Лекция 27.5.2021

1 Детерминанта на Грам. Обем на паралелепипед и на симплекс — продължение

Припомняне от миналия път

Детерминанта на Грам

Нека U е евклидово линейно пространство.

Определение 1 *Матрица на Грам на системата вектори* $u_1, \ldots, u_k \in U$ се нарича $k \times k$-матрицата $G(u_1, \ldots, u_k)$, чийто (i, j)-ти елемент е $\langle u_i, u_j \rangle$, тоест

$$G(u_1, \ldots, u_k) = \begin{pmatrix} \langle u_1, u_1 \rangle & \langle u_1, u_2 \rangle & \ldots & \langle u_1, u_k \rangle \\ \langle u_2, u_1 \rangle & \langle u_2, u_2 \rangle & \ldots & \langle u_2, u_k \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle u_k, u_1 \rangle & \langle u_k, u_2 \rangle & \ldots & \langle u_k, u_k \rangle \end{pmatrix}.$$

$\det G(u_1, \ldots, u_k)$ се нарича *детерминанта на Грам на системата вектори* $u_1, \ldots, u_k$.

Лема 1 *Нека* $u_1, \ldots, u_k, v \in U$ *и* $v^\perp$ *е ортогоналната към* $l(u_1, \ldots, u_k)$ *компонента на* v *(която съществува, защото* $l(u_1, \ldots, u_k)$ *е крайномерно). Тогава*
$\det G(u_1, \ldots, u_k, v) = \det G(u_1, \ldots, u_k). \left|v^\perp\right|^2$.

Дотук беше припомнянето от миналия път.

Детерминанта на Грам — продължение

Теорема 1 *Ако* $u_1, \ldots, u_k \in U$*, то* $\det G(u_1, \ldots, u_k) \geq 0$ *и* $= \Leftrightarrow$ $u_1, \ldots, u_k$ *са линейно зависими.*

Доказателство: Индукция по k.

При $k = 1$ имаме $\det G(u_1) = \langle u_1, u_1 \rangle = |u_1|^2 \geq 0$ и $= \Leftrightarrow u_1 = 0$, тоест когато u_1 е линейно зависим. Следователно твърдението е вярно за $k = 1$.

Нека твърдението е вярно за k. Ще го докажем за $k + 1$.

От Лема 1 имаме $\det G(u_1, \ldots, u_k, u_{k+1}) = \det G(u_1, \ldots, u_k). \left|{u_{k+1}}^\perp\right|^2$, където ${u_{k+1}}^\perp$ е ортогоналната към $l(u_1, \ldots, u_k)$ компонента на u_{k+1} (която съществува, защото $l(u_1, \ldots, u_k)$ е крайномерно). От индукционното предположение $\det G(u_1, \ldots, u_k) \geq 0$ и $= \Leftrightarrow u_1, \ldots, u_k$ са линейно зависими. Освен това $\left|{u_{k+1}}^\perp\right|^2 \geq 0$ и $= \Leftrightarrow {u_{k+1}}^\perp = 0$, тоест когато $u_{k+1} \in l(u_1, \ldots, u_k)$. Значи $\det G(u_1, \ldots, u_k, u_{k+1}) = \det G(u_1, \ldots, u_k). \left|{u_{k+1}}^\perp\right|^2 \geq 0$ и $= \Leftrightarrow$ $u_1, \ldots, u_k$ са линейно зависими или $u_1, \ldots, u_k$ са линейно независими и u_{k+1} е тяхна линейна комбинация, тоест когато $u_1, \ldots, u_k, u_{k+1}$ са линейно зависими. Следователно твърдението е вярно и за $k + 1$. $\square$

Забележка 1 При $k = 2$ горната теорема дава неравенството на Коши-Буняковски-Шварц.
Това е така, защото

$$0 \le \det G(u_1, u_2) = \langle u_1, u_1\rangle\langle u_2, u_2\rangle - \langle u_1, u_2\rangle\langle u_2, u_1\rangle = |u_1|^2|u_2|^2 - \langle u_1, u_2\rangle^2,$$

тоест $|\langle u_1, u_2\rangle| \le |u_1||u_2|$, и $= \Leftrightarrow \det G(u_1, u_2) = 0$, тоест когато u_1, u_2 са линейно зависими.

Твърдение 1 *Нека $e = (e_1, \dots, e_n)$ е ортонормиран базис в U, $u_1, \dots, u_k \in U$ и T е матрицата $n \times k$, чиито стълбове са координатните вектори на $u_1, \dots, u_k$ относно e, тоест $(u_1, \dots, u_k) = e.T$. Тогава $G(u_1, \dots, u_k) = T^tT$.*
В частност, ако $k = n$, то T е квадратна $n \times n$ и $\det G(u_1, \dots, u_n) = (\det T)^2$.

Доказателство: Първата част всъщност сме я видели в доказателството на Твърдение 4 от въпроса за смяна на координатната система:
Ако $T = (t_{ij})_{j=1,\dots,k}^{i=1,\dots,n}$, то $T^t = (s_{ij})_{j=1,\dots,n}^{i=1,\dots,k}$, където $s_{ij} = t_{ji}$. Следователно за $i, j = 1, \dots, k$ имаме

$$(i, j)\text{-тият елемент на } T^tT = \sum_{l=1}^{n} s_{il}t_{lj} = \sum_{l=1}^{n} t_{li}t_{lj}.$$

За $i = 1, \dots, k$ координатният вектор на u_i спрямо e е i-тият стълб на T, тоест $\begin{pmatrix} t_{1i} \\ \vdots \\ t_{ni} \end{pmatrix}$.

Тъй като базисът e е ортонормиран, то за $i, j = 1, \dots, k$ получаваме $\langle u_i, u_j\rangle = \sum_{l=1}^{n} t_{li}t_{lj}$.

Значи

$$(i, j)\text{-тият елемент на } G(u_1, \dots, u_k) = \langle u_i, u_j\rangle = \sum_{l=1}^{n} t_{li}t_{lj} = (i, j)\text{-тият елемент на } T^tT.$$

Следователно $G(u_1, \dots, u_k) = T^tT$.

