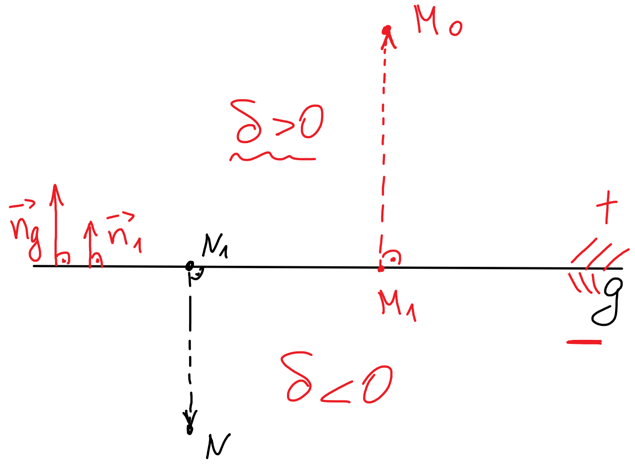
Нормално уравнение на права в равнината

ОКС $K = Oxy = Oe_1 e_2$, $|\vec{e_1}| = |\vec{e_2}| = 1$

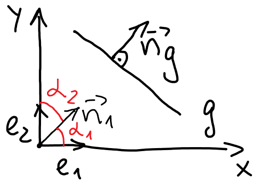
$g: A.x + B.y + C = 0,\ (A,B) \neq (0,0)$

$g \parallel \vec{g}(-B, A)$, $g \perp \vec{n}_g(A,B)$ ОКС

$\vec{n}_g(A,B) \Rightarrow |\vec{n}_g| = \sqrt{A^2+B^2} \Rightarrow \vec{n}_1 = \dfrac{\vec{n}_g}{|\vec{n}_g|}$



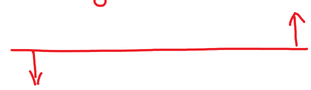
$\vec{n}_1\left(\underbrace{\dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}}_{\cos\alpha_1}, \underbrace{\dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}}_{\cos\alpha_2}\right)$, $|\vec{n}_1| = 1$



$\alpha_1 = \sphericalangle(\vec{n}_1, \vec{e}_1)$ $\alpha_2 = \sphericalangle(\vec{n}_1, \vec{e}_2)$

$$g: \pm \frac{A.x + B.y + C}{\sqrt{A^2+B^2}} = 0 \text{ – нормално уравн. на } g$$

$\vec{n}_1 = \dfrac{\vec{n}_g}{|\vec{n}_g|}$



$g: \dfrac{-3x - 4y + 1}{5} = 0$

$g: \dfrac{3x + 4y - 1}{5} = 0$

Разстояние от точка до права

$M_0(x_0, y_0)$, g

$\delta(M_0, g) = ?$ $\overrightarrow{M_1M_0} \parallel \vec{n}_1 \Rightarrow \exists!\ \delta : \overrightarrow{M_1M_0} = \delta . \vec{n}_1$

$$\delta(M_0, g) = \frac{A.x_0 + B.y_0 + C}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

$< 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{M_1M_0} \uparrow\downarrow \vec{n}_1$

$= 0 \Leftrightarrow M_0 \in g$

$> 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{M_1M_0} \uparrow\uparrow \vec{n}_1$

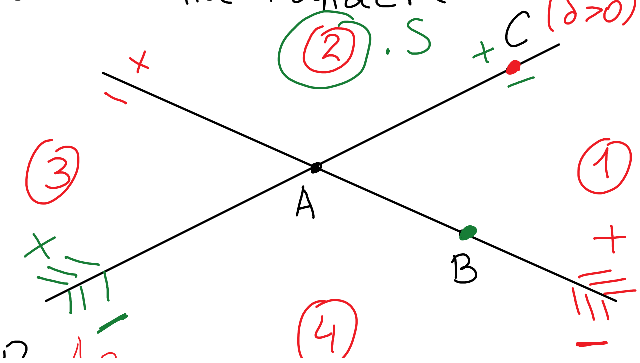
↓

ориентирано

Полуравнини. Разположение на точки

1 зад. АКС Oxy $A(2,-2)$, $B(1,3)$, $C(5,4)$

а) Правите AB и AC разделят равнината на 4 области 1, 2, 3, 4. Определете в коя от тези области се намира т. $S(6,5)$.



