Идеали, факторпръстени и хомоморфизми

Нека M е пръстен.

Опр. $I \subset M$, $I \neq \emptyset$ $\boxed{I \triangleleft M}$

I е идеал, ако:

→ $a - b \in I$, $\forall a, b \in I$

→ $\begin{cases} ar \in I \\ ra \in I \end{cases}$ $\forall a \in I, \forall r \in M$

Свойство:

Ако $I \triangleleft M$

$\Rightarrow I$ е подпръстен на M

от $ar \in M \Rightarrow ab \in I$

$\forall a \in I, \forall r \in M$ $\quad \forall a \in I$ $\quad \forall b \in I$

Примери: ① $n\mathbb{Z} \triangleleft \mathbb{Z}$; $\{0\} \triangleleft M$

② $I = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\} \subset \mathbb{Z}_8$ и $I \triangleleft \mathbb{Z}_8$

НО!

$\mathbb{Z} < \mathbb{Q}$ но $\cancel{\mathbb{Z} \triangleleft \mathbb{Q}}$

③ $I \subset \mathbb{Z}[X]$, $I = \{3a_0 + a_1 x + \dots + a_s X^s \mid s \geq 0;\ a_i \in \mathbb{Z}\} \triangleleft \mathbb{Z}[X]$

④ $M = M_{2\times 2}(\mathbb{Z})$

$I = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \begin{matrix} 2 \mid a;\ 2 \mid b \\ 2 \mid c;\ 2 \mid d \end{matrix} \right\} \triangleleft M$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+bz & ay+bt \\ cx+dz & cy+dt \end{pmatrix} \xRightarrow{\text{ако } 2 \mid a,b,c,d} \in I$

$M = M_{2\times 2}(\mathbb{Z})$

$T = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbb{Z} \right\} \cancel{\triangleleft} M$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix} \notin T$

Идеали, факторпръстени, хомоморфизми

Тв. Нека M е пръстен с 1. и $I \lhd M$.
Ако $\exists$ a - обратим, за който $a \in I \Rightarrow I = M$

Д-во: $ar \in I, \forall r \in M \Rightarrow a \cdot a^{-1} \in I \Rightarrow 1 \in I \Rightarrow 1 \cdot r = r \in I, \forall r \in M$
$\Rightarrow I = M$

Сл. Полетата нямат собствени идеали.
Единствените идеали в полетата са $\{0\}$ и цялото поле.

Нека M е комутативен пръстен с 1, $a \in M$

$(a) = \{ax \mid x \in M\}$ - главен идеал, породен от a

Св-ва:

→ $(a) \lhd M$ $\quad$ ($ax - ay = a(x-y) \in M$; $axr \in M$; $r(ax) = arx \in (a)$)

→ Ако $a \in J \lhd M \Rightarrow (a) \subset J$ $\quad$ ($a \in J \Rightarrow ax \in J, \forall x \Rightarrow (a) \subset J$)

→ $(a) = M \Leftrightarrow a$ е обратим в M

$\Rightarrow$) $(a) = M \Rightarrow 1 \in (a) \Rightarrow \exists x \in M: ax = 1 \Rightarrow a$ обратим

$\Leftarrow$) от горното твърдение

Идеали, факторпръстени и хомоморфизми //

Т/ Всеки идеал в $\mathbb{Z}$ е главен.

Д-во Нека $I \lhd \mathbb{Z}$

→ Ако $I = \{0\} = (0) \Rightarrow I$ е главен

→ Ако $\exists a \neq 0,\ a \in I \Rightarrow$ в I има естествени числа

Нека d е min естествено число от I

($d \in I$, $d > 0$, d е min с това св-во)

Нека $x \in I$ (произволно)

$x = dq + r$, $0 \le r < d \Rightarrow r = \underbrace{x}_{\in I} - \underbrace{dq}_{\in I} \in I$

$\Rightarrow x \in I$ и $(d) \supset I \Rightarrow (d) = I$

Пример: $I = (12) \lhd \mathbb{Z}$; $J = (15) \lhd \mathbb{Z}$

$IJ = \{\sum_i 12a_i \cdot 15b_i \mid a_i, b_i \in \mathbb{Z}\} = (180)$

$x \in I \cap J \Rightarrow 12 | x$ и $15 | x \Rightarrow 60 | x \Rightarrow I \cap J = (60)$

