$$f_A(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ - & - & & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

$f_A(\lambda)$ е полином от степен n
старши коеф. $(-1)^n$
коеф. пред $\lambda^{n-1} \to (-1)^{n-1}(a_{11}+a_{22}+\dots+a_{nn})$
свободен коеф. $\to \det A$

Как намираме собствените вектори $\varphi: V \to V$ линеен

0) фиксира се базис $e_1, \dots e_n$ и се намира матр. A на φ

1) пресмятаме $f_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ характеристичния полином

2) Намират се корените на $f_A(\lambda) = 0$ (само корените от полето F)
нека $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ са различните корени от полето F

3) for $i = 1, \dots$ to s

3.1) $B_i = A - \lambda_i E$
3.2) решаваме хомогенна система с матрица B_i
3.3) всяко ненулево решение $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ задава собств. в-р $g = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$
$\varphi(g) = \lambda_i g$

Зад 11 Да се намерят собствените вектори на линеен оператор $\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, който има матр. спрямо стандартния базис e_1, e_2, e_3 (пр 1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -6 & -4 \\ 1 & -4 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Р-е

$$f_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -6 & -4 \\ 1 & -4-\lambda & -2 \\ -1 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -6 & -4 \\ 1 & -4-\lambda & -2 \\ 0 & -1-\lambda & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & -6 & -4 \\ 1 & -4-\lambda & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1-\lambda)\big((1-\lambda)(-4-\lambda) - 4 + 6 + 2(1-\lambda)\big) = (-1-\lambda)(\lambda^2+\lambda) = -\lambda(1+\lambda)^2$$

сл. $\lambda = 0$

$$B_1 = A - 0E = A = \begin{pmatrix} 1 & -6 & -4 \\ 1 & -4 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -6 & -4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -6 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

x_1	x_2	x_3
-2	-1	1

$\Rightarrow c = (-2, -1, 1)$ собствен $\quad \varphi(c) = 0 \cdot c = \mathcal{O}$

αc също собствени $\quad \varphi(\alpha c) = 0\alpha c = \mathcal{O}$

за $\alpha \neq 0$

2 сл./ $\lambda = -1$ (пр 2)

$$B_2 = A - (-1)E = \begin{pmatrix} 2 & -6 & -4 \\ 1 & -3 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

x_1	x_2	x_3
3	1	0
2	0	1

$c_1 = (3, 1, 0)$ $\quad \varphi(c_1) = -c_1$

$c_2 = (2, 0, 1)$ $\quad \varphi(c_2) = -c_2$

$\alpha c_1 + \beta c_2$ за $\alpha, \beta \neq 0, 0$ са всички собствени вектори за $\lambda = -1$

Забел. $c = (-2, -1, 1)$; $c_1 = (3, 1, 0)$ и $c_2 = (2, 0, 1)$ образуват базис на $\mathbb{R}^3$ спрямо него φ има матр. $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Пример // V - базис e_1, e_2, e_3, $\varphi: V \to V$ линеен матрица на φ е $A = \begin{pmatrix} -4 & 7 & 1 \\ -5 & 7 & 0 \\ 5 & -6 & 1 \end{pmatrix}$ Да се намерят собствените вектори на оператора φ.

$$f_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -4-\lambda & 7 & 1 \\ -5 & 7-\lambda & 0 \\ 5 & -6 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -4-\lambda & 7 & 1 \\ -5 & 7-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} -4-\lambda & 6 & 0 \\ -5 & 7-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left[(-4-\lambda)(7-\lambda)+30\right] =$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2-3\lambda+2) = -(\lambda-1)^2(\lambda-2)$$

I сл. // $\lambda = 2$

$$B_2 = \begin{pmatrix} -6 & 7 & 1 \\ -5 & 5 & 0 \\ 5 & -6 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

x_1	x_2	x_3
1	1	-1

$\to g_1 = e_1 + e_2 - e_3$

$g_1 = (1, 1, -1)$, $\varphi(g_1) = 2g_1$

αg_1 - собствени за $\alpha \neq 0$

II сл. $\lambda = 1$

$$B_1 = \begin{pmatrix} -5 & 7 & 1 \\ -5 & 6 & 0 \\ 5 & -6 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

x_1	x_2	x_3
6	5	-5

$g_2 = (6, 5, -5)$

$g_2 = 6e_1 + 5e_2 - 5e_3$

$\varphi(g_2) = g_2$ за αg_2 собствени за $\alpha \neq 0$

Опр./ $\varphi: V \to V$ и $\dim V = n$
ако φ има $\underline{\underline{n}}$ различни собствени стойности се казва, че φ е оператор с прост спектър

ТВ// $\varphi: V \to V$ $\dim V = n$
Ако φ е оператор с прост спектър, тогава съществува базис на V, който е съставен от собствени вектори за φ.

