ТЕМА №22

Фрактали

Съдържание

Тема 22: Фрактали

- Увод във фракталите
- Геометрични методи
- Алгебрични методи

Увод във фракталите

Какво са фракталите?

Обикновени обекти в геометрията

- Точка (0D), отсечка (1D), квадрат (2D), куб (3D), тесеракт (4D), …

Фракталът има дробна размерност

- Множество на Кантор (≈0.63D)
- Крива на Кох (≈1.26D)
- Драконова крива (≈1.52D)
- Гъба на Менгер (≈2.73D)

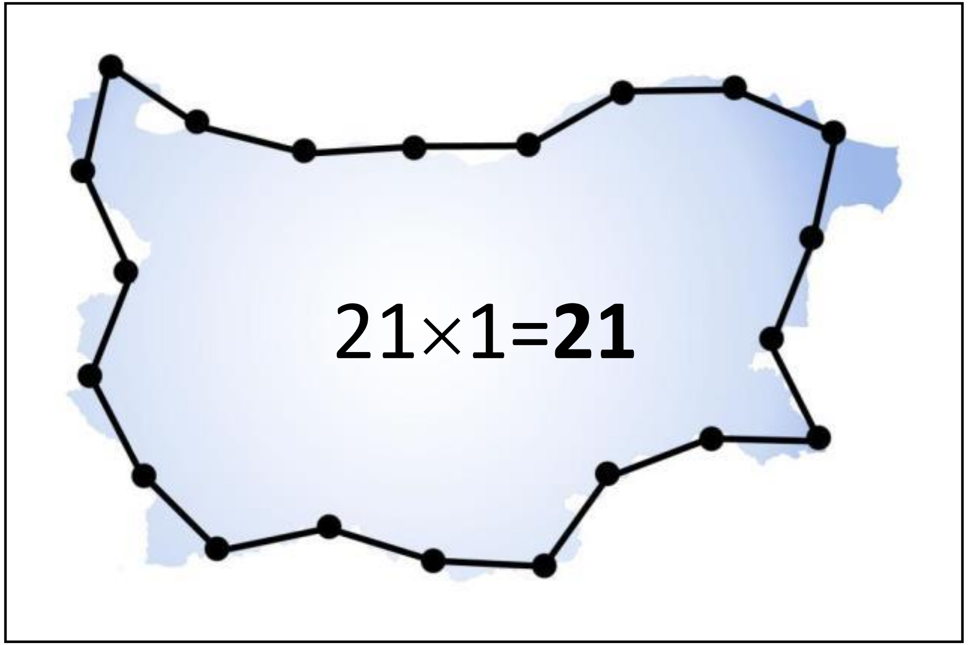
Кошмарът за интуицията

Обиколка на Великобритания

- Беноà Манделброт (Benoît Mandelbrot) описва парадокса на крайбрежната ивица
- Интуицията казва, че колкото с по-малка мярка мерим, толкова по-точен е резултатът
- Фракталите казват: Цъ!

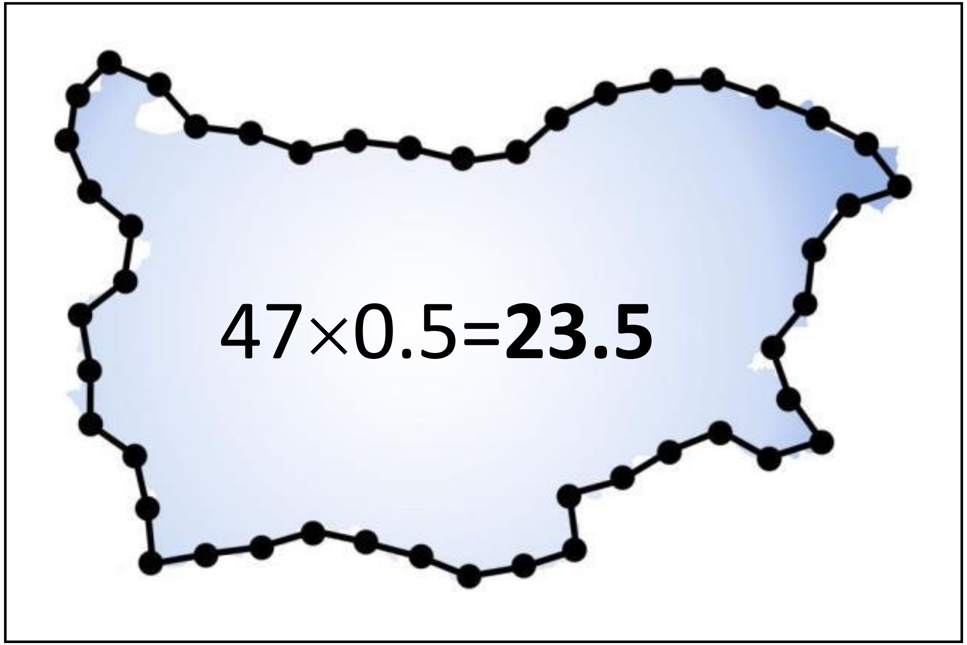
Да проверим

Започваме с разкрач 1



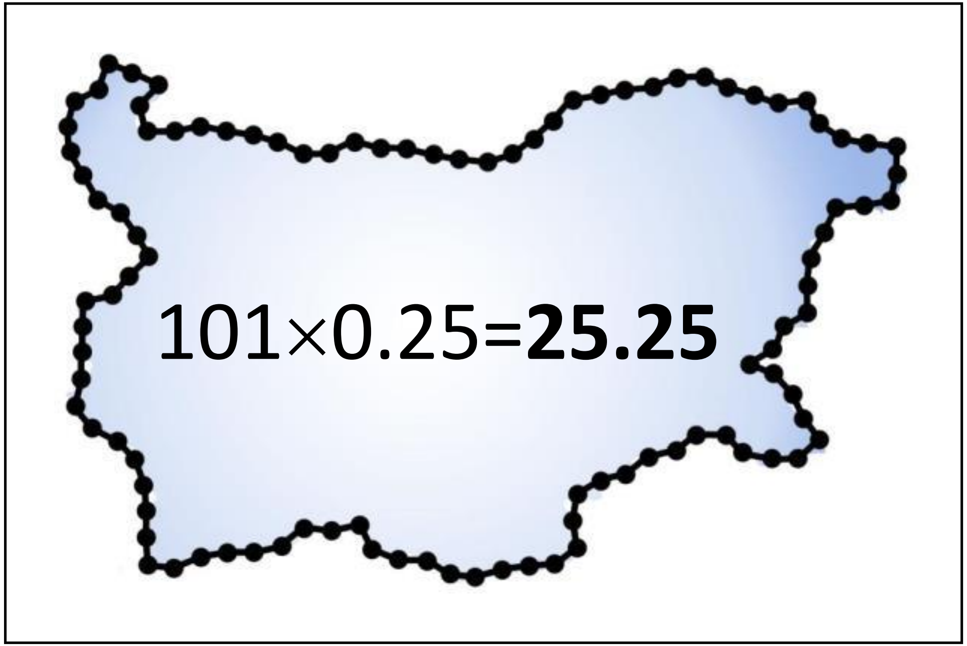
Да сметнем с разкрач 1/2

– Очакваме (с основание) измерването да е по-точно



Сега с разкрач 1/4

– Трето измерване, трети резултат
– Дали изобщо е сходящ?



А с разкрач 1/8?