НОД$(12, 15) = 3 = \underbrace{-1.12}_{\in I} + \underbrace{1.15}_{\in J} \in I + J \Rightarrow (3) \subset I + J$

$y = 12t + 15u \in I + J \Rightarrow 3 | y \Rightarrow y \in (3)$

$\Rightarrow I + J = (3)$

Нека M е пръстен

$I, J \lhd M$

$I + J = \{a + b \mid a \in I,\ b \in J\}$

$I.J = \{a_1b_1 + \dots + a_sb_s \mid s \ge 1,\ a_i \in I,\ b_i \in J\}$

Тв// $I, J \lhd M$, тогава:

→ $I \cap J \lhd M$

→ $IJ \lhd M$

→ $I + J \lhd M$

→ $IJ \lhd I \cap J \lhd I, \lhd J \subset I + J$

$x = \underset{\uparrow I}{a_1}\underset{\uparrow J}{b_1} + \dots + \underset{\uparrow I}{a_s}\underset{\uparrow J}{b_s} \in IJ$

$\Rightarrow a_1b_1 \in I; \dots; a_sb_s \in I \lhd M$

$a_1b_1 \in J; \dots a_sb_s \in J \lhd M$

$\Rightarrow x \in I \cap J$

$a \in I \Rightarrow a = a + 0 \in I + J$

Идеали, факторпръстени, хомоморфизми

Нека $I \lhd M$ идеал $\Rightarrow (I,+) \lhd (M,+)$ нормална подгрупа на адитивната група

$M/I = \{a+I \mid a \in M\}$ $\quad M/I$ е факторгрупа на $(M,+)$ факторизирано по $(I,+)$

$$\boxed{(a+I)+(b+I)=(a+b)+I}$$

Дефинираме „$\cdot$" $\quad \boxed{(a+I)\cdot(b+I)=ab+I}$

Нека $a_1+I=a+I \Rightarrow a_1=a+i_1$; $b_1+I=b+I \Rightarrow b_1=b+i_2$; $i_1,i_2 \in I$

$$\Rightarrow a_1b_1=(a+i_1)(b+i_2)=ab+\underbrace{ai_2}_{\in I}+\underbrace{i_1b}_{\in I}+\underbrace{i_1i_2}_{\in I} \in ab+I \Rightarrow ab+I=a_1b_1+I$$

$\Rightarrow$ умножението е коректно дефинирано

$$(a+I)[(b+I)(c+I)]=(a+I)(bc+I)=a(bc)+I=(ab)c+I=(ab+I)\cdot(c+I)=$$
$$=[(a+I)(b+I)](c+I) \Rightarrow$$ асоциативност на „$\cdot$"

$$[(a+I)+(b+I)](c+I)=[(a+b)+I]\cdot(c+I)=(a+b)c+I=$$
$$=ac+bc+I=(ac+I)+(bc+I)=(a+I)(c+I)+(b+I)(c+I)$$

$\Rightarrow$ дистрибутивно св-во

M/I е пръстен / факторпръстен /

Пример: $\mathbb{Z}_n=\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}=\mathbb{Z}/(n)$

идеали, факторпръстени, хомоморфизми

Опр.// Нека K, M са пръстени. Изображението $\varphi: M \to K$ е хомоморфизъм, ако:
$$\begin{cases} \varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b) \\ \varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b) \end{cases}, \forall a, b \in M$$

Свойства на хомоморфизмите:

① $\varphi: M \to K$ хомоморфизъм на пръстени

$\Rightarrow \varphi: (M, +) \longrightarrow (K, +)$ хомоморфизъм на адитивни групи

$\Rightarrow \varphi(0_M) = 0_K$; $\varphi(-a) = -\varphi(a)$; $\varphi(a-b) = \varphi(a) - \varphi(b)$

② **Свойство:** Ако M, K са полета и $\varphi: M \to K$ хмм и φ е ненулев $\Rightarrow \begin{cases} \varphi(e_M) = e_K \\ \varphi(a^{-1}) = (\varphi(a))^{-1} \end{cases}$

Д-во: Ако $t = \varphi(a) \neq 0$

$\Rightarrow t = \varphi(a) = \varphi(a \cdot e_M) = t \cdot \varphi(e_M) \Rightarrow t = t\varphi(e_M) \Rightarrow e_K = \varphi(e_M)$

Ако $b \neq 0, b \in M \Rightarrow e_K = \varphi(e_M) = \varphi(b \cdot b^{-1}) = \varphi(b) \cdot \varphi(b^{-1})$

$\Rightarrow \varphi(b^{-1}) = (\varphi(b))^{-1}$

Опр.// $\varphi: M \to K$ е изоморфизъм
- φ - хомоморфизъм
- φ - биекция

за φ - хмм

$\mathrm{Ker}\,\varphi = \{a \mid \varphi(a) = 0\} \subset M$ ядро

$\mathrm{Im}\,\varphi = \{\varphi(x) \mid x \in M\} \subset K$ образ

идеали, факторпръстени, хомоморфизми

Нека $\varphi: M \to K$ хомоморф.

