}}{p^{k+1}q^k} = q$$

$$n = 2k \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{k\to\infty} \frac{a_{2k+1}}{a_{2k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{p^{k+1}q^{k}}{p^{k}q^k} = p$$

За да имаме сходимост по Даламбер, трябва да поискаме $p < 1$ и $q < 1$. Ако $p \geq 1$ и $q \geq 1$, то съгласно Даламбер, редът е разходящ.

Да видим дали тези наблюдения ще се потвърдят от критерия на Коши:

$$n = 2k+1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[2k+1]{p^{k+1}q^k} = \lim_{k\to\infty} p^{\frac{k+1}{2k+1}} q^{\frac{k}{2k+1}} = p^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}}$$

$$n = 2k \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[2k]{p^k q^k} = p^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}}$$

Критерият на Коши ни дава сходимост при $pq > 1$ и разходимост при $pq < 1$. Съобразете, че ако $pq = 1$, то всички четни членове на редицата са 1 и от Коши, (ii) имаме разходимост.