Лекция 18.3.2021

1 Смесено произведение — продължение

Припомняне от миналия път

Работим в геометричното пространство, като считаме че са фиксирани единична отсечка за измерване на дължини и ориентация.

Определение 1 *Смесено произведение на векторите u, v, w* се нарича реалното число $\langle u, v, w\rangle = \langle u \times v, w\rangle$ (тоест векторното произведение $u \times v$, умножено скаларно с w).

Забележка 1 Други означения за смесеното произведение са (u, v, w) и uvw.

Теорема 1 *Ако векторите u, v, w не са компланарни, то обемът на паралелепипеда, построен върху u, v, w, е $|\langle u, v, w\rangle|$, а обемът на тетраедъра, построен върху u, v, w, е $\frac{1}{6}|\langle u, v, w\rangle|$.*

Дотук беше припомнянето от миналия път.

Смесено произведение — продължение

Теорема 2 *Нека $e = (e_1, e_2, e_3)$ е положително ориентиран ортонормиран базис на пространството на геометричните вектори и спрямо него векторите u, v, w имат координати $u(x_1, x_2, x_3)$, $v(y_1, y_2, y_3)$, $w(z_1, z_2, z_3)$. Тогава* $\langle u, v, w\rangle = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$.

Доказателство: Тъй като e е положително ориентиран ортонормиран базис, от предишния въпрос имаме $u \times v \left(\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right)$. Следователно с развитие по последния стълб получаваме

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \cdot z_1 + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \cdot z_2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \cdot z_3 = \langle u \times v, w\rangle = \langle u, v, w\rangle. \qquad \square$$

Теорема 3 (критерий за компланарност на вектори)
Векторите u, v, w са компланарни $\Leftrightarrow \langle u, v, w\rangle = 0$.

Доказателство: Нека $e = (e_1, e_2, e_3)$ е положително ориентиран ортонормиран базис на пространството на геометричните вектори. Знаем, че
u, v, w са компланарни $\Leftrightarrow$ детерминантата от координатите им спрямо e е 0. Но от Теорема 2 имаме, че тая детерминанта е $\langle u, v, w\rangle$. Следователно u, v, w са компланарни $\Leftrightarrow \langle u, v, w\rangle = 0$. $\square$

Теорема 4 *Смесеното произведение има следните свойства:*

1. $\langle v, u, w\rangle = -\langle u, v, w\rangle, \quad \langle w, v, u\rangle = -\langle u, v, w\rangle, \quad \langle u, w, v\rangle = -\langle u, v, w\rangle$
   (антисиметричност)

2. $\langle v, w, u\rangle = \langle u, v, w\rangle, \quad \langle w, u, v\rangle = \langle u, v, w\rangle$ *(цикличност)*

3. $\langle u_1 + u_2, v, w\rangle = \langle u_1, v, w\rangle + \langle u_2, v, w\rangle, \quad \langle u, v_1 + v_2, w\rangle = \langle u, v_1, w\rangle + \langle u, v_2, w\rangle,$
   $\langle u, v, w_1 + w_2\rangle = \langle u, v, w_1\rangle + \langle u, v, w_2\rangle$ *(адитивност по трите аргумента)*

4. $\langle \lambda u, v, w\rangle = \lambda\langle u, v, w\rangle,\ \langle u, \lambda v, w\rangle = \lambda\langle u, v, w\rangle,\ \langle u, v, \lambda w\rangle = \lambda\langle u, v, w\rangle,$ *където* $\lambda \in \mathbb{R}$
   (хомогенност по трите аргумента)

Доказателство: Свойствата 3. и 4. и първото равенство в 1. следват от свойствата на скаларното произведение и векторното произведение. Ако докажем едно от другите две равенства в 1., то и другото равенство в 1., а също и свойството 2. също ще следват от свойствата на скаларното и векторното произведение. Ще докажем второто равенство в 1. чрез координати. (Може да се докаже и без координати като се използват Теорема 1 и Теорема 3, но е малко по-дълго, а пък и ние вече използвахме координати за да докажем Теорема 3.)

