① Упражнение 18 за 1, 2 и 3 група

Производни

Опр. 1 Нека $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}$ е околност на $x_0 \in \mathbb{R}$ и $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$. Казваме, че $f(x)$ е диференцируема в x_0, ако $f(x)$ има производна в x_0, т.е. ако съществува границата

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Основни правила за диференциране:

① $(f+g)' = f' + g'$; ② $(f-g)' = f' - g'$;

③ $(f.g)' = f'.g + f.g'$; ④ $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'.g - f.g'}{g^2}$;

⑤ $(c.f)' = c.f'$, $c = const$; ⑥ $[f(g(x))]' = f'(g(x)).g'(x)$.

Таблица на основните производни:

① $(c)' = 0$, $c = const$; ② $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha - 1}$;

③ $(a^x)' = a^x . \ln a$ и в частност $(e^x)' = e^x$;

④ $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ и в частност $(\ln x)' = \frac{1}{x}$;

⑤ $(\sin x)' = \cos x$; ⑥ $(\cos x)' = -\sin x$;

⑦ $(tg x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$; ⑧ $(cotg x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$;

⑨ $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; ⑩ $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

⑪ $(arctg x)' = \frac{1}{1+x^2}$; ⑫ $(arccotg x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Физичен смисъл на производната

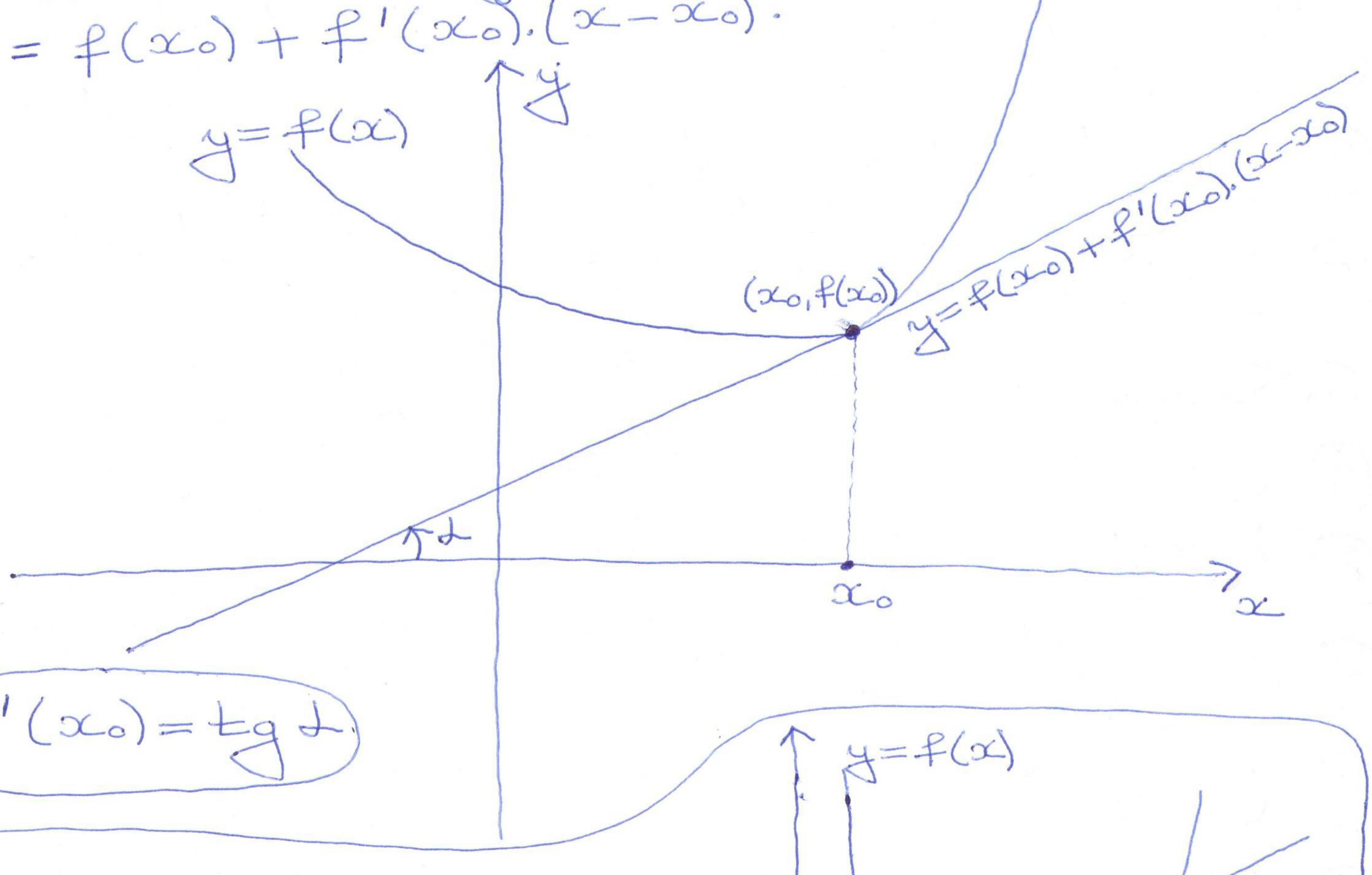
Ако материална точка се движи по числова ос като в момента x има координата $f(x)$, то $f'(x_0)$ е скоростта на точката в момента x_0.

