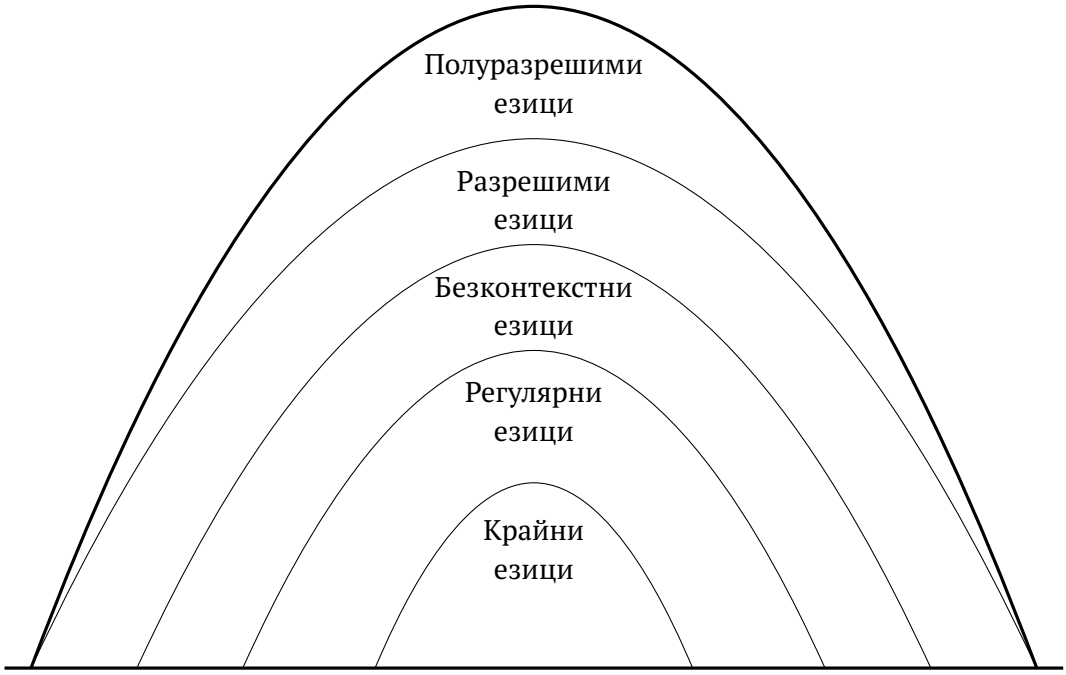
Записки по „Езици, автомати, изчислимост”

Стефан Вътев[1]

3 юни 2020 г.

[1]Това е чернова. Възможни са неточности и грешки, а също и несъответсвия с терминологията въведена на лекции. За забележки и коментари: stefanv@fmi.uni-sofia.bg


Полуразрешими
езици
Разрешими
езици
Безконтекстни
езици
Регулярни
езици
Крайни
езици

Съдържание

Глава 1

Увод

1.1 Съждително смятане

Както при езиците за програмиране, всяка логика има свой синтаксис и семантика. Тук ще разгледаме класическата съждителна логика, при която те са сравнително прости.

На англ. Propositional calculus

Съждителното смятане наподобява аритметичното смятане, като вместо аритметичните операции $+, -, \cdot, /$, имаме съждителни операции като $\neg, \wedge, \vee$. Например, $(p \vee q) \wedge \neg r$ е съждителна формула. Освен това, докато аритметичните променливи приемат стойности числа, то съждителните променливи приемат само стойности **истина (1)** или **неистина (0)**.

Съждителна формула наричаме съвкупността от съждителни променливи $p, q, r, \ldots$, свързани със знаците за логически операции $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$ и скоби, определящи реда на операциите.

Това не е формална дефиниция, но за момента е достатъчно.

Съждителни операции

- Отрицание $\neg$
- Дизюнкция $\vee$
- Конюнкция $\wedge$
- Импликация $\rightarrow$
- Еквивалентност $\Leftrightarrow$

Ще използваме таблица за истинност за да определим стойностите на основните съждителни операции при всички възможни набори на стойностите на променливите.

p	q	$\neg p$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \to q$	$\neg p \vee q$	$p \Leftrightarrow q$	$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
0	0	1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	1	1	0	0
1	0	0	1	0	0	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1	1	1

Съждително верен (валиден) е този логически израз, който има верностна стойност **1** при всички възможни набори на стойностите на съждителните променливи в израза, т.е. стълбът на израза в таблицата за истинност трябва да съдържа само стойности **1**.

Два съждителни израза φ и ψ са **еквивалентни**, което означаваме $\varphi \equiv \psi$, ако са съставени от едни и същи съждителни променливи и двата израза имат едни и същи верностни стойности при всички комбинации от верностни стойности на променливите. С други думи, колоните на двата израза в съответните им таблици за истинност трябва да съвпадат. Така например, от горната таблица се вижда, че $p \to q \equiv \neg p \vee q$ и $p \Leftrightarrow q \equiv (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$.

1.1.1 Съждителни закони

I) **Закон за идемпотентността**

$$p \wedge p \equiv p$$

$$p \vee p \equiv p$$

II) **Комутативен закон**

$$p \vee q \equiv q \vee p$$

$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$

III) **Асоциативен закон**

$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$

$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$$

IV) **Дистрибутивен закон**

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

V) **Закони на де Морган**

$$\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q)$$

$$\neg(p \vee q) \equiv (\neg p \wedge \neg q)$$

VI) **Закон за контрапозицията**

$$p \to q \equiv \neg q \to \neg p$$

VII) **Обобщен закон за контрапозицията**

$$(p \wedge q) \to r \equiv (p \wedge \neg r) \to \neg q$$

VIII) **Закон за изключеното трето**

$$p \vee \neg p \equiv \mathbf{1}$$

IX) **Закон за силогизма (транзитивност)**

$$((p \to q) \ \wedge \ (q \to r)) \to (p \to r) \equiv \mathbf{1}$$

Лесно се проверява с таблиците за истинност, че законите са валидни.

1.1.2 Нормални форми

- Конюнктивна нормална форма
- Дизюнктивна нормална форма

1.2 Предикати и квантори

Квантори

Свойствата или отношенията на елементите в произволно множество се наричат **предикати**. Нека да разгледаме един едноместен предикат $P(\cdot)$.

твърдение	Кога е истина?	Кога е неистина?
$\forall x P(x)$	$P(x)$ е вярно за всяко x	съществува x, за което $P(x)$ **не** е вярно
$\exists x P(x)$	съществува x, за което $P(x)$ е вярно	$P(x)$ **не** е вярно за всяко x

(I) **Квантор за общност** $\forall x$. Записът $(\forall x \in A)P(x)$ означава, че за всеки елемент a в A, твърдението $P(a)$ има стойност истина. Например, $(\forall x \in \mathbb{R})[(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1]$.

(II) **Квантор за съществуване** $\exists x$. Записът $(\exists x \in A)P(x)$ означава, че съществува елемент a в A, за който твърдението $P(a)$ има стойност истина. Например, $(\exists x \in \mathbb{C})[x^2 = -1]$, но $(\forall x \in \mathbb{R})[x^2 \neq -1]$.

Закони на предикатното смятане

(I) $\neg\forall x P(x) \Leftrightarrow \exists x \neg P(x)$

(II) $\neg\exists x P(x) \Leftrightarrow \forall x \neg P(x)$

(III) $\forall x P(x) \Leftrightarrow \neg\exists x \neg P(x)$

(IV) $\exists x P(x) \Leftrightarrow \neg\forall x \neg P(x)$

(V) $\forall x \forall y P(x,y) \Leftrightarrow \forall y \forall x P(x,y)$

(VI) $\exists x \exists y P(x,y) \Leftrightarrow \exists y \exists x P(x,y)$

(VII) $\exists x \forall y P(x,y) \rightarrow \forall y \exists x P(x,y)$

Закони на Де Морган за квантори			
Твърдение	Еквивалентно твърдение	Кога е истина?	Кога е неистина?
$\neg\exists x P(x)$	$\forall x \neg P(x)$	за всяко x $P(x)$ **не** е вярно	съществува x, за което $P(x)$ е вярно
$\neg\forall x P(x)$	$\exists x \neg P(x)$	съществува x, за което $P(x)$ **не** е вярно	$P(x)$ е вярно за всяко x

Задача 1.1. Да означим с $K(x,y)$ твърдението "x познава y". Изразете като предикатна формула следните твърдения.

$\forall x \exists y K(x,y)$ 1) Всеки познава някого.

$\exists x \forall y K(x,y)$ 2) Някой познава всеки.

$\exists x \forall y K(y,x)$ 3) Някой е познаван от всички.

$\forall x \exists y (K(x,y) \wedge \neg K(y,x))$ 4) Всеки знае някой, който не го познава.

$\exists x \forall y (K(y,x) \rightarrow K(x,y))$ 5) Има такъв, който знае всеки, който го познава.

6) Всеки двама познати имат общ познат.

$(\forall x,y)(K(x,y) \,\&\, K(y,x) \rightarrow \exists z (K(x,z) \,\&\, K(y,z))$

Пример 1.1. Нека $D \subseteq \mathbb{R}$. Казваме, че $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ е *непрекъсната* в точката $x_0 \in D$, ако

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D)(\ |x_0 - x| < \delta \ \rightarrow \ |f(x_0) - f(x)| < \varepsilon\ ).$$

Да видим какво означава f да бъде *прекъсната* в точката $x_0 \in D$:

f е прекъсната в x_0 точно тогава, когато f не е непрекъсната в x_0

$$\begin{aligned}
&\neg(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in D)(\ |x_0 - x| < \delta \ \rightarrow\ |f(x_0) - f(x)| < \varepsilon\ ) \equiv \\
&(\exists\varepsilon > 0)\neg(\exists\delta > 0)(\forall x \in D)(\ |x_0 - x| < \delta \ \rightarrow\ |f(x_0) - f(x)| < \varepsilon\ ) \equiv \\
&(\exists\varepsilon > 0)(\forall\delta > 0)\neg(\forall x \in D)(\ |x_0 - x| < \delta \ \rightarrow\ |f(x_0) - f(x)| < \varepsilon\ ) \equiv \\
&(\exists\varepsilon > 0)(\forall\delta > 0)(\exists x \in D)\neg(\ |x_0 - x| < \delta \ \rightarrow\ |f(x_0) - f(x)| < \varepsilon\ ) \equiv \\
&(\exists\varepsilon > 0)(\forall\delta > 0)(\exists x \in D)\neg(\ \neg(|x_0 - x| < \delta) \vee |f(x_0) - f(x)| < \varepsilon\ ) \equiv \\
&(\exists\varepsilon > 0)(\forall\delta > 0)(\exists x \in D)(\ \neg\neg(|x_0 - x| < \delta) \wedge \neg(|f(x_0) - f(x)| < \varepsilon)\ ) \equiv \\
&(\exists\varepsilon > 0)(\forall\delta > 0)(\exists x \in D)(\ |x_0 - x| < \delta \ \wedge\ |f(x_0) - f(x)| \geq \varepsilon\ ).
\end{aligned}$$

1.3 Множества, релации, функции

Основни релации между множества

За произволни множества A и B, ще казваме, че:

- A е подмножество на B, което ще означаваме като $A \subseteq B$, ако:

$$(\forall x)[x \in A \implies x \in B].$$

- A е равно на B, което ще означаваме като $A = B$, ако:

$$(\forall x)[x \in A \ \Leftrightarrow\ x \in B],$$

или

$$A = B \ \Leftrightarrow\ A \subseteq B \,\&\, B \subseteq A.$$

Основни операции върху множества

Ще разгледаме няколко операции върху произволни множества A и B.

- **Сечение**

На англ. *intersection*

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}.$$

Казано по-формално, $A \cap B$ е множеството, за което е изпълнено, че:

$$(\forall x)[x \in A \cap B \ \Leftrightarrow\ (x \in A \wedge x \in B)].$$

Примери:

- $A \cap A = A$, за всяко множество A.
- $A \cap \emptyset = \emptyset$, за всяко множество A.
- $\{1, \emptyset, \{\emptyset\}\} \cap \{\emptyset\} = \{\emptyset\}$.
- $\{1, 2, \{1, 2\}\} \cap \{1, \{1\}\} = \{1\}$.

Макар и $\emptyset$, $\{\emptyset\}$ и $\{1, 2\}$ да са множества, те може да са елементи на други множества.

На англ. *union*

- **Обединение**

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

$A \cup B$ е множеството, за което е изпълнено, че:

$$(\forall x)[x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B)].$$

Примери:

- $A \cup A = A$, за всяко множество A.
- $A \cup \emptyset = A$, за всяко множество A.
- $\{1, 2, \emptyset\} \cup \{1, 2, \{\emptyset\}\} = \{1, 2, \emptyset, \{\emptyset\}\}$.
- $\{1, 2, \{1, 2\}\} \cup \{1, \{1\}\} = \{1, 2, \{1\}, \{1, 2\}\}$.

- **Разлика**

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}.$$

$A \setminus B$ е множеството, за което е изпълнено, че:

$$(\forall x)[x \in A \setminus B \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B)].$$

Примери:

- $A \setminus A = \emptyset$, за всяко множество A.
- $A \setminus \emptyset = A$, за всяко множество A.
- $\emptyset \setminus A = \emptyset$, за всяко множество A.
- $\{1, 2, \emptyset\} \setminus \{1, 2, \{\emptyset\}\} = \{\emptyset\}$.
- $\{1, 2, \{1, 2\}\} \setminus \{1, \{1\}\} = \{2, \{1, 2\}\}$.

- **Степенно множество**

$$\mathscr{P}(A) = \{x \mid x \subseteq A\}.$$

На англ. *power set*

$\mathscr{P}(A)$ е множеството, за което е изпълнено, че:

$$(\forall x)[x \in \mathscr{P}(A) \Leftrightarrow (\forall y)[y \in x \to y \in A]].$$

В литературата се среща също така и означението 2^A за степенното множество на A.

Примери:

- $\mathscr{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$.
- $\mathscr{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.
- $\mathscr{P}(\{\emptyset, \{\emptyset\}\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.
- $\mathscr{P}(\{1, 2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$.

Задача 1.2. Проверете верни ли са свойствата:

а) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \setminus B = \emptyset \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A$;

б) $A \setminus \emptyset = A, \emptyset \setminus A = \emptyset, A \setminus B = B \setminus A$.

в) $A \cap (B \cup A) = A \cap B$;

г) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ и $A \cap (B \cup C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

д) $A \backslash B = A \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$;

е) $A \backslash B = A \backslash (A \cap B)$ и $A \backslash B = A \backslash (A \cup B)$;

ж) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$;

з) $C \setminus (A \cup B) = (C \backslash A) \cap (C \backslash B)$ и $C \backslash (A \cap B) = (C \backslash A) \cup (C \backslash B)$ — Закони на Де Морган

и) $(A \backslash B) \backslash C = (A \backslash C) \backslash (B \backslash C)$ и $A \backslash (B \backslash C) = (A \backslash B) \cup (A \cap C)$;

к) $A \subseteq B \Rightarrow \mathscr{P}(A) \subseteq \mathscr{P}(B)$;

л) $\mathscr{P}(A \cap B) = \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$ и $\mathscr{P}(A \cup B) = \mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B)$; — $X \subseteq A \cup B \stackrel{?}{\Rightarrow} X \subseteq A \vee X \subseteq B$

За да дадем определение на понятието релация, трябва първо да въведем понятието декартово произведение на множества, което пък от своя страна се основава на понятието наредена двойка.

Наредена двойка

За два елемента a и b въвеждаме опрецията **наредена двойка** $\langle a, b \rangle$. Наредената двойка $\langle a, b \rangle$ има следното характеристичното свойство:

$$a_1 = a_2 \ \wedge \ b_1 = b_2 \ \Leftrightarrow \ \langle a_1, b_1 \rangle = \langle a_2, b_2 \rangle.$$

Понятието наредена двойка може да се дефинира по много начини, стига да изпълнява харектеристичното свойство. Ето примери как това може да стане:

1) Първото теоретико-множествено определение на понятието наредена двойка е дадено от Норберт Винер: — Norbert Wiener (1914)

$$\langle a, b \rangle \stackrel{\text{деф}}{=} \{\{\{a\}, \emptyset\}, \{\{b\}\}\}.$$

2) Определението на Куратовски се приема за „стандартно” в наши дни: — Kazimierz Kuratowski (1921)

$$\langle a, b \rangle \stackrel{\text{деф}}{=} \{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

Задача 1.3. Докажете, че горните дефиниции наистина изпълняват характеристичното свойство за наредени двойки.

Определение 1.1. Сега можем, за всяко естествено число $n \geq 1$, да въведем понятието наредена n-орка $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$: — Пример за индуктивна (рекурсивна) дефиниция

$$\langle a_1 \rangle \stackrel{\text{деф}}{=} a_1,$$

$$\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle \stackrel{\text{деф}}{=} \langle a_1, \langle a_2, \ldots, a_n \rangle \rangle$$

Оттук нататък ще считаме, че имаме дадено понятието наредена n-орка, без да се интересуваме от нейната формална дефиниция.

Декартово произведение

На англ. cartesian product. Считаме, че $(A \times B) \times C = A \times (B \times C) = A \times B \times C$.

За две множества A и B, определяме тяхното декартово произведение като

$$A \times B = \{\langle a, b\rangle \mid a \in A \,\&\, b \in B\}.$$

За краен брой множества $A_1, A_2, \ldots, A_n$, определяме

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{\langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle \mid a_1 \in A_1 \,\&\, \ldots \,\&\, a_n \in A_n\}.$$

Задача 1.4. Проверете, че:

а) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

б) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.

в) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

г) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$.

д) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.

е) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$.

Видове функции

Функцията $f : A \to B$ е:

// или f е **обратима**

- **инекция**, ако е изпълнено свойството:

$$(\forall a_1, a_2 \in A)[\, a_1 \neq a_2 \;\to\; f(a_1) \neq f(a_2)\,],$$

или еквивалентно,

$$(\forall a_1, a_2 \in A)[\, f(a_1) = f(a_2) \;\to\; a_1 = a_2\,].$$

// или f е **върху** B

- **сюрекция**, ако е изпълнено свойството:

$$(\forall b \in B)(\exists a \in A)[\, f(a) = b\,].$$

- **биекция**, ако е инекция и сюрекция.

Канторово кодиране. Най-добре се вижда като се нарисува таблица

Задача 1.5. Докажете, че $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ е биекция, където

$$f(x, y) = \frac{(x + y)(x + y + 1)}{2} + x.$$

Основни видове бинарни релации

Подмножествата R от вида $R \subseteq A \times A \times \cdots \times A$ се наричат релации. Релациите от вида $R \subseteq A \times A$ са важен клас, който ще срещаме често. Да разгледаме няколко основни видове релации от този клас:

I) **рефлексивна**, ако

$$(\forall x \in A)[\langle x, x\rangle \in R].$$

Например, бинарната релация $\leq$ над $\mathbb{N}$ е рефлексивна, защото

$$(\forall x \in \mathbb{N})[\, x \leq x \,].$$

II) **транзитивна**, ако

$$(\forall x, y, z \in A)[\, \langle x, y\rangle \in R \,\&\, \langle y, z\rangle \in R \to \langle x, z\rangle \in R \,].$$

Например, бинарната релация $\leq$ над $\mathbb{N}$ е транзитивна, защото

$$(\forall x, y, z \in \mathbb{N})[\, x \leq y \,\&\, y \leq z \;\to\; x \leq z \,].$$

III) **симетрична**, ако

$$(\forall x, y \in A)[\, \langle x, y\rangle \in R \to \langle y, x\rangle \in R \,].$$

Например, бинарната релация $=$ над $\mathbb{N}$ е рефлексивна, защото

$$(\forall x, y \in \mathbb{N})[\, x = y \;\to\; y = x \,].$$

IV) **антисиметрична**, ако

$$(\forall x, y \in A)[\, \langle x, y\rangle \in R \,\&\, \langle y, x\rangle \in R \to x = y \,].$$

Например, релацията $\leq \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ е антисиметрична, защото

$$(\forall x, y, z \in A)[\, x \leq y \,\&\, y \leq x \;\to\; x = y \,].$$

- Една бинарна релация R над множеството A се нарича **релация на еквивалентност**, ако R е рефлексивна, транзитивна и симетрична.
- За всеки елемент $a \in A$, определяме неговия **клас на еквивалентност** относно релацията на еквивалентност R по следния начин:

$$[a]_R \stackrel{\text{деф}}{=} \{b \in A \mid \langle a, b\rangle \in R\}.$$

Забележка. Лесно се съобразява, че за всеки два елемента $a, b \in A$,

$$\langle a, b\rangle \in R \;\Leftrightarrow\; [a]_R = [b]_R.$$

Пример 1.2. За всяко естествено число $n \geq 2$, дефинираме релацията R_n като

$$\langle x, y\rangle \in R_n \;\Leftrightarrow\; x \equiv y \,(\mathrm{mod}\; n).$$

Ясно е, че R_n са релации на еквивалентност.

Операции върху бинарни релации

Това е малко объркващо

I) **Композиция** на две релации $R \subseteq B \times C$ и $P \subseteq A \times B$ е релацията $R \circ P \subseteq A \times C$, определена като:

$$R \circ P \stackrel{\text{деф}}{=} \{\langle a, c\rangle \in A \times C \mid (\exists b \in B)[\langle a, b\rangle \in P \,\&\, \langle b, c\rangle \in R]\}.$$

Очевидно е, че P е рефлексивна релация, дори ако R не е.

II) **Рефлексивно затваряне** на релацията $R \subseteq A \times A$ е релацията

$$P \stackrel{\text{деф}}{=} R \cup \{\langle a, a\rangle \mid a \in A\}.$$

Лесно се вижда, че $R^1 = R$

III) **Итерация** на релацията $R \subseteq A \times A$ дефинираме като за всяко естествено число n, дефинираме релацията R^n по следния начин:

$$R^0 \stackrel{\text{деф}}{=} \{\langle a, a\rangle \mid a \in A\}$$
$$R^{n+1} \stackrel{\text{деф}}{=} R^n \circ R.$$

✍ Проверете, че R^+ е транзитивна релация!

IV) **Транзитивно затваряне** на $R \subseteq A \times A$ е релацията

$$R^+ \stackrel{\text{деф}}{=} \bigcup_{n \geq 1} R^n.$$

За дадена релация R, с $R^\star$ ще означаваме нейното *рефлексивно и транзитивно затваряне*. От дефинициите е ясно, че

$$R^\star = \bigcup_{n \geq 0} R^n.$$

1.4 Доказателства на твърдения

Допускане на противното

Да приемем, че искаме да докажем, че свойството $P(x)$ е вярно за всяко естествено число. Един начин да направим това е следният:

- Допускаме, че съществува елемент n, за който $\neg P(n)$.
- Използвайки, че $\neg P(n)$ правим извод, от който следва факт, за който знаем, че винаги е лъжа. Това означава, че доказваме следното твърдение

$$\exists x \neg P(x) \to \mathbf{0}.$$

- Тогава можем да заключим, че $\forall x P(x)$, защото имаме следния извод:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\exists x \neg P(x) \to \mathbf{0}}{\mathbf{1} \to \neg\exists x \neg P(x)}}{\neg\exists x \neg P(x)}}{\forall x P(x)}$$

Ще илюстрираме този метод като решим няколко прости задачи.

Задача 1.6. За всяко $a \in \mathbb{Z}$, ако a^2 е четно, то a е четно.

Доказателство. Ние искаме да докажем твърдението P, където:

$$P \equiv (\forall a \in \mathbb{Z})[a^2 \text{ е четно } \to \ a \text{ е четно}].$$

Да допуснем противното, т.е. изпълнено е $\neg P$. Лесно се вижда, че

$$\neg P \ \Leftrightarrow \ (\exists a \in \mathbb{Z})[a^2 \text{ е четно } \wedge \ a \text{ не е четно}].$$

$\neg(\forall x)(A(x) \to B(x))$ е еквивалентно на $(\exists x)(A(x) \wedge \neg B(x))$

Да вземем едно такова нечетно a, за което a^2 е четно. Това означава, че $a = 2k + 1$, за някое $k \in \mathbb{Z}$, и

$$a^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1,$$

което очевидно е нечетно число. Но ние допуснахме, че a^2 е четно. Така достигаме до противоречие, следователно нашето допускане е грешно и

$$(\forall a \in \mathbb{Z})[a^2 \text{ е четно } \to \ a \text{ е четно}].$$

□

Задача 1.7. Докажете, $\sqrt{2}$ **не** е рационално число.

Доказателство. Да допуснем, че $\sqrt{2}$ е рационално число. Тогава съществуват $a, b \in \mathbb{Z}$, такива че

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}.$$

Без ограничение, можем да приемем, че a и b са естествени числа, които нямат общи делители, т.е. не можем да съкратим дробта $\frac{a}{b}$. Получаваме, че

$$2b^2 = a^2.$$

Тогава a^2 е четно число и от Задача 1.6, a е четно число. Нека $a = 2k$, за някое естествено число k. Получаваме, че

$$2b^2 = 4k^2,$$

от което следва, че

$$b^2 = 2k^2.$$

Това означава, че b също е четно число, $b = 2n$, за някое естествено число n. Следователно, a и b са четни числа и имат общ делител 2, което е противоречие с нашето допускане, че a и b нямат общи делители. Така достигаме до противоречие. Накрая заключаваме, че $\sqrt{2}$ не е рационално число. □

Индукция върху естествените числа

Да напомним, че естествените числа са $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$

Доказателството с индукция по $\mathbb{N}$ представлява следната схема:

$$\frac{P(0) \qquad (\forall x \in \mathbb{N})[P(x) \to P(x+1)]}{(\forall x \in \mathbb{N})P(x)}$$

Това означава, че ако искаме да докажем, че свойството $P(x)$ е вярно за всяко естествено число x, то трябва да докажем първо, че е изпълнено $P(0)$ и след това, за произволно естествено число x, ако $P(x)$ вярно, то също така е вярно $P(x+1)$.

Задача 1.8. Всяко естествено число $n \geq 2$ може да се запише като произведение на прости числа.

Доказателство. Искаме да докажем, че $(\forall n \geq 2)P(n)$, където $P(n)$ казва, че n може да се запише като произведение на прости числа, т.е.

$$n = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_k^{m_k},$$

за някои прости числа $p_1, p_2, \dots, p_k$ и естествени числа $m_1, m_2, \dots, m_k$.

Доказателството протича с индукция по $n \geq 2$.

а) За $n = 2$ е ясно, защото 2 е просто число. В този случай $n = p_1^{m_1}$ и $p_1 = 2$ и $m_1 = 1$.

б) Да приемем, че $P(n)$ е изпълнено за някое естествено число $n > 2$.

в) Да разгледаме следващото естествено число $n+1$. Ако $n+1$ е просто число, то всичко е ясно. Ако $n+1$ е съставно, то съществуват естествени числа $n_1, n_2 \geq 2$, за които

$$n + 1 = n_1 \cdot n_2.$$

Тогава, понеже $n_1, n_2 \leq n$, от от И.П. следва, че $P(n_1)$ и $P(n_2)$, т.е.

$$n_1 = p_1^{l_1} \cdots p_k^{l_k} \text{ и } n_2 = q_1^{m_1} \cdots q_r^{m_r},$$

където $p_1, \dots, p_k$ и $q_1, \dots, q_r$ са прости числа, а $l_1, \dots, l_k$ и $m_1, \dots, m_r$ са естествени числа. Тогава е ясно, че $n+1$ също е произведение на прости числа.

□

Задача 1.9. Докажете, че за всяко естествено число n,

$$\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1.$$

Доказателство. Доказателството протича с индукция по n.

- За $n = 0$, $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 1 = 2^1 - 1$.

- Нека твърдението е вярно за n. Ще докажем, че твърдението е вярно за $n+1$.

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n+1} 2^i &= \sum_{i=0}^{n} 2^i + 2^{n+1} \\ &= 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1} && \text{// от И.П.} \\ &= 2.2^{n+1} - 1 \\ &= 2^{(n+1)+1} - 1.\end{aligned}$$

□

1.5 Азбуки, думи, езици

Основни понятия

- **Азбука** ще наричаме всяко крайно множество, като обикновено ще я означаваме със Σ. Елементите на азбуката Σ ще наричаме **букви**.

Често ще използваме буквите a, b, c за да означаваме букви.

- **Дума** над азбуката Σ е произволна крайна редица от елементи на Σ. Например, за $\Sigma = \{a, b\}$, $aababba$ е дума над Σ с дължина 7. С $|\alpha|$ ще означаваме дължината на думата α.

Обикновено ще означаваме думите с $\alpha, \beta, \gamma, \omega$.

- Обърнете внимание, че имаме единствена дума с дължина 0. Тази дума ще означаваме с ε и ще я наричаме **празната дума**, т.е. $|\varepsilon| = 0$.

- С a^n ще означаваме думата съставена от n a-та. Формалната индуктивна дефиниция е следната:

$$a^0 \stackrel{\text{деф}}{=} \varepsilon,$$
$$a^{n+1} \stackrel{\text{деф}}{=} a^n a.$$

- Множеството от всички думи над азбуката Σ ще означаваме със $\Sigma^\star$. Например, за $\Sigma = \{a, b\}$,
$$\Sigma^\star = \{\varepsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, \dots\}.$$
Обърнете внимание, че $\emptyset^\star = \{\varepsilon\}$.

- **Език** над азбуката Σ ще наричаме всяко подмножество на $\Sigma^\star$. Например, за $\Sigma = \{a, b\}$,
$$L = \{\alpha \in \{a, b\}^\star \mid \alpha \text{ започва с } a\}$$
е език над Σ.

Операции върху думи

- Операцията **конкатенация** взима две думи α и β и образува новата дума $\alpha \cdot \beta$ като слепва двете думи. Например $aba \cdot bb = ababb$. Обърнете внимание, че в общия случай $\alpha \cdot \beta \neq \beta \cdot \alpha$. Можем да дадем формална индуктивна дефиниция на операцията конкатенация по дължината на думата β.

Често ще пишем $\alpha\beta$ вместо $\alpha \cdot \beta$

  - Ако $|\beta| = 0$, то $\beta = \varepsilon$. Тогава $\alpha \cdot \varepsilon \stackrel{\text{деф}}{=} \alpha$.
  - Ако $|\beta| = n + 1$, то $\beta = \gamma b$, $|\gamma| = n$. Тогава $\alpha \cdot \beta \stackrel{\text{деф}}{=} (\alpha \cdot \gamma)b$.

- Друга често срещана операция върху думи е **обръщането** на дума. Дефинираме думата $\alpha^{\mathtt{rev}}$ като обръщането на α по следния начин.

Например, $reverse^{\mathtt{rev}} = esrever$

  - Ако $|\alpha| = 0$, то $\alpha = \varepsilon$ и $\alpha^{\mathtt{rev}} \stackrel{\text{деф}}{=} \varepsilon$.
  - Ако $|\alpha| = n + 1$, то $\alpha = a\beta$, където $|\beta| = n$. Тогава $\alpha^{\mathtt{rev}} \stackrel{\text{деф}}{=} (\beta^{\mathtt{rev}})a$.

Обърнете внимание, че:

$\emptyset \cdot A = A \cdot \emptyset = \emptyset$
$\{\varepsilon\} \cdot A = A \cdot \{\varepsilon\} = A$.

- Нека A и B са множества от думи. Дефинираме конкатенацията на A и B като

$$A \cdot B \stackrel{\text{деф}}{=} \{\alpha \cdot \beta \mid \alpha \in A \,\&\, \beta \in B\}.$$

- Сега за едно множество от думи A, дефинираме A^n индуктивно:

$$A^0 \stackrel{\text{деф}}{=} \{\varepsilon\},$$
$$A^{n+1} \stackrel{\text{деф}}{=} A^n \cdot A.$$

Ако $A = \{ab, ba\}$, то $A^0 = \{\varepsilon\}$, $A^1 = A$, $A^2 = \{abab, abba, baba, baab\}$. Ако $A = \{a, b\}$, то

$$A^n = \{\alpha \in \{a, b\}^\star \mid |\alpha| = n\}.$$

Операцията $\star$ е известна като звезда на Клини.

- За едно множеството от думи A, дефинираме:

$$\begin{aligned} A^\star &\stackrel{\text{деф}}{=} \bigcup_{n \geq 0} A^n \\ &= A^0 \cup A^1 \cup A^2 \cup A^3 \cup \ldots \\ A^+ &\stackrel{\text{деф}}{=} A \cdot A^\star. \end{aligned}$$

Пример 1.3. Нека да разгледаме няколко примера какво точно представлява прилагането на операцията звезда на Клини върху един език.

- Нека $L = \{0, 11\}$. Тогава:
  - $L^0 = \{\varepsilon\}$, $L^1 = L$,
  - $L^2 = L^1 \cdot L^1 = \{00, 011, 110, 1111\}$,
  - $L^3 = L^1 \cdot L^2 = \{000, 0011, 0110, 01111, 1100, 11011, 11110, 111111\}$.

- Нека $L = \emptyset$. Тогава:
  - $L^0 = \{\varepsilon\}$,
  - $L^1 = \emptyset$,
  - $L^2 = L^1 \cdot L^1 = \emptyset$.

  Получаваме, че $L^\star = \{\varepsilon\}$, т.е. *краен* език
- Нека $L = \{0^i \mid i \in \mathbb{N}\} = \{\varepsilon, 0, 00, 000, \dots\}$. Тогава лесно може да се види, че $L = L^\star$.

Задача 1.10. Проверете:

а) операцията конкатенация е *асоциативна*, т.е. за всеки три думи α, β, γ,

$$(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma);$$

б) за множествата от думи A, B и C,

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C);$$

в) $\{\varepsilon\}^\star = \{\varepsilon\}$;

г) за произволно множество от думи A,

$$A^\star = A^\star \cdot A^\star \text{ и } (A^\star)^\star = A^\star;$$

д) за произволни букви a и b,

$$\{a, b\}^\star = \{a\}^\star \cdot (\{b\} \cdot \{a\}^\star)^\star;$$

е) за произволни букви a и b,

$$\{a, b\}^\star = (\{a\}^\star \cdot \{b\}^\star)^\star;$$

Задача 1.11. Докажете, че за всеки две думи α и β е изпълено:

а) $(\alpha \cdot \beta)^{\mathtt{rev}} = \beta^{\mathtt{rev}} \cdot \alpha^{\mathtt{rev}}$;

б) α е префикс на β точно тогава, когато $\alpha^{\mathtt{rev}}$ е суфикс на $\beta^{\mathtt{rev}}$;

в) $(\alpha^{\mathtt{rev}})^{\mathtt{rev}} = \alpha$;

г) $(\alpha^n)^{\mathtt{rev}} = (\alpha^{\mathtt{rev}})^n$, за всяко $n \geq 0$.

Отрези на дума

Понякога може да е удобно да вземем назаем от python нотацията за slices на масив и ако думата $\alpha = a_0 a_1 \cdots a_{n-1}$, то нека

$$\begin{aligned}
\alpha[i] &\stackrel{\text{деф}}{=} a_i \\
\alpha[i:j] &\stackrel{\text{деф}}{=} \begin{cases} a_i \cdots a_{m-1}, & \text{ако } i < j \;\&\; m = \min\{j, |\alpha|\} \\ \varepsilon, & \text{иначе} \end{cases} \\
\alpha[i:] &\stackrel{\text{деф}}{=} \alpha[i : |\alpha|] \\
\alpha[:i] &\stackrel{\text{деф}}{=} \alpha[0 : i]
\end{aligned}$$

1.5.1 Релации между думи

- Казваме, че думата α е **префикс** на думата β, ако съществува дума γ, такава че $\beta = \alpha \cdot \gamma$. Да обърнем внимание, че позволяваме $\gamma = \varepsilon$. Тогава β е префикс на самата себе си. Ако се ограничим до думи $\gamma \neq \varepsilon$, то ще казваме, че α е *същински* префикс на β.
- За един език L, можем да дефинираме езика от префиксите на думите от L, т.е.

$$\texttt{Pref}(L) = \{\alpha \in \Sigma^\star \mid (\exists \gamma \in \Sigma^\star)[\alpha \cdot \gamma \in L]\}.$$

- α е **суфикс** на β, ако $\beta = \gamma \cdot \alpha$, за някоя дума γ.
- За един език L, можем да дефинираме езика от суфиксите на думите от L, т.е.

$$\texttt{Suff}(L) = \{\alpha \in \Sigma^\star \mid (\exists \gamma \in \Sigma^\star)[\gamma \cdot \alpha \in L]\}.$$

- Нека имаме азбука $\Sigma = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$. Казваме, че една дума α е лексикографски по-малка от β, което ще означаваме като $\alpha <_{\texttt{lex}} \beta$, ако

$$(\exists i < \min\{|\alpha|, |\beta|\})[\, \alpha[:i] = \beta[:i] \;\&\; \alpha[i] < \beta[i] \,].$$

Тук не е съществено, че буквите в азбуката Σ са числа. Можем да дефинираме наредба между елементите на произволна крайна азбука.

1.6 Дървета

Понятието дърво е едно от най-основните в информатиката и може да се дефинира по много различни начини, в зависимост от това за какви цели се използва. Тук на практика следваме [NS93], защото по-късно ще е важно да имаме наредба между възлите на дървото. При нас всички дървета са крайно разклонени и всеки възел в дървото еднозначно се определя от пътя от възела до корена.

Нека $b \in \mathbb{N}$. Непразното множество $T \subseteq \{0, 1, \ldots, b-1\}^\star$ се нарича **дърво**, ако T е затворено относно префикси, т.е. $\texttt{Pref}(T) = T$. С други думи,

$$(\forall \alpha)(\forall \beta)[\, \alpha \in T \;\&\; \beta \preceq \alpha \implies \beta \in T \,].$$

Ако гледаме на елементите на T като върхове на граф, то можем да дефинираме бинарната релацията $Succ$, върху едно дърво T като

$$Succ(\alpha, \beta) \stackrel{\text{деф}}{\Leftrightarrow} \alpha, \beta \in T \;\&\; (\exists c < b)[\alpha \cdot c = \beta],$$

която казва, че върха β е пряк наследник на върха α. Обърнете внимание, че е възможно $T \neq T'$ да са такива, че $(T, Succ) \cong (T', Succ')$.

Поради тази причина е удобно да наречем едно дърво T *оптимално*, ако за него е изпълнено свойството:

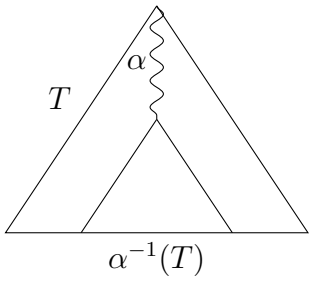
$$\alpha \cdot c \in T \,\&\, a < c \implies \alpha \cdot a \in T. \tag{1.1}$$

Тогава лесно се вижда, че за две оптимални дървета T и T',

$$T = T' \;\Leftrightarrow\; (T, Succ) \cong (T', Succ').$$

Нека да въведем следните означения:

$$\begin{aligned}
&\texttt{height}(T) \stackrel{\text{деф}}{=} \max\{\, |\alpha| \mid \alpha \in T \,\} && \text{// височина}\\
&\texttt{succ}_T(\alpha) \stackrel{\text{деф}}{=} \{\alpha c \mid \alpha c \in T \,\&\, c < b\} && \text{// наследниците на } \alpha\\
&T_\alpha \stackrel{\text{деф}}{=} \alpha^{-1}(T) && \text{// поддървото на } \alpha\\
&\texttt{leaves}(T) \stackrel{\text{деф}}{=} \{\alpha \in T \mid \texttt{succ}_T(\alpha) = \emptyset\}. && \text{// листата на } T
\end{aligned}$$



Фигура 1.1: $\alpha^{-1}(T)$ е поддърво на T.

Задача 1.12. Докажете, че ако T е дърво, то $\texttt{Pref}(\texttt{leaves}(T)) = T$.

Задача 1.13. Нека $T \subseteq \{0, \ldots, b-1\}^\star$ е крайно дърво. Докажете, че

$$|\texttt{leaves}(T)| \leq b^{\texttt{height}(T)}.$$

Доказателство. Индукция по $\texttt{height}(T)$.

- Нека $\texttt{height}(T) = 0$. Тогава е ясно, че $|\texttt{leaves}(T)| = |\{\varepsilon\}| = 1 \leq b^0$.

- Нека $\texttt{height}(T) > 0$. За всяко $a \in T$ е ясно, че $\texttt{height}(T_a) < \texttt{height}(T)$. Тогава:

В този случай имаме, че $\texttt{leaves}(T) = \bigcup_{a \in T}(\{a\} \cdot \texttt{leaves}(T_a))$. Тук гледаме на a и b от една страна като букви в азбука, но и като числа.

$$\begin{aligned}
|\texttt{leaves}(T)| &= \sum_{a \in T} |\texttt{leaves}(T_a)| && // \ T_a \stackrel{\text{деф}}{=} a^{-1}(T) \\
&\leq \sum_{a \in T} b^{\texttt{height}(T_a)} && // \text{ от } \textbf{(И.П.)} \\
&\leq \sum_{a \in T} b^{\texttt{height}(T)-1} && // \ \texttt{height}(T_a) \leq \texttt{height}(T) - 1 \\
&\leq \sum_{a < b} b^{\texttt{height}(T)-1} \\
&= b^{\texttt{height}(T)}.
\end{aligned}$$

□

$f \restriction n \stackrel{\text{деф}}{=} f(0)f(1)\cdots f(n-1)$.

Твърдение 1.1 (Лема на Кьониг)**.** Нека $T \subseteq \{0, 1, \ldots, k\}^\star$. Ако T е безкрайно дърво, то T съдържа безкраен път, т.е. съществува $\pi : \mathbb{N} \to \{0, 1, \ldots, k\}$, такава че $f \restriction n \in T$ за всяко $n \in \mathbb{N}$.

Упътване. Дефинираме безкрайния път π на стъпки. На всяка стъпка избираме този наследник, който е корен на безкрайно дърво. Понеже T е безкрайно дърво с крайно разклонение, на всяка стъпка можем да изберем такъв наследник. □

Доказателство. По-формално, ще дефинираме редица от думи $\alpha_0 \prec \alpha_1 \prec \cdots \prec \alpha_n \prec \cdots$, които ще образуват безкрайния път, т.е. $f \restriction n = \alpha_n$, като искаме, за всяко n, $T_n \stackrel{\text{деф}}{=} (\alpha_n)^{-1}(T)$ да бъде безкрайно дърво. Нека $\alpha_0 = \varepsilon$, коренът на T. Ясно е, че по условие, $T_0 = T$ е безкрайно дърво. Да приемем, че сме дефинирали $\alpha_0 \prec \alpha_1 \prec \cdots \prec \alpha_n$ и T_n е безкрайно дърво. Ще дефинираме α_{n+1}. Понеже T_n е крайно разклонено дърво с максимално разклонение $k+1$, възелът α_n в дървото има крайно много наследници. Понеже T_n е безкрайно дърво, то поне един от наследниците, да кажем $y \leq k$, на α_n ще има безкрайно много наследници. Нека $\alpha_{n+1} \stackrel{\text{деф}}{=} \alpha_n \cdot y$. Ясно е, че T_{n+1} е безкрайно дърво. □

Глава 2

Регулярни езици и автомати

2.1 Автоматни езици

Определение 2.1. Детерминиран краен автомат е петорка $\mathcal{A} = \langle \Sigma, Q, q_{\texttt{start}}, \delta, F \rangle$, където

Често ще пишем съкратено ДКА вместо детерминиран краен автомат.

- Σ е азбука;
- Q е крайно множество от състояния;
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ е тотална функция, която ще наричаме *функция на преходите*;
- $q_{\texttt{start}} \in Q$ е начално състояние;
- $F \subseteq Q$ е множеството от финални състояния

Нека имаме една дума $\alpha \in \Sigma^\star$, $\alpha = a_0 a_1 \cdots a_{n-1}$. Казваме, че α се **разпознава** от автомата $\mathcal{A}$, ако съществува редица от състояния $q_0, q_1, q_2, \ldots, q_n$, такива че:

- $q_0 = q_{\texttt{start}}$, началното състояние на автомата;
- $\delta(q_i, a_i) = q_{i+1}$, за всяко $i = 0, \ldots, n-1$;
- $q_n \in F$.

Казваме, че $\mathcal{A}$ **разпознава** езика L, ако $\mathcal{A}$ разпознава точно думите от L, т.е. $L = \{\alpha \in \Sigma^\star \mid \mathcal{A} \text{ разпознава } \alpha\}$. Обикновено означаваме езика, който се разпознава от даден автомат $\mathcal{A}$ с $\mathcal{L}(\mathcal{A})$. В такъв случай ще казваме, че езикът L е **автоматен**.

При дадена функция на преходите δ, често е удобно да разглеждаме функция $\delta^\star : Q \times \Sigma^\star \to Q$, която е дефинирана за всяко $q \in Q$ и $\alpha \in \Sigma^\star$ по следния начин:

- Ако $\alpha = \varepsilon$, то $\delta^\star(q, \varepsilon) \overset{\text{деф}}{=} q$;
- Ако $\alpha = \beta$, то $\delta^\star(q, \beta a) \overset{\text{деф}}{=} \delta(\delta^\star(q, \beta), a)$.

Лесно се съобразява, че една дума α се *разпознава* от автомата $\mathcal{A}$ точно тогава, когато $\delta^\star(q_{\texttt{start}}, \alpha) \in F$. Оттук следва, че

$$\mathcal{L}(\mathcal{A}) \stackrel{\text{деф}}{=} \{\, \alpha \in \Sigma^\star \mid \delta^\star(q_{\texttt{start}}, \alpha) \in F \,\}.$$

Обърнете внимание, че $\delta(q, a) = \delta^\star(q, a)$ за $a \in \Sigma$

Твърдение 2.1. Нека $\mathcal{A}$ е ДКА. Тогава за всяко състояние q и произволни думи α и β е изпълнено, че

$$\delta^\star(q, \alpha\beta) = \delta^\star(\delta^\star(q, \alpha), \beta).$$

Упътване. Индукция по дължината на β.

- $|\beta| = 0$, т.е. $\beta = \varepsilon$. Тогава за всяко състояние q и произволна дума α имаме:

$$\delta^\star(q, \alpha\varepsilon) = \delta^\star(\underbrace{\delta^\star(q, \alpha)}_{q}, \varepsilon).$$

- Да приемем, че твърдението е изпълнено за думи β с дължина n.

- Нека $|\beta| = n + 1$, т.е. $\beta = \gamma b$, където $|\gamma| = n$. Тогава за всяко състояние q и произволна дума α имаме:

$$\begin{aligned}
\delta^\star(q, \alpha\beta) &= \delta^\star(q, \alpha\gamma b) \\
&= \delta(\delta^\star(q, \alpha\gamma), b) && \text{// от деф. на } \delta^\star \\
&= \delta(\delta^\star(\underbrace{\delta^\star(q, \alpha)}_{p}, \gamma), b) && \text{// от И.П. приложено за } \gamma \\
&= \delta(\delta^\star(p, \gamma), b) \\
&= \delta^\star(p, \gamma b) && \text{// от деф. на } \delta^\star \\
&= \delta^\star(\delta^\star(q, \alpha), \beta). && \text{// } p = \delta^\star(q, \alpha)
\end{aligned}$$

□

Забележка. Формално погледнато, доказателството на *Твърдение 2.1* протича по следния начин:

$$\frac{P(0) \qquad (\forall n \in \mathbb{N})[P(n) \implies P(n+1)]}{(\forall n \in \mathbb{N})[P(n)],}$$

където

$$P(n) \stackrel{\text{деф}}{=} (\forall \beta \in \Sigma^n)(\forall \alpha \in \Sigma^\star)(\forall q \in Q)[\delta^\star(q, \alpha\beta) = \delta^\star(\delta^\star(q, \alpha), \beta)].$$

Моментното описание на изчисление с краен автомат представлява двойка от вида $(q, \alpha) \in Q \times \Sigma^\star$, т.е. автоматът се намира в състояние q, а думата, която остава да се прочете е α. Удобно е да въведем бинарната релация $\vdash_{\mathcal{A}}$ над $Q \times \Sigma^\star$, която ще ни казва как моментното описание на автомата $\mathcal{A}$ се променя след изпълнение на една стъпка:

(На англ. *instantaneous description*). В случая въвеждането на това понятие не е напълно необходимо, но по-късно, когато въведем стекови автомати и машини на Тюринг, ще работим с такива моментни описания на изчисления и затова е добре още отначало да свикнем с него.

$$(q, b\alpha) \vdash_{\mathcal{A}} (p, \alpha) \overset{\text{деф}}{\Leftrightarrow} \delta(q, b) = p.$$

Рефлексивното и транзитивно затваряне на $\vdash_{\mathcal{A}}$ ще означаваме с $\vdash^\star_{\mathcal{A}}$. За да дадем по-удобна дефиниция на $\vdash^\star_{\mathcal{A}}$, първо ще дефинираме релацията $\vdash^n_{\mathcal{A}}$, която определя работата на автомата $\mathcal{A}$ върху моментни описания за n стъпки.

Рефл. и транз. затваряне на една релация е разгледано в Глава 1.

$$\frac{}{(q, \alpha) \vdash^0 (q, \alpha)} \text{ (рефлексивност)} \qquad \frac{(q, \alpha) \vdash^n (r, b\beta) \qquad \delta(r, b) = p}{(q, \alpha) \vdash^{n+1} (p, \beta)} \text{ (транзитивност)}$$

Дефинираме релацията $\vdash^\star_{\mathcal{A}}$ като рефлексивното и транзитивно затваряне на релацията $\vdash_A$, или с други думи:

$$(q, \alpha) \vdash^\star_{\mathcal{A}} (p, \beta) \overset{\text{деф}}{\Leftrightarrow} (\exists \ell \in \mathbb{N})[(q, \alpha) \vdash^\ell_{\mathcal{A}} (p, \beta)].$$

Задача 2.1. Докажете, че за произволна дума $\beta \in \Sigma^\star$,

$$(q, \alpha\beta) \vdash^\star_{\mathcal{A}} (p, \beta) \Leftrightarrow \delta^\star(q, \alpha) = p.$$

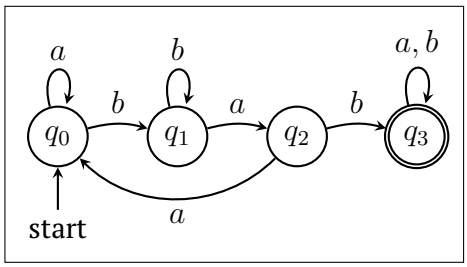
Можем да заключим, че имаме следното преставяне:

$$\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \{\alpha \in \Sigma^\star \mid (\exists q \in F)[(q_{\texttt{start}}, \alpha) \vdash^\star_{\mathcal{A}} (q, \varepsilon)]\}.$$

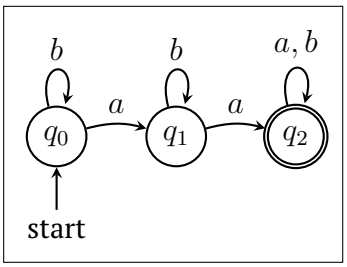
2.1.1 Примерни задачи

Винаги с удвоени окръжности ще отбелязваме финалните състояния.

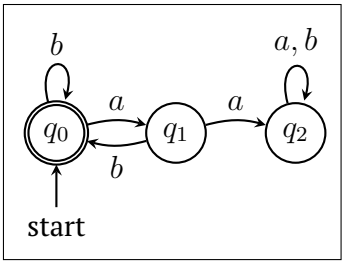
Пример 2.1. Да разгледаме няколко примера за автомати и езиците, които разпознават. Дефинирайте функцията на преходите δ за всеки автомат.



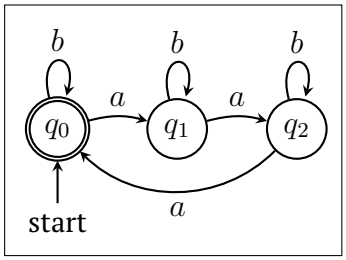
(а) $\{\omega \in \{a,b\}^\star \mid \omega$ съдържа $bab\}$



(б) $\{\omega \in \{a,b\}^\star \mid |\omega|_a \geq 2\}$



(в) $\{\omega \in \{a,b\}^\star \mid$ всяко a в ω веднага се следва от поне едно $b\}$



(г) $\{\omega \in \{a,b\}^\star \mid |\omega|_a \equiv 0 \bmod 3\}$

В повечето от горните примери може сравнително лесно да се съобрази, че построеният автомат разпознава желания език. При по-сложни задачи обаче, ще се наложи да дадем доказателство, като обикновено се прилага *метода на математическата индукция* върху дължината на думите. Ще разгледаме няколко такива примера.

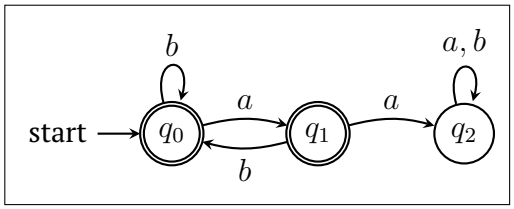
Най-лесния начин да се сетим как да построим $\mathcal{A}$ е като първо построим автомат за езика, който разпознава тези думи, в които се съдържат две поредни срещания на a и вземем неговото допълнение съгласно Твърдение 2.3. По-късно ще разгледаме общ метод за строене на автомат по език.

Задача 2.2. Докажете, че езикът

$$L = \{\alpha \in \{a,b\}^\star \mid \alpha \text{ не съдържа две поредни срещания на } a\}$$

е автоматен.

Доказателство. Да разгледаме $\mathcal{A} = \langle \Sigma, Q, q_{\texttt{start}}, \delta, F \rangle$ с функция на преходите описана на *Фигура 2.3*.



Фигура 2.3: Автомат $\mathcal{A}$ разпознаващ думите, които не съдържат две поредни срещания на a

$|\alpha| \stackrel{\text{деф}}{=}$ дължината на α.

Ще докажем, че $L = \mathcal{L}(\mathcal{A})$. Първо ще се концентрираме върху доказателството на $\mathcal{L}(\mathcal{A}) \subseteq L$. Ще докажем, че за всяка дума $\alpha \in \Sigma^\star$ са изпълнени свойствата:

(1) ако $\delta^\star(q_0, \alpha) = q_0$, то α не съдържа две поредни срещания на a и ако $|\alpha| > 0$, то α завършва на b;

(2) ако $\delta^\star(q_0, \alpha) = q_1$, то α не съдържа две поредни срещания на a и завършва на a.

Ще докажем (1) и (2) едновременно с индукция по дължината на думата α.

- За $|\alpha| = 0$, т.е. $\alpha = \varepsilon$, твърденията (1) и (2) са ясни (Защо?).
- Да приемем, че твърденията (1) и (2) са верни за произволни думи α с дължина n.
- Нека $|\alpha| = n + 1$, т.е. $\alpha = \beta x$, където $|\beta| = n$ и $x \in \Sigma$. Ще докажем (1) и (2) за α.
  - Нека $\delta^\star(q_0, \beta x) = q_0 = \delta(\delta^\star(q_0, \beta), x)$. Според дефиницията на функцията δ, $x = b$ и $\delta^\star(q_0, \beta) \in \{q_0, q_1\}$. Тогава по **И.П.** за (1) и (2), β не съдържа две поредни срещания на a. Тогава е очевидно, че βx също не съдържа две поредни срещания на a.
  - Нека $\delta^\star(q_0, \beta x) = q_1 = \delta(\delta^\star(q_0, \beta), x)$. Според дефиницията на δ, $x = a$ и $\delta^\star(q_0, \beta) = q_0$. Тогава по **И.П.** за (1), β не съдържа две поредни срещания на a и ако $|\beta| > 0$, то β завършва на b. Тогава е очевидно, че βx също не съдържа две поредни срещания на a.

Така доказахме с индукция по дължината на думата, че за всяка дума α са изпълнени твърденията (1) и (2). По дефиниция, ако $\alpha \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$, то $\delta^\star(q_0, \alpha) \in F = \{q_0, q_1\}$ и от (1) и (2) следва, че и в двата случа α не съдържа две поредни срещания на буквата a, т.е. $\alpha \in L$. С други думи, доказахме, че

$$\mathcal{L}(\mathcal{A}) \subseteq L.$$

Сега ще докажем другата посока, т.е. $L \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{A})$. Това означава да докажем, че

$$(\forall \alpha \in \Sigma^\star)[\alpha \in L \;\Rightarrow\; \delta^\star(q_0, \alpha) \in F],$$

което е еквивалентно на

$$(\forall \alpha \in \Sigma^\star)[\delta^\star(q_0, \alpha) \notin F \;\Rightarrow\; \alpha \notin L]. \tag{2.1}$$

Да напомним, че от съждителното смятане знаем, че $p \to q \equiv \neg q \to \neg p$.

Това е лесно да се съобрази. Щом $\delta^\star(q_0, \alpha) \notin F$, то $\delta^\star(q_0, \alpha) = q_2$ и думата α може да се представи по следния начин:

$$\alpha = \beta a \gamma \;\&\; \delta^\star(q_0, \beta) = q_1.$$

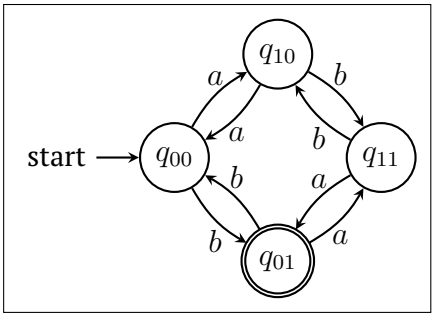
Използвайки свойство (2) от по-горе, понеже $\delta^\star(q_0, \beta) = q_1$, то β не съдържа две поредни срещания на a, но завършва на a. Сега е очевидно, че βa съдържа две поредни срещания на a и щом βa е префикс на α, то думата $\alpha \notin L$. С това доказахме Свойство 2.1, а следователно и посоката $L \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{A})$. □

Задача 2.3. Докажете, че езикът

$$L = \{\omega \in \{a, b\}^\star \mid a \text{ се среща четен брой, докато } b \text{ нечетен брой пъти в } \omega\}$$

е автоматен.

Упътване. Разгледайте автомата $\mathcal{A}$:



Фигура 2.4: $\mathcal{L}(\mathcal{A}) \stackrel{?}{=} L$

$|\omega|_a \stackrel{\text{деф}}{=}$ броят на срещанията на буквата a в думата ω.

Докажете с индукция по дължината на думата ω, че:

а) $\delta^\star(q_{00}, \omega) = q_{00} \implies |\omega|_a \equiv 0 \bmod 2 \;\&\; |\omega|_b \equiv 0 \bmod 2$;

б) $\delta^\star(q_{00}, \omega) = q_{01} \implies |\omega|_a \equiv 0 \bmod 2 \;\&\; |\omega|_b \equiv 1 \bmod 2$;

в) $\delta^\star(q_{00}, \omega) = q_{10} \implies |\omega|_a \equiv 1 \bmod 2 \;\&\; |\omega|_b \equiv 0 \bmod 2$;

г) $\delta^\star(q_{00}, \omega) = q_{11} \implies |\omega|_a \equiv 1 \bmod 2 \;\&\; |\omega|_b \equiv 1 \bmod 2$;

Оттук направете извода, че за произволна дума ω,

$$(\forall i < 2)(\forall j < 2)[\, \delta^\star(q_{00}, \omega) = q_{ij} \;\Leftrightarrow\; |\omega|_a \equiv i \bmod 2 \;\&\; |\omega|_b \equiv j \bmod 2\,].$$

□

За една дума $\alpha \in \{0,1\}^\star$, нека с $\overline{\alpha}_{(k)}$ да означим числото, което се представя в k-ична бройна система като α. Например,

$$\overline{1101}_{(2)} = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = \overline{13}_{(10)} = 1.10^1 + 3.10^0.$$

Да отбележим, че за всяко число n има безкрайно много думи α, за които $\overline{\alpha}_{(2)} = n$. Например,

$\overline{10}_{(2)} = \overline{010}_{(2)} = \overline{0010}_{(2)} = \cdots$

За $k = 2$, имаме следната дефиниция:

- $\overline{\varepsilon}_{(2)} = 0$,
- $\overline{\alpha 0}_{(2)} = 2 \cdot \overline{\alpha}_{(2)}$,
- $\overline{\alpha 1}_{(2)} = 2 \cdot \overline{\alpha}_{(2)} + 1$.

Задача 2.4. Докажете, че езикът $L = \{\alpha \in \{0,1\}^\star \mid \overline{\alpha}_{(2)} \equiv 2 \bmod 3\}$ е автоматен.

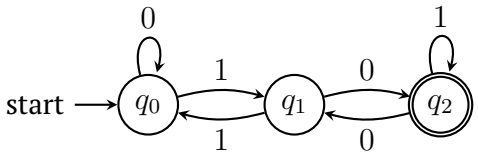
Доказателство. Нашият автомат ще има три състояния $\{q_0, q_1, q_2\}$, като началното състояние ще бъде q_0. Целта ни е да дефинираме така автомата, че да имаме следното свойство:

$$(\forall \alpha \in \Sigma^\star)(\forall i < 3)[\, \overline{\alpha}_{(2)} \equiv i \bmod 3 \;\Leftrightarrow\; \delta^\star(q_0, \alpha) = q_i\,], \tag{2.2}$$

т.е. всяко състояние отговаря на определен остатък при деление на три. Понеже искаме нашия автомат да разпознава тези думи α, за които $\alpha_{(2)} \equiv 2 \mod 3$, финалното състояние ще бъде q_2. Дефинираме функцията δ по следния начин:

$$\begin{aligned}
&\delta(q_0, 0) = q_0 && // \ \overline{\alpha}_{(2)} \equiv 0 \bmod 3 \implies \overline{\alpha 0}_{(2)} \equiv 0 \bmod 3 \\
&\delta(q_0, 1) = q_1 && // \ \overline{\alpha}_{(2)} \equiv 0 \bmod 3 \implies \overline{\alpha 1}_{(2)} \equiv 1 \bmod 3 \\
&\delta(q_1, 0) = q_2 && // \ \overline{\alpha}_{(2)} \equiv 1 \bmod 3 \implies \overline{\alpha 0}_{(2)} \equiv 2 \bmod 3 \\
&\delta(q_1, 1) = q_0 && // \ \overline{\alpha}_{(2)} \equiv 1 \bmod 3 \implies \overline{\alpha 1}_{(2)} \equiv 0 \bmod 3 \\
&\delta(q_2, 0) = q_1 && // \ \overline{\alpha}_{(2)} \equiv 2 \bmod 3 \implies \overline{\alpha 0}_{(2)} \equiv 1 \bmod 3 \\
&\delta(q_2, 1) = q_2 && // \ \overline{\alpha}_{(2)} \equiv 2 \bmod 3 \implies \overline{\alpha 1}_{(2)} \equiv 2 \bmod 3
\end{aligned}$$

Ето и картинка на автомата $\mathcal{A}$:



Фигура 2.5: $\mathcal{L}(\mathcal{A}) \stackrel{?}{=} \{\alpha \in \{0,1\}^\star \mid \overline{\alpha}_{(2)} \equiv 2 \,(\mathrm{mod}\, 3)\}$

Да разгледаме твърденията:

(1) $\delta^\star(q_0, \alpha) = q_0 \implies \overline{\alpha}_{(2)} \equiv 0 \mod 3$;

(2) $\delta^\star(q_0, \alpha) = q_1 \implies \overline{\alpha}_{(2)} \equiv 1 \mod 3$;

(3) $\delta^\star(q_0, \alpha) = q_2 \implies \overline{\alpha}_{(2)} \equiv 2 \mod 3$.

Ще докажем (1), (2) и (3) *едновременно* с индукция по дължината на думата α. За $|\alpha| = 0$, всички условия са изпълнени. (Защо?) Да приемем, че (1), (2) и (3) са изпълнени за думи с дължина n. Нека $|\alpha| = n + 1$, т.е. $\alpha = \beta x$, $|\beta| = n$.

Обърнете внимание, че в доказателството на (3) използваме И.П. не само за (3), но и за (2). Поради тази причина трябва да докажем трите свойства едновременно

Ще докажем подробно само (3) понеже другите твърдения се доказват по сходен начин. Нека $\delta^\star(q_0, \beta x) = q_2$. Имаме два случая:

- $x = 0$. Тогава, по дефиницията на δ, $\delta(q_1, 0) = q_2$ и следователно, $\delta^\star(q_0, \beta) = q_1$. По **И.П.** за (2) с β,
$$\delta^\star(q_0, \beta) = q_1 \ \Rightarrow \ \overline{\beta}_{(2)} \equiv 1 \bmod 3$$
Тогава, $\overline{\beta 0}_{(2)} \equiv 2 \mod 3$. Така доказахме, че
$$\delta^\star(q_0, \beta 0) = q_2 \ \Rightarrow \ \overline{\beta 0}_{(2)} \equiv 2 \bmod 3.$$

- $x = 1$. Тогава, по дефиницията на δ, $\delta(q_2, 1) = q_2$ и следователно, $\delta^\star(q_0, \beta) = q_2$. По **И.П.** за (3) с β,

$$\delta^\star(q_0, \beta) = q_2 \;\Rightarrow\; \overline{\beta}_{(2)} \equiv 2 \bmod 3.$$

Тогава, $\overline{\beta 1}_{(2)} \equiv 2 \mod 3$. Така доказахме, че

$$\delta^\star(q_0, \beta 1) = q_2 \;\Rightarrow\; \overline{\beta 1}_{(2)} \equiv 2 \bmod 3.$$

✍ Довършете доказателствата на (1) и (2)

За да докажем (1), нека $\delta^\star(q_0, \beta x) = q_0$.

- $x = 0$. Разсъжденията са аналогични, като използваме **И.П.** за (1).
- $x = 1$. Разсъжденията са аналогични, като използваме **И.П.** за (2).

По същия начин доказваме и (2). Нека $\delta^\star(q_0, \beta x) = q_1$.

- При $x = 0$, използваме **И.П.** за (3).
- При $x = 1$, използваме **И.П.** за (1).

✍ Защо?

От (1), (2) и (3) следва директно, че

$$(\forall \alpha \in \Sigma^\star)(\forall i < 3)[\, \overline{\alpha}_{(2)} \equiv i \,(\mathrm{mod}\ 3) \;\Leftrightarrow\; \delta^\star(q_0, \alpha) = q_i \,],$$

откъдето получаваме, че $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = L$. □

2.1.2 Затвореност относно сечение, обединение, разлика

Твърдение 2.2. Класът на автоматните езици е затворен относно операцията *сечение*. Това означава, че ако L_1 и L_2 са два произволни автоматни езика над азбуката Σ, то $L_1 \cap L_2$ също е автоматен език.

Доказателство. Да разгледаме два автомата

$$\mathcal{A}' = \langle \Sigma, Q', q'_{\mathtt{start}}, \delta', F' \rangle \text{ и } \mathcal{A}'' = \langle \Sigma, Q'', q''_{\mathtt{start}}, \delta'', F'' \rangle.$$

Изчислението на автомата $\mathcal{A}$ върху думата α едновременно симулира изчислението на $\mathcal{A}'$ и $\mathcal{A}''$ върху α.

Определяме автомата $\mathcal{A} = \langle \Sigma, Q, q_{\mathtt{start}}, \delta, F \rangle$, по следния начин:

- $Q \stackrel{\text{деф}}{=} Q' \times Q''$;

Съобразете, че δ е тотална функция.

- За всяко $\langle r_1, r_2 \rangle \in Q$ и всяко $a \in \Sigma$,

$$\delta(\langle r_1, r_2 \rangle, a) \stackrel{\text{деф}}{=} \langle \delta_1(r_1, a), \delta_2(r_2, a) \rangle;$$

- $q_{\mathtt{start}} \stackrel{\text{деф}}{=} \langle q'_{\mathtt{start}}, q''_{\mathtt{start}} \rangle$;

- $F \stackrel{\text{деф}}{=} \{\langle r_1, r_2\rangle \mid r_1 \in F' \,\&\, r_2 \in F''\} = F' \times F''$

Трябва да докажем, че за всяка дума $\alpha \in \Sigma^\star$ е изпълнено, че:

$$(\forall p \in Q')(\forall q \in Q'')[\, \delta^\star(\langle p, q\rangle, \alpha) = \langle \delta_1^\star(p, \alpha), \delta_2^\star(q, \alpha)\rangle \,]. \tag{2.3}$$

Ще докажем *Свойство (2.3)* с индукция по дължината на думата α.

- Нека $|\alpha| = 0$, т.е. $\alpha = \varepsilon$. Тогава всичко е ясно, защото

$$\begin{aligned} \delta^\star(\langle p, q\rangle, \varepsilon) &= \langle p, q\rangle && \text{// деф. на } \delta^\star \\ &= \langle \delta_1^\star(p, \varepsilon), \delta_2^\star(q, \varepsilon)\rangle. && \text{// деф. на } \delta_1^\star \text{ и } \delta_2^\star \end{aligned}$$

- Да приемем, че *Свойство (2.3)* е изпълнено за думи α с дължина n.
- Нека $|\alpha| = n + 1$, т.е. $\alpha = \beta a$ и $|\beta| = n$. Тогава:

$$\begin{aligned} \delta^\star(\langle p, q\rangle, \beta a) &= \delta(\delta^\star(\langle p, q\rangle, \beta), a) && \text{// деф. на } \delta^\star \\ &= \delta(\langle \delta_1^\star(p, \beta), \delta_2^\star(q, \beta)\rangle, a) && \text{// от И.П.} \\ &= \langle \delta_1(\delta_1^\star(p, \beta), a), \delta_2(\delta_2^\star(q, \beta), a)\rangle && \text{// деф. на } \delta \\ &= \langle \delta_1^\star(p, \beta a), \delta_2^\star(q, \beta a)\rangle && \text{// деф. на } \delta_1^\star \text{ и } \delta_2^\star. \end{aligned}$$

Използвайки *Свойство (2.3)* лесно можем да докажем, че

$$\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \mathcal{L}(\mathcal{A}') \cap \mathcal{L}(\mathcal{A}'').$$

Имаме следните еквивалентности:

$$\begin{aligned} \omega \in \mathcal{L}(\mathcal{A}) &\Leftrightarrow \delta^\star(q_{\texttt{start}}, \omega) \in F && \text{// деф. на } \mathcal{L}(\mathcal{A}) \\ &\Leftrightarrow \delta^\star(\langle q'_{\texttt{start}}, q''_{\texttt{start}}\rangle, \omega) \in F' \times F'' && \text{// деф. на } \mathcal{A} \\ &\Leftrightarrow \langle \delta_1^\star(q'_{\texttt{start}}, \omega), \delta_2^\star(q''_{\texttt{start}}, \omega)\rangle \in F' \times F'' && \text{// от (2.3)} \\ &\Leftrightarrow \delta_1^\star(q'_{\texttt{start}}, \omega) \in F' \,\&\, \delta_2^\star(q''_{\texttt{start}}, \omega) \in F'' \\ &\Leftrightarrow \omega \in \mathcal{L}(\mathcal{A}') \,\&\, \omega \in \mathcal{L}(\mathcal{A}'') \\ &\Leftrightarrow \omega \in \mathcal{L}(\mathcal{A}') \cap \mathcal{L}(\mathcal{A}''). \end{aligned}$$

□

Твърдение 2.3. Класът на автоматните езици са затворени относно операцията допълнение, т.е. ако L е автоматен език, то $\Sigma^\star \setminus L$ също е автоматен език.

