Да се дефинира понятието локален екстремум на функция на една променлива.

Локални екстремуми

Дефиниция

Нека $f : D \to \mathbb{R}$, където $D \subseteq \mathbb{R}$.

(а) Казваме, че x_0 е точка на локален минимум за $f(x)$, ако

$$\exists\,\delta > 0 : \quad (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset D \text{ и } f(x_0) \leq f(x), \quad x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta). \quad (1)$$

Казваме, че x_0 е точка на строг локален минимум за $f(x)$, ако $f(x_0) < f(x)$, $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $x \neq x_0$.

(б) Казваме, че x_0 е точка на локален максимум за $f(x)$, ако

$$\exists\,\delta > 0 : \quad (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset D \text{ и } f(x_0) \geq f(x), \quad x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta). \quad (2)$$

Казваме, че x_0 е точка на строг локален максимум за $f(x)$, ако $f(x_0) > f(x)$, $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $x \neq x_0$.

(в) Казваме, че x_0 е точка на (строг) локален екстремум за $f(x)$, ако тя е точка на (строг) локален минимум или максимум.

(г) Стойността на $f(x)$ в точка на локален минимум или максимум се наричат съответно локален минимум или максимум на $f(x)$.

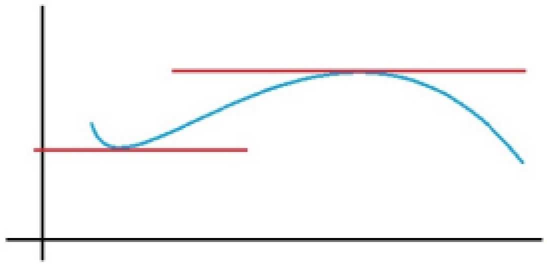
Да се формулира и докаже необходимо условие за локален екстремум за диференцируеми функции (теорема на Ферма).

Теорема (НУ за лок. естр., Ферма)

Ако x_0 е точка на локален екстремум за функцията $f(x)$ и $f(x)$ е диференцируема в x_0, то $f'(x_0) = 0$.

Бележка

Това означава, че допирателната към графиката на функция в нейна точка на локален екстремум е хоризонтална.



Решенията на уравнението

$$f'(x) = 0 \tag{3}$$

се наричат критични точки на $f(x)$.

Д-во на т-мата на Ферма

Понеже $f(x)$ е диференцируема в т. x_0, то съществува границата

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \tag{4}$$

Нека x_0 е точка на локален минимум за $f(x)$. Тогава $\exists \delta > 0$ такова, че интервалът $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ се съдържа в дефиниционната област на ф-цията и

$$f(x_0) \le f(x) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta). \tag{5}$$

Тогава за всяко $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $x \neq x_0$, имаме

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \begin{cases} \le 0, & x \in (x_0 - \delta, x_0), \\ \ge 0, & x \in (x_0, x_0 + \delta). \end{cases} \tag{6}$$

От тези н-ва следва съответно, че

$$\lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le 0 \quad \text{и} \quad \lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ge 0. \tag{7}$$

Понеже

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \underbrace{\lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\leq 0} = \underbrace{\lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\geq 0}, \tag{8}$$

то $f'(x_0)$ е както ≤ 0, така и ≥ 0; следователно е $= 0$.

Нека x_0 е точка на локален максимум за $f(x)$. Тогава x_0 е точка на локален минимум за $-f(x)$ и, според вече доказаното, $(-f)'(x_0) = 0$, т.е. $-f'(x_0) = 0$. Следователно $f'(x_0) = 0$.

Намиране на НГ и НМ стойност

Нека $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ е непрекъсната в $[a, b]$ и диференцируема в (a, b). Т-ма на Вайерщрас $\implies$ $f(x)$ има НГ и НМ ст. Всяка една от тях се достига в край на интервала или във вътрешна точка. Ако това става във вътрешна точка, то тя непренно е точка на локален екстемум. Т-ма на Ферма $\implies$ тя е критична точка на $f(x)$.

