1

Локални екстремуми на функции на няколко променливи

Определение 1 Нека $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ е околност на x^0 (т.е. $\mathcal{U}$ е отворено кълбо с център x^0) и $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$.

Казваме, че $f(x)$ има локален минимум в x^0, ако съществува околност $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}$ на x^0, такава че при $x \in \mathcal{U}_1$ да имаме $f(x) \geqq f(x^0)$.

Казваме, че $f(x)$ има локален максимум в x^0, ако съществува околност $\mathcal{U}_2 \subset \mathcal{U}$ на x^0, такава че при $x \in \mathcal{U}_2$ да имаме $f(x) \leqq f(x^0)$.

Локалните минимуми и локалните максимуми се наричат общо локални екстремуми.

Определение 2 Казваме, че $a \in \mathbb{R}^n$ е стационарна точка на $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, ако

$$f'_{x_1}(a) = f'_{x_2}(a) = \ldots = f'_{x_n}(a) = 0,$$

т.е. ако всичките първи частни производни на f се анулират в a.

Да отбележим, че съгласно теоремата на Ферма, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ достига локалните си екстремуми само в стационарни точки или в точки, в които някоя (поне една) от първите частни производни на $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ не съществува.

Теорема 1 Нека $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ е околност на x^0 и $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ има непрекъснати втори частни производни в $\mathcal{U}$, като $f'_{x_1}(x^0) = f'_{x_2}(x^0) = \ldots = f'_{x_n}(x^0) = 0$, т.е. x^0 е стационарна точка на f. Нека

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} f''_{x_1 x_1}(x^0) & f''_{x_1 x_2}(x^0) & \ldots & f''_{x_1 x_k}(x^0) \\ f''_{x_2 x_1}(x^0) & f''_{x_2 x_2}(x^0) & \ldots & f''_{x_2 x_k}(x^0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f''_{x_k x_1}(x^0) & f''_{x_k x_2}(x^0) & \ldots & f''_{x_k x_k}(x^0) \end{vmatrix}, \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

Тогава: а) ако $\Delta_k > 0$ за $k = 1, 2, \dots n$, то $f(x_1, x_2, \dots x_n)$ има лок. минимум в x^0;

б) ако $(-1)^k \Delta_k > 0$ за $k = 1, 2, \dots n$, то $f(x_1, x_2, \dots x_n)$ има лок. максимум в x^0.

В $\mathbb{R}^2$ (т.е. при $n = 2$) Теорема 1 може да бъде уточнена:

Теорема 2 Нека $x^0 \in \mathbb{R}^2$, $U \subset \mathbb{R}^2$ е околност на x^0 (т.е. U е отворен кръг с център x^0) и $f: U \to \mathbb{R}$ има непрекъснати втори частни производни в U, като $f'_{x_1}(x^0) = f'_{x_2}(x^0) = 0$. Нека

$$\Delta = \begin{vmatrix} f''_{x_1x_1}(x^0) & f''_{x_1x_2}(x^0) \\ f''_{x_2x_1}(x^0) & f''_{x_2x_2}(x^0) \end{vmatrix}.$$ Тогава:

а) ако $\Delta > 0$ и $f''_{x_1x_1}(x^0) > 0$, то $f(x_1, x_2)$ има лок. минимум в x^0;

б) ако $\Delta > 0$ и $f''_{x_1x_1}(x^0) < 0$, то $f(x_1, x_2)$ има лок. максимум в x^0;

в) ако $\Delta < 0$, то $f(x_1, x_2)$ няма лок. екстремум в x^0.

Допълнението тук в сравнение с Теорема 1 е в).

Теорема за равенство на смесените производни

Ако $x^0 \in \mathbb{R}^n$, а $f''_{x_ix_j}$ и $f''_{x_jx_i}$ $(i \neq j)$ съществуват в околност на x^0 и са непрекъснати в x^0, то

$$f''_{x_ix_j}(x^0) = f''_{x_jx_i}(x^0) \quad (\text{да подчертаем: } i \neq j).$$

С други думи смесените частни производни са равни във всички точки, в които са непрекъснати.

Да отбележим още и че понякога се използват и следните алтернативни означения:

$$f'_{x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad f''_{x_ix_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \quad f''_{x_ix_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

В задачите по-долу ще използваме основно Теорема 2.

Задача 1 Намерете локалните екстремуми на функцията: а) $f(x,y)=x^3-y^3-3x+3y$

Решение на а): $f(x,y)$ има непрекъснати частни производни от произволен ред в $\mathbb{R}^2$. Тогава, както вече отбелязахме, $f(x,y)$ достига локалните си екстремуми само в своите стационарни точки.