Упътване. Нека $L = L(\mathcal{A})$, където $\mathcal{A} = \langle \Sigma, Q, q_{\texttt{start}}, \delta, F\rangle$. Да вземем автомата

$$\mathcal{A}' = \langle Q, \Sigma, q_{\texttt{start}}, \delta, Q \setminus F\rangle,$$

т.е. $\mathcal{A}'$ е същия като $\mathcal{A}$, с единствената разлика, че финалните състояния на $\mathcal{A}'$ са тези състояния, които **не** са финални в $\mathcal{A}$. □

✍ Проверете, че $\Sigma^\star \setminus L = \mathcal{L}(\mathcal{A}')$. Съобразете, че тук е важно, че δ е тотална функция на преходите, а не просто частична функция.

Твърдение 2.4. Класът на автоматните езици е затворен относно операцията **обединение**. Това означава, че ако L_1 и L_2 са два произволни автоматни езика, то $L_1 \cup L_2$ също е автоматен език.

✍ Докажете, че така построения автомат $\mathcal{A}$ разпознава $L_1 \cup L_2$. Тук отново е важно, че δ_1 и δ_2 са тотални функции на преходите.

Упътване. Първият подход е да използвайте конструкцията на автомата $\mathcal{A}$ от *Твърдение 2.2*, с единствената разлика, че тук избираме финалните състояния да бъдат елементите на множеството

$$\begin{aligned} F &\stackrel{\text{деф}}{=} \{\langle q', q'' \rangle \in Q' \times Q'' \mid q' \in F' \ \vee \ q'' \in F''\} \\ &= F' \times Q'' \cup Q' \times F''. \end{aligned}$$

Друг подход е да се използва правилото на Де Морган, а именно:

$$L_1 \cup L_2 = \overline{\overline{L_1} \cap \overline{L_2}}.$$

□

2.2 Регулярни изрази и езици

Да фиксираме една непразна азбука Σ.

Регулярните изрази $\mathbf{r}$ могат да се опишат със следната абстрактна граматика

$$\mathbf{r} ::= \emptyset \mid \varepsilon \mid \mathbf{a} \mid (\boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_2) \mid (\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r_2}) \mid \boldsymbol{r}_1^\star.$$

Това е пример за индуктивна дефиниция

Регулярните изрази могат да се опишат и по следния начин:

- Символите $\emptyset$, ε са регулярни изрази;
- за всяка буква $a \in \Sigma$, символът $\boldsymbol{a}$ е регулярен израз;
- ако $\mathbf{r_1}$ и $\mathbf{r_2}$ са регулярни изрази, то думите $(\boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_2)$, $(\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2)$ и $\boldsymbol{r}_1^\star$ също са регулярни изрази;
- Всеки регулярен израз е получен по някое от горните правила.

В литературата също се среща записът $(\boldsymbol{r}_1 \mid \boldsymbol{r}_2)$ вместо $(\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2)$

Това е друг пример за индуктивна (рекурсивна) дефиниция.

Сега ще дефинираме езиците, които се описват с регулярни изрази. Тези езици се наричат **регулярни**. Това ще направим следвайки индуктивната дефиниция на регулярните изрази, т.е. за всеки регулярен израз $\mathbf{r}$ ще определим език $\mathcal{L}(\mathbf{r})$.

- $\emptyset$ е регулярен език, който се описва от регулярния израз $\emptyset$. Означаваме

$$\mathcal{L}(\emptyset) \stackrel{\text{деф}}{=} \emptyset;$$

- $\{\varepsilon\}$ е регулярен език, който се описва от регулярния израз $\boldsymbol{\varepsilon}$. Означаваме

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\varepsilon}) \stackrel{\text{деф}}{=} \{\varepsilon\};$$

- за всяка буква $a \in \Sigma$, $\{a\}$ е регулярен език, който се описва от регулярния израз $\mathbf{a}$. Означаваме

$$\mathcal{L}(\mathbf{a}) \stackrel{\text{деф}}{=} \{a\};$$

- Нека L_1 и L_2 са регулярни езици, т.е. съществуват регулярни изрази $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$, за които $\mathcal{L}(\mathbf{r}_1) = L_1$ и $\mathcal{L}(\mathbf{r}_2) = L_2$. Тогава:

  Понякога, когато приоритетът на операциите е ясен, ще изпускаме да пишем скоби.

  – $L_1 \cup L_2$ е регулярен език, който се описва с регулярния израз $(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)$. Тогава

$$\mathcal{L}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) \stackrel{\text{деф}}{=} \mathcal{L}(\mathbf{r}_1) \cup \mathcal{L}(\mathbf{r}_2).$$

  – $L_1 \cdot L_2$ е регулярен език, който се описва с регулярния израз $(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2)$. Тогава

  Тази операция се нарича конкатенация. Обикновено изпускаме знака $\cdot$

$$\mathcal{L}(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2) \stackrel{\text{деф}}{=} \mathcal{L}(\mathbf{r}_1) \cdot \mathcal{L}(\mathbf{r}_2).$$

  – $L_1^\star$ е регулярен език, който се описва с регулярния израз $\mathbf{r}_1^\star$. Тогава

  Звезда на Клини

$$\mathcal{L}(\mathbf{r}_1^\star) \stackrel{\text{деф}}{=} \mathcal{L}(\mathbf{r}_1)^\star.$$

Забележка. Ние знаем, че:

- Всеки регулярен израз представлява крайна дума над крайна азбука. Това означава, че множеството от всички регулярни изрази е изброимо безкрайно. Оттук следва, че всички регулярни езици образуват изброимо безкрайно множество.
- Понеже Σ е крайна азбука, то $\Sigma^\star$ е изброимо безкрайно множество;
- Един език над азбуката Σ представлява елемент на $\mathscr{P}(\Sigma^\star)$. Това означава, че всички езици над азбуката Σ представляват неизброимо безкрайно множество.

От всичко това следва, че има езици, които не са регулярни. По-нататък ще видим примери за такива езици.

Пример 2.2. Нека да построим регулярни изрази за всеки от езиците от *Пример 2.1*.

В [Sip12, стр. 70] е показан алгоритъм, за който по един автомат може да се получи регулярен израз описващ езика на автомата. Ние няма да разглеждаме този алгоритъм.

а) Нека $\mathbf{r} \stackrel{\text{деф}}{=} (\mathbf{a} + \mathbf{b})^\star\mathbf{bab}(\mathbf{a} + \mathbf{b})^\star$. Тогава

$$\mathcal{L}(\mathbf{r}) = \{\omega \in \{a, b\}^\star \mid \omega \text{ съдържа } bab\}.$$

б) Нека $\mathbf{r} \stackrel{\text{деф}}{=} \mathbf{b}^\star\mathbf{ab}^\star\mathbf{a}(\mathbf{a} + \mathbf{b})^\star$. Тогава

$$\mathcal{L}(\mathbf{r}) = \{\omega \in \{a, b\}^\star \mid |\omega|_a \geq 2\}.$$

в) Нека $\mathbf{r} \stackrel{\text{деф}}{=} (\mathbf{b} + \mathbf{ab})^\star$. Тогава

За момента не е ясно как можем да верифицираме дали регулярният израз $\mathbf{r}$ наистина описва посочения език.

$$\mathcal{L}(\mathbf{r}) = \{\omega \in \{a, b\}^\star \mid \text{ всяко } a \text{ в } \omega \text{ се следва от поне едно } b\}.$$

г) Нека $\mathbf{r} \stackrel{\text{деф}}{=} (\mathbf{b}^\star\mathbf{a}\mathbf{b}^\star\mathbf{a}\mathbf{b}^\star\mathbf{a}\mathbf{b}^\star)^\star$. Тогава

$$\mathcal{L}(\mathbf{r}) = \{\omega \in \{a,b\}^\star \mid |\omega|_a \equiv 0 \bmod 3\}.$$

Задача 2.5. За произволни регулярни изрази $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{s}$, ще пишем $\boldsymbol{r} \equiv \boldsymbol{s}$, ако $\mathcal{L}(\mathbf{r}) = \mathcal{L}(\mathbf{s})$. Проверете дали са изпълнени следните равенства:

а) $\boldsymbol{r} + \boldsymbol{s} \equiv \boldsymbol{s} + \boldsymbol{r}$;

б) $(\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{r})^\star \equiv \boldsymbol{r}^\star$;

в) $\boldsymbol{\emptyset}^\star \equiv \boldsymbol{\varepsilon}$;

г) $(\boldsymbol{r}^\star\boldsymbol{s}^\star)^\star \equiv (\boldsymbol{r} + \boldsymbol{s})^\star$;

д) $(\boldsymbol{r}^\star)^\star \equiv \boldsymbol{r}^\star$;

е) $(\boldsymbol{r}\boldsymbol{s} + \boldsymbol{r})^\star\boldsymbol{r} \equiv \boldsymbol{r}(\boldsymbol{s}\boldsymbol{r} + \boldsymbol{r})^\star$;

ж) $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{r}\boldsymbol{s} + \boldsymbol{s})^\star\boldsymbol{r} \equiv \boldsymbol{r}\boldsymbol{r}^\star\boldsymbol{s}(\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}^\star\boldsymbol{s})^\star$;

з) $(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{s})^\star \equiv \boldsymbol{r}^\star + \boldsymbol{s}^\star$;

и) $(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{s})^\star\boldsymbol{s} \equiv (\boldsymbol{r}^\star\boldsymbol{s})^\star$;

к) $(\boldsymbol{r}\boldsymbol{s} + \boldsymbol{r})^\star\boldsymbol{r}\boldsymbol{s} \equiv (\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}^\star\boldsymbol{s})^\star$;

л) $\boldsymbol{\emptyset}^\star \equiv \boldsymbol{\varepsilon}^\star$.

2.2.1 Всеки автоматен език е регулярен

Теорема 2.1 (Клини [Kle56]). Всеки автоматен език се описва с регулярен израз.

[PL98, стр. 79]; [HU79, стр. 33]

Доказателство. Нека $L = \mathcal{L}(\mathcal{A})$, за някой детерминиран краен автомат $\mathcal{A}$. Да фиксираме едно изброяване на състоянията $Q = \{q_0, \ldots, q_{n-1}\}$, като $q_{\texttt{start}} = q_0$. Ще означаваме с $L(i,j,k)$ множеството от тези думи, които могат да се разпознаят от автомата по път, който започва от q_i, завършва в q_j, и междинните състояния имат индекси $< k$. Например, за думата $\alpha = a_1a_2\cdots a_s$ имаме, че $\alpha \in L(i,j,k)$ точно тогава, когато съществуват състояния $q_{\ell_1}, \ldots, q_{\ell_{s-1}}$, като $\ell_1, \ldots, \ell_{s-1} < k$ и

$$q_i \stackrel{a_1}{\to} q_{\ell_1} \stackrel{a_2}{\to} q_{\ell_2} \stackrel{a_3}{\to} \ldots \stackrel{a_{s-1}}{\to} q_{\ell_{s-1}} \stackrel{a_s}{\to} q_j.$$

Тогава, за $n = |Q|$, имаме $L(i,j,n) = \{\alpha \in \Sigma^\star \mid \delta^\star(q_i,\alpha) = q_j\}$. Така получаваме, че

$$\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \bigcup\{L(0,j,n) \mid q_j \in F\} = \bigcup_{q_j \in F} L(0,j,n).$$

$\mathbf{r}^k_{i,j}$ са регулярни изрази.

Ще докажем с *индукция по* k, че $(\forall k \leq n)P(k)$, където

$$P(k) \stackrel{\text{деф}}{=} (\forall i < n)(\forall j < n)[L(i,j,k) = \mathcal{L}(\mathbf{r}^k_{i,j})].$$

а) Нека $k = 0$. Ще докажем, че за всеки две състояния $q_i, q_j \in Q$, езикът $L(i,j,0)$ се описва с регулярен израз. Имаме да разгледаме два случая.

- Ако $i = j$, то
$$L(i, j, 0) = \{\varepsilon\} \cup \{a \in \Sigma \mid \delta(q_i, a) = q_j\}. \tag{2.4}$$
- Ако $i \neq j$, то
$$L(i, j, 0) = \{a \in \Sigma \mid \delta(q_i, a) = q_j\}.$$

И в двата случая, понеже $L(i, j, 0)$ е краен език, то е ясно, че той се описва с регулярен израз. Така доказахме $P(0)$.

б) Да предположим, че за всяко $q_i, q_j \in Q$ имаме регулярните изрази $\mathbf{r}_{i,j}^k$, които описват езиците $L(i, j, k)$, т.е. имаме индукционното предположение $P(k)$, за което
$$(\forall i < n)(\forall j < n)[L(i, j, k) = \mathcal{L}(\mathbf{r}_{i,j}^k)].$$

Ще докажем $P(k + 1)$, т.е. съществуват регулярни изрази $\mathbf{r}_{i,j}^{k+1}$, такива че
$$(\forall i < n)(\forall j < n)[L(i, j, k + 1) = \mathcal{L}(\mathbf{r}_{i,j}^{k+1})].$$

За всяка дума $\alpha \in L(i, j, k + 1)$ имаме един от следните случаи:

- Състоянието q_k не е измежду вътрешните състояния, които участват в изчислението на автомата $\mathcal{A}$ върху думата α, т.е. имаме следната ситуация:
$$q_i \xrightarrow{a_1} q_{\ell_1} \xrightarrow{a_2} q_{\ell_2} \xrightarrow{a_3} \ldots \xrightarrow{a_{s-1}} q_{\ell_{s-1}} \xrightarrow{a_s} q_j,$$
където $\ell_1, \ldots, \ell_{s-1} < k$. Това означава, че $\alpha \in L(i, j, k)$.
- Състоянието q_k е измежду вътрешните състояния, които участват в изчислението на автомата $\mathcal{A}$ върху думата α. Ако състоянието q_k се среща да кажем m пъти, то можем да представим думата α като $\alpha = \alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_{m+1}$ и имаме следната ситуация:
$$q_i \to \overset{\alpha_1}{\cdots} \to q_k \to \overset{\alpha_2}{\cdots} \to q_k \to \cdots \to q_k \to \overset{\alpha_{m+1}}{\cdots} \to q_j,$$
За всяко $\ell = 1, \ldots, m + 1$, състоянието q_k не е измежду вътрешните състояния, които участват в изчислението на автомата $\mathcal{A}$ върху α_ℓ, т.е. индексите на всички вътрешни състояния са $< k$. Това означава, че $\alpha_1 \in L(i, k, k)$, $\alpha_\ell \in L(k, k, k)$ за $\ell = 2, \ldots, m$, и $\alpha_{m+1} \in L(k, j, k)$, т.е.

Възможно е $m = 1$. Тогава $L(k, k, k)^{m-1} = \{\varepsilon\}$.

$$\alpha \in L(i, k, k) \cdot L(k, k, k)^{m-1} \cdot L(k, j, k).$$

Понеже направихме това разсъждение за произволно m, можем да заключим, че ако q_k се среща измежду вътрешните състояния, които участва в изчислението на автомата $\mathcal{A}$ върху думата α, то
$$\alpha \in L(i, k, k) \cdot L(k, k, k)^\star \cdot L(k, j, k).$$

Така доказахме, че

$$L(i,j,k+1) \subseteq L(i,j,k) \cup L(i,k,k) \cdot L(k,k,k)^\star \cdot L(k,j,k).$$

✍ Защо?

Включването в другата посока следва директно от дефиницията на езиците $L(i,j,k)$. От направените по-горе разсъждения следва, че можем да изразим $L(i,j,k+1)$ по следния начин:

$$L(i,j,k+1) = \underbrace{L(i,j,k)}_{\mathcal{L}(\mathbf{r}^k_{i,j})} \cup \underbrace{L(i,k,k)}_{\mathcal{L}(\mathbf{r}^k_{i,k})} \cdot \underbrace{(L(k,k,k))^\star}_{\mathcal{L}(\mathbf{r}^k_{k,k})} \cdot \underbrace{L(k,j,k)}_{\mathcal{L}(\mathbf{r}^k_{k,j})}.$$

Тогава по **И.П.** следва, че $L(i,j,k+1)$ може да се опише с регулярния израз

$$\mathbf{r}^{k+1}_{i,j} = \mathbf{r}^k_{i,j} + \mathbf{r}^k_{i,k} \cdot (\mathbf{r}^k_{k,k})^\star \cdot \mathbf{r}^k_{k,j}. \tag{2.5}$$

Така доказахме $P(k+1)$.

Заключаваме, че за всеки два индекса $i,j < |Q|$ и индекс $k \leq |Q|$, езикът $L(i,j,k)$ може да се опише с регулярен израз $\mathbf{r}^k_{i,j}$. Тогава ако $F = \{q_{i_1}, \ldots, q_{i_m}\}$, то $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ се описва с регулярния израз

$$\mathbf{r}^n_{0,i_1} + \mathbf{r}^n_{0,i_2} + \cdots + \mathbf{r}^n_{0,i_m}.$$

□

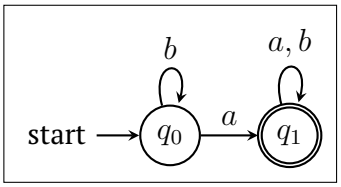
Естествено, можем да формулираме това твърдение и за краен недетерминиран автомат.

Твърдение 2.5. Съществува алгоритъм, за който при вход краен детерминиран автомат $\mathcal{A}$, извежда като изход регулярен израз $\mathbf{r}$, такъв че $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \mathcal{L}(\mathbf{r})$.

Доказателството на това твърдение използва идеята от доказателството на теоремата на Клини но излиза извън рамките на този курс. За подробно изложение на този въпрос, вижте [Sip12, стр. 69]. Възможно е по-късно да използваме този резултат наготово. Нека поне да разгледаме един пример, чиято цел е да ни убеди, че наистина може да се извлече алгоритъм от доказателството на теоремата на Клини.

2.2.2 Примерни задачи

Задача 2.6. Приложете конструкцията от теоремата на Клини за да получите регулярен израз, който описва езика на автомата $\mathcal{A}$ изобразен на Фигура 2.6.



Фигура 2.6: $\mathcal{L}(\mathcal{A}) \stackrel{?}{=} \mathcal{L}(\mathbf{b}^\star\mathbf{a}(\mathbf{a}+\mathbf{b})^\star)$

Решение. Лесно се съобразява, че езикът на автомата от *Фигура 2.6* се описва с регулярния израз $\mathbf{b}^\star\mathbf{a}(\mathbf{a}+\mathbf{b})^\star$. Следвайки означенията и конструкцията от доказателството на теоремата на Клини, езикът на този автомат се описва с регулярния израз $\mathbf{r}^2_{0,1}$, защото началното състояние е q_0, финалното е q_1 и броят на състоянията в автомата е 2. Подробните сметки са следните:

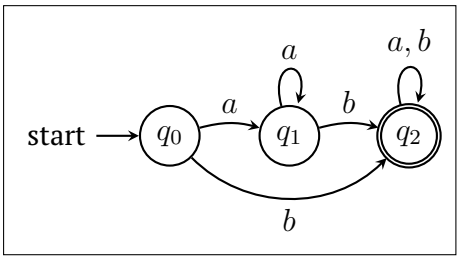
$$\begin{aligned}
r^2_{0,1} &= \underbrace{r^1_{0,1}}_{b^\star a} + \underbrace{r^1_{0,1}}_{b^\star a} \cdot \underbrace{(r^1_{1,1})^\star}_{(\varepsilon+\mathbf{a}+\mathbf{b})^\star} \cdot \underbrace{\mathbf{r}^1_{1,1}}_{\varepsilon+\mathbf{a}+\mathbf{b}} && \text{// според (2.5)}\\
&= \mathbf{b}^\star\mathbf{a} + \mathbf{b}^\star\mathbf{a}(\varepsilon+\mathbf{a}+\mathbf{b})^\star(\varepsilon+\mathbf{a}+\mathbf{b}) && \text{// просто заместваме}\\
&= \mathbf{b}^\star\mathbf{a} + \mathbf{b}^\star\mathbf{a}(\varepsilon+\mathbf{a}+\mathbf{b})^+ && \text{// } \mathbf{r}^+ \overset{\text{деф}}{=} \mathbf{r}^\star\mathbf{r}\\
&= \mathbf{b}^\star\mathbf{a} + \mathbf{b}^\star\mathbf{a}(\mathbf{a}+\mathbf{b})^\star && \text{// } \mathbf{r}^\star = (\varepsilon+\mathbf{r})^+\\
&= \mathbf{b}^\star\mathbf{a}(\varepsilon + (\mathbf{a}+\mathbf{b})^\star) && \text{// } \mathbf{r}+\mathbf{rq} = \mathbf{r}(\varepsilon+\mathbf{q})\\
&= \mathbf{b}^\star\mathbf{a}(\mathbf{a}+\mathbf{b})^\star. && \text{// } \mathbf{r}^\star = \varepsilon + \mathbf{r}^\star
\end{aligned}$$

Тук използвахме, че:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}^{\mathbf{1}}_{\mathbf{0},\mathbf{1}} &= \underbrace{\mathbf{r}^0_{0,1}}_{\mathbf{a}} + \underbrace{\mathbf{r}^0_{0,0}}_{\varepsilon+b} \cdot \underbrace{(\mathbf{r}^{\mathbf{0}}_{\mathbf{0},\mathbf{0}})^\star}_{(\varepsilon+b)^\star} \cdot \underbrace{\mathbf{r}^{\mathbf{0}}_{\mathbf{0},\mathbf{1}}}_{\mathbf{b}} && \text{// според (2.5)}\\
&= a + (\varepsilon+b)(\varepsilon+b)^\star a && \text{// просто заместваме}\\
&= \mathbf{a} + \mathbf{b}^\star\mathbf{a} && \text{// } \mathbf{r}^\star = \varepsilon + \mathbf{r}^\star\\
&= \mathbf{b}^\star\mathbf{a}\\
\mathbf{r}^b_{b,b} &= \underbrace{\mathbf{r}^a_{b,b}}_{\varepsilon+a+b} + \underbrace{\mathbf{r}^a_{b,a}}_{\emptyset} \cdot \underbrace{(\mathbf{r}^a_{a,a})^\star}_{\varepsilon+b} \cdot \underbrace{\mathbf{r}^a_{a,b}}_{a} && \text{// отново според (2.5)}\\
&= \varepsilon + a + b + \emptyset(\varepsilon+b)^\star a && \text{// просто заместваме}\\
&= \varepsilon + a + b. && \text{// защото } \emptyset\cdot r = \emptyset
\end{aligned}$$

□

Задача 2.7. Приложете конструкцията от теоремата на Клини за да получите регулярен израз, който описва езика на автомата $\mathcal{A}$ изобразен на Фигура 2.7.



Фигура 2.7: $\mathcal{L}(\mathcal{A}) \overset{?}{=} \mathcal{L}(\mathbf{a}^\star\mathbf{b}(\mathbf{a}+\mathbf{b})^\star)$.

Решение. От теоремата на Клини знаем, че $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \mathcal{L}(\mathbf{r}^3_{0,2})$, където:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}^3_{0,2} &= \underbrace{\mathbf{r}^2_{0,2}}_{a^\star b} + \underbrace{\mathbf{r}^2_{0,2}}_{a^\star b} \cdot \underbrace{(\mathbf{r}^2_{2,2})^\star}_{(\varepsilon+a+b)^\star} \cdot \underbrace{\mathbf{r}^2_{2,2}}_{\varepsilon+a+b} && \text{// според (2.5)}\\
&= a^\star b + a^\star b \cdot (a+b)^\star \cdot (\varepsilon+a+b) && \text{// просто заместваме}\\
&= a^\star b + a^\star b \cdot (a+b)^\star && \text{// } r^\star = r^\star\cdot(\varepsilon+r)\\
&= a^\star b(\varepsilon + (a+b)^\star) && \text{// } r_1 + r_1\cdot r_2 = r_1\cdot(\varepsilon+r_2)\\
&= a^\star b(a+b)^\star. && \text{// } r^\star = \varepsilon + r^\star
\end{aligned}$$

Тук използвахме, че:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}^2_{0,2} &= \underbrace{\mathbf{r}^1_{0,2}}_{\boldsymbol{b}} + \underbrace{\mathbf{r}^1_{0,1}}_{\boldsymbol{a}} \cdot \underbrace{(\mathbf{r}^1_{1,1})^\star}_{\boldsymbol{a}} \cdot \underbrace{\mathbf{r}^1_{1,2}}_{\boldsymbol{b}} && \text{// според (2.5)} \\
&= \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}^\star \cdot \boldsymbol{b} && \text{// просто заместваме} \\
&= (\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{a}^+) \cdot \boldsymbol{b} && \text{// } \mathbf{r}^+ \stackrel{\text{деф}}{=} \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}^\star \\
&= \boldsymbol{a}^\star \boldsymbol{b}. && \text{// } \mathbf{r}^\star = \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{r}^+.
\end{aligned}$$

Заключаваме, че $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \mathcal{L}(\mathbf{a}^\star\mathbf{b}(\mathbf{a}+\mathbf{b})^\star)$. □

2.3 Недетерминирани крайни автомати

Въведени от Рабин и Скот [RS59]. За по-голяма яснота, често ще означаваме с $\mathcal{N}$ недетерминирани автомати, като ще запазим $\mathcal{A}$ за детерминираните. Мотивация - [Koz97, стр. 25].

Определение 2.2. Недетерминиран краен автомат представлява петорка

$$\mathcal{N} = \langle \Sigma, Q, Q_{\texttt{start}}, \Delta, F \rangle,$$

- Q е крайно множество от състояния;
- Σ е крайна азбука;
- $\Delta : Q \times \Sigma \to \mathscr{P}(Q)$ е функцията на преходите. Да обърнем внимание, че е възможно за някоя двойка (q, a) да няма нито един преход в автомата. Това е възможно, когато $\Delta(q, a) = \emptyset$;
- $Q_{\texttt{start}} \subseteq Q$ е множество от начални състояния;
- $F \subseteq Q$ е множеството от финални състояния.

Да напомним, че $\mathscr{P}(Q) \stackrel{\text{деф}}{=} \{R \mid R \subseteq Q\}$, $|\mathscr{P}(Q)| = 2^{|Q|}$

В [PL98] Δ е релация и се позволяват ε-преходи. В [Sip12] пък е функция, но пак се позволяват ε-преходи. В [HU79] е функция без ε-преходи. Навсякъде има само едно начално.

Удобно е да разширим функцията на преходите $\Delta : Q \times \Sigma \to \mathscr{P}(Q)$ до функцията $\Delta^\star : \mathscr{P}(Q) \times \Sigma^\star \to \mathscr{P}(Q)$, която дефинираме за произволно $R \subseteq Q$ и $\alpha \in \Sigma^\star$ по следния начин:

- Ако $\alpha = \varepsilon$, то $\Delta^\star(R, \varepsilon) \stackrel{\text{деф}}{=} R$;
- Ако $\alpha = \beta a$, то $\Delta^\star(R, \alpha b) \stackrel{\text{деф}}{=} \bigcup\{\Delta(p, b) \mid p \in \Delta^\star(R, \alpha)\}$.

Да напомним, че $\bigcup\{\{0,1\},\{1,2,3\}\} = \{0,1\} \cup \{1,2,3\}$.

$$\mathcal{L}(\mathcal{N}) \stackrel{\text{деф}}{=} \{\omega \in \Sigma^\star \mid \Delta^\star(Q_{\texttt{start}}, \omega) \cap F \neq \emptyset\}.$$

Обърнете внимание, че според нашата дефиниция е изпълнено следното:

$$\Delta^\star(R, a) = \bigcup\{\Delta(r, a) \mid r \in R\}. \tag{2.6}$$

Тогава за произволна дума α и буква b имаме, че

$$\Delta^\star(R, \alpha b) = \Delta^\star(\Delta^\star(R, \alpha), b), \tag{2.7}$$

защото

$$\begin{aligned}
\Delta^\star(R, \alpha b) &= \bigcup\{\Delta(r, b) \mid r \in \Delta^\star(R, \alpha)\} && \text{// деф.} \\
&= \bigcup\{\Delta(r, b) \mid r \in U\} && \text{// } U \overset{\text{деф}}{=} \Delta^\star(R, \alpha) \\
&= \Delta^\star(U, b) && \text{// от (2.6)} \\
&= \Delta^\star(\Delta^\star(R, \alpha), b). && \text{// } U \overset{\text{деф}}{=} \Delta^\star(R, \alpha)
\end{aligned}$$

Ще видим, че това свойство е изпълнено и за произволни думи β вместо само за букви b.

Твърдение 2.6. За всеки две думи $\alpha, \beta \in \Sigma^\star$ и всяко $R \subseteq Q$,

Сравенете с *Твърдение 2.1*.

$$\Delta^\star(R, \alpha\beta) = \Delta^\star(\Delta^\star(R, \alpha), \beta).$$

Доказателство. Отново индукция по дължината на β.

- Нека $|\beta| = 0$, т.е. $\beta = \varepsilon$. Тогава:

$$\begin{aligned}
\Delta^\star(R, \alpha\varepsilon) &= \Delta^\star(R, \alpha) && \text{// } \alpha\varepsilon = \alpha \\
&= \Delta^\star(\Delta^\star(R, \alpha), \varepsilon). && \text{// деф. на } \Delta^\star
\end{aligned}$$

- Да приемем, че твърдението е вярно за думи β с дължина n.
- Нека $|\beta| = n + 1$, т.е. $\beta = \gamma b$, където $|\gamma| = n$.

$$\begin{aligned}
\Delta^\star(R, \alpha\gamma b) &= \Delta^\star(\Delta^\star(R, \alpha\gamma), b) && \text{// от (2.7)} \\
&= \Delta^\star(\Delta^\star(\Delta^\star(R, \alpha), \gamma), b) && \text{// от И.П. за } \gamma \\
&= \Delta^\star(\Delta^\star(U, \gamma), b) && \text{// нека } U \overset{\text{деф}}{=} \Delta^\star(R, \alpha) \\
&= \Delta^\star(U, \gamma b) && \text{// от (2.7)} \\
&= \Delta^\star(U, \beta) && \text{// защото } \beta = \gamma b \\
&= \Delta^\star(\Delta^\star(R, \alpha), \beta). && \text{// защото } U = \Delta^\star(R, \alpha)
\end{aligned}$$

□

И тук е удобно да въведем бинарната релация $\vdash_{\mathcal{N}}$ над $Q \times \Sigma^\star$, която ще ни казва как моментното описание на автомата $\mathcal{N}$ се променя след изпълнение на една стъпка:

$$(q, a\beta) \vdash_{\mathcal{N}} (p, \beta), \text{ ако } p \in \Delta(q, a).$$

Рефлексивното и транзитивно затваряне на $\vdash_{\mathcal{N}}$ ще означаваме с $\vdash^\star_{\mathcal{N}}$. За да дадем по-ясна дефиниция на $\vdash^\star_{\mathcal{N}}$, първо ще дефинираме релацията $\vdash^n_{\mathcal{N}}$, която определя работата на автомата $\mathcal{N}$ за n на брой стъпки.

Рефл. и транз. затваряне на една релация е разгледано в Глава 1

$$\frac{}{(q, \alpha) \vdash^0_{\mathcal{N}} (q, \alpha)} \qquad \frac{(q, \alpha) \vdash^n_{\mathcal{N}} (r, b\beta) \quad p \in \Delta(r, b)}{(q, \alpha) \vdash^{n+1}_{\mathcal{N}} (p, \beta)}$$

Сега можем да дефинираме $\vdash^\star_{\mathcal{N}}$ като:

$$(q,\alpha) \vdash^\star_{\mathcal{N}} (p,\beta) \overset{\text{деф}}{\Leftrightarrow} (\exists n \in \mathbb{N})[(q,\alpha) \vdash^n_{\mathcal{N}} (p,\beta)].$$

Добре е дефиницията на $\vdash^n_{\mathcal{N}}$ да е съгласувана с дефиницията на $\Delta^\star$. Алтернативна дефиниция в този случай е следната:

$$\frac{(r,\alpha) \vdash^n_{\mathcal{N}} (p,\beta) \quad r \in \Delta(q,b)}{(q,b\alpha) \vdash^{n+1}_{\mathcal{N}} (p,\beta)}$$

Друг начин да дефинираме релацията $\vdash^\star_{\mathcal{N}}$ е следния:

$$(q,\alpha\beta) \vdash^\star_{\mathcal{N}} (p,\beta) \Leftrightarrow p \in \Delta^\star(\{q\},\alpha).$$

Получаваме, че

$$\mathcal{L}(\mathcal{N}) = \{\alpha \in \Sigma^\star \mid (\exists q \in Q_{\mathtt{start}})(\exists f \in F)[(q,\alpha) \vdash^\star_{\mathcal{N}} (f,\varepsilon)]\}.$$

Теорема 2.2 (Рабин-Скот [RS59]). За всеки недетерминиран краен автомат $\mathcal{N}$ съществува еквивалентен на него детерминиран краен автомат $\mathcal{D}$, т.е.

$$\mathcal{L}(\mathcal{N}) = \mathcal{L}(\mathcal{D}).$$

Упътване. Нека $\mathcal{N} = \langle \Sigma, Q, Q_{\mathtt{start}}, \Delta, F\rangle$. Ще построим детерминиран автомат

$$\mathcal{D} = (Q', \Sigma, \delta, q_{\mathtt{start}}, F'),$$

за който $\mathcal{L}(\mathcal{N}) = \mathcal{L}(\mathcal{D})$. Конструкцията е следната:

Да отбележим, че детерминираният автомат $\mathcal{D}$ има не повече от $2^{|Q|}$ на брой състояния. Реално на нас ни трябват само тези множества R, за които съществува дума α и $\Delta^\star(Q_{\mathtt{start}},\alpha) = R$.

- $Q' = \{\ulcorner R \urcorner \mid R \subseteq Q\}$;
- За произволна буква $a \in \Sigma$ и произволно $R \subseteq Q$,

$$\delta(\ulcorner R \urcorner, a) \overset{\text{деф}}{=} \ulcorner \Delta^\star(R,a) \urcorner.$$

- $q_{\mathtt{start}} = \ulcorner Q_{\mathtt{start}} \urcorner$;
- $F' \overset{\text{деф}}{=} \{\ulcorner R \urcorner \in Q' \mid R \cap F \neq \emptyset\}$.

Тук използваме $\ulcorner R \urcorner$ за да покажем в явен вид, че в новия автомат кодираме множества от състояния на стария.

Ще докажем, че за произволна дума α и произволно множество $R \subseteq Q$ е изпълнено, че:

$$\ulcorner \Delta^\star(R,\alpha) \urcorner = \delta^\star(\ulcorner R \urcorner, \alpha). \tag{2.8}$$

Това ще направим с индукция по дължината на думата α.

- Ако $|\alpha| = 0$, т.е. $\alpha = \varepsilon$, то е ясно от дефиницията на $\Delta^\star$ и $\delta^\star$, т.е. за всяко $R \subseteq Q$ е изпълнено, че:
$$\ulcorner \Delta^\star(R,\varepsilon) \urcorner = \ulcorner R \urcorner = \delta^\star(\ulcorner R \urcorner, \varepsilon).$$
- Да приемем, че (2.8) е изпълнено за думи α с дължина n, т.е.

$$(\forall \alpha \in \Sigma^n)(\forall R \subseteq Q)[\ \ulcorner \Delta^\star(R,\alpha) \urcorner = \delta^\star(\ulcorner R \urcorner, \alpha)\ ].$$

- Нека сега α има дължина $n+1$, т.е. $\alpha = \beta a$, където $|\beta| = n$ и $a \in \Sigma$.

$$\begin{aligned}
\delta^\star(\ulcorner R \urcorner, \beta a) &= \delta(\delta^\star(\ulcorner R \urcorner, \beta a)) && \text{// деф. на } \delta^\star \\
&= \delta(\ulcorner \Delta^\star(R, \beta) \urcorner, a) && \text{// от И.П. за } \beta \\
&= \ulcorner \Delta^\star(\Delta^\star(R, \beta), a) \urcorner && \text{// от деф. на } \delta \\
&= \ulcorner \Delta^\star(R, \beta a) \urcorner. && \text{// от } \textit{Твърдение 2.6}
\end{aligned}$$

  Така доказахме, че

$$(\forall \alpha \in \Sigma^{n+1})(\forall R \subseteq Q)[\, \ulcorner \Delta^\star(R, \alpha) \urcorner = \delta^\star(\ulcorner R \urcorner, \alpha)\,].$$

  Това означава, че според принципа на математическата индукция имаме Свойство (2.8).

Сега вече е лесно да съобразим, че

$$\begin{aligned}
\omega \in \mathcal{L}(\mathcal{D}) &\Leftrightarrow \delta^\star(q_{\texttt{start}}, \omega) \in F' && \text{// деф. на } \mathcal{L}(\mathcal{D}) \\
&\Leftrightarrow \Delta^\star(Q_{\texttt{start}}, \omega) \cap F \neq \emptyset && \text{// от (2.8)} \\
&\Leftrightarrow \omega \in \mathcal{L}(\mathcal{N}) && \text{// деф. на } \mathcal{L}(\mathcal{N}).
\end{aligned}$$

□

Хубаво е да има един пример за детерминизация.

По-късно ще видим, че можем да дадем и друго доказателство на това твърдение, като направим индукция по построението на регулярните езици.

Задача 2.8. Докажете, че автоматните езици са затворени относно операцията $\texttt{rev}$. С други думи, докажете, че ако L е автоматен език, то $L^{\texttt{rev}} \stackrel{\text{деф}}{=} \{\omega^{\texttt{rev}} \mid \omega \in L\}$ също е автоматен.

Упътване. Идеята е съвсем проста - просто обръщаме стрелките и правим финалните състояния да са начални, а началното става финално. Нека $L = \mathcal{L}(\mathcal{A})$. Ще построим НКА $\mathcal{N}$, за който $\mathcal{L}(\mathcal{N}) = L^{\texttt{rev}}$.

- $Q^{\mathcal{N}} = Q^{\mathcal{A}}$;
- $Q_{\texttt{start}} = F^{\mathcal{A}}$;
- $\Delta_{\mathcal{N}}(q, a) = \{p \in Q^{\mathcal{A}} \mid \delta_{\mathcal{A}}(p, a) = q\}$;
- $F^{\mathcal{N}} = \{q_{\texttt{start}}\}$.

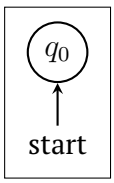
Достатъчно е да се докаже, че $\Delta^\star_{\mathcal{N}}(Q_{\texttt{start}}, \alpha) = \{q \in Q^{\mathcal{A}} \mid \delta^\star_{\mathcal{A}}(q, \alpha^{\texttt{rev}}) \in F^{\mathcal{A}}\}$. □

Лема 2.1. Езикът L е автоматен, където:

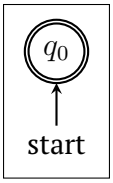
- $L = \emptyset$,
- $L = \{\varepsilon\}$, или
- $L = \{a\}$, за произволна буква $a \in \Sigma$.

Упътване. Достатъчно е да покажем, че съществуват недетерминирани крайни автомати $\mathcal{N}$.

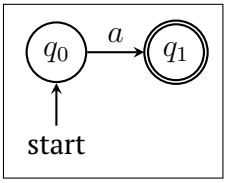
Според нашата дефиниция, тук описваме недетерминирани автомати, защото за да бъдат детерминирани, трябва функцията на преходите да бъде тотална.



(а) $L(\mathcal{N}) = \emptyset$



(б) $\mathcal{L}(\mathcal{N}) = \{\varepsilon\}$



(в) $\mathcal{L}(\mathcal{N}) = \{a\}$

□

2.3.1 Затвореност относно конкатенация

Лема 2.2. Класът на автоматните езици е затворен относно операцията *конкатенация*. Това означава, че ако L_1 и L_2 са два произволни автоматни езика, то $L_1 \cdot L_2$ също е автоматен език.

Тук отново приемаме, че $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$.

Доказателство. Нека за по-просто да вземем два детерминирани крайни автомата:

- $\mathcal{A}_1 = \langle \Sigma, Q_1, \delta_1, q'_{\texttt{start}}, F_1 \rangle$, където $\mathcal{L}(\mathcal{A}_1) = L_1$;
- $\mathcal{A}_2 = \langle \Sigma, Q_2, \delta_2, q''_{\texttt{start}}, F_2 \rangle$, където $\mathcal{L}(\mathcal{A}_2) = L_2$.

Ще дефинираме автомата $\mathcal{N} = \langle \Sigma, Q, Q_{\texttt{start}}, \Delta, F \rangle$ по такъв начин, че

$$\mathcal{L}(\mathcal{N}) = L_1 \cdot L_2 = \mathcal{L}(\mathcal{A}_1) \cdot \mathcal{L}(\mathcal{A}_2).$$

- $Q \stackrel{\text{деф}}{=} Q_1 \cup Q_2$;
- $Q_{\texttt{start}} \stackrel{\text{деф}}{=} \{q'_{\texttt{start}}\}$;
- $F \stackrel{\text{деф}}{=} \begin{cases} F_1 \cup F_2, & \text{ако } q''_{\texttt{start}} \in F_2 \\ F_2, & \text{иначе.} \end{cases}$
- $\Delta(q,a) \stackrel{\text{деф}}{=} \begin{cases} \{\delta_1(q,a)\}, & \text{ако } q \in Q_1 \setminus F_1 \;\&\; a \in \Sigma \\ \{\delta_1(q,a), \delta_2(q''_{\texttt{start}}, a)\}, & \text{ако } q \in F_1 \;\&\; a \in \Sigma \\ \{\delta_2(q,a)\}, & \text{ако } q \in Q_2 \;\&\; a \in \Sigma. \end{cases}$

Първо ще докажем, че

$$\mathcal{L}(\mathcal{A}_1) \cdot \mathcal{L}(\mathcal{A}_2) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{N}).$$

За целта, нека разгледаме думата $\alpha \in \mathcal{L}(\mathcal{A}_1)$ и $\beta \in \mathcal{L}(\mathcal{A}_2)$. Това означава, че имаме следните изчисления:

$$(q'_{\texttt{start}}, \alpha) \vdash^\star_{\mathcal{A}_1} (q_1, \varepsilon), \text{ за някое } q_1 \in F_1$$
$$(q''_{\texttt{start}}, \beta) \vdash^\star_{\mathcal{A}_2} (q_2, \varepsilon), \text{ за някое } q_2 \in F_2.$$

Според дефиницията на недетерминирания краен автомат $\mathcal{N}$ е ясно, че:

$$(q'_{\texttt{start}}, \alpha) \vdash^{\star}_{\mathcal{N}} (q_1, \varepsilon), \text{ за някое } q_1 \in F_1.$$

Ако $\beta = \varepsilon$, то това означава, че $q''_{\texttt{start}} \in F_2$ и следователно $F_1 \subseteq F$. Тогава получаваме, че $\alpha \cdot \beta = \alpha \in \mathcal{L}(\mathcal{N})$, защото

$$(q'_{\texttt{start}}, \alpha) \vdash^{\star}_{\mathcal{N}} (q_1, \varepsilon), \text{ за някое } q_1 \in F_1 \subseteq F.$$

Ако $\beta = b\gamma$, за някоя дума $\gamma \in \Sigma^{\star}$, то тогава можем да разбием изчислението на β в $\mathcal{A}_2$ по следния начин:

$$(q''_{\texttt{start}}, b\gamma) \vdash_{\mathcal{A}_2} (q, \gamma) \vdash^{\star}_{\mathcal{A}_2} (q_2, \varepsilon), \text{ за някое } q_2 \in F_2,$$

където $q = \delta_2(q''_{\texttt{start}}, b)$.

Според дефиницията на недетерминирния краен автомат $\mathcal{N}$ е ясно, че:

$$(q, \gamma) \vdash^{\star}_{\mathcal{N}} (q_2, \varepsilon), \text{ за някое } q_2 \in F_2.$$

Освен това, имаме, че $q \in \Delta(q_1, b)$, защото $q_1 \in F_1$. Това означава, че

$$(q_1, b\gamma) \vdash_{\mathcal{N}} (q, \gamma).$$

Съединявайки последните две изчисления, получаваме, че:

$$(q_1, \beta) \vdash^{\star}_{\mathcal{N}} (q_2, \varepsilon), \text{ за някое } q_2 \in F_2.$$

Сега съединяваме и изчислението за α и получаваме, че:

$$(q'_{\texttt{start}}, \alpha\beta) \vdash^{\star}_{\mathcal{N}} (q_1, \beta) \vdash^{\star}_{\mathcal{N}} (q_2, \varepsilon), \text{ за някое } q_2 \in F_2.$$

Оттук заключаваме, че във всички случаи за β, $\alpha \cdot \beta \in \mathcal{L}(\mathcal{N})$.

Сега ще докажем, че

$$\mathcal{L}(\mathcal{N}) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{A}_1) \cdot \mathcal{L}(\mathcal{A}_2).$$

За целта, нека разгледаме думата $\omega \in \mathcal{L}(\mathcal{N})$, където $\omega = a_0 a_1 \cdots a_{n-1}$. Да разгледаме една редица от състояния $(q_i)_{i=0}^{n}$, която описва приемащо изчисление на $\mathcal{N}$ върху ω. Това означава, че:

Възможно е да има и други редици от състояния $(p_i)_{i=0}^{n}$, които да описват приемащи изчисления на $\mathcal{N}$ върху ω.

- $q_0 = q_{\texttt{start}}$;
- $q_{i+1} \in \Delta(q_i, \omega[i])$ за $i < n$;
- $q_n \in F$.

Ако $q_n \in F_1$, то според конструкцията на $\mathcal{N}$, $\varepsilon \in \mathcal{L}(\mathcal{A}_2)$ и всяко състояние от $(q_i)_{i=0}^{n}$ принадлежи на Q_1 и оттам $\omega \in \mathcal{L}(\mathcal{A}_1)$. Интересният случай е когато $q_n \in F_2$. Според конструкцията на $\mathcal{N}$, не можем да преминем от състояние от Q_2 в състояние от Q_1. Това означава, че можем да разбием редицата от състояния $(q_i)_{i=0}^{n}$ на две непразни подредици:

- $(q_i)_{i=0}^{\ell}$ - тези които са от Q_1,
- $(q_i)_{i=\ell+1}^{n}$ - тези, които са от Q_2.

Нека $\alpha = \omega[:\ell]$ и $\beta = \omega[\ell:]$. Ясно е, че:

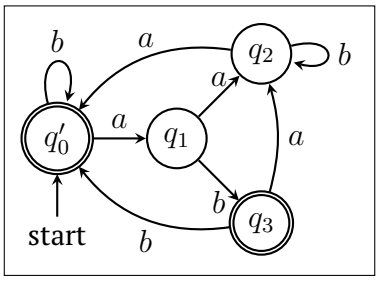
$$(q_0, \omega) \vdash_{\mathcal{N}}^{\star} (q_\ell, \omega[\ell:]) \vdash_{\mathcal{N}} (q_{\ell+1}, \omega[\ell+1:]) \vdash_{\mathcal{N}}^{\star} (q_n, \varepsilon).$$

Това е единственият начин да направим преход от състояние на Q_1 към състояние на Q_2.

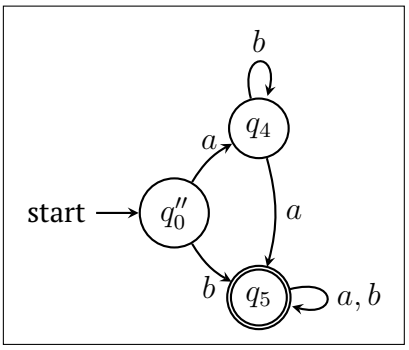
От конструкцията на $\mathcal{N}$ следва, че редицата от състояния $(q_i)_{i=0}^{\ell}$ описва приемащо изчисление на $\mathcal{A}_1$ върху α. Също така от конструкцията следва, че щом $q_{\ell+1} \in \Delta(q_\ell, a_\ell)$, то $q_\ell \in F_1$ и $\delta_2(q''_{\texttt{start}}, a_\ell) = q_{\ell+1}$. Заключаваме, че:

- $(q_0, \alpha) \vdash_{\mathcal{A}_1}^{\star} (q_\ell, \varepsilon)$. Понеже $q_0 = q'_{\texttt{start}}$ и $q_\ell \in F_1$, то $\alpha \in \mathcal{L}(\mathcal{A}_1)$.
- $(q''_{\texttt{start}}, \beta) \vdash_{\mathcal{A}_2}^{\star} (q_n, \varepsilon)$. Понеже $q_n \in F_2$, то $\beta \in \mathcal{L}(\mathcal{A}_2)$.

□

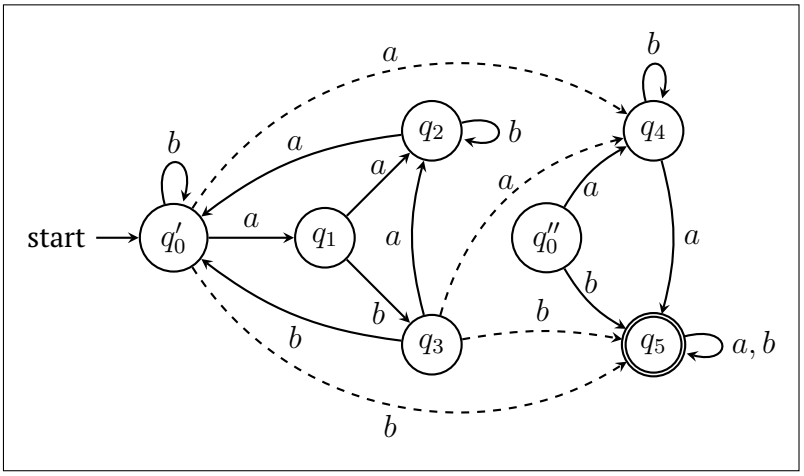


(а) автомат $\mathcal{A}_1$



(б) автомат $\mathcal{A}_2$

Пример 2.3. За да построим автомат, който разпознава конкатенацията на $\mathcal{L}(\mathcal{A}_1)$ и $\mathcal{L}(\mathcal{A}_2)$, трябва да свържем финалните състояния на $\mathcal{A}_1$ с изходящите от s_2 състояния на $\mathcal{A}_2$.



Фигура 2.11: $\mathcal{L}(\mathcal{N}) = \mathcal{L}(\mathcal{A}_1) \cdot \mathcal{L}(\mathcal{A}_2)$

Обърнете внимание, че $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ са детерминирани автомати, но $\mathcal{N}$ е недетерминиран. Също така, в този пример се оказва, че вече q_0'' е недостижимо състояние, но в общия случай не можем да го премахнем, защото може да има преходи влизащи в q_0''.

2.3.2 Затвореност относно обединение

Лема 2.3. Класът от автоматните езици е затворен относно операцията *обединение*.

Второ доказателство на това твърдение.

Упътване. Нека са дадени детерминистичните автомати:

- $\mathcal{A}_1 = \langle \Sigma, Q_1, \delta_1, q'_{\texttt{start}}, F_1 \rangle$, като $L(\mathcal{A}_1) = L_1$;
- $\mathcal{A}_2 = \langle \Sigma, Q_2, \delta_2, q''_{\texttt{start}}, F_2 \rangle$, като $L(\mathcal{A}_2) = L_2$.

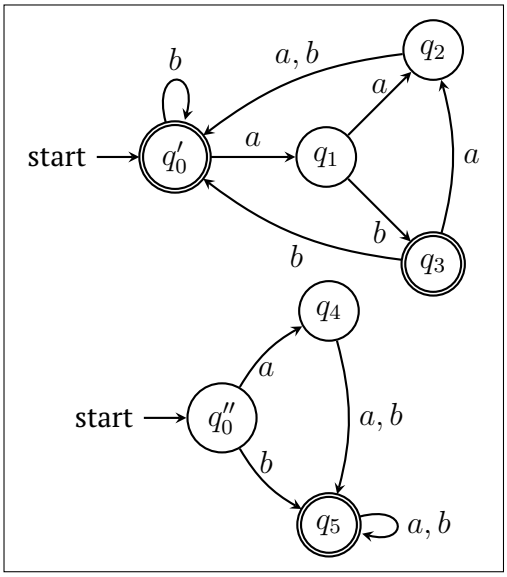
Ще дефинираме автомата $\mathcal{N} = \langle \Sigma, Q, Q_{\texttt{start}}, \Delta, F \rangle$, така че

$$L(\mathcal{N}) = L(\mathcal{A}_1) \cup L(\mathcal{A}_2).$$

- $Q_{\texttt{start}} = \{q'_{\texttt{start}}, q''_{\texttt{start}}\}$;
- $Q \stackrel{\text{деф}}{=} Q_1 \cup Q_2$;
- $F \stackrel{\text{деф}}{=} F_1 \cup F_2$;
- $\Delta(q,a) \stackrel{\text{деф}}{=} \begin{cases} \{\delta_1(q,a)\}, & \text{ако } q \in Q_1 \text{ и } a \in \Sigma \\ \{\delta_2(q,a)\}, & \text{ако } q \in Q_2 \text{ и } a \in \Sigma. \end{cases}$

□

Пример 2.4. За да построим автомат, който разпознава обединението на $\mathcal{L}(\mathcal{A}_1)$ и $\mathcal{L}(\mathcal{A}_2)$, трябва да добавим ново начално състояние, което да свържем с наследниците на началните състояния на $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$.



Фигура 2.12: $\mathcal{L}(\mathcal{N}) = \mathcal{L}(\mathcal{A}_1) \cup \mathcal{L}(\mathcal{A}_2)$.

Обърнете внимание, че $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ са детерминирани автомати, но $\mathcal{N}$ е недетерминиран. Освен това, новото състояние q_0 трябва да бъде маркирано като финално, защото q_0' е финално.

2.3.3 Затвореност относно звезда

Лема 2.4. Класът от автоматните езици е затворен относно операцията *звезда на Клини*, т.е. за всеки автоматен език L, езикът $L^\star$ също е автоматен.

Доказателство. Да разгледаме детерминирния краен автомат

$$\mathcal{A} = \langle \Sigma, Q, q_{\texttt{start}}, \delta, F \rangle.$$

Първо ще построим недетерминиран краен автомат

$$\mathcal{N} = \langle \Sigma, Q, Q_{\texttt{start}}, \Delta, F \rangle,$$

такъв че

$$\mathcal{L}(\mathcal{N}) = (\mathcal{L}(\mathcal{A}))^+.$$

После ще построим недетерминиран краен автомат $\mathcal{N}'$, за който

$$\mathcal{L}(\mathcal{N}') = \mathcal{L}(\mathcal{N}) \cup \{\varepsilon\} = (\mathcal{L}(\mathcal{A}))^\star.$$

Дефинираме функцията на преходите Δ на $\mathcal{N}$ като за $q \in Q$ и $a \in \Sigma$ определяме функцията на преходите Δ по следния начин:

$$\Delta(q,a) \stackrel{\text{деф}}{=} \begin{cases} \{\delta(q,a)\}, & \text{ако } q \notin F \\ \{\delta(q,a), \delta(q_{\texttt{start}}, a)\}, & \text{ако } q \in F. \end{cases}$$

Нека $\alpha = a_0 a_1 \cdots a_{n-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{N})$. Това означава, че $(q_{\texttt{start}}, \alpha) \vdash_{\mathcal{N}}^\star (f, \varepsilon)$ за някое $f \in F$. Нека редицата от състояния $(q_i)_{i=0}^n$ описва едно приемащо изчисление на $\mathcal{N}$ върху α, т.е.

- $q_0 = q_{\texttt{start}}$;
- $q_{i+1} \in \Delta(q_i, a_i)$;
- $q_n \in F$.

Да разгледаме максималната подпоследователност от състояния $(q_{i_j})_{j=0}^{\ell+1}$ на $(q_i)_{i=0}^n$ съставена от тези състояния, за които

Тук е малко по-сложно, защото правим разбиване на изчислението не на база всички финални състояния, а на тези финални състояния, от които изчислението продължава в наследник на $q_{\texttt{start}}$, защото това са местата, където можем да разцепим думата на части.

- $q_{i_0} = q_{\texttt{start}}$;
- $q_{i_j} \in F \;\&\; \delta(q_{\texttt{start}}, a_{i_j}) = q_{i_j+1}$, за $j = 1, \ldots, \ell$;

- $q_{i_{\ell+1}} = q_n$.

Да разбием думата α като $\alpha = \alpha_0\alpha_1 \cdots \alpha_l$, където:

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &\stackrel{\text{деф}}{=} a_{i_0}\alpha'_0 \\
\alpha_1 &\stackrel{\text{деф}}{=} a_{i_1}\alpha'_1 \\
&\cdots \\
\alpha_\ell &\stackrel{\text{деф}}{=} a_{i_\ell}\alpha'_\ell.
\end{aligned}$$

Сега можем да разбием изчислението на $\mathcal{N}$ върху α по следния начин:

$$\begin{aligned}
(q_{i_0}, \alpha_0\alpha_1 \cdots \alpha_\ell) &\vdash^\star_\mathcal{N} (q_{i_1}, \alpha_1 \cdots \alpha_\ell) && \text{// } q_{i_0} = q_{\texttt{start}} \\
&\vdash^\star_\mathcal{N} (q_{i_2}, \alpha_2 \cdots \alpha_\ell) \\
&\cdots \\
&\vdash^\star_\mathcal{N} (q_{i_\ell}, \alpha_\ell) \\
&\vdash^\star_\mathcal{N} (q_{i_{\ell+1}}, \varepsilon). && \text{// } q_{i_{\ell+1}} = q_n \in F
\end{aligned}$$

Да разгледаме само първата част на изчислението:

$$\underbrace{(q_{i_0}, \alpha_0) \vdash^\star_\mathcal{N} (q_{i_1}, \varepsilon)}_{\text{само преходи от } \mathcal{A}}.$$

Понеже $q_{i_0} = q_{\texttt{start}}$ и $q_{i_1} \in F$, то е ясно, че $\alpha_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$.

За $j = 0, \ldots, \ell$, изчислението

$$(q_{i_j}, \alpha_j) \vdash^\star_\mathcal{N} (q_{i_{j+1}}, \varepsilon)$$

може по-подробно да се запише и така:

$$(q_{i_j}, a_{i_j}\alpha'_j) \vdash_\mathcal{N} \underbrace{(q_{i_j+1}, \alpha'_j) \vdash^\star_\mathcal{N} (q_{i_{j+1}}, \varepsilon)}_{\text{само преходи от } \mathcal{A}}.$$

Понеже имаме, че $\delta(q_{\texttt{start}}, a_{i_j}) = q_{i_j+1}$, то оттук следва, че:

$$\underbrace{(q_{\texttt{start}}, a_{i_j}\alpha'_j) \vdash_\mathcal{N} (q_{i_j+1}, \alpha'_j)}_{\text{преход от } \mathcal{A}} \vdash^\star_\mathcal{A} (q_{i_{j+1}}, \varepsilon).$$

Заключаваме, че

$$(q_{\texttt{start}}, \alpha_j) \vdash^\star_\mathcal{A} (q_{i_{j+1}}, \varepsilon).$$

Понеже $q_{i_{j+1}} \in F$, веднага следва, че $\alpha_j \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$. От всичко дотук заключваме, че $\alpha \in (\mathcal{L}(\mathcal{A}))^+$.

За другата посока, нека $\alpha \in (\mathcal{L}(\mathcal{A}))^+$. Това означава, че думата α може да се представи като $\alpha = \alpha_0 \cdot \alpha_1 \cdots \alpha_\ell$, където $\alpha_j \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$ и $\alpha_j \neq \varepsilon$, за $j = 0, \ldots, \ell$. Нека за $j = 0, \ldots, \ell$ да положим

$$\alpha_j \stackrel{\text{деф}}{=} a_j \cdot \alpha'_j \text{ и } q_j \stackrel{\text{деф}}{=} \delta(q_{\texttt{start}}, a_j).$$

Оттук получаваме за $j = 0, \ldots, \ell$ следните изчисления:

$$(q_{\texttt{start}}, \alpha_j) \vdash_{\mathcal{A}} (q_j, \alpha'_j) \vdash^{\star}_{\mathcal{A}} (f_j, \varepsilon), \text{ за някои } f_j \in F.$$

Понеже функцията на преходите на $\mathcal{N}$ разширява функцията на преходите на $\mathcal{A}$, то е ясно е, че имаме също така и следното:

$$(q_{\texttt{start}}, \alpha_j) \vdash_{\mathcal{N}} (q_j, \alpha'_j) \vdash^{\star}_{\mathcal{N}} (f_j, \varepsilon), \text{ за някои } f_j \in F.$$

За $1 \leq j < \ell$, понеже $\delta(q_{\texttt{start}}, a_j) = q_j$ и $f_{j-1} \in F$, то според конструкцията на недетерминирания краен автомат $\mathcal{N}$,

$$q_j \in \Delta(f_{j-1}, a_j).$$

Оттук следва, че имаме следното изчисление на $\mathcal{N}$ върху α:

$$\begin{array}{ll}
(q_{\texttt{start}}, \alpha_0) \vdash^{\star}_{\mathcal{N}} (f_0, \varepsilon) & \text{// за някое } f_0 \in F \\
(f_0, \alpha_1) \vdash_{\mathcal{N}} (q_1, \alpha'_1) \vdash^{\star}_{\mathcal{N}} (f_1, \varepsilon) & \text{// за някое } f_1 \in F \\
(f_1, \alpha_2) \vdash_{\mathcal{N}} (q_2, \alpha'_2) \vdash^{\star}_{\mathcal{N}} (f_2, \varepsilon) & \text{// за някое } f_2 \in F \\
\ldots & \\
(f_{\ell-1}, \alpha_\ell) \vdash_{\mathcal{N}} (q_\ell, \alpha'_\ell) \vdash^{\star}_{\mathcal{N}} (f_\ell, \varepsilon). & \text{// за някое } f_\ell \in F
\end{array}$$

Обединявайки всичко това, заключаваме, че $\alpha \in \mathcal{L}(\mathcal{N})$.

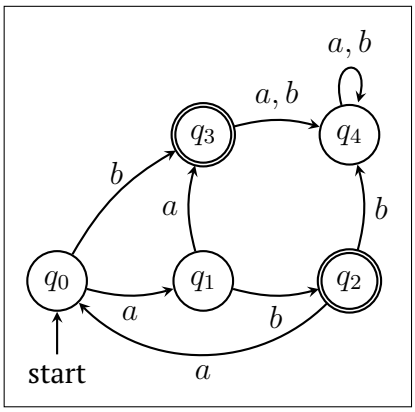
Така доказахме, че $\mathcal{L}(\mathcal{N}) = (\mathcal{L}(\mathcal{A}))^+$. Сега ще построим недетерминиран краен автомат $\mathcal{N}' = \langle \Sigma, Q', q'_{\texttt{start}}, \Delta', F' \rangle$, такъв че:

$$\mathcal{L}(\mathcal{N}') = \mathcal{L}(\mathcal{N}) \cup \{\varepsilon\} = (\mathcal{L}(\mathcal{A}))^+ \cup \{\varepsilon\} = (\mathcal{L}(\mathcal{A}))^\star.$$

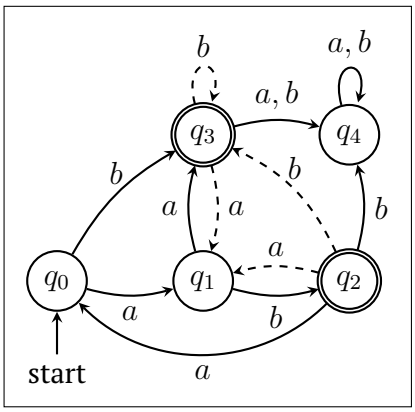
- $Q' \stackrel{\text{деф}}{=} Q \cup \{q'_{\texttt{start}}\}$;
- $F' \stackrel{\text{деф}}{=} F \cup \{q'_{\texttt{start}}\}$;
- $\Delta'(q'_{\texttt{start}}, a) \stackrel{\text{деф}}{=} \Delta(q_{\texttt{start}}, a)$, за всяко $a \in \Sigma$;
- $\Delta'(q, a) \stackrel{\text{деф}}{=} \Delta(q, a)$, за всяко $a \in \Sigma$ и $q \in Q$.

Лесно се съобразява, че $\mathcal{L}(\mathcal{N}') = \mathcal{L}(\mathcal{N}) \cup \{\varepsilon\}$. □

Пример 2.5. Нека да приложим конструкцията за да намерим автомат разпознаващ $\mathcal{L}(\mathcal{A})^\star$.



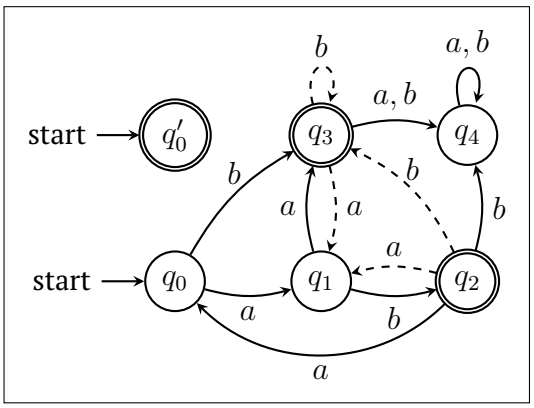
(а) автомат $\mathcal{A}$



(б) $\mathcal{L}(\mathcal{N}) = \mathcal{L}(\mathcal{A})^+$

Лесно се вижда, че $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \{b\} \cup \{ab\} \cdot \{aba\}^\star$

След като построим автомат за езика $\mathcal{L}(\mathcal{A})^+$, трябва да приложим конструкцията за обединение на автомата за езика $\mathcal{L}(\mathcal{A})^+$ с автомата за езика $\{\varepsilon\}$. Защо трябва да добавим ново начално състояние q_0'? Да допуснем, че вместо това сме направили q_0 финално. Тогава има опасност да разпознаем повече думи. Например, думата aba би се разпознала от този автомат, но $aba \notin \mathcal{L}(\mathcal{A})^\star$.



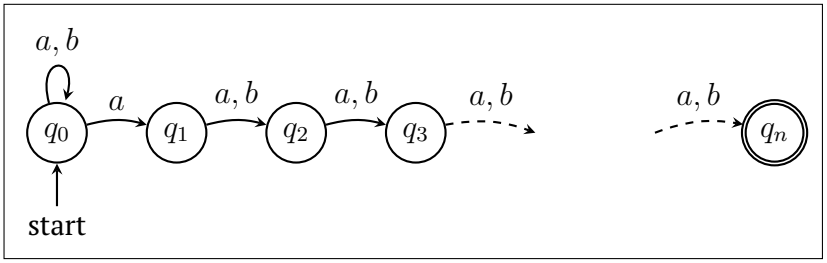
Фигура 2.14: $\mathcal{L}(\mathcal{N}') = \mathcal{L}(\mathcal{N}) \cup \{\varepsilon\} = \mathcal{L}(\mathcal{A})^\star$

2.3.4 Експоненциална експлозия

Тук следваме [KN01, стр. 66] и [ALSU07, стр. 164]. В [Sha08, стр. 80] има друг пример за НКА с n състояния вместо $n+1$, но доказателството изглежда по-сложно.

Твърдение 2.7. Съществува НКА $\mathcal{N}$ с $n+1$ състояния, за който не съществува ДКА $\mathcal{A}$ с по-малко от 2^n състояния.

Упътване. Да разгледаме следния недетерминиран автомат $\mathcal{N}$.



Фигура 2.15: Недетерминиран автомат $\mathcal{N}$ за езика $\{a,b\}^\star \cdot \{a\} \cdot \{a,b\}^{n-1}$.

Лесно се съобразява, че за $n > 0$, недетерминирният краен автомат $\mathcal{N}$ на *Фигура 2.15* с $n+1$ на брой състояния разпознава езика

$$L = \{\beta a \gamma \in \{a,b\}^\star \mid |\gamma| = n-1\}.$$

Нека да съобразим, че не е възможно да съществува краен детерминиран автомат $\mathcal{A} = \langle \Sigma, Q, q_{\texttt{start}}, \delta, F \rangle$ разпознаващ същия език L с по-малко от 2^n състояния.

Да допуснем, че $|Q| < 2^n$. От принципа на Дирихле имаме, че съществуват две различни думи α и β с дължина n, за които съществува $q \in Q$ и

Да напомним, че броят на всички думи с дължина n над азбука с k букви е k^n. В нашия случай, $k = 2$.

$$\delta^\star(q_{\texttt{start}}, \alpha) = q = \delta^\star(q_{\texttt{start}}, \beta).$$

Нека първата разлика в тези две думи е на позиция $i < n$. Без ограничение на общността, нека $\alpha[i] = a$ и $\beta[i] = b$.

- Ако $i = 0$. Това означава, че $\alpha \in L$, но $\beta \notin L$. Следователно състоянието q е едновременно финално и нефинално. Това е противоречие.
- Ако $i > 0$. Да разгледаме следните думи:

$$\alpha_0 = \alpha \cdot a^i$$
$$\beta_0 = \beta \cdot a^i.$$

Тогава $\alpha_0 = \omega \cdot a \cdot \gamma$, където $|\gamma| = n-1$. Аналогично, $\beta_0 = \rho \cdot b \cdot \delta$, където $|\delta| = n-1$. Така отново получаваме, че $\alpha_0 \in L$, но $\beta_0 \notin L$. И в този случай получаваме противоречие, защото

$$\delta^\star(q_{\texttt{start}}, \alpha_0) = q = \delta^\star(q_{\texttt{start}}, \beta_0)$$

и състоянието q трябва да е едновременно финално и нефинално.

□

2.4 Един критерий за нерегулярност

Лема 2.5 (Лема за покачването). Нека L да бъде *безкраен* регулярен език. Съществува число $p \geq 1$, зависещо само от L, за което за всяка дума $\alpha \in L, |\alpha| \geq p$ може да бъде записана във вида $\alpha = xyz$ и

На англ. се нарича *Pumping Lemma*. Има подобна лема и за безконтекстни езици, която ще разгледаме по-нататък.

1) $|y| \geq 1$;

2) $|xy| \leq p$;

3) $(\forall i \in \mathbb{N})[xy^iz \in L]$.

