① $8^{мо}$ упражнение за 1, 2 и 3 група

Опр. 1 Казваме, че редицата $\{a_n\}$ е фундаментална (или още редица на Коши), ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува число ν, такова че при $m > \nu$ и $n > \nu$ имаме $|a_m - a_n| < \varepsilon$.

Теорема на Коши

$\{a_n\}$ е сходяща $\Longleftrightarrow$ $\{a_n\}$ е фундаментална

Зад. 1 Нека $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$. Док. че $\{a_n\}$ е разходяща.

Решение: Да допуснем, че $\{a_n\}$ е сходяща. Тогава $\{a_n\}$ ще е фундаментална.

Избирайки в опр. 1 $\varepsilon = \frac{1}{2}$ и $m = 2n$, получаваме, че $\exists \nu$, такова че при $n > \nu$ (тогава и $2n > \nu$) имаме $|a_{2n} - a_n| < \frac{1}{2}$.

И така, от допускането, че $\{a_n\}$ е сходяща следва, че $|a_{2n} - a_n| < \frac{1}{2}$ при $n > \nu$.

Но $|a_{2n} - a_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n} \geqq$

$\geqq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$ за $\forall n$. $\Downarrow$

Сл. $\{a_n\}$ е разходяща.

Забележка: Зад. 1 показва, че хармоничният ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ е разходящ.

Опр. 2 Казваме, че редицата $\{a_n\}$ е:

а) растяща, ако $a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq a_4 \leqq \dots$;

б) строго растяща, ако $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < \dots$;

в) намаляваща, ако $a_1 \geqq a_2 \geqq a_3 \geqq a_4 \geqq \dots$;

г) строго намаляваща, ако $a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > \dots$;

д) монотонна, ако е растяща или намаляваща.

② Теорема на Вайерщрас

Всяка ограничена и монотонна редица е сходяща.

Зад. 2 Докажете, че са сходящи редиците:

а) $a_n = 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{(n-1)n}$;

б) $a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$.

Решение: а) Ще използваме, че ако $k \in \mathbb{N}$, то

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{(k+1)-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

Имаме, че

$$a_n = 1 + \left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$$

$$= 2 - \frac{1}{n}.$$

Щом $a_n = 2 - \frac{1}{n}$, то $\{a_n\}$ е сходяща

(и $a_n \longrightarrow 2$).

б) Понеже $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{(n+1)^2}$, то $a_{n+1} > a_n$ за $\forall n$

и значи $\{a_n\}$ е строго растяща.

От друга страна $a_n < 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots$

$$\dots + \frac{1}{(n-1)n} \underset{\text{от а)}}{\overset{\uparrow}{=}} 2 - \frac{1}{n} < 2 \text{ за } \forall n.$$

Оказа се, че $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < \dots < 2$.

Сл. $\{a_n\}$ е ограничена и монотонна и

значи $\{a_n\}$ е сходяща.

Забележка: Зад. 2 б) показва, че редът

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ е сходящ.

(3) От лекциите е известно, че редицата $\left\{a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ е ограничена и монотонна (по-точно строго растяща). Тогава $\{a_n\}$ е сходяща. Границата ѝ се означава с e, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$. Числото e е ирационално и $e = 2,7182\ldots$

Зад. 3 Док. че: а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^n = e^k$, $k\in\mathbb{N}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{k}{n}\right)^n = e^{-k}$, $k\in\mathbb{N}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{kn}\right)^n = e^{\frac{1}{k}}$, $k\in\mathbb{N}$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{kn}\right)^n = e^{-\frac{1}{k}}$, $k\in\mathbb{N}$.

Решение: а) Ще приложим индукция по k.

$k=1$: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^1$ – вярно е.

Допускаме, че $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^n = e^k$ за някое $k\in\mathbb{N}$

Ще докажем, че тогава $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{k+1}{n}\right)^n = e^{k+1}$.