В частност, ако $k = n$, то T е квадратна $n \times n$ и

$$\det G(u_1, \dots, u_n) = \det\left(T^tT\right) = \det T^t. \det T = \det T. \det T = (\det T)^2. \qquad \square$$

Забележка 2 Горното твърдение също дава доказателство на Теорема 1:
Ако $u_1, \dots, u_k$ са линейно независими, то в ролята на U взимаме $l(u_1, \dots, u_k)$. Тогава $n = k$, T е $k \times k$ и е обратима (защото $(u_1, \dots, u_k)$ е базис на $l(u_1, \dots, u_k)$), тоест $\det T \neq 0$, така че $\det G(u_1, \dots, u_k) = (\det T)^2 > 0$.
Ако $u_1, \dots, u_k$ са линейно зависими, то тяхна нетривиална линейна комбинация е 0 и следователно линейната комбинация със същите коефициенти на редовете (а и на стълбовете) на $G(u_1, \dots, u_k)$ е 0, тоест редовете (а и стълбовете) на $G(u_1, \dots, u_k)$ са линейно зависими и значи $\det G(u_1, \dots, u_k) = 0$.

Обем на паралелепипед и на симплекс

Нека A е евклидово афинно пространство, моделирано върху линейното пространство U.

Определение 2 Нека $P_0 \in A$ и $u_1, \dots, u_k \in U$. Нека Π е k-мерният паралелепипед, определен от P_0 и $u_1, \dots, u_k$, а Δ е k-мерният симплекс, определен от P_0 и $u_1, \dots, u_k$ (тоест от точките $P_0, P_1, \dots, P_k$, където P_i са точките, за които $\overrightarrow{P_0P_i} = u_i$, $i = 1, \dots, k$).
(k-мерен) обем на Π се нарича числото $V(\Pi) = \sqrt{\det G(u_1, \dots, u_k)}$.
(k-мерен) обем на Δ се нарича числото $V(\Delta) = \frac{1}{k!}\sqrt{\det G(u_1, \dots, u_k)}$.
При $k = 1$ и $k = 2$ вместо обем се казва съответно *дължина* и *лице*.
(Дефиницията важи и за изродени паралелепипеди и симплекси и е коректна, защото по Теорема 1 $\det G(u_1, \dots, u_k) \geq 0$ (за неизродени > 0, за изродени $= 0$).)

Теорема 2 *Нека $P_0 \in A$, $u_1, \dots, u_k \in U$, Π и Δ са съответно k-мерните паралелепипед и симплекс, определени от P_0 и $u_1, \dots, u_k$, а Π' и Δ' са съответно $(k-1)$-мерните паралелепипед и симплекс, определени от P_0 и $u_1, \dots, u_{k-1}$. Тогава $V(\Pi) = V(\Pi')|u_k^{\perp}|$, $V(\Delta) = \frac{1}{k}V(\Delta')|u_k^{\perp}|$, където $u_k^{\perp}$ е ортогоналната към $l(u_1, \dots, u_{k-1})$ компонента на u_k.*

Доказателство: По Лема 1 имаме $\det G(u_1, \dots, u_k) = \det G(u_1, \dots, u_{k-1}). \left|u_k^{\perp}\right|^2$ и следователно $\sqrt{\det G(u_1, \dots, u_k)} = \sqrt{\det G(u_1, \dots, u_{k-1})}. \left|u_k^{\perp}\right|$. От това получаваме

$$
\begin{aligned}
V(\Pi) &= \sqrt{\det G(u_1, \dots, u_k)} = \sqrt{\det G(u_1, \dots, u_{k-1})}. \left|u_k^{\perp}\right| = V(\Pi')|u_k^{\perp}|, \\
V(\Delta) &= \tfrac{1}{k!}\sqrt{\det G(u_1, \dots, u_k)} = \tfrac{1}{k} \cdot \tfrac{1}{(k-1)!}\sqrt{\det G(u_1, \dots, u_{k-1})}. \left|u_k^{\perp}\right| = \tfrac{1}{k}V(\Delta')|u_k^{\perp}|. \quad \square
\end{aligned}
$$

Забележка 3 $|u_k^{\perp}|$ е „височината“ на Π и Δ към „основите“ Π' и Δ', защото $|u_k^{\perp}|$ е разстоянието от „върха“ P_k, тоест точката, за която $\overrightarrow{P_0P_k} = u_k$, до афинното подпространство, определено от P_0 и $u_1, \dots, u_{k-1}$.

Твърдение 2 *Нека $K = Oe_1 \dots e_n$ е ортонормирана координатна система в A, $P_0 \in A$, $u_1, \dots, u_n \in U$ и T е матрицата, чиито стълбове са координатните вектори на $u_1, \dots, u_n$ относно e, тоест $(u_1, \dots, u_n) = e.T$. Тогава обемите на n-мерните паралелепипед Π и симплекс Δ, определени от P_0 и $u_1, \dots, u_n$, са съответно $V(\Pi) = |\det T|$ и $V(\Delta) = \frac{1}{n!}|\det T|$.*

Доказателство: По Твърдение 1 имаме $\det G(u_1, \dots, u_n) = (\det T)^2$ и следователно $\sqrt{\det G(u_1, \dots, u_n)} = |\det T|$. От това получаваме

$$
V(\Pi) = \sqrt{\det G(u_1, \dots, u_n)} = |\det T|, \qquad V(\Delta) = \frac{1}{n!}\sqrt{\det G(u_1, \dots, u_n)} = \frac{1}{n!}|\det T|. \quad \square
$$

Пример 1 $k = 1$: И едномерният паралелепипед Π, и едномерният симплекс Δ са отсечката P_0P_1, където $\overrightarrow{P_0P_1} = u_1$, и

$$
V(\Pi) = \sqrt{\det G(u_1)} = \sqrt{\langle u_1, u_1 \rangle} = |u_1| = |P_0P_1|,
$$

$$
V(\Delta) = \frac{1}{1!}\sqrt{\det G(u_1)} = \sqrt{\langle u_1, u_1 \rangle} = |u_1| = |P_0P_1|,
$$

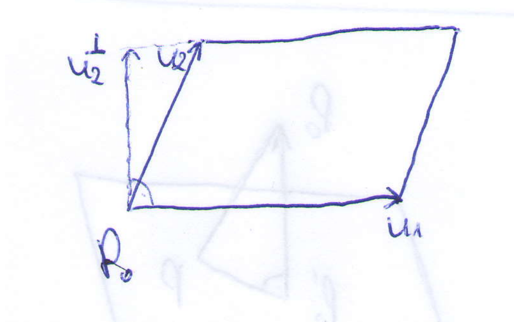
тоест получава се обичайната дължина на отсечка.

