6. Принцип за сравняване на редове с неотрицателни членове. Критерий на Коши. Критерий на Даламбер

Принцип за сравняване на редове с неотрицателни членове

Теорема 1 (Пр. срв. редове).

Нека членовете на редовете

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

удовлетворяват условието

$$0 \leq a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Тогава

(а) ако $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ е сходящ, то и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ също е сходящ,

(б) ако $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е разходящ, то и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ също е разходящ.

Доказателство (a)

Отново ще използваме означенията:

$$A_n := a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \quad B_n := b_1 + b_2 + \cdots + b_n. \tag{2}$$

За да докажем, че $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ, ще покажем, че $\{A_n\}$ е сходяща.

Първо забелязваме, че

$$a_n \geq 0 \quad \forall n \quad \Longrightarrow \quad A_{n+1} \geq A_n \quad \forall n \tag{3}$$

$\Longrightarrow \quad \{A_n\}$ е монотонно растяща.

Ако докажем, че $\{A_n\}$ е ограничена отгоре, то от т-мата за ограничените монотонни редици $\Longrightarrow$ $\{A_n\}$ е сходяща.

Знаем, че $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ е сходящ.

Това означава, че $\{B_n\}$ е сходяща.

$$\Longrightarrow \quad \{B_n\} \quad \text{е ограничена} \tag{4}$$

$$\Longrightarrow \quad \exists\, C \in \mathbb{R} : \quad B_n \leq C \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

От друга страна

$$a_n \leq b_n \quad \forall n \quad \Longrightarrow \quad A_n \leq B_n \quad \forall n \tag{6}$$

$$\stackrel{(5)}{\Longrightarrow} \quad A_n \leq C \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{7}$$

Така установихме, че $\{A_n\}$ е ограничена отгоре.

Доказателство (б)

Ако допуснем, че $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ е сходящ, от (а) ще следва и че $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ.

Противоречие.

Еталонен ред

Обикновено си служим със следния ред при прилагането на Пр. за срв.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \tag{8}$$

Той се нарича обобщен хармоничен ред.
$\alpha = 1$ — хармоничен ред

Теорема 2

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \text{ е сходящ} \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha > 1.$$

Без д-во.

Критерий на Коши

Теорема 3 (критерий на Коши).

Нека $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е такъв, че $a_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, и съществува

$$\ell := \lim \sqrt[n]{a_n}.$$

Тогава

(а) ако $\ell < 1$, то редът е сходящ,

(б) ако $\ell > 1$, то редът е разходящ.

Помощно твърдение

Лема

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n \text{ е сходящ} \quad \iff \quad |q| < 1.$$

Д-во: За частичните суми на реда имаме

$$S_n := q + q^2 + \cdots + q^n = \begin{cases} q\,\frac{1-q^n}{1-q}, & q \neq 1, \\ n, & q = 1. \end{cases} \tag{9}$$

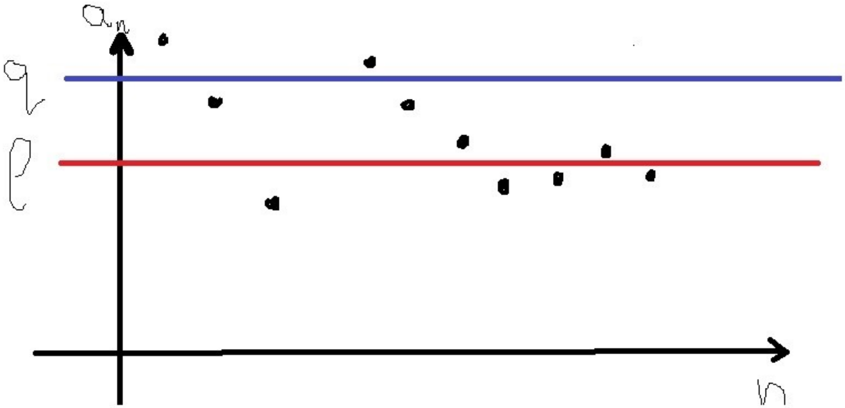
Тогава

$$\{S_n\} \text{ е сходяща} \quad \iff \quad |q| < 1. \tag{10}$$

Д-во на кр. на Коши

(a) Фиксираме число q такова, че $\ell < q < 1$.

