Полиноми на n променливи

$f \in A[x_1,\dots,x_n]$; A - област на цялост с 1

$\sigma \in S_n$ (симетричната действа в $A[x_1,\dots,x_n]$)

$$\sigma(f) = f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)})$$

Пример $f = x_1^2 + x_1x_3 + x_2^2$

$\sigma = (1,2,3)$; $\sigma(f) = x_2^2 + x_2x_1 + x_3^2$

Опр. $f \in A[x_1,\dots,x_n]$ е симетричен, когато $\forall \sigma \in S_n$ е изпълнено

$$\sigma(f) = f$$

Забел. f е симетр. когато е неподвижен елемент под действието на S_n. (орбита с дължина 1)

$\alpha = a x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}$

$\beta = b x_1^{s_1} \cdots x_n^{s_n}$

$\alpha > \beta$ // когато $\exists t$:

$k_1 = s_1, \dots, k_{t-1} = s_{t-1}$

$k_t > s_t$

$(k_1 \dots k_n) > (s_1, \dots, s_t)$

Св-во / Нека f - симетричен

$\alpha = a x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}$ е едночлен на f

$\Rightarrow$ всичките едночл. $a\, x_{\sigma(1)}^{k_1} \cdots x_{\sigma(n)}^{k_n}$ участват в f

Св-во / A - област на цялост $A[x_1, \dots, x_n]$

Сумата, разликата и произведението на симетрични полиноми също са симетрични полиноми

$(\forall \sigma \in S_n : \sigma(f \pm g) = \sigma(f) \pm \sigma(g)$ и $\sigma(fg) = \sigma(f)\sigma(g))$

Св-во Мн-во от всички симетрични полиноми на $A[x_1, \dots, x_n]$ е пръстен.

$f = \sum x_1^4 x_2^3 x_3^2$

$x_1^4 x_2^3 x_3^2 + x_1^2 x_2^4 x_3^3 + x_1^2 x_2^3 x_3^4 + \dots$

колко са събираемите в f? за 3 пром. 6

за n променливи $(n > 3)$ $\binom{n}{3} \cdot 6$

Осн. Тh.|| Нека A - област на цялост с 1

$f \in A[x_1, \dots, x_n]$ и f - симетричен полином.

Тогава съществува единствен полином $g \in A[x_1, \dots, x_n]$ такъв че:

$$f(x_1, \dots, x_n) = g(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$$

елементарни симетрични полиноми

$\sigma_1 = x_1 + x_2 + \dots + x_n$

$\sigma_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n$

($\binom{n}{2}$ събираеми в σ_2)

$\sigma_3 = x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + \dots + x_{n-2} x_{n-1} x_n$

$\vdots$

$\sigma_n = x_1 x_2 \dots x_n$

Д-во| $\boxed{\text{Помощна лема}}$

За f - симетр. полином, $\alpha = a x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$ е старшия (главния) едночлен на f

Тогава: $\boxed{k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_n}$

Д-во: α е едночлен от $f \Rightarrow \forall \varphi \in S_n$: $\varphi(\alpha)$ едночл. на f

$\alpha > \varphi(\alpha) \quad \forall \varphi \in S_n$

Ако допуснем $k_s < k_{s+1} \Rightarrow$ правим $\tau = (s, s+1)$

$\tau(\alpha) = a x_1^{k_1} \dots x_s^{k_{s+1}} x_{s+1}^{k_s} \dots x_n^{k_n}$

$\Rightarrow \tau(\alpha) > \alpha$ - противоречие $\Rightarrow k_s \geq k_{s+1} \quad \forall s$

$\exists$ f - симетричен $\qquad \alpha = a\,x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$ главен едночлен $\qquad k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_n$

гл. едн.

$\sigma_1 = \sum x_i \to x_1$

$\sigma_2 = \sum x_i x_j \to x_1 x_2$

$\sigma_3 = \sum x_i x_j x_s \to x_1 x_2 x_3$

$\vdots$

$\sigma_{n-1} \to x_1 \dots x_{n-1}$

$\sigma_n = x_1 \dots x_n \to x_1 x_2 \dots x_n$

$\sigma_1^{k_1-k_2} \to x_1^{k_1-k_2}$

$\sigma_2^{k_2-k_3} \to x_1^{k_2-k_3} x_2^{k_2-k_3}$

$\sigma_3^{k_3-k_4} \to x_1^{k_3-k_4} \cdot x_2^{k_3-k_4} x_3^{k_3-k_4}$

$\vdots$

$\sigma_{n-2}^{k_{n-2}-k_{n-1}} \to$

$\sigma_{n-1}^{k_{n-1}-k_n} \to x_1^{k_{n-1}-k_n} x_2^{k_{n-1}-k_n} \dots x_{n-1}^{k_{n-1}-k_n}$

