A - област на цялост $\quad A[X] \quad A \hookrightarrow A[X]$

$A \cong A_0 = \{(a_0, 0, 0, ---) \mid a_0 \in A\}$

$\varphi_c : \underset{\sim\sim\sim\sim\sim}{A[X] \longrightarrow A}$ за който $\varphi(a_0) = a_0$, $\forall a_0 \in A$

за който $\varphi(x) = c \in A$

$\varphi(f_0 + f_1 x + --- + f_n x^n) = \varphi(f_0) + \varphi(f_1)\varphi(x) + --- + \varphi(f_n)\varphi(x^n) =$

$= f_0 + f_1 c + --- + f_n c^n = f(c) \in A$

$\varphi_c(f) = f(c)$ стойност на f при $x = c$

<u>Тв</u>/ $\psi : A[X] \to A$ за който $\psi(a) = a$, $\forall a \in A$

Ако $\psi(x) = t \Rightarrow \psi(f) = f(t)$

Всеки хомоморфизъм $\psi : A[X] \to A$ за който се запазват константите" от A е от вида $\psi(f) = f(t)$ „вземане на стойност при $x = t$"

$\psi = \varphi_t$

$\underline{\underline{\psi(x) = t}}$

Опр. $g = g_0 + g_1 x + \dots + g_n x^n \in A[x]$, $c \in A$

c е корен на полинома, когато $g(c) = 0$

g: $\varphi_c(g) = 0$ т.е. $g \in \operatorname{Ker} \varphi_c$

Тв/ c е корен на полинома $g \iff (x-c) \mid g$ $(A[x])$

Д-во Делим:

$g = q \cdot (x-c) + r$, $\deg r < 1 \Rightarrow \deg r = \begin{cases} 0 \\ -\infty \end{cases}$

$r \in A$

$\varphi_c(g) = \varphi_c(q) \underbrace{\varphi_c(x-c)}_{=0} + \underbrace{\varphi_c(r)}_{=r} \Rightarrow \varphi_c(g) = g(c) = r$

c - корен $\iff r = 0 \iff (x-c) \mid g$

$g = g_0 + g_1 x + \dots + g_n x^n \in \mathbb{Z}[x] \subset \mathbb{Q}[x]$

Ако $\alpha = \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ е корен на $g \Rightarrow c \mid g_0$ и $d \mid g_n$

$(c, d) = 1$

Th) Полином от степен $\underline{\underline{n}}$ не може да има повече от $\underline{\underline{n}}$ различни корена.

Д-во $\deg f = n$, $f \in A[x]$

$c_1, \dots, c_k$ различни корени $(\in A)$ $\quad c_i \neq c_j \quad i \neq j$

$x - c_i$ – неразложими

$(x - c_i) \mid f \quad i = 1, \dots, k$ $\qquad$ НОД $(x - c_i, x - c_j) = 1 \quad i \neq j$

$f = (x - c_i) f_1 \qquad (x - \underline{\underline{c_j}}) \mid (x - \underline{\underline{c_i}}) f_1 \Rightarrow (x - c_i)(x - c_j) f_2 = f$

$- - - - - \quad f = (x - c_1)(x - c_2) \dots (x - c_k) f_k$

$\deg f = k + \deg f_k \Rightarrow \deg f \geq k$

I/ (Принцип за сравняване на коефициентите)

A - област на цялост, $f, g \in A[X]$, $\deg f \leq n$, $\deg g \leq n$

Ако съществуват $c_1, c_2, \dots, c_{n+1} \in A$, $c_i \neq c_j$ за $i \neq j$

такива че $f(c_i) = g(c_i)$, $i = 1, \dots, n+1$ $\Rightarrow$ $f = g$

(т.е. имат равни коеф.)

