① Упражнение 24 за 1, 2 и 3 група

Още един пример за изследване на функция

Зад. 1 Изследвайте функцията $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{1-x^2}}$ и начертайте графиката ѝ.

Решение: $f(x)$ е дефинирана, непрекъсната и диференцуруема в $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.

$f(-x) = -f(x)$ за $x \in \mathbb{R}\setminus\{\pm1\}$, сл. $f(x)$ е нечетна и е достатъчно да я изследваме при $x \in [0, +\infty)$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \text{правата } x = 1 \text{ е вертикална асимптота на } f(x)$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{1-x^2}} = 0,$$

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - 0.x] = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}-1}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}-1}} = -\infty$$

Сл. $f(x)$ няма асимптота при $x \to +\infty$.

Но можем да забележим, че

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{-x^{\frac{1}{3}}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^2}}} = 1$ и сл. при $x \to +\infty$ графиката на $f(x)$ се приближава неограничено към графиката на $y = -\sqrt[3]{x}$.

$$f'(x) = \frac{1.\sqrt[3]{1-x^2} - \frac{x.(-2x)}{3\sqrt[3]{(1-x^2)^2}}}{\sqrt[3]{(1-x^2)^2}} = \frac{3(1-x^2)+2x^2}{3\sqrt[3]{(1-x^2)^4}} = \frac{3-x^2}{3\sqrt[3]{(1-x^2)^4}}, x \in \mathbb{R}\setminus\{\pm1\}$$

$$f''(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{-2x\sqrt[3]{(1-x^2)^4} - (3-x^2)\frac{4}{3}\sqrt[3]{1-x^2}(-2x)}{\sqrt[3]{(1-x^2)^8}} =$$

$$= \frac{2x}{3} \frac{-(1-x^2) + \frac{4}{3}(3-x^2)}{\sqrt[3]{(1-x^2)^7}} = \frac{2x}{9} \frac{-3(1-x^2)+4(3-x^2)}{\sqrt[3]{(1-x^2)^7}} =$$

$$= \frac{2x}{9} \frac{9-x^2}{\sqrt[3]{(1-x^2)^7}}, \quad x \in \mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$$

② $f'(x)=\dfrac{3-x^2}{3\sqrt[3]{(1-x^2)^4}},\ x\in\mathbb{R}\setminus\{\pm1\}$; $f''(x)=\dfrac{2x(9-x^2)}{9\sqrt[3]{(1-x^2)^7}},\ x\in\mathbb{R}\setminus\{\pm1\}$

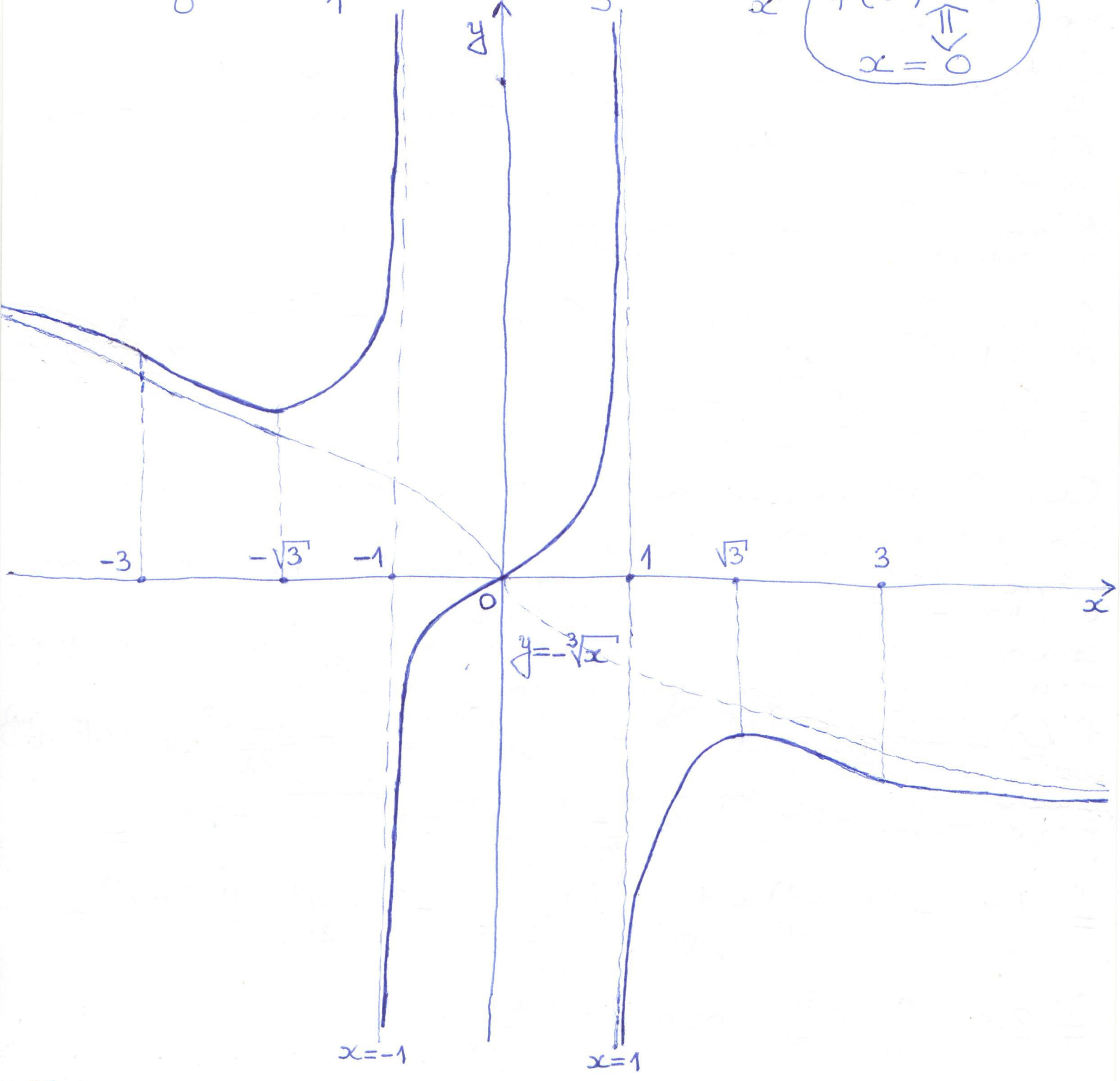
x	0		1		$\sqrt{3}$	
f'		$+$		$+$		$-$
f		$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$