Обърнете внимание, че $0 \in \mathbb{N}$ и $xy^0z = xz$

Упътване. Понеже L е регулярен, то L е и автоматен език. Нека

Тази лема я има на практика във всеки добър учебник по този предмет. Например, [PL98, стр. 88], [Sip12, стр. 77], [HU79, стр. 55].

$$\mathcal{A} = \langle \Sigma, Q, q_{\texttt{start}}, \delta, F \rangle$$

е краен детерминиран автомат, за който $L = \mathcal{L}(\mathcal{A})$. Да положим $p = |Q|$ и нека $\alpha = a_1a_2 \cdots a_k$ е дума, за която $k \geq p$. Да разгледаме първите p стъпки от изпълнението на α върху $\mathcal{A}$:

$$q_{\texttt{start}} \xrightarrow{a_1} q_1 \xrightarrow{a_2} q_2 \ldots \xrightarrow{a_p} q_p.$$

Тъй като $|Q| = p$, а по този път участват $p+1$ състояния $q_0, q_1, \ldots, q_p$, то съществуват числа i, j, за които $0 \leq i < j \leq p$ и $q_i = q_j$. Нека разделим думата α на три части по следния начин:

$$\underbrace{a_1 \cdots a_i}_{x} \quad \underbrace{a_{i+1} \cdots a_j}_{y} \quad \underbrace{a_{j+1} \cdots a_k}_{z}.$$

Ясно е, че $|y| \geq 1$ и $|xy| = j \leq p$. Да разгледаме случая за $i = 0$. Думата $xy^0z = xz \in L$, защото имаме следното изчисление:

$$q_{\texttt{start}} \underbrace{\xrightarrow{a_1} q_1 \cdots \xrightarrow{a_i}}_{x} q_i \underbrace{\xrightarrow{a_{j+1}} q_{j+1} \cdots \xrightarrow{a_k}}_{z} q_k \in F,$$

защото $q_i = q_j$. Да разгледаме и случая $i = 2$. Тогава думата $xy^2z \in L$, защото имаме следното изчисление:

$$q_{\texttt{start}} \underbrace{\xrightarrow{a_1} q_1 \cdots \xrightarrow{a_i}}_{x} q_i \underbrace{\xrightarrow{a_{i+1}} q_{i+1} \cdots \xrightarrow{a_j}}_{y} q_j \underbrace{\xrightarrow{a_{i+1}} q_{i+1} \cdots \xrightarrow{a_j}}_{y} q_j \underbrace{\xrightarrow{a_{j+1}} \cdots \xrightarrow{a_k}}_{z} q_k \in F.$$

Вече лесно можем да съобразим, че за всяко естествено число i, е изпълнено $xy^iz \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$. □

✍ Докажете!

Практически е по-полезно да разглеждаме следната еквивалентна формулировка на лемата за покачването.

Подобно е изложението и в [Koz97, стр. 70].

Следствие 2.1 (Контрапозиция на лемата за покачването). Нека L е произволен език. Нека също така е изпълнено, че:

(∀) за *всяко* естествено число $p \geq 1$,

(∃) можем да намерим дума $\alpha \in L$, $|\alpha| \geq p$, такава че

(∀) за *всяко* разбиване на думата на три части, $\alpha = xyz$, със свойствата $|xy| \leq p$ и $|y| \geq 1$,

(∃) можем да посочим $i \in \mathbb{N}$, за което е изпълнено, че $xy^iz \notin L$.

Тогава L **не** е регулярен език.

Доказателство. Да означим с $P_{\text{reg}}(L)$ следната формула:

$$(\exists p \geq 1)(\forall \alpha \in L)[|\alpha| \geq p \to (\exists x, y, z \in \Sigma^\star)[\, \alpha = xyz \wedge |y| \geq 1 \wedge |xy| \leq p \wedge (\forall i \in \mathbb{N})[xy^iz \in L]]].$$

Понеже имаме, че $p \to q \equiv \neg p \vee q$, то горната формула може да се запише и така:

$$(\exists p \geq 1)(\forall \alpha \in L)[|\alpha| \ngeq p \vee (\exists x, y, z \in \Sigma^\star)[\, \alpha = xyz \wedge |y| \geq 1 \wedge |xy| \leq p \wedge (\forall i \in \mathbb{N})[xy^iz \in L]]].$$

Така условието на Лемата за покачването представлява твърдението:

„Ако L е регулярен език, то е изпълнено $P_{reg}(L)$."

Контрапозиция на твърдението $P \to Q$ е твърдението $\neg Q \to \neg P$

Лемата може да се запише по следния еквивалентен начин:

„Ако $P_{reg}(L)$ не е изпълнено, то L не е регулярен език."

Използваме, че $\neg\exists\forall\exists\forall(\dots) \equiv \forall\exists\forall\exists\neg(\dots)$

Отрицанието на $P_{\text{reg}}(L)$ преставлява формулата

$$(\forall p \geq 1)(\exists \alpha \in L)[\, |\alpha| \geq p \;\wedge\; (\forall x, y, z \in \Sigma^\star)[\, \alpha \neq xyz \vee |y| \ngeq 1 \vee |xy| \nleq p \vee (\exists i \in \mathbb{N})[xy^iz \notin L]\,]\,].$$

Използваме, че

$$\frac{\neg P \vee \neg Q \vee R}{\frac{\neg(P \wedge Q) \vee R}{(P \wedge Q) \to R}}$$

Горната формула е еквивалентна на:

$$(\forall p \geq 1)(\exists \alpha \in L)[\, |\alpha| \geq p \;\wedge\; (\forall x, y, z \in \Sigma^\star)[\, (\alpha = xyz \wedge |y| \geq 1 \wedge |xy| \leq p) \to (\exists i \in \mathbb{N})[xy^iz \notin L]\,]\,].$$

Това означава, че ако

(∀) вземем произволна константа $p \geq 1$,

(∃) за нея намерим дума $\alpha \in L$, такава че $|\alpha| \geq p$ и

(∀) докажем, че за всяко нейно разбиване на три части x, y, z, със свойствата $|y| \geq 1$ и $|xy| \leq p$,

(∃) можем да намерим естествено число i, за което $xy^iz \notin L$,

то можем да заключим, че езикът L не е регулярен. □

Пример 2.6. Да видим защо езикът $L = \{a^nb^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ не е регулярен. Формално трябва докажем верността на следната формула:

Това е важен пример. По-късно ще видим, че този език е безконтекстен.

$$(\forall p \geq 1)(\exists \alpha \in L)[\,|\alpha| \geq p \wedge (\forall x, y, z \in \Sigma^\star)[(\alpha = xyz \wedge |y| \geq 1 \wedge |xy| \leq p) \rightarrow (\exists i \in \mathbb{N})[xy^iz \notin L]\,]\,].$$

Както обяснихме по-горе, доказателството следва стъпките:

(∀) Разглеждаме произволно число $p \geq 1$.

(∀) Нямаме власт над избора на числото p.

(∃) Избираме дума $\alpha \in L$, за която $|\alpha| \geq p$. Имаме свободата да изберем каквато дума α си харесаме, стига тя да принадлежи на L и да има дължина поне p. Щом имаме тази свобода, нека да изберем думата $\alpha = a^pb^p \in L$. Очевидно е, че $|\alpha| \geq p$.

(∃) Няма общо правило, което да ни казва как избираме думата α. Трябва сами да се досетим. Обърнете внимание, че думата α зависи от константата p.

(∀) Разглеждаме произволно разбиване на α на три части, $\alpha = xyz$, за които изискваме свойствата $|xy| \leq p$ и $|y| \geq 1$.

(∀) Не знаем нищо друго за x, y и z освен тези две свойства.

(∃) Ще намерим $i \in \mathbb{N}$, за което $xy^iz \notin L$. Понеже $|xy| \leq p$, то $y = a^k$, за $1 \leq k \leq p$. Тогава ако вземем $i = 0$, получаваме $xy^0z = a^{p-k}b^p$. Ясно е, че $xz \notin L$, защото $p - k < p$.

(∃) Изборът на i може да зависи разбиването x, y, z. В конкретния пример, не зависи.

Тогава от *Следствие 2.1* следва, че L не е регулярен език.

Забележка. Много често студентите правят следното разсъждение:

✍ Съобразете сами!

$$L \text{ е регулярен } \& \; L' \subseteq L \implies L' \text{ е регулярен.}$$

Съобразете, че в общия случай това твърдение е *невярно*. За да видим това, достатъчно е да посочим регулярен език L, който има като подмножество нерегулярен език L'. Също лесно се вижда, че твърдението

$$L \text{ е регулярен } \& \; L \subseteq L' \implies L' \text{ е регулярен}$$

е невярно.

Поради подобни съображения, следните твърдения също са *неверни*:

$$L \text{ не е регулярен } \& \; L' \subseteq L \implies L' \text{ не е регулярен}$$
$$L' \text{ не е регулярен } \& \; L' \subseteq L \implies L \text{ не е регулярен.}$$

2.4.1 Следствия

Твърдение 2.8. Езикът на автомата $\mathcal{A} = \langle \Sigma, Q, q_{\texttt{start}}, \delta, F \rangle$ е *непразен* точно тогава, когато съдържа дума α, за която $|\alpha| < |Q|$.

Доказателство. Ще разгледаме двете посоки на твърдението.

($\Rightarrow$) Нека L е непразен език и нека $m = \min\{|\alpha| \mid \alpha \in L\}$. Ще докажем, че $m < |Q|$. За целта, да допуснем, че $m \geq |Q|$ и да изберем $\alpha \in L$, за която $|\alpha| = m$. Според доказателството на *Лема 2.5*, съществува разбиване $xyz = \alpha$, такова че $xz \in L$. При положение, че $|y| \geq 1$, то $|xz| < m$, което е противоречие с минималността на думата α. Заключаваме, че нашето допускане е грешно. Тогава $m < |Q|$, откъдето следва, че съществува дума $\alpha \in L$ с $|\alpha| < |Q|$.

($\Leftarrow$) Тази посока е тривиална. Ако L съдържа дума α, за която $|\alpha| < |Q|$, то е очевидно, че L е непразен език.

□

✍ Обяснете! **Следствие 2.2.** Съществува алгоритъм, който проверява дали даден регулярен език е празен или не.

$(L_1 \setminus L_2) \cup (L_2 \setminus L_1) = \emptyset$? **Следствие 2.3.** Съществува алгоритъм, който определя дали два автомата $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ разпознават един и същ език.

Твърдение 2.9. Регулярният език L, разпознаван от КДА $\mathcal{A}$, е *безкраен* точно тогава, когато съдържа дума $\alpha, |Q| \leq |\alpha| < 2|Q|$.

Доказателство. Да разгледаме двете посоки на твърдението.

($\Leftarrow$) Нека L е регулярен език, за който съществува дума α, такава че $|Q| \leq |\alpha| < 2|Q|$. Тогава от *Лема 2.5* следва, че съществува разбиване $\alpha = xyz$ със свойството, че за всяко $i \in \mathbb{N}$, $xy^iz \in L$. Следователно, L е безкраен, защото $|y| \geq 1$.

($\Rightarrow$) Нека L е безкраен език и да вземем *най-късата* дума $\alpha \in L$, за която $|\alpha| \geq 2|Q|$. Понеже L е безкраен, знаем, че такава дума съществува. Тогава отново по *Лема 2.5*, имаме следното разбиване на α:

$$\alpha = xyz,\ |xy| \leq |Q|,\ 1 \leq |y|,\ xz \in L.$$

Но понеже $|xyz| \geq 2|Q|$, а $1 \leq |y| \leq |Q|$, то $|xyz| > |xz| \geq |Q|$ и понеже избрахме $\alpha = xyz$ да бъде най-късата дума с дължина поне $2|Q|$, заключаваме, че $|Q| \leq |xz| < 2|Q|$ и $xz \in L$.

□

✍ Обяснете! **Следствие 2.4.** Съществува алгоритъм, който проверява дали даден регулярен език е безкраен.

✍ Обяснете! **Следствие 2.5.** Съществува алгоритъм, който проверява дали симетричната разлика на два регулярни езика е крайна.

2.4.2 Примерни задачи

Задача 2.9. Докажете, че езикът $L = \{a^m b^n \mid m, n \in \mathbb{N} \,\&\, m < n\}$ не е регулярен.

Доказателство. Доказателството следва стъпките:

$(\forall)$ Разглеждаме произволно число $p \geq 1$.

$(\exists)$ Избираме дума $\alpha \in L$, за която $|\alpha| \geq p$. Имаме свободата да изберем каквато дума α си харесаме, стига тя да принадлежи на L и да има дължина поне p. Щом имаме тази свобода, нека да изберем думата $\alpha = a^p b^{p+1} \in L$. Очевидно е, че $|\alpha| \geq p$.

$(\forall)$ Разглеждаме произволно разбиване на α на три части, $\alpha = xyz$, за които изискваме свойствата $|xy| \leq p$ и $|y| \geq 1$.

$(\exists)$ Ще намерим $i \in \mathbb{N}$, за което $xy^i z \notin L$. Понеже $|xy| \leq p$, то $y = a^k$, за $1 \leq k \leq p$. Тогава ако вземем $i = 2$, получаваме

$$xy^2z = a^{p-k}a^{2k}b^{p+1} = a^{p+k}b^{p+1}.$$

Ясно е, че $xy^2z \notin L$, защото $p + k \geq p + 1$.

Тогава от *Следствие 2.1* следва, че L не е регулярен език. □

Задача 2.10. Докажете, че езикът $L = \{a^n \mid n$ е просто число$\}$ не е регулярен.

Доказателство. Доказателството следва стъпките:

$(\forall)$ Разглеждаме произволно число $p \geq 1$.

$(\exists)$ Избираме дума $w \in L$, за която $|w| \geq p$. Можем да изберем каквото w си харесаме, стига то да принадлежи на L и да има дължина поне p. Нека да изберем думата $w \in L$, такава че $|w| > p + 1$. Знаем, че такава дума съществува, защото L е безкраен език. По-долу ще видим защо този избор е важен за нашите разсъждения.

$(\forall)$ Разглеждаме произволно разбиване на w на три части, $w = xyz$, за които изискваме свойствата $|xy| \leq p$ и $|y| \geq 1$.

$(\exists)$ Ще намерим i, за което $xy^i z \notin L$, т.е. ще намерим i, за което $|xy^i z| = |xz| + i \cdot |y|$ е *съставно число*. Понеже $|xy| \leq p$ и $|xyz| > p + 1$, то $|z| > 1$. Да изберем $i = |xz| > 1$. Тогава:

Изискваме $|w| > p + 1$, защото искаме да гарантираме, че $|xz| > 1$.

$$|xy^i z| = |xz| + i.|y| = |xz| + |xz|.|y| = (1 + |y|)|xz|$$

е съставно число, следователно $xy^i z \notin L$.

Тогава от *Следствие 2.1* следва, че L не е регулярен език. □

Задача 2.11. Докажете, че езикът $L = \{a^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\}$ не е регулярен.

Доказателство. В тази задача ще използваме следното свойство:

$$n \text{ не е точен квадрат } \Leftrightarrow (\exists p \in \mathbb{N})[p^2 < n < (p+1)^2].$$

Доказателството следва стъпките:

$(\forall)$ Разглеждаме произволно число $p \geq 1$.

$(\exists)$ Избираме достатъчно дълга дума, която принадлежи на езика L. Например, нека $w = a^{p^2}$.

$(\forall)$ Разглеждаме произволно разбиване на w на три части, $w = xyz$, като $|xy| \leq p$ и $|y| \geq 1$.

($\exists$) Ще намерим i, за което $xy^iz \notin L$. В нашия случай това означава, че $|xz|+i\cdot|y|$ не е точен квадрат. Тогава за $i=2$,

$$p^2 = |xyz| < |xy^2z| = |xyz| + |y| \leq p^2 + p < p^2 + 2p + 1 = (p+1)^2.$$

Получаваме, че $p^2 < |xy^2z| < (p+1)^2$, откъдето следва, че $|xy^2z|$ не е точен квадрат. Следователно, $xy^2z \notin L$.

Тогава от *Следствие 2.1* следва, че L не е регулярен език. □

Задача 2.12. Докажете, че езикът $L = \{a^{n!} \mid n \in \mathbb{N}\}$ не е регулярен.

Доказателство. Доказателството следва стъпките:

($\forall$) Разглеждаме произволно число $p \geq 1$.

($\exists$) Избираме достатъчно дълга дума, която принадлежи на езика L. Например, нека $\omega = a^{(p+1)!}$.

($\forall$) Разглеждаме произволно разбиване на ω на три части, $\omega = xyz$, като $|xy| \leq p$ и $|y| \geq 1$. Да обърнем внимание, че $1 \leq |y| \leq p$.

($\exists$) Ще намерим i, за което $xy^iz \notin L$. Това означава да съществува n, за което $n! < |xy^iz| < (n+1)!$ Да разгледаме $i = 2$. Тогава:

Възможно ли е $xy^0z \in L$? Понеже $|xyz| = (p+2)!$, това означава, че би трябвало $|xz| = k!$, за някое $k \leq p+1$. Тогава

$$\begin{aligned}(p+1)! &< |xy^2z| \\ &= (p+1)! + |y| \\ &\leq (p+1)! + p \\ &< (p+1)! + (p+1)!(p+1) \\ &= (p+2)!\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|y| &= |xyz| - |xz| \\ &= (p+2)! - k! \\ &\geq (p+2)! - (p+1)! \\ &= (p+1).(p+1)! \\ &> p.\end{aligned}$$

Достигнахме до противоречие с условието, че $|y| \leq p$.

Тогава от *Следствие 2.1* следва, че L не е регулярен език. □

Задача 2.13. Докажете, че езикът $L = \{\alpha\beta \in \{a,b\}^\star \mid |\alpha| = |\beta| \,\&\, \alpha \neq \beta\}$ не е регулярен.

Упътване. Да допуснем, че L е регулярен. Тогава езикът $\overline{L} = \{a,b\}^\star \setminus L$ също е регулярен. Ясно е, че

$$\overline{L} = \{\alpha\beta \in \{a,b\}^\star \mid \alpha = \beta\} \cup \{\alpha \in \{a,b\}^\star \mid |\alpha| \text{ е нечетно число}\}.$$

Тогава езикът $L_1 = \overline{L} \cap \{\alpha \in \{a,b\}^\star \mid |\alpha| \text{ е четно число}\}$ също е регулярен. Ясно е, че $L_1 = \{\alpha\beta \in \{a,b\}^\star \mid \alpha = \beta\}$. Сега можем да разгледаме регулярния език

$$L_2 = L_1 \cap \mathcal{L}(\mathbf{a}^\star\mathbf{b}\mathbf{a}^\star\mathbf{b}) = \{a^nba^nb \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

За него вече лесно можем да приложим лемата за покачването и да получим, че L_2 не е регулярен. Така достигаме до противоречие с допускането, че L е регулярен. □

Примери, за които лемата не е приложима

Например, $\{c\}^+ \cdot \{a^nb^n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{a,b\}^\star$

Задача 2.14. Да се даде пример за език L, който **не** е регулярен, но $P_{\text{reg}}(L)$.

Пример 2.7. Езикът $L = \{c^ka^nb^m \mid k,n,m \in \mathbb{N} \,\&\, k = 1 \implies m = n\}$ **не** е регулярен, но $P_{\text{reg}}(L)$.

Упътване. Да допуснем, че L е регулярен. Тогава ще следва, че

$$L_1 = L \cap \mathcal{L}(\mathbf{ca^\star b^\star}) = \{ca^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

е регулярен, но с лемата за разрастването лесно се вижда, че L_1 не е.

Сега да проверим, че условието за покачване от *Лема 2.5* е изпълнено за L. Да изберем константа $p = 2$. Сега трябва да разгледаме всички думи $\alpha \in L$, $|\alpha| \geq 2$ и за всяка α да посочим разбиване $xyz = \alpha$, за което са изпълнени трите свойства от лемата.

Условията за x, y, z са:

$|xy| \leq 2$
$|y| \geq 1$
$(\forall i \in \mathbb{N})(xy^i z \in L)$

- Ако $\alpha = a^n$ или $\alpha = b^n$, $n \geq 2$, то е очевидно, че можем да намерим такова разбиване.
- $\alpha = a^n b^m$ и $n + m \geq 2$, $n \geq 1$. Избираме $x = \varepsilon$, $y = a$, $z = a^{n-1} b^m$.
- $\alpha = ca^n b^n$, $n \geq 1$. Избираме $x = \varepsilon$, $y = c$, $z = a^n b^n$.
- $\alpha = c^2 a^n b^m$. Избираме $x = \varepsilon$, $y = c^2$, $z = a^n b^m$.
- $\alpha = c^k a^n b^m$, $k \geq 3$. Избираме $x = \varepsilon$, $y = c$, $z = c^{k-1} a^n b^m$.

□

2.5 Изоморфни автомати

[Koz97, стр. 89] Нека са дадени автоматите $\mathcal{A}_1 = (\Sigma, Q_1, q'_{\texttt{start}}, \delta_1, F_1)$ и $\mathcal{A}_2 = (\Sigma, Q_2, q''_{\texttt{start}}, \delta_2, F_2)$. Казваме, че $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ са **изоморфни**, което означаваме с $\mathcal{A}_1 \cong \mathcal{A}_2$, ако съществува функция $f : Q_1 \to Q_2$, за която:

(1) f е биекция;

(2) $f(q'_{\texttt{start}}) = q''_{\texttt{start}}$;

(3) $q \in F_1 \Leftrightarrow f(q) \in F_2$;

(4) $(\forall a \in \Sigma)(\forall q \in Q_1)[\, f(\delta_1(q,a)) = \delta_2(f(q), a)\,]$.

Ще казваме, че f задава изоморфизъм на $\mathcal{A}_1$ върху $\mathcal{A}_2$ и ще означаваме $\mathcal{A}_1 \cong_f \mathcal{A}_2$ или $f : \mathcal{A}_1 \cong \mathcal{A}_2$.

Твърдение 2.10. Нека $\mathcal{A}_1 \cong_f \mathcal{A}_2$. Тогава за всяка дума α и произволно състояние $q \in Q_1$ е изпълнено, че

$$f(\delta_1^\star(q,\alpha)) = \delta_2^\star(f(q),\alpha). \tag{2.9}$$

Доказателство. Както винаги, ще докажем Свойство (2.9) с индукция по дължината на думата α.

- Нека $|\alpha| = 0$, т.е. $\alpha = \varepsilon$. Тогава:

$$\begin{aligned} f(\delta_1^\star(q,\varepsilon)) &= f(q) && \text{// от деф. на } \delta_1^\star \\ &= \delta_2^\star(f(q),\varepsilon). && \text{// от деф. на } \delta_2^\star \end{aligned}$$

- Да приемем, че (2.9) е изпълнено за думи с дължина n.

- Да разгледаме произволна дума α с дължина $n+1$, т.е. $\alpha = \beta c$ и $|\beta| = n$. Тогава:

$$\begin{aligned} f(\delta_1^\star(q,\beta c)) &= f(\delta_1(\delta_1^\star(q,\beta),c)) && \text{// от деф. на } \delta_1^\star \\ &= \delta_2(f(\delta_1^\star(q,\beta)),c) && \text{// } f \text{ е изоморфизъм} \\ &= \delta_2(\delta_2^\star(f(q),\beta),c) && \text{// от И.П. за } \beta \\ &= \delta_2^\star(f(q),\beta c) && \text{// от деф. на } \delta_2^\star. \end{aligned}$$

□

Твърдение 2.11. Ако $\mathcal{A}_1 \cong \mathcal{A}_2$, то $\mathcal{L}(\mathcal{A}_1) = \mathcal{L}(\mathcal{A}_2)$.

Упътване. Нека $\mathcal{A}_1 \cong_f \mathcal{A}_2$. Тогава имаме следните еквивалентности:

Лесно можем да съобразим, че в общия случай нямаме обратната посока на това твърдение.

$$\begin{aligned}
\alpha \in \mathcal{L}(\mathcal{A}_1) &\Leftrightarrow \delta_1^\star(q'_{\mathtt{start}}, \alpha) \in F_1 && \text{// деф. на } \mathcal{L}(\mathcal{A}_1)\\
&\Leftrightarrow f(\delta_1^\star(q'_{\mathtt{start}}, \alpha)) \in F_2 && \text{// } f \text{ е изоморфизъм}\\
&\Leftrightarrow \delta_2^\star(f(q'_{\mathtt{start}}), \alpha) \in F_2 && \text{// от (2.9)}\\
&\Leftrightarrow \delta_2^\star(q''_{\mathtt{start}}, \alpha) \in F_2 && \text{// } f(q'_{\mathtt{start}}) \stackrel{\text{деф}}{=} q''_{\mathtt{start}}\\
&\Leftrightarrow \alpha \in \mathcal{L}(\mathcal{A}_2). && \text{// деф. на } \mathcal{L}(\mathcal{A}_2)
\end{aligned}$$

□

2.6 Автомат на Бжозовски

Имаме следната операция за произволна буква a,

$$a^{-1}(L) \stackrel{\text{деф}}{=} \{\omega \in \Sigma^\star \mid a \cdot \omega \in L\}.$$

Да видим как се държи тази операция върху регулярните езици. За целта следваме дефиницията на регулярните езици.

Задача 2.15. Докажете, че за произволна буква a и език L са изпълнени равенствата:

(1) $a^{-1}(\emptyset) = \emptyset$;

(2) $a^{-1}(\{\varepsilon\}) = \{\varepsilon\}$;

(3) $a^{-1}(\{b\}) = \begin{cases} \{\varepsilon\}, & \text{ако } a = b \\ \emptyset, & \text{ако } a \neq b \end{cases}$

(4) $a^{-1}(L_1 \cup L_2) = a^{-1}(L_1) \cup a^{-1}(L_2)$;

(5) $a^{-1}(L_1 \cdot L_2) = \begin{cases} a^{-1}(L_1) \cdot L_2, & \text{ако } \varepsilon \notin L_1 \\ a^{-1}(L_1) \cdot L_2 \cup a^{-1}(L_2), & \text{ако } \varepsilon \in L_1 \end{cases}$

(6) $a^{-1}(L^\star) = a^{-1}(L) \cdot L^\star$.

Аналогично, за произволна дума α,

$$\alpha^{-1}(L) \stackrel{\text{деф}}{=} \{\omega \in \Sigma^\star \mid \alpha\omega \in L\}.$$

Твърдение 2.12. За всеки две думи α и β е изпълнено, че:

$$(\alpha \cdot \beta)^{-1}(L) = \beta^{-1}(\alpha^{-1}(L)).$$

Доказателство. За прозиволна дума γ имаме следните еквивалентности:

$$\begin{aligned}\gamma \in \beta^{-1}(\alpha^{-1}(L)) &\Leftrightarrow \beta\gamma \in \alpha^{-1}(L)\\ &\Leftrightarrow \alpha\beta\gamma \in L\\ &\Leftrightarrow \gamma \in (\alpha\beta)^{-1}(L).\end{aligned}$$

□

Задача 2.16. Докажете, че ако L е регулярен език, то $\alpha^{-1}(L)$ е регулярен език.

Задача 2.17. Докажете, че $L = \{\omega \in \Sigma^\star \mid \varepsilon \in \omega^{-1}(L)\}$.

Бжозовски [Brz64] описва алгоритъм за строене на автомат по регулярен израз.

Нека е даден езикът L. Ще покажем конструкция на детерминиран автомат $\mathcal{B} = \langle \Sigma, Q, q_{\texttt{start}}, \delta, F\rangle$, който разпознава L. Ако L е регулярен, то $\mathcal{B}$ ще бъде детерминиран краен автомат, но ако L не е регулярен, то $\mathcal{B}$ ще бъде детерминиран *безкраен* автомат. Конструкцията на автомата $\mathcal{B}$ е следната:

Да напомним, че имаме свойството

$\alpha \in L \Leftrightarrow \varepsilon \in \alpha^{-1}(L)$.

- Състоянията Q ще бъдат от вида $\hat{M}$, за $M \subseteq \Sigma^\star$, където:

$$Q \stackrel{\text{деф}}{=} \{\hat{M} \mid (\exists \alpha \in \Sigma^\star)[M = \alpha^{-1}(L)]\}.$$

Все още не ясно, че ако L е регулярен, то Q е крайно множество. Това ще видим след малко. В *Пример 2.8* ще видим един детерминиран безкраен автомат за език, който не е регулярен.

- $q_{\texttt{start}} \stackrel{\text{деф}}{=} \hat{L}$.
- За произволни състояния $\hat{M}$ и $\hat{N}$ и буква a,

$$\delta(\hat{M}, a) = \hat{N} \stackrel{\text{деф}}{\Leftrightarrow} N = a^{-1}(M).$$

- $F \stackrel{\text{деф}}{=} \{\hat{M} \in Q \mid \varepsilon \in M\}$.

Твърдение 2.13. За всяка дума α е изпълнено, че:

$$N = \alpha^{-1}(L) \Leftrightarrow \delta^\star(\hat{L}, \alpha) = \hat{N}.$$

Упътване. Индукция по дължината на думата α, като използвате, че

$$(\alpha b)^{-1}(L) = b^{-1}(\alpha^{-1}(L)).$$

Твърдението очевидно е изпълнено за $\alpha = \varepsilon$. Да примем, че за думи α с дължина n е изпълнено, че

$$N = \alpha^{-1}(L) \Leftrightarrow \delta^\star(\hat{L}, \alpha) = \hat{N}. \tag{2.10}$$

Да разгледаме дума α с дължина $n+1$, т.е. $\alpha = \beta a$ и $|\beta| = n$. Тогава

$$\begin{aligned}\delta^\star(\hat{L}, \beta a) &= \delta(\delta^\star(\hat{L}, \beta), a) && \text{// от деф.}\\ &= \delta(\hat{M}, a) && \text{// нека } \hat{M} = \delta^\star(\hat{L}, \beta)\\ &= \hat{N}.\end{aligned}$$

Свойство (2.10) приложено за β ни казва, че

$$\delta^\star(\hat{L}, \beta) = \hat{M} \;\Leftrightarrow\; \beta^{-1}(L) = M.$$

От дефиницията на δ имаме, че

$$\delta(\hat{M}, a) = \hat{N} \;\Leftrightarrow\; N = a^{-1}(M).$$

Накрая заключаваме, че

$$\delta^\star(\hat{L}, \beta a) = \hat{N} \;\Leftrightarrow\; N = a^{-1}(\beta^{-1}(L)) = \alpha^{-1}(L).$$

□

Тук е важно да отбележим, че все още не знаем, че $\mathcal{B}$ е краен.

Твърдение 2.14. За даден език L, нека $\mathcal{B}$ е детерминираният автомат построен по метода на Бжозовски. Тогава $L = \mathcal{L}(\mathcal{B})$.

Упътване. Съобразете, че имаме следните еквивалентности:

$$\begin{aligned}
\alpha \in L &\;\Leftrightarrow\; \varepsilon \in \alpha^{-1}(L) && \text{// от } \textit{Задача 2.17}\\
&\;\Leftrightarrow\; \varepsilon \in M \;\&\; \hat{M} = \delta^\star(\hat{L}, \alpha) && \text{// } M \overset{\text{деф}}{=} \alpha^{-1}(L) \text{ от } \textit{Твърдение 2.13}\\
&\;\Leftrightarrow\; \delta^\star(q_{\texttt{start}}, \alpha) \in F. && \text{// } q_{\texttt{start}} \overset{\text{деф}}{=} \hat{L} \text{ и } \varepsilon \in \alpha^{-1}(L)
\end{aligned}$$

□

2.6.1 Примерни задачи

Тук $\mathbf{r}^+ \stackrel{\text{деф}}{=} \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}^\star$.

Задача 2.18. Постройте автомат $\mathcal{B}$ по метода на Бжозовски за регулярния език

$$L = \mathcal{L}(((\mathbf{a} + \mathbf{b})^+ \cdot \mathbf{a})^\star).$$

Решение.

- Ясно е, че ще започнем от началното състояние $\hat{L}$. Удобно е да имаме предвид следното представяне

$$\begin{aligned} L &= \{\varepsilon\} \cup \{a,b\}^+ aL \\ &= \{\varepsilon\} \cup \{a,b\} \cdot \{a,b\}^\star aL \\ &= \{\varepsilon\} \cup a\{a,b\}^\star aL \cup b\{a,b\}^\star aL \end{aligned}$$

- Сега като имаме това представяне на L, лесно се съобразява, че

$$a^{-1}(L) = b^{-1}(L) = \{a,b\}^\star aL.$$

  Нека положим $M \stackrel{\text{деф}}{=} \{a,b\}^\star aL$. Лесно се съобразява, че $M \neq L$, защото $\varepsilon \in L$, но $\varepsilon \notin M$. Това означава, че имаме ново състояние $\hat{M}$ и

$$\begin{aligned} \delta(\hat{L}, a) &\stackrel{\text{деф}}{=} \hat{M} \quad \text{// защото } a^{-1}(L) = M \\ \delta(\hat{L}, b) &\stackrel{\text{деф}}{=} \hat{M}. \quad \text{// защото } b^{-1}(L) = M \end{aligned}$$

- За следващата стъпка е удобно да представим езика M по следния начин:

$$\begin{aligned} M &= \{a,b\}^\star aL \\ &= aL \cup \{a,b\}^+ aL \\ &= aL \cup \{a,b\} \cdot \{a,b\}^\star aL \\ &= aL \cup \{a,b\} \cdot M \\ &= aL \cup aM \cup bM \end{aligned}$$

  От това представяне на M веднага се съобразява, че

$$\begin{aligned} a^{-1}(M) &= L \cup M \\ b^{-1}(M) &= M. \end{aligned}$$

  Нека да положим $N \stackrel{\text{деф}}{=} L \cup M$. Имаме, че $N \neq L$, защото $a \in N$, но $a \notin L$. Освен това, $N \neq M$, защото $\varepsilon \in N$, но $\varepsilon \notin M$. Това означава, че имаме ново състояние $\hat{N}$ и тогава

$$\begin{aligned} \delta(\hat{M}, a) &\stackrel{\text{деф}}{=} \hat{N} \quad \text{// защото } a^{-1}(M) = N \\ \delta(\hat{M}, b) &\stackrel{\text{деф}}{=} \hat{N} \quad \text{// защото } b^{-1}(M) = M. \end{aligned}$$

- Да разгледаме следното представяне:

$$\begin{aligned} N &= L \cup M \\ &= \{\varepsilon\} \cup aM \cup bM \cup M \\ &= \{\varepsilon\} \cup aM \cup bM \cup aL \\ &= \{\varepsilon\} \cup aN \cup bM. \end{aligned}$$

  Веднага можем да съобразим, че

$$\begin{aligned} a^{-1}(N) &= N \\ b^{-1}(N) &= M. \end{aligned}$$

  Сега полагаме:

$$\begin{aligned} \delta(\hat{N}, a) &\stackrel{\text{деф}}{=} \hat{N} \quad \text{// защото } a^{-1}(N) = N \\ \delta(\hat{N}, b) &\stackrel{\text{деф}}{=} \hat{M} \quad \text{// защото } b^{-1}(N) = M. \end{aligned}$$

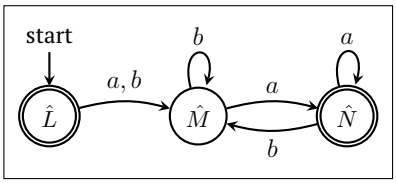
- Нямаме повече нови състояния. Следователно,

$$Q \stackrel{\text{деф}}{=} \{\hat{L}, \hat{M}, \hat{N}\}.$$

- Понеже $\varepsilon \in L$ и $\varepsilon \in N$ е ясно, че

$$F = \{\hat{L}, \hat{N}\}.$$

  Сега вече сме готови да нарисуваме картинка на автомата.



Фигура 2.16: Автомат за езика L по метода на Бжозовски.

□

Задача 2.19. Постройте автомат $\mathcal{B}$ по метода на Бжозовски, който рапознава регулярния език

$$L = \mathcal{L}(\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b})^\star \cdot \mathbf{b}).$$

Решение.

- $a^{-1}(L) = \{a,b\}^\star b \stackrel{\text{деф}}{=} M$. Имаме, че $M \neq L$, защото $b \in M$, но $b \notin L$. Тогава

$$\delta(\hat{L}, a) \stackrel{\text{деф}}{=} \hat{M} \qquad // \text{ защото } a^{-1}(L) = M$$
$$\delta(\hat{L}, b) \stackrel{\text{деф}}{=} \hat{\emptyset} \qquad // \text{ защото } b^{-1}(L) = \emptyset$$

- За по-нататък ще е удобно да представим M по следния начин:

$$\begin{aligned} M &= a \cdot \{a,b\}^\star \cdot b \cup b \cdot \{a,b\}^\star \cdot b \cup \{b\} \\ &= aM \cup bM \cup \{b\}. \end{aligned}$$

  Сега е ясно, че $a^{-1}(M) = M$, а $b^{-1}(M) = \{\varepsilon\} \cup M$. Нека да положим $N \stackrel{\text{деф}}{=} \{\varepsilon\} \cup M$. Имаме, че $N \neq L$ и $N \neq M$, защото $\varepsilon \in N$, но $\varepsilon \notin L$ и $\varepsilon \notin M$. Тогава

$$\delta(\hat{M}, a) \stackrel{\text{деф}}{=} \hat{M} \qquad // \text{ защото } a^{-1}(M) = M$$
$$\delta(\hat{M}, b) \stackrel{\text{деф}}{=} \hat{N} \qquad // \text{ защото } b^{-1}(M) = N$$

- Можем да представим езика N по следния начин:

$$N = \{\varepsilon\} \cup aM \cup bM \cup \{b\}.$$

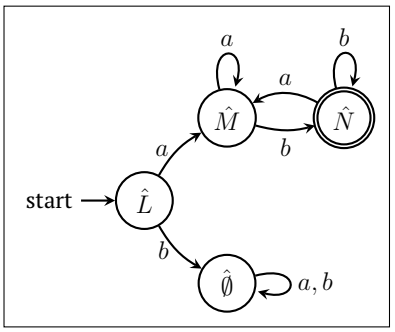
  Тогава имаме, че:

$$\delta(\hat{N}, a) \stackrel{\text{деф}}{=} \hat{M} \qquad // \text{ защото } a^{-1}(N) = M$$
$$\delta(\hat{N}, b) \stackrel{\text{деф}}{=} \hat{N} \qquad // \text{ защото } b^{-1}(N) = M.$$

- Завършваме с дефиницията на функцията на преходите като:

$$\delta(\hat{\emptyset}, a) \stackrel{\text{деф}}{=} \hat{\emptyset} \qquad // \text{ защото } a^{-1}(\emptyset) = \emptyset$$
$$\delta(\hat{\emptyset}, b) \stackrel{\text{деф}}{=} \hat{\emptyset} \qquad // \text{ защото } b^{-1}(\emptyset) = \emptyset.$$

- Съобразете сами, че $F = \{\hat{N}\}$.



Фигура 2.17: Автомат за езика $\mathcal{L}(\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b})^\star \cdot \mathbf{b})$ по метода на Бжозовски.

□

Задача 2.20. Постройте автомат по метода на Бжозовски за регулярния език

$$L = \{\omega \in \{a,b\}^\star \mid |\omega|_a \text{ е четно и } |\omega|_b = 1\}.$$

Решение.

$$\begin{aligned} a^{-1}(L) &= \{\omega \in \{a,b\}^\star \mid |\omega|_a \text{ е нечет. и } |\omega|_b = 1\} \\ &\stackrel{\text{деф}}{=} M. \end{aligned}$$

Ясно е, че $M \neq L$, защото например $aab \in L$, но $aab \notin M$.

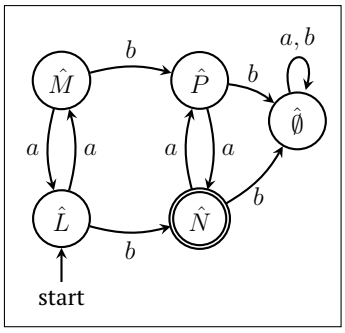
$$\begin{aligned} b^{-1}(L) &= \{\omega \in \{a,b\}^\star \mid |\omega|_a \text{ е четно и } |\omega|_b = 0\} \\ &\stackrel{\text{деф}}{=} N. \end{aligned}$$

Ясно е, че $N \neq M$ и $N \neq L$, защото $aa \in N$, но $aa \notin M$ и $aa \notin L$.

$$\begin{aligned} &a^{-1}(M) = L; \\ &b^{-1}(M) = \{\omega \in \{a,b\}^\star \mid |\omega|_a \text{ е нечет. и } |\omega|_b = 0\} \\ &\qquad \stackrel{\text{деф}}{=} P. \end{aligned}$$

Ясно е, че $P \neq M, L, N$, защото $a \in P$, но $a \notin M, L, N$.

$$a^{-1}(N) = P \quad \text{и} \quad b^{-1}(N) = \emptyset$$
$$a^{-1}(P) = N \quad \text{и} \quad b^{-1}(P) = \emptyset.$$



Фигура 2.18: Автомат, който приема думи с четен брой a и точно едно b, получен чрез метода на Бжозовски.

□

Задача 2.21. Да припомним, че в *Задача 2.4* се искаше да се докаже, че езикът

$$L = \{\alpha \in \{0,1\}^\star \mid \overline{\alpha}_{(2)} \equiv 2 \bmod 3\}$$

е регулярен. Ние направихме това като построихме автомат за L и доказахме, че той разпознава L. Сега пък постройте автомат за L по метода на Бжозовски.

Решение.

За целта ще ни трябва алтернативна дефиниция на $\overline{\alpha}_{(2)}$. За една дума $\alpha \in \{0,1\}^\star$, можем да дадем следната дефиниция на $\overline{\alpha}_{(2)}$:

- $\overline{\varepsilon}_{(2)} = 0$,
- $\overline{0\alpha}_{(2)} = \overline{\alpha}_{(2)}$,
- $\overline{1\alpha}_{(2)} = 2^{|\alpha|} + \overline{\alpha}_{(2)}$.

Тогава имаме, че:

$$\begin{aligned} 0^{-1}(L) &= \{\alpha \in \{0,1\}^\star \mid 0\alpha \in L\} \\ &= \{\alpha \in \{0,1\}^\star \mid \overline{0\alpha}_{(2)} \equiv 2 \bmod 3\} \\ &= \{\alpha \in \{0,1\}^\star \mid \overline{\alpha}_{(2)} \equiv 2 \bmod 3\} \\ &= L. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1^{-1}(L) &= \{\alpha \in \{0,1\}^\star \mid 1\alpha \in L\} \\ &= \{\alpha \in \{0,1\}^\star \mid \overline{1\alpha}_{(2)} \equiv 2 \bmod 3\} \\ &= \{\alpha \in \{0,1\}^\star \mid 2^{|\alpha|} + \overline{\alpha}_{(2)} \equiv 2 \bmod 3\} \\ &\overset{\text{деф}}{=} M. \end{aligned}$$

Лесно се съобразява, че $L \neq M$, защото например за думата $\alpha = 10$ имаме, че $\alpha \in L$, но $\alpha \notin M$. Продължаваме нататък:

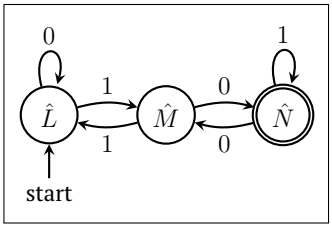
$$\begin{aligned} 0^{-1}(M) &= \{\alpha \in \{0,1\}^\star \mid 0\alpha \in M\} \\ &= \{\alpha \in \{0,1\}^\star \mid 2^{|0\alpha|} + \overline{0\alpha}_{(2)} \equiv 2 \bmod 3\} \\ &= \{\alpha \in \{0,1\}^\star \mid 2 \cdot 2^{|\alpha|} + \overline{\alpha}_{(2)} \equiv 2 \bmod 3\} \\ &\overset{\text{деф}}{=} N. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1^{-1}(M) &= \{\alpha \in \{0,1\}^\star \mid 1\alpha \in M\} \\ &= \{\alpha \in \{0,1\}^\star \mid 2^{|1\alpha|} + \overline{1\alpha}_{(2)} \equiv 2 \bmod 3\} \\ &= \{\alpha \in \{0,1\}^\star \mid 2 \cdot 2^{|\alpha|} + 2^{|\alpha|} + \overline{\alpha}_{(2)} \equiv 2 \bmod 3\} \\ &= \{\alpha \in \{0,1\}^\star \mid 3 \cdot 2^{|\alpha|} + \overline{\alpha}_{(2)} \equiv 2 \bmod 3\} \\ &= \{\alpha \in \{0,1\}^\star \mid \overline{\alpha}_{(2)} \equiv 2 \bmod 3\} \\ &= L. \end{aligned}$$

Да проверим, че $N \neq L$ и $N \neq M$. Това отново е лесно. Нека например да разгледаме $\alpha = 11$. Непосредствено се проверява, че $\alpha \in N$, $\alpha \notin L$, $\alpha \notin M$. Продължаваме нататък:

$$\begin{aligned} 0^{-1}(N) &= \{\alpha \in \{0,1\}^\star \mid 0\alpha \in N\} \\ &= \{\alpha \in \{0,1\}^\star \mid 2 \cdot 2^{|0\alpha|} + \overline{0\alpha}_{(2)} \equiv 2 \bmod 3\} \\ &= \{\alpha \in \{0,1\}^\star \mid 4 \cdot 2^{|\alpha|} + \overline{\alpha}_{(2)} \equiv 2 \bmod 3\} \\ &= \{\alpha \in \{0,1\}^\star \mid 3 \cdot 2^{|\alpha|} + 2^{|\alpha|} + \overline{\alpha}_{(2)} \equiv 2 \bmod 3\} \\ &= \{\alpha \in \{0,1\}^\star \mid 2^{|\alpha|} + \overline{\alpha}_{(2)} \equiv 2 \bmod 3\} \\ &= M \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1^{-1}(N) &= \{\alpha \in \{0,1\}^\star \mid 1\alpha \in N\} \\ &= \{\alpha \in \{0,1\}^\star \mid 2 \cdot 2^{|1\alpha|} + \overline{1\alpha}_{(2)} \equiv 2 \bmod 3\} \\ &= \{\alpha \in \{0,1\}^\star \mid 4 \cdot 2^{|\alpha|} + 2^{|\alpha|} + \overline{\alpha}_{(2)} \equiv 2 \bmod 3\} \\ &= \{\alpha \in \{0,1\}^\star \mid 3 \cdot 2^{|\alpha|} + 2 \cdot 2^{|\alpha|} + \overline{\alpha}_{(2)} \equiv 2 \bmod 3\} \\ &= \{\alpha \in \{0,1\}^\star \mid 2 \cdot 2^{|\alpha|} + \overline{\alpha}_{(2)} \equiv 2 \bmod 3\} \\ &= N. \end{aligned}$$



Фигура 2.19: $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \{\alpha \in \{0,1\}^\star \mid \overline{\alpha}_{(2)} \equiv 2 \pmod 3\}$.

□

Пример 2.8. Да разгледаме езика $L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Ние вече знаем от *Пример 2.6*, че L не е регулярен език. Да се опитаме да построим автомат, който го разпознава.

Нека за всяко k положим

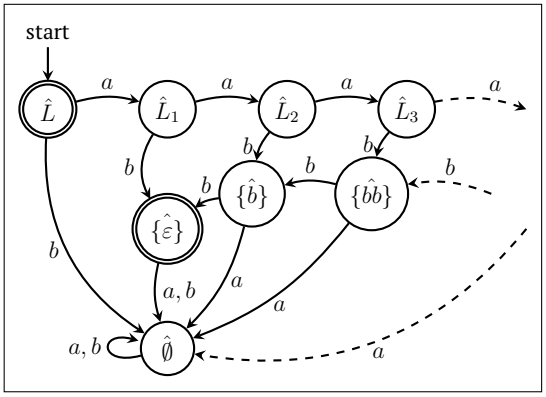
$$L_k \overset{\text{деф}}{=} \{a^n b^{n+k} \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Да видим какво се получава като приложим процедурата за строене на минимален автомат.

- $a^{-1}(L) = L_1$;
- $b^{-1}(L) = \emptyset$;

- $a^{-1}(L_1) = L_2$;
- $b^{-1}(L_1) = \{\varepsilon\}$;
- $a^{-1}(\{\varepsilon\}) = b^{-1}(\{\varepsilon\}) = \emptyset$;
- Лесно можем да докажем, че за всяко k е изпълнено, че $a^{-1}(L_k) = L_{k+1}$.
- Лесно се вижда, че $b^{-1}(L_{k+1}) = \{b^k\}$, за всяко k.
- Ясно е, че $b^{-1}(\{b^k\}) = \{b^{k-1}\}$, за всяко $k \geq 1$.

Получаваме, че езикът L се разпознава от автомат с *безкрайно много състояния*.



Фигура 2.20: *Безкраен* автомат за $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ построен по метода на Бжозовски.

2.7 Минимален автомат

Сега ще видим, че автоматът на Бжозовски $\mathcal{B}$ за даден регулярен език L е в известен смисъл най-добрият възможен. Накратко, $\mathcal{B}$ има най-малкия възможен брой състояния измежду всички детерминирани крайни автомати, които разпознават L.

Нека $\mathcal{A}$ е ДКА. За всяко състояние q на $\mathcal{A}$ да разгледаме езика

$$\mathcal{L}_{\mathcal{A}}(q) \stackrel{\text{деф}}{=} \{\omega \in \Sigma^\star \mid \delta^\star_{\mathcal{A}}(q, \alpha) \in F^{\mathcal{A}}\}.$$

В частност имаме, че:

$$\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \mathcal{L}_{\mathcal{A}}(q_{\mathtt{start}}).$$

Без ограничение на общността, нека приемем, че винаги разглеждаме само свързани ДКА $\mathcal{A}$, т.е. всяко състояние е достижимо от началното. Нека за всяка дума α да положим $q_\alpha \stackrel{\text{деф}}{=} \delta^\star_{\mathcal{A}}(q_{\mathtt{start}}, \alpha)$. Понеже $\mathcal{A}$ е свързан, то всяко състояние на $\mathcal{A}$ може да се разглежда като q_α за някоя дума α.

Тук използваме, че $\delta_{\mathcal{A}}$ е тотална функция.

Ясно е, че за някои състояния p съществуват безкрайно много думи α, за които $q_\alpha = p$.

Твърдение 2.15. Нека $L = \mathcal{L}(\mathcal{A})$. Тогава за всяка дума α е изпълнено, че:

$$\mathcal{L}_{\mathcal{A}}(q_\alpha) = \alpha^{-1}(L).$$

Доказателство. За произволна дума γ имаме следните еквивалентности:

$$\begin{aligned}
\gamma \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}}(q_\alpha) &\Leftrightarrow \delta^\star(q_\alpha, \gamma) \in F \\
&\Leftrightarrow \delta^\star(\delta^\star(q_{\mathtt{start}}, \alpha), \gamma) \in F \\
&\Leftrightarrow \delta^\star(q_{\mathtt{start}}, \alpha\gamma) \in F && \text{// свойство на } \delta^\star \\
&\Leftrightarrow \alpha\gamma \in \mathcal{L}(\mathcal{A}) \\
&\Leftrightarrow \gamma \in \alpha^{-1}(L). && \text{// } L = \mathcal{L}(\mathcal{A})
\end{aligned}$$

□

Задача 2.22. Нека $\mathcal{B}$ е автомат на Бжозовски за език L. Докажете, че за произволно състояние $\hat{M}$ на $\mathcal{B}$,

$$\mathcal{L}_{\mathcal{B}}(\hat{M}) = M.$$

Твърдение 2.16. Нека A и B са множества, като A е крайно, за които съществува *сюрективна* функция $f : A \to B$. Тогава $|B| \leq |A|$.

Упътване. Понеже A е крайно множество, можем да изброим елементите му в редица. Нека $A = \{a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}\}$. Разгледайте $g : B \to A$, където

$$g(b) \stackrel{\text{деф}}{=} a_m \text{ за } m = \min\{i < n \mid f(a_i) = b\}.$$

Докажете, че g е инективна. □

Тази лема ни казва, че автоматът на Бжозовски има възможно най-малкия брой състояния.

Лема 2.6. Нека L е регулярен език и $\mathcal{A}$ е ДКА, който разпознава L, а $\mathcal{B}$ е автоматът на Бжозовски за L. Тогава $|Q^{\mathcal{B}}| \leq |Q^{\mathcal{A}}|$.

Доказателство. Да разгледаме функцията $f : Q^{\mathcal{A}} \to Q^{\mathcal{B}}$ по следния начин:

$$f(q) \stackrel{\text{деф}}{=} \hat{M}, \text{ където } M = \mathcal{L}_{\mathcal{A}}(q).$$

Понеже приехме, че $\mathcal{A}$ е свързан автомат, то f е добре дефинирана, защото за произволно състояние p, нека α е една дума, за която $p = \delta^\star(q_{\mathtt{start}}, \alpha)$, т.е. $p = q_\alpha$. Тогава от *Твърдение 2.15* следва, че $f(q_\alpha) = \hat{M}$, където $M = \alpha^{-1}(L)$.

Също така, f е сюрективна, защото за произволно $\hat{M} \in Q^{\mathcal{B}}$ има дума α, за която $M = \alpha^{-1}(L)$. Тогава $f(q_\alpha) = \hat{M}$. Сега от *Твърдение 2.16* можем да заключим, че

$$|Q^{\mathcal{B}}| \leq |Q^{\mathcal{A}}|.$$

□

Така получаваме следния критерий за проверка дали даден език е регулярен.

Следствие 2.1. Един език L е регулярен точно тогава, когато автоматът $\mathcal{B}$ на Бжозовски за L, има крайно много състояния.

Доказателство. Нека L е регулярен. Тогава $L = \mathcal{L}(\mathcal{A})$ за някой ДКА $\mathcal{A}$. Да напомни, че също имаме и $\mathcal{L}(\mathcal{B}) = L$. Понеже $|Q^{\mathcal{B}}| \leq |Q^{\mathcal{A}}|$, то $\mathcal{B}$ има краен брой състояния. Обратно, ако $\mathcal{B}$ има крайно много състояния, то тогава $\mathcal{B}$ е ДКА. Понеже $\mathcal{L}(\mathcal{B}) = L$, то L е автоматен и следователно регулярен. □

Следствие 2.2. Нека L е регулярен език. Тогава автоматът $\mathcal{B}$, построен по метода на Бжозовски за L, има минималния възможен брой състояния измежду всеки детерминирани крайни автомати разпознаващи L.

Твърдение 2.17. Нека A и B са крайни равномощни множества. Докажете, че ако $g : A \to B$ е сюрекция, то g е биекция.

Доказателство. Нека $A = \{a_0, \ldots, a_{n-1}\}$ и $B = \{b_0, \ldots, b_{n-1}\}$. Нека, за всяко $i < n$,

$$A_i \stackrel{\text{деф}}{=} \{a_j \in A \mid g(a_j) = b_i\}.$$

Щом g е сюрекция, то $A_i \neq \emptyset$ за всеки индекс $i < n$. Понеже g е функция, то $A_i \cap A_j = \emptyset$ за всеки два различни индекса i и j. Това означава, че

$$n = |A| = |\bigcup_{i<n} A_i| = \sum_{i<n} |A_i|.$$

Оттук следва, че щом за всяко i имаме, че $|A_i| \neq 0$, то $|A_i| = 1$. Заключаваме, че g е инекция, защото в противен случай щяхме да имаме някое i, за което $|A_i| > 1$. □

Теорема 2.3. За всеки регулярен език L съществува единствен минимален ДКА с точност до изоморфизъм.

Доказателство. Вече знаем, че автоматът $\mathcal{B}$, построен по метода на Бжозовски за L, има минималния възможен брой състояния. Нека $\mathcal{A}$ е друг ДКА разпознаващ L и $|Q^{\mathcal{A}}| = |Q^{\mathcal{B}}|$. Трябва да докажем, че $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$.

Ясно е, $\mathcal{A}$ е свързан. Понеже функцията $f : Q^{\mathcal{A}} \to Q^{\mathcal{B}}$, дефинирана като $f(q) = \mathcal{L}_{\mathcal{A}}(q)$ е сюрективна и $|Q^{\mathcal{A}}| = |Q^{\mathcal{B}}|$, то от *Твърдение 2.17* имаме, че f е всъщност биекция. Остава да видим защо $\mathcal{A} \cong_f \mathcal{B}$. Да напомним, че състоянията на $Q^{\mathcal{A}}$ можем да ги разглеждаме като q_α и тогава $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}(q_\alpha) = \alpha^{-1}(L)$ от *Твърдение 2.15*.

- За началното състояние имаме, че:

$$\begin{aligned} f(q_{\texttt{start}}) &= f(q_\varepsilon) && \text{// } q_{\texttt{start}} = q_\varepsilon \\ &= \hat{L}. && \text{// } \varepsilon^{-1}(L) = L \end{aligned}$$

- За финалните състояния имаме, че:

$$\begin{aligned} q_\alpha \in F^{\mathcal{A}} &\Leftrightarrow \delta^\star_{\mathcal{A}}(q_{\texttt{start}}, \alpha) \in F^{\mathcal{A}} && \text{// } q_\alpha = \delta^\star_{\mathcal{A}}(q_{\texttt{start}}, \alpha) \\ &\Leftrightarrow \alpha \in \mathcal{L}(\mathcal{A}) && \text{// деф. на } \mathcal{L}(\mathcal{A}) \\ &\Leftrightarrow \varepsilon \in \alpha^{-1}(L) && \text{// } L = \mathcal{L}(\mathcal{A}) \\ &\Leftrightarrow \hat{M} \in F^{\mathcal{B}}. && \text{// за } M = \alpha^{-1}(L) \end{aligned}$$

- Остава да докажем, че за произволна буква b е изпълнено, че:

$$f(\delta_{\mathcal{A}}(q_\alpha, b)) = \delta_{\mathcal{B}}(f(q_\alpha), b).$$

Нека положим $N \stackrel{\text{деф}}{=} \alpha^{-1}(L)$ и $M \stackrel{\text{деф}}{=} b^{-1}(N) = (\alpha b)^{-1}(L)$. Да напомним, че от конструкцията на автомата $\mathcal{B}$ знаем, че:

$$\delta_{\mathcal{B}}(\hat{N}, b) = \hat{M}.$$

От *Твърдение 2.15* имаме, че $f(q_\alpha) = \hat{N}$. Също така имаме равенствата:

$$\begin{aligned} f(\delta_{\mathcal{A}}(q_\alpha, b)) &= f(q_{\alpha b}) && // \; q_{\alpha b} = \delta_{\mathcal{A}}(q_\alpha, b) \\ &= \hat{M}. && // \; M = (\alpha b)^{-1}(L) \end{aligned}$$

Заключаваме, че

$$f(\delta_{\mathcal{A}}(q_\alpha, b)) = \delta_{\mathcal{B}}(f(q_\alpha), b).$$

□

2.7.1 Примерни задачи

За да докажем, че един език L не е регулярен можем да приложим *Следствие 2.1* като докажем, че автоматът на Бжозовски за L има безкрайно много състояния. Обърнете внимание, че не е нужно да намерим всички състояния на автомата $\mathcal{B}$, а само това, че са безкрайно много.

Сравнете с *Пример 2.8*.

Пример 2.9. За езика $L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ имаме, че за произволни естествени числа k и j е изпълнено, че:

$$k \neq j \implies (a^k)^{-1}(L) \neq (a^m)^{-1}(L).$$

Проверете, че $(a^k)^{-1}(L) = \{a^n b^{n+k} \mid n \in \mathbb{N}\}$, за всяко $k \in \mathbb{N}$. Така получаваме, че автоматът на Бжозовски за L ще има безкрайно много състояния. Заключаваме, че този език **не** е регулярен.

Пример 2.10. За езика $L = \{a^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\}$ имаме, че за произволни естествени числа m и n е изпълнено, че:

$$m \neq n \implies (a^{n^2})^{-1}(L) \neq (a^{m^2})^{-1}(L).$$

Без ограничение на общността, да разгледаме $n < m$ и думата $\gamma = a^{2n+1}$. Ясно е, че $\gamma \in (a^{n^2})^{-1}(L)$, защото $a^{n^2}\gamma = a^{(n+1)^2} \in L$, но

$$m^2 < m^2 + 2n + 1 < (m+1)^2$$

и следователно $\gamma \notin (a^{m^2})(L)$, защото $a^{m^2}\gamma = a^{m^2+2n+1} \notin L$. Заключаваме, че този език **не** е регулярен.

Пример 2.11. За езика $L = \{a^{n!} \mid n \in \mathbb{N}\}$ имаме, че за произволни естествени числа m и n е изпълнено, че:

$$m \neq n \implies (a^{n!})^{-1}(L) \neq (a^{m!})^{-1}(L).$$

Без ограничение на общността, да разгледаме $n < m$ и думата $\gamma = a^{(n!)n}$. Тогава $\gamma \in (a^{n!})^{-1}(L)$, защото $a^{n!}\gamma = a^{(n+1)!} \in L$, но

$$m! < m! + (n!)n < m! + (m!)m = (m+1)!$$

и следователно $\gamma \notin (a^{m!})^{-1}(L)$, защото $a^{m!}\gamma = a^{m!+(n!)n} \notin L$. Заключаваме, че този език **не** е регулярен.

Задача 2.23. Докажете, че езикът

$$L = \{a^{f_n} \mid f_0 = f_1 = 1 \,\&\, f_{n+2} = f_{n+1} + f_n\}$$

не е регулярен.

2.8 Автомат на Майхил-Нероуд

Нека L е език и нека α и β са думи. Казваме, че α и β са **еквивалентни относно** L, което записваме като $\alpha \approx_L \beta$, когато:

на англ. Myhill-Nerode

$$\alpha \approx_L \beta \overset{\text{деф}}{\Leftrightarrow} \alpha^{-1}(L) = \beta^{-1}(L).$$

С други думи,

$$\alpha \approx_L \beta \;\Leftrightarrow\; (\forall \omega \in \Sigma^\star)[\, \alpha\omega \in L \;\Leftrightarrow\; \beta\omega \in L \,].$$

$\approx_L$ е известна като релация на Майхил-Нероуд

Задача 2.24. Докажете, че за всяка дума α е изпълнено, че:

$$\alpha \in L \;\Leftrightarrow\; [\alpha]_L \subseteq L.$$

Ще дефинираме детерминиран автомат $\mathcal{M} = \langle \Sigma, Q, q_{\texttt{start}}, \delta, F \rangle$ по следния начин:

Ще наричаме $\mathcal{M}$ автомат на Майхил-Нероуд. На практика във всеки учебник се разглежда автомата на Майхил-Нероуд вместо автомата на Бжозовски. Например, [PL98, стр. 98], [HU79, стр. 65], [Sip12, стр. 91], [Koz97, стр. 89]

- $Q \overset{\text{деф}}{=} \{\, [\alpha]_L \mid \alpha \in \Sigma^\star \,\}$;
- $q_{\texttt{start}} \overset{\text{деф}}{=} [\varepsilon]_L$;
- $F \overset{\text{деф}}{=} \{\, [\alpha]_L \mid \alpha \in L \,\}$;
- Определяме функцията на преходите δ като за всяка буква b и всяка дума α,

$$\delta([\alpha]_L, b) \overset{\text{деф}}{=} [\alpha b]_L.$$

Задача 2.25. Докажете, че $\delta : Q^{\mathcal{M}} \times \Sigma \to Q^{\mathcal{M}}$ е функция.

Упътване. Трябва да докажете, че

$$[\alpha]_L = [\beta]_L \implies \delta([\alpha]_L, b) = \delta([\beta]_L, b).$$

□

Задача 2.26. Докажете, че ако $\mathcal{M}$ е автоматът на Майхил-Нероуд за езика L, то $\mathcal{L}(\mathcal{M}) = L$.

Упътване. Докажете, че за всеки две думи α и β е изпълнено, че:

$$\delta^\star_{\mathcal{M}}([\alpha]_L, \beta) = [\alpha\beta]_L.$$

Оттук заключете директно, че $\mathcal{L}(\mathcal{M}) = L$. □

Обърнете внимание, че тук не изискваме L да е регулярен.

Задача 2.27. Да разгледаме един език L. Нека $\mathcal{B}$ е автоматът на Бжозовски за L и $\mathcal{M}$ е автоматът на Майхил-Нероуд за L. Да разгледаме $f : Q^{\mathcal{M}} \to Q^{\mathcal{B}}$, където:

$$f([\alpha]_L) = \hat{K} \overset{\text{деф}}{\Leftrightarrow} K = \alpha^{-1}(L).$$

Докажете, че f е биекция.

Теоремата е доказана независимо от Майхил [Myh57] и Нероуд [Ner58].

Задача 2.28 (Теорема на Майхил-Нероуд)**.** Докажете, че L е регулярен език точно тогава, когато автоматът на Майхил-Нероуд $\mathcal{M}$ е краен. Освен това, докажете, че $\mathcal{M}$ е минимален ДКА за L.

2.9 Минимизация

- Нека отново да приемем, че сме фиксирали един ДКА $\mathcal{A} = \langle \Sigma, Q, q_{\texttt{start}}, \delta, F \rangle$ като всяко състояние е достижимо от началното. Да напомним, че с $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}(p)$ означаваме езикът, който се разпознава от автомата $\mathcal{A}$, ако приемем, че p е началното състояние, т.е. $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}(p) \stackrel{\text{деф}}{=} \{\omega \in \Sigma^\star \mid \delta^\star(p, \omega) \in F\}$. В частност, $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \mathcal{L}_{\mathcal{A}}(q_{\texttt{start}})$.

- Сега дефинираме следната релация между състояния на автомата $\mathcal{A}$:

$$p \equiv_{\mathcal{A}} q \stackrel{\text{деф}}{\Leftrightarrow} \mathcal{L}_{\mathcal{A}}(p) = \mathcal{L}_{\mathcal{A}}(q).$$

  Това означава, че $p \equiv_{\mathcal{A}} q$ точно тогава, когато

$$(\forall \omega \in \Sigma^\star)[\, \delta^\star(p, \omega) \in F \;\Leftrightarrow\; \delta^\star(q, \omega) \in F \,]. \tag{2.11}$$

- Релацията $\equiv_{\mathcal{A}}$ между състояния на автомата $\mathcal{A}$ е релация на еквивалентност. ✍ Защо?

Твърдение 2.18. За произволно състояние q е изпълнено, че:

$$[q]_{\equiv_{\mathcal{A}}} \cap F \neq \emptyset \;\Leftrightarrow\; [q]_{\equiv_{\mathcal{A}}} \subseteq F.$$

Доказателство. Посоката ($\Leftarrow$) е очевидна. За ($\Rightarrow$), нека $p \in [q]_{\equiv_{\mathcal{A}}} \cap F$. Достатъчно е да докажем, че $q \in F$. Щом $p \in F$, то $\varepsilon \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}}(p)$. Щом $p \equiv_{\mathcal{A}} q$, то $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}(p) = \mathcal{L}_{\mathcal{A}}(q)$ и следователно $\varepsilon \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}}(q)$. С други думи, $\delta^\star_{\mathcal{A}}(q, \varepsilon) \in F$, откъдето получаваме, че $q \in F$. □

Твърдение 2.19. За произволни състояния p и q и произволна буква a е изпълнено:

$$p \equiv_{\mathcal{A}} q \implies \delta(p, a) \equiv_{\mathcal{A}} \delta(q, a).$$

Доказателство. Да разгледаме произволни състояния p, q и буква a. Тогава:

$$\begin{aligned}
p \equiv_{\mathcal{A}} q &\Leftrightarrow \mathcal{L}_{\mathcal{A}}(p) = \mathcal{L}_{\mathcal{A}}(q) \\
&\Leftrightarrow (\forall \beta \in \Sigma^\star)[\delta^\star(p, \beta) \in F \;\Leftrightarrow\; \delta^\star(q, \beta) \in F] \\
&\Rightarrow (\forall \beta \in \Sigma^\star)[\delta^\star(p, a\beta) \in F \;\Leftrightarrow\; \delta^\star(q, a\beta) \in F] \\
&\Leftrightarrow (\forall \beta \in \Sigma^\star)[\delta^\star(\delta(p, a), \beta) \in F \;\Leftrightarrow\; \delta^\star(\delta(q, a), \beta) \in F] \\
&\Leftrightarrow \mathcal{L}_{\mathcal{A}}(\delta(p, a)) = \mathcal{L}_{\mathcal{A}}(\delta(q, a)) \\
&\Leftrightarrow \delta(p, a) \equiv_{\mathcal{A}} \delta(q, a).
\end{aligned}$$

□

За автомата $\mathcal{A} = \langle \Sigma, Q, q_{\texttt{start}}, \delta, F \rangle$, дефинираме автомата $\mathcal{A}' = (\Sigma, Q', q'_{\texttt{start}}, \delta', F')$ по следния начин:

- $Q' \stackrel{\text{деф}}{=} \{[q]_{\equiv_{\mathcal{A}}} \mid q \in Q\}$;

- $q'_{\texttt{start}} \stackrel{\text{деф}}{=} [q_{\texttt{start}}]_{\equiv_\mathcal{A}}$;
- $\delta'([q]_{\equiv_\mathcal{A}}, a) \stackrel{\text{деф}}{=} [\delta(q,a)]_{\equiv_\mathcal{A}}$;
- $F' \stackrel{\text{деф}}{=} \{[q]_{\equiv_\mathcal{A}} \mid [q]_{\equiv_\mathcal{A}} \cap F \neq \emptyset\}$;

Да отбележим, че от *Твърдение 2.19* имаме, че

$$[p]_{\equiv_\mathcal{A}} = [q]_{\equiv_\mathcal{A}} \implies \delta'([p]_{\equiv_\mathcal{A}}, a) = \delta'([q]_{\equiv_\mathcal{A}}, a).$$

С други думи, δ' наистина е функция.

Твърдение 2.20. За всяко състояние q и дума α е изпълнено, че

$$\delta'^\star([q]_{\equiv_\mathcal{A}}, \alpha) = [\delta^\star(q,\alpha)]_{\equiv_\mathcal{A}}. \tag{2.12}$$

Доказателство. Ще докажем Свойство (2.12) с индукция по дължината на α.

- Нека $|\alpha| = 0$, т.е. $\alpha = \varepsilon$. Тогава
$$\delta'^\star([q]_{\equiv_\mathcal{A}}, \varepsilon) = [q]_{\equiv_\mathcal{A}} = [\delta^\star(q,\varepsilon)]_{\equiv_\mathcal{A}}.$$
- Да приемем, че Свойство (2.12) е вярно за думи с дължина n.
- Нека $|\alpha| = n+1$, т.е. $\alpha = \beta a$ и $|\beta| = n$. Тогава

$$\begin{aligned}
\delta'^\star([q]_{\equiv_\mathcal{A}}, \beta a) &= \delta'(\delta'^\star([q]_{\equiv_\mathcal{A}}, \beta), a) && \text{// деф. на } \delta'^\star \\
&= \delta'(\underbrace{[\delta^\star(q,\beta)]_{\equiv_\mathcal{A}}}_{p}, a) && \text{// И.П. за } \beta \\
&= \delta'([p]_{\equiv_\mathcal{A}}, a) \\
&= [\delta(p,a)]_{\equiv_\mathcal{A}} && \text{// деф. на } \delta' \\
&= [\delta(\delta^\star(q,\beta), a)]_{\equiv_\mathcal{A}} && \text{// } p = \delta'^\star(q,\beta) \\
&= [\delta^\star(q,\beta a)]_{\equiv_\mathcal{A}}. && \text{// деф. на } \delta^\star
\end{aligned}$$

□

Лема 2.7. $\mathcal{L}(\mathcal{A}') = \mathcal{L}(\mathcal{A})$.

