Тема №3

Координатни системи

Съдържание

Тема 3: Координатни системи

- Декартова система
- Полярна система
- Сферична система
- Други координатни системи
- Четири често срещани задачи

Декартова координатна система

0:15

Координатна система

Координатна система

- Определяне на мястото на обект
- Могат да се влагат
- Декартова, полярна, сферична, …

В компютърната графика

- Доминираща е декартовата
- Другите се ползват предимно в междинни стъпки

Декартова система

Елементи (за 3D)

- Начало (точка)
- Три взаимно перпендикулярни оси
- Координатите са три разстояния

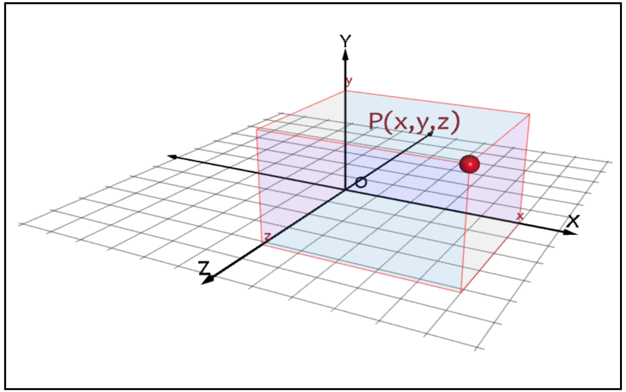
Координатни оси

- С условните имена X, Y и Z
- Посоките са напълно относителни

Декартови координати

Декартови координати

- Тройка числа (x, y, z) – разстояния по осите X, Y и Z
- Всяка точка с единствени координати



Ориентация

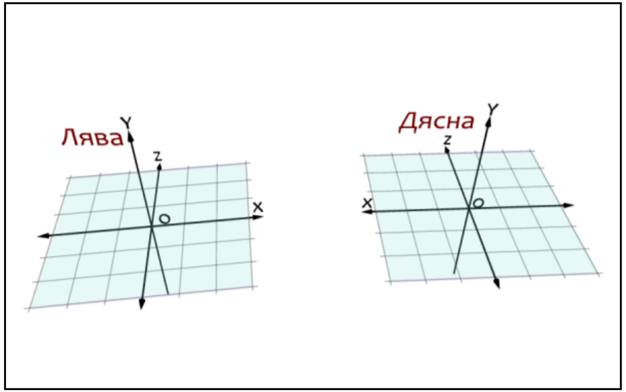
Ориентация на декартова система

- Лява декартова система
- Дясна декартова система
- Всички останали са завъртян образ на една от тях
- При едновременно ползване на много системи – да са с еднаква ориентация