Нека $e = (e_1, e_2, e_3)$ е положително ориентиран ортонормиран базис на пространството на геометричните вектори и спрямо него векторите u, v, w имат координати $u(x_1, x_2, x_3)$, $v(y_1, y_2, y_3)$, $w(z_1, z_2, z_3)$.

1. Тъй като при размяна на местата на два стълба на матрица детерминантата ѝ си сменя знака, то

$$\langle w, v, u\rangle = \begin{vmatrix} z_1 & y_1 & x_1 \\ z_2 & y_2 & x_2 \\ z_3 & y_3 & x_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = -\langle u, v, w\rangle.$$

   Първото равенство се доказва по същия начин, като тоя път се разменят първите два стълба, но следва и директно от свойствата на скаларното произведение и векторното произведение по следния начин:

$$\langle v, u, w\rangle = \langle v \times u, w\rangle = \langle -u \times v, w\rangle = -\langle u \times v, w\rangle = -\langle u, v, w\rangle.$$

   Третото равенство се доказва по същия начин, като тоя път се разменят последните два стълба, но следва и от първите две равенства по следния начин:

$$\langle u, w, v\rangle = -\langle w, u, v\rangle = \langle v, u, w\rangle = -\langle u, v, w\rangle.$$

2. Може да се докаже с координати като 1., като тоя път ще имаме циклична пермутация на стълбовете, което се свежда до двукратна размяна на стълбове, и значи ще имаме двукратна смяна на знака на детерминантата, тоест същия знак в крайна сметка. Но следва и директно от 1. по следния начин:

$$\langle v, w, u\rangle = -\langle w, v, u\rangle = \langle u, v, w\rangle,$$

   а второто равенство следва от първото, приложено два пъти — за векторите v, w, u и за векторите u, v, w:

$$\langle w, u, v\rangle = \langle v, w, u\rangle = \langle u, v, w\rangle.$$

3. Може да се докаже с координати като 1., като тоя път се използва свойството, че когато някой стълб на матрица е сума на два стълба, то детерминантата ѝ е сумата на детерминантите на двете матрици, съответният стълб на които е един от тия два стълба. Но следва и директно от свойствата на скаларното произведение и векторното произведение по следния начин:

$$\begin{aligned}
\langle u_1 + u_2, v, w\rangle &= \langle (u_1 + u_2) \times v, w\rangle = \langle u_1 \times v + u_2 \times v, w\rangle \\
&= \langle u_1 \times v, w\rangle + \langle u_2 \times v, w\rangle = \langle u_1, v, w\rangle + \langle u_2, v, w\rangle, \\
\langle u, v_1 + v_2, w\rangle &= \langle u \times (v_1 + v_2), w\rangle = \langle u \times v_1 + u \times v_2, w\rangle \\
&= \langle u \times v_1, w\rangle + \langle u \times v_2, w\rangle = \langle u, v_1, w\rangle + \langle u, v_2, w\rangle, \\
\langle u, v, w_1 + w_2\rangle &= \langle u \times v, w_1 + w_2\rangle \\
&= \langle u \times v, w_1\rangle + \langle u \times v, w_2\rangle = \langle u, v, w_1\rangle + \langle u, v, w_2\rangle.
\end{aligned}$$

4. Може да се докаже с координати като 1., като тоя път се използва свойството, че когато някой стълб на матрица се умножи с число, то детерминантата на получената матрица е детерминантата на първоначалната, умножена със същото число. Но следва и директно от свойствата на скаларното произведение и векторното произведение по следния начин:

$$\begin{aligned}
\langle \lambda u, v, w\rangle &= \langle (\lambda u) \times v, w\rangle = \langle \lambda (u \times v), w\rangle = \lambda\langle u \times v, w\rangle = \lambda\langle u, v, w\rangle, \\
\langle u, \lambda v, w\rangle &= \langle u \times (\lambda v), w\rangle = \langle \lambda (u \times v), w\rangle = \lambda\langle u \times v, w\rangle = \lambda\langle u, v, w\rangle, \\
\langle u, v, \lambda w\rangle &= \langle u \times v, \lambda w\rangle = \lambda\langle u \times v, w\rangle = \lambda\langle u, v, w\rangle.
\end{aligned}$$

