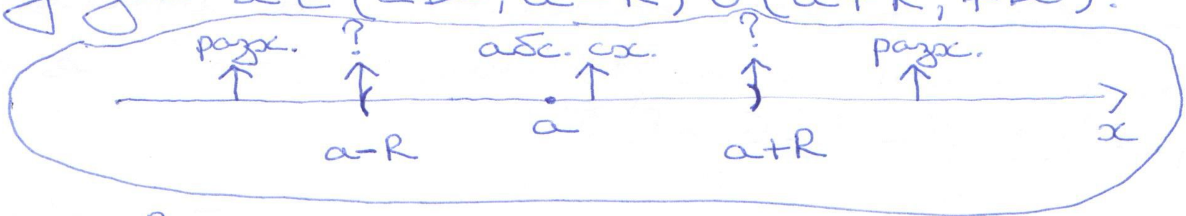
Упражнение 6
Степенни редове

Функционален ред от вида

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$, където $a\in\mathbb{R}$ и $a_n\in\mathbb{R}$ за $\forall n$ (1)

наричаме степенен ред с център a.

За всеки ред от вида (1) (т.е. за всеки степенен ред с център a) съществува число R, $0\leqq R\leqq+\infty$, такова че (1) е сходящ (даже абсолютно сходящ) за $x\in(a-R,a+R)$ и разходящ за $x\in(-\infty,a-R)\cup(a+R,+\infty)$.



Числото R се нарича радиус на сходимост на (1), а интервалът $(a-R,a+R)$ се нарича интервал на сходимост на (1). Множеството, което се получава, като към интервала на сходимост на (1) добавим тези от двата му края, в които (1) е сходящ, се нарича област на сходимост на (1).

Формули за пресмятане на радиуса на сходимост:

$R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ – формула на Даламбер

$R=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}}$ – формула на Коши и Адамар

$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, b_n$ е най-голямата точка на сгъстяване на редицата $\{b_n\}$ (вместо $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, b_n$ понякога се пише $\limsup\limits_{n\to\infty} b_n$)

например за редицата $0,1,0,1,0,1,\ldots.$ имаме, че $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} = 1$

Във формулата на Коши и Адамар се подразбира, че $\frac{1}{0}=+\infty$ и, че $\frac{1}{+\infty}=0$ (т.е. ако $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=0$, то $R=+\infty$, а ако $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=+\infty$, то $R=0$).

② Лема 1 Ако $P(x)$ и $Q(x)$ са полиноми и $\deg P < \deg Q$ (т.е. степента на $P(x)$ е по-малка от степента на $Q(x)$), то $\frac{P(n)}{Q(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ и то монотонно от известно място нататък.

Доказателство: Понеже по условие $\deg P < \deg Q$, то $\frac{P(n)}{Q(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

А това, че редицата $\left\{\frac{P(n)}{Q(n)}\right\}$ е монотонна от известно място нататък следва веднага от следните два факта:

1) Производната на рационална функция е пак рационална функция (това е очевидно: $\left(\frac{P}{Q}\right)' = \frac{P'.Q - P.Q'}{Q^2}$).

2) Полином от степен m има най-много m различни реални нули (това го доказахме на упражненията по ДИС-1). В частност за всички достатъчно големи $x \in \mathbb{R}$ полиномът има постоянен знак.

От 1) и 2) следва, че $\left(\frac{P(x)}{Q(x)}\right)'$ има постоянен знак за всички достатъчно големи $x \in \mathbb{R}$ и значи $\frac{P(x)}{Q(x)}$ е монотонна за тези $x \in \mathbb{R}$.

В частност редицата $\left\{\frac{P(n)}{Q(n)}\right\}$ е монотонна от известно място нататък.

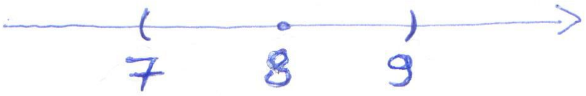
Зад. 1 Намерете областта на сходимост на степенния ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{6n+5}{n^2+n+4}(x-8)^n$ (2).

Решение: Центърът на (2) е 8.

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{6n+5}{n^2+n+4}}{\frac{6(n+1)+5}{(n+1)^2+(n+1)+4}}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{6n+5}{6n+11}\cdot\frac{n^2+3n+6}{n^2+n+4}\right) =$$

③ $= \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{6+\frac{5}{n}}{6+\frac{11}{n}}\cdot\dfrac{1+\frac{3}{n}+\frac{6}{n^2}}{1+\frac{1}{n}+\frac{4}{n^2}}\right)=\dfrac{6}{6}\cdot\dfrac{1}{1}=1.$



интервалът на сходимост на (2) е $(7, 9)$.

