Лекция 22.4.2021

1 Общо уравнение на афинно подпространство — продължение

Припомняне от миналия път

Нека $\mathcal{A}$ е n-мерно афинно пространство, моделирано върху линейното пространство U, и $K = Oe_1 \dots e_n$ е афинна координатна система в $\mathcal{A}$.

Определение 1 Нека B е k-мерно афинно подпространство на $\mathcal{A}$. *Общо уравнение на B спрямо K* е уравнение на B спрямо K от вида $Ax = b$ (или $Ax - b = 0$), където A е матрица $(n-k) \times n$, $b \in \mathbb{R}^{n-k}$ (и $r(A) = n - k$).
С други думи, общо уравнение на B спрямо K е линейна система с $n - k$ уравнения, която задава B спрямо K.

Забележка 1 Условието $r(A) = n - k$ следва от останалите условия – виж следващата теорема.

Теорема 1 *0. Подмножеството B на $\mathcal{A}$ е k-мерно афинно подпространство на $\mathcal{A}$ $\Leftrightarrow$ B се задава спрямо K с някоя съвместима линейна система от вида $Ax = b$, където рангът на матрицата A е $r(A) = n - k$.*

1. *Всяко k-мерно афинно подпространство на $\mathcal{A}$ има общо уравнение спрямо K, тоест задава се спрямо K с някоя линейна система $Ax = b$ с $n - k$ уравнения (и $r(A) = n - k$).*

2. *Обратно: Ако $Ax = b$ е линейна система с n неизвестни и броят на уравненията ѝ е равен на $r(A)$, то тя е съвместима и е общо уравнение спрямо K на някое k-мерно афинно подпространство на $\mathcal{A}$, където $k = n - r(A)$.*

Частни случаи:

1. Хиперравнина: $k = n - 1$.
   Следователно линейната система за общото уравнение се състои от $n - k = 1$ уравнение.

   Теорема 1′

   1. *Всяка хиперравнина в $\mathcal{A}$ има общо уравнение спрямо K, тоест уравнение от вида $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b$ (и $(a_1, \dots, a_n) \neq 0$).*

   2. *Обратно: Всяко уравнение от вида $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b$, където $(a_1, \dots, a_n) \neq 0$, е общо уравнение спрямо K на някоя хиперравнина в $\mathcal{A}$.*

2. Права в 2-мерно афинно пространство (в частност, в геометричната равнина): $n = 2$, $k = 1 = n - 1$.
   Нека координатите са (x, y) вместо (x_1, x_2).

   Теорема 1$''$

   1. *Всяка права в 2-мерно афинно пространство $\mathcal{A}$ има общо уравнение спрямо K, тоест уравнение от вида $Ax + By + C = 0$ (и $(A, B) \neq 0$).*
   2. *Обратно: Всяко уравнение от вида $Ax + By + C = 0$, където $(A, B) \neq 0$, е общо уравнение спрямо K на някоя права в $\mathcal{A}$.*

3. Равнина в 3-мерно афинно пространство (в частност, в геометричното пространство): $n = 3$, $k = 2 = n - 1$.
   Нека координатите са (x, y, z) вместо (x_1, x_2, x_3).

   Теорема 1$'''$

   1. *Всяка равнина в 3-мерно афинно пространство $\mathcal{A}$ има общо уравнение спрямо K, тоест уравнение от вида $Ax + By + Cz + D = 0$ (и $(A, B, C) \neq 0$).*
   2. *Обратно: Всяко уравнение от вида $Ax + By + Cz + D = 0$, където $(A, B, C) \neq 0$, е общо уравнение спрямо K на някоя равнина в $\mathcal{A}$.*

4. Права в 3-мерно афинно пространство (в частност, в геометричното пространство): $n = 3$, $k = 1$.
   Нека координатите са (x, y, z) вместо (x_1, x_2, x_3).

   Теорема 1$'^{\mathrm{v}}$

   1. *Всяка права в 3-мерно афинно пространство $\mathcal{A}$ има общо уравнение спрямо K, тоест уравнение от вида*

   $$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

   (и матрицата $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$ има ранг 2).

   2. *Обратно: Всяка система от вида*

   $$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases},$$

   където рангът на матрицата на системата $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$ е 2, е общо уравнение спрямо K на някоя права в $\mathcal{A}$.

