7. Интегрална форма на остатъчния член във формулата на Тейлър

Формула на Тейлър с остатъчен член във формата на Лагранж

Теорема (формула на Тейлър), ДИС 1, Тема 30, т-ма 2

Нека $f(x)$ притежава производни до ред $n+1$ включително в $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, където $\delta > 0$. Тогава за всяко $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ съществува c между x_0 и x такова, че

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \qquad (1)$$

Разписана ф-лата има вида

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \qquad (2)$$

Формула на Тейлър с остатъчен член във интегрална форма

Теорема 1 (формула на Тейлър)

Нека $f(x)$ притежава производни до ред $n+1$ включително в $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, където $\delta > 0$, и $f^{(n+1)}(x)$ е непрекъсната. Тогава за всяко $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ е в сила формулата

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt. \tag{3}$$

Бележка: с помощта на т-мата за средните стойности (тема 4) оттук следва ф-лата на Т. с остатъчен член във формата на Лагранж.

Доказателство

При $n = 0$ — следва от (13) в тема 5.

Нека $n \geq 1$. Формулата се доказва чрез интегриране по части на интеграла вдясно.

$$\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n\,df^{(n)}(t) \tag{4}$$

$$= \frac{1}{n!}[(x-t)^n f^{(n)}(t)]\Big|_{t=x_0}^{t=x} - \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n)}(t)\,d(x-t)^n \tag{5}$$

$$= \frac{1}{n!}\left[(x-x)^n f^{(n)}(x) - (x-x_0)^n f^{(n)}(x_0)\right] - \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n)}(t)[(x-t)^n]'\,dt \tag{6}$$

$$= -\frac{1}{n!}(x-x_0)^n f^{(n)}(x_0) - \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n)}(t)n(x-t)^{n-1}(-1)\,dt \tag{7}$$

$$= -\frac{1}{n!}(x-x_0)^n f^{(n)}(x_0) + \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)\,dt \tag{8}$$

$$\overset{n\geq 2}{=} -\,-\frac{1}{n!}(x-x_0)^n f^{(n)}(x_0) + \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n-1}\,df^{(n-1)}(t) = \cdots$$

$$= -\frac{1}{n!}(x-x_0)^n f^{(n)}(x_0) - \frac{1}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} f^{(n-1)}(x_0) \tag{9}$$

$$+\frac{1}{(n-2)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n-2} f^{(n-1)}(t)\,dt \tag{10}$$

$$\overset{n\geq 3}{=} -\frac{1}{n!}(x-x_0)^n f^{(n)}(x_0) - \frac{1}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} f^{(n-1)}(x_0) \tag{11}$$

$$-\frac{1}{(n-2)!}(x-x_0)^{n-2} f^{(n-2)}(x_0) + \frac{1}{(n-3)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n-3} f^{(n-2)}(t)\,dt \tag{12}$$

$$= \cdots = -\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \underbrace{\int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt}_{\overset{(13),\ \text{тема } 5}{=}\ f(x)-f(x_0)} \quad . \tag{13}$$