Линейни системи

F - поле

① Т. Руше

система е совместима $\iff r(A) = r(\overline{A})$

② Връзка м/у реш. на нехом. и хом. система

$N, H \subset F^n$

$$N: \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots \\ a_{k1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n = b_k \end{cases} \longrightarrow H: \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{k1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n = 0 \end{cases}$$

нехомогенна $(\exists b_i \neq 0)$

I/ 1) $\beta, \gamma \in N \implies \beta - \gamma \in H$ (док-то минало път)

2) H (реш. на хом. система) е подпр-во на F^n

3) $N = \{\beta + \alpha \mid \alpha \in H\} = \beta + H$

Ако β е фикс. реш. на N

Д-во (2) $\alpha, \beta \in H$ (р-я на хом. сист.)

$\alpha+\beta \in H$?

$a_{i1}\alpha_1 + \dots + a_{in}\alpha_n = 0 \quad i=1,\dots,k$

$a_{i1}\beta_1 + \dots + a_{in}\beta_n = 0$

$\lambda \in F$

$a_{i1}(\alpha_1+\beta_1) + \dots + a_{in}(\alpha_n+\beta_n) = 0 \Rightarrow \alpha+\beta \in H$

$a_{i1}(\lambda\alpha_1) + \dots + a_{in}(\lambda\alpha_n) = 0 \Rightarrow \lambda\alpha \in H$

$H \neq \emptyset$? $\quad \mathcal{O} = (0,0,\dots,0)$ е реш. $\quad a_{i1}0 + \dots + a_{in}0 = 0$

$\{\mathcal{O}\} \subset H \Rightarrow H$ е подпр-во на F^n

Д-во (3) β - фикс. р-е на нехом. сист. $\in N$ $\quad i=1,\dots,k$

$\beta + H \ni \beta + \underset{\in H}{\alpha} = \gamma \Rightarrow a_{i1}(\beta_1+\alpha_1) + \dots + a_{in}(\beta_n+\alpha_n) =$

$= \underbrace{a_{i1}\beta_1 + \dots + a_{in}\beta_n}_{= b_i} + \underbrace{a_{i1}\alpha_1 + \dots + a_{in}\alpha_n}_{=0}$

$= b_i \Rightarrow \beta+\alpha = \gamma \in N$

$\Rightarrow \beta + H \subset N$

Нека $\gamma \in N$, $\beta \in N$

$\Rightarrow \gamma - \beta \in N$

$\gamma - \beta = \delta \in H \Rightarrow \gamma = \beta + \underset{\in H}{\delta} \in \beta + H$

$N \subset \beta + H$

$\Rightarrow$

$\beta + H = N$