① Примерни задачи за контролно № 2

Зад. 1 Намерете локалните екстремуми на функцията $f(x,y)=x^7y^2(10+x-2y)$.

Решение: Понеже $f(x,y)$ има първи частни производни в цялата равнина, то, съгласно теоремата на Ферма, локалните екстремуми на $f(x,y)$ се достигат само в стационарни точки на $f(x,y)$.

Затова първо ще намерим стационарните точки на $f(x,y)$.

Имаме, че $f(x,y)=10x^7y^2+x^8y^2-2x^7y^3$

и сл. $f'_x=70x^6y^2+8x^7y^2-14x^6y^3=2x^6y^2(35+4x-7y)$,

$f'_y=20x^7y+2x^8y-6x^7y^2=2x^7y(10+x-3y)$.

Тогава $\left|\begin{array}{l} f'_x=0 \\ f'_y=0 \end{array}\right. \iff \left|\begin{array}{l} x^6y^2(35+4x-7y)=0 \\ x^7y(10+x-3y)=0 \end{array}\right.$

Решенията на тази система са точките $(x,0)$, $x\in\mathbb{R}$, точките $(0,y)$, $y\in\mathbb{R}$ и решението на системата $\left|\begin{array}{l} 35+4x-7y=0 \\ 10+x-3y=0 \end{array}\right. \iff$

$\iff \left|\begin{array}{l} 4x-7y=-35 \\ x-3y=-10 \end{array}\right. \iff \left|\begin{array}{l} 4.(3y-10)-7y=-35 \\ x-3y=-10 \end{array}\right. \iff$

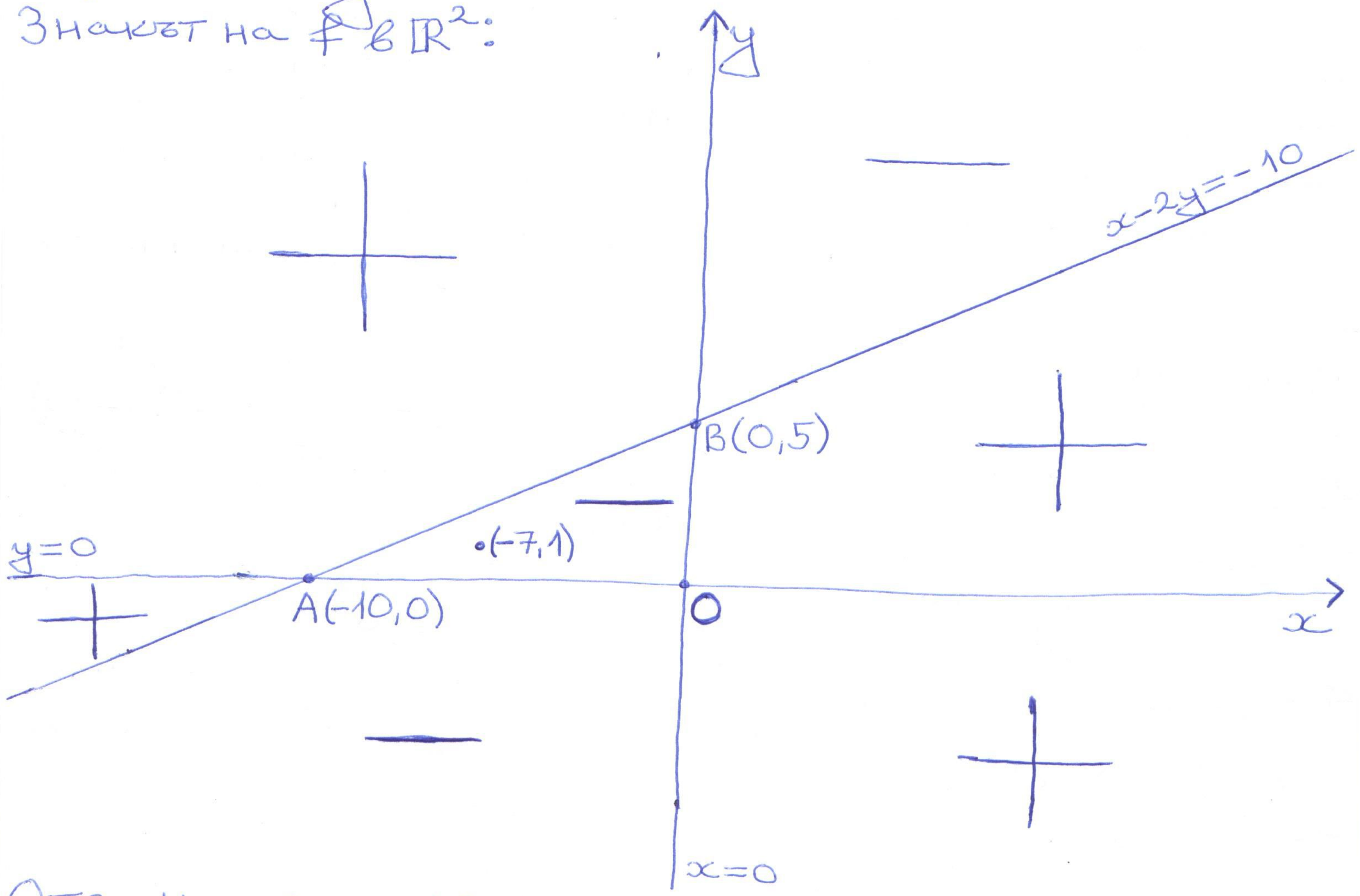
$\iff \left|\begin{array}{l} 5y=5 \\ x=3y-10 \end{array}\right. \iff \left|\begin{array}{l} y=1 \\ x=-7 \end{array}\right.$, $(-7,1)$.

