Контролно 2 - задача 3

$\{X_n\}_{n=1}^{\infty} : X_n \in U(0,1)$ - независими в съвкупност

$\{Y_n\}$ и $\{Z_n\}$: $Y_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$

$Z_n = f(n(1-Y_n))$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

строго растяща $\Rightarrow \exists f^{-1}$

а) Y_n, Z_n - разпр.

б) Да се докаже, че $Z_n \xrightarrow{d} Z$ и $F_Z(z) = ?$

Решение: Б.О.О. $y \in (0,1)$

$$F_{Y_n}(y) = P(Y_n < y) = P(\max\{X_1, \dots, X_n\} \leq y) = P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}(X_k \leq y)\right)$$

поради независимост $\Rightarrow F_{Y_n}(y) = \prod_{k=1}^{n} P(X_k < y) =$

$$\boxed{F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x, & x \in (0,1) \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}}$$

$$= \prod_{k=1}^{n} F_{X_k}(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0 \\ y^n, & y \in (0,1) \\ 1, & y \geq 1 \end{cases}$$

$$F_{Z_n}(z) = P(Z_n \leq z) = P(f(n(1-Y_n)) \leq z)$$

$$f(n(1-Y_n)) \leq z \iff n(1-Y_n) \leq f^{-1}(z)$$

$$\iff 1 - Y_n \leq \frac{f^{-1}(z)}{n}$$

$$\iff 1 - \frac{f^{-1}(z)}{n} \leq Y_n$$

$$F_{Z_n}(z) = P\left(Y_n \geq 1 - \frac{f^{-1}(z)}{n}\right) =$$

$$= 1 - P\left(Y_n < 1 - \frac{f^{-1}(z)}{n}\right) =$$

за достатъчно голямо n

$$= 1 - F_{Y_n}\left(1 - \frac{f^{-1}(z)}{n}\right) =$$

$$= 1 - \left(1 - \frac{f^{-1}(z)}{n}\right)^n$$

б) $\lim_{n\to\infty} F_{Z_n}(z) = \lim_{n\to\infty} 1-\left(1-\frac{f^{-1}(z)}{n}\right)^n = 1-e^{-f^{-1}(z)}$

$\Rightarrow Z_n \xrightarrow{d} Z \qquad F_Z(z) = 1-e^{-f^{-1}(z)}$

Контролно 2 – задача 4

$X_1, \dots, X_n$ – независими и еднакво разпределени

$P(X_i = k) = \frac{1}{m}, \quad k = 0, \dots, m-1$

$X = \sum_{k=1}^{n} X_k$

$F(x)$ – ф-я на разпределение за X

а) $G_X = ?$ → може да има на изпита

б) $\sum_{i=0}^{\infty} F(i)x^i, \quad |x|<1$

→ няма да е на изпита

Решение:

а) $g_{X_i}(x)$ – пораждащата функция на X_i

$$g_{X_i}(x) \overset{\text{o}}{=} \sum_{k=0}^{m-1} P(X_i = k) \cdot x^k = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{m} \cdot x^k = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} x^k = \frac{1}{m} \cdot \frac{1-x^m}{1-x}$$

$$\Rightarrow g_{X_i}(x) = \frac{1-x^m}{m(1-x)}$$

От $X_1, \dots, X_n$ – независими $\Rightarrow G_X(x) = \prod_{i=1}^{n} g_{X_i}(x) = \left(\frac{1-x^m}{m(1-x)}\right)^n$

$$G_X(x) = \left[\frac{(1-x^m)}{m(1-x)}\right]^n, \quad |x|<1$$

б) $\sum_{i=0}^{\infty} F(i) \cdot x^i \overset{\text{o}}{=} \sum_{i=0}^{\infty} P(X \le i) x^i = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} P(X = i-k) \cdot x^i = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} P(X = i-k) \cdot x^i =$

$\ell = i-k$
$i = \ell+k$

$$\boxed{\begin{aligned} P(X \le i) &= \sum_{k=0}^{\infty} P(X+k \le i) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P(X = i-k) \end{aligned}}$$

$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{\infty} P(X=\ell) \cdot x^{\ell+k} =$

$= \sum_{k=0}^{\infty} x^k \sum_{\ell=0}^{\infty} P(X=\ell) \cdot x^\ell =$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} x^k G_X(x) =$$

$$= \frac{G_X(x)}{1-x} =$$

$$= \frac{(1-x^m)^n}{m^n (1-x)^{n+1}}$$

Контролно 2 - Задача 5

Нека $n, k \in \mathbb{N}: 2 \le k \le n-1$

Доставчик получава n поръчки за час

$X_1, X_2, \dots, X_n \in U(0,1)$, независими поръчки

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & x \in (0,1) \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$$

Доставчикът може да изпълни само k-тата поръчка.

