Лекция V - Съвместни дискретни разпределения

Лекция V - Съвместни дискретни разпределения

- Поасоново разпределение
- Функция на разпределение
- Независимост
- Ковариация, Корелация
- Полиномно разпределение

Поасоново разпределение

В началото на тази лекция ще разгледаме още едно дискретно разпределение - поасоновото - $X \in Po(\lambda)$

Често се налага да се разглеждат модели, при които се извършват много независими опити, но вероятността за успех при всеки от тях е малка. Като интерес представлява броят на успехите X. Тогава разглеждаме модел, в който случайната величина е биномно разпределена $X \in Bi(n, p)$, но $n \to \infty$, $p \to 0$. Това гранично разпределение е изведено от френския математик Симеон Поасон.

Поасоново разпределение

В началото на тази лекция ще разгледаме още едно дискретно разпределение - поасоновото - $X \in Po(\lambda)$

Често се налага да се разглеждат модели, при които се извършват много независими опити, но вероятността за успех при всеки от тях е малка. Като интерес представлява броят на успехите X. Тогава разглеждаме модел, в който случайната величина е биномно разпределена $X \in Bi(n, p)$, но $n \to \infty$, $p \to 0$. Това гранично разпределение е изведено от френския математик Симеон Поасон.

Ще дефинираме поасоново разпределение по следния начин. Нека сл.в. X взима целочислени стойности с вероятност:

$X \in Po(\lambda)$

$$\mathrm{P}(X = k) = \frac{\lambda^k \, e^{-\lambda}}{k!},$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

където $\lambda > 0$ е константа.

Поасоново разпределение

В началото на тази лекция ще разгледаме още едно дискретно разпределение - поасоновото - $X \in Po(\lambda)$

Често се налага да се разглеждат модели, при които се извършват много независими опити, но вероятността за успех при всеки от тях е малка. Като интерес представлява броят на успехите X. Тогава разглеждаме модел, в който случайната величина е биномно разпределена $X \in Bi(n,p)$, но $n \to \infty$, $p \to 0$. Това гранично разпределение е изведено от френския математик Симеон Поасон.

Ще дефинираме поасоново разпределение по следния начин. Нека сл.в. X взима целочислени стойности с вероятност:

$X \in Po(\lambda)$

$$\mathrm{P}(X = k) = \frac{\lambda^k\, e^{-\lambda}}{k!},$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots$$

където $\lambda > 0$ е константа.

Разпределението е добре дефинирано, тъй като

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k\, e^{-\lambda}}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1.$$

Поасоново разпределение

Поасоновото разпределение се използва,за описване на редки събития. Типичният пример е заявки към сървър. Броят на компютрите в мрежата е голям, а вероятността конкретен компютър да потърси връзка е малка. Тогава броят на заявките е поасоново разпределена случайна величина. Поасоново разпределени се оказват и броя на мутиращите клетки при рентгеново облъчване, головете по време на футболна среща и т.н.

Поасоново разпределение

Поасоновото разпределение се използва,за описване на редки събития. Типичният пример е заявки към сървър. Броят на компютрите в мрежата е голям, а вероятността конкретен компютър да потърси връзка е малка. Тогава броят на заявките е поасоново разпределена случайна величина. Поасоново разпределени се оказват и броя на мутиращите клетки при рентгеново обълчване, головете по време на футболна среща и т.н.

Следващата теорема дава условията, при които поасоновото разпределение може да се използва като апроксимация за биномното.

Теорема на Поасон

Нека сл.в. $X \in Bi(n, p_n)$, т.е.

$$\mathrm{P}(X = k) = \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k}.$$

Ако $n \to \infty$, $p_n \to 0$, така че $np_n \to \lambda$, където $0 < \lambda < \infty$, тогава за всяко фиксирано $k = 0, 1, 2, \ldots$ е изпълнено

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{P}(X = k) = \frac{\lambda^k \, e^{-\lambda}}{k!}.$$

Поасоново разпределение

Док. Най-напред ще преработим биномния коефициент:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-(k-1))}{k!} = \frac{n^k(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\dots(1-\frac{k-1}{n})}{k!}$$

Док. Най-напред ще преработим биномния коефициент:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-(k-1))}{k!} = \frac{n^k(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\dots(1-\frac{k-1}{n})}{k!}$$

Ще запишем биномната вероятност $\mathrm{P}(X=k)$ от условието по следния начин:

$$\mathrm{P}(X=k) = \frac{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\dots(1-\frac{k-1}{n})}{k!} n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k}. \qquad (\star)$$

Поасоново разпределение

Док. Най-напред ще преработим биномния коефициент:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-(k-1))}{k!} = \frac{n^k(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\dots(1-\frac{k-1}{n})}{k!}$$

Ще запишем биномната вероятност $\mathsf{P}(X=k)$ от условието по следния начин:

$$\mathsf{P}(X=k) = \frac{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\dots(1-\frac{k-1}{n})}{k!} n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k}. \qquad (\bigstar)$$

Сега ще намерим границите при $n \longrightarrow \infty$ на отделните множители в този израз. За всяко $i = 1, 2, \dots k-1$ при $n \longrightarrow \infty$ е изпълнено:

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \left(1 - \frac{i}{n}\right) = 1.$$

По условие k е фиксирано число, тогава в следното произведението има краен брой, а именно $k-1$ множителя, следователно

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) = 1. \qquad (\mathrm{I})$$

Поасоново разпределение

Знаем, че $np_n \to \lambda$, тогава

$$\lim_{n\to\infty} n^k p_n^k = \lim_{n\to\infty} (np_n)^k = \lambda^k. \tag{II}$$

Поасоново разпределение

Знаем, че $np_n \longrightarrow \lambda$, тогава

$$\lim_{n\to\infty} n^k p_n^k = \lim_{n\to\infty} (np_n)^k = \lambda^k. \tag{II}$$

От условието $np_n \longrightarrow \lambda$ следва $p_n \longrightarrow \lambda/n$.

$$\lim_{n\to\infty} (1 - p_n)^{n-k} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n} \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k}$$

Поасоново разпределение

Знаем, че $np_n \to \lambda$, тогава

$$\lim_{n\to\infty} n^k p_n^k = \lim_{n\to\infty} (np_n)^k = \lambda^k. \tag{II}$$

От условието $np_n \to \lambda$ следва $p_n \to \lambda/n$.

$$\lim_{n\to\infty} (1-p_n)^{n-k} = \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n} \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}$$

Първата граница е добре позната $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda}$.

Поасоново разпределение

Знаем, че $np_n \to \lambda$, тогава

$$\lim_{n\to\infty} n^k p_n^k = \lim_{n\to\infty} (np_n)^k = \lambda^k. \tag{II}$$

От условието $np_n \to \lambda$ следва $p_n \to \lambda/n$.

$$\lim_{n\to\infty} (1 - p_n)^{n-k} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n} \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k}$$

Първата граница е добре позната $\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda}$.

За пресмятане на втората граница отново ще използваме факта, че k е крайно и тогава аналогично на (I) получаваме:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} = 1$$

Следователно

$$\lim_{n\to\infty} (1 - p_n)^{n-k} = e^{-\lambda} \tag{III}$$

Поасоново разпределение

Знаем, че $np_n \to \lambda$, тогава

$$\lim_{n\to\infty} n^k p_n^k = \lim_{n\to\infty} (np_n)^k = \lambda^k. \tag{II}$$

От условието $np_n \to \lambda$ следва $p_n \to \lambda/n$.

$$\lim_{n\to\infty} (1-p_n)^{n-k} = \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n} \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}$$

Първата граница е добре позната $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n} = e^{-\lambda}$.

