Задача. Нека $V = M_2(F)$. Да се докаже, че изображението $\varphi : V \to V$ е линеен оператор във V и да се намери матрицата му в базиса $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$. Намерете базис на $\mathrm{Ker}\varphi$ и $\mathrm{Im}\varphi$. Да се намери базис на V, в който φ има диагонална матрица, както и тази диагонална матрица, ако

а) $\varphi(X) = X^t$

Решение. За произволни $X, Y \in V$ и $\lambda \in F$ е в сила $\varphi(X+Y) = (X+Y)^t = X^t + Y^t = \varphi(X) + \varphi(Y)$, $\varphi(\lambda X) = (\lambda X)^t = \lambda X^t = \lambda\varphi(X)$ и следователно $\varphi \in \mathrm{Hom}V$. Имаме

$$\begin{array}{lllll} \varphi(E_{11}) & = & E_{11} & = & 1.E_{11} + 0.E_{12} + 0.E_{21} + 0.E_{22} \\ \varphi(E_{12}) & = & E_{21} & = & 0.E_{11} + 0.E_{12} + 1.E_{21} + 0.E_{22} \\ \varphi(E_{21}) & = & E_{12} & = & 0.E_{11} + 1.E_{12} + 0.E_{21} + 0.E_{22} \\ \varphi(E_{22}) & = & E_{22} & = & 0.E_{11} + 0.E_{12} + 0.E_{21} + 1.E_{22} \end{array}$$

и следователно матрицата на φ в базиса $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ е $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Тъй като $\det A = -1 \neq 0$ (т.е. φ е обратим), то $\mathrm{Ker}\varphi = \{\mathbf{0}\}$, а $\mathrm{Im}\varphi = V$.

$$f_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^3(\lambda+1)$$

$\boxed{\lambda = 1}$ Търсим ФСР на хомогенната система с матрица

$$A - E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Полагаме $x_1 = p$, $x_3 = q$, $x_4 = r$, тогава $x_2 = q$ и множеството от решенията е

$$\{(p, q, q, r) \mid p, q, r \in F\}.$$

$$\left.\begin{array}{ll} p = 1, q = 0, r = 0: & \boldsymbol{v}_1 = (1, 0, 0, 0) \\ p = 0, q = 1, r = 0: & \boldsymbol{v}_2 = (0, 1, 1, 0) \\ p = 0, q = 0, r = 1: & \boldsymbol{v}_3 = (0, 0, 0, 1) \end{array}\right\} \text{ФСР}.$$

$\boxed{\lambda = -1}$ Търсим ФСР на хомогенната система с матрица

$$A + E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Имаме $x_1 = x_4 = 0$, полагаме $x_3 = p$, тогава $x_2 = -p$ и множеството от решенията е $\{(0, -p, p, 0) \mid p \in F$. При $p = 1$: $\boldsymbol{v}_4 = (0, -1, 1, 0)$ — ФСР.

Следователно $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ е базис от собствени вектори на φ и матрицата на φ в този базис е

$$D = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \varphi(\boldsymbol{v}_1) & \varphi(\boldsymbol{v}_2) & \varphi(\boldsymbol{v}_3) & \varphi(\boldsymbol{v}_4) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{lllllllll} \varphi(\boldsymbol{v}_1) & = & 1\boldsymbol{v}_1 & + & 0.\boldsymbol{v}_2 & + & 0.\boldsymbol{v}_3 & + & 0.\boldsymbol{v}_4 \\ \varphi(\boldsymbol{v}_2) & = & 0.\boldsymbol{v}_1 & + & 1.\boldsymbol{v}_2 & + & 0.\boldsymbol{v}_3 & + & 0.\boldsymbol{v}_4 \\ \varphi(\boldsymbol{v}_3) & = & 0.\boldsymbol{v}_1 & + & 0.\boldsymbol{v}_2 & + & 1.\boldsymbol{v}_3 & + & 0.\boldsymbol{v}_4 \\ \varphi(\boldsymbol{v}_4) & = & 0.\boldsymbol{v}_1 & + & 0.\boldsymbol{v}_2 & + & 0.\boldsymbol{v}_3 & - & 1.\boldsymbol{v}_4 \end{array}$$

б) $\varphi(X) = AXB$, където $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение. За произволни $X, Y \in V$ и $\lambda \in F$ е в сила $\varphi(X+Y) = A(X+Y)B = (AX+AY)B = AXB + AYB = \varphi(X) + \varphi(Y)$, $\varphi(\lambda X) = A(\lambda X)B = \lambda(AXB) = \lambda\varphi(X)$ и следователно $\varphi \in \mathrm{Hom}V$. Имаме

$$\begin{aligned}
\varphi(E_{11}) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} &= 1.E_{11} + 5.E_{12} + 1.E_{21} + 5.E_{22} \\
\varphi(E_{12}) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} &= 0.E_{11} + 3.E_{12} + 0.E_{21} + 3.E_{22} \\
\varphi(E_{21}) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} &= 1.E_{11} + 5.E_{12} + 1.E_{21} + 5.E_{22} \\
\varphi(E_{22}) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} &= 0.E_{11} + 3.E_{12} + 0.E_{21} + 3.E_{22}
\end{aligned}$$

