Координатни условия за колинеарност и компланарност

I На вектори

* $K = O\vec{e}_1\vec{e}_2$ $\quad \vec{a}(a_1, a_2)$, $\vec{b}(b_1, b_2)$ са линейно зависими (колинеарни) $\iff \boxed{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0}$

* $K = O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ ОКС $\quad \vec{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ са колинеарни $\iff \vec{a} \times \vec{b} = \vec{o} \iff \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) = (0, 0, 0)$

$\vec{c}(c_1, c_2, c_3)$ $\qquad \vec{a} \parallel \vec{b} \iff r\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = 1$

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – компланарни $\iff (\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = 0 \iff \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$

II На точки

* ОКС $K = Oxy$! $\quad A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, $A_3(x_3, y_3)$

A_1, A_2, A_3 са колинеарни $\iff \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$!

* ОКС $K = Oxyz$ $\quad A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, $A_3(x_3, y_3, z_3)$, $A_4(x_4, y_4, z_4)$

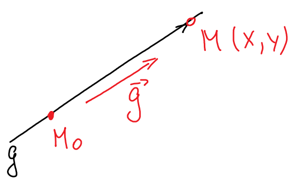
$A_1 A_2 A_3$ са колинеарни $\iff \overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3} = \vec{o}$

$A_1 A_2 A_3 A_4$ са компланарни $\iff (\overrightarrow{A_1A_2}\ \overrightarrow{A_1A_3}\ \overrightarrow{A_1A_4}) = 0$ смесено произведение

Уравнения на права в равнината $\qquad$ ОКС $K = Oxy$

I Координатни параметрични уравнения на права в равнината

$M_0(x_0, y_0)$, $\vec{g}(a, b) \neq (0, 0) \Rightarrow \exists!\ g \begin{cases} \ni M_0 \\ \parallel \vec{g} \end{cases}$



$M(x, y)$ е произволна от g

$x = ?$, $y = ?$ чрез M_0 и $\vec{g}$

$\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{g} \Rightarrow \exists!\ s : \overrightarrow{M_0M} = s.\vec{g}$

$\overrightarrow{M_0M}(x - x_0, y - y_0) \qquad \vec{g}(a, b)$

$$\begin{array}{l} x - x_0 = s.a \\ y - y_0 = s.b \end{array} \Rightarrow \boxed{g: \begin{cases} x = \underbrace{x_0}_{M_0} + s.\underbrace{a}_{\vec{g}} \\ y = y_0 + s.b \end{cases}, s \in \mathbb{R}}$$

$x(s)$ $\quad y(s)$

т. $M \longleftrightarrow s$

II Общо уравнение на права в равнината

$$g: \begin{cases} x = x_0 + a.s & |.b \\ y = y_0 + b.s & |.(-a) \end{cases} \quad (+) \Rightarrow b.x - a.y = \underbrace{b.x_0 - a.y_0}$$

$$\underbrace{b}_{A}.x - \underbrace{a}_{B}.y \underbrace{- (b.x_0 - a.y_0)}_{C} = 0$$

$\cup \; \left[y = y_0 + b.s \; \right| .(-a)$

$\underbrace{b}_{A}.x - \underbrace{a}_{B}.y - \underbrace{(b.x_0 - a.y_0)}_{C} = 0$

$\left[\begin{array}{l} A = b \; ! \\ B = -a \\ C = a.y_0 - b.x_0 \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} g: A.x + B.y + C = 0 \\ (A, B) \neq (0,0) \end{array}}$ – общо

$\boxed{g: \underline{A}.x + \underline{B}.y + \underline{C} = 0}$ 1) т. $M \in g \Rightarrow A.x_M + B.y_M + C = 0$

$M(x_M, y_M): A.x_M + B.y_M + C = 0 \Rightarrow M \in g$

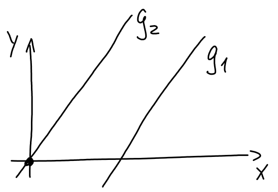
2) $g \parallel \vec{g}(a, b)$ $a = -B$, $b = A$ $\Rightarrow g \parallel \vec{g}(-B, A)$