Д-во $\deg f, \deg g \leq n$ $h = f - g$ $\Rightarrow \deg h \leq n$

$h(c_i) = f(c_i) - g(c_i) = 0$ $\Rightarrow c_1, c_2, \dots c_{n+1}$

Ако h има $0 \leq \deg h \leq n$ (противоречие от предното)

$\Rightarrow h = 0 \Rightarrow f - g = 0 \Rightarrow f = g$

$\mathbb{Q}[x] \quad g = ? \qquad g(1) = a \quad g(2) = b \quad g(3) = c$

Лагранж

$$f = c\,\frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)} + b\,\frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} + a\,\frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)}$$

$f_1(1) = 0$

$f_1(2) = 0$

$f_1(3) = 1$

$f_2(1) = 0$

$f_2(3) = 0$

$f_2(2) = 1$

$f(1) = a \quad f(2) = b \quad f(3) = c$ и $g(1) = a$, $g(2) = b$, $g(3) = c$

$\Rightarrow$ ако $g : \deg g \le 2$

$f = g$

$\Rightarrow$

$\mathbb{Z}_2[x]$ $\quad \mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ $\quad \operatorname{char} \mathbb{Z}_2 = 2$ $\quad \bar{1}+\bar{1}=\bar{0}$

$f_1 = x + \bar{1}$ $\quad f_2 = x^2 + \bar{1}$ $\quad f_3 = x^4 + x^2 + x + \bar{1}$

$f_i : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$

	f_1	f_2	f_3
$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$

различни полиноми задават една и съща ф-я

~~забележка~~ ~~причината е само за област на цялост~~

$\mathbb{Z}_4[x]$ $\quad f = x^2 + \bar{2}x$ $\quad g = \bar{3}x^2$

$f(\bar{0}) = 0 \quad g(\bar{0}) = 0$

$f(\bar{1}) = \bar{3} \quad g(\bar{1}) = \bar{3}$

$f(\bar{2}) = \bar{0} \quad g(\bar{2}) = \bar{0}$

$f(\bar{3}) = \bar{3} \quad g(\bar{3}) = \bar{3}$

в $\mathbb{Z}_4[x]$ няма няма причини за сравн.

Опр. A - област, $c \in A$, $f \in A[x]$

$\underline{c}$ е $\underline{k}$-кратен корен на f, когато $(x-c)^k \mid f$ и $(x-c)^{k+1} \nmid f$

кратен корен — кратност ≥ 2

$f = x^5 - 5x^4 + 4x^3 + 16x^2 - 32x + 16 \in \mathbb{Z}[x]$

	1	−5	4	16	−32	16
2	1	−3	−2	12	−8	0
2	1	−1	−4	4	0	
2	1	1	−2	0		
2	1	3	4			

$f = (x-2)(x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 12x - 8)$

$f = (x-2)^2(x^3 - x^2 - 4x + 4)$

$f = (x-2)^3(x^2 + x - 2)$

$(x-2)^4 \nmid f$

$\Rightarrow$ 2 е 3-кратен корен на f

$\mathbb{Z}_2[x]$ $\quad f = x^{26} + x^{25} + x^{22} + x^{21} + x^6 + x^4 + x^2 + \bar{1}$

$\underline{\underline{\alpha = \bar{1}}} \to (x+\bar{1})^2 = x^2 + 1 \quad ; \quad (x+\bar{1})^4 = (x^2+\bar{1})^2 = x^4 + \bar{1}$

$f = (x^{26} + x^{22}) + (x^{25} + x^{21}) + (x^6 + x^2) + (x^4 + \bar{1}) =$

$= (x^4+\bar{1})(\underbrace{x^{22} + x^{21}} + \underbrace{x^2 + \bar{1}}_{=(x+\bar{1})^2}) = (x^4+\bar{1})(x+1)(\underbrace{x^{21} + x + \bar{1}}_{g})$

$g(\bar{1}) = 1$

$= (x+\bar{1})^4 (x+\bar{1})(x^{21} + x + \bar{1})$

$\Rightarrow \bar{1}$ е 5 кратен корен на f

$\mathbb{Z}_p$ $\quad A[x]$, $\quad A$ - област

формални производни

$f = f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + \dots + f_n x^n \in A[x]$

