Действие на група в/у мн-во

Опр. (*) Нека $(G, \circ)$ група; $M \neq \emptyset$

G действа в/у M когато $\forall g \in G$ и $\forall x \in M \rightarrow g(x) = gx \in M$

и са изпълнени

1) $e(x) = x, \quad \forall x \in M \quad (e \in G)$

2) $(g_1 g_2)(x) \overset{!}{=} g_1(g_2(x))$

M - мн-во $M \neq \emptyset$

$S(M) = \{\varphi : M \to M \mid \varphi \text{ биекция}\}$

$\varphi, \psi \in S(M)$

$\varphi \circ \psi \in S(M)$

$(\varphi \circ \psi)(x) = \varphi(\psi(x))$

Забл. $f : G \times M \to M$, $\forall x \in M$ $f(g, x)$ $\boxed{g(x)}$

1) $f(e, x) = x$,

2) $f(g_1 g_2, x) = f(g_1, f(g_2, x))$

Забел. G, M $\quad g, x \longrightarrow x^g \in M$

1) $x^e = x, \forall x$ $\qquad$ 2) $x^{g_1 g_2} = (x^{g_1})^{g_2}$

различно е от Опр (*)

в св-вата леви скс. кл. $\rightarrow$ десни скс. кл.

<u>Примери</u>

- $S(M)$ действа в/у M
- V е лин. пр-во над F

$G = (F^*, \cdot)$ мултипл. гр. на F

$$G \times V \to V$$

$$\lambda \in G,\ x \in V \to \lambda x \in V$$

$$1x = x,\ \forall x$$

$$(\lambda\mu)x = \lambda(\mu(x))$$

- $GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid \det A \neq 0\}$

$$\mathbb{R}^n = M = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \,\middle|\, x_i \in \mathbb{R} \right\}$$

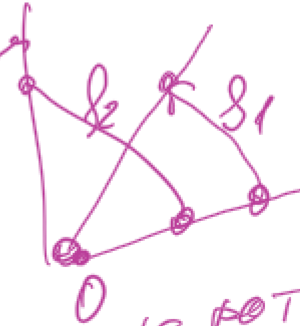
$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$$E \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$(AB)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A\left(B\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right)$$

(2) $\mathbb{R}^2$

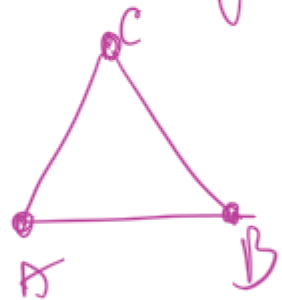
P действа в/у $\mathbb{R}^2$



мн-вото на ротациите с център O

P = група от ротации

(3) D_3 действа в/у $\{A, B, C\}$



Тв| G действа в/у M и $g \in G$

Тогава g задава биекция на M ~~в~~ M // $\varphi_g \in S(M)$

$\varphi_g : M \xrightarrow{g} M \ : \ x \to (g(x)) \mid \forall x \in M$

Д-во

ф-инекция

Ако $\varphi_g(x) = \varphi_g(y)$ $\quad g \in G$

$\Rightarrow g(x) = g(y)$

$g^{-1}(g(x)) = g^{-1}(g(y))$

$(g^{-1}g)(x) = (g^{-1}g)(y)$

$e(x) = e(y) \Rightarrow x = y$

Нека $z \in M$ произв.

$e(z) = z$

$(gg^{-1})(z) = z \Rightarrow$

$z = g(\underbrace{g^{-1}(z)}_{\in M})$

$\Rightarrow \varphi_g$ е сюрекция

е биекция

Т// Нека G е група и $M \neq \emptyset$

а) всяко действие на групата G в/у мн. во M задава хомоморфизъм $\Phi : G \to S(M)$ $\quad \Phi(g) = \varphi_g \in S(M)$

б) Всеки хомоморфизъм $\psi : G \to S(M)$ определя действие на G в/у M : $g[x] = (\underbrace{\psi(g)}_{\in S(M)})(x)$

Д-во ($\Rightarrow$) Нека G действа в/у M

$\varphi_g : M \to M \quad \varphi_g(x) = g(x)$ и φ_g е биекция $\varphi_g \in S(M)$

