Функционални зависимости
II част

Обвивки и покрития

Функционална зависимост (FD)

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \rightarrow B$$

- *Ако два кортежа от r(R) съвпадат по атрибутите $A_1, A_2, \ldots, A_n$ of R, те трябва да съвпадат и по атрибута B*
- Ако
  - $A_1\ A_2 \ldots A_n \rightarrow B_1$
  - $A_1\ A_2 \ldots A_n \rightarrow B_2$
  - … …
  - $A_1\ A_2 \ldots A_n \rightarrow B_m$
- то
  - $A_1\ A_2 \ldots A_n \rightarrow B_1\ B_2 \ldots B_m$

Обвивка на множество от функционални зависимости

Def. Нека *F* е множество от FD's.
F^{+} - Обвивка на F е множество от FD's , които логически следват от *F.*

$F^{+} = \{ X \rightarrow Y \mid X \models Y \}$ са логически следствия от F

Приложение на правилата на Amstrong: Пример

Дадено е м-во от функционални зависимости:

$AB \rightarrow C$, $CD \rightarrow E$

$ABD \rightarrow E$?

- $AB \rightarrow C$ дадено
- $ABD \rightarrow CD$ A2
- $CD \rightarrow E$ дадено
- $ABD \rightarrow E$ A3

Надежност (soundness) на аксиомите Armstrong

- **Лема:**
  Аксиомите на Армстронг са надеждни,
  т.е ако $X \rightarrow Y$ е изведено от F чрез аксиомите,
  то $X \rightarrow Y$ е вярно за всяка релация, в която важат зависимостите F.

Правила за разделяне и обединение

- Имаме право да разделим множеството атрибути в дясната част на FD и да поставим всеки от тях в дясната част на нова FD.
- Правило за декомпозиция:
  – Ако $AA \rightarrow B_1, B_2, \ldots, B_n$, то

$$AA \rightarrow B_1$$
$$AA \rightarrow B_2$$
$$, \ldots,$$
$$AA \rightarrow B_n$$

Правила за разделяне и обединение

- Правило за обединение:

Ако $AA \rightarrow B_1$

$AA \rightarrow B_2$

, ...,

$AA \rightarrow B_n$

то $AA \rightarrow B_1, B_2, ..., B_n$

Приложение на правилата на Amstrong: Пример

Дадено е м-во от функционални зависимости:

$A \to B$, $B \to C$, $A \to D$, $CE \to HG$

- Прилагайки транзитивното правило към $A \to B$ и $B \to C$, получаваме $A \to C$.
- Прилагайки правилото за обединение към $A \to B$ и $A \to D$, получаваме $A \to BD$
- Прилагайки правилото за псевдотранзитивност към $CE \to HG$ и резултатът $A \to C$, получаваме $AE \to HG$
- Прилагайки правилото за декомпозиция към горния резултат, получаваме $AE \to H$ и $AE \to G$

Намиране на *FD*’s

$$\underline{F}$$

$$
\begin{tikzcd}
AB\to C \arrow[drr, dashed] & & & & \\
& & AB\to BCD \arrow[dr, dashed] & & \\
A\to D \arrow[r, dashed, "\mathrm{aug}"] & AB\to BD \arrow[ur, dashed, "\mathrm{union}"] & & AB\to BCDE \arrow[r, dashed, "\mathrm{decomp}"] & AB\to CDE \\
D\to E \arrow[r, dashed, "\mathrm{aug}"] & BCD\to BCDE \arrow[urr, dashed, "\mathrm{trans}"] & & &
\end{tikzcd}
$$

$AB\to BD$, $AB\to BCD$, $AB\to BCDE$ и $AB\to CDE$

Пълнота на аксиомите на Armstrong

- **Теорема:**
  Аксиомите на Армстронг са надеждни и пълни.

Еквивалентна дефиниция на F^+

- Следствие:
  Нека *F* е множество от FD's.
  F⁺* - Обвивка на *F е множество от FD's $\{X \to Y \mid X \to Y$ могат да бъдат извлечени от *F* чрез аксиомите на Армстронг$\}$
  - Кои зависимости принадлежат на обвивката на множеството F от предходния пример?

Намиране на F^+

F

$AB \to C$

union $AB \to BCD$

$A \to D \xrightarrow{\text{aug}} AB \to BD$

trans $AB \to BCDE \xrightarrow{\text{decomp}} AB \to CDE$

$D \to E \xrightarrow{\text{aug}} BCD \to BCDE$

$\boldsymbol{AB \to BD,\ AB \to BCD,\ AB \to BCDE}$ **и** $\boldsymbol{AB \to CDE}$

са елементи на F^+

Обвивка на атрибут

Def. Обвивка на атрибута (множество от атрибути) X се нарича множеството от атрибути X^+ :

$$X^+ = \cup \{ Y \mid X \to Y \in F^+ \}$$

- Функционалната зависимост $X \to Y$ е от F (следва от правилата на Армстронг) само ако $Y \subseteq X^+$

Пълнота (soundness) на аксиомите Armstrong

- **Лема:** Нека *F* е множество от FD's. Функционалната зависимост $X \to Y$ е от *F* (следва от правилата на Армстронг) само ако $Y \subseteq X^+$

- **Теорема:** Аксиомите на Армстронг са надеждни и пълни

Обвивка на атрибут

- Обвивката X^+ на X е максималният атрибут, за който $X \to X^+$ е от F^+
- $X \subseteq X^+$
- Намиране на обвивка

```
closure:= X;
repeat until there is no change {
        if there is an fd U → V in F
              such that U is in closure
                then add V to closure}
```