Това дава възможност да намерим НГ и НМ стойност на $f(x)$, както и точките, в които се достигат по следната схема:

1. Намираме критичните точки на $f(x)$, т.е. намираме решенията на у-нието $f'(x) = 0$ в (a, b). Да ги означим с $x_1, x_2, \dots$
2. Тогава

$$f_{\text{НГ}} = \max\{f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), \dots\} \tag{9}$$
$$f_{\text{НМ}} = \min\{f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), \dots\} \tag{10}$$

Да се докажат следните теореми, формулирани общо за по-кратко. Нека функцията f е непрекъсната в затворения интервал [a,b] и притежава производна поне в отворения интервал (a,b). Да се докаже, че:

а) ако f (a) = f (b) , то съществува такова, че f '(c) = 0 (Рол);

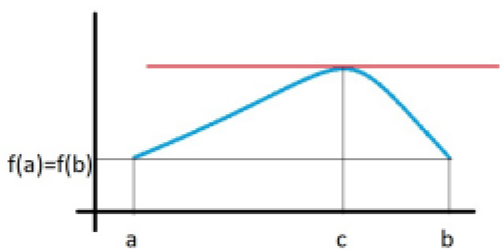
Теорема 1 (Вайерщрас)

Всяка непрекъсната функция, дефинирана върху краен затворен интервал, е ограничена и има НГ и НМ стойност.

Теорема 1 (Рол)

Нека $f(x)$ е непрекъсната в $[a, b]$ и диференцируема в (a, b). Ако $f(a) = f(b)$, то $\exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$.

Геометрична интерпретация:



Върху графиката съществува точка, в която допирателната е хоризонтална.

Д-во на т-мата на Рол

Щом $f(x)$ е непрекъсната в $[a, b]$, то от т-мата на Вайерщрас $\Longrightarrow \quad f(x)$ има НГ и НМ ст.
Ако поне едната от тях се достига в т. $c \in (a, b)$, то тя непренно е точка на локален екстемум.
Т-ма на Ферма $\quad \Longrightarrow \quad f'(c) = 0$.
Ако, в противен случай, нито НГ, нито НМ ст. на $f(x)$ не се достигат в точка от (a, b), то тогава това става в т. a или т. b. Но $f(a) = f(b)$. Следователно

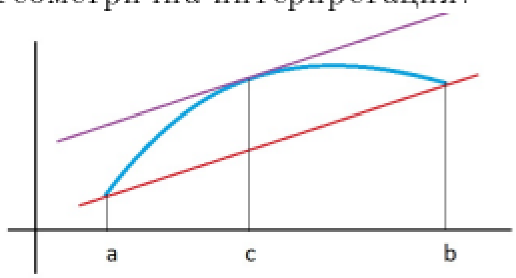
$$
\begin{aligned}
f_{\text{НГ}} = f_{\text{НМ}} \quad &\Longrightarrow \quad f(x) \equiv \text{const} && (1)\\
&\Longrightarrow \quad f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b). && (2)
\end{aligned}
$$

б) съществува такова, че f (b)– f (a) = f '(c)(b – a) (Лагранж);

Теорема 2 (Теорема за крайните нараствания, Лагранж)

Нека $f(x)$ е непрекъсната в $[a, b]$ и диференцируема в (a, b). Тогава $\exists c \in (a, b) : f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ (формула за крайните нараствания).

Геометрична интерпретация:



$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ е ъгловият коефициент на правата през т. $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$; $f'(c)$ е ъгловият коефициент на допирателната към графиката в т. $(c, f(c))$.

Следствие (Теорема за крайните нараствания)

Нека $f(x)$ е непрекъсната в $[a, b]$ и диференцируема в (a, b). Нека $x_1, x_2 \in [a, b]$ са произволни. Тогава $\exists c$ между x_1 и x_2 такова, че $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$ (формула за крайните нараствания).

Д-во на т-мата за крайните нараствания

Ще сведем твърдението към т-мата на Рол.
Въвеждаме функцията $h(x) := f(x) - kx$, $x \in [a, b]$, като определяме константата k така, че $h(a) = h(b)$.
Имаме

$$h(a) = h(b) \text{ т.е. } f(a) - ka = f(b) - kb \quad \Longleftrightarrow \quad k = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \qquad (3)$$

Освен това очевидно, че щом $f(x)$ е непрекъсната в $[a, b]$ и диференцируема в (a, b), то и $h(x)$ е такава.
Така $h(x)$ удовлетворява предположенията на т-мата на Рол.
Прилагаме тази т-ма към $h(x)$. Така получаваме, че $\exists c \in (a, b) : h'(c) = 0$.
Пресмятаме, че $h'(x) = f'(x) - k$. Следователно $f'(c) - k = 0$, т.е. $f'(c) = k$. Предвид (3) последното дава точно твърдението на т-мата.

