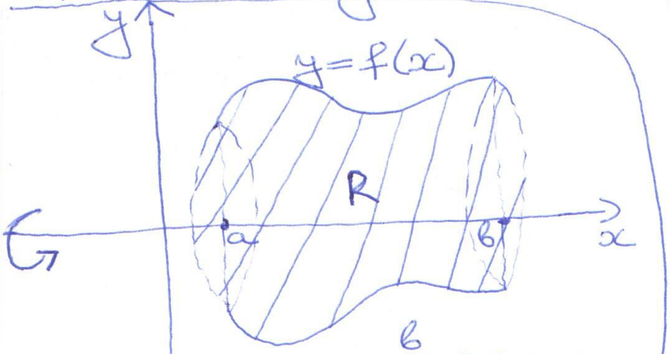
①

Упражнение 4

Определени интеграли, част 4

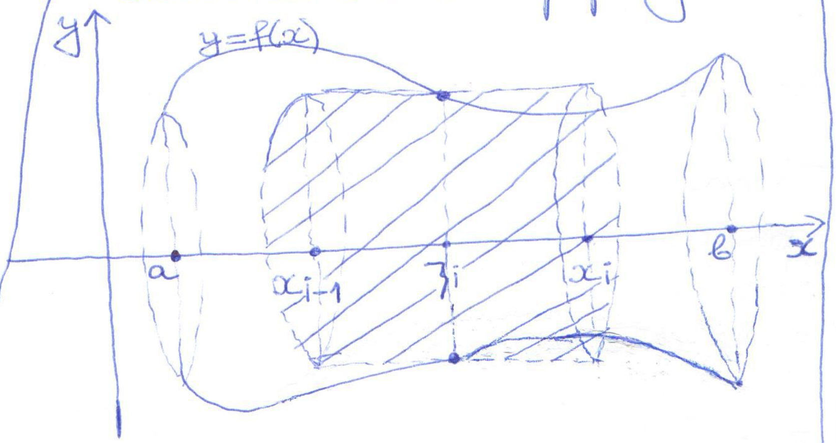
④ Пресмятане на обем на ротационно тяло

Нека $f(x)$ е непрекъсната в $[a,b]$. Обемът $V(R)$ на ротационното тяло R, което се получава като завъртим графиката на $f(x)$ в $[a,b]$ около абсцисната ос, е $V(R)=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx$.



$$V(R)=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx$$

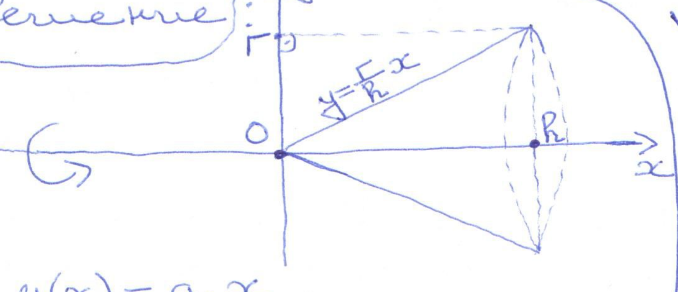
Обяснение на формулата:



$\pi\int_a^b f^2(x)\,dx$ е граница при $\max\limits_{1\le i\le n}(x_i-x_{i-1})\longrightarrow 0$ на Римановите интегрални суми $\sum_{i=1}^{n}\pi f^2(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$, а пък $\pi f^2(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$ е обемът на защрихования прав кръгов цилиндър

Зад.1 Намерете обема $V(R)$ на прав кръгов конус R с височина h и радиус на основата r.