Решение:

1) AB : $|x \quad y \quad 1|$ ... $5x \dots 0$

Решение.

1) $AB: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \underbrace{\boxed{5x+y-8}}_{\ell_{AB}} = 0$ Да

4

$AC: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad 6x-3y-18=0 \,|:3$

$\underbrace{\boxed{2x-y-6}}_{\ell_{AC}} = 0$ Да

$\ell_{AB} = 5x+y-8$

$\ell_{AC} = 2x-y-6$

2) т. S спр. правата AB $\quad S(6,5),\ C(5,4)$

$\left.\begin{array}{l} \ell_{AB}(C) = 5.5+4-8 > 0 \\ \ell_{AB}(S) = 5.6+5-8 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ т. S и т. C са от една и съща полуравн. спр. AB

$\Rightarrow$ т. $S \in$ 1 или 2

3) т. S спр. правата AC

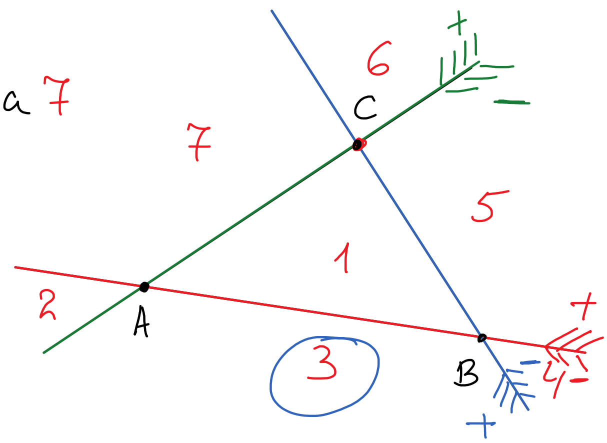
$\ell_{AC} = 2x-y-6 \qquad S(6,5),\ B(1,3)$

$\left.\begin{array}{l} \ell_{AC}(B) = 2.1-3-6 < 0 \\ \ell_{AC}(S) = 2.6-5-6 > 0 \end{array}\right\}$ S и B са в разл. полуравнини спр. AC

$S \in$ 2

б) $A(2,-2),\ B(1,3),\ C(5,4)$

AB, AC и BC разделят равнината на 7 области. В коя област лежи т. $X(1,1)$?



$\ell_{AB} = 5x+y-8$

$\ell_{AC} = 2x-y-6$

$\ell_{BC} = x-4y+11$

1) т. $X(1,1)$ и AB, т. $C(5,4)$

$\ell_{AB}(C) \cdot \ell_{AB}(X) = (5.5+4-8).(5.1+1-8) < 0 \quad$ X и C от различни

$\ell_{AB}(C)\cdot \ell_{AB}(X) = \underbrace{(5.5+4-8)}_{+}\cdot\underbrace{(5.1+1-8)}_{-} < 0$ X и C от различни полуравнини

$\Rightarrow X \in$ (2), (3), (4)

2) т. X(1,1) и AC, т. B(1,3)

$\ell_{AC}(B)\cdot \ell_{AC}(X) = \underbrace{(2.1-3-6)}_{-}\cdot\underbrace{(2.1-1-6)}_{-} > 0$ X и B от една полуравнина спр. AC