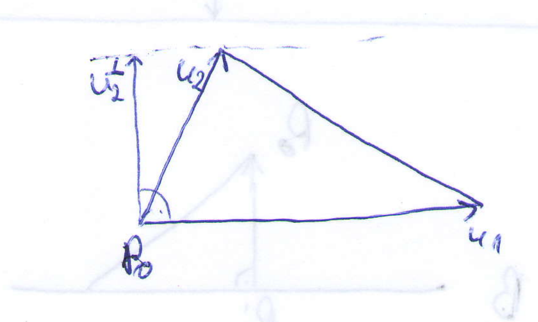
$k=2$: Двумерният паралелепипед Π и двумерният симплекс Δ са съответно успоредникът и триъгълникът, определени от P_0 и u_1, u_2, и от Теорема 2 и случая $k=1$ получаваме

$$V(\Pi) = V(\Pi')|u_2^\perp| = |u_1||u_2^\perp| = (\text{дължината на основата}).(\text{височината}),$$

$$V(\Delta) = \frac{1}{2}V(\Delta')|u_2^\perp| = \frac{1}{2}|u_1||u_2^\perp| = \frac{1}{2}(\text{дължината на основата}).(\text{височината}),$$

тоест обичайните формули за лице на успоредник и триъгълник.



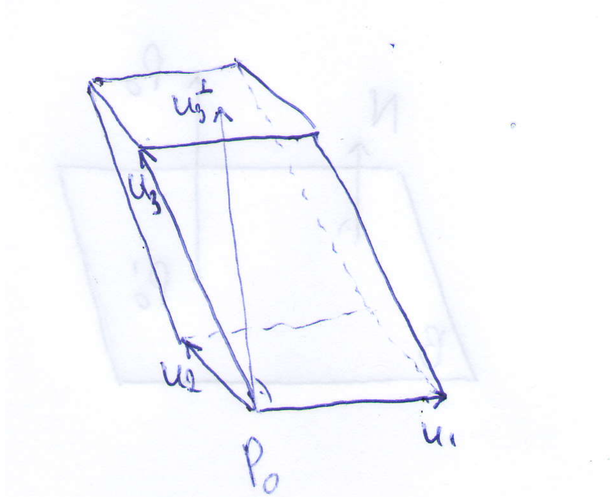


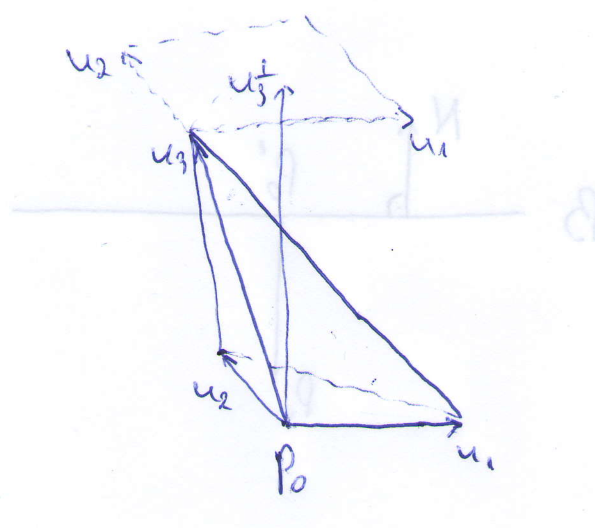
$k=3$: Тримерният паралелепипед Π и тримерният симплекс Δ са съответно паралелепипедът и тетраедърът, определени от P_0 и u_1, u_2, u_3, и от Теорема 2 и случая $k=2$ получаваме

$$V(\Pi) = V(\Pi')|u_3^\perp| = (\text{лицето на основата}).(\text{височината}),$$

$$V(\Delta) = \frac{1}{3}V(\Delta')|u_3^\perp| = \frac{1}{3}(\text{лицето на основата}).(\text{височината}),$$

тоест обичайните формули за обем на паралелепипед и тетраедър.





2 Афинни изображения, еднаквости, подобности

Матрица на линейно изображение (припомняне от алгебрата)

Нека U и V са крайномерни реални линейни пространства, $\dim U = m$, $\dim V = n$, $e = (e_1, \dots, e_m)$ и $f = (f_1, \dots, f_n)$ са базиси съответно на U и V и $\Phi : U \to V$ е линейно изображение. Тогава всеки от векторите $\Phi(e_1), \dots, \Phi(e_m) \in V$ е линейна комбинация на $f_1, \dots, f_n$, тоест съществуват числа $t_{ij} \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, такива че

$$
\begin{array}{rcl}
\Phi(e_1) & = & t_{11}f_1 + t_{21}f_2 + \cdots + t_{n1}f_n \\
\Phi(e_2) & = & t_{12}f_1 + t_{22}f_2 + \cdots + t_{n2}f_n \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\Phi(e_j) & = & t_{1j}f_1 + t_{2j}f_2 + \cdots + t_{nj}f_n \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\Phi(e_m) & = & t_{1m}f_1 + t_{2m}f_2 + \cdots + t_{nm}f_n
\end{array} \tag{1}
$$

тоест

$$\Phi(e_j) = \sum_{i=1}^{n} t_{ij} f_i, \quad j = 1, \dots, m. \tag{2}$$

Означаваме $T = (t_{ij})_{j=1,\dots,m}^{i=1,\dots,n}$, тоест T е матрицата $n \times m$, чиито стълбове са координатните вектори на $\Phi(e_1), \dots, \Phi(e_m)$ спрямо базиса f, тоест (i, j)-тият елемент на T е i-тата координата на $\Phi(e_j)$ спрямо базиса f.

Разглеждайки $f = (f_1, \dots, f_n)$ и $\Phi(e) = (\Phi(e_1), \dots, \Phi(e_m))$ като вектор-редове и считайки, че вектор може да се умножава с число отдясно, получаваме, че (1) (и еквивалентното му (2)) се записва в матричен вид като

$$\Phi(e) = f.T. \tag{3}$$

Матрицата T се нарича *матрица на* Φ *относно базисите* e *на* U *и* f *на* V. Когато $U = V$ и $e = f$, матрицата T се нарича *матрица на* Φ *относно базиса* e *на* U.

Нека $u \in U$ има спрямо базиса e координатен вектор $x \in \mathbb{R}^m$, а $\Phi(u) \in V$ има спрямо базиса f координатен вектор $y \in \mathbb{R}^n$. Тогава $y = Tx$.

(Защото от $u = \sum_{j=1}^{m} x_j e_j$ следва $\Phi(u) = \sum_{j=1}^{m} x_j \Phi(e_j) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} x_j t_{ij} f_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} t_{ij} x_j \right) f_i$ и значи $y_i = \sum_{j=1}^{m} t_{ij} x_j$, $i = 1, \dots, n$, което е равенството $y = Tx$, написано покомпонентно.)