□

Забележка 2 Свойствата 3. и 4. в горната теорема заедно са еквивалентни на свойството

$$\begin{aligned}
&\langle \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, v, w\rangle = \lambda_1\langle u_1, v, w\rangle + \lambda_2\langle u_2, v, w\rangle, \\
&\langle u, \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, w\rangle = \lambda_1\langle u, v_1, w\rangle + \lambda_2\langle u, v_2, w\rangle, \\
&\langle u, v, \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2\rangle = \lambda_1\langle u, v, w_1\rangle + \lambda_2\langle u, v, w_2\rangle
\end{aligned}$$

(*линейност по трите аргумента*)

тоест смесеното произведение е трилинейно.

Пример 1 От антисиметричността на смесеното произведение (а също и от Теорема 3 или Теорема 2) следва, че ако два от векторите u, v, w съвпадат, то $\langle u, v, w\rangle = 0$. Например, ако $w = u$, то като разменим местата на първия и третия аргумент получаваме $\langle u, v, u\rangle = -\langle u, v, u\rangle$ и следователно $\langle u, v, u\rangle = 0$.

Твърдение 1 *Нека $e = (e_1, e_2, e_3)$ е произволен базис на пространството на геометричните вектори и спрямо него векторите u, v, w имат координати $u(x_1, x_2, x_3)$, $v(y_1, y_2, y_3)$, $w(z_1, z_2, z_3)$. Тогава*

$$\langle u, v, w\rangle = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} .\langle e_1, e_2, e_3\rangle.$$

Доказателство: Имаме

$$u = \sum_{i=1}^{3} x_i e_i, \qquad v = \sum_{j=1}^{3} y_j e_j, \qquad w = \sum_{k=1}^{3} z_k e_k.$$

От трилинейността на смесеното произведение тогава получаваме

$$\langle u, v, w\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{3} x_i e_i, \sum_{j=1}^{3} y_j e_j, \sum_{k=1}^{3} z_k e_k \right\rangle = \sum_{i,j,k=1}^{3} x_i y_j z_k \langle e_i, e_j, e_k\rangle.$$

От Пример 1 следва, че ако някои два от индексите i, j, k съвпадат, то $\langle e_i, e_j, e_k\rangle = 0$. Следователно в сумата остават събираемите, в които индексите i, j, k са различни, тоест когато те представляват пермутация на 1, 2, 3. Значи

$$\begin{aligned} \langle u, v, w\rangle \;\; = \;\; & x_1y_2z_3\langle e_1, e_2, e_3\rangle + x_1y_3z_2\langle e_1, e_3, e_2\rangle + x_2y_1z_3\langle e_2, e_1, e_3\rangle + x_2y_3z_1\langle e_2, e_3, e_1\rangle \\ & + x_3y_1z_2\langle e_3, e_1, e_2\rangle + x_3y_2z_1\langle e_3, e_2, e_1\rangle. \end{aligned}$$

Всички смесени произведения, които участват в тая сума, могат чрез свойствата антисиметричност и цикличност да се изразят чрез $\langle e_1, e_2, e_3\rangle$ и получаваме

$$\begin{aligned} \langle u, v, w\rangle &= (x_1y_2z_3 - x_1y_3z_2 - x_2y_1z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 - x_3y_2z_1)\langle e_1, e_2, e_3\rangle \\ &= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} .\langle e_1, e_2, e_3\rangle. \end{aligned}$$

□

2 Допълнение: Комплексни числа и кватерниони в реалната геометрия на равнината и пространството

Това допълнение е само за информация и няма да влиза в изпита.

Комплексни числа в геометрията на равнината

Накратко ще припомня някои неща за комплексните числа.

Считаме, че i е символ, който не е реално число. *Комплексно число* е израз от вида $x + y.i$, където $x, y \in \mathbb{R}$. Множеството на комплексните числа се означава с $\mathbb{C}$.