- Четвърто измерване

Нямам нерви за него

Оказва се, че

- Колкото по-точно измерваме, толкова по-голям резултат ще получаваме
- Практически нито един от резултатите не е верен
- Може да получим каквато си поискаме обиколка, стига да подберем подходящ разкрач

Пак за кошмара

- **За 2D фракталите е нормално**
  - Да имат крайно лице
  - Безкраен периметър
- **Аналогично за 3D фракталите**
  - Да имат краен обем
  - С безкрайно лице на повърхнината
- **Не може да се боядиса фрактално яйце**
  - Но може да се изяде

Архангел Гавраил

Тръбата на Архангел Гавраил

- Изследвана от Торичели – ученик на Галилео
- Ротационно тяло с профил
  на хипербола $y(x) = \frac{1}{x}$
- Има краен обем, но…
  има и безкрайно лице

Светът около нас

Всичко около нас е фрактали

- Всъщност приближения на фрактали, доколкото позволява физическата структура
- Облаци, земя, дървета, светкавица
- Рояк мушици около гнила кайсия (или смокиня)
- Броколи (2.66D), човешки бял дроб (2.97D) и разклонения на кръвоносната система

Динамични системи

Светът около нас и фракталите

- Динамични системи
- Краен брой примитивни обекти, най-често един
- Прости правила, повтарящи се многократно

Характеристики

Характеристики на фракталите

- Безкрайна вложеност на детайли
  (ама наистина безкрайна)
- Самоподобие на всички нива
- Силна връзка между класическата геометрия и теорията на хаоса
- Използват се за генериране на „естествени“ обекти и за компресиране на изображения

Генериране на фрактали

Два основни подхода

- Геометрични методи с рекурсивни форми и безкрайно вложени деформации
- Алгебрични методи с многократни итерации на комплексни числа