Чрез координатните изображения това равенство се записва като $\varkappa_f(\Phi(u)) = T.\varkappa_e(u)$. От това е ясно, че за всяка $n \times m$ матрица T съществува единствено линейно изображение $\Phi : U \to V$, на което T е матрицата относно базисите e и f, а именно изображението, дефинирано с $\Phi(u) = {\varkappa_f}^{-1}(T.\varkappa_e(u))$.

От връзката между координатните вектори също така лесно следва:

1. Ако матрицата на линейното изображение $\Phi : U \to V$ спрямо базисите e на U и f на V е S, а матрицата на линейното изображение $\Psi : V \to W$ спрямо базисите f на V и g на W е T, то матрицата на линейното изображение $\Psi \circ \Phi : U \to W$ спрямо базисите e на U и g на W е TS.

2. Ако матрицата на линейното изображение $\Phi : U \to V$ спрямо базисите e на U и f на V е T, то Φ е линеен изоморфизъм $\Leftrightarrow$ матрицата T е обратима. В тоя случай матрицата на $\Phi^{-1} : V \to U$ относно базисите f на V и e на U е T^{-1}.

3. Ако матрицата на линейното изображение $\Phi : U \to V$ спрямо базисите e на U и f на V е T, а матриците на прехода от e към базиса e' на U и от f към базиса f' на V са съответно R и S, то матрицата на Φ спрямо базисите e' на U и f' на V е $T' = S^{-1}TR$. В частност, при $U = V$, $e = f$, $e' = f'$ имаме $R = S$ и следователно получаваме: Ако матрицата на линейното изображение $\Phi : U \to U$ спрямо базиса e на U е T, а матрицата на прехода от e към базиса e' на U е S, то матрицата на Φ спрямо базиса e' на U е $T' = S^{-1}TS$.

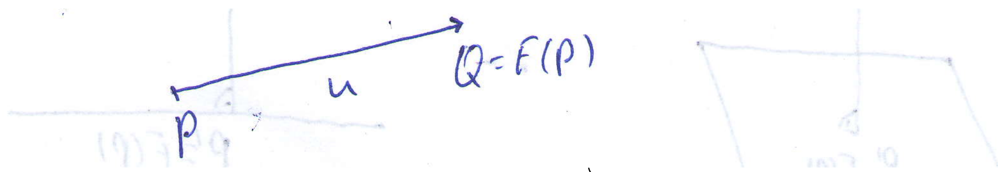
Афинни изображения, еднаквости, подобности

Определение 3 Нека A и B са афинни пространства, $\dim A = m$, $\dim B = n$, K и L са афинни координатни системи съответно в A и B и $F : A \to B$ е изображение. Нека изображението $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ е такова, че ако $P \in A$ има координатен вектор $x \in \mathbb{R}^m$ спрямо K, то $F(P) \in B$ има координатен вектор $y = \varphi(x) \in \mathbb{R}^n$ спрямо L. Тогава казваме, че $y = \varphi(x)$ *е уравнение на F спрямо K и L* и пишем $F : y = \varphi(x)$.
Ако $A = B$ и $K = L$, то казваме, че $y = \varphi(x)$ *е уравнение на F спрямо K*.

Забележка 4 $\varphi = \varkappa_L \circ F \circ {\varkappa_K}^{-1}$, така че φ се определя еднозначно от F.
Това е така, защото $x = \varkappa_K(P)$, $y = \varkappa_L(F(P))$ и следователно равенството $y = \varphi(x)$ е всъщност $\varkappa_L(F(P)) = \varphi(\varkappa_K(P))$, тоест $\varkappa_L \circ F = \varphi \circ \varkappa_K$, което е еквивалентно на $\varkappa_L \circ F \circ {\varkappa_K}^{-1} = \varphi$.

Пример 2 Нека A е крайномерно афинно пространство и K е афинна координатна система в A. Тогава тъждественото изображение $A \to A$, $P \mapsto P$, има спрямо K уравнение $y = x$.
Това е така, защото образът на P си е същата точка P и значи координатният му вектор спрямо K е координатният вектор на P спрямо K.

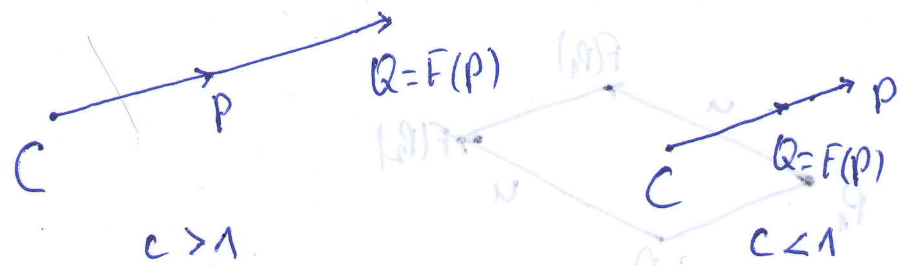
Пример 3 Нека A е крайномерно афинно пространство, моделирано върху линейното пространство U, K е афинна координатна система в A, $u \in U$ и координатният вектор на u спрямо K е s. Дефинираме $F : A \to A$ по следния начин: ако $P \in A$, то $F(P) = Q$, където $Q \in A$ е единствената точка, за която $\overrightarrow{PQ} = u$. F се нарича *транслация с вектора u* и има спрямо K уравнение $y = s + x$.



Това е така, защото ако $P(x)$, $Q(y)$, то $\overrightarrow{PQ}(y-x)$ и значи равенството $\overrightarrow{PQ} = u$ е еквивалентно на $y - x = s$, тоест на $y = s + x$.

Всяка транслация е биекция — обратното изображение на транслацията с вектора u е транслацията с вектора $-u$.
Това е така, защото от $\overrightarrow{PQ} = u$ следва $\overrightarrow{QP} = -u$.

Пример 4 Нека A е крайномерно афинно пространство, $K = Oe_1 \dots e_n$ е афинна координатна система в A, $C \in A$ има координатен вектор ζ спрямо K и $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$. Дефинираме $F : A \to A$ по следния начин: ако $P \in A$, то $F(P) = Q$, където $Q \in A$ е единствената точка, за която $\overrightarrow{CQ} = c.\overrightarrow{CP}$. F се нарича *хомотетия с център C и коефициент c* и има спрямо K уравнение $y = s + cx$, където $s = (1 - c)\zeta$.



Това е така, защото ако $P(x)$, $Q(y)$, то $\overrightarrow{CP}(x-\zeta)$, $\overrightarrow{CQ}(y-\zeta)$ и значи равенството $\overrightarrow{CQ} = c.\overrightarrow{CP}$ е еквивалентно на $y - \zeta = c(x - \zeta)$, тоест на $y = (1-c)\zeta + cx$.

