Двойни интеграли, част 2

Теорема за смяна на променливите при двойните интеграли. Нека трансформацията $T: \begin{cases} x = f(u,v) \\ y = g(u,v) \end{cases}$ изобразява взаимно-еднозначно (т.е. биективно) компактното измеримо множество $\mathcal{D}' \subset \mathbb{R}^2$ в компактното измеримо множество $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$. Нека $f(u,v)$ и $g(u,v)$ имат непрекъснати първи частни производни в $\mathcal{D}'$ и

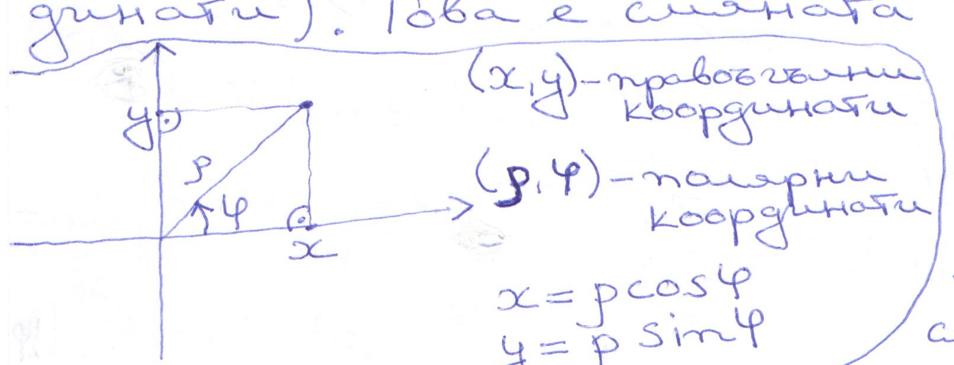
$$\Delta(u,v) = \begin{vmatrix} f'_u(u,v) & f'_v(u,v) \\ g'_u(u,v) & g'_v(u,v) \end{vmatrix}, \quad (u,v) \in \mathcal{D}'.$$

Тогава, ако $F(x,y)$ е непрекъсната в $\mathcal{D}$, то

$$\iint_{\mathcal{D}} F(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\mathcal{D}'} F[f(u,v), g(u,v)] \cdot |\Delta(u,v)|\,du\,dv.$$

Забележка: Условието изображението T да е взаимно-еднозначно може да бъде нарушено в множество с лице 0.

Най-често използваната смяна на променливите при двойните интеграли е полярната смяна (т.е. смяната в полярни координати). Това е смяната $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ \rho \geq 0 \\ \varphi \in [\alpha, \alpha+2\pi] \ (\alpha \in \mathbb{R}) \end{cases}$



За детерминантата на полярната смяна имаме

$$\Delta = \begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\varphi \\ y'_\rho & y'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho\cos^2\varphi + \rho\sin^2\varphi = \rho.$$

(Детерминантата Δ от теоремата се нарича якобиан в чест на немския математик от 19 век Карл Якоби.)

Да отбележим накрая, че полярната смяна е удобна, ако в подинтегралната функция или в неравенствата, задаващи множеството върху което интегрираме, се среща изразът x^2+y^2. Това е така, защото в полярни координати този израз се опростява: $x^2+y^2=\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi=\rho^2$.

Зад. 1 Пресметнете $I=\iint\limits_{D}\frac{y}{x^2+y^2+6}\,dx\,dy$,

където $D: \begin{cases} x^2+y^2\leq 3 \\ x^2\leq y^2 \\ y\geq 0 \end{cases}$.

Решение: Правим полярна смяна $\begin{cases} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \\ \rho\geq 0,\ 0\leq\varphi\leq 2\pi \end{cases}$.

