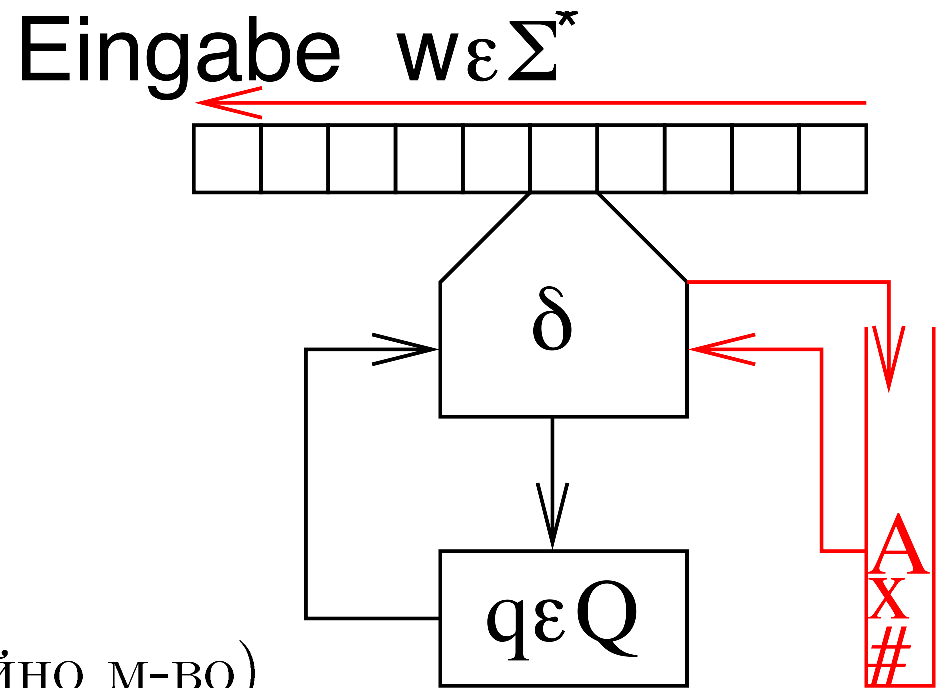
1.3.5 Стекови автомати

$K = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, \#)$:



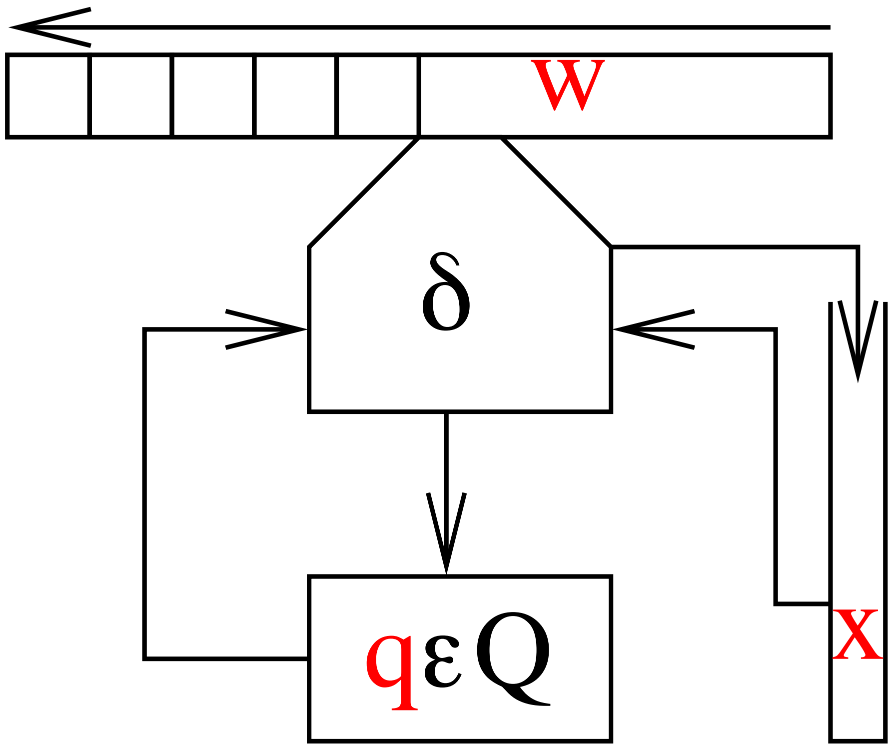
- Q, състояния
- Σ, азбука
- Γ азбука за стека,
  $\Sigma \cup \{\#\} \subseteq \Gamma$
- $\delta : Q \times (\Sigma \cup \varepsilon) \times \Gamma \to 2^{Q \times \Gamma^*}$,
  функция на прехода; (крайно м-во)
- $s \in Q$, начално състояние
- $\# \notin \Sigma$: край на стека,