Обратно, при $c \neq 1$ уравнението $y = s + cx$ е уравнение спрямо K на някоя хомотетия (а именно на тая, чийто център C има спрямо K координатен вектор $\zeta = \frac{1}{1-c} \cdot s$ и коефициентът ѝ е c).

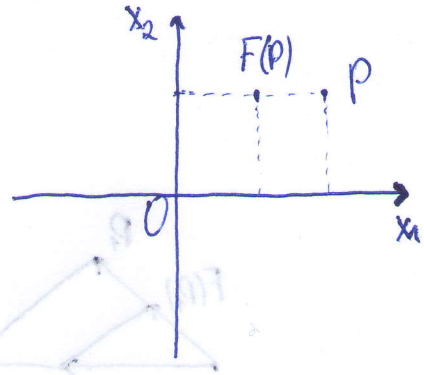
Когато $C = O$, то $\zeta = 0$ и хомотетията с център O и коефициент c има спрямо K уравнение $y = cx$.

Всяка хомотетия е биекция — обратното изображение на хомотетията с център C и коефициент c е хомотетията с център C и коефициент $\frac{1}{c}$.
Това е така, защото от $\overrightarrow{CQ} = c.\overrightarrow{CP}$ следва $\overrightarrow{CP} = \frac{1}{c} \cdot \overrightarrow{CQ}$.

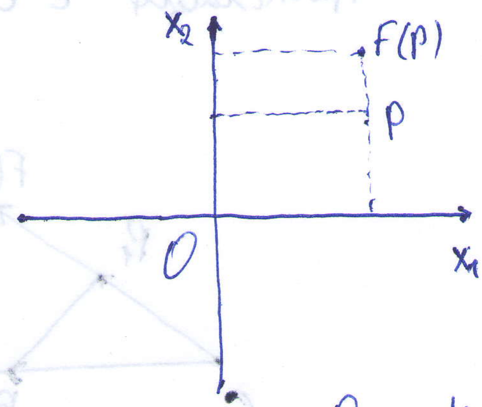
Пример 5 Нека A е крайномерно евклидово афинно пространство, $K = Oe_1 \dots e_n$ е ортонормирана координатна система в A и $d \in \mathbb{R}$, $d > 0$. Фиксираме едно $i \in \{1, \dots, n\}$. Изображението $F : A \to A$, което спрямо K има уравнения

$$F : \begin{cases} y_i = d.x_i \\ y_j = x_j \quad \text{при } j \neq i \end{cases},$$

се нарича *дилатация по i-тата координатна ос на K с коефициент d*.
(F е изображението, при което всички координати остават същите с изключение на i-тата, която се „свива“ (при $d < 1$) или „разтяга“ (при $d > 1$) с коефициент на пропорционалност d. При $d = 1$ имаме тъждественото изображение.)



дилатация по Ox_1 с $d<1$



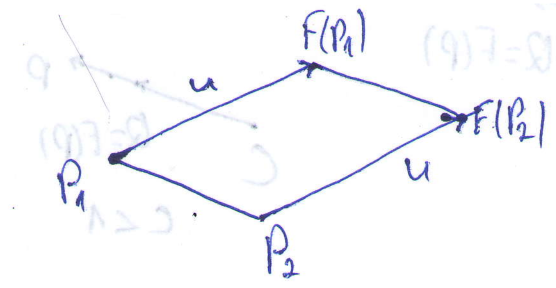
дилатация по Ox_2 с $d>1$

Уравненията на F могат да се напишат във вида $F : y = D_i x$, където D_i е диагоналната квадратна матрица от ред n, на която i-тият елемент по диагонала е d, а всички останали елементи по диагонала са 1.

Всяка дилатация е биекция — обратното изображение на дилатацията по i-тата координатна ос на K с коефициент d е дилатацията по i-тата координатна ос на K с коефициент $\frac{1}{d}$.
Това е така, защото от $y_i = d.x_i$ и $y_j = x_j$ при $j \neq i$ следва $x_i = \frac{1}{d} \cdot y_i$ и $x_j = y_j$ при $j \neq i$.

Определение 4 Нека A и B са афинни пространства, моделирани съответно върху линейните пространства U и V. Изображението $F : A \to B$ се нарича *афинно изображение*, ако съществува линейно изображение $\Phi : U \to V$ такова, че за всеки $P_1, P_2 \in A$ е изпълнено $\overrightarrow{F(P_1)F(P_2)} = \Phi\left(\overrightarrow{P_1P_2}\right)$. Ако освен това F е биекция, то F се нарича *афинен изоморфизъм* или *афинна трансформация*.

Пример 6 Тъждественото изображение и транслациите в афинно пространство са афинни изоморфизми — при тях $\Phi : U \to U$ е тъждественото изображение на U.
Това е така защото: Ако F е тъждественото изображение, то $F(P_1) = P_1$, $F(P_2) = P_2$ и следователно $\overrightarrow{F(P_1)F(P_2)} = \overrightarrow{P_1P_2}$. Ако пък F е транслация с вектора u, то $\overrightarrow{P_1F(P_1)} = u$, $\overrightarrow{P_2F(P_2)} = u$ и значи $\overrightarrow{P_1F(P_1)} = \overrightarrow{P_2F(P_2)}$, откъдето от свойството на успоредника следва $\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{F(P_1)F(P_2)}$. А че транслациите са биекции го знаем от Пример 3.
(Всъщност обяснението за транслациите покрива и тъждественото изображение, защото тъждественото изображение е транслация с вектора $u = 0$.)

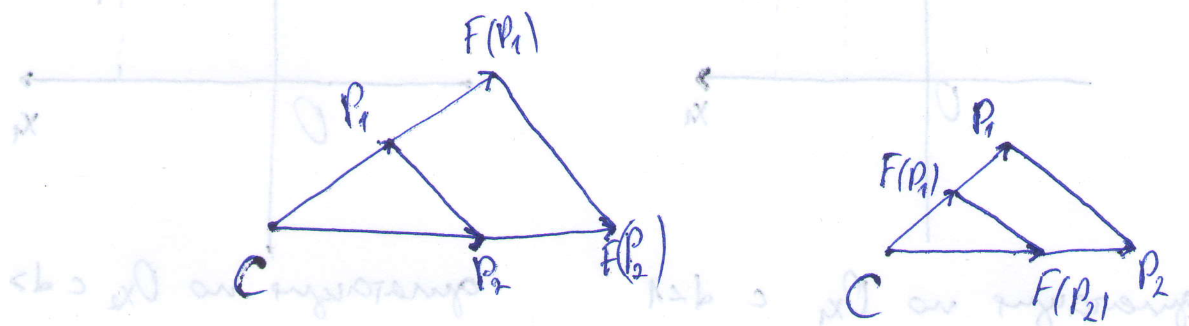


Транслация с u

Пример 7 Хомотетиите в афинно пространство са афинни изоморфизми — при тях $\Phi : U \to U$ е умножението с c.
Това е така защото $\overrightarrow{CF(P_1)} = c.\overrightarrow{CP_1}$, $\overrightarrow{CF(P_2)} = c.\overrightarrow{CP_2}$ и значи

$$\overrightarrow{F(P_1)F(P_2)} = \overrightarrow{CF(P_2)} - \overrightarrow{CF(P_1)} = c.\left(\overrightarrow{CP_2} - \overrightarrow{CP_1}\right) = c.\overrightarrow{P_1P_2}.$$

А че хомотетиите са биекции го знаем от Пример 4.

