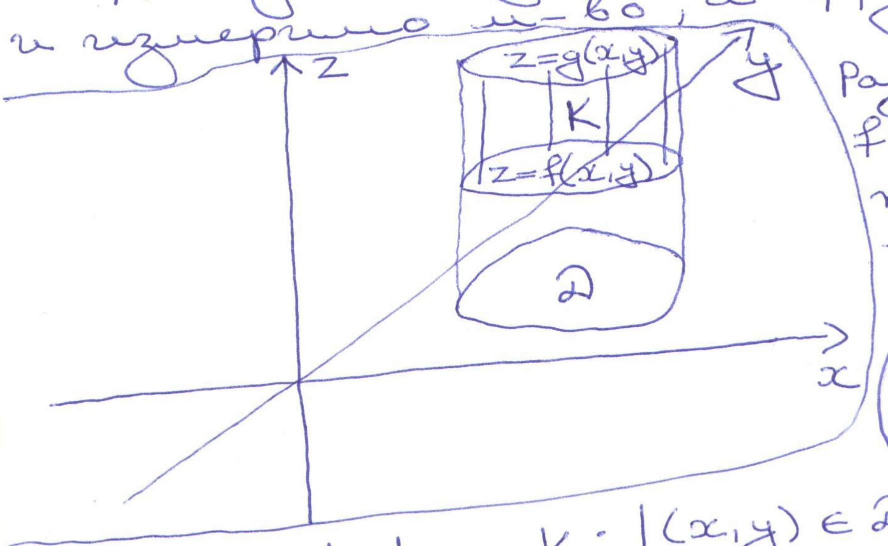
Тройни интеграли, част 1

Определението и свойствата на тройния интеграл са аналогични на определението и свойствата на двойния интеграл. В частност, ако $K\subset\mathbb{R}^3$ е компактно и измеримо м-во, то за обема му $V(K)$ имаме, че $V(K)=\iiint\limits_K 1\,dx\,dy\,dz$. Тук ще обърнем внимание само на някои теореми, свързани с пресмятането на тройните интеграли.

Определение 1 Казваме, че $K\subset\mathbb{R}^3$ е цилиндрично тяло (с вертикална образувателна), ако

$$K: \left|\begin{array}{l}(x,y)\in \mathcal{D}\\ f(x,y)\leq z\leq g(x,y)\end{array}\right.$$

, където $\mathcal{D}\subset\mathbb{R}^2$ е компактно и измеримо м-во, а $f,g:\mathcal{D}\to\mathbb{R}$ са непрекъснати в $\mathcal{D}$.



Разбира се, при $f(x,y)\equiv c_1$ и $g(x,y)\equiv c_2$ получаваме класически цилиндър с основа $\mathcal{D}$. (c_1 и c_2 са реални константи, като $c_1<c_2$)