$\Phi : G \to S(M)$

$g \to \varphi_g$

Φ хомоморфизъм

$\Phi(g_1g_2) = \varphi_{g_1g_2} = \varphi_{g_1} \circ \varphi_{g_2} = \Phi(g_1) \circ \Phi(g_2)$

$\varphi_{g_1g_2}(x) = (g_1g_2)(x) = g_1(g_2(x)) = \varphi_{g_1}(g_2(x)) =$

$x \in M$ $= \varphi_{g_1}(\varphi_{g_2}(x)) = (\varphi_{g_1} \circ \varphi_{g_2})(x)$

($\Leftarrow$) Нека $\psi : G \to S(M)$ Деф. $g[x] = (\psi(g))(x) \in M$

① $e[x] = (\psi(e))(x) = id(x) = x$

② $(g_1g_2)[x] = \psi(g_1g_2)(x) = (\psi(g_1) \circ \psi(g_2))(x) = \psi(g_1)(\psi(g_2)(x)) =$

$= g_1[\psi(g_2)(x)] = g_1[g_2[x]]$

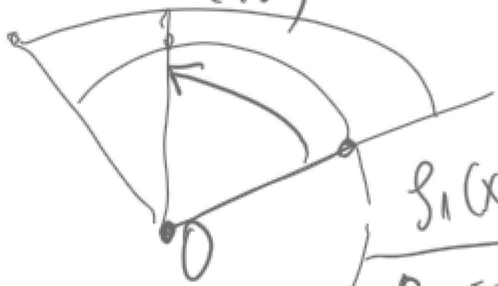
$G \times M \to M \qquad g, x \to g[x] = (\psi(g))(x)$ е действие на G в/у M

Опр. Групата G действа <u>точно</u> в/у M когато ядрото на хомоморфизма определен от действието $= \{e\}$

т.е. $\boxed{g(x) = x \ \forall x \iff g = e \in G}$

P - групата от ротациите около O

$P < S(\mathbb{R}^2)$



$\rho_1(x) = x, \ \forall x \in \mathbb{R}^2$

действието е точно

ρ_a действа като ротация на ъгъл a

$\mathbb{R}^2 \longleftrightarrow \mathbb{C}$ точките

$(\mathbb{R}, +)$ $\quad a \in \mathbb{R}$ $\quad \rho_a = \cos a + i \sin a$

$\rho: \mathbb{R} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

$\rho(a, z) = \rho_a \cdot z = (\cos a + i \sin a) \cdot z$

$\rho(0, z) = 1 \cdot z = z$

$\rho(a+b, z) = [\cos(a+b) + i \sin(a+b)] z = (\cos a + i \sin a)(\cos b + i \sin b) z = \rho(a, \rho(b, z))$

$\rho_a(\rho_b(z))$

Не е точно действие

$\rho_{2\pi} = \rho_0 = \rho_{2k\pi}$

Пр. $(G, \cdot)$ $\quad M = G$

$$g(x) = g \cdot x \qquad G \times G \to G$$

$g \in G$, $x \in M$

$$e(x) = ex = x, \ \forall x$$
$$(g_1 g_2)(x) = g_1(g_2(x))$$

$\Rightarrow$ G действа в/у елементите си

Точно ли е действието? $\Rightarrow$ да, точно е

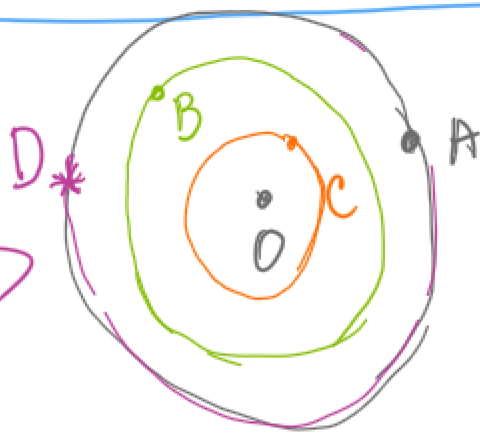
$\exists ?\, g \neq e : g(x) = x, \ \forall x$ не съществува