Ориентация

Лява и дясна декартова система

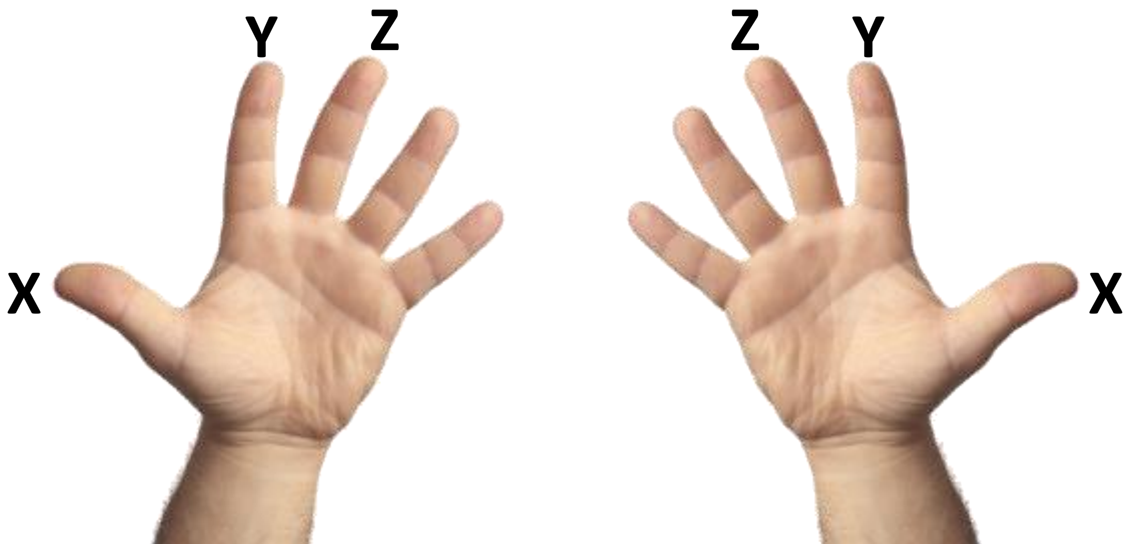
- Огледални, но функционално еднакви



Ръчен алгоритъм

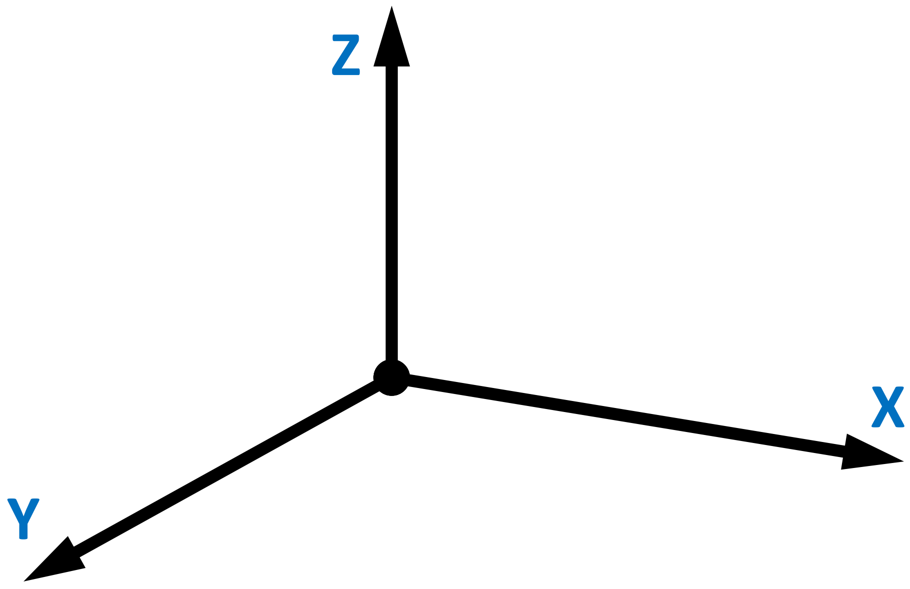
Покажете ѐсите с три пръста

- Налучкайте, като че ли сте с пистолет
- С която ръка стане, такава е системата



Снимка: FreeDigitalPhotos.net

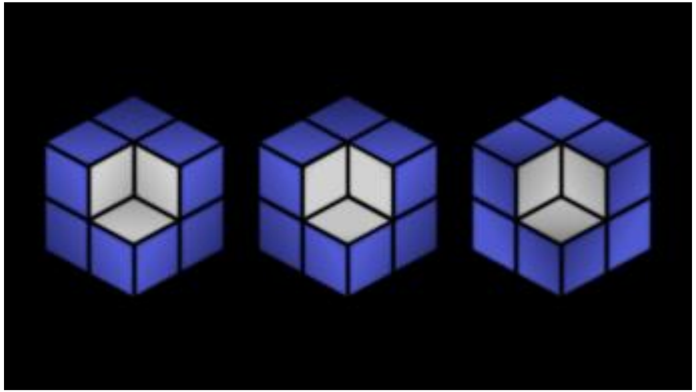
Лява или дясна е тази система?