в) ако функцията g е непрекъсната в затворения интервал и притежава производна поне в отворения интервал , като то съществува такова, че $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ (Коши)

Обобщена теорема/формула за крайните нараствания

Теорема 2 (Обобщена теорема за крайните нараствания, Коши)

Нека $f(x)$ и $g(x)$ са непрекъснати в $[a, b]$ и диференцируеми в (a, b). Нека $g'(x) \neq 0$ при $x \in (a, b)$. Тогава $\exists c \in (a, b) : \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$ (обобщена формула за крайните нараствания).

Бележка 1

При направените предположения върху $g(x)$, имаме, че $g(a) \neq g(b)$, защото в противен случай от т-мата на Рол, приложена към $g(x)$, би следвало, че $\exists c \in (a, b) : g'(c) = 0$, което е в противоречие с направеното предположение, че $g'(x) \neq 0$ при $x \in (a, b)$.

Бележка 2

Т-ма 1 следва от Т-ма 2: прилагаме Т-ма 2 с $g(x) := x$.

Д-во на обобщената т-ма за крайните нараствания

Отново ще сведем твърдението към т-мата на Рол.
Въвеждаме функцията $h(x) := f(x) - kg(x)$, $x \in [a, b]$, като определяме константата k така, че $h(a) = h(b)$.
Имаме

$$h(a) = h(b) \text{ т.е. } f(a) - kg(a) = f(b) - kg(b)$$
$$\iff k[g(b) - g(a)] = f(b) - f(a) \overset{g(b)-g(a)\neq 0}{\iff} k = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}. \quad (4)$$

Освен това очевидно, че щом $f(x)$ и $g(x)$ са непрекъснати в $[a, b]$ и диференцируеми в (a, b), то и $h(x)$ е такава.
Така $h(x)$ удовлетворява предположенията на т-мата на Рол.
Прилагаме тази т-ма към $h(x)$. Така получаваме, че
$\exists c \in (a, b) : h'(c) = 0$.
Пресмятаме, че $h'(x) = f'(x) - kg'(x)$. Следователно
$f'(c) - kg'(c) = 0$, т.е. $\dfrac{f'(c)}{g'(c)} = k$. Предвид (4) последното дава точно твърдението на т-мата.

По отношение на твърдението във в) да се докаже, че при направените в него предположения имаме g(a) ≠ g(b).

Условието $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in (a,b)$ гарантира, че $g(b) - g(a) \neq 0$ от Лагранж $\underbrace{g(b) - g(a)}_{\neq 0} = \underbrace{g'(\xi)}_{\neq 0}.\underbrace{(b-a)}_{\neq 0}$

***За установяването на теоремата на Рол може да се използва без доказателство теоремата на Вайерщрас, според която всяка непрекъсната функция върху краен затворен интервал достига своите максимум и минимум.**

Да се изведе формулата на Тейлър с остатъчен член във формата на Лагранж.

Формула на Тейлър с остатъчен член във формата на Лагранж

Теорема 2 (формула на Тейлър)

Нека $f(x)$ притежава производни до ред $n+1$ включително в $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, където $\delta > 0$. Тогава за всяко $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ съществува c между x_0 и x такова, че

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \tag{14}$$

Разписана ф-лата има вида

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \tag{15}$$

Доказателство на Т-ма 2

Лема 1

Нека $f(x)$ притежава производна от ред n в т. x_0. Тогава

$$T_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \tag{16}$$

притежава свойството $(T_n)^{(i)}(x_0) = f^{(i)}(x_0), \quad i = 0, 1, \dots n$.

Д-во: Имаме

$$(T_n)^{(i)}(x) = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\right)^{(i)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\left((x-x_0)^k\right)^{(i)} \tag{17}$$

$$= \sum_{k=i}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} k(k-1)\cdots(k-(i-1))(x-x_0)^{k-i}. \tag{18}$$

Следователно $(T_n)^{(i)}(x_0) = f^{(i)}(x_0)$.