$\exists$ хомоморф. $\Phi : G \to S(G)$ и $\ker \Phi = \{e\}$

$\Rightarrow \operatorname{Im} \Phi \cong G/\ker\Phi = \boxed{G < S(G)}$ Т. Кейли

Пр. Ротациите в равнината

Орбита



Опр. Нека G действа в/у M

$x \in M$: $O_G(x) = O(x) = \{ g(x) \mid g \in G \}$ орбита на x

$x, y \in M$

$x \sim y$ когато $\exists g \in G : y = g(x)$

Св-во „$\sim$" релация на еквивалентност

① $x \sim x$ $\quad x = e(x)$

② $x \sim y$ т.е. $y = g(x) \Rightarrow g^{-1}(y) = x$

$\Rightarrow y \sim x$

③ $x \sim y$ и $y \sim z \Rightarrow x \sim z$

$y = g_1(x)$, $z = g_2(y)$

$\Rightarrow z = g_2(y) = g_2(g_1(x)) = (g_2 g_1)(x)$

Св-во

$x \sim y \Leftrightarrow y \in O(x) \Leftrightarrow x \in O(y)$

1) $x \in O(x)$

2) $y \in O(x) \Rightarrow x \in O(y)$

и $O(x) = O(y)$ класове на еквив.

Ако $y \in O(x)$ и $z \in O(y)$

$\Rightarrow x \sim y$ и $y \sim z \Rightarrow x \sim z$

$\Rightarrow z \in O(x) \Rightarrow O(y) \subset O(x)$

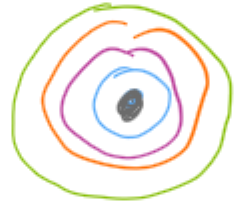
$x \in O(y)$ и $t \in (O(x))$

$\Rightarrow O(x) \subset O(y)$

$\Rightarrow O(x) = O(y)$

$$O(x)\cap O(y) = \begin{cases} \emptyset & y\notin O(x) \\ O(x)=O(y), & y\in O(x)\end{cases}$$

Пр.



$$\Rightarrow M = \bigcup_{x\in M} O(x)$$

Пр. Нека $H < G$

H действа в/у G $\underset{\in H}{h}, \underset{\in G}{x} \to hx \in G$

$a\in G$ $O(a) = \{ha \mid h\in H\} = Ha$

$G = \bigcup Ha = \bigcup O(a)$

Пр. $\sigma = (1,2,3)(4,5,6,7)(8,9,10,11,12) \in S_{12}$

$G = \langle\sigma\rangle < S_{12}$ G действа в/у $\{1,\dots,12\} = M$

$O(1)=\{1,2,3\}$ $O(6)=\{4,5,6,7\}$ $O(12)=\{8,9,10,11,12\}$

$\sigma(1)=2;\ \sigma^2(1)=3,\ \sigma^3(1)=1$

$x \in M$
G действ. в/у M

$St_G(x) = St(x) = \{g \in G \mid g(x) = x\} \subset G$
стабилизатор на x

Тв 1 G действ. в/у M $(x \in M)$
$\Rightarrow St(x) < G$

① $g_1, g_2 \in St(x)$
$(g_1 g_2)(x) = g_1(\underbrace{g_2(x)}) = g_1(x) = x$
$\Rightarrow g_1 g_2 \in St(x)$

② $g_1 \in St(x) \Rightarrow x = g_1(x)$
$\Rightarrow g_1^{-1} \in St(x)$ | $g^{-1}(x) = (g_1^{-1} g_1)(x)$
$g_1^{-1}(x) = x$

$\Rightarrow St(x) < G$

$\varphi = (1\,2\,3)(4\,5\,6\,7)(8\,9\,10\,11\,12)$
$O(1) = \{1, 2, 3\}$
$St(1) = \langle \varphi^3 \rangle = \{\varphi^{3k} \mid k \in \mathbb{Z}$

Св-во G действ. в/у M
$\Rightarrow \exists$ хомоморф
$\Phi : G \to S(M)$
$\ker \Phi = \{g \mid \Phi(g) = id\} = \{g \mid g(x) = x\ \forall x\}$
$= \bigcap_{x \in M} St(x)$