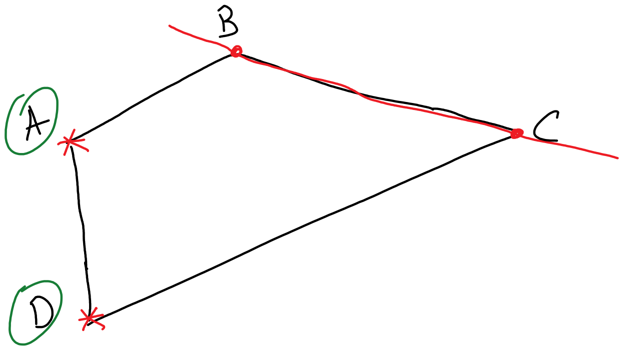
$X \in$ (3) или (4)

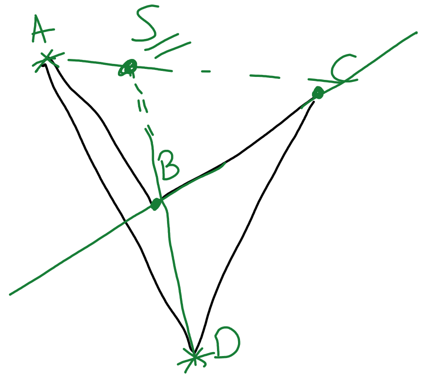
3) т. X(1,1) и BC, т. A(2,−2) $\ell_{BC}: x-4y+11$

$\ell_{BC}(A)\cdot \ell_{BC}(X) = (\underbrace{2-4.(-2)+11}_{+})\cdot(\underbrace{1-4.1+11}_{+}) > 0$ X и A от една полуравнина

т. $X \in$ (3)

Опр. Четириъгълник ABCD е изпъкнал, ако при свързване на $\boxed{\text{всяка}}$ двойка съседни върхове с права, другите 2 върха остават от една полуравнина спр. правата.





2 зад. (Упр.)

Определете дали ABCD е изпъкнал, ако:

а) A(2,−2), B(1,3), C(5,4) и D(6,5);

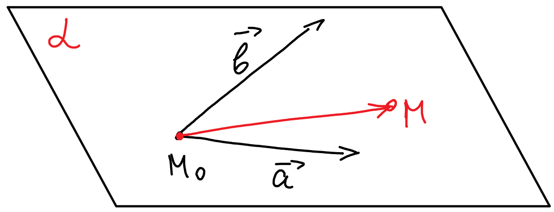
б) A, B, C, D(1,1).

Уравнения на права и равнина в пространството

ОКС $K = Oxyz$

I Равнина

1) $\exists ! \alpha \quad \begin{cases} z\ M_0(x_0, y_0, z_0) \\ \parallel\ \vec{a}(a_1, a_2, a_3) \\ \parallel\ \vec{b}(b_1, b_2, b_3) \end{cases}$ } ЛНЗ



$M(x,y,z)$ - произволна от α $\Rightarrow$ $\overrightarrow{M_0M}, \vec{a}, \vec{b}$ - компланарни $\Rightarrow \exists ! \ (\lambda, \mu)$

$$\overrightarrow{M_0M} = \lambda.\vec{a} + \mu.\vec{b}$$

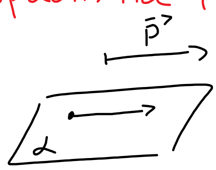
$$\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0} = \lambda.\vec{a} + \mu.\vec{b}$$

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + \lambda.\vec{a} + \mu.\vec{b}$$

$$\boxed{\alpha \begin{cases} x = x_0 + \lambda.a_1 + \mu.b_1 \\ y = y_0 + \lambda.a_2 + \mu.b_2 \\ z = z_0 + \lambda.a_3 + \mu.b_3 \end{cases}}, \quad \begin{matrix} \lambda \in \mathbb{R} \\ \mu \in \mathbb{R} \end{matrix}$$