Затова първо да намерим стационарните точки на $f(x,y)$. По определение те са решенията на системата $\begin{cases} f'_x=0 \\ f'_y=0 \end{cases}$.

Имаме, че $f'_x=3x^2-3$, $f'_y=-3y^2+3$ и

$$\begin{cases} f'_x=0 \\ f'_y=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2=1 \\ y^2=1 \end{cases} \qquad (1,1),(1,-1),(-1,1),(-1,-1)$$

Стационарните точки на $f(x,y)$ са $(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,1)$ и $(-1,-1)$ и само в тях $f(x,y)$ може да има лок. екстремум. За да видим има ли, към всяка от тези 4 стационарни точки ще приложим Теорема 2.

Имаме, че $f''_{xx}=6x$, $f''_{xy}=f''_{yx}=0$ (смесените частни производни са непрекъснати в $\mathbb{R}^2$ и значи са равни помежду си в $\mathbb{R}^2$, както се вижда в случая и директно), $f''_{yy}=-6y$.

$$\Delta=\begin{vmatrix} 6x & 0 \\ 0 & -6y \end{vmatrix}=-36xy.$$ Сега използваме Теорема 2:

1) за точката $(1,1)$:

$\Delta(1,1)=-36<0 \Longrightarrow f(x,y)$ няма лок. екстремум в $(1,1)$;

2) за точката $(1,-1)$:

$\Delta(1,-1) = 36 > 0$ и $f''_{xx}(1,-1) = 6 > 0 \Rightarrow f(x,y)$ има лок. минимум в $(1,-1)$;

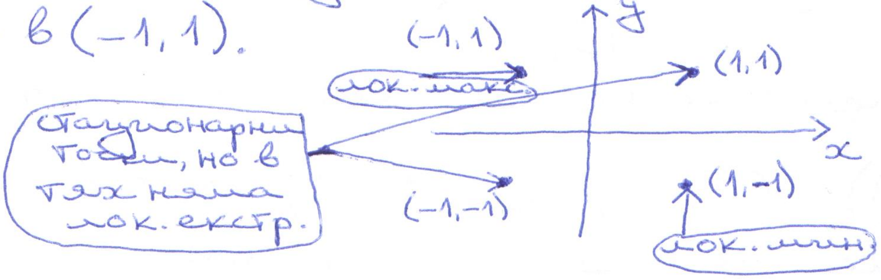
3) за точката $(-1,1)$:

$\Delta(-1,1) = 36 > 0$ и $f''_{xx}(-1,1) = -6 < 0 \Rightarrow f(x,y)$ има лок. максимум в $(-1,1)$;

4) за точката $(-1,-1)$:

$\Delta(-1,-1) = -36 < 0 \Rightarrow f(x,y)$ няма лок. екстремум в $(-1,-1)$.

Отговор на а): $f(x,y)$ има лок. мин. в $(1,-1)$ и лок. макс. в $(-1,1)$.



б) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4(x-y)^2$

Решение на б): $f(x,y)$ има непрекъснати частни производни от произволен ред в $\mathbb{R}^2$.

Тогава $f(x,y)$ достига локалните си екстремуми само в свои стационарни точки.

Имаме, че $f'_x = 4x^3 - 8(x-y)$, $f'_y = 4y^3 + 8(x-y)$,

$$\left| \begin{array}{l} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{array} \right. \iff \left| \begin{array}{l} x^3 = 2(x-y) \\ y^3 = 2(y-x) \end{array} \right\} + \iff \left| \begin{array}{l} x^3 = 2(x-y) \\ x^3 + y^3 = 0 \end{array} \right. \iff$$

$$\iff \left| \begin{array}{l} x^3 = 2(x-y) \\ x^3 = (-y)^3 \end{array} \right. \iff \left| \begin{array}{l} x^3 = 4x \\ x = -y \end{array} \right. \iff \left| \begin{array}{l} x(x^2-4) = 0 \\ y = -x \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (0,0) \\ (2,-2) \\ (-2,2) \end{array}$$

Стационарните точки на $f(x,y)$ са $(0,0)$, $(2,-2)$ и $(-2,2)$ и само в тях $f(x,y)$ може да има лок. екстремуми.

За да видим има ли наистина, към всяка от тези точки ще приложим Теорема 2.
Имаме, че $f''_{xx}=12x^2-8$, $f''_{xy}=f''_{yx}=8$,
$f''_{yy}=12y^2-8$ и $\Delta=\begin{vmatrix}12x^2-8 & 8\\ 8 & 12y^2-8\end{vmatrix}=$

$=(12x^2-8)(12y^2-8)-64=16\left[(3x^2-2)(3y^2-2)-4\right]$.

