1

Упражнение 9

Най-малка стойност и най-голяма стойност (НМС и НГС) на функции на няколко променливи

Първо да припомним, че едно множество $D \subseteq \mathbb{R}^n$ се нарича компактно, ако е ограничено и затворено. Следващите две теореми са многомерни аналози на теоремите от ДИС-1, носещи същите имена.

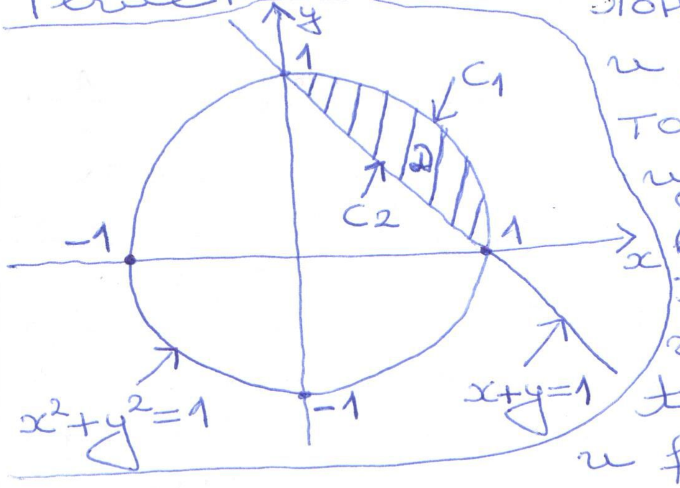
Теорема на Вайерщрас Ако $D \subseteq \mathbb{R}^n$ е компактно множество и $f: D \to \mathbb{R}$ е непрекъсната в D функция, то f е ограничена в D и има най-малка и най-голяма стойност в D.

Теорема на Ферма Нека $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ е околност на x^0 (т.е. U е отворено кълбо с център x^0) и $f: U \to \mathbb{R}$. Ако f има локален екстремум в x^0 и първите ѝ частни производни в x^0 съществуват, то те всичките са равни на 0, т.е. $f'_{x_1}(x^0) = f'_{x_2}(x^0) = \dots = f'_{x_n}(x^0) = 0$.

Зад. 1 Намерете НМС и НГС на функцията

$$f(x,y) = (1-x^2-y^2)(x+y) \text{ в м-вото } D: \left| \begin{array}{l} x^2+y^2 \leq 1 \\ x+y \geq 1 \end{array} \right. .$$

Решение:

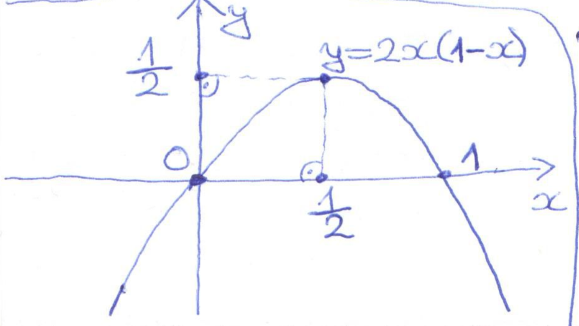


Понеже $D \subset \mathbb{R}^2$ е компактно м-во и $f(x,y)$ е непрекъсната в D, то по теоремата на Вайерщрас $f(x,y)$ има НМС и НГС в D.

Първо ще изследваме f по границата ∂D на D.

Ако $(x,y) \in C_1$, то $x^2+y^2=1$ и $f(x,y)=0$, т.е. $f|_{C_1} \equiv 0$.

Ако $(x,y) \in C_2$, то $x+y=1$ и $f(x,y) = 1-x^2-y^2 =$
$= 1-x^2-(1-x)^2 = \cancel{1}-x^2-(\cancel{1}-2x+x^2) = 2x-2x^2 = 2x(1-x) = \varphi(x)$, $x \in [0,1]$



Имаме, че $\min\limits_{x\in[0,1]} \varphi(x) = \varphi(0) = \varphi(1) = 0$,

$\max\limits_{x\in[0,1]} \varphi(x) = \varphi(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$. Следователно

$\min\limits_{C_2} f = f(0,1) = f(1,0) = 0$,

$\max\limits_{C_2} f = f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$.