$x=9$: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{6n+5}{n^2+n+4} \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ и сл. е разходящ

$$\dfrac{\frac{6n+5}{n^2+n+4}}{\frac{1}{n}}=\dfrac{6n^2+5n}{n^2+n+4}=\dfrac{6+\frac{5}{n}}{1+\frac{1}{n}+\frac{4}{n^2}}\xrightarrow[n\to\infty]{}6>0$$

$x=7$: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{6n+5}{n^2+n+4}$

Този ред е сходящ съгласно критерия на Лайбниц, защото от лема 1 следва, че $\dfrac{6n+5}{n^2+n+4}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ и то монотонно от известно място нататък.

Отг. на зад. 1: Областта на сходимост на (2) е $[7, 9)$.

Зад. 2 Намерете областта на сходимост на степенния ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{7^n+(-5)^n}{4n+3}x^n$ (3)

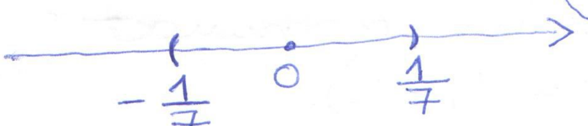
Решение: центърът на (3) е 0.

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{7^n+(-5)^n}{4n+3}}{\frac{7^{n+1}+(-5)^{n+1}}{4(n+1)+3}}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n+7}{4n+3}\cdot\frac{7^n+(-5)^n}{7^{n+1}+(-5)^{n+1}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4+\frac{7}{n}}{4+\frac{3}{n}}\cdot\frac{\cancel{7^n}}{\cancel{7^{n+1}}_{\,7}}\cdot\frac{1+\left(-\frac{5}{7}\right)^n}{1+\left(-\frac{5}{7}\right)^{n+1}}\right)=$$

$$=\frac{4}{4}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{1}=\frac{1}{7}$$

На упражненията по ДИС-1 доказахме, че ако $q\in(-1,1)$, то $q^n\xrightarrow[n\to\infty]{}0$.



интервалът на сходимост на (3) е $\left(-\frac{1}{7}, \frac{1}{7}\right)$.

④ $x=\frac{1}{7}$: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1+\left(-\frac{5}{7}\right)^n}{4n+3} \sim \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4n+3} \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ и сл. е разх.

$1+\left(-\frac{5}{7}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1>0$

$\frac{\frac{1}{4n+3}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{4n+3} = \frac{1}{4+\frac{3}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{4} > 0$

$x=-\frac{1}{7}$: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n+\left(\frac{5}{7}\right)^n}{4n+3} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{4n+3} + \underbrace{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{5}{7}\right)^n}{4n+3}}$

сходящ по кр. на Лайбниц

$\leqq \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{7}\right)^n$ и сл. е сходящ

Така при $x=-\frac{1}{7}$ (3) е сходящ.

На упражненията по ДИС-1 доказахме, че $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ е $\begin{cases} \text{сходящ, ако } q\in(-1,1) \\ \text{разходящ, ако } q\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty) \end{cases}$.

Отг. на зад. 2: Областта на сходимост на (3) е $\left[-\frac{1}{7}, \frac{1}{7}\right)$.

Зад. 3 Намерете областта на сходимост на степенния ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}(x+3)^{n^2}$ (4)

Решение: центърът на (4) е -3.

В случая не можем да приложим формулата на Даламбер, защото $a_n=0$ за безбройно много n (всъщност $a_n\neq 0$ само при $n=1,4,9,16,\dots$)

Ще приложим формулата на Коши и Адамар.

$$\overline{\lim_{k\to+\infty}} \sqrt[k]{|a_k|} = \overline{\lim_{n\to+\infty}} \sqrt[n^2]{\frac{1}{n^n}} = \overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{1}{n^{\frac{1}{n}}} =$$

$$= \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{e^{\ln n^{\frac{1}{n}}}} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{e^{\frac{\ln n}{n}}} = \frac{1}{e^0} = 1.$$

при $n\to+\infty$ степенната функция расте по-бързо от логаритмичната функция

Тогава $R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{k\to+\infty}} \sqrt[k]{|a_k|}} = \frac{1}{1} = 1.$

Интервалът на сходимост на (4) е $(-4,-2)$.

$x=-2$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ и сл. е сходящ.

5) И на упражненията по ДИС-1, и на упражненията по ДИС-2 доказахме (по два различни начина), че
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ е $\begin{cases} \text{сходящ, ако } \alpha > 1 \\ \text{разходящ, ако } \alpha \leq 1 \end{cases}$.

$x = -4$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n^2}}{n^n}$ – сходящ, защото е абсолютно сходящ (преди малко видяхме, че $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ е сходящ)

Отг. на зад. 3: Областта на сходимост на (4) е $[-4, -2]$.