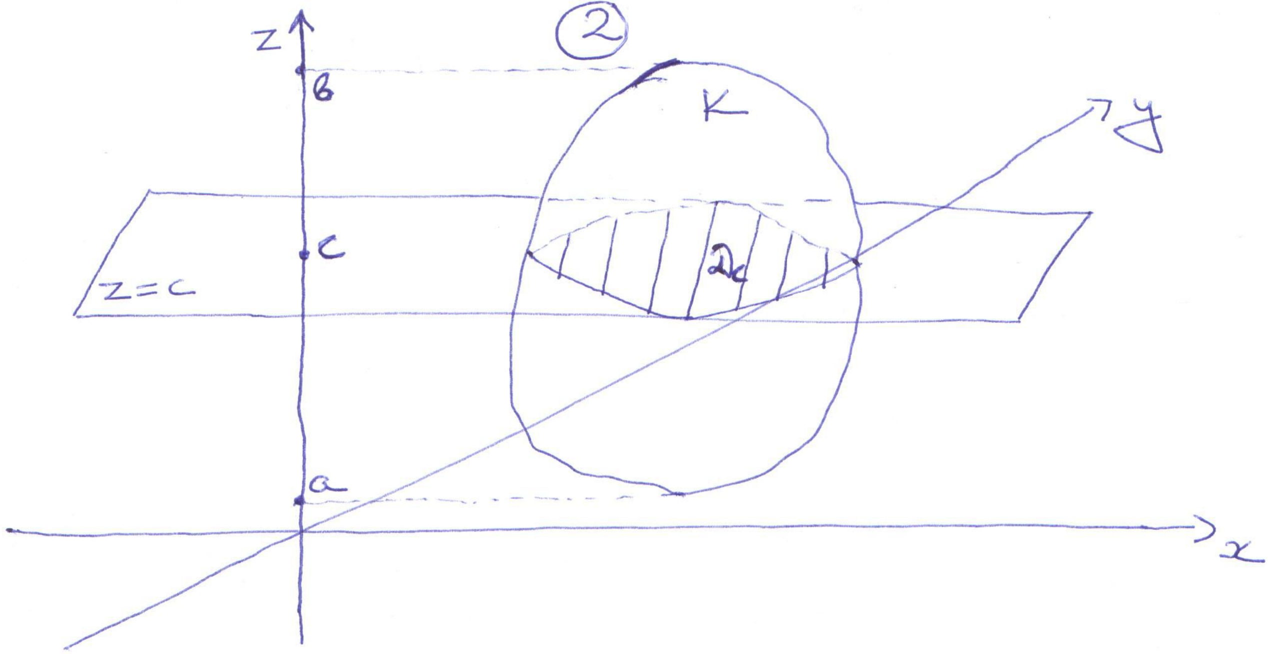
Теорема 1 Ако $K: \left|\begin{array}{l}(x,y)\in \mathcal{D}\\ f(x,y)\leq z\leq g(x,y)\end{array}\right.$ е цилиндрично тяло и $F:K\to\mathbb{R}$ е непрекъсната в K, то

$$\iiint\limits_K F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\iint\limits_{\mathcal{D}}\left[\int_{f(x,y)}^{g(x,y)}F(x,y,z)\,dz\right]dx\,dy.$$

Теорема 2 Нека $K\subset\mathbb{R}^3$ е компактно и измеримо м-во, $F:K\to\mathbb{R}$ е непрекъсната в K и сечението $\mathcal{D}_c=K\cap\{z=c\}$ на K с равнината $z=c$ е непразно само при $c\in[a,b]$, като $\mathcal{D}_c$ е измеримо м-во при $c\in[a,b]$. Тогава

$$\iiint\limits_K F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\int_a^b\left[\iint\limits_{\mathcal{D}_z}F(x,y,z)\,dx\,dy\right]dz.$$

(на следващата страница има чертеж, илюстриращ теорема 2)

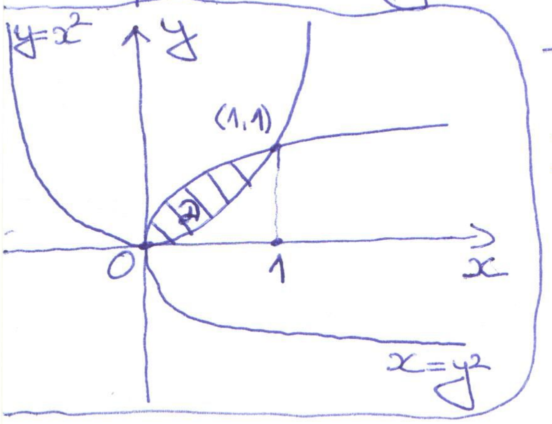


Зад. 1 Пресметнете $I = \iiint\limits_K xyz\,dx\,dy\,dz$, където

$$K: \left| \begin{array}{l} y \geq x^2 \\ x \geq y^2 \\ 0 \leq z \leq xy \end{array} \right. .$$

Решение: K е цилиндрично тяло, по-точно

$$K: \left| \begin{array}{l} (x,y) \in D \\ 0 \leq z \leq xy \end{array} \right., \text{ където } D: \left| \begin{array}{l} y \geq x^2 \\ x \geq y^2 \end{array} \right., \text{ т.е. } D: \left| \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 \leq y \leq \sqrt{x} \end{array} \right. .$$