② С една дума производната е скорост, а с две думи – моментна скорост.

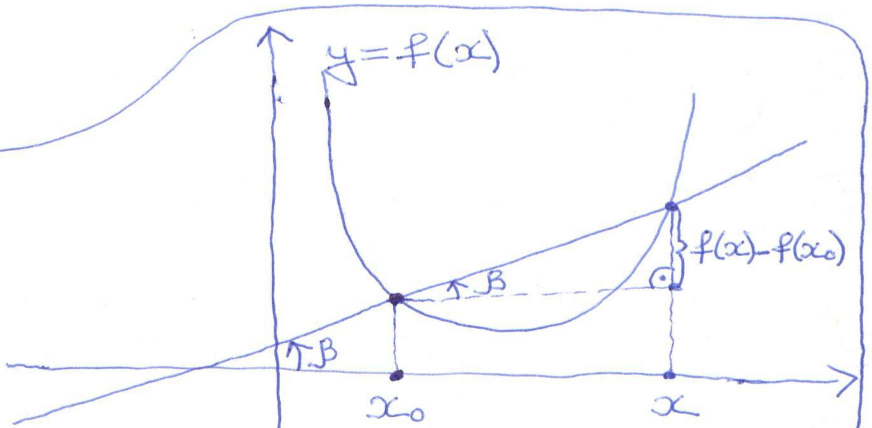
Геометричен смисъл на производната

Ако $f(x)$ е диференцуируема в x_0, то графиката на $f(x)$ има допирателна в точката $(x_0, f(x_0))$ и $f'(x_0)$ е ъгловият коефициент на тази допирателна. В частност уравнението на допирателната е

$$y = f(x_0) + f'(x_0).(x - x_0).$$



$$\boxed{f'(x_0) = tg\,\alpha}$$



Пояснение към геометричния смисъл:

$tg\,\beta = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ е ъгловия коефициент на секущата;

при $x \to x_0$ имаме $tg\,\beta \to f'(x_0)$

Пример: Намерете уравнението на допирателната към графиката на функцията $f(x) = x^2 - (x+4)\arcsin(2x+6)$ в точката с абсциса -3.

Търсеното уравнение е $y = f(-3) + f'(-3).(x+3)$.

Имаме, че $f(-3) = 9 - 1.\arcsin 0 = 9$.

③ Освен това $f'(x)=2x-\arcsin(2x+6)-(x+4)\frac{1}{\sqrt{1-(2x+6)^2}}.2$

и сл. $f'(-3)=-6-\underset{0}{\underset{\parallel}{\arcsin 0}}-1.1.2=-8$

Така търсеното уравнение е $y=9+(-8).(x+3)$,

т.е. $y=-8x-15$.