В кой момент от $(0,1)$ е нужно да подадем своята поръчка за да имаме максимална вероятност за изпълнението ѝ.

Решение:

$X_{(1)}, X_{(2)}, \dots X_{(n)}$ - вариационен ред (пренаредени по големина)

$$X_{(k)}: F_k(x) = P(X_{(k)} \le x) = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} F(x)^j (1-F(x))^{n-j}$$

$x \in (0,1)$

$X = \#$ сл. величини $X_1, \dots, X_n : \le x$, то $X \in Bi(n, F(x))$

$$P(X_{(k)} \le x) = P\left(\bigcup_{j=k}^{n} \{X=j\}\right) = \sum_{j=k}^{n} P(X=j) = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{k} F(x)^j (1-F(x))$$

$$f_k(x) = F_k'(x) = \left[\sum_{j=k}^{n} \binom{n}{i} x^j (1-x)^{n-j}\right]' =$$

$$= \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} j \cdot x^{j-1} \cdot (1-x)^{n-j} - \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} x^j (n-j)(1-x)^{n-1-j} =$$

$$= n\cdot \sum_{j=k}^{n} \binom{n-1}{j-1} x^{j-1}(1-x)^{n-j} - n\cdot\sum_{j=k}^{n}\binom{n-1}{j}x^{j}(1-x)^{n-1-j} =$$

$$= n\binom{n-1}{k-1}x^{k-1}(1-x)^{n-k} + n\left[\sum_{j=k+1}^{n}\binom{n-1}{j-1}x^{j-1}(1-x)^{n-j} - \sum_{j=k}^{n}\binom{n-1}{j}x^{j}(1-n)^{n-j-1}\right]$$

Нека $l = j-1$

$$\Rightarrow n\left[\sum_{l=k}^{n-1}\binom{n-1}{l}x^{l}(1-x)^{n-1-l} - \sum_{j=k}^{n-1}\binom{n-1}{j}x^{j}(1-x)^{n-1-j}\right] = 0$$

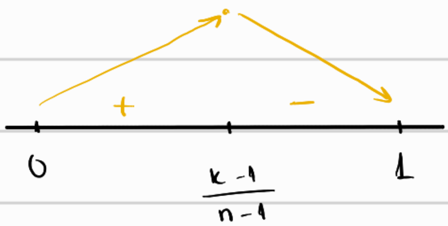
$$f_k(x) = n\binom{n-1}{k-1}x^{k-1}(1-x)^{n-k}, \quad x\in(0,1)$$

$$\underset{\overset{\|}{0}}{f_k'(x)} = n\binom{n-1}{k-1}\left[(k-1)x^{k-2}(1-x)^{n-k} - x^{k-1}(n-k)(1-x)^{n-k-1}\right] =$$

$$\underbrace{x^{k-2}}_{>0}\,\underbrace{(1-x)^{n-k-1}}_{>0}\left[(k-1)(1-x)-(n-k)x\right]$$

$$\Rightarrow 0 = (k-1)(1-x) - (n-k)x =$$
$$= (k-1) - \left[(k-1)+(n-k)\right]x =$$
$$= (k-1) - (n-1)x$$

$$x = \frac{k-1}{n-1}$$



За изпита (типове):

① $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c\,(x+y)^2, & 0<x<y<1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

a) $c = ?$, $f_X = ?$, $F = ?$

$$f_X(x) = \int_x^1 f(x,y)\,dy$$ – интегриране по другата променлива

$$F_X(x) = \int_0^x f(x,y)\,dy$$

б) $P(X \le 2Y)$, $E(X | Y = \frac{1}{2})$

Теорема

$$P(X \le 2Y) = P((x,y) \in A) = \iint\limits_A f(x,y)\,dx\,dy$$

$$A: \begin{cases} 0 \le x \le y < 1 & \text{– от условието} \\ x \le 2y & \text{– от } P(X \le 2Y) \end{cases}$$

от $y = \frac{1}{2}$

$$E(X | Y = \tfrac{1}{2}) = \int_{\mathbb{R}} x \cdot f_{X|Y}(x, \tfrac{1}{2})\,dx = \int_0^{1/2} x \cdot \frac{f_{X,Y}(x, \frac{1}{2})}{f_Y(1/2)}\,dx$$

(2) като 2-ра от контролното

Бейс + нормално разпределение

(3) като 3-та в опростен вариант

(4+5) – приложение на ЗГЧ може би

– ?