28. Симетрични оператори в крайномерни евклидови пространства. Основни свойства. Теорема за диагонализация.

Нека E е Евклидово пространство.

Деф: Симетричен оператор

Линейният оператор $\varphi: E \to E$ е **симетричен**, ако $(\varphi(x), y) = \left(x, \varphi(y)\right), \quad \forall x, y \in E$

Деф: Симетрична матрица

Матрицата $A \in M_{n\times n}(F)$ се нарича **симетрична**, когато $A = A^t$, т.е. $a_{ij} = a_{ji}$ за $i \neq j,\ i, j$ – произволни

Теорема:

Нека $\varphi: E \to E$ е линеен оператор.

φ е симетричен оператор $\Rightarrow$ спрямо ортонормиран базис φ има симетрична матрица

Д-во:

Нека φ е симетричен оператор с матрица A спрямо ортонормиран базис $e_1, \dots, e_n$.

Имаме, че $(\varphi(a), b) = (a, \varphi(b)), \quad \forall a, b \in E$. В частност е в сила и за базисните вектори:

Ако $\varphi(e_i) = a_{1i}e_1 + a_{2i}e_2 + \dots + a_{ii}e_i + \dots + a_{ni}e_n$

$\varphi(e_j) = a_{1j}e_1 + a_{2j}e_2 + \dots + a_{jj}e_j + \dots + a_{nj}e_n$

$$\left(\varphi(e_i), e_j\right) = \left(a_{1i}e_1 + a_{2i}e_2 + \dots + a_{ii}e_i + \dots + a_{ni}e_n, e_j\right) =$$

$$a_{1i}\underbrace{(e_1, e_j)}_{0} + \dots + a_{ji}\underbrace{(e_j, e_j)}_{1} + \dots + a_{ni}\underbrace{(e_n, e_j)}_{0} = a_{ji}$$

Аналогично $\left(\varphi(e_j), e_i\right) = a_{ij}$

$$\Rightarrow a_{ij} = \left(\varphi(e_j), e_i\right) = \left(e_j, \varphi(e_i)\right) = \left(\varphi(e_i), e_j\right) = a_{ji}$$

Получихме, че $a_{ji} = a_{ij}$ за $i, j \in \{1, \dots, n\}$ произволни, следователно A е симетрична.

Теорема:

Нека $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ е симетрична матрица с реални числа. Характеристичните корени на A са реални числа.

Д-во:

$f_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = 0$. Нека λ_0 е корен на $f_A(\lambda),\ \lambda_0 \in \mathbb{C}$. $B = A - \lambda_0 E \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$, хомогенната система с матрица $B = A - \lambda_0 E$ има ненулево решение $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$. Следователно $(A - \lambda_0 E).z^t = 0 \Rightarrow Az^t = \lambda_0 z^t$

$$(*) \qquad (\overline{z_1}, \overline{z_2}, \dots, \overline{z_n})\, A \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \lambda_0 (\overline{z_1}, \overline{z_2}, \dots, \overline{z_n}) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \lambda_0 \left(|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2\right)$$

Транспонираме и получаваме

$$(1) \qquad (z_1, \dots, z_n)\, A^t \begin{pmatrix} \overline{z_1} \\ \vdots \\ \overline{z_n} \end{pmatrix} = (z_1, \dots, z_n)\, A \begin{pmatrix} \overline{z_1} \\ \vdots \\ \overline{z_n} \end{pmatrix} = \underbrace{\lambda_0 \left(|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2\right)}_{>0}$$

Комплексно спрягаме $(*)$

$$(2) \qquad (z_1, \dots, z_n)\, \overline{A} \begin{pmatrix} \overline{z_1} \\ \vdots \\ \overline{z_n} \end{pmatrix} = (z_1, \dots, z_n)\, A \begin{pmatrix} \overline{z_1} \\ \vdots \\ \overline{z_n} \end{pmatrix} = \overline{\lambda_0} \left(|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2\right)$$

$$(1) = (2) \Rightarrow \underbrace{\lambda_0 \left(|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2\right)}_{\neq 0} = \underbrace{\overline{\lambda_0} \left(|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2\right)}_{\neq 0} \Rightarrow \lambda_0 = \overline{\lambda_0} \Rightarrow \lambda_0 \in \mathbb{R}.$$

Твърдение:

Нека $\varphi: E \to E$ е симетричен оператор и g_1, g_2 са собствени вектори за φ с различни собствени стойности: $\varphi(g_1) = \lambda_1 g_1$ и $\varphi(g_2) = \lambda_2 g_2$ и $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Тогава $g_1 \perp g_2$.

Д-во:

От φ симетричен имаме, че $(\varphi(g_1), g_2) = (g_1, \varphi(g_2))$

$$\left.\begin{matrix} (\varphi(g_1), g_2) = (\lambda_1 g_1, g_2) = \lambda_1 (g_1, g_2) \\ (g_1, \varphi(g_2)) = (g_1, \lambda_2 g_2) = \lambda_2 (g_1, g_2) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \lambda_1 (g_1, g_2) = \lambda_2 (g_1, g_2)$$

$\Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)(g_1, g_2) = 0 \;\; /: (\lambda_1 - \lambda_2)$, знаем че $\lambda_1 \neq \lambda_2$ по усл.

$\Rightarrow (g_1, g_2) = 0 \Rightarrow g_1 \perp g_2$

Теорема: За канонизация

Нека E - Евклидово пространство, $\dim E < \infty$ и $\varphi: E \to E$ е симетричен оператор. Съществува ортонормиран базис на пространството E, спрямо който матрицата на φ е диагонална.

Т.е. Съществува ортонормиран базис от собствени вектори за φ.

Д-во:

Индукция по $n = \dim E$:

- $n = 1$: e_1 - единичен вектор. $E = l(e_1)$ и e_1 - собствен вектор $\Rightarrow$ изпълнено е
- Нека е изпълнено за $\dim E \leq n - 1$
- Нека Е - Евклидово пространство, $\dim E = n$, А - матрица на φ спрямо ортонормиран базис
  $\Rightarrow A$ - симетрична $\Rightarrow \lambda_1 \in \mathbb{R}$ е характеристичен корен
  $\Rightarrow \lambda_1$ - собствена стойност $\Rightarrow \exists g_1 \neq 0: \varphi(g_1) = \lambda_1 g_1$
  Нека $U = \left(l(g_1)\right)^{\perp}$, $l(g_1)$ е φ-инвариантно $\Rightarrow U$ също е φ-инвариантно
  $\dim U = n - 1$, $\varphi_{iu}: U \to U$ симетричен
  $\Rightarrow$ по индукция за $U \Rightarrow \exists$ ортонормиран базис $e_2, \dots, e_n$ на U.
  $\varphi(e_i) = \lambda_i e_i, \qquad l_i \perp g_i, \qquad i = 2, \dots, n$
  $\Rightarrow e_1 = \frac{1}{|g_1|} g_1$, $\varphi(g_1) = \lambda_1 g_1$ и $e_1, \dots, e_n$ е ортонормиран базис на E.
  $$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$