Решение:



$y(x)=ax$

$y(h)=r \iff ah=r \iff a=\frac{r}{h}$

$y=\frac{r}{h}x$

$$V(R)=\pi\int_0^h\left(\frac{r}{h}x\right)^2dx=$$

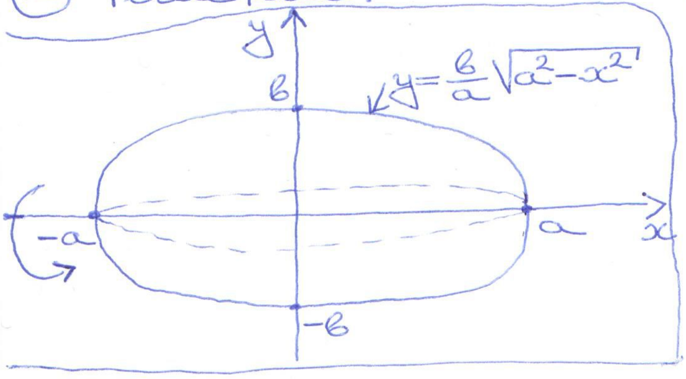
$$=\pi\frac{r^2}{h^2}\int_0^h x^2\,dx=$$

$$=\pi\frac{r^2}{h^2}\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^h=\pi\frac{r^2}{\cancel{h^2}}\cdot\frac{\cancel{h^3}}{3}=\frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

Отг. на зад.1: $V(R)=\frac{1}{3}\pi r^2 h$.

Зад.2 Пресметнете обема $V(R)$ на елипсоида R, получен при въртенето на елипсата $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0, b>0)$ около абсцисната ос.

② Решение:



Как изглежда елипсата $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{в^2}=1$ видяхме в първата задача от предното упражнение.
Тук само ще отбележим, че при $y \geq 0$ имаме

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{в^2}=1 \iff \frac{y^2}{в^2}=1-\frac{x^2}{a^2} \iff y^2=\frac{в^2}{a^2}(a^2-x^2) \iff$$

$$\iff y=\frac{в}{a}\sqrt{a^2-x^2},\ x\in[-a,a]$$ (Това е уравнението на частта от елипсата, лежаща в горната полуравнина (т.е. над абсцисната ос))

Така елипсоидът R се получава като завъртим графиката на функцията $f(x)=\frac{в}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, $x\in[-a,a]$ около абсцисната ос.

Тогава $V(R)=\pi\int_{-a}^{a}\left(\frac{в}{a}\sqrt{a^2-x^2}\right)^2dx=\frac{\pi в^2}{a^2}\int_{-a}^{a}\underbrace{(a^2-x^2)}_{\text{четна функция}}dx=$

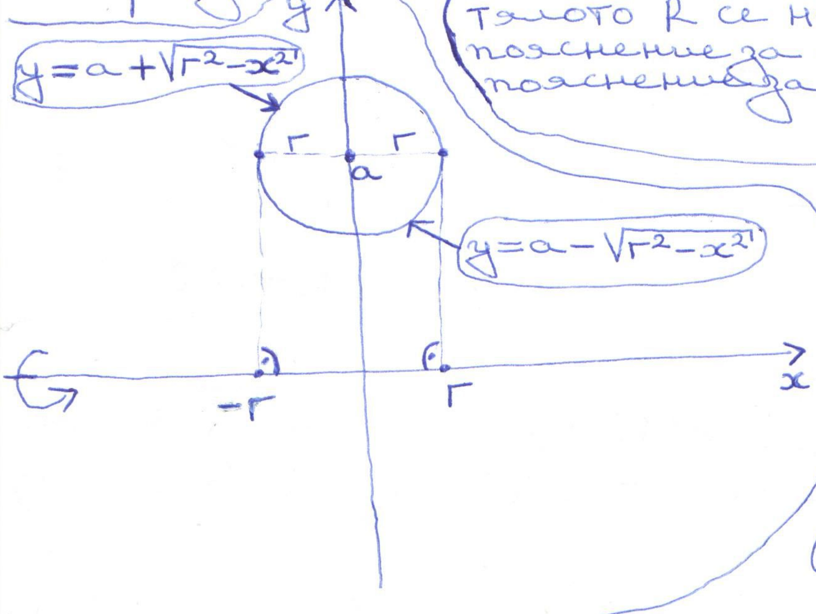
$$=2\frac{\pi в^2}{a^2}\int_{0}^{a}(a^2-x^2)\,dx=2\frac{\pi в^2}{a^2}\left(a^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^a=$$

$$=2\frac{\pi в^2}{a^2}\left(a^3-\frac{a^3}{3}\right)=2\frac{\pi в^2}{\cancel{a^2}}\cdot\frac{2}{3}a^{\cancel{3}}=\frac{4}{3}\pi a в^2.$$

Отг. на зад. 2: $V(R)=\frac{4}{3}\pi a в^2$.

