Линейни пространства
(част 1)

доц. Евгения Великова

Октомври 2020

Бинарна операция

Нека M е непразно множество. Ще казваме, че е зададена **бинарна операция** в множеството M, когато на всяка двойка елементи от множеството е съпоставен елемент от множеството

$$\varphi : M \times M \to M,\ \ a, b \xrightarrow{\varphi} c,\ \ \text{където } a \in M,\ \ b \in M,\ \ c \in M$$

В алгебрата бинарните операции се записват, като знакът съответстващ на бинарната операция се поставя между двата аргумента, например ще записваме част от бинарните операции по следния начин $a + b$,$a - b$, $a.b$,$a * b$, $a \circ b$,$a \oplus b$,$a \odot b$

Пример бинарни операции $a + b$ и $a.b$ на цели числа.
Делението $a : b$ на цели числа не е бинарна операция

Определение за линейно пространство

Определение

Нека F е поле и $V \neq \emptyset$, в което е дефинирана една бинарна операция $" + "$, т.е. за произволни $a \in V$ и $b \in V$ е дефинирано $a + b \in V$ и за произволен $\lambda \in F$ и за $a \in V$ е дефинирано $\lambda a \in V$. Ако са изпълнени свойствата (аксиомите)

1. $a + b = b + a, \ \forall a, b \in V$,
2. $(a + b) + c = a + (b + c), \ \forall a, b, c \in V$,
3. съществува $\mathcal{O} \in V$, такъв че $a + \mathcal{O} = a, \quad \forall a \in V$,
4. за всеки елемент $a \in V$, съществува $b \in V$, така че $a + b = 0$,
5. за единицата на полето $1 \in F$ е изпълнено, че $1a = a, \forall a \in V$,
6. $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b, \quad \forall \lambda \in F, \quad \forall a, b \in V$,
7. $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a, \quad \forall \lambda, \mu \in F, \ \forall a \in V$,
8. $(\lambda.\mu)a = \lambda(\mu a), \quad \forall \lambda, \mu \in F, \ \forall a \in V$.

тогава V е **линейно пространство** над полето F.

Основен пример - n мерно векторно пространство

Нека $n \in \mathbb{N}$ и F е поле.

$$F^n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in F\}$$

$$(a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n) \in F^n.$$

$$\lambda A = \lambda(a_1, \dots, a_n) = (\lambda a_1, \dots, \lambda a_n), \ \lambda \in F, \quad A \in F^n$$

$F^n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in F\}$ - n-мерно векторно пространство над F.

- $A + B = B + A$ и $(A + B) + C = A + (B + C)$, където $A, B, C \in F^n$;
- $\mathcal{O} = (0, 0, \dots, 0)$ изпълнява: $A + \mathcal{O} = A$, където $A \in F^n$;
- $(a_1, \dots, a_n) + (-a_1, \dots, -a_n) = (0, \dots, 0) = \mathcal{O}$,
- $1.A = A$; $\quad (\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$; $\quad (\lambda.\mu)A = \lambda(\mu A) \quad \lambda, \mu \in F$;
- $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$, $\lambda \in F$, $\quad A, B \in F^n$.

Пример: $\lambda, \mu \in F$ и $A \in F^n$:

$$(\lambda + \mu)A = (\lambda + \mu).(a_1, \dots, a_n) = ((\lambda + \mu)a_1, \dots, (\lambda + \mu)a_n) =$$

$$= (\lambda a_1 + \mu a_1, \dots, \lambda a_n + \mu a_n) = (\lambda a_1, \dots, \lambda a_n) + (\mu a_1, \dots, \mu a_n) =$$

$$= \lambda.(a_1, \dots, a_n) + \mu.(a_1, \dots, a_n) = \lambda.A + \mu.A$$

Геометричните вектори

Един от важните примери за линейно пространство е множеството от геометричните вектори в разнината (записваме като E^2 или $\mathbb{R}^2$) (или в тримерното пространство- записва се E^3 или $\mathbb{R}^3$). От училище знаем, че векторите могат да се събират по правилото на успоредника и могат да се умножават по скалар, който е реално число и са изпълнени всички свойства, изписани в аксиомите. В синхрон с този пример думите "вектор"и "скалар"се използват също и за абстрактно (произволно) линейни пространство.

Матрица

Матрица - правоъгълна таблица от елементи от поле F.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}_{k\times n} \quad ; \quad A = (a_{ij})_{k\times n}$$

$M_{k\times n}(F)$- Множеството от всички $k \times n$ матрици с коефициенти от F

$$A+B=(a_{ij})_{k\times n} + (b_{ij})_{k\times n}=(a_{ij} + b_{ij})_{k\times n} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ a_{k1}+b_{k1} & \dots & a_{kn}+b_{kn} \end{pmatrix}$$

$$\lambda A = (\lambda a_{ij})_{k\times n} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ \lambda a_{k1} & \dots & \lambda a_{kn} \end{pmatrix}$$

F- поле, $x_1, \ldots, x_n$- неизвестни

$$\mathcal{L} = \{L : \ a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b \mid a_i \in F, b \in F\}$$

Нека $L_1 : \ a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = c$ и $L_2 : \ b_1x_1 + \ldots + b_nx_n = d$

$$L_1 + L_2 : \ (a_1 + b_1)x_1 + \ldots + (a_n + b_n)x_n = c + d$$

$$\mu L_1 \ \mu a_1x_1 + \ldots + \mu a_nx_n = \mu c.$$

С така дефинираните операции събиране и умножение със скалар множеството $\mathcal{L}$ е линейно пространство над полето F.