Тогава по теорема 1

$$I = \iint\limits_D \Big[\int_0^{xy} xyz\,dz \Big] dx\,dy =$$

интегрирането е по z при фиксирана точка $(x,y) \in D$

$$= \iint\limits_D \Big[xy \int_0^{xy} z\,dz \Big] dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_D \Big[xy \frac{z^2}{2} \Big|_0^{xy} \Big] dx\,dy = \frac{1}{2} \iint\limits_D x^3 y^3\,dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \Big[\int_{x^2}^{\sqrt{x}} x^3 y^3\,dy \Big] dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \Big[x^3 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} y^3\,dy \Big] dx =$$

интегрирането е по y при фиксирано $x \in [0,1]$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \Big[x^3 \frac{y^4}{4} \Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} \Big] dx =$$

$$= \frac{1}{8} \int_0^1 \Big[x^3 (x^2 - x^8) \Big] dx =$$

$$= \frac{1}{8} \int_0^1 (x^5 - x^{11})\,dx = \frac{1}{8} \Big(\frac{x^6}{6} - \frac{x^{12}}{12} \Big) \Big|_0^1 = \frac{1}{8} \Big(\frac{1}{6} - \frac{1}{12} \Big) =$$

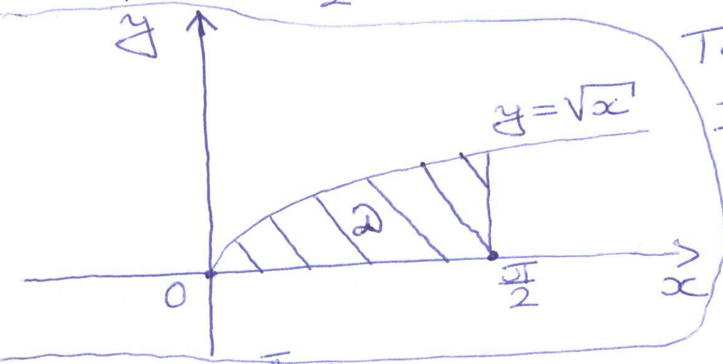
$$= \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{96}.$$

Отг. $I = \frac{1}{96}$.

Зад. 2 Пресметнете $I = \iiint\limits_K y\cos(x+z)\,dx\,dy\,dz$, където $K: \begin{cases} 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ 0 \le y \le \sqrt{x} \\ 0 \le z \le \frac{\pi}{2} - x \end{cases}$.

Решение: K е цилиндрично тяло:

$K: \begin{cases} (x,y) \in D \\ 0 \le z \le \frac{\pi}{2} - x \end{cases}$, където $D: \begin{cases} 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ 0 \le y \le \sqrt{x} \end{cases}$.



Тогава от теорема 1 имаме, че

$$I = \iint\limits_D \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}-x} y\cos(x+z)\,dz\right]dx\,dy =$$

интегрирането е по z при фиксирана точка $(x,y) \in D$

$$= \iint\limits_D \left[y\int_0^{\frac{\pi}{2}-x} \cos(x+z)\,d(x+z)\right]dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_D \left[y\sin(x+z)\Big|_{z=0}^{z=\frac{\pi}{2}-x}\right]dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_D \left[y(1-\sin x)\right]dx\,dy = \int_0^{\pi/2}\left[\int_0^{\sqrt{x}} y(1-\sin x)\,dy\right]dx =$$

интегрирането е по y при фиксирано $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$$= \int_0^{\pi/2}\left[(1-\sin x)\int_0^{\sqrt{x}} y\,dy\right]dx =$$

$$= \int_0^{\pi/2}\left[(1-\sin x)\frac{y^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{x}}\right]dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\left[(1-\sin x)x\right]dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_0^{\pi/2} x\,dx - \int_0^{\pi/2} x\sin x\,dx\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} x\,d\cos x\right] =$$