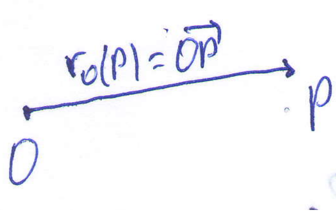


хомотетия с $c > 1$ хомотетия с $c < 1$

Пример 8 Нека A е афинно пространство, моделирано върху линейното пространство U, и $O \in A$ е фиксирана точка. Изображението *радиус-вектор с начало* O

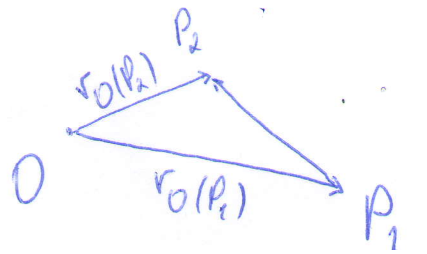
$$r_O : A \to U, \quad P \mapsto r_O(P) = \overrightarrow{OP}$$

(тоест на точка се съпоставя радиус-векторът ѝ спрямо O), е афинен изоморфизъм — съответното $\Phi : U \to U$ е тъждественото изображение на U.



Това е така защото

$$\overrightarrow{r_O(P_1)r_O(P_2)} = r_O(P_2) - r_O(P_1) = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{P_1P_2}.$$



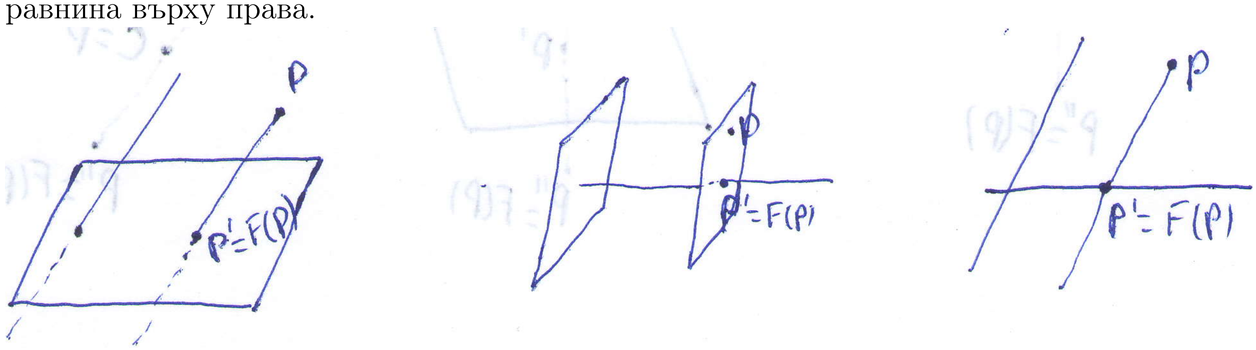
А че r_O е биекция следва от това, че за всеки вектор $u \in U$ съществува единствена точка $P \in A$, за която $\overrightarrow{OP} = u$.

Пример 9 Нека U и V са линейни пространства и $\Phi : U \to V$ е линейно изображение. Тогава, разглеждайки U и V като афинни пространства, Φ е афинно изображение, като съответното линейно изображение е Φ. При това Φ е афинен изоморфизъм тогава и само тогава, когато е линеен изоморфизъм.
Това е така защото

$$\overrightarrow{\Phi(u_1)\Phi(u_2)} = \Phi(u_2) - \Phi(u_1) = \Phi(u_2 - u_1) = \Phi\left(\overrightarrow{u_1u_2}\right).$$

При това Φ е афинен изоморфизъм $\Leftrightarrow$ Φ е биекция $\Leftrightarrow$ Φ е линеен изоморфизъм.

Пример 10 Успоредното проектиране на геометричното пространство в равнина е афинно изображение, което не е афинен изоморфизъм (тоест не е биекция). Същото важи за успоредното проектиране на геометричното пространство или геометричната равнина върху права.



Това са частни случаи на следната по-обща ситуация:

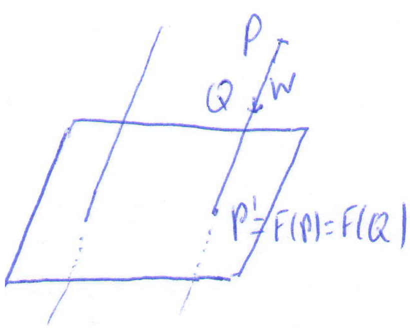
Нека A е афинно пространство, моделирано върху линейното пространство U, B е афинно подпространство на A, моделирано върху линейното подпространство V на U и W е допълнение на V в U, тоест $U = V \oplus W$. Тогава за всяка точка $P \in A$ съществува единствена точка $P' \in B$, за която $\overrightarrow{P'P} \in W$. Това се доказва аналогично на съществуването и единствеността на ортогоналната проекция, като вместо $V^\perp$ се пише W. Точката P' се нарича *проекция на P в B успоредно на W*. Така получаваме изображение $F : A \to B$, $P \mapsto P'$, което се нарича *проекция на A в B успоредно на W*. Това изображение е афинно изображение, което е афинен изоморфизъм само когато $B = A$ (и в тоя случай е тъждественото изображение).