координатни параметрични уравн. на равнина

2) Общо уравнение на равнина спр. Oxyz

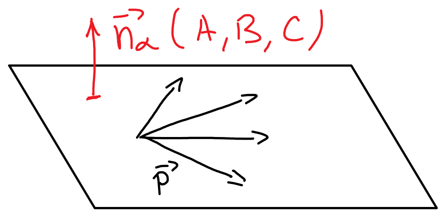


$\alpha: A.x + B.y + C.z + D = 0$, $(A,B,C) \neq (0,0,0)$

$M_0(x_0, y_0, z_0) \in \alpha \iff A.x_0 + B.y_0 + C.z_0 + D = 0 \ / .k \neq 0$

$\vec{p}(p_1, p_2, p_3) \parallel \alpha \iff \underline{\underline{A}}.p_1 + \underline{\underline{B}}.p_2 + \underline{\underline{C}}.p_3 = 0$

$\vec{n}_\alpha \perp \alpha \Rightarrow (\vec{n}_\alpha . \vec{p}) = 0 \Rightarrow \vec{n}_\alpha(A,B,C)$



II Прави

1) Координатни параметр. уравнения

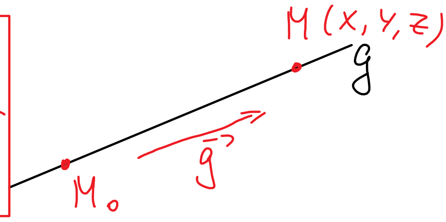
$M(x,y,z)$

1) Координатни параметр. уравнения

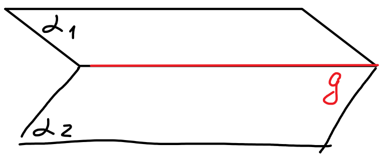
$M_0(x_0, y_0, z_0) \in g$

$\vec{g}(g_1, g_2, g_3) \parallel g$

$$\boxed{g: \begin{cases} x = x_0 + s.g_1 \\ y = y_0 + s.g_2 \\ z = z_0 + s.g_3 \end{cases}, \quad s \in \mathbb{R}}$$



2) $g = \alpha_1 \cap \alpha_2$



$$g: \begin{cases} A_1.x + B_1.y + C_1.z + D_1 = 0 \\ A_2.x + B_2.y + C_2.z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Примери: $g_1 \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow g_1 \equiv O_z$, $g_2 \begin{cases} 2x - 3z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow g_2 \equiv O_y$

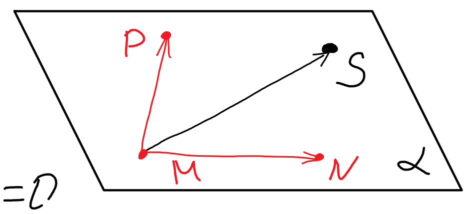
Задачи:

1зад. ОКС $K = Oxyz$

$M(3, 1, 4)$, $N(2, 1, 3)$, $P(1, 2, -1)$

а) ?, общо уравнение на равнината α, определена от M, N и P

I н. $S(x, y, z)$ – произволна от α



S, M, N, P са компланарни $\Leftrightarrow$
$$\begin{array}{c} S \\ M \\ N \\ P \end{array} \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

II н. $\vec{MS}, \vec{MN}, \vec{MP}$ – компланарни $\Leftrightarrow$
$$\begin{vmatrix} x-3 & y-1 & z-4 \\ +1 & 0 & +1 \\ +2 & 1 & +5 \end{vmatrix} = 0$$

$\vec{MS}(x-3, y-1, z-4)$!