Доказателство. Достатъчно е да проследим следните еквивалентности за произволна дума α:

$$\begin{aligned}
\alpha \in \mathcal{L}(\mathcal{A}) &\Leftrightarrow \delta^\star(q_{\texttt{start}}, \alpha) \in F && \text{// деф. на } \mathcal{L}(\mathcal{A}) \\
&\Leftrightarrow [\delta^\star(q_{\texttt{start}}, \alpha)]_{\equiv_\mathcal{A}} \in F' && \text{// деф. на } F' \\
&\Leftrightarrow \delta'^\star([q_{\texttt{start}}]_{\equiv_\mathcal{A}}, \alpha) \in F' && \text{// } \textit{Твърдение 2.20} \\
&\Leftrightarrow \delta'^\star(q'_{\texttt{start}}, \alpha) \in F' && \text{// } q'_{\texttt{start}} \stackrel{\text{деф}}{=} [q_{\texttt{start}}]_{\equiv_\mathcal{A}} \\
&\Leftrightarrow \alpha \in \mathcal{L}(\mathcal{A}'). && \text{// деф. на } \mathcal{L}(\mathcal{A}')
\end{aligned}$$

□

Остава да докажем, че автоматът $\mathcal{A}'$ е минимален за езика $\mathcal{L}(\mathcal{A})$. За да направим това ни трябва едно помощно твърдение.

Това твърдение го формулираме в общия случай, но ние ще го използваме, когато $\equiv$ е релацията $\equiv_\mathcal{A}$.

Твърдение 2.21. Нека A и B са множества и $f : A \to B$ е сюрекция. Дефинираме релация на еквивалентност $\equiv$ между елементи на A по следния начин:

$$a_0 \equiv a_1 \overset{\text{деф}}{\Leftrightarrow} f(a_0) = f(a_1).$$

Дефинираме $[a]_\equiv$ да бъде класът на еквивалентност на a, т.е.

$$[a]_\equiv \overset{\text{деф}}{=} \{a_0 \in A \mid f(a) = f(a_0)\}.$$

Нека $A' \overset{\text{деф}}{=} \{[a]_\equiv \mid a \in A\}$. Тогава $f' : A' \to B$, където $f'([a]_\equiv) \overset{\text{деф}}{=} f(a)$ е биекция.

Доказателство. Достатъчно е да направим следните проверки:

- Ако $[a_0]_\equiv = [a_1]_\equiv$, то $f(a_0) = f(a_1)$ и следователно $f'([a_0]_\equiv) = f'([a_1]_\equiv)$. Това означава, че f' е функция.
- За произволен елемент $b \in B$, съществува $a \in A$, за който $f(a) = b$. По дефиниция, $f'([a]_\equiv) = b$. Това означава, че f' е сюрекция.
- Нека сега $[a_0]_\equiv \neq [a_1]_\equiv$, т.е. $f(a_0) \neq f(a_1)$. Тогава $f'([a_0]_\equiv) \neq f'([a_1]_\equiv)$. Това означава, че f' е инекция.

От всичко това заключаваме, че f' е биекция. □

Теорема 2.4. Автоматът $\mathcal{A}'$ е минимален ДКА за езика $\mathcal{L}(\mathcal{A})$.

Доказателство. Нека $\mathcal{B}$ е автоматът на Бжозовски за езика $\mathcal{L}(\mathcal{A})$. За да докажем, че $\mathcal{A}'$ е минимален ДКА за $\mathcal{L}(\mathcal{A})$, според *Лема 2.7* и *Теорема 2.3*, достатъчно е да докажем, че $|Q'| = |Q^{\mathcal{B}}|$. От доказателството на *Лема 2.6* знаем, че функцията $f : Q^{\mathcal{A}} \to Q^{\mathcal{B}}$ е сюрекция, където

$$f(q) = \hat{M} \overset{\text{деф}}{\Leftrightarrow} M = \mathcal{L}_{\mathcal{A}}(q).$$

Нека дефинираме $f' : Q' \to Q^{\mathcal{B}}$ като

$$f'([q]_{\equiv_{\mathcal{A}}}) \overset{\text{деф}}{=} f(q).$$

От *Твърдение 2.21* имаме, че f' е биекция. Заключаваме, че $|Q'| = |Q^{\mathcal{B}}|$. □

Възможно е в доказателството да подходим и по друг начин. Ако докажем, че $\mathcal{A}' \cong_{f'} \mathcal{B}$, то оттук директно следва, че $\mathcal{A}'$ е минимален автомат разпознаващ L.

2.9.1 Кубичен алгоритъм за минимизация

При даден език L и детерминиран краен автомат $\mathcal{A} = \langle \Sigma, Q, q_{\texttt{start}}, \delta, F \rangle$, който го разпознава, целта ни е да построим нов детерминиран краен автомат $\mathcal{A}'$, който има толкова състояния колкото са класовете на еквивалентност на релацията $\equiv_{\mathcal{A}}$. Това

ще направим като „слеем" състоянията на $\mathcal{A}$, които са еквивалентни относно релацията $\equiv_{\mathcal{A}}$. Проблемът с намирането на класовете на еквивалентност на релацията $\equiv_{\mathcal{A}}$ е кванторът $(\forall \omega \in \Sigma^\star)$ във нейната дефиниция (чрез Формула 2.11), защото $\Sigma^\star$ е безкрайно множество от думи. За да разрешим този проблем, ще разгледаме *апроксимации* на езиците $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}(q)$. За естествено число n, да означим

$$\mathcal{L}^n_{\mathcal{A}}(p) \stackrel{\text{деф}}{=} \{\omega \in \Sigma^\star \mid |\omega| \leq n \,\&\, \delta^\star(p,\omega) \in F\}.$$

Можем ли да дадем горна граница m, така че $L(\mathcal{A}) = \bigcup_{n \leq m} \mathcal{L}^n_{\mathcal{A}}(q_{\texttt{start}})$?

Лесно се съобразява, че

$$L(\mathcal{A}) = \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{L}^n_{\mathcal{A}}(q_{\texttt{start}}).$$

За всяко естествено число n, дефинираме бинарните релации $\equiv^n_{\mathcal{A}}$ върху Q по следния начин:

$$p \equiv^n_{\mathcal{A}} q \stackrel{\text{деф}}{\Leftrightarrow} \mathcal{L}^n_{\mathcal{A}}(p) = \mathcal{L}^n_{\mathcal{A}}(q).$$

Релациите $\equiv^n_{\mathcal{A}}$ представляват апроксимации на релацията $\equiv_{\mathcal{A}}$. Обърнете внимание, че за всяко n, $\equiv^n_{\mathcal{A}}$ е *по-груба* релация от $\equiv^{n+1}_{\mathcal{A}}$, която на свой ред е по-груба от $\equiv_{\mathcal{A}}$. Алгоритъмът строи $\equiv^n_{\mathcal{A}}$ докато не срещнем n, за което

$$\equiv^n_{\mathcal{A}} = \equiv^{n+1}_{\mathcal{A}} .$$

Тъй като броят на класовете на еквивалентност на $\equiv_{\mathcal{A}}$ е краен (той е $\leq |Q|$), то със сигурност ще намерим такова n, за което $\equiv^n_{\mathcal{A}} = \equiv^{n+1}_{\mathcal{A}}$. Тогава заключаваме, че за това n имаме, че

$$\equiv_{\mathcal{A}} = \equiv^n_{\mathcal{A}} .$$

Ако $q \in F$, то $\mathcal{L}^0_{\mathcal{A}}(q) = F$ и ако $q \notin F$, то $\mathcal{L}^0_{\mathcal{A}}(q) = Q \setminus F$.

Понеже единствената дума с дължина 0 е ε и по определение $\delta^\star(p,\varepsilon) = p$, лесно се съобразява, че $\equiv^0_{\mathcal{A}}$ има два класа на еквивалентност. Единият е F, а другият е $Q \setminus F$.

Вече имаме базовия случай за $n = 0$. Да видим сега как можем да намерим $\equiv^{n+1}_{\mathcal{A}}$ при положение, че вече сме намерили $\equiv^n_{\mathcal{A}}$.

Твърдение 2.22. За всеки две състояния p и q, и всяко естествено число n, $p \equiv^{n+1}_{\mathcal{A}} q$ точно тогава, когато:

а) $p \equiv^n_{\mathcal{A}} q$ и

б) $(\forall a \in \Sigma)[\delta(q,a) \equiv^n_{\mathcal{A}} \delta(p,a)]$.

[PL98, стр. 99] **Доказателство.** Да положим $\Sigma^{\leq n} \stackrel{\text{деф}}{=} \{\alpha \in \Sigma^\star \mid |\alpha| \leq n\}$. Получаваме еквивалент-

ностите:

$$\begin{aligned}
p \equiv_{\mathcal{A}}^{n+1} q \;&\Leftrightarrow (\forall \alpha \in \Sigma^{\leq n+1})[\delta^\star(p,\alpha) \in F \;\Leftrightarrow\; \delta^\star(q,\alpha) \in F] \\
&\Leftrightarrow (\forall \alpha \in \Sigma^{\leq n})[\delta^\star(p,\alpha) \in F \;\Leftrightarrow\; \delta^\star(q,\alpha) \in F] \;\&\\
&\quad (\forall a \in \Sigma)(\forall \beta \in \Sigma^{n})[\delta^\star(p,a\beta) \in F \;\Leftrightarrow\; \delta^\star(q,a\beta) \in F] \\
&\Leftrightarrow (\forall \alpha \in \Sigma^{\leq n})[\delta^\star(p,\alpha) \in F \;\Leftrightarrow\; \delta^\star(q,\alpha) \in F] \;\&\\
&\quad (\forall a \in \Sigma)(\forall \beta \in \Sigma^{<n})[\delta^\star(\delta(p,a),\beta) \in F \;\Leftrightarrow\; \delta^\star(\delta(q,a),\beta) \in F] \;\&\\
&\quad (\forall a \in \Sigma)(\forall \beta \in \Sigma^{n})[\delta^\star(\delta(p,a),\beta) \in F \;\Leftrightarrow\; \delta^\star(\delta(q,a),\beta) \in F] \\
&\Leftrightarrow (\forall \alpha \in \Sigma^{\leq n})[\delta^\star(p,\alpha) \in F \;\Leftrightarrow\; \delta^\star(q,\alpha) \in F] \;\&\\
&\quad (\forall a \in \Sigma)(\forall \beta \in \Sigma^{\leq n})[\delta^\star(\delta(p,a),\beta) \in F \;\Leftrightarrow\; \delta^\star(\delta(q,a),\beta) \in F] \;\&\\
&\Leftrightarrow p \equiv_{\mathcal{A}}^{n} q \;\&\; (\forall a \in \Sigma)[\delta(p,a) \equiv_{\mathcal{A}}^{n} \delta(q,a)].
\end{aligned}$$

□

Твърдение 2.23. Нека $\equiv_{\mathcal{A}}^{n} = \equiv_{\mathcal{A}}^{n+1}$. Тогава:

$$m > n \implies \equiv_{\mathcal{A}}^{n} = \equiv_{\mathcal{A}}^{m} . \tag{2.13}$$

Доказателство. Ще докажем Свойство (2.13) с индукция по m за $m > n$.

- Базата на индукцията е случаят $m = n + 1$, за който Свойство (2.13) е изпълнено по условие.
- Индукционното ни предположение е, че $\equiv_{\mathcal{A}}^{n} = \equiv_{\mathcal{A}}^{m}$ за някое $m > n + 1$.
- Индукционната ни стъпка е да докажем, че $\equiv_{\mathcal{A}}^{n} = \equiv_{\mathcal{A}}^{m+1}$. За произволни състояния p и q имаме следните еквивалентности:

$$\begin{aligned}
p \equiv_{\mathcal{A}}^{m+1} q \;&\Leftrightarrow\; p \equiv_{\mathcal{A}}^{m} q \;\&\; (\forall a \in \Sigma)[\delta(p,a) \equiv_{\mathcal{A}}^{m} \delta(q,a)] && \text{// от } \textit{Твърдение 2.22} \\
&\Leftrightarrow\; p \equiv_{\mathcal{A}}^{n} q \;\&\; (\forall a \in \Sigma)[\delta(p,a) \equiv_{\mathcal{A}}^{n} \delta(q,a)] && \text{// от И.П.} \\
&\Leftrightarrow\; p \equiv_{\mathcal{A}}^{n+1} q && \text{// от } \textit{Твърдение 2.22} \\
&\Leftrightarrow\; p \equiv_{\mathcal{A}}^{n} q. && \text{// от условието}
\end{aligned}$$

□

Твърдение 2.24. Докажете, че за произволно естествено число n,

$$\equiv_{\mathcal{A}}^{n} = \equiv_{\mathcal{A}}^{n+1} \implies \equiv_{\mathcal{A}}^{n} = \equiv_{\mathcal{A}} .$$

Доказателство. Нека $\equiv_{\mathcal{A}}^{n} = \equiv_{\mathcal{A}}^{n+1}$. Ще докажем, че за произволни състояния p и q е изпълено, че:

$$p \equiv_{\mathcal{A}} q \;\Leftrightarrow\; p \equiv_{\mathcal{A}}^{n} q.$$

Ясно е, че $p \equiv_{\mathcal{A}} q \implies p \equiv_{\mathcal{A}}^{n} q$. Да видим защо имаме и обратната посока, т.е. защо $p \equiv_{\mathcal{A}}^{n} q \implies p \equiv_{\mathcal{A}} q$. Ние ще докажем контрапозицията на импликацията, т.е. ще докажем следното:

$$p \not\equiv_{\mathcal{A}} q \implies p \not\equiv_{\mathcal{A}}^{n} q.$$

И така, нека $p \not\equiv_{\mathcal{A}} q$. Това означава, че съществува дума α, за която:

$$\neg(\delta^\star(p, \alpha) \in F \Leftrightarrow \delta^\star(q, \alpha) \in F).$$

Това означава, че $p \not\equiv_{\mathcal{A}}^{|\alpha|} q$. Имаме два случая.

- Нека $|\alpha| \leq n$. Тогава $p \not\equiv_{\mathcal{A}}^{n} q$, защото от дефиницията следва, че

$$p \not\equiv_{\mathcal{A}}^{|\alpha|} q \implies p \not\equiv_{\mathcal{A}}^{n} q.$$

- Ако $|\alpha| > n$, от *Твърдение 2.23* имаме, че

$$p \equiv_{\mathcal{A}}^{n} q \implies p \equiv_{\mathcal{A}}^{|\alpha|} q,$$

  чиято контрапозиция е:

$$p \not\equiv_{\mathcal{A}}^{|\alpha|} q \implies p \not\equiv_{\mathcal{A}}^{n} q.$$

  Заключаваме, че $p \not\equiv_{\mathcal{A}}^{n} q$.

□

Твърдение 2.25. За всеки ДКА $\mathcal{A}$ е изпълнено, че $\equiv_{\mathcal{A}}^{|Q|-1} = \equiv_{\mathcal{A}}$.

Доказателство. Имаме два случая, които трябва да разгледаме.

- Ако съществува $n < |Q| - 2$, за което $\equiv_{\mathcal{A}}^{n} = \equiv_{\mathcal{A}}^{n+1}$, то според *Твърдение 2.23* и *Твърдение 2.24* получаваме, че $\equiv_{\mathcal{A}}^{n} = \equiv_{\mathcal{A}}^{|Q|-1} = \equiv_{\mathcal{A}}$.

- Нека сега приемем, че за всяко $n < |Q| - 2$ е изпълнено, че $\equiv_{\mathcal{A}}^{n} \neq \equiv_{\mathcal{A}}^{n+1}$. Това означава, че всеки клас на еквивалентност на $\equiv_{\mathcal{A}}^{|Q|-2}$ съдържа точно едно състояние, защото всеки клас на еквивалентност съдържа поне едно състояние, а ние имаме точно $|Q|$ на брой състояния и поне $|Q|$ на брой класове на еквивалентност. Тогава със сигурност имаме, че $\equiv_{\mathcal{A}}^{|Q|-2} = \equiv_{\mathcal{A}}^{|Q|-1}$, защото

$$p \equiv_{\mathcal{A}}^{|Q|-1} q \implies p \equiv_{\mathcal{A}}^{|Q|-2} q$$

  и няма как $\equiv_{\mathcal{A}}^{|Q|-1}$ да „раздроби" някой клас на $\equiv_{\mathcal{A}}^{|Q|-2}$. Тогава от *Твърдение 2.24* следва, че $\equiv_{\mathcal{A}}^{|Q|-1} = \equiv_{\mathcal{A}}$.

□

[Sha08, стр. 83]

Algorithm 1 Кубичен алгоритъм за минимизация

```
1:  for all p < |Q| do                          ▷ състоянията са индексирани от 0 до |Q| − 1
2:      for all q < p do
3:          if (p ∈ F ⇔ q ∉ F) then
4:              E[p][q] = false                 ▷ Имаме, че p ≢^0_A q
5:          else
6:              E[p][q] = true                  ▷ Имаме, че p ≡^0_A q
7:  repeat
8:      ready = true
9:      for all p < |Q| do
10:         for all q < p do
11:             if E[p][q] then
12:                 for all a ∈ Σ do            ▷ Прилагаме Твърдение 2.22
13:                     if ! E[δ(p,a)][δ(q,a)] then   ▷ p ≡^n_A q, но δ(p,a) ≢^n_A δ(q,a)
14:                         E[p][q] = false     ▷ Тогава p ≢^{n+1}_A q
15:                         ready = false       ▷ Имаме разцепване на клас
16: until ready                                 ▷ Ясно е, че няма да зациклим
```

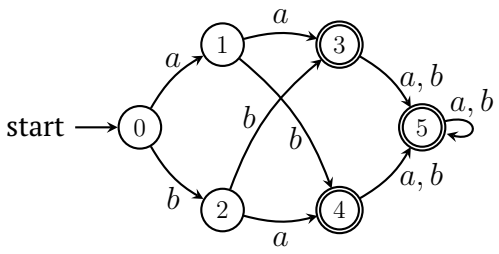
Задача 2.29. Докажете, че за всеки две състояния q_i и q_j, където $i > j$,

$$q_i \equiv_{\mathcal{A}} q_j \;\Leftrightarrow\; \texttt{E[i][j] == true}.$$

Задача 2.30. Съобразете, че *Алгоритъм (1)* има времева сложност $\mathcal{O}(|\Sigma| \cdot |Q|^3)$.

2.9.2 Примерни задачи

Пример 2.12. Да построим минимален автомат $\mathcal{M}$ разпознаващ езика на детерминирания краен автомат $\mathcal{A}$.



Фигура 2.21: Ще построим минимален автомат разпознаващ езика на $\mathcal{A}$.

Ще приложим алгоритъма за минимизация за да получим минималния автомат за езика L. За всяко $n = 0, 1, 2, \ldots$, ще намерим класовете на еквивалентност на $\equiv^n_{\mathcal{A}}$, докато не намерим n, за което $\equiv^n_{\mathcal{A}} = \equiv^{n+1}_{\mathcal{A}}$.

- Класовете на еквивалентност на $\equiv^0_{\mathcal{A}}$ са два. Те са [Koz97, стр. 79]

$$A_0 = Q \setminus F = \{0, 1, 2\} \text{ и}$$
$$A_1 = F = \{3, 4, 5\}.$$

- Сега да видим дали можем да разбием някои от класовете на еквивалентност на $\equiv^0_{\mathcal{A}}$.

Q	0	1	2	3⋆	4⋆	5⋆
$\equiv^0_{\mathcal{A}}$	A_0	A_0	A_0	A_1	A_1	A_1
a	A_0	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1
b	A_0	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1

Виждаме, че $0 \not\equiv^1_{\mathcal{A}} 1$ и $1 \equiv^1_{\mathcal{A}} 2$. Класовете на еквивалентност на $\equiv^1_{\mathcal{A}}$ са следните множества:

$$B_0 = \{0\},$$
$$B_1 = \{1, 2\},$$
$$B_2 = \{3, 4, 5\}.$$

✍ Съобразете, че

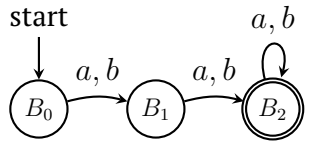
$$\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \{\omega \in \{a, b\}^\star \mid |\omega| \geq 2\}$$

- Сега да видим дали можем да разбием някои от класовете на еквивалентност на $\equiv^1_{\mathcal{A}}$.

Q	0	1	2	3⋆	4⋆	5⋆
$\equiv^1_{\mathcal{A}}$	B_0	B_1	B_1	B_2	B_2	B_2
a	B_1	B_2	B_2	B_2	B_2	B_2
b	B_1	B_2	B_2	B_2	B_2	B_2

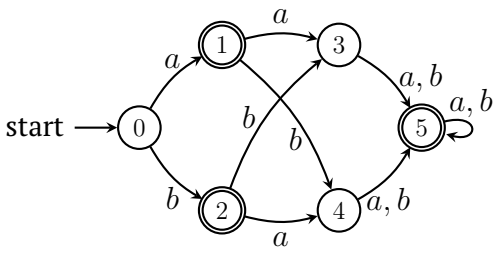
Виждаме, че $\equiv^1_{\mathcal{A}} = \equiv^2_{\mathcal{A}}$, което означава, че $\equiv_{\mathcal{A}} = \equiv^1_{\mathcal{A}}$. Следователно, минималният автомат $\mathcal{M}$ има три състояния. Той е изобразен на *Фигура 2.22*. Минималният автомат може да се представи и таблично:

$\delta_{\mathcal{M}}$	B_0	B_1	B_2
a	B_1	B_2	B_2
b	B_1	B_2	B_2



Фигура 2.22: Минимален автомат $\mathcal{M}$ за езика на $\mathcal{A}$.

Пример 2.13. Да построим минимален автомат $\mathcal{M}$ разпознаващ езика на следния детерминиран краен автомат $\mathcal{A}$.



Фигура 2.23: Ще построим минимален автомат разпознаващ $\mathcal{L}(\mathcal{A})$.

✍ Съобразете, че $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \{\omega \in \{a,b\}^\star \mid |\omega| = 1 \vee |\omega| \geq 3\}$.

Отново следваме същата процедура за минимизация. Ще намерим класовете на еквивалентност на $\equiv^n_{\mathcal{A}}$, докато не намерим n, за което $\equiv^n_{\mathcal{A}} = \equiv^{n+1}_{\mathcal{A}}$.

- Класовете на екиваленост на $\equiv^0_{\mathcal{A}}$ са следните:

$$A_0 \stackrel{\text{деф}}{=} Q \setminus F = \{0,3,4\} \text{ и}$$
$$A_1 \stackrel{\text{деф}}{=} F = \{1,2,5\}.$$

- Разбиваме класовете на еквивалентност на $\equiv^0_{\mathcal{A}}$ като използваме *Твърдение 2.22*.

Q	0	1⋆	2⋆	3	4	5⋆
$\equiv^0_{\mathcal{A}}$	A_0	A_1	A_1	A_0	A_0	A_1
a	A_1	A_0	A_0	A_1	A_1	A_1
b	A_1	A_0	A_0	A_1	A_1	A_1

Виждаме, че $1 \not\equiv^1_{\mathcal{A}} 5$ и $1 \equiv^0_{\mathcal{A}} 5$. Следователно, $\equiv^0_{\mathcal{A}} \neq \equiv^1_{\mathcal{A}}$. Класовете на еквивалентност на $\equiv^1_{\mathcal{A}}$ са следните:

$$B_0 \stackrel{\text{деф}}{=} \{0,3,4\},$$
$$B_1 \stackrel{\text{деф}}{=} \{1,2\},$$
$$B_2 \stackrel{\text{деф}}{=} \{5\}.$$

- Сега се опитваме да разбием класовете на еквивалентност на $\equiv^1_{\mathcal{A}}$.

Q	0	1⋆	2⋆	3	4	5⋆
$\equiv^1_{\mathcal{A}}$	B_0	B_1	B_1	B_0	B_0	B_2
a	B_1	B_0	B_0	B_2	B_2	B_2
b	B_1	B_0	B_0	B_2	B_2	B_2

Имаме, че $0 \equiv^1_{\mathcal{A}} 3$, но $0 \not\equiv^2_{\mathcal{A}} 3$. Следователно $\equiv^1_{\mathcal{A}} \neq \equiv^2_{\mathcal{A}}$. Класовете на еквивалентност на $\equiv^2_{\mathcal{A}}$ са следните:

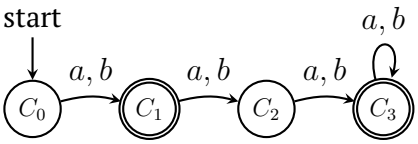
$$C_0 \stackrel{\text{деф}}{=} \{0\},$$
$$C_1 \stackrel{\text{деф}}{=} \{1,2\},$$
$$C_2 \stackrel{\text{деф}}{=} \{3,4\},$$
$$C_3 \stackrel{\text{деф}}{=} \{5\}.$$

- Отново опитваме да разбием класовете на релацията $\equiv^2_{\mathcal{A}}$.

Q	0	1⋆	2⋆	3	4	5⋆
$\equiv^2_{\mathcal{A}}$	C_0	C_1	C_1	C_2	C_2	C_3
a	C_1	C_2	C_2	C_3	C_3	C_3
b	C_1	C_2	C_2	C_3	C_3	C_3

Виждаме, че не можем да разбием C_1 или C_2. Следователно, $\equiv^2_{\mathcal{A}} = \equiv^3_{\mathcal{A}}$. Оттук следва, че $\equiv^2_{\mathcal{A}} = \equiv_{\mathcal{A}}$ и минималният автомат разпознаващ езика L има четири състояния. Вижте *Фигура 2.24* за преходите на минималния автомат, които могат да се представят и таблично чрез функцията на преходите:

δ	C_0	C_1	C_2	C_3
a	C_1	C_2	C_3	C_3
b	C_1	C_2	C_3	C_3



Фигура 2.24: Получаваме минималния автомат $\mathcal{M}$, $\mathcal{L}(\mathcal{M}) = \mathcal{L}(\mathcal{A})$.

2.10 Допълнителни задачи

2.10.1 Лесни задачи

Задача 2.31. За всеки от следните езици L, постройте минимален краен детерминиран автомат $\mathcal{A}$, който разпознава езика L, където:

$|\omega|_a \stackrel{\text{деф}}{=}$ броят на срещанията на буквата a в думата ω, $|\omega| \stackrel{\text{деф}}{=}$ дължината на ω.

а) $L = \{a^n b \mid n \geq 0\}$;

б) $L = \{a, b\}^\star \setminus \{\varepsilon\}$;

в) $L = \{\omega \in \{a, b\}^\star \mid |\omega|_a$ и $|\omega|_b$ са четни$\}$;

г) $L = \{\omega \in \{a, b\}^\star \mid |\omega|_a$ е четно $\&\ |\omega|_b$ е нечетно$\}$;

д) $L = \{a^n b^m \mid n, m \geq 0\}$;

е) $L = \{a^n b^m \mid n, m \geq 1\}$;

ж) $L = \{a, b\}^\star \setminus \{a\}$;

з) $L = \{\omega \in \{a, b\}^\star \mid |\omega|_a \geq 2 \ \vee\ |\omega|_b \leq 3\}$;

и) $L = \{\omega \in \{a, b\}^\star \mid |\omega|_a \geq 2 \,\&\, |\omega|_b \geq 1\}$;

к) $L = \{\omega \in \{a, b\}^\star \mid$ на всяка нечетна позиция на ω е буквата $a\}$;

л) $L = \{\omega \in \{a, b\}^\star \mid |\omega|_a$ е четно $\&\ |\omega|_b \leq 1\}$;

м) $L = \{\omega \in \{a, b\}^\star \mid |\omega| \leq 3\}$;

н) $L = \{\omega \in \{a, b\}^\star \mid \omega$ не започва с $ab\}$;

о) $L = \{\omega \in \{a, b\}^\star \mid \omega$ завършва с ab или ba$\}$;

п) $L = \{\omega \in \{a, b\}^\star \mid \omega$ започва или завършва с $a\}$;

р) $L = \{\omega \in \{a, b\}^\star \mid \omega$ започва с $a \ \Leftrightarrow\ \omega$ завършва с $b\}$;

с) $L = \{\omega \in \{a, b\}^\star \mid |\omega| \equiv 0 \pmod 2 \,\&\, |\omega|_a = 1\}$;

т) $L = \{\omega \in \{a, b\}^\star \mid$ всяко a в ω се следва веднага от поне едно $b\}$;

у) $L = \{\omega \in \{a, b\}^\star \mid |\omega| \equiv 0 \bmod 3\}$;

ф) $L = \{\omega \in \{a, b\}^\star \mid |\omega|_a \equiv 1 \bmod 3\}$;

х) $L = \{\omega \in \{a, b\}^\star \mid |\omega|_a \equiv 0 \bmod 3 \,\&\, |\omega|_b \equiv 1 \bmod 2\}$;

ц) $L = \{\omega \in \{a, b\}^\star \mid |\omega|_a \equiv 0 \bmod 2 \ \vee\ |\omega|_b = 2\}$;

ч) $L = \{\omega \in \{a, b\}^\star \mid \omega$ съдържа равен брой срещания на ab и на $ba\}$;

ш) $L = \{\omega_1 \sharp \omega_2 \sharp \omega_3 \mid |\omega_1| \geq 2 \,\&\, |\omega_2| \geq 3 \,\&\, |\omega_3| \geq 4 \,\&\, \omega_i \in \{a, b\}^\star$ за $i = 1, 2, 3\}$.

Задача 2.32. Нека $\Sigma = \{a, b\}$. Проверете дали L е регулярен, където

а) $L = \{a^i b^i \mid i \in \mathbb{N}\}$;

б) $L = \{a^i b^i \mid i, j \in \mathbb{N} \,\&\, i \neq j\}$;

в) $L = \{a^i b^j \mid i > j\}$;

г) $L = \{a^n b^m \mid n$ дели $m\}$.

д) $L = \{a^{2n} \mid n \geq 1\}$;

е) $L = \{a^m b^n a^{m+n} \mid m \geq 1 \,\&\, n \geq 1\}$;

ж) $L = \{a^{n.m} \mid n, m$ са прости числа$\}$;

з) $L = \{\omega \in \{a, b\}^\star \mid |\omega|_a = |\omega|_b\}$;

и) $L = \{\omega\omega \mid \omega \in \{a, b\}^\star\}$;

к) $L = \{\omega\omega^{\mathtt{rev}} \mid \omega \in \{a, b\}^\star\}$;

л) $L = \{\alpha\beta\beta \in \{a, b\}^\star \mid \beta \neq \varepsilon\}$;

м) $L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$;

н) $L = \{\omega\omega\omega \mid \omega \in \Sigma^\star\}$;

о) $L = \{a^{2^n} \mid n \geq 0\}$;

п) $L = \{a^m b^n \mid n \neq m\}$;

р) $L = \{a^{n!} b^{n!} \mid n \neq 1\}$;

с) $L = \{a^{f_n} \mid f_0 = f_1 = 1 \,\&\, f_{n+2} = f_{n+1} + f_n\}$;

т) $L = \{\alpha \in \Sigma^\star \mid |\,|\alpha|_a - |\alpha|_b\,| \leq 2\}$;

у) $L = \{\alpha\beta\alpha \mid \alpha, \beta \in \Sigma^\star \,\&\, |\beta| \leq |\alpha|\}$;

ф) $L = \{\beta\gamma\gamma^{\mathtt{rev}} \mid \beta, \gamma \in \Sigma^\star \,\&\, |\beta| \leq |\gamma|\}$;

х) $L = \{c^k a^n b^m \mid k, m, n > 0 \,\&\, n \neq m\}$;

ц) $L = \{c^k a^n b^n \mid k > 0 \,\&\, n \geq 0\} \cup \{a, b\}^\star$;

ч) $L = \{\omega \in \{a, b\}^\star \mid |\omega|_a$ не дели $|\omega|_b\}$;

ш) $L = \{\omega \in \{a, b\}^\star \mid |\omega|_a < |\omega|_b\}$;

щ) $L = \{\omega \in \{a, b\}^\star \mid |\omega|_a = 2|\omega|_b\}$;

ю) $L = \{\omega \in \{a, b\}^\star \mid |\,|\omega|_a - |\omega|_b\,| \leq 3\}$.

Задача 2.33. Докажете, че следните езици са регулярни:

а) $L = \{\alpha \in \{a, b\}^\star \mid$ за всяка представка ω на α имаме $|\,|\omega|_a - |\omega|_b\,| \leq 2\}$;

б) $L = \{\alpha \in \{a, b\}^\star \mid$ за някоя представка ω на α имаме $|\,|\omega|_a - |\omega|_b\,| > 2\}$;

в) $L = \{\alpha \in \{a, b\}^\star \mid$ за някоя наставка ω на α имаме $|\,|\omega|_a - |\omega|_b\,| > 2\}$.

Задача 2.34. Нека $\Sigma = \{a, b, c, d\}$. Да се докаже, че езикът

$$L = \{a_1 a_2 \cdots a_{2n} \in \Sigma^\star \mid (\forall j \in [1, n])[a_{2j-1} = a_{2j}] \,\&\, d \text{ се среща} \leq 3 \text{ пъти}\}$$

е регулярен.

Задача 2.35. Нека L_1 и L_2 са регулярни езици. Докажете, че L също е регулярен език, където

$$L = \{\alpha \mid (\exists \beta, \gamma)[\beta\alpha\gamma \in L_1] \,\&\, \alpha \in L_2 \vee \alpha^{\mathtt{rev}} \in L_2\}.$$

Определение 2.3. Да фиксираме две азбуки Σ_1 и Σ_2. Хомоморфизъм е изображение $h : \Sigma_1^\star \to \Sigma_2^\star$ със свойството, че за всеки две думи $\alpha, \beta \in \Sigma_1^\star$,

$$h(\alpha\beta) = h(\alpha) \cdot h(\beta).$$

Лесно се съобразява, че за всеки хомоморфизъм h, $h(\varepsilon) = \varepsilon$.

Задача 2.36. Нека $L \subseteq \Sigma_1^\star$ е регулярен език и $h : \Sigma_1^\star \to \Sigma_2^\star$ е хомоморфизъм. Тогава $h(L) = \{h(\alpha) \in \Sigma_2^\star \mid \alpha \in L\}$ е регулярен.

Упътване. Индукция по построението на регулярни езици. □

Задача 2.37. Нека $L \subseteq \Sigma_2^\star$ е регулярен език и $h : \Sigma_1^\star \to \Sigma_2^\star$ е хомоморфизъм. Тогава езикът $h^{-1}(L) = \{\alpha \in \Sigma_1^\star \mid h(\alpha) \in L\}$ е регулярен.

Упътване. Конструкция на автомат за $h^{-1}(L)$ при даден автомат за L. □

Задача 2.38. Нека Σ_1 и Σ_2 са непресичащи се азбуки, а L_1 и L_2 са езици съответно над Σ_1 и Σ_2. За една дума $\omega \in (\Sigma_1 \cup \Sigma_2)^\star$, нека с $\omega_i \in \Sigma_i^\star$ да означим редицата от букви от Σ_i в реда, в който се срещат в ω. Да разгледаме следния език

$$L_1 \oplus L_2 = \{\omega \in (\Sigma_1 \cup \Sigma_2)^\star \mid \omega_1 \in L_1 \,\&\, \omega_2 \in L_2 \,\&\, |\omega_1| = |\omega_2|\}.$$

а) Вярно ли е, че ако L_1 е краен, то $L_1 \oplus L_2$ е регулярен език? Да

б) Вярно ли е, че ако L_1 и L_2 са регулярни езици, то $L_1 \oplus L_2$ е регулярен език? Не

Задача 2.39. Нека Σ_1 и Σ_2 са непресичащи се азбуки, а L_1 и L_2 са езици съответно над Σ_1 и Σ_2. За една дума $\omega \in (\Sigma_1 \cup \Sigma_2)^\star$, нека с $\omega_i \in \Sigma_i^\star$ да означим редицата от букви от Σ_i в реда, в който се срещат в ω. Да разгледаме следния език

$$L_1 \oplus L_2 = \{\omega \in (\Sigma_1 \cup \Sigma_2)^\star \mid \omega_1 \in L_1 \,\&\, \omega_2 \in L_2\}.$$

Вярно ли е, че ако L_1 и L_2 са регулярни езици, то $L_1 \oplus L_2$ е регулярен език? Да

2.10.2 Не толкова лесни задачи

Задача 2.40. При дадени езици L, L' над азбуката Σ, да разгледаме: [PL98, стр. 84]

а) $\texttt{Pref}(L) = \{\alpha \in \Sigma^\star \mid (\exists \beta \in \Sigma^\star)[\alpha\beta \in L]\}$;

б) $\texttt{NoPref}(L) = \{\alpha \in L \mid$ не съществува префикс на α в $L\}$;

в) $\texttt{NoExtend}(L) = \{\alpha \in L \mid \alpha$ не е префикс на никоя дума от $L\}$;

г) $\text{Suf}(L) = \{\beta \in \Sigma^\star \mid (\exists \alpha \in \Sigma^\star)[\alpha\beta \in L]\}$;

д) $\text{Infix}(L) = \{\alpha \mid (\exists \beta, \gamma \in \Sigma^\star)[\beta\alpha\gamma \in L]\}$;

е) $\frac{1}{2}(L) = \{\omega \in \Sigma^\star \mid (\exists \alpha \in \Sigma^\star)[\omega\alpha \in L \,\&\, |\omega| = |\alpha|]\}$;

ж) $L/_\omega = \{\alpha \in \Sigma^\star \mid \alpha\omega \in L\}$; right quotient of L by ω

з) $L/_{L'} = \{\alpha \in \Sigma^\star \mid (\exists \beta \in L')[\alpha\beta \in L]\}$;

и) $L^{-1}(L') = \{\beta \mid (\exists \alpha \in L)[\alpha\beta \in L']\}$; right quotient of L by L'

к) $\text{Max}(L) = \{\alpha \in \Sigma^\star \mid (\forall \beta \in \Sigma^\star)[\beta \neq \varepsilon \implies \alpha\beta \notin L]\}$.

За всички тези езици, докажете, че са регулярни при условие, че L и L' са регулярни. Освен това, докажете, че L/L' е регулярен и при условието, че L е регулярен, но L' е произволен език над азбуката Σ. Тази конструкция няма да бъде ефективна

Упътване.

а) Индукция по дефиницията на регулярен израз.

в) Най-лесно е да се построи автомат за $\text{Infix}(L)$ като се използва автомата за L.

г) Конструкция с автомат за L и автомат за $L^{\texttt{rev}}$.

□

[Koz97, стр. 75]; [PL98, стр. 89]

Задача 2.41. Да фиксираме азбука само с един символ $\Sigma = \{a\}$. Да положим за всяко $p, q \in \mathbb{N}$,

$$L(p,q) = \{a^k \mid (\exists n \in \mathbb{N})[k = p + q \cdot n]\}.$$

Ако за един език L съществуват константи $p_1, \ldots, p_k$ и $q_1, \ldots, q_k$, такива че

$$L = \bigcup_{1 \leq i \leq k} L(p_i, q_i),$$

то казваме, че L е *породен от аритметични прогресии*.

а) Докажете, че $L \subseteq \{a\}^\star$ е регулярен език точно тогава, когато L е породен от аритметична прогресия.

б) За произволна азбука Σ, докажете, че ако $L \subseteq \Sigma^\star$ е регулярен език, то езикът $\{a^{|\omega|} \mid \omega \in L\}$ е породен от аритметична прогресия.

Упътване.

а) За едната посока, разгледайте ДКА за L.

б) За втората част, разгледайте $h : \Sigma \to \{a\}$ деф. като $(\forall b \in \Sigma)[h(b) = a]$. Докажете, че h е поражда хомоморфизъм между $\Sigma^\star$ и $\{a\}^\star$. Тогава $h(L) = \{a^{|\omega|} \mid \omega \in L\}$, а ние знаем, че регулярните езици са затворени относно хомоморфни образи.

□

Задача 2.42. Вярно ли е, че:

- $\{a^m \mid a^{m^2} \in L(p,q)\}$ е регулярен език ?
- $\{a^m \mid a^{2^m} \in L(p,q)\}$ е регулярен език ?

Задача 2.43. За даден език L над азбуката Σ, да разгледаме езиците:

а) $L' = \{\alpha \in \Sigma^\star \mid (\exists \beta \in \Sigma^\star)[|\alpha| = 2|\beta| \,\&\, \alpha\beta \in L]\}$;

б) $L'' = \{\alpha \in \Sigma^\star \mid (\exists \beta \in \Sigma^\star)[2|\alpha| = |\beta| \,\&\, \alpha\beta \in L]\}$;

в) $\frac{1}{3}(L) = \{\alpha \in \Sigma^\star \mid (\exists \beta, \gamma \in \Sigma^\star)[|\alpha| = |\beta| = |\gamma| \,\&\, \alpha\beta\gamma \in L]\}$;

г) $\frac{2}{3}(L) = \{\beta \in \Sigma^\star \mid (\exists \beta, \gamma \in \Sigma^\star)[|\alpha| = |\beta| = |\gamma| \,\&\, \alpha\beta\gamma \in L]\}$;

д) $\frac{3}{3}(L) = \{\gamma \in \Sigma^\star \mid (\exists \beta, \gamma \in \Sigma^\star)[|\alpha| = |\beta| = |\gamma| \,\&\, \alpha\beta\gamma \in L]\}$;

е) $\hat{L} = \{\alpha\gamma \in \Sigma^\star \mid (\exists \beta, \gamma \in \Sigma^\star)[|\alpha| = |\beta| = |\gamma| \,\&\, \alpha\beta\gamma \in L]\}$;

ж) $\sqrt{L} = \{\alpha \mid (\exists \beta \in \Sigma^\star)[|\beta| = |\alpha|^2 \,\&\, \alpha\beta \in L]\}$;

з) $\log(L) = \{\alpha \mid (\exists \beta \in \Sigma^\star)[|\beta| = 2^{|\alpha|} \,\&\, \alpha\beta \in L]\}$;

Проверете ако L е регулярен, то кои от горните езици също са регулярни.

Задача 2.44. Да разгледаме езика

$$L = \{\omega \in \{0,1\}^\star \mid \omega \text{ съдържа равен брой поднизове } 01 \text{ и } 10\}.$$

Например, $101 \in L$, защото съдържа по веднъж 10 и 01. $1010 \notin L$, защото съдържа два пъти 10 и само веднъж 01. Докажете, че L е регулярен.

Задача 2.45. Нека L е регулярен език над азбуката $\{a, b\}$. Докажете, че следните езици са регулярни:

а) $\texttt{Diff}_1(L) \stackrel{\text{деф}}{=} \{\alpha \in L \mid (\exists \beta \in L)[|\alpha| = |\beta| \,\&\, \alpha \text{ се различава от } \beta \text{ в една позиция}]\}$;

б) $\texttt{Diff}_n(L) \stackrel{\text{деф}}{=} \{\alpha \in L \mid (\exists \beta \in L)[n \leq |\alpha| = |\beta| \,\&\, \alpha \text{ се различава от } \beta \text{ в } n \text{ позиции}]\}$;

в) $\texttt{Diff}(L) \stackrel{\text{деф}}{=} \{\alpha \in L \mid (\exists \beta \in L)[|\alpha| = |\beta| \,\&\, \alpha \text{ се различава от } \beta \text{ във всяка позиция}]\}$;

Упътване. Ако $L = \mathcal{L}(\mathcal{A})$, то правим декартово произведение на $\mathcal{A}$ плюс флаг дали сме направили грешка.

Не е ли по-лесно с индукция по построението на регулярните езици ? □

Задача 2.46. Да разгледаме азбуката:

$$\Sigma_3 = \left\{ \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \right\}.$$

Докажете, че

$$L = \left\{ \begin{bmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{bmatrix} \in \Sigma_3^\star \mid \overline{\alpha}_{(2)} + \overline{\beta}_{(2)} = \overline{\gamma}_{(2)} \right\}$$

е автоматен език.

Упътване. Доста по-удобно е да построим автомат $\mathcal{A}$, такъв че $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = L^{\texttt{rev}}$. Да започнем с състоянието $q_=$, за което искаме да имаме свойството, че за произволно състояние q,

$$\delta^\star(q, \begin{bmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{bmatrix}) = q_= \;\Leftrightarrow\; \overline{\alpha^{\texttt{rev}}}_{(2)} + \overline{\beta^{\texttt{rev}}}_{(2)} = \overline{\gamma^{\texttt{rev}}}_{(2)}.$$

Понеже за $\overline{\varepsilon}_{(2)} + \overline{\varepsilon}_{(2)} = \overline{\varepsilon}_{(2)}$, състоянието $q_=$ ще бъде начално и финално за $\mathcal{A}$.

Нека $\overline{\alpha}_{(2)} + \overline{\beta}_{(2)} = \overline{\gamma}_{(2)}$. Тогава:

$$\delta(q_=, \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}) \stackrel{\text{деф}}{=} q_= \quad // \; \overline{0\alpha}_{(2)} + \overline{0\beta}_{(2)} = \overline{0\gamma}_{(2)}$$

$$\delta(q_=, \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}) \stackrel{\text{деф}}{=} q_= \quad // \; \overline{0\alpha}_{(2)} + \overline{1\beta}_{(2)} = \overline{1\gamma}_{(2)}$$

$$\delta(q_=, \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}) = q_= \quad // \; \overline{1\alpha}_{(2)} + \overline{0\beta}_{(2)} = \overline{1\gamma}_{(2)}$$

Остана случая $\overline{1\alpha}_{(2)} + \overline{1\beta}_{(2)} = \overline{10\gamma}_{(2)}$. Този случай е по-специален и трябва да бъде разгледан отделно. Трябва да отидем в състояние q_1, в което ще помним, че третия ред трябва да започва с 1-ца. Затова имаме следния преход:

$$\delta(q_=, \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}) \stackrel{\text{деф}}{=} q_1.$$

За останалите $\gamma \in \Sigma_3$ имаме, че

$$\delta(q_=, \gamma) \stackrel{\text{деф}}{=} q_{\texttt{err}},$$

където $q_{\texttt{err}}$ е състоянието, от което не можем да излезем.

Така трябва да дефинираме функцията на преходите, че за състоянието q_1 трябва да е изпълнено, че за произволно q,

$$\delta^\star(q, \begin{bmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{bmatrix}) = q_1 \;\Leftrightarrow\; \overline{\alpha^{\texttt{rev}}}_{(2)} + \overline{\beta^{\texttt{rev}}}_{(2)} = \overline{1\gamma^{\texttt{rev}}}_{(2)}.$$

Да разгледаме сега случая $\overline{\alpha}_{(2)} + \overline{\beta}_{(2)} = \overline{1\gamma}_{(2)}$. Тогава:

$$\delta(q_1, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}) \stackrel{\text{деф}}{=} q_= \quad // \; \overline{0\alpha}_{(2)} + \overline{0\beta}_{(2)} = \overline{1\gamma}_{(2)}$$

$$\delta(q_1, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}) \stackrel{\text{деф}}{=} q_1 \quad // \; \overline{1\alpha}_{(2)} + \overline{1\beta}_{(2)} = \overline{11\gamma}_{(2)}$$

$$\delta(q_1, \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}) \stackrel{\text{деф}}{=} q_1 \quad // \; \overline{1\alpha}_{(2)} + \overline{0\beta}_{(2)} = \overline{10\gamma}_{(2)}$$

$$\delta(q_1, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}) \stackrel{\text{деф}}{=} q_1 \quad // \; \overline{0\alpha}_{(2)} + \overline{1\beta}_{(2)} = \overline{10\gamma}_{(2)}$$

$$\delta(q_1, \gamma) \stackrel{\text{деф}}{=} q_{\texttt{err}} \quad // \text{ за останалите } \gamma \in \Sigma_3$$

□

Да обърнем внимание, че езикът $\{\alpha\sharp\beta\sharp\gamma \mid \overline{\alpha}_{(2)} + \overline{\beta}_{(2)} = \overline{\gamma}_{(2)}\}$ не е регулярен.

Задача 2.47. Да разгледаме азбуката:

$$\Sigma_2 = \left\{ \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \right\}.$$

Една дума над азбуката Σ_2 ни дава два реда от 0-ли и 1-ци, които ще разглеждаме като числа в двоична бройна система. Да разгледаме езиците:

- $L_1 = \left\{ \begin{bmatrix}\alpha\\\beta\end{bmatrix} \in \Sigma_2^\star \mid \overline{\alpha}_{(2)} < \overline{\beta}_{(2)} \right\}$;
- $L_2 = \left\{ \begin{bmatrix}\alpha\\\beta\end{bmatrix} \in \Sigma_2^\star \mid 3(\overline{\alpha}_{(2)}) = \overline{\beta}_{(2)} \right\}$;
- $L_3 = \left\{ \begin{bmatrix}\alpha\\\beta\end{bmatrix} \in \Sigma_2^\star \mid \alpha = \beta^{\mathtt{rev}} \right\}$;

Докажете, че L_1 и L_2 са автоматни, а L_3 не е автоматен.

Упътване. Ще построим автомат $\mathcal{A} = \langle \Sigma, Q, q_{\mathtt{start}}, \delta, F \rangle$ за езика $L_1^{\mathtt{rev}}$. За улеснение, в рамките на тази задача ще пишем:

- $\alpha \equiv \beta$, ако $\overline{\alpha^{\mathtt{rev}}}_{(2)} = \overline{\beta^{\mathtt{rev}}}_{(2)}$,
- $\alpha \prec \beta$, ако $\overline{\alpha^{\mathtt{rev}}}_{(2)} < \overline{\beta^{\mathtt{rev}}}_{(2)}$,
- $\alpha \succ \beta$, ако $\overline{\alpha^{\mathtt{rev}}}_{(2)} > \overline{\beta^{\mathtt{rev}}}_{(2)}$.

Нека състоянията на автомата са $Q = \{q_=, q_<, q_>\}$. Искаме да е изпълнено свойствата:

- $\delta^\star(q_=, \begin{bmatrix}\alpha\\\beta\end{bmatrix}) = q_=$ точно тогава, когато $\alpha \equiv \beta$;
- $\delta^\star(q_=, \begin{bmatrix}\alpha\\\beta\end{bmatrix}) = q_<$ точно тогава, когато $\alpha \prec \beta$;
- $\delta^\star(q_=, \begin{bmatrix}\alpha\\\beta\end{bmatrix}) = q_>$ точно тогава, когато $\alpha \succ \beta$.

Множеството от финални състояния ще бъде $F = \{q_<\}$, а началното състояние $q_{\mathtt{start}} = q_=$. За да дефинираме функцията на преходите, трябва да разгледа няколко случая, в зависимост от това какво е отношението между α и β.

- Нека $\alpha \equiv \beta$. Тогава:
  - $\alpha 0 \equiv \beta 0$ и $\alpha 1 \equiv \beta 1$. Следователно,
    $$\delta(q_=, \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}) = \delta(q_=, \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}) = q_=.$$
  - $\alpha 0 \prec \beta 1$. Следователно,
    $$\delta(q_=, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}) = q_>.$$
  - $\alpha 1 \succ \beta 0$. Следователно,
    $$\delta(q_=, \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}) = q_<.$$
- Нека $\alpha \prec \beta$. Тогава:
  - $\alpha 0 \prec \beta 0$, $\alpha 1 \prec \beta 1$, $\alpha 0 \prec \beta 1$. Следователно,
    $$\delta(q_<, \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}) = \delta(q_<, \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}) = \delta(q_<, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}) = q_<.$$
  - $\alpha 1 \succ \beta 0$. Следователно,
    $$\delta(q_<, \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}) = q_>.$$
- Нека $\alpha \succ \beta$. Тогава:
  - $\alpha 0 \succ \beta 0$, $\alpha 1 \succ \beta 1$, $\alpha 1 \succ \beta 0$. Следователно,
    $$\delta(q_>, \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}) = \delta(q_>, \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}) = \delta(q_>, \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}) = q_>.$$
  - $\alpha 0 \prec \beta 1$. Следователно,
    $$\delta(q_>, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}) = q_<.$$

Докажете, че за така дефинирания автомат $\mathcal{A}$, $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = L_1^{\mathtt{rev}}$. □

Нека $\Sigma^{\geq k} \stackrel{\text{деф}}{=} \{\alpha \in \Sigma^\star \mid |\alpha| \geq k\}$.

Задача 2.48. Нека L е регулярен език. Тогава езиците

- $L_1 = \{\alpha \in \Sigma^\star \mid (\exists i)(\exists j)[\, \alpha[i:j] \in L \,]\}$;
- $L_2 = \{\alpha \in \Sigma^\star \mid (\forall i)(\forall j)[\, i < j \implies \alpha[i:j] \in L \,]\}$;
- $L_3 = \{\alpha \in \Sigma^\star \mid (\forall i)(\exists j)[\, i < j \;\&\; \alpha[i:j] \in L \,]\}$;
- $L_4 = \{\alpha \in \Sigma^\star \mid (\exists i)(\forall j)[\, i < j \implies \alpha[i:j] \in L \,]\}$.

също са регулярни.

Упътване. Лесно се вижда, че

$$L_1 = \Sigma^\star \cdot L \cdot \Sigma^\star,$$

както и следното

$$L_2 = \overline{\Sigma^\star \cdot \overline{L} \cdot \Sigma^\star}.$$

Да обърнем внимание, че

$$\begin{aligned} \alpha \in \Sigma^\star \cdot L &\Leftrightarrow (\exists \beta \in \Sigma^\star)(\exists \gamma \in L)[\alpha = \beta \cdot \gamma] \\ &\Leftrightarrow (\exists j)[\, \alpha[j:] \in L \,]. \end{aligned}$$

Аналогично получаваме, че

$$\begin{aligned} \alpha \in L \cdot \Sigma^\star &\Leftrightarrow (\exists \gamma \in L)(\exists \beta \in \Sigma^\star)[\alpha = \gamma \cdot \beta] \\ &\Leftrightarrow (\exists j)[\, \alpha[:j] \in L \,]. \end{aligned}$$

Нека да разгледаме по-подробно следния език:

$$\begin{aligned} \overline{L}_3 &= \{\alpha \in \Sigma^\star \mid (\exists i)(\forall j)[\, i < j \implies \alpha[i:j] \notin L \,]\} \\ &= \{\alpha \in \Sigma^\star \mid (\exists i)(\forall j)[\, i < j \implies \alpha[i:j] \in \overline{L} \,]\} \\ &= \{\alpha \in \Sigma^\star \mid (\forall j)[\, \alpha[:j] \in \Sigma^\star \cdot \overline{L} \,]\} \end{aligned}$$

Така получаваме, че:

$$\begin{aligned} L_3 &= \{\alpha \in \Sigma^\star \mid (\exists j)[\, \alpha[:j] \notin \Sigma^\star \cdot \overline{L} \,]\} \\ &= \{\alpha \in \Sigma^\star \mid (\exists j)[\, \alpha[:j] \in \overline{\Sigma^\star \cdot \overline{L}} \,]\} \\ &= \{\alpha \in \Sigma^\star \mid \alpha \in (\overline{\Sigma^\star \cdot \overline{L}}) \cdot \Sigma^\star \,]\}. \end{aligned}$$

Оттук заключваме, че

$$L_3 = (\overline{\Sigma^\star \cdot \overline{L}}) \cdot \Sigma^\star.$$

Сега лесно можем да съобразим, че

$$L_4 = \overline{\overline{(\Sigma^\star \cdot L)} \cdot \Sigma^\star}.$$

□

Задача 2.49. Нека L е регулярен език над азбуката Σ. За произволно естествено число k, докажете, че езикът

$$L_k = \{\alpha \in \Sigma^\star \mid (\forall i)(\exists j)[\, |\alpha[i:]| \geq k \implies \alpha[i:j] \in L \,]\}$$

е регулярен. С други думи, L_k съдържа тези думи, за които от всяка позиция, с изключение на последните k, започва дума в езика L.

Упътване. Да разпишем по-подробно дефиницията на езика L_k.

$$\begin{aligned} L_k &= \{\alpha \in \Sigma^\star \mid (\forall i)(\exists j)[\, |\alpha[i:]| \geq k \implies \alpha[i:j] \in L \,]\} \\ &= \{\alpha \in \Sigma^\star \mid (\forall i)[\, |\alpha[i:]| \geq k \implies (\exists j)[\alpha[i:j] \in L] \,]\} \\ &= \{\alpha \in \Sigma^\star \mid (\forall i)[\, \alpha[i:] \in \Sigma^{\geq k} \implies \alpha[i:] \in L \cdot \Sigma^\star \,]\} \\ &= \{\alpha \in \Sigma^\star \mid (\forall i)[\, \alpha[i:] \notin \Sigma^{\geq k} \vee \alpha[i:] \in L \cdot \Sigma^\star \,]\} \\ &= \{\alpha \in \Sigma^\star \mid \neg(\exists i)[\, \alpha[i:] \in \Sigma^{\geq k} \,\&\, \alpha[i:] \notin L \cdot \Sigma^\star \,]\}. \end{aligned}$$

Сега е ясно, че:

$$\begin{aligned}
\overline{L}_k &= \{\alpha \in \Sigma^\star \mid (\exists i)[\, \alpha[i:] \in \Sigma^{\geq k} \,\&\, \alpha[i:] \notin L \cdot \Sigma^\star \,]\} \\
&= \{\alpha \in \Sigma^\star \mid (\exists i)[\, \alpha[i:] \in \Sigma^{\geq k} \,\&\, \alpha[i:] \in \overline{L \cdot \Sigma^\star} \,]\} \\
&= \{\alpha \in \Sigma^\star \mid (\exists i)[\, \alpha[i:] \in \Sigma^{\geq k} \cap \overline{L \cdot \Sigma^\star} \,]\} \\
&= \{\alpha \in \Sigma^\star \mid \alpha \in \Sigma^\star \cdot (\Sigma^{\geq k} \cap \overline{L \cdot \Sigma^\star})\} \\
&= \Sigma^\star \cdot (\Sigma^{\geq k} \cap \overline{L \cdot \Sigma^\star}).
\end{aligned}$$

Тогава

$$L_k = \overline{\Sigma^\star \cdot (\Sigma^{\geq k} \cap \overline{L \cdot \Sigma^\star})}.$$

□

Глава 3

Безконтекстни езици и стекови автомати

Ще започнем като разгледаме понятието извод в граматика в най-общия му вид. Граматиките се разделят на няколко вида в зависимост от това какви *ограничения* налагаме върху правилата на граматиката. В следващите няколко глави ще разгледаме различни ограничения. След това ще разгледаме някои класове от граматики като ще се концентрираме основно върху безконтекстните граматики.

3.1 Неограничени граматики

Неограничена граматика е наредена четворка от вида

На англ. *unrestricted grammar*. Това е тип 0 граматики в йерархията на Чомски [HU79, стр. 220].

$$G = (V, \Sigma, R, S),$$

където:

- V е крайно множество от *променливи* (нетерминали);
- Σ е крайно множество от *букви* (терминали), като $\Sigma \cap V = \emptyset$;
- $R \subseteq (V \cup \Sigma)^+ \times (V \cup \Sigma)^\star$ е крайно множество от *правила*. За по-добра яснота, обикновено правилата $(\alpha, \beta) \in R$ ще означаваме като $\alpha \to_G \beta$. Когато е ясно за коя граматика говорим, ще пишем просто $\alpha \to \beta$.

В [HU79] правилата се наричат *productions* или *production rules*.

- $S \in V$ е началната променлива (нетерминал).

Удобно е да дефинираме извод на думата β от думата α в граматиката G за ℓ стъпки, което ще означаваме като $\alpha \overset{\ell}{\Rightarrow}_G \beta$, с индукция по броя на стъпките ℓ по следния начин:

Обърнете внимание, че имаме недетерминизъм в тази дефиниция на извод. Също така, понякога ,за удобство, ще пишем просто $\overset{\ell}{\Rightarrow}$ вместо $\overset{\ell}{\Rightarrow}_G$, когато се знае за коя граматика говорим.

$$\frac{}{\alpha \overset{0}{\Rightarrow}_G \alpha}\ \text{правило (0)} \qquad \frac{\alpha \to_G \gamma \qquad \gamma \overset{\ell}{\Rightarrow}_G \beta}{\alpha \overset{\ell+1}{\Rightarrow}_G \beta}\ \text{правило (1)}$$

$$\frac{\alpha_1 \overset{\ell_1}{\Rightarrow}_G \beta_1 \qquad \alpha_2 \overset{\ell_2}{\Rightarrow}_G \beta_2}{\alpha_1 \cdot \alpha_2 \overset{\ell_1+\ell_2}{\Rightarrow}_G \beta_1 \cdot \beta_2}\ \text{правило (2)}$$

В частност имаме следното:

$$\frac{\alpha \to_G \beta}{\alpha \overset{1}{\Rightarrow}_G \beta}$$

Сега дефинираме релацията $\overset{\star}{\Rightarrow}_G$ като

$$\alpha \overset{\star}{\Rightarrow}_G \beta \overset{\text{деф}}{\Leftrightarrow} (\exists \ell \in \mathbb{N})[\, \alpha \overset{\ell}{\Rightarrow}_G \beta \,].$$

Езикът, който се поражда от граматиката G дефинираме по следния начин:

$$\mathcal{L}(G) \overset{\text{деф}}{=} \{\omega \in \Sigma^\star \mid S \overset{\star}{\Rightarrow}_G \omega\}.$$

Твърдение 3.1. За всяко k е изпълнено, че:

$$\frac{\alpha_1 \overset{\ell_1}{\Rightarrow} \beta_1 \qquad \ldots \qquad \alpha_k \overset{\ell_k}{\Rightarrow} \beta_k}{\alpha_1 \cdots \alpha_k \overset{\ell}{\Rightarrow} \beta_1 \cdots \beta_k}\ (\ell = \textstyle\sum_{i=1}^{k} \ell_i)$$

Упътване. Индукция по k. □

Твърдение 3.2. За произволни естествени числа ℓ_1 и ℓ_2 е изпълнено, че:

$$\frac{\alpha \overset{\ell_1}{\Rightarrow} \beta \qquad \beta \overset{\ell_2}{\Rightarrow} \gamma}{\alpha \overset{\ell_1+\ell_2}{\Rightarrow} \gamma}$$

Упътване. Пълна индукция по ℓ_1.

- Ако $\ell_1 = 0$, то е тривиално.
- Ако $\ell_1 = 1$, то следва от правило (1).
- Ако $\ell_1 > 1$, то имаме два случая за това как сме получили $\alpha \overset{\ell_1}{\Rightarrow} \beta$.
  - Първият случай е, ако сме приложили правило (1), т.е.

$$\frac{\alpha \to_G \delta \qquad \delta \overset{\ell_1-1}{\Rightarrow} \beta}{\alpha \overset{\ell_1}{\Rightarrow} \beta}\ (1)$$

Тогава получаваме следния извод:

$$\frac{\alpha \to_G \delta \qquad \dfrac{\delta \overset{\ell_1-1}{\Rightarrow} \beta \qquad \beta \overset{\ell_2}{\Rightarrow} \gamma}{\delta \overset{\ell_1+\ell_2-1}{\Rightarrow} \gamma}\ \textbf{(и.п.)}}{\alpha \overset{\ell_1+\ell_2}{\Rightarrow} \gamma}\ (1)$$

– Вторият случай е, ако сме приложили правило (2), т.е. $\ell_1 = \ell_1' + \ell_1''$ и $\ell_1' > 0$ и $\ell_1'' > 0$ и имаме извода:

Защо сме сигурни, че можем да намерим такова разбиване ?

$$\dfrac{\alpha_1 \overset{\ell_1'}{\Rightarrow} \beta_1 \qquad \alpha_2 \overset{\ell_1''}{\Rightarrow} \beta_2}{\underbrace{\alpha_1\alpha_2}_{\alpha} \overset{\ell_1'+\ell_2''}{\Rightarrow} \underbrace{\beta_1\beta_2}_{\beta}}\ (2)$$

Тогава получаваме следния извод:

$$\dfrac{\dfrac{\alpha_1 \overset{\ell_1'}{\Rightarrow} \beta_1 \quad (2) \qquad \dfrac{}{\alpha_2 \overset{0}{\Rightarrow} \alpha_2}\ (0)}{\alpha \overset{\ell_1'}{\Rightarrow} \beta_1\alpha_2} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\beta_1 \overset{0}{\Rightarrow} \beta_1}\ (0) \qquad \alpha_2 \overset{\ell_1''}{\Rightarrow} \beta_2\ (2)}{\beta_1\alpha_2 \overset{\ell_1''}{\Rightarrow} \beta} \qquad \beta \overset{\ell_2}{\Rightarrow} \gamma}{\alpha \overset{\ell_1+\ell_2}{\Rightarrow} \gamma}\ \begin{matrix}\textbf{(И.П.)}\\ \textbf{(И.П.)}\end{matrix}$$

□

Твърдение 3.3. За произволни естествени числа ℓ_1 и ℓ_2 е изпълнено, че:

$$\dfrac{\alpha \overset{\ell_1}{\Rightarrow} \rho\beta\delta \qquad \beta \overset{\ell_2}{\Rightarrow} \gamma}{\alpha \overset{\ell_1+\ell_2}{\Rightarrow} \rho\gamma\delta}$$

Доказателство. Имаме следния извод:

$$\dfrac{\alpha \overset{\ell_1}{\Rightarrow} \rho\beta\delta \qquad \dfrac{\dfrac{}{\rho \overset{0}{\Rightarrow} \rho}\ (0) \quad \beta \overset{\ell_2}{\Rightarrow} \gamma}{\rho\beta \overset{\ell_2}{\Rightarrow} \rho\gamma}\ (2) \qquad \dfrac{}{\delta \overset{0}{\Rightarrow} \delta}\ (0)}{\alpha \overset{\ell_1+\ell_2}{\Rightarrow} \rho\gamma\delta}\ (2)\ (\textit{Твърдение 3.2})$$

□

Забележка. В повечето учебници авторите дефинират релацията $\overset{\star}{\Rightarrow}_G$ като рефлексивното и транзитивното затваряне на релацията $\Rightarrow_G$, където

$$\alpha \Rightarrow_G \beta \overset{\text{деф}}{\Leftrightarrow} \alpha = \rho\gamma\delta \ \&\ \gamma \to_G \gamma' \ \&\ \beta = \rho\gamma'\delta, \text{ за някои } \rho \text{ и } \delta.$$

Както се вижда от следващото твърдение, релацията $\overset{1}{\Rightarrow}_G$, която дефинирахме по-горе, е точно релацията $\Rightarrow_G$.

Твърдение 3.4. $\alpha \overset{1}{\Rightarrow}_G \beta$ точно тогава, когато $\alpha \Rightarrow_G \beta$.

Упътване. За посоката ($\leftarrow$), нека $\alpha \Rightarrow_G \beta$, т.е. $\alpha = \delta\gamma\rho$, $\gamma \to_G \gamma'$ и $\beta = \delta\gamma'\rho$. Тогава

$$\dfrac{\delta\gamma\rho \overset{0}{\Rightarrow} \delta\gamma\rho \qquad \dfrac{\gamma \to_G \gamma'}{\gamma \overset{1}{\Rightarrow} \gamma'}\ \text{правило (2)}}{\underbrace{\delta\gamma\rho}_{\alpha} \overset{1}{\Rightarrow} \underbrace{\delta\gamma'\rho}_{\beta}}\ (\textit{Твърдение 3.3})$$

За посоката ($\to$), индукция по $|\alpha|$. Имаме два случая.

- Ако $\alpha \to_G \beta$ е правило в граматиката G, то всичко е ясно, защото тогава $\rho = \delta = \varepsilon$.
- В противен случай, достигнали сме до извода $\alpha \overset{1}{\Rightarrow} \beta$ като сме приложили правилото:

$$\frac{\alpha_1 \overset{\ell_1}{\Rightarrow} \beta_1 \qquad \alpha_2 \overset{\ell_2}{\Rightarrow} \beta_2}{\underbrace{\alpha_1\alpha_2}_{\alpha} \overset{\ell_1+\ell_2}{\Rightarrow} \underbrace{\beta_1\beta_2}_{\beta},}$$

където $\ell_1 + \ell_2 = 1$. Без ограничение на общността, нека $\ell_1 = 1$ и $\ell_2 = 0$. Понеже $|\alpha_1| < |\alpha|$, можем да приложим **(И.П.)** за α_1. Получаваме, че $\alpha_1 \Rightarrow_G \beta_1$. Понеже $\ell_2 = 0$, то $\alpha_2 = \beta_2$. Заключваме, че $\underbrace{\alpha_1\alpha_2}_{\alpha} \Rightarrow_G \underbrace{\beta_1\beta_2}_{\beta}$. □

3.2 Контекстни граматики

На англ. context-sensitive [HU79, стр. 223]. Евентуално позволяваме и правилото $S \to \varepsilon$, ако искаме да включим ε в езика, като S не се среща в дясна страна на правило.

Казваме, че $G = (V, \Sigma, R, S)$ е **контекстна граматика**, ако правилата на G са от вида $\rho A \delta \to \rho\alpha\delta$, където $\rho, \delta \in (V \cup \Sigma)^\star$ и $\alpha \in (V \cup \Sigma)^+$.

Пример 3.1. Езикът $L = \{a^n b^n c^n \mid n > 0\}$ е контекстен.

Съобразете, че имаме извода $CB \overset{4}{\Rightarrow}_G BC$.

Упътване. Разгледайте контекстната граматика G зададена със следните правила:

$$\begin{aligned}
&S \to aSBC \mid aBC\\
&CB \to CZ\\
&CZ \to WZ\\
&WZ \to WC\\
&WC \to BC\\
&aB \to ab\\
&bB \to bb\\
&bC \to bc\\
&cC \to cc.
\end{aligned}$$

Докажете, че за всяко $n > 0$ е изпълнено следното:

- $S \overset{n}{\Rightarrow} a^n(BC)^n$;
- $(BC)^n \overset{n-1}{\Rightarrow} B^nC^n$;
- $aB^n \overset{n}{\Rightarrow} ab^n$;
- $bC^n \overset{n}{\Rightarrow} bc^n$.

Оттук лесно можем да докажем, че $L \subseteq \mathcal{L}(G)$. □

3.3 Регулярни граматики

Сега ще разгледаме граматики с такъв вид правила, които пораждат точно регулярните (или еквивалентно автоматни) езици. Граматиката $G = (V, \Sigma, R, S)$ се нарича **регулярна граматика**, ако всички правила са от вида

$$A \to aB,$$
$$A \to \varepsilon,$$

за произволни $A, B \in V$ и $a \in \Sigma$.

Също така се наричат граматики от тип 3 в йерархията на Чомски [HU79, стр. 217]. Този вид граматики понякога се нарича и дясно-регулярна граматика.

Лема 3.1. За всяка регулярна граматика G съществува НКА $\mathcal{N}$, такъв че $\mathcal{L}(G) = \mathcal{L}(\mathcal{N})$.

