Интерполационен полином на Лагранж (ИПЛ)

Нека $a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b$ са различни реални точки и $f(x_k)$ са дадени. Интерполационният полином на Лагранж се задава по следния начин: $L_n(f;x)$=$\sum_{k=0}^{n} l_k(x)\, f(x_k)$, където $\omega(x) = \prod_{k=0}^{n}(x - x_k)$ и базисните полиноми на Лагранж са $l_k(x) = \frac{\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)} = \frac{\omega_k(x)}{\omega_k(x_k)}$, където $\omega_k(x) = \frac{\omega(x)}{x-x_k}$. Знаем, че $L_n(f;x_к) = f(x_к), \forall k = 0, 1, \dots, n$.

Ако $f(x)$ има непракъсната $(n+1)$ производна и $\left|f^{(n+1)}(x)\right| \leq M, \forall x \in [a,b]$, то

$$|f(x) - L_n(f;x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|\omega(x)|.$$

Твърдение: Ако $f(x) \in \pi_n$, то $L_n(f;x) \equiv f(x)$.

Задача 1. С помощта на *Wolfram Mathematica* да се построи ИПЛ за $f(x) = \frac{1}{1+x}$ с интерполационни възли:

а) $x_k = \frac{k}{n}, k = 0,1,\dots,n;$ за $n = 5; 15$ и $50;$

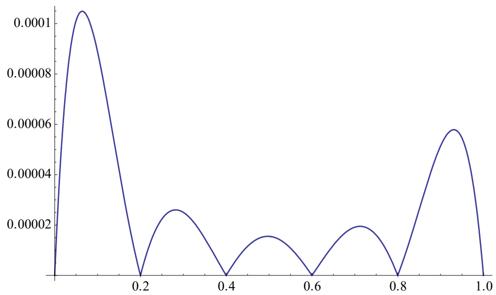
б) $x_k = \sin^2\frac{(2k+1)\pi}{4n+4}, k = 0,1,\dots,n;$ за $n = 5; 10.$

Решение:

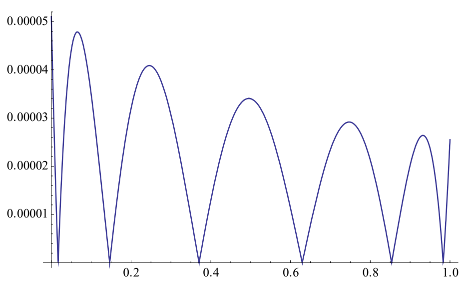
а)

```
n=5;
f[t_]:=1/(1+t);
Do[x[k]=k/n,{k,0,n}];
w[t_]:=Product[t-x[k],{k,0,n}];
Do[v[k_,t_]:=w[t]/(t-x[k]),{k,0,n}];
Do[l[k_,t_]:=v[k,t]/Simplify[v[k,t]/.t→x[k]],{k,0,n}];
L[f_,t_]:=Sum[l[k,t]*f[x[k]],{k,0,n}];
m=Expand[L[f,t]]
Plot[Abs[f[t]-m],{t,0,1}]
```

$$1 - \frac{251t}{252} + \frac{2875t^2}{3024} - \frac{4625t^3}{6048} + \frac{625t^4}{1512} - \frac{625t^5}{6048}$$



б)
```
n=5;
f[t_]:=1/(1+t);
Do[x[k]=(Sin[(2k+1)Pi/(4n+4)])^2,{k,0,n}];
w[t_]:=Product[t-x[k],{k,0,n}];
Do[v[k_,t_]:=w[t]/(t-x[k]),{k,0,n}];
Do[l[k_,t_]:=v[k,t]/Simplify[v[k,t]/.t→x[k]],{k,0,n}];
L[f_,t_]:=Sum[l[k,t]*f[x[k]],{k,0,n}];
m=Expand[L[f,t]];
Plot[Abs[f[t]-m],{t,0,1}]
```



Задача 2. Да се докаже, че $\sum_{k=0}^{n} l_k(x) \equiv 1$.

Доказателство: Нека $f(x) = 1 \in \pi_0 \subset \pi_n \Rightarrow L_n(f;x) \equiv f(x) \equiv 1$, но $f(x_k) = 1, \forall\, x$.

$$L_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} l_k(x) \equiv 1.$$

Задача 3. Да се докаже, че за $m = 1,2 \dots, n$ е в сила $\sum_{k=0}^{n} l_k(x).x_k^m = x^m$.

Доказателство: Нека $f(x) = x^m \in \pi_m \subseteq \pi_n \Rightarrow L_n(f;x) \equiv f(x) = x^m$, но $f(x_k) = x_k^m, \forall\, x_k$.

$$=> \ L_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} l_k(x) x_k^m = x^m.$$

Задача 4. Нека $a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b$. Да се намери $\sum_{k=0}^{n} l_k(x). x_k^{n+1}$.

Решение: Нека $f(x) = x^{n+1} \in \pi_{n+1} => L_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} l_k(x). x_k^{n+1}$. Но $L_n(f;x_k) = f(x_k), \forall k = 0, 1, \dots, n$ $=> \ f(x) - L_n(f;x) \in \pi_{n+1}$ със старши коефициент 1 $=> \ f(x) - L_n(f;x) = \omega(x)$.

$$=> \ \sum_{k=0}^{n} l_k(x). x_k^{n+1} = x^{n+1} - \omega(x).$$

Задача 5. Нека $a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b$. Да се намери $\sum_{k=0}^{n} l_k(x). x_k^{n+2}$.

Решение: Нека $f(x) = x^{n+2} \in \pi_{n+2} => L_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} l_k(x). x_k^{n+2}$. Но $L_n(f;x_k) = f(x_k), \forall k = 0, 1, \dots, n$ $=> \ f(x) - L_n(f;x) \in \pi_{n+2}$ със старши коефициент 1 $=> \ f(x) - L_n(f;x) = \omega(x)(x - A)$. Приравняваме коефициентите пред x^{n+1} от двете страни на равенството. Отляво този коефициент е нула, а в дясната страна по формулите на Виет е равен на сумата от корените. Получаваме:

$$0 = -x_0 - x_1 - \cdots - x_n - A$$

$$=> A = -\sum_{k=0}^{n} x_k$$

$$=> \ \sum_{k=0}^{n} l_k(x). x_k^{n+2} = x^{n+2} - \omega(x)\left(x + \sum_{k=0}^{n} x_k\right).$$

Задача 6. Нека $a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b$. Да се докаже , че за $m = 1,2 \dots, n$ е в сила $\sum_{k=0}^{n} l_k(x). (x - x_k)^m = 0$.

Доказателство: Нека $f(t) = (x - t)^m \in \pi_m \subseteq \pi_n => L_n(f;t) \equiv f(t)$.

$$=> \ L_n(f;t) = \sum_{k=0}^{n} l_k(t)(x - x_k)^m = (x - t)^m,$$

и за $t = x$ получаваме $\sum_{k=0}^{n} l_k(x). (x - x_k)^m = 0$.