$\approx$ εNFA + стекова памет − крайните състояния

$\approx$ специална 2-лентова-машина на Тюринг

Конфигурация на стеков автомат

$(q, w, x) \in Q \times \Sigma^* \times \Gamma^*$



Как работи един стеков автомат

Възможни преходи между конфигурации.

Четене на един входен символ a:

$$(q, aw, bx) \overset{(q',x')\in\delta(q,a,b)}{\vdash} (q', w, x'x)$$

ε-преход:

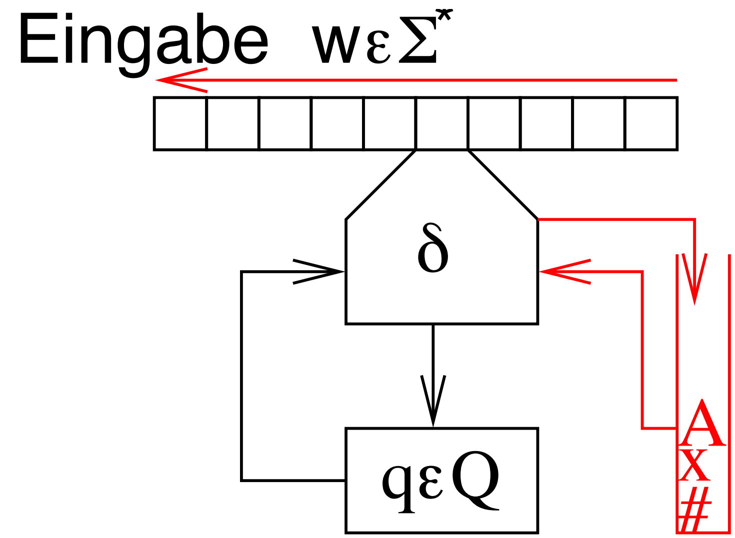
$$(q, w, bx) \overset{(q',x')\in\delta(q,\varepsilon,b)}{\vdash} (q', w, x'x)$$

$$(q, w, \alpha) \vdash^* (q', w, \beta) \iff$$

$$\exists C_1 \ldots C_n (C_1 = (q, w, \alpha) \;\&\; C_n = (q', w, \beta) \;\&\; C_1 \vdash C_2 \ldots C_{n-1} \vdash C_n)$$

$$(q, w, \alpha) \vdash^* (q, w, \alpha)$$

Стековите автомати като разпознаватели



$K = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, \#)$.

$L(K)$?

Дефиниция:

K приема $w \in \Sigma^*$ т.т.к.

$\exists$ редица от (разрешени от δ) конфигурации

$(s, w, \#) \vdash \cdots \vdash (q, \varepsilon, \varepsilon)$ с $q \in Q$ произволно.

"Приемане с празен стек"

$L(K) := \{w \in \Sigma^* : K \text{ приема } w\}$.