$\sigma_n^{k_n} \to x_1^{k_n} x_2^{k_n} \dots x_n^{k_n}$

умножаваме ги

$a\sigma_1^{k_1-k_2} \sigma_2^{k_2-k_3} \dots \sigma_{n-1}^{k_{n-1}-k_n} \sigma_n^{k_n} \to x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$

$$\boxed{t_1 = a\sigma_1^{k_1-\sigma_2} \sigma_2^{k_2-k_3} \dots \sigma_{n-1}^{k_{n-1}-k_n} \sigma_n^{k_n}}$$

f и t_1 симетрични; имат равни главни едночлени

f, t_1 $\quad f_1 = f - t_1$ $\quad f_1$ симетричен

гл. едночлен на f_1 лекс. е по-малък от гл. едночлен на f

α_1 - гл. едночлен на f_1

$\alpha > \alpha_1$

Същата процедура се прави за f_1

t_2 : едночлен на $\sigma_1, \dots \sigma_n$, такъв че t_2 и f_1 сравн. главни едночлени

$f_2 = f_1 - t_2$ - симетр. с гл. едночлен α_2

$\alpha > \alpha_1 > \alpha_2$

$\vdots$

след краен брой стъпки стигаме до $\underline{\underline{0}}$

$\alpha = a x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} f_1 = f - t_1 \\ f_2 = f_1 - t_2 \\ \vdots \\ f_p = f_{p-1} - t_p = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f = t_1 + t_2 + \dots + t_p$$

$(k_1, k_2, \dots k_n)$

краен брой вектори

$(s_1, s_2, \dots s_n)$

$s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_n$

$(k_1, \dots k_n) > (s_1 \dots s_n)$

$\underline{(k_1+1)^n}$ $\quad \underline{\max}$

Единственост!

Нека g_1, g_2 :

$g_1(\sigma_1 \dots \sigma_n) = f(x_1, \dots, x_n) = g_2(\sigma_1 \dots \sigma_n)$

$\Rightarrow g_1(\sigma_1 \dots \sigma_n) - g_2(\sigma_1 \dots \sigma_n) = 0$

Ще док.! че не съществ. ненулев полином $g(y_1, \dots y_n)$: $g(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = 0$

$M_n = \{ g \in A[y_1, \dots y_n] \mid g(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = 0 \}$ като полином на $x_1, \dots x_n$

$0 \in M_n = \{0\}$

Индукция по n | Допускаме, че $M_{n-1} = \{0\}$

$n = 1$ $g \in A[y_1]$

$\sigma_1^{(1)} = x_1$ $g(y_1)$ -

$g(\sigma_1^{(1)}) = g(x_1) = 0$

$\Rightarrow g(y_1) = 0$

$\Rightarrow M_1 = \{0\}$

Разглеждаме M_n

Допускаме, че $\exists\, g(y_1, \dots y_n) \neq 0;\ g \in M_n$

Нека измежду всички ненулеви на M_n вземем ~~g~~ g да бъде от min степен

$g(y_1, \dots y_n) = \boxed{a_0(y_1, \dots, y_{n-1})} + a_1(y_1 \dots y_{n-1}) y_n + \dots + a_s(y_1, \dots y_{n-1}) y_n^s$

$a_0(y_1 \dots y_{n-1}) \overset{?}{=} 0$, $\neq 0$ 2 случая

$g = a_0(y_1 \dots y_{n-1}) + a_1(y_1 \dots y_{n-1}) y_n + \dots + a_s(y_1 \dots y_{n-1}) y_n^s.$

I сл. $a_0(y_1, \dots, y_{n-1}) = 0$

$g = y_n (a_1 + a_2 y_n + \dots + a_s y_n^{s-1})$

$0 = \underbrace{\sigma_n}\cdot\underbrace{(a_1 + a_2 \sigma_n + \dots + a_s \sigma_n^{s-1})}$

в $A[x_1, \dots, x_n]$ няма делители на 0

$\Rightarrow$ противоречие (не е възможен този сл.)

II сл. $a_0(y_1, \dots, y_{n-1}) \neq 0$

$(*)$ $0 = a_0(\sigma_1^{(n)} \dots \sigma_{n-1}^{(n)}) + a_1(\sigma_1 \dots \sigma_{n-1}) \sigma_n + \dots + a_s(\sigma_1 \dots \sigma_{n-1}) \sigma_n^s$

$\sigma_1^{(n)} = x_1 + \dots + x_n \qquad \sigma_1^{(n-1)} = x_1 + \dots + x_{n-1}$

$\sigma_k^{(n)}$ заместим $x_n = 0 \rightarrow \sigma_k^{(n-1)}$

$\sigma_n^{(n)}$ —— || —— $= 0$

заместване с $x_n = 0$

$0 = a_0(\sigma_1^{(n-1)}, \dots, \sigma_{n-1}^{(n-1)})$

$\Rightarrow a_0(y_1, \dots, y_{n-1}) \in M_{n-1} = \{0\}$

$a_0(y_1, \dots, y_{n-1}) = 0$ не е възможен случая

Допуснахме че $g \neq 0$

$\Rightarrow$ $a_0 \neq 0$ не е възм.