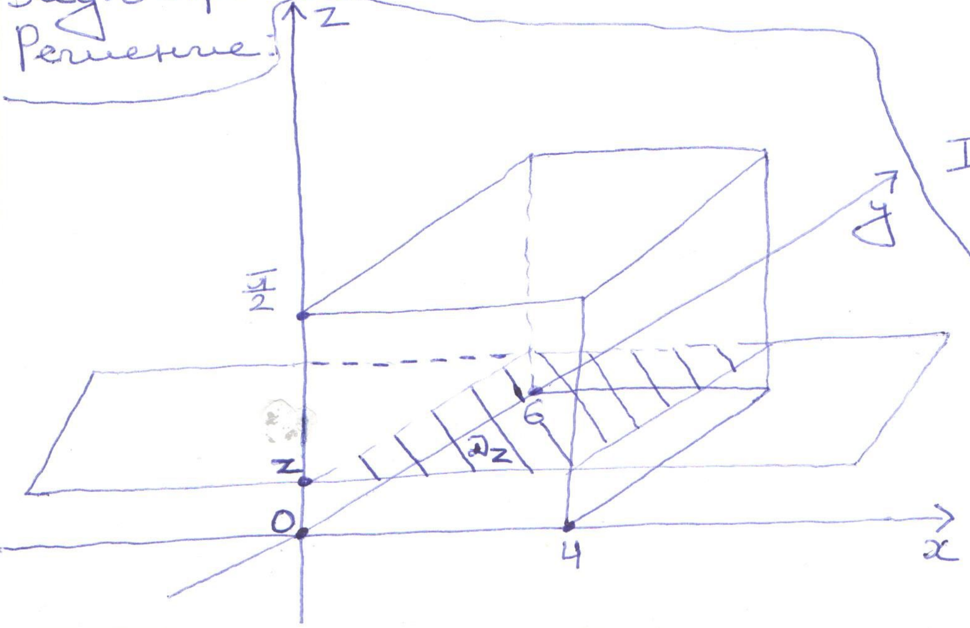
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\pi^2}{8} + \underbrace{(x\cos x)\Big|_0^{\pi/2}}_{0} - \int_0^{\pi/2}\cos x\,dx\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi^2}{8} - \sin x\Big|_0^{\pi/2}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{8} - 1\right).$$

Отг. $I = \frac{\pi^2 - 8}{16}$.

Зад. 3 Пресметнете $I = \iiint\limits_K \frac{\cos z}{2-\cos^2 z}\,dx\,dy\,dz$, $K: \begin{cases} 0 \le x \le 4 \\ 0 \le y \le 6 \\ 0 \le z \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$.

Решение:



По теорема 2

$$I = \int_0^{\pi/2}\left[\iint\limits_{D_z} \frac{\cos z}{2-\cos^2 z}\,dx\,dy\right]dz =$$

интегрирането е по x и y при фиксирано $z \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$$= \int_0^{\pi/2}\left[\frac{\cos z}{2-\cos^2 z}\iint\limits_{D_z} 1\,dx\,dy\right]dz =$$

$$= \int_0^{\pi/2}\left[\frac{\cos z}{2-\cos^2 z}\cdot S(D_z)\right]dz =$$

($S(D_z)$ е лицето на D_z)

$$= \int_0^{\pi/2} \left[\frac{\cos z}{2-\cos^2 z} \cdot 4.6 \right] dz = 24 \int_0^{\pi/2} \frac{\cos z}{2-\cos^2 z}\, dz =$$

D_z е правоъгълник със страни 4 и 6

$$= 24 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+(1-\cos^2 z)}\, d\sin z = 24 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\sin^2 z}\, d\sin z =$$

$$= 24\, \operatorname{arctg}(\sin z)\Big|_0^{\pi/2} = 24\left[\operatorname{arctg}\left(\sin \tfrac{\pi}{2}\right) - \operatorname{arctg}(\sin 0)\right] =$$