Алгоритъм за намиране на обвивка

Намиране на обвивката на $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$

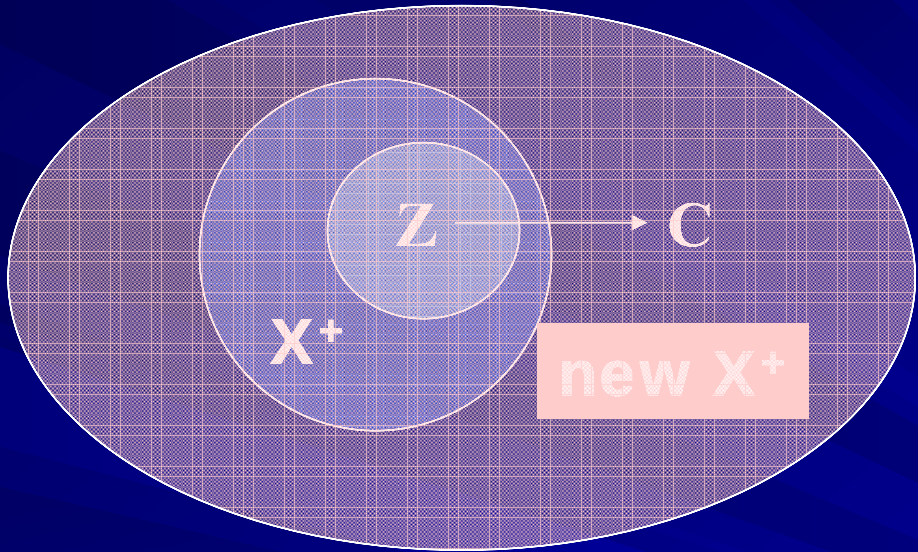
1. Нека променливата **X** представлява м-во от атрибути, което ще се разшири до обвивката на $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$. Първоначално $X = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$
2. Търсим FD $(Z \rightarrow C)$

   $B_1 B_2 \ldots B_m \rightarrow C$, такава че

   $B_1 B_2 \ldots B_m \subseteq X$, но $C \,!\subseteq X$

   Ако съществува такава ***FD****, C се добавя към X*
3. Ст.2 се повтаря докато има **FD**, които позволяват включване на атрибут в X.
4. След завършване - **X** съдържа $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}^+$

Намиране на X^+



$? \; Z \to C$

Пример: обвивка на атрибут

$$AB \rightarrow C \quad \text{(a)}$$
$$A \rightarrow D \quad \text{(b)}$$
$$D \rightarrow E \quad \text{(c)}$$
$$AC \rightarrow B \quad \text{(d)}$$

$\{AB\}^+$???

Решение:

$\{AB\}^+ = \{AB\}$

(a) $\{AB\}^+ = \{ABC\}$

(b) $\{AB\}^+ = \{ABCD\}$

(c) $\{AB\}^+ = \{ABCDE\}$

Намиране на всички функционални зависимости

Проверка дали една FD $A_1A_2\ldots A_n \rightarrow B$ е част от м-во от функционални зависимости S

1. Намираме $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}^+$ като използваме S
2. Ако $B \in \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}^+$ то FD $A_1A_2\ldots A_n \rightarrow B$ следва от S
3. В противен случай B не следва от S

FD's и ключове

- Ако **R** е релационна схема с атрибути *A1. . .An* и м-во от функционални зависимости F и X $A_1, A_2, \ldots, A_n$, то казваме, че **X** е *ключ* на релацията R *ако*:
  - $X \rightarrow A_1, A_2, \ldots, A_n$
  - За никое Y <> 0, $Y \subseteq X$ не е вярно, че

    $Y \rightarrow A_1, A_2, \ldots, A_n$

Обвивки и ключове

$\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}^+$ е множеството от всички атрибути на релацията R

тогава и само тогава, когато

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ суперключ за тази релация.

Обосновка на алгоритъм за намиране на обвивка

- Алгоритъмът за намиране на обвивката на атрибут (м-во от атрибути) намира само верни FD's
- Алгоритъмът за намиране на обвивката на атрибут (м-во от атрибути) намира всички верни FD's

Намиране на “скрити” FD’s

- Мотивация : “нормализация,” процес на разбиване на релационната схема на 2 или повече схеми
- Пример: *ABCD* с FD’s

  AB ->C, *C ->D*, and *D ->A*.

  – Да разделим ли на *ABC*, *AD*. Какви FD’s има в *ABC* ?

Еквивалентност на м-ва от FD's

Def. Две множества от FD's, F и G, са *еквивалентни* ако $F^+ = G^+$

Пример:

$\{AB \rightarrow C, A \rightarrow B\}$ и

$\{A \rightarrow C, A \rightarrow B\}$ са еквивалентни.

Def. Всяко м-во от FD's, еквивалентно на F^+, се нарича *покритие* на F

- F^+ с-жа голям брой FD's
- Малки еквиваленти множества

Минимално покритие

Def. Множеството от FD's F е *минимално* ако:

1. Всяка FD от F е във вида $X \to A$, където A е единичен атрибут

2. За никоя FD $X \to A$ от F, множеството $F - \{X \to A\}$ не е еквивалентно на F.

3. За никоя $X \to A$ от F и $Z \subseteq X$, множеството

$F - \{X \to A\} \cup \{Z \to A\}$ не е еквивалентно на F.

Минимално покритие

Теорема

Всяко множество FD's *F* е еквивалентно на някакво минимално множество *F*!