Упражнение: $\left\{w\$w^R : w \in \{a,b\}^*\right\}$

$K = (\{0,1\}, \{a,b,\$\}, \{a,b,\#\}, \delta, 0, \#)$

$\delta(0,\$,k) = \{(1,k)\}$

$\delta(0,i,k) = \{(0,ik)\}$ за $i \in \{a,b\}$

$\delta(1,i,i) = \{(1,\varepsilon)\}$

$\delta(1,\varepsilon,\#) = \{(1,\varepsilon)\}$

$(0, ba\$ab, \#) \vdash$

$(0, a\$ab, b\#) \vdash$

$(0, \$ab, ab\#) \vdash$

$(1, ab, ab\#) \vdash$

$(1, b, b\#) \vdash$

$(1, \varepsilon, \#) \vdash$

$(1, \varepsilon, \varepsilon)$

Упражнение: $\{ww^R : w \in \{a,b\}^*\}$

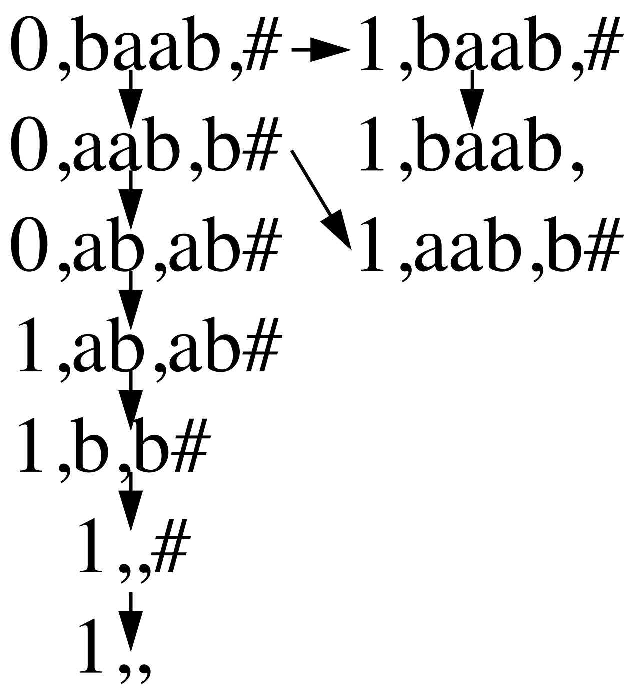
$K = (\{0,1\},\{a,b\},\{a,b,\#\},\delta,0,\#)$

$\delta(0,\varepsilon,k) = \{(1,k)\}$

$\delta(0,i,k) = \{(0,ik)\}$

$\delta(1,i,i) = \{(1,\varepsilon)\}$

$\delta(1,\varepsilon,\#) = \{(1,\varepsilon)\}$



Твърдение: L е контекстно-свободен т.т.к. $\exists$ недетерминистичен стеков автомат (NstackA) $M : L(M) = L$

Д-во: L е контекстно-свободен $\longrightarrow \exists$ NstackA $M : L(M) = L$

Нека $G = (V, \Sigma, P, S)$ е грарматика с $L(G) = L$.
Да разгледаме NstackA $M = (\{q\}, \Sigma, V \cup \Sigma, \delta, q, S)$ с

$$(1)\forall A \to \alpha \in P : (q, \alpha) \in \delta(q, \varepsilon, A),$$

$$(2)\forall a \in \Sigma : (q, \varepsilon) \in \delta(q, a, a)$$

Идея (инварианта): в стека се запомнят правилата на един извод, и при вход на терминален символ го вади от върха на стека.

$G = (V, \Sigma, P, S)$ грамматика с $L(G) = L$.

$M = (\{q\}, \Sigma, V \cup \Sigma, \delta, q, S)$ с

$\forall A \to \alpha \in P : (q, \alpha) \in \delta(q, \varepsilon, A)$, $\forall a \in \Sigma : (q, \varepsilon) \in \delta(q, a, a)$

Лема: Ако $w \in \Sigma^*, \alpha \in V(V \cup \Sigma)^* \cup \{\varepsilon\}$, то

$$S \Rightarrow^* w\alpha \iff (q, w, S) \vdash^* (q, \varepsilon, \alpha).$$

Следствие: $\alpha = \varepsilon \longrightarrow S \Rightarrow^* w \iff (q, w, S) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon)$.

Д-во: Нека $S \Rightarrow^* w\alpha$. Тогава има извод

$u_0 = S \Rightarrow u_1 \cdots \Rightarrow u_n = w\alpha$.

С индукция по дължината на извода ще покажем, че $(q, w, S) \vdash^* (q, \varepsilon, \alpha)$.

$S \Rightarrow^* w\alpha \longrightarrow (q,w,S) \vdash^* (q,\varepsilon,\alpha)$

Случай $n = 0$:

$u_0 = S = w\alpha \longrightarrow w = \varepsilon \ \& \ \alpha = S \longrightarrow (q,w,S) \vdash^* (q,\varepsilon,\alpha)$.

