① Упражнение 9 за 1, 2 и 3 група
Рекурентни редици

Рекурентни редици наричаме редиците $\{a_n\}$, за които са дадени първите им k члена: $a_1, a_2, \dots, a_k$, а всеки следващ член се получава по формулата $a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_{n-k})$, където $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ е дадена функция на k променливи.

Зад. 1 Изследвайте в зависимост от α поведението на редицата:

а) $a_1 = \alpha > 0$, $a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n + \sqrt{a_n}$.

Решение на а): Да допуснем, че $\{a_n\}$ е сходяща и $a_n \to l$. В равенството $a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n + \sqrt{a_n}$ правим граничен преход при $n \to \infty$ и получаваме, че $l = \frac{1}{2} l + \sqrt{l}$, $l - 2\sqrt{l} = 0$, $\sqrt{l}(\sqrt{l} - 2) = 0$, $l = 0$ или $l = 4$.

И така:

ако $\{a_n\}$ е сходяща, то задължително $a_n \to 0$ или $a_n \to 4$. (*)

По-нататък пресмятаме:

$a_{n+1} - 4 = \frac{1}{2} a_n + \sqrt{a_n} - 4 = \frac{1}{2}(a_n + 2\sqrt{a_n} - 8) =$

$= \frac{1}{2}(\sqrt{a_n} - 2)(\sqrt{a_n} + 4)$

$a_{n+1} - a_n = \sqrt{a_n} - \frac{1}{2} a_n = \frac{1}{2}\sqrt{a_n}(2 - \sqrt{a_n})$.

И така:

$a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n + \sqrt{a_n}$ (1)

$a_{n+1} - 4 = \frac{1}{2}(\sqrt{a_n} - 2)(\sqrt{a_n} + 4)$ (2)

$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}\sqrt{a_n}(2 - \sqrt{a_n})$ (3)

1сл. $a_1 = \alpha \in (0, 4)$.

Сега от (1) по индукция следва, че $a_n \in (0, 4)$ за $\forall n$.

② Тогава от (3) следва, че $a_{n+1} > a_n$ за $\forall n$.

Оказа се, че в 1 случай

$0 < a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < \dots < 4$. (**)

Щом $\{a_n\}$ е ограничена и монотонна, то $\{a_n\}$ е сходяща.

При това от (*) и (**) следва, че $a_n \longrightarrow 4$.

2 сл. $a_1 = \alpha = 4$.

Сега от (1) по индукция следва, че $a_n = 4$ за $\forall n$ и значи $a_n \longrightarrow 4$.

3 сл. $a_1 = \alpha \in (4, +\infty)$.

Сега от (1) по индукция следва, че $a_n > 4$ за $\forall n$

Тогава от (3) следва, че $a_{n+1} < a_n$ за $\forall n$.

Оказа се, че в 3 случай

$4 < \dots < a_4 < a_3 < a_2 < a_1$ (***)

Щом $\{a_n\}$ е ограничена и монотонна, то $\{a_n\}$ е сходяща.

При това от (*) и (***) следва, че $a_n \longrightarrow 4$.

Отг. на а): За всяко $\alpha > 0$ $\{a_n\}$ е сходяща и $a_n \longrightarrow 4$.

б) $a_1 = \alpha > 1$, $a_{n+1} = 3 - \frac{2}{a_n}$.

Решение на б): Да допуснем, че $\{a_n\}$ е сходяща и $a_n \longrightarrow l$. В равенството $a_{n+1} = 3 - \frac{2}{a_n}$ правим граничен преход при $n \longrightarrow \infty$ и получаваме, че $l = 3 - \frac{2}{l}$, $l^2 - 3l + 2 = 0$, $l = 1$ или $l = 2$. И така:

ако $\{a_n\}$ е сходяща, то задължително $a_n \longrightarrow 1$ или $a_n \longrightarrow 2$ (Δ)

③ ~~[illegible]~~ По-нататък пресмятаме:

$$a_{n+1}-1 = 2-\frac{2}{a_n} = \frac{2(a_n-1)}{a_n}$$

$$a_{n+1}-2 = 1-\frac{2}{a_n} = \frac{a_n-2}{a_n}$$

$$a_{n+1}-a_n = 3-\frac{2}{a_n}-a_n = -\frac{a_n^2-3a_n+2}{a_n} =$$

$$= -\frac{(a_n-1)(a_n-2)}{a_n}.$$

И така:

$$a_{n+1}-1 = \frac{2(a_n-1)}{a_n} \quad (4)$$

$$a_{n+1}-2 = \frac{a_n-2}{a_n} \quad (5)$$

$$a_{n+1}-a_n = -\frac{(a_n-1)(a_n-2)}{a_n} \quad (6)$$

1сл. $a_1=\alpha\in(1,2)$

Сега от (4) и (5) по индукция следва, че $a_n\in(1,2)$ за $\forall n$.

Тогава от (6) следва, че $a_{n+1}>a_n$ за $\forall n$.

Оказа се, че в 1 случай

$1<a_1<a_2<a_3<a_4<\ldots<2$ $(\Delta\Delta)$

Щом $\{a_n\}$ е ограничена и монотонна, то $\{a_n\}$ е сходяща.

При това от (Δ) и $(\Delta\Delta)$ следва, че $a_n\to 2$.

2сл. $a_1=\alpha=2$

Сега от (5) по индукция следва, че $a_n=2$ за $\forall n$ и значи $a_n\to 2$.

3сл. $a_1=\alpha\in(2,+\infty)$.

Сега от (5) по индукция следва, че $a_n>2$ за $\forall n$

Тогава от (6) следва, че $a_{n+1}<a_n$ за $\forall n$.