И така, стационарните точки на $f(x,y)$ са точките $(x,0)$, $x\in\mathbb{R}$ (т.е. точките по абсцисната ос), точките $(0,y)$, $y\in\mathbb{R}$ (т.е. точките по ординатната ос) и точката $(-7,1)$ и само в тях $f(x,y)$ може да има лок. екстремум.

За да видим какво става в стационарните точки (има ли в тях $f$ лок. екстремум и, ако има, какъв е той), ще определим знака на $f$ в $\mathbb{R}^2$.

② Имаме, че $f(x,y)$ се анулира по правите $x=0$ (ординатната ос), $y=0$ (абсцисната ос) и $x-2y=-10$.

Знакът на $f$ в $\mathbb{R}^2$:




От г. на зад. 1:

$f(x,y)$ няма лок. екстремуми в точките $(0,y)$, $y\in\mathbb{R}$;

$f(x,y)$ има лок. минимуми в точките $(x,0)$ при $x<-10$ и при $x>0$;

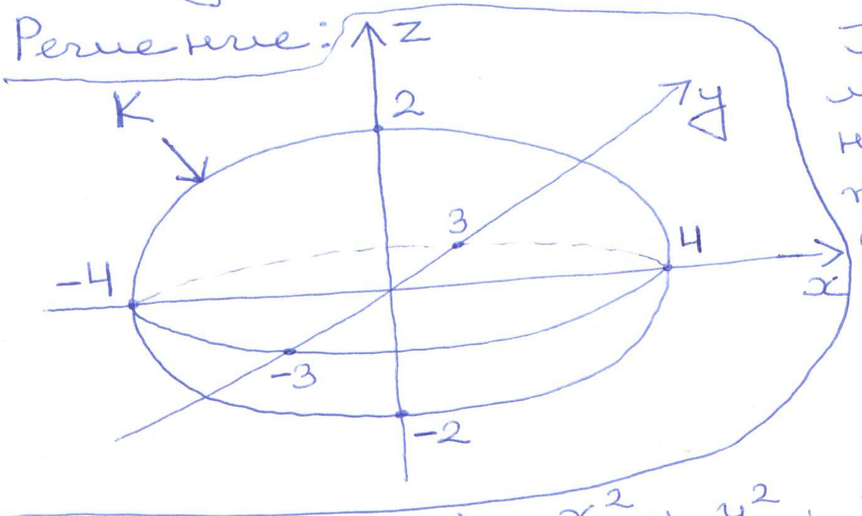
$f(x,y)$ има лок. максимуми в точките $(x,0)$ при $-10<x<0$;

$f(x,y)$ няма лок. екстремуми в точката $A(-10,0)$;

$f(x,y)$ има лок. минимум в точката $(-7,1)$ (защото $f(-7,1)=\min\limits_{\Delta AOB} f(x,y)$).