Вече видяхме, че за полярната смяна имаме $\Delta=\rho$. Остава да определим множеството D', в което се изменят ρ и φ.

$$D': \begin{cases} \rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi\leq 3 \\ \rho^2\cos^2\varphi\leq\rho^2\sin^2\varphi \\ \rho\sin\varphi\geq 0 \\ \rho\geq 0,\ 0\leq\varphi\leq 2\pi \end{cases},\quad D': \begin{cases} \rho^2\leq 3 \\ \cos^2\varphi-\sin^2\varphi\leq 0, \\ \sin\varphi\geq 0 \\ \rho\geq 0,\ 0\leq\varphi\leq 2\pi \end{cases}$$

$$D': \begin{cases} 0\leq\rho\leq\sqrt{3} \\ \cos 2\varphi\leq 0 \\ 0\leq\varphi\leq\pi \end{cases},\quad D': \begin{cases} 0\leq\rho\leq\sqrt{3} \\ \frac{\pi}{2}\leq 2\varphi\leq\frac{3\pi}{2} \end{cases}.$$

$(\varphi\in[0,\pi] \Rightarrow 2\varphi\in[0,2\pi])$

Окончателно $D': \begin{cases} 0\leq\rho\leq\sqrt{3} \\ \frac{\pi}{4}\leq\varphi\leq\frac{3\pi}{4} \end{cases}$.

$\Delta=\rho$ $\qquad$ $\rho\geq 0$

Тогава $I=\iint\limits_{D'}\frac{\rho\sin\varphi}{\rho^2+6}\cdot|\rho|\,d\rho\,d\varphi \overset{\rho\geq 0}{=}$

$=\iint\limits_{D'}\frac{\rho^2\sin\varphi}{\rho^2+6}\,d\rho\,d\varphi=\int\limits_0^{\sqrt{3}}\left[\int\limits_{\pi/4}^{3\pi/4}\frac{\rho^2\sin\varphi}{\rho^2+6}\,d\varphi\right]d\rho=$

$=\int\limits_0^{\sqrt{3}}\left[\frac{\rho^2}{\rho^2+6}\int\limits_{\pi/4}^{3\pi/4}\sin\varphi\,d\varphi\right]d\rho=\int\limits_0^{\sqrt{3}}\left[\frac{\rho^2}{\rho^2+6}(-\cos\varphi)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\right]d\varphi$

$=\frac{2\sqrt{2}}{2}\int\limits_0^{\sqrt{3}}\frac{(\rho^2+6)-6}{\rho^2+6}\,d\rho=\sqrt{2}\int\limits_0^{\sqrt{3}}\left(1-\frac{6}{\rho^2+6}\right)d\rho=$

$$= \sqrt{2}\left[\int_0^{\sqrt{3}} 1\,d\rho - 6\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{\rho^2+6}\,d\rho\right] =$$

$$= \sqrt{2}\left[\rho\Big|_0^{\sqrt{3}} - \sqrt{6}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{\left(\frac{\rho}{\sqrt{6}}\right)^2+1}\,d\frac{\rho}{\sqrt{6}}\right] =$$

$$= \sqrt{2}\left[\sqrt{3} - \sqrt{6}\,\operatorname{arctg}\frac{\rho}{\sqrt{6}}\Big|_0^{\sqrt{3}}\right] =$$

$$= \sqrt{2}\left[\sqrt{3} - \sqrt{6}\,\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}\right] = \sqrt{6}\left(1 - \sqrt{2}\,\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Отг. $I = \sqrt{6}\left(1 - \sqrt{2}\,\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$

Зад. 2 Пресметнете $I = \iint\limits_{D} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^3}\,dx\,dy$, където

$$D: \begin{cases} x^2+y^2 \leq 2 \\ x^2-y^2 \geq 1 \\ x \geq 0,\ y \geq 0 \end{cases}.$$

Решение: Правим полярна смяна $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ \rho \geq 0,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}.$

Имаме, че $\Delta = \rho$.

