7. Абсолютно и условно сходящи редове. Комутативен закон за абсолютно сходящите редове. Критерий на Лайбниц

Дефиниция

Казваме, че $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е абсолютно сходящ, ако $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ е сходящ.

Теорема 1

Всеки абсолютно сходящ ред е сходящ.

Доказателство на Теорема 1

Нека $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ е абсолютно сходящ.

Това означава, че $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ е сходящ.

Ще докажем, че $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ.

За тази цел ще използваме НДУ на Коши за сходимост на редове.

Според него е достатъчно да покажем, че

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{R} : \quad \left| \sum_{n=k}^{k+p} a_n \right| < \varepsilon \quad \text{при} \quad k > \nu, \quad p \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Знаем, че $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ е сходящ.

Тогава според НДУ на Коши, приложено към този ред, имаме, че

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{R} : \quad \sum_{n=k}^{k+p} |a_n| < \varepsilon \quad \text{при} \quad k > \nu, \quad p \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Остава да вземем предвид, че

$$\left| \sum_{n=k}^{k+p} a_n \right| \leq \sum_{n=k}^{k+p} |a_n|, \tag{3}$$

за да получим (1) от (2).

Условно сходящи редове

Дефиниция

Ред, който е сходящ, без да е абсолютно сходящ, се нарича <u>условно сходящ</u>.

Пример: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$

в разписан вид

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \dots \tag{4}$$

Комутативен закон за абсолютно сходящите редове

Теорема 2 (комутативен закон за абсолютно сходящите редове)

Ако разместим дори безбройно много членове на абсолютно сходящ ред, той остава сходящ при това със същата сума.

Условно сходящите редове не притежават това свойство.

Доказателство на Теорема 2

Да означим реда чрез

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{5}$$

а след разместването на негови членове — чрез

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}. \tag{6}$$

Случай (а): $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Полагаме

$$S_n := a_1 + a_2 + \cdots + a_n \quad \text{и} \quad \sigma_k := a_{n_1} + a_{n_2} + \cdots + a_{n_k}. \tag{7}$$

Имаме

$$a_m \geq 0 \quad \forall m \quad \Longrightarrow \quad \{\sigma_k\} \quad \text{е монотонно растяща.} \tag{8}$$

Ще докажем, че $\{\sigma_k\}$ е ограничена отгоре.
Тогава

$$\text{т-ма за ограничените редици} \quad \Longrightarrow \quad \{\sigma_k\} \quad \text{е сходяща}$$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} \quad \text{е сходящ.} \tag{9}$$

За да докажем, че $\{\sigma_k\}$ е ограничена отгоре, забелязваме, че каквото и k да фиксираме, стига да вземем достатъчно голямо n, събираемите в σ_k ще се срещнат в S_n, т.е.

$$a_{n_1}, a_{n_2}, \dots, a_{n_k} \text{ се срещат между} \\ a_1, a_2 \dots, a_n \text{ за някое достатъчно голямо } n, \tag{10}$$

а останалите a_m са неотрицателни.

$$\Longrightarrow \quad \sigma_k \leq S_n \text{ за някое достатъчно голямо } n. \tag{11}$$

Известно е, че $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ.
Да означим сумата му с S,
т.е. $\{S_n\}$ е сходяща и $S := \lim S_n$.
Като използваме отново, че $a_n \geq 0\ \forall n$, заключаваме, че $\{S_n\}$ е монотонно растяща

$$\Longrightarrow \quad S_n \leq S \quad \forall n \quad \overset{(11)}{\Longrightarrow} \sigma_k \leq S \quad \forall k. \tag{12}$$

Така показахме, че $\{\sigma_k\}$ е ограничена монотонна редица

$$\Longrightarrow \quad \{\sigma_k\} \quad \text{е сходяща.} \tag{13}$$

Полагаме

$$\sigma := \lim \sigma_k. \tag{14}$$

Имаме

$$\sigma_k \leq S \quad \forall k \quad \Longrightarrow \quad \sigma \leq S \tag{15}$$

Обратно, можем да разглеждаме $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ като получен от $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$ посредством разместване на членовете.

Вече доказаното

$$\Longrightarrow \quad S \leq \sigma \tag{16}$$

$$\Longrightarrow \quad S = \sigma. \tag{17}$$

Случай (б): общ

Всеки сходящ ред може да се представи като разлика на два сходящи реда с неотрицателни членове:
ако положим

$$b_n := \frac{|a_n| + a_n}{2} \quad \text{и} \quad c_n := \frac{|a_n| - a_n}{2}, \tag{18}$$

то $b_n, c_n \geq 0$ за всяко n и

$$a_n = b_n - c_n. \tag{19}$$

Редът $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ е сходящ, защото се получава от сходящите редове

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

посредством почленно умножаване с число и събиране.

Аналогично се установява, че $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ е сходящ.

(a) $\implies$ комутативният закон е в сила за $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$.

$\implies$ той е в сила и за тяхната разлика $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Критерий на Лайбниц

Теорема 3 (Критерий на Лайбниц)

Ако $\{a_n\}$ удовлетворява условията:

(а) $a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$,

(б) $\{a_n\}$ е монотонно намаляваща,

(в) $\lim a_n = 0$,

то редът

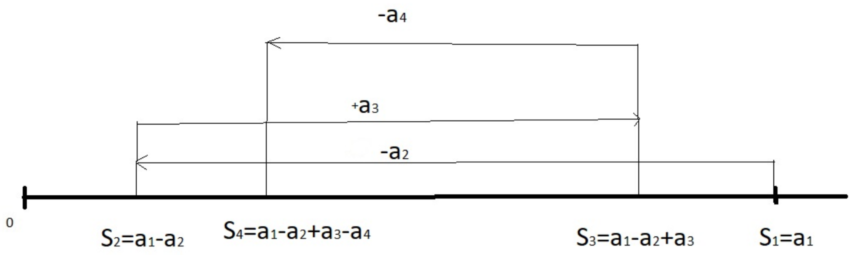
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n \tag{20}$$

е сходящ.

Пример: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}; \quad a_n = \frac{1}{n}.$

Доказателство на критерия на Лайбниц

S_n — n-тата частична сума на реда



$$S_{2n+1} = S_{2n-1} - \underbrace{(a_{2n} - a_{2n+1})}_{\geq 0} \implies \{S_{2n-1}\} \text{ е монотонно намаляваща}$$

Аналогично се вижда, че $\{S_{2n}\}$ е монотонно растяща.

Имаме

$$S_{2n-1} = \underbrace{(a_1 - a_2)}_{\geq 0} + \underbrace{(a_3 - a_4)}_{\geq 0} + \cdots + \underbrace{(a_{2n-3} - a_{2n-2})}_{\geq 0} + \underbrace{a_{2n-1}}_{\geq 0} \geq 0. \tag{21}$$

Така $\{S_{2n-1}\}$ е ограничена отдолу монотонно намаляваща редица.
Т-ма за ограничените редици $\implies$ $\{S_{2n-1}\}$ е сходяща.
Полагаме $S := \lim S_{2n-1}$.
Имаме

$$S_{2n} = S_{2n-1} - a_{2n} \to S - 0 = S. \tag{22}$$

От

$$\lim S_{2n-1} = \lim S_{2n} = S \implies \lim S_n = S \tag{23}$$

$\implies \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ е сходящ.

Бележка

Установява се, че

$$|S - S_n| \leq a_{n+1}. \tag{24}$$