Полилинейни функции

F - поле, V лин. пр-во над F

Опр. $f: V \to F$ е линейна ф-я, когато
$f(a+b) = f(a) + f(b)$, $\forall a, b \in V$
$f(\lambda a) = \lambda f(a)$, $\forall \lambda \in F$

Св-ва $f: V \to F$ - линейна

1) $f(\theta) = 0$ $\quad (f(\theta) = f(0.\theta) = 0.f(\theta) = 0)$
2) $f(a_1 + a_2 + \dots + a_k) = f(a_1) + \dots + f(a_k)$; $a_1, \dots, a_k \in V$
3) $f(\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k) = \lambda_1 f(a_1) + \dots + \lambda_k f(a_k)$, $\lambda_i \in F$
4) ако $e_1, \dots, e_n$ базис на V
$\Rightarrow f(\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n) = \alpha_1 f(e_1) + \dots + \alpha_n f(e_n)$
$\Rightarrow f$ се определя само от стойностите $f(e_1), \dots, f(e_n)$

Опр. $f: \underbrace{V \times \dots \times V}_{k} \to F$ е полилинейна функция на k арг. когато е линейна по всеки аргумент

$a_1, \dots, a_k \in V$
за $i = 1, \dots, k$

1) $f(a_1, \dots, a_i' + a_i'', \dots, a_k) = f(a_1, \dots, a_i', \dots a_n) + f(a_1, \dots, a_i'', \dots, a_n)$

2) $f(a_1, \dots, \lambda a_i, \dots, a_k) = \lambda f(a_1, \dots, a_i, \dots, a_k)$

Свойство

1) ако $a_i = 0 \Rightarrow f(a_1, \dots, 0, \dots, a_k) = 0$

2) ако $f(a_1, \dots, \underbrace{\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_s b_s}_{\text{коорд } i}, \dots, a_k) =$

$= \lambda_1 f(a_1, \dots, \underset{i}{b_1}, \dots, a_k) + \dots + \lambda_s f(a_1, \dots, \underset{i}{b_s}, \dots, a_k)$

Пример $\langle a, c \rangle$ вътрешното произведение е полилинейна (билинейна) ф-я

$\langle a + b, c \rangle = \langle a, c \rangle + \langle b, c \rangle$; $\langle \lambda a, c \rangle = \lambda \langle a, c \rangle$

$\langle a, b + c \rangle = \langle a, b \rangle + \langle a, c \rangle$; $\langle a, \lambda c \rangle = \lambda \langle a, c \rangle$

Тв/ Ако $f: V^k \to F$ $\left(V^k = \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k} \right)$ е полилинейна и $e_1, \dots, e_n$ - базис на V и $a_1, \dots, a_k \in V$, където $a_i = a_{i1} e_1 + \dots + a_{in} e_n$

Тогава:

$$f(a_1, \dots, a_k) = f\left(\sum_{j_1} a_{1j_1} e_{j_1}, \dots, \sum_{j_k} a_{kj_k} e_{j_k}\right) = \sum_{j_1} \dots \sum_{j_k} a_{1j_1} \dots a_{kj_k} \cdot f(e_{j_1}, \dots, e_{j_k})$$

Д-во за $k=1$ $\quad f(a_1) = f\left(\sum a_{1j_1} e_{j_1}\right) = \sum a_{1j_1} f(e_{j_1})$

Допускаме, че е вярно за $k-1$ аргумента

$$f(a_1, \dots, a_k) = f\left(\sum_{j_1} a_{1j_1}, \dots, \sum_{j_{k-1}} a_{k-1, j_{k-1}} e_{j_{k-1}}, \sum_{j_k} a_{kj_k} e_{j_k}\right) =$$

$k-1$ арг.

$$= \sum_{j_k} a_{kj_k} f\left(\sum_{j_1} a_{1j_1}, \dots, \sum_{j_{k-1}} a_{k-1, j_{k-1}} e_{j_{k-1}}, e_{j_k}\right) =$$

$$= \sum_{j_k} \sum_{j_1} \dots \sum_{j_{k-1}} a_{1j_1} \dots a_{k-1, j_{k-1}} a_{kj_k} f(e_{j_1}, \dots, e_{j_{k-1}}, e_{j_k})$$

