КАРХ: Тема_2: Числови системи

Бройната (числова) система представлява символен метод за представяне на числата посредством ограничен брой символи, наречени цифри. Съществуват два вида бройни системи - *непозиционни* и *позиционни*.

Непозиционна е **римската бройна система**. В нея използваните цифри са M (1000), D (500), C (100), L (50), X (10), V (5), I (1). Там действа правилото: Когато тези цифри са написани в намаляващ ред на стойностите им, те се събират, а когато по-малък числов знак стои пред по-голям, те се изваждат - например: VI = 5 + 1 = 6, IV = 5 - 1 = 4.

Позиционните бройни системи са тези, при които стойността на цифрата зависи от нейното място (позиция) в записа на числото, като тя се умножава с т.нар. тегловен коефициент. Той представлява основата на бройната система (например 2, 10 или 16), повдигната на различна степен: нула – за най-младшия разряд, единица за следващия и т.н. – степента нараства с единица за всеки следващ по-старши разряд („наляво“). При дробната част на числото (ако има такава) степента на нейния най-старши разряд (първият след запетаята) е -1, като аналогично на цялата част от числото нараства по модул с единица (намалява с -1) в посока по-младшите разряди („надясно“).

Десетичната бройна система е позиционна бройна система с целочислена основа десет. Съществуват и други числови (бройни) системи като **двоична**, **шестнадесетична** и др.

КАРХ: Тема_2: Числови системи

Пример:

- Decimal numbers

1000's column
100's column
10's column
1's column

$5374_{10} =$

- Binary numbers

8's column
4's column
2's column
1's column

$1101_2 =$

КАРХ: Тема_2: Числови системи

Пример:

- Decimal numbers

1000's column
100's column
10's column
1's column

$$5374_{10} = \underbrace{5 \times 10^3}_{\text{five thousands}} + \underbrace{3 \times 10^2}_{\text{three hundreds}} + \underbrace{7 \times 10^1}_{\text{seven tens}} + \underbrace{4 \times 10^0}_{\text{four ones}}$$

- Binary numbers

8's column
4's column
2's column
1's column

$$1101_2 = \underbrace{1 \times 2^3}_{\text{one eight}} + \underbrace{1 \times 2^2}_{\text{one four}} + \underbrace{0 \times 2^1}_{\text{no two}} + \underbrace{1 \times 2^0}_{\text{one one}} = 13_{10}$$

КАРХ: Тема_2: Числови системи

Степени на 2-ката:

- $2^0 =$
- $2^1 =$
- $2^2 =$
- $2^3 =$
- $2^4 =$
- $2^5 =$
- $2^6 =$
- $2^7 =$
- $2^8 =$
- $2^9 =$
- $2^{10} =$
- $2^{11} =$
- $2^{12} =$
- $2^{13} =$
- $2^{14} =$
- $2^{15} =$

Степени на 2-ката: Лесно се помнят до 2^{10}

- $2^0 = 1$
- $2^1 = 2$
- $2^2 = 4$
- $2^3 = 8$
- $2^4 = 16$
- $2^5 = 32$
- $2^6 = 64$
- $2^7 = 128$
- $2^8 = 256$
- $2^9 = 512$
- $2^{10} = 1024$
- $2^{11} = 2048$
- $2^{12} = 4096$
- $2^{13} = 8192$
- $2^{14} = 16384$
- $2^{15} = 32768$

Превръщане на числата: десетични ↔ двоични

– Превърнете 10011_2 в десетично число

– Превърнете 47_{10} в двоично число

Превръщане на числата: десетични ↔ двоични

- Превърнете 10011_2 в десетично число
- $16 \times 1 + 8 \times 0 + 4 \times 0 + 2 \times 1 + 1 \times 1 = 19_{10}$

- Превърнете 47_{10} в двоично число
- $32 \times 1 + 16 \times 0 + 8 \times 1 + 4 \times 1 + 2 \times 1 + 1 \times 1 = 101111_2$

Сравнение на числата: десетични ↔ двоични

- N-значно десетично число
  - Колко стойности има?
  - Какъв обхват?
  - Пример: 3-значно десетично число:

- N-битово двоично число
  - Колко стойности има?
  - Какъв обхват?
  - Пример: 3-битово двоично число:

КАРХ: Тема_2: Числови системи

Сравнение на числата: десетични ↔ двоични

- N-значно десетично число
  - Колко стойности има? **10^N**
  - Какъв обхват? **$[0, 10^N - 1]$**
  - Пример: 3-значно десетично число:
    - **10^3 = 1000 възможни стойности**
    - **Обхват: [0, 999]**

- N-битово двоично число
  - Колко стойности има? **2^N**
  - Какъв обхват? **$[0, 2^N - 1]$**
  - Пример: 3-битово двоично число:
    - **2^3 = 8 възможни стойности**
    - **Обхват : [0, 7] = $[000_2$ to $111_2]$**

