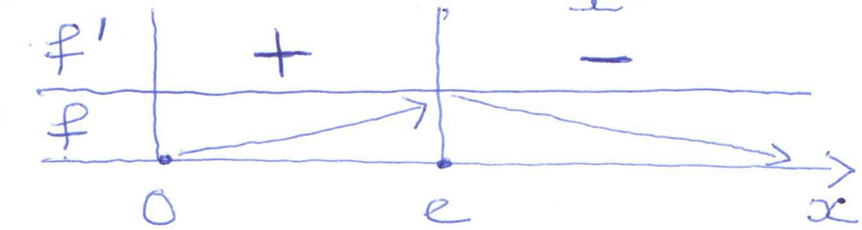
① Упражнение 21 за 1, 2 и 3 група

Зад. 1 Док. че: а) $\frac{\ln x}{x} \leq \frac{1}{e}$ за $x \in (0, +\infty)$ и равенство има само при $x = e$;

б) $\pi^e < e^\pi$.

Решение: а) Нека $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x \in (0, +\infty)$.
Имаме, че $f(x)$ е диференцируема в $(0, +\infty)$ и $f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ за $x \in (0, +\infty)$.

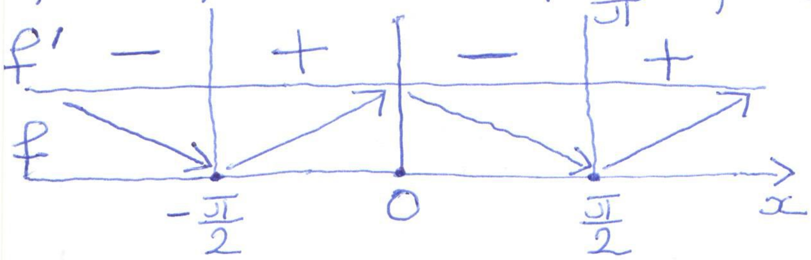


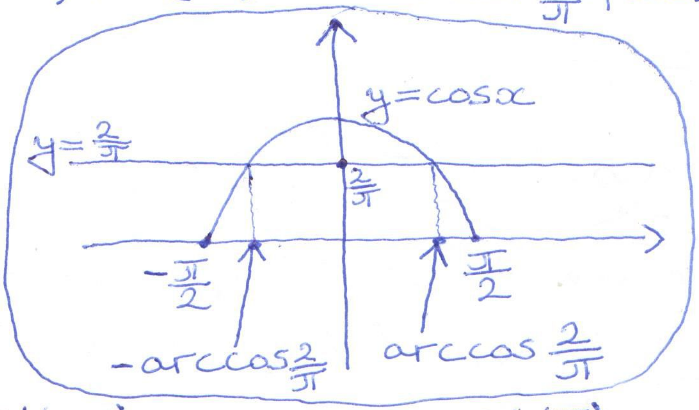
Сл. $f(x) \leq f(e) = \frac{1}{e}$ при $x \in (0, +\infty)$ и равенство има само при $x = e$.

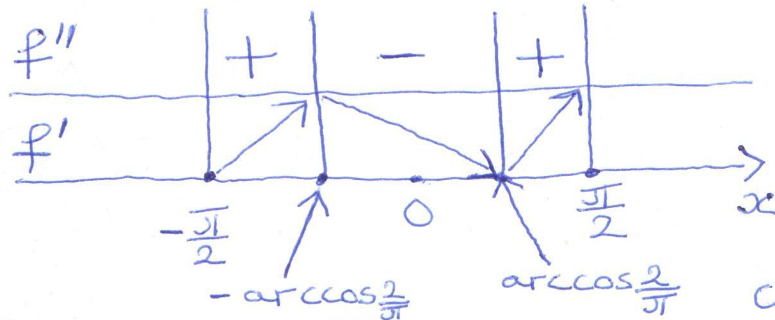
б) От а) $\Longrightarrow \frac{\ln \pi}{\pi} < \frac{1}{e} \Longrightarrow \frac{\ln \pi}{\pi} < \frac{\ln e}{e} \Longrightarrow$
$\Longrightarrow e \ln \pi < \pi \ln e \Longrightarrow \ln \pi^e < \ln e^\pi \Longrightarrow \pi^e < e^\pi$.

Зад. 2 Док. че $\cos x \geq \frac{\pi}{4} - \frac{x^2}{\pi}$ за $x \in \mathbb{R}$.

Решение: Нека $f(x) = \cos x - \frac{\pi}{4} + \frac{x^2}{\pi}$, $x \in \mathbb{R}$.
Трябва да док. че $f(x) \geq 0$ за $x \in \mathbb{R}$.
Имаме, че $f(x)$ е диференцируема в $\mathbb{R}$ и
$f'(x) = -\sin x + \frac{2}{\pi} x$, $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = -\cos x + \frac{2}{\pi}$, $x \in \mathbb{R}$.