пример:

$g_1: 3x - 8y + 11 = 0 \Rightarrow g_1 \parallel \vec{g_1}(8, 3)$

$g_2: 3x - 8y \quad = 0 \Rightarrow g_2 \parallel \vec{g_1}(8, 3)$ $\Rightarrow g_1 \parallel g_2$

$C = 0 \Leftrightarrow g_2 \ni$ т. $O(0,0)$



$Ox: y = 0$ – общо уравн. на Ox, $Ox \parallel (1, 0)$

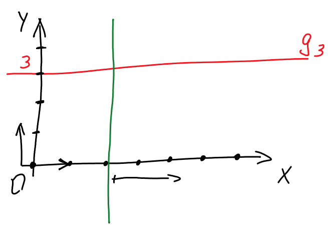
$A = 0$, $B = 1$, $C = 0$

$O_y: x = 0$ $A = 1, B = 0, C = 0$, $O_y \parallel (0, 1)$

$g_3: y = 3 \Rightarrow g_3 \parallel Ox$

Извод: $y = C$ е успоредна на Ox

$g_4: x = 2 \Rightarrow g_4 \parallel O_y$ $\quad g: x = C \Rightarrow g \parallel O_y$

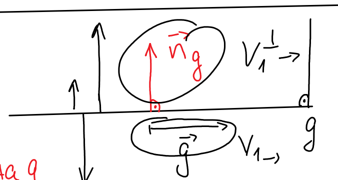


$g: \underline{A}.x + \underline{B}.y + C = 0$

$\vec{g}(-B, A) \parallel g$

$\vec{n_g}$ – нормален вектор на g

$\vec{g} \perp \vec{n_g} \Rightarrow (\vec{g}.\vec{n_g}) = 0 \Rightarrow \vec{n_g}(?, ?) \xRightarrow{ОКС}$



$V \to 2D$

$V_1 = \{ \forall \vec{g} \parallel g \}$

$V_1^{\perp}$

$\vec{g}(-B, A)$

$\vec{n_g}(A, B)$ ОКС $K = Oxy$

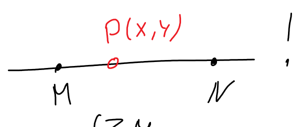
$\underline{\vec{n_g}(\varkappa.A, \varkappa.B)}$ $\varkappa \neq 0 \perp g$

---

1 зад. Oxy (права през 2 точки)

a) $M(2, 3)$, $N(1, 5)$

1) коорд. параметрични уравн. на MN



$MN: \begin{cases} x = 2 + s.(-1) \\ y = 3 + s.2 \end{cases}$, $s \in [0; 1] \to$ отс. MN $\quad MN \begin{cases} \ni M \\ \parallel \vec{MN}(-1, 2) \end{cases}$ $MN \begin{cases} \ni M \\ \parallel \vec{NM} \end{cases}$ $MN \begin{cases} \ni N \\ \parallel \vec{MN} \end{cases}$

$s \in [0; +\infty)$ – лъч $\vec{MN}$

$s \in (-\infty; +\infty)$ – правата MN

2) Общо уравнение на MN

$\left. \begin{array}{l} P(x, y) \\ M(2, 3) \\ N(1, 5) \end{array} \right\}$ колинеарни $\Leftrightarrow \boxed{\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0}$

$3x + y + 10 - 3 - 5x - 2y = 0$

$-2x - y + 7 = 0 \; |.(-1)$

$MN: 2x + y - 7 = 0$

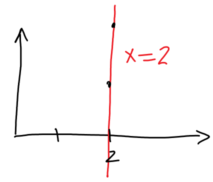
$MN: 2x+y-7=0$

$M \quad 2.2+3-7=0$ Да

$N \quad 2.1+5-7=0$ Да

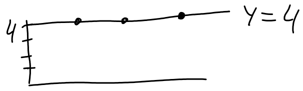
б) $M(2,3)$, $N(2,5) \Rightarrow MN: x=2$