Упътване. Нека $G = \langle V, \Sigma, R, S\rangle$ и $V = \{A_0, \ldots, A_k\}$, където $S = A_0$. Тогава дефинираме $\mathcal{N}$ по следния начин:

- $Q \stackrel{\text{деф}}{=} \{q_0, \ldots, q_k\}$;
- $Q_{\texttt{start}} \stackrel{\text{деф}}{=} \{q_0\}$;
- $F \stackrel{\text{деф}}{=} \{q_i \mid A_i \to \varepsilon\}$;
- Релацията на преходите Δ е дефинирана по следния начин:

$$\Delta(q_i, a) \stackrel{\text{деф}}{=} \{q_j \mid A_i \to aA_j \text{ е правило в граматиката}\}.$$

Докажете, че $\mathcal{L}(\mathcal{N}) = \mathcal{L}(G)$. □

Лема 3.2. За всеки ДКА $\mathcal{A}$ съществува регулярна граматика G, такава че $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \mathcal{L}(G)$.

Ясно е, че и двете твърдения може да се формулират и за детерминирани автомати.

Упътване. Нека $\mathcal{A} = \langle \Sigma, Q, q_{\texttt{start}}, \delta, F\rangle$ и $Q = \{q_0, \ldots, q_k\}$, където $q_{\texttt{start}} = q_0$. Тогава дефинираме $G = \langle V, \Sigma, R, S\rangle$ по следния начин:

- $V \stackrel{\text{деф}}{=} \{A_0, \ldots, A_k\}$;
- $S \stackrel{\text{деф}}{=} A_0$;
- $A_i \to aA_j \stackrel{\text{деф}}{\Leftrightarrow} \delta(q_i, a) = q_j$;
- $A_i \to \varepsilon \stackrel{\text{деф}}{\Leftrightarrow} q_i \in F$.

Докажете, че $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \mathcal{L}(G)$. □

Теорема 3.1. Един език е регулярен точно тогава, когато се поражда от регулярна граматика.

3.3.1 Допълнителни задачи

Задача 3.1. Граматиката $G = (V, \Sigma, R, S)$ се нарича **обобщено дясно-регулярна**, ако всички правила са от вида

$$A \to \omega B,$$
$$A \to \omega$$

за произволни $A, B \in V$ и $\omega \in \Sigma^\star$. Докажете, че един език L е автоматен точно тогава, когато L може да се опише с обобщена дясно-регулярна граматика.

Задача 3.2. Граматиката $G = (V, \Sigma, R, S)$ се нарича **обобщено ляво-регулярна**, ако всички правила са от вида

$$A \to B\omega,$$
$$A \to \omega$$

за произволни $A, B \in V$ и $\omega \in \Sigma^\star$. Докажете, че един език L е автоматен точно тогава, когато L може да се опише с обобщена ляво-регулярна граматика.

3.4 Извод в безконтекстна граматика

В Раздел 3.1 въведохме понятието неограничена граматика. След това видяхме как можем да опишем регулярните езици със специален вид граматики, които нарекохме регулярни граматики. Сега ще разгледаме още един вид граматики, които описват по-широк клас от езици.

В [PL98] дефиницията е различна. Там $\Sigma \subseteq V$. На англ. *context-free grammar*. Други срещани наименования на български са *контекстно-свободна*, *контекстно-независима*. Тук всички правила са от вида $A \to \alpha$, където $\alpha \in (V \cup \Sigma)^\star$. В частност имаме, че:

$$\frac{A \to_G \beta}{A \overset{1}{\Rightarrow}_G \beta}$$

Една граматика $G = (V, \Sigma, R, S)$ се нарича **безконтекстна**, ако имаме ограничението, че $R \subseteq V \times (V \cup \Sigma)^\star$. Да повторим дефиницията на релацията $\alpha \overset{\ell}{\Rightarrow}_G \beta$ от Раздел 3.1 в частния случай, когато граматиката е безконтекстна.

$$\frac{}{\alpha \overset{0}{\Rightarrow}_G \alpha} \text{ правило (0)} \qquad \frac{A \to_G \gamma \quad \gamma \overset{\ell}{\Rightarrow}_G \beta}{A \overset{\ell+1}{\Rightarrow}_G \beta} \text{ правило (1)}$$

$$\frac{\alpha_1 \overset{\ell_1}{\Rightarrow}_G \beta_1 \quad \alpha_2 \overset{\ell_2}{\Rightarrow}_G \beta_2}{\alpha_1 \cdot \alpha_2 \overset{\ell_1+\ell_2}{\Rightarrow}_G \beta_1 \cdot \beta_2} \text{ правило (2)}$$

Нека официално да обявим, че един език L се нарича **безконтекстен**, ако съществува безконтекстна граматика G, за която $L = \mathcal{L}(G) = \{\omega \in \Sigma^\star \mid S \overset{\star}{\Rightarrow} \omega\}$.

Забележка. Очевидно е, че всяка регулярна граматика е безконтекстна. Следователно, *всеки регулярен език е безконтекстен.*

Забележка. Като частен случай на *Твърдение 3.3* получаваме свойството:

$$\frac{\alpha \overset{\ell_1}{\Rightarrow} \rho B \delta \qquad B \overset{\ell_2}{\Rightarrow} \beta}{\alpha \overset{\ell_1+\ell_2}{\Rightarrow} \rho\beta\delta,} \text{ правило (3)}$$

което ще означим като правило (3), защото ще го използваме често.

Пример 3.2. Да разгледаме безконтекстната граматика G, която има следните правила:

$$S \to AS \mid \varepsilon$$
$$A \to aAb \mid ab.$$

Да видим защо думата $aabbab \in \mathcal{L}(G)$. Ако следваме формално правилата за извод, получаваме следното:

За момента не е ясно как можем да проверим, че примерно думата $abbba \notin \mathcal{L}(G)$. Този въпрос ще разгледаме по-нататък.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{S \to_G \varepsilon \qquad \varepsilon \overset{0}{\Rightarrow}_G \varepsilon}\,(2)}{S \to_G AS \qquad S \overset{1}{\Rightarrow}_G \varepsilon}\,(3)}{A \overset{0}{\Rightarrow}_G A \qquad S \overset{2}{\Rightarrow}_G A}\,(2)}{S \to_G AS \qquad AS \overset{2}{\Rightarrow}_G AA}\,(1)}{S \overset{3}{\Rightarrow}_G AA}$$

Освен това имаме и следния формален извод:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{a \overset{0}{\Rightarrow}_G a}\,(0) \qquad \dfrac{\dfrac{}{A \to_G ab \qquad b \overset{0}{\Rightarrow}_G b}\,(0)}{Ab \overset{1}{\Rightarrow}_G abb}\,(2)}{aAb \overset{1}{\Rightarrow}_G aabb}\,(2)}{A \overset{2}{\Rightarrow}_G aabb}\,(1)$$

Аналогично,

$$\dfrac{\dfrac{}{A \to_G ab \qquad ab \overset{0}{\Rightarrow}_G ab}\,(0)}{A \overset{1}{\Rightarrow}_G ab}\,(1)$$

Обединявайки всичко, получаваме:

$$\dfrac{\dfrac{S \overset{3}{\Rightarrow}_G AA \qquad A \overset{2}{\Rightarrow}_G aabb}{S \overset{5}{\Rightarrow}_G aabbA}\,(3) \qquad A \overset{1}{\Rightarrow}_G ab}{S \overset{6}{\Rightarrow}_G aabbab}\,(3)$$

Можем да приложим правилата за извод в различен ред и пак да получим същия краен резултат. Например:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{S \to_G AS \qquad A \overset{2}{\Rightarrow} aabb}{S \overset{3}{\Rightarrow}_G aabbS}\ (3) \qquad S \overset{2}{\Rightarrow}_G A}{S \overset{5}{\Rightarrow}_G aabbA}\ (3) \qquad A \overset{1}{\Rightarrow}_G ab}{S \overset{6}{\Rightarrow}_G aabbab}\ (3)$$

Следващото твърдение ни дава едно свойство, което е вярно за безконтекстни граматики, но не и за неограничени граматики.

Тук $\gamma_1, \gamma_2, \beta \in (V \cup \Sigma)^\star$.

Твърдение 3.5. Нека γ_1 и γ_2 са непразни думи, за които $\gamma_1\gamma_2 \overset{\ell}{\Rightarrow} \beta$. Тогава съществуват числа ℓ_1, ℓ_2 и думи β_1 и β_2, за които: $\gamma_1 \overset{\ell_1}{\Rightarrow} \beta_1$ и $\gamma_2 \overset{\ell_2}{\Rightarrow} \beta_2$ и $\beta = \beta_1\beta_2$ и $\ell = \ell_1 + \ell_2$.

Доказателство. Индукция по дължината на извода ℓ.

- Нека $\ell = 0$. Тогава $\beta_1 = \gamma_1$ и $\beta_2 = \gamma_2$.
- Нека $\ell = 1$. Без ограничение на общността, според *Твърдение 3.4*, да предположим, че сме приложили правило в γ_1. Получаваме извода

Разсъждаваме аналогично, ако $\gamma_2 = \delta A \rho$.

$$\text{(Твърдение 3.4)}\ \dfrac{\overbrace{\delta A \rho}^{\gamma_1} \overset{0}{\Rightarrow} \delta A \rho \qquad A \to_G \alpha}{\text{правило (2)}\ \dfrac{\gamma_1 \overset{1}{\Rightarrow} \delta\alpha\rho \qquad \gamma_2 \overset{0}{\Rightarrow} \gamma_2}{\gamma_1\gamma_2 \overset{1}{\Rightarrow} \underbrace{\delta\alpha\rho}_{\beta_1}\underbrace{\gamma_2}_{\beta_2}}}$$

- Нека $\ell > 1$. Тогава да разгледаме следната ситуация:

$$(\ell_1 > 0)\ \dfrac{\dfrac{\vdots}{\gamma_1\gamma_2 \overset{\ell_1}{\Rightarrow} \delta} \qquad \dfrac{\vdots}{\delta \overset{\ell_2}{\Rightarrow} \beta}\ (\ell_2 > 0)}{\gamma_1\gamma_2 \overset{\ell_1+\ell_2}{\Rightarrow} \beta}\ \text{(Твърдение 3.2)}$$

Понеже $\ell_1 < \ell$, то можем да приложим **(И.П.)** , според което можем да разбием δ като $\delta = \delta_1\delta_2$ и да получим извода:

$$(\ell_1' + \ell_1'' = \ell_1)\ \dfrac{\gamma_1 \overset{\ell_1'}{\Rightarrow} \delta_1 \qquad \gamma_2 \overset{\ell_1''}{\Rightarrow} \delta_2}{\gamma_1\gamma_2 \overset{\ell_1}{\Rightarrow} \underbrace{\delta_1\delta_2}_{\delta}}\ \text{правило (2)}$$

Понеже $\ell_2 < \ell$, то отново можем да приложим **(И.П.)** и да получим извода:

$$(\ell_2' + \ell_2'' = \ell_2)\ \dfrac{\delta_1 \overset{\ell_2'}{\Rightarrow} \beta_1 \qquad \delta_2 \overset{\ell_2''}{\Rightarrow} \beta_2}{\underbrace{\delta_1\delta_2}_{\delta} \overset{\ell_2}{\Rightarrow} \underbrace{\beta_1\beta_2}_{\beta}}\ \text{правило (2)}$$

Сега можем да обобщим всичко със следния извод:

$$\dfrac{\dfrac{\gamma_1 \overset{\ell_1'}{\Rightarrow} \delta_1 \quad \gamma_2 \overset{\ell_1''}{\Rightarrow} \delta_2}{\gamma_1\gamma_2 \overset{\ell_1}{\Rightarrow} \delta_1\delta_2}\,(2) \quad \dfrac{\delta_1 \overset{\ell_2'}{\Rightarrow} \beta_1 \quad \delta_2 \overset{\ell_2''}{\Rightarrow} \beta_2}{\delta_1\delta_2 \overset{\ell_2}{\Rightarrow} \beta_1\beta_2}\,(2)}{\gamma_1\gamma_2 \overset{\ell_1+\ell_2}{\Rightarrow} \beta_1\beta_2}\,(\textit{Твърдение 3.2})$$

□

Твърдение 3.6. Нека G е безконтекстна граматика и нека $X_1 \cdots X_k \overset{\ell}{\Rightarrow}_G \beta$, където $X_i \in V \cup \Sigma$ и $k \geq 2$. Тогава съществуват думи $\beta_1, \ldots, \beta_k$, такива че за $i = 1, \ldots, k$ е изпълнено, че $X_i \overset{\ell_i}{\Rightarrow} \beta_i$, където $\beta = \beta_1 \cdots \beta_k$ и $\ell = \sum_{i=1}^{k} \ell_i$.

Упътване. Пълна индукция по k като използвате *Твърдение 3.5*. □

Тук е възможно $X_i = a \in \Sigma$. Тогава $a \overset{0}{\Rightarrow} a$ и $\beta_i = a$.

Следващото твърдение е важно, но е трудно да не пропуснем доказателството му.

Твърдение 3.7. Безконтекстните езици са затворени относно операциите обединение, конкатенация и звезда на Клини.

Оттук можем да извлечем второ доказателство на твърдението, че всеки регулярен език е безконтекстен.

Твърдение 3.8. Всеки регулярен език е безконтекстен.

Упътване. Индукция по построението на регулярните езици. □

3.5 Синтактични дървета

На английски се нарича parse tree, syntax tree, derivation tree. Обикновено, например в [PL98, стр. 123], дават рекурсивна дефиниция на синтактично дърво.

- Нека фиксираме граматиката $G = (\Sigma, V, S, R)$ и

$$b \overset{\text{деф}}{=} \max\{|\gamma| \mid A \to_G \gamma \text{ е правило в } G\}.$$

- Двойката $P = (T, \lambda)$ се нарича **дърво на извод** съвместимо с G, ако са изпълнени свойствата:
  - T е крайно *оптимално* дърво и $T \subseteq \{0, 1, \ldots, b-1\}^\star$.
  - Имаме функция $\lambda : T \to V \cup \Sigma \cup \{\varepsilon\}$. Нека положим $X_\alpha \overset{\text{деф}}{=} \lambda(\alpha)$.

С други думи, $\lambda(\alpha) \to_G \lambda(\alpha 0) \cdots \lambda(\alpha k)$.

– Ако $\alpha \in T$ и $|\mathtt{succ}_T(\alpha)| = k+1$, за някое $k \in \mathbb{N}$, то $X_\alpha \in V$, като имаме и

$$X_\alpha \to_G X_{\alpha 0} X_{\alpha 1} \cdots X_{\alpha k}.$$

Това свойство е ключово, защото то ни казва, че дървото е съвместимо с правилата на граматиката G.

- За дървото на извод P, нека $\mathtt{root}(P) \stackrel{\text{деф}}{=} X_\varepsilon$.
- Нека $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$ са всички думи от множеството $\mathtt{leaves}(T)$ подредени във възходящ ред относно лексикографската наредба. Тогава

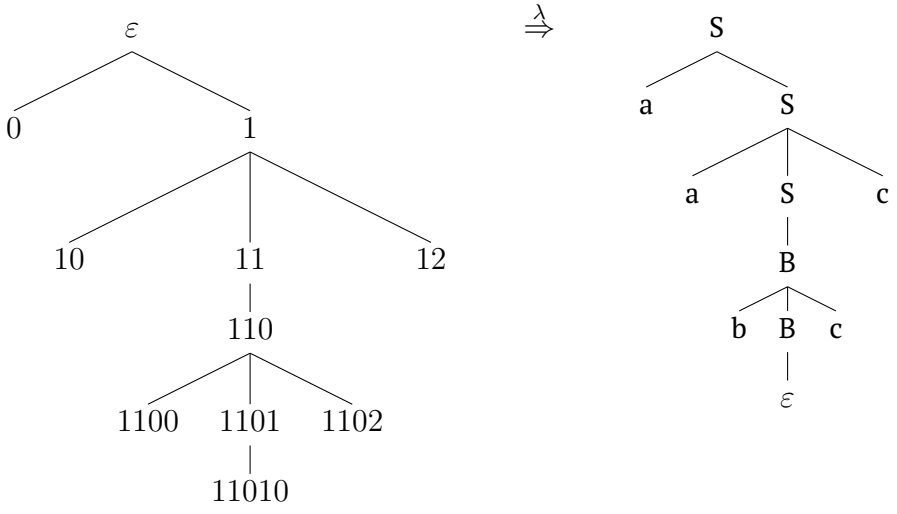
$$\mathtt{yield}(P) \stackrel{\text{деф}}{=} X_{\alpha_0} X_{\alpha_1} \cdots X_{\alpha_k}.$$

Пример 3.3. Да разгледаме граматиката G зададена със следните правила:

$$S \to aS \mid aSc \mid B$$
$$B \to bB \mid bBc \mid \varepsilon.$$

По-нататък ще докажем, че езикът на граматиката G е $\{a^n b^k c^\ell \mid n + k \geq \ell\}$.

Да разгледаме дървото на извод $P = (T, \lambda)$, където:



Фигура 3.3: Дърво на извод за думата $aabcc$.

Имаме, че:

- $\mathtt{height}(P) = 5$;
- $\mathtt{leaves}(P) = \{0, 10, 1100, 11010, 1102, 12\}$;
- $\mathtt{yield}(P) = aab\varepsilon cc = aabcc$.
- $\mathtt{succ}_T(110) = \{1100, 1101, 1102\}$;
- $\lambda(\varepsilon) = S$;
- $\lambda(0) = a$, $\lambda(1) = S$;
- Ясно е, че $\lambda(\varepsilon) \to_G \lambda(0)\lambda(1)$;
- $\lambda(10) = a$, $\lambda(11) = S$, $\lambda(12) = c$;
- Ясно е, че $\lambda(1) \to_G \lambda(10)\lambda(11)\lambda(12)$;
- $\lambda(110) = B$;
- Ясно е, че $\lambda(11) \to_G \lambda(110)$;
- $\lambda(1100) = b$, $\lambda(1101) = B$, $\lambda(1102) = c$;
- Ясно е, че $\lambda(110) \to_G \lambda(1100)\lambda(1101)\lambda(1102)$;
- $\lambda(11010) = \varepsilon$;
- Ясно е, че $\lambda(1101) \to_G \lambda(11010)$;

От всичко по-горе следва, че $P = (T, \lambda)$ е дърво на извод за думата $aabcc$ в граматиката G.

3.6 Извод върху синтактично дърво

За произволна безконтекстна граматика G, дефинираме релацията $X \overset{\ell}{\lhd} \alpha$, където $X \in V \cup \Sigma$ и $\alpha \in (V \cup \Sigma)^\star$, по следния начин:

Не знам да има учебник, в който формално да е въведена тази релация. Тя е удобна най-вече за решаване на задачи, както и за доказателството на лемата за покачването.

$$\frac{}{X \overset{0}{\lhd} X} \text{ правило (0)}$$

$$(\ell = \max\{\ell_1, \ldots, \ell_n\}) \quad \frac{X \to_G X_1 \cdots X_n \qquad X_1 \overset{\ell_1}{\lhd} \gamma_1 \qquad \cdots \qquad X_n \overset{\ell_n}{\lhd} \gamma_n}{X \overset{\ell+1}{\lhd} \gamma_1 \cdots \gamma_n} \text{ правило (1)}$$

Да дефинираме $\overset{\star}{\lhd}$ по следния начин:

$$X \overset{\star}{\lhd} \gamma \overset{\text{деф}}{\Leftrightarrow} (\exists \ell \in \mathbb{N})[X \overset{\ell}{\lhd} \gamma].$$

Съобразете, че имаме:

$$\frac{X \to_G \gamma}{X \overset{1}{\lhd} \gamma.}$$

Лема 3.3. Нека G е безконтекстна граматика, $X \in V \cup \Sigma$ и $\beta \in (V \cup \Sigma)^\star$. Тогава ако $X \overset{\star}{\Rightarrow} \beta$, то $X \overset{\star}{\lhd} \beta$.

Обърнете внимание също, че тази релация е рефликсивна, но не е транзитивна!

Доказателство. С пълна индукция по ℓ ще докажем, че ако $X \overset{\ell}{\Rightarrow} \beta$, то $X \overset{\star}{\lhd} \beta$.

- $\ell = 0$, т.е. $X \overset{0}{\Rightarrow} X$. Тогава е ясно, че $X \overset{\star}{\lhd} X$.
- Нека $\ell > 0$ и $X \overset{\ell}{\Rightarrow} \beta$. Според правилата на извод в граматика имаме извода

$$\frac{X \to_G X_0 X_1 \cdots X_k \qquad X_0 X_1 \cdots X_k \overset{\ell-1}{\Rightarrow} \beta}{X \overset{\ell}{\Rightarrow} \beta} \text{ правило (1)}$$

От *Твърдение 3.6* знаем, че съществува разбиване на β на $k+1$ части, така че:

- $\beta = \beta_0 \cdots \beta_k$;
- $X_i \overset{\ell_i}{\Rightarrow} \beta_i$, за всяко $i = 0, \ldots, k$;
- $\ell - 1 = \sum_{i=1}^{k} \ell_i$.

Получаваме следното:

$$\frac{X \to_G X_0 \cdots X_k \qquad \dfrac{X_0 \overset{\ell_0}{\Rightarrow} \beta_0}{X_0 \overset{\star}{\lhd} \beta_0} \text{ (и.п.)} \qquad \cdots \qquad \dfrac{X_k \overset{\ell_k}{\Rightarrow} \beta_k}{X_k \overset{\star}{\lhd} \beta_k} \text{ (и.п.)}}{X \overset{\star}{\lhd} \underbrace{\beta_0 \cdots \beta_k}_{\beta}} \text{ правило (1)}$$

□

Лема 3.4. Нека G е безконтекстна граматика, $X \in V \cup \Sigma$ и $\gamma \in (V \cup \Sigma)^\star$. Тогава ако $X \overset{\star}{\lhd} \gamma$, то $X \overset{\star}{\Rightarrow} \gamma$.

Доказателство. С пълна индукция по ℓ ще докажем, че ако $X \overset{\ell}{\lhd} \gamma$, то $X \overset{\star}{\Rightarrow} \gamma$.

- Нека $\ell = 0$. Това означава, че $X \overset{0}{\lhd} X$. Ясно е, че $X \overset{\star}{\Rightarrow} X$.
- Нека $\ell > 0$. Тогава имаме следното:

$$\frac{X \to_G X_0 \cdots X_n \qquad X_0 \overset{\ell_0}{\lhd} \gamma_0 \qquad \cdots \qquad X_n \overset{\ell_n}{\lhd} \gamma_n}{X \overset{\ell}{\lhd} \underbrace{\gamma_0 \cdots \gamma_n}_{\gamma}} \; (\ell = 1 + \max\{\ell_0, \ldots, \ell_n\})$$

Понеже $\ell_0 < \ell, \ldots, \ell_n < \ell$, получаваме, че:

$$\frac{\dfrac{X_0 \overset{\ell_0}{\lhd} \gamma_0}{X_0 \overset{\star}{\Rightarrow} \gamma_0}\ \text{(и.п.)} \qquad \cdots \qquad \dfrac{X_n \overset{\ell_n}{\lhd} \gamma_n}{X_n \overset{\star}{\Rightarrow} \gamma_n}\ \text{(и.п.)} \quad \text{(Твърдение 3.1)} \qquad X \to_G X_0 \cdots X_n \qquad X_0 \cdots X_n \overset{\star}{\Rightarrow} \gamma_0 \cdots \gamma_n}{X \overset{\star}{\Rightarrow} \underbrace{\gamma_0 \cdots \gamma_n}_{\gamma}}\ \text{правило (1)}$$

□

Комбинирайки предишните две леми получаваме следната теорема.

Теорема 3.2. Нека G е безконтекстна граматика, $X \in V \cup \Sigma$ и $\beta \in (V \cup \Sigma)^\star$. Тогава $X \overset{\star}{\lhd} \gamma$ точно тогава, когато $X \overset{\star}{\Rightarrow} \gamma$. В частност,

$$\mathcal{L}(G) = \{\alpha \in \Sigma^\star \mid S \overset{\star}{\lhd} \alpha\}.$$

Следващото твърдение ни казва, че има пряка връзка между релацията $\overset{\star}{\lhd}$ и синтактичните дървета.

Твърдение 3.9. Нека G е безконтекстна граматика. Тогава $X \overset{\ell}{\lhd} \gamma$ точно тогава, когато съществува дърво на извод P съвместимо с G, за което $\texttt{root}(P) = X$, $\texttt{yield}(P) = \alpha$ и $\texttt{height}(P) = \ell$.

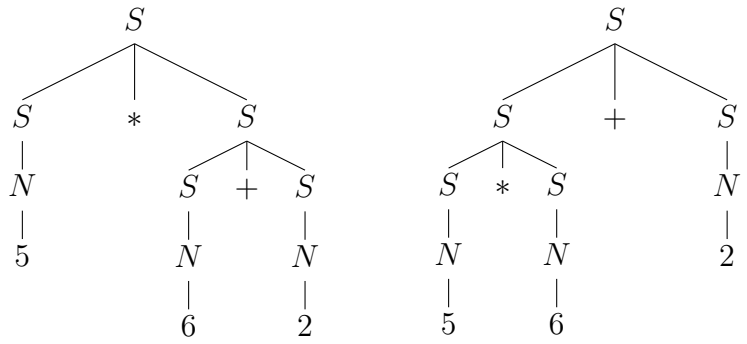
Упътване. Индукция по ℓ. □

Добре е да обърнем внимание, че е възможно, ако $A \overset{\ell}{\lhd} \alpha$, то да има няколко синтактични дървета с корен променливата A, които да извеждат думата α и да имат височина ℓ.

Пример 3.4. Да разгледаме граматика G_0 с правила

$$S \to S + S \mid S * S \mid (S) \mid V$$
$$N \to 0 \mid 1 \mid \ldots \mid 9$$

В тази граматика нямаме приоритет между $+$ или $*$. Например, думата $5*6+2$ има две различни синтактични дървета P_1 и P_2, като и двете имат височина 4 и $\texttt{yield}(P_1) = \texttt{yield}(P_2) = 5 * 6 + 2$.

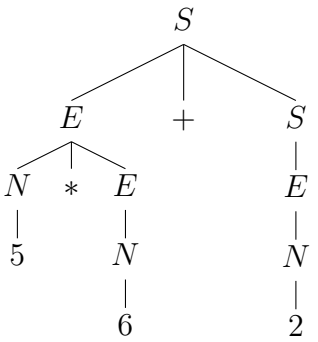


Фигура 3.4: Две синтактични в граматиката G_0 за думата $5 * 6 + 2$.

Искаме да модифицираме G_0, така че $*$ да има по-висок приоритет спрямо $+$. За целта ще разгледаме граматиката G_1, която ще поражда същия език като G_0, със следните правила:

$$S \to E + S \mid E$$
$$E \to N * E \mid N \mid (S) * E \mid (S)$$
$$N \to 0 \mid 1 \mid \ldots \mid 9$$

Сега думата $5 * 6 + 2$ има само едно дърво на извод. Тук операцията $*$ е с по-висок приоритет в сравнение с операцията $+$.



Фигура 3.5: Единствено синтактично дърво в граматиката G_1 за думата $5 * 6 + 2$.

3.6.1 Примерни задачи

Да напомним, че в Раздел 2.9 дефинирахме език $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}(q)$. Сега ще дефинираме език $\mathcal{L}_G(A)$, за произволна променлива A по следния начин:

$$\mathcal{L}_G(A) \stackrel{\text{деф}}{=} \{\alpha \in \Sigma^\star \mid A \overset{\star}{\lhd} \alpha\}.$$

Ясно е, че $\mathcal{L}(G) = \mathcal{L}_G(S)$. Също така, да дефинираме апроксимациите $\mathcal{L}^\ell_G(A)$ на $\mathcal{L}_G(A)$ така:

$$\mathcal{L}^\ell_G(A) \stackrel{\text{деф}}{=} \{\alpha \in \Sigma^\star \mid A \overset{\leq \ell}{\lhd} \alpha\}.$$

Следните свойства са ясни:

- $\mathcal{L}^0_G(A) = \emptyset$;
- $\mathcal{L}^\ell_G(A)$ е краен език за всяко ℓ;
- $\mathcal{L}^\ell_G(A) \subseteq \mathcal{L}^{\ell+1}_G(A)$ за всяко ℓ;
- $\mathcal{L}_G(A) = \bigcup_{\ell \geq 0} \mathcal{L}^\ell_G(A)$.

Следната характеризация на езиците $\mathcal{L}^\ell_G(A)$ ще е удобна за нас, когато искаме да докажем, че една безконтекстна граматика разпознава даден език.

Твърдение 3.10. Нека G е произволна безконтекстна граматика и A е променлива в G. Тогава имаме следното:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^0_G(A) &= \emptyset \\
\mathcal{L}^{\ell+1}_G(A) &= \bigcup \{\{\alpha_1\} \cdot \mathcal{L}^\ell_G(A_1) \cdots \{\alpha_n\} \cdot \mathcal{L}^\ell_G(A_n) \cdot \{\alpha_{n+1}\} \mid A \to_G \alpha_1 A_1 \cdots \alpha_n A_n \alpha_{n+1}\}.
\end{aligned}$$

Доказателство. Пълна индукция по ℓ. Твърдението очевидно е изпълнено за $\ell = 0$. Нека $\alpha \in \mathcal{L}^{\ell+1}_G(A)$, т.е. $A \overset{\leq \ell+1}{\lhd} \alpha$. Имаме следния извод:

$$\frac{A \to_G \alpha_1 B_1 \cdots \alpha_n B_n \alpha_{n+1} \qquad B_1 \overset{\leq \ell}{\lhd} \beta_1 \qquad \cdots \qquad B_n \overset{\leq \ell}{\lhd} \beta_n}{A \overset{\leq \ell+1}{\lhd} \underbrace{\alpha_1 \beta_1 \cdots \alpha_n \beta_n \alpha_{n+1}}_{\alpha}}$$

Понеже $B_i \overset{\leq \ell}{\lhd} \beta_i$, то от **(И.П.)** имаме, че $\beta_i \in \mathcal{L}^\ell_G(B_i)$. Тогава

$$\alpha \in \bigcup \{\{\alpha_1\} \cdot \mathcal{L}^\ell_G(A_1) \cdots \{\alpha_n\} \cdot \mathcal{L}^\ell_G(A_n) \cdot \{\alpha_{n+1}\} \mid A \to_G \alpha_1 A_1 \cdots \alpha_n A_n \alpha_{n+1}\}$$

Обратно, нека сега $\alpha = \alpha_1 \beta_1 \cdots \alpha_n \beta_n \alpha_{n+1}$, където $A \to_G \alpha_1 B_1 \cdots \alpha_n B_n \alpha_{n+1}$, $\beta_i \in \mathcal{L}^\ell_G(B_i)$ и $\alpha = \alpha_1 \beta_1 \cdots \alpha_n \beta_n \alpha_{n+1}$. Получаваме следния извод:

$$\frac{A \to_G \alpha_1 B_1 \cdots \alpha_n B_n \alpha_{n+1} \qquad \dfrac{\beta_1 \in \mathcal{L}^\ell_G(B_1)}{B_1 \overset{\leq \ell}{\lhd} \beta_1}\ \textbf{(И.П.)} \qquad \cdots \qquad \dfrac{\beta_n \in \mathcal{L}^\ell_G(B_n)}{B_n \overset{\leq \ell}{\lhd} \beta_n}\ \textbf{(И.П.)}}{A \overset{\leq \ell+1}{\lhd} \underbrace{\alpha_1 \beta_1 \cdots \alpha_n \beta_n \alpha_{n+1}}_{\alpha}}$$

□

Следствие 3.1. Нека G е произволна безконтекстна граматика и A е променлива в G. Тогава

$$\mathcal{L}_G(A) = \bigcup \{\{\alpha_1\} \cdot \mathcal{L}_G(A_1) \cdots \{\alpha_n\} \cdot \mathcal{L}_G(A_n) \cdot \{\alpha_{n+1}\} \mid A \to_G \alpha_1 A_1 \cdots \alpha_n A_n \alpha_{n+1}\}.$$

Като първи пример, нека да видим, че съществува безконтекстен език, който не е регулярен.

Да напомним, че вече видяхме, че езикът $L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ не е регулярен.

Пример 3.5. Да разгледаме безконтекстната граматика G зададена със следните правила:

$$S \to aSb \mid \varepsilon.$$

Да разгледаме първите няколко члена на редицата от езици $\mathcal{L}_G^\ell(S)$:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}_G^0(S) = \emptyset \\
&\mathcal{L}_G^1(S) = \{a\} \cdot \emptyset \cdot \{b\} \cup \{\varepsilon\} = \{\varepsilon\} \\
&\mathcal{L}_G^2(S) = \{a\} \cdot \{\varepsilon\} \cdot \{b\} \cup \{\varepsilon\} = \{\varepsilon, ab\} \\
&\mathcal{L}_G^3(S) = \{a\} \cdot \{\varepsilon, ab\} \cdot \{b\} \cup \{\varepsilon\} = \{\varepsilon, ab, aabb\} = \{a^n b^n \mid n < 3\} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Лесно се съобразява, че:

$$\mathcal{L}_G^\ell(S) = \{a^n b^n \mid n < \ell\}.$$

Заключаваме, че:

$$\mathcal{L}(G) = \mathcal{L}_G(S) = \bigcup_\ell \mathcal{L}_G^\ell(S) = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Пример 3.6. Да разгледаме безконтекстната граматика G зададена със следните правила:

$$\begin{aligned}
S &\to aSc \mid B \\
B &\to bBc \mid \varepsilon.
\end{aligned}$$

Да видим защо $\mathcal{L}(G) = \{a^n b^k c^{n+k} \mid n, k \in \mathbb{N}\}$. Първо ще докажем *коректност* на граматиката. Това означава, че G не генерира думи извън езика, т.е. $\mathcal{L}_G(S) \subseteq \{a^n b^k c^{n+k} \mid n, k \in \mathbb{N}\}$. За да направим това обаче, трябва да знаем също така и $\mathcal{L}_G(B)$. Формално казано, трябва да докажем, че за всяко ℓ е изпълнено следното:

$$\mathcal{L}_G^\ell(S) \subseteq \{a^n b^k c^{n+k} \mid n, k \in \mathbb{N}\} \tag{3.1}$$

$$\mathcal{L}_G^\ell(B) \subseteq \{b^k c^k \mid k \in \mathbb{N}\}. \tag{3.2}$$

Това ще направим с индукция по ℓ. Да напомним, че според *Твърдение 3.10* имаме следните връзки:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}_G^0(S) = \emptyset \\
&\mathcal{L}_G^{\ell+1}(S) = \{a\} \cdot \mathcal{L}_G^\ell(S) \cdot \{c\} \cup \mathcal{L}_G^\ell(B) \\
&\mathcal{L}_G^0(B) = \emptyset \\
&\mathcal{L}_G^{\ell+1}(B) = \{b\} \cdot \mathcal{L}_G^\ell(B) \cdot \{c\} \cup \{\varepsilon\}.
\end{aligned}$$

Очевидно е, че *Свойство (3.1)* и *Свойство (3.2)* са изпълнени за $\ell = 0$. Да примем, че имаме *Свойство (3.1)* и *Свойство (3.2)* за някое ℓ. Ще докажем свойствата и за $\ell + 1$.

Обърнете внимание, че не можем да докажем *Свойство (3.1)* независимо от *Свойство (3.2)*.

- Първо, нека $\alpha \in \mathcal{L}_G^{\ell+1}(S)$. Имаме два случая.
  - Нека $\alpha \in \{a\} \cdot \mathcal{L}_G^\ell(S) \cdot \{c\}$. От **(И.П.)** следва, че $\alpha = a^{n+1} b^k c^{n+k+1}$ за някои естествени числа n и k. Тогава е ясно, че $\alpha \in \{a^n b^k c^{n+k} \mid n, k \in \mathbb{N}\}$.
  - Нека $\alpha \in \mathcal{L}_G^\ell(B)$. От **(И.П.)** следва, че $\alpha \in \{b^k c^k \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq \{a^n b^k c^{n+k} \mid n, k \in \mathbb{N}\}$.
- Второ, нека $\alpha \in \mathcal{L}_G^{\ell+1}(B)$. Имаме два случая.
  - Нека $\alpha \in \{b\} \cdot \mathcal{L}_G^\ell(B) \cdot \{c\}$. От **(И.П.)** следва, че $\alpha = b^{k+1} c^{k+1}$ за някое естествено число k. Тогава е ясно, че $\alpha \in \{b^k c^k \mid k \in \mathbb{N}\}$.

– Нека $\alpha = \varepsilon$. В този случай също е ясно, че $\alpha \in \{b^k c^k \mid k \in \mathbb{N}\}$.

Оттук заключаваме, че $\mathcal{L}_G(S) \subseteq \{a^n b^k c^{n+k} \mid n, k \in \mathbb{N}\}$.

Сега да разгледаме пълнота на граматиката, което означава, че всяка дума от езика се генерира от G. С други думи, $\{a^n b^k c^{n+k} \mid n, k \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{L}_G(S)$. Първо ще докажем, че

$$\{b^k c^k \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{L}_G(B). \tag{3.3}$$

Това ще направим с *пълна* индукция по дължината на думата. Да разгледаме произволна дума $\alpha \in \{b^k c^k \mid k \in \mathbb{N}\}$.

- Нека $|\alpha| = 0$, т.е. $\alpha = \varepsilon$. Ясно е, че $\alpha \in \mathcal{L}_G(B)$.
- Нека $|\alpha| > 0$, т.е. $\alpha = b^{k+1} c^{k+1}$. От **(И.П.)** за *Свойство (3.3)* имаме $\alpha \in \{b\} \cdot \mathcal{L}_G(B) \cdot \{c\} \subseteq \mathcal{L}_G(B)$.

Вече сме готови да докажем, че:

$$\{a^n b^k c^{n+k} \mid n, k \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{L}_G(S). \tag{3.4}$$

Това включване пак ще докажем с *пълна* индукция по дължината на думата. Да разгледаме произволна дума $\alpha \in L$.

- Нека $|\alpha| = 0$, т.е. $\alpha = \varepsilon$. Ясно е, че $\alpha \in \mathcal{L}_G(B) \subseteq \mathcal{L}_G(S)$.
- Нека сега $|\alpha| > 0$, т.е. $\alpha = a^n b^k c^{n+k}$, където $n > 0$ или $k > 0$. Да разгледаме два случая.
  – Нека $n = 0$. Тогава $\alpha = b^k c^k$ и $k > 0$. Тогава от *Свойство (3.3)* следва, че $\alpha \in \mathcal{L}_G(B) \subseteq \mathcal{L}_G(S)$.
  – Нека $n > 0$. Тогава от **(И.П.)** за *Свойство (3.4)* имаме $\alpha \in \{a\} \cdot \mathcal{L}_G(S) \cdot \{c\} \subseteq \mathcal{L}_G(S)$.

Доказахме коректност и пълнота на граматиката и следователно $\mathcal{L}(G) = \{a^n b^k c^{n+k} \mid n, k \in \mathbb{N}\}$.

Пример 3.7. Нека да видим защо езикът $L = \{a^m b^n c^k \mid m + n \geq k\}$ е безконтекстен. Да разгледаме граматиката G с правила

$$S \to aSc \mid aS \mid B$$
$$B \to bBc \mid bB \mid \varepsilon.$$

От *Твърдение 3.10* имаме, че:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_G^0(S) &= \emptyset \\
\mathcal{L}_G^{\ell+1}(S) &= \{a\} \cdot \mathcal{L}_G^\ell(S) \cdot \{c\} \cup \{a\} \cdot \mathcal{L}_G^\ell(S) \cup \mathcal{L}_G^\ell(B) \\
\mathcal{L}_G^0(B) &= \emptyset \\
\mathcal{L}_G^{\ell+1}(B) &= \{b\} \cdot \mathcal{L}_G^\ell(B) \cdot \{c\} \cup \{b\} \cdot \mathcal{L}_G^\ell(B) \cup \{\varepsilon\}.
\end{aligned}$$

Тези две свойства ще бъдат нашето **(И.П.)** . Очевидно е, че те са изпълнени за $\ell = 0$.

Да предположим, че за произволно естествено число ℓ е изпълнено следното:

$$\mathcal{L}_G^\ell(S) \subseteq \{a^n b^m c^k \mid n + m \geq k\} \tag{3.5}$$
$$\mathcal{L}_G^\ell(B) \subseteq \{b^m c^k \mid m \geq k\}. \tag{3.6}$$

Ще докажем, че

$$\mathcal{L}_G^{\ell+1}(S) \subseteq \{a^n b^m c^k \mid n + m \geq k\}$$
$$\mathcal{L}_G^{\ell+1}(B) \subseteq \{b^m c^k \mid m \geq k\}.$$

За първото включване, да разгледаме произволна дума $\alpha \in \mathcal{L}_G^{\ell+1}(S)$. Имаме три случая:

- Ако $\alpha \in \mathcal{L}_G^\ell(B)$, то от **(И.П.)** имаме, че

$$\alpha \in \{b^m c^k \mid m \geq k\} \subseteq \{a^n b^m c^k \mid n + m \geq k\}.$$

- Ако $\alpha \in \{a\} \cdot \mathcal{L}_G^\ell(S)$, то от **(И.П.)** имаме, че

$$\alpha \in \{a^{n+1}b^m c^k \mid n+m \geq k\} \subseteq \{a^n b^m c^k \mid n+m \geq k\}.$$

- Ако $\alpha \in \{a\} \cdot \mathcal{L}_G^\ell(S) \cdot \{c\}$, то от **(И.П.)** имаме, че

$$\alpha \in \{a^{n+1}b^m c^{k+1} \mid n+m \geq k\} \subseteq \{a^n b^m c^k \mid n+m \geq k\}.$$

За второто включване, нека $\alpha \in \mathcal{L}_G^{\ell+1}(B)$. Имаме три случая за думата α.

- Нека $\alpha \in \{b\} \cdot \mathcal{L}_G^\ell(B) \cdot \{c\}$. Тогава от **(И.П.)** имаме, че:

$$\alpha \in \{b^{m+1}c^{k+1} \mid m \geq k\} \subseteq \{b^m c^k \mid m \geq k\}.$$

- Нека $\alpha \in \{b\} \cdot \mathcal{L}_G^\ell(B)$. Тогава от **(И.П.)** имаме, че:

$$\alpha \in \{b^{m+1}c^k \mid m \geq k\} \subseteq \{b^m c^k \mid m \geq k\}.$$

- Нека $\alpha \in \{\varepsilon\}$. Тогава е ясно, че имаме $\alpha \in \{b^m c^k \mid m \geq k\}$.

Заключаваме, че

Така доказахме *коректност* на граматиката.

$$\mathcal{L}_G(S) = \bigcup_\ell \mathcal{L}_G^\ell(S) \subseteq \{a^n b^m c^k \mid n+m \geq k\}$$
$$\mathcal{L}_G(B) = \bigcup_\ell \mathcal{L}_G^\ell(B) \subseteq \{a^n b^m c^k \mid n+m \geq k\}.$$

Сега трябва да докажем обратните включвания, а именно:

Сега ще докажем *пълнота* на граматиката. Тук ще използваме представянията на $\mathcal{L}_G(S)$ и $\mathcal{L}_G(B)$ според *Следствие 3.1*.

$$\{a^n b^m c^k \mid n+m \geq k\} \subseteq \mathcal{L}_G(S) \tag{3.7}$$
$$\{b^m c^k \mid m \geq k\} \subseteq \mathcal{L}_G(B). \tag{3.8}$$

Трябва да започнем първо със *Свойство (3.8)*. Да разгледаме произволна дума $\alpha = b^m c^k$. Трябва да докажем, че $\alpha \in \mathcal{L}_G(B)$. Ще направим това с индукция по m.

- Нека $m = 0$. Това означава, че $\alpha = \varepsilon$. Ясно е, че $\varepsilon \in \mathcal{L}_G(B)$.
- Нека $m > 0$. Тук имаме два подслучая.
  - Нека $m = k$. Тогава $\alpha = b\gamma c$ и имаме, че $\gamma = b^{m-1}c^{k-1}$. Можем да приложим **(И.П.)** за γ и следователно $\gamma \in \mathcal{L}_G(B)$. Получаваме, че $\alpha \in \{b\} \cdot \mathcal{L}_G(B) \cdot \{c\} \subseteq \mathcal{L}_G(B)$.
  - Нека $m > k$. Тогава $\alpha = b\gamma$ и имаме, че $\gamma = b^{m-1}c^k$. Можем да приложим **(И.П.)** за γ и следователно $\gamma \in \mathcal{L}_G(B)$. Получаваме, че $\alpha \in \{b\} \cdot \mathcal{L}_G(B) \subseteq \mathcal{L}_G(B)$.

Сега преминаваме към *Свойство (3.7)*. Да разгледаме произволна дума $\alpha = a^n b^m c^k$. Трябва да докажем, че $\alpha \in \mathcal{L}_G(S)$. Ще направим това с индукция по n.

- Нека $n = 0$. Тогава $\alpha = b^m c^k$ и $m \geq k$. От *Свойство (3.8)* следва, че $\alpha \in \mathcal{L}_G(B) \subseteq \mathcal{L}_G(S)$.
- Нека $n > 0$. Имаме два подслучая.
  - Нека $n + m = k$. Тогава $\alpha = a\gamma c$ и $\gamma = a^{n-1}b^m c^{k-1}$. Можем да приложим **(И.П.)** за γ и следователно $\gamma \in \mathcal{L}_G(S)$. Получаваме, че $\alpha \in \{a\} \cdot \mathcal{L}_G(S) \cdot \{c\} \subseteq \mathcal{L}_G(S)$.
  - Нека $n+m > k$. Тогава $\alpha = a\gamma$ и $\gamma = a^{n-1}b^m c^k$. Можем да приложим **(И.П.)** за γ и следователно $\gamma \in \mathcal{L}_G(S)$. Получаваме, че $\alpha \in \{a\} \cdot \mathcal{L}_G(S) \subseteq \mathcal{L}_G(S)$.

Задача 3.3. Докажете, че езикът $L = \{a^n b^m c^k d^\ell \mid n + k = m + \ell\}$ е безконтекстен.

Упътване. Да разгледаме произволна дума от вида $\omega = a^n b^m c^k d^\ell$. Имаме два случая.

- Ако $n > \ell$, тогава имаме еквивалентността: $\omega \in L \Leftrightarrow (n-\ell)+k = m$.
- Ако $n \leq \ell$, тогава имаме еквивалентността: $\omega \in L \Leftrightarrow k = m+(\ell-n)$.

Това наблюдение ни подсказва, че трябва да разгледаме следните езици:

$$L_1 = \{a^n b^m c^k \mid m = n+k\},$$
$$L_2 = \{b^m c^k d^\ell \mid k = m+\ell\}.$$

Така получаваме, че

$$L = \{a^n \cdot \omega \cdot d^n \mid n \in \mathbb{N} \,\&\, \omega \in L_1 \cup L_2\}.$$

L_1 е безконтекстен език, защото може да се опише с безконтекстната граматика G_1 със следните правила:

$$S_1 \to AC, \quad A \to aAb \mid \varepsilon, \quad C \to bCc \mid \varepsilon.$$

L_1 също е безконтекстен език, защото може да се опише с безконтекстната граматика G_2 със следните правила:

$$S_2 \to BD, \quad B \to bBc \mid \varepsilon, \quad D \to cCd \mid \varepsilon.$$

Тогава безконтекстната граматика G за L съдържа правилата на граматиките G_1 и G_2, а също и правилата

$$S \to aSd \mid S_1 \mid S_2.$$

□

Ние вече знаем, че този език не е регулярен

Задача 3.4. Докажете, че езикът $L = \{\alpha\beta \in \{a,b\}^\star \mid \ |\alpha| = |\beta| \,\&\, \alpha \neq \beta\}$ е безконтекстен.

Упътване. Да разгледаме една произволна дума ω, където $\omega = \alpha\beta$, $|\alpha| = |\beta|$ и $\alpha \neq \beta$. Знаем, че съществува индекс $i < |\alpha|$, такъв че думата ω може да се представи така:

$$\omega = \alpha[:i] \cdot \alpha[i] \cdot \alpha[i+1:] \cdot \beta[:i] \cdot \beta[i] \cdot \beta[i+1:],$$

където $\alpha[i] \neq \beta[i]$.

Нека $n = |\alpha| = |\beta|$ и да представим n като $n = i+1+k$. Имаме два случая.

- Ако $k \geq i$, то можем да преставим ω по следния начин:

$$\omega = \underbrace{\alpha[:i]}_{\text{дълж. } i} \cdot \alpha[i] \cdot \underbrace{\alpha[i+1:2i+1]}_{\text{дълж. } i} \cdot \underbrace{\alpha[2i+1:] \cdot \beta[:i]}_{\text{дълж. } k} \cdot \beta[i] \cdot \underbrace{\beta[i+1:]}_{\text{дълж. } k}.$$

- Нека $k < i$, то можем да преставим ω по следния начин:

$$\omega = \underbrace{\alpha[:i]}_{\text{дълж. } i} \cdot \alpha[i] \cdot \underbrace{\alpha[i+1:] \cdot \beta[:i-k]}_{\text{дълж. } i} \cdot \underbrace{\beta[i-k:i]}_{\text{дълж. } k} \cdot \beta[i] \cdot \underbrace{\beta[i+1:]}_{\text{дълж. } k}.$$

От тези представяния на ω е ясно, че можем да изразим езика L по следния начин:

$$L = L_a \cdot L_b \cup L_b \cdot L_a,$$

където:

$$L_a = \{\alpha a \beta \mid \alpha, \beta \in \{a,b\}^\star \,\&\, |\alpha| = |\beta|\}$$
$$L_b = \{\alpha b \beta \mid \alpha, \beta \in \{a,b\}^\star \,\&\, |\alpha| = |\beta|\}.$$

Сега разгледайте безконтекстната граматика G със следните правила:

$$S \to AB \mid BA$$
$$A \to XAX \mid a$$
$$B \to XBX \mid b$$
$$X \to a \mid b.$$

Лесно се съобразява, че $L_a = \mathcal{L}_G(A)$ и $L_b = \mathcal{L}_G(B)$ и накрая $L = \mathcal{L}_G(S)$. □

Задача 3.5. Докажете, че езикът $L = \{\alpha\sharp\beta \mid \alpha, \beta \in \{a,b\}^\star \,\&\, \alpha \neq \beta\}$ е безконтекстен.

Упътване. Разгледайте граматиката:

$$\begin{aligned}
&S \to AaR \mid BbR \mid E\\
&A \to XAX \mid bR\sharp\\
&B \to XBX \mid aR\sharp\\
&E \to XEX \mid XR\sharp \mid \sharp XR\\
&R \to XR \mid \varepsilon\\
&X \to a \mid b.
\end{aligned}$$

Имаме, че за произволни думи $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \{a,b\}^\star$,

$$\begin{aligned}
&S \stackrel{\star}{\Rightarrow} \alpha b\gamma\sharp\beta a\delta \,\&\, |\alpha| = |\beta|,\\
&S \stackrel{\star}{\Rightarrow} \alpha a\gamma\sharp\beta b\delta \,\&\, |\alpha| = |\beta|, \text{ или}\\
&S \stackrel{\star}{\Rightarrow} \alpha\sharp\beta \,\&\, |\alpha| \neq |\beta|.
\end{aligned}$$

□

Задача 3.6. Докажете, че езикът $L = \{a^n b^m c^k d^\ell \mid n + k \geq m + \ell\}$ е безконтекстен.

Задача 3.7. Докажете, че езикът $L = \{a^m b^n c^k \mid m + n \geq k + 1\}$ е безконтекстен.

$S \to aS \mid aSc \mid aB \mid bB$
$B \to bB \mid bBc \mid \varepsilon$

Задача 3.8. Докажете, че езикът $L = \{\alpha\sharp\beta \mid \alpha, \beta \in \{a,b\}^\star \,\&\, |\alpha| \neq |\beta|\}$ е безконтекстен.

Задача 3.9. Да разгледаме граматиката G с правила

$$S \to AA \mid B,\ A \to B \mid bb,\ B \to aa \mid aB.$$

Да се намери езика на тази граматика и да се докаже, че граматиката разпознава точно този език.

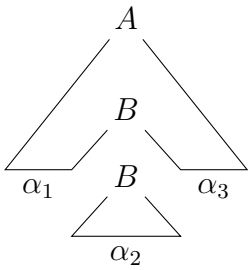
3.7 Лема за покачването

В този раздел ще разгледаме едно твърдение, което ще ни даде критерий за проверка кога един език не е безконтекстен. Ще започнем с няколко помощни твърдения.

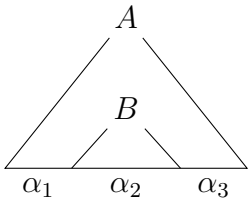
Твърдение 3.11. За произволни променливи A, B и думи $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ е изпълнено:

$$\frac{A \overset{\ell_1}{\lhd} \alpha_1 B \alpha_3 \qquad B \overset{\ell_2}{\lhd} \alpha_2}{A \overset{\leq \ell_1+\ell_2}{\lhd} \alpha_1\alpha_2\alpha_3}$$

Упътване. Формално доказателството протича с индукция по ℓ_1.



(а) Синтактични дървета за изводите $A \overset{\ell_1}{\lhd} \alpha_1 B \alpha_3$ и $B \overset{\ell_2}{\lhd} \alpha_2$



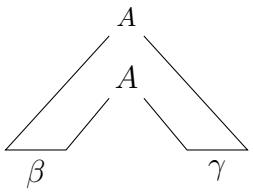
(б) Съединяваме двете дървета

□

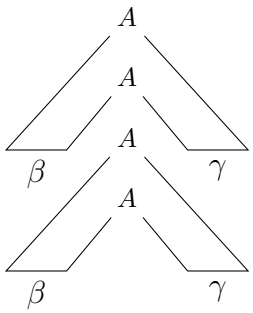
Твърдение 3.12. За произволна променлива A и произволни думи β и γ е изпълнено:

$$\frac{A \overset{\ell}{\lhd} \beta A \gamma \qquad i \in \mathbb{N}}{A \overset{\leq i \cdot \ell}{\lhd} \beta^i A \gamma^i}$$

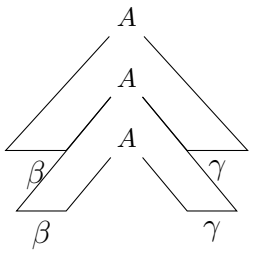
Упътване. Формално доказателството трябва да следва индукция по i. Понеже това доказателство не крие изненади, ще се задоволим с един пример. Нека P да бъде синтактично дърво съответстващо на извода $A \overset{\ell}{\lhd} \beta A \gamma$. Тогава можем да получим синтактично дърво $P^{(2)}$ съответстващо на $A \overset{\leq 2\ell}{\lhd} \beta^2 A \gamma^2$ по следния начин.



(а) Синтактично дърво P за извода $A \overset{\ell}{\lhd} \beta A \gamma$



(б) Съединяваме две копия на P



(в) Получаваме синтактично дърво $P^{(2)}$ за извода $A \overset{\leq 2\ell}{\lhd} \beta^2 A \gamma^2$

□

Твърдение 3.13. Нека G е безконтекстна граматика и

$$b \stackrel{\text{деф}}{=} \max\{\, |\gamma| \mid A \to \gamma \text{ е правило в } G \,\}.$$

Тогава:

- Ако $A \overset{\leq \ell}{\lhd} \alpha$, то $|\alpha| \leq b^\ell$.
- Ако $\alpha \in \mathcal{L}(G)$ и $|\alpha| > b^\ell$, то $S \overset{\geq \ell+1}{\lhd} \alpha$.

Доказателство.

Това твърдение е на практика следствие от *Задача 1.13* в комбинация с *Твърдение 3.9*.

- Да разгледаме синтактично дърво $P = (T, \lambda)$ за извода $A \overset{\leq \ell}{\lhd} \alpha$. Според *Задача 1.13* имаме, че $|\alpha| = |\texttt{leaves}(T)| \leq b^{\texttt{height}(T)} = b^\ell$.
- Нека $\alpha \in \mathcal{L}(G)$. Това означава, че $S \overset{\star}{\lhd} \alpha$. Ако допуснем, че $S \overset{\leq \ell}{\lhd} \alpha$, то бихме имали, че $|\alpha| \leq b^\ell$, което е противоречие. Заключаваме, че $S \overset{\geq \ell+1}{\lhd} \alpha$.

□

Лема 3.5 (за покачването (безконтекстни езици))**.** За всеки безконтекстен език L съществува $p > 0$, такова че ако $\alpha \in L$, за която $|\alpha| \geq p$, то съществува разбиване на думата на пет части, $\alpha = xyuvw$, за което е изпълнено:

1) $|yv| \geq 1$,
2) $|yuv| \leq p$, и
3) $(\forall i \in \mathbb{N})[xy^iuv^iw \in L]$.

[Sip12, стр. 125], [HU79, стр. 125], [Koz97, стр. 148]

Ще казваме, че p е константа на покачването. Тук отново да напомним, че $0 \in \mathbb{N}$ и $xy^0uv^0w = xuw$.

Доказателство. Нека G е безконтекстна граматика за езика L. Да положим

$$p \stackrel{\text{деф}}{=} b^{|V|+1}, \text{ където } b \stackrel{\text{деф}}{=} \max\{\, |\gamma| \mid A \to \gamma \text{ е правило в } G \,\}.$$

Числото b е максималната разклоненост на всяко дърво на извод за дума изводима от граматиката G.

Ще покажем, че този избор на p е удачен за удовлетворяването на условията на лемата. Ще наричаме p константа на покачването за граматиката G.

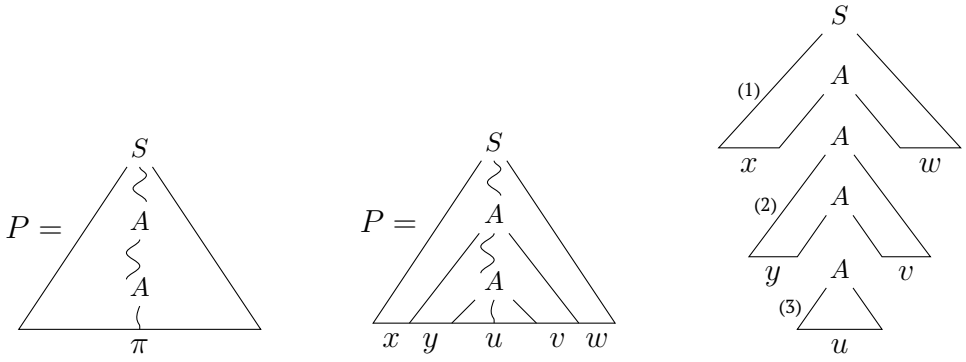
Да разгледаме произволна дума $\alpha \in \mathcal{L}(G)$, за която $|\alpha| \geq p$. Понеже $\mathcal{L}(G)$ е безкраен език, то със сигурност можем да намерим такава дума. Според *Твърдение 3.13*, имаме $S \overset{\ell}{\lhd} \alpha$, където $\ell \geq |V| + 1$. Нека измежду всички синтактични дървета

$P = (T, \lambda)$ за извода $S \overset{\star}{\lhd} \alpha$ сме избрали такова с *минимален* брой върхове в дървото T. Да фиксираме *максимален* път π в T, т.е. дума $\pi \in T$ и $|\pi| = \ell$. Щом $\ell \geq |V| + 1$, то това означава, че по този път π се срещат поне $|V| + 1$ на брои променливи. От принципа на Дирихле следва, че трябва да има повторения на променливи по този път. В P можем да изберем това срещане на двойка повтарящи се променливи по пътя π, както на *Фигура 3.8а*, което е възможно най-близо до края на пътя. Това означава, че можем да разбием извода $S \overset{\star}{\lhd} \alpha$ като $S \overset{\star}{\lhd} xAw$ и $A \overset{\leq |V|+1}{\lhd} \gamma$, където $\alpha = x\gamma w$. Сега според нашия избор, изводът $A \overset{\leq |V|+1}{\lhd} \gamma$ може да се разбие като $A \overset{\leq |V|+1}{\lhd} yAv$ и $A \overset{\leq |V|}{\lhd} u$, където $\gamma = yuv$. Да обобщим. Можем да разбием думата α на пет части като $\alpha = xyuvw$ с изводите:

(1) $S \overset{\star}{\lhd} xAw$,

(2) $A \overset{\leq |V|+1}{\lhd} yAv$, защото в P можем да изберем това срещане на повтаряща се променлива по пътя π, което е възможно най-близо до листото.

(3) $A \overset{\leq |V|}{\lhd} u$, като тук вече няма повтарящи се променливи по останалата част от пътя π.



(а) Най-долните две повторения на променлива по пътя π.

(б) Разбиваме дървото на три части.

(в) Получаваме три отделни синтактични дървета.

Сега остава да проверим условието на лемата:

- Да допуснем, че $|yv| = 0$. Това означава, че $\alpha = xuw$ и имаме извода:

$$\frac{S \overset{\star}{\lhd} xAu \qquad A \overset{\star}{\lhd} u}{S \overset{\star}{\lhd} \underbrace{xuv}_{\alpha},} \text{ (Твърдение 3.11)}$$

за който съществува дърво на извод с по-малко на брой възли отколкото P, защото махаме средната част, която съдържа поне един възел. Това е противоречие с избора на P като синтактично дърво за $S \overset{\star}{\lhd} \alpha$ с минимален брой възли. Заключаваме, че $|yv| \geq 1$.

- Понеже имаме извода $A \overset{\leq |V|+1}{\lhd} yuv$, то от *Твърдение 3.13* следва, че $|yuv| \leq b^{|V|+1} = p$.
- За произволно $i \in \mathbb{N}$ имаме извода:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \overset{\star}{\lhd} yAv}{A \overset{\star}{\lhd} y^iAv^i} \quad A \overset{\star}{\lhd} u}{A \overset{\star}{\lhd} y^iuv^i} \quad S \overset{\star}{\lhd} xAw}{S \overset{\star}{\lhd} xy^iuv^iw}$$

(*Твърдение 3.12*) (*Твърдение 3.11*) (*Твърдение 3.11*)

Оттук заключаваме, че $(\forall i \in \mathbb{N})[xy^iuv^iw \in \mathcal{L}(G)]$.

□

Както и при *Лема 2.5*, ние ще използваме *контрапозицията* на условието на *Лема 3.5* при проверка, че даден език не е безконтекстен.

Следствие 3.2. Нека L е произволен **безкраен** език. Нека също така е изпълнено, че:

Ако L е краен език, то е ясно, че L е безконтекстен.

(∀) за *всяко* естествено число $p \geq 1$,

(∃) можем да намерим дума $\alpha \in L$, $|\alpha| \geq p$, такава че

(∀) за *всяко* разбиване на думата на пет части, $\alpha = xyuvw$, със свойствата $|yv| \geq 1$ и $|yuv| \leq p$,

(∃) можем да намерим $i \in \mathbb{N}$, за което е изпълнено, че $xy^iuv^iw \notin L$.

Тогава L **не** е безконтекстен език.

✍ Докажете! Аналогично е на *Следствие 2.1*

Следствие 3.3. Нека G е безконтекстна граматика и p е константата на покачването за G. Тогава $|\mathcal{L}(G)| = \infty$ точно тогава, когато съществува $\alpha \in \mathcal{L}(G)$, за която $p \leq |\alpha| < 2p$.

✍ Докажете!

Забележка. Алгоритъм за проверка дали един безконтекстен език е безкраен следвайки горния критерий би имал експоненциална сложност относно $|G|$.

Пример 3.8. Да видим защо езикът $L = \{a^nb^nc^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ не е безконтекстен.

(∀) Разглеждаме произволна константа $p \geq 1$.

(∃) Избираме дума $\alpha \in L$, $|\alpha| \geq p$. В случая, нека $\alpha = a^pb^pc^p$.

(∀) Разглеждаме произволно разбиване $xyuvw = \alpha$, за което $|yuv| \leq p$ и $1 \leq |yv|$.

(∃) Ще изберем i, за което $xy^iuv^iw \notin L$. Знаем, че поне едно от y и v не е празната дума. Имаме няколко случая за y и v.

- y и v са думи съставени от една буква. В този случай получаваме, че xy^2uv^2w има различен брой букви a, b и c.
- y или v е съставена от две букви. Тогава е възможно да се окаже, че xy^2uv^2w да има равен брой a, b и c, но тогава редът на буквите е нарушен.
- понеже $|yuv| \leq p$, то не е възможно в y или v да се срещат и трите букви.

Оказа се, че във всички възможни случаи за y и v, $xy^2uv^2w \notin L$.

Така от *Следствие 3.2* следва, че езикът L не е безконтекстен.

Твърдение 3.14. Безконтекстните езици **не** са затворени относно сечение и допълнение.

Упътване. Да разгледаме езика $L_0 = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, за който вече знаем от *Пример 3.8*, че не е безконтекстен. Да вземем също така и безконтекстните езици

✍ Защо L_1 и L_2 са безконтекстни?

$$L_1 = \{a^n b^n c^m \mid n, m \in \mathbb{N}\},\ L_2 = \{a^m b^n c^n \mid n, m \in \mathbb{N}\},$$

Озн. $\overline{L} \stackrel{\text{деф}}{=} \Sigma^\star \setminus L$

- Понеже $L_0 = L_1 \cap L_2$, то заключаваме, че безконтекстните езици не са затворени относно операцията сечение.
- Да допуснем, че безконтекстните езици са затворени относно операцията допълнение. Тогава $\overline{L_1}$ и $\overline{L_2}$ са безконтекстни. Знаем, че безконтекстните езици са затворени относно обединение. Следователно, езикът $L_3 = \overline{L_1} \cup \overline{L_2}$ също е безконтекстен. Понеже допуснахме, че безконтекстните са затворени относно допълнение, то $\overline{L_3}$ също е безконтекстен. Но тогава получаваме, че езикът

Друг пример, с който може да се види, че безконтекстните езици не са затворени относно допълнение е като се докаже, че езикът

$\{a, b\}^\star \setminus \{\alpha\alpha \mid \alpha \in \{a, b\}^\star\}$

е безконтекстен. Това следва лесно като се използва *Задача 3.4*.

$$L_0 = L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}} = \overline{L_3}$$

е безконтекстен, което е противоречие.

□

3.7.1 Примерни задачи

Задача 3.10. Докажете, че езикът $L = \{a^i b^j c^k \mid 0 \leq i \leq j \leq k\}$ не е безконтекстен.

Доказателство. Прилагаме *Следствие 3.2*.

(∀) Разглеждаме произволна константа $p \geq 1$.

(∃) Избираме дума $\alpha \in L$, $|\alpha| \geq p$. В случая, нека $\alpha = a^p b^p c^p$.

(∀) Разглеждаме произволно разбиване $xyuvw = \alpha$, за което $|yuv| \leq p$ и $1 \leq |yv|$. Знаем, че поне една от y и v не е празната дума.

(∃) Ще намерим $i \in \mathbb{N}$, за което $xy^i uv^i w \notin L$.

- y и v са съставени от една буква. Имаме три случая.
  - i) a не се среща в y и v. Тогава xy^0vu^0w съдържа повече a от b или c.
  - ii) b не се среща в y и v.
    - Ако a се среща в y или v, тогава xy^2uv^2w съдържа повече a от b.
    - Ако c се среща в y или v, тогава xy^0uv^0w съдържа по-малко c от b.
  - iii) c не се среща в y и v. Тогава xy^2uv^2w съдържа повече a или b от c.
- y или v е съставена от две букви. Тук разглеждаме xy^2uv^2w и съобразяваме, че редът на буквите е нарушен.

□

Задача 3.11. Докажете, че езикът $L = \{\, \alpha\alpha \mid \alpha \in \{a,b\}^\star \,\}$ не е безконтекстен.

Упътване.

- Защо $\omega = a^p b a^p b$ не става ?
- Защо $\omega = a^p b^{2p} a^p$ не става ?
- Разгледайте $\omega = a^p b^p a^p b^p$.

□

Задача 3.12. Докажете, че езикът $L = \{\alpha\beta\alpha^{\mathtt{rev}} \mid \alpha, \beta \in \{a,b\}^\star \;\&\; |\alpha| = |\beta|\}$ не е безконтекстен.

Упътване.

- Защо не става ако разгледаме думата $\alpha = a^p b^p a^p$?
- Защо не става ако разгледаме думата $\alpha = a^p b^p a^{2p} b^p a^p$?
- Разгледайте $\alpha = a^p b^p a^p b^p b^p a^p$. Покачване с повече от p би трябвало да свърши работа.

□

Задача 3.13. Докажете, че езикът $L = \{\alpha\beta\alpha \mid \alpha, \beta \in \{a,b\}^\star\}$ не е безконтекстен.

Упътване.

- Защо не става с $\omega = a^p b a^p b$?
- Защо не става с $\omega = a b^p a b^p$?
- Пробвайте с $\omega = a^p b^p a^p b^p$.

□

Задача 3.14. Докажете, че езикът $L = \{\alpha\sharp\beta \mid \alpha \text{ е подниз на } \beta\}$ не е безконтекстен.

Упътване.

- Защо не става ако вземем $\omega = a^p\sharp a^p$?
- Защо не става ако вземем $\omega = a^pb\sharp a^pb$?
- Разгледайте $\omega = a^pb^p\sharp a^pb^p$.

□

Задача 3.15. Вярно ли е, че следните езици са безконтекстни:

а) $L = \{\alpha\sharp\beta \mid \alpha, \beta \in \{0,1\}^\star \,\&\, \overline{\alpha}_{(2)} + 1 = \overline{\beta}_{(2)}\}$;

б) $L = \{\alpha\sharp\beta^{\mathtt{rev}} \mid \alpha, \beta \in \{0,1\}^\star \,\&\, \overline{\alpha}_{(2)} + 1 = \overline{\beta}_{(2)}\}$?

3.8 Алгоритми

Тук ще докажем, че съществуват *полиномиални* алгоритми, които за дадена безконтекстна граматика G проверяват:

- дали $\mathcal{L}(G) = \emptyset$;
- дали $|\mathcal{L}(G)| = \infty$;
- дали $|\mathcal{L}(G)| < \infty$;
- по дадена дума α дали $\alpha \in \mathcal{L}(G)$.

Нека приемем, че дължината на граматика G е

$$|G| \stackrel{\text{деф}}{=} |V| + |\Sigma| + \sum_{(A,\alpha)\in R} |A\alpha|.$$

3.8.1 Опростяване на безконтекстни граматики

Премахване на безполезните променливи

Нека е дадена безконтекстната граматика $G = \langle V, \Sigma, R, S\rangle$. Една променлива A се нарича **полезна**, ако съществува извод от следния вид: [HU79, стр. 88]

$$S \stackrel{\star}{\Rightarrow}_G \alpha A \beta \stackrel{\star}{\Rightarrow}_G \gamma,$$

където $\gamma \in \Sigma^\star$, а $\alpha, \beta \in (V \cup \Sigma)^\star$. Това означава, че една променлива е полезна, ако участва в извода на някоя дума в езика на граматиката. Една променлива се нарича **безполезна**, ако не е полезна. Целта ни е да получим еквивалентна граматика G' без безполезни променливи. Ще решим задачата като разгледаме две леми.

