8. Функции. Инекция, сюрекция и биекция. Обратни функции. Елементарни функции. Графика на функция

Функции

Функция наричаме съответствие (правило), което на всеки един елемент на едно множество съпоставя точно един елемент в друго множество.

По-точно, функция f наричаме съответствие (правило), което на всеки елемент x на множество D съпоставя точно един елемент, означен чрез $f(x)$, в множество E.

Пишем накратко $f : D \to E$.
Казваме, че f е дефинирана в D и приема стойности в E.

D — дефиниционна област на f,

$f(D) := \{f(x) : x \in D\}$ — област от стойности на f,

x — независима променлива или аргумент на функцията,

$f(x)$ — зависима променлива и стойността на f в x.

Често с $f(x)$ се означава и самата функция.

Ще разглеждаме функции, за които $D, E \subseteq \mathbb{R}$.

Примери

Пример 1

$\mathbb{R} \ni x \quad \xrightarrow{f} \quad x^2 \in \mathbb{R}$

Обикновено пишем: $f(x) = x^2$

Пример 2

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,1], \\ 2 - x, & x \in (1,2], \\ 0, & x \notin [0,2]. \end{cases} \tag{1}$$

Пример 3: Всяка редица представлява функция, дефинирана в $\mathbb{N}$ със стойности в $\mathbb{R}$

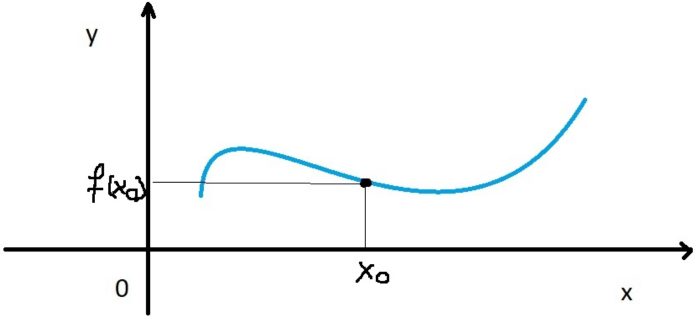
$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, но пишем обикновено a_n вместо $a(n)$

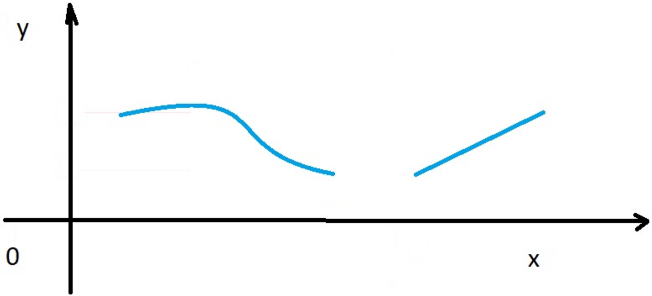
Графика

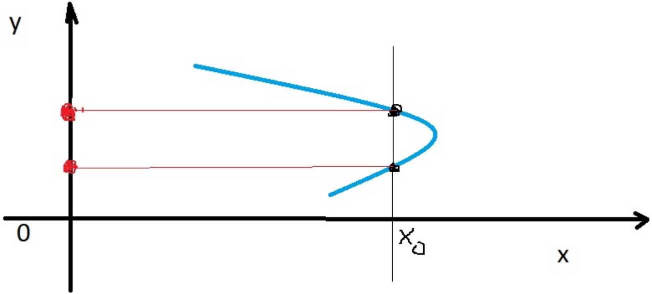
Всяка функция $f : D \to E$, където $D, E \subseteq \mathbb{R}$, представлява съвкупност от наредени двойки реални числа

$$(x, f(x))$$

Това дава възможност за нагледна геометрична интерпретация на функцията.
Графика на функцията f наричаме множеството от точки в равнината с декартови координати $(x, f(x))$, където $x \in D$.




y
0
x



Не е графика на функция

Инекция, сюрекция и биекция

Дефиниция

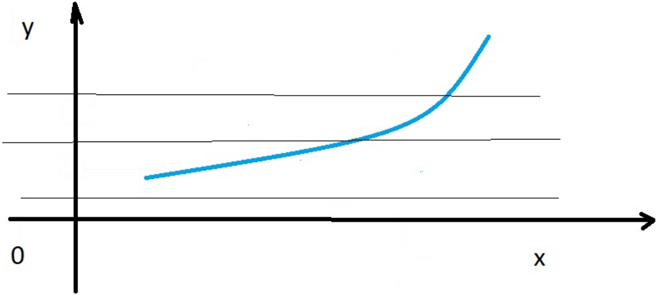
Казваме, че $f : D \to E$, където $D, E \subseteq \mathbb{R}$, е:

(а) инекция, ако $x_1 \neq x_2,\ x_1, x_2 \in D \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) \neq f(x_2)$;

(б) сюрекция, ако $\forall y_0 \in E \quad \exists\, x_0 \in D : y_0 = f(x_0)$, т.е. $E = f(D)$;

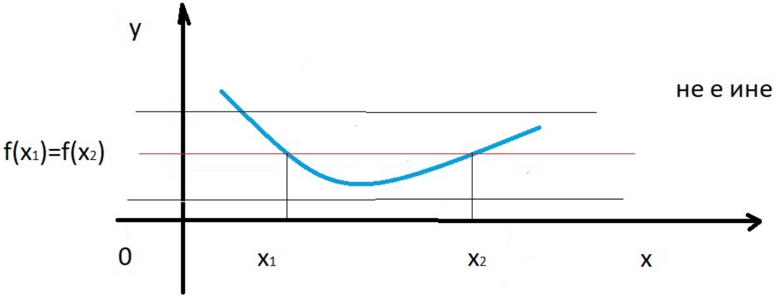
(в) биекция, ако е едновременно инекция и сюрекция.

Относно инекция



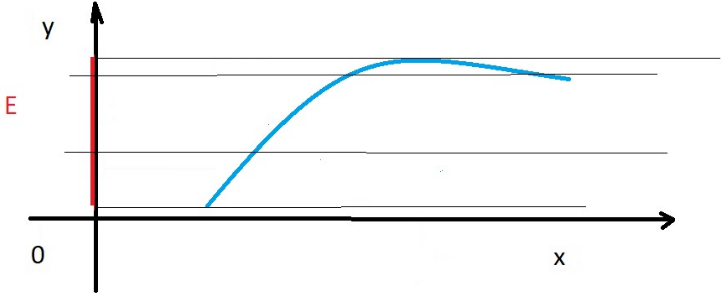
Дадена функция е инекция $\iff$ всяка права, успоредна на Ox, пресича графиката на функцията <u>най-много в една</u> точка.

Относно инекция



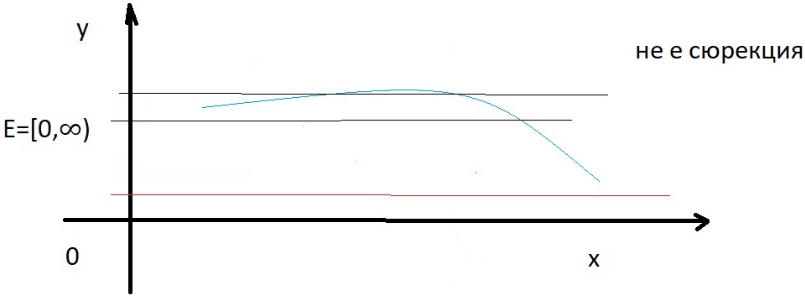
не е инекция

Относно сюрекция

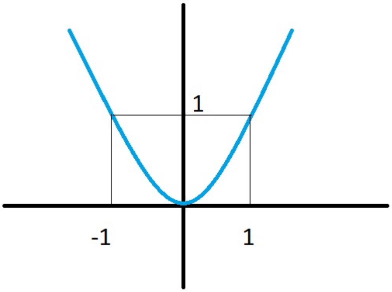


Дадена функция е сюрекция $\iff$ всяка права, успоредна на Ox, през точка от E пресича графиката на функцията <u>поне в една</u> точка.

Относно сюрекция



Примери



$f : D \to E$

$f(x) = x^2$ е инекция, ако $D \subseteq [0, \infty)$,

иначе не е; напр. не е върху $D = [-1, 1]$

$f(x) = x^2$ е сюрекция, ако $D = E = [0, \infty)$,
както и ако $D = \mathbb{R}$ и $E = [0, \infty)$,

но не е, ако $D = [0, \infty)$ и $E = \mathbb{R}$;

$f(x) = x^2$ е сюрекция, ако $D = E = [0, 1]$,
както и ако $D = [-1, 1]$ и $E = [0, 1]$,
но не е, ако $D = [-1, 1]$ и $E = [0, 2]$.

