Ранг на система вектори

доц. Евгения Великова

Октомври 2020

Максимално линейно независима подсистема

определение МЛНП

Нека F е поле и $A_1, \ldots, A_k$ вектори от F^n.
$\{A_{i_1}, \ldots, A_{i_r}\} \subset \{A_1, \ldots, A_k\}$ е максимално линейно независима подсистема (МЛНП), когато

- $\{A_{i_1}, \ldots, A_{i_r}\}$ са линейно независими,
- $A_j \in \ell(A_{i_1}, \ldots, A_{i_r}), \quad \forall j = 1, \ldots, k.$

Твърдение

Всеки ненулев набор от вектори на F^n има максимално линейно независима подсистема.

Ако $U = \ell(A_1, \ldots, A_k)$ имаме, че U е крайнопородено ненулево линейно подпространство на $F^n \Rightarrow$ съществува базис $A_{i_1}, \ldots, A_{i_r}$ на U $A_{i_1}, \ldots, A_{i_r}$ е МЛНП на $A_1, \ldots, A_k$.

$\exists$ базис на подпространство, съществува и МЛНП

Теорема

V е подпространство $\mathcal{O} \neq V \subset F^n$ над поле F и $\ell(A_1, \ldots, A_t) = V$.

Тогава V има базис $B_1, \ldots, B_r$, за който $\{B_1, \ldots, B_r\} \subseteq \{A_1, \ldots, A_t\}$.

Доказателство:
$\ell(A_1, \ldots, A_t) = V \neq \{\mathcal{O}\} \Rightarrow \exists A_i \neq \mathcal{O}$ полагаме $B_1 = A_i$

Стъпка 1: B_1 е ЛНЗ

- ако $\{A_1, \ldots, A_t\} \subset \ell(B_1) \Rightarrow \{B_1\}$ е базис и край.
- ако $\exists A_l \notin \ell(B_1)$, тогава $B_2 = A_l \Rightarrow B_1, B_2$ ЛНЗ $\rightarrow$ Стъпка 2.

Стъпка k- ако $\{B_1, \ldots, B_k\}$ ЛНЗ и $\{B_1, \ldots, B_k\} \subset \{A_1, \ldots, A_t\}$, тогава:

- ако $\{A_1, \ldots, A_t\} \subset \ell(B_1, \ldots, B_k)$, тогава $\{B_1, \ldots, B_k\}$- базис, край.
- ако съществува $A_p \notin \ell(B_1, \ldots, B_k)$, тогава $B_{k+1} = A_p \Rightarrow$ $B_1, \ldots, B_k, B_{k+1}$ ЛНЗ и $\rightarrow$ Стъпка $k+1$.

$$\left.\begin{array}{ccc} B_1, \ldots, B_r & \text{са} & \text{ЛНЗ} \\ \{B_1, \ldots, B_r\} & \subseteq & \{A_1, \ldots, A_t\} \\ \{A_1, \ldots, A_t\} & \subseteq & \ell(B_1, \ldots, B_r) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} B_1, \ldots, B_r \text{ е базис на } V \\ B_1, \ldots, B_r \text{ е МЛНП} \end{array}$$

пример

Вектори $A_1 = (3, 1, -4)$, $A_2 = (-1, -2, 3)$, $A_3 = (-4, -1, 5)$, $A_4 = (7, -7, 0)$, $A_5 = (2, 4, -6)$ и $A_6 = (-7, 2, 5)$ от $\mathbb{Q}^3$

$$\begin{pmatrix} A_1: & 3 & 1 & -4 \\ A_2: & -1 & -2 & 3 \\ A_3: & -4 & -1 & 5 \\ A_4: & 7 & -7 & 0 \\ A_5: & 2 & 4 & -6 \\ A_6: & -7 & 2 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A_1: & 3 & 1 & -4 \\ A_2 + 2A_1: & 5 & 0 & -5 \\ A_3 + A_1: & -1 & 0 & 1 \\ A_4 + 7A_1: & 28 & 0 & -28 \\ A_5 - 4A_1: & -10 & 0 & 10 \\ A_6 - 2A_1: & -13 & 0 & 13 \end{pmatrix}$$

Установяваме, че:
A_1, A_2 ЛНЗ, A_1, A_2, A_3 ЛЗ и следователно $A_3 \in \ell(A_1, A_2)$,
A_1, A_2, A_4 ЛЗ, A_1, A_2, A_5 са ЛЗ и A_1, A_2, A_6 са ЛЗ.
A_1, A_2 е МЛНП на $\{A_1, \dots, A_6\}$.

Твърдение:

Ако $A_{i_1}, \ldots, A_{i_r}$ и $A_{j_1}, \ldots, A_{j_s}$ са максимално линейни подсистеми на векторите $A_1, \ldots, A_k$, тогава $r = s$.

Да допуснем, че едното от двете числа е по-голямо, например $r > s$.
$A_{i_1}, \ldots, A_{i_r} \in \ell(\{A_{j_1}, \ldots, A_{j_s}), \Rightarrow \{A_{i_1}, \ldots, A_{i_r}\}$ са ЛЗ - противоречие (те са МЛНП)
$\Rightarrow \quad r = s$.

Ранг на система вектори - определение

Рангът на система вектори $A_1, \ldots, A_k$ е равен на броя на векторите в една максимално линейно независима подсистема, и се записва $r(A_1, \ldots, A_k) = r$.

$$r(A_1, \ldots, A_k) = r \quad \Leftrightarrow \quad \exists \, \{A_{i_1}, \ldots, A_{i_r}\}\text{- МЛНП}$$

Свойства ранг на система и МЛНП:

Нека $A_1, \ldots, A_k$ е набор от вектори от линейно пространство V. Тогава:

- Линейната обвивка на набора от вектори и на неговата МЛНП съвпадат,
- $r(A_1, \ldots, A_k) = r = \dim \ell(A_1, \ldots, A_k)$,
- $r(A_1, \ldots, A_k) = r \Leftrightarrow$ в набора от вектори има r линейно независими вектора и всеки $r + 1$ вектора са линейно зависими.

Доказателство: Нека $\{A_{i_1}, \ldots, A_{i_r}\}$ е МЛНП за $A_1, \ldots, A_k$.
Ако $U = \ell(A_{i_1}, \ldots, A_{i_r})$ и $W = \ell(A_1, \ldots, A_k)$. $\Rightarrow U \subset W$.
$A_j \in \ell(A_{i_1}, \ldots, A_{i_r}), \quad \forall j = 1, \ldots, k \Rightarrow W \subset U$ получаваме, че $W = U$.

$\ell(A_{i_1}, \ldots, A_{i_r}) = W = \ell(A_1, \ldots, A_k)$ и $\{A_{i_1}, \ldots, A_{i_r}\}$ ЛНЗ $\Rightarrow$те са базис на $\ell(A_1, \ldots, A_k) \Rightarrow r(A_1, \ldots, A_k) = r = \dim \ell(A_1, \ldots, A_k)$.

свойства базис и размерност на подпространство

Свойства

- Всеки r линейно независими вектора в r мерно подпространство образуват базис.
- Всеки $r+1$ вектора в r мерно подпространство са ЛЗ.
- Всяко линейно независимо множество вектори от подпространството V може да се допълни до базис ;

Теорема

Нека $V \subset F^n$ е подпространство, тогава :

$$\dim v = r \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \text{съществуват} \quad r \quad \text{линейно независими вектора във } V \\ \text{всеки} \quad r+1 \text{ вектора от } V \text{ са линейно зависими} \end{cases}$$

празна