Лема 3.6. Нека е дадена безконтекстната граматика G и $\mathcal{L}(G) \neq \emptyset$. Съществува алгоритъм, който намира граматика G', за която $\mathcal{L}(G) = \mathcal{L}(G')$ и със свойството, че за всяка променлива $A' \in V'$, съществува дума $\alpha \in \Sigma^\star$, за която $A' \stackrel{\star}{\Rightarrow}_{G'} \alpha$.

Упътване. Целта ни е да намерим множеството `Gen` от променливи, които генерират думи, т.е. търсим множеството

$$\texttt{Gen} \stackrel{\text{деф}}{=} \{A \in V \mid A \stackrel{\star}{\lhd} \alpha \,\&\, \alpha \in \Sigma^\star\}.$$

За целта ще построим редица от множества `Gen[n]` по следния начин:

Всяка итерация на алгоритъма отнема $\mathcal{O}(|G|)$ време. Следователно, изпълнението на целия алгоритъм отнема $\mathcal{O}(|G|^2)$ време.

- `Gen[0]` $\stackrel{\text{деф}}{=} \emptyset$;
- `Gen[n+1]` $\stackrel{\text{деф}}{=} \{A \in V \mid A \to_G \alpha \,\&\, \alpha \in (\Sigma \cup$ `Gen[n]` $)^\star\}$.
- Спираме, когато стигнем до такова n, за което `Gen[n]` $=$ `Gen[n+1]`. Лесно се съобразява, че $(\forall k \geq n)[$`Gen[n]` $=$ `Gen[k]`$]$.

✍ Докажете сами!

Трябва да докажем, че $\texttt{Gen} = \texttt{Gen[n]}$. Това ще направим като докажем, че

$$A \in \texttt{Gen[n]} \Leftrightarrow (\exists \alpha \in \Sigma^\star)[A \overset{\leq n}{\lhd} \alpha]$$

Дефинираме G' като $V' = \texttt{Gen[n]}$ и правилата на G' са само тези правила на G, в които участват променливи от V' и букви от Σ. □

Пример 3.9. Да разгледаме следната граматика G:

$$S \to AB \mid aA$$
$$A \to a \mid aAa$$
$$B \to SB \mid BC$$
$$C \to \varepsilon \mid cC.$$

Първо да намерим променливите, от които се извеждат думи.

- $\texttt{Gen[0]} = \emptyset$
- $\texttt{Gen[1]} = \{A, C\}$, защото $A \to a$ и $C \to \varepsilon$;
- $\texttt{Gen[2]} = \{A, C, S\}$, защото $S \to aA$;
- не можем да добавим B към $\texttt{Gen[3]}$, следователно $\texttt{Gen[3]} = \texttt{Gen[2]}$.

Получаваме граматиката G':

$$S \to aA$$
$$A \to a \mid aAa$$
$$C \to \varepsilon \mid cC.$$

Сега премахваме променливите и буквите, които не са достижими от началната промелива S. Така получаваме граматиката G'':

$$S \to aA$$
$$A \to a \mid aAa.$$

Следствие 3.4. Съществува *полиномиален* алгоритъм, който определя за всяка безконтекстна граматика G дали $\mathcal{L}(G) = \emptyset$.

Доказателство. Прилагаме алгоритъма от *Лема 3.6* и намераме множеството от променливи V'. Тогава $\mathcal{L}(G) = \emptyset$ точно тогава, когато $S \notin V'$. □

Лема 3.7. Съществува алгоритъм, който по дадена безконтекстна граматика $G = \langle V, \Sigma, R, S\rangle$, намира $G' = \langle V', \Sigma, S, R'\rangle$, $\mathcal{L}(G') = \mathcal{L}(G)$, със свойството, че за всяко $X \in V'$ съществуват $\alpha, \beta \in (V' \cup \Sigma)^\star$, за които $S \overset{\star}{\Rightarrow} \alpha X \beta$, т.е. всяка променлива в G' е достижима от началната променлива S.

Упътване. Нашата цел е да намерим множеството

$$\texttt{Reach} \overset{\text{деф}}{=} \{B \in V \mid S \overset{\star}{\lhd} \alpha B \beta, \text{ за някои } \alpha, \beta \in (\Sigma \cup V)^\star\}.$$

Новата граматика G' ще има променливи $V' \overset{\text{деф}}{=} \texttt{Reach}$, като правилата на граматика G' са същите като тези на G, но ограничени до V'. Лесно се доказава, че $\mathcal{L}(G) = \mathcal{L}(G')$. Остава да намерим множеството Reach. За да постигнем тази цел, ще започнем да строим мномножествата $\texttt{Reach[i]} \subseteq V$ по следния начин:

$$\texttt{Reach[0]} \overset{\text{деф}}{=} \{S\}$$
$$\texttt{Reach[i+1]} \overset{\text{деф}}{=} \{B \in V \mid (\exists A \in \texttt{Reach[i]})[A \to_G \alpha B \beta, \text{ за някои } \alpha, \beta \in (V \cup \Sigma)^\star]\} \cup \texttt{Reach[i]}$$

Докажете, че за всяко i,

$$\texttt{Reach[i]} = \{B \in V \mid S \overset{\leq i}{\lhd} \alpha B \beta, \text{ за някои } \alpha, \beta \in (\Sigma \cup V)^\star\}.$$

Спираме да строим тези множества, когато достигнем до стъпка n, за която $\texttt{Reach[n]} = \texttt{Reach[n+1]}$. Съобразете, че за това n е изпълнено, че

Защо сме сигурни, че ще достигнем такава стъпка?

$$\texttt{Reach[n]} = \{B \in V \mid S \overset{\star}{\lhd} \alpha B \beta, \text{ за някои } \alpha, \beta \in (\Sigma \cup V)^\star\}.$$

□

Теорема 3.3. За всяка безконтекстна граматика G, за която $\mathcal{L}(G) \neq \emptyset$, съществува еквивалетнтна на нея безконтекстна граматика G' без безполезни правила. Освен това, граматиката G' може да се намери за полиномиално време.

Упътване. Прилагаме върху G първо процедурата от *Лема 3.6* и след това върху резултата прилагаме процедурата от *Лема 3.7*. □

✍ Защо е важна последователността на прилагане? Например, да разгледаме граматиката

$$S \to AB \mid ab$$
$$A \to aA \mid \varepsilon$$
$$B \to bB.$$

Ако първо приложим процедурата от *Лема 3.7*, то нищо няма да премахнем, защото A и B са достижими от S. След това, ако приложим процедурата от *Лема 3.6*, то ще премахнем всички правила, в които участва B. Така A става недостижима от S и трябва пак да приложим процедурата от *Лема 3.7*. Алгоритъмът описан тук е квадратичен. Има и линеен такъв. Вижте [HMU01, стр. 296]

Задача 3.16. Проверете дали $\mathcal{L}(G) = \emptyset$, където правилата на G са:

$$S \to AS \mid BC$$
$$A \to 0 \mid BA \mid SB$$
$$B \to 1 \mid BC \mid AB$$
$$C \to CB \mid SC \mid AS.$$

Премахване на ε-правила

Лема 3.8. Съществува *експоненциален* алгоритъм, такъв че превръща всяка безконтекстна граматика G в безконтекстна граматика G' без правила от вида $A \to \varepsilon$, и $\mathcal{L}(G') = \mathcal{L}(G) \setminus \{\varepsilon\}$.

Упътване. За да премахнем правилата от вида $A \to \varepsilon$ от граматиката, следваме процедурата:

1) Първо строим множествата `E[n]` по следния начин:

На всяка стъпка трябва да обходим цялата граматика, следователно всяка итерация отнема $\mathcal{O}(|G|)$ време.

- $\texttt{E[0]} \overset{\text{деф}}{=} \emptyset$;
- $\texttt{E[n+1]} \overset{\text{деф}}{=} \{B \in V \mid (\exists \alpha \in \texttt{E[n]}^\star)[B \to_G \alpha]\}$.

Обърнете внимание, че имаме $\texttt{E[n]}^\star$, а не просто `E[n]`. Също така да напомним, че $\emptyset^\star = \{\varepsilon\}$.

- Докажете, че за всяко n е изпълнено, че

$$\texttt{E[n]} = \{A \in V \mid A \overset{\leq n}{\lhd} \varepsilon\}.$$

- Спираме на първото n, за което $\texttt{E[n]} = \texttt{E[n+1]}$. Лесно се съобразява, че за това n е изпълнено, че

Намираме E за време $\mathcal{O}(|G|^2)$.

$$\texttt{E[n]} = \{A \in V \mid A \overset{\star}{\lhd} \varepsilon\}.$$

2) Строим множеството от правила R', в което няма ε-правила по следния начин. За всяко правило $A \to_G X_1 \cdots X_k$, добавяме към R' всички правила от вида $A \to_G Y_1 \cdots Y_k$, където:

Броят на правилата може да се увеличи експоненциално, защото в най-лошия случай извеждаме всички подмножества на дадено множество от променливи

- ако $X_i \notin \mathtt{E}$, то $Y_i = X_i$;
- ако $X_i \in \mathtt{E}$, то $Y_i = X_i$ или $Y_i = \varepsilon$;
- не всички Y_i са ε.

✍ Докажете сами!

Лесно се съобразява, че $\mathcal{L}(G') = \mathcal{L}(G) \setminus \{\varepsilon\}$.

□

Пример 3.10. Нека е дадена граматиката G с правила

$$\begin{aligned} &S \to D \\ &D \to AD \mid b \\ &A \to AB \mid BC \mid a \\ &B \to AA \mid UC \\ &C \to \varepsilon \mid CA \mid a \\ &U \to \varepsilon \mid aUb. \end{aligned}$$

Тогава

- $\mathtt{E[0]} = \emptyset$;
- $\mathtt{E[1]} = \{C, U\}$;
- $\mathtt{E[2]} = \{C, U, B\}$;
- $\mathtt{E[3]} = \{C, U, B, A\}$;
- $\mathtt{E[4]} = \mathtt{E[3]}$. Следователно,

$$\mathtt{E} = \{X \in V \mid X \overset{*}{\Rightarrow} \varepsilon\} = \{C, U, B, A\}.$$

Това означава, че $\varepsilon \notin \mathcal{L}(G)$. Граматиката G' без ε-правила, за която $\mathcal{L}(G') = \mathcal{L}(G)$ има следните правила

$$\begin{aligned} &S \to D \\ &D \to AD \mid D \mid b \\ &A \to A \mid B \mid C \mid AB \mid BC \mid a \\ &B \to A \mid C \mid AA \mid U \mid UC \\ &C \to C \mid A \mid CA \mid a \\ &U \to aUb \mid ab. \end{aligned}$$

Премахване на преименуващи правила

Преименуващите правила са от вида $A \to B$. Нека е дадена граматика $G = \langle V, \Sigma, R, S \rangle$. Ще построим еквивалентна граматика G' без преименуващи правила. В началото нека в R' да добавим всички правила от R, които не са преименуващи. След това, за всяка променлива A, за която $A \overset{*}{\Rightarrow}_G B$, ако $B \to \alpha$ е правило в R, което не е преименуващо, то добавяме към R' правилото $A \to \alpha$.

Лема 3.9. Съществува *полиномиален* алгоритъм, такъв че превръща всяка безконтекстна граматика G в безконтекстна граматика G' без преименуващи правила и $\mathcal{L}(G') = \mathcal{L}(G) \setminus \{\varepsilon\}$.

Упътване. Първо намираме множеството от двойки

$$\mathtt{Ren} = \{(A, B) \in V \times V \mid A \overset{*}{\Rightarrow} B\}$$

като строим множествата по такъв начин, че:

$$\mathtt{Ren[n]} = \{(A, B) \in V \times V \mid A \overset{\leqslant n}{\Rightarrow} B\}$$

$$\texttt{Ren[0]} \stackrel{\text{деф}}{=} \{(A,A) \mid A \in V\}$$

$$\texttt{Ren[n+1]} \stackrel{\text{деф}}{=} \texttt{Ren[n]} \cup \{(A,B) \mid (\exists C)[A \to_G C \,\&\, (C,B) \in \texttt{Ren[n]}]\}.$$

Спираме на първото n, за което $\texttt{Ren[n]} = \texttt{Ren[n+1]}$. Тогава $\texttt{Ren} = \texttt{Ren[n]}$. |Ren| има големина $\mathcal{O}(|G|^2)$.

Нека $R'_0 \stackrel{\text{деф}}{=} R \setminus (V \times V)$ са правилата на R, които не са преименуващи. Тогава

$$R' \stackrel{\text{деф}}{=} \{\, (A,\alpha) \in V \times (V \cup \Sigma)^\star \mid (\exists B)[(A,B) \in \texttt{Ren} \,\&\, (B,\alpha) \in R'_0] \,\}.$$

□

Пример 3.11. Нека е дадена граматиката G с правила

$$S \to B \mid CC \mid b$$
$$A \to S \mid SB$$
$$B \to C \mid BC$$
$$C \to AB \mid a \mid b.$$

Да намерим първо Ren.

$\texttt{Ren[0]} = \{(S,S),(A,A),(B,B),(C,C)\}$;
$\texttt{Ren[1]} = \{(S,S),(S,B),(A,A),(A,S),$
$(B,B),(B,C),(C,C)\}$;
$\texttt{Ren[2]} = \{(S,S),(S,B),(S,C),(B,B),(B,C),(C,C),$
$(A,A),(A,S),(A,B)\}$;
$\texttt{Ren[3]} = \{(S,S),(S,B),(S,C),(B,B),(B,C),(C,C),$
$(A,A),(A,S),(A,B),(A,C)\}$;
$\texttt{Ren[4]} = \{(S,S),(S,B),(S,C),(B,B),(B,C),(C,C),$
$(A,A),(A,S),(A,B),(A,C)\}$;

Получихме, че $\texttt{Ren[3]} = \texttt{Ren[4]}$. Оттук можем да заключим следното:

$$A \stackrel{\star}{\Rightarrow} A,B,S,C$$
$$B \stackrel{\star}{\Rightarrow} B,C$$
$$S \stackrel{\star}{\Rightarrow} S,B,C$$
$$C \stackrel{\star}{\Rightarrow} C.$$

Първо добавяме към R' правилата, които не са преименуващи, а именно:

$$A \to BS$$
$$B \to BC$$
$$C \to AB \mid a \mid b$$
$$S \to CC \mid b.$$

- Понеже имаме,че $A \stackrel{\star}{\Rightarrow} B,S,C$, то добавяме към R' правилата:
$$A \to BC \mid AB \mid a \mid b \mid CC.$$
- Понеже имаме,че $B \stackrel{\star}{\Rightarrow}_G C$, то добавяме към R' правилата:
$$B \to AB \mid a \mid b.$$
- Понеже имаме, че $S \stackrel{\star}{\Rightarrow}_G B,C$, то добавяме към R' правилата:
$$S \to BC \mid AB \mid a \mid b.$$

Накрая получаваме, че граматиката G' има правила

$$S \to BC \mid AB \mid CC \mid a \mid b$$
$$A \to BS \mid BC \mid AB \mid a \mid b \mid CC$$
$$B \to AB \mid a \mid b \mid BC$$
$$C \to AB \mid a \mid b.$$

Задача 3.17. Премахнете преименуващите правила от граматиката G, като запазите езика, ако G има следните правила:

$$S \to C \mid CC \mid b$$
$$A \to B$$
$$B \to S \mid C \mid BC$$
$$C \to a \mid AB;$$

Премахване на дългите правила

Едно правило се нарича дълго, ако е от вида $A \to \beta$, където $|\beta| \geq 3$. Да разгледаме едно дълго правило в граматиката от вида $A \to X_1X_2 \cdots X_k$, където $k \geq 3$. За да получим еквивалентна граматика без това дълго правило, добавяме нови променливи Новата граматика ще има дължина $\mathcal{O}(|G|)$.

$A_1, \ldots, A_{k-2}$, и правила

$$A \to X_1A_1,\ A_1 \to X_2A_2, \ldots,\ A_{k-2} \to X_{k-1}X_k.$$

Задача 3.18. Нека е дадена граматиката $G = \langle\{S, A, B, C\}, \{a, b\}, S, R\rangle$. Използвайте обща конструкция, за да премахнете „дългите" правила от G като при това получите безконтестна граматика G_1 с език $\mathcal{L}(G) = \mathcal{L}(G_1)$, където правилата на граматиката са:

$$S \to CC \mid b$$
$$A \to BSB \mid a$$
$$B \to ba \mid BC$$
$$C \to BaSA \mid a \mid b.$$

3.8.2 Нормална Форма на Чомски

Една безконтекстна граматика е в **нормална форма на Чомски**, ако всяко правило е от вида

$$A \to BC \text{ и } A \to a,$$

където A, B, C са произволни променливи и a е произволна буква. Ако искаме ε да бъде в езика на граматиката, то позволяваме от началната променлива S да имаме правилото $S \to_G \varepsilon$, но тогава забраняваме S да се среща в дясна страна на правило.

Теорема 3.4. Всеки безконтекстен език L, който не съдържа ε, се поражда от безконтекстна граматика в нормална форма на Чомски.

Доказателство. Нека имаме безконтекстна граматика G, за която $L = \mathcal{L}(G)$. Ще построим безконтекстна граматика G' в нормална форма на Чомски, $L = \mathcal{L}(G')$. Следваме следната процедура:

- Премахваме дългите правила. Това можем да направим за време $\mathcal{O}(|G|)$ като новата граматика ще има дължина $\mathcal{O}(|G|)$.

Редът на стъпките е важен. Трябва преди това сме премахнали дългите правила. Вижте [HMU01, стр. 296].

- Премахваме ε-правилата. Това можем да направим за време $\mathcal{O}(|G|^2)$ като новата граматика ще има дължина $\mathcal{O}(|G|)$.

- Премахваме преименуващите правила. Това можем да направим за време $\mathcal{O}(|G|^2)$ като новата граматика ще има дължина $\mathcal{O}(|G|^2)$.

- За правила от вида $A \to u_1u_2$, където $u_1, u_2 \in V \cup \Sigma$, заменяме всяка буква u_i с новата променлива U_i и добавяме правилото $U_i \to u_i$. Например, правилото $A \to aB$ се заменя с правилото $A \to XB$ и добавяме правилото $X \to a$, където X е нова променлива. Това можем да направим за време $\mathcal{O}(|G|)$ и новата граматика ще има дължина $\mathcal{O}(|G|)$.

- Ако искаме ε да бъде в езика на граматиката, то добавяме нова начална променлива S_0 и правило $S_0 \to_G \varepsilon$ и правилата $S_0 \to \alpha$ за $S \to \alpha$.

□

Теорема 3.5. При дадена безконтекстна граматика G, можем да намерим еквивалентна на нея граматика G' в нормална форма на Чомски за време $\mathcal{O}(|G|^2)$, като получената граматика е с дължина $\mathcal{O}(|G|^2)$.

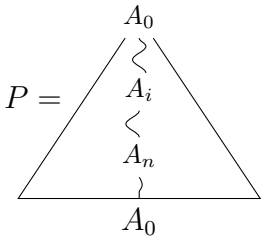
Теорема 3.6. Съществуват *полиномиални* алгоритми, които определят по дадена безконтекстна граматика G дали $|\mathcal{L}(G)| = \infty$.

[HU79, стр. 137]. Важно е, че алгоритмите са полиномиални. От *Лема 3.5* имаме експоненциални алгоритми.

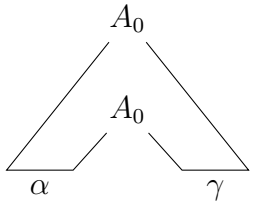
Доказателство. Нека е дадена една безконтекстна граматика G. Нека да разгледаме граматиката G' в НФЧ *без безполезни променливи*, за която $\mathcal{L}(G) = \mathcal{L}(G')$. От граматиката $G' = \langle V', \Sigma, S, R' \rangle$ строим граф с възли променливите от V' като за $A, B \in V'$ имаме ребро $A \to B$ точно тогава, когато съществува $C \in V'$, за което $A \to BC$ или $A \to CB$ е правило в R'. Сега ще съобразим, че ако в получения граф имаме цикъл, то $\mathcal{L}(G') = \infty$. Да разгледаме един такъв цикъл в графа:

$$A_0 \to A_1 \to A_2 \to \cdots \to A_n \to A_0.$$

Това означава, че $A_0 \overset{n+1}{\lhd} \delta A_0 \rho$ и поради избора на граматика, $|\delta\rho| = n + 1$



(а) $A_0 \overset{n+1}{\lhd} \delta A_0 \rho$, където $\delta, \rho \in (V \cup \Sigma)^\star$



(б) $A_0 \overset{\geq n+1}{\lhd} \alpha A_0 \gamma$, където $\alpha, \gamma \in \Sigma^\star$

Понеже в G няма безполезни променливи, то $\delta \overset{\star}{\Rightarrow} \alpha$, където $\alpha \in \Sigma^\star$ и $|\delta| \leq |\alpha|$ и $\rho \overset{\star}{\Rightarrow} \gamma$, където $\gamma \in \Sigma^\star$ и $|\rho| \leq |\gamma|$. Оттук заключаваме, че $A_0 \overset{\star}{\lhd} \alpha A_0 \gamma$ и $|\alpha\gamma| \geq 1$. Понеже A_0 не е безполезна променлива, то $A_0 \overset{\star}{\lhd} \beta$, за някоя дума $\beta \in \Sigma^\star$. Сега комбинираме *Твърдение 3.11* и *Твърдение 3.12* за да получим следния извод.

$$\frac{A_0 \overset{\star}{\lhd} \alpha A_0 \gamma \qquad A_0 \overset{\star}{\lhd} \beta \qquad i \in \mathbb{N}}{A_0 \overset{\star}{\lhd} \alpha^i \beta \gamma^i}$$

Понеже $|\alpha\beta| \geq 1$, заключаваме, че $\mathcal{L}(G)$ е безкраен език.

Ако в графът няма цикли, то езикът $\mathcal{L}(G)$ е краен, защото ако от променливата A най-дългият път има дължина $k + 1$, то за променливите B и C, за които имаме правилото $A \to BC$, най-дългият път от B и C има дължина най-много k. Ако най-дългият път от A има дължина k, то ако $A \overset{\star}{\lhd} \alpha$, за някоя дума $\alpha \in \Sigma^\star$, то $A \overset{\leq k}{\lhd} \alpha$. Оттук следва, че всички думи, които се извеждат от A са най-много 2^{k-1} на брой, защото граматиката е в нормална форма на Чомски. □

3.8.3 Проблемът за принадлежност

Теорема 3.7. Съществува *полиномиален* алгоритъм относно дължината на входната дума, който проверява дали дадена дума принадлежни на граматиката G.

Можем да приемем, че $G = \langle V, \Sigma, R, S\rangle$ е граматика в нормална форма на Чомски.

Това е алгоритъм на Cocke, Younger и Kasami (CYK), които откриват идеята за този алгоритъм независимо един от друг. Той е пример за динамично програмиране [Koz97, стр. 192], [Sha08, стр. 141]. При вход дума α, алгоритъмът работи за време $\mathcal{O}(|\alpha|^3)$.

Algorithm 2 Проверка дали $\alpha \in \mathcal{L}(G)$

```
1:  n = len(α)                                   ▷ Вход дума α = a_0 a_1 ··· a_{n-1}
2:  for all i < n do
3:      V[i][i] := {A ∈ V | A →_G α[i]}
4:      for all j ∈ (i, n) do
5:          V[i][j] := ∅
6:  for all s ∈ [1, n) do                        ▷ Дължина на интервала
7:      for all i < n − s do                     ▷ Начало на интервала
8:          for all k ∈ [i, i + s) do            ▷ Разделяне на интервала
9:              if ∃A → BC ∈ R & B ∈ V[i][k] & C ∈ V[k+1][i+s] then
10:                 V[i][i+s] := V[i][i+s] ∪ {A}
11: if S ∈ V[0][n-1] then
12:     return True                              ▷ Има извод на думата от S
13: else
14:     return False
```

Да напомним, че според нашата нотация, $\alpha[i:j] = a_i \cdots a_{j-1}$.

Лема 3.10. Нека е дадена безконтекстната граматика G в нормална форма на Чомски и думата α. Всеки път, точно преди да изпълни ред (6) от програмата описана в Алгоритъм 2, е изпълнено, че за всяко $i < n - s$,

$$\texttt{V[i][i+s]} = \{A \in V \mid A \overset{\star}{\Rightarrow}_G \alpha[i : i + s + 1]\}.$$

Доказателство. Пълна индукция по s. За $s = 0$ е ясно, защото от ред (3) и от факта, че граматиката е в нормална форма на Чомски следва, че за всяко $i < n$,

$$\texttt{V[i][i]} = \{A \in V \mid A \to_G \alpha[i]\} = \{A \in V \mid A \overset{\star}{\Rightarrow}_G \alpha[i : i + 1]\}.$$

Сега ще докажем твърдението за $s > 0$, т.е. ще докажем, че за всяко $i < n - s$ е изпълнено, че:

$$\texttt{V[i][i+s]} = \{A \in V \mid A \overset{\star}{\Rightarrow}_G \alpha[i : i + s + 1]\}.$$

Да разгледаме двете посоки на това равенство.

($\subseteq$) Нека $A \in$ `V[i][i+s]`. Единствената стъпка на алгоритъма, при която може да сме добавили променливата A към множеството `V[i][i+s]` е ред (10). Тогава имаме,

че съществува k, което $i \leq k < i + s$, и

$$B \in \texttt{V[i][k]}, \qquad // \; k = i + \overbrace{(k - i)}^{s'}$$
$$C \in \texttt{V[k+1][i+s]}, \qquad // \; i + s = (k + 1) + \underbrace{(i + s - k - 1)}_{s''}$$
$$A \to_G BC.$$

Понеже $s' < s$ и $s'' < s$, от **(И.П.)** имаме, че

$$B \overset{\star}{\Rightarrow}_G \alpha[i : k + 1]$$
$$C \overset{\star}{\Rightarrow}_G \alpha[k + 1 : i + s + 1].$$

Заключаваме веднага, че $A \overset{\star}{\Rightarrow}_G \alpha[i : i + s + 1]$.

($\supseteq$) Нека $A \overset{\star}{\Rightarrow}_G \alpha[i : i + s + 1]$ и да разгледаме първото правило, което сме приложили в този извод. Понеже G е в нормална форма на Чомски, правилото е от вида $A \to_G BC$ и тогава, според *Твърдение 3.5*, съществува k, за което $i \leq k < i + s$, и

$$B \overset{\star}{\Rightarrow} \alpha[i : k + 1]$$
$$C \overset{\star}{\Rightarrow} \alpha[k + 1 : i + s + 1].$$

От **(И.П.)** получаваме, че $B \in \texttt{V[i][k]}$ и $C \in \texttt{V[k+1][i+s]}$. Тогава от ред (10) на алгоритъма е ясно, че $A \in \texttt{V[i][i+s]}$.

□

Пример 3.12. Нека е дадена граматиката G в нормална форма на Чомски с правила

$$S \to a \mid AB \mid AC$$
$$A \to a$$
$$B \to b$$
$$C \to SB \mid AS.$$

Ще приложим CYK алгоритъма за да проверим дали $aaabb \in \mathcal{L}(G)$.

- За $s = 0$ имаме, че:
  - $\texttt{V[0][0]} = \texttt{V[1][1]} = \texttt{V[2][2]} = \{S, A\}$;
  - $\texttt{V[3][3]} = \texttt{V[4][4]} = \{B\}$.
- За $s = 1$ имаме, че:
  - $\texttt{V[0][1]} = \texttt{V[1][2]} = \{C\}$;
  - $\texttt{V[2][3]} = \{S, C\}$;
  - $\texttt{V[3][4]} = \emptyset$.
- За $s = 2$ имаме, че:
  - $\texttt{V[0][2]} = \{S\} \cup \emptyset$;
  - $\texttt{V[1][3]} = \{S, C\} \cup \emptyset$;
  - $\texttt{V[2][4]} = \emptyset \cup \{C\}$.
- За $s = 3$ имаме, че:
  - $\texttt{V[0][3]} = \{S, C\} \cup \emptyset \cup \emptyset = \{S, C\}$;
  - $\texttt{V[1][4]} = \{S\} \cup \emptyset \cup \{C\} = \{S, C\}$.
- За $s = 4$ имаме, че:
  - $\texttt{V[0][4]} = \{S, C\} \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \{C\} = \{S, C\}$.

Понеже $S \in \texttt{V[0][4]}$, то $aaabb \in \mathcal{L}(G)$.

3.9 Най-ляв извод в граматика

Най-левият извод ще бъде важен за нас, когато разгледаме стековите автомати.

В нашата дефиниция на извод, изборът върху коя променлива да приложим правило от граматиката е недетерминистичен. В някои случаи, за нас ще бъде важно винаги да правим детерминистичен избор на това върху коя променлива прилагаме правило.

За две думи $\alpha, \beta \in (V \cup \Sigma)^\star$, дефинираме **най-ляв извод** в граматиката G, $\alpha \overset{\ell}{\Rightarrow}_{\texttt{left}} \beta$, по следния начин:

$$\frac{}{\alpha \overset{0}{\Rightarrow}_{\texttt{left}} \alpha} \text{ правило (0)} \qquad \frac{A \to_G \alpha \quad \alpha \overset{\ell}{\Rightarrow}_{\texttt{left}} \beta}{A \overset{\ell+1}{\Rightarrow}_{\texttt{left}} \beta} \text{ правило (1)}$$

$$\frac{\alpha_1 \overset{\ell_1}{\Rightarrow}_{\texttt{left}} \beta_1 \quad \beta_1 \in \Sigma^\star \quad \alpha_2 \overset{\ell_2}{\Rightarrow}_{\texttt{left}} \beta_2}{\alpha_1\alpha_2 \overset{\ell_1+\ell_2}{\Rightarrow}_{\texttt{left}} \beta_1\beta_2} \text{ правило (2)}$$

Единствената разлика между дефиницията на $\overset{\star}{\Rightarrow}_{\texttt{left}}$ и тази на $\overset{\star}{\Rightarrow}$ е, че тук изискваме $\beta_1 \in \Sigma^\star$. Интуитивно, $\overset{\star}{\lhd}$ е аналог на BFS, докато $\overset{\star}{\Rightarrow}_{\texttt{left}}$ е аналог на DFS като винаги се избира най-левия необходим клон.

Удобно ще бъде да разгледаме следния аналог на *Твърдение 3.3*.

Твърдение 3.15. Имаме извода:

$$\frac{\delta \overset{\ell_1}{\Rightarrow}_{\texttt{left}} \alpha B \gamma \quad \alpha \in \Sigma^\star \quad B \overset{\ell_2}{\Rightarrow}_{\texttt{left}} \beta}{\delta \overset{\ell_1+\ell_2}{\Rightarrow}_{\texttt{left}} \alpha\beta\gamma}$$

Важно е да отбележим, че имаме горната еквивалентност само когато $\alpha \in \Sigma^\star$. Съобразете сами защо тази лема не е вярна в общия случай, когато позволим α да съдържа променливи.

Лема 3.11. За всяка безконтекстна граматика G, променлива A и дума $\alpha \in \Sigma^\star$,

$$A \overset{\star}{\Rightarrow}_{\texttt{left}} \alpha \text{ точно тогава, когато } A \overset{\star}{\Rightarrow} \alpha.$$

В частност,

$$\mathcal{L}(G) = \{\alpha \in \Sigma^\star \mid S \overset{\star}{\Rightarrow}_{\texttt{left}} \alpha\}.$$

Доказателство. От правилата за извод е видно, че ако $A \overset{\star}{\Rightarrow}_{\texttt{left}} \alpha$, то $A \overset{\star}{\Rightarrow} \alpha$. За другата посока, достатъчно е да се докаже, че ако $A \overset{\star}{\lhd} \alpha$ то $A \overset{\star}{\Rightarrow}_{\texttt{left}} \alpha$.

Това ще направим като използваме *Теорема 3.2*, а именно ще докажем с пълна индукция по ℓ, че за произволно число ℓ, ако $A \overset{\ell}{\lhd} \alpha$, то $A \overset{\star}{\Rightarrow}_{\texttt{left}} \alpha$. Да отбележим, че щом $A \in V$, а $\alpha \in \Sigma^\star$ е ясно, че $\ell > 0$. Имаме следното:

$$\frac{A \to_G \alpha_1 B_1 \cdots \alpha_n B_n \alpha_{n+1} \quad B_1 \overset{<\ell}{\lhd} \beta_1 \quad \cdots \quad B_n \overset{<\ell}{\lhd} \beta_n}{A \overset{\ell}{\lhd} \underbrace{\alpha_1\beta_1 \cdots \alpha_n\beta_n\alpha_{n+1}}_{\alpha}}$$

Започваме така:

$$\text{(\textit{Твърдение 3.15})}\ \frac{A \to_G \alpha_1 B_1 \cdots \alpha_n B_n \alpha_{n+1} \qquad \dfrac{B_1 \overset{<\ell}{\lhd} \beta_1}{B_1 \overset{\star}{\Rightarrow}_{\texttt{left}} \beta_1}\ \textbf{(И.П.)}}{A \overset{\star}{\Rightarrow}_{\texttt{left}} \alpha_1\beta_1\alpha_2 B_2 \cdots \alpha_n B_n \alpha_{n+1}}$$

Продължаваме последователно за всяко $i < n$ правим да правим извода:

$$\text{(\textit{Твърдение 3.15})}\ \frac{A \overset{\star}{\Rightarrow}_{\texttt{left}} \overbrace{\alpha_1\beta_1 \cdots \alpha_i}^{\in\Sigma^\star} B_i \cdots \alpha_n B_n \alpha_{n+1} \qquad \dfrac{B_i \overset{<\ell}{\lhd} \beta_i}{B_i \overset{\star}{\Rightarrow}_{\texttt{left}} \beta_i}\ \textbf{(И.П.)}}{A \overset{\star}{\Rightarrow}_{\texttt{left}} \alpha_1\beta_1 \cdots \alpha_i\beta_i \cdots \alpha_n B_n \alpha_{n+1}}$$

Завършваме със следния извод:

$$\text{(\textit{Твърдение 3.15})}\ \frac{A \overset{\star}{\Rightarrow}_{\texttt{left}} \overbrace{\alpha_1\beta_1 \cdots \alpha_i\beta_i \cdots \alpha_n}^{\in\Sigma^\star} B_n \alpha_{n+1} \qquad \dfrac{B_n \overset{<\ell}{\lhd} \beta_n}{B_n \overset{\star}{\Rightarrow}_{\texttt{left}} \beta_n}\ \textbf{(И.П.)}}{A \overset{\star}{\Rightarrow}_{\texttt{left}} \underbrace{\alpha_1\beta_1 \cdots \alpha_i\beta_i \cdots \alpha_n\beta_n\alpha_{n+1}}_{\alpha}}$$

□

3.9.1 Допълнителни задачи

За две думи $\alpha, \beta \in (V \cup \Sigma)^\star$, дефинираме **най-десен извод** в граматиката G, $\alpha \overset{\ell}{\Rightarrow}_{\texttt{right}} \beta$, по следния начин:

$$\frac{}{\alpha \overset{0}{\Rightarrow}_{\texttt{right}} \alpha}\ \text{правило (0)} \qquad \frac{A \to_G \alpha \qquad \alpha \overset{\ell}{\Rightarrow}_{\texttt{right}} \beta}{A \overset{\ell+1}{\Rightarrow}_{\texttt{right}} \beta}\ \text{правило (1)}$$

$$\frac{\alpha_1 \overset{\ell_1}{\Rightarrow}_{\texttt{right}} \beta_1 \qquad \alpha_2 \overset{\ell_2}{\Rightarrow}_{\texttt{right}} \beta_2 \qquad \beta_2 \in \Sigma^\star}{\alpha_1\alpha_2 \overset{\ell_1+\ell_2}{\Rightarrow}_{\texttt{right}} \beta_1\beta_2}\ \text{правило (2)}$$

Удобно ще бъде да разгледаме следния аналог на *Твърдение 3.3*.

Задача 3.19. Докажете, че имаме извода:

$$\frac{\delta \overset{\ell_1}{\Rightarrow}_{\texttt{right}} \alpha B \gamma \qquad B \overset{\ell_2}{\Rightarrow}_{\texttt{right}} \beta \qquad \gamma \in \Sigma^\star}{\delta \overset{\ell_1+\ell_2}{\Rightarrow}_{\texttt{right}} \alpha\beta\gamma}$$

Задача 3.20. Докажете, че за всяка безконтекстна граматика G, променлива A и дума $\alpha \in \Sigma^\star$,

$$A \overset{\star}{\Rightarrow}_{\texttt{right}} \alpha \text{ точно тогава, когато } A \overset{\star}{\Rightarrow} \alpha.$$

3.10 Недетерминирани стекови автомати

На англ. *Push-down automaton*. В този курс няма да разглеждаме детерминирани стекови автомати. Когато кажем стеков автомат, ще имаме предвид недетерминиран стеков автомат. Означаваме $\Sigma_\varepsilon \stackrel{\text{деф}}{=} \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ и $\Gamma^{\leq 2} \stackrel{\text{деф}}{=} \{\varepsilon\} \cup \Gamma \cup \Gamma^2$.

Недетерминиран стеков автомат е седморка от вида

$$P = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \sharp, \Delta, q_{\texttt{start}}, q_{\texttt{accept}} \rangle,$$

където:

- Q е крайно множество от състояния;
- Σ е крайна входна азбука;
- Γ е крайна стекова азбука;
- $\sharp \in \Gamma$ е символ за дъно на стека;

Дефиницията на стеков автомат има много вариации, всички еквивалентни помежду си

- $\Delta : Q \times \Sigma_\varepsilon \times \Gamma \to \mathscr{P}(Q \times \Gamma^{\leq 2})$ е функция на преходите;
- $q_{\texttt{start}} \in Q$ е начално състояние;
- $q_{\texttt{accept}} \in Q$ е заключителното състояние.

На англ. Instanteneous description

Моментно описание (или конфигурация) на изчислението със стеков автомат представлява тройка от вида $(q, \alpha, \gamma) \in Q \times \Sigma^\star \times \Gamma^\star$, т.е. автоматът се намира в състояние q, думата, която остава да се прочете е α, а съдържанието на стека е думата γ. Удобно е да въведем бинарната релация $\vdash_P$ над $Q \times \Sigma^\star \times \Gamma^\star$, която ще ни казва как моментното описание на автомата P се променя след изпълнение на една стъпка:

$$\frac{\Delta(q, b, A) \ni (p, \beta) \qquad b \in \Sigma}{(q, b\alpha, A\gamma) \vdash_P (p, \alpha, \beta\gamma)} \qquad \frac{\Delta(q, \varepsilon, A) \ni (p, \beta)}{(q, \alpha, A\gamma) \vdash_P (p, \alpha, \beta\gamma)}$$

Възможно е да се даде и друга еквивалентна дефиниция - разпознаване с празен стек.

Рефлексивното и транзитивно затваряне на $\vdash_P$ ще означаваме с $\vdash_P^\star$. Сега вече можем да дадем дефиниция на език, разпознаван от стеков автомат P. Езикът $\mathcal{L}(P)$, който се разпознава от P, има следната дефиниция:

$$\mathcal{L}(P) = \{\, \omega \in \Sigma^\star \mid (q_{\texttt{start}}, \omega, \sharp) \vdash_P^\star (q_{\texttt{accept}}, \varepsilon, \varepsilon) \,\}.$$

3.10.1 Примери

Пример 3.13. За езика $L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, да разгледаме $P = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \sharp, \Delta, q_{\texttt{start}}, q_{\texttt{accept}} \rangle$, където

- $Q \stackrel{\text{деф}}{=} \{q, p, f\}$;
- $q_{\texttt{start}} \stackrel{\text{деф}}{=} q$ и $q_{\texttt{accept}} \stackrel{\text{деф}}{=} f$;
- $\Sigma \stackrel{\text{деф}}{=} \{a, b\}$ и $\Gamma \stackrel{\text{деф}}{=} \{\sharp, a\}$;

Тук получаваме детерминистичен стеков автомат.

- Релацията на преходите Δ има следната дефиниция:

  (1) $\Delta(q, a, \sharp) \stackrel{\text{деф}}{=} \{(q, a\sharp)\}$;

(2) $\Delta(q, a, a) \stackrel{\text{деф}}{=} \{(q, aa)\}$;

(3) $\Delta(q, \varepsilon, \sharp) \stackrel{\text{деф}}{=} \{(f, \varepsilon)\}$; // трябва да разпознаем и думата ε

(4) $\Delta(q, b, a) \stackrel{\text{деф}}{=} \{(p, \varepsilon)\}$; // Започваме да четем само b-та

(5) $\Delta(p, b, a) \stackrel{\text{деф}}{=} \{(p, \varepsilon)\}$;

(6) $\Delta(p, \varepsilon, \sharp) \stackrel{\text{деф}}{=} \{(f, \varepsilon)\}$.

(7) За всички останали тройки (r, x, y), нека $\Delta(r, x, y) \stackrel{\text{деф}}{=} \emptyset$.

Да видим как думата a^2b^2 се разпознава от стековия автомат P:

$$\begin{aligned}
(q, a^2b^2, \sharp) &\vdash_P (q, ab^2, a\sharp) && \text{// правило } (1)\\
&\vdash_P (q, b^2, aa\sharp) && \text{// правило } (2)\\
&\vdash_P (p, b, a\sharp) && \text{// правило } (4)\\
&\vdash_P (p, \varepsilon, \sharp) && \text{// правило } (5)\\
&\vdash_P (f, \varepsilon, \varepsilon) && \text{// правило } (6)
\end{aligned}$$

Получихме, че $(q_{\texttt{start}}, a^2b^2, \sharp) \vdash_P^\star (q_{\texttt{accept}}, \varepsilon, \varepsilon)$, откъдето следва, че $a^2b^2 \in \mathcal{L}(P)$.

✍ Докажете, че $L = \mathcal{L}(P)$!

а) Докажете с индукция по n, че за всяко естествено число n,

$$\begin{aligned}
(q, a^n\beta, \sharp) &\vdash_P^n (q, \beta, a^n\sharp)\\
(p, b^n, a^n\sharp) &\vdash_P^n (p, \varepsilon, \sharp).
\end{aligned}$$

Заключете, че $L \subseteq \mathcal{L}(P)$.

б) Докажете, че за всеки три думи $\alpha, \beta, \gamma \in \{a, b\}^\star$ е изпълнено, че:

Индукция по броя на стъпките в изчислението на стековия автомат

$$\begin{aligned}
(q, \alpha\beta, \sharp) \vdash_P^n (q, \beta, \gamma\sharp) &\implies \alpha = \gamma = a^n\\
(p, \beta, \gamma\sharp) \vdash_P^n (p, \varepsilon, \sharp) &\implies \beta = b^n \,\&\, \gamma = a^n,
\end{aligned}$$

Оттук заключете, че $\mathcal{L}(P) \subseteq L$.

Пример 3.14. Езикът $L = \{\, \omega\omega^{\texttt{rev}} \mid \omega \in \{a, b\}^\star \,\}$ се разпознава от стеков автомат

$$P = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \sharp, \Delta, q_{\texttt{start}}, q_{\texttt{accept}} \rangle,$$

където:

- $Q \stackrel{\text{деф}}{=} \{q, p, f\}$ и $q_{\texttt{start}} \stackrel{\text{деф}}{=} q$, $q_{\texttt{accept}} \stackrel{\text{деф}}{=} f$;
- $\Sigma \stackrel{\text{деф}}{=} \{a, b\}$, $\Gamma \stackrel{\text{деф}}{=} \{a, b, \sharp\}$;
- Функцията на преходите Δ има следната дефиниция:

За всички липсващи твойки в дефиницията на Δ приемаме, че Δ връща $\emptyset$

(1) $\Delta(q, a, \sharp) \stackrel{\text{деф}}{=} \{(q, a\sharp)\}$;

(2) $\Delta(q, b, \sharp) \stackrel{\text{деф}}{=} \{(q, b\sharp)\}$;

(3) $\Delta(q, \varepsilon, \sharp) \stackrel{\text{деф}}{=} \{(q, \varepsilon)\}$;

(4) $\Delta(q, a, a) \stackrel{\text{деф}}{=} \{(q, aa), (p, \varepsilon)\}$;

(5) $\Delta(q, a, b) \stackrel{\text{деф}}{=} \{(q, ab)\}$;

(6) $\Delta(q, b, a) \stackrel{\text{деф}}{=} \{(q, ba)\}$;

(7) $\Delta(q, b, b) \stackrel{\text{деф}}{=} \{(q, bb), (p, \varepsilon)\}$;

(8) $\Delta(p, a, a) \stackrel{\text{деф}}{=} \{(p, \varepsilon)\}$;

(9) $\Delta(p, b, b) \stackrel{\text{деф}}{=} \{(p, \varepsilon)\}$;

(10) $\Delta(p, \varepsilon, \sharp) \stackrel{\text{деф}}{=} \{(f, \varepsilon)\}$;

Основното наблюдение, което трябва да направим за да разберем конструкцията на автомата е, че всяка дума от вида $\omega\omega^{\mathtt{rev}}$ може да се запише като $\omega_1 aa\omega_1^{\mathtt{rev}}$ или $\omega_1 bb\omega_1^{\mathtt{rev}}$. Да видим защо P разпознава думата $abaaba$ с празен стек. Започваме по следния начин:

$$\begin{aligned}(q, abaaba, \sharp) &\vdash_P (q, baaba, a\sharp) && \text{// правило } (1)\\ &\vdash_P (q, aaba, ba\sharp) && \text{// правило } (6)\\ &\vdash_P (q, aba, aba\sharp). && \text{// правило } (5)\end{aligned}$$

Сега можем да направим два избора как да продължим. Състоянието p служи за маркер, което ни казва, че вече сме започнали да четем $\omega^{\mathtt{rev}}$. Поради тази причина, продължаваме така:

$$\begin{aligned}(q, aba, aba\sharp) &\vdash_P (p, ba, ba\sharp) && \text{// правило } (4)\\ &\vdash_P (p, a, a\sharp) && \text{// правило } (9)\\ &\vdash_P (p, \varepsilon, \sharp) && \text{// правило } (8)\\ &\vdash_P (f, \varepsilon, \varepsilon). && \text{// правило } (10)\end{aligned}$$

Да проиграем още един пример. Да видим защо думата aba не се извежда от автомата.

$$\begin{aligned}(q, aba, \sharp) &\vdash_P (q, ba, a\sharp) && \text{// правило } (1)\\ &\vdash_P (q, a, ba\sharp) && \text{// правило } (6)\\ &\vdash_P (q, \varepsilon, aba\sharp). && \text{// правило } (5)\end{aligned}$$

От последното моментно описание на автомата нямаме нито един преход, следователно думата aba не се разпознава от P.

✍ Докажете, че $L = \mathcal{L}(P)$!

Индукция по дължината на думата α

а) Докажете, че за всеки две думи $\alpha, \beta \in \{a, b\}^\star$ е изпълнено, че:

$$\begin{aligned}|\alpha| = n &\implies (q, \alpha\beta, \sharp) \vdash_P^n (q, \beta, \alpha^{\mathtt{rev}}\sharp)\\ |\beta| = n &\implies (p, \beta, \beta\sharp) \vdash_P^n (p, \varepsilon, \sharp).\end{aligned}$$

Оттук заключете, че $L \subseteq \mathcal{L}(P)$.

Индукция по броя на стъпките в изчислението на стековия автомат

б) Докажете, че за всеки три думи $\alpha, \beta, \gamma \in \{a, b\}^\star$ е изпълнено, че:

$$\begin{aligned}(q, \alpha\beta, \sharp) \vdash_P^n (q, \beta, \gamma\sharp) &\implies \gamma = \alpha^{\mathtt{rev}} \,\&\, |\alpha| = n\\ (p, \beta, \gamma\sharp) \vdash_P^n (p, \varepsilon, \sharp) &\implies \gamma = \beta \,\&\, |\beta| = n.\end{aligned}$$

Оттук заключете, че $\mathcal{L}(P) \subseteq L$.

Задача 3.21. Постройте *детерминистичен* стеков автомат за езика $L = \{\omega\$\omega^{\mathtt{rev}} \mid \omega \in \{a, b\}^\star\}$.

Пример 3.15. Безконтекстният език $L = \{\, \omega \in \{\mathtt{[}, \mathtt{]}\}^\star \mid \mathtt{left}(\omega) = \mathtt{right}(\omega) \,\}$ се разпознава от стековия автомат $P = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \sharp, \Delta, q_{\mathtt{start}}, q_{\mathtt{accept}}\rangle$, където:

- $Q = \{q, f\}$;
- $\Sigma = \{\mathtt{[}, \mathtt{]}\}$;
- $\Gamma = \{\mathtt{[}, \mathtt{]}, \sharp\}$;
- $q_{\mathtt{start}} = q$ и $q_{\mathtt{accept}} = f$;

- Можем да дефинираме релацията на преходите Δ по следния начин:

  (1) $\Delta(q, \varepsilon, \sharp) = \{(f, \varepsilon)\}$;
  (2) $\Delta(q, \texttt{[}, \sharp) = \{(q, \texttt{[}\sharp)\}$;
  (3) $\Delta(q, \texttt{]}, \sharp) = \{(q, \texttt{]}\sharp)\}$;
  (4) $\Delta(q, \texttt{[}, \texttt{[}) = \{(q, \texttt{[[})\}$;
  (5) $\Delta(q, \texttt{[}, \texttt{]}) = \{(q, \varepsilon)\}$;
  (6) $\Delta(q, \texttt{]}, \texttt{[}) = \{(q, \varepsilon)\}$;
  (7) $\Delta(q, \texttt{]}, \texttt{]}) = \{(q, \texttt{]]})\}$.

Да видим защо думата `[]]][[` $\in \mathcal{L}(P)$.

$$\begin{aligned}
(q, \texttt{[]]][[}, \sharp) &\vdash_P (q, \texttt{]]][[}, \texttt{[}\sharp) && \text{// правило (2)}\\
&\vdash_P (q, \texttt{]][[}, \sharp) && \text{// правило (6)}\\
&\vdash_P (q, \texttt{][[}, \texttt{]}\sharp) && \text{// правило (3)}\\
&\vdash_P (q, \texttt{[[}, \texttt{]]}\sharp) && \text{// правило (7)}\\
&\vdash_P (q, \texttt{[}, \texttt{]}\sharp) && \text{// правило (5)}\\
&\vdash_P (q, \varepsilon, \sharp) && \text{// правило (5)}\\
&\vdash_P (f, \varepsilon, \varepsilon). && \text{// правило (1)}
\end{aligned}$$

а) Докажете, че за произволно естествено число n и произволна дума $\alpha \in \{\texttt{[}, \texttt{]}\}^\star$, е изпълнено, че: Индукция по дължината на думата α

$$\begin{aligned}
\texttt{[}^n\alpha \in L &\implies (q, \alpha, \texttt{[}^n\sharp) \vdash_P^\star (q, \varepsilon, \sharp)\\
\texttt{]}^n\alpha \in L &\implies (q, \alpha, \texttt{]}^n\sharp) \vdash_P^\star (q, \varepsilon, \sharp).
\end{aligned}$$

Оттук заключете, че $L \subseteq \mathcal{L}(P)$.

б) Докажете, че за произволно естествено число n и произволна дума $\alpha \in \{\texttt{[}, \texttt{]}\}^\star$ е изпълнено, че: Индукция по броя на стъпките в изчислението на стековия автомат

$$\begin{aligned}
(q, \alpha, \texttt{[}^n\sharp) \vdash_P^\star (q, \varepsilon, \sharp) &\implies \texttt{[}^n\alpha \in L\\
(q, \alpha, \texttt{]}^n\sharp) \vdash_P^\star (q, \varepsilon, \sharp) &\implies \texttt{]}^n\alpha \in L.
\end{aligned}$$

Оттук заключете, че $\mathcal{L}(P) \subseteq L$.

Пример 3.16. Езикът $L = \{\, \omega \in \{\texttt{[}, \texttt{]}\}^\star \mid \omega \text{ е балансирана дума } \}$ се разпознава от стековия автомат $P = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \sharp, \Delta, q_{\texttt{start}}, q_{\texttt{accept}}\rangle$, където:

- $Q = \{q, f\}$;
- $q_{\texttt{start}} = q$ и $q_{\texttt{accept}} = f$;
- $\Sigma = \{\texttt{[}, \texttt{]}\}$;
- $\Gamma = \{\texttt{[}, \sharp\}$;
- Можем да дефинираме релацията на преходите Δ по следния начин: ✍ Докажете, че $L = \mathcal{L}(P)$!

  (1) $\Delta(q, \varepsilon, \sharp) = \{(f, \varepsilon)\}$;
  (2) $\Delta(q, \texttt{[}, \sharp) = \{(q, \texttt{[}\sharp)\}$;
  (3) $\Delta(q, \texttt{[}, \texttt{[}) = \{(q, \texttt{[[})\}$;
  (4) $\Delta(q, \texttt{]}, \texttt{[}) = \{(q, \varepsilon)\}$;

(а) Докажете, че за произволно естествено число n и произволна дума $\alpha \in \{\texttt{[}, \texttt{]}\}^\star$, е изпълнено, че: Индукция по дължината на думата α

$$\texttt{[}^n\alpha \in L \implies (q, \alpha, \texttt{[}^n\sharp) \vdash_P^\star (q, \varepsilon, \sharp).$$

Оттук заключете, че $L \subseteq \mathcal{L}(P)$.

(б) Докажете, че за произволно естествено число n и произволна дума $\alpha \in \{\texttt{[}, \texttt{]}\}^\star$, е изпълнено, че: Индукция по броя на стъпките в изчислението на стековия автомат.

$$(q, \alpha, \texttt{[}^n\sharp) \vdash_P^\star (q, \varepsilon, \sharp) \implies \texttt{[}^n\alpha \in L.$$

Оттук заключете, че $\mathcal{L}(P) \subseteq L$.

3.10.2 Теорема за еквивалентност

[PL98, стр. 136]

Лема 3.12. За всяка безконтекстна граматика G, съществува стеков автомат P, такъв че $\mathcal{L}(G) = \mathcal{L}(P)$.

Тук е важно, че дефенирахме най-ляв извод в граматика.

Доказателство. Нека е дадена безконтекстната граматика $G = \langle V, \Sigma, R, S\rangle$ в нормална форма на Чомски. Нашата цел е да построим стеков автомат

$$P = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \sharp, \Delta, q_{\texttt{start}}, q_{\texttt{accept}}\rangle,$$

който разпознава $\mathcal{L}(G)$.

- $Q = \{q_{\texttt{start}}, p, q_{\texttt{accept}}\}$;
- $\Gamma = \Sigma \cup V \cup \{\sharp\}$;

Понеже граматиката е в нормална форма на Чомски, то $|\alpha| \leq 2$ и удовлетворяваме дефиницията на Δ.

- Релацията на преходите Δ дефинираме по следния начин:
  (1) $\Delta(q_{\texttt{start}}, \varepsilon, \sharp) = \{(p, S\sharp)\}$;
  (2) $\Delta(p, \varepsilon, A) = \{(p, \alpha) \mid A \to_G \alpha\}$, за всяка променлива $A \in V$;
  (3) $\Delta(p, a, a) = \{(p, \varepsilon)\}$, за всяка буква $a \in \Sigma$;
  (4) $\Delta(p, \varepsilon, \sharp) = \{(q_{\texttt{accept}}, \varepsilon)\}$.

Ако γ не е празната дума, то γ започва с променлива.

Ще докажем, че за всяка променлива $A \in V$, за всяка дума $\alpha \in \Sigma^\star$, $\gamma \in (V \cdot \Sigma^\star)^\star$ и $\delta \in (V \cup \Sigma)^\star$, то е изпълнено, че:

(а) ако $S \overset{\star}{\Rightarrow}_{\texttt{left}} \alpha\gamma$, то $(p, \alpha, S\sharp) \vdash_P^\star (p, \varepsilon, \gamma\sharp)$;

(б) ако $(p, \alpha, \delta\sharp) \vdash_P^\star (p, \varepsilon, \sharp)$, то $\delta \overset{\star}{\Rightarrow}_{\texttt{left}} \alpha$.

Тогава, ако вземем $\delta = S$ и $\gamma = \varepsilon$, то ще получим, че

$$\begin{aligned}
\alpha \in \mathcal{L}(G) &\Leftrightarrow S \overset{\star}{\Rightarrow}_{\texttt{left}} \alpha \\
&\Leftrightarrow (p, \alpha, S\sharp) \vdash_P^\star (p, \varepsilon, \sharp) && \text{// от (а) и (б)} \\
&\Leftrightarrow (q_{\texttt{start}}, \alpha, \sharp) \vdash_P^\star (q_{\texttt{accept}}, \varepsilon, \varepsilon) && \text{// от деф. на } P \\
&\Leftrightarrow \alpha \in \mathcal{L}(P).
\end{aligned}$$

Сега преминаваме към доказателствата на двете твърдения.

(а) Индукция по дължината ℓ на извода $S \overset{\ell}{\Rightarrow}_{\texttt{left}} \alpha\gamma$. Нека $\ell = 0$. Този случай е тривиален, защото тогава $\alpha = \varepsilon$ и $\gamma = S$. Ясно е, че $(p, \varepsilon, S\sharp) \vdash_P^0 (p, \varepsilon, S\sharp)$.

Нека $\ell > 0$ и $S \overset{\ell}{\Rightarrow}_{\texttt{left}} \alpha\gamma$. Това означава, че този извод може да се запише по следния начин:

$$\frac{S \overset{\ell-1}{\Rightarrow}_{\texttt{left}} \alpha_1 A \gamma_2 \qquad \alpha_1 \in \Sigma^\star \qquad A \to_G \alpha_2\gamma_1}{S \overset{\ell}{\Rightarrow}_{\texttt{left}} \underbrace{\alpha_1\alpha_2}_{\alpha}\underbrace{\gamma_1\gamma_2}_{\gamma}} \text{ (\textit{Твърдение 3.15})}$$

Тогава от **(И.П.)** имаме, че

$$(p, \alpha_1, S\sharp) \vdash_P^\star (p, \varepsilon, A\gamma_2\sharp). \tag{3.9}$$

Получаваме следното изчисление на стековия автомат:

$$\begin{aligned}
(p, \overbrace{\alpha_1\alpha_2}^{\alpha}, S\sharp) &\vdash_P^\star (p, \alpha_2, A\gamma_2\sharp) && \text{// от (3.9)}\\
&\vdash_P (p, \alpha_2, \alpha_2\gamma_1\gamma_2\sharp) && \text{// ред (2) от деф. на } \Delta\\
&\vdash_P^\star (p, \varepsilon, \underbrace{\gamma_1\gamma_2}_{\gamma}\sharp) && \text{// ред (3) от деф. на } \Delta.
\end{aligned}$$

(б) Индукция по броя на стъпките ℓ в изчислението на стековия автомат.

Нека $\ell = 0$. Тогава е ясно, че единствената възможност $\alpha = \varepsilon$ и $\delta = \varepsilon$. Тогава $\varepsilon \overset{\star}{\Rightarrow}_G \varepsilon$.

Нека $\ell > 0$ и $(p, \alpha, \delta\sharp) \vdash_P^\ell (p, \varepsilon, \sharp)$. Имаме три избора за първата стъпка в това изчисление.

Започваме със случая, когато $\Delta(p, a, a) \ni (p, \varepsilon)$. Това означава, че $\alpha = a\beta$, $\delta = a\rho$ и $(p, \alpha, \delta\sharp) \vdash_P (p, \beta, \rho\sharp) \vdash_P^{\ell-1} (p, \varepsilon, \sharp)$. Тук имаме следния извод:

$$\frac{a \overset{0}{\Rightarrow}_{\texttt{left}} a \qquad \dfrac{(p, \beta, \rho\sharp) \vdash_P^{\ell-1} (p, \varepsilon, \sharp)}{\rho \overset{\star}{\Rightarrow}_{\texttt{left}} \beta}\ \textbf{(И.П.)}}{\underbrace{a\rho}_{\delta} \overset{\star}{\Rightarrow}_{\texttt{left}} \underbrace{a\beta}_{\alpha}}\ \text{правило (2)}$$

Вторият случай е ако $\Delta(p, \varepsilon, A) \ni (p, a)$. Това означава, че $A \to_G a$, $\delta = A\rho$ и

$$(p, \alpha, \delta\sharp) \vdash_P (p, \alpha, a\rho\sharp) \vdash_P^{\ell-1} (p, \varepsilon, \sharp).$$

Можем да направим следния извод:

$$\text{правило (2)}\ \frac{A \to_G a \qquad \rho \overset{0}{\Rightarrow}_{\texttt{left}} \rho \qquad \dfrac{(p, \alpha, a\rho\sharp) \vdash_P^{\ell-1} (p, \varepsilon, \sharp)}{a\rho \overset{\star}{\Rightarrow}_{\texttt{left}} \alpha}\ \textbf{(И.П.)}}{\underbrace{A\rho}_{\delta} \overset{\star}{\Rightarrow}_{\texttt{left}} \alpha}\ \text{(\textit{Твърдение 3.2})}\ \frac{A\rho \overset{1}{\Rightarrow}_{\texttt{left}} a\rho}{}$$

Последният случай е ако $\Delta(p, \varepsilon, A) \ni (p, BC)$. Това означава, че $A \to_G BC$, $\delta = A\rho$ и $(p, \alpha, \delta\sharp) \vdash_P (p, \alpha, BC\rho\sharp) \vdash_P^{\ell-1} (p, \varepsilon, \sharp)$. Можем да направим следния извод:

$$\text{правило (2)}\ \frac{A \to_G BC \qquad \rho \overset{0}{\Rightarrow}_{\texttt{left}} \rho \qquad \dfrac{(p, \alpha, BC\rho\sharp) \vdash_P^{\ell-1} (p, \varepsilon, \sharp)}{BC\rho \overset{\star}{\Rightarrow}_{\texttt{left}} \alpha}}{\underbrace{A\rho}_{\delta} \overset{\star}{\Rightarrow}_{\texttt{left}} \alpha}\ \text{(Твърдение 3.2)}\ \frac{A\rho \overset{1}{\Rightarrow}_{\texttt{left}} BC\rho}{}\ \textbf{(и.п.)}$$

□

Лема 3.13. За всеки стеков автомат P, съществува безконтекстна граматика G, такава че $\mathcal{L}(P) = \mathcal{L}(G)$.

Доказателство. Нека е даден стековия автомат

$$P = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \sharp, \Delta, q_{\texttt{start}}, q_{\texttt{accept}} \rangle.$$

Граматиката, която ще получим няма да бъде в нормална форма на Чомски.

Ще дефинираме безконтекстна граматика G, за която $\mathcal{L}(P) = \mathcal{L}(G)$. Променливите на граматика са

$$V = \{[q, A, p] \mid q, p \in Q \ \&\ A \in \Gamma\}.$$

Правилата на G са следните:

- Началната променлива е $S \overset{\text{деф}}{=} [q_{\texttt{start}}, \sharp, q_{\texttt{accept}}]$;
- Нека имаме $(r, BC) \in \Delta(q, a, A)$, където $a \in \Sigma_\varepsilon$. Тогава добавяме правилата:

  $$[q, A, p] \to_G a[r, B, q'][q', C, p],$$

  за всеки две състояния q' и p.
- Нека имаме $(r, B) \in \Delta(q, a, A)$, където $a \in \Sigma_\varepsilon$. Тогава добавяме правилата:

  $$[q, A, p] \to_G a[r, B, p],$$

  за всяко състояние $p \in Q$.
- Нека имаме $(p, \varepsilon) \in \Delta(q, a, A)$, където $a \in \Sigma_\varepsilon$. Тогава добавяме правилата:

  $$[q, A, p] \to_G a.$$

След като вече сме обяснили какви правила включва граматиката G, трябва да докажем, че за произволна дума $\alpha \in \Sigma^\star$, произволни състояния q и p, и произволен символ $A \in \Gamma$, е изпълнено, че:

$$[q, A, p] \overset{\star}{\Rightarrow}_{\texttt{left}} \alpha \text{ точно тогава, когато } (q, \alpha, A) \vdash_P^\star (p, \varepsilon, \varepsilon).$$

($\Rightarrow$) С пълна индукция по броят на стъпките ℓ в изчислението на стековия автомат P ще докажем, че за произволно $\ell \geq 1$,

$$\text{ако } (q, \alpha, A) \vdash_P^{\ell} (p, \varepsilon, \varepsilon), \text{ то } [q, A, p] \overset{\star}{\Rightarrow}_{\texttt{left}} \alpha.$$

Ако $\ell = 1$, то е лесно, защото $\alpha = a \in \Sigma_\varepsilon$. Тогава $(p, \varepsilon) \in \Delta(q, a, A)$ и според конструкцията на граматиката G имаме правилото $[q, A, p] \to_G a$.

Ако $\ell > 1$, то в зависимост от първата стъпка на изчислението, имаме два случая. Нека $\alpha = a\beta$, където $a \in \Sigma_\varepsilon$.

- Ако $\Delta(q, a, A) \ni (r, B)$, то имаме, че:

  $$(q, a\beta, A) \vdash_P (r, \beta, B) \vdash_P^{\ell-1} (p, \varepsilon, \varepsilon).$$

  Можем да направим следния извод:

  $$\dfrac{\dfrac{\Delta(q,a,A) \ni (r,B)}{[q,A,p] \to_G a[r,B,p]} \quad \dfrac{(r,\beta,B) \vdash_P^{\ell-1} (p,\varepsilon,\varepsilon)}{[r,B,p] \overset{\star}{\Rightarrow}_{\texttt{left}} \beta}\ \textbf{(И.П.)}}{[q,A,p] \overset{\star}{\Rightarrow}_{\texttt{left}} \underbrace{a\beta}_{\alpha}}\ \textit{(Твърдение 3.15)}\ (\text{деф.})$$

- Ако $\Delta(q, a, A) \ni (r, BC)$, то имаме, че:

  $$(q, a\beta, A) \vdash_P (r, \beta, BC) \vdash_P^{\ell-1} (p, \varepsilon, \varepsilon).$$

  За $\ell - 1$ стъпки трябва да стигнем от стек с големина 2 до празен стек. Това означава, че можем да разбием думата β на две части, $\beta = \beta_1\beta_2$, със свойството, че след като прочетем β_1, то стекът има големина 1 и след като прочетем β_2, то стекът е празен. Това означава, че съществува състояние q', за което можем да разбием изчислението по следния начин:

  Да обърнем внимание, че в междинните стъпки от двете изчисления, стекът може да расте.

  $$\begin{aligned} &(r, \beta_1, B) \vdash_P^{\ell_1} (q', \varepsilon, \varepsilon) \\ &(q', \beta_2, C) \vdash_P^{\ell_2} (p, \varepsilon, \varepsilon), \\ &\ell_1 + \ell_2 = \ell - 1. \end{aligned}$$

  Понеже $\ell_1 < \ell$ и $\ell_2 < \ell$, от **(И.П.)** имаме следното:

  $$\begin{aligned} (r, \beta_1, B) \vdash_P^{\ell_1} (q', \varepsilon, \varepsilon) &\implies [r, B, q'] \overset{\star}{\Rightarrow}_{\texttt{left}} \beta_1 \\ (q', \beta_2, C) \vdash_P^{\ell_2} (p, \varepsilon, \varepsilon) &\implies [q', C, p] \overset{\star}{\Rightarrow}_{\texttt{left}} \beta_2. \end{aligned}$$

  Понеже имаме, че $\Delta(q, a, A) \ni (r, BC)$, то в граматиката имаме правилото

  $$[q, A, p] \to_G a[r, B, q'][q', C, p].$$

  Обединявайки всичко, получаваме извода

$$\dfrac{\dfrac{\Delta(q,a,A) \ni (r,BC)}{[q,A,p] \to_G a[r,B,q'][q',C,p]} \quad \overset{(2)}{\dfrac{\overset{\textbf{(И.П.)}}{\dfrac{(r,\beta_1,B) \vdash_P^{\ell_1} (q',\varepsilon,\varepsilon)}{[r,B,q'] \overset{\star}{\Rightarrow}_{\texttt{left}} \beta_1}} \quad \overset{\textbf{(И.П.)}}{\dfrac{(q',\beta_2,C) \vdash_P^{\ell_1} (p,\varepsilon,\varepsilon)}{[q',C,p] \overset{\star}{\Rightarrow}_{\texttt{left}} \beta_2}}}{[r,B,q'][q',C,p] \overset{\star}{\Rightarrow}_{\texttt{left}} \beta_1\beta_2}}{[q,A,p] \overset{\star}{\Rightarrow}_{\texttt{left}} \underbrace{a\beta_1\beta_2}_{\alpha}}$$

($\Leftarrow$) За тази посока, с пълна индукция по дължината на извода ℓ в граматиката G ще докажем, че за произволна дължина на извода $\ell \geq 1$,

$$\text{ако } [q,A,p] \overset{\ell}{\Rightarrow}_{\texttt{left}} \alpha, \text{ то } (q,\alpha,A) \vdash_P^{\star} (p,\varepsilon,\varepsilon).$$

- Нека $\ell = 1$. Тогава имаме $[q,A,p] \to_G \alpha$, където $\alpha \in \Sigma_\varepsilon$. Този случай е ясен от дефиницията на граматиката G, т.е. $\Delta(q,a,A) \ni (p,\varepsilon)$.
- Нека $\ell > 1$. Тогава имаме, че $\alpha = a\beta$ и според правилата на граматиката G имаме два случая. Да приемем, че имаме следния извод:

Тук отново е възможно $a = \varepsilon$. Това не е проблем, защото правим индукция по дължината на извода, а не по дължината на думата α.

$$\dfrac{[q,A,p] \overset{1}{\Rightarrow}_{\texttt{left}} a[r,B,p] \qquad [r,B,p] \overset{\ell-1}{\Rightarrow}_{\texttt{left}} \beta}{[q,A,p] \overset{\ell}{\Rightarrow}_{\texttt{left}} \underbrace{a\beta}_{\alpha}}$$

Тогава директно прилагаме **(И.П.)** и получаваме, че $(r,\beta,B) \vdash_P^{\star} (p,\varepsilon,\varepsilon)$ и накрая получаваме, че $(q,a\beta,A) \vdash_P^{\star} (p,\varepsilon,\varepsilon)$.

Сега да разгледаме втория случай:

$$\dfrac{[q,A,p] \overset{1}{\Rightarrow}_{\texttt{left}} a[r,B,q'][q',C,p] \qquad [r,B,q'][q',C,p] \overset{\ell-1}{\Rightarrow}_{\texttt{left}} \beta}{[q,A,p] \overset{\ell}{\Rightarrow}_{\texttt{left}} \underbrace{a\beta}_{\alpha}}$$

Важно е, че $\beta \in \Sigma^\star$. Иначе няма да можем да приложим *Твърдение 3.5*.