Отговор

Може да е и лява, и дясна

– Зависи дали възприемаме централния връх като изпъкнал или вдлъбнат



“The logical illusion of an optical illusion”
http://youtu.be/WGfkNV6lIUY

Полярна координатна система

0:20

Полярна система

Елементи (за 2D)

- Полюс (точка) и полярна ос
- Координатите са разстояние и ъгъл

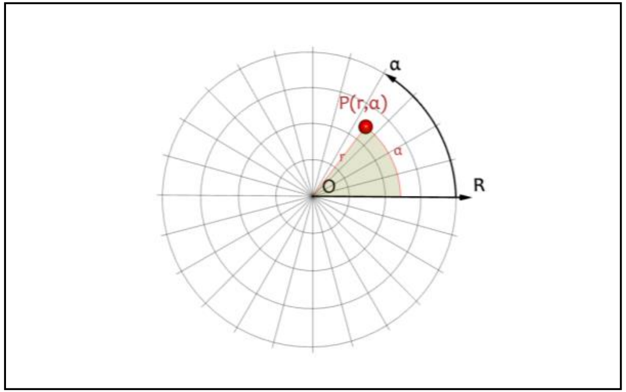
Полярната ос

- Определя нулевата посока (ъгъл)
- Посоката на измерване на ъглите е относителна, добре е да е постоянна

Полярни координати

Полярни координати

- Разстояние r до полюса, ъгъл α до оста
- Всяка точка с единствени координати
  (с точност периодичността на α)



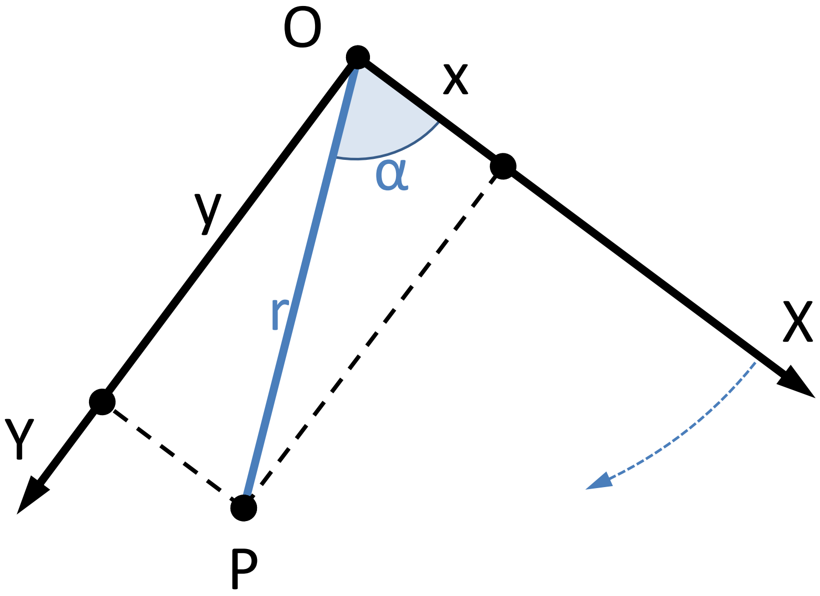
Използване

Полза от полярните координати

- Въртеливи движения
- Кръгови траектории

Преобразуване до декартови

- С точност относителността на осите
- Използват се $\sin x$ и $\cos x$



$$\begin{vmatrix} x = r\cos\alpha \\ y = r\cos(90^\circ - \alpha) \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} x = r\cos\alpha \\ y = r\sin\alpha \end{vmatrix}$$

Сферична координатна система

0:25

Сферична система

Елементи (за 3D)