② Окончателно $\min\limits_{\partial D} f = f|_{C_1} = 0$, $\max\limits_{\partial D} f = f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

Ако $f(x,y)$ достига своята НМС или НГС в D в точка от $\operatorname{int} D$ (вътрешността на D), то в тази точка $f(x,y)$ има локален екстремум и по теоремата на Ферма в тази точка $f'_x = f'_y = 0$.

В $\operatorname{int} D$ $\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -2x(x+y) + (1-x^2-y^2)\cdot 1 = 0 \\ -2y(x+y) + (1-x^2-y^2)\cdot 1 = 0 \end{cases} \iff$

$\iff \begin{cases} -3x^2 - 2xy - y^2 + 1 = 0 \\ -x^2 - 2xy - 3y^2 + 1 = 0 \end{cases} \iff \left.\begin{cases} 1-(x+y)^2 = 2x^2 \\ 1-(x+y)^2 = 2y^2 \end{cases}\right\} - \iff$

$\iff \begin{cases} 1-(x+y)^2 = 2x^2 \\ x^2 = y^2 \end{cases} \iff \begin{cases} 1-4x^2 = 2x^2 \\ x = y \end{cases}$ или $\begin{cases} 1 = 2x^2 \\ x = -y \end{cases} \iff$

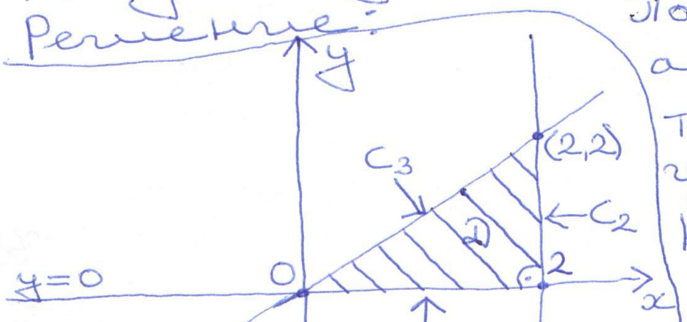
$\iff \begin{cases} x^2 = \frac{1}{6} \\ y = x \end{cases}$ или $\begin{cases} x^2 = \frac{1}{2} \\ y = -x \end{cases}$ $M_1\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$, $M_2\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$, $M_3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $M_4\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Но никоя от тези 4 точки не лежи в $\operatorname{int} D$ – M_1 не изпълнява условието $x+y \geq 1$ $\left(\frac{2}{\sqrt{6}} < 1\right)$, а M_2, M_3, M_4 изобщо не лежат в първи квадрант. Сл. $f(x,y)$ не може да достигне своята НМС или НГС в D в точка от $\operatorname{int} D$.

Отг. на зад. 1: $\min\limits_{D} f = f|_{C_1} = 0$, $\max\limits_{D} f = f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

Зад. 2 Намерете НМС и НГС на функцията $f(x,y) = x^6 + y^6 - 3x^2 + 6xy - 3y^2$ в м-вото D: $0 \leq y \leq x \leq 2$.

Решение:



Понеже $D \subset \mathbb{R}^2$ е компактно м-во а $f(x,y)$ е непрекъсната в D, то по теоремата на Вайерщрас $f(x,y)$ има НМС и НГС в D.

Първо ще изследваме f по границата ∂D на D.

Ако $(x,y) \in C_1$, то $y = 0$ и $f(x,y) = x^6 - 3x^2 = \varphi(x)$, $x \in [0,2]$

Имаме, че $\varphi'(x) = 6x^5 - 6x = 6x(x^4-1)$, $x \in [0,2]$.

(3)

x	0		1		2
φ'		$-$		$+$	
φ		$\searrow$		$\nearrow$	

$\varphi(0)=0$, $\varphi(2)=52$
$\varphi(1)=-2$

Оттук $\min\limits_{x\in[0,2]}\varphi(x)=\varphi(1)=-2$, $\max\limits_{x\in[0,2]}\varphi(x)=\varphi(2)=52$.

Сл. $\min\limits_{C_1} f = f(1,0)=-2$, $\max\limits_{C_1} f = f(2,0)=52$.

Ако $(x,y)\in C_2$, то $x=2$ и $f(x,y)=y^6-3y^2+12y+52=$
Имаме, че $=\psi(y),\ y\in[0,2]$.