Теорема 2 *Нека точката $P_0 \in \mathcal{A}$ и линейно независимите вектори $v_1, \dots, v_k \in U$ имат спрямо K координати $P_0(x_0)$, $v_j(\xi_j)$, $j = 1, \dots, k$. Тогава k-мерното афинно подпространство B на $\mathcal{A}$, което минава през P_0 и е успоредно на $v_1, \dots, v_k$, има спрямо K уравнение*

$$B : \left\{ \det M_{i_1 \dots i_{k+1}} = 0, \quad 1 \le i_1 < \dots < i_{k+1} \le n \right. , \tag{1}$$

където $M_{i_1 \dots i_{k+1}}$ е квадратната подматрица от ред $k+1$ на $M = (\underbrace{x - x_0 \ \ \xi_1 \ \dots \ \xi_k}_{\text{стълбове}})$, състояща се от редовете с номера $i_1, \dots, i_{k+1}$.
Ако в (1) се вземат онези $n-k$ уравнения, които се получават от подматриците, съдържащи фиксирана квадратна подматрица от ред k на $M' = (\underbrace{\ \xi_1 \ \dots \ \xi_k\ }_{\text{стълбове}})$ с ненулева детерминанта, то получената система е общо уравнение на B спрямо K.

Теорема 3 *Нека $k \le n$ и нележащите в $(k-1)$-мерно афинно подпространство на $\mathcal{A}$ точки $P_0, \dots, P_k \in \mathcal{A}$ имат спрямо K координати $P_j(x^j)$, $j = 0, \dots, k$. Тогава k-мерното афинно подпространство B на $\mathcal{A}$, което минава през $P_0, \dots, P_k$, има спрямо K уравнение*

$$B : \left\{ \det M_{i_1 \dots i_{k+1}} = 0, \quad 1 \le i_1 < \dots < i_{k+1} \le n \right. , \tag{2}$$

където $M_{i_1 \dots i_{k+1}}$ е квадратната подматрица от ред $k+1$ на
$M = (\underbrace{x - x^0 \ \ x^1 - x^0 \ \dots \ x^k - x^0}_{\text{стълбове}})$, състояща се от редовете с номера $i_1, \dots, i_{k+1}$.
Ако в (2) се вземат онези $n-k$ уравнения, които се получават от подматриците, съдържащи фиксирана квадратна подматрица от ред k на $M' = (\underbrace{x^1 - x^0 \ \dots \ x^k - x^0}_{\text{стълбове}})$ с ненулева детерминанта, то получената система е общо уравнение на B спрямо K.
В (2) вместо $M_{i_1 \dots i_{k+1}}$ може да се вземе квадратната матрица от ред $k+2$ $\left(\dfrac{N_{i_1 \dots i_{k+1}}}{1 \dots\dots 1}\right)$, където $N_{i_1 \dots i_{k+1}}$ е подматрицата на $N = (\underbrace{x \ x^1 \ \dots \ x^k \ x^0}_{\text{стълбове}})$, състояща се от редовете с номера $i_1, \dots, i_{k+1}$.
($N_{i_1 \dots i_{k+1}}$ е $(k+1) \times (k+2)$ и ѝ се добавя един ред единици за да стане $(k+2) \times (k+2)$.)

Забележка 2 Формулите от Теорема 2 и Теорема 3 не са подходящи за конкретни пресмятания, защото в тях участват много детерминанти, чието пресмятане е трудоемко. Най-простият случай е когато имаме хиперравнина, защото тогава $k = n-1$ и следователно имаме единствена квадратна подматрица от ред $k+1 = n$ на M, а именно самата M. Така че уравнението става само едно: $\det M = 0$. Всъщност и пресмятането на една детерминанта е твърде трудоемко. Но при $n = 2$ и $n = 3$ е лесно, така че при права в равнината и равнина в пространството формулите от Теорема 2 и Теорема 3 са удобни за конкретни пресмятания. За щастие това са случаите, които най-често се срещат на упражненията. В общия случай най-икономичният метод за получаване на общи уравнения в ситуациите от Теорема 2 и Теорема 3 е да се напишат параметрични уравнения, след което да се изключат параметрите, както е обяснено в Забележка 3 по-долу.

Частни случаи:

1. Хиперравнина: $k = n-1$.
   M е $n \times (k+1) = n \times n$. Следователно квадратната подматрица на M от ред $k+1 = n$ е единствена – самата M.

   Теорема 2′ *Нека точката $P_0 \in \mathcal{A}$ и линейно независимите вектори $v_1, \dots, v_{n-1} \in U$ имат спрямо K координати $P_0(x_0)$, $v_j(\xi_j)$, $j = 1, \dots, n-1$. Тогава определената от тях хиперравнина B в $\mathcal{A}$ има спрямо K общо уравнение*

   $$B : \det(\underbrace{x - x_0 \ \ \xi_1 \ \dots \ \xi_{n-1}}_{\textit{стълбове}}) = 0.$$

   Теорема 3′ *Нека нележащите в $(n-2)$-мерно афинно подпространство на $\mathcal{A}$ точки $P_0, \dots, P_{n-1} \in \mathcal{A}$ имат спрямо K координати $P_j(x^j)$, $j = 0, \dots, n-1$. Тогава определената от тях хиперравнина B в $\mathcal{A}$ има спрямо K общо уравнение*

   $$B : \det(\underbrace{x - x^0 \ \ x^1 - x^0 \ \dots \ x^{n-1} - x^0}_{\textit{стълбове}}) = 0,$$

   или еквивалентно

   $$B : \det \left(\begin{array}{ccccc} x & x^1 & \dots & x^{n-1} & x^0 \\ \hline 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{array} \right) = 0.$$

2. Права в 2-мерно афинно пространство (в частност, в геометричната равнина): $n = 2$, $k = 1 = n - 1$.
   Нека координатите са (x, y) вместо (x_1, x_2).