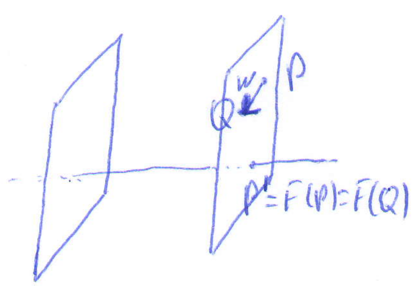
Това е така, защото: Нека $P_1, P_2 \in A$. Тогава $F(P_1), F(P_2) \in B$ и $\overrightarrow{F(P_1)P_1}, \overrightarrow{F(P_2)P_2} \in W$. От $F(P_1), F(P_2) \in B$ следва $\overrightarrow{F(P_1)F(P_2)} \in V$. Имаме

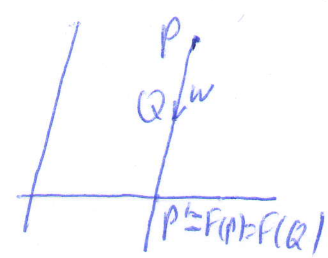
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{P_1P_2} &= \overrightarrow{P_1F(P_1)} + \overrightarrow{F(P_1)F(P_2)} + \overrightarrow{F(P_2)P_2} = -\underbrace{\overrightarrow{F(P_1)P_1}}_{\in W} + \underbrace{\overrightarrow{F(P_1)F(P_2)}}_{\in V} + \underbrace{\overrightarrow{F(P_2)P_2}}_{\in W} \\
&= \underbrace{\overrightarrow{F(P_1)F(P_2)}}_{\in V} + \underbrace{\left(-\overrightarrow{F(P_1)P_1} + \overrightarrow{F(P_2)P_2}\right)}_{\in W}.
\end{aligned}$$

Следователно $\overrightarrow{F(P_1)F(P_2)}$ е компонентата на $\overrightarrow{P_1P_2}$ във V, тоест $\overrightarrow{F(P_1)F(P_2)} = \Phi\left(\overrightarrow{P_1P_2}\right)$, където $\Phi : U \to V$ е проекцията на U във V относно разлагането $U = V \oplus W$, тоест $\Phi(u)$ е компонентата на u във V относно разлагането $U = V \oplus W$. Лесно се вижда, че Φ е линейно изображение и значи F е афинно изображение.

Ако $B \neq A$, то $V \neq U$ и следователно $W \neq \{0\}$. Нека $w \in W$, $w \neq 0$. Нека $P \in A$ е произволна точка и $Q \in A$ е точката, за която $\overrightarrow{PQ} = w$. Тъй като $w \neq 0$, имаме $Q \neq P$. Нека $F(P) = P'$. Значи $P' \in B$ и $\overrightarrow{P'P} \in W$. Тогава $P' \in B$ и $\overrightarrow{P'Q} = \underbrace{\overrightarrow{P'P}}_{\in W} + \underbrace{\overrightarrow{PQ}}_{\in W} \in W$. Следователно $F(Q) = P'$. Значи $P \neq Q$, но $F(P) = F(Q)$. Това означава, че F не е биекция и следователно не е афинен изоморфизъм.

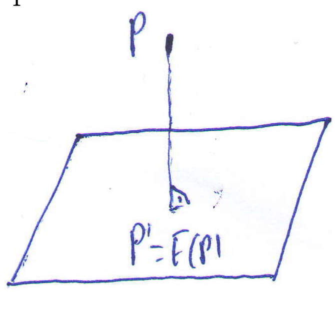


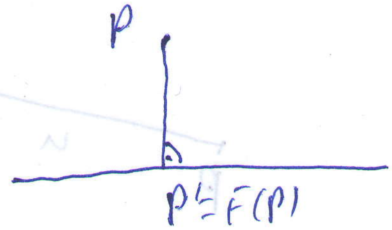




Ако $B = A$, то $V = U$ и следователно $W = \{0\}$. Тогава за произволна точка $P \in A$ имаме $P \in B$ и $\overrightarrow{PP} = 0 \in W$. Значи $F(P) = P$, тоест F е тъждественото изображение на A и следователно е афинен изоморфизъм.

Частен случай на успоредна проекция е ортогоналната проекция върху афинно подпространство B на крайномерно евклидово афинно пространство A (в тоя случай $W = V^{\perp}$). Значи ортогоналната проекция също е афинно изображение, което е афинен изоморфизъм само когато $B = A$ (и в тоя случай е тъждественото изображение).





Твърдение 3 *Нека A и B са афинни пространства, моделирани съответно върху линейните пространства U и V, а $F : A \to B$ е афинно изображение със съответно линейно изображение $\Phi : U \to V$.*

1. *Нека $O \in A$ е произволна точка. Тогава $r_{F(O)} \circ F = \Phi \circ r_O$.*

2. *F е афинен изоморфизъм $\Leftrightarrow$ Φ е линеен изоморфизъм.*

Доказателство:

1. За $P \in A$ имаме $\overrightarrow{F(O)F(P)} = \Phi\left(\overrightarrow{OP}\right)$, тоест $r_{F(O)}(F(P)) = \Phi(r_O(P))$. Следователно $r_{F(O)} \circ F = \Phi \circ r_O$.

2. От $r_{F(O)} \circ F = \Phi \circ r_O$ и това, че r_O и $r_{F(O)}$ са биекции (това го видяхме в Пример 8) следва, че F е биекция $\Leftrightarrow$ Φ е биекция. Следователно F е афинен изоморфизъм $\Leftrightarrow$ Φ е линеен изоморфизъм. $\square$

Следствие 1 *Нека A и B са крайномерни афинни пространства. Тогава съществува афинен изоморфизъм $F : A \to B$ $\Leftrightarrow$ $\dim A = \dim B$.*

Доказателство: Нека направляващите пространства на A и B са съответно U и V.

Нека $F : A \to B$ е афинен изоморфизъм. Тогава от 2. на Твърдение 3 следва, че съответното линейно изображение $\Phi : U \to V$ е линеен изоморфизъм. Следователно $\dim U = \dim V$, тоест $\dim A = \dim B$. С това е доказана правата посока.

Обратно, нека $\dim A = \dim B$. Значи $\dim U = \dim V$, така че съществува линеен изоморфизъм $\Phi : U \to V$. Фиксираме произволни точки $O \in A$ и $P \in B$ и дефинираме изображението $F : A \to B$ чрез равенството $F = {r_P}^{-1} \circ \Phi \circ r_O$. Тогава $r_P \circ F = \Phi \circ r_O$. Значи за всяко $Q \in A$ имаме $r_P(F(Q)) = \Phi(r_O(Q))$, тоест $\overrightarrow{PF(Q)} = \Phi\left(\overrightarrow{OQ}\right)$. Тогава за $Q_1, Q_2 \in A$ получаваме

$$\overrightarrow{F(Q_1)F(Q_2)} = \overrightarrow{PF(Q_2)} - \overrightarrow{PF(Q_1)} = \Phi\left(\overrightarrow{OQ_2}\right) - \Phi\left(\overrightarrow{OQ_1}\right) = \Phi\left(\overrightarrow{OQ_2} - \overrightarrow{OQ_1}\right) = \Phi\left(\overrightarrow{Q_1Q_2}\right).$$