Понеже $\beta \in \Sigma^\star$, можем да приложим *Твърдение 3.5* за $\overset{\star}{\Rightarrow}_{\texttt{left}}$ и оттам следва, че имаме разбиване на думата β като $\beta = \beta_1\beta_2$, където

$$\begin{aligned} &[r,B,q'] \overset{\ell_1}{\Rightarrow}_{\texttt{left}} \beta_1 \\ &[q',C,p] \overset{\ell_2}{\Rightarrow}_{\texttt{left}} \beta_2, \\ &\ell_1 + \ell_2 = \ell - 1. \end{aligned}$$

Понеже $\ell_1 < \ell$ и $\ell_2 < \ell$, от **(И.П.)** получаваме, че

$$\begin{aligned} [r,B,q'] \overset{\ell_1}{\Rightarrow}_{\texttt{left}} \beta_1 &\implies (r,\beta_1,B) \vdash_P^{\star} (q',\varepsilon,\varepsilon) \\ [q',C,p] \overset{\ell_2}{\Rightarrow}_{\texttt{left}} \beta_2 &\implies (q',\beta_2,C) \vdash_P^{\star} (p,\varepsilon,\varepsilon). \end{aligned}$$

Правилото $[q,A,p] \to_G a[r,B,q'][q',C,p]$ е добавено в граматиката, защото $\Delta(q,a,A) \ni (r,BC)$. Обединявайки всичко, което знаем, получаваме:

$$\begin{aligned} (q,a\beta,A) &\vdash_P (r,\beta_1\beta_2,BC) \\ &\vdash_P^{\star} (q',\beta_2,C) \\ &\vdash_P^{\star} (p,\varepsilon,\varepsilon). \end{aligned}$$

□

Предишните две леми ни дават следната теорема.

Теорема 3.8. Класът на езиците, които се разпознават от краен стеков автомат съвпада с класа на безконтекстните езици.

Пример 3.17. Нека е дадена граматиката G с правила

$$S \to AS \mid BS \mid \varepsilon$$
$$A \to aA \mid a$$
$$B \to Bb \mid b.$$

Ще построим стеков автомат $P = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \sharp, \Delta, q_{\texttt{start}}, q_{\texttt{accept}} \rangle$, такъв че $\mathcal{L}(P) = \mathcal{L}(G)$.

- $\Sigma = \{a, b\}$;
- $\Gamma = \{A, S, B, a, b, \sharp\}$;
- $Q = \{q_{\texttt{start}}, q, q_{\texttt{accept}}\}$;
- Дефинираме релацията на преходите, следвайки конструкцията от *Теорема 3.8*:
  - $\Delta(q_{\texttt{start}}, \varepsilon, \sharp) = \{(q, S\sharp)\}$;
  - $\Delta(q, \varepsilon, S) = \{(q, AS), (q, BS), (q, \varepsilon)\}$;
  - $\Delta(q, \varepsilon, A) = \{(q, aA), (q, a)\}$;
  - $\Delta(q, \varepsilon, B) = \{(q, Bb), (q, b)\}$;
  - $\Delta(q, a, a) = \{(q, \varepsilon)\}$;
  - $\Delta(q, b, b) = \{(q, \varepsilon)\}$;
  - $\Delta(q, \varepsilon, \sharp) = \{(q_{\texttt{accept}}, \varepsilon)\}$;

Теорема 3.9. Нека L е безконтекстен език и R е регулярен език. Тогава тяхното сечение $L \cap R$ е безконтекстен език.

Упътване. Нека имаме стеков автомат [PL98, стр. 144]

$$P = \langle Q', \Sigma, \Gamma, \sharp, \Delta', q'_{\texttt{start}}, q'_{\texttt{accept}} \rangle, \text{ където } \mathcal{L}(P) = L,$$

и детерминиран краен автомат

$$\mathcal{A} = \langle Q'', \Sigma, q''_{\texttt{start}}, \delta'', F'' \rangle, \text{ където } \mathcal{L}(\mathcal{A}) = R.$$

Ще определим нов стеков автомат $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \sharp, \Delta, q_{\texttt{start}}, q_{\texttt{accept}} \rangle$, където: Сравнете с конструкцията от *Твърдение 2.2*.

- $Q \stackrel{\text{деф}}{=} Q' \times Q''$;

- $q_{\texttt{start}} \stackrel{\text{деф}}{=} \langle q'_{\texttt{start}}, q''_{\texttt{start}} \rangle$;
- $F \stackrel{\text{деф}}{=} \{q'_{\texttt{accept}}\} \times F''$;
- Функцията на преходите Δ е дефинирана както следва:
  - Ако $(r_1, Z) \in \Delta'(q_1, a, Y)$, то

    Симулираме едновременно изчислението и на двата автомата.

    $$(\langle r_1, \delta''(q_2, a)\rangle, Z) \in \Delta(\langle q_1, q_2\rangle, a, Y).$$

  - Ако $(r_1, Z) \in \Delta'(q_1, \varepsilon, Y)$ и всяко $q_2 \in Q''$, то

    Нищо не четем от входната дума, следователно правим празен ход на $\mathcal{A}$

    $$(\langle r_1, q_2\rangle, Z) \in \Delta(\langle q_1, q_2\rangle, \varepsilon, Y).$$

  - Δ не съдържа други преходи;

✍ Докажете, че $\mathcal{L}(\mathcal{M}) = \mathcal{L}(P) \cap \mathcal{L}(\mathcal{A})$!

- Докажете, че ако $(\langle q_1, q_2\rangle, \alpha, \gamma) \vdash^\star_{\mathcal{M}} (\langle p_1, p_2\rangle, \varepsilon, \varepsilon)$, то

  Индукция по броя стъпки в изчислението на $\mathcal{M}$.

  $$(q_1, \alpha, \gamma) \vdash^\star_P (p_1, \varepsilon, \varepsilon) \text{ и } (q_2, \alpha) \vdash^\star_{\mathcal{A}} (p_2, \varepsilon).$$

- Докажете, че ако $(q_1, \alpha, \gamma) \vdash^\star_P (p_1, \varepsilon, \varepsilon)$ и $(q_2, \alpha) \vdash^\star_{\mathcal{A}} (p_2, \varepsilon)$, то

  Индукция по броя стъпки в изчислението на P.

  $$(\langle q_1, q_2\rangle, \alpha, \gamma) \vdash^\star_{\mathcal{M}} (\langle p_1, p_2\rangle, \varepsilon, \varepsilon).$$

□

Теорема 3.9 е удобна, когато искаме да докажем, че даден език не е безконтекстен. С нейна помощ можем да сведем езика до друг, за който вече знаем, че не е безконтекстен.

Пример 3.18. Да разгледаме езика $L = \{\omega \in \{a, b, c\}^\star \mid |\omega|_a = |\omega|_b = |\omega|_c\}$. Да допуснем, че L е безконтекстен език. Тогава, според *Теорема 3.9*, $L' = L \cap \mathcal{L}(a^\star b^\star c^\star)$ също е безконтекстен език. Но $L' = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, за който знаем от *Пример 3.8*, че *не* е безконтекстен. Достигнахме до противоречие. Следователно, L не е безконтекстен език.

Забележка. Не е вярно, че сечението на всеки два безконтекстни езика е безконтекстен език. Например, $L_1 = \{a^n b^n c^k \mid n, k \in \mathbb{N}\}$ и $L_2 = \{a^k b^n c^n \mid n, k \in \mathbb{N}\}$ са безконтекстни езици, но ние знаем, че $L_1 \cap L_2 = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ не е безконтекстен.

3.11 Допълнителни задачи

3.11.1 Равен брой леви и десни скоби

Нека за по-голяма яснота да положим

За да се приближим малко до по-реален пример, можете да си мислите, че тук искаме да разпознаем думите с равен брой леви и десни скоби, като например интерпретираме a като символа { и b като символа }.

$$\texttt{left}(\alpha) \stackrel{\text{деф}}{=} |\alpha|_a \qquad \text{// брой срещания на } a \text{ в } \alpha$$
$$\texttt{right}(\alpha) \stackrel{\text{деф}}{=} |\alpha|_b \qquad \text{// брой срещания на } b \text{ в } \alpha$$

Задача 3.22. Нека ω е произволна дума над азбуката $\{a, b\}$. Тогава:

а) ако $\texttt{left}(\omega) = \texttt{right}(\omega) + 1$, то съществуват думи ω_1, ω_2, за които е изпълнено:

- $\omega = \omega_1 a \omega_2$;
- $\texttt{left}(\omega_1) = \texttt{right}(\omega_1)$;
- $\texttt{left}(\omega_2) = \texttt{right}(\omega_2)$.

б) ако $\texttt{right}(\omega) = \texttt{left}(\omega) + 1$, то съществуват думи ω_1, ω_2, за които е изпълнено:

- $\omega = \omega_1 b \omega_2$;
- $\texttt{left}(\omega_1) = \texttt{right}(\omega_1)$;
- $\texttt{left}(\omega_2) = \texttt{right}(\omega_2)$.

Упътване. Ще се съсредоточим върху случая, когато ω е дума, за която $\texttt{left}(\omega) = \texttt{right}(\omega) + 1$. Ще докажем а) с индукция по дължината на думата.

Другият случай е аналогичен

- $|\omega| = 1$. Тогава $\omega_1 = \omega_2 = \varepsilon$ и $\omega = a$.
- Да приемем, че твърдението а) е вярно за думи с дължина $\leq n$.
- $|\omega| = n + 1$. Ще разгледаме два случая, в зависимост от първия символ на ω.
  - Случаят $\omega = a\omega'$ е очевиден. (Защо?)
  - Интересният случай е $\omega = b^i ba\omega'$, за някое i. Да разгледаме думата ω'', която се получава от ω като премахнем първото срещане на думата ba, т.е. $\omega'' = b^i\omega'$ и $|\omega''| = n - 1$. Понеже от ω сме премахнали равен брой леви и десни скоби, то $\texttt{left}(\omega'') = \texttt{right}(\omega'') + 1$. Според **(И.П.)** за ω'' са изпълнени свойствата:
    * $\omega'' = \omega_1'' a \omega_2''$;
    * $\texttt{left}(\omega_1'') = \texttt{right}(\omega_1'')$;
    * $\texttt{left}(\omega_2'') = \texttt{right}(\omega_2'')$.

    Понеже b^i е префикс на ω_1'', за да получим обратно ω, трябва да прибавим премахнатата част ba веднага след b^i в ω_1''.

□

Задача 3.23. За произволна дума $\omega \in \{a,b\}^\star$, докажете, че ако $\texttt{left}(\omega) > \texttt{right}(\omega)$, то съществуват думи ω_1 и ω_2, за които са изпълнени свойствата:

- $\omega = \omega_1 a \omega_2$;
- $\texttt{left}(\omega_1) \geq \texttt{right}(\omega_1)$;
- $\texttt{left}(\omega_2) \geq \texttt{right}(\omega_2)$.

Задача 3.24. Да се докаже, че езикът $L = \{\, \alpha \in \{a,b\}^\star \mid \texttt{left}(\alpha) = \texttt{right}(\alpha) \,\}$ е безконтекстен.

Алтернативна граматика за езика L е

$S \to \varepsilon \mid aSb \mid bSa \mid SS$.

Доказателство. Една възможна граматика G е следната:

$$S \to aSbS \mid bSaS \mid \varepsilon.$$

Като следствие от *Задача 3.22* може лесно да се изведе, че за думи ω, за които $\texttt{left}(\omega) = \texttt{right}(\omega)$, е изпълнено следното:

а) ако $\omega = a\omega'$, то са изпълнени свойствата:

- $\omega = a\omega_1 b \omega_2$;
- $\texttt{left}(\omega_1) = \texttt{right}(\omega_1)$;
- $\texttt{left}(\omega_2) = \texttt{right}(\omega_2)$.

б) ако $\omega = b\omega'$, то са изпълнени свойствата:

- $\omega = b\omega_1 a \omega_2$;
- $\texttt{left}(\omega_1) = \texttt{right}(\omega_1)$;
- $\texttt{left}(\omega_2) = \texttt{right}(\omega_2)$.

Да напомним, че $\mathcal{L}^\ell_G(S) = \{\omega \in \Sigma^\star \mid S \overset{\leq \ell}{\lhd} \omega\}$ и според *Твърдение 3.10* имаме следната рекурсивна връзка:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^0_G(S) =& \emptyset \\
\mathcal{L}^{\ell+1}_G(S) =& \{a\} \cdot \mathcal{L}^\ell_G(S) \cdot \{b\} \cdot \mathcal{L}^\ell_G(S) \cup \\
& \{b\} \cdot \mathcal{L}^\ell_G(S) \cdot \{a\} \cdot \mathcal{L}^\ell_G(S) \cup \\
& \{\varepsilon\}.
\end{aligned}$$

За коректност на граматиката трябва да докажем, че за всяко ℓ е изпълнено следното:

$$\mathcal{L}^\ell_G(S) \subseteq \{\omega \in \{a,b\}^\star \mid \texttt{left}(\omega) = \texttt{right}(\omega)\}. \tag{3.10}$$

Очевидно е, че *Свойство (3.10)* е изпълнено за $\ell = 0$. Да приемем, че *Свойство (3.10)* е изпълнено за някое ℓ. Ще докажем *Свойство (3.10)* за $\ell + 1$. Да вземем произволна дума $\omega \in \mathcal{L}^{\ell+1}_G(S)$. Имаме три случая.

- Ако $\omega = \varepsilon$. Тогава е ясно, че $\texttt{left}(\omega) = \texttt{right}(\omega)$.
- Ако $\omega \in \{a\} \cdot \mathcal{L}_G^\ell(S) \cdot \{b\} \cdot \mathcal{L}_G^\ell(S)$. Тогава $\omega = a\omega_1 b\omega_2$ и $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{L}_G^\ell(S)$. От **(И.П.)** получаваме, че $\texttt{left}(\omega_1) = \texttt{right}(\omega_1)$ и $\texttt{left}(\omega_2) = \texttt{right}(\omega_2)$. Заключаваме, че $\texttt{left}(\omega) = \texttt{right}(\omega)$
- Случаят, когато $\omega = b\omega_1 a\omega_2$, е аналогичен.

Така доказахме коректност на граматиката, т.е. имаме следното свойство:

$$\mathcal{L}_G(S) = \bigcup_\ell \mathcal{L}_G^\ell(S) \subseteq \{\omega \in \{a,b\}^\star \mid \texttt{left}(\omega) = \texttt{right}(\omega)\}.$$

Сега за пълнота на граматиката трябва да докажем, че

$$\{\omega \in \{a,b\}^\star \mid \texttt{left}(\omega) = \texttt{right}(\omega)\} \subseteq \mathcal{L}_G(S). \tag{3.11}$$

Това ще направим с индукция по дължината на думите. Да вземем произволна дума $\omega \in \{a,b\}^\star$ и $\texttt{left}(\omega) = \texttt{right}(\omega)$. Да видим защо $\omega \in \mathcal{L}_G(S)$.

- Ако $\omega = \varepsilon$, то е ясно, че $\omega \in \mathcal{L}_G(S)$.
- Нека $\omega \neq \varepsilon$. Според *Задача 3.22* имаме два случая.
  - Нека $\omega = a\omega_1 b\omega_2$, $\texttt{left}(\omega_1) = \texttt{right}(\omega_1)$ и $\texttt{left}(\omega_2) = \texttt{right}(\omega_2)$. Тогава от **(И.П.)** имаме, че $\omega_1 \in \mathcal{L}_G(S)$ и $\omega_2 \in \mathcal{L}_G(S)$. Заключаваме, че
  $$\omega \in \{a\} \cdot \mathcal{L}_G(S) \cdot \{b\} \cdot \mathcal{L}_G(S) \subseteq \mathcal{L}_G(S).$$
  - Ако $\omega = b\omega_1 a\omega_2$, то с аналогични разсъждения получаваме, че
  $$\omega \in \{b\} \cdot \mathcal{L}_G(S) \cdot \{a\} \cdot \mathcal{L}_G(S) \subseteq \mathcal{L}_G(S).$$

Така доказахме пълнота на граматиката, т.е. имаме следното свойство:

$$\{\omega \in \{a,b\}^\star \mid \texttt{left}(\omega) = \texttt{right}(\omega)\} \subseteq \mathcal{L}_G(S).$$

□

3.11.2 Балансирани скоби

Нека α е дума над азбука, която включва буквите a и b. Ще казваме, че α е **балансирана**, ако са изпълнени свойствата:

- $\texttt{left}(\alpha) = \texttt{right}(\alpha)$;
- За всеки префикс γ на α, $\texttt{left}(\gamma) \geq \texttt{right}(\gamma)$.

Например, думата $aabaabbb$ е балансирана, докато $abbaaab$ не е балансирана. Практическият смисъл на тази задача е, че можем да напишем граматика, която да разпознава дали за всяка отваряща скоба {, която прочетем, по-късно ще прочетем и съответната затваряща скоба }.

Задача 3.25. Докажете, че $L = \{\, \alpha \in \{a,b\}^\star \mid \alpha \text{ е балансирана дума} \,\}$ е безконтекстен език.

[Koz97, стр. 135]
✍ Докажете, че езикът L не е регулярен!

Доказателство. Да разгледаме граматиката G с правила

$$S \to aSb \mid SS \mid \varepsilon.$$

Ще докажем, че $L = \mathcal{L}(G)$. Имаме, че

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_G^0(S) =& \emptyset \\ \mathcal{L}_G^{\ell+1}(S) =& \{a\} \cdot \mathcal{L}_G^\ell(S) \cdot \{b\} \cup \\ & \mathcal{L}_G^\ell(S) \cdot \mathcal{L}_G^\ell(S) \cup \\ & \{\varepsilon\}. \end{aligned}$$

Първо да разгледаме коректност на граматиката, т.е. трябва да докажем, че за всяко ℓ е изпълнено следното:

$$\mathcal{L}_G^\ell(S) \subseteq \{\, \alpha \in \{a,b\}^\star \mid \alpha \text{ е балансирана дума} \,\}. \tag{3.12}$$

Твърдението е очевидно за $\ell = 0$. Да приемем, че *Свойство (3.12)* е изпълнено за някое ℓ. Ще докажем *Свойство (3.12)* за $\ell + 1$. Да разгледаме произволна дума $\omega \in \mathcal{L}_G^{\ell+1}(S)$. Имаме три случая.

- Нека $\omega = \varepsilon$. Тогава е ясно, че ω е балансирана дума.
- Нека $\omega \in \{a\} \cdot \mathcal{L}_G^\ell(S) \cdot \{b\}$. Тогава $\omega = a\omega_1 b$ и от **(И.П.)** имаме, че ω_1 е балансирана. Лесно се съобразява, че ω също е балансирана.
- Нека $\omega \in \mathcal{L}_G^\ell(S) \cdot \mathcal{L}_G^\ell(S)$. Тогава $\omega = \omega_1\omega_2$, такива че $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{L}_G^\ell(S)$. От **(И.П.)** имаме, че ω_1 и ω_2 са балансирани. Лесно се съобразява, че ω също е балансирана.

Така доказахме, че

$$\mathcal{L}_G(S) = \bigcup_\ell \mathcal{L}_G^\ell(S) \subseteq \{\, \alpha \in \{a,b\}^\star \mid \alpha \text{ е балансирана дума} \,\}.$$

Сега ще докажем пълнота на граматиката, т.е. следното свойство:

$$\{\, \alpha \in \{a,b\}^\star \mid \alpha \text{ е балансирана дума} \,\} \subseteq \mathcal{L}_G(S). \tag{3.13}$$

Това ще направим с *пълна* индукция по дължината на думите. Да разгледаме произволна балансирана дума ω. Имаме няколко случая, които трябва да разгледаме.

- Ако $\omega = \varepsilon$, то е ясно, че $\omega \in \mathcal{L}_G(S)$.

- Нека сега $\omega \neq \varepsilon$. Ясно е, че със сигурност $\omega = a\omega_1 b$. Проблемът е, че в общия случай не е ясно дали можем да приложим **(И.П.)** за ω_1, защото е възможно ω_1 да не е балансирана. Например, ако $\omega = abab$, то $\omega_1 = ba$ не е балансирана. Поради тази причина, трябва да сме по-внимателни и да разгледаме два допълнителни случая.

  – Нека ω има *същински* префикс ω_1, който да е балансирана дума. Понеже ω е балансирана дума, лесно се съобразява, че $\omega = \omega_1\omega_2$, ω_2 също е балансирана дума. Сега можем да приложим **(И.П.)** за ω_1 и ω_2 и да получим, че $\omega_1 \in \mathcal{L}_G(S)$ и $\omega_2 \in \mathcal{L}_G(S)$. Ясно е, че $\omega \in \mathcal{L}_G(S)$. Тук $\omega_1 \neq \varepsilon$ и $\omega_1 \neq \alpha$.

  – Нека ω да няма същински префикс ω_1, който е балансирана дума. Ясно е, че тогава $\omega = a\beta b$, за някое β. Да видим защо β е балансирана дума. Ако β е балансирана, то ще можем да приложим **(И.П.)** за β и ще сме готови.

    За всеки префикс γ на β имаме, че $a\gamma$ е префикс на α, и понеже α е балансирана, то $\texttt{left}(a\gamma) \geq \texttt{right}(a\gamma)$. Възможно ли е $\texttt{left}(\gamma) < \texttt{right}(\gamma)$? Това може да се случи единствено ако $\texttt{left}(a\gamma) = \texttt{right}(a\gamma)$. Но тогава $a\gamma$ е същински префикс на α, за който $a\gamma$ е балансирана дума, което противоречи на случая, който разглеждаме. Това означава, че за произволен префикс γ на β, $\texttt{left}(\gamma) \geq \texttt{right}(\gamma)$ и оттук β е балансирана дума и можем да приложим **(И.П.)** . Тогава $\beta \in \mathcal{L}_G(S)$ и следователно $\alpha \in \{a\} \cdot \mathcal{L}_G(S) \cdot \{b\} \subseteq \mathcal{L}_G(S)$.

Така доказахме *Свойство (3.13)*, което ни дава пълнота на граматиката спрямо езика. □

3.11.3 Лесни задачи

Задача 3.26. Постройте регулярен израз за езика на следната граматика:

$$\begin{aligned} S &\to S + S \mid S * S \mid A \\ A &\to KL \mid LK \\ K &\to 0K \mid \varepsilon \\ L &\to 1K \mid \varepsilon. \end{aligned}$$

Задача 3.27. Докажете, че следните езици са безконтекстни.

а) $L = \{\omega \in \{a,b\}^\star \mid \omega = \omega^{\texttt{rev}}\}$; $S \to aSa \mid bSb \mid a \mid b \mid \varepsilon$

б) $L = \{a^n b^{2m} c^n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$;

в) $L = \{a^n b^m c^m d^n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$;

г) $L = \{a^n b^{2k} \mid n, k \in \mathbb{N} \,\&\, n \neq k\}$; Обединение на два езика

д) $L = \{a^n b^k \mid n > k\}$; $S \to aSb|aS|a$

е) $L = \{a^n b^k \mid n \geq 2k\}$;

ж) $L = \{a^n b^k c^m \mid n + k \geq m + 1\}$; $S \to aSc|aS|aB|bB$, $B \to bBc|bB|\varepsilon$

з) $L = \{a^n b^k c^m \mid n + k \geq m + 2\}$;

и) $L = \{a^n b^k c^m \mid n + k + 1 \geq m\}$; $S \to aSc|aS|B|Bc$, $B \to bBc|bB|\varepsilon$

к) $L = \{a^n b^m c^{2k} \mid n \neq 2m \,\&\, k \geq 1\}$;

л) $L = \{a^n b^k c^m \mid n + k \leq m\}$;

м) $L = \{a^n b^k c^m \mid n + k \leq m + 1\}$;

Обединение на три езика

н) $L = \{a^n b^m c^k \mid n, m, k$ не са страни на триъгълник$\}$;

о) $L = \{a, b\}^\star \setminus \{a^{2n} b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$;

$S \to EaE,$
$E \to aEbE \mid bEaE \mid \varepsilon$

п) $L = \{\omega \in \{a, b\}^\star \mid |\omega|_a = |\omega|_b + 1\}$;

р) $L = \{\omega \in \{a, b\}^\star \mid |\omega|_a \geq |\omega|_b\}$;

с) $L = \{\omega \in \{a, b\}^\star \mid |\omega|_a > |\omega|_b\}$;

т) $L = \{\alpha \in \{a, b\}^\star \mid$ във всеки префикс β на α, $|\beta|_b \leq |\beta|_a\}$;

у) $L = \{\alpha\sharp\beta \mid \alpha, \beta \in \{a, b\}^\star \,\&\, \alpha^{\mathtt{rev}}$ е поддума на $\beta\}$.

ф) $L = \{\omega_1\sharp\omega_2\sharp\cdots\sharp\omega_n \mid n \geq 2 \,\&\, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n \in \{a, b\}^\star \,\&\, |\omega_1| = |\omega_2|\}$;

х) $L = \{\omega_1\sharp\omega_2\sharp\cdots\sharp\omega_n \mid n \geq 2 \,\&\, \omega_1, \ldots, \omega_n \in \{a, b\}^\star \,\&\, (\exists i \neq j)[\,|\omega_i| = |\omega_j|\,]\}$;

ц) $L = \{\omega_1\sharp\omega_2\sharp\cdots\sharp\omega_n \mid n \geq 2 \,\&\, (\forall i \in [1, n])[\,\omega_i \in \{a, b\}^\star \,\&\, |\omega_i| = |\omega_{n+1-i}|\,]\}$.

Задача 3.28. Проверете дали следните езици са безконтекстни:

а) $\{a^n b^{2n} c^{3n} \mid n \in \mathbb{N}\}$;

б) $\{a^n b^k c^k a^n \mid k \leq n\}$;

в) $\{a^n b^m c^k \mid n < m < k\}$;

г) $\{a^n b^n c^k \mid n \leq k \leq 2n\}$;

д) $\{a^n b^m c^k \mid k = \min\{n, m\}\}$;

е) $\{a^n b^n c^m \mid m \leq n\}$;

ж) $\{a^n b^m c^k \mid k = n \cdot m\}$;

з) $L^\star$, където $L = \{\alpha\alpha^{\mathtt{rev}} \mid \alpha \in \{a, b\}^\star\}$;

и) $\{\omega\omega\omega \mid \omega \in \{a, b\}^\star\}$;

к) $\{a^{n^2} b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$;

л) $\{a^p \mid p$ е просто $\}$;

м) $\{\omega \in \{a, b\}^\star \mid \omega = \omega^{\mathtt{rev}}\}$;

н) $\{\omega^n \mid \omega \in \{a, b\}^\star \,\&\, |\omega|_b = 2 \,\&\, n \in \mathbb{N}\}$;

о) $\{\omega c^n \omega^R \mid \omega \in \{a, b\}^\star \,\&\, n = |\omega|\}$;

п) $\{\alpha c \beta \mid \alpha, \beta \in \{a, b\}^\star \,\&\, \alpha$ е подниз на $\beta\}$;

р) $\{\omega_1\sharp\omega_2\sharp\ldots\sharp\omega_k \mid k \geq 2 \,\&\, \omega_i \in \{a\}^\star \,\&\, (\exists i, j)[i \neq j \,\&\, \omega_i = \omega_j]\}$;

с) $\{\omega_1\sharp\omega_2\sharp\ldots\sharp\omega_k \mid k \geq 2 \,\&\, \omega_i \in \{a\}^\star \,\&\, (\forall i, j \leq k)[i \neq j \;\Leftrightarrow\; \omega_i \neq \omega_j]\}$;

т) $\{a^i b^j c^k \mid i, j, k \geq 0 \,\&\, (i = j \vee j = k)\}$;

у) $\{\omega \in \{a, b, c\}^\star \mid |\omega|_a > |\omega|_b > |\omega|_c\}$;

ф) $\{a, b\}^\star \setminus \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$;

х) $\{a^n b^m c^k \mid m^2 = 2nk\}$;

ц) $L = \{a^n b^m c^m a^n \mid m, n \in \mathbb{N} \,\&\, n = m + 42\}$;

ч) $L = \{\sharp a\sharp aa\sharp aaa\sharp\cdots\sharp a^{n-1}\sharp a^n\sharp \mid n \geq 1\}$;

ш) $\{a^m b^n c^k \mid m = n \vee n = k \vee m = k\}$;

щ) $\{a^m b^n c^k \mid m \neq n \vee n \neq k \vee m \neq k\}$;

ю) $\{\omega \in \{a, b, c\}^\star \mid |\omega|_a \neq |\omega|_b \vee |\omega|_a \neq |\omega|_c \vee |\omega|_b \neq |\omega|_c\}$.

3.11.4 Не толкова лесни задачи

Задача 3.29. Докажете, че езикът $L = \{a^n b^{kn} \mid k, n > 0\}$ не е безконтекстен.

Упътване. Да разгледаме ситуацията $\alpha = a^p b^{p^2} \in L$ и $\alpha = xyuvw$, където $y = a^i$ и $v = b^j$. Интересният случай е когато $0 < i, j < p$.

- Нека $i = j$. Да разглеждаме думата $xy^{p^2+1}uv^{p^2+1}w$, която за да бъде в езика L означава, че трябва $p + p^2 i$ дели $p^2 + p^2 i$, т.е. $1 + pi$ трябва да дели $p + pi$.

$$p + pi = k(1 + pi), \text{ за някое } 1 \leq k < p$$
$$p = k + pi(k - 1), \text{ за някое } 1 \leq k < p$$

  Достигаме до противоречие.

- Нека $i > j$, т.е. $i \geq j + 1$. Отново разглеждаме думата $xy^{p^2+1}uv^{p^2+1}w$. За да бъде тази дума в езика L, трябва $p + p^2 i$ да дели $p^2 + p^2 j$, т.е. $1 + pi$ трябва да дели $p + pj$, но

$$1 + pi \geq 1 + p(j + 1) > p + pj.$$

  Противоречие.

- Нека $i < j$ и тогава нека $j = mi + r$, където $p > i > r \geq 0$ Разглеждаме думата $xy^{mp^2+1}uv^{mp^2+1}w$. Това означава дали $p + mp^2 i$ дели $p^2 + mp^2 j$, т.е. дали $1 + mpi$ дели $p + mpj$.

$$p + pmj = k(1 + pmi), \text{ за някое } 1 \leq k.$$

  – Възможно ли е $k \geq p$? Тогава:

$$p + pmj = k(1 + pmi) \geq p(1 + pmi) \geq p(1 + pj)$$
$$p(1 + mj) \geq p(1 + pj)$$
$$m \geq p.$$

    Достигаме до противоречие. Следователно, $1 \leq k < p$.

  – Възможно ли е $k \leq m$? Тогава:

$$p + pmj = k(1 + pmi) \leq m(1 + pmi) \leq m(1 + pj)$$
$$p + pmj \leq m + pmj$$
$$p \leq m.$$

    Достигаме до противоречие, защото $m < p$.

  – Заключаваме, че $1 \leq m < k < p$. Тогава:

$$p + pmj = k(1 + pmi)$$
$$p = k + pm(ki - j).$$

    Понеже $m < k$, то $j < (m+1)i \leq ki$, т.е. $ki - j > 0$. Достигаме до противоречие.

□

За всеки две думи с равна дължина, дефинираме функцията `diff` по следния начин:

$$\texttt{diff}(\varepsilon, \varepsilon) = 0$$
$$\texttt{diff}(a \cdot \alpha, b \cdot \beta) = \begin{cases} \texttt{diff}(\alpha, \beta), & \text{ако } a = b \\ 1 + \texttt{diff}(\alpha, \beta), & \text{ако } a \neq b \end{cases}$$

Задача 3.30. За всеки от следните езици, отговорете дали са безконтекстни, като се обосновете:

Да

а) $\{\alpha\sharp\beta \mid \alpha, \beta \in \{a, b\}^\star \,\&\, |\alpha| = |\beta| \,\&\, \texttt{diff}(\alpha, \beta^{\texttt{rev}}) = 1\}$;

Да

б) $\{\alpha\sharp\beta \mid \alpha, \beta \in \{a, b\}^\star \,\&\, |\alpha| = |\beta| \,\&\, \texttt{diff}(\alpha, \beta^{\texttt{rev}}) \geq 1\}$;

Не

в) $\{\alpha\sharp\beta \mid \alpha, \beta \in \{a, b\}^\star \,\&\, |\alpha| = |\beta| \,\&\, \texttt{diff}(\alpha, \beta) \geq 1\}$;

Да

г) $\{\alpha\beta \mid \alpha, \beta \in \{a, b\}^\star \,\&\, |\alpha| = |\beta| \,\&\, \texttt{diff}(\alpha, \beta) \geq 1\}$;

Не

д) $\{\alpha\beta \mid \alpha, \beta \in \{a, b\}^\star \,\&\, |\alpha| = |\beta| \,\&\, \texttt{diff}(\alpha, \beta) = 1\}$;

Задача 3.31. Да разгледаме езика

$$D_1 \stackrel{\text{деф}}{=} \{\alpha_1\sharp\cdots\sharp\alpha_n \mid n \geq 2 \,\&\, |\alpha_i| = |\alpha_{i+1}| \,\&\, \texttt{diff}(\alpha_i, \alpha_{i+1}^{\texttt{rev}}) = 1\}.$$

- Докажете, че D_1 не е безконтекстен.
- Докажете, че D_1 може да се представи като сечението на два безконтекстни езика.

Упътване. Да разгледаме безконтекстния език

$$L_1 = \{\alpha_1\sharp\alpha_2 \mid |\alpha_1| = |\alpha_2| \,\&\, \texttt{diff}(\alpha_1, \alpha_2^{\texttt{rev}}) = 1\}.$$

Тогава

$$D_1 = L_1 \cdot (\sharp L_1)^\star \cdot (\{\varepsilon\} \cup \sharp\{a, b\}^\star) \cap \{a, b\}^\star \cdot (\sharp L_1)^\star \cdot (\{\varepsilon\} \cup \sharp\{a, b\}^\star).$$

□

Задача 3.32. За произволен език L, дефинираме езика

$$\texttt{Diff}_n(L) = \{\alpha \in L \mid (\exists\beta \in L)[|\alpha| = |\beta| \,\&\, \texttt{diff}(\alpha, \beta) = n]\}.$$

Вярно ли е, че:

- ако L е регулярен, то $\texttt{Diff}_n(L)$ е регулярен?

- ако L е безконтекстен, то $\texttt{Diff}_n(L)$ е безконтекстен?

Упътване. Мисля, че най-лесно става като се разгледа съответно автомата или стековия автомат. □

Задача 3.33. Нека L_1 и L_2 са езици. Дефинираме [Sip12, стр. 158]

$$L_1 \triangle L_2 \stackrel{\text{деф}}{=} \{\alpha\beta \mid \alpha \in L_1 \,\&\, \beta \in L_2 \,\&\, |\alpha| = |\beta|\}.$$

Докажете, че

а) ако L_1 и L_2 са регулярни езици, то е възможно $L_1 \triangle L_2$ да не е регулярен;

б) ако L_1 и L_2 са регулярни езици, то $L_1 \triangle L_2$ е безконтекстен;

в) ако L_1 и L_2 са безконтекстни езици, то е възможно $L_1 \triangle L_2$ да не е безконтекстен.

Задача 3.34. Докажете, че ако L е безконтекстен език, то

$$L^{\texttt{rev}} = \{\omega^{\texttt{rev}} \mid \omega \in L\}$$

също е безконтекстен.

Задача 3.35. Нека $\Sigma = \{a, b, c, d, f, e\}$. Докажете, че езикът L е безконтекстен, където за думите $\omega \in L$ са изпълнени свойствата:

- за всяко $n \in \mathbb{N}$, след всяко срещане на n последователни a-та следват n последователни b-та, и b-та не се срещат по друг повод в ω, и
- за всяко $m \in \mathbb{N}$, след всяко срещане на m последователни c-та следват m последователни d-та, и d-та не се срещат по друг повод в ω, и
- за всяко $k \in \mathbb{N}$, след всяко срещане на k последователни f-а следват k последователни e-та, и e-та не се срещат по друг повод в ω.

Задача 3.36. Да разгледаме езиците:

$$P = \{\alpha \in \{a, b, c\}^* \mid \alpha \text{ е палиндром с четна дължина}\}$$
$$L = \{\beta b^n \mid n \in \mathbb{N}, \beta \in P^n\}.$$

Да се докаже, че:

а) L не е регулярен;

б) L е безконтекстен.

Задача 3.37. Нека L_1 е произволен регулярен език над азбуката Σ, а L_2 е езика от всички думи палиндроми над Σ. Докажете, че L е безконтекстен език, където:

$$L = \{\alpha_1 \cdots \alpha_{3n} \beta_1 \cdots \beta_m \gamma_1 \cdots \gamma_n \mid \alpha_i, \gamma_j \in L_1, \beta_k \in L_2, m, n \in \mathbb{N}\}.$$

Задача 3.38. Нека $L = \{\omega \in \{a,b\}^\star \mid |\omega|_a = 2\}$. Да се докаже, че езикът $L' = \{\alpha^n \mid \alpha \in L, n \geq 0\}$ не е безконтекстен.

Задача 3.39. Нека $\Sigma = \{a,b,c\}$ и $L \subseteq \Sigma^\star$ е безконтестен език. Ако имаме дума $\alpha \in \Sigma^\star$, тогава *L-вариант* на α ще наричаме думата, която се получава като в α всяко едно срещане на символа a заменим с (евентуално различна) дума от L. Тогава, ако $M \subseteq \Sigma^*$ е произволен безконтестен език, да се докаже че езикът

$$M' = \{\beta \in \Sigma^\star \mid \beta \text{ е } L\text{-вариант на } \alpha \in M\}$$

също е безконтекстен.

Задача 3.40. Докажете, че всеки безконтекстен език над азбуката $\Sigma = \{a\}$ е регулярен.

Задача 3.41. Да фиксираме азбуката Σ. Нека L е безконтекстен език, а R е регулярен език. Докажете, че езикът

$$L/_R = \{\alpha \in \Sigma^\star \mid (\exists \beta \in R)[\alpha\beta \in L]\}$$

е безконтекстен.

Упътване. Най-лесно се вижда с декартова конструкция на стеков автомат за L и автомат за R. □

Задача 3.42. Нека е дадена граматиката $G = \langle\{a,b\}, \{S,A,B,C\}, S, R\rangle$. Използвайте CYK-алгоритъма, за да проверите дали думата α принадлежи на $\mathcal{L}(G)$, където правилата на граматиката и думата α са зададени като:

а) $S \to BA \mid CA \mid a,\ C \to BS \mid SA,\ A \to a,\ B \to b$,
$\alpha = bbaaa$;

б) $S \to AB \mid BC,\ A \to BA \mid a,\ B \to CC \mid b,\ C \to AB \mid a$,
$\alpha = baaba$;

в) $S \to AB,\ A \to AC \mid a \mid b,\ B \to CB \mid a,\ C \to a$,
$\alpha = babaa$.

Задача 3.43. Нека L е безконтекстен език над азбуката Σ. Докажете, че следните езици са безконтекстни:

а) $\texttt{Pref}(L) = \{\alpha \in \Sigma^\star \mid (\exists \beta \in \Sigma^\star)[\alpha \cdot \beta \in L]\}$;

б) $\texttt{Suff}(L) = \{\beta \in \Sigma^\star \mid (\exists \alpha \in \Sigma^\star)[\alpha \cdot \beta \in L]\}$;

в) $\texttt{Infix}(L) = \{\beta \in \Sigma^\star \mid (\exists \alpha, \gamma \in \Sigma^\star)[\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \in L]\}$;

Задача 3.44. Докажете, че езикът

$$L = \{\, \omega_1 \sharp \omega_2 \sharp \cdots \sharp \omega_{2n} \mid n \geq 1 \;\&\; \sum_{i=1}^{n} |\omega_{2i-1}| = \sum_{i=1}^{n} |\omega_{2i}| \,\}$$

е безконтекстен.

Упътване. Най-лесно става със стеков автомат, като са необходими две допълнителни букви за азбуката на стека.

Една възможна безконтекстна граматика е следната:

$$
\begin{aligned}
&E \to XEX \mid \sharp O \mid O\sharp \mid \sharp E\sharp \\
&O \to OO \mid EE \mid \varepsilon \\
&X \to a \mid b,
\end{aligned}
$$

където началната променлива е E. □

Глава 4

Машини на Тюринг

> Turing's 'Machines'. These machines are humans who calculate.
> [WWA80, § 1096].

4.1 Основни понятия

Тук до голяма степен следваме [Sip12, Глава 3]. Понятието за машина на Тюринг има много еквивалентни дефиниции.

Детерминирана машина на Тюринг ще наричаме осморка от вида

$$\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, \sqcup, q_{\texttt{start}}, q_{\texttt{accept}}, q_{\texttt{reject}} \rangle,$$

където:

- Q - крайно множество от състояния;
- Σ - крайна азбука за входа;
- Γ - крайна азбука за лентата, $\Sigma \subseteq \Gamma$;
- $\sqcup$ - символ за празна клетка на лентата, $\sqcup \in \Gamma \setminus \Sigma$;
- $q_{\texttt{start}} \in Q$ - начално състояние;
- $q_{\texttt{accept}} \in Q$ - приемащо състояние;
- $q_{\texttt{reject}} \in Q$ - отхвърлящо състояние, където $q_{\texttt{accept}} \neq q_{\texttt{reject}}$;
- $\delta : Q' \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{\triangleleft, \triangleright, \square\}$ - тотална функция на преходите, където $Q' = Q \setminus \{q_{\texttt{accept}}, q_{\texttt{reject}}\}$.

Тези две състояния ще наричаме заключителни

Това означава, че веднъж достигнем ли заключително състояние, не можем да правим повече преходи. Тук следваме [Sip12, стр. 169] и [HMU01, стр. 327].

Всяка машина на Тюринг разполага с неограничено количество памет, която е представена като безкрайна (и в двете посоки) лента, разделена на клетки. Всяка клетка съдържа елемент на Γ. Сега ще опишем как $\mathcal{M}$ работи върху вход думата $\alpha \in \Sigma^\star$. Първоначално безкрайната лента съдържа само думата α. Останалите клетки на лентата съдържат символа $\sqcup$.

Освен това, $\mathcal{M}$ се намира в началното състояние $q_{\texttt{start}}$ и главата за четене е върху най-левия символ на α. Работата на $\mathcal{M}$ е описана от функцията на преходите δ.

На англ. instanteneous description. Понякога за удобство ще означаваме моментната конфигурация като $(q, \alpha\underline{x}\beta)$ вместо по-неудобното $(\alpha, q, x\beta)$.

- Формално, **моментната конфигурация** (или описание) на едно изчисление на машина на Тюринг е тройка от вида

  $$(\alpha, q, \beta) \in \Gamma^\star \times Q \times \Gamma^+,$$

  като интерпретацията на тази тройка е, че машината се намира в състояние q и лентата има вида

  $$\cdots \sqcup \sqcup \sqcup \, \alpha\underline{x}\beta' \, \sqcup \sqcup \sqcup \cdots,$$

  където $\beta = x\beta'$ и четящата глава на машината е поставена върху x.

- Макар и да имаме безкрайна лента, моментната конфигурация, която може да се представи като *крайна* дума, описва цялото моментно състояние на машината на Тюринг.

- **Началната конфигурация** за входната дума $\alpha \in \Sigma^\star$ представлява тройката

  $$(\varepsilon, q_{\texttt{start}}, \alpha\sqcup).$$

- **Приемаща конфигурация** представлява тройка от вида

  $$(\beta, q_{\texttt{accept}}, \gamma).$$

- **Отхвърляща конфигурация** представлява тройка от вида

  $$(\beta, q_{\texttt{reject}}, \gamma).$$

- Една конфигурация ще наричаме **заключителна**, ако тя е или приемаща или отхвърляща.

Както за автомати, удобно е да дефинираме бинарна релация $\vdash$ над $\Gamma^\star \times Q \times \Gamma^+$, която ще казва как моментната конфигурация на машината $\mathcal{M}$ се променя при изпълнение на една стъпка.

Ако има опасност да се заблудим за коя точно машина на Тюринг $\mathcal{M}$ говорим, то е възможно да пишем $\delta_{\mathcal{M}}$ и $\vdash_{\mathcal{M}}$.

$$\frac{\delta(q, x) = (p, y, \rhd)}{(\alpha, q, xz\beta) \vdash (\alpha y, p, z\beta)} \text{ (right-1)} \qquad \frac{\delta(q, x) = (p, y, \lhd)}{(\alpha z, q, x\beta) \vdash (\alpha, p, zy\beta)} \text{ (left-1)}$$

$$\frac{\delta(q, x) = (p, y, \rhd)}{(\alpha, q, x) \vdash (\alpha y, p, \sqcup)} \text{ (right-2)} \qquad \frac{\delta(q, x) = (p, y, \lhd)}{(\varepsilon, q, x\beta) \vdash (\varepsilon, p, \sqcup y\beta)} \text{ (left-2)}$$

$$\frac{\delta(q, z) = (p, y, \square)}{(\alpha, q, z\beta) \vdash (\alpha, p, y\beta)} \text{ (stay)}$$

Сега за всяко естествено число ℓ, ще дефинираме релацията ℓ^ℓ, която ще казва, че от конфигурацията $\mathcal{C}$ можем да достигнем до конфигурацията $\mathcal{C}'$ за ℓ на брой стъпки.

$$\frac{}{\mathcal{C} \vdash^0 \mathcal{C}} \text{ (рефлексивност)} \qquad \frac{\mathcal{C} \vdash \mathcal{C}'' \quad \mathcal{C}'' \vdash^\ell \mathcal{C}'}{\mathcal{C} \vdash^{\ell+1} \mathcal{C}'} \text{ (транзитивност)}$$

- С $\vdash^\star$ ще означаваме рефлексивното и транзитивно затваряне на релацията $\vdash$ или с други думи,
$$\mathcal{C} \vdash^\star \mathcal{C}' \Leftrightarrow (\exists \ell \in \mathbb{N})[\mathcal{C} \vdash^\ell \mathcal{C}'].$$

- машината на Тюринг $\mathcal{M}$ **приема** думата α, ако
$$(\varepsilon, q_{\texttt{start}}, \alpha\sqcup) \vdash^\star_{\mathcal{M}} (\gamma_1, q_{\texttt{accept}}, \gamma_2),$$
за някои $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma^\star$.

Важно е да имаме $\sqcup$ след думата α, защото е възможно α да е празната дума.

- Машината на Тюринг $\mathcal{M}$ **отхвърля** думата α, ако
$$(\varepsilon, q_{\texttt{start}}, \alpha\sqcup) \vdash^\star_{\mathcal{M}} (\gamma_1, q_{\texttt{reject}}, \gamma_2),$$
за някои $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma^\star$.

- Машината на Тюринг $\mathcal{M}$ **не приема** думата α, ако $\mathcal{M}$ отхвърля α или $\mathcal{M}$ никога не завършва при начална конфигурация $(\varepsilon, q_{\texttt{start}}, \alpha)$.

- Една машина на Тюринг се нарича **разрешител**, ако при всеки вход достига до заключително състояние, т.е. достига до $q_{\texttt{accept}}$ или $q_{\texttt{reject}}$.

На англ. такава машина на Тюринг се нарича **decider** [Sip12, стр. 170]. Може такива машини на Тюринг да се наричат и тотални [Koz97, стр. 213]. Да се внимава, че в Манев понятията са различни.

- Езикът, който се **разпознава** от машината $\mathcal{M}$ е:
$$\mathcal{L}(\mathcal{M}) = \{\alpha \in \Sigma^\star \mid (\varepsilon, q_{\texttt{start}}, \alpha\sqcup) \vdash^\star_{\mathcal{M}} (\beta, q_{\texttt{accept}}, \gamma), \text{ за някои } \beta, \gamma \in \Gamma^\star\}.$$

- Езикът L се нарича **полуразрешим**, ако съществува машина на Тюринг $\mathcal{M}$, за която $L = \mathcal{L}(\mathcal{M})$. В този случай се казва, че $\mathcal{M}$ разпознава езика L. Ако една дума $\alpha \in L$, то след крайно много стъпки ще достигнем до състоянието $q_{\texttt{accept}}$. Ако $\alpha \notin L$, то не е ясно дали какво се случва с изчислението на $\mathcal{M}$ върху α. Възможно е да достигнем до състоянието $q_{\texttt{reject}}$, но може да попаднем в безкрайно изчисление.

На англ. **semidecidable language**. В литературата се използва и названието **рекурсивно номеруем език**.

- Един език L се нарича **разрешим**, ако за него съществува *разрешител* $\mathcal{M}$, за която $L = \mathcal{L}(\mathcal{M})$. В този случай се казва, че $\mathcal{M}$ разрешава езика L.

На англ. **decidable language**. В литературата се използва и названието **рекурсивен език**.

Твърдение 4.1. Ако L е разрешим език над азбуката Σ, то $\Sigma^\star \setminus L$ също е разрешим език.

От дефинициите е ясно, че всеки разрешим език е полуразрешим. По-късно, ще видим, че съществуват полуразрешими езици, чиито допълнения не са полуразрешими, т.е. не всеки полуразрешим език е разрешим. Една от основните ни задачи ще бъде да класифицираме различни езици като (не)разрешими и (не)полуразрешими. За да придобием по-добра интуиция за тези нови понятия, ще разгледаме подробно няколко примера. Ще видим също как можем да изобразяваме функцията на преходите на $\mathcal{M}$ графично.

4.2 Примери за разрешими езици

Знаем, че L не е безконтекстен, но е контекстен.

Пример 4.1. Да разгледаме езика $L = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Нека да видим защо този език е разрешим. Идеята на алгоритъма, който ще разгледаме е да маркира на всяка итерация по един символ a, b или c. Той завършва успешно, ако всички символи на думата са маркирани. Да въведем нов символ x, с който ще маркираме обработените от входната дума символи a, b, c. Нека първоначално думата е копирана върху лентата и четящата глава е върху първия символ на думата.

Алгоритъмът има времева сложност $\mathcal{O}(n^2)$. Ако разгледаме машина на Тюринг с три ленти, то ще получим времева сложност $\mathcal{O}(n)$.

(1) Чете x-ове надясно по лентата докато срещне първото a и го замества с x. Отива на стъпка (2). Ако символите свършат (т.е. достигне се $\sqcup$) преди да се достигне a, то алгоритъмът завършва успешно.

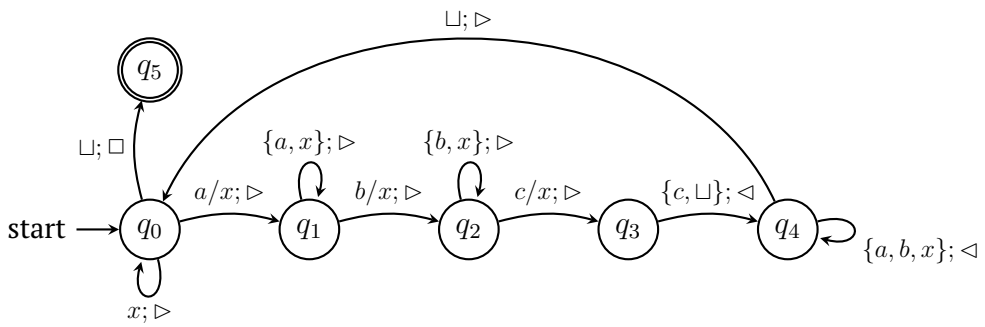
(2) Чете x-ове надясно по лентата докато срещне първото b и го замества с x. Отива на стъпка (3).

(3) Чете x-ове надясно по лентата докато срещне първото c и го замества с x.

(4) Връща четящата глава в началото на лентата, т.е. чете наляво докато не срещне символа $\sqcup$. Връща се в стъпка (1).

Нека сега да видим, че този алгоритъм може да се опише съвсем формално с машина на Тюринг. Ще построим машина на Тюринг $\mathcal{M}$, за която $L = \mathcal{L}(\mathcal{M})$, където

- $\Sigma = \{a, b, c\}$;
- $\Gamma = \{a, b, c, x, \sqcup\}$, за някой нов символ x;
- $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}$, където $q_{\texttt{start}} = q_0$ и $q_{\texttt{accept}} = q_5$;
- Частичната функция на преходите $\delta : (Q \setminus \{q_5\}) \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{\triangleleft, \triangleright, \square\}$ е описана на схемата отдолу. Остава да добавим състоянието $q_{\texttt{reject}}$.

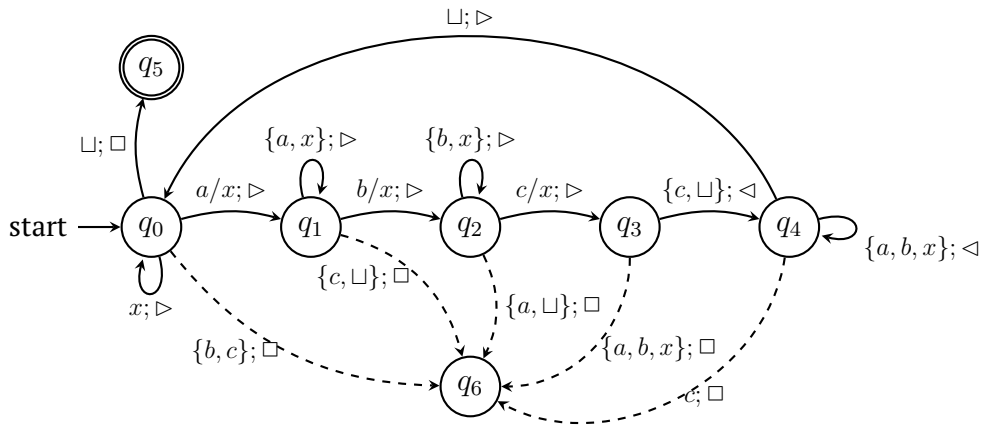


Фигура 4.3: Част от детерминистична машина на Тюринг $\mathcal{M}$, за която разрешава езика $\{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Остава да се добави $q_{\texttt{reject}}$ и да се попълни δ функцията до тотална.

Горната схема определя точно функцията на преходите δ. Например,

$$\delta(q_0, a) = (q_1, x, \triangleright)$$
$$\delta(q_4, \sqcup) = (q_0, \sqcup, \triangleright)$$
$$\delta(q_1, a) = (q_1, a, \triangleright)$$
$$\delta(q_1, x) = (q_1, x, \triangleright).$$

Съобразете, че тази машина на Тюринг може да се направи тотална като се добави ново състояние $q_6 = q_{\texttt{reject}}$ и за всяка двойка (q, z), за която функцията на преходите не е дефинирана, да сочи към $q_{\texttt{reject}}$. Така получаваме пълното описание на детерминистична машина на Тюринг $\mathcal{M}$, за която $\mathcal{L}(\mathcal{M}) = L$. Лесно се съобразява, че тази машина на Тюринг е *тотална*, т.е. за всеки вход $\mathcal{M}$ завършва в $q_{\texttt{accept}}$ или $q_{\texttt{reject}}$. Заключаваме, че L е не само полуразрешим, но *разрешим* език.



Фигура 4.4: Детерминистична машина на Тюринг $\mathcal{M}$, която *разрешава* езика $\{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Отхвърлящото състояние е q_6, т.е. $q_{\texttt{reject}} \overset{\text{деф}}{=} q_6$.

Пример 4.2. Да разгледаме езика $L = \{\omega\sharp\omega \mid \omega \in \{a, b\}^\star\}$. Първо неформално ще опишем алгоритъм, който да разпознава думите на езика L. Нека една дума е копирана върху лентата и четящата глава е поставена върху първия символ от думата.

Да напомним, че този език не е безконтекстен. В [HU79, стр. 155] е дадено по-различно решение. Тук следваме [Sip12, стр. 173]. Там има малка грешка.

(1) Чете x-ове надясно по лентата докато не срещне a или b и го замества с x. Запомня дали сме срещнали a или b. Ако вместо a или b срещне $\sharp$, то отива на стъпка (6).

(2) Чете a-та и b-та надясно по лентата докато не стигне $\sharp$.

(3) Чете символа $\sharp$ надясно по лентата и всички следващи x-ове докато не срещне символа a или b. Той трябва да е същия символ, който сме запаметили на стъпка (1). Заместваме този символ с x.

(4) Чете x-ове наляво по лентата докато не стигне $\sharp$.

(5) Чете a-та и b-та по лентата докато не стигне x. Поставя четящата глава върху символа точно след първия x. Отива на стъпка (1).

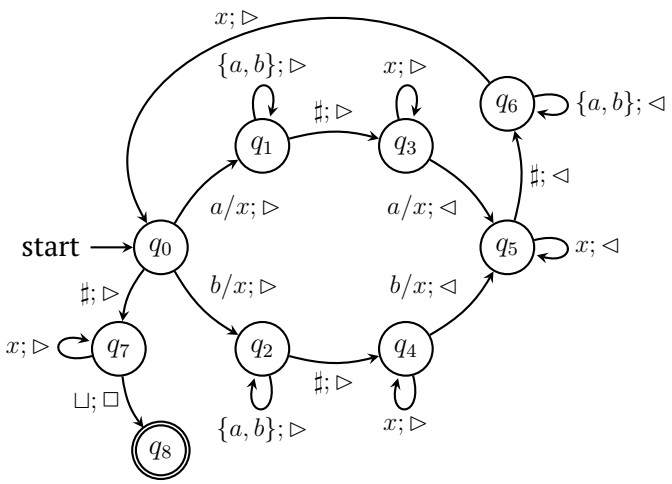
(6) Прочита $\sharp$ надясно по лентата и чете надясно x-ове докато не срещне $\sqcup$. Алгоритъмът завършва успешно.

Това запаметяване става в състоянията.

Обърнете внимание, че този алгоритъм има времева сложност $\mathcal{O}(n^2)$. Ще видим в Пример 4.3, че ако разгледаме двулентова машина на Тюринг, то имаме алгоритъм със сложност $\mathcal{O}(n)$.

Ще построим машина на Тюринг $\mathcal{M}$, за която $L = \mathcal{L}(\mathcal{M})$.

- $\Sigma \stackrel{\text{деф}}{=} \{a, b, \sharp\}$;
- $\Gamma \stackrel{\text{деф}}{=} \{a, b, \sharp, x, \sqcup\}$;
- $Q \stackrel{\text{деф}}{=} \{q_0, q_1, \ldots, q_8\}$;
- $q_{\texttt{start}} \stackrel{\text{деф}}{=} q_0$ и $q_{\texttt{accept}} \stackrel{\text{деф}}{=} q_8$;



Фигура 4.5: Част от машина на Тюринг $\mathcal{M}$, която разрешава езика $\{\omega\sharp\omega \mid \omega \in \{a, b\}^\star\}$.

Да проследим изчислението на думата $ab\sharp ab$.

$$\begin{aligned}(q_0, \underline{a}b\sharp ab\sqcup) &\vdash_{\mathcal{M}} (q_1, x\underline{b}\sharp ab\sqcup) \vdash_{\mathcal{M}} (q_1, xb\underline{\sharp}ab\sqcup) \vdash_{\mathcal{M}} (q_3, xb\sharp\underline{a}b\sqcup)\\ &\vdash_{\mathcal{M}} (q_5, xb\underline{\sharp}xb\sqcup) \vdash_{\mathcal{M}} (q_6, x\underline{b}\sharp xb\sqcup) \vdash_{\mathcal{M}} (q_6, \underline{x}b\sharp xb\sqcup)\\ &\vdash_{\mathcal{M}} (q_0, x\underline{b}\sharp xb\sqcup) \vdash_{\mathcal{M}} (q_2, xx\underline{\sharp}xb\sqcup) \vdash_{\mathcal{M}} (q_4, xx\sharp\underline{x}b\sqcup)\\ &\vdash_{\mathcal{M}} (q_4, xx\sharp x\underline{b}\sqcup) \vdash_{\mathcal{M}} (q_5, xx\sharp\underline{x}x\sqcup) \vdash_{\mathcal{M}} (q_5, xx\underline{\sharp}xx\sqcup)\\ &\vdash_{\mathcal{M}} (q_6, x\underline{x}\sharp xx\sqcup) \vdash_{\mathcal{M}} (q_0, xx\underline{\sharp}xx\sqcup) \vdash_{\mathcal{M}} (q_7, xx\sharp\underline{x}x\sqcup)\\ &\vdash_{\mathcal{M}} (q_7, xx\sharp x\underline{x}\sqcup) \vdash_{\mathcal{M}} (q_7, xx\sharp xx\underline{\sqcup}) \vdash_{\mathcal{M}} (q_8, xx\sharp xx\underline{\sqcup}).\end{aligned}$$

Може лесно да се съобрази, че тази машина на Тюринг може да се допълни до *тотална*.

Задача 4.1. Докажете, че езикът $L = \{\, \omega \cdot \omega \mid \omega \in \{a, b\}^\star \,\}$ е разрешим.

4.3 Многолентови детерминистични машини на Тюринг

Детерминистична машина на Тюринг с k ленти има същата дефиниция като еднолентова машина на Тюринг с единствената разлика, че

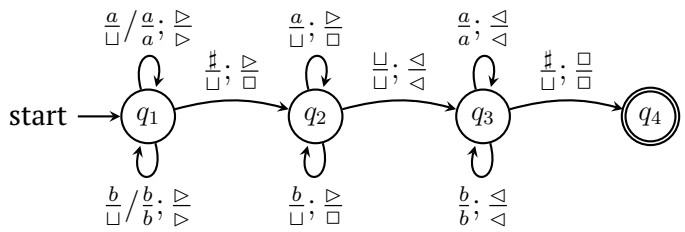
$$\delta : Q' \times \Gamma^k \to Q \times \Gamma^k \times \{\triangleleft, \triangleright, \square\}^k,$$

където $Q' = Q \setminus \{q_{\texttt{accept}}, q_{\texttt{reject}}\}$, т.е. имаме k на брой четящи глави, по една за всяка лента, които се движат независимо една от друга. Приемаме, че входната дума α е записана върху първата лента.

Пример 4.3. Да видим как двулентова машина на Тюринг разрешава езика

$$L = \{\, \omega\sharp\omega \mid \omega \in \{a, b\}^\star \,\}.$$

- $Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}$;
- $q_{\texttt{start}} = q_1$, $q_{\texttt{accept}} = q_4$ и $q_{\texttt{reject}} = q_5$;
- $\Sigma \stackrel{\text{деф}}{=} \{a, b, \sharp\}$;
- $\Gamma \stackrel{\text{деф}}{=} \{a, b, \sharp, \sqcup\}$;
- $\delta : Q' \times \Gamma^2 \to Q \times \Gamma^2 \times \{\triangleleft, \triangleright, \square\}^2$, където $Q' = \{q_1, q_2, q_3\}$.



Фигура 4.6: Непълно описание на двулентова детерминистична машина на Тюринг $\mathcal{M}$, за която $\mathcal{L}(\mathcal{M}) = \{\omega\sharp\omega \mid \omega \in \{a, b\}^\star\}$. Всички неописани преходи трябва да сочат към отхвърлящото състояние q_5.

В началото втората лента е празна. Имаме две глави, които се движат независимо една от друга. При вход думата $\omega\sharp\omega$, $\mathcal{M}$ първо копира ω върху втората лента. След това сравнява това, което е записано на втората лента с думата, която следва след

символа $\sharp$. Лесно се съобразява, че сега сложността на изчислението е $\mathcal{O}(n)$, докато при еднолентова машина на Тюринг то беше $\mathcal{O}(n^2)$. Да разгледаме един пример:

$$\begin{aligned}(q_1, \tfrac{\hat{a}}{\hat{\sqcup}}\tfrac{b}{\sqcup}\tfrac{\sharp}{\sqcup}\tfrac{a}{\sqcup}\tfrac{b}{\sqcup}\tfrac{\sqcup}{\sqcup}) &\vdash (q_1, \tfrac{a}{a}\tfrac{\hat{b}}{\hat{\sqcup}}\tfrac{\sharp}{\sqcup}\tfrac{a}{\sqcup}\tfrac{b}{\sqcup}\tfrac{\sqcup}{\sqcup}) \vdash (q_1, \tfrac{a}{a}\tfrac{b}{b}\tfrac{\hat{\sharp}}{\hat{\sqcup}}\tfrac{a}{\sqcup}\tfrac{b}{\sqcup}\tfrac{\sqcup}{\sqcup}) \\ &\vdash (q_2, \tfrac{a}{a}\tfrac{b}{b}\tfrac{\sharp}{\hat{\sqcup}}\tfrac{\hat{a}}{\sqcup}\tfrac{b}{\sqcup}\tfrac{\sqcup}{\sqcup}) \vdash (q_2, \tfrac{a}{a}\tfrac{b}{b}\tfrac{\sharp}{\hat{\sqcup}}\tfrac{\hat{a}}{\sqcup}\tfrac{b}{\sqcup}\tfrac{\sqcup}{\sqcup}) \\ &\vdash (q_2, \tfrac{a}{a}\tfrac{b}{b}\tfrac{\sharp}{\hat{\sqcup}}\tfrac{a}{\sqcup}\tfrac{\hat{b}}{\sqcup}\tfrac{\sqcup}{\sqcup}) \vdash (q_2, \tfrac{a}{a}\tfrac{b}{b}\tfrac{\sharp}{\hat{\sqcup}}\tfrac{a}{\sqcup}\tfrac{b}{\sqcup}\tfrac{\hat{\sqcup}}{\sqcup}) \\ &\vdash (q_3, \tfrac{a}{a}\tfrac{b}{\hat{b}}\tfrac{\sharp}{\sqcup}\tfrac{a}{\sqcup}\tfrac{\hat{b}}{\sqcup}\tfrac{\sqcup}{\sqcup}) \vdash (q_3, \tfrac{a}{\hat{a}}\tfrac{b}{b}\tfrac{\sharp}{\sqcup}\tfrac{\hat{a}}{\sqcup}\tfrac{b}{\sqcup}\tfrac{\sqcup}{\sqcup}) \\ &\vdash (q_3, \tfrac{\sqcup}{\hat{\sqcup}}\tfrac{a}{a}\tfrac{b}{b}\tfrac{\hat{\sharp}}{\sqcup}\tfrac{a}{\sqcup}\tfrac{b}{\sqcup}\tfrac{\sqcup}{\sqcup}) \vdash (q_4, \tfrac{\sqcup}{\hat{\sqcup}}\tfrac{a}{a}\tfrac{b}{b}\tfrac{\hat{\sharp}}{\sqcup}\tfrac{a}{\sqcup}\tfrac{b}{\sqcup}\tfrac{\sqcup}{\sqcup}).\end{aligned}$$

Твърдение 4.2. За всяка k-лентова машина на Тюринг $\mathcal{M}$ съществува еднолентова машина на Тюринг $\mathcal{M}'$, такава че $\mathcal{L}(\mathcal{M}) = \mathcal{L}(\mathcal{M}')$.

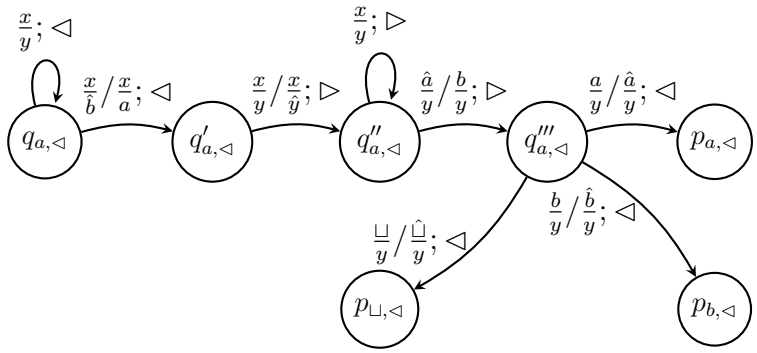
В [Sip12, стр. 177] конструкцията е малко по-различна. Там съдържанието на всяка лента се поставя последователно върху една лента, като се разделят със специален символ. Тук следваме [HU79, стр. 162].

Упътване. Нека $\mathcal{M}$ е k-лентова машина на Тюринг. Ще построим еднолентова машина на Тюринг $\mathcal{M}'$, за която $\mathcal{L}(\mathcal{M}) = \mathcal{L}(\mathcal{M}')$. Да означим $\hat{\Gamma} = \{\hat{x} \mid x \in \Gamma\}$. Тогава азбуката на лентата на $\mathcal{M}'$ ще бъде $\Gamma' = \Sigma \cup (\hat{\Gamma} \cup \Gamma)^k$. Сега вместо да имаме k ленти със символи от Γ, ще имаме една лента със символи k-орки от $\hat{\Gamma} \cup \Gamma$. За да симулираме $\mathcal{M}$, използваме символите $\hat{x}$ за да маркират позицията на главите на $\mathcal{M}$, като във всяка компонента на лентата има точно по един символ от вида $\hat{x}$. При вход думата $\alpha = a_1 a_2 \cdots a_n$, която е поставена върху единствената лента на $\mathcal{M}'$, в случая на $k = 2$, първата работа на $\mathcal{M}'$ е да замени α с думата

$$\frac{\hat{a}_1}{\hat{\sqcup}}\frac{a_2}{\sqcup}\cdots\frac{a_n}{\sqcup}$$

За да определим следващия ход на машината $\mathcal{M}'$, трябва да сканираме лентата докато не открием разположението на всичките k на брой маркирани клетки. Тогава симулираме ход на $\mathcal{M}$ и отново трябва да променим маркираните клетки. □

Да видим по-подробно как можем да симулираме изчислението на двулентова машина на Тюринг $\mathcal{M}$ с еднолентовата машина на Тюринг $\mathcal{M}'$.



Фигура 4.7: Симулация на прехода $\delta_{\mathcal{M}}(q, \frac{a}{b}) = (p, \frac{b}{a}, \frac{\triangleright}{\triangleleft})$ при положение, че главата на втората лента е наляво спрямо главата на първата лента

- В еднолентовата машина на Тюринг, за удобство пишем $\frac{x}{y}$ вместо наредената двойка (x, y).
- За всяко състояние q на $\mathcal{M}$ и всяко a от Γ, в машината $\mathcal{M}'$ ще имаме състояния от вида $q_{a,\triangleleft}, q_{a,\triangleright}, q_{a,\square}$, които носят информацията, че в състояние q на симулираната двулентова машина на Тюринг $\mathcal{M}$, главата на първата лента е върху символа a и главата на втората лента е разположена наляво/надясно/на същата позиция спрямо главата на първата лента.

✍ Помислете как да обобщите тази идея за машина на Тюринг с n ленти. Важното е, че във всяко състояние кодираме крайна информация.

- Във Фигура 4.7, $\frac{x}{y}$ е съкратен запис за $\{\frac{x}{y} \mid x, y \in \Gamma\}$;
- Възможно е на всяка симулирана стъпка, главите на двете ленти да се раздалечават. Това означава, че след симулацията на s стъпки, в най-лошия случай, двете глави са на разстояние $2s$. Тогава за да симулираме $(s+1)$-вата стъпка на $\mathcal{M}$, първо трябва да отидем $2s$ стъпки наляво, после $2s$ стъпки надясно. Следователно $(s+1)$-вата стъпка на $\mathcal{M}$ се симулира за приблизително $4s$ стъпки.
- Ако изчислението на $\mathcal{M}$ върху вход α отнема s стъпки, то симулираното изчисление върху α ще отнеме в най-лошия случай приблизително

$$\sum_{i=0}^{s} 4i = 2s^2 + 2s$$

стъпки. Заключаваме, че за s стъпки от изчисленито на $\mathcal{M}$, симулацията върху $\mathcal{M}'$ отнема време $\mathcal{O}(s^2)$, т.е. имаме квадратично забавяне.