Относно биекция

Функцията $f : D \to E$, където $D, E \subseteq \mathbb{R}$, е биекция

$\iff$ всяка права, успоредна на Ox, през точка от E пресича графиката на функцията точно в една точка,

т.е. за всяко $y_0 \in E$ уравнението

$$f(x) = y_0 \tag{2}$$

има точно едно решение в D $(x \in D)$.

Обратни функции

Дефиниция

Нека $f : D \to E$, където $D, E \subseteq \mathbb{R}$, е биекция. Дефинираме функцията $f^{-1} : E \to D$, като за $y \in E$, полагаме $f^{-1}(y) := x$, където $x \in D$ е единственото такова, че $f(x) = y$.

Функцията f^{-1} се нарича обратна функция на f.

Трябва да правим разлика между $f^{-1}(y)$ и $f(x)^{-1} := \frac{1}{f(x)}$.

Пример

$f(x) = x^2$, $x \in [0, 1]$.
Тогава f е инекция
и $f(D) = [0, 1]$
$\Longrightarrow \quad f : [0, 1] \to [0, 1]$ е биекция.

За да намерим обратната функция на f,
решаваме уравнението

$$f(x) = y, \quad y \in [0, 1] \tag{3}$$

относно $x \in [0, 1]$,

т.е.

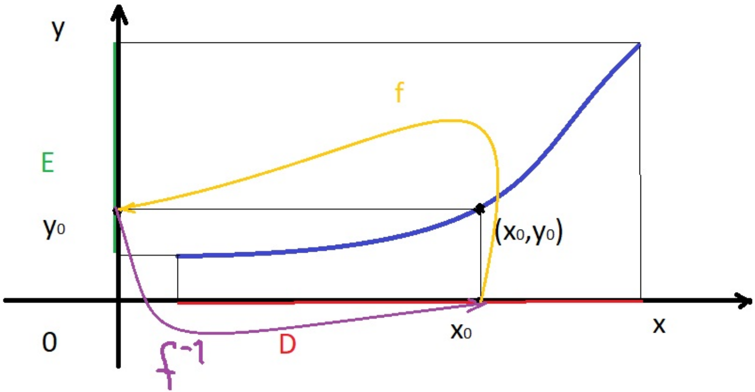
$$x^2 = y, \quad x, y \in [0, 1]. \tag{4}$$

Получаваме

$$x = \sqrt{y}, \quad y \in [0, 1] \tag{5}$$

$$\Longrightarrow \quad f^{-1}(y) = \sqrt{y}, \quad y \in [0, 1]. \tag{6}$$

Основни свойства на f^{-1}



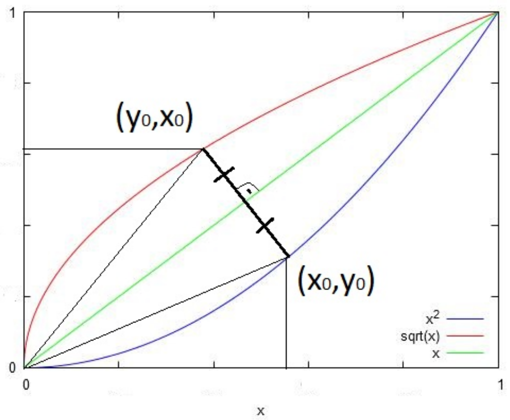
Основни свойства на f^{-1}

(а) $f(f^{-1}(y)) = y \quad \forall y \in E,$

(б) $f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall x \in D.$

Връзка между графиките на правата и обратната функция

Те са симетрични относно ъглополовящата на първи и трети квадрант.



Елементарни функции

- Алгебрични полиноми: $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$, $a_i \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$
- Рационални функции: $\dfrac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m}$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $n, m \in \mathbb{N}_0$
- Степенна функция: x^α, $\alpha \in \mathbb{R}$
- Показателна функция: a^x, $a > 0$
- Логаритмична функция: $\log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$
- Тригонометрични функции
- Обратни тригонометрични функции
- Образуваните от тях функции чрез аритметичните действия и композиция