$a_0 = 0$ не е възм.

противоречие с допускането $\Rightarrow M_n = \{0\}$, и

$\Rightarrow$ всеки сим. полином по единствен начин се представя чрез σ_i

Пр.) $f \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3]$ симетричен

$a x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$, $k_1 \geq k_2$

$f = 5\sum x_i^3 - 4\sum x_i^2 x_j + 3\sum x_i^3 x_j^3 x_k$ ($i \neq j$ ...)

всеки едночлен от степен 3 — f_3

③ f_7 всеки едночлен от степен 7

$f = f_3 + f_7$

хомогенни части	старши едн.	$k_1 \geq k_2 \geq k_3$	
f_3	$5x_1^3$	3, 0, 0	$5\sigma_1^{3-0}\sigma_2^{0-0}\sigma_3^0 = 5\sigma_1^3$
		2, 1, 0	$a\sigma_1^{2-1}\sigma_2^{1-0}\sigma_3^0 = a\sigma_1\sigma_2$
		1 1 1	$b\sigma_1^0\sigma_2^0\sigma_3 = b\sigma_3$
f_7	$3x_1^3x_2^3x_3$	3, 3, 1	$\rightarrow 3\sigma_1^0\sigma_2^2\sigma_3^1$
		3 2 2	$\rightarrow c\sigma_1^1\sigma_2^0\sigma_3^2$

$f_3 = 5\sigma_1^3 + a\sigma_1\sigma_2 + b\sigma_3$

$2 = 5.2^3 + a.2 + 0$

$a = -19$

$f_7 = 3\sigma_2^2\sigma_3 + c\sigma_1\sigma_3^2$

x_1	x_2	x_3	σ_1	σ_2	σ_3	f_3	f_7	f
1	1	0	2	1	0	$5+5-4-4 = 2$	0	2
1	1	1	3	3	1	$3.5-4.6 = -9$	$3.3 = 9$	

в f_3

$-9 = 5.27 - 19.3.3 + b.1$

$\Rightarrow b = 27$

в f_7:

$9 = 3.9.1 + c.3.1^2 \Rightarrow -6$

$f = 5\sigma_1^3 - 19\sigma_1\sigma_2 + 27\sigma_3 + 3\sigma_2^2\sigma_3 - 6\sigma_1\sigma_3^2$

Сл.) Нека $f \in F[x]$ (F - поле) и T - полето на разлагане f и $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ всички корени на f и $h(x_1, \dots, x_n) \in F[x_1, \dots, x_n]$ h - симетричен полином

Тогава $\boxed{h(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in F}$.

Д-во! h - симетричен $\Rightarrow \exists\, g \in F[y_1, \dots, y_n]$

$$h(x_1, \dots, x_n) = g(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$$

$$h(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = g(\sigma_1(\alpha_1, \dots, \alpha_n), \dots, \sigma_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n)) \in F$$

$$\sigma_1(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = -\frac{f_1}{f_0} \in F$$

$\vdots$

$$\sigma_n(\alpha_1 \dots \alpha_n) = (-1)^n \frac{f_n}{f_0} \in F$$

$$f = f_0 x^n + f_1 x^{n-1} + \dots + f_n \in F[x]$$

ф-ли на Нютон

$S_k = x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k \in A[x_1, \dots, x_n]$

$2 \le k \le n$

$S_1 = \sigma_1 = x_1 + \dots + x_n$

$\sigma_1 S_{k-1} = (x_1 + \dots + x_n)(x_1^{k-1} + \dots + x_n^{k-1}) = S_k + \sum x_i^{k-1} x_j$

$\sigma_2 S_{k-2} = (x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{n-1}x_n)(x_1^{k-2} + \dots + x_n^{k-2}) = \sum x_i^{k-1} x_j + \boxed{\sum x_i^{k-2} x_j x_s}$

$\sigma_3 S_{k-3} = (x_1x_2x_3 + \dots)(x_1^{k-3} + \dots x_n^{k-3}) = \sum x_i^{k-2} x_j x_s + \sum x_i^{k-3} x_j x_s x_t$

$\vdots$

$\sigma_{k-1} S_1 = \left(\sum x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_{k-1}}\right)(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \sum x_{i_1}^2 x_{i_2} \dots x_{i_{k-1}} + k\sigma_k$

---

① $2 \le k \le n$

$S_k - \sigma_1 S_{k-1} + \sigma_2 S_{k-2} + \dots + (-1)^{k-1}\sigma_k S_1 + (-1)^k \underline{\underline{k}}\, \sigma_k = 0$

② $k > n$

$S_k - \sigma_1 S_{k-1} + \sigma_2 S_{k-2} + \dots + (-1)^n \sigma_n S_{k-n} = 0$

ф-ли на Нютон