За пресмятане на втората граница отново ще използваме факта, че k е крайно и тогава аналогично на (I) получаваме:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} = 1$$

Следователно

$$\lim_{n\to\infty} (1-p_n)^{n-k} = e^{-\lambda} \tag{III}$$

За да завършим доказателството е достатъчно да извършим граничен преход в (★) и да заместим (I), (II) и (III). □

Поасоново разпределение

За пресмятането на математическото очакване и дисперсията на поасоновото разпределение ще използваме свойствата пораждащите функции. Нека $X \in Po(\lambda)$ за пораждащата функция на X получаваме:

$$g_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{P}(X = k)\, s^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k\, e^{-\lambda}}{k!}\, s^k = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda s)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda s} = e^{\lambda(s-1)}$$

За пресмятането на математическото очакване и дисперсията на поасоновото разпределение ще използваме свойствата пораждащите функции. Нека $X \in Po(\lambda)$ за пораждащата функция на X получаваме:

$$g_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{P}(X = k)\, s^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k\, e^{-\lambda}}{k!}\, s^k = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda s)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda s} = e^{\lambda(s-1)}$$

Тогава математическото очакване на X е

$$\mathrm{E}X = g'_X(1) = \lambda e^{\lambda(s-1)}\Big|_{s=1} = \lambda.$$

За дисперсията на X получаваме

$$\mathrm{D}X = g''_X(1) + g'_X(1) - \left(g'_X(1)\right)^2 = \lambda^2 e^{\lambda(s-1)}\Big|_{s=1} + \lambda - \lambda^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

Поасоново разпределение

Пример

Това е първият исторически (от 1894г.) пример за използване на поасоново разпределение. Съгласно статистиката водена в пруската армия, в продължение на 20 години в 14 кавалерийски полка, от ритване на кон са починали общо 196 войника. Това означава, че средно се падат $\lambda = 196/(14 \times 20) = 0.7$ смъртоносни ритвания. Ако приемем, че броят X на трагичните изходи в полк за година се подчинява на поасоново разпределение, т.е. $X \in Po(\lambda)$, ще следва:

Поасоново разпределение

Пример

Това е първият исторически (от 1894г.) пример за използване на поасоново разпределение. Съгласно статистиката водена в пруската армия, в продължение на 20 години в 14 кавалерийски полка, от ритване на кон са починали общо 196 войника. Това означава, че средно се падат $\lambda = 196/(14 \times 20) = 0.7$ смъртоносни ритвания. Ако приемем, че броят X на трагичните изходи в полк за година се подчинява на поасоново разпределение, т.е. $X \in Po(\lambda)$, ще следва:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X=0) &= e^{-0.7} &\approx 0.496 \\ \mathrm{P}(X=1) &= 0.7e^{-0.7} &\approx 0.348 \\ \mathrm{P}(X=2) &= \frac{0.7^2 e^{-0.7}}{2} &\approx 0.122 \end{aligned}$$

и т.н.

Поасоново разпределение

Пример

Това е първият исторически (от 1894г.) пример за използване на поасоново разпределение. Съгласно статистиката водена в пруската армия, в продължение на 20 години в 14 кавалерийски полка, от ритване на кон са починали общо 196 войника. Това означава, че средно се падат $\lambda = 196/(14 \times 20) = 0.7$ смъртоносни ритвания. Ако приемем, че броят X на трагичните изходи в полк за година се подчинява на поасоново разпределение, т.е. $X \in Po(\lambda)$, ще следва:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X = 0) &= e^{-0.7} &\approx 0.496 \\ \mathrm{P}(X = 1) &= 0.7e^{-0.7} &\approx 0.348 \\ \mathrm{P}(X = 2) &= \frac{0.7^2 e^{-0.7}}{2} &\approx 0.122 \end{aligned}$$

и т.н.Тогава при общо 280 наблюдения:

очаквани стойности

139 случая да няма пострадал

97 да има един починал

34 полка да има двама починали

и т.н.

Поасоново разпределение

Пример

Това е първият исторически (от 1894г.) пример за използване на поасоново разпределение. Съгласно статистиката водена в пруската армия, в продължение на 20 години в 14 кавалерийски полка, от ритване на кон са починали общо 196 войника. Това означава, че средно се падат $\lambda = 196/(14 \times 20) = 0.7$ смъртоносни ритвания. Ако приемем, че броят X на трагичните изходи в полк за година се подчинява на поасоново разпределение, т.е. $X \in Po(\lambda)$, ще следва:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(X = 0) &= e^{-0.7} \approx 0.496 \\
\mathrm{P}(X = 1) &= 0.7e^{-0.7} \approx 0.348 \\
\mathrm{P}(X = 2) &= \frac{0.7^2 e^{-0.7}}{2} \approx 0.122
\end{aligned}
$$

и т.н.Тогава при общо 280 наблюдения:

очаквани стойности	- действителни стойности
139 случая да няма пострадал	- в 140 полка няма пострадал
97 да има един починал	- в 91 има един починал
34 полка да има двама починали	- 32 полка има двама починали
и т.н.	

Двумерни дискретни разпределения

Често не е достатъчно да се познават свойствата на една единствена случайна величина. Важно е да се знае начина по който тя си взаимодейства и влиянието, което има върху други случайни величини. С тази цел се разглеждат съвместните разпределения. В тази лекция ние ще се ограничим само до двумерния случай.

Двумерни дискретни разпределения

Често не е достатъчно да се познават свойствата на една единствена случайна величина. Важно е да се знае начина по който тя си взаимодейства и влиянието, което има върху други случайни величини. С тази цел се разглеждат съвместните разпределения. В тази лекция ние ще се ограничим само до двумерния случай.

Дефиниция - Съвместно разпределение

Съвместно разпределение на случайните величини X и Y, наричаме следната таблица:

$Y \backslash X$	x_1	x_2	$\dots$	x_n	$\dots$
y_1	$p_{1,1}$	$p_{1,2}$	$\dots$	$p_{1,n}$	$\dots$
y_2	$p_{2,1}$	$\dots$			$\dots$
$\dots$	$\dots$				

където $p_{i,j} = \mathrm{P}(X = x_j, Y = y_i)$, като

$$\sum_{i,j} p_{i,j} = 1$$

Двумерни дискретни разпределения

Често не е достатъчно да се познават свойствата на една единствена случайна величина. Важно е да се знае начина по който тя си взаимодейства и влиянието, което има върху други случайни величини. С тази цел се разглеждат съвместните разпределения. В тази лекция ние ще се ограничим само до двумерния случай.

Дефиниция - Съвместно разпределение

Съвместно разпределение на случайните величини X и Y, наричаме следната таблица:

$Y \backslash X$	x_1	x_2	$\dots$	x_n	$\dots$
y_1	$p_{1,1}$	$p_{1,2}$	$\dots$	$p_{1,n}$	$\dots$
y_2	$p_{2,1}$	$\dots$			$\dots$
$\dots$	$\dots$				

където $p_{i,j} = \mathrm{P}(X = x_j, Y = y_i)$, като

$$\sum_{i,j} p_{i,j} = 1$$

В тази дефиниция x_j и y_i са съответно стойностите на сл.в. X и Y и те могат да бъдат краен или най-много изброим брой.

Двумерни дискретни разпределения

Пример

Хвърляме два зара. Нека случайната величина X е броят на шестиците, а Y броят на единиците паднали се върху заровете. Ще намерим съвместното разпределение на X и Y.

Ясно е, че X и Y могат да вземат като стойности числата 0, 1 и 2.

Пример

Хвърляме два зара. Нека случайната величина X е броят на шестиците, а Y броят на единиците паднали се върху заровете. Ще намерим съвместното разпределение на X и Y.

Ясно е, че X и Y могат да вземат като стойности числата 0, 1 и 2. Събитието $\{X = 0, Y = 0\}$ означава, че върху заровете не се е паднала нито една шестица или единица, тогава $\mathsf{P}(X = 0, Y = 0) = (4/6)^2$.

Двумерни дискретни разпределения

Пример

Хвърляме два зара. Нека случайната величина X е броят на шестиците, а Y броят на единиците паднали се върху заровете. Ще намерим съвместното разпределение на X и Y.

Ясно е, че X и Y могат да вземат като стойности числата 0, 1 и 2. Събитието $\{X = 0, Y = 0\}$ означава, че върху заровете не се е паднала нито една шестица или единица, тогава $\mathrm{P}(X = 0, Y = 0) = (4/6)^2$. Аналогично $\mathrm{P}(X = 1, Y = 0) =$

Пример

Хвърляме два зара. Нека случайната величина X е броят на шестиците, а Y броят на единиците паднали се върху заровете. Ще намерим съвместното разпределение на X и Y.