4.4 Изчислими функции

Възможно е да се дефинира и за двулентова машина на Тюринг, като $f(\alpha)$ ще бъде върху втората лента.

Една *тотална* функция $f : \Sigma^\star \to \Sigma^\star$ се нарича изчислима с машина на Тюринг $\mathcal{M}$, ако за всяка дума $\alpha \in \Sigma^\star$,

$$(\varepsilon, q_{\texttt{start}}, \alpha\sqcup) \vdash^\star_{\mathcal{M}} (\sqcup^m, q_{\texttt{accept}}, f(\alpha)\sqcup^k), \text{ за някои } m, k \in \mathbb{N}.$$

Това означава, че машината на Тюринг $\mathcal{M}$ винаги завършва. Лесно се съобразява, че езикът $\texttt{Graph}(f) = \{\, \alpha\sharp f(\alpha) \mid \alpha \in \Sigma^\star \,\}$ е разрешим.

Задача 4.2. Докажете, че съществуват функции от вида $f : \Sigma^\star \to \Sigma^\star$, които не са изчислими с машина на Тюринг.

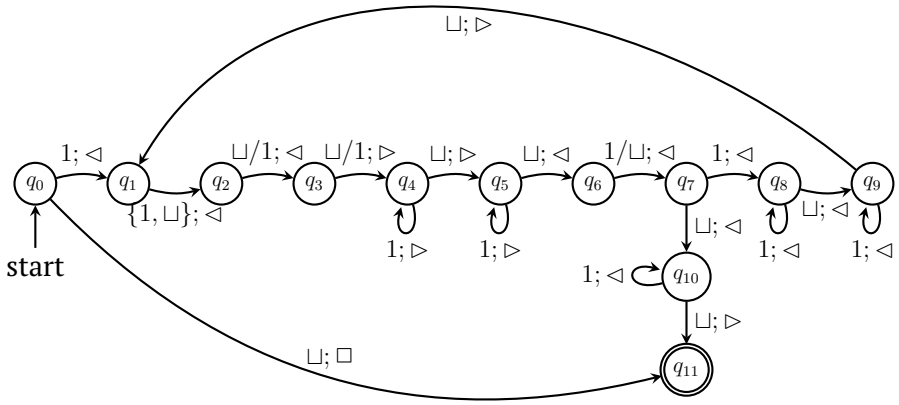
Упътване. Всяка машина на Тюринг може да се кодира с естествено число. Това означава, че съществуват изброимо безкрайно много машини на Тюринг. От друга страна, съществуват неизброимо много функции от вида $f : \Sigma^\star \to \Sigma^\star$. □

При двулентова машина на Тюринг тази задача е много по-лесна и сложността ще бъде $\mathcal{O}(n)$ вместо $\mathcal{O}(n^2)$.

Пример 4.4. Да разгледаме функцията $f : \{1\}^\star \to \{1\}^\star$ дефинирана като

$$f(1^n) = 1^{2n}.$$

Да видим защо f е изчислима с машина на Тюринг.



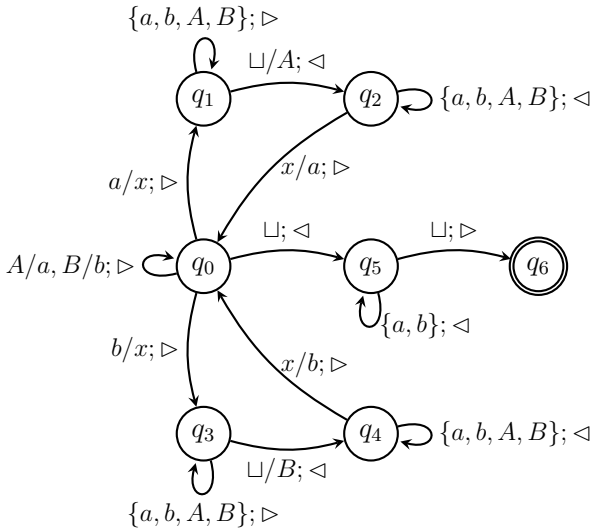
Фигура 4.8: Машина на Тюринг за функцията $f(1^n) = 1^{2n}$.

Това пак става много по-лесно с двулентова машина на Тюринг и сложността пак ще бъде $\mathcal{O}(n)$ вместо $\mathcal{O}(n^2)$.

Пример 4.5. Да видим защо тоталната функция $f : \{a, b\}^\star \to \{a, b\}^\star$, дефинирана като $f(\alpha) = \alpha \cdot \alpha$ е изчислима с машина на Тюринг.

- $\Sigma \stackrel{\text{деф}}{=} \{a, b\}$;
- $\Gamma \stackrel{\text{деф}}{=} \{a, b, x, A, B\}$;

- $q_{\texttt{start}} \stackrel{\text{деф}}{=} q_0$ и $q_{\texttt{accept}} \stackrel{\text{деф}}{=} q_6$



Фигура 4.9: Машина на Тюринг за $f(\alpha) = \alpha \cdot \alpha$.

Да проследим работата на $\mathcal{M}$ върху думата ab. Първо копираме добавяме AB и така лентата съдържа $abAB$. След това заменяме A с a и B с b. Така най-накравя полуваме върху лентата думата $abab$.

$$\begin{aligned}(q_0, \underline{a}b\sqcup) &\vdash_{\mathcal{M}} (q_1, x\underline{b}\sqcup) \vdash_{\mathcal{M}} (q_1, xb\underline{\sqcup}) \vdash_{\mathcal{M}} (q_2, x\underline{b}A) \vdash_{\mathcal{M}} (q_2, \underline{x}bA)\\ &\vdash_{\mathcal{M}} (q_0, a\underline{b}A) \vdash_{\mathcal{M}} (q_3, ax\underline{A}) \vdash_{\mathcal{M}} (q_3, axA\underline{\sqcup}) \vdash_{\mathcal{M}} (q_4, ax\underline{A}B)\\ &\vdash_{\mathcal{M}} (q_4, a\underline{x}AB) \vdash_{\mathcal{M}} (q_0, ab\underline{A}B) \vdash_{\mathcal{M}} (q_0, aba\underline{B}) \vdash_{\mathcal{M}} (q_0, abab\underline{\sqcup})\\ &\vdash_{\mathcal{M}} (q_5, aba\underline{b}) \vdash_{\mathcal{M}} (q_5, ab\underline{a}b) \vdash_{\mathcal{M}} (q_5, a\underline{b}ab) \vdash_{\mathcal{M}} (q_5, \underline{a}bab)\\ &\vdash_{\mathcal{M}} (q_5, \underline{\sqcup}abab) \vdash_{\mathcal{M}} (q_6, \underline{a}bab).\end{aligned}$$

Не можем директно да започнем да копираме α, защото така няма да знаем къде е края на първото копие на α. Това можем да направим като първо запишем на лентата $\alpha\sharp\alpha$ и след това второто копие на α го изместим с една позиция наляво.

Пример 4.6. Да разгледаме тоталната функция

$$f : \{0,1\}^\star \to 1 \cdot \{0,1\}^\star,$$

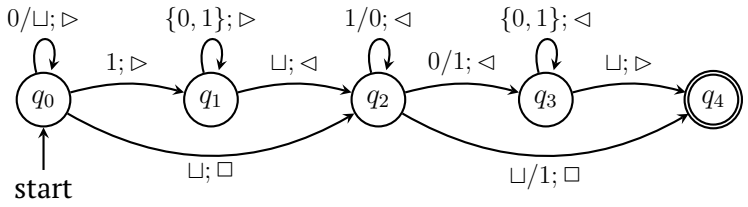
където

$$\overline{f(\alpha)}_{(2)} \stackrel{\text{деф}}{=} \overline{\alpha}_{(2)} + 1.$$

Нека да видим, че тази функция е изчислима с машина на Тюринг.

Изискваме $f(\alpha)$ да започва с 1 за да може f да бъде функция, т.е. $f(\alpha)$ е най-късият двоичен запис на числото $\overline{\alpha}_{(2)} + 1$.

- $\Sigma \stackrel{\text{деф}}{=} \{0, 1\}$;
- $\Gamma \stackrel{\text{деф}}{=} \{0, 1, \sqcup\}$;
- $q_{\texttt{start}} = q_0$ и $q_{\texttt{accept}} \stackrel{\text{деф}}{=} q_4$.



Фигура 4.10: Машина на Тюринг изчисляваща f, за която $\overline{f(\alpha)}_{(2)} = \overline{\alpha}_{(2)} + 1$.

Да проследим изчислението на $\mathcal{M}$ върху вход 01011.

$$\begin{aligned}(q_0, 0\underline{1}011\sqcup) &\vdash_{\mathcal{M}} (q_0, \sqcup\underline{1}011\sqcup) \vdash_{\mathcal{M}} (q_1, \sqcup1\underline{0}11\sqcup) \vdash_{\mathcal{M}} (q_1, \sqcup10\underline{1}1\sqcup)\\ &\vdash_{\mathcal{M}} (q_1, \sqcup101\underline{1}\sqcup) \vdash_{\mathcal{M}} (q_1, \sqcup1011\underline{\sqcup}) \vdash_{\mathcal{M}} (q_2, \sqcup101\underline{1}\sqcup)\\ &\vdash_{\mathcal{M}} (q_2, \sqcup10\underline{1}0\sqcup) \vdash_{\mathcal{M}} (q_2, \sqcup1\underline{0}00\sqcup) \vdash_{\mathcal{M}} (q_3, \sqcup\underline{1}100\sqcup)\\ &\vdash_{\mathcal{M}} (q_3, \underline{\sqcup}1100\sqcup) \vdash_{\mathcal{M}} (q_4, \sqcup\underline{1}100\sqcup).\end{aligned}$$

Задача 4.3. Да разгледаме азбуката $\Sigma = \{0, 1, \ldots, k-1\}$, където $k > 2$. Да разгледаме тоталната функция

$$f : \Sigma^\star \to (\Sigma \setminus \{0\}) \cdot \Sigma^\star,$$

дефинирана като

$$\overline{f(\alpha)}_{(k)} = \overline{\alpha}_{(k)} + 1.$$

Дефинирайте машина на Тюринг $\mathcal{M}$, която изчислява функцията f.

4.5 Недетерминистични машини на Тюринг

Една машина на Тюринг $\mathcal{N}$ се нарича недетерминистична, ако функцията на преходите има вида

$$\Delta : Q' \times \Gamma \to \mathscr{P}(Q \times \Gamma \times \{\lhd, \rhd, \square\}),$$

където да напомним, че $Q' = Q \setminus \{q_{\texttt{accept}}, q_{\texttt{reject}}\}$.

Отново можем да дефинираме бинарна релация $\vdash$ над $\Gamma^\star \times Q \times \Gamma^+$, която ще казва как моментното описание на машината $\mathcal{N}$ се променя при изпълнение на една стъпка.

$$\frac{\Delta(q,x) \ni (p,y,\rhd)}{(\alpha,q,xz\beta) \vdash (\alpha y,p,z\beta)}\ \text{(right-1)} \qquad \frac{\Delta(q,x) \ni (p,y,\lhd)}{(\alpha z,q,x\beta) \vdash (\alpha,p,zy\beta)}\ \text{(left-1)}$$

$$\frac{\Delta(q,x) \ni (p,y,\rhd)}{(\alpha,q,x) \vdash (\alpha y,p,\sqcup)}\ \text{(right-2)} \qquad \frac{\Delta(q,x) \ni (p,y,\lhd)}{(\varepsilon,q,x\beta) \vdash (\varepsilon,p,\sqcup y\beta)}\ \text{(left-2)}$$

$$\frac{\Delta(q,z) \ni (p,y,\square)}{(\alpha,q,z\beta) \vdash (\alpha,p,y\beta)}\ \text{(stay)}$$

С $\vdash^\star$ ще означаваме рефлексивното и транзитивно затваряне на $\vdash$. Тогава за недетерминистична машина на Тюринг $\mathcal{N}$,

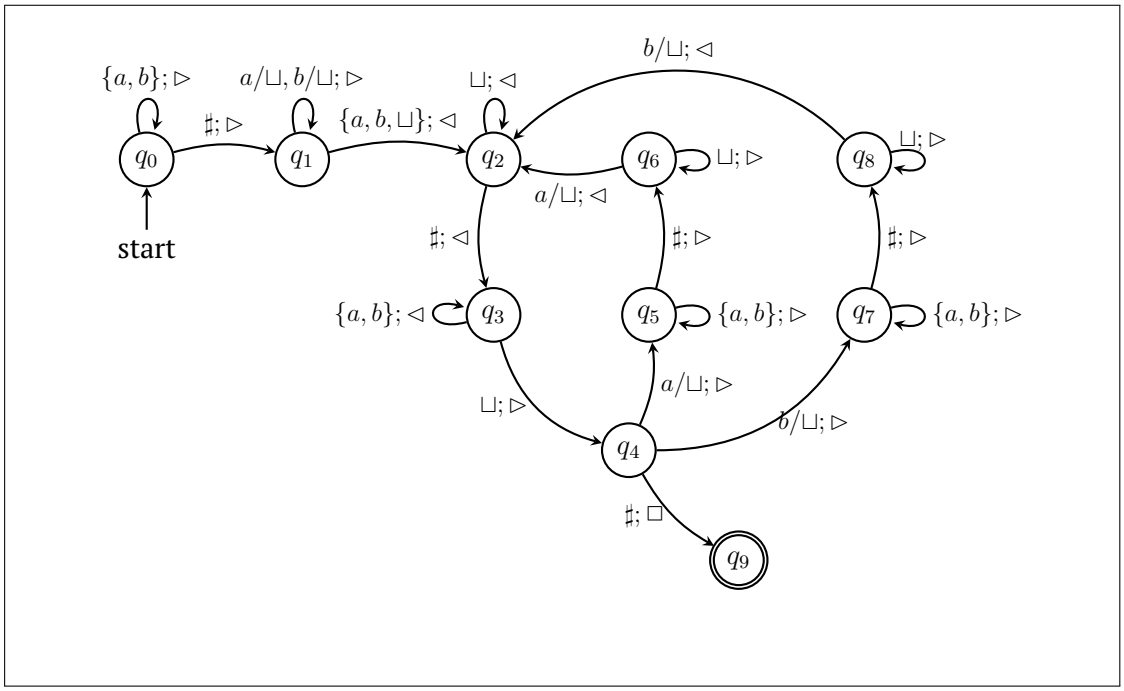
$$\mathcal{L}(\mathcal{N}) = \{\, \omega \in \Sigma^\star \mid (\exists \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma^\star)[(\varepsilon, q_{\texttt{start}}, \omega\sqcup) \vdash^\star_{\mathcal{N}} (\gamma_1, q_{\texttt{accept}}, \gamma_2)] \,\}.$$

Забележка. Върху дадена дума ω, недетерминистичната машина на Тюринг $\mathcal{N}$ може да има много различни изчисления. Думата ω принадлежи на $\mathcal{L}(\mathcal{N})$ ако съществува *поне едно* изчисление, което завършва в състоянието $q_{\texttt{accept}}$. Възможно е много други изчисления при вход ω да завършват в $q_{\texttt{reject}}$ или никога да не завършват.

Аналогично, дефинираме една недетерминистична машина на Тюринг $\mathcal{N}$ да бъде **разрешител**, ако за всяка дума ω и *всяко изчисление* на $\mathcal{N}$ върху ω завършва в $q_{\texttt{accept}}$ или $q_{\texttt{reject}}$.

Пример 4.7. Нека да видим, че $L = \{\alpha\sharp\beta \mid \alpha, \beta \in \{a,b\}^\star \ \&\ \alpha$ е подниз на $\beta\}$ е разрешим език като построим недетерминистична машина на Тюринг $\mathcal{N}$, която разрешава този език.

Не е обяснено защо е разрешим.



Да видим, че $\mathcal{M}$ успешно разпознава думата $ab\sharp aabb$, която принадлежи на L.

$$
\begin{aligned}
(q_0, \underline{a}b\sharp aabb\sqcup) &\vdash (q_0, a\underline{b}\sharp aabb\sqcup) \vdash (q_0, ab\underline{\sharp}aabb\sqcup) \vdash (q_1, ab\sharp\underline{a}abb\sqcup) \\
&\vdash (q_1, ab\sharp \sqcup \underline{a}bb\sqcup) \vdash (q_2, ab\sharp\underline{\sqcup}abb\sqcup) \vdash (q_2, ab\underline{\sharp} \sqcup abb\sqcup) \\
&\vdash (q_3, a\underline{b}\sharp \sqcup abb\sqcup) \vdash (q_3, \underline{a}b\sharp \sqcup abb\sqcup) \vdash (q_3, \underline{\sqcup}ab\sharp \sqcup abb\sqcup) \\
&\vdash (q_4, \underline{a}b\sharp \sqcup abb\sqcup) \vdash (q_5, \sqcup\underline{b}\sharp \sqcup abb\sqcup) \vdash (q_5, \sqcup b\underline{\sharp} \sqcup abb\sqcup) \\
&\vdash (q_6, \sqcup b\sharp\underline{\sqcup}abb\sqcup) \vdash (q_6, \sqcup b\sharp \sqcup \underline{a}bb\sqcup) \vdash (q_2, \sqcup b\sharp\underline{\sqcup} \sqcup bb\sqcup) \\
&\vdash (q_2, \sqcup b\underline{\sharp} \sqcup \sqcup bb\sqcup) \vdash (q_3, \sqcup\underline{b}\sharp \sqcup \sqcup bb\sqcup) \vdash (q_3, \underline{\sqcup}b\sharp \sqcup \sqcup bb\sqcup) \\
&\vdash (q_4, \sqcup\underline{b}\sharp \sqcup \sqcup bb\sqcup) \vdash (q_7, \sqcup \sqcup \underline{\sharp} \sqcup \sqcup bb\sqcup) \\
&\vdash (q_8, \sqcup \sqcup \sharp\underline{\sqcup} \sqcup bb\sqcup) \vdash (q_8, \sqcup \sqcup \sharp \sqcup \underline{\sqcup}bb\sqcup) \\
&\vdash (q_8, \sqcup \sqcup \sharp \sqcup \sqcup\underline{b}b\sqcup) \vdash (q_2, \sqcup \sqcup \sharp \sqcup \underline{\sqcup} \sqcup b\sqcup) \\
&\vdash \cdots \vdash (q_4, \sqcup \sqcup \underline{\sharp} \sqcup \sqcup \sqcup b\sqcup) \vdash (q_9, \sqcup \sqcup \underline{\sharp} \sqcup \sqcup \sqcup b\sqcup)
\end{aligned}
$$

Канонична наредба на $\Sigma^\star$

За доказателството, че всяка НМТ е еквивалентна на ДМТ, е необходимо да фиксираме канонична подредба на думите над дадена азбука

Нека $\Sigma = \{a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}\}$. Подреждаме думите по ред на тяхната дължина. Думите с еднаква дължина подреждаме по техния числов ред, т.е. гледаме на буквите a_i като числото i в k-ична бройна система. Тогава думите с дължина n са числата от 0 до $k^n - 1$ записани в k-ична бройна система. Ще означаваме с ω_i i-тата дума в $\Sigma^\star$ при тази подредба.

Ако $\Sigma = \{0, 1\}$, то наредбата започва така:

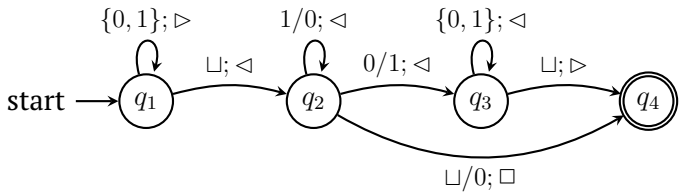
$$\varepsilon, 0, 1, \underbrace{00, 01, 10, 11}_{\text{от 0 до 3}}, \underbrace{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111}_{\text{от 0 до 7}}, 0000, 0001, \ldots$$

В този случай, $\omega_0 = \varepsilon$, $\omega_7 = 000$, $\omega_{13} = 110$. Обърнете внимание, че тази наредба отговаря на обхождане в широчина на едно пълно наредено двоично дърво. Можем да дефинираме и релацията $<_{\text{can}}$ по следния начин:

$$\alpha <_{\text{can}} \beta \overset{\text{деф}}{\Leftrightarrow} |\alpha| < |\beta| \vee (|\alpha| = |\beta| \,\&\, \alpha <_{\text{lex}} \beta).$$

Задача 4.4. Нека $\Sigma = \{a_0, \ldots, a_{k-1}\}$. Да разгледаме функцията $f : \Sigma^\star \to \Sigma^\star$, за която $f(\alpha)$ е думата веднага след α в каноничната подредба на $\Sigma^\star$. Докажете, че f е изчислима с еднолентова детерминистична машина на Тюринг.

Упътване. Ако $\Sigma = \{0, 1\}$, то машината на Тюринг има следния вид:



Фигура 4.12: Генериране на следващата дума в каноничната наредба.

□

Теорема 4.1. Ако L се разпознава от *недетерминистична* машина на Тюринг $\mathcal{N}$, то L е разпознава и от *детерминистична* машина на Тюринг $\mathcal{D}$.

Доказателство. Нека имаме недетерминистичната машина на Тюринг $\mathcal{N}$, за която $L = \mathcal{L}(\mathcal{N})$. Една дума α принадлежи на $\mathcal{L}(\mathcal{N})$ точно тогава, когато съществува изчисление, което започва с думата α върху лентата и след краен брой стъпки, следвайки функцията на преходите $\Delta_{\mathcal{N}}$, достига до състоянието $q_{\texttt{accept}}$. Сложността идва от факта, че за думата α може да имаме много различни изчисления, като само някои от тях завършват в $q_{\texttt{accept}}$. Ще построим детерминистична машина на Тюринг $\mathcal{D}$, която последователно ще симулира всички възможни *крайни* изчисления за думата α, докато намери такова, което завършва в състоянието $q_{\texttt{accept}}$.

В [HU79, стр. 164] не е добре обяснено.

На практика това, което правим е да представим всички възможни изчисления на $\mathcal{N}$ като r-разклонено дърво и да го обходим в широчина, докато не достигнем до $q_{\texttt{accept}}$

Лесно се съобразява, че всяко изчисление на $\mathcal{N}$ може да се представи като крайна редица от елементи на $Q \times \Gamma \times \{\triangleleft, \triangleright, \square\}$. Понеже това множество е крайно, то можем на всяка такава тройка да съпоставим естествено число $< r$, където

$$r = |Q| \cdot |\Gamma| \cdot 3.$$

Например, нека $Q = \{q_0, q_1\}$, $\Gamma = \{a, b\}$. Тогава можем да направим следната съпоставка:

$$(q_0, a, \square) \to 0,\ (q_0, a, \lhd) \to 1,\ (q_0, a, \rhd) \to 2,$$
$$(q_0, b, \square) \to 3,\ (q_0, b, \lhd) \to 4,\ (q_0, b, \rhd) \to 5,$$
$$(q_1, a, \square) \to 6, (q_1, a, \lhd) \to 7, (q_1, a, \rhd) \to 8,$$
$$(q_1, b, \square) \to 9, (q_1, b, \lhd) \to 10,\ (q_1, b, \rhd) \to 11.$$

Ясно е, че всяко изчисление на $\mathcal{N}$ може да се представи като дума над азбуката $\Sigma = \{x_0, x_1, \ldots, x_{r-1}\}$. Например, изчислението от три стъпки

$$(\sqcup, q_0, aba) \vdash_N (b, q_1, ba) \vdash_{\mathcal{N}} (b, q_1, aa) \vdash_{\mathcal{N}} (ba, q_0, a)$$

може да се опише като думата $x_{11}x_6x_2$ над азбуката $\Sigma = \{x_0, x_1, \ldots, x_{11}\}$.

Детерминистичната машина на Тюринг $\mathcal{D}$ има три ленти.

- На първата лента съхраняваме входящия низ и *тя никога не се променя*.
- На втората лента ще записваме последователно думи следвайки каноничната наредба на думите над азбуката $\{x_0, x_1, \ldots, x_{r-1}\}$. От *Задача 4.4* знаем как последователно да генерираме тези думи върху една лента.
- На третата лента симулираме изчислението на $\mathcal{N}$ върху думата от първата лента, използвайки изчислението, което е описано на втората лента. Например, ако съдържанието на втората лента е $x_{11}x_6x_2$, това означава, че симулираме изчисление от три стъпки като на първата стъпка избираме дванайсетата възможна тройка, на втората стъпка избираме седмата възможна тройка, на третата стъпка избираме третата възможна тройка.

  Ако симулацията завърши в състоянието $q_{\texttt{accept}}$ на $\mathcal{N}$, то машината $\mathcal{D}$ завършва успешно. В противен случай, на втората лента генерираме чрез функцията от *Задача 4.4* следващия низ относно каноничната наредба на $\{x_0, x_1 \ldots, x_{r-1}\}$; изтриваме третата лента, копираме първата лента на третата и започваме нова детерминистична симулация като думата върху втората лента ни ръководи какъв преход да правим на всяка стъпка.

□

Следствие 4.1. Ако L се разпознава от *недетерминистичен* разрешител $\mathcal{N}$, то L също се разпознава от *детерминистичен* разрешител $\mathcal{D}$.

Доказателство. Да разгледаме дървото T с крайно разклонение r, което представя всички изчисления на разрешителя $\mathcal{N}$ при вход думата ω. От *Лема 1.1* следва, че T е крайно дърво, да кажем с височина h, защото ако допуснем, че T е безкрайно, то ще има безкрайно дълго изчисление на $\mathcal{N}$, което е невъзможно, понеже $\mathcal{N}$ винаги достига до заключително състояние ($q_{\texttt{accept}}$ или $q_{\texttt{reject}}$).

- Ако $\mathcal{N}$ приема дадена дума ω, то детерминистичната ни симулация на $\mathcal{N}$ ще достигне до изчисление, кодирано като път в T, което завършва в състояние $q_{\texttt{accept}}$.
- Ако $\mathcal{N}$ не приема дадена дума ω, то детерминистичната ни симулация на $\mathcal{N}$ ще покаже, че всяко изчисление, кодирано като път в T, завършва в състояние $q_{\texttt{reject}}$. Един начин да направим това е да имаме една допълнителна лента, която използваме за брояч колко от възможните изчисления на $\mathcal{N}$ са завършили. Спираме, когато този брояч достигне r^h, където h е дължината на думата на втората лента, т.е. дълбочината на дървото на изчисленията на $\mathcal{N}$.

□

4.6 Основни свойства

Твърдение 4.3. Ако L е разрешим език над азбуката Σ, то $\Sigma^\star \setminus L$ също е разрешим език.

С други думи, разрешимите езици са затворени относно операцията допълнение. След малко в *Твърдение 4.6* ще видим, че това твърдение не е изпълнено за полуразрешими езици.

Упътване. Нека $L = \mathcal{L}(\mathcal{M})$, където $\mathcal{M}$ е разрешител. Нека $\mathcal{M}'$ е същата като $\mathcal{M}$, само със сменени $q_{\texttt{accept}}$ и $q_{\texttt{reject}}$ състояния. Тогава $\mathcal{M}'$ също е разрешител и $\overline{L} = \mathcal{L}(\mathcal{M}')$. □

Твърдение 4.4. Ако L_1 и L_2 са разрешими езици, то $L_1 \cup L_2$ е разрешим език.

С други думи, разрешимите езици са затворени относно операцията обединение. Като следствие получаваме, че всяко *крайно* обединение на разрешими езици е разрешим език.
✍ Съобразете, че това твърдение е изпълнено и за полуразрешими езици.

Упътване. Нека $L_1 = \mathcal{L}(\mathcal{M}_1)$ и $L_2 = \mathcal{L}(\mathcal{M}_2)$. Строим нова машина на Тюринг $\mathcal{M}$, която при вход думата α симулира едновременно изчисленията на $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ върху α. Това можем да направим като приемем, че $\mathcal{M}$ има две ленти - една за лентата на $\mathcal{M}_1$ и една за лентата на $\mathcal{M}_2$, като състоянията на $\mathcal{M}$ ще бъдат елементи на $Q_1 \times Q_2$. Ако една от двете машини достигне своето приемащо състояние, то $\mathcal{M}$ приема думата α. Ако и двете машини достигнат своите отхвърлящи състояния, то $\mathcal{M}$ отхвърля думата α. □

Твърдение 4.5. Ако L_1 и L_2 са разрешими езици, то $L_1 \cap L_2$ е разрешим език.

С други думи, разрешимите езици са затворени относно операцията сечение. Като следствие получаваме, че всяко *крайно* сечение на разрешими езици е разрешим език.
✍ Съобразете, че това твърдение е изпълнено и за полуразрешими езици.

Упътване. Нека $L_1 = \mathcal{L}(\mathcal{M}_1)$ и $L_2 = \mathcal{L}(\mathcal{M}_2)$. Строим нова машина на Тюринг $\mathcal{M}$, която при вход думата α симулира едновременно изчисленията на $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ върху α. Ако и двете машини достигнат до приемащите си състояния, то $\mathcal{M}$ приема думата α. Ако поне една от двете машини достигне до отхвърлящо състояние, то $\mathcal{M}$ отхвърля думата α. □

Теорема 4.2 (Клини-Пост). L и $\overline{L}$ са полуразрешими езици точно тогава, когато L е разрешим език.

Упътване. Посоката ($\Leftarrow$) е ясна. За посоката ($\Rightarrow$), нека $L = \mathcal{L}(\mathcal{M}_1)$ и $\overline{L} = \mathcal{L}(\mathcal{M}_2)$. Строим разрешител $\mathcal{M}$, която при вход думата α симулира едновременно изчисленията на $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ върху α. Например, може $\mathcal{M}$ да има две ленти за симулацията на $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$. Знаем със сигурност, че точно едно от двете симулирани изчисления ще завърши в приемащо състояние. Ако това е $\mathcal{M}_1$, то $\mathcal{M}$ приема α. Ако това е $\mathcal{M}_2$, то $\mathcal{M}$ отхвърля α. □

4.6.1 Кодиране на машина на Тюринг

Тук е удобно да индексираме от 1 вместо от 0.

Да приемем, че:

- $Q = \{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$, където $n \geq 2$;
- $q_1 = q_{\texttt{start}}$, $q_2 = q_{\texttt{accept}}$ и $q_3 = q_{\texttt{reject}}$.
- $\Sigma = \{x_1, \ldots, x_\ell\}$;
- $\Gamma = \{x_1, x_2, \ldots, x_s\}$, където $\ell < s$ и $x_s = \sqcup$;
- $D_1 = \square$, $D_2 = \triangleleft$, $D_3 = \triangleright$;

Аналогично така можем да кодираме и преходите на недетерминистична машина на Тюринг.

Така можем да кодираме преходите на детерминистична машина на Тюринг като думи. Да разгледаме прехода $\delta(q_i, x_j) = (q_k, x_t, D_m)$. Кодираме този преход със следната дума:

$$0^i 1 0^j 1 0^k 1 0^t 1 0^m.$$

Да обърнем внимание, че в този двоичен код няма последователни единици и той започва и завършва с нула.

За да кодираме една машина на Тюринг $\mathcal{M}$ е достатъчно да кодираме функцията на преходите δ. Понеже δ е крайна функция, нека с числото r да означим броя на всички възможни преходи. По описания по-горе начин, нека $\texttt{code}_i$ е числото в двоичен запис, получено за i-тия преход на δ. Тогава кодът на $\mathcal{M}$ е следното число в двоичен запис:

$$\ulcorner \mathcal{M} \urcorner \stackrel{\text{деф}}{=} 1110^\ell 11\ \texttt{code}_1\ 11\ \texttt{code}_2\ 11\ \cdots\ 11\ \texttt{code}_r\ 111.$$

Лесно се съобразява, че за две машини на Тюринг $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}'$ с различни функции на преходите, имаме $\ulcorner \mathcal{M} \urcorner \neq \ulcorner \mathcal{M}' \urcorner$. Ще означаваме с $\mathcal{M}_\omega$ машината на Тюринг, чийто код е ω, т.е. $\ulcorner \mathcal{M}_\omega \urcorner = \omega$.

Задача 4.5. Докажете, че езикът

$$L_{\texttt{code}} = \{\, \omega \in \{0,1\}^\star \mid \omega \text{ е код на машина на Тюринг} \,\}$$

е разрешим.

4.6.2 Диагоналният език

Теорема 4.3. Диагоналният език

$$L_{\texttt{diag}} \stackrel{\text{деф}}{=} \{\, \omega \in \{0,1\}^\star \mid \omega \text{ е код на машина на Тюринг и } \omega \notin L(\mathcal{M}_\omega) \,\}$$

не се разпознава от машина на Тюринг, т.е. $L_{\texttt{diag}}$ **не** е полуразрешим език.

Доказателство. Да допуснем, че $L_{\texttt{diag}}$ се разпознава от машина на Тюринг $\mathcal{D}$, т.е. $L_{\texttt{diag}} = \mathcal{L}(\mathcal{D})$. Тогава да видим какво имаме за думата $\ulcorner\mathcal{D}\urcorner$:

$$\ulcorner\mathcal{D}\urcorner \in L_{\texttt{diag}} \implies \ulcorner\mathcal{D}\urcorner \in \mathcal{L}(\mathcal{D}) \implies \ulcorner\mathcal{D}\urcorner \notin L_{\texttt{diag}},$$
$$\ulcorner\mathcal{D}\urcorner \notin L_{\texttt{diag}} \implies \ulcorner\mathcal{D}\urcorner \notin \mathcal{L}(\ulcorner\mathcal{D}\urcorner) \implies \ulcorner\mathcal{D}\urcorner \in L_{\texttt{diag}}.$$

Достигаме до противоречие. □

Това е версия на диагоналния метод на Кантор, с чиято помощ се доказва, че реалните числа са неизброимо много, т.е. има повече реални числа отколкото естествените.

Тук е добре една безкрайна таблица да се нарисува.

Твърдение 4.6. Езикът

$$L_{\texttt{accept}} \stackrel{\text{деф}}{=} \{\, \omega \in \{0,1\}^\star \mid \omega \text{ е код на машина на Тюринг и } \omega \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_\omega) \,\}$$

е полуразрешим, но не е разрешим.

Упътване. Лесно се съобразява, че $L_{\texttt{accept}}$ е полуразрешим. Дефинираме (многолентова) машина на Тюринг $\mathcal{M}'$, която работи по следния начин:

- вход дума α;
- $\mathcal{M}'$ проверява дали α има вида $\ulcorner\mathcal{M}\urcorner$, за някоя машина на Тюринг $\mathcal{M}$;
- Ако α няма вида $\ulcorner\mathcal{M}\urcorner$, то $\mathcal{M}'$ завършва като отхвърля думата α.
- Ако $\alpha = \ulcorner\mathcal{M}\urcorner$, то $\mathcal{M}'$ симулира работата на $\mathcal{M}$ върху α. Тогава:
  - Ако $\mathcal{M}$ завърши след краен брой стъпки като приема α, то $\mathcal{M}'$ приема α.
  - Ако $\mathcal{M}$ завърши след краен брой стъпки като отхвърля α, то $\mathcal{M}'$ отхвърля α.
  - Ако $\mathcal{M}$ никога не завършва върху α, то $\mathcal{M}'$ също никога не завършва върху α.

Получаваме, че

$$\alpha \in L_{\texttt{accept}} \;\Leftrightarrow\; \alpha \in \mathcal{L}(\mathcal{M}'),$$

откъдето следва, че $L_{\texttt{accept}}$ е полуразрешим език.

Ако допуснем, че $L_{\texttt{accept}}$ е разрешим, то езикът $L_{\texttt{code}} \setminus L_{\texttt{accept}} = L_{\texttt{diag}}$ би бил разрешим, което е противоречие, защото $L_{\texttt{diag}}$ не е е дори полуразрешим. □

Следствие 4.1. Съществуват полуразрешим език L, за който $\overline{L}$ не е полуразрешим.

Задача 4.6. Докажете, че езикът

$$L_{\texttt{halt}} = \{\omega \in \{0,1\}^\star \mid \omega \text{ е код на машина на Тюринг и } \mathcal{M}_\omega \text{ спира при вход } \omega\}$$

е полуразрешим, но не е разрешим.

4.6.3 Универсална машина на Тюринг

> A man provided with paper, pencil, and rubber, and subject to strict discipline, is in effect a universal machine. (Turing 1948: 416)

Можем за простота да считаме, че всички разглеждани машини на Тюринг са дефинирани над азбуката $\{0,1\}$.

Теорема 4.4. Универсалният език

$$L_{\texttt{univ}} \stackrel{\text{деф}}{=} \{\ \ulcorner\mathcal{M}\urcorner\sharp\omega \mid \mathcal{M} \text{ е машина на Тюринг и } \omega \in \mathcal{L}(\mathcal{M})\ \}$$

е полуразрешим, но **не** е разрешим.

Разсъждението е много сходно с това защо $L_{\texttt{accept}}$ полуразрешим. Ще наричаме $\mathcal{U}$ *универсална машина на Тюринг*.

Упътване. Първо да съобразим защо $L_{\texttt{univ}}$ е полуразрешим език. Дефинираме (многолентова) машина на Тюринг $\mathcal{U}$, която работи по следния начин:

- вход дума α;
- $\mathcal{U}$ проверява дали α има вида $\ulcorner\mathcal{M}\urcorner\sharp\omega$, за някоя машина на Тюринг $\mathcal{M}$ и дума ω. Това става лесно, защото ω започва веднага след второ срещане на 111 в α.
- Ако α е от вида $\ulcorner\mathcal{M}\urcorner\sharp\omega$, то $\mathcal{U}$ симулира работата на $\mathcal{M}$ върху ω.
  - Ако $\mathcal{M}$ завърши след краен брой стъпки като приеме ω, то $\mathcal{U}$ приема α.
  - Ако $\mathcal{M}$ завърши след краен брой стъпки като отхвърли ω, то $\mathcal{U}$ отхвърля α.
  - Ако $\mathcal{M}$ никога не завършва върху ω, то очевидно $\mathcal{U}$ също никога не завършва върху α.
- Ако α няма вида $\ulcorner\mathcal{M}\urcorner\sharp\omega$, то $\mathcal{U}$ завършва веднага като отхвърля думата α.

Получаваме, че

$$\alpha \in L_{\texttt{univ}} \ \Leftrightarrow\ \alpha \in \mathcal{L}(\mathcal{U}).$$

Сега да съобразим защо $L_{\texttt{univ}}$ не е разрешим език. За произволна дума ω имаме:

$$\omega \in L_{\texttt{accept}} \ \Leftrightarrow\ \omega\sharp\omega \in L_{\texttt{univ}}.$$

Ако допуснем, че $L_{\texttt{univ}}$ е разрешим, то тогава $L_{\texttt{accept}}$ е разрешим език, което е противоречие. □

Следствие 4.2. Езикът

$$L'_{\mathtt{univ}} \stackrel{\text{деф}}{=} \{\ulcorner\mathcal{M}\urcorner\sharp\omega \mid \ulcorner\mathcal{M}\urcorner \text{ е машина на Тюринг и } \omega \notin \mathcal{L}(\mathcal{M})\}$$

не е полуразрешим.

4.7 Критерий за разрешимост

Sipser нарича това Mapping Reducibility [Sip12, 235].

Доказателството, че $L_{\mathtt{univ}}$ не е разрешим е пример за една обща схема, с която можем да докажем, че даден език не е разрешим:

- Нека имаме езика K, за който вече знаем, че не е разрешим. В нашия пример, $K = L_{\mathtt{accept}}$.
- Питаме се дали някой друг език L е разрешим.
- Намираме изчислима тотална функция f, за която е изпълнено, че:

  $$\omega \in K \;\Leftrightarrow\; f(\omega) \in L.$$

  В *Теорема 4.4*, това е функцията $f(\omega) = \omega\sharp\omega$.
- Тогава, ако L е разрешим ще следва, че K е разрешим, което е противоречие.

Твърдение 4.7. Докажете, че езикът

$$L_{\Sigma^\star} \stackrel{\text{деф}}{=} \{\omega \in \{0,1\}^\star \mid \omega \text{ е код на машина на Тюринг и } \mathcal{L}(\mathcal{M}_\omega) = \Sigma^\star\}$$

не е разрешим.

Доказателство. Ще покажем, че съществува тотална изчислима функция f, за която:

$L_{\Sigma^\star}$ не е дори полуразрешим, но за момента не знаем как да докажем това.

$$\alpha \in L_{\mathtt{accept}} \;\Leftrightarrow\; f(\alpha) \in L_{\Sigma^\star}.$$

Ще опишем алгоритъм (формално машина на Тюринг), за който при входна дума ω прави следното:

- Ако ω не е код на машина на Тюринг, то връщаме ω.
- Ако ω е код на машина на Тюринг, то тук става интересно. Връщаме код на друга машина на Тюринг $\mathcal{M}'$, която работи по следния начин:

  За различни $\mathcal{M}$ получаваме различни $\mathcal{M}'$.

  – Вход дума α;
  – Първоначално $\mathcal{M}'$ не обръща внимание на α.

- $\mathcal{M}'$ симулира работата на $\mathcal{M}$ върху думата $\ulcorner\mathcal{M}\urcorner$;
  * Ако след краен брой стъпки $\mathcal{M}$ завърши като приеме думата $\ulcorner\mathcal{M}\urcorner$, то $\mathcal{M}'$ приема думата α, т.е. $\mathcal{M}'$ завършва в състоянието $q_{\texttt{accept}}$.
  * Ако след краен брой стъпки $\mathcal{M}$ завърши като отхърли думата $\ulcorner\mathcal{M}\urcorner$, то $\mathcal{M}'$ отхвърля думата α, т.е. $\mathcal{M}'$ завършва в състоянието $q_{\texttt{reject}}$.
  * В противен случай, $\mathcal{M}$ никога не завършва върху $\ulcorner\mathcal{M}\urcorner$. Това означава, че $\mathcal{M}'$ никога не завършва върху входа α и следователно $\mathcal{M}'$ не приема думата α.

Получаваме, че:

$$\ulcorner\mathcal{M}\urcorner \in L_{\texttt{accept}} \implies \mathcal{L}(\mathcal{M}') = \Sigma^\star \implies \ulcorner\mathcal{M}'\urcorner \in L_{\Sigma^\star},$$
$$\ulcorner\mathcal{M}\urcorner \notin L_{\texttt{accept}} \implies \mathcal{L}(\mathcal{M}') = \emptyset \implies \ulcorner\mathcal{M}'\urcorner \notin L_{\Sigma^\star}.$$

На практика гореописаният алгоритъм дефинира тоталната изчислима функция

$$f(\alpha) = \begin{cases} \ulcorner\mathcal{M}'\urcorner, & \text{ако } \alpha = \ulcorner\mathcal{M}\urcorner \\ \alpha, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тогава получаваме, че

$$\alpha \in L_{\texttt{accept}} \Leftrightarrow f(\alpha) \in L_{\Sigma^\star}$$

и ако допуснем, че $L_{\Sigma^\star}$ е разрешим език, то $L_{\texttt{accept}}$ също ще е разрешим, което е противоречие. □

Следствие 4.3. Езикът

$$\overline{L}_\emptyset \stackrel{\text{деф}}{=} \{\omega \in \{0,1\}^\star \mid \omega \text{ е код на машина на Тюринг и } \mathcal{L}(\mathcal{M}_\omega) \neq \emptyset\}$$

е полуразрешим, но не е разрешим.

Следствие 4.4. Езикът

$$L_\emptyset \stackrel{\text{деф}}{=} \{\omega \in \{0,1\}^\star \mid \omega \text{ е код на машина на Тюринг и } \mathcal{L}(\mathcal{M}_\omega) = \emptyset\}$$

не е полуразрешим.

Упътване. Ако $L_\emptyset$ беше разрешим, то

$$\overline{L}_\emptyset = L_{\texttt{code}} \setminus L_{\texttt{Empty}}$$

щеше да е разрешим език, което е противоречие.

Ако $L_\emptyset$ беше полуразрешим, тогава, използвайки, че $\overline{L}_\emptyset$ е полуразрешим, от теоремата на Клини-Пост щеше да следва, че $L_\emptyset$ е разрешим, което е противоречие □

Задача 4.7. Докажете, че езикът

$$L_{\texttt{Dec}} = \{\omega \in \{0,1\}^\star \mid \omega\mathcal{M} \text{ е разрешител }\}$$

не е разрешим.

Твърдение 4.8. Езикът

$$L_{\texttt{reg}} \stackrel{\text{деф}}{=} \{\, \omega \mid \omega \text{ е код на машина на Тюринг и } \mathcal{L}(\mathcal{M}_\omega) \text{ е регулярен език} \,\}$$

не е разрешим.

Доказателство. Да фиксираме един език, за който знаем, че не е регулярен, например, $\{0^n1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Дефинираме алгоритъм, за който по вход $\ulcorner\mathcal{M}\urcorner$ връща код на машината на Тюринг $\mathcal{M}'$, която работи по следния начин: [Sip12, стр. 219]

- Вход думата α;
- Ако $\alpha = 0^n1^n$, за някое n, то $\mathcal{M}'$ приема думата α.
- Ако α не е от вида 0^n1^n, тогава $\mathcal{M}'$ симулира $\mathcal{M}$ върху думата $\ulcorner\mathcal{M}\urcorner$.
  - Ако след краен брой стъпки $\mathcal{M}$ завърши като приеме думата $\ulcorner\mathcal{M}\urcorner$, то $\mathcal{M}'$ приема α.
  - Ако след краен брой стъпки $\mathcal{M}$ завърши като отхвърли думата $\ulcorner\mathcal{M}\urcorner$, то $\mathcal{M}'$ отхвърля думата α.
  - В противен случай, $\mathcal{M}$ никога не завършва върху $\ulcorner\mathcal{M}\urcorner$. Това означава, че $\mathcal{M}'$ никога не завършва върху входа α и следователно $\mathcal{M}'$ не приема думата α.

Получаваме, че:

Използваме наготово, че $\Sigma^\star$ е регулярен език.

$$\begin{aligned}
\ulcorner\mathcal{M}\urcorner \in L_{\texttt{accept}} &\implies \mathcal{L}(\mathcal{M}') = \Sigma^\star \implies \ulcorner\mathcal{M}'\urcorner \in L_{\texttt{reg}}, \\
\ulcorner\mathcal{M}\urcorner \notin L_{\texttt{accept}} &\implies \mathcal{L}(\mathcal{M}') = \{0^n1^n \mid n \in \mathbb{N}\} \implies \ulcorner\mathcal{M}'\urcorner \notin L_{\texttt{reg}}.
\end{aligned}$$

Сега вече трябва да е ясно, че следната тотална функция е изчислима:

$$f(\alpha) = \begin{cases} \ulcorner\mathcal{M}'\urcorner, & \text{ако } \alpha = \ulcorner\mathcal{M}\urcorner \\ \alpha, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тогава получаваме, че

$$\alpha \in L_{\texttt{accept}} \Leftrightarrow f(\alpha) \in L_{\texttt{reg}}$$

и ако допуснем, че $L_{\texttt{reg}}$ е разрешим език, то $L_{\texttt{accept}}$ също ще е разрешим, което е противоречие. □

Сега ще видим, че идеята, която следваме в горните доказателства може да се обобщи. Нека $\mathscr{S}$ е множество от полуразрешими езици над фиксирана азбука Σ. Например,

$$\mathscr{S} = \{L \subseteq \Sigma^\star \mid L \text{ е регулярен език}\}.$$

Ще казваме, че $\mathscr{S}$ е свойство на полуразрешимите езици. $\mathscr{S}$ е **тривиално свойство**, ако $\mathscr{S} = \emptyset$ или $\mathscr{S}$ съдържа точно всички полуразрешими езици. Нека разгледаме

изброимото множество от машини на Тюринг, които разпознават езиците от $\mathscr{S}$. Ще представим това множество като език от кодовете на тези машини на Тюринг, т.е.

$$\texttt{Code}(\mathscr{S}) \stackrel{\text{деф}}{=} \{\omega \mid \omega \text{ е код на машина на Тюринг и } \mathcal{L}(\mathcal{M}_\omega) \in \mathscr{S}\}.$$

Можем да дефинираме и $\texttt{Code}(L)$, което е безкрайно изброимо множество, ако L е полуразрешим език.

[HU79, стр. 188]

Теорема 4.5 (Райс [Ric53])**.** За всяко нетривиално свойство $\mathscr{S}$ на полуразрешимите езици, $\texttt{Code}(\mathscr{S})$ е неразрешим.

Цел: да сведем ефективно $L_{\texttt{accept}}$ към $L_{\mathscr{S}}$

Доказателство. Без ограничение на общността, нека $\emptyset \notin \mathscr{S}$. Понеже $\mathscr{S}$ е нетривиално свойство, да разгледаме езика $L \in \mathscr{S}$, като $\mathcal{M}_L$ е машина на Тюринг, за която $\mathcal{L}(\mathcal{M}_L) = L$. Да разгледаме алгоритъм, който по дадена дума $\ulcorner\mathcal{M}\urcorner$ връща код на машина на Тюринг $\mathcal{M}'$, която зависи от $\mathcal{M}$ и от $\mathcal{M}_L$. Тя работи по следния начин:

Неформално описваме функцията δ за $\mathcal{M}'$

- вход думата α;
- първоначално $\mathcal{M}'$ не обръща внимание на α;
- $\mathcal{M}'$ симулира $\mathcal{M}$ върху думата $\ulcorner\mathcal{M}\urcorner$.
  - ако след краен брой стъпки $\mathcal{M}$ завърши като приеме думата $\ulcorner\mathcal{M}\urcorner$, то $\mathcal{M}'$ симулира $\mathcal{M}_L$ върху входната дума α;

в този случай ще получим, че $\mathcal{L}(\mathcal{M}') = L$

    * ако след краен брой стъпки $\mathcal{M}_L$ завърши като приеме думата α, то $\mathcal{M}'$ приема α;
    * ако след краен брой стъпки $\mathcal{M}_L$ завърши като отхвърли думата α, то $\mathcal{M}'$ отхвърля α;
    * ако $\mathcal{M}_L$ никога не завършва върху α, то $\mathcal{M}'$ никога няма да завърши върху α и следователно $\mathcal{M}'$ не приема α.
  - ако след краен брой стъпки $\mathcal{M}$ завърши като отхвърли думата $\ulcorner\mathcal{M}\urcorner$, то $\mathcal{M}'_\omega$ отхвърля α;

при тези два случая ще получим, че $\mathcal{L}(\mathcal{M}') = \emptyset$

  - Ако $\mathcal{M}$ никога не свършва върху $\ulcorner\mathcal{M}\urcorner$, то $\mathcal{M}'$ никога няма да свърши върху α, което означава, че $\mathcal{M}'$ не приема α.

От всичко това следва, че така описаната машина на Тюринг $\mathcal{M}'$ има свойствата:

$$\begin{aligned} \ulcorner\mathcal{M}\urcorner \in L_{\texttt{accept}} &\implies \mathcal{L}(\mathcal{M}') = L \implies \mathcal{L}(\mathcal{M}') \in \mathscr{S}, \\ \ulcorner\mathcal{M}\urcorner \notin L_{\texttt{accept}} &\implies \mathcal{L}(\mathcal{M}') = \emptyset \implies \mathcal{L}(\mathcal{M}') \notin \mathscr{S}. \end{aligned}$$

Сега вече трябва да е ясно, че гореописаният алгоритъм дефинира тоталната изчислима функция

$$f(\alpha) = \begin{cases} \ulcorner\mathcal{M}'\urcorner, & \text{ако } \alpha = \ulcorner\mathcal{M}\urcorner \\ \alpha, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тогава получаваме, че

$$\alpha \in L_{\texttt{accept}} \;\Leftrightarrow\; f(\alpha) \in \texttt{Code}(\mathscr{S})$$

и ако допуснем, че $\texttt{Code}(\mathscr{S})$ е разрешимо множество, то ще следва, че $L_{\texttt{accept}}$ е разрешимо, което е противоречие.

Ако $\emptyset \in \mathscr{S}$, то правим горните разсъждения за класа от езици

$$\overline{\mathscr{S}} = \{L \subseteq \Sigma^\star \mid L \text{ е полуразрешим език и } L \notin \mathscr{S}\}.$$

По аналогичен начин доказваме, че $\texttt{Code}(\overline{\mathscr{S}})$ не е разрешим език. Понеже

$$\texttt{Code}(\overline{\mathscr{S}}) = L_{\texttt{code}} \setminus \texttt{Code}(\mathscr{S}),$$

то $\texttt{Code}(\mathscr{S})$ също не е разрешим език. □

Следствие 4.2. За всяко от следните свойства $\mathscr{S}$ на полуразрешимите множества, $\texttt{Code}(\mathscr{S})$ **не** е разрешим език, където:

Тук няма нужда нищо да доказваме. Просто съобразяваме, че всяко от тези свойства е нетривиално.

а) $\mathscr{S}$ е свойството празнота, т.е. езикът

$$\texttt{Code}(\mathscr{S}) = \{\ulcorner\mathcal{M}\urcorner \mid \mathcal{M} \text{ е машина на Тюринг и } \mathcal{L}(\mathcal{M}) = \emptyset\}$$

не е разрешим;

б) $\mathscr{S}$ е свойството за пълнота, т.е. езикът

$$\texttt{Code}(\mathscr{S}) = \{\ulcorner\mathcal{M}\urcorner \mid \mathcal{M} \text{ е машина на Тюринг и } \mathcal{L}(\mathcal{M}) = \Sigma^\star\}$$

не е разрешим;

в) $\mathscr{S}$ е свойството крайност, т.е. езикът

$$\texttt{Code}(\mathscr{S}) = \{\ulcorner\mathcal{M}\urcorner \mid \mathcal{M} \text{ е машина на Тюринг и } |\mathcal{L}(\mathcal{M})| < \infty\}$$

не е разрешим;

г) $\mathscr{S}$ е свойството безкрайност, т.е. езикът

$$\texttt{Code}(\mathscr{S}) = \{\ulcorner\mathcal{M}\urcorner \mid \mathcal{M} \text{ е машина на Тюринг и } |\mathcal{L}(\mathcal{M})| = \infty\}$$

не е разрешим;

д) $\mathscr{S}$ е свойството регулярност, т.е. езикът

$$\texttt{Code}(\mathscr{S}) = \{\ulcorner\mathcal{M}\urcorner \mid \mathcal{M} \text{ е машина на Тюринг и } \mathcal{L}(\mathcal{M}) \text{ е регулярен език}\}$$

не е разрешим;

е) $\mathscr{S}$ е свойството безконтекстност, т.е. езикът

$$\texttt{Code}(\mathscr{S}) = \{\ulcorner\mathcal{M}\urcorner \mid \mathcal{M} \text{ е машина на Тюринг и } \mathcal{L}(\mathcal{M}) \text{ е безконтекстен}\}$$

не е разрешим;

Това свойство е нетривиално, защото вече показахме, че $\{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ е полуразрешим (дори разрешим) език, а знаем отдавна, че този език не е безконтекстен.

ж) $\mathscr{S}$ е свойството разрешимост, т.е. езикът

$$\texttt{Code}(\mathscr{S}) = \{\ulcorner\mathcal{M}\urcorner \mid \mathcal{M} \text{ е машина на Тюринг и } \mathcal{L}(\mathcal{M}) \text{ е разрешим}\}$$

не е разрешим.

Тук също - вече сме разгледали примери за полуразрешими езици, които не са разрешими.

4.8 Критерии за полуразрешимост

Това означава, че ако $\texttt{Code}(\mathscr{S})$ е полуразрешим език, то всеки език $L_0 \in \mathscr{S}$ притежава краен подезик, който също принадлежи на $\mathscr{S}$.

Лема 4.1. Нека $\mathscr{S}$ е свойство на полуразрешимите езици. Ако съществува безкраен език $L_0 \in \mathscr{S}$, който няма крайно подмножество в $\mathscr{S}$, то $\texttt{Code}(\mathscr{S})$ не е полуразрешим език.

Упътване. Нека $L_0 = \mathcal{L}(\mathcal{M}_0)$ като $L_0 \in \mathscr{S}$, но всеки краен подезик на L_0 не принадлежи на $\mathscr{S}$. Сега ще дефинираме тотална изчислима функция f, която при вход думата $\omega \in \{0,1\}^\star$ работи по следния начин:

- Ако ω не е код на машина на Тюринг, то $f(\omega) \stackrel{\text{деф}}{=} \omega$.
- Ако ω е код на машината на Тюринг $\mathcal{M}_\omega$, то тогава $f(\omega) = \ulcorner \mathcal{M}' \urcorner$, където $\mathcal{M}'$ работи така:
  - вход думата α;
  - $\mathcal{M}'$ симулира работата на $\mathcal{M}_\omega$ върху думата ω:
    * ако $\mathcal{M}_\omega$ завърши за по-малко от $|\alpha|$ на брой стъпки като *приеме* ω, то $\mathcal{M}'$ завършва веднага като *отхвърля* α;
    * в противен случай, $\mathcal{M}'$ симулира работата на $\mathcal{M}_0$ върху α.

  Така получаваме, че

$$\mathcal{L}(\mathcal{M}') = \begin{cases} \{\alpha \in L_0 \mid |\alpha| < s_0\}, & \text{ако } \mathcal{M}_\omega \text{ приема } \omega \\ L_0, & \text{ако } \mathcal{M}_\omega \text{ не приема } \omega, \end{cases}$$

  където s_0 е минималният брой стъпки необходими на $\mathcal{M}_\omega$ за да приеме думата ω.

  Заключаваме, че

$$\begin{aligned} &\mathcal{M}_\omega \text{ не приема } \omega \implies \omega \in L_{\texttt{diag}} \implies \ulcorner \mathcal{M}' \urcorner \in \texttt{Code}(\mathscr{S}) \\ &\mathcal{M}_\omega \text{ приема } \omega \implies \omega \notin L_{\texttt{diag}} \implies \ulcorner \mathcal{M}' \urcorner \notin \texttt{Code}(\mathscr{S}). \end{aligned}$$

Понеже

$$\omega \in L_{\texttt{diag}} \Leftrightarrow f(\omega) \in \texttt{Code}(\mathscr{S}),$$

то $\texttt{Code}(\mathscr{S})$ не е полуразрешим, защото ние знаем, че $L_{\texttt{diag}}$ не е полуразрешим. □

Следствие 4.3. Следните езици **не** са полуразрешими:

- $L = \{\ulcorner \mathcal{M} \urcorner \mid |\mathcal{L}(\mathcal{M})| = \infty\}$;
- $L = \{\ulcorner \mathcal{M} \urcorner \mid \mathcal{L}(\mathcal{M}) = \Sigma^\star\}$;
- $L = \{\ulcorner \mathcal{M} \urcorner \mid \mathcal{L}(\mathcal{M})$ не е разрешим$\}$;
- $L = \{\ulcorner \mathcal{M} \urcorner \mid \mathcal{L}(\mathcal{M})$ не е полуразрешим$\}$;

- $L = \{\ulcorner \mathcal{M} \urcorner \mid \mathcal{L}(\mathcal{M})$ не е регулярен$\}$.

Лема 4.2. Нека L_1 е език в $\mathscr{S}$ и нека L_2 е полуразрешим език, като $L_1 \subset L_2$ и $L_2 \notin \mathscr{S}$. Тогава $\texttt{Code}(\mathscr{S})$ не е полуразрешим език.

Това означава, че ако $\texttt{Code}(\mathscr{S})$ е полуразрешим език, ако $L_0 \in \mathscr{S}$ и $L_0 \subseteq L_1$, като L_1 е полуразрешим, то $L_1 \in \mathscr{S}$.

Упътване. Нека $L_1 = \mathcal{L}(\mathcal{M}_1)$ и $L_2 = \mathcal{L}(\mathcal{M}_2)$. Ще дефинираме тотална изчислима функция f, която при вход думата $\omega \in \{0,1\}^\star$ работи по следния начин:

- Ако ω не е код на машина на Тюринг, то $f(\omega) = \omega$.
- Ако ω е код на машината на Тюринг $\mathcal{M}_\omega$, тогава $f(\omega)$ ще бъде код на машината на Тюринг $\hat{\mathcal{M}}$, която работи по следния начин:
  - вход думата α;
  - $\hat{\mathcal{M}}$ симулира едновременно две изчисления - $\mathcal{M}_1$ върху α и $\mathcal{M}_\omega$ върху ω докато намери стъпка s, такава че:
    * ако $\mathcal{M}_1$ завършва за s на брой стъпки като приема думата α, то $\hat{\mathcal{M}}$ завършва като приема думата α;
    * ако $\mathcal{M}_\omega$ завършва за s на брой стъпки като приема думата ω, то $\hat{\mathcal{M}}$ симулира работата $\mathcal{M}_2$ върху α.
    * ако $\hat{\mathcal{M}}$ не намери такава стъпка, то е ясно, че $\hat{\mathcal{M}}$ никога не завършва върху α.

  Получаваме, че:

$$\mathcal{L}(\hat{\mathcal{M}}) = \begin{cases} L_2, & \text{ако } \mathcal{M}_\omega \text{ приема } \omega \\ L_1, & \text{ако } \mathcal{M}_\omega \text{ не приема } \omega. \end{cases}$$

Заключаваме, че:

$$\omega \in L_{\texttt{diag}} \Leftrightarrow f(\omega) \in \texttt{Code}(\mathscr{S}),$$

защото $L_2 \notin \mathscr{S}$, а $L_1 \in \mathscr{S}$. Това означава, че ефективно можем да сведем въпрос за принадлежност в $L_{\texttt{diag}}$ към въпрос за принадлежност в $\texttt{Code}(\mathscr{S})$. Следователно, ако $\texttt{Code}(\mathscr{S})$ е полуразрешим език, то $L_{\texttt{diag}}$ е полуразрешим език, което е противоречие. □

Следствие 4.4. Следните езици **не** са полуразрешими:

- $L = \{\ulcorner \mathcal{M} \urcorner \mid \mathcal{L}(\mathcal{M})$ е регулярен$\}$;
- $L = \{\ulcorner \mathcal{M} \urcorner \mid \mathcal{L}(\mathcal{M})$ е безконтекстен$\}$;
- $L = \{\ulcorner \mathcal{M} \urcorner \mid \mathcal{L}(\mathcal{M})$ е разрешим$\}$;
- $L = \{\ulcorner \mathcal{M} \urcorner \mid |\mathcal{L}(\mathcal{M})| = 42\}$.

Теорема 4.6 (Райс-Шапиро)**.** Нека $\texttt{Code}(\mathscr{S})$ е полуразрешим език. Тогава е изпълнено, че:

$$L \in \mathscr{S} \Leftrightarrow (\exists L_0 \subseteq \Sigma^\star)[L_0 \text{ е краен и } L_0 \subseteq L \implies L_0 \in \mathscr{S}].$$

Доказателство. Посоката $(\Rightarrow)$ следва от *Лема 4.1*, докато посоката $(\Leftarrow)$ следва от *Лема 4.2*. □

4.9 Сложност

- Казваме, че детерминистичната машина на Тюринг $\mathcal{M}$ е **полиномиално ограничена**, ако съществува полином $p(x)$, такъв че няма дума ω, за която $\mathcal{M}$ да извършва при вход ω повече от $p(|\omega|)$ стъпки.

- Езикът L се нарича **детерминистично полиномиално разрешим**, ако съществува полиномиално ограничен детерминистичен разрешител $\mathcal{M}$, за който $L = \mathcal{L}(\mathcal{M})$. Нека

$$\mathcal{P} \stackrel{\text{деф}}{=} \{L \subseteq \Sigma^\star \mid L \text{ е полиномиално разрешим с ДМТ}\}.$$

- Казваме, че детерминистичната машина на Тюринг $\mathcal{M}$ е **експоненциално ограничена**, ако съществува полином $p(x)$, такъв че няма дума ω, за която $\mathcal{M}$ да извършва при вход ω повече от $2^{p(|\omega|)}$ стъпки.

- Езикът L се нарича **детерминистично експоненциално разрешим**, ако съществува експоненциално ограничен детерминистичен разрешител $\mathcal{M}$, за който $L = \mathcal{L}(\mathcal{M})$. Нека

$$\mathcal{EXP} \stackrel{\text{деф}}{=} \{L \subseteq \Sigma^\star \mid L \text{ е експоненциално разрешим с ДМТ}\}.$$

- Казваме, че недетерминистичната машина на Тюринг $\mathcal{N}$ е **полиномиално ограничена**, ако съществува полином $p(x)$, такъв че няма дума ω, за която $\mathcal{N}$ да извършва при вход ω повече от $p(|\omega|)$ стъпки.

- Езикът L се нарича **недетерминистично полиномиално разрешим**, ако съществува полиномиално ограничена недетерминистичен разрешител $\mathcal{N}$, за който $L = \mathcal{L}(\mathcal{N})$. Нека

$$\mathcal{NP} \stackrel{\text{деф}}{=} \{L \subseteq \Sigma^\star \mid L \text{ е полиномиално разрешим с НМТ}\}.$$

Задача 4.8. Докажете, че класът $\mathcal{P}$ е затворен относно допълнение, обединение, сечение и конкатенация.

Задача 4.9. Докажете, че класът $\mathcal{P}$ е затворен относно операцията звезда на Клини.

Теорема 4.7. $\mathcal{NP} \subseteq \mathcal{EXP}$.

Твърдение 4.9. За азбука Σ от поне две букви, можем да обобщим някои от резултатите от предишните глави:

$$\texttt{REG} \subsetneqq \texttt{CFG} \subsetneqq \mathcal{P}.$$

Упътване. Езикът $\{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{P}$, но не е безконтекстен. □

4.10 Задачи

Задача 4.10. Вярно ли е, че следните езици са разрешими?

а) $\{\ulcorner \mathcal{A} \urcorner \cdot \omega \mid \mathcal{A}$ е ДКА и $\omega \in \mathcal{L}(\mathcal{A})\}$;

б) $\{\ulcorner \mathcal{A} \urcorner \mid \mathcal{A}$ е ДКА и $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ е безкраен език$\}$;

в) $\{\ulcorner \mathcal{A} \urcorner \mid \mathcal{A}$ е ДКА и $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \{0,1\}^\star\}$;

г) $\{\ulcorner \mathcal{A} \urcorner \mid \mathcal{A}$ е ДКА и $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ съдържа поне една дума с равен брой нули и единици$\}$;

д) $\{\ulcorner \mathcal{A} \urcorner \mid \mathcal{A}$ е ДКА и $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ съдържа поне една дума палиндром$\}$;

е) $\{\ulcorner \mathcal{A} \urcorner \mid \mathcal{A}$ е ДКА и $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ не съдържа дума с нечетен брой единици$\}$;

ж) $\{\ulcorner \mathcal{A} \urcorner \cdot \ulcorner \mathcal{B} \urcorner \mid \mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ са ДКА и $\mathcal{L}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{B})\}$;

з) $\{\ulcorner \mathcal{A} \urcorner \cdot \ulcorner \mathcal{B} \urcorner \mid \mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ са ДКА и $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \mathcal{L}(\mathcal{B})\}$;

Задача 4.11. Вярно ли е, че следните езици са разрешими?

а) $\{\ulcorner G \urcorner \cdot \omega \mid G$ е безконтекстна граматика и $\omega \in \mathcal{L}(G)\}$;

б) $\{\ulcorner G \urcorner \mid G$ е безконтекстна граматика и $\mathcal{L}(G) = \emptyset\}$;

в) $\{\ulcorner G \urcorner \mid G$ е безконтекстна граматика над $\{0,1\}^\star$ и $\mathcal{L}(1^\star) \subseteq \mathcal{L}(G)\}$;

г) $\{\ulcorner G \urcorner \mid G$ е безконтекстна граматика над $\{0,1\}^\star$ и $\mathcal{L}(1^\star) \subseteq \mathcal{L}(G)\}$;

д) $\{\ulcorner G \urcorner \mid G$ е безконтекстна граматика над $\{0,1\}^\star$ и $\varepsilon \in \mathcal{L}(G)\}$;

е) $\{\ulcorner G \urcorner \cdot 0^k \mid G$ е безконтекстна граматика над $\{0,1\}^\star$ и $|\mathcal{L}(G)| \leq k\}$;

ж) $\{\ulcorner G \urcorner \mid G$ е безконтекстна граматика над $\{0,1\}^\star$ и $|\mathcal{L}(G)| = \infty\}$;

Задача 4.12. Докажете, че езикът

$$L = \{\ulcorner \mathcal{M} \urcorner \sharp \omega \mid \mathcal{M} \text{ прави движение наляво при работата си върху вход } \omega\}$$

е разрешим.

Упътване. Нужно е да симулирате работата на $\mathcal{M}$ върху ω само за $|\omega| + |Q^{\mathcal{M}}| + 1$ на брой стъпки. □

Задача 4.13. Докажете, че езикът съставен от думи от вида $\ulcorner\mathcal{M}\urcorner\sharp\omega$, за които $\mathcal{M}$ прави опит за движение наляво от най-лявата клетка при работата си върху вход ω е разрешим.

Библиография

[ALSU07] Alfred Aho, Monica Lam, Ravi Sethi, and Jeffrey Ullman, *Compilers: principles, techniques and tools*, 2 ed., Pearson Education, 2007.

[Brz64] Janusz A. Brzozowski, *Derivatives of regular expressions*, J. ACM **11** (1964), no. 4, 481–494.

[HMU01] John E. Hopcroft, Rajeev Motwani, and Jeffrey D. Ullman, *Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation*, second ed., Addison-Wesley, 2001.

[HU79] John E. Hopcroft and Jeffrey D. Ullman, *Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation*, first ed., Addison-Wesley, 1979.

[Kle56] S. C. Kleene, *Representation of events in nerve nets and finite automata*, Automata Studies (C. E. Shannon and J. McCarthy, eds.), Princeton University Press, 1956, pp. 3 – 42.

[KN01] Bakhadyr Khoussainov and Anil Nerode, *Automata Theory and its Applications*, Springer, 2001.

[Koz97] Dexter Kozen, *Automata and computability*, Springer, 1997.

[Myh57] J. Myhill, *Finite automata and the representation of events*, WADD TR-57-624, Wright Patterson AFB, Ohio (1957), 112 – 137.

[Ner58] A. Nerode, *Linear automata transformation*, Proceedings of AMS **9** (1958), 541 – 544.

[NS93] Anil Nerode and Richard Shore, *Logic for Applications*, Springer-Verlag, 1993.

[PL98] Christos Papadimitriou and Harry Lewis, *Elements of the Theory of Computation*, Prentice-Hall, 1998.

[Ric53] H. G. Rice, *Classes of recursively enumerable sets and their decision problems*, Transactions of the American Mathematical Society **74** (1953), no. 2, 358–366.

[RS59] M. O. Rabin and D. Scott, *Finite automata and their decision problems*, IBM Journal of Research and Development **3** (1959), pp. 114 – 125.

[Sha08] Jeffrey Shallit, *A Second Course in Formal Languages and Automata Theory*, CUP, 2008.

[Sip12] Michael Sipser, *Introduction to the Theory of Computation*, 3 ed., Cengage Learning, 2012.

[WWA80] L. Wittgenstein, G.H.V. Wright, and G.E.M. Anscombe, *Remarks on the philosophy of psychology*, vol. 1, University of Chicago Press/B. Blackwell, 1980.

Азбучен указател