- Полюс (точка) и две полярни оси
- Координатите са разстояние и 2 ъгъла

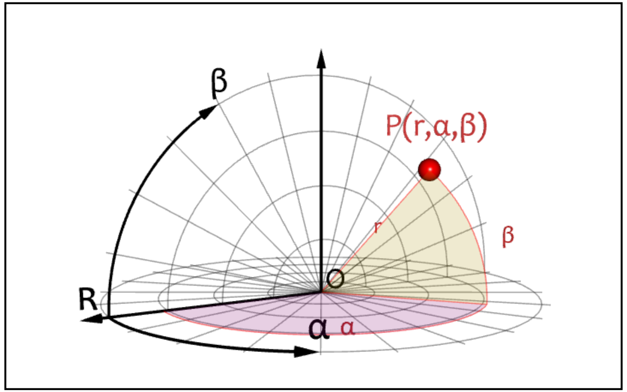
Полярните оси

- Определят нулевите посоки (ъгли)
- Посоката на измерване на ъглите е относителна, добре е да е постоянна

Сферични координати

Пак разстояние r до полюса, но вече

- … с два ъгъла α и β до осите
  (или до перпендикулярните им равнини)
- Координатите са пак „единствени”



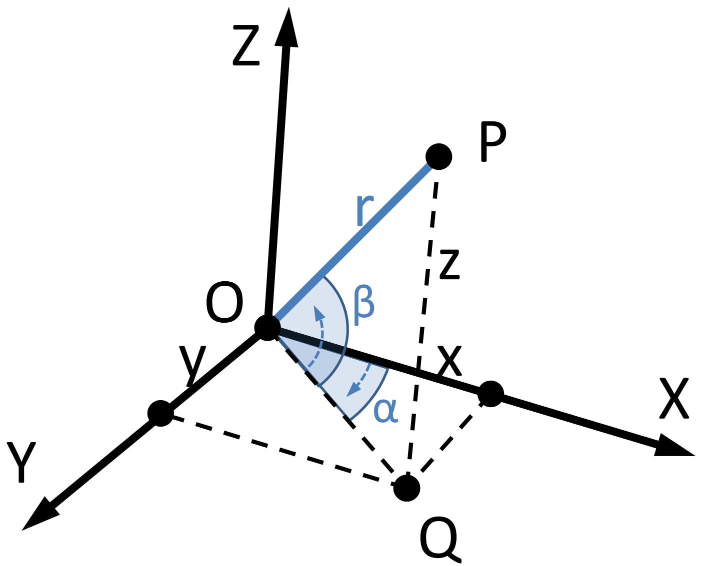
Използване

Полза от сферични координати

- Въртеливи движения в 3D
- Кръгови траектории в 3D

Преобразуване до декартови

- С точност относителността на осите
- Използват се вече любимите ни $\sin x$ и $\cos x$



$$\begin{cases} x = OQ\cos\alpha = (r\cos\beta)\cos\alpha \\ y = OQ\sin\alpha = (r\cos\beta)\sin\alpha \\ z = r\sin\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = r\cos\alpha\cos\beta \\ y = r\sin\alpha\cos\beta \\ z = r\sin\beta \end{cases}$$

Познахте ли го?

Други координатни системи

0:30

Други системи

Според конкретните нужди

- Може да нямат о̀си, да не са линейни
- Може да не гарантират единственост

Какви са нуждите?

- По-леки изчисления на координати
- Но накрая на деня неминуемо се преобразуват до декартови координати