Събиране на комплексни числа се дефинира по следния начин:
ако $z_1 = x_1 + y_1.i$, $z_2 = x_2 + y_2.i$, то

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2).i.$$

Комплексни числа се умножават както се умножават полиноми на i, но се замества

$$i^2 = -1.$$

Явната формула е

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + y_1 x_2).i.$$

i се нарича *имагинерна единица.*

Разглеждаме $\mathbb{R}$ като подмножество на $\mathbb{C}$ като отъждествяваме $x \in \mathbb{R}$ с $x + 0.i \in \mathbb{C}$. При това отъждествяване сборът и произведението на реални числа, когато се разглеждат като реални и когато се разглеждат като комплексни, са едни и същи (тоест съответстват си при горното отъждествяване). Комплексните числа от вида $y.i$ (тоест $0 + y.i$) се наричат *имагинерни.*

За $z = x + y.i$:

$\operatorname{Re} z := x$ се нарича *реална част* на z, $\operatorname{Im} z := y$ — *имагинерна част* на z. Следователно $z = \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z.i$.

Комплексното число $\overline{z} := x - y.i = \operatorname{Re} z - \operatorname{Im} z.i$ се нарича *спрегнато* на z.

Неотрицателното реално число $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ се нарича *модул* на z.

Имаме биекция

$$\mathbb{C} \ni x + y.i \longleftrightarrow (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

При нея си съответстват събирането и умножението с реално число (така че това е изоморфизъм на реални линейни пространства).

Свойства

1. Със събирането и умножението $\mathbb{C}$ е поле, тоест събирането и умножението на комплексни числа има същите свойства като събирането и умножението на реални (или рационални) числа. Обратният елемент относно умножението е даден в 11-то свойство.

2. $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = z, \quad z \in \operatorname{Im}\mathbb{C} \Leftrightarrow \overline{z} = -z$.

3. $\overline{\overline{z}} = z$.

4. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.

5. $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}.\overline{z_2}$.

6. $|z| \geq 0$ и $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

7. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (неравенство на триъгълника).

8. За $z \in \mathbb{R}$ модулът на z като комплексно число съвпада с модула му като реално число.

9. $|\overline{z}| = |z|$.

10. $z\overline{z} = |z|^2$.

11. Ако $z \neq 0$, то $z^{-1} = \frac{1}{|z|^2}\overline{z}$.

12. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.

Нека (e, f) е ортонормиран базис на линейното пространство на векторите в равнината.

Поради горната биекция $\mathbb{C} \longleftrightarrow \mathbb{R}^2$ можем да считаме, че координатите спрямо (e, f) на векторите са комплексни числа, тоест ако $v(x, y)$, то считаме, че $v(z)$, където $z = x + y.i$. При това от дефиницията на събирането и умножението на комплексни числа следва, че ако $v_1(z_1)$, $v_2(z_2)$, то $(v_1 + v_2)(z_1 + z_2)$, и ако $\lambda \in \mathbb{R}$ и $v(z)$, то $(\lambda v)(\lambda z)$.

За скаларното произведение имаме

$$\langle v_1, v_2 \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2 = \operatorname{Re}(\overline{z_1} z_2) = \operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2}).$$

Също така $|v| = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$.

За $\operatorname{Im}(\overline{z_1} z_2)$ имаме следната интерпретация:
(v_1, v_2) е положително (съответно отрицателно) ориентиран базис по отношение на ориентацията, зададена от (e, f), $\Leftrightarrow \operatorname{Im}(\overline{z_1} z_2) > 0$ (съответно < 0). Това е така, защото

$$\operatorname{Im}(\overline{z_1} z_2) = x_1 y_2 - y_1 x_2 = \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$$

— детерминантата на матрицата от координатите на v_1 и v_2.

Кватерниони в геометрията на пространството

Считаме, че i, j, k са символи, които не са реални числа. *Кватернион* е израз от вида $t + x.i + y.j + z.k$, където $t, x, y, z \in \mathbb{R}$. Множеството на кватернионите се означава с $\mathbb{H}$. (От първата буква на името на Хамилтън, който ги е измислил през 19-ти век.)