КАРХ: Тема_2: Числови системи

Сравнение на числата: шестнадесетични ↔ десетични ↔ двоични

Hex Digit	Decimal Equivalent	Binary Equivalent
0	0	
1	1	
2	2	
3	3	
4	4	
5	5	
6	6	
7	7	
8	8	
9	9	
A	10	
B	11	
C	12	
D	13	
E	14	
F	15	

КАРХ: Тема_2: Числови системи

Сравнение на числата: шестнадесетични ↔ десетични ↔ двоични

Hex Digit	Decimal Equivalent	Binary Equivalent
0	0	0000
1	1	0001
2	2	0010
3	3	0011
4	4	0100
5	5	0101
6	6	0110
7	7	0111
8	8	1000
9	9	1001
A	10	1010
B	11	1011
C	12	1100
D	13	1101
E	14	1110
F	15	1111

КАРХ: Тема_2: Числови системи

Превръщане на шестнадесетичните числа

- Превърнете $4AF_{16}$ (означава се като 0x4AF) в двоично число

- Превърнете 0x4AF в десетично число

Превръщане на шестнадесетичните числа

– Превърнете $4AF_{16}$ (означава се като 0x4AF) в двоично число
– $0100\ 1010\ 1111_2$

– Превърнете 0x4AF в десетично число
– $16^2 \times 4 + 16^1 \times 10 + 16^0 \times 15 = 1199_{10}$

Възприети обозначения

- Bits

$$\underbrace{1}_{\text{most significant bit}}001011\underbrace{0}_{\text{least significant bit}}$$

- Bytes & Nibbles

$$\overbrace{1001\underbrace{0110}_{\text{nibble}}}^{\text{byte}}$$

- Bytes

$$\underbrace{\mathrm{CE}}_{\text{most significant byte}}\mathrm{BF9A}\underbrace{\mathrm{D7}}_{\text{least significant byte}}$$

- 2^{10} = 1 kilo ≈ 1000 (1024)
- 2^{20} = 1 mega ≈ 1 million (1,048,576)
- 2^{30} = 1 giga ≈ 1 billion (1,073,741,824)

Груба оценка на големината на двоични числа

– Каква стойност е 2^{24}?

– Колко стойности могат да се представят с 32-битова променлива?

Груба оценка на големината на двоични числа

- Каква стойност е 2^{24}?
- **$2^4 \times 2^{20} \approx$ 16 million**

- Колко стойности могат да се представят с 32-битова променлива?
- **$2^2 \times 2^{30} \approx$ 4 billion**

Събиране на числа

– Десетични числа

$$
\begin{array}{r}
3734 \\
+\;\; 5168 \\
\hline
\end{array}
$$

– Двоични числа

$$
\begin{array}{r}
1011 \\
+\;\; 0011 \\
\hline
\end{array}
$$

Събиране на числа

– Десетични числа

```
     11  ← carries
    3734
 +  5168
 --------
    8902
```

– Двоични числа

```
     11  ← carries
    1011
 +  0011
 --------
    1110
```

Събиране на двоични числа

– Съберете следните 4-битови двоични числа

$$
\begin{array}{r}
1001 \\
+\ 0101 \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r}
1011 \\
+\ 0110 \\
\hline
\end{array}
$$

Събиране на двоични числа

– Съберете следните 4-битови двоични числа

$$
\begin{array}{r}
1 \\
1001 \\
+\quad 0101 \\
\hline
1110
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r}
111 \\
1011 \\
+\quad 0110 \\
\hline
10001
\end{array}
$$

Препълване (Overflow) !

КАРХ: Тема_2: Числови системи

Представяне на двоичните числа:

- Числа – Знак/Големина (Sign/Magnitude Numbers)

- Числа в двоично-допълнителен код (Two’s Complement Numbers)

Представяне – числа Знак/Големина (Sign/Magnitude Numbers)

- 1 sign bit, N-1 magnitude bits
- Sign bit is the most significant (left-most) bit
  - Positive number: sign bit = 0
  - Negative number: sign bit = 1

$$A : \{a_{N-1}, a_{N-2}, \cdots a_2, a_1, a_0\}$$

$$A = (-1)^{a_{n-1}} \sum_{i=0}^{n-2} a_i 2^i$$

- Example, 4-bit sign/mag representations of ± 6:

  +6 =

  - 6 =

- Range of an N-bit sign/magnitude number:

КАРХ: Тема_2: Числови системи

Представяне – числа Знак/Големина (Sign/Magnitude Numbers)

- 1 sign bit, *N*-1 magnitude bits
- Sign bit is the most significant (left-most) bit
  - Positive number: sign bit = 0
  - Negative number: sign bit = 1

$$A : \{a_{N-1}, a_{N-2}, \cdots a_2, a_1, a_0\}$$

$$A = (-1)^{a_{n-1}} \sum_{i=0}^{n-2} a_i 2^i$$

- Example, 4-bit sign/mag representations of ± 6:

  +6 = **0110**

  - 6 = **1110**

- Range of an *N*-bit sign/magnitude number:

  [-(2^{N-1}-1), 2^{N-1}-1]

Представяне – числа Знак/Големина (Sign/Magnitude Numbers)

- Проблеми:
  - Събирането не работи, например -6 + 6:

$$
\begin{array}{r}
1110 \\
+\ 0110 \\
\hline
10100
\end{array}
$$
(грешка!)