$Q(2, 2021) \in MN$



$$MN: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x=2$$

$R(-7,4)$ $S(11,4) \Rightarrow RS: y=4$



$$\boxed{\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \quad \text{Не!}}$$

II н. $M(2,3)$ $N(1,5)$?, общо уравн. на MN

$MN: A.x+B.y+C=0$, където $A = 2B$, B, $C = -7B$

$$\boxed{\begin{array}{l} M(2,3) \Rightarrow \left| A.2+B.3+C=0 \right. \\ N(1,5) \Rightarrow \left| A.1+B.5+C=0 \right. \quad |.(-2) \end{array}} \;+\; \Rightarrow -7B-C=0$$

$C=-7B$

$2B.x+B.y-7B=0$, $B=1$

$2.x+y-7=0$

$$\left| \begin{array}{l} C=-7B \\ A+5B+C=0 \Rightarrow A+5B-7B=0 \end{array} \right.$$

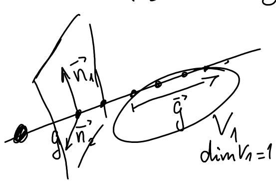
$A=2B$

$$\boxed{\left| \begin{array}{l} A=2B \\ B\neq 0 \\ C=-7B \end{array} \right.}$$

Изб. $\boxed{B=1} \Rightarrow MN: 2.x+1.y-7=0$

$g: A.x+B.y+C=0$

$(A.g).x+(B.g).y+(C.g)=0 \to g \quad g\neq 0$



$\boxed{O e_1 e_2 e_3}$

$V_1^{\perp} \to \dim V_1^{\perp}=2$

Взаимни положения на две прави в равнината

$g_1: A_1.x+B_1.y+C_1=0$

$g_2: A_2.x+B_2.y+C_2=0$

$$g_1 \cap g_2 = ? \Rightarrow \left| \begin{array}{l} A_1.x+B_1.y+C_1=0 \\ A_2.x+B_2.y+C_2=0 \end{array} \right.$$

1 сл.

$$r\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 1 \qquad \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \Rightarrow g_1 \equiv g_2$$

2 сл.

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2} \qquad r\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix} = 1 \qquad r\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow g_1 \parallel g_2$$

$$\left| \begin{array}{l} x+y-3=0 \\ x+y+3=0 \end{array} \right.$$

3 сл.

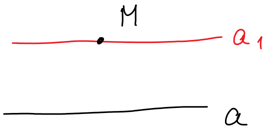
$A_1 \quad B_1 \quad r\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ \ldots \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \exists!$ т. $S = g_1 \cap g_2$

$A_2 \neq B_2$

2 зад. (Успоредни прави)

$a: 3x+4y+2=0$?, общо уравнение на правата $a_1 \begin{cases} \ni M \\ \parallel a \end{cases}$

$M(1,-2) \notin a$



$a: 3x+4y+2=0$

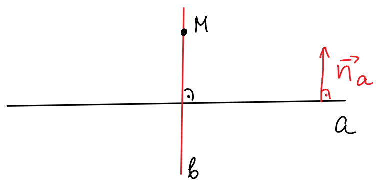
$a_1: 3.x+4.y+C=0$

$M(1,-2) \to 3.1+4.(-2)+C=0 \Rightarrow C=5 \Rightarrow a_1: 3x+4y+5=0$

3 зад. (Перпендикулярни прави) ОКС $K=Oxy$

$a: 3x+4y+2=0$?, общо уравн. на правата $b \begin{cases} \ni M \\ \perp a \end{cases}$

$M(1,-2)$



$b \begin{cases} \ni M(1,-2) \\ \parallel \vec{n}_a(3,4) \end{cases}$

$b: \begin{cases} x = 1 + 3.s \quad /.4 \\ \qquad\qquad s \in \mathbb{R} \\ y = -2+4.s \quad /.(-3) \end{cases} + \Rightarrow b: 4.x-3.y-10=0$

