2

- Дайте определение за Чебишовия полином Tn(x). Докажете, че измежду всички полиноми от степен n с коефициент 2^{n-1} пред x^n, най-малък максимум на абсолютната стойност в интервала [-1,1] има Tn(x)

Полиномът на Чебишов от първи род от n-та степен се бележи обикновено с $T_n(x)$ и се определя в интервала $[-1, 1]$ чрез равенството

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad x \in [-1, 1]. \qquad (1)$$

5str

Теорема 1

Нека $P(x)$ е произволен алгебричен полином от степен n с коефициент 2^{n-1} пред x^n. Тогава

$$\max_{x\in[-1,1]} |T_n(x)| \leq \max_{x\in[-1,1]} |P(x)|. \qquad (6)$$

Равенство имаме само при $P(x) \equiv T_n(x)$.

10str

4

- Напишете формула за връзката между **разделена разлика с равноотдалечени възли** и **крайна разлика**

Връзка между крайни и разделени разлики

В случай, че точките $\{x_i\}$ са равноотдалечени, съществува проста връзка между разделените и крайните разлики. Тя е представена в следната лема.

Лема 1

Нека $x_j = x_0 + jh$, $j = 0, \ldots, k$, и функцията $f(x)$ е определена в тези точки. Тогава

$$f[x_0, \ldots, x_k] = \frac{\Delta^k f_0}{k!\, h^k}. \qquad (1)$$

4str

5

- Формулирайте интерполационната задача на Ермит

Интерполационна задача на Ермит

Досега се занимавахме с интерполационната задача на Лагранж, която се състоеше в построяването на алгебричен полином от степен $\leq n$, който в $n+1$ дадени различни точки $x_0, \ldots, x_n$ приема дадени стойности $y_0, \ldots, y_n$, съответно.
Сега ще разгледаме една по-обща задача, при която се търси полином, който интерполира не само функцията, но и нейни производни. Да представим точната ѝ формулировка.
Нека $x_0, \ldots, x_n$ са дадени $n+1$ различни точки от реалната права. Нека $\nu_0, \ldots, \nu_n$ са цели положителни числа и

$$\{y_{k\lambda},\ k = 0, \ldots, n,\ \lambda = 0, \ldots, \nu_k - 1\}$$

е таблица от произволни реални стойности. Означаваме $N := \nu_0 + \cdots + \nu_n - 1$. Задачата е да се построи алгебричен полином P от степен N, който удовлетворява условията

$$P^{(\lambda)}(x_k) = y_{k\lambda}, \quad k = 0, \ldots, n, \quad \lambda = 0, \ldots, \nu_k - 1. \qquad (1)$$

3srt Тя е известна като интерполационна задача на Ермит.

7

- Дайте определение за Чебишова система от функции в интервал .[*a*,*b*]

Определение

Казваме, че функциите $\varphi_0(x), \ldots, \varphi_n(x)$ образуват система на Чебишов в интервала I, ако всеки ненулев обобщен полином по тази система има най-много n различни нули в I.

4стр

8

- Дайте определение за сплайн функция от степен r с възли x_1<…<x_n

Определение

Функцията $s(x)$ е сплайн-функция от степен r с възли $x_1 < \cdots < x_n$, ако удовлетворява следните изисквания:

1. $s(x)$ е полином от степен ненадминаваща r във всеки интервал (x_i, x_{i+1}), $i = 0, \ldots, n$ (където $x_0 = -\infty$, $x_{n+1} = \infty$);
2. $s(x), s'(x), \ldots, s^{(r-1)}(x)$ са непрекъснати в $(-\infty, \infty)$.

5стр

9-2ра 4аст

- Ако a < x{r+1}<x{r+2}<…<xn<b, опишете как се построява басиз от B-сплайни от степен r-1 за пространството от сплайн-функции $S{r-1}(x{r+1},…,xn)$ разглебдани в интервала $[a,b]$

Базис от B–сплайни

Теорема 2.

Нека точките $x_1 < \cdots < x_r < a$ и $b < x_{n+1} < \cdots < x_{n+r}$ са избрани по произволен начин, и нека $B_i(t) := B(x_i, \ldots, x_{i+r}; t), \quad i = 1, \ldots, n$. Тогава B-сплайните $\{B_i(t)\}_{i=1}^n$ образуват базис за пространството S върху интервала $[a, b]$.

18стр

- Дайте рекурентна връзка между B-сплайн от степен r-1 и r-2. Докажете я

Основна рекурентна връзка

Пресмятането на стойността на B–сплайните в дадена точка се основава на следната рекурентна връзка:.

Теорема 3 (Основна рекурентна връзка).

За всяко $r \geq 2$ и $t \in (-\infty, \infty)$ е изпълнено равенството

$$B_{i,r-1}(t) = \frac{t - x_i}{x_{i+r} - x_i} B_{i,r-2}(t) + \frac{x_{i+r} - t}{x_{i+r} - x_i} B_{i+1,r-2}(t).$$

23стр

10

- Дайте определение за еквивалентни норми в линейно нормирано пространство. Докажете, че всеки две норми в R^n са еквивалентни

Определение

Казваме, че две норми $\nu(f)$ и $\mu(f)$ са еквивалентни в F, ако съществуват положителни числа m и M такива, че

$$m\,\mu(f) \leq \nu(f) \leq M\,\mu(f) \quad \text{за всяко } f \in F.$$

11стр

- Дайте определение за строго нормирано линейно пространство. Докажете, че елементът на приближение в строго нормирано линейно пространство е единствен.

Определение

Нормираното линейно пространство F се нарича строго нормирано, ако от равенството

$$\|f+g\| = \|f\| + \|g\|$$

следва, че елементите f и g са линейно зависими.

19

11

- Формулирайте теоремата на Чебишов за алтернанса. Докажете достатъчността на изискването за алтернанс в тази теорема.

Теорема на Чебишов за алтернанса

Нека f е произволна непрекъсната функция в крайния и затворен интервал $[a, b]$. Необходимо и достатъчно условие полиномът P от π_n да бъде полином на най-добро равномерно приближение за f от n-та степен в $[a, b]$ е да съществуват $n+2$ точки $\{x_i\}_{i=0}^{n+1}$ от $[a, b]$ такива, че $a \le x_0 < x_1 < \ldots < x_{n+1} \le b$ и

$$f(x_i) - P(x_i) = (-1)^i \varepsilon \, \|f - P\|, \qquad i = 0, \ldots, n+1\,, \tag{4}$$

където $\varepsilon = 1$ или $\varepsilon = -1$.

10стр

12 1ва 4аст

- Формулирайте първата теорема на Вайерщрас

Първа теорема на Вайерщрас

Нека $[a, b]$ е произволен краен интервал и $f(x)$ е непрекъсната функция в $[a, b]$. Тогава, за всяко $\varepsilon > 0$ съществува алгебричен полином $P(x)$ такъв, че

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x) - P(x)| \le \varepsilon\,.$$

19стр

13 1ва 4аст

- Формулирайте и докажете теоремата характеризираща елемента на най-добро приближение в Хилбертово пространство

Теорема 1.

Нека H е произволно хилбертово пространство и $f \in H$. Елементът p от Ω_n е елемент на най-добро приближение за f с елементи от Ω_n тогава и само тогава, когато

$$(f - p, \varphi) = 0 \qquad \text{за всяко } \varphi \text{ от } \Omega_n . \tag{3}$$

9стр

14 първа част

- Формулирайте и докажете теоремата за оценка на грешка в интерполационнa квадратурна формула.

Интерполационни квадратурни формули

За грешката на това приближение имаме

$$R(f) := I(f) - I(L_n(f)) = \int_a^b f[x_0, \dots, x_n, x]\omega(x)\, dx . \tag{4}$$

5стр

14 2ра част

- Формулирайте и докажете теоремата характеризираща Гаусовата квадратурна формула

Квадратурна формула на Гаус

Теорема 1 (квадратурна формула на Гаус)

При всяко естествено число n съществува единствена квадратурна формула Q от вида (1) с АСТ$= 2n - 1$. Възлите $\{x_k\}_{k=1}^n$ на тази квадратурна формула са нулите на полинома от степен n, ортогонален в интервала $[a, b]$ при тегло $\mu(x)$ на всички алгебрични полиноми от π_{n-1}.

9стр

15 първа част

- Дайте определение за ред на сходимост на итерационен процес

Определение

Казваме, че итерационният процес $x_0, x_1, \ldots$ има ред на сходимост p, $(p > 1)$, ако съществуват положителни константи C и $q < 1$ такива, че

$$|x_n - \xi| \leq Cq^{p^n} \quad \text{за всяко } n.$$

17стр

- Формулирайте и докажете теоремата за ред на сходимост на итерационен процес

Достатъчно условие за ред на сходимост p

Следващата теорема ни дава един начин за определяне реда на сходимост на итерационния процес, породен от функцията φ.

Теорема 2.

Нека φ има непрекъснати производни до p–тата включително в околност на точката ξ, която е неподвижна за φ. Нека

$$\varphi'(\xi) = \ldots = \varphi^{(p-1)}(\xi) = 0, \quad \varphi^{(p)}(\xi) \neq 0.$$

Тогава, при достатъчно добро начално приближение x_0, итерационният процес, породен от φ, има ред на сходимост p.

18стр

15 2ра част

- Напишете формулта на хордите за числено намиране на корен на нелинейно уравнение.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(b) - f(x_n)}(b - x_n). \qquad (1)$$

Това е формулата за пресмятане на последователните приближения на корена ξ по метода на хордите.

6стр

- Напишете формулата на Нютон за числено намиране на корен на нелинейно уравнение

Метод на Нютон

Методът на Нютон (метод на допирателните) е по-бързо сходящ и от метода на секущите. И тук ще изискваме да са изпълнени условията а), б) и в) от метода на секущите. Избираме начално приближение $x_0 = a$ или $x_0 = b$ така, че да имаме $f(x_0)\, f''(x_0) > 0$. Следващото приближение x_1 се намира като пресечна точка на оста x с допирателната t_0 към правата $y = f(x)$ в точката x_0 (виж Фигура 3). След това намираме x_2 като нула на допирателната t_1 към f в x_1 и т.н., x_{n+1} е нулата на допирателната t_n към f в точката x_n. От условието $\ell_n(x_{n+1}) = 0$, където

$$\ell_n(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)\,,$$

намираме формулата за получаване на x_{n+1} от x_n:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\,.$$

214аст

15 трета част

- Формулирайте и докажете теоремата на Коши, локализираща корените на алгебричен полином в комплексната равнина

Теорема 1 (правило на Коши)

Нека $p(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$ е алгебричен полином с произволни комплексни коефициенти. Да предположим, че $a_n \neq 0$. Тогава за всяка нула x на p е изпълнено

$$|x| \le R\,,$$

където R е единственият положителен корен на уравнението

$$t^n - |a_1|t^{n-1} - \ldots - |a_{n-1}|t - |a_n| = 0\,. \qquad (1)$$

3 str

- Формулирайте теоремата на Бюдан-Фурие за броя на корените на алгебрично уравнение в интервал $[a,b]$.

Теорема на Бюдан-Фурие

Нека $f(x)$ е алгебричен полином от степен точно n. Тогава

$$Z(f;(a,b)) = S^{-}\left(f(a), f'(a), f''(a), \ldots, f^{(n)}(a)\right) - S^{+}\left(f(b), f'(b), f''(b), \ldots, f^{(n)}(b)\right)$$

Str 16 или лявата страна е с четно число по-малка от дясната.

- Дайте определение за алгебрическа степен на квадратурна формула

Определение. Казваме, че една квадратурна формула Q има *алгебрическа степен на точност* m (и пишем $ACT(Q) = m$), ако тя е точна за всички алгебрични полиноми от степен $\leq m$, и съществува полином от степен $m+1$, за който Q не е точна.

-
-
- Докажете, че всеки три последователни ортогонални полинома (в един и същ интервал и при едно и също тегло) удовлетворяват тричленна рекурентна връзка. [*a*,*b]*