Опр.// $f: V^k \to F$ е антисиметрична, когато $\forall i \neq j$ $(i, j \in 1, \dots, k)$ е изпълнено

$$f(a_1, \dots, \underset{i}{a_i}, \dots, \underset{j}{a_j}, \dots, a_k) = -f(a_1, \dots, \underset{i}{a_j}, \dots, \underset{j}{a_i}, \dots, a_k)$$

Св-во// $f: V^k \to F$ е антисиметрична ф-я

ако $a_i = a_j$ (за $i \neq j$) $\Rightarrow f(a_1, \dots, \underset{i}{a_i}, \dots, \underset{j}{a_i}, \dots, a_k) = 0$

Д-во разменяме местата на $a_i \leftrightarrow a_j$, но $a_i = a_j$

$$\Rightarrow f(a_1, \dots, \underset{i}{a_i}, \dots, \underset{j}{a_i}, \dots, a_k) = -f(a_1, \dots, \underset{i}{a_i}, \dots, \underset{j}{a_i}, \dots, a_k)$$

$$\Rightarrow 2f(a_1, \dots, \underset{i}{a_i}, \dots, \underset{j}{a_i}, \dots, a_k) = 0 \Rightarrow f$$ е 0 когато има 2 равни аргумента

Тв/ Ако $f: V^k \to F$ е полилинейна ф-я и f е равно на $\underline{0}$ когато има 2 равни аргумента, тогава f е <u>антисиметрична</u>!

<u>Д-во</u> Нека $i \neq j$ $\quad a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_j, \ldots, a_k \in V^k$

$$0 = f(a_1, \ldots, \underset{i}{a_i + a_j}, \ldots, \underset{j}{a_i + a_j}, \ldots, a_k) =$$

$$= f(a_1, \ldots, \underset{i}{a_i}, \ldots, a_i + a_j, \ldots, a_k) + f(a_1, \ldots, \underset{i}{a_j}, \ldots, a_i + a_j, \ldots, a_k) =$$

$$= \underline{\overset{=0}{f}(a_1, \ldots, \underset{i}{a_i}, \ldots, \underset{j}{a_i}, \ldots, a_k)} + f(a_1, \ldots, \underset{i}{a_i}, \ldots, \underset{j}{a_j}, \ldots a_k) +$$

$$+ f(a_1, \ldots, \underset{i}{a_j}, \ldots, \underset{j}{a_i}, \ldots, a_k) + \underline{\overset{=0}{f}(a_1, \ldots, \underset{i}{a_j}, \ldots, \underset{j}{a_j}, \ldots, a_k)}$$

$$\Rightarrow 0 = f(a_1, \ldots, \underset{i}{a_i}, \ldots, \underset{j}{a_j}, \ldots, a_k) + f(a_1, \ldots, \underset{i}{a_j}, \ldots, \underset{j}{a_i}, \ldots, a_k)$$

Пермутации и инверсии

$I = \{1, 2, \ldots, n\}$

пермутация на $1, \ldots n$ е подредба на $1, \ldots n$

Брой пермутации на $1, 2, \ldots n$ е $n!$

$[1, 2, 3] = 0$

$[1, 3, 2] = 1$ (32)

$[2, 1, 3] = 1$ (21)

$[2, 3, 1] = 2$ (21) и (31)

$[3, 1, 2] = 2$ (31) и (32)

$[3, 2, 1] = 3$ всяка двойка

Опр. Нека $i_1, \ldots, i_n$ е пермутация на $1, 2, \ldots, n$

Казваме, че i_s и i_t са в инверсия, ако

$$i_s > i_t \text{ и } s < t$$

(т.е. ако по-голямото число стои по-напред от по-малкото число)

$[i_1, \ldots, i_n]$ – броя на всички инверсии в пермутацията $i_1, \ldots, i_n$

$[5, 3, 1, 7, 6, 4, 2] = 12$

53	31	76	64	42
51	32	74	62	
54		72		
52				

Опр. Четна пермутация – има четен бр. инверсии
Нечетна пермутация – има нечетен брой инверсии

Твърдение|| Когато в една пермутация се сменят местата на два елемента, пермутацията сменя четността си.