$$D': \begin{cases} \rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi \leq 2 \\ \rho^2\cos^2\varphi - \rho^2\sin^2\varphi \geq 1 \\ \rho\cos\varphi \geq 0,\ \rho\sin\varphi \geq 0 \\ \rho \geq 0,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases},\quad D': \begin{cases} \rho^2 \leq 2 \\ \rho^2\cos 2\varphi \geq 1 \\ \cos\varphi \geq 0,\ \sin\varphi \geq 0 \\ \rho \geq 0,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases},$$

$$D': \begin{cases} 0 \leq \rho \leq \sqrt{2} \\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \\ \rho^2\cos 2\varphi \geq 1 \end{cases},\quad D': \begin{cases} 0 \leq \varphi < \frac{\pi}{4} \\ \sqrt{\frac{1}{\cos 2\varphi}} \leq \rho \leq \sqrt{2} \end{cases}.$$

$\left(\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow 2\varphi \in [0, \pi] \text{ и } \cos 2\varphi > 0 \Rightarrow 2\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right)\right)$

$\left(\text{при } \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right)\right)\ \frac{1}{\cos 2\varphi} \leq 2 \Leftrightarrow \cos 2\varphi \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$

Окончателно $D': \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6} \\ \rho(\varphi) = \sqrt{\frac{1}{\cos 2\varphi}} \leq \rho \leq \sqrt{2} \end{cases}$

Тогава

$$I = \iint\limits_{D'} \frac{\rho^2\cos^2\varphi - \rho^2\sin^2\varphi}{\rho^6}\cdot|\rho|\,d\rho\,d\varphi =$$

$$= \iint\limits_{D'} \frac{\rho^3\cos 2\varphi}{\rho^6}\,d\rho\,d\varphi = \iint\limits_{D'} \frac{\cos 2\varphi}{\rho^3}\,d\rho\,d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi/6} \left[\int_{\rho(\varphi)}^{\sqrt{2}} \frac{\cos 2\varphi}{\rho^3} d\rho \right] d\varphi = \int_0^{\pi/6} \left[\cos 2\varphi \int_{\rho(\varphi)}^{\sqrt{2}} \frac{1}{\rho^3} d\rho \right] d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi/6} \left[\cos 2\varphi \left(-\frac{1}{2\rho^2} \right) \Bigg|_{\sqrt{\frac{1}{\cos 2\varphi}}}^{\sqrt{2}} \right] d\varphi =$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^{\pi/6} \left[\cos 2\varphi \left(\frac{1}{2} - \cos 2\varphi \right) \right] d\varphi =$$

$$= -\frac{1}{4} \int_0^{\pi/6} \cos 2\varphi \, d\varphi + \frac{1}{2} \int_0^{\pi/6} \cos^2 2\varphi \, d\varphi =$$

$$= -\frac{1}{8} \int_0^{\pi/6} \cos 2\varphi \, d 2\varphi + \frac{1}{4} \int_0^{\pi/6} (1 + \cos 4\varphi) d\varphi =$$

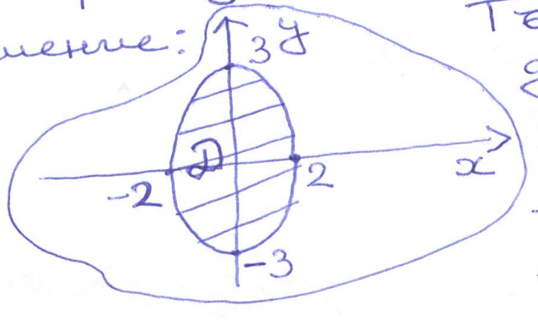
$$= -\frac{1}{8} \sin 2\varphi \Big|_0^{\pi/6} + \frac{1}{4} \left(\varphi + \frac{1}{4} \sin 4\varphi \right) \Big|_0^{\pi/6} =$$

$$= -\frac{1}{8} \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{8} \right) = \frac{\pi}{24} - \frac{\sqrt{3}}{32}.$$

Отг. $I = \frac{1}{8} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right)$.

Зад. 3 Пресметнете $I = \iint_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}} \, dx dy$, където $D: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1$.