Геометрични методи

Геометрични методи

Чрез „раздробяващи“ деформации

- Снежинка на Кох (*Koch*)
- Драконова крива
- Планински масив

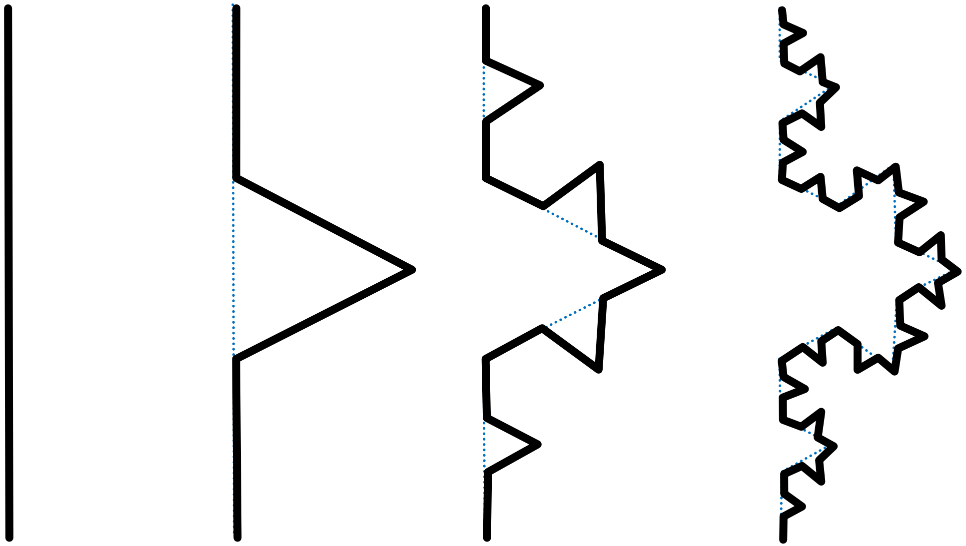
Чрез размножаване и наслагване

- Питагорово дърво
- Папратово листо

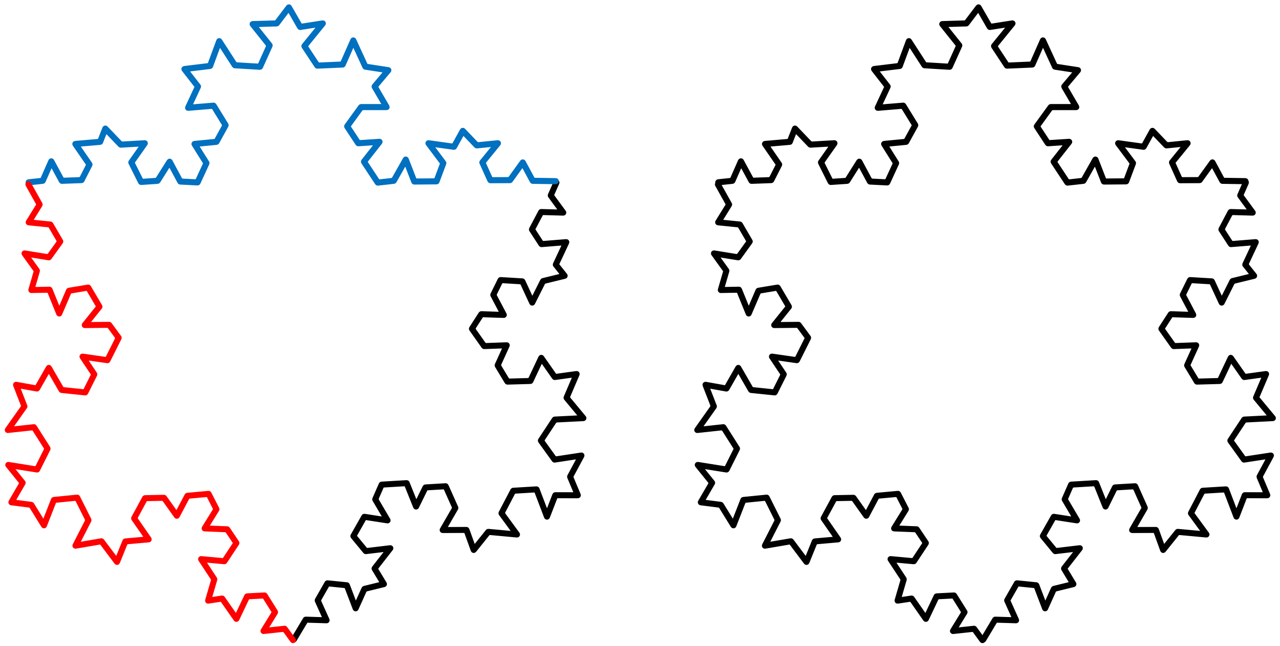
Снежинка на Кох

Процедура на получаване

– Крива на Кох

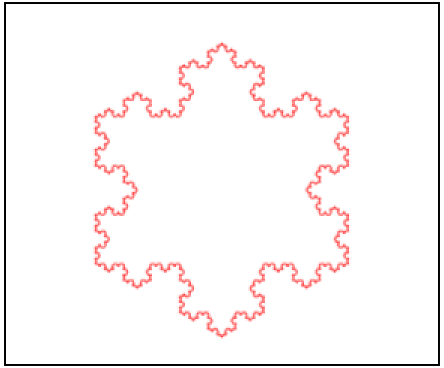


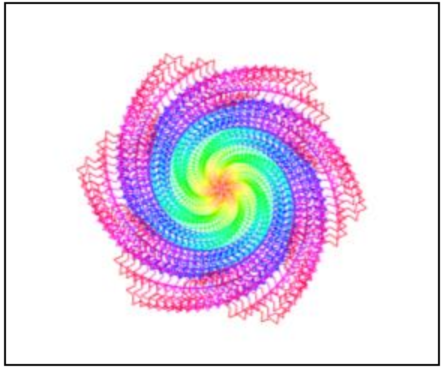
– Снежинка на Кох

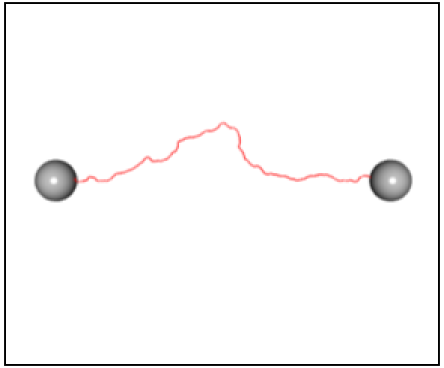


Примери

- Снежинка на Кох
- Анимация със снежинки на Кох
- Мълния на Кох



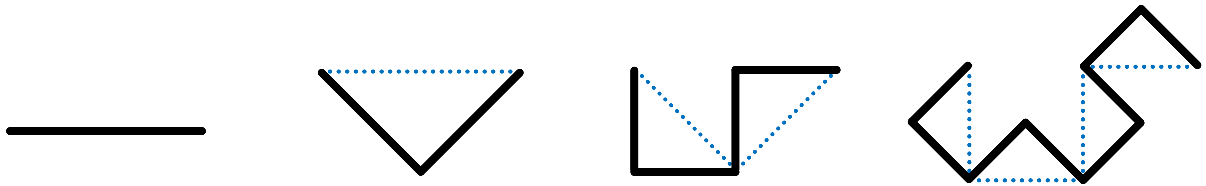




Драконова крива

Процедура на получаване

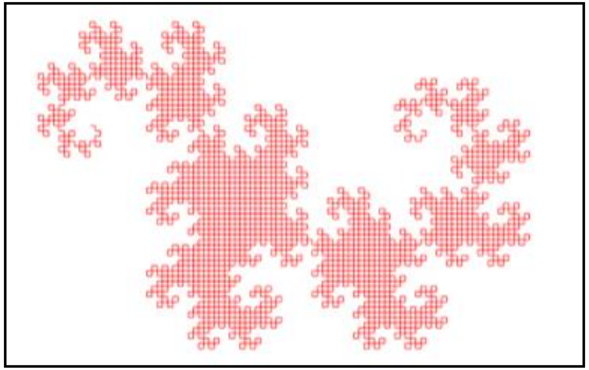
- Заменя се отсечка-хипотенуза с отсечки-катети

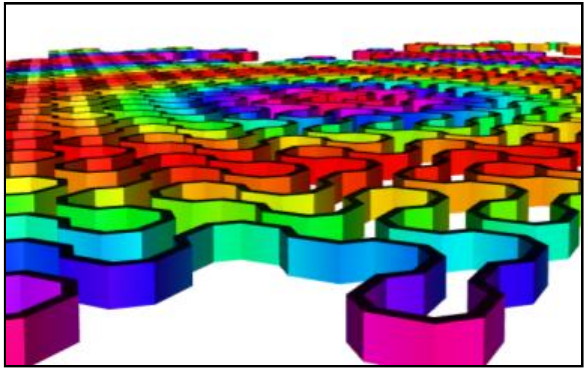


- Драконовата крива запълва 1/4 от равнината

Демонстрация

- Драконова крива
- Драконов лабиринт
  (правите ъгли са скосени леко, за да има проходимост)

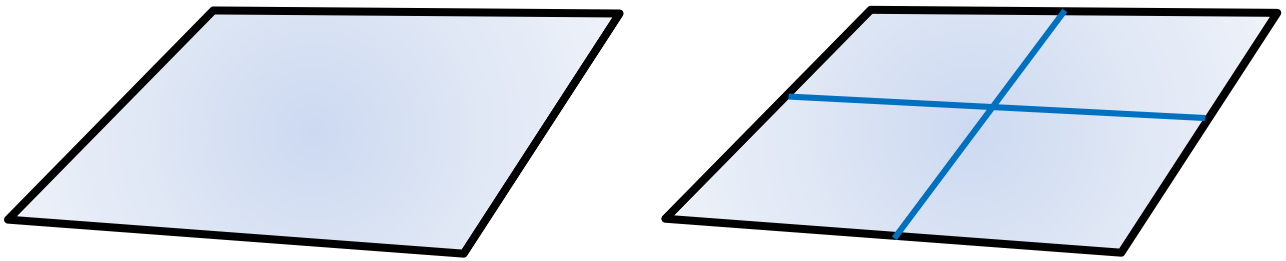




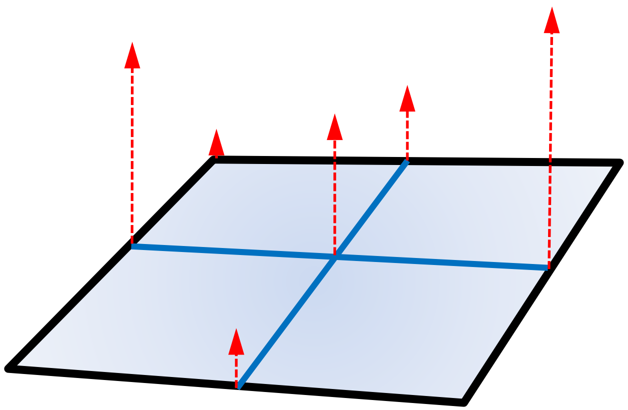
Планински масив

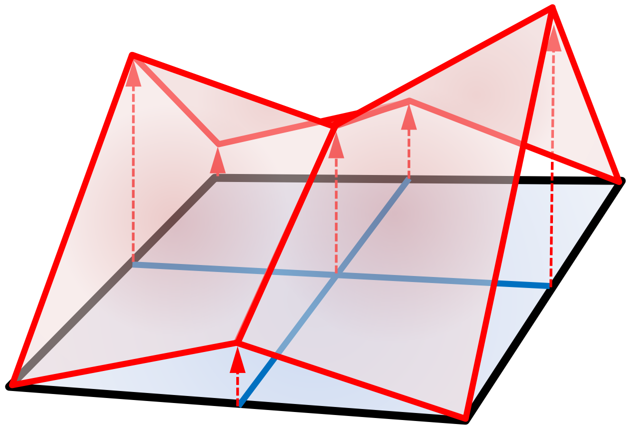
Генериране на случаен терен

- Планински терен, естествен на вид
- Четириъгълник за начален примитив
- Разделяме го на 4 четириъгълника



- Издигаме (или спускаме) върховете на случайно разстояние
- Актуализираме новите „четириъгълници“
- Повтаряме същата процедура с тях

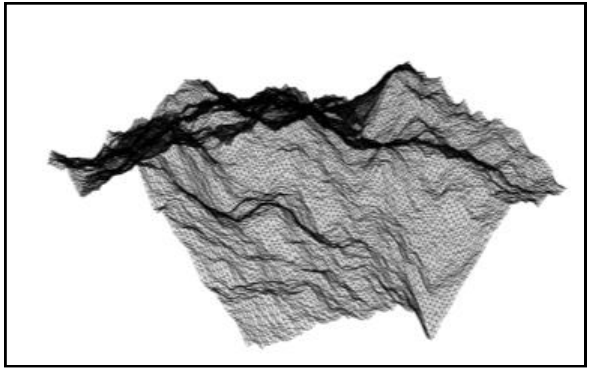


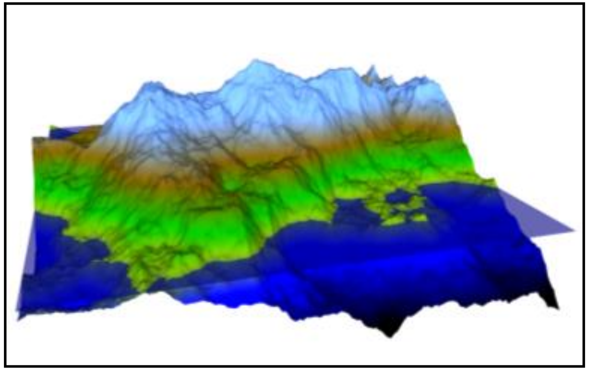


Пример с планина

Основни идеи

- Раздробяваме по квадрат
- Оцветяваме според височината
- Осветяваме според ориентацията