Ясно е, че X и Y могат да вземат като стойности числата 0, 1 и 2. Събитието $\{X = 0, Y = 0\}$ означава, че върху заровете не се е паднала нито една шестица или единица, тогава $\mathrm{P}(X = 0, Y = 0) = (4/6)^2$. Аналогично $\mathrm{P}(X = 1, Y = 0) = 2\,(1/6)\,4/6$ и т.н.

Съвместното разпределение на X и Y има вида:

Двумерни дискретни разпределения

Пример

Хвърляме два зара. Нека случайната величина X е броят на шестиците, а Y броят на единиците паднали се върху заровете. Ще намерим съвместното разпределение на X и Y.

Ясно е, че X и Y могат да вземат като стойности числата 0, 1 и 2. Събитието $\{X = 0, Y = 0\}$ означава, че върху заровете не се е паднала нито една шестица или единица, тогава $\mathrm{P}(X = 0, Y = 0) = (4/6)^2$. Аналогично $\mathrm{P}(X = 1, Y = 0) = 2\,(1/6)\,4/6$ и т.н.

Съвместното разпределение на X и Y има вида:

$Y \backslash X$	0	1	2
0	16/36	8/36	1/36
1	8/36	2/36	0
2	1/36	0	0

Пример

Хвърляме два зара. Нека случайната величина X е броят на шестиците, а Y броят на единиците паднали се върху заровете. Ще намерим съвместното разпределение на X и Y.

Ясно е, че X и Y могат да вземат като стойности числата 0, 1 и 2. Събитието $\{X = 0, Y = 0\}$ означава, че върху заровете не се е паднала нито една шестица или единица, тогава $\mathrm{P}(X = 0, Y = 0) = (4/6)^2$. Аналогично $\mathrm{P}(X = 1, Y = 0) = 2\,(1/6)\,4/6$ и т.н.

Съвместното разпределение на X и Y има вида:

$Y \backslash X$	0	1	2
0	16/36	8/36	1/36
1	8/36	2/36	0
2	1/36	0	0

Всяка от случайните величини разгледана самостоятелно е биномно разпределена - $X, Y \in Bi(2, 1/6)$. Случайните величини обаче са зависими, затова не може от формулите за биномно разпределение да изведем директно съвместното, без да разгледаме особеностите на конкретния случай.

Маргинални разпределения

Ако разполагаме със съвместното разпределение на X и Y не е проблем да се пресметне разпределението само на едната случайна величина. Това разпределение се нарича *маргинално разпределение*. Намирането му става, съгласно формула за пълната вероятност, чрез сумиране по ред или по стълб, ако използваме означението от дефиницията $p_{i,j} = \mathsf{P}(X = x_j, Y = y_i)$

$$\mathsf{P}(X = x_j) = \sum_i p_{i,j} \quad j = 1, 2, \dots \qquad \mathsf{P}(Y = y_i) = \sum_j p_{i,j} \quad i = 1, 2, \dots$$

Маргинални разпределения

Ако разполагаме със съвместното разпределение на X и Y не е проблем да се пресметне разпределението само на едната случайна величина. Това разпределение се нарича *маргинално разпределение*. Намирането му става, съгласно формула за пълната вероятност, чрез сумиране по ред или по стълб, ако използваме означението от дефиницията $p_{i,j} = \mathrm{P}(X = x_j, Y = y_i)$

$$\mathrm{P}(X = x_j) = \sum_i p_{i,j} \qquad j = 1, 2, \ldots \qquad\qquad \mathrm{P}(Y = y_i) = \sum_j p_{i,j} \qquad i = 1, 2, \ldots$$

Пример

Ще намерим маргиналните разпределения в предходния пример. Маргиналните разпределения често се записват в същата таблица.

Маргинални разпределения

Ако разполагаме със съвместното разпределение на X и Y не е проблем да се пресметне разпределението само на едната случайна величина. Това разпределение се нарича *маргинално разпределение*. Намирането му става, съгласно формула за пълната вероятност, чрез сумиране по ред или по стълб, ако използваме означението от дефиницията $p_{i,j} = \mathrm{P}(X = x_j, Y = y_i)$

$$\mathrm{P}(X = x_j) = \sum_i p_{i,j} \qquad j = 1, 2, \ldots \qquad\qquad \mathrm{P}(Y = y_i) = \sum_j p_{i,j} \qquad i = 1, 2, \ldots$$

Пример

Ще намерим маргиналните разпределения в предходния пример. Маргиналните разпределения често се записват в същата таблица.

$Y \backslash X$	0	1	2	
0	16/36	8/36	1/36	25/36
1	8/36	2/36	0	10/36
2	1/36	0	0	1/36
	25/36	10/36	1/36	

Както можеше да се очаква маргиналните разпределения на X и Y съвпадат.

Функция на разпределение

При аксиоматично изграждане на теория на вероятностите, често понятието независимост се въвежда чрез функциите на разпределение. За целта ще дефинираме функция на разпределение на две случайни величини.

Функция на разпределение - $F_{X,Y}(x, y)$

Нека X и Y са произволни сл.в. Функцията на две променливи, дефинирана с равенството:

$$F_{X,Y}(x, y) = \mathrm{P}(X < x, Y < y)$$

наричаме функция на разпределение (ФР).

Функция на разпределение

При аксиоматично изграждане на теория на вероятностите, често понятието независимост се въвежда чрез функциите на разпределение. За целта ще дефинираме функция на разпределение на две случайни величини.

Функция на разпределение - $F_{X,Y}(x, y)$

Нека X и Y са произволни сл.в. Функцията на две променливи, дефинирана с равенството:

$$F_{X,Y}(x, y) = \mathrm{P}(X < x, Y < y)$$

наричаме функция на разпределение (ФР).

В тази дефиниция не поискахме случайните величини да са дискретни, т.е. по същия начин се дефинира ФР и при непрекъснати сл.в.

Ако познаваме функцията на разпределение не е проблем да намерим самото разпределение, т.е. таблицата, както и обратно. В случая на дискретни сл.в. ФР е просто някоя парциална сума $\sum p_{i,j}$, като индексите на сумиране зависят от x и y.

Функция на разпределение

При аксиоматично изграждане на теория на вероятностите, често понятието независимост се въвежда чрез функциите на разпределение. За целта ще дефинираме функция на разпределение на две случайни величини.

Функция на разпределение - $F_{X,Y}(x, y)$

Нека X и Y са произволни сл.в. Функцията на две променливи, дефинирана с равенството:

$$F_{X,Y}(x, y) = \mathrm{P}(X < x, Y < y)$$

наричаме функция на разпределение (ФР).

В тази дефиниция не поискахме случайните величини да са дискретни, т.е. по същия начин се дефинира ФР и при непрекъснати сл.в.

Ако познаваме функцията на разпределение не е проблем да намерим самото разпределение, т.е. таблицата, както и обратно. В случая на дискретни сл.в. ФР е просто някоя парциална сума $\sum p_{i,j}$, като индексите на сумиране зависят от x и y.

Ако приложим формулата за пълна вероятност по всички възможности за Y, ще получим начин за намиране на маргиналнитата функция на разпределение на X:

$$F_X(x) = \mathrm{P}(X < x) = \mathrm{P}(X < x, Y < \infty) = F_{X,Y}(x, \infty)$$

Независимост на случайни величини

Сега ще използваме понятието функция на разпределение, за да определим кога случайните величини са независими.

Дефиниция - Независимост на случайни величини

Случайните величини X и Y са независими ($X \perp\!\!\!\perp Y$), тогава и само тогава, когато за $\forall x, y$ реални числа е изпълнено

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)\, F_Y(y)$$

Тази дефиниция всъшност означава независимост в обичайния смисъл на думата, т.е. едната сл.в. не влияе и не носи информация за другата случайна величина.

Независимост на случайни величини

Сега ще използваме понятието функция на разпределение, за да определим кога случайните величини са независими.