$f'(-\frac{\pi}{2}) = 0$, $f'(0) = 0$, $f'(\frac{\pi}{2}) = 0$

$f(-\frac{\pi}{2}) = 0$, $f(\frac{\pi}{2}) = 0$

Сл. $f(x) \geq 0$ в $\mathbb{R}$ и „=" $\Longleftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{2}$.

Правило на Лопитал

Правило на Лопитал. Нека $f(x)$ и $g(x)$ са диференцируеми в прободена околност на $a \in \mathbb{R}$, като $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ или $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \pm\infty$ (знаците са независими един от друг).

Тогава $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Забележка: Правилото на Лопитал е вярно и ако $a = \pm\infty$.

Пресметнете границите:

Зад. 1 $L = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x + e^{-x} - 2\cos x}{x^2}$

Решение: $\left[\frac{0}{0}\right]$

$$L \overset{\Lambda}{=} \lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x} + 2\sin x}{2x} \overset{\Lambda}{=} \lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x} + 2\cos x}{2} =$$

$$= \frac{4}{2} = 2.$$ Отг. $L = 2$.

Зад. 2 $L = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x} \right)$ $[\infty - \infty]$

Решение: $L = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x - x}{x \sin x} \overset{\Lambda}{=}$ $\left[\frac{0}{0}\right]$

$$\overset{\Lambda}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x\cos x} \overset{\Lambda}{=} \lim_{x \to 0} \frac{-\sin x}{\cos x + \cos x - x\sin x}$$

$$= \frac{0}{1+1-0} = \frac{0}{2} = 0.$$ Отг. $L = 0$.

Зад. 3 $L = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(x - x^2 \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) \right)$. $[\infty - \infty]$

Решение: Полагаме $t = \dfrac{1}{x}$; $x \to +\infty \Rightarrow t \to 0^+$.

$$L = \lim_{t \to 0^+} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} \ln(1+t) \right) = \lim_{t \to 0^+} \frac{t - \ln(1+t)}{t^2} \overset{\Lambda}{=}$$ $\left[\frac{0}{0}\right]$

$$\overset{\Lambda}{=} \lim_{t \to 0^+} \frac{1 - \frac{1}{1+t}}{2t} = \lim_{t \to 0^+} \frac{\cancel{t}}{2\cancel{t}(1+t)} = \frac{1}{2}.$$ Отг. $L = \frac{1}{2}$.

③ Зад. 4 $L = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$.

Решение: $[1^\infty]$. Нека $y(x) = (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$.

$$L = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} y(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} e^{\ln y(x)} = e^{\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \ln y(x)}.$$

Имаме, че

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \ln y(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \left[\operatorname{tg} 2x \ln(\operatorname{tg} x) \right] =$$

$[\frac{0}{0}]$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \sin 2x \cdot \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\operatorname{tg} x)}{\cos 2x} \overset{Л.}{=}$$

$$= 1 \cdot \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}}{-2 \sin 2x} = \frac{1 \cdot 2}{-2} = -1. \text{ Отг. } L = e^{-1}.$$

Зад. 5 $L = \lim_{x \to 0} \left(\frac{2}{\pi} \arccos x \right)^{\frac{1}{x}}$.

Решение: $[1^\infty]$. Нека $y(x) = \left(\frac{2}{\pi} \arccos x \right)^{\frac{1}{x}}$.

$$L = \lim_{x \to 0} y(x) = \lim_{x \to 0} e^{\ln y(x)} = e^{\lim\limits_{x \to 0} \ln y(x)}.$$

Имаме, че

$[\frac{0}{0}]$

$$\lim_{x \to 0} \ln y(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\ln\left(\frac{2}{\pi} \arccos x\right)}{x} \overset{Л.}{=}$$

$$\overset{Л.}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{\frac{2}{\pi} \arccos x} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}}{1} = \frac{1 \cdot \frac{2}{\pi} \cdot (-1)}{1} = -\frac{2}{\pi}. \text{ Отг. } L = e^{-\frac{2}{\pi}}.$$

Зад. 5 Док. че: а) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0 \quad (a > 1)$;

б) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0 \quad (\alpha > 0)$

Решение: а) 1 сл. $\alpha = 1$.

Сега $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{a^x} \overset{Л.}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{a^x \ln a} = 0.$

2 сл. $\alpha > 0, \alpha \neq 1$. Сега $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{x}{(\underbrace{a^{\frac{1}{\alpha}}}_{>1})^x} \right]^\alpha =$

$= 0^\alpha = 0$ (според 1 сл.)

4) 3 сл. $\alpha \leq 0$.

Сега очевидно $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0$.

Забележка: Равенството от а) показва, че при $x \to +\infty$ показателната функция a^x расте по-бързо от степенната функция x^α.

б) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} \overset{\Delta}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0.$

$\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

Забележка: Равенството от б) показва, че при $x \to +\infty$ степенната функция x^α расте по-бързо от логаритмичната функция $\ln x$.

Окончателно: при $x \to +\infty$ най-бързо расте показателната функция (нейната графика върви най-стръмно нагоре), по-бавно расте степенната функция и най-бавно расте логаритмичната функция (нейната графика е най-полегата).