Тв) G действа в/у M и $x\in M$ и $H=St(x)<G$

$\Rightarrow$ Ако $y=g(x)\in O(x) \Rightarrow St(y)=gSt(x)g^{-1}$

$y=g(x)\in O(x)$

Ако $h\in H=St(x)$: $(ghg^{-1})y=(ghg^{-1})(gx)=$

$= gh(x)=g(x)=y$

$\Rightarrow ghg^{-1}\in St(y)$

$gHg^{-1}\subset St(y)$

$l\in St(y)$ $\quad l(y)=y$ $\quad lg(x)=g(x)$

$(g^{-1}lg)(x)=(g^{-1}g)(x)=x$

$\Rightarrow g^{-1}lg\in St(x)$

$l\in gSt(x)\cdot g^{-1} \Rightarrow St(y)\subset gHg^{-1}$

I/ G действа в/у M, $x \in M$

а) $y \in O(x)$ т.е. $y = g(x) \Rightarrow L = \{ l \in G \mid y = l(x) \} = gSt(x)$

б) има биекция м/у мн-во на левите ~~със~~ класове на $St(x)$ и мн-во на точките в $O(x)$

Д-во

$l \in L \quad l(x) = y \Rightarrow l(x) = g(x) \Rightarrow g^{-1}(l(x)) = x$

$\Rightarrow g^{-1} l \in St(x) \Rightarrow l \in gSt(x) \Rightarrow L \subset gSt(x)$

$t \in gSt(x) \Rightarrow t = gh,\ h \in St(x) \Rightarrow t(x) = (gh)(x) = g(\underbrace{h(x)}) = g(x) = y$

$\Rightarrow t(x) = y \Rightarrow t \in L \Rightarrow L \supseteq gSt(x) \Rightarrow L = gSt(x)$

$y, z \in O(x) \Rightarrow y = g(x)\ ,\ z = l(x)$ и $y \neq z$

$l \notin gSt(x) \quad lSt(x) \cap gSt(x) = \emptyset$

На разл. елем. от орбитата съотв. разл. леви със. класове

от т. а $\Rightarrow$ на всеки елем. от орбитата съответства със. кл.

$\Rightarrow$ биекция $\Rightarrow |O(x)| = |G : St(x)|$

??? | Действие чрез спрягане

G - група $\quad M = G$

$\underset{G}{g}, \underset{M}{x} \longrightarrow g[x] = gxg^{-1}$

$e[x] = exe^{-1} = x$

$(g_1g_2)[x] =$
$= (g_1g_2)x(g_1g_2)^{-1} =$
$= g_1 \boxed{g_2 x g_2^{-1}} g_1^{-1} =$
$= g_1[g_2xg_2^{-1}] =$
$= g_1[g_2[x]]$
$\Rightarrow$ действие

$Z(G) = \{a \mid ax = xa, \forall x\}$

$\to Z(G) < G$; $Z(G)$ е Абелева

$\to a \in Z(G) \Leftrightarrow a[x] = axa^{-1} = x$

$a \in Z(G)$ под действието спрягане оставя всеки елем. на място т.е. е елемент от ядрото на хомоморф. задаващ спрягане

$\to a \in Z(G) \Leftrightarrow ax = xa, \forall x$ ($a = xax^{-1}$) $\Leftrightarrow x[a] = a, \forall x \in G \Leftrightarrow O(a) = \{a\}$ при спрягане

G действа чрез спрягане в/у G

$C(a) = \{gag^{-1} \mid g \in G\} = \{g[a] \mid g \in G\} = O(a)$

– клас спрегнати елементи

$Z(a) = \{g \mid gag^{-1} = a\} = \{g \mid ga = ag\} = \{g \mid g[a] = a\} = St(a)$

– централизатор на $\underline{\underline{a}}$

<u>Лема</u> G действа в/у G чрез спрягане

$\Rightarrow \exists\, \psi : G \to S(G)$ хомоморфизъм определен от действието

– $Z(G) = \ker(\psi) = \bigcap_{a \in G} Z(a)$

– $a \in Z(G) \Leftrightarrow \underline{\underline{C\{a\} = \{a\}}}$

I/ ф-ла за класовете спрегнати елем.