$f(\sqrt{3})=-\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}$

x	0		1		3	
f''		$+$		$-$		$+$
f		$\cup$		$\cap$		$\cup$

$f(3)=-\dfrac{3}{2}$

$f(x)=0 \Leftrightarrow x=0$



Графика на функцията $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt[3]{1-x^2}}$

③ Неопределени интеграли

Нека $f(x)$ е дефинирана в интервал $\Delta \subset \mathbb{R}$.

Казваме, че $F(x)$ е примитивна на $f(x)$ в Δ, ако $F(x)$ е диференцируема в Δ и $F'(x)=f(x)$ в Δ.

Множеството от всички примитивни функции на $f(x)$ наричаме неопределен интеграл от $f(x)$ и означаваме с $\int f(x)\,dx$.

Ако $F(x)$ е примитивна на $f(x)$ в интервала Δ, то $\int f(x)\,dx = F(x) + c$, където $c \in \mathbb{R}$ е произволна константа.

Основни свойства на неопределения интеграл:

① $\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$;

② $\int a f(x)\,dx = a \int f(x)\,dx$, $a = const$.

Таблица на основните интеграли:

① $\int x^{\alpha}\,dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$, $\alpha \neq -1$

② $\int \dfrac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$

③ $\int a^{x}\,dx = \dfrac{a^{x}}{\ln a} + c$, $a > 0$; $a \neq 1$

(в частност $\int e^{x}\,dx = e^{x} + c$)

④ $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$

⑤ $\int \cos x\,dx = \sin x + c$

⑥ $\int \dfrac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + c$

⑦ $\int \dfrac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{cotg} x + c$

⑧ $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + c$

⑨ $\int \dfrac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + c$

⑩ $\int \dfrac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + c$, $a = const$ $(a \neq 0)$

4) Таблицата на основните интеграли следва веднага от таблицата на основните производни и обратно.

Непосредствено интегриране

Зад. 1 $I = \int (x^2 + 2x - 3)\,dx$

Решение: $I = \int x^2 dx + 2\int x\,dx - 3\int 1\,dx =$

$= \frac{x^3}{3} + \cancel{2}\cdot\frac{x^2}{\cancel{2}} - 3x + C$

Зад. 2 $I = \int \left(\sqrt{x\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}\right) dx$

Решение: $I = \int \sqrt{x\sqrt{x}}\,dx - 2\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx + \int \frac{1}{x^2}\,dx =$

$= \int x^{\frac{3}{4}}\,dx - 2\int x^{-\frac{1}{2}}\,dx + \int x^{-2}\,dx = \frac{x^{\frac{7}{4}}}{\frac{7}{4}} - 2\,\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \frac{x^{-1}}{-1} + C =$

$= \frac{4}{7}\sqrt[4]{x^7} - 4\sqrt{x} - \frac{1}{x} + C.$

Зад. 3 $I = \int \frac{x^5 - x + 1}{x^2 + 1}\,dx$

Решение: $I = \int \frac{x(x^4 - 1) + 1}{x^2 + 1}\,dx = \int \frac{x(x^2-1)(x^2+1) + 1}{x^2+1}\,dx =$

$= \int \left[x(x^2-1) + \frac{1}{x^2+1}\right] dx = \int \left[x^3 - x + \frac{1}{x^2+1}\right] dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + \operatorname{arctg} x + C$

Зад. 4 $I = \int \operatorname{tg}^2 x\,dx$

Решение: $I = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x}\,dx =$

$= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx = \operatorname{tg} x - x + C.$

Зад. 5 $I = \int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}\,dx$

Решение: $I = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}\,dx =$

$= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}\right) dx = \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x + C.$

Зад. 6 $I = \int 2^x 3^{2x}\,dx$

Решение: $I = \int 2^x 9^x\,dx = \int 18^x\,dx = \frac{18^x}{\ln 18} + C.$