Д-во $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ различни собств. ст-ти
$\Rightarrow \exists\ g_1, \dots g_n$ собствени в-ри и $\varphi(g_i) = \lambda_i g_i$
$\Rightarrow g_1, \dots, g_n$ са ЛНЗ $\Rightarrow g_1 \dots g_n$ базис на V

спрямо базиса $g_1 \dots g_n$ φ има матрица $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$ диагонална

$D = T^{-1} A T$, T - матрица на прехода празна стр.

φ-инвариантно подпространство

Оп Нека $\varphi: V \to V$ линеен оператор и нека $\underline{\underline{U}}$ подпр-во на V. U се нарича φ-инвариантно подпространство, ако $\varphi(x) \in U, \forall x \in U$

Пример $\varphi: V \to V$ лин. оператор

- $Ker\varphi$ подпр-во на V и $\forall x \in Ker\varphi: \varphi(x) = \theta \in Ker\varphi$
  $\Rightarrow Ker\varphi$ е φ-инвариантно
- $Im\varphi$ - подпр-во на V и $\forall x \in Im\varphi: \varphi(x) \in Im\varphi$
  $\Rightarrow Im\varphi$ е φ-инвариантно
- Ако a - собствен в-р и $U = \ell(a)$
  $\Rightarrow \varphi(a) = \lambda a \in \ell(a)$ и $\varphi(\alpha a) = \alpha\lambda a \in U = \ell(a)$
  $\Rightarrow \ell(a)$ е φ-инвариантно
- **Зад:** Ако U и W са φ-инвариантни $\Rightarrow$ $\begin{matrix} U \cap W \\ U + W \end{matrix}$ също

Ако U е φ инвариантно, $\dim V < \infty$

Ако $e_1 \dots e_d$ - базис на U

$e_1, \dots e_d, e_{d+1}, \dots e_n$ базис на V

$\forall x \in U: \varphi(x) \in U \Rightarrow \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_d) \in U$

Матрицата на φ спрямо базиса $e_1, \dots, e_n$ има вид:

$$A = \left(\begin{array}{c|c} B & \\ \hline 0 \dots 0 & C \\ \dots & \\ 0 \dots 0 & \end{array} \right)$$

, където $B \in M_{d \times d}(F)$

B е матрица на $\varphi_{|U}$ спрямо $e_1 \dots e_d$

$\varphi_{|U} : U \rightarrow U$ е линеен оператор.

T// Нека V е линейно пространство над $\mathbb{R}$ (реалните числа) и $\varphi : V \to V$ е линеен оператор и $\dim V < \infty$. Тогава φ има едномерно или двумерно φ-инвариантно подпр-во.

<u>Д-во</u>// Нека $e_1, \dots, e_n$ - базис на V и A - матрицата на φ спрямо този базис

$f_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) \in \mathbb{R}[x]$

прилага се Основната Th на Алгебрата (учи се по „Алгебра 2")

$\Rightarrow f_A(\lambda) = 0$ има поне един корен, комплексно число

Нека λ_0 е корен на характеристичния полином

$f_A(\lambda_0) = \det(A - \lambda_0 E) = 0$

<u>Осн. Th на алгебрата</u>/ Всеки полином с комплексни коефициенти има поне един комплексен корен. $\Rightarrow$ (всички корени са в $\mathbb{C}$)

1сл.) $\lambda_0 \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda_0$ е собствена стойност за φ

$\Rightarrow \exists\, q$ - собствен вектор и $\varphi(q) = \lambda_0 q$

$\Rightarrow U = \ell(q)$ е φ-инвариантно подпр-во

2сл.) $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ и $\lambda_0 \notin \mathbb{R}$ Разглеждаме $W = \mathbb{C}^n$

и $\psi: W \to W$ линеен оператор, който има матр. $\underline{A}$

$\Rightarrow \lambda_0 \in \mathbb{C}$ е собствена ст-т на $\psi \Rightarrow \exists\, h \in W$ собств. вектор

$h = (a_1 + b_1 i, a_2 + b_2 i, \ldots, a_n + b_n i) = \underbrace{(a_1, \ldots, a_n)}_{a} + \underbrace{(b_1, \ldots, b_n)}_{b} i$

$A h^t = \lambda_0 h^t$, $\lambda_0 = \mu + \nu i \quad (\mu, \nu \in \mathbb{R})$

$A(a + bi)^t = (\mu + \nu i)(a + bi)^t = \mu a^t - \nu b^t + (\mu b^t + \nu a^t) i$

$A a^t + i A b^t = \mu a^t - \nu b^t + i(\mu b^t + \nu a^t)$

$\begin{cases} A a^t = \mu a^t - \nu b^t \\ A b^t = \mu b^t + \nu a^t \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} c = a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n \in V \\ d = b_1 e_1 + \cdots + b_n e_n \in V \end{array} \Rightarrow U = \ell(c, d)$

$\begin{cases} \varphi(c) = \mu c - \nu d \in U \\ \varphi(d) = \mu d + \nu c \in U \end{cases} \Rightarrow U$ е φ-инвариант.

празна ст.