Задача 5. Числата на Фибоначи се дефинират чрез следното рекурентно уравнение:

$$F_n = \begin{cases} 0, & \text{ако } n = 0, \\ 1, & \text{ако } n = 1, \\ F_{n-1} + F_{n-2}, & \text{ако } n > 1. \end{cases}$$

Да се докаже, че

$$\forall n \geq 1 \, : \, F_{2n+1} = F_n^2 + F_{n+1}^2$$

Упътване: *задачата може да се реши с комбинаторни разсъждения. F_m за $m \geq 1$ е броят на различните начини да се изкачи стълба с $m - 1$ стъпала, ако на всяка крачка качваме едно или две стъпала. Това може да се ползва наготово.*

Примерно, стълба с 3 стъпала може да се изкачи по три начина, ако на всяка крачка качваме едно или две стъпала: или стъпало по стъпало, или първо две стъпала наведнъж и после едно стъпало, или първо едно стъпало и после две стъпала наведнъж. Броят на начините е 3, а 3 е точно F_4.

Виждаме, че F_{2n+1} е броят на начините да се качи стълба с $2n$ стъпала, ако на всяка крачка качваме едно или две стъпала. Разбийте тези качвания по това, дали се стъпва върху n-тото стъпало, или не.