Забележка: От зад. 2 при $a=в=r$ получаваме, че обемът на кълбо с радиус r е $\frac{4}{3}\pi r^3$.

Зад. 3 Намерете обема $V(R)$ на тялото R, което се получава като завъртим кръг с радиус r около ос, лежаща в равнината на кръга и намираща се на разстояние a $(a>r)$ от центъра на кръга.



Тялото R се нарича тор;
пояснение за момичета: R е поничка;
пояснение за момчета: R е вътрешна автомобилна гума

Решение: Нека оста около която се извършва въртенето изберем да бъде абсцисна ос, а ординатната ос изберем така, че центърът на кръга, който въртим, да лежи върху положителната ѝ част. (виж чертежа вляво).

③ Окръжността има уравнение $(x-0)^2+(y-a)^2=r^2$, т.е. $x^2+(y-a)^2=r^2$. Имаме, че

$$x^2+(y-a)^2=r^2 \Longleftrightarrow (y-a)^2=r^2-x^2 \Longleftrightarrow y=a\pm\sqrt{r^2-x^2},\ x\in[-r,r].$$

Тогава $V(R)=\pi\int_{-r}^{r}(a+\sqrt{r^2-x^2})^2dx-\pi\int_{-r}^{r}(a-\sqrt{r^2-x^2})^2dx=$

$$=4a\pi\int_{-r}^{r}\underbrace{\sqrt{r^2-x^2}}_{\text{четна функция}}dx=8a\pi\int_0^r\sqrt{r^2-x^2}\,dx\overset{x=r\sin t}{=}$$

$$=8a\pi\int_0^{\pi/2}\sqrt{r^2-r^2\sin^2t}\,d(r\sin t)=8a\pi\int_0^{\pi/2}r\cos t\,d(r\sin t)=$$

$$=8a\pi r^2\int_0^{\pi/2}\cos^2t\,dt=4a\pi r^2\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)\,dt=$$

$$=4a\pi r^2\Big(t\Big|_0^{\pi/2}+\underbrace{\tfrac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^{\pi/2}}_{=0}\Big)=4a\pi r^2\frac{\pi}{2}=2a\pi^2r^2.$$

Отг. на зад. 3: $V(R)=2\pi^2r^2a$.

Несобствени интеграли, част 1

При определените интеграли $\int_a^b f(x)dx$, интервалът $[a,b]$ е краен, а подинтегралната функция $f(x)$ е ограничена в $[a,b]$. Ако е нарушено някое от тези две условия, получава се интеграл, който се нарича несобствен.

Интегралите от вида $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ и $\int_{-\infty}^{b}f(x)dx$ се наричат несобствени интеграли от първи род.

$\int_a^{+\infty}f(x)dx$ се нарича сходящ, ако съществува границата $I=\lim\limits_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx$ (крайно число) и разходящ, ако тази граница не съществува.

Ако $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ е сходящ, числото I се нарича негова стойност.

Аналогично стоят нещата с $\int_{-\infty}^{b}f(x)dx$.