Случай $n \rightsquigarrow n+1$:

$u_0 = S \Rightarrow u_1 \ldots u_n \Rightarrow u_{n+1} = w\alpha$. Нека $u_n = xA\beta$, $x \in \Sigma^*$,

$u_{n+1} = x\gamma\beta$ и $A \rightarrow \gamma \in P$.

Тъй като $u_0 = S \Rightarrow u_1 \cdots \Rightarrow u_n = xA\beta$, то по ИП

$(q,x,S) \vdash^* (q,\varepsilon,A\beta)$.

От $A \rightarrow \gamma \in P \longrightarrow (q,\varepsilon,A\beta) \vdash (q,\varepsilon,\gamma\beta)$.

Но $u_{n+1} = w\alpha = x\gamma\beta$, α започва с променлива и $x, w \in \Sigma^*$.

Следователно $w = xy$, $y \in \Sigma^*$, $y\alpha = \gamma\beta$. Така

$(q,w,S) \vdash^* (q,y,\gamma\beta) = (q,y,y\alpha)$. Сега прилагайки y пъти

преходи от тип (2): $(q,w,S) \vdash^* (q,y,y\alpha) \vdash^* (q,\varepsilon,\alpha)$.

$(q,w,S)\vdash^*(q,\varepsilon,\alpha) \longrightarrow S \Rightarrow^* w\alpha$

Индукция по броя n на преходите от тип (1).

Случай $n=0$:

$(q,w,S)\vdash^*(q,\varepsilon,\alpha) \longrightarrow w=\varepsilon, \alpha=S \longrightarrow S \Rightarrow^* w\alpha.$

Случай $n \leadsto n+1$:

$$(q,w,S) \overset{n(1)}{\vdash^*} (q,y,A\beta)\vdash(q,y,\gamma\beta) \overset{(2)}{\vdash^*} (q,\varepsilon,\alpha).$$

$w=xy$, $A\to\gamma\in P$, $\gamma\beta = y\alpha$!.

$(q,x,S) \overset{n(1)}{\vdash^*} (q,\varepsilon,A\beta).$

По ИП $S\Rightarrow^* xA\alpha \Rightarrow x\gamma\beta = xy\alpha = w\alpha \longrightarrow S\Rightarrow^* w\alpha.$

Твърдение: За всеки NstackA с едно състояние

$M = (\{z\}, \Sigma, \Gamma, \delta, z)$

има граматика G с $L(G) = L(M)$.

Д-во: Нека $G = (\Gamma, \Sigma, P, \#)$ с

$P = \{A \to a\alpha : (z, \alpha) \in \delta(z, a, A)\}$ $a = \varepsilon$ разрешено!

$L(G) \subseteq L(M)$:

$x \in L(G) \longrightarrow \exists$ ляв извод $A = \# \stackrel{*}{\Rightarrow} x$.

За всяко начало w на x, $x = wy$, за извода $\# \stackrel{*}{\Rightarrow} w\alpha$ с

$w \in \Sigma^*$, $\alpha \in \Gamma^*$

$\exists$ редица от конфигурации $(z, x, \#) \vdash \cdots \vdash (z, y, \alpha)$ на M.

$\# \overset{*}{\Rightarrow} w\alpha \Leftrightarrow (z,x,\#) \vdash \cdots \vdash (z,y,\alpha)$

Индукция по дължината на извода n.

База: $n=0$. От $\# \overset{*}{\Rightarrow} \alpha$ следва $w=\varepsilon$, $y=x, \alpha=\#(\alpha \in \Gamma^*)$.

Следователно $(z,x,\#) \vdash^* (z,y,\alpha)$.

Индукционна стъпка: $n+1$

$\# \overset{*}{\Rightarrow} wA\beta \Rightarrow wa\gamma\beta$. $a \in \varepsilon \cup \Sigma,, \alpha = \gamma\beta$.

По ИП $\exists$ редица от конфигурации $(z,x,\#) \vdash \cdots \vdash (z,ay,A\beta)$

с $way = x$.

Тъй като $A \rightarrow a\gamma \in P$ трябва $(z,\gamma) \in \delta(z,a,A)$.