Зад. 1 Намерете производната на функцията:

а) $y=x^4-3x^2+5x-1$

Решение: $y'=(x^4)'-3.(x^2)'+5.(x)'-(1)'=$

$=4x^3-6x+5.$

б) $y=\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}$

Решение: $y'=(\sqrt{x})'+(\sqrt[3]{x})'=(x^{\frac{1}{2}})'+(x^{\frac{1}{3}})'=$

$=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$

в) $y=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{\sqrt{x}}$

Решение: $y'=\left(\frac{1}{x}\right)'+\left(\frac{1}{x^2}\right)'+\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)'=\left(x^{-1}\right)'+\left(x^{-2}\right)'+\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)'=$

$=(-1)x^{-2}+(-2)(x^{-3})+\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}-\frac{1}{2\sqrt{x^3}}.$

г) $y=e^{-x^2}+e^x.\ln x+(\ln x)^2$

Решение: $y'=e^{-x^2}.(-x^2)'+e^x\ln x+e^x.\frac{1}{x}+$

$+2\ln x.(\ln x)'=-2xe^{-x^2}+e^x\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)+\frac{2\ln x}{x}.$

д) $y=\frac{9^x-1}{9^x+1}$

Решение: $y'=\frac{(9^x-1)'.(9^x+1)-(9^x-1).(9^x+1)'}{(9^x+1)^2}=$

$=\frac{9^x.\ln 9.(9^x+1)-(9^x-1).9^x.\ln 9}{(9^x+1)^2}=\frac{2.9^x.\ln 9}{(9^x+1)^2}.$

е) $y=x.\operatorname{tg}x.\arccos x$

Решение: $y'=(x\operatorname{tg}x)'\arccos x+(x\operatorname{tg}x).(\arccos x)'=$

$=\left(\operatorname{tg}x+\frac{x}{\cos^2 x}\right)\arccos x+x\operatorname{tg}x.\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$

Забележка: С индукция по n се доказва, че

$(f_1.f_2\dots f_n)'=f_1'.f_2\dots f_n+f_1.f_2'\dots f_n+\dots+f_1.f_2\dots f_n'.$

④ Зад. 2 Намерете производната на функцията: а) $y=(\sin x)^{\cos x}$; б) $y=x^x$;

в) $y=\dfrac{(x+1)^3\sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}$; г) $y=\sqrt{\dfrac{x(x-1)}{x-2}}$.

Решение:

Важно практическо правило

Функция на степен функция, както и сложни произведения и частни, се диференцират като предварително ги логаритмуваме.

а) $\ln y=\ln(\sin x)^{\cos x}$ (логаритмували сме равенството от а))

$$\Downarrow$$

$$\ln y=\cos x.\ln(\sin x)$$

$\Downarrow$ диференциране

$$\frac{1}{y}\cdot y'=(-\sin x).\ln(\sin x)+\cos x.\frac{1}{\sin x}.\cos x$$

$$\Downarrow$$

$$y'=(\sin x)^{\cos x}\left[-\sin x.\ln(\sin x)+\frac{\cos^2 x}{\sin x}\right].$$

б) Аналогично на а). (пробвайте сами)

$\ln ab=\ln a+\ln b$
$\ln\frac{a}{b}=\ln a-\ln b$
$\ln a^k=k\ln a$

в) $\ln y=\ln\dfrac{(x+1)^3\sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}$

$$\Downarrow$$

$$\ln y=\ln(x+1)^3+\ln\sqrt[4]{x-2}-\ln\sqrt[5]{(x-3)^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\ln y=3\ln(x+1)+\frac{1}{4}\ln(x-2)-\frac{2}{5}\ln(x-3)$$

$\Downarrow$ диференциране

$$\frac{1}{y}\cdot y'=3\cdot\frac{1}{x+1}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x-2}-\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{x-3}.$$

Понеже $y(x)$ ни е дадена по условие, намерихме $y'(x)$.

г) Аналогично на в). (пробвайте сами)

Така и така остана малко празно място, поне да решим още един пример: Намерете производната на функцията $y=\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$.

Решение: $y=\sqrt{x\sqrt{x^{\frac{3}{2}}}}=\sqrt{x.x^{\frac{3}{4}}}=\sqrt{x^{\frac{7}{4}}}=x^{\frac{7}{8}}$.

Сл. $y'=\dfrac{7}{8}.x^{-\frac{1}{8}}=\dfrac{7}{8\sqrt[8]{x}}$.