③ Зад. 2 Намерете най-малката и най-голямата стойност на функцията
$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ в м-вото $K: \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$.

Решение:




Понеже K е компактно множество, а $f(x,y,z)$ е непрекъсната в K, то по теоремата на Вайерщрас $f(x,y,z)$ има НМС и НГС в K.

Нека $\varphi(x,y,z)=\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}-1$.

Ако f достига своята НМС или НГС в K в точка $(x,y,z)\in K$, то f има в $(x,y,z)$ условен локален екстремум при условие $\varphi=0$.

Матрицата $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\ \ \frac{\partial\varphi}{\partial y}\ \ \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)=\left(\frac{x}{8}\ \ \frac{2y}{9}\ \ \frac{z}{2}\right)$ има ранг 1 в K, а значи и в точката $(x,y,z)$.

Теоремата на Лагранж е приложима.

$L=f+\lambda\varphi=x^2+y^2+z^2+\lambda\left(\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}-1\right)$

$$\left|\begin{array}{l} L'_x=0 \\ L'_y=0 \\ L'_z=0 \\ (x,y,z)\in K \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left|\begin{array}{l} 2x+2\lambda\frac{x}{16}=0 \\ 2y+2\lambda\frac{y}{9}=0 \\ 2z+2\lambda\frac{z}{4}=0 \\ (x,y,z)\in K \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left|\begin{array}{ll} x\left(1+\frac{\lambda}{16}\right)=0 & (1) \\ y\left(1+\frac{\lambda}{9}\right)=0 & (2) \\ z\left(1+\frac{\lambda}{4}\right)=0 & (3) \\ \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1 & (4) \end{array}\right.$$

Ако $\lambda\notin\{-16,-9,-4\}$, то от (1), (2) и (3) следва, че $x=y=z=0$, но тогава (4) не е изпълнено и значи системата няма решение.

И така, системата има решение само ако $\lambda\in\{-16,-9,-4\}$.

Ще разгледаме последователно трите възможности.

④ Ако $\lambda=-16$, то от (2) и (3) следва, че $y=z=0$ и тогава от (4) $x=\pm 4$.

$f(\pm 4, 0, 0) = 16$

Ако $\lambda=-9$, то от (1) и (3) следва, че $x=z=0$ и тогава от (4) $y=\pm 3$.

$f(0, \pm 3, 0) = 9$

Ако $\lambda=-4$, то от (1) и (2) следва, че $x=y=0$ и тогава от (4) $z=\pm 2$.

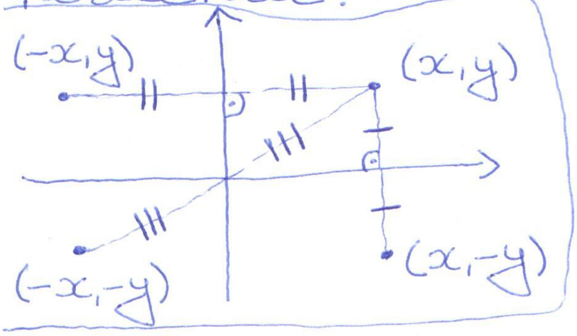
$f(0, 0, \pm 2) = 4$

Отг. на зад. 2: $\min\limits_{K} f = f(0,0,\pm 2) = 4$

$\max\limits_{K} f = f(\pm 4, 0, 0) = 16$

Зад. 3 Пресметнете лицето $S(D)$ на множеството $D: 4x^4 - x^2y^2 + y^4 \leqq 2x^2 + y^2$.

Решение:




Ако $(x,y)\in D$, то и $(x,-y)\in D$, $(-x,y)\in D$, $(-x,-y)\in D$, така че $D$ е симетрично спрямо абсцисната ос, ординатната ос и координатното начало.

