Умножение на матрици

$A_{k\times n}\cdot B_{n\times s}=C_{k\times s}$

Броят на стълбовете в $I^{\text{та}}$ мат трябва да е равен на броят на редовете във $II^{\text{ра}}$ мат.

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\dots+a_{in}b_{nj}=\sum_{l=1}^{n}a_{il}b_{lj}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\-4&-1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&1&0\\-1&2&3\\4&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1.5+2.(-1)+3.4 & 1.1+2.2+3.0 & 1.0+2.3+3(-1)\\-4.5+(-1)(-1)+(-2)4 & -4.1+(-1).2+(-2.0) & -4.0-1.3-2(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15&5&3\\-27&-6&-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7&8\\9&10\\11&12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1.7+2.9+3.11 & 1.8+2.10+3.12\\4.7+5.9+6.11 & 4.8+5.10+6.12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}58&64\\139&154\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}7&8\\9&10\\11&12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7.1+8.4 & 7.2+8.5 & 7.3+8.6\\9.1+10.4 & 9.2+10.5 & 9.3+10.6\\11.1+12.4 & 11.2+12.5 & 11.3+12.6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}39&54&69\\49&68&87\\59&82&105\end{pmatrix}$$

Умножение на матрици

①

$A_{k\times n} B_{n\times s} = C_{k\times s}$ броят на стълбовете на A трябва да е равен на броя на редовете на B

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{p=1}^{n} a_{ip}b_{pj}$$

Св-ва

1) В общия случай $AB \neq BA$

2) $A, B \in M_{k\times n}$ и $C \in M_{n\times s}$
$\Rightarrow (A+B)C = AC + BC$

3) $A \in M_{k\times n}$, $B, C \in M_{n\times s}$
$A(B+C) = AB + AC$

4) $A_{k\times n}$, $B_{n\times s}$ $\lambda \in F$
$\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.4+5.2 & 2.1+5.7 \\ 1.4+3.2 & 1.1+3.7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 37 \\ 10 & 22 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8+1 & 20+3 \\ 4+7 & 10+21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 23 \\ 11 & 31 \end{pmatrix}$$

<u>Св-ва</u> $(A+B)C = AC + BC \quad (A, B \in \mathcal{M}_{k\times n},\ C \in \mathcal{M}_{n\times s})$

<u>Д-ва</u> Нека $L = (A+B)C \in \mathcal{M}_{k\times s}(F)$

$T = AC + BC \in M_{k\times s}(F)$

$$l_{ij} = (a_{i1}+b_{i1})c_{1j} + (a_{i2}+b_{i2})c_{2j} + \dots + (a_{in}+b_{in})c_{nj}$$

$$t_{ij} = (a_{i1}c_{1j} + a_{i2}c_{2j} + \dots + a_{in}c_{nj}) + (b_{i1}c_{1j} + \dots + b_{in}c_{nj})$$

$\Rightarrow l_{ij} = t_{ij}$ за $i = 1, \dots, k$
$j = 1, \dots, s$

$\Rightarrow L = T$

<u>Св-во</u> $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B) \quad (A \in \mathcal{M}_{k\times n}, B_{n\times s})$

елемент на място ij

$$\lambda(a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}) =$$
$$= (\lambda a_{i1})b_{1j} + (\lambda a_{i2})b_{2j} + \dots + (\lambda a_{in})b_{nj} =$$
$$= a_{i1}(\lambda b_{1j}) + a_{i2}(\lambda b_{2j}) + \dots + a_{in}(\lambda b_{nj})$$

(асоциативност на умножението)

I/ Нека $A \in M_{k \times n}(F)$, $B \in M_{n \times s}(F)$, $C \in M_{s \times t}(F)$, тогава $A(BC)=(AB)C$ ②

<u>Д-во</u> $A=(a_{ij})_{k \times n}$, $B=(b_{ij})_{n \times s}$ $C=(c_{ij})_{s \times t}$

Нека $AB=D=(d_{ij})_{k \times s}$; $BC=G=(g_{ij})_{n \times t}$

Нека $X=A(BC)=A \cdot G=(x_{ij})_{k \times t}$

$Y=(AB)C=DC=(y_{ij})_{k \times t}$

$$x_{pq}=\sum_{u=1}^{n} a_{pu} g_{uq}=\sum_{u=1}^{n} a_{pu}\left(\sum_{v=1}^{s} b_{uv} c_{vq}\right)=\sum_{u=1}^{n}\sum_{v=1}^{s} a_{pu} b_{uv} c_{vq}$$

$$y_{pq}=\sum_{v=1}^{s} d_{pv} c_{vq}=\sum_{v=1}^{s}\left(\sum_{u=1}^{n} a_{pu} b_{uv}\right) c_{vq}=\sum_{v=1}^{s}\sum_{u=1}^{n} a_{pu} b_{uv} c_{vq}$$

$$\sum_{u=1}^{n}\sum_{v=1}^{s} m(u,v)=\sum_{v=1}^{s}\sum_{u=1}^{n} m(u,v) \Longrightarrow x_{pq}=y_{pq} \quad p=1,\dots,k, \; q=1,\dots,t$$