Така, $(z,ay,A\beta) \vdash (z,y,\gamma\beta)$

$(z,x,\#) \vdash^* (z,y,\gamma\beta) = (z,y,\alpha)$.

Следователно $\# \overset{*}{\Rightarrow} x \longrightarrow (z,x,\#) \vdash^* (z,\varepsilon,\varepsilon)$

$(w=x \Rightarrow y=\varepsilon, \alpha=\varepsilon)$.

$L(M) \subseteq L(G)$:

$x \in L(M) \longrightarrow \exists$ редица от конфигурации

$(z, x, \#) \vdash \cdots \vdash (z, \varepsilon, \varepsilon)$

На това съответства ляв извод $A = \# \stackrel{*}{\Rightarrow} x$.

За всяко начало w на x и $x = wy$

От $(z, x, \#) \vdash^{*} (z, y, \alpha)$ следва, че съществува извод $\# \stackrel{*}{\Rightarrow} w\alpha$.

Аналогично.

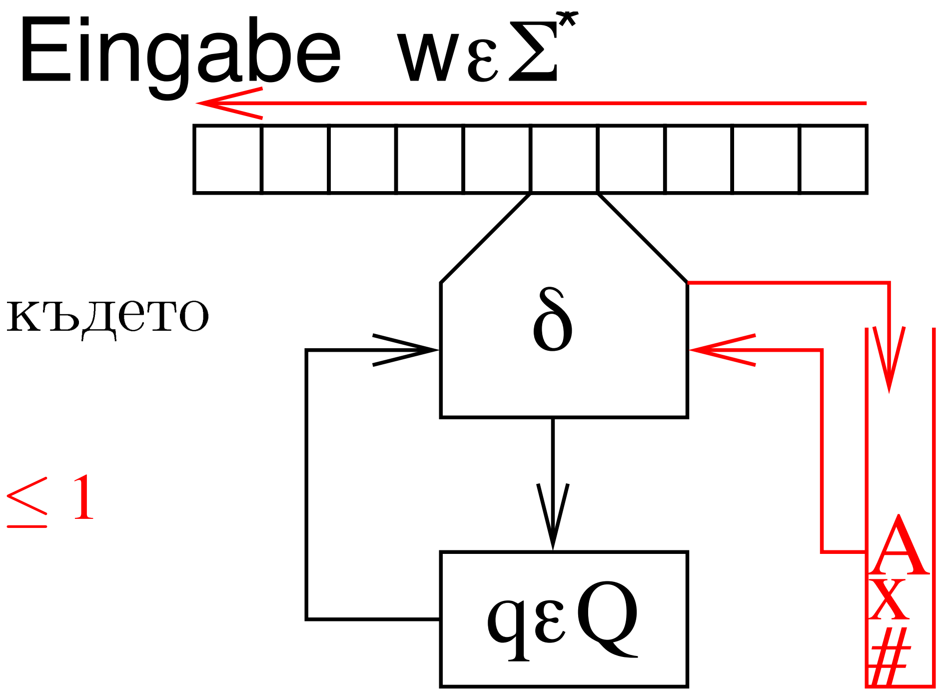
Така за $w = x$ имаме :

$(z, x, \#) \vdash^{*} (z, \varepsilon, \varepsilon) \Rightarrow \# \stackrel{*}{\Rightarrow} x$.

1.3.6 Детерминистични контекстно-свободни езици

$K = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, \#, F)$:

- Q, Σ, Γ, s, $\#$ знаем.
- $\delta : Q \times (\Sigma \cup \varepsilon) \times \Gamma \to 2^{Q \times \Gamma^*}$, където
  $\forall z \in Q, a \in \Sigma, A \in \Gamma :$
  $$|\delta(z, a, A)| + |\delta(z, \varepsilon, A)| \leq 1$$



K приема $w \in \Sigma^*$, ако

$\exists$ редица от конфигурации (допустими от δ)

$(s, w, \#) \vdash \cdots \vdash (f, \varepsilon, \varepsilon)$ с $f \in F$.

Твърдение:

$\forall$ DstackA $K : \exists$ NstackA с едно състояние $K' : L(K) = L(K')$.

$\exists$ NstackA с едно състояние $K' : \nexists$ DstackA $K : L(K) = L(K')$.