Сега използваме Теорема 2:

1) за точката $(2,-2)$:

$\Delta(2,-2)=16.[10.10-4]=16.96>0$ и $f''_{xx}(2,-2)=40>0$

$\Rightarrow f(x,y)$ има локален минимум в $(2,-2)$;

2) за точката $(-2,2)$:

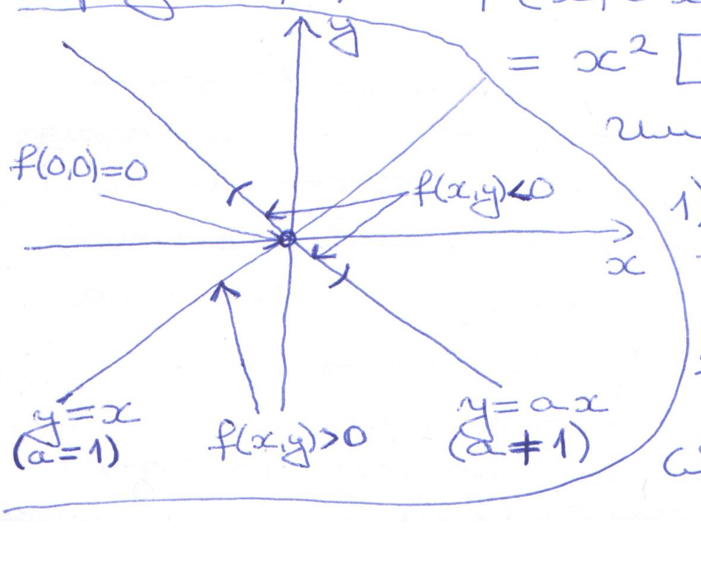
$\Delta(-2,2)=16.[10.10-4]=16.96>0$ и $f''_{xx}(-2,2)=40>0$

$\Rightarrow f(x,y)$ има локален минимум в $(-2,2)$;

3) за точката $(0,0)$:

$\Delta(0,0)=16.[4-4]=0$

Теорема 2 не дава отговор за $(0,0)$.
За да видим какво става в $(0,0)$, ще изследваме $f(x,y)$ по всевъзможните прави през $(0,0)$: $f(x,ax)=x^4+a^4x^4-4(x-ax)^2=$
$=x^2\left[(1+a^4)x^2-4(1-a)^2\right]$.



Имаме, че $f(0,0)=0$ и:

1) при $a\neq 1$ $f(x,ax)<0$ за числа $x\neq 0$, достатъчно близки до 0;

2) при $a=1$ $f(x,x)=2x^4>0$ за $x\neq 0$.

Сл. $f(x,y)$ няма лок. екстремум в $(0,0)$.

Отговор на б): $f(x,y)$ има лок. мин. в $(2,-2)$ и в $(-2,2)$.

в) $f(x,y)=x^2y^3(6-x-y)$

Решение на в): $f(x,y)$ има непрекъснати частни производни от произволен ред в $\mathbb{R}^2$ и значи може да достига локалните си екстремуми само в своите стационарни точки.
Имаме, че $f(x,y)=6x^2y^3-x^3y^3-x^2y^4$, така че

$$f'_x=12xy^3-3x^2y^3-2xy^4=xy^3(12-3x-2y),$$
$$f'_y=18x^2y^2-3x^3y^2-4x^2y^3=x^2y^2(18-3x-4y),$$