Тогава, ако означим с $D_1$ частта от $D$, която лежи в 1-ви квадрант, то $S(D)=4S(D_1)$.

Имаме, че $D_1: \left|\begin{array}{l} 4x^4 - x^2y^2 + y^4 \leqq 2x^2 + y^2 \\ x \geqq 0,\ y \geqq 0 \end{array}\right.$ и

$$S(D_1) = \iint\limits_{D_1} 1\, dx\, dy.$$

В този интеграл правим полярна смяна

$\left|\begin{array}{l} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ \rho \geqq 0,\ 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi \end{array}\right.$. Както знаем от упражненията $\Delta = \rho$.

⑤ $\mathcal{D}_1' : \begin{cases} 4\rho^4\cos^4\varphi - \rho^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi + \rho^4\sin^4\varphi \leq 2\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi \\ \rho\cos\varphi \geq 0, \ \rho\sin\varphi \geq 0 \\ \rho \geq 0, \ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$ ,

$$\mathcal{D}_1' : \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \rho \leq \sqrt{\dfrac{2\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}{4\cos^4\varphi - \cos^2\varphi\sin^2\varphi + \sin^4\varphi}} = \rho(\varphi) \end{cases}$$

(да отбележим, че

$4\cos^4\varphi - \cos^2\varphi\sin^2\varphi + \sin^4\varphi = (2\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)^2 + 3\cos^2\varphi\sin^2\varphi > 0$)

Тогава $S(\mathcal{D}_1) = \iint\limits_{\mathcal{D}_1} 1\, dx\,dy = \iint\limits_{\mathcal{D}_1'} \underset{\Delta = \rho}{|\rho|}\, d\rho\, d\varphi =$

$$= \int_0^{\pi/2} \left[ \int_0^{\rho(\varphi)} \rho\, d\rho \right] d\varphi = \int_0^{\pi/2} \frac{\rho^2}{2}\Big|_0^{\rho(\varphi)} d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{2\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}{4\cos^4\varphi - \cos^2\varphi\sin^2\varphi + \sin^4\varphi}\, d\varphi \stackrel{\text{делим числителя и знаменателя на } \cos^4\varphi}{=}$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{2 + \operatorname{tg}^2\varphi}{4 - \operatorname{tg}^2\varphi + \operatorname{tg}^4\varphi}\, d\operatorname{tg}\varphi \stackrel{t = \operatorname{tg}\varphi}{=}$$

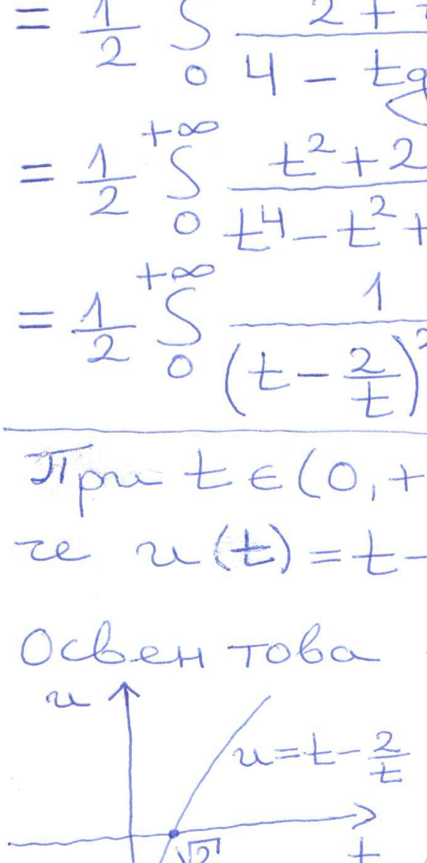
$$= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{t^2 + 2}{t^4 - t^2 + 4}\, dt = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1 + \frac{2}{t^2}}{t^2 - 1 + \frac{4}{t^2}}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(t - \frac{2}{t}\right)^2 + 3}\, d\left(t - \frac{2}{t}\right) \stackrel{u = t - \frac{2}{t}}{=}$$

$t \in (0, +\infty) \Rightarrow u \in (-\infty, +\infty)$

При $t \in (0, +\infty)$ имаме $\left(t - \frac{2}{t}\right)' = 1 + \frac{2}{t^2} > 0$, така че $u(t) = t - \frac{2}{t}$ строго расте при $t \in (0, +\infty)$.