Дефиниция - Независимост на случайни величини

Случайните величини X и Y са независими $(X \perp\!\!\!\perp Y)$, тогава и само тогава, когато за $\forall x, y$ реални числа е изпълнено

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)\, F_Y(y)$$

Тази дефиниция всъщност означава независимост в обичайния смисъл на думата, т.е. едната сл.в. не влияе и не носи информация за другата случайна величина.

В лекция III въведохме понятието независимост на дискретни случайни величини, като поискахме всички възможни двойки събития породени от тези сл.в. да са независими.

Дефиниция - Независимост при дискретни сл.в.

Казваме, че случайните величини X и Y са независими $(X \perp\!\!\!\perp Y)$, ако

$$\forall i, j : \quad \mathrm{P}(X = x_j, Y = y_i) = \mathrm{P}(X = x_j)\, \mathrm{P}(Y = y_i).$$

Не е трудно да се докаже, че при дискретни сл.в. двете дефиниции са еквивалентни.

Независимост на случайни величини

Пример

В конкретни случай проверката за независимост е елементарна. В нашия пример $\mathrm{P}(X = 0, Y = 0) = 16/36$, $\mathrm{P}(X = 0) = 25/36$ и $\mathrm{P}(Y = 0) = 25/36$. Явно $25/36 \neq 16/36 \,.\, 16/36$, тогава няма как равенството от втората дефиниция за независимост да се изпълнява за всички възможни стойности на X и Y. Следователно случайните величини са зависими.

Независимост на случайни величини

Пример

В конкретни случай проверката за независимост е елементарна. В нашия пример $\mathrm{P}(X = 0, Y = 0) = 16/36$, $\mathrm{P}(X = 0) = 25/36$ и $\mathrm{P}(Y = 0) = 25/36$. Явно $25/36 \neq 16/36 \,.\, 16/36$, тогава няма как равенството от втората дефиниция за независимост да се изпълнява за всички възможни стойности на X и Y. Следователно случайните величини са зависими.

По нататък ще се наложи да смятаме очакване на функции от случайни величини. В лекция III показахме, че функциите на случайни величини са случайни величини. Ако съвместното разпределение на сл.в. X и Y ни е известно, ние ще можем да пресметнем всички характеристики на $G(X, Y)$ за произволна функция G. В частност, директно от дефиницията на математическо очакване, получаваме следната формула:

Очакване на функция от случайни величини

$$E\left(G(X, Y)\right) = \sum_{i,j} G(x_j, y_i)\, \mathrm{P}(X = x_j, Y = y_i)$$

Тази формула има смисъл, когато получената сума съществува, т.е. не е безкрайност.

Ковариация

Сега ще въведем две понятия, който се използват като мярка за линейната зависимост между случайните величини X и Y.

Ковариация

Сега ще въведем две понятия, който се използват като мярка за линейната зависимост между случайните величини X и Y.

Дефиниция - Ковариация

Ковариация на случайните величини X и Y наричаме числото:

$$cov(X, Y) = \mathrm{E}[(X - \mathrm{E}X)(Y - \mathrm{E}Y)].$$

Ако $cov(X, Y) = 0$ казваме, че случайните величини са некорелирани.

Ковариация

Сега ще въведем две понятия, който се използват като мярка за линейната зависимост между случайните величини X и Y.

Дефиниция - Ковариация

Ковариация на случайните величини X и Y наричаме числото:

$$cov(X, Y) = \mathrm{E}[(X - \mathrm{E}X)(Y - \mathrm{E}Y)].$$

Ако $cov(X, Y) = 0$ казваме, че случайните величини са некорелирани.

За пресмятане на ковариацията обикновено се използва представянето дадено в следващото твърдение.

Твърдение

$$cov(X, Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}X\,\mathrm{E}Y$$

Ковариация

Сега ще въведем две понятия, който се използват като мярка за линейната зависимост между случайните величини X и Y.

Дефиниция - Ковариация

Ковариация на случайните величини X и Y наричаме числото:

$$cov(X, Y) = \mathrm{E}[(X - \mathrm{E}X)(Y - \mathrm{E}Y)].$$

Ако $cov(X, Y) = 0$ казваме, че случайните величини са некорелирани.

За пресмятане на ковариацията обикновено се използва представянето дадено в следващото твърдение.

Твърдение

$$cov(X, Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}X\,\mathrm{E}Y$$

Док. Ще използваме линейността на математическото очакване и факта, че $\mathrm{E}X$ и $\mathrm{E}Y$ са константи.

$$\begin{aligned} cov(X, Y) &= \mathrm{E}\left[(X - \mathrm{E}X)(Y - \mathrm{E}Y)\right] = \mathrm{E}(XY - Y\,\mathrm{E}X - X\,\mathrm{E}Y + \mathrm{E}X\,\mathrm{E}Y) = \\ &= \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(Y\,\mathrm{E}X) - \mathrm{E}(X\,\mathrm{E}Y) + \mathrm{E}(\mathrm{E}X\,\mathrm{E}Y) = \\ &= \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}X\,\mathrm{E}Y - \mathrm{E}Y\,\mathrm{E}X + \mathrm{E}X\,\mathrm{E}Y \end{aligned}$$

□

Ковариация

Пример

Ще пресметнем $cov(X, Y)$ за случайните виличини от примера, който разгледахме. За намирането на $\mathrm{E}(XY)$ ще използваме формулата за очакване на функция от случайна величина:

$$\mathrm{E}(XY) = \sum_{i,j} x_j\, y_i\, \mathrm{P}(X = x_j, Y = y_i) = 1 \times 1 \times 2/36$$

За пресмятането на тази сума трябва да се "обходи" таблицата на съвместното разпределение. В сумата има едно единствено събираемо, което е различно от нула, тогава $\mathrm{E}(XY) = 1\;.\;1\;.\;2/36$.

Знаем маргиналните разпределения на X и Y, така че можем да намерим техните очаквания. По лесно е разбира се, ако съобразим, че те са биномно разпределени, т.е. $X, Y \in Bi(2, 1/6)$ $EX = EY = 1/3$.

Сега съгласно доказаното твърдение

$$cov(X, Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}X\,\mathrm{E}Y = 2/36 - 1/3\;.\;1/3 = -1/18$$

Ковариация

Пример

Ще пресметнем $cov(X, Y)$ за случайните виличини от примера, който разгледахме. За намирането на $\mathsf{E}(XY)$ ще използваме формулата за очакване на функция от случайна величина:

$$\mathsf{E}(XY) = \sum_{i,j} x_j\, y_i\, \mathsf{P}(X = x_j, Y = y_i) = 1 \times 1 \times 2/36$$

За пресмятането на тази сума трябва да се "обходи" таблицата на съвместното разпределение. В сумата има едно единствено събираемо, което е различно от нула, тогава $\mathsf{E}(XY) = 1\,.\,1\,.\,2/36$.

Знаем маргиналните разпределения на X и Y, така че можем да намерим техните очаквания. По лесно е разбира се, ако съобразим, че те са биномно разпределени, т.е. $X, Y \in Bi(2, 1/6)$ $EX = EY = 1/3$.

Сега съгласно доказаното твърдение

$$cov(X, Y) = \mathsf{E}(XY) - \mathsf{E}X\,\mathsf{E}Y = 2/36 - 1/3\,.\,1/3 = -1/18$$

Ковариацията е в мерните единици на случайните величини, т.е. тя не е "безразмерна" и не може да се сравнява спрямо някаква абсолютна скала. Затова по често се използва нормираната ковариация, която наричаме корелация.

Корелация

Дефиниция - Корелация

$$\rho_{X,Y} = \frac{cov(X, Y)}{\sqrt{\mathrm{D}X}\sqrt{\mathrm{D}Y}}$$

Естествено за да бъде дефинирана корелацията, дисперсията на случайните величини трябва да съществува, т.е. да не бъде безкрайност.

Корелация

Дефиниция - Корелация

$$\rho_{X,Y} = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{D}X}\sqrt{\mathrm{D}Y}}$$

Естествено за да бъде дефинирана корелацията, дисперсията на случайните величини трябва да съществува, т.е. да не бъде безкрайност.