Решение:



Търсим смяна, при която да се опрости израза $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$.

Такава е обобщената полярна смяна

$$\begin{cases} x = 2\rho\cos\varphi \\ y = 3\rho\sin\varphi \\ \rho \geq 0, \ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$$

. За нея $\Delta = \begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\varphi \\ y'_\rho & y'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\cos\varphi & -2\rho\sin\varphi \\ 3\sin\varphi & 3\rho\cos\varphi \end{vmatrix} =$

$$= 6\rho\cos^2\varphi + 6\rho\sin^2\varphi = 6\rho.$$

$$D': \begin{cases} \frac{\cancel{4}\rho^2\cos^2\varphi}{\cancel{4}} + \frac{\cancel{9}\rho^2\sin^2\varphi}{\cancel{9}} \leq 1 \\ \rho \geq 0, \ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}, \quad D': \begin{cases} \rho^2 \leq 1 \\ \rho \geq 0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}.$$

Окончателно $D': \begin{cases} 0 \leq \rho \leq 1 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$.

Тогава $I = \iint\limits_{\mathcal{D}'} \sqrt{1 - \frac{4\rho^2\cos^2\varphi}{4} - \frac{9\rho^2\sin^2\varphi}{9}} \cdot |6\rho| \, d\rho\, d\varphi =$ ($\Delta = 6\rho$)

($\rho \geq 0$) $\overset{}{=} 6 \iint\limits_{\mathcal{D}'} \rho\sqrt{1-\rho^2} \, d\rho\, d\varphi =$

$= 6 \int\limits_0^1 \left[\int\limits_0^{2\pi} \rho\sqrt{1-\rho^2}\, d\varphi \right] d\rho = 6 \int\limits_0^1 \left[\rho\sqrt{1-\rho^2} \int\limits_0^{2\pi} 1\, d\varphi \right] d\rho =$

$= 6 \int\limits_0^1 \left[\rho\sqrt{1-\rho^2}\, \varphi \Big|_0^{2\pi} \right] d\rho = 12\pi \int\limits_0^1 \rho\sqrt{1-\rho^2}\, d\rho =$

$= -6\pi \int\limits_0^1 \sqrt{1-\rho^2}\, d(1-\rho^2) = -6\pi \left. \frac{(1-\rho^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right|_0^1 =$

$= -4\pi(0-1) = 4\pi.$ Отг. $I = 4\pi$.

Зад. 4 Пресметнете $I = \iint\limits_{\mathcal{D}} (\sqrt{x} + \sqrt{y})^4 \, dx\, dy$, където

$\mathcal{D}: \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} \leq 1 \\ x \geq 0,\ y \geq 0 \end{cases}$.

Решение: Търсим смяна, при която да се опрости израза $\sqrt{x} + \sqrt{y}$. Такава е обобщената полярна смяна $\begin{cases} x = \rho\cos^4\varphi \\ y = \rho\sin^4\varphi \\ \rho \geq 0,\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$ (имаме $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$, за да е смяната биективно изображение, както се иска в теоремата)

За тази смяна $\Delta = \begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\varphi \\ y'_\rho & y'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos^4\varphi & -4\rho\cos^3\varphi\sin\varphi \\ \sin^4\varphi & 4\rho\sin^3\varphi\cos\varphi \end{vmatrix} =$

$= 4\rho\sin^3\varphi\cos^5\varphi + 4\rho\sin^5\varphi\cos^3\varphi =$

$= 4\rho\sin^3\varphi\cos^3\varphi\,(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = 4\rho\sin^3\varphi\cos^3\varphi.$

$\mathcal{D}': \begin{cases} \sqrt{\rho\cos^4\varphi} + \sqrt{\rho\sin^4\varphi} \leq 1 \\ \rho \geq 0,\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$, $\mathcal{D}': \begin{cases} \sqrt{\rho}(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) \leq 1 \\ \rho \geq 0,\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$.