$\psi'(y)=6y^5-6y+12=6[y^5+(2-y)]>0$ за $y\in[0,2]$.

Сл. $\psi(y)$ строго расте в $[0,2]$ и $\min\limits_{y\in[0,2]}\psi(y)=\psi(0)=52$, $\max\limits_{y\in[0,2]}\psi(y)=\psi(2)=128$.

Така $\min\limits_{C_2} f = f(2,0)=52$, $\max\limits_{C_2} f = f(2,2)=128$.

Накрая, ако $(x,y)\in C_3$, то $x=y$ и $f(x,y)=2x^6$, $x\in[0,2]$.

Сл. $\min\limits_{C_3} f = f(0,0)=0$, $\max\limits_{C_3} f = f(2,2)=128$

Окончателно $\min\limits_{\partial D} f = f(1,0)=-2$, $\max\limits_{\partial D} f = f(2,2)=128$.

Ако $f(x,y)$ достига своята НМС или НГС в D в точка от $\operatorname{int} D$, то това е точка на локален екстремум и по теоремата на Ферма в нея $f'_x=f'_y=0$.

В $\operatorname{int} D$ $\left|\begin{array}{l} f'_x=0 \\ f'_y=0 \end{array}\right. \iff \left|\begin{array}{l} 6x^5-6x+6y=0 \\ 6y^5+6x-6y=0 \end{array}\right. \iff$

$\iff \left|\begin{array}{l} x^5=x-y \\ y^5=y-x \end{array}\right\}+ \iff \left|\begin{array}{l} x^5=x-y \\ x^5+y^5=0 \end{array}\right. \iff \left|\begin{array}{l} x^5=x-y \\ x^5=(-y)^5 \end{array}\right. \iff$

$\iff \left|\begin{array}{l} x^5=2x \\ x=-y \end{array}\right. \iff \left|\begin{array}{l} x(x^4-2)=0 \\ y=-x \end{array}\right.$ $M_1(0,0)$, $M_2(\sqrt[4]{2}, -\sqrt[4]{2})$
$M_3(-\sqrt[4]{2}, \sqrt[4]{2})$

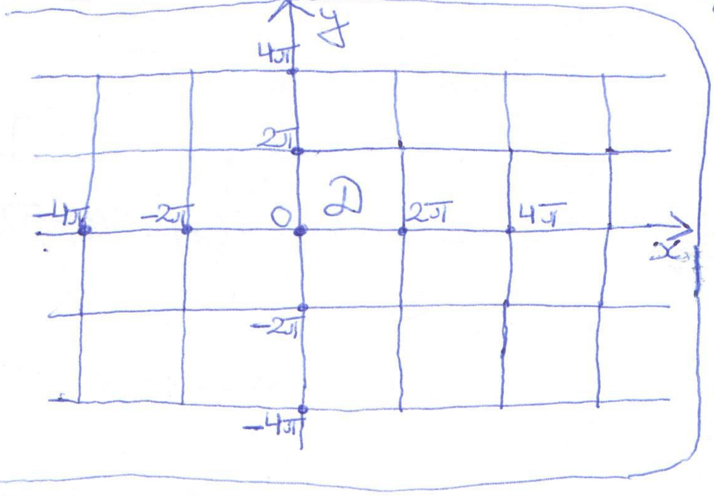
(4) Никоя от тези три точки не лежи в int D.

Сл. $f(x,y)$ не може да достига своята НМС или НГС в D в точка от int D.

Отг. на зад. 2: $\min\limits_{D} f = f(1,0) = -2$, $\max\limits_{D} f = f(2,2) = 128$.

Зад. 3 Намерете НМС и НГС на функцията $f(x,y) = \sin x + \sin y - \sin(x+y)$ в $\mathbb{R}^2$.