за произв. ф-я $m(u,v)$

$\Rightarrow A(BC)=(AB)C$

Св-во// $A \in M_{k\times n}(F)$; E_k - единична $k\times k$ матрица

$$E_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$E_k A = A$; $AE_n = A$

Д-во $AE_n = B = (b_{ij})_{k\times n} \Rightarrow b_{ij} = a_{i1}0 + \dots + a_{ij}1 + \dots + a_{in}0 = a_{ij} \Rightarrow B = A$

Транспониране// $A_{k\times n} \Rightarrow A^t \in M_{n\times k}(F)$

Ако $A^t = (a'_{ij}) \Rightarrow a'_{ij} = a_{ji}$

i-ти ред на A става i-ти стълб

j-ти стълб на A става j-ти ред на A'

Нека $A_{k\times n}\cdot B_{n\times s} = C_{k\times s}$

$$c_{ij} = \underbrace{(a_{i1},\dots,a_{in})}_{i\text{-ти ред на } A} \underbrace{\begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}}_{j\text{-ти стълб на } B} = a_{i1}b_{1j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \underbrace{(b_{1j} \dots b_{nj})}_{j\text{-ти ред на } B^t} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{i1} \\ \vdots \\ a_{in} \end{pmatrix}}_{i\text{-ти стълб на } A^t}$$

$\Rightarrow$ елемента c_{ij} стои на място ji в произведението B^tA^t

Св-во $\Rightarrow (B^tA^t)^t = AB \Rightarrow (AB)^t = B^tA^t$

Св-во $(B+A)^t = B^t + A^t$; $(\lambda A)^t = \lambda A^t$; $(A^t)^t = A$

Следствие/ $A_1, \dots, A_s$ са матрици, за които е възможно умножението $A_k \cdot A_{k+1}$, тогава по какъвто и начин да се разполагат скобите в произведението $A_1 \cdot A_2 \cdots A_s$ се получава един и същи резултат. ③

Св-во// $A \in M_{n \times n}$

$$A^2 = A \cdot A \; ; \; A^3 = A^2 \cdot A = A \cdot A^2 \; ; \; \dots \quad A^k = A A^{k-1} = A^{k-1} \cdot A$$

$$A^m A^k = A^{m+k} \; ; \; (A^m)^k = A^{m \cdot k}$$

Ако $f(x) = f_0 + f_1 x + \dots + f_k x^k$ $f_i \in F$; $A \in M_{n \times n}(F)$

$$f(A) = f_0 E + f_1 A + \dots + f_k A^k$$

Пример: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 10 \\ -15 & 10 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 10 \\ -15 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -35 & 30 \\ -45 & 10 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -35 & 30 \\ -40 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -115 & 50 \\ -55 & -50 \end{pmatrix}$$

$$f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x + 5$$

$$f(A) = \begin{pmatrix} -115 & 50 \\ -55 & -50 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -35 & 30 \\ -40 & 10 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} + 5E$$

$$= \begin{pmatrix} -188 & 104 \\ -126 & -42 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -183 & 104 \\ -126 & -37 \end{pmatrix}$$

Тв// Нека $A_{k\times n} B_{n\times s} = C_{k\times s}$. Тогава

а) редовете на $C = AB$ са линейни комбинации на редовете на B

б) стълбовете на $C = AB$ са линейни комбинации на стълбовете на A

Д-во $A = (a_{ij})_{k\times n}$ $B = (b_{ij})_{n\times s}$ $C = (c_{ij})_{k\times s}$

i-ти ред на C: $(c_{i1}, c_{i2}, \dots, c_{is}) = \left(\sum_{t}^{n} a_{it} b_{t1}, \sum_{t} a_{it} b_{t2}, \dots, \sum a_{it} b_{ts}\right)$

$$= \sum_{t}^{n} a_{it}(b_{t1}, b_{t2}, \dots, b_{ts}) = \underbrace{a_{i1} b_1 + \dots + a_{in} b_n}_{\text{редове на } B}$$

---

j-ти стълб на C:

$$\begin{pmatrix} c_{1j} \\ c_{2j} \\ \vdots \\ c_{kj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{l} a_{1l} b_{lj} \\ \sum a_{2l} b_{lj} \\ \vdots \\ \sum_{l} a_{kl} b_{lj} \end{pmatrix} = \sum_{l=1}^{n} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{1l} \\ a_{2l} \\ \vdots \\ a_{kl} \end{pmatrix}}_{h_l} b_{lj} = h_1 b_{1j} + h_2 b_{2j} + \dots + h_n b_{nj}$$

празна стр.