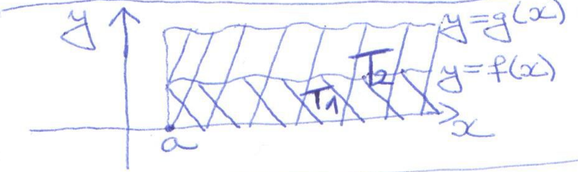
Интегралите от вида $\int_a^b f(x)dx$, при които $f(x)$ е неограничена в $[a,b]$, се наричат несобствени интеграли от втори род. Без ограничение на общността можем да считаме, че $f(x)$ е неограничена в околност на a или в околност на b. (Ако $f(x)$ е неограничена в околност на $c\in(a,b)$, то можем да използваме, че $\int_a^b=\int_a^c+\int_c^b$ и да изследваме тези два интеграла)

④ Нека $f(x)$ е неограничена в околност на a (тогава a се нарича особена точка на $\int_a^b f(x)dx$).

Казваме, че $\int_a^b f(x)dx$ е сходящ, ако съществува границата $J = \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$ (крайно число) и разходящ, ако тази граница не съществува. Ако $\int_a^b f(x)dx$ е сходящ, числото J се нарича негова стойност.

Аналогично стоят нещата, ако b е особена точка на $\int_a^b f(x)dx$.

Принцип за мажориране Ако $0\leqq f(x)\leqq g(x)$ за $x\in[a,+\infty)$ и $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ е сходящ, то и $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ е сходящ.



Геометричен смисъл на принципа за мажориране: Ако лицето $S(T_2)$ е крайно число, то и лицето $S(T_1)$ също е крайно число.

Критерий за сравняване Ако $f(x)>0$ за $x\in[a,+\infty)$, $g(x)>0$ за $x\in[a,+\infty)$ и съществува границата $c=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$, като $0<c<+\infty$, то $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ са едновременно сходящи или разходящи (казваме, че са сравними и пишем $\int_a^{+\infty} f(x)dx \sim \int_a^{+\infty} g(x)dx$).

Принципът за мажориране и критерият за сравняване са валидни и за останалите 3 типа несобствени интеграли: $\int_{-\infty}^b f(x)dx$, $\int_a^b f(x)dx$, където a е особена точка и $\int_a^b f(x)dx$, където b е особена точка.

Основни интеграли, които се използват за сравняване:

$$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^\lambda}dx \text{ и } \int_{-\infty}^{b}\frac{1}{x^\lambda}dx \text{ са } \begin{cases} \text{сходящи, ако } \lambda>1 \\ \text{разходящи, ако } \lambda\leqq 1 \end{cases}$$
$(a>0)$ $\quad(b<0)$

$$\int_a^b\frac{1}{(x-a)^\lambda}dx \text{ и } \int_a^b\frac{1}{(b-x)^\lambda}dx \text{ са } \begin{cases} \text{сходящи, ако } \lambda<1 \\ \text{разходящи, ако } \lambda\geqq 1 \end{cases}$$

Зад. 1 Изследвайте за сходимост несобствения интеграл: а) $I=\int_0^5\frac{1}{x^2+\sqrt[3]{x}}dx$;

Решение: Особената точка е 0.

⑤ При $x \in (0,5]$ имаме, че $0 < \frac{1}{x^2+\sqrt[3]{x}} < \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ и
$\int_0^5 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx = \int_0^5 \frac{1}{(x-0)^{\frac{1}{3}}}dx$ е сходящ, защото $\frac{1}{3} < 1$.
От принципа за мажориране следва, че и I също е сходящ. Отг. на а): I е сходящ.

б) $I = \int_0^1 \frac{\cos^2\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\sqrt[3]{x^2}}dx$;

Решение: Особената точка е 0.
При $x \in (0,1]$ имаме, че $0 \leq \frac{\cos^2\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\sqrt[3]{x^2}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ и
$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}dx = \int_0^1 \frac{1}{(x-0)^{\frac{2}{3}}}dx$ е сходящ, защото $\frac{2}{3} < 1$.
От принципа за мажориране следва, че и I също е сходящ. Отг. на б): I е сходящ.