  - Две представяния на 0 (± 0):

    1000

    0000

Представяне – числа в двоично-допълнителен код (Two's Complement Numbers)

- Msb has value of -2^{N-1}

$$A = a_{n-1}\left(-2^{n-1}\right) + \sum_{i=0}^{n-2} a_i 2^i$$

- Most positive 4-bit number:
- Most negative 4-bit number:
- The most significant bit still indicates the sign (1 = negative, 0 = positive)
- Range of an N-bit two's comp number:

КАРХ: Тема_2: Числови системи

Представяне – числа в двоично-допълнителен код (Two's Complement Numbers)

- Msb has value of -2^{N-1}

$$A = a_{n-1}\left(-2^{n-1}\right) + \sum_{i=0}^{n-2} a_i 2^i$$

- Most positive 4-bit number: **0111**
- Most negative 4-bit number: **1000**
- The most significant bit still indicates the sign (1 = negative, 0 = positive)
- Range of an N-bit two's comp number: **$[-(2^{N-1}), 2^{N-1}-1]$**

Представяне – числа в двоично-допълнителен код (Two's Complement Numbers)

Смяна на знака на числа в двоично-допълнителен код – метод:

1. Инвертиране на всички битове
2. Добавяне на 1

Пример: Смяна на знака на $3_{10} = 0011_2$

Представяне – числа в двоично-допълнителен код (Two's Complement Numbers)

Смяна на знака на числа в двоично-допълнителен код – метод:

1. Инвертиране на всички битове
2. Добавяне на 1

Пример: Смяна на знака на $3_{10} = 0011_2$

1. 1100

2. + 1

$1101 = -3_{10}$

Представяне – числа в двоично-допълнителен код (Two’s Complement Numbers)

Примери:

- Намерете двоично-допълнителното число на $6_{10} = 0110_2$

- Каква е десетичната стойност на двоично-допълнителното число 1001_2?

Представяне – числа в двоично-допълнителен код (Two's Complement Numbers)

Примери:

- Намерете двоично-допълнителното число на $6_{10} = 0110_2$

  1. 1001
  2. \+ 1

  $1010_2 = -6_{10}$

- Каква е десетичната стойност на двоично-допълнителното число 1001_2?

  1. 0110
  2. \+ 1

  $0111_2 = 7_{10}$, so $1001_2 = -7_{10}$

Представяне – числа в двоично-допълнителен код (Two’s Complement Numbers)

Примери:

- Съберете 6 + (-6) като двоично-допълнителни числа

$$\begin{array}{r} 0110 \\ +\ 1010 \\ \hline \end{array}$$

- Съберете -2 + 3 като двоично-допълнителни числа

$$\begin{array}{r} 1110 \\ +\ 0011 \\ \hline \end{array}$$

КАРХ: Тема_2: Числови системи

Представяне – числа в двоично-допълнителен код (Two's Complement Numbers)

Примери:

- Съберете 6 + (-6) като двоично-допълнителни числа

```
  111
   0110
+  1010
-------
  10000
```

- Съберете -2 + 3 като двоично-допълнителни числа

```
  111
   1110
+  0011
-------
  10001
```

Увеличаване на битовата дължина от *N* на *M*-бита (Extend number from *N* to *M* bits) ($M > N$) **:**

- Знаково удължение (Sign-extension);
- Нулево удължение (Zero-extension).

Знаково удължение (Sign-extension)

- Знакът се копира в старшите битове
- Стойността на числото се запазва

- **Пример 1:**
  - 4-bit представяне на 3 = 0011
  - 8-bit знаково удължение:00000011
- **Пример 2:**
  - 4-bit представяне на -5 = 1011
  - 8-bit знаково удължение: 11111011

Нулево удължение (Zero-extension)

- Копират се 0 в старшите битове
- Променя се стойността при отрицателните числа
- **Пример 1:**
  - 4-bit стойност = 0011 = 3_{10}
  - 8-bit нулево удължение : 00000011 = 3_{10}
- **Пример 2:**
  - 4-bit стойност = 1011 = -5_{10}
  - 8-bit нулево удължение : 00001011 = 11_{10}

Сравнение на трите представяния на числата

Number System	Range
Unsigned	$[0, 2^N-1]$
Sign/Magnitude	$[-(2^{N-1}-1), 2^{N-1}-1]$
Two's Complement	$[-2^{N-1}, 2^{N-1}-1]$

For example, 4-bit representation:

	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Unsigned									0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111
Two's Complement	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111								
Sign/Magnitude		1111	1110	1101	1100	1011	1010	1001	0000 1000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111								