Лема 2

Нека $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ притежават производни до ред $n+1$ включително в $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, където $\delta > 0$. Нека още

$$\varphi^{(i)}(x_0) = \psi^{(i)}(x_0) = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, n, \tag{19}$$

а $\psi^{(i)}(x) \neq 0$ за $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$, $x \neq x_0$, и $i = 0, 1, \ldots, n+1$. Тогава за всяко $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$, $x \neq x_0$, съществува c между x_0 и x такова, че $\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \dfrac{\varphi^{(n+1)}(c)}{\psi^{(n+1)}(c)}$.

Бележка

Може да се докаже, че ако $\psi^{(i)}(x_0) = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, n$ и $\psi^{(n+1)}(x) \neq 0$ за $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$, $x \neq x_0$, то и $\psi^{(i)}(x) \neq 0$ за $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$, $x \neq x_0$, и $i = 0, 1, \ldots, n$. Това става чрез т-мата на Рол, както в Бележка 1 след Т-ма 2 (обобщената т-ма за крайните нараствания) в Тема 25.

Нека $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$, $x \neq x_0$, е произволно фиксирано. Прилагаме обобщената формула за крайните нараствания (об.ф.кр.н.) към φ и ψ в интервала с краища x_0 и x. Получаваме, че съществува c_1, между x_0 и x такова, че

$$\underbrace{\frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\psi(x) - \psi(x_0)}}_{=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}} \overset{\text{об.ф.кр.н.}}{=} \frac{\varphi'(c_1)}{\psi'(c_1)} = \frac{\varphi'(c_1) - \varphi'(x_0)}{\psi'(c_1) - \psi'(x_0)}. \tag{20}$$

След това аналогично прилагаме об.ф.кр.н. към φ' и ψ' в интервала с краища x_0 и c_1. Получаваме, че съществува c_2, между x_0 и c_1 (оттук между x_0 и x) такова, че

$$\frac{\varphi'(c_1)-\varphi'(x_0)}{\psi'(c_1)-\psi'(x_0)} \stackrel{\text{об.ф.кр.н.}}{=} \frac{\varphi''(c_2)}{\psi''(c_2)} = \frac{\varphi''(c_2)-\varphi''(x_0)}{\psi''(c_2)-\psi''(x_0)}. \tag{21}$$

Продължавайки така, получаваме, че съществуват т. $c_1, c_2, \ldots, c_{n+1}$ между x_0 и x такива, че

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{\psi(x)-\psi(x_0)} = \frac{\varphi'(c_1)}{\psi'(c_1)} \tag{22}$$

$$= \frac{\varphi'(c_1)-\varphi'(x_0)}{\psi'(c_1)-\psi'(x_0)} = \frac{\varphi''(c_2)}{\psi''(c_2)} \tag{23}$$

$$= \frac{\varphi''(c_2)-\varphi''(x_0)}{\psi''(c_2)-\psi''(x_0)} = \frac{\varphi'''(c_3)}{\psi'''(c_3)} \tag{24}$$

$$\ldots \tag{25}$$

$$= \frac{\varphi^{(n)}(c_n)-\varphi^{(n)}(x_0)}{\psi^{(n)}(c_n)-\psi^{(n)}(x_0)} = \frac{\varphi^{(n+1)}(c_{n+1})}{\psi^{(n+1)}(c_{n+1})}. \tag{26}$$

Взимаме $c = c_{n+1}$.

Завършване на д-вото на Т-ма 2

Твърдението на Т-ма 2 е тривиално за $x = x_0$ — то се свежда до $f(x_0) = f(x_0)$.

Нека $x \neq x_0$. Прилагаме Лема 2 с $\varphi(x) := f(x) - T_n(x)$ и $\psi(x) := (x - x_0)^{n+1}$. Ф-цията $\varphi(x)$ удовлетворява предположенията в Лема 2 благодарение на Лема 1, а относно $\psi(x)$ имаме $\psi^{(i)}(x) = (n+1)n\cdots(n-i+2)(x-x_0)^{n-i+1}$, $i = 0, 1, \ldots, n+1$. Лема 2 влече, че съществува c между x_0 и x такава, че

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi^{(n+1)}(c)}{\psi^{(n+1)}(c)}; \tag{27}$$

следователно

$$\varphi(x) = \frac{\varphi^{(n+1)}(c)}{\psi^{(n+1)}(c)}\,\psi(x); \tag{28}$$

следователно

$$f(x) - T_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\,(x - x_0)^{n+1}, \tag{29}$$

откъдето се получава и формулата в т-мата.