Имаме, че

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k+1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+k+1}{n}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{n+k+1}{n+k}\right)^n \cdot \left(\frac{n+k}{n}\right)^n\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n+k}\right)^n \cdot \left(1+\frac{k}{n}\right)^n\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\left(1+\frac{1}{n+k}\right)^{n+k}}{\left(1+\frac{1}{n+k}\right)^k} \cdot \left(1+\frac{k}{n}\right)^n\right] =$$

$$= \frac{e}{1^k}\cdot e^k = e^{k+1}.$$

④ б) Прилагаме индукция по к:

$k=1$: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}$ – вярно е, защото

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\frac{n}{n-1}}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{(n-1)+1}{n-1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\cdot\left(1+\frac{1}{n-1}\right)} = \frac{1}{e\cdot 1} = e^{-1}.$$

Допускаме, че $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{k}{n}\right)^n = e^{-k}$, за някое $k\in\mathbb{N}$.

Ще докажем, че тогава $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{k+1}{n}\right)^n = e^{-(k+1)}$.

Имаме, че

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{k+1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-k-1}{n}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{n-k-1}{n-k}\right)^n\cdot\left(\frac{n-k}{n}\right)^n\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{n-k}\right)^n\cdot\left(1-\frac{k}{n}\right)^n\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{n-k}\right)^{n-k}\cdot\left(1-\frac{1}{n-k}\right)^k\cdot\left(1-\frac{k}{n}\right)^n\right] =$$

$$\underset{\uparrow}{=} e^{-1}\cdot 1^k\cdot e^{-k} = e^{-(k+1)}$$

от случая $k=1$ и от инд. допускане

в) $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{kn}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\sqrt[k]{\left(1+\frac{1}{kn}\right)^{kn}} = \sqrt[k]{e} = e^{\frac{1}{k}}$$

г) $$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{kn}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\sqrt[k]{\left(1-\frac{1}{kn}\right)^{kn}} = \sqrt[k]{e^{-1}} = e^{-\frac{1}{k}}$$

(Във в) използваме, че $\left\{\left(1+\frac{1}{kn}\right)^{kn}\right\}$ е подредица на $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ и понеже $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e$, то и $\left(1+\frac{1}{kn}\right)^{kn} \xrightarrow[n\to\infty]{} e$.
В г) използваме, че $\left\{\left(1-\frac{1}{kn}\right)^{kn}\right\}$ е подредица на $\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ и че $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow e^{-1}$ от б).)

(5) Зад. 4 Пресметнете $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, ако:

а) $a_n=\left(\dfrac{n^2+5n+6}{n^2+3n+2}\right)^{\frac{n}{2}}$; б) $a_n=\left(\dfrac{2n^2+n-1}{2n^2+6n}\right)^n$.

Решение: а) $a_n=\sqrt{\left(\dfrac{\cancel{(n+2)}(n+3)}{(n+1)\cancel{(n+2)}}\right)^n}=$

$$=\sqrt{\left(\frac{1+\frac{3}{n}}{1+\frac{1}{n}}\right)^n}=\sqrt{\frac{\left(1+\frac{3}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}}\xrightarrow[n\to\infty]{\text{от зад. 3а)}}\sqrt{\frac{e^3}{e}}=\sqrt{e^2}=e$$

Отг. на а): $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=e$.

б) $$a_n=\left(\frac{(n+1)(2n-1)}{2n(n+3)}\right)^n=\left(\frac{n+1}{n+3}\right)^n\cdot\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^n=$$

$$=\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{n}}\right)^n\cdot\left(1-\frac{1}{2n}\right)^n=$$

$$=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{3}{n}\right)^n}\cdot\left(1-\frac{1}{2n}\right)^n\xrightarrow[n\to\infty]{\text{от зад. 3а) и зад. 3г)}}\frac{e}{e^3}\cdot e^{-\frac{1}{2}}=\frac{e^{-\frac{1}{2}}}{e^2}=e^{-\frac{5}{2}}.$$

Отг. на б): $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=e^{-\frac{5}{2}}$