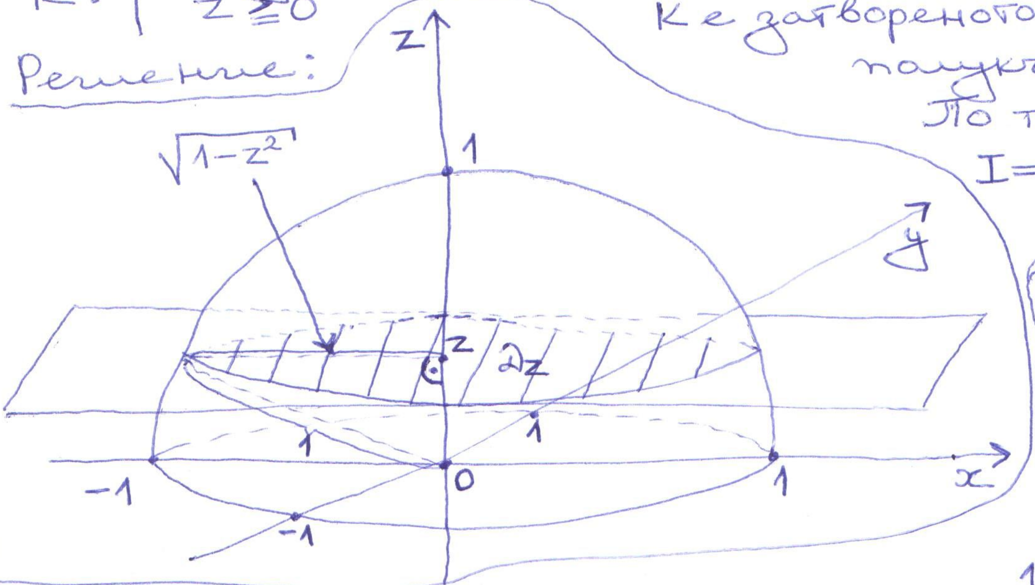
$$= 24\left[\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0\right] = 24\left(\tfrac{\pi}{4} - 0\right) = 6\pi.$$ Отг. $I = 6\pi$.

Зад. 4 Пресметнете $I = \iiint\limits_K z \operatorname{arctg}(1-z^2)\, dx\,dy\,dz$, където

$$K: \begin{cases} x^2+y^2+z^2 \leq 1 \\ z \geq 0 \end{cases}$$

Решение:

K е затвореното горно единично полукълбо.



По теорема 2

$$I = \int_0^1 \left[\iint\limits_{D_z} z \operatorname{arctg}(1-z^2)\, dx\,dy \right] dz =$$

интегрирането е по x и y при фиксирано $z \in [0,1]$

$S(D_z)$ е лицето на D_z

$$= \int_0^1 \left[z \operatorname{arctg}(1-z^2) \iint\limits_{D_z} 1\, dx\,dy \right] dz = \int_0^1 \left[z \operatorname{arctg}(1-z^2) \cdot S(D_z) \right] dz$$

$$= \int_0^1 \left[z \operatorname{arctg}(1-z^2)\, \pi \left(\sqrt{1-z^2}\right)^2 \right] dz =$$

D_z е кръг с радиус $\sqrt{1-z^2}$

$$= \pi \int_0^1 z(1-z^2) \operatorname{arctg}(1-z^2)\, dz =$$ $u = 1-z^2$

$$= -\frac{\pi}{2} \int_0^1 (1-z^2) \operatorname{arctg}(1-z^2)\, d(1-z^2) =$$

$$= -\frac{\pi}{2} \int_1^0 u \operatorname{arctg} u\, du = \frac{\pi}{2} \int_0^1 u \operatorname{arctg} u\, du = \frac{\pi}{4} \int_0^1 \operatorname{arctg} u\, du^2 =$$

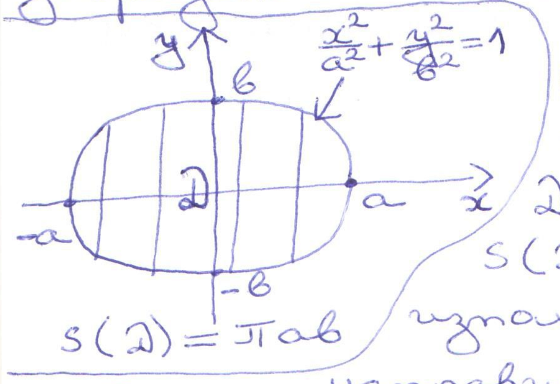
$$= \frac{\pi}{4}\left[(u^2 \operatorname{arctg} u)\Big|_0^1 - \int_0^1 u^2\, d\operatorname{arctg} u \right] = \frac{\pi}{4}\left[\frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{u^2}{u^2+1}\, du \right] =$$