Събиране на кватерниони се дефинира по следния начин:
ако $q_1 = t_1 + x_1.i + y_1.j + z_1.k$, $q_2 = t_2 + x_2.i + y_2.j + z_2.k$, то

$$q_1 + q_2 = (t_1 + t_2) + (x_1 + x_2).i + (y_1 + y_2).j + (z_1 + z_2).k$$

Кватерниони се умножават както се умножават полиноми на i, j, k, но се замества

$$i^2 = -1, \quad j^2 = -1, \quad k^2 = -1, \quad ij = k, \quad ji = -k, \quad jk = i, \quad kj = -i, \quad ki = j, \quad ik = -j.$$

Явната формула е

$$q_1 q_2 = (t_1 t_2 - x_1 x_2 - y_1 y_2 - z_1 z_2)$$

$$+ (t_1 x_2 + x_1 t_2 + y_1 z_2 - z_1 y_2).i + (t_1 y_2 + y_1 t_2 + z_1 x_2 - x_1 z_2).j + (t_1 z_2 + z_1 t_2 + x_1 y_2 - y_1 x_2).k.$$

i, j, k се наричат *имагинерни единици.*

Разглеждаме $\mathbb{R}$ като подмножество на $\mathbb{H}$ като отъждествяваме $t \in \mathbb{R}$ с
$t + 0.i + 0.j + 0.k \in \mathbb{H}$. При това отъждествяване сборът и произведението на реални числа, когато се разглеждат като реални и когато се разглеждат като кватерниони, са едни и същи (тоест съответстват си при горното отъждествяване). Кватернионите от вида $x.i + y.j + z.k$ (тоест $0 + x.i + y.j + z.k$) се наричат *имагинерни.*

За $q = t + x.i + y.j + z.k$:

$\operatorname{Re} q := t$ се нарича *реална част* на q, $\operatorname{Im} q := x.i + y.j + z.k$ — *имагинерна част* на q. Следователно $q = \operatorname{Re} q + \operatorname{Im} q$.

Кватернионът $\overline{q} := t - x.i - y.j - z.k = \operatorname{Re} q - \operatorname{Im} q$ се нарича *спрегнат* на q.

Неотрицателното реално число $|q| = \sqrt{t^2 + x^2 + y^2 + z^2}$ се нарича *модул* на q.

Имаме биекции

$$\mathbb{H} \ni t + x.i + y.j + z.k \longleftrightarrow (t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4 \quad \text{и} \quad \operatorname{Im} \mathbb{H} \ni x.i + y.j + z.k \longleftrightarrow (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

При тях си съответстват събирането и умножението с реално число (така че това са изоморфизми на реални линейни пространства).

Следващите свойства се проверяват лесно.

Свойства

1. Със събирането и умножението $\mathbb{H}$ е тяло, което е същото като поле, но без свойството $q_1q_2 = q_2q_1$ (тоест без комутативност на умножението), тоест събирането и умножението на кватерниони има същите свойства като събирането и умножението на реални (или рационални) числа, но без комутативност на умножението. Обратният елемент относно умножението е даден в 13-то свойство.
(Некомутативно умножение вече сте виждали. Например векторното произведение и умножението на матрици.)

2. $\mathrm{Re}\,(q_1q_2) = \mathrm{Re}\,(q_2q_1)$.

3. $q \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall q' \in \mathbb{H}\ qq' = q'q \Leftrightarrow \forall q' \in \mathrm{Im}\,\mathbb{H}\ qq' = q'q$.

4. $q \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{q} = q, \quad q \in \mathrm{Im}\,\mathbb{H} \Leftrightarrow \overline{q} = -q$.

5. $\overline{\overline{q}} = q$.

6. $\overline{q_1 + q_2} = \overline{q_1} + \overline{q_2}$.

7. $\overline{q_1q_2} = \overline{q_2}.\overline{q_1}$.