Забележка. Понятията използвани в тези лекции са общоприети, но все пак в част от литературата "ковариацията" се нарича "корелация", а "корелацията" се нарича "коефициент на корелация".

Корелация

Дефиниция - Корелация

$$\rho_{X,Y} = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$$

Естествено за да бъде дефинирана корелацията, дисперсията на случайните величини трябва да съществува, т.е. да не бъде безкрайност.

Забележка. Понятията използвани в тези лекции са общоприети, но все пак в част от литературата “ковариацията” се нарича “корелация”, а “корелацията” се нарича “коефициент на корелация”.

По-нататък ще докажем няколко твърдения, който характеризират корелацията.

Твърдение

За произволни случайни величини X и Y е в сила:

$$|\rho_{X,Y}| \leq 1$$

Корелация

Дефиниция - Корелация

$$\rho_{X,Y} = \frac{cov(X, Y)}{\sqrt{\mathrm{D}X}\sqrt{\mathrm{D}Y}}$$

Естествено за да бъде дефинирана корелацията, дисперсията на случайните величини трябва да съществува, т.е. да не бъде безкрайност.

Забележка. Понятията използвани в тези лекции са общоприети, но все пак в част от литературата "ковариацията" се нарича "корелация", а "корелацията" се нарича "коефициент на корелация".

По-нататък ще докажем няколко твърдения, който характеризират корелацията.

Твърдение

За произволни случайни величини X и Y е в сила:

$$|\rho_{X,Y}| \leq 1$$

Док. Доказателството е с конструкция. Ще разгледаме следната случайна величина

Корелация

$$Z = \left[\frac{X - \mathrm{E}X}{\sqrt{\mathrm{D}X}} + \frac{Y - \mathrm{E}Y}{\sqrt{\mathrm{D}Y}} \right]^2 \geq 0$$

Тя е неотрицателна следователно и математическото и очакване е неотрицателно.

Корелация

$$Z = \left[\frac{X - \mathrm{E}X}{\sqrt{\mathrm{D}X}} + \frac{Y - \mathrm{E}Y}{\sqrt{\mathrm{D}Y}} \right]^2 \geq 0$$

Тя е неотрицателна следователно и математическото и очакване е неотрицателно.

$$0 \leq \mathrm{E} \left[\frac{X - \mathrm{E}X}{\sqrt{\mathrm{D}X}} + \frac{Y - \mathrm{E}Y}{\sqrt{\mathrm{D}Y}} \right]^2 =$$

Корелация

$$Z = \left[\frac{X - \mathrm{E}X}{\sqrt{\mathrm{D}X}} + \frac{Y - \mathrm{E}Y}{\sqrt{\mathrm{D}Y}}\right]^2 \geq 0$$

Тя е неотрицателна следователно и математическото и очакване е неотрицателно.

$$0 \leq \mathrm{E}\left[\frac{X - \mathrm{E}X}{\sqrt{\mathrm{D}X}} + \frac{Y - \mathrm{E}Y}{\sqrt{\mathrm{D}Y}}\right]^2 =$$

$$= \frac{\mathrm{E}(X - \mathrm{E}X)^2}{\mathrm{D}X} + \frac{\mathrm{E}(Y - \mathrm{E}Y)^2}{\mathrm{D}Y} + 2\frac{\mathrm{E}(X - \mathrm{E}X)(Y - \mathrm{E}Y)}{\sqrt{\mathrm{D}X}\sqrt{\mathrm{D}Y}} =$$

Ще приложим дефинициите на дисперсия, ковариация и корелация

Корелация

$$Z = \left[\frac{X - \mathrm{E}X}{\sqrt{\mathrm{D}X}} + \frac{Y - \mathrm{E}Y}{\sqrt{\mathrm{D}Y}}\right]^2 \geq 0$$

Тя е неотрицателна следователно и математическото и очакване е неотрицателно.

$$0 \leq \mathrm{E}\left[\frac{X - \mathrm{E}X}{\sqrt{\mathrm{D}X}} + \frac{Y - \mathrm{E}Y}{\sqrt{\mathrm{D}Y}}\right]^2 =$$

$$= \frac{\mathrm{E}(X - \mathrm{E}X)^2}{\mathrm{D}X} + \frac{\mathrm{E}(Y - \mathrm{E}Y)^2}{\mathrm{D}Y} + 2\frac{\mathrm{E}(X - \mathrm{E}X)(Y - \mathrm{E}Y)}{\sqrt{\mathrm{D}X}\sqrt{\mathrm{D}Y}} =$$

Ще приложим дефинициите на дисперсия, ковариация и корелация

$$= \frac{\mathrm{D}X}{\mathrm{D}X} + \frac{\mathrm{D}Y}{\mathrm{D}Y} + 2\frac{cov(X, Y)}{\sqrt{\mathrm{D}X}\sqrt{\mathrm{D}Y}} = 2 + 2\rho_{X,Y}$$

Сега от $2 + 2\rho_{X,Y} \geq 0$ елементарно следва $\rho_{X,Y} \geq -1$.

Корелация

$$Z = \left[\frac{X - \mathrm{E}X}{\sqrt{\mathrm{D}X}} + \frac{Y - \mathrm{E}Y}{\sqrt{\mathrm{D}Y}}\right]^2 \geq 0$$

Тя е неотрицателна следователно и математическото и очакване е неотрицателно.

$$0 \leq \mathrm{E}\left[\frac{X - \mathrm{E}X}{\sqrt{\mathrm{D}X}} + \frac{Y - \mathrm{E}Y}{\sqrt{\mathrm{D}Y}}\right]^2 =$$

$$= \frac{\mathrm{E}(X - \mathrm{E}X)^2}{\mathrm{D}X} + \frac{\mathrm{E}(Y - \mathrm{E}Y)^2}{\mathrm{D}Y} + 2\frac{\mathrm{E}(X - \mathrm{E}X)(Y - \mathrm{E}Y)}{\sqrt{\mathrm{D}X}\sqrt{\mathrm{D}Y}} =$$

Ще приложим дефинициите на дисперсия, ковариация и корелация

$$= \frac{\mathrm{D}X}{\mathrm{D}X} + \frac{\mathrm{D}Y}{\mathrm{D}Y} + 2\frac{cov(X, Y)}{\sqrt{\mathrm{D}X}\sqrt{\mathrm{D}Y}} = 2 + 2\rho_{X,Y}$$

Сега от $2 + 2\rho_{X,Y} \geq 0$ елементарно следва $\rho_{X,Y} \geq -1$.

Аналогично, за да се докаже неравенството $\rho_{X,Y} \leq 1$ се разглежда случайната величина

$$\left[\frac{X - \mathrm{E}X}{\sqrt{\mathrm{D}X}} - \frac{Y - \mathrm{E}Y}{\sqrt{\mathrm{D}Y}}\right]^2 \geq 0$$

□

Корелация

Смисълът на понятието корелация се дава от следното твърдение.

Твърдение

Случайните величини X и Y са линейно зависими тогава и само тогава, когато

$$|\rho_{X,Y}| = 1$$

Корелация

Смисълът на понятието корелация се дава от следното твърдение.

Твърдение

Случайните величини X и Y са линейно зависими тогава и само тогава, когато

$$|\rho_{X,Y}| = 1$$

Док. Нека X и Y са линейно зависими, т.е. съществуват константи a и b, такива че $X = aY + b$. Ще докажем че $|\rho_{X,Y}| = 1$.

Корелация

Смисълът на понятието корелация се дава от следното твърдение.

Твърдение

Случайните величини X и Y са линейно зависими тогава и само тогава, когато

$$|\rho_{X,Y}| = 1$$

Док. Нека X и Y са линейно зависими, т.е. съществуват константи a и b, такива че $X = aY + b$. Ще докажем че $|\rho_{X,Y}| = 1$.

$$\mathrm{E}X = \mathrm{E}(aY + b) = a\,\mathrm{E}Y + b,$$

$$\mathrm{D}X = \mathrm{D}(aY + b) = \mathrm{D}(aY) + \mathrm{D}b = a^2\,\mathrm{D}Y.$$

Корелация

Смисълът на понятието корелация се дава от следното твърдение.