и следователно матрицата на φ в базиса $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ е $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\mathrm{Ker}\varphi}$

$$\mathrm{Ker}\varphi : \left|\begin{array}{lllllllll} x_1 & + & & + & x_3 & & & = & 0 \\ 5x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & & + & x_3 & & & = & 0 \\ 5x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 5 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Полагаме $x_3 = p$, $x_4 = q$, тогава $x_1 = -p$, $x_2 = -q$ и множеството от решенията е

$$\{(-p, -q, p, q) \mid p, q \in F\}.$$

$$\left.\begin{array}{ll} p = 1, q = 0 : & \boldsymbol{v}_1 = (-1, 0, 1, 0) \\ p = 1, q = 0 : & \boldsymbol{v}_2 = (0, -1, 0, 1) \end{array}\right\} \text{ФСР, т.е. базис на } \mathrm{Ker}\varphi.$$

$\boxed{\mathrm{Im}\varphi}$ Имаме $\mathrm{Im}\varphi = l(\varphi(E_{11}), \varphi(E_{12}), \varphi(E_{21}), \varphi(E_{22}))$.

$$\begin{array}{c} \varphi(E_{11}) \\ \varphi(E_{12}) \\ \varphi(E_{21}) \\ \varphi(E_{22}) \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и следователно $\varphi(E_{11}), \varphi(E_{12})$ са базис на $\mathrm{Im}\varphi$.

$$f_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 3-\lambda & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 5 & 3 & 5 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$\lambda \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(2-\lambda)\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 3 \\ 0 & 3 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-2)[(3-\lambda)^2 - 9] = \lambda^2(\lambda-2)(\lambda-6)$$

$\boxed{\lambda = 0}$ Да отбележим, че в този случай (когато $\lambda = 0$) пространството от всички собствени вектори на φ, съответстващи на собствената стойност 0, заедно с нулевия вектор, всъщност е $\mathrm{Ker}\varphi$ ($\mathbf{0} \neq \boldsymbol{v} \in \mathrm{Ker}\varphi \iff \varphi(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0} = 0.\boldsymbol{v}$). Следователно векторите $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ от по-горе са базис на това пространство.

$\boxed{\lambda = 2}$ Търсим ФСР на хомогенната система с матрица

$$A - 2E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 10 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 10 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 10 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -20 & -8 \end{pmatrix}$$

Полагаме $x_3 = p$, тогава $x_1 = p$, $x_4 = -\frac{5}{2}p$, $x_2 = -\frac{5}{2}p$ и множеството от решенията е $\{(p, -\frac{5}{2}p, p, -\frac{5}{2}p) \mid p \in F\}$. При $p = 2$: $\boldsymbol{v}_3 = (2, -5, 2, -5)$ — ФСР.

$\boxed{\lambda = 6}$ Търсим ФСР на хомогенната система с матрица

$$A - 6E = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & -5 & 0 \\ 5 & 3 & 5 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & -3 & 30 & 3 \\ 0 & 0 & -24 & 0 \\ 0 & 3 & 30 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -10 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 60 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -10 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Тогава $x_3 = 0$, $x_1 = 0$, полагаме $x_4 = p$, тогава $x_2 = p$ и множеството от решенията е $\{(0, p, 0, p) \mid p \in F\}$. При $p = 1$: $\boldsymbol{v}_4 = (0, 1, 0, 1)$ — ФСР.

Следователно $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ е базис от собствени вектори на φ и матрицата на φ в този базис е $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

Задача. Нека $V = F^4[x]$ и нека линейните оператори φ, ψ във V са определени по следния начин: $\varphi(a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3) = a_1x^2 + a_2x + a_3$ за произволни числа $a_0, a_1, a_2, a_3 \in F$, а ψ изобразява полиномите $x^3 + x^2$, $x^3 + x$, $x^3 + 1$, $x^3 + x^2 + x + 1$ съответно в полиномите $x^3 + x$, $x^3 + 1$, $x^3 + x^2 + x + 1$ и 0.

а) Да се намерят матриците на операторите $\varphi\psi$ и $\psi\varphi$ спрямо базиса $1, x, x^2, x^3$ на V.

Решение. Да отбележим, че полиномите $x^3 + x^2$, $x^3 + x$, $x^3 + 1$, $x^3 + x^2 + x + 1$ също образуват базис на V, тъй като

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Следователно операторът ψ, който удовлетворява условието на задачата, е единствен.