$$= \frac{\pi}{4}\left[\frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{(u^2+1)-1}{u^2+1}\, du \right] = \frac{\pi}{4}\left[\frac{\pi}{4} - \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{u^2+1}\right) du \right] =$$

$$= \frac{\pi}{4}\left[\frac{\pi}{4} - (u - \operatorname{arctg} u)\Big|_0^1 \right] = \frac{\pi}{4}\left[\frac{\pi}{4} - \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \right] =$$

$$= \frac{\pi}{4}\left[\frac{\pi}{2} - 1 \right] = \frac{\pi(\pi-2)}{8}.$$ Отг. $I = \frac{\pi(\pi-2)}{8}$.

Преди да решим следващата задача, да припомним, че на упражненията по ДИС-2 с помощта на определен интеграл доказахме следния факт: лицето $S(D)$ на м-вото $D: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \leqq 1$ $(a>0, b>0)$, заградено от елипсата $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, е $S(D)=\pi ab$



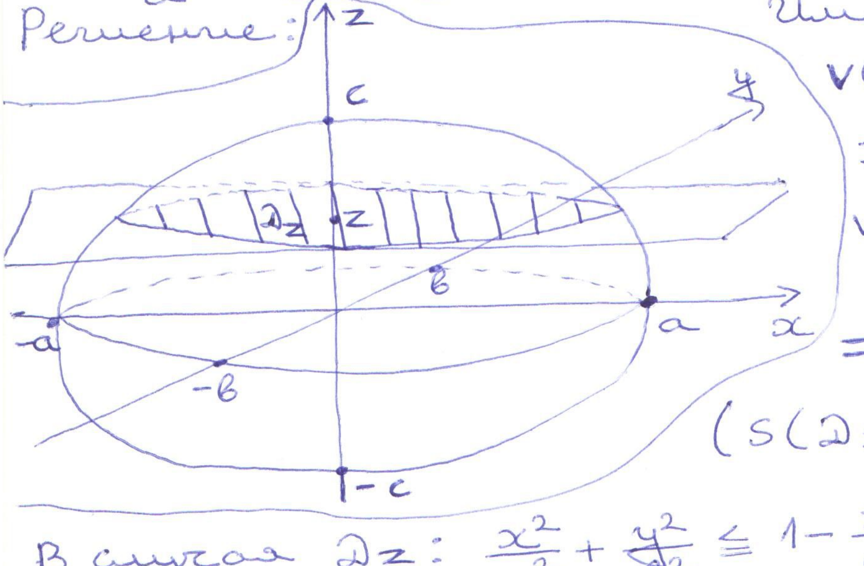
(и в частност, при $a=b=r$, лицето на кръг с радиус r е πr^2). Да отбележим, че равенството $S(D)=\pi ab$ може да се докаже и като използваме, че $S(D)=\iint\limits_D 1\,dxdy$ и в този интеграл направим обобщена полярна смяна

$$\begin{cases} x = a\rho\cos\varphi \\ y = b\rho\sin\varphi \\ \rho \geqq 0,\ 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi \end{cases}$$

Това е хубаво упражнение върху двойните интеграли, което оставяме за самостоятелна работа.

Зад. 5 Пресметнете обема $V(K)$ на елипсоида $K: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \leqq 1$ $(a>0, b>0, c>0)$.

Решение:



Имаме, че

$$V(K)=\iiint\limits_K 1\,dxdydz.$$

По теорема 2

$$V(K)=\int_{-c}^{c}\Big[\iint\limits_{D_z} 1\,dxdy\Big]dz = \int_{-c}^{c} S(D_z)\,dz$$

($S(D_z)$ е лицето на D_z).