$\alpha_1 = i_1, \dots, i_s, \dots, i_t \dots i_n$ $[\alpha_1]$ са числа с различна четност
$\alpha_2 = i_1 \dots i_t \dots i_s \dots i_n$ $[\alpha_2]$

Д-во I сл/ смяна местата на два съседни елемента

$\alpha_1 = i_1, \dots, i_s, i_{s+1}, \dots i_t$
$\alpha_2 = i_1, \dots i_{s+1}\, i_s, \dots i_t$

1.1 $\{i_j, i_k\} \cap \{i_s, i_{s+1}\} = \emptyset$
$i_j\ i_k$ в двете пермут. са на едни и същи места

1.2 $\{i_j, i_k\} \cap \{i_s, i_{s+1}\} = i_s$
в α_1 $\underset{j}{i_j}, \underset{s+1}{i_s}$ $(j \neq s+1$ и подредбата не се мени
в α_2 $\underset{j}{i_j}, \underset{s+1}{i_s}$

1.3 $\{i_j, i_k\} \cap \{i_s, i_{s+1}\} = i_{s+1}$
като 1.2

1.4 $\{i_j, i_k\} = \{i_s, i_{s+1}\}$
сменя се четността

II случай s и t не са съседни

правим последователно размяна на съседни елементи за да разменим i_s и i_t

$\alpha_1 = i_1 \dots i_{s-1}\; i_s\; i_{s+1} \dots i_{t-1}\; i_t\; i_{t+1} \dots i_n$

$= \qquad i_{s+1}\; i_s \dots i_{t-1}\; i_t \qquad =$ $t-s-1$

$\vdots$

$\neq \qquad i_{s+1}\; i_{s+2} \dots i_{t-1}\; \boxed{\begin{matrix} i_s & i_t \\ i_t & i_s \end{matrix}} \qquad 1$

i_{t-1}

$\vdots$

$i_{s+1}\; i_t \dots i_{t-1}\; i_s \qquad t-s-1 \qquad =$

$\alpha_2 = i_1 \dots i_{s-1}\; i_t\; i_{s+1} \dots i_{t-1}\; i_s\; i_{s+1} \dots i_n$

1	2	3	4
2	1	3	4
2	3	1	4
2	3	4	1
2	4	3	1
4	2	3	1

$(t-s-1)+1+(t-s-1)$
$= 2(t-s)-1$

нечетен брой пъти смяна на четността

$\Rightarrow \alpha_1$ и α_2 са с различна четност

Сл/ При $n \geq 2$ половината пермутации на n числа са четни и половината са нечетни.

Нека A_n - мн-вото от четните пермутации

B_n - мн-вото от нечетните

S_n - мн-вото от всички пермутации

$S_n = A_n \cup B_n$ и $A_n \cap B_n = \emptyset$

$\varphi : S_n \to S_n$

$\varphi(i_1 i_2, \dots, i_n) = i_2 i_1 i_3, \dots i_n$

$\alpha \in A_n \Rightarrow \varphi(\alpha) \in B_n$

$\alpha \in B_n \Rightarrow \varphi(\alpha) \in B_n$

$= \varphi^2(i_1, \dots, i_n) = (i_1, \dots i_n)$

$\Rightarrow \varphi \circ \varphi = \varphi^2 = id$

$\Rightarrow \varphi$ е „биекция"

взаимно еднозначно обратимо изображение

$\Rightarrow |A_n| = |B_n| = \frac{|S_n|}{2}$

четните пермут. са $\frac{n!}{2}$

нечетните перм. са $\frac{n!}{2}$