Основни правила

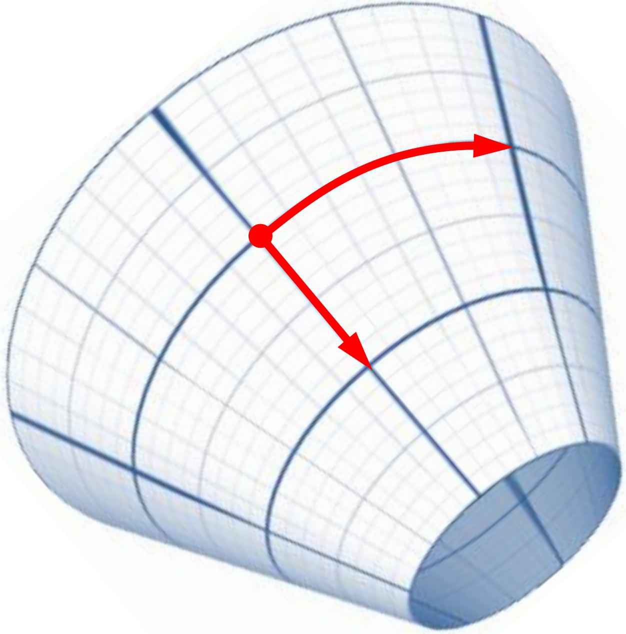
Минимална координатна система

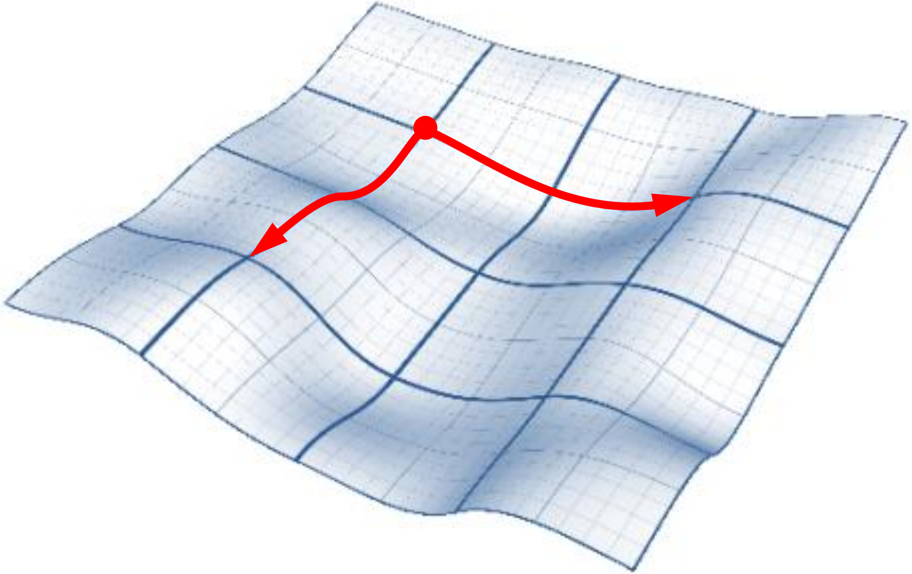
- На линия – едномерна к-на с-ма
- По повърхнина – двумерна к-на с-ма
- В обем – тримерна к-на с-ма

При специфични случаи

- Се ползват повече или с по-малко измерения

Пример с 2D координати





Четири често срещани задачи

0:35

Транслация

Имаме някакъв обект или движение

- Относително точката $Ю(x_{ю}, y_{ю}, z_{ю})$
- Искаме то да е около $Ъ(x_{ъ}, y_{ъ}, z_{ъ})$

Пресмятане на новите координати

$$\left|\begin{aligned} x_{ново} &= x_{старо} + (x_{ъ} - x_{ю}) \\ y_{ново} &= y_{старо} + (y_{ъ} - y_{ю}) \\ z_{ново} &= z_{старо} + (z_{ъ} - z_{ю}) \end{aligned}\right.$$

Примерна задача

Хлебарка пълзи по сферична лампа

- Радиус на лампата: 20
- Център на лампата: $(200,150,300)$
- Пол: неизвестен, очи: черни

Какви са координатите на хлебарката

- Спрямо центъра на лампата?
- Спрямо центъра на стаята?