$\vec{MN}(-1, 0, -1)$ ✓

$\vec{MP}(-2, 1, -5)$ ✓

α: $x + 6y + z - 13 = 0$

$x - 3y - z + 4 = 0$? Да

$A = 1$, $B = -3$, $C = -1$, $D = 4$

$\vec{MN}$ $A.(-1) + B.0 + C.(-1) = 0$

$\vec{MP}$ $\underset{-2}{A.(-2)} + \underset{-3}{B.1} + \underset{+5}{C.(-5)} = 0$

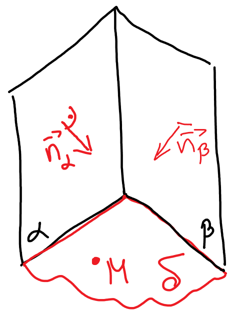
$\alpha: x - 3y - z + 4 = 0$

$\text{III н.}\quad \alpha: A.x + B.y + C.z + D = 0$

$$\begin{array}{l|l} \alpha \ni M \Rightarrow & A.3+B.1+C.4+D=0 \\ \alpha \ni N \Rightarrow & A.2+B.1+C.3+D=0 \\ \alpha \ni P \Rightarrow & A.1+B.2+C.(-1)+D=0 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} A=-C \\ B=3C \\ C=C \\ D=-4C \end{cases}$$

б) ?, общо уравнение на р-та

$$\delta \begin{cases} \ni M(3,1,4) \\ \perp \alpha: x-3y-z+4=0 \Rightarrow \delta \parallel \vec{n}_\alpha \\ \perp \beta: 2x+y+5z-6=0 \Rightarrow \delta \parallel \vec{n}_\beta \end{cases}$$



$$\left.\begin{array}{l} \delta \ni M(3,1,4) \\ \delta \ni S(x,y,z) \end{array}\right\} \Rightarrow \delta \parallel \vec{MS}(x-3,\ y-1,\ z-4)$$

$$\delta \parallel \vec{n}_\alpha(1,-3,-1)$$

$$\delta \parallel \vec{n}_\beta(2,\ 1,\ 5) \Rightarrow \begin{vmatrix} x-3 & y-1 & z-4 \\ 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

$\text{II н.}\quad \delta: A.x+B.y+C.z+D=0$

$$\begin{array}{ll} & A.3+B+C.4+D=0 \\ \vec{n}_\alpha: & A.1+B.(-3)+C.(-1)=0 \\ \vec{n}_\beta: & A.2+B.1+C.5=0 \end{array}$$

Отг. $2x+y-z-3=0$

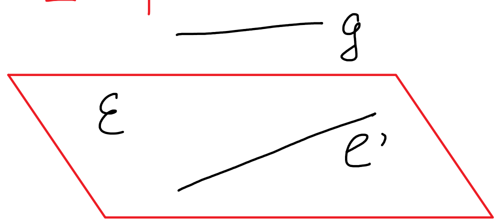
Упр.

$$l' \begin{cases} x=-2+1t \\ y=3+1t \\ z=4-1t \end{cases},\ t \in \mathbb{R} \qquad g: \begin{cases} x=-2+2p \\ y=p \\ z=2-p \end{cases},\ p \in \mathbb{R}$$

$l' \parallel \vec{e'}(1,1,-1)$

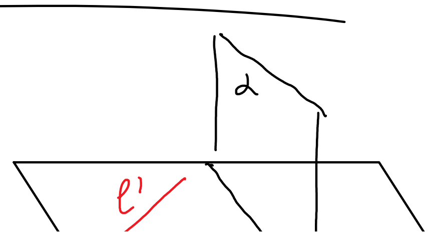
$$?,\ \varepsilon \begin{cases} \ni l' \\ \parallel g \end{cases}$$

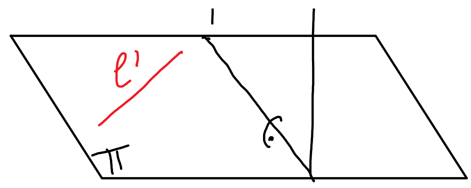
Отг.: $y+z-7=0$



$$?,\ \pi \begin{cases} \ni l' \\ \perp \alpha \end{cases}$$

Отг. $\pi: x+z-2=0$




ℓ'
π