в) $I = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x^2}dx$;

Решение: Особената точка е 0. Имаме, че $\frac{\sin x}{x^2} > 0$ за $x \in (0,\pi)$, $\frac{1}{x} > 0$ за $x \in (0,\pi)$ и
$\lim\limits_{x\to 0+} \frac{\frac{\sin x}{x^2}}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x} = 1 > 0$. От критерия за сравняване следва, че $I \sim \int_0^{\pi} \frac{1}{x}dx = \int_0^{\pi} \frac{1}{(x-0)^1}dx$ и сл. I е разходящ. Отг. на в): I е разходящ.

г) $I = \int_0^1 \frac{1}{1-x^3}dx$;

Решение: Особената точка е 1. Имаме, че $\frac{1}{1-x^3} > 0$ за $x \in [0,1)$, $\frac{1}{1-x} > 0$ за $x \in [0,1)$ и
$\lim\limits_{x\to 1-} \frac{\frac{1}{1-x^3}}{\frac{1}{1-x}} = \lim\limits_{x\to 1-} \frac{1}{1+x+x^2} = \frac{1}{3} > 0$. По критерия за сравняване $I \sim \int_0^1 \frac{1}{1-x}dx$ и сл. I е разходящ. Отг. на г): I е разходящ.

д) $I = \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\operatorname{tg}^2 x}dx$;

Решение: Особената точка е 0. Имаме, че $\frac{\sqrt{x}}{\operatorname{tg}^2 x} > 0$ за $x \in (0,1]$, $\frac{1}{x^{3/2}} > 0$ за $x \in (0,1]$ и $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{\frac{\sqrt{x}}{\operatorname{tg}^2 x}}{\frac{1}{x^{3/2}}} = \lim\limits_{x\to 0+} \left(\frac{x}{\operatorname{tg} x}\right)^2 = 1^2 = 1 > 0$.
По критерия за сравняване $I \sim \int_0^1 \frac{1}{x^{3/2}}dx = \int_0^1 \frac{1}{(x-0)^{3/2}}dx$ и сл. I е разходящ. Отг. на д): I е разходящ.

⑥ Интегрален критерий на Коши и Маклорен:
Ако $f(x)$ е непрекъсната, неотрицателна и намаляваща в $[1,+\infty)$, то несобственият интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ и числовият ред $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ са едновременно сходящи или разходящи (казваме, че са сравними и пишем $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx \sim \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$).

Зад. 2 Изследвайте за сходимост числовия ред $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$.
Решение: Понеже $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$ е непрекъсната, неотрицателна (даже положителна) и намаляваща в $[2,+\infty)$, то по интегралния критерий на Коши и Маклорен имаме, че

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n} \sim \int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}\,dx = \int_2^{+\infty}\frac{1}{\ln x}\,d\ln x = \ln|\ln x|\Big|_2^{+\infty} = +\infty$$

и сл. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ е разходящ.

Зад. 3 Док. че $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ е $\begin{cases} \text{сходящ, ако } \alpha>1 \\ \text{разходящ, ако } \alpha\leqq 1 \end{cases}$. $(\alpha\in\mathbb{R})$

Решение: На упражненията по ДИС-1 доказахме този основен факт чрез критерия на Коши за редове с неотрицателни намаляващи членове.
Сега ще го докажем по друг начин – чрез интегралния критерий на Коши и Маклорен.

Ако $\alpha\leqq 0$ имаме, че $\frac{1}{n^{\alpha}} \not\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ и сл. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ е разходящ.

Нека сега $\alpha>0$.
Тогава $f(x)=\frac{1}{x^{\alpha}}$ е непрекъсната, неотрицателна (даже положителна) и намаляваща в $[1,+\infty)$ и по интегралния критерий на Коши и Маклорен

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}} \sim \int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{\alpha}}\,dx,$$

така че $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ е сходящ, ако $\alpha>1$ и разходящ, ако $0<\alpha\leqq 1$.

Окончателно: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ е $\begin{cases} \text{сходящ, ако } \alpha>1 \\ \text{разходящ, ако } \alpha\leqq 1 \end{cases}$,

което и трябваше да докажем.