1. Детерминирани крайни автомати.

Определение 2.1. Детерминиран краен автомат е петорка $\mathcal{A} = \langle \Sigma, Q, q_{\mathtt{start}}, \delta, F \rangle$, където

- Σ е азбука;
- Q е крайно множество от състояния;
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ е тотална функция, която ще наричаме *функция на преходите*;
- $q_{\mathtt{start}} \in Q$ е начално състояние;
- $F \subseteq Q$ е множеството от финални състояния

Нека имаме една дума $\alpha \in \Sigma^\star$, $\alpha = a_0 a_1 \cdots a_{n-1}$. Казваме, че α се **разпознава** от автомата $\mathcal{A}$, ако съществува редица от състояния $q_0, q_1, q_2, \ldots, q_n$, такива че:

- $q_0 = q_{\mathtt{start}}$, началното състояние на автомата;
- $\delta(q_i, a_i) = q_{i+1}$, за всяко $i = 0, \ldots, n-1$;
- $q_n \in F$.

2. Недетерминирани крайни автомати.

Определение 2.2. Недетерминиран краен автомат представлява петорка

$$\mathcal{N} = \langle \Sigma, Q, Q_{\mathtt{start}}, \Delta, F \rangle,$$

- Q е крайно множество от състояния;
- Σ е крайна азбука;
- $\Delta : Q \times \Sigma \to \mathscr{P}(Q)$ е функцията на преходите. Да обърнем внимание, че е възможно за някоя двойка (q, a) да няма нито един преход в автомата. Това е възможно, когато $\Delta(q, a) = \emptyset$;
- $Q_{\mathtt{start}} \subseteq Q$ е множество от начални състояния;
- $F \subseteq Q$ е множеството от финални състояния.

Удобно е да разширим функцията на преходите $\Delta : Q \times \Sigma \to \mathscr{P}(Q)$ до функцията $\Delta^\star : \mathscr{P}(Q) \times \Sigma^\star \to \mathscr{P}(Q)$, която дефинираме за произволно $R \subseteq Q$ и $\alpha \in \Sigma^\star$ по следния начин:

- Ако $\alpha = \varepsilon$, то $\Delta^\star(R, \varepsilon) \stackrel{\text{деф}}{=} R$;
- Ако $\alpha = \beta a$, то $\Delta^\star(R, \beta a) \stackrel{\text{деф}}{=} \bigcup\{\Delta(p, a) \mid p \in \Delta^\star(R, \beta)\}$.

$$\boxed{\mathcal{L}(\mathcal{N}) \stackrel{\text{деф}}{=} \{\omega \in \Sigma^\star \mid \Delta^\star(Q_{\mathtt{start}}, \omega) \cap F \neq \emptyset\}.}$$

3. Представяне на всеки недетерминиран краен автомат с детерминиран (с доказателство).

Твърдение 2.6. За всеки две думи $\alpha, \beta \in \Sigma^\star$ и всяко $R \subseteq Q$,

$$\Delta^\star(R, \alpha\beta) = \Delta^\star(\Delta^\star(R, \alpha), \beta).$$

Доказателство. Индукция по дължината на β.

- Нека $|\beta| = 0$, т.е. $\beta = \varepsilon$. Тогава:

$$\begin{aligned} \Delta^\star(R, \alpha\varepsilon) &= \Delta^\star(R, \alpha) && \text{// } \alpha\varepsilon = \alpha \\ &= \Delta^\star(\Delta^\star(R, \alpha), \varepsilon). && \text{// деф. на } \Delta^\star \end{aligned}$$

- Да приемем, че твърдението е вярно за думи β с дължина n.