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = \ell < q \quad \Longrightarrow \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \ \sqrt[n]{a_n} \leq q \quad \forall n \geq n_0 \tag{11}$$



$$\sqrt[n]{a_n} \leq q \quad \forall n \geq n_0 \quad \Longrightarrow \quad a_n \leq q^n \quad \forall n \geq n_0 \tag{12}$$

$$\text{Лема} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=n_0}^{\infty} q^n \text{ е сходящ} \tag{13}$$

$$\text{Пр.срв.} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \text{ е сходящ} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ е сходящ.} \tag{14}$$

(б) Използваме, че

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = \ell > 1 \quad \Longrightarrow \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \; \sqrt[n]{a_n} \geq 1 \quad \forall n \geq n_0 \tag{15}$$

$$\Longrightarrow \quad a_n \geq 1 \quad \forall n \geq n_0 \tag{16}$$

$$\Longrightarrow \quad \lim a_n \neq 0 \quad \overset{\text{НУ сх.р.}}{\Longrightarrow} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{е разходящ.} \tag{17}$$

Пример

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^n} \tag{18}$$

разписан има вида

$$\frac{2^1}{1^1} + \frac{2^2}{2^2} + \frac{2^3}{3^3} + \cdots + \frac{2^n}{n^n} + \cdots \tag{19}$$

Тук $a_n = \frac{2^n}{n^n}$.
Разглеждаме редицата с общ член

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{2^n}{n^n}} = \frac{2}{n} \tag{20}$$

За нея имаме

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \frac{2}{n} = 0 < 1 \tag{21}$$

Кр. на Коши $\Longrightarrow$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^n}$ е сходящ.

Критерий на Даламбер

Теорема 4 (критерий на Даламбер).

Нека $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е такъв, че $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, и съществува

$$\ell := \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Тогава

(а) ако $\ell < 1$, то редът е сходящ,

(б) ако $\ell > 1$, то редът е разходящ.

Доказателство

(а) Фиксираме число q такова, че $\ell < q < 1$.

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell < q \quad \Longrightarrow \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \ \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q \quad \forall n \geq n_0 \tag{22}$$

$$a_{n+1} \leq q a_n \quad \forall n \geq n_0 \tag{23}$$

Прилагайки това неравенство за
$n = n_0, n_0 + 1, \ldots, n_0 + k - 1, \quad k \in \mathbb{N}$, получаваме

$$\begin{aligned} & a_{n_0+1} \leq q a_{n_0}, \\ & a_{n_0+2} \leq q a_{n_0+1}, \\ & \ldots \\ & a_{n_0+k-1} \leq q a_{n_0+k-2}, \\ & a_{n_0+k} \leq q a_{n_0+k-1}. \end{aligned} \tag{24}$$

$$\Longrightarrow \quad a_{n_0+k} \leq a_{n_0} q^k \quad \forall k \in \mathbb{N} \tag{25}$$

$$a_{n_0+k} \leq a_{n_0} q^k \quad \forall k \in \mathbb{N} \tag{25}$$

Използваме, че

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^k \quad \text{е сходящ} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_{n_0} q^k \quad \text{е сходящ.} \tag{26}$$

Предвид (25),

$$\text{Пр.срв.} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_{n_0+k} \quad \text{е сходящ} \tag{27}$$

$$\text{т.е.} \quad \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n \quad \text{е сходящ} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{е сходящ.} \tag{28}$$

(б) Използваме, че

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell > 1 \quad \Longrightarrow \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \ \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \quad \forall n \geq n_0 \tag{29}$$

$$\Longrightarrow \quad a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \geq n_0 \tag{30}$$

$$\Longrightarrow \quad a_n \geq a_{n_0} > 0 \quad \forall n \geq n_0 \tag{31}$$

$$\Longrightarrow \quad \lim a_n \neq 0 \quad \overset{\text{НУ сх.р.}}{\Longrightarrow} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{е разходящ.} \tag{32}$$

Пример 1

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^n}, \quad a_n = \frac{2^n}{n^n} \tag{33}$$

Разглеждаме редицата с общ член

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{2^n}{n^n}} = \frac{2}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \tag{34}$$

За нея имаме

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\frac{2}{n+1}} \; \underset{\substack{\downarrow \\ e^{-1}}}{\left(\frac{n}{n+1}\right)^n} \qquad n \to \infty$$

$$\Longrightarrow \quad \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0 < 1 \quad \overset{\text{кр. Д.}}{\Longrightarrow} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^n} \text{ е сходящ.} \tag{35}$$

Пример 2

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \tag{36}$$

Тук $a_n = \frac{2^n}{n!}$.
Разглеждаме редицата с общ член

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \frac{2}{n+1} \tag{37}$$

За нея имаме

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{2}{n+1} = 0 < 1 \tag{38}$$

Кр. на Даламбер $\Longrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ е сходящ.