Оказа се, че в 3 случай

$2<\ldots<a_4<a_3<a_2<a_1$ $(\Delta\Delta\Delta)$

4. Щом $\{a_n\}$ е ограничена и монотонна, то $\{a_n\}$ е сходяща.
При това от (Δ) и $(\Delta\Delta\Delta)$ следва, че $a_n \to 2$.
Отг. на б): За всяко $\alpha > 1$ $\{a_n\}$ е сходяща и $a_n \to 2$.

Числови редове

Числова ред наричаме всяка безкрайна сума от реални числа

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots \qquad (1)$$

$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ – n-та частична сума на (1)

Казваме, че числовият ред (1) е сходящ, ако е сходяща редицата $\{S_n\}$ от частичните му суми; при това ако $S_n \to S$, числото S се нарича сума на (1).

Казваме, че числовият ред (1) е разходящ, ако е разходяща редицата $\{S_n\}$.

Теорема 1. Ако $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ, то $a_n \to 0$.

Принцип за мажориране. Ако $0 \le a_n \le b_n$ за $\forall n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ е сходящ, то и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ също е сходящ.

Критерий за сравняване. Ако $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ са числови редове с положителни членове, за които съществува $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = K$, като $0 < K < +\infty$, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ са едновременно сходящи или разходящи (казваме, че са сравними и пишем $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n$).

⑤ Основни редове, които се използват за сравняване:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n \text{ е } \begin{cases} \text{сходящ, ако } q \in (-1,1) \\ \text{разходящ, ако } q \in (-\infty,-1] \cup [1,+\infty) \end{cases}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ е } \begin{cases} \text{сходящ, ако } \alpha > 1 \\ \text{разходящ, ако } \alpha \leq 1 \end{cases}.$$

Зад. 1 Док. че $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ е $\begin{cases} \text{сходящ, ако } q \in (-1,1) \\ \text{разходящ, ако } q \in (-\infty,-1] \cup [1,+\infty) \end{cases}$

Решение: Имаме, че

$S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$ при $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Ако $q \in (-1,1)$, то $q^n \longrightarrow 0$ и с. $S_n \longrightarrow \frac{1}{1-q}$.

Така при $q \in (-1,1)$ $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ е сходящ

(и сумата му е $\frac{1}{1-q}$).

Ако пък $q \in (-\infty,-1] \cup [1,+\infty)$, то $q^n \not\longrightarrow 0$

и по теорема 1 $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ е разходящ.

Зад. 2 (Критерий на Коши за редове с неотрицателни намаляващи членове).

Док. че ако $a_n \geq 0$ за $\forall n$ и $a_n \geq a_{n+1}$ за $\forall n$, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ са едновременно сходящи или разходящи (т.е. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sim \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$)

Решение: Да обърнем внимание, че

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} = 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + 16a_{16} + 32a_{32} + \dots$$

Нека S_n и σ_n са n-тите частични суми съответно на $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и на $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$, т.е.

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n,$$

$$\sigma_n = 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \dots + 2^n a_{2^n}.$$

(б) Понеже по условие $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq \dots$, имаме че:

$$a_2 \leq a_1 \leq a_1$$

$$2a_4 \leq a_2 + a_3 \leq 2a_2$$

$$4a_8 \leq a_4 + a_5 + a_6 + a_7 \leq 4a_4$$

$$\vdots$$

$$2^n a_{2^{n+1}} \leq \underbrace{a_{2^n} + a_{2^n+1} + a_{2^n+2} + \dots + a_{2^{n+1}-1}}_{2^n \text{ на брой събираеми}} \leq 2^n a_{2^n}$$

Събираме горните неравенства и получаваме, че

$$\frac{\sigma_{n+1}}{2} \leq S_{2^{n+1}-1} \leq a_1 + \sigma_n \qquad (*)$$

Ако $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ, то редицата от частични те му суми $\{S_n\}$ е ограничена (защото е сходяща); нека A е нейна горна граница.

Тогава от $(*)$ получаваме, че $\sigma_{n+1} \leq 2A$, така че $\{\sigma_n\}$ е монотонна (по-точно растяща, защото $a_n \geq 0$ за $\forall n$) и ограничена.

Сл. $\{\sigma_n\}$ е сходяща, а значи и $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ е сходящ.

Ако $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е разходящ, то, понеже $a_n \geq 0$ за $\forall n$, имаме, че че редицата $\{S_n\}$ расте неограничено. Тогава от $(*)$ следва, че и редицата $\{\sigma_n\}$ расте неограничено и значи $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ е разходящ.

Зад. 3 Док. че $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ е $\begin{cases} \text{сходящ, ако } \alpha > 1 \\ \text{разходящ, ако } \alpha \leq 1 \end{cases}$

Решение: Ако $\alpha \leq 0$, то $\frac{1}{n^\alpha} \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$ и значи по теорема 1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ е разходящ.

⑦ Ако пък $\alpha>0$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ е ред с неотрицателни намаляващи членове и по критерия на Коши от зад. 2 имаме, че

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \sim \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n} \frac{1}{(2^{n})^{\alpha}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n(\alpha-1)}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha-1}\right]^{n}$$

Ако $\alpha>1$, то $\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha-1} \in (0,1)$ и от зад. 1 следва, че $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha-1}\right]^{n}$ е сходящ, а значи и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ е сходящ.

Ако $0<\alpha<1$, то $\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha-1} \in (1,+\infty)$ и от зад. 1 следва, че $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha-1}\right]^{n}$ е разходящ, а значи и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ е разходящ.