Решение

Спрямо лампата (сферични координати)

- Координати на хлебарката $X(20, \alpha, \beta)$

Спрямо стаята (декартови координати)

$$X(20, \alpha, \beta) \quad \left| \begin{array}{l} x = 200 + 20\, cos\, \alpha\, cos\, \beta \\ y = 150 + 20\, sin\, \alpha\, cos\, \beta \\ z = 300 + 20\, sin\, \beta \end{array} \right.$$

Разстояние между точки

Точки в 3D: $Ю(x_ю, y_ю, z_ю)$ **и** $Ъ(x_ъ, y_ъ, z_ъ)$

- Разстоянието чрез теорема на Питагор

$$d = \sqrt{(x_ъ - x_ю)^2 + (y_ъ - y_ю)^2 + (z_ъ - z_ю)^2}$$

"Pizza Ordering Dilemma"
http://youtu.be/_IVRTK5ezo0

Задача и решение

Хамелеон и муха

- Муха (сочна) е на координати $(10,10,5)$
- Хамелеон (гладен) е на $(20,2,0)$
- Колко дълъг трябва да му е … езикът?

Отговор

- Получаваме $\sqrt{(20-10)^2+(2-10)^2+(0-5)^2} \approx 13.7$
- 13.7 какво?

Междинни точки

Имаме две 3D точки (пак Ю и Ъ)

- Искаме да получим междинна точка

Използваме линейна обвивка/комбинация

- При $t = 0$ и $t = 1$ получаваме Ю и Ъ
- При $t \in (0,1)$ – междинна точка

$$\text{Щ} = (1-t)\text{Ю} + (t)\text{Ъ} \qquad \left| \begin{array}{l} x_{\text{щ}} = (1-t)x_{\text{ю}} + (t)x_{\text{ъ}} \\ y_{\text{щ}} = (1-t)y_{\text{ю}} + (t)y_{\text{ъ}} \\ z_{\text{щ}} = (1-t)z_{\text{ю}} + (t)z_{\text{ъ}} \end{array} \right.$$

Задача

Самурай и шпеков салам

- Шпеков салам е хвърлен към самурай
- Едното „дупе” е на $(200, -40, 160)$
- Другото „дупе” е на $(170, 20, 190)$

Задача

- Откъде да мине мечът на самурая, за да разреже салама на три еднакво дълги части?

Решение

Точки

- Еднокрайна $\text{Д}_1(200, -40, 160)$
- Другокрайна $\text{Д}_2(170, 20, 190)$
- Междинни: $\text{М}_1\left(t = \frac{1}{3}\right)$ и $M_2\left(t = \frac{2}{3}\right)$

Получаваме

$$\text{М}_1 = \frac{2}{3}\text{Д}_1 + \frac{1}{3}\text{Д}_2 = (190, -20{,}170)$$

$$\text{М}_2 = \frac{1}{3}\text{Д}_1 + \frac{2}{3}\text{Д}_2 = (180{,}0{,}180)$$

Обхождане на интервал

Параметрично лутане напред-назад

- Числов параметър осцилира в $[A, B]$
- Представяне чрез периодична функция

$$\frac{B+A}{2} + \frac{B-A}{2}\sin x$$

- Коефициенти: полумясто и полуразстояние на A и B

И съответната задача

Колега гледа колежки

- Колежка №1 в посока 40°
- Колежка №2 в посока 130°
- Как се въртят очите на колегата?

$$\heartsuit(t) = \frac{130^\circ + 40^\circ}{2} + \frac{130^\circ - 40^\circ}{2} \sin t = 85^\circ + 45^\circ \sin t$$

Пера на стрела,
а не кухненска шпатула

Въпроси?

0:55

Повече информация

[VINC] стр. 23-24

[MORT] стр. 21-22

[LENG] стр. 513-520

А също и:

- Polar coordinates
  http://scidiv.bellevuecollege.edu/dh/ccal/CC9.1.pdf
- Spherical Coordinates
  http://mathworld.wolfram.com/SphericalCoordinates.html
- Convex combinations of two points
  http://lyle.smu.edu/~helgason/cse8394/algebra02.pdf

Край