В случая $D_z: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \leqq 1-\frac{z^2}{c^2}$, където $z \in (-c, c)$ е фиксирано число, т.е. $D_z: \frac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\right)^2} \leqq 1$ и според цитирания преди зад. 5 факт, $S(D_z)=\pi a\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\, b\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}} = \pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)$. Тогава $V(K)=\int_{-c}^{c} \underbrace{\pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)}_{\text{четна функция}} dz =$

$$= 2\pi ab\int_0^c\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)dz = 2\pi ab\left(z-\frac{z^3}{3c^2}\right)\Big|_0^c = 2\pi ab\,\frac{2}{3}c = \frac{4}{3}\pi abc.$$

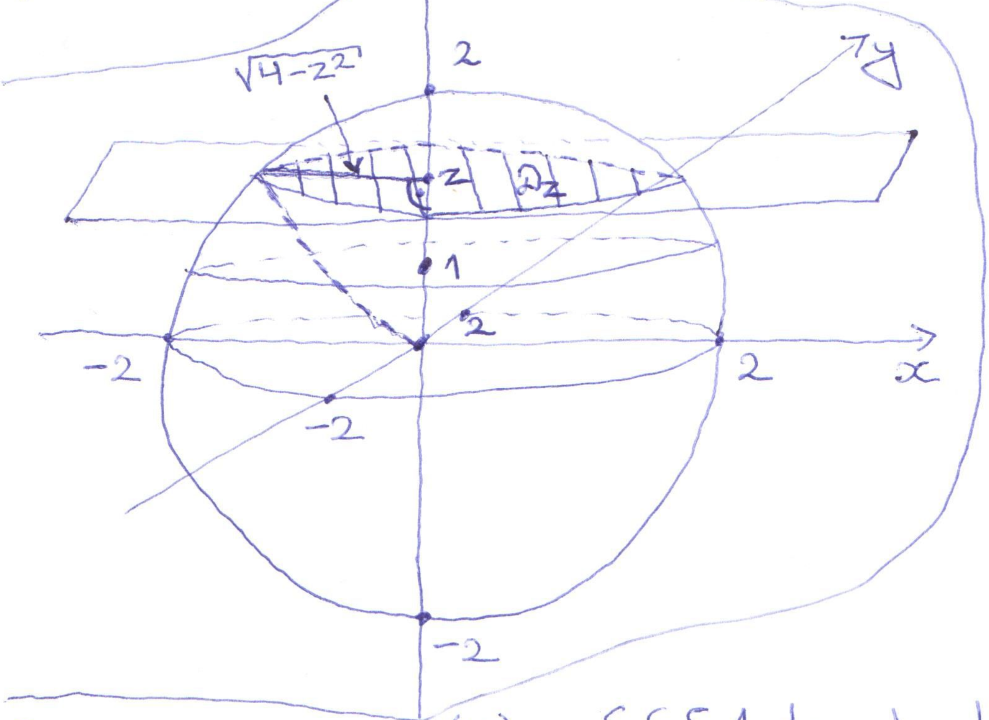
Отг. $V(K)=\frac{4}{3}\pi abc$.

Забележка: Като частен случай от зад. 5 при $a=b=c=r$, получаваме, че обемът на кълбо с радиус r е $\frac{4}{3}\pi r^3$.

(6)

Зад. 6 Пресметнете обема $V(K)$ на тялото K: $\begin{cases} x^2+y^2+z^2 \leqq 4 \\ z \geqq 1 \end{cases}$.

Решение:



K е сферичен купол.

D_z е кръг с радиус $\sqrt{4-z^2}$

Имаме, че $V(K) = \iiint\limits_K 1\, dx\, dy\, dz =$

$= \int_1^2 \left[\iint\limits_{D_z} 1\, dx dy \right] dz = \int_1^2 s(D_z)\, dz =$

$= \int_1^2 \pi \left(\sqrt{4-z^2}\right)^2 dz = \pi \int_1^2 (4-z^2)\, dz =$

$= \pi \left(4z - \frac{z^3}{3}\right)\Big|_1^2 = \pi \left[4z\Big|_1^2 - \frac{z^3}{3}\Big|_1^2 \right] =$

$= \pi \left[4 - \frac{7}{3} \right] = \frac{5\pi}{3}$. Отг. $V(K) = \frac{5\pi}{3}$.