G - крайна и $x_1, \dots, x_k$ по един представител от всеки клас спрегнати елем. (който има повече от един елемент)

$\Rightarrow |C(x_i)| \mid |G|$

$\rightarrow |G| = |Z(G)| + \frac{|G|}{|Z(x_1)|} + \frac{|G|}{|Z(x_2)|} + \dots + \frac{|G|}{|Z(x_k)|}$

$|C(x_i)| = |G : Z(x_i)| = \frac{|G|}{|Z(x_i)|}$

$Z(G)$ - обединение на всички орбити с дължина 1

Т/ Ако G - група $|G| = p^k$, p - просто число (p - група)

G има нетривиален център $Z(G) \neq \{e\}$

Д-во/ G действа в/у G чрез спрягане

$|G| = |Z(G)| + \underbrace{|C(x_1)| + \dots + |C(x_s)|}$ с повече от 1 елем.

и $|C_i| \,\big|\, |G| \Rightarrow |C_i| = p^{m_i}$ и $m_i > 0$

$p^k = |Z(G)| + p^{m_1} + \dots + p^{m_s} \Rightarrow |Z(G)| = p^k - p^{m_1} - \dots - p^{m_s}$

$\Rightarrow p \,\big|\, |Z(G)|$ $\quad e \in Z(G) \Rightarrow |Z(G)| \geq 1$

$\Rightarrow |Z(G)| > 1$ т.е. нетривиален

Сл.) G група и $|G|=p^2$ и p-просто $\Rightarrow$ G-абелева

Д-во G има нетривиален център

$|Z(G)| = \begin{cases} p \\ p^2 \end{cases}$ | Допускаме, че $|Z(G)|=p$

- $x \notin Z(G)$
- $Z(G) \subset Z(x) = \{t \mid tx=xt\} < G$

т.е. $x \in Z(x)$

$xx=xx$

$\Rightarrow |Z(x)| \geq p+1$ и е подгрупа $\Rightarrow |Z(x)| \mid p^2$

$\Rightarrow |Z(x)|=p^2$ и $Z(x)=G$ т.е. $tx=xt, \forall t \in G$

$\Rightarrow x \in Z(G)$ противоречие

$\Rightarrow |Z(G)| \neq p \Rightarrow |Z(G)|=p^2 \Rightarrow G=Z(G)$

G е Абелева

T) G – крайна група и p – просто число: $p \mid |G|$
$\Rightarrow$ в G има елемент от ред p.

$M = \{X = (x_1, \dots, x_p) \mid x_i \in G$, такива че $x_1 \dots x_p = e\}$

$M \subset \underbrace{G \times G \times \dots \times G}_{p}$

$|M| = |G|^{p-1}$

Ако $x_1, \dots, x_{p-1}$ произволни

$x_1 \cdot x_2 \dots x_{p-1} = a$

$(x_1, x_2, \dots, x_{p-1}, a^{-1}) \in M$

$S_p \quad \varphi = (1, 2, \dots, p) \quad G = \langle \varphi \rangle$

G действа в/у M

$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_p) = (x_{\varphi(1)}, x_{\varphi(2)}, \dots, x_{\varphi(p)}) \in M$

$x_{\varphi(1)} x_{\varphi(2)} \dots x_{\varphi(p)} = \boxed{x_2 x_3 \dots x_p} \cdot \boxed{x_1}$

$x_1 \cdot (x_2 x_3 \dots x_p) = e \Rightarrow x_1 = (x_2 \dots x_p)^{-1}$

$\Rightarrow x_2 x_3 \dots x_p x_1 = e \Rightarrow (x_{\varphi(1)}, \dots, x_{\varphi(p)}) \in M$

$|G| = p$ действа в/у M

– всяка орбита има дълж. 1 и p

– Нека бр. орбити с дълж. 1 е t_1

бр. орбити с дълж. p е t_p

$|M| = 1 \cdot t_1 + p t_p$

$t_1 = |M| - p t_p \Rightarrow p \mid t_1$

$(e, e, e, \dots, e) \quad t_1 \geq 1$

$|O(y_1, \dots, y_p)| = 1 \quad (y_1, \dots, y_p) = (y_2, y_3, \dots, y_p, y_1)$

$\Rightarrow y_1 = y_2 = \dots = y_p = y$