Решение:



Имаме, че

$f(x+2\pi, y) = f(x,y)$ и

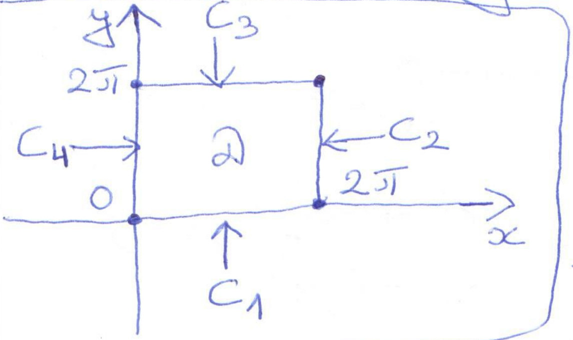
$f(x, y+2\pi) = f(x,y)$, т.е.

$f(x,y)$ е 2π-периодична по всяка от променливите x и y.

Тогава, ако разбием равнината $\mathbb{R}^2$ на безбройно много квадратчета, както е показано на чертежа, то стойностите на $f(x,y)$ във всяко квадратче повтарят стойностите на $f(x,y)$ в квадратчето D: $\begin{cases} 0 \leq x \leq 2\pi \\ 0 \leq y \leq 2\pi \end{cases}$.

Понеже D е компактно м-во и $f(x,y)$ е непрекъсната в D, то по т-мата на Вайерщрас $f(x,y)$ има НМС и НГС в D.

Тогава $f(x,y)$ има НМС и НГС и в $\mathbb{R}^2$.



Итака, достатъчно е да изследваме $f(x,y)$ в D.

Първо да изследваме f по ∂D.

Веднага се вижда, че

$f|_{C_1} = f|_{C_2} = f|_{C_3} = f|_{C_4} = 0$, т.е.

$f|_{\partial D} \equiv 0$.

Например върху C_2 $x = 2\pi$ и $f(x,y) = \overset{0}{\overset{\parallel}{\sin 2\pi}} + \sin y - \sin(2\pi + y) = 0$.

Или пък върху C_3: там $y = 2\pi$ и $f(x,y) = \sin x + \overset{0}{\overset{\parallel}{\sin 2\pi}} - \sin(x + 2\pi) = 0$.

(5) Ако $f(x,y)$ достига своята НМС или НГС в D в точка от $\operatorname{int} D$, то това е точка на лок. екстремум и по т-мата на Ферма в нея $f'_x = f'_y = 0$.

В $\operatorname{int} D$ $\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \cos x - \cos(x+y) = 0 \\ \cos y - \cos(x+y) = 0 \end{cases} - \iff$

$$\iff \begin{cases} \cos x - \cos(x+y) = 0 \\ \cos x - \cos y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -2\sin\left(-\frac{y}{2}\right)\sin\frac{2x+y}{2} = 0 \\ -2\sin\frac{x-y}{2}\sin\frac{x+y}{2} = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} \sin\frac{y}{2}\sin\frac{2x+y}{2} = 0 \\ \sin\frac{x-y}{2}\sin\frac{x+y}{2} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \sin\frac{2x+y}{2} = 0 \\ x-y = 2k\pi \text{ или } x+y = 2k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \iff$$

в $\operatorname{int} D$ $y \in (0, 2\pi) \Rightarrow \frac{y}{2} \in (0, \pi) \Rightarrow \sin\frac{y}{2} > 0$

$$\iff \begin{cases} \sin\frac{2x+y}{2} = 0 \\ x-y = 0 \text{ или } x+y = 2\pi \end{cases} \iff$$

в $\operatorname{int} D$ $\begin{cases} 0 < x < 2\pi \\ 0 < y < 2\pi \end{cases} \Rightarrow 0 < x+y < 4\pi$; $\begin{cases} 0 < x < 2\pi \\ -2\pi < -y < 0 \end{cases} \Rightarrow -2\pi < x-y < 2\pi$

$$\iff \begin{cases} \sin\frac{3x}{2} = 0 \\ x = y \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \sin\frac{x+2\pi}{2} = 0 \\ x+y = 2\pi \end{cases} \iff$$

$\sin\frac{x+2\pi}{2} = \sin\left(\frac{x}{2} + \pi\right) = -\sin\frac{x}{2}$

$$\iff \begin{cases} \frac{3x}{2} = k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \\ y = x \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \frac{x}{2} = k\pi \\ y = 2\pi - x \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \iff$$

$$\iff \begin{cases} x = \frac{2k\pi}{3} \ (k \in \mathbb{Z}) \\ y = x \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x = 2k\pi \\ y = 2\pi - x \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