8. $|q| \geq 0$ и $|q| = 0 \Leftrightarrow q = 0$.

9. $|q_1 + q_2| \leq |q_1| + |q_2|$ (неравенство на триъгълника).

10. За $q \in \mathbb{R}$ модулът на q като кватернион съвпада с модула му като реално число.

11. $|\overline{q}| = |q|$.

12. $q\overline{q} = |q|^2 = \overline{q}q$.

13. Ако $q \neq 0$, то q е обратим относно умножението и $q^{-1} = \frac{1}{|q|^2}\overline{q}$.

14. $|q_1q_2| = |q_1||q_2|$.

Нека (f, g, h) е ортонормиран базис на линейното пространство на векторите в пространството. Следователно (f, g, h) задава ориентация в това линейно пространство. При смятане на векторно и смесено произведение ще считаме, че е избрана именно тая ориентация.

Поради горната биекция $\mathrm{Im}\,\mathbb{H} \longleftrightarrow \mathbb{R}^3$ можем да считаме, че координатите спрямо (f, g, h) на векторите са имагинерни кватерниони, тоест ако $v(x, y, z)$, то считаме, че $v(q)$, където $q = x.i + y.j + z.k$. При това от дефиницията на събирането и умножението на кватерниони следва, че ако $v_1(q_1)$, $v_2(q_2)$, то $(v_1 + v_2)(q_1 + q_2)$, и ако $\lambda \in \mathbb{R}$ и $v(q)$, то $(\lambda v)(\lambda q)$.

За $q_1, q_2 \in \mathrm{Im}\,\mathbb{H} = \mathbb{R}^3$ имаме

$$q_1q_2 = (-x_1x_2 - y_1y_2 - z_1z_2) + (y_1z_2 - z_1y_2).i + (z_1x_2 - x_1z_2).j + (x_1y_2 - y_1x_2).k.$$

Следователно за скаларното произведение получаваме

$$\langle v_1, v_2\rangle = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = -\mathrm{Re}\,(q_1q_2) = \mathrm{Re}\,(\overline{q_1}q_2) = \mathrm{Re}\,(q_1\overline{q_2}).$$

Също така $|v| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = |q|$.

Тъй като $(v_1 \times v_2)(y_1z_2 - z_1y_2, z_1x_2 - x_1z_2, x_1y_2 - y_1x_2)$, то от горната формула за q_1q_2 получаваме също $(v_1 \times v_2)(\mathrm{Im}\,(q_1q_2))$.
(Според мен правилата за умножение на трите имагинерни единици на кватернионите се помнят лесно и последната формула дава лесен начин за пресмятане (и помнене) на координатите на векторното произведение. Между другото, в доста книги (особено по-стари) координатните вектори на положително ориентирана ортонормирана координатна система в пространството се означават с i, j, k.)

Тогава за смесеното произведение получаваме

$$\langle v_1, v_2, v_3\rangle = \langle v_1, v_2 \times v_3\rangle = -\mathrm{Re}\,(q_1\mathrm{Im}\,(q_2q_3)) = \mathrm{Re}\,(\overline{q_1}\mathrm{Im}\,(q_2q_3)).$$

Тъй като $q_1 \in \mathrm{Im}\,H$, то $q_1\mathrm{Re}\,(q_2q_3)$ няма реална част и следователно

$$\mathrm{Re}\,(q_1\mathrm{Im}\,(q_2q_3)) = \mathrm{Re}\,(q_1(\mathrm{Re}\,(q_2q_3) + \mathrm{Im}\,(q_2q_3))) = \mathrm{Re}\,(q_1q_2q_3).$$

Значи за смесеното произведение имаме също

$$\langle v_1, v_2, v_3\rangle = -\mathrm{Re}\,(q_1q_2q_3) = \mathrm{Re}\,(\overline{q_1}q_2q_3).$$

3 Евклидови линейни пространства. Ортонормирани базиси. Ортогонално допълнение

Тоя въпрос представлява по същество припомняне на неща, които са известни от курса по алгебра. Включен е и с цел фиксиране на терминологията (в курса по алгебра някои неща може да са формулирани по различен начин). Може да съдържа и някои по-маловажни факти, които в курса по алгебра са били пропуснати, но тук ще ни трябват. Написал съм доказателствата само на нещата, за които разбрах, че не са доказвани в курса по алгебра.