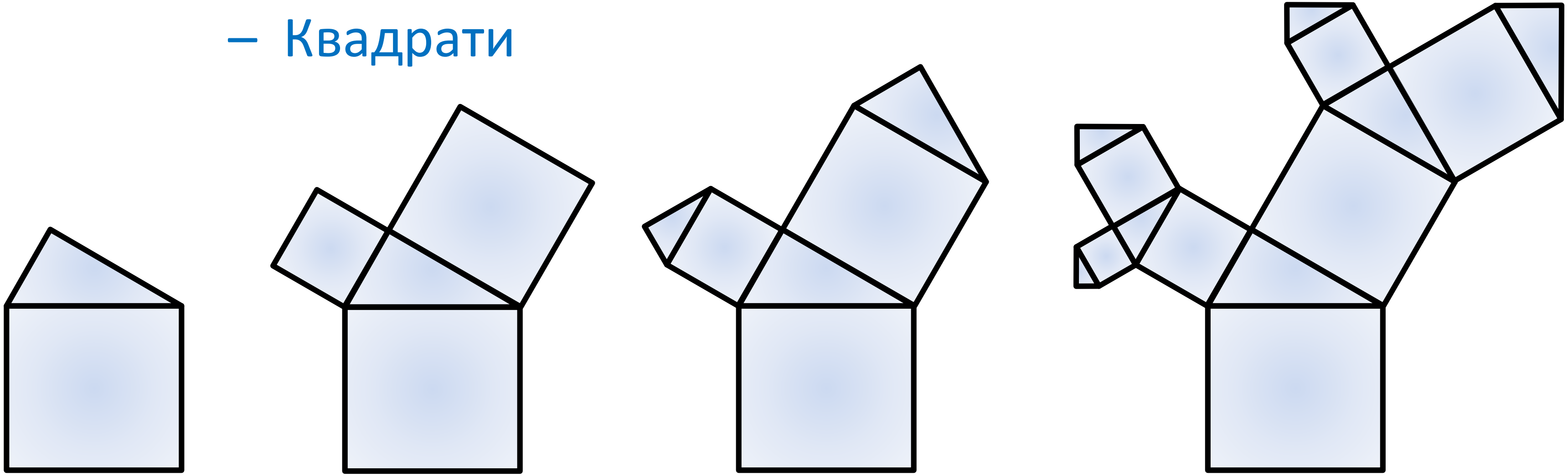




Питагорово дърво

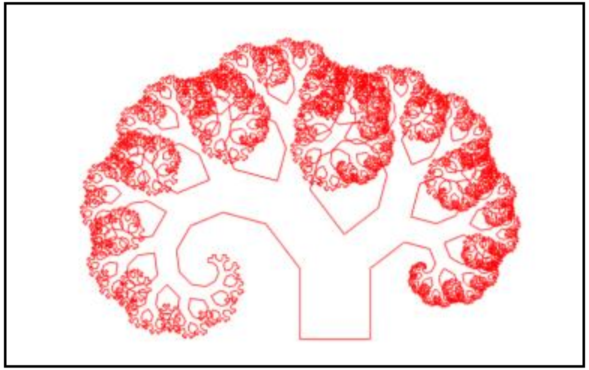
Основни елементи

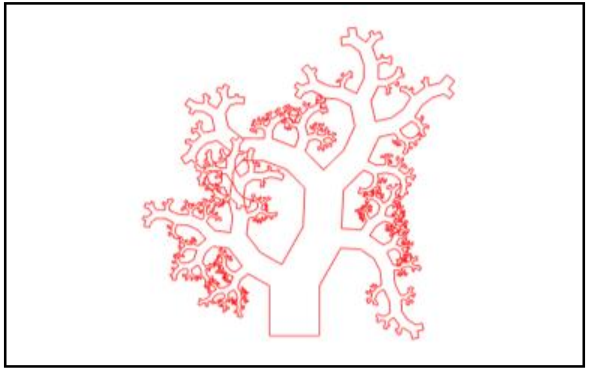
- Правоъгълни триъгълници
- Квадрати



Според ъгъла в триъгълника

- При константен ъгъл дървото е наклонено
- При случаен ъгъл то приема коралова структура

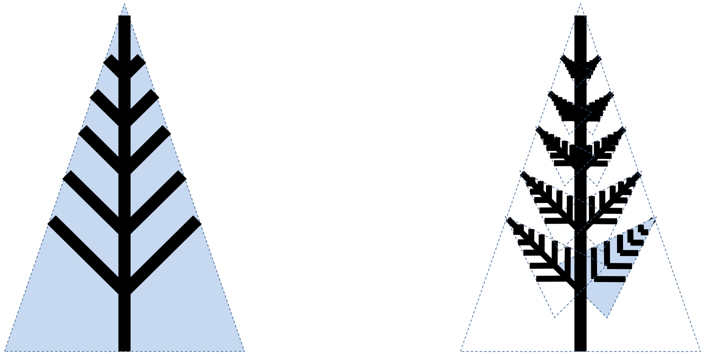




Папратово листо

Рекурсивна фигура

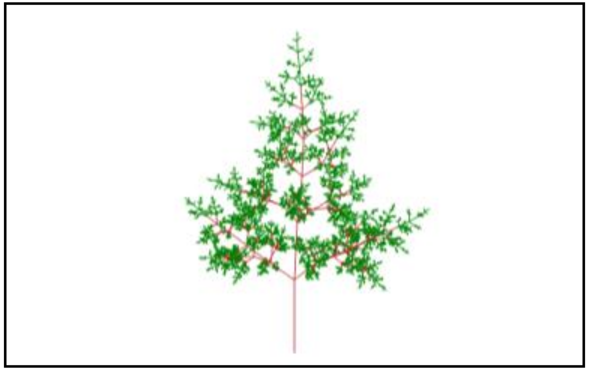
- Частите на листото наподобяват цялото
- Огъване чрез ъгъл между два сегмента



Примери

– Папратово листо с едни и същи междинни ъгли във всеки възел

– Широколистно дърво със случайни ъгли
(иначе структурата си е на папратово листо)



