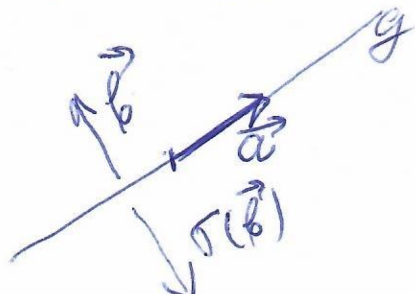
Собствени вектори

Опр. Нека $\varphi: V \to V$ е линеен оператор
$g \in V$ е собствен вектор за φ, ако $g \neq 0$ и
$\exists \lambda \in F: \ \varphi(g) = \lambda g$ (λ - собствена стойност)

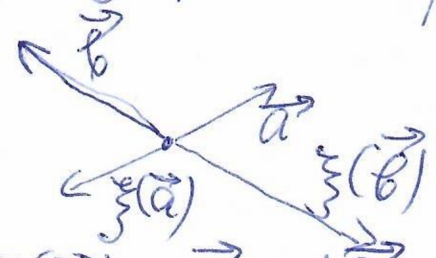
Примери | Ако $\varphi: V \to V$ и $\ker\varphi \neq \{0\}$
и $b \in \ker\varphi, \ b \neq 0 \Rightarrow \varphi(b) = 0 = 0 \cdot b$

осева симетрия
Ако $\sigma: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$



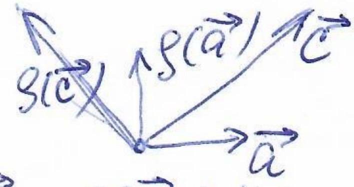
ако $\vec{a} \parallel g$
$\sigma(\vec{a}) = \vec{a} = 1 \cdot \vec{a}$
$\sigma(\vec{b}) = -\vec{b} = -1 \cdot \vec{b}$

ξ: централна симетрия



$\xi(\vec{a}) = -\vec{a} = -1\,\vec{a}$
за всеки вектор от $\mathbb{R}^2$
$\Rightarrow$ собствени в-ри са всички ненулеви вектори от $\mathbb{R}^2$

ρ: ротация на ъгъл в $90°$



$\vec{a}$ и $\rho(\vec{a})$ не са колинеарни
$\Rightarrow$ няма собств. в-ри

Тв1 // Нека $\varphi: V \to V$ е линеен оператор и $\lambda \in F$ е собствена стойност на φ. Тогава

$U_\lambda = \{a \neq 0 \mid \varphi(a) = \lambda a\}$ всички собств. в-ри за собств. ст-т λ

$U_\lambda \cup \{0\}$ е подпространство.

Д-во Нека $a, b \in U_\lambda \cup \{0\} \Rightarrow \varphi(a) = \lambda a$; $\varphi(b) = \lambda b$

$\Rightarrow \varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b) = \lambda a + \lambda b = \lambda(a+b)$

$\Rightarrow a+b \in U_\lambda \cup \{0\}$

$\varphi(\beta a) = \beta\varphi(a) = \beta\lambda a = \lambda(\beta a) \Rightarrow \beta a \in U_\lambda \cup \{0\}$

Th. / Нека $g_1, \dots, g_k$ са собствени вектори за φ които имат различни собствени стойности

$\varphi(g_i) = \lambda_i g_i \qquad \lambda_i \neq \lambda_j$

Тогава $g_1, \dots, g_k$ са ЛНЗ

<u>Д-во</u> // собствени в-ри за различни собств. ст-ти са ЛНЗ

Индукция по к.

<u>к=1</u> $g_1 \neq \theta$ $\varphi(g_1) = \lambda_1 g_1 \Rightarrow g_1$ е ЛНЗ

Нека Th е изпълнена за к-1 собств. в-ра

Нека $g_1, \dots, g_k$ собствени $\varphi(g_i) = \lambda_i g_i$ и $\lambda_i \neq \lambda_j$

Нека $\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \dots + \alpha_k g_k = \theta$

$\Rightarrow \varphi(\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \dots + \alpha_k g_k) = \varphi(\theta) = \theta$

$\Rightarrow \lambda_1 \alpha_1 g_1 + \lambda_2 \alpha_2 g_2 + \dots + \lambda_k \alpha_k g_k = \theta$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 g_1 + \dots + \alpha_k g_k = \theta \quad / \cdot -\lambda_1 \\ \lambda_1 \alpha_1 g_1 + \dots + \lambda_k \alpha_k g_k = \theta \end{cases}$$

$(\lambda_2 - \lambda_1)\alpha_2 g_2 + \dots + (\lambda_k - \lambda_1)\alpha_k g_k = \theta$, но $g_2, \dots, g_k$ ЛНЗ

$\lambda_i \neq \lambda_j$

$\Rightarrow (\lambda_2 - \lambda_1)\alpha_2 = 0$; $\dots$ $(\lambda_k - \lambda_1)\alpha_k = 0$

$\Rightarrow \alpha_2 = 0$; $\dots$ $\alpha_k = 0 \Rightarrow \alpha_1 g_1 = \theta \Rightarrow \alpha_1 = 0 \Rightarrow g_1 \dots g_k$ ЛНЗ

Нека $\varphi: V \to V$ линеен оператор

$(e) = e_1, \dots, e_n$ базис и A - матр. на φ спрямо (e)

$(b) = b_1 \dots b_n$ базис и B - матрица на φ спрямо (b)

$T = T_{(e) \to (b)}$ матрица на прехода от базис (e) към (b)

$B = T^{-1} A T$

$f_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)$, $f_B(\lambda) = \det(B - \lambda E)$ характеристич. полином