Твърдение

Случайните величини X и Y са линейно зависими тогава и само тогава, когато

$$|\rho_{X,Y}| = 1$$

Док. Нека X и Y са линейно зависими, т.е. съществуват константи a и b, такива че $X = aY + b$. Ще докажем че $|\rho_{X,Y}| = 1$.

$$\mathrm{E}X = \mathrm{E}(aY + b) = a\,\mathrm{E}Y + b,$$

$$\mathrm{D}X = \mathrm{D}(aY + b) = \mathrm{D}(aY) + \mathrm{D}b = a^2\,\mathrm{D}Y.$$

Следователно

$$\rho_{X,Y} = \frac{\mathrm{E}[(X - \mathrm{E}X)(Y - \mathrm{E}Y)]}{\sqrt{\mathrm{D}X}\sqrt{\mathrm{D}Y}} = \frac{\mathrm{E}[(aY + b - (a\,\mathrm{E}Y + b))(Y - \mathrm{E}Y)]}{\sqrt{a^2\mathrm{D}Y}\sqrt{\mathrm{D}Y}} =$$

$$= \frac{\mathrm{E}[a(Y - \mathrm{E}Y))(Y - \mathrm{E}Y)]}{|a|\,\mathrm{D}Y} = \frac{a\,\mathrm{E}(Y - \mathrm{E}Y)^2}{|a|\,\mathrm{D}Y} = \frac{a}{|a|}$$

Корелация

Смисълът на понятието корелация се дава от следното твърдение.

Твърдение

Случайните величини X и Y са линейно зависими тогава и само тогава, когато

$$|\rho_{X,Y}| = 1$$

Док. Нека X и Y са линейно зависими, т.е. съществуват константи a и b, такива че $X = aY + b$. Ще докажем че $|\rho_{X,Y}| = 1$.

$$\mathrm{E}X = \mathrm{E}(aY + b) = a\,\mathrm{E}Y + b,$$

$$\mathrm{D}X = \mathrm{D}(aY + b) = \mathrm{D}(aY) + \mathrm{D}b = a^2\,\mathrm{D}Y.$$

Следователно

$$\rho_{X,Y} = \frac{\mathrm{E}[(X - \mathrm{E}X)(Y - \mathrm{E}Y)]}{\sqrt{\mathrm{D}X}\sqrt{\mathrm{D}Y}} = \frac{\mathrm{E}[(aY + b - (a\,\mathrm{E}Y + b))(Y - \mathrm{E}Y)]}{\sqrt{a^2\mathrm{D}Y}\sqrt{\mathrm{D}Y}} =$$

$$= \frac{\mathrm{E}[a(Y - \mathrm{E}Y))(Y - \mathrm{E}Y)]}{|a|\,\mathrm{D}Y} = \frac{a\,\mathrm{E}(Y - \mathrm{E}Y)^2}{|a|\,\mathrm{D}Y} = \frac{a}{|a|}$$

Последният израз е равен на ± 1 в зависимост от знака на a. С това твърдението е доказано в едната посока.

Корелация

Забележка. Ако $a > 0$, т.е. когато едната случайна величина расте и другата расте, тогава е изпълнено $\rho_{X,Y} = 1$. Обратно Ако $a < 0$, т.е. когато едната случайна величина расте, а другата намалява $\rho_{X,Y} = -1$.

Корелация

Забележка. Ако $a > 0$, т.е. когато едната случайна величина расте и другата расте, тогава е изпълнено $\rho_{X,Y} = 1$. Обратно Ако $a < 0$, т.е. когато едната случайна величина расте, а другата намалява $\rho_{X,Y} = -1$.

Нека сега $|\rho_{X,Y}| = 1$. Ще докажем, че случайните величини X и Y са линейно зависими. За определеност ще приемем, че $\rho_{X,Y} = -1$

Забележка. Ако $a > 0$, т.е. когато едната случайна величина расте и другата расте, тогава е изпълнено $\rho_{X,Y} = 1$. Обратно Ако $a < 0$, т.е. когато едната случайна величина расте, а другата намалява $\rho_{X,Y} = -1$.

Нека сега $|\rho_{X,Y}| = 1$. Ще докажем, че случайните величини X и Y са линейно зависими. За определеност ще приемем, че $\rho_{X,Y} = -1$

Ще разгледаме отново случайната величина Z, която използвахме в предишното твърдение. Там доказахме, че :

$$\mathrm{E}Z = \mathrm{E}\left[\frac{X - \mathrm{E}X}{\sqrt{\mathrm{D}X}} + \frac{Y - \mathrm{E}Y}{\sqrt{\mathrm{D}Y}}\right]^2 = 2 + 2\rho_{X,Y}$$

Тогава от направеното допускане $\rho_{X,Y} = -1$, ще следва $\mathrm{E}Z = 0$.

Корелация

Забележка. Ако $a > 0$, т.е. когато едната случайна величина расте и другата расте, тогава е изпълнено $\rho_{X,Y} = 1$. Обратно Ако $a < 0$, т.е. когато едната случайна величина расте, а другата намалява $\rho_{X,Y} = -1$.

Нека сега $|\rho_{X,Y}| = 1$. Ще докажем, че случайните величини X и Y са линейно зависими. За определеност ще приемем, че $\rho_{X,Y} = -1$

Ще разгледаме отново случайната величина Z, която използвахме в предишното твърдение. Там доказахме, че :

$$\mathrm{E}Z = \mathrm{E}\left[\frac{X - \mathrm{E}X}{\sqrt{\mathrm{D}X}} + \frac{Y - \mathrm{E}Y}{\sqrt{\mathrm{D}Y}}\right]^2 = 2 + 2\rho_{X,Y}$$

Тогава от направеното допускане $\rho_{X,Y} = -1$, ще следва $\mathrm{E}Z = 0$.

След като очакването на една **неотрицателна** случайна величина е 0. То и самата случайна величина е равна на нула.

Корелация

Забележка. Ако $a > 0$, т.е. когато едната случайна величина расте и другата расте, тогава е изпълнено $\rho_{X,Y} = 1$. Обратно Ако $a < 0$, т.е. когато едната случайна величина расте, а другата намалява $\rho_{X,Y} = -1$.

Нека сега $|\rho_{X,Y}| = 1$. Ще докажем, че случайните величини X и Y са линейно зависими. За определеност ще приемем, че $\rho_{X,Y} = -1$

Ще разгледаме отново случайната величина Z, която използвахме в предишното твърдение. Там доказахме, че :

$$\mathrm{E}Z = \mathrm{E}\left[\frac{X - \mathrm{E}X}{\sqrt{\mathrm{D}X}} + \frac{Y - \mathrm{E}Y}{\sqrt{\mathrm{D}Y}}\right]^2 = 2 + 2\rho_{X,Y}$$

Тогава от направеното допускане $\rho_{X,Y} = -1$, ще следва $\mathrm{E}Z = 0$.

След като очакването на една **неотрицателна** случайна величина е 0. То и самата случайна величина е равна на нула.Наистина нека $Z \geq 0$, но $\mathrm{E}Z = 0$, ако допуснем че съществува $z_k > 0$, такова че $p_k = \mathrm{P}(Z = z_k) > 0$. То ще следва $\mathrm{E}Z = z_k p_k + \sum_{i \neq k} z_i p_i > 0$, което е противоречие. Следователно $Z = 0$.

Забележка. Ако $a > 0$, т.е. когато едната случайна величина расте и другата расте, тогава е изпълнено $\rho_{X,Y} = 1$. Обратно Ако $a < 0$, т.е. когато едната случайна величина расте, а другата намалява $\rho_{X,Y} = -1$.

Нека сега $|\rho_{X,Y}| = 1$. Ще докажем, че случайните величини X и Y са линейно зависими. За определеност ще приемем, че $\rho_{X,Y} = -1$

Ще разгледаме отново случайната величина Z, която използвахме в предишното твърдение. Там доказахме, че :

$$\mathrm{E}Z = \mathrm{E}\left[\frac{X - \mathrm{E}X}{\sqrt{\mathrm{D}X}} + \frac{Y - \mathrm{E}Y}{\sqrt{\mathrm{D}Y}}\right]^2 = 2 + 2\rho_{X,Y}$$

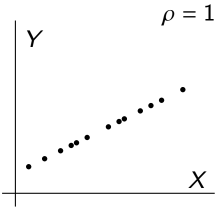
Тогава от направеното допускане $\rho_{X,Y} = -1$, ще следва $\mathrm{E}Z = 0$.