Имаме

$$\begin{array}{rcccccccccccccc}
\psi(x^2 + x^3) & = & & & & & \psi(x^2) & + & \psi(x^3) & = & & & x & & & + & x^3 \\
\psi(x + x^3) & = & & & \psi(x) & & & + & \psi(x^3) & = & 1 & & & & & + & x^3 \\
\psi(1 + x^3) & = & \psi(1) & & & & & + & \psi(x^3) & = & 1 & + & x & + & x^2 & + & x^3 \\
\psi(1 + x + x^2 + x^3) & = & \psi(1) & + & \psi(x) & + & \psi(x^2) & + & \psi(x^3) & = & 0
\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 1 & 1 & (0 & 1 & 0 & 1) \\ 0 & 1 & 0 & 1 & (1 & 0 & 0 & 1) \\ 1 & 0 & 0 & 1 & (1 & 1 & 1 & 1) \\ 1 & 1 & 1 & 1 & (0 & 0 & 0 & 0) \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 1 & 1 & (0 & 1 & 0 & 1) \\ 0 & 1 & 0 & 1 & (1 & 0 & 0 & 1) \\ 1 & 0 & 0 & 1 & (1 & 1 & 1 & 1) \\ 0 & 0 & 0 & -2 & (-2 & -2 & -1 & -3) \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 1 & 0 & (-1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}) \\ 0 & 1 & 0 & 0 & (0 & -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}) \\ 1 & 0 & 0 & 0 & (0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & (1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2}) \end{array}\right),$$

откъдето

$$\begin{array}{rcccccccc}
\psi(1) & = & & & & & \frac{1}{2}x^2 & - & \frac{1}{2}x^3 \\
\psi(x) & = & & - & x & - & \frac{1}{2}x^2 & - & \frac{1}{2}x^3 \\
\psi(x^2) & = & -1 & & & - & \frac{1}{2}x^2 & - & \frac{1}{2}x^3 \\
\psi(x^3) & = & 1 & + & x & + & \frac{1}{2}x^2 & + & \frac{3}{2}x^3
\end{array}.$$

Тогава

$$\begin{array}{rcccccccccc}
\varphi\psi(1) & = & \varphi(\psi(1)) & = & \varphi(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3) & = & & & & & \frac{1}{2}x^2 \\
\varphi\psi(x) & = & \varphi(\psi(x)) & = & \varphi(-x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3) & = & & - & x & - & \frac{1}{2}x^2 \\
\varphi\psi(x^2) & = & \varphi(\psi(x^2)) & = & \varphi(-1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3) & = & -1 & & & - & \frac{1}{2}x^2 \\
\varphi\psi(x^3) & = & \varphi(\psi(x^3)) & = & \varphi(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x^3) & = & 1 & + & x & + & \frac{1}{2}x^2
\end{array}$$

и следователно матрицата на $\varphi\psi$ в базиса $1, x, x^2, x^3$ е $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Имаме

$$\begin{array}{lllllllllll}
\psi\varphi(1) & = & \psi(\varphi(1)) & = & \psi(1) & = & & & & \frac{1}{2}x^2 & - & \frac{1}{2}x^3 \\
\psi\varphi(x) & = & \psi(\varphi(x)) & = & \psi(x) & = & & - & x & - & \frac{1}{2}x^2 & - & \frac{1}{2}x^3 \\
\psi\varphi(x^2) & = & \psi(\varphi(x^2)) & = & \psi(x^2) & = & -1 & & & - & \frac{1}{2}x^2 & - & \frac{1}{2}x^3 \\
\psi\varphi(x^3) & = & \psi(\varphi(x^3)) & = & \psi(0) & = & 0
\end{array}$$

и следователно матрицата на $\varphi\psi$ в базиса $1, x, x^2, x^3$ е $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Втори начин. Матриците на φ и ψ в базиса $1, x, x^2, x^3$ са съответно

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Тогава матрицата на $\varphi\psi$ в базиса $1, x, x^2, x^3$ е

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а на $\psi\varphi$ е

$$BA = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

б) Принадлежи ли $x^3 + 2x^2 + 1$ на $\operatorname{Im}(\varphi\psi + \psi\varphi)$?

Решение. Матрицата на оператора $\varphi\psi + \psi\varphi$ в базиса $1, x, x^2, x^3$ е

$$C = AB + BA = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & -4 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Имаме

$$\det C = \frac{1}{16}\begin{vmatrix} 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & -4 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -4 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{4}(-1)(-1)^{4+1}\begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -4 & -4 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\frac{1}{4}\begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{4}(-2)(-1)^{2+1}(2+4) = 3 \neq 0.$$

Следователно $\operatorname{Ker}(\varphi\psi + \psi\varphi) = \{\mathbf{0}\}$ и $\operatorname{Im}(\varphi\psi + \psi\varphi) = V$, така че всеки вектор от V си има първообраз под действието на $\varphi\psi + \psi\varphi$.

в) Принадлежи ли полиномът $x^3 + 2x^2 + 1$ на $\operatorname{Im}(\varphi\psi - \psi\varphi)$?

Решение. Матрицата на $\varphi\psi - \psi\varphi$ е

$$F = AB - BA = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Полиномът $x^3 + 2x^2 + 1 \in \operatorname{Im}(\varphi\psi - \psi\varphi)$ тогава и само тогава, когато системата по-долу е съвместима

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right) .$$

Следователно $x^3 + 2x^2 + 1 \notin \operatorname{Im}(\varphi\psi - \psi\varphi)$.