Примери

- множеството от всички безкрайни редици с елементи от поле F;
- множеството от всички функции от поле F във F;
- множество от всички полиноми с елементи от поле F

$$F[x] = \{a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n |\ a_i \in F, n \geq 0\};$$

- $\mathbb{C}$ е линейно пространство над полето $\mathbb{C}$;
- $\mathbb{C}$ е линейно пространство над полето $\mathbb{R}$;
- $\mathbb{C}$ е линейно пространство над полето $\mathbb{Q}$
- $V = \{a\}$ и F е поле, ако $\left| \begin{array}{l} a + a = a \\ \lambda a = a, \ \forall \lambda \in F \end{array} \right.$

  $\Rightarrow \quad V = \{a\}$ е линейно пространство (нулевото пространство)

Свойство 1

$\mathcal{O}$ е единственият елемент от V, за който $a + \mathcal{O} = a, \ \forall a \in V$.

Доказателство: Допускаме, че $\mathcal{O}_1$ и $\mathcal{O}_2$ изпълняват това равенство.

$$\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_1 + \mathcal{O}_2 = \mathcal{O}_2, \quad (\mathcal{O} \text{ - нулев елемент или нулев вектор })$$

Свойство 2

За всеки елемент $a \in V$ съществува **единствен** елемент $b \in V$, за който е изпълнено $a + b = \mathcal{O}$.

Доказателство: Допускаме, че $b_1 \in V$ и $b_2 \in V$ изпълняват посоченото равенство.

$$b_1 = b_1 + \mathcal{O} = b_1 + (a + b_2) = (b_1 + a) + b_2 = \mathcal{O} + b_2 = b_2$$

$\Rightarrow b_1 = b_2 = -a$ - **противоположен** на a

$a + (-a) = -a + a = \mathcal{O}$.

Следствия от аксиомите - 2

Свойство 3

Ако $a, b \in V$, тогава уравнението $a + x = b$ има единствено решение.

Доказателство: Проверява се, че $x = b + (-a)$ е решение

$$a + (b + (-a)) = (a + (-a)) + b = \mathcal{O} + b = b$$

Ако $y \in V$ е решение, тогава

$$a + y = b \Leftrightarrow (-a) + (a + y) = b + (-a) \Leftrightarrow y = b + (-a)$$

$\Rightarrow x = b + (-a)$ е единствено решение
$x = b - a = b + (-a)$ и разлика на елементите b, a

Св-во 4- обобщена асоциативност

Нека $a_1, \ldots, a_k \in V$. По всеки един начин, по който разположим скобите в израза $a_1 + \ldots + a_k$ се получава един и същи елемент.

$a + (b + c) = (a + b) + c$

Следствия от аксиомите- 3

Свойство 5:

За $a \in V$ и $0 \in F$ е изпълнено $0a = \mathcal{O}$.

$$a = 1a = (1+0)a = a + 0a \quad \Rightarrow \quad 0a = a - a = \mathcal{O}.$$

Свойство 6:

За $\lambda \in F$ и за $\mathcal{O} \in V$ е изпълнено $\lambda\mathcal{O} = \mathcal{O}$.

$$\lambda\mathcal{O} = \lambda(0.\mathcal{O}) = (\lambda.0)\mathcal{O} = 0\mathcal{O} = \mathcal{O}.$$

Свойство 7:

$-1 \in F$ и за $a \in V$ е изпълнено $-1a = -a$.

$$\mathcal{O} = 0a = (1-1)a = 1a + (-1)a \quad \Rightarrow \quad -1a = -a.$$

Следствия от аксиомите - 4

Свойство 8:

Равенството $\lambda a = \mathcal{O}$ е изпълнено тогава и само тогава, когато $\lambda = 0$ или $a = \mathcal{O}$.

Доказателство:
От доказаното, знаем $0a = \mathcal{O}$ и $\lambda\mathcal{O} = \mathcal{O}$.
Нека е изпълнено $\lambda a = \mathcal{O}$ и нека $\lambda \neq 0$, следователно съществува λ^{-1}:

$$\lambda a = \mathcal{O} \quad |.\lambda^{-1}$$
$$\Downarrow$$
$$\lambda^{-1}\lambda a = \lambda^{-1}\mathcal{O}$$
$$\Downarrow$$
$$a = \mathcal{O}$$