   Теорема 2$''$ *Нека точката $P_0 \in \mathcal{A}$ и ненулевият вектор $v \in U$ имат спрямо K координати $P_0(x_0, y_0)$, $v(\xi, \eta)$. Тогава определената от тях права l в $\mathcal{A}$ има спрямо K общо уравнение*

$$l : \det \begin{pmatrix} x - x_0 & \xi \\ y - y_0 & \eta \end{pmatrix} = 0.$$

   Теорема 3$''$ *Нека различните точки $P_0, P_1 \in \mathcal{A}$ имат спрямо K координати $P_j(x_j, y_j)$, $j = 0, 1$. Тогава определената от тях права l в $\mathcal{A}$ има спрямо K общо уравнение*

$$l : \det \begin{pmatrix} x - x_0 & x_1 - x_0 \\ y - y_0 & y_1 - y_0 \end{pmatrix} = 0,$$

   или еквивалентно

$$l : \det \begin{pmatrix} x & x_1 & x_0 \\ y & y_1 & y_0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

3. Равнина в 3-мерно афинно пространство (в частност, в геометричното пространство): $n = 3$, $k = 2 = n - 1$.
   Нека координатите са (x, y, z) вместо (x_1, x_2, x_3).

   Теорема 2$'''$ *Нека точката $P_0 \in \mathcal{A}$ и неколинеарните (тоест линейно независими) вектори $v_1, v_2 \in U$ имат спрямо K координати $P_0(x_0, y_0, z_0)$, $v_j(\xi_j, \eta_j, \zeta_j)$, $j = 1, 2$. Тогава определената от тях равнина π в $\mathcal{A}$ има спрямо K общо уравнение*

$$\pi : \det \begin{pmatrix} x - x_0 & \xi_1 & \xi_2 \\ y - y_0 & \eta_1 & \eta_2 \\ z - z_0 & \zeta_1 & \zeta_2 \end{pmatrix} = 0.$$

   Теорема 3$'''$ *Нека нележащите на една права точки $P_0, P_1, P_2 \in \mathcal{A}$ имат спрямо K координати $P_j(x_j, y_j, z_j)$, $j = 0, 1, 2$. Тогава определената от тях равнина π в $\mathcal{A}$ има спрямо K общо уравнение*

$$\pi : \det \begin{pmatrix} x - x_0 & x_1 - x_0 & x_2 - x_0 \\ y - y_0 & y_1 - y_0 & y_2 - y_0 \\ z - z_0 & z_1 - z_0 & z_2 - z_0 \end{pmatrix} = 0,$$

   или еквивалентно

$$\pi : \det \begin{pmatrix} x & x_1 & x_2 & x_0 \\ y & y_1 & y_2 & y_0 \\ z & z_1 & z_2 & z_0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

4. Права в 3-мерно афинно пространство (в частност, в геометричното пространство): $n = 3$, $k = 1$.
   Нека координатите са (x, y, z) вместо (x_1, x_2, x_3).

   Теорема 2'v *Нека точката $P_0 \in \mathcal{A}$ и ненулевият вектор $v \in U$ имат спрямо K координати $P_0(x_0, y_0, z_0)$, $v(\xi, \eta, \zeta)$. Тогава определената от тях права l в $\mathcal{A}$ има спрямо K уравнение*

$$l : \begin{cases} \det \begin{pmatrix} y - y_0 & \eta \\ z - z_0 & \zeta \end{pmatrix} = 0 \\ \det \begin{pmatrix} z - z_0 & \zeta \\ x - x_0 & \xi \end{pmatrix} = 0 \\ \det \begin{pmatrix} x - x_0 & \xi \\ y - y_0 & \eta \end{pmatrix} = 0 \end{cases} .$$

   Ако се вземат двете уравнения, съдържащи фиксирана ненулева координата на v, то получената система е общо уравнение на l спрямо K.

Забележка 3 Преминаване от параметрични уравнения към общо уравнение може да се прави по следния начин. Ако B е зададено с параметрични уравнения

$$B : x = x_0 + \lambda_1 \xi_1 + \cdots + \lambda_k \xi_k, \quad \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R},$$

то тъй като векторите $\xi_1, \dots, \xi_k$ са линейно независими и следователно матрицата $M' = (\xi_1 \dots \xi_k)$ има ранг k, някои k уравнения могат да се решат относно $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. Замествайки в останалите $n - k$ уравнения, получаваме линейна система за x, която е общо уравнение на B. (Всъщност Теорема 2 дава явна формула за общото уравнение.) Обратно: