Матрица на преход

Нека V е линейно пространство над поле F
$(e) = e_1, \dots, e_n$ - базис на V и $(b) = b_1, \dots, b_n$ базис на V

$$b_1 = \alpha_{11} e_1 + \alpha_{21} e_2 + \dots + \alpha_{n1} e_n$$
$$b_2 = \alpha_{12} e_1 + \alpha_{22} e_2 + \dots + \alpha_{n2} e_n$$
$$\dots$$
$$b_n = \alpha_{1n} e_1 + \alpha_{2n} e_2 + \dots + \alpha_{nn} e_n$$

$$T = T_{(e) \to (b)} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{array} \end{array}$$

матрица на прехода от базиса $(e) \longrightarrow (b)$

Св-ва

1) Матрицата на прехода е обратима матрица
2) Всяка обратима матрица е матрица на прехода от базис e към някакъв базис

Тб/ Ако V е n-мерно линейно пр-во и $(e) = e_1, \dots, e_n$ базис на V и $(b) = b_1, \dots, b_n$ базис и $T = T_{(e)\to(b)}$ матрицата на прехода

Ако $u \in V$: $u = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$, $u = y_1 b_1 + \dots + y_n b_n$, тогава:

$$\boxed{T\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ и } T^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}$$

$u = y_1 b_1 + \dots + y_n b_n =$

$= y_1(\alpha_{11} e_1 + \alpha_{21} e_2 + \dots + \alpha_{n1} e_n) +$

$+ y_2(\alpha_{12} e_1 + \alpha_{22} e_2 + \dots + \alpha_{n2} e_n) +$

$+ \dots \dots +$

$+ y_n(\alpha_{1n} e_1 + \alpha_{2n} e_2 + \dots + \alpha_{nn} e_n) =$

$= (\alpha_{11} y_1 + \alpha_{12} y_2 + \dots + \alpha_{1n} y_n) e_1 +$

$+ (\alpha_{21} y_1 + \alpha_{22} y_2 + \dots + \alpha_{2n} y_n) e_2 +$

$+ \dots +$

$+ (\alpha_{n1} y_1 + \alpha_{n2} y_2 + \dots + \alpha_{nn} y_n) e_n$

$= x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$

$$T\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Rightarrow T\begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \dots & \tau_{1n} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & & \tau_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & \dots & \tau_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} T \cdot T_1 = E \\ T_1 = T^{-1} \end{array}$$

Св-во

1) Ако матрицата на прехода $(e) \to (b)$ е T, тогава матрицата на прехода $(b) \to (e)$ е T^{-1}

2) Ако $(e) = e_1, \dots, e_n$; $(b) = b_1, \dots, b_n$ и $(g) = (g_1, \dots, g_n)$ и $T = T_{(e)\to(b)} = (t_{ij})$ и $U = T_{(b)\to(g)} = (u_{ij})$ тогава матрицата на прехода $(e) \to (g)$ е $P = T \cdot U$

$$g_k = u_{1k} b_1 + u_{2k} b_2 + \dots + u_{nk} b_n = p_{1k} e_1 + \dots + p_{nk} e_n$$

$$\Rightarrow T \begin{pmatrix} u_{1k} \\ u_{2k} \\ \vdots \\ u_{nk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{1k} \\ p_{2k} \\ \vdots \\ p_{nk} \end{pmatrix} \Rightarrow T \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{n1} & u_{n2} & \dots & u_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \dots & & & \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

Пример: e_1, e_2, e_3 стандартния базис на $\mathbb{R}^3$

Нека $b_1 = (1,2,1)$; $b_2 = (3,1,0)$; $b_3 = (-1,4,5)$

→ матрицата на прехода е $T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 3 & -6 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -6 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 12 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -6 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1/12 & -3/12 & \frac{5}{12} \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{12} & \frac{15}{12} & -\frac{13}{12} \end{array}\right) \Rightarrow T^{-1} = T_{(b)\to(e)} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} -5 & 15 & -13 \\ 6 & -6 & 6 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

→ Ако $v_1 = 3b_1 + 4b_2 - b_3 = (16, 6, -2)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Ако $v_2 = (8, 9, 10)$

$$\frac{1}{12}\begin{pmatrix} -5 & 15 & -13 \\ 6 & -6 & 6 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{35}{12} \\ \frac{9}{2} \\ \frac{31}{12} \end{pmatrix}$$

$$v_2 = -\frac{35}{12}b_1 + \frac{9}{2}b_2 + \frac{31}{12}b_3$$

празна стр.

Т// Нека $\varphi: V \to V$ е линеен оператор и $(e) = e_1, \dots, e_n$ и $(b) = b_1, \dots, b_n$ са базиси на V като $T = (\tau_{ij})$ е матрицата на прехода от $(e) \to (b)$.
Ако A - матрица на φ в базис (e) и
B - матрица на φ в базис (b), тогава
$$B = T^{-1}AT$$

Д-во// Нека $x \in V$ и $\varphi(x) = y$

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n = u_1 b_1 + \dots + u_n b_n$$
$$y = \varphi(x) = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n = w_1 b_1 + \dots + w_n b_n$$

$$\begin{tikzcd}
 & \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \arrow[r, "A"] \arrow[d, shift right, "T^{-1}"'] & \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \arrow[d, shift right, "T^{-1}"'] & \\
x \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \varphi(x) \arrow[ul] \arrow[dl] \\
 & \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \arrow[r, "B"] \arrow[uu, shift right, "T"'] & \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \arrow[uu, shift right, "T"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = T^{-1} A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = T^{-1}AT \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

$$\left.\Rightarrow B \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = T^{-1}AT \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow B = T^{-1}AT$$

равенство за произволни вектори $(u_1 \dots u_n)$

празна ст.

Подобни матрици

Опр. Нека $A, B \in M_{n \times n}(F)$

$A \sim B$, когато $\exists\, T$ - неособена матр. ($\in M_{n\times n}(F)$) /

$B = T^{-1} A T$

Св-во / Подобието на матрици е релация на еквивал.

1) $A \sim A$ $\quad (A = E^{-1} A E)$

2) ако $A \sim B \Rightarrow B \sim A$ $\quad$ (от $B = T^{-1} A T \Rightarrow A = T B T^{-1} = (T^{-1})^{-1} B T^{-1}$

3) Ако $A \sim B$ и $B \sim C \Rightarrow A \sim C$

от $B = T^{-1} A T$ и $C = U^{-1} B U = U^{-1} T^{-1} A T U =$

$= (TU)^{-1} A T U$

Подобните матрици са матрици на един и същ оператор спрямо различни базиси

Опр. За $A \in M_{n\times n}(F)$

$$f_A(\lambda) = \det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \hline a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

характеристичен полином на A

1) $f_A(\lambda)$ е полином от степен n и старши коеф. $(-1)^n$

2) $f_A(\lambda)$ има коеф. пред $\lambda^{n-1} \to (-1)^{n-1}(\underbrace{a_{11}+a_{22}+\dots+a_{nn}}_{\text{следа на } A,\ tr A})$

(Получава се от $(a_{11}-\lambda)\dots(a_{nn}-\lambda)$)

3) свободния коеф. на $f_A(\lambda)$ е равен на $\det A$

Тв. Ако $A \sim B$, тогава $f_A(\lambda)=f_B(\lambda)$

Д-во

$$f_B(\lambda)=\det(B-\lambda E)=\det(T^{-1}AT-\lambda E)=\det(T^{-1}AT-\lambda T^{-1}ET)=$$

$$=\det(T^{-1}(A-\lambda E)T)=\cancel{\det T^{-1}}\det(A-\lambda E)\cancel{\det T}=$$

$$=\det A$$

празна стр.