

33. Интегриране на рационални функции

$$\int \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n} dx, \quad a_0, b_0 \neq 0, \quad a_i, b_j \in \mathbb{R} \quad (1)$$

I. $m \geq n$ — делим:

$$\frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n} = P_{m-n}(x) + \frac{c_0 x^p + c_1 x^{p-1} + \dots + c_p}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n},$$

$p < n, \quad P_{m-n} \text{ е П-М ОТ СТ. } m - n \quad (2)$

Примери:

$$1) \quad \frac{x+1}{x-1} = \frac{(x-1)+2}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1};$$

$$2) \quad \frac{x^3}{x^2+1} = \frac{x(x^2+1)-x}{x^2+1} = x - \frac{x}{x^2+1}.$$

II. $m < n$

1. Разлагаме знаменателя на множители

$$b_0x^n + b_1x^{n-1} + \dots + b_n = b_0(x-r)^k \underbrace{\dots (x^2 + px + q)^\ell \dots}_{\text{неразложим}} \quad (3)$$

Лема

Нека $m < n$. Тогава \exists реални числа $A_1, \dots, B_1, \dots, C_1, \dots$ такива, че

$$\begin{aligned} & \frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \dots + a_m}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \dots + b_n} \\ &= \frac{A_1}{x-r} + \frac{A_2}{(x-r)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x-r)^k} \\ &+ \dots \text{ (аналогична група за всеки реален корен на знаменателя)} \\ &+ \frac{B_1x + C_1}{x^2 + px + q} + \dots + \frac{B_\ell x + C_\ell}{(x^2 + px + q)^\ell} + \frac{B_\ell x + C_\ell}{(x^2 + px + q)^\ell} \\ &+ \dots \text{ (аналогична група за всеки неразложим кв. тричлен в (3))} \end{aligned}$$

Дробите вдясно се наричат елементарни, а самото разлагане — разлагане в сума на елементарни дроби.

Пример 1

$$\frac{3x^2 - 4x + 3}{x^2(x - 1)} \stackrel{\text{Лема}}{=} \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x - 1} \quad (4)$$

Освобождаваме се от знаменателя:

$$3x^2 - 4x + 3 = Ax(x - 1) + B(x - 1) + Cx^2 \quad \forall x \quad (5)$$

За да намерим A, B и C , даваме на x три подходящи стойности:

$$x = 0: \quad 3 = -B \implies B = -3, \quad (6)$$

$$x = 1: \quad 2 = C \implies C = 2, \quad (7)$$

$$x = 2: \quad 7 = 2A + B + 4C = 2A - 3 + 8 \implies A = 1. \quad (8)$$

Следователно

$$\frac{3x^2 - 4x + 3}{x^2(x - 1)} = \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x - 1}. \quad (9)$$

Пример 1 — продължение

Следователно

$$\int \frac{3x^2 - 4x + 3}{x^2(x-1)} dx = \int \frac{dx}{x} - 3 \int \frac{dx}{x^2} + 2 \int \frac{dx}{x-1} \quad (10)$$

$$= \ln |x| - 3 \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + \text{const} + 2 \int \frac{d(x-1)}{x-1} dx \quad (11)$$

$$= \ln |x| + 3 \frac{1}{x} + 2 \ln |x-1| + \text{const.} \quad (12)$$

Пример 2

$$\frac{2x^2 - x + 1}{x(x^2 + x + 1)} \stackrel{\text{Лема}}{=} \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1} \quad (13)$$

Метод на неопределените коефициенти. Освобождаваме се от знаменателя и правим привеждане:

$$2x^2 - x + 1 = A(x^2 + x + 1) + x(Bx + C) \quad (14)$$

$$= (A + B)x^2 + (A + C)x + A \quad \forall x. \quad (15)$$

Следователно

$$\left| \begin{array}{l} 2 = A + B \\ -1 = A + C \\ 1 = A \end{array} \right. \implies A = B = 1, \quad C = -2. \quad (16)$$

Следователно

$$\frac{2x^2 - x + 1}{x(x^2 + x + 1)} = \frac{1}{x} + \frac{x - 2}{x^2 + x + 1}. \quad (17)$$

Пример 2 — продължение

$$\int \frac{2x^2 - x + 1}{x(x^2 + x + 1)} dx = \int \frac{dx}{x} + \int \frac{x - 2}{x^2 + x + 1} dx. \quad (18)$$

$$\int \frac{x - 2}{x^2 + x + 1} dx = \int \frac{x - 2}{\left[x^2 + 2x\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1} dx \quad (19)$$

(отделяме точен квадрат в знаменателя)

$$= \int \frac{x - 2}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dx \quad \left(t = x + \frac{1}{2}\right) \quad (20)$$

$$\stackrel{x=t-\frac{1}{2}}{=} \int \frac{\left(t - \frac{1}{2}\right) - 2}{t^2 + \frac{3}{4}} d\left(t - \frac{1}{2}\right) \quad (21)$$

$$= \int \frac{t - \frac{5}{2}}{t^2 + \frac{3}{4}} \left(t - \frac{1}{2}\right)' dt \quad (22)$$

$$= \int \frac{t}{t^2 + \frac{3}{4}} dt - \frac{5}{2} \int \frac{dt}{t^2 + \frac{3}{4}}. \quad (23)$$

Пример 2 — продължение

$$\int \frac{t}{t^2 + \frac{3}{4}} dt = \int \frac{1}{t^2 + \frac{3}{4}} d\frac{t^2}{2} \quad (24)$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{d(t^2)}{t^2 + \frac{3}{4}} \quad (25)$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{d(t^2 + \frac{3}{4})}{t^2 + \frac{3}{4}} \quad (26)$$

$$= \frac{1}{2} \ln\left(t^2 + \frac{3}{4}\right) + \text{const} \quad (27)$$

$$\stackrel{t=x+\frac{1}{2}}{=} \frac{1}{2} \ln(x^2 + x + 1) + \text{const.} \quad (28)$$

Пример 2 — продолжение

$$\int \frac{dt}{t^2 + \frac{3}{4}} = \frac{4}{3} \int \frac{dt}{1 + \left(\frac{2t}{\sqrt{3}}\right)^2} \quad (29)$$

$$= \frac{4}{3} \frac{\sqrt{3}}{2} \int \frac{d\frac{2t}{\sqrt{3}}}{1 + \left(\frac{2t}{\sqrt{3}}\right)^2} \quad (30)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{d\frac{2t}{\sqrt{3}}}{1 + \left(\frac{2t}{\sqrt{3}}\right)^2} \quad (31)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t}{\sqrt{3}} + \operatorname{const} \quad (32)$$

$$\stackrel{t=x+\frac{1}{2}}{=} \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \operatorname{const}. \quad (33)$$