27. Теорема за средните стойности (Рол, Лагранж, Коши). Формула на Тейлър

Дефиниция. Всеки отворен интервал, съдържащ точката a ще наричаме околност на точката a. Ще казваме, че точката a е вътрешна точка за интервала M, ако съществува околност ξ на точката a и $\xi \subset M$;

Дефиниция. Ще казваме, че функцията f(x) има локален максимум (минимум) в точка C от своята дефиниционна област, ако съществува околност δ на точката C, за която $f(c) \geq f(x), \forall x \in \delta$ $\left(f(x) \geq f(c), \forall x \in \delta\right)$. Ако функцията f има локален максимум или локален минимум ще казваме, че f има локален екстремум.

<u>Теорема на Ферма.</u>

Ако функцията y = f(x) е диференцируема в една вътрешна точка C от своята дефиниционна област и има локален екстремум в тази точка, то f' (c) =0.

<u>Теорема на Вайерщрас.</u>

Ако дадена функция f(x) е непрекъсната в крайния и затворен интервал [a, b], тя достига в този интервал точната си горна и точната си долна граница.

<u>Теорема на Рол.</u>

Ако функцията f е непрекъсната в крайния и затворен интервал [a, b], диференцируема в отворения интервал (a, b) и f(a) = f(b), тогава съществува ξ принадлежаща на (a, b) и f'(ξ) = 0.

<u>Доказателство:</u>

Тъй като функцията f(x) е непрекъсната в [a, b], то тя е ограничена. Да означим съответно с L и l точната й горна и точната й долна граница в интервала [a, b].

Ако l = L, то поради неравенството l<=f(x)<=L, изпълнени за всяко x от интервала [a, b], функцията f(x) ще бъде константа в този интервал. Тогава нейната производна е нула в целия интервал (a, b) и теоремата е доказана.

Остава да разгледаме случая, когато l < L. Съгласно теоремата на Вайерщрас съществуват две точки x_1 и x_2 от интервала [a,b] такива, че $f(x_1)=l$ и $f(x_2) = L$. Поне една от тези две точки е вътрешна за интервала [a,b]. И наистина ако допуснем противното, т.е ако имаме $x_1 = a$, $x_2 = b$ или пък $x_1 = b$, $x_2 = a$, то от условието бихме получили l = L. Нека x_1 е вътрешна за интервала [a,b]. Но $f(x_1)=l$. Тогава функцията f(x) ще има локален минимум в точката x_1, поради което съгласно теоремата на Ферма ще имаме $f'(x_1) = 0$. Ako пък x_1 е крайна точка за интервала [a,b], то точката x_2 ще бъде вътрешна. В такъв случай това ще бъде една точка на локален максимум и следователно пак по теоремата на Ферма ще имаме $f'(x_2) = 0$. И така във всички случаи съществува точка ξ принадлежаща на [a, b], за която f'(ξ) = 0.

<u>Теорема на Лагранж (формула на Лагранж за крайните нараствания)</u>

Ако функцията f е непрекъсната в крайния и затворен интервал [a, b], диференцируема в отворения интервал (a, b), то съществува $\xi \in (a, b)$, за която f(b) – f(a) = (b-a)f'(ξ).

<u>Доказателство:</u>

Нека $F(x) = f(x) - f(a) - \dfrac{(x-a)(f(b)-f(a))}{b-a}$

F(x) е непрекъсната в [a, b], като разлика на непрекъсната в този интервал функция f(x) и линейна функция и във всяка вътрешна точка на [a, b] има производна равна на:

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Имаме F(a) = F(b) = 0 и за функцията F(x) са изпълнени всички условия от теоремата на Рол.

Следователно съществува $\xi \in (a,b)$ такава, че $F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(a) - f(b)}{b - a} = 0$

Или f(b) – f(a) = (b-a)f'(ξ), с което теоремата е доказана.