- Нека $|\beta| = n + 1$, т.е. $\beta = \gamma b$, където $|\gamma| = n$.

$$\begin{aligned} \Delta^\star(R, \alpha\gamma b) &= \bigcup\{\Delta(p, b) \mid p \in \Delta^\star(R, \alpha\gamma)\} && \text{// от деф. на } \Delta^\star \\ &= \bigcup\{\Delta(p, b) \mid p \in \Delta^\star(\underbrace{\Delta^\star(R, \alpha)}_{U}, \gamma))\} && \text{// от И.П. за } \gamma \\ &= \bigcup\{\Delta(p, b) \mid p \in \Delta^\star(U, \gamma)\} && \text{// нека } U \overset{\text{деф}}{=} \Delta^\star(R, \alpha) \\ &= \Delta^\star(U, \gamma b) && \text{// от деф. на } \Delta^\star \\ &= \Delta^\star(\Delta^\star(R, \alpha), \gamma b) && \text{// } U = \Delta^\star(R, \alpha) \end{aligned}$$

□

Теорема 2.2 (Рабин-Скот [RS59]). За всеки недетерминиран краен автомат $\mathcal{N}$ съществува еквивалентен на него детерминиран краен автомат $\mathcal{D}$, т.е.

$$\mathcal{L}(\mathcal{N}) = \mathcal{L}(\mathcal{D}).$$

Упътване. Нека $\mathcal{N} = \langle \Sigma, Q, Q_{\mathtt{start}}, \Delta, F \rangle$. Ще построим детерминиран автомат

$$\mathcal{D} = (Q', \Sigma, \delta, q_{\mathtt{start}}, F'),$$

за който $\mathcal{L}(\mathcal{N}) = \mathcal{L}(\mathcal{D})$. Конструкцията е следната:

- $Q' = \{\ulcorner R \urcorner \mid R \subseteq Q\}$;
- За произволна буква $a \in \Sigma$ и произволно $R \subseteq Q$,
$$\delta(\ulcorner R \urcorner, a) \stackrel{\text{деф}}{=} \ulcorner \Delta^\star(R, a) \urcorner.$$
- $q_{\mathtt{start}} = \ulcorner Q_{\mathtt{start}} \urcorner$;
- $F' \stackrel{\text{деф}}{=} \{\ulcorner R \urcorner \in Q' \mid R \cap F \neq \emptyset\}$.

Ще докажем, че за произволна дума α и произволно множество $R \subseteq Q$ е изпълнено, че:

$$\ulcorner \Delta^\star(R, \alpha) \urcorner = \delta^\star(\ulcorner R \urcorner, \alpha). \tag{2.6}$$

Това ще направим с индукция по дължината на думата α.

- Ако $|\alpha| = 0$, т.е. $\alpha = \varepsilon$, то е ясно от дефиницията на $\Delta^\star$ и $\delta^\star$, т.е. за всяко $R \subseteq Q$ е изпълнено, че:
$$\ulcorner \Delta^\star(R, \varepsilon) \urcorner = \ulcorner R \urcorner = \delta^\star(\ulcorner R \urcorner, \varepsilon).$$
- Да приемем, че (2.6) е изпълнено за думи α с дължина n, т.е.
$$(\forall \alpha \in \Sigma^n)(\forall R \subseteq Q)[\,\ulcorner \Delta^\star(R, \alpha) \urcorner = \delta^\star(\ulcorner R \urcorner, \alpha)\,].$$
- Нека сега α има дължина $n+1$, т.е. $\alpha = \beta a$, където $|\beta| = n$ и $a \in \Sigma$.
$$\begin{aligned}
\delta^\star(\ulcorner R \urcorner, \beta a) &= \delta(\delta^\star(\ulcorner R \urcorner, \beta a)) && \text{// деф. на } \delta^\star \\
&= \delta(\ulcorner \Delta^\star(R, \beta) \urcorner, a) && \text{// от И.П. за } \beta \\
&= \ulcorner \Delta^\star(\Delta^\star(R, \beta), a) \urcorner && \text{// от деф. на } \delta \\
&= \ulcorner \Delta^\star(R, \beta a) \urcorner. && \text{// от \textit{Твърдение} 2.6}
\end{aligned}$$

4. Регулярни операции.

5. Доказателство за затвореност на автоматните езици относно регулярните операции.

6. Регулярни езици.

7. Формулировка и доказателство на теоремата на Клини.

8. Формулировка и доказателство на лемата разрастване за регулярни езици (uvw-лема).

9. Примери за нерегулярни езици.

10. Формулировка и доказателство на теоремата на Майхил -Нероуд.

11. Алгоритъм за конструиране на минимален краен детерминиран тотален автомат, еквивалентен на даден детерминиран краен автомат.