$Ker\varphi = \{x \mid \varphi(x) = 0_K\} \subset M$

Тв/ $Ker\varphi \lhd M$; $Im\varphi < K$

Д-во: Ако $a, b \in Ker\varphi$:

$\varphi(a-b) = \varphi(a) - \varphi(b) = 0_K - 0_K = 0_K$

$\varphi(a.r) = \varphi(a) \cdot \varphi(r) = 0\,\varphi(r) = 0$, $\forall r \in M$

$\Rightarrow a-b;\ ar;\ ra \in Ker\varphi \lhd M$

Ако $u, v \in Im\varphi \Rightarrow \exists x, y \in M$:

$u = \varphi(x)$; $v = \varphi(y)$

$\left.\begin{array}{l} u - v = \varphi(x-y) \in Im\,\varphi \\ u \cdot v = \varphi(x \cdot y) \in Im\,\varphi \end{array}\right\} \Rightarrow Im\varphi < K$

Естествен хомоморфизъм

Нека $I \lhd M$

Тв/ $\eta: M \to M/I$

$\eta(a) = a + I$

е хомоморфизъм и $Ker\eta = I$

$Im\,\eta = M/I$

Д-во:

$\eta(a+b) = (a+b) + I = (a+I) + (b+I) =$
$= \eta(a) + \eta(b)$

$\eta(ab) = ab + I = (a+I)(b+I) =$
$= \eta(a) \cdot \eta(b)$

$Ker\eta = \{a \mid a + I = 0 + I\} = I$

Свойство: Множеството от всички идеали на един пръстен M, съвпада с множеството от всички ядра на хомоморфизми φ, където $\varphi: M \to K$ (K - произволен пръстен).

Теорема за хомоморфизмите при пръстени

Нека $\varphi: M \to K$ е хомоморфизъм

- $\operatorname{Ker}\varphi \lhd M$
- $\operatorname{Im}\varphi \cong M/\operatorname{Ker}\varphi$.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, dashed, "\eta"'] & \operatorname{Im}\varphi < K \\ & M/\operatorname{Ker}\varphi \arrow[u, "\psi"'] \end{tikzcd}$$

Д-во: φ е хомоморфизъм и на адитивните групи

Осн. св-во (*) $\varphi(a)=\varphi(b) \Longleftrightarrow b \in a+\operatorname{Ker}\varphi \Longleftrightarrow a+\operatorname{Ker}\varphi = b+\operatorname{Ker}\varphi$

Дефинира се $\psi: M/\operatorname{Ker}\varphi \to \operatorname{Im}\varphi$ $\quad (\psi(a+\operatorname{Ker}\varphi)=\varphi(a))$

- ψ е коректно ((*) (посока $\Longleftarrow$)
- ψ е хомоморфизъм $\quad \boxed{\begin{aligned} &\psi(a+\operatorname{Ker}\varphi+b+\operatorname{Ker}\varphi)=\varphi(a+b) \\ &\psi(a+\operatorname{Ker}\varphi)+\psi(b+\operatorname{Ker}\varphi)=\varphi(a)+\varphi(b) \end{aligned}}$

$\psi((a+\operatorname{Ker}\varphi)(b+\operatorname{Ker}\varphi)) =$
$= \psi(ab+\operatorname{Ker}\varphi)=\varphi(ab)=\varphi(a)\varphi(b)=\psi(a+\operatorname{Ker}\varphi)\,\psi(b+\operatorname{Ker}\varphi)$

- ψ е сюрекция: $x \in \operatorname{Im}\varphi \Rightarrow x=\varphi(a)=\psi(a+\operatorname{Ker}\varphi)$
- ψ е инекция ((*) посока $\Longrightarrow$)

$\Longrightarrow \psi$ е изоморфизъм и $\operatorname{Im}\varphi \cong M/\operatorname{Ker}\varphi$