<u>Теорема на Коши за крайните нараствания.</u>

Ако f(x) и g(x) се непрекъснати в $[a,b]$ и диференцируеми в (a,b) и $g'(x) \neq 0$ за всяко x $\in$ (a, b), то съществува $\xi \in (a,b)$, за която

$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ - обобщена формула на крайните нараствания на Коши.

<u>Доказателство:</u>

Ще докажем, че g(a) $\neq$ g(b). Да приемем, че g(a) = g(b), следователно за g(x) в интервала [a, b] и е в сила теоремата на Рол. Следователно съществува точка ξ $\in$ (a, b), такава че g'(ξ) =0, което е противоречие с условието. Следователно g(a) $\neq$ g(b).

Можем да разгледаме помощната функция F(x).

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{(g(x) - g(a))(f(b) - f(a))}{g(b) - g(a)}$$

F(x) е непрекъсната в [a, b], като разлика на непрекъснати в този интервал функции f(x) и g(x) и във всяка вътрешна точка на [a, b] има производна равна на:

$$F'(x) = f'(x) - \frac{g'(x)(f(b) - f(a))}{g(b) - g(a)}$$

Имаме F(a) = F(b) = 0 и за функцията F(x) са изпълнени всички условия от теоремата на Рол. Следователно съществува ξ $\in (a,b)$ такава, че $f'(\xi) - \frac{g'(\xi)(f(b) - f(a))}{g(b) - g(a)} = 0$ от условието g'(ξ) $\neq 0$

$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$, което доказва теоремата.

Формулата на Лагранж е частен случай от формулата на Коши при g(x) =x.

<u>Теорема на Тейлър.</u>

Да предположим, че функцията f(x) притежава производна до ред (n+1) в някоя околност δ на една точка a от нейната дефиниционна област. За всяко x принадлежащо на δ съществува точка ξ между x и a такава, че:

f(x) =f(a) + $\frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^n(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^n(\xi)$ - формула на Тейлър.

<u>Доказателство:</u>

Да разгледаме функциите:

$$g(t) = f(t) + \frac{f'(t)(x-t)}{1!} + \frac{f''(t)(x-t)^2}{2!} + \ldots + \frac{f^n(t)(x-t)^n}{n!}$$

$h(t) = (x-t)^{n+1}$

$$g'(t) = f'(t) + \frac{f'(t)(x-t)}{1!} - \frac{f'(t)}{1!} + \frac{f'''(t)(x-t)^2}{2!} - \frac{f''(t)(x-t)^2}{2!} + \dots$$

$$+ \frac{f^{n+1}(t)(x-t)^n}{n!} - \frac{f^n(t)(x-t)^n}{(n-1)!} = \frac{f^{n+1}(t)(x-t)^n}{n!}$$

h'(t) = $-(n+1)(x-t)^n$

За функциите h(t) и g(t) прилагаме теорема на Коши за крайните в интервал (a,x) или (x,a).

h'(t) $\neq 0$ за всяко t $\in$ (a, x) или (x, a) и h(t) и g(t) са непрекъснати и диференцируеми в (a, x) и (x, a) следователно съществува т.ξ $\in$ (a, x) или (x, a), така че: $\frac{g(x)-g(a)}{h(x)-h(a)} = \frac{g'(\xi)}{h'(\xi)}$ от дефиницията:

g(x) – g(a) = $f(x) - f(a) - \frac{x-a}{1!} f'(a) - \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) - \dots - \frac{(x-a)^n}{n!} f^n(a) - \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^n(\xi)$

h(x) – h(a) = -h(a) = $-(x-a)^{n+1}$

$$g'(\xi) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n}{n!}$$

n

h'(ξ)= -(n+1)(x-ξ)

$$\Rightarrow g(x) - g(a) = \frac{g'(\xi)}{h'(\xi)}(h(x) - h(a))$$

или

f(x) =f(a) + $\frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^n(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^n(\xi)$, което доказва теоремата