Неразложими полиноми

Опр. A – област на цялост, $f \in A[x]$ и $\boxed{\deg f > 0}$

f е неразложим полином (над A), ако не може да се представи като произведение на два полинома от по-ниски степени.

т.е. ако $f = gh \overset{g,h \in A[x]}{\Longrightarrow} \begin{cases} \deg g = \deg f \text{ или } \deg h = \deg f \\ \Updownarrow \\ \deg h = 0 \text{ или } \deg g = 0 \end{cases}$

Примери

1) $\deg f = 1$

$f = g \cdot h \Rightarrow 1 = \deg f = \deg g + \deg h$

$\Rightarrow \{\deg g, \deg h\} = \{1, 0\}$

Всеки полином от ст. 1 е неразложим.

$x^2+1 \in \mathbb{R}[x]$ неразложим	$x^2+1 \in \mathbb{C}[x]$ $x^2+1 = (x+i)(x-i)$
$x^3-3 \in \mathbb{Q}[x]$ неразложим	$x^3-3 \in \mathbb{R}[x]$ $x^3-3 = (x-\sqrt[3]{3})(x^2+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9})$

Св-ва   F - поле

1) Нека g - неразл. $g \in F[x]$, $f \in F[x]$

$d = (g, f) = \begin{cases} 1, & g \nmid f \\ g, & g \mid f \end{cases}$

2) g - неразл.

$g \mid f_1 \cdot f_2 \Rightarrow g \mid f_1$ или $g \mid f_2$

ако реш. ее $g \nmid f_1 \Rightarrow (g, f_1) = 1$

$\Rightarrow g \mid f_1 f_2 \Rightarrow g \mid f_2$

3) g - неразлож.

$h \mid gf$ и $g \nmid h \Rightarrow h \mid f$

Тв F – поле $\quad I \triangleleft F[x]$

$$I \triangleleft_{max} F[x] \iff I = (g), \quad g \text{ – неразложим}$$

Д-во $\Rightarrow$ $I \triangleleft_{max} F[X]$, $I = (g)$

и допускаме, g – разложим $\quad g = h_1 h_2$

$0 < \deg h_i < \deg g$

$g \nmid h_1$ и $h_1 \notin (g) = I$

$J = I + (h_1) \neq I \triangleleft_{max} F[X]$

$\Rightarrow J = F[X] \Rightarrow 1 \in J \Rightarrow 1 = gt + h_1 l$

$\Rightarrow$ НОД$(g, h_1) = 1$ от $g = h_1 h_2 \Rightarrow (g, h_1) = h_1$

$\Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow$ g е неразложим

$\Leftarrow$ Ако g – неразл. $\quad I = (g) \subsetneq J \triangleleft F[X]$

$J = (t) \Rightarrow t \notin I \Rightarrow g \nmid t \Rightarrow$ НОД$(g, t) = 1 = \underbrace{ug}_{\in I} + \underbrace{vt}_{\in J} \in J$

$\Rightarrow J = F[X] \Rightarrow I \ max \triangleleft$

Св-во

$I \triangleleft_{max} K$

$\Updownarrow$

K/I е поле

I/ F - поле, $f \in F[x]$, $\deg f \geq 1$. Тогава $\exists\, g_1 \dots g_k$ неразложими $\in F[x]$

$f = g_1 \cdot \ldots \cdot g_k$.

Ако освен това $f = h_1 \dots h_s$ (h_i - неразл. $\in F[x]$)

$\Rightarrow k = s$ и след преномериране

$g_i = \alpha_i h_i$ $i = 1, \dots, k$, $\alpha_i \in (F[x])^*$ ($\deg \alpha = 0$)

и $\alpha_1 \dots \alpha_k = 1$

$\exists$ (индукция $\deg f$

$\deg f = 1$ $\Rightarrow$ f - неразл. $\Rightarrow$ ок (един множител)

Нека е изпълнено за $\forall f$: $\deg f < n$

Нека $\deg f = n$

I сл — f - неразложим $\rightarrow$ $f = f$ (1 - множител)

II сл f - разложим $\Rightarrow$ $f = t \cdot l$ $0 < \deg t < \deg f$

по инд. за t и за l : $t = g_1 \dots g_r$, $l = g_{r+1} \dots g_p$ нераз.

$\Rightarrow f = g_1 \dots g_p$

$f = g_1 \dots g_k = h_1 \dots h_s$, g_i, h_j неразложими

$g_k \mid h_1 \dots h_s \Rightarrow \exists i: \; g_k \mid h_i$ преномерираме

$g_k \mid h_s \Rightarrow \deg g_k = \deg h_s$

$\Rightarrow \exists \alpha_k \in (F[x])^* : \; \alpha_k g_k = h_s$

$g_1 \dots g_k = h_1 \dots \underbrace{h_s}_{\alpha_k g_k} \longrightarrow g_1 \dots g_{k-1} = \alpha_k (h_1 \dots h_{s-1})$

и т. н. Не е възможно $k \neq s$

(ако доп. че $k < s \Rightarrow 1 = h_1 \dots h_{s-k} \alpha_k \dots \alpha_1$

противоречие със степените)

$\Rightarrow \underline{k = s}$ след преномериране

$h_i = \alpha_i g_i$ и $1 = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k$