Опр. $f_\varphi(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ характеристичен полином на оператора φ

Т// Нека $\varphi: V \to V$ е линеен оператор (над F) $\dim V = n$

λ_0 е собствена стойност на оператора $\varphi \Leftrightarrow$ $\lambda_0 \in F$ и λ_0 е корен на характеристичния полином на φ

(т.е. λ_0 е характеристичен корен)

D-601 Нека V има базис $e_1, \dots, e_n$

$\varphi: V \to V$ линеен оператор с матрица $A = (a_{ij})_{n \times n}$

Нека $g = g_1 e_1 + \dots + g_n e_n \neq \theta$ собствен в-р $\varphi(g) = \lambda_0 g$

$$A \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix} = \lambda_0 \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix} \qquad A \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix} - \lambda_0 E \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (A - \lambda_0 E) \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix} = \theta$$

$$\left| \begin{array}{l} (a_{11} - \lambda_0) g_1 + a_{12} g_2 + \dots + a_{1n} g_n = 0 \\ a_{21} g_1 + (a_{22} - \lambda_0) g_2 + \dots + a_{2n} g_n = 0 \\ \dots \\ a_{n1} g_1 + a_{n2} g_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda_0) g_n = 0 \end{array} \right.$$

$(g_1, \dots, g_n)$ ненулево реш. на

$$(*) \left| \begin{array}{l} (a_{11} - \lambda_0) x_1 + a_{21} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = 0 \\ a_{21} x_1 + (a_{22} - \lambda_0) x_2 + \dots + a_{2n} x_n = 0 \\ \dots \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda_0) x_n = 0 \end{array} \right.$$

$(*)$ има ненулево решение

$\Updownarrow$

$f_A(\lambda) \overset{\vee}{=} \det(A - \lambda_0 E) = 0$ характеристичен полином

Всяко ненулево решение на $(*)$ е собствен вектор на φ със собств. ст-т λ_0

празна стр.

$$f_A(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ - & - & & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

$f_A(\lambda)$ е полином от степен n
старши коеф. $(-1)^n$
коеф. пред $\lambda^{n-1} \to (-1)^{n-1}(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})$
свободен коеф. $\to \det A$

Как намираме собствените вектори $\varphi: V \to V$ линеен

0) фиксира се базис $e_1, \dots, e_n$ и се намира матр. A на φ

1) пресмятаме $f_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ характеристичния полином

2) Намират се корените на $f_A(\lambda) = 0$ (само корените от полето F)
нека $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ са различните корени от полето F

3) for $i = 1$, to s

3.1) $B_i = A - \lambda_i E$
3.2) решаваме хомогенна система с матрица B_i
3.3) всяко ненулево решение $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ задава собств. в-р $g = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$
$\varphi(g) = \lambda_i g$

зад. 11 Да се намерят собствените вектори на (пр 1) линеен оператор $\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, който има матр. спрямо стандартния базис e_1, e_2, e_3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -6 & -4 \\ 1 & -4 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Р-е

$$f_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -6 & -4 \\ 1 & -4-\lambda & -2 \\ -1 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -6 & -4 \\ 1 & -4-\lambda & -2 \\ 0 & -1-\lambda & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -6 & -4 \\ 1 & -4-\lambda & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1-\lambda)\big((1-\lambda)(-4-\lambda) - 4 + 6 + 2(1-\lambda)\big) = (-1-\lambda)(\lambda^2+\lambda) = -\lambda(1+\lambda)^2$$

сл. $\lambda = 0$

$$B_1 = A - 0E = A = \begin{pmatrix} 1 & -6 & -4 \\ 1 & -4 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -6 & -4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -6 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

x_1	x_2	x_3
-2	-1	1

$\Rightarrow c = (-2, -1, 1)$ собствен $\varphi(c) = 0 \cdot c = \theta$

αc също собствени $\varphi(\alpha c) = 0\alpha c = \theta$

за $\alpha \neq 0$

2 сл. $\lambda = -1$ (пр2)

$$B_2 = A - (-1)E = \begin{pmatrix} 2 & -6 & -4 \\ 1 & -3 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

x_1	x_2	x_3
3	1	0
2	0	1

$c_1 = (3, 1, 0)$ $\quad \varphi(c_1) = -c_1$

$c_2 = (2, 0, 1)$ $\quad \varphi(c_2) = -c_2$

$\alpha c_1 + \beta c_2$ за $\alpha, \beta \neq 0, 0$ са всички собствени вектори за $\lambda = -1$

Забел. $c = (-2, -1, 1)$; $c_1 = (3, 1, 0)$ и $c_2 = (2, 0, 1)$ образуват базис на $\mathbb{R}^3$

спрямо него φ има матр. $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Опр. $\varphi: V \to V$ и $\dim V = n$
ако φ има $\underline{\underline{n}}$ различни собствени стойности
се казва, че φ е оператор с прост спектър

ТВ. $\varphi: V \to V$ $\dim V = n$
Ако φ е оператор с прост спектър, тогава съществува базис на V, който е съставен от собствени вектори за φ.

Д-во $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ различни собств. ст-ти
$\Rightarrow \exists\ g_1, \dots g_n$ собствени в-ри и $\varphi(g_i) = \lambda_i g_i$
$\Rightarrow g_1, \dots, g_n$ са ЛНЗ $\Rightarrow g_1 \dots g_n$ - базис на V

спрямо базиса $g_1 \dots g_n$ φ има матрица $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$
диагонална

$D = T^{-1} A T$, T - матрица на прехода празна стр.

празна страница