Освен това $\lim\limits_{t \to 0+} u(t) = -\infty$, $\lim\limits_{t \to +\infty} u(t) = +\infty$.




$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{u^2 + 3}\, du = \frac{1}{2\sqrt{3}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}\, d\frac{u}{\sqrt{3}} =$$

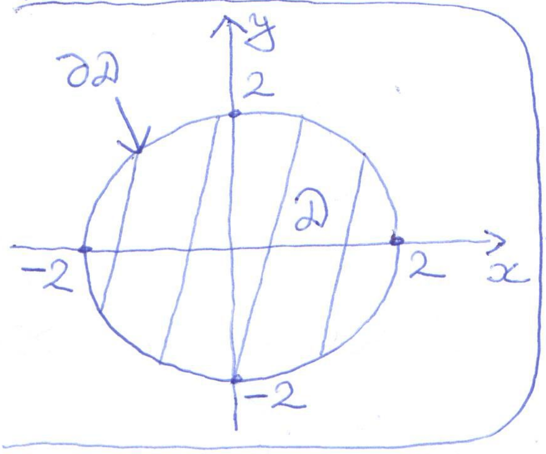
$$= \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{u}{\sqrt{3}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \left[ \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \right] =$$

$= \dfrac{\pi}{2\sqrt{3}}$. И така, $S(\mathcal{D}_1) = \dfrac{\pi}{2\sqrt{3}}$, а пък $S(\mathcal{D}) = 4S(\mathcal{D}_1)$.

Отг. на зад. 3: $S(\mathcal{D}) = \dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}$.

⑥ Зад. 4 Намерете най-малката и най-голямата стойност на функцията $f(x,y)=y\sqrt{4-x^2-y^2}$

Решение:




$f(x,y)$ е дефинирана в множеството $D: x^2+y^2 \leq 4$. Понеже $D$ е компактно множество и $f(x,y)$ е непрекъсната в $D$, то по теоремата на Вайерщрас $f(x,y)$ има НМС и НГС в $D$.

Първо ще изследваме $f$ по границата $\partial D$ на $D$. Ако $(x,y) \in \partial D$, то $x^2+y^2=4$ и $f(x,y)=0$.
И така, $f_{|\partial D} \equiv 0$.

Ако $f(x,y)$ достига своята НМС или НГС в $D$ в точка от $\operatorname{int} D$ (вътрешността на $D$), то $f(x,y)$ има в тази точка лок. екстремум и по теоремата на Ферма $f'_x = f'_y = 0$ в тази точка.

В $\operatorname{int} D$
$$\left|\begin{array}{l} f'_x=0 \\ f'_y=0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left|\begin{array}{l} \dfrac{-\cancel{2}xy}{\cancel{2}\sqrt{4-x^2-y^2}}=0 \\ \sqrt{4-x^2-y^2}-\dfrac{\cancel{2}y^2}{\cancel{2}\sqrt{4-x^2-y^2}}=0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \left|\begin{array}{l} xy=0 \\ 4-x^2-2y^2=0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left|\begin{array}{l} x=0 \\ y^2=2 \end{array}\right. \text{ или } \left|\begin{array}{l} y=0 \\ x^2=4 \end{array}\right.,$$
$(0,\pm\sqrt{2})$, $(\pm 2, 0)$. Само $(0,\pm\sqrt{2}) \in \operatorname{int} D$ и $f(0,\sqrt{2})=2$, $f(0,-\sqrt{2})=-2$.

Като си спомним, че $f_{|\partial D} \equiv 0$, стигаме до отговора на задачата.

Отг. на зад. 4: $\min\limits_{D} f = f(0,-\sqrt{2}) = -2$

$\max\limits_{D} f = f(0,\sqrt{2}) = 2$