Алгебрични методи

Алгебрични методи

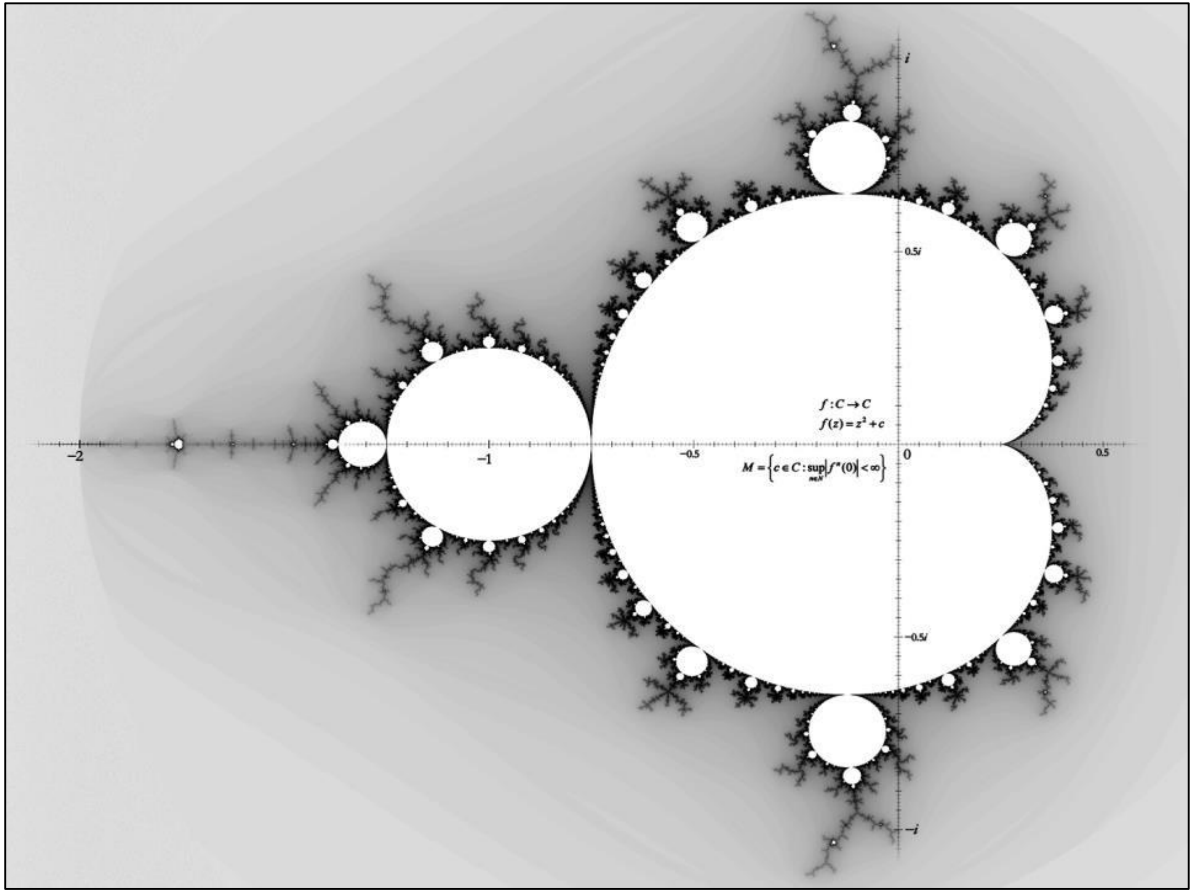
Основна идея

- Проста рекурентна връзка описваща някаква динамична система $z_i = f(z_{i-1})$
- Прилага се многократно $\{z_0, z_1, \ldots z_n, \ldots z_\infty, \ldots\}$
- Изследва се поведението ѝ
- Често резултатите са непредсказуеми

Беноа Манделброт

История

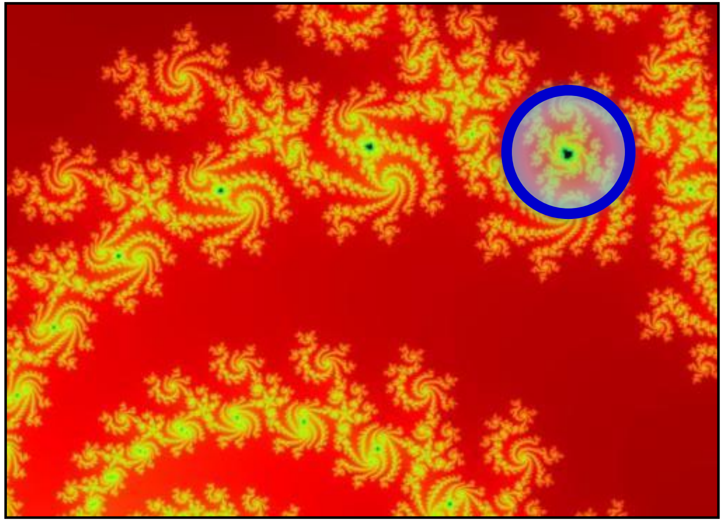
- За първи път в света използва компютър за визуализиране на поведението на динамична система
- Въвежда думата *фрактал*
  (от латински *fractus – счупен*)
- Открива фрактал, наречен по-късно *Множество на Манделброт*

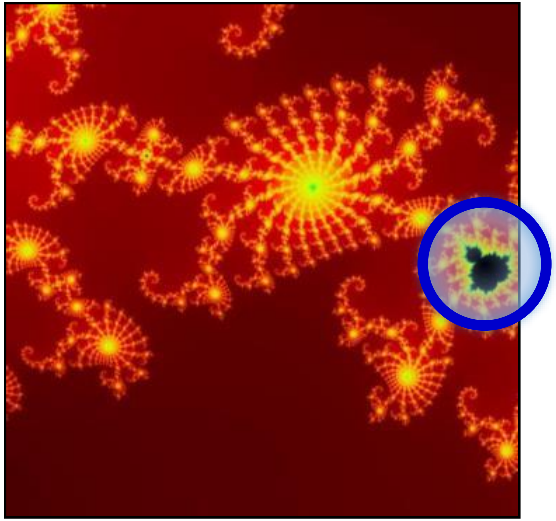

i
$0.5i$
$f: C \to C$
$f(z) = z^2 + c$
-2
-1
-0.5
0
0.5
$M = \left\{ c \in C : \sup_{n \in N} \left| f^n(0) \right| < \infty \right\}$
$-0.5i$
$-i$