Дефиниции и примери

Нека U е реално линейно пространство.

Определение 2 *Скаларно произведение* в U е изображение

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : U \times U \to \mathbb{R}, \quad (u,v) \mapsto \langle u,v\rangle,$$

което има свойствата:

1. $\langle v,u\rangle = \langle u,v\rangle$ за $u,v \in U$ (*симетричност*)
2. $\langle u_1+u_2,v\rangle = \langle u_1,v\rangle + \langle u_2,v\rangle$ за $u_1,u_2,v \in U$ (*адитивност по първия аргумент*)
3. $\langle \lambda u,v\rangle = \lambda\langle u,v\rangle$ за $u,v \in U,\ \lambda \in \mathbb{R}$ (*хомогенност по първия аргумент*)
4. $\langle u,u\rangle > 0$ за $u \in U,\ u \neq 0$ (*положителност*)
   (Вместо *положителност* се казва още *положителна определеност* или *положителна дефинираност* или *положителна дефинитност*.)

$\langle u,v\rangle$ се нарича *скаларно произведение на векторите u и v.*

Забележка 3 Срещат се и други означения за скаларното произведение. Например uv, $u.v$, (u,v), $\langle u|v\rangle$.

Забележка 4 Условията 2. и 3. в горното определение заедно са еквивалентни на условието

$$\langle \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, v\rangle = \lambda_1\langle u_1,v\rangle + \lambda_2\langle u_2,v\rangle \quad \text{за } u_1,u_2,v \in U,\ \lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{R},$$

което се нарича *линейност по първия аргумент.*

Твърдение 2 *Нека $\langle\cdot,\cdot\rangle$ е скаларно произведение в U. Тогава:*

1. *$\langle 0,v\rangle = 0 = \langle v,0\rangle$ за $v \in U$.*
2. *$\langle u,v_1+v_2\rangle = \langle u,v_1\rangle + \langle u,v_2\rangle$ за $u,v_1,v_2 \in U$ (адитивност по втория аргумент)*
3. *$\langle u,\lambda v\rangle = \lambda\langle u,v\rangle$ за $u,v \in U,\ \lambda \in \mathbb{R}$ (хомогенност по втория аргумент)*
4. *За $u \in U$ е в сила $\langle u,u\rangle \geq 0$ и $= \Leftrightarrow u = 0$.*
5. $$\left\langle \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i, \sum_{j=1}^{l} \mu_j v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} \lambda_i\mu_j\langle u_i,v_j\rangle \quad \text{за } u_i,v_j \in U,\ \lambda_i,\mu_j \in \mathbb{R},$$
   $i = 1,\ldots,k,\ j = 1,\ldots,l.$

Забележка 5 Условията 2. и 3. в горното твърдение заедно са еквивалентни на условието

$$\langle u, \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2\rangle = \lambda_1\langle u,v_1\rangle + \lambda_2\langle u,v_2\rangle \quad \text{за } u,v_1,v_2 \in U,\ \lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{R},$$

което се нарича *линейност по втория аргумент.* Следователно скаларното произведение е линейно и по двата си аргумента, тоест е *билинейно.*

Така свойствата на скаларното произведение се резюмират накратко по следния начин: Скаларното произведение е симетрично, билинейно и положително дефинитно.

Определение 3 *Евклидово линейно пространство* е реално линейно пространство, в което е фиксирано едно скаларно произведение.

Пример 2 За $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, дефинираме $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$, тоест $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i = x^ty$. Това е скаларно произведение в $\mathbb{R}^n$. Нарича се *стандартно скаларно произведение в* $\mathbb{R}^n$. Винаги ще разглеждаме $\mathbb{R}^n$ като евклидово линейно пространство с това скаларно произведение, освен ако изрично не е казано друго.