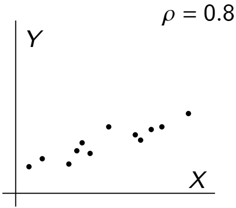
След като очакването на една **неотрицателна** случайна величина е 0. То и самата случайна величина е равна на нула.Наистина нека $Z \geq 0$, но $\mathrm{E}Z = 0$, ако допуснем че съществува $z_k > 0$, такова че $p_k = \mathrm{P}(Z = z_k) > 0$. То ще следва $\mathrm{E}Z = z_k p_k + \sum_{i \neq k} z_i p_i > 0$, което е противоречие. Следователно $Z = 0$.Но тогава ще е изпълнено и:

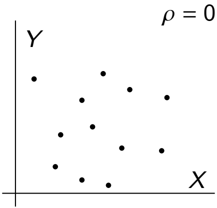
$$\frac{X - \mathrm{E}X}{\sqrt{\mathrm{D}X}} + \frac{Y - \mathrm{E}Y}{\sqrt{\mathrm{D}Y}} = 0$$

Ще напомним, че в това равенство $\mathrm{E}X$, $\mathrm{E}Y$, $\mathrm{D}X$ и $\mathrm{D}Y$ са константи. Което означава линейна зависимост между X и Y. $\square$

На следващите схеми е показано влиянието на коефициента на корелация върху степента на линейна зависимост между сл.в. X и Y. Всяко наблюдение над тях е представено като точка с координати (X, Y).

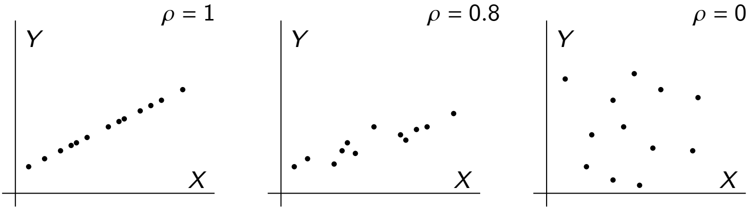






Корелация

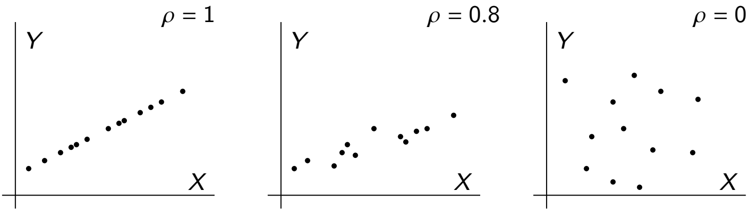
На следващите схеми е показано влиянието на коефициента на корелация върху степента на линейна зависимост между сл.в. X и Y. Всяко наблюдение над тях е представено като точка с координати (X, Y).



При $\rho = 1$ точките лежат върху растяща права.
При $\rho = -1$ правата е намаляваща.
При $\rho = 0.8$ точките са разположени в околност на права.
При $\rho = 0$ точките са разпръснати.

Корелация

На следващите схеми е показано влиянието на коефициента на корелация върху степента на линейна зависимост между сл.в. X и Y. Всяко наблюдение над тях е представено като точка с координати (X, Y).



При $\rho = 1$ точките лежат върху растяща права.
При $\rho = -1$ правата е намаляваща.
При $\rho = 0.8$ точките са разположени в околност на права.
При $\rho = 0$ точките са разпръснати.

Не съществува връзка между коефициента на корелация ρ и наклона на правата. Знакът на ρ показва дали правата е растяща или намаляваща. А големината на ρ доколко силна е линейната зависимост. Обърнете внимание, че става дума само за линейна зависимост. Възможно е да съществува друг тип връзка между случайните величини, която няма как да се установи с коефициента на корелация.

Корелация

Твърдение

Ако случайните величини X и Y са независими, то

$$cov(X, Y) = 0 \qquad \text{и съответно} \qquad \rho_{X,Y} = 0$$

Док. $X \perp\!\!\!\perp Y$ означава, че $\mathrm{E}(X\,Y) = \mathrm{E}X\,\mathrm{E}Y$, откъдето твърдението следва директно.

Твърдението е вярно само в едната посока, т.е. от това че $\rho_{X,Y} = 0$ не следва, че X и Y са независими, както се вижда от следния контрапример.

Корелация

Твърдение

Ако случайните величини X и Y са независими, то

$$cov(X,Y) = 0 \qquad \text{и съответно} \qquad \rho_{X,Y} = 0$$

Док. $X \perp\!\!\!\perp Y$ означава, че $\mathrm{E}(X\,Y) = \mathrm{E}X\,\mathrm{E}Y$, откъдето твърдението следва директно.

Твърдението е вярно само в едната посока, т.е. от това че $\rho_{X,Y} = 0$ не следва, че X и Y са независими, както се вижда от следния контрапример.

Пример

Не е трудно да се конструират случайни величини, който са зависими, но некорелирани.

$Y \backslash X$	0	1	2
0	0	1/8	0
1	1/8	1/2	1/8
2	0	1/8	0

$$\mathrm{E}X = \mathrm{E}Y = 1$$
$$\mathrm{E}(X\,Y) = 1/2 + 2/8 + 2/8 = 1$$
$$cov(X,Y) = 0$$
$$\rho_{X,Y} = 0$$

Случайните величини очевидно са зависими, тъй като например:

$$\mathrm{P}(X=0, Y=0) = 0 \neq \mathrm{P}(X=0)\mathrm{P}(Y=0) = 1/8\,.\,1/8$$

Полиномно разпределение

Ще разгледаме едно конкретно съвместно разпределение на случайни величини. Полиномното разпределение, както подсказва името, е обобщение на биномното разпределение, в случай когато на всеки опит има повече от две възможности, т.е. не само "успех" и "неуспех". Моделът, в които възниква е следния:

Полиномно разпределение

Ще разгледаме едно конкретно съвместно разпределение на случайни величини. Полиномното разпределение, както подсказва името, е обобщение на биномното разпределение, в случай когато на всеки опит има повече от две възможности, т.е. не само "успех" и "неуспех". Моделът, в които възниква е следния:

Разглеждаме последователност от n на брой независими опити. На всеки опит може да се изпълни едно от събитията $A_1, A_2, \ldots A_r$ съответно с вероятност $p_1, p_2, \ldots p_r$. При това тези вероятности не се менят от опит на опит, т.е. вероятността $p_i = \mathsf{P}(A_i)$ не зависи от номера на опита, не зависи и от това кои събития са се изпълнили при предишните опити. Поставя се и естественото изискване $p_1 + p_2 + \ldots + p_r = 1$.

Полиномно разпределение

Ще разгледаме едно конкретно съвместно разпределение на случайни величини. Полиномното разпределение, както подсказва името, е обобщение на биномното разпределение, в случай когато на всеки опит има повече от две възможности, т.е. не само "успех" и "неуспех". Моделът, в които възниква е следния:

Разглеждаме последователност от n на брой независими опити. На всеки опит може да се изпълни едно от събитията $A_1, A_2, \dots A_r$ съответно с вероятност $p_1, p_2, \dots p_r$. При това тези вероятности не се менят от опит на опит, т.е. вероятността $p_i = \mathrm{P}(A_i)$ не зависи от номера на опита, не зависи и от това кои събития са се изпълнили при предишните опити. Поставя се и естественото изискване $p_1 + p_2 + \dots + p_r = 1$.

Въвеждаме случайни величини $X_1, X_2, \dots X_r$, които броят сбъдванията на съответните събития, т.е.

$$X_i = \{\text{ брой сбъдвания на събитието } A_i\}$$

$$\overbrace{A_1 \,|\, \dots \,|\, A_1}^{X_1} \,|\, \overbrace{A_2 \,|\quad \dots \quad|\, A_2}^{X_2} \,|\, A_3 \,|\qquad \dots \qquad|\, \overbrace{A_r \,|\, \dots \,|\, A_r}^{X_r}$$

Съвместното разпределение на тези случайни величини се нарича - полиномно.