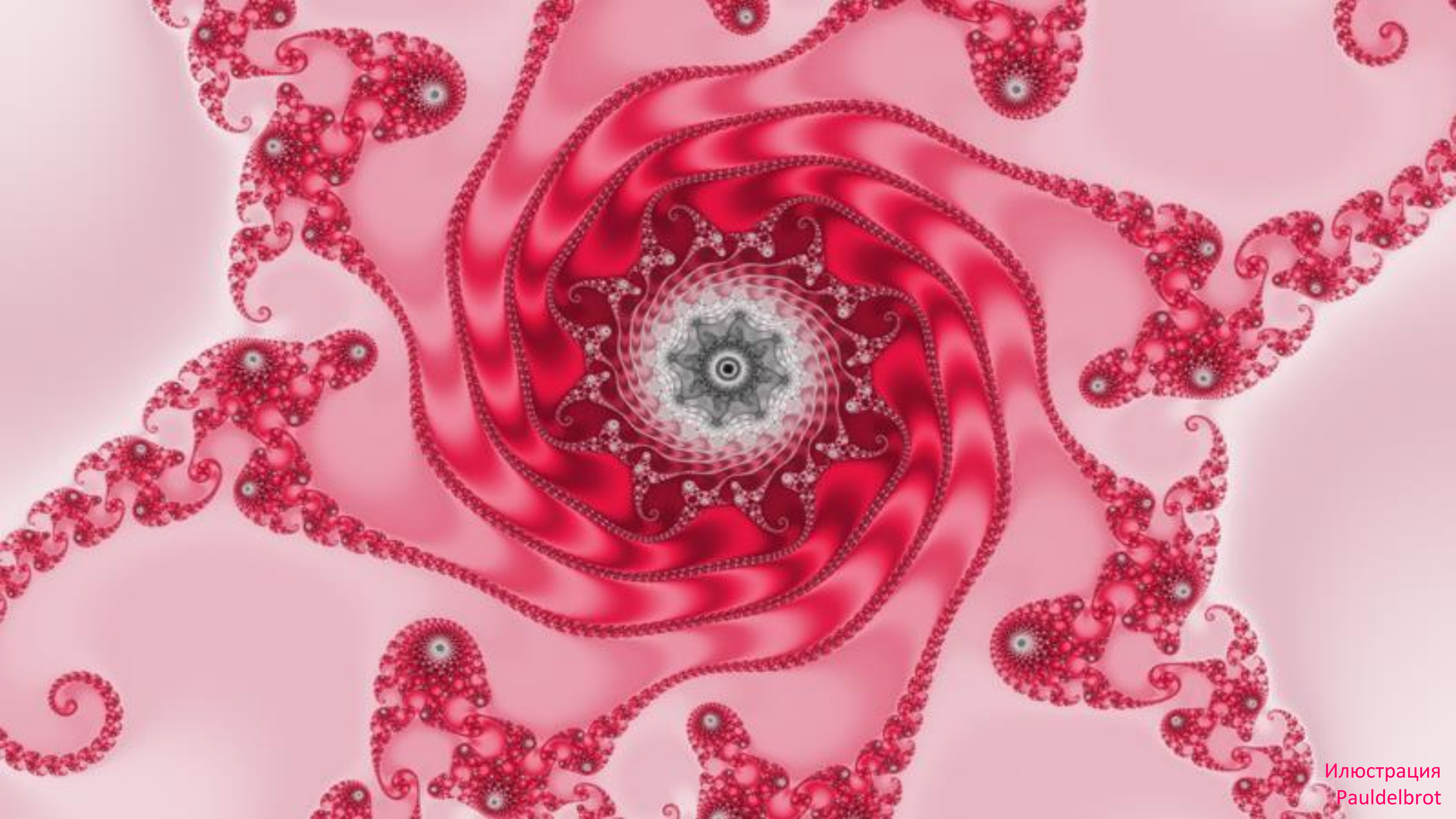
Себеподобие

Фракталът се самосъдържа

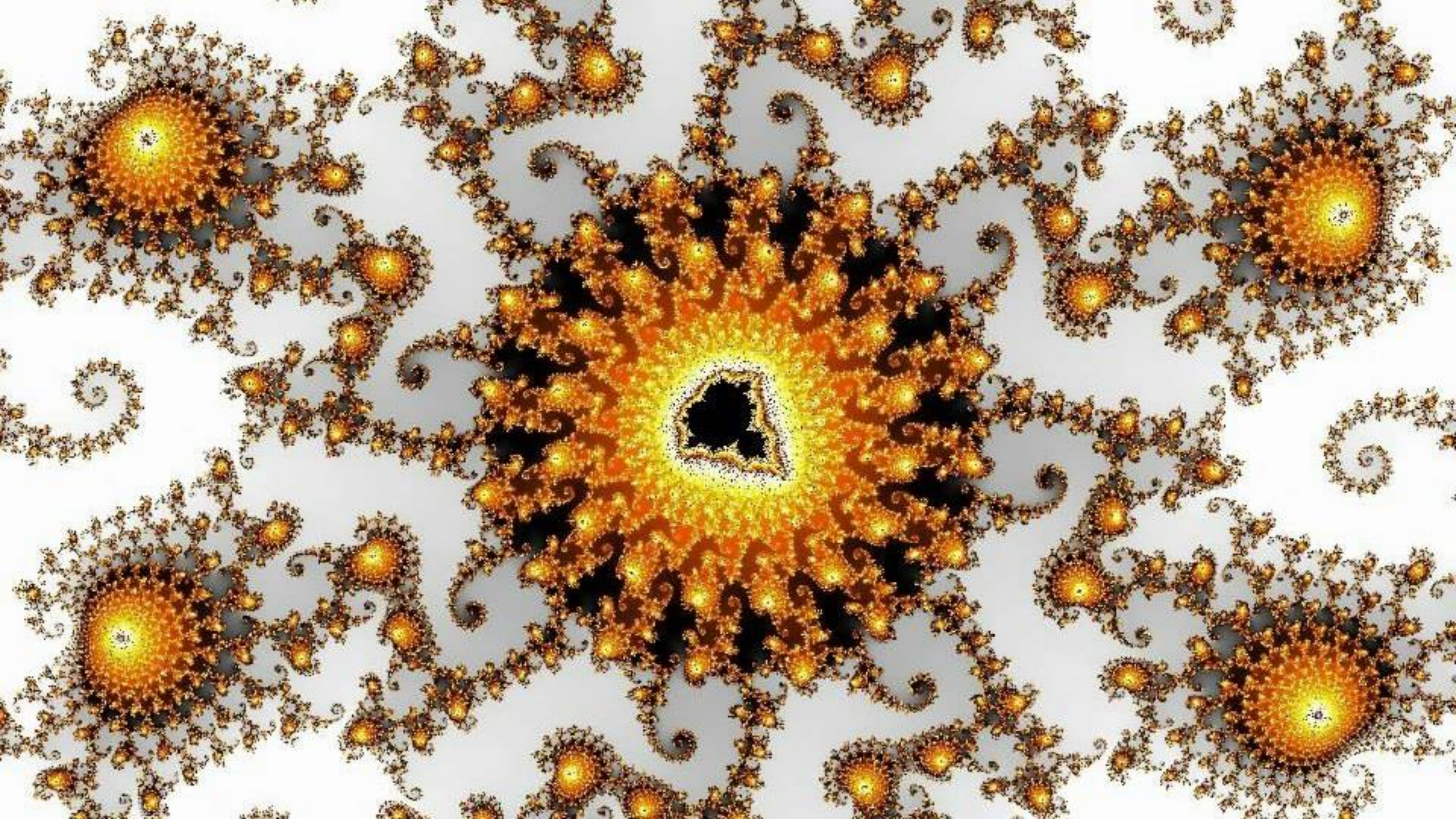
- Безкраен брой минибротчета



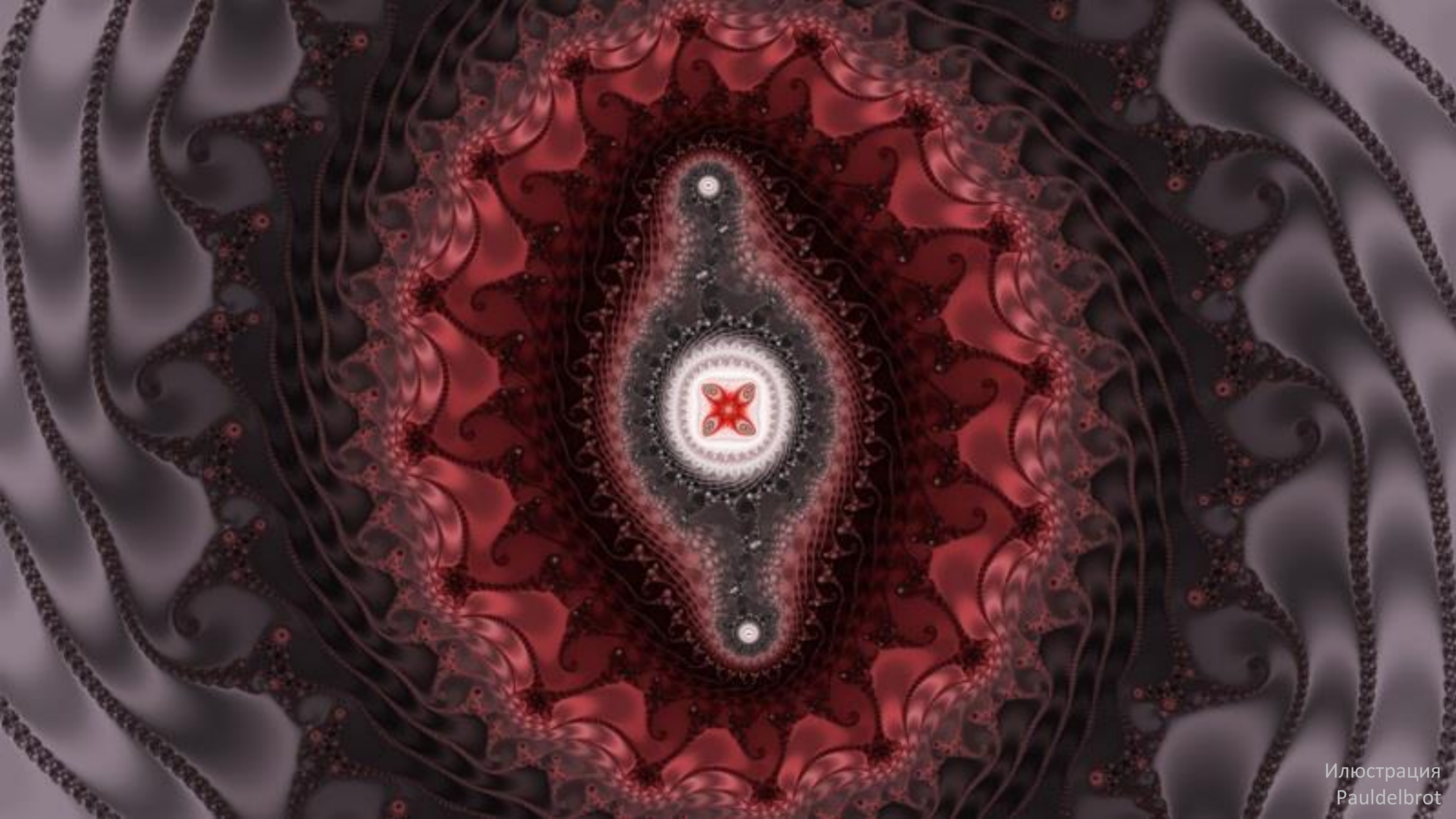




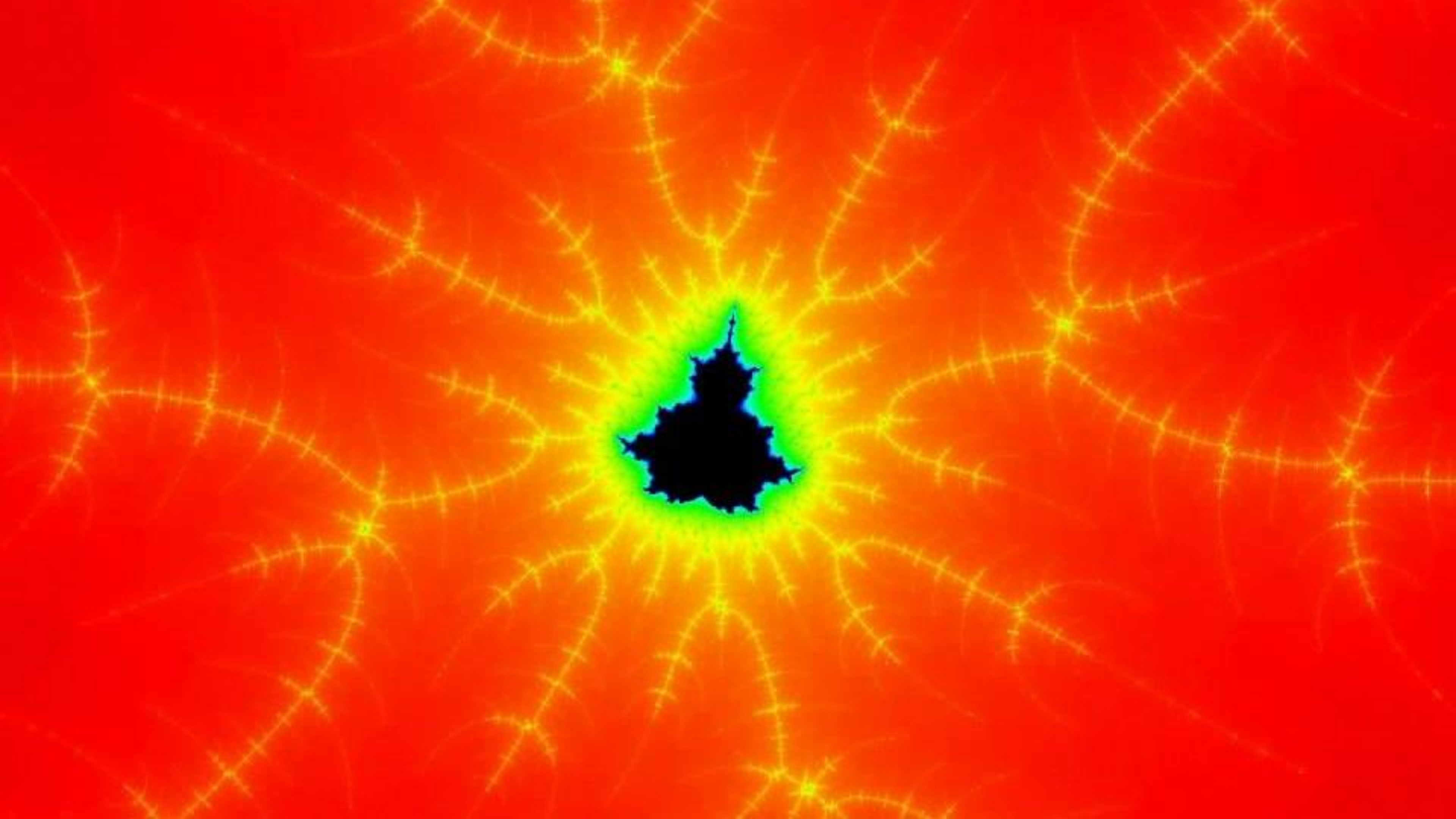
Илюстрация
Pauldelbrot



Илюстрация
Pauldelbrot



Илюстрация
Pauldelbrot



Генериране

Начална конфигурация

- Разглеждаме комплексната равнина $\mathbb{C}$
- На всеки пиксел съответства някаква точка $c \in \mathbb{C}$ с координати (x, y) и формула $c(x, y) = x + iy$
- Започваме от точка $z_0 \in \mathbb{C}$
- Т.е. $z_0 = (0,0) = 0 + 0i$

Процес

Процес

- Повтаряме многократно стъпката $z_i = z_{i-1}^2 + c$

Наблюдаваме поведението на z_i

- На пръв поглед z_i скача хаотично из $\mathbb{C}$
- На втори – може да гравитира около някоя точка
  (т.е. z_i е ограничена)
- Или да се отдалечава неустоимо и неутешимо
  (т.е. z_i е неограничена)

Накратко, пресмятаме

$$z_0 = 0$$
$$z_1 = z_0^2 + c = c$$
$$z_2 = z_1^2 + c = c^2 + c$$
$$z_3 = z_2^2 + c = (c^2 + c)^2 + c$$
$$z_4 = z_3^2 + c = \left((c^2 + c)^2 + c\right)^2 + c$$
$$\vdots$$

Дефиниция

Множеството на Манделброт

- Това е множеството $\mathbb{M}$ от всички точки $c \in \mathbb{C}$, за които траекторията на 0 след безкрайната итерация $z \leftarrow z^2 + c$ е ограничена
- При $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad f(z) = z^2 + c \quad f^n = f \cdot f^{n-1}$ можем да запишем на един ред:
  $\mathbb{M} = \{c \in \mathbb{C}: sup\,|f^n(0)| < \infty\}$

Докога наблюдаваме?