$a: 3x+4.y+2=0 \quad \vec{n}_a(3,4) \quad \vec{n}_a \cdot \vec{n}_b = 0$

$a \perp b: 4.x-3.y+C=0 \quad \vec{n}_b(4,-3)$

$M(1,-2) \Rightarrow 4.1-3(-2)+C=0 \Rightarrow C=-10$

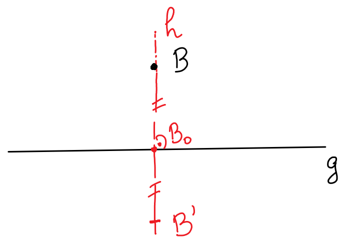
---

4 зад. (Симетрия относно права)

B под действие на осева симетрия с ос g се изобр. в т. B'

σ_g - осева симетрия с ос g

$B \xrightarrow{\sigma_g} B'$, $\sigma_g(B) = B'$



$g \equiv S_{BB'}$

$g: x+y-1=0$, $B(0,-1)$

?, коорд. на т. $B' = \sigma_g(B)$

1) ?, $h \begin{cases} \ni B(0,-1) \\ \perp g: x+y-1=0 \end{cases} \Rightarrow h: x-y+C=0$

$B(0,-1) \to 0+1+C=0 \Rightarrow C=-1$

$h: x-y-1=0$

2) ?, т. $B_0 = h \cap g \Rightarrow \begin{vmatrix} x-y-1=0 \\ x+y-1=0 \end{vmatrix} \Rightarrow B_0(1,0)$

3) $B(0,-1)$

$B'(x',y')$

$B_0(1,0)$ - средата на $BB' \Rightarrow \dfrac{0+x'}{2}=1 \Rightarrow x'=2$

$\dfrac{-1+y'}{2}=0 \Rightarrow y'=1$

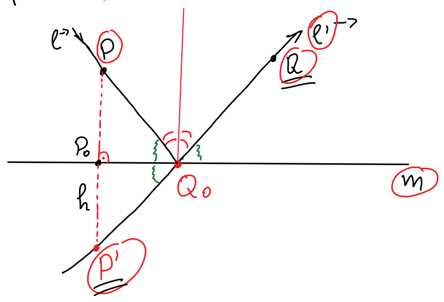
$B'(2,1)$

5 зад. (Светлинни лъчи, симетрия)

$m: x+y-3=0$, $P(-5,4)$, $Q(-1,1)$

Светл. лъч $\vec{\ell} \ni P$, отразява се от m и отразеният лъч $\vec{\ell'} \ni Q$.

?, уравнения на правите ℓ и ℓ'.



Ако т. $P \xrightarrow{\sigma_m} P'$, то $P' \ni \ell'$

1. ?, т. P'

$h \begin{cases} \ni P(-5,4) \\ \perp m: x+y-3=0 \end{cases} \Rightarrow h: x-y+C=0$

$-5-(4)+C=0$

$C=9$

$h: x-y+9=0$

т. $P_0 = h \cap m \Rightarrow \begin{vmatrix} x+y-3=0 \\ x-y+9=0 \end{vmatrix} \Rightarrow P_0(-3,6) \Rightarrow$

$P'(x', y')$

$P(-5,4)$ $\Rightarrow$ $\frac{x'+(-5)}{2}=-3$

$P_0(-3,6)$ – среда $\frac{y'+4}{2}=6$

$P'(-1,8)$

2) $\ell' \begin{cases} \ni P'(-1,8) \\ \ni Q(-1,1) \end{cases}$ $\ell' \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 8 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ $\ell': x=-1$

3) $Q_0 = \ell' \cap m \Rightarrow \begin{vmatrix} x=-1 \\ x+y-3=0 \end{vmatrix} \Rightarrow Q_0(-1,4)$

4) $\ell \begin{cases} \ni P(-5,4) \\ \ni Q_0(-1,4) \end{cases} \Rightarrow \ell: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -5 & 4 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ $\ell: y=4$