Пример 3 Скаларното произведение на геометрични вектори удовлетворява четирите условия от Определение 2 и следователно е скаларно произведение в смисъла на това определение. Следователно векторите в геометричното пространство образуват 3-мерно евклидово линейно пространство. Аналогично векторите в геометричната равнина образуват 2-мерно евклидово линейно пространство и векторите върху геометрична права образуват 1-мерно евклидово линейно пространство.
(Тия неща вече сме ги видели и във въпрос 5.)

Твърдение 3 *Ако U е евклидово линейно пространство и V е линейно подпространство на U, то ограничението върху V на скаларното произведение в U е скаларно произведение във V и следователно с него V е евклидово линейно пространство.*

Доказателство: Щом свойствата от Определение 2 важат за векторите от U, то те важат и за векторите от $V \subset U$. Следователно ограничението върху V на скаларното произведение на U е скаларно произведение във V. $\square$

Забележка 6 Винаги ще разглеждаме линейните подпространства на евклидово линейно пространство като евклидови линейни пространства със скаларното произведение от горното твърдение, освен ако изрично не е казано друго.

Дължини и ъгли в евклидово линейно пространство

Нека U е евклидово линейно пространство.

Определение 4 За $u \in U$ означаваме $|u| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$. Нарича се *дължина* или *норма на* u.
(Дефиницията е коректна поради 4. в Твърдение 2.)

Забележка 7 Друго често срещано означение за $|u|$ е $\|u\|$.

Твърдение 4 *За $u, v \in U$, $\lambda \in \mathbb{R}$ са в сила:*

1. $|u| \geq 0$ $u = \Leftrightarrow u = 0$.
2. $|\lambda u| = |\lambda||u|$.
3. $|u + v| \leq |u| + |v|$ *(неравенство на триъгълника).*

Забележка 8 Ако U е реално линейно пространство, то всяко изображение $|\cdot| : U \to \mathbb{R}$, което има трите свойства от Твърдение 4, се нарича *норма в* U. Така че Твърдение 4 казва, че дефинираната от нас дължина на вектори в евклидово линейно пространство е норма. Понякога тя се нарича *евклидова норма* за да се подчертае, че идва от скаларно произведение.

Теорема 5 (неравенство на Коши-Буняковски-Шварц) *Нека* $u, v \in U$. *Тогава*

$$|\langle u, v\rangle| \leq |u||v|$$

$u = \Leftrightarrow$ *u* u *и* v *са линейно зависими.*
(Еквивалентни формулировки на неравенството:
$\langle u, v\rangle^2 \leq |u|^2|v|^2, \quad \langle u, v\rangle^2 \leq \langle u, u\rangle\langle v, v\rangle, \quad -|u||v| \leq \langle u, v\rangle \leq |u||v|.$*)*

Пример 4 В $\mathbb{R}^n$ имаме

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \quad |x| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Следователно:
Неравенството на Коши-Буняковски-Шварц е

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2},$$

тоест

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)$$

– това е доказал Коши.
Неравенството на триъгълника е

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}.$$

Следващото твърдение показва, че скаларното произведение може да се изрази чрез дължината. (И всъщност се вижда, когато се извежда неравенството на триъгълника от неравенството на Коши-Буняковски-Шварц.)

Твърдение 5 *За* $u, v \in U$ *е в сила* $|u + v|^2 = |u|^2 + |v|^2 + 2\langle u, v\rangle$ *и следователно* $\langle u, v\rangle = \frac{1}{2}(|u + v|^2 - |u|^2 - |v|^2)$.

Доказателство:

$$|u + v|^2 = \langle u + v, u + v\rangle = \langle u, u\rangle + \langle u, v\rangle + \langle v, u\rangle + \langle v, v\rangle = |u|^2 + 2\langle u, v\rangle + |v|^2.$$

(И тъй като по неравенството на Коши-Буняковски-Шварц $\langle u, v\rangle \leq |u||v|$, получаваме неравенството на триъгълника.) □