$f' = f_1 + 2f_2 x + \underbrace{3f_3}_{3\text{-кратно на } f_3} x^2 + \dots + \underbrace{n f_n}_{n\text{-кратно на } f_n} x^{n-1} \in A[x]$

$(cf)' = c f'$, $\quad c$ - const $\quad (\deg c = 0)$

$(f+g)' = f' + g'$

$(fg)' = f'g + fg'$

$(x^k x^s)' = (x^{k+s})' = (k+s) x^{k+s-1} = k x^{k-1} x^s + s x^k x^{s-1}$

$\mathbb{Z}_2[x]$

$g = x^{20} + x^{16} + x^8 + x^4 + x^2 + 1$

$g' = \bar{0}$

$\mathbb{Z}_2[x]$ $\quad f = x^{26} + x^{25} + x^{22} + x^{21} + x^6 + x^4 + x^2 + \bar{1}$

$f' = 26(\bar{1}) x^{25} + 25(\bar{1}) x^{24} + 22(\bar{1}) x^{21} + 21(\bar{1}) x^{20} + 6(\bar{1}) x^5 + 4(\bar{1}) x^3 + 2(\bar{1}) x + 0$

$= x^{24} + x^{20}$

I) Нека F – поле, $f \in F[X]$, $c \in F$.

c е кратен корен на f $\iff$ $f(c)=0$ и $f'(c)=0$ | кратен корен кратност ≥ 2

Д-во

$\Rightarrow$) c кратен корен $\Rightarrow (x-c)^2 \mid f(x) \Rightarrow f(x)=(x-c)^2 q(x)$

$f' = ((x-c)^2)' q(x) + (x-c)^2 q'(x) = 2(x-c)\, q(x) + (x-c)^2 q'(x)$

$\Rightarrow (x-c) \mid f' \Rightarrow f'(c)=0$ и $f(c)=0$

$\Leftarrow$) $f(c)=0$ и $f'(c)=0$ $\quad$ $\boxed{f(x)=(x-c)^2 q(x) + r(x)}$

$\deg r \leq 1 \quad r(x)=ax+b$

$f(c)=(c-c)^2 q(c) + ac + b = 0$

$f' = 2(x-c)q(x) + (x-c)^2 q'(x) + a$

$f'(c) = \underbrace{2(c-c)}\, q(c) + \underbrace{(c-c)^2}\, q'(c) + a = 0$

$\begin{cases} ac+b=0 \\ a=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a=0 \\ b=0 \end{matrix}$

$\Rightarrow r(x) = 0x + 0 = 0$

$\Rightarrow (x-c)^2 \mid f(x)$

c е поне 2-кратен корен

Пр. $\mathbb{Z}_2[x]$ $\quad g = x^4+\bar{1}$ $\quad g' = \bar{0}$

$g(\bar{1}) = 0$ $\quad g'(\bar{1}) = \bar{0}$

$g^{(k)} = \left(g^{(k-1)}\right)'$

Св. Ако $\operatorname{char} F = 0$ $\quad f(x) \in F[x]$

c е $\underline{k}$-кратен корен $\iff$

$f(c) = f'(c) = \dots = f^{(k-1)}(c) = 0$

и $f^{(k)}(c) \neq 0$

забел.

$f = x^{26} + x^{25} + x^{22} + x^{21} + x^6 + x^4 + x^2 + \bar{1} \in \mathbb{Z}_2[x]$

$f(\bar{1}) = \bar{0}$ $\quad f'(x) = x^{24} + x^{20}$ $\quad f'(\bar{1}) = \bar{0}$

$f''(x) = 24(\bar{1})x^{23} + 20(\bar{1})x^{19} = \bar{0}$

$f''(\bar{1}) = \bar{0}$