Окончателно $\mathcal{D}': \begin{cases} 0 \leq \rho \leq 1 \\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$. Тогава

$I = \iint\limits_{\mathcal{D}'} \left(\sqrt{\rho\cos^4\varphi} + \sqrt{\rho\sin^4\varphi}\right)^4 \cdot |4\rho\sin^3\varphi\cos^3\varphi| \, d\rho\, d\varphi =$ ($\Delta = 4\rho\cos^3\varphi\sin^3\varphi$)

$= \iint\limits_{\mathcal{D}'} [\sqrt{\rho}\underbrace{(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}_{= 1}]^4 \cdot 4\rho\sin^3\varphi\cos^3\varphi \, d\rho\, d\varphi$

($\mathcal{D}': \begin{cases} 0 \leq \rho \leq 1 \\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow 4\rho\sin^3\varphi\cos^3\varphi \geq 0$)

$$= \iint\limits_{D'} 4\rho^3 \sin^3\varphi \cos^3\varphi \, d\rho \, d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left[\int_0^1 4\rho^3 \sin^3\varphi \cos^3\varphi \, d\rho \right] d\varphi = \int_0^{\pi/2} \left[\sin^3\varphi \cos^3\varphi \int_0^1 4\rho^3 d\rho \right] d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left[\sin^3\varphi \cos^3\varphi \cdot \rho^4 \Big|_0^1 \right] d\varphi = \int_0^{\pi/2} \sin^3\varphi \cos^3\varphi \, d\varphi = \boxed{t = \sin\varphi}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin^3\varphi \cos^2\varphi \cos\varphi \, d\varphi = \int_0^{\pi/2} \sin^3\varphi (1 - \sin^2\varphi) \, d\sin\varphi =$$

$$= \int_0^1 t^3 (1 - t^2) dt = \int_0^1 (t^3 - t^5) dt = \left(\frac{t^4}{4} - \frac{t^6}{6} \right) \Big|_0^1 = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{12}.$$

Отг. $I = \frac{1}{12}$.

Зад. 5 Пресметнете $I = \iint\limits_D \sqrt{y^2 - x^2} \, dx dy$, $D: 0 \leq 3x \leq y \leq 1 + x$.

Решение: Правим смяна $T^{-1}: \begin{cases} u = y - x \\ v = y + x \end{cases}$, т.е. $T: \begin{cases} x = \frac{1}{2}(v - u) \\ y = \frac{1}{2}(v + u) \end{cases}$.

За тази смяна

$$\Delta = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}.$$

$D': 0 \leq \frac{3}{2}(v - u) \leq \frac{1}{2}(v + u) \leq 1 + \frac{1}{2}(v - u)$, т.е.

$D': \begin{cases} u \leq v \leq 2u \\ u \leq 1 \end{cases}$. Окончателно $D': \begin{cases} 0 \leq u \leq 1 \\ u \leq v \leq 2u \end{cases}$

(за да е изпълнено $u \leq v \leq 2u$, трябва да имаме $u \leq 2u$, т.е. $u \geq 0$).

Тогава $I = \iint\limits_{D'} \sqrt{uv} \cdot \left| -\frac{1}{2} \right| du dv =$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\int_u^{2u} \sqrt{u} \sqrt{v} \, dv \right] du = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\sqrt{u} \int_u^{2u} \sqrt{v} \, dv \right] du =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\sqrt{u} \; \frac{2}{3} v^{\frac{3}{2}} \Big|_u^{2u} \right] du = \frac{1}{3} \int_0^1 \sqrt{u} (\sqrt{8} - 1) u^{\frac{3}{2}} du =$$

$$= \frac{\sqrt{8} - 1}{3} \int_0^1 u^2 du = \frac{\sqrt{8} - 1}{3} \frac{u^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{\sqrt{8} - 1}{9}.$$ Отг. $I = \frac{\sqrt{8} - 1}{9}$.