Следователно F е афинно изображение със съответно линейно изображение Φ. От 2. на Твърдение 3 тогава следва, че F е афинен изоморфизъм. С това е доказана и обратната посока. $\square$

Теорема 3 *Нека A и B са крайномерни афинни пространства, моделирани съответно върху линейните пространства U и V, а $K = Oe_1 \dots e_m$ и $L = Pf_1 \dots f_n$ са афинни координатни системи съответно в A и B. Тогава:*

1. *Изображението $F : A \to B$ е афинно $\Leftrightarrow$ уравнението на F спрямо K и L е от вида $y = s + Tx$. При това s е координатният вектор на $F(O)$ спрямо L, а T е матрицата на съответното на F линейно изображение $\Phi : U \to V$ спрямо базисите $e = (e_1, \dots, e_m)$ на U и $f = (f_1, \dots, f_n)$ на V.*

2. *Афинното изображение $F : A \to B$ е афинен изоморфизъм $\Leftrightarrow$ матрицата T в 1. е обратима.*

Доказателство:

1. Нека F е афинно изображение. Нека координатният вектор на $F(O)$ спрямо L е s, а матрицата на съответното на F линейно изображение $\Phi : U \to V$ спрямо базисите $e = (e_1, \ldots, e_m)$ на U и $f = (f_1, \ldots, f_n)$ на V е T. Нека координатният вектор спрямо K на $Q \in A$ е x, а координатният вектор на $F(Q)$ спрямо L е y. Следователно координатният вектор спрямо базиса e на $\overrightarrow{OQ}$ е $x - 0 = x$, а координатният вектор спрямо базиса f на $\overrightarrow{F(O)F(Q)}$ е $y - s$. Тогава от $\overrightarrow{F(O)F(Q)} = \Phi\left(\overrightarrow{OQ}\right)$ следва $y - s = Tx$, откъдето получаваме $y = s + Tx$. С това са доказани правата посока и второто изречение.

   Обратно, нека уравнението на F спрямо K и L е $y = s + Tx$. Нека $\Phi : U \to V$ е линейното изображение, чиято матрица спрямо базисите e и f е T. Нека точките $Q_1, Q_2 \in A$ имат координатни вектори спрямо K съответно x_1, x_2. Тогава точките $F(Q_1), F(Q_2) \in B$ имат координатни вектори спрямо L съответно y_1, y_2, където $y_1 = s+Tx_1$, $y_2 = s+Tx_2$. Векторът $\overrightarrow{Q_1Q_2}$ има спрямо координатният базис e на K координатен вектор $x_2 - x_1$, а векторът $\overrightarrow{F(Q_1)F(Q_2)}$ има спрямо координатният базис f на L координатен вектор $y_2 - y_1 = T(x_2 - x_1)$. Тъй като T е матрицата на Φ спрямо e и f, това означава, че $\overrightarrow{F(Q_1)F(Q_2)} = \Phi\left(\overrightarrow{Q_1Q_2}\right)$. Следователно F е афинно изображение със съответно линейно изображение Φ. С това е доказана и обратната посока.

2. От 2. на Твърдение 3 следва, че
   афинното изображение $F : A \to B$ е афинен изоморфизъм
   $\Leftrightarrow$ съответното му линейно изображение $\Phi : U \to V$ е линеен изоморфизъм
   $\Leftrightarrow$ матрицата T на Φ спрямо базисите e и f е обратима. $\square$

Пример 11 Дилатациите в крайномерно евклидово афинно пространство са афинни изоморфизми.
Това е така, защото от вида на уравнението им от Пример 5 и 1. на Теорема 3 следва, че са афинни изображения, а че са биекции също го знаем от Пример 5. Последното следва и от 2. на Теорема 3, защото за матрицата D_i от уравнението им от Пример 5 имаме $\det D_i = d > 0$ и значи D_i е обратима.

Пример 12 Нека A е n-мерно афинно пространство и K е афинна координатна система в A. Тогава координатното изображение $\varkappa_K : A \to \mathbb{R}^n$ е афинен изоморфизъм. Това следва от Теорема 3, защото уравнението му спрямо K и стандартната координатна система K^0 на $\mathbb{R}^n$ е $y = x$.

Определение 5 Нека A и B са евклидови афинни пространства. Изображението $F : A \to B$ се нарича *еднаквост* или *метрична трансформация* или *изометрия*, ако е биекция и запазва разстоянието между точките, тоест ако за всеки $P_1, P_2 \in A$ е изпълнено $|F(P_1)F(P_2)| = |P_1P_2|$.

Забележка 5 В горното определение „биекция“ може да се замени със „сюрекция“, защото от $|F(P_1)F(P_2)| = |P_1P_2|$ следва, че F е инекция.
Това е така, защото ако $F(P_1) = F(P_2)$, то $0 = |F(P_1)F(P_2)| = |P_1P_2|$ и следователно $P_1 = P_2$.

Пример 13 В евклидово афинно пространство тъждественото изображение, транслациите и изображението радиус-вектор са еднаквости.
Това е така, защото: За тъждественото изображение е очевидно. Ако F е транслация, то в Пример 6 видяхме, че $\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{F(P_1)F(P_2)}$ (от свойството на успоредника) и следователно $|P_1P_2| = |F(P_1)F(P_2)|$. А за изображението радиус-вектор в Пример 8 също видяхме, че $\overrightarrow{r_O(P_1)r_O(P_2)} = \overrightarrow{P_1P_2}$ и следователно $|r_O(P_1)r_O(P_2)| = |P_1P_2|$.

Теорема 4 *Нека A и B са крайномерни евклидови афинни пространства, а K и L са ортонормирани координатни системи съответно в A и B. Тогава изображението $F : A \to B$ е еднаквост $\Leftrightarrow$ уравнението на F спрямо K и L е от вида $y = s + Tx$, където матрицата T е ортогонална (и следователно $\dim A = \dim B$).*

Доказателството на тая теорема оставяме за следващия път.

Пример 14 От Теорема 4 още веднъж се вижда, че тъждественото изображение и транслациите в крайномерно евклидово афинно пространство са еднаквости, защото те имат уравнение от вида $y = s + Tx$, където $T = E$.

Пример 15 Нека A е n-мерно евклидово афинно пространство и K е ортонормирана координатна система в A. Тогава координатното изображение $\varkappa_K : A \to \mathbb{R}^n$ е еднаквост.
Това следва от Теорема 4, защото уравнението му спрямо K и стандартната координатна система K^0 на $\mathbb{R}^n$ е $y = x$ и K^0 е ортонормирана.