Доказано е, че

- Ако по някое време $|z_i| > 2$, точката z_i е разходяща
- Докато $|z_i| \leq 2$ нищо не може да се каже
- Понякога се налагат милиони и дори милиарди итерации, за да излезе z_i
- Понякога дори и след тях нищо не се знае

Цветове

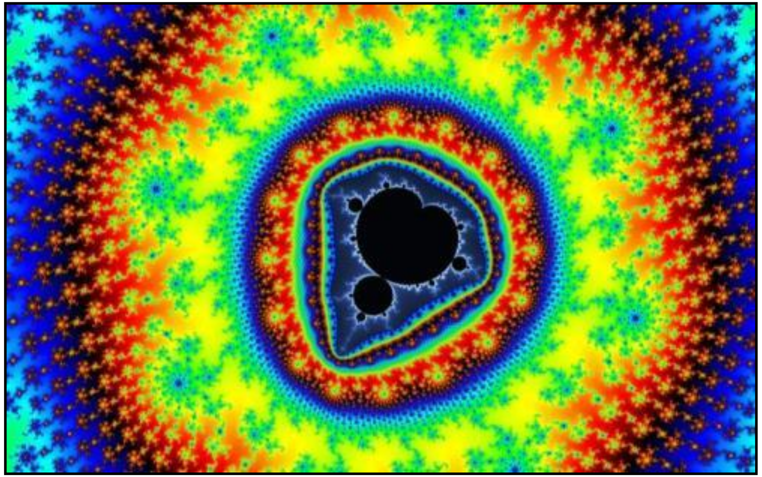
Определяне на цвета

- Зависи от скоростта, с която z_i избягва
- Слагаме лимит от n итерации и броим след колко итерации z_i излиза извън кръга с радиус 2
- Този брой определя цвета
- Ако стигнем n без да сме излезли, приемаме, че имаме ограничена точка

Голямата илюзия

Множеството на Манделброт

- Е това черното в средата
- Красивата цветна част е околността му

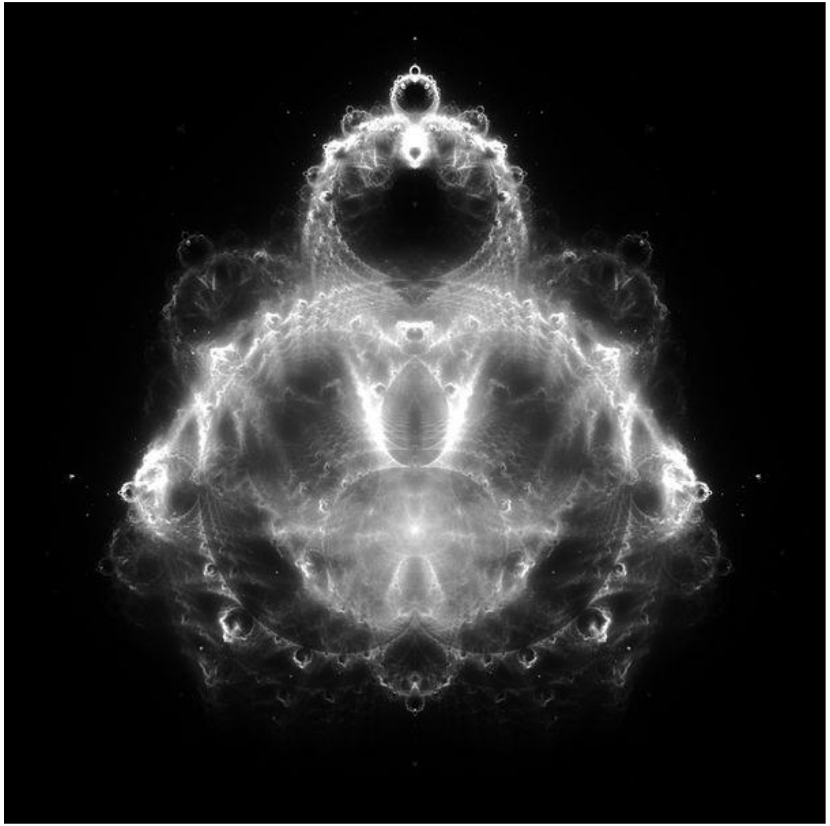


Фракталът в 3D

Досега никой не е открил 3D вариант на множеството на Манделброт

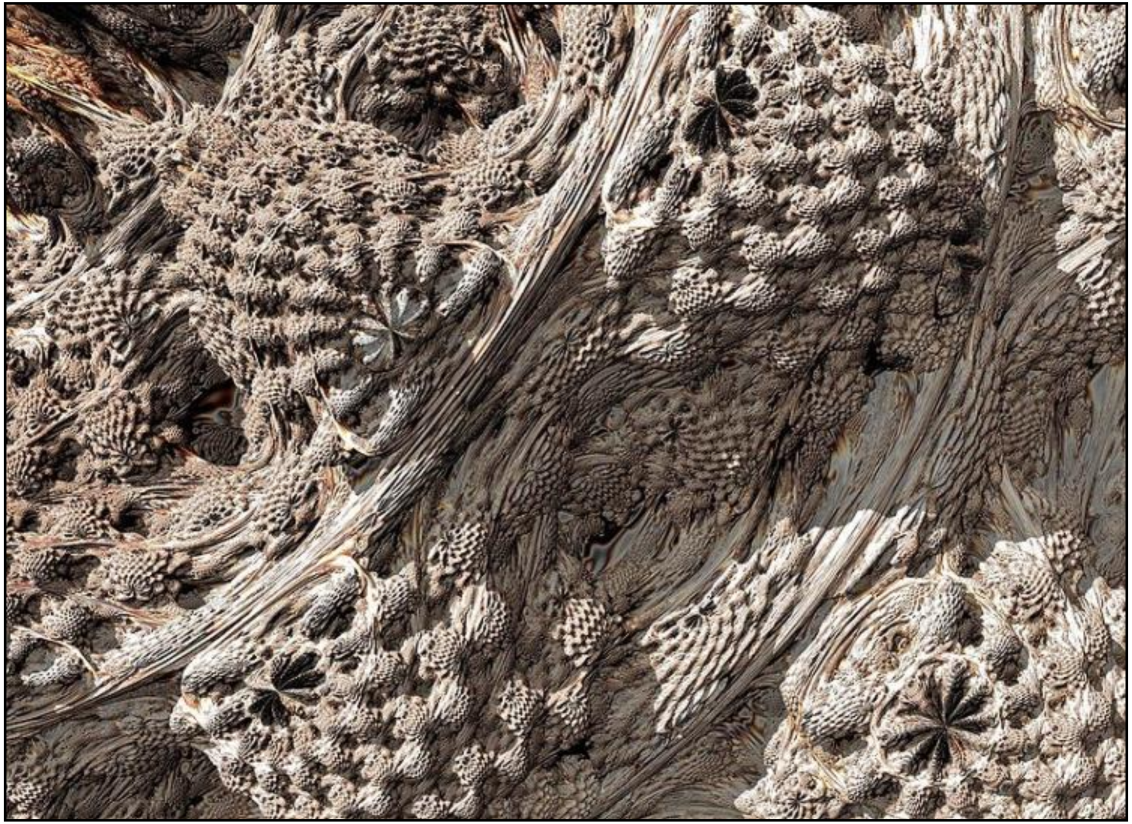
- Много опити, различна степен на успешност
- Най-близки са Будаброт (*Buddhabrot*) и Манделбълб (*Mandelbulb*)

Будаброт



Илюстрация: UnreifeKirsche

Манделбълб



Илюстрация: Soler97

Самостоятелна работа

Самостоятелна работа

Намерете, вижте и разпознавайте

- Множество на Кантор
- Прах на Кантор
- Крива на Госпер
- Остров на Госпер
- Гъба на Менгер
- Крива на Кох

- Снежинка на Кох
- Триъгълник на Шерпински
- Килим на Шерпински
- Тетрахедрон на Шерпински
- Крива на Хилберт
- Крива на дракона
- Множество на Манделброт
- Дърво на Питагор
- Уплътнение на Аполон

Въпроси?

Повече информация

[AGO2] стр. 188-190, 797-810

[ALZH] гл. 8

[BAGL] стр. 56-70

[LENG] стр. 499-503

[ZHDA] стр. 423-428

[FALC] стр. xiii-xxii, 197-199, 204-205

[PARE] стр. 271-283

А също и:

- FractalForums
  http://www.fractalforums.com/ и http://www.fractalforums.org/

Край