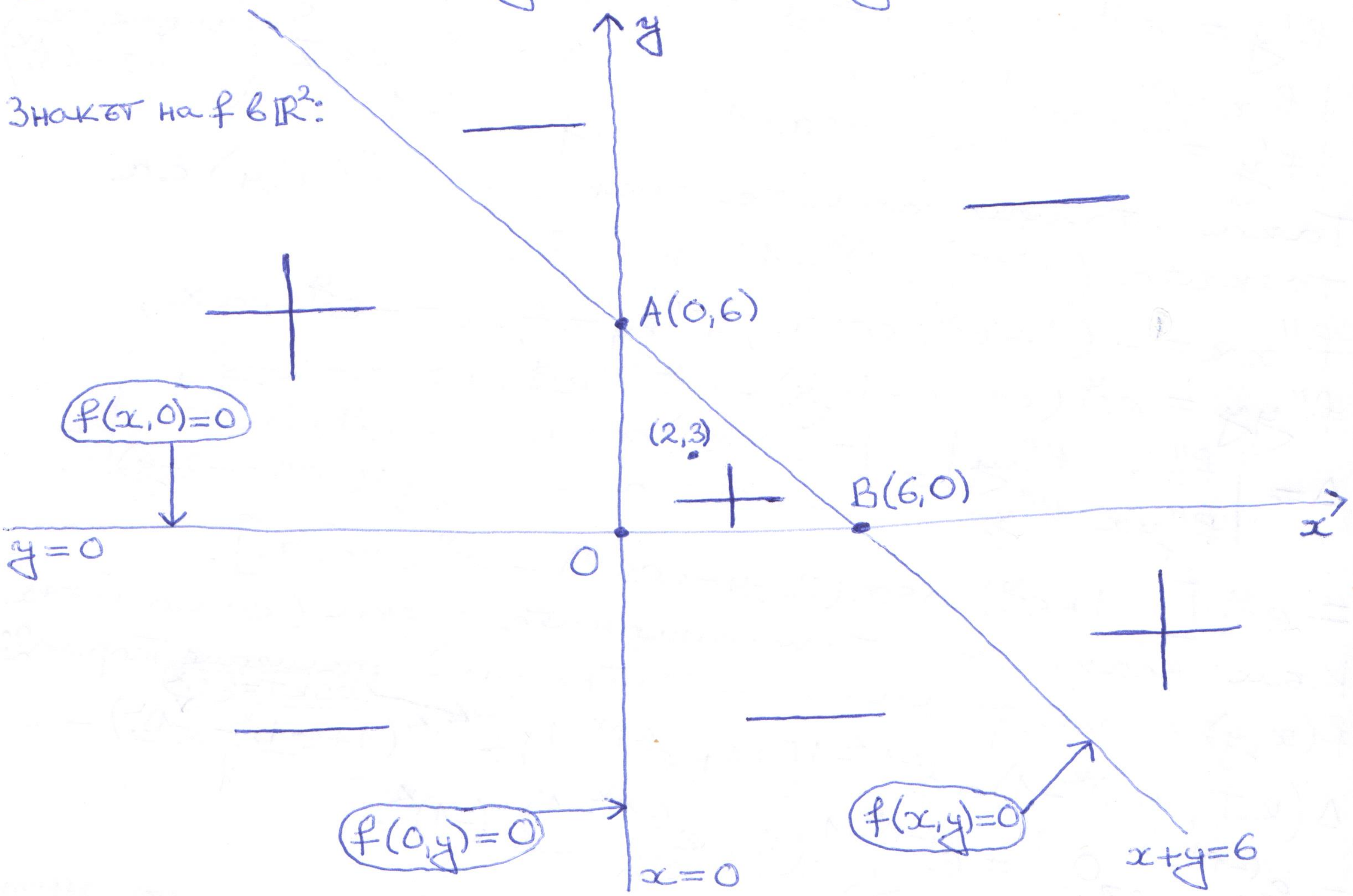
$$\left|\begin{array}{l} f'_x=0 \\ f'_y=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} xy^3(12-3x-2y)=0 \\ x^2y^2(18-3x-4y)=0 \end{array}\right.$$

Решенията на тази система са точките $(x,0)$ (това са точките от абсцисната ос), точките $(0,y)$ (това са точките от ординатната ос) и решението на системата

$$\left|\begin{array}{l} 3x+2y=12 \\ 3x+4y=18 \end{array}\right\}- \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 3x+2y=12 \\ 2y=6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x=2 \\ y=3 \end{array}\right., \text{ т.е. точката } (2,3).$$

И така, стационарните точки на $f(x,y)$ са точките $(x,0)$, $x\in\mathbb{R}$, точките $(0,y)$, $y\in\mathbb{R}$ и точката $(2,3)$ и само в тях $f(x,y)$ може да има локален екстремум.
Интересното в тази задача е, че за да видим какво става в стационарните точки, няма нужда да използваме Теорема 2, а са достатъчни само прости и нагледни геометрични съображения.
Нещо повече – оказва се, че Теорема 2 не дава отговор за точките $(x,0)$ и $(0,y)$, защото $\Delta(x,0)=\Delta(0,y)=0$ (проверете!).
Значи, даже и да искаме, не можем да използваме Теорема 2, освен за точката $(2,3)$.

За да видим какво става в стационарните точки на $f(x,y)$, ще забележим, че $f(x,y)$ се анулира по правите $x=0$, $y=0$ и $x+y=6$ и че знакът на $f(x,y)$ в $\mathbb{R}^2$ е следния:



От тази рисунка виждаме какво става в стационарните точки, т.е. в точките $(x,0)$, $(0,y)$ и $(2,3)$.

Отговор на в):

$f(x,y)$ няма локален екстремум в точките $(x,0)$;

$f(x,y)$ има локален максимум в точките $(0,y)$ при $y<0$ и при $y>6$;

$f(x,y)$ има локален минимум в точките $(0,y)$ при $0<y<6$;

$f(x,y)$ няма локален екстремум в точката $(0,6)$;

$f(x,y)$ има локален максимум в точката $(2,3)$ (защото $f(2,3)=\max\limits_{\Delta AOB} f$).