Полиномно разпределение

Стойностите, които взимат случайните величини са цели неотрицателни числа, затова има смисъл да се намери съвместната вероятност: $\mathrm{P}(X_1 = k_1, X_2 = k_2, \ldots X_r = k_r)$, където $k_1 + k_2 + \ldots + k_r = n$.

Полиномно разпределение

Стойностите, които взимат случайните величини са цели неотрицателни числа, затова има смисъл да се намери съвместната вероятност: $\mathrm{P}(X_1 = k_1, X_2 = k_2, \ldots X_r = k_r)$, където $k_1 + k_2 + \ldots + k_r = n$.

$X_1 = k_1$ означава, че събитието A_1 се е изпълнило k_1-пъти при провеждането на n-те опита. По $\binom{n}{k_1}$ начина можем да изберем опитите на които да се изпълни това събитие. При вече фиксирани опити, вероятността за k_1 сбъдвания на A_1 е $p_1^{k_1}$.

Полиномно разпределение

Стойностите, които взимат случайните величини са цели неотрицателни числа, затова има смисъл да се намери съвместната вероятност:
$\mathrm{P}(X_1 = k_1, X_2 = k_2, \ldots X_r = k_r)$, където $k_1 + k_2 + \ldots + k_r = n$.

$X_1 = k_1$ означава, че събитието A_1 се е изпълнило k_1-пъти при провеждането на n-те опита. По $\binom{n}{k_1}$ начина можем да изберем опитите на които да се изпълни това събитие. При вече фиксирани опити, вероятността за k_1 сбъдвания на A_1 е $p_1^{k_1}$.

Аналогично, по $\binom{n-k_1}{k_2}$ начина избираме опитите за A_2, а вероятността е $p_2^{k_2}$, и т.н. Лесно се вижда, че

$$\binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{k_2}\binom{n-k_1-k_2}{k_3}\ldots\binom{n-k_1-\ldots k_{r-1}}{k_r} = \frac{n!}{k_1!\,k_2!\ldots k_r!}$$

Това всъщност е броя на пермутациите с повторение. Така достигаме до следната формула за съвместното разпределение:

Полиномно разпределение

$$\mathrm{P}(X_1 = k_1, X_2 = k_2, \ldots X_r = k_r) = \frac{n!}{k_1!\,k_2!\ldots k_r!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_r^{k_r}$$

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_r = n$$

Полиномно разпределение

Не е трудно да се съобрази, че опитите са независими, но случайните величини $X_1, X_2, \ldots X_r$ са зависими, тъй като повечето сбъдвания на едно събитие водят до по-малко сбъдвания на друго, предвид фиксирания брой опити - n, т.е. когато например X_1 расте X_2 намалява и т.н.

Полиномно разпределение

Не е трудно да се съобрази, че опитите са независими, но случайните величини $X_1, X_2, \ldots X_r$ са зависими, тъй като повечето сбъдвания на едно събитие водят до по-малко сбъдвания на друго, предвид фиксирания брой опити - n, т.е. когато например X_1 расте X_2 намалява и т.н.

Пример

Хвърлят се 5 зара да се определи вероятността да се паднат две шестици и една петица.

Полиномно разпределение

Не е трудно да се съобрази, че опитите са независими, но случайните величини $X_1, X_2, \ldots X_r$ са зависими, тъй като повечето сбъдвания на едно събитие водят до по-малко сбъдвания на друго, предвид фиксирания брой опити - n, т.е. когато например X_1 расте X_2 намалява и т.н.

Пример

Хвърлят се 5 зара да се определи вероятността да се паднат две шестици и една петица.

Разглеждаме всяко хвърляне на зар като извършване на един опит. Ясно е че опитите са независими, а броят им е $n = 5$. При всеки един опит може да се изпълни едно от следните три събития:

A_6 пада се шестица $\mathrm{P}(A_6) = 1/6$

A_5 пада се петица $\mathrm{P}(A_5) = 1/6$

A_0 не се пада пет или шест $\mathrm{P}(A_0) = 4/6$

Полиномно разпределение

Не е трудно да се съобрази, че опитите са независими, но случайните величини $X_1, X_2, \dots X_r$ са зависими, тъй като повечето сбъдвания на едно събитие водят до по-малко сбъдвания на друго, предвид фиксирания брой опити - n, т.е. когато например X_1 расте X_2 намалява и т.н.

Пример

Хвърлят се 5 зара да се определи вероятността да се паднат две шестици и една петица.

Разглеждаме всяко хвърляне на зар като извършване на един опит. Ясно е че опитите са независими, а броят им е $n = 5$. При всеки един опит може да се изпълни едно от следните три събития:

A_6 пада се шестица $\mathrm{P}(A_6) = 1/6$

A_5 пада се петица $\mathrm{P}(A_5) = 1/6$

A_0 не се пада пет или шест $\mathrm{P}(A_0) = 4/6$

Нека сл.в. X_6, X_5 и X_0 са съответно броят на падналите се щестици, петици и други цифри при хвърлянето на петте зара. Не е трудно да се съобрази, че X_6, X_5 и X_0 са полиномно разпределени и тогава за търсената вероятност получаваме:

$$\mathrm{P}(X_6 = 2, X_5 = 1, X_0 = 2) =$$

Полиномно разпределение

Не е трудно да се съобрази, че опитите са независими, но случайните величини $X_1, X_2, \ldots X_r$ са зависими, тъй като повечето сбъдвания на едно събитие водят до по-малко сбъдвания на друго, предвид фиксирания брой опити - n, т.е. когато например X_1 расте X_2 намалява и т.н.

Пример

Хвърлят се 5 зара да се определи вероятността да се паднат две шестици и една петица.

Разглеждаме всяко хвърляне на зар като извършване на един опит. Ясно е че опитите са независими, а броят им е $n = 5$. При всеки един опит може да се изпълни едно от следните три събития:

A_6 пада се шестица $\mathrm{P}(A_6) = 1/6$

A_5 пада се петица $\mathrm{P}(A_5) = 1/6$

A_0 не се пада пет или шест $\mathrm{P}(A_0) = 4/6$

Нека сл.в. X_6, X_5 и X_0 са съответно броят на падналите се щестици, петици и други цифри при хвърлянето на петте зара. Не е трудно да се съобрази, че X_6, X_5 и X_0 са полиномно разпределени и тогава за търсената вероятност получаваме:

$$\mathrm{P}(X_6 = 2, X_5 = 1, X_0 = 2) = \frac{5!}{2!\,1!\,2!}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{4}{6}\right)^2$$

Полиномно разпределение

Не е трудно да се съобрази, че опитите са независими, но случайните величини $X_1, X_2, \ldots X_r$ са зависими, тъй като повечето сбъдвания на едно събитие водят до по-малко сбъдвания на друго, предвид фиксирания брой опити - n, т.е. когато например X_1 расте X_2 намалява и т.н.

Пример

Хвърлят се 5 зара да се определи вероятността да се паднат две шестици и една петица.

Разглеждаме всяко хвърляне на зар като извършване на един опит. Ясно е че опитите са независими, а броят им е $n = 5$. При всеки един опит може да се изпълни едно от следните три събития:

A_6 пада се шестица $\mathrm{P}(A_6) = 1/6$

A_5 пада се петица $\mathrm{P}(A_5) = 1/6$

A_0 не се пада пет или шест $\mathrm{P}(A_0) = 4/6$

Нека сл.в. X_6, X_5 и X_0 са съответно броят на падналите се щестици, петици и други цифри при хвърлянето на петте зара. Не е трудно да се съобрази, че X_6, X_5 и X_0 са полиномно разпределени и тогава за търсената вероятност получаваме:

$$\mathrm{P}(X_6 = 2, X_5 = 1, X_0 = 2) = \frac{5!}{2!\,1!\,2!}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{4}{6}\right)^2$$