Втората система няма решения в $\operatorname{int} D$. Решенията на първата система в $\operatorname{int} D$ са $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$ и $\left(\frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right)$, като $f\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, $f\left(\frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$.
Като си спомним, че $f|_{\partial D} \equiv 0$, получаваме:
$\min\limits_D f = f\left(\frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$, $\max\limits_D f = f\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

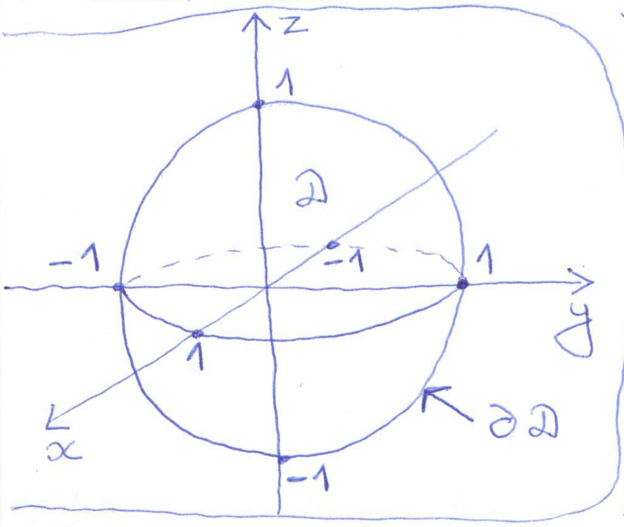
Отг. на зад. 3:

$$\min_{\mathbb{R}^2} f = f\left(\frac{4\pi}{3} + 2l\pi, \frac{4\pi}{3} + 2m\pi\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \quad (l, m \in \mathbb{Z})$$

$$\max_{\mathbb{R}^2} f = f\left(\frac{2\pi}{3} + 2l\pi, \frac{2\pi}{3} + 2m\pi\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

⑥ Зад. 4 Намерете НМС и НГС на функцията $f(x,y,z)=x^2+x^2y^2+y^4+y^2z^2+2z^2$ в м-вото $D: x^2+y^2+z^2 \leq 1$.

Решение:



Понеже D е компактно м-во и $f(x,y,z)$ е непрекъсната в D, то по теоремата на Вайерщрас $f(x,y,z)$ има НМС и НГС в D.

Първо да изследваме f по границата ∂D на D.

Ако $(x,y,z) \in \partial D$, то $x^2+y^2+z^2=1$ и $f(x,y,z)=x^2+x^2y^2+y^4+y^2z^2+2z^2=$

$= x^2+y^2\underbrace{(x^2+y^2+z^2)}_{=1}+2z^2=$

$= x^2+y^2+2z^2=\underbrace{(x^2+y^2+z^2)}_{=1}+z^2=1+z^2.$

И така, върху ∂D имаме $f(x,y,z)=1+z^2$, $z\in[-1,1]$.

Тогава $\min\limits_{\partial D} f=1$ и се достига при $z=0$ (т.е. върху Екватора) и $\max\limits_{\partial D} f=2$ и се достига при $z=1$ (т.е. в точката $(0,0,1)$ – Северния полюс) и при $z=-1$ (т.е. в точката $(0,0,-1)$ – Южния полюс).

Ако $f(x,y,z)$ достига своята НМС или НГС в D в точка от $\operatorname{int} D$, то това е точка на лок. екстремум и по т-мата на Ферма в нея $f'_x=f'_y=f'_z=0$.

В $\operatorname{int} D$
$$\begin{cases} f'_x=0 \\ f'_y=0 \\ f'_z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2xy^2=0 \\ 2x^2y+4y^3+2yz^2=0 \\ 2y^2z+4z=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(1+y^2)=0 \\ y(x^2+2y^2+z^2)=0 \\ z(y^2+2)=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ 2y^3=0 \\ z=0 \end{cases} \quad (0,0,0)$$

$(0,0,0)\in \operatorname{int} D$ и $f(0,0,0)=0$.

Сравнявайки си какво получихме по ∂D, стигаме до:

Отг. на зад. 4: $\min\limits_{D} f = f(0,0,0)=0$

$\max\limits_{D} f = f(0,0,\pm 1)=2$