Лема 2 Ако $b_n > 0$ за $\forall n$ и $n\left(\frac{b_n}{b_{n+1}} - 1\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} r > 0$, то $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ и то намалявайки от известно място нататък.

Доказателство: Понеже $r > 0$, то $\frac{b_n}{b_{n+1}} > 1$ за $\forall n > n_0$, т.е. $b_n > b_{n+1}$ за $\forall n > n_0$ и сл. $\{b_n\}$ е намаляваща от известно място нататък.

Понеже освен това $\{b_n\}$ е ограничена отдолу от 0 (по условие $b_n > 0$ за $\forall n$), то по теоремата на Вайерщрас (Всяка ограничена и монотонна редица е сходяща!) имаме, че $\{b_n\}$ е сходяща.

Нека $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$. Да допуснем, че $a \neq 0$.

Избираме $k \in \mathbb{N}$ толкова голямо, че да имаме $kr > 1$.

Към числовия ред $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^k$ прилагаме критерия на Раабе и Дюамел: $n\left(\frac{b_n^k}{b_{n+1}^k} - 1\right) = n\left(\frac{b_n}{b_{n+1}} - 1\right) \cdot$

$$\cdot \left[\underbrace{\left(\frac{b_n}{b_{n+1}}\right)^{k-1}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} \left(\frac{a}{a}\right)^{k-1} = 1} + \underbrace{\left(\frac{b_n}{b_{n+1}}\right)^{k-2}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} \left(\frac{a}{a}\right)^{k-2} = 1} + \dots + \underbrace{\frac{b_n}{b_{n+1}}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{a}{a} = 1} + 1\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} r \cdot k > 1.$$

По критерия на Раабе и Дюамел $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^k$ е сходящ.

Но тогава $b_n^k \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. От друга страна $b_n^k \xrightarrow[n\to\infty]{} a^k \neq 0$.

Ч. Сл. $a = 0$, т.е. $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Зад. 4 Намерете областта на сходимост на степенния ред $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n \sqrt[3]{\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}}\, x^n$ (5)

(Да припомним, че ако $n \in \mathbb{N}$, то: $(2n)!! = 2.4.6.8.\dots.(2n)$
$(2n+1)!! = 1.3.5.7.\dots.(2n+1)$.
$0!! = 1$)

⑥ Решение: центърът на (5) е 0.

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^n\sqrt[3]{\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}}}{3^{n+1}\sqrt[3]{\frac{(2n+2)!!}{(2n+3)!!}}}\right|=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{\frac{2n+3}{2n+2}}=$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{\frac{2+\frac{3}{n}}{2+\frac{2}{n}}}=\frac{1}{3}.$$

Интервалът на сходимост на (5) е $\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.

$x=\frac{1}{3}$: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt[3]{\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}}=\sum_{n=0}^{\infty}b_n$.

$\displaystyle\frac{b_{n+1}}{b_n}=\sqrt[3]{\frac{2+\frac{2}{n}}{2+\frac{3}{n}}}\xrightarrow[n\to\infty]{}1$, при това отляво.

Критерият на Даламбер не дава отговор.

$$n\left(\frac{b_n}{b_{n+1}}-1\right)=n\left(\sqrt[3]{\frac{2+\frac{3}{n}}{2+\frac{2}{n}}}-1\right)=\frac{n}{\sqrt[3]{2+\frac{2}{n}}}\left(\sqrt[3]{2+\frac{3}{n}}-\sqrt[3]{2+\frac{2}{n}}\right)=$$

$$=\frac{n}{\sqrt[3]{2+\frac{2}{n}}}\cdot\frac{(\cancel{2}+\frac{3}{n})-(\cancel{2}+\frac{2}{n})}{\sqrt[3]{\left(2+\frac{3}{n}\right)^2}+\sqrt[3]{2+\frac{3}{n}}\sqrt[3]{2+\frac{2}{n}}+\sqrt[3]{\left(2+\frac{2}{n}\right)^2}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt[3]{2+\frac{2}{n}}}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{\left(2+\frac{3}{n}\right)^2}+\sqrt[3]{2+\frac{3}{n}}\sqrt[3]{2+\frac{2}{n}}+\sqrt[3]{\left(2+\frac{2}{n}\right)^2}}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\cdot\frac{1}{3\sqrt[3]{4}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{8}}=\frac{1}{6}<1$$

По критерия на Раабе и Дюамел $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}b_n$ е разходящ.

$x=-\frac{1}{3}$: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\sqrt[3]{\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n b_n$.

Вече видяхме, че $n\left(\frac{b_n}{b_{n+1}}-1\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{6}>0$.

Тогава от лема 2 следва, че $b_n\downarrow 0$ (клони към 0 монотонно намалявайки).

В такъв случай по критерия на Лайбниц $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n b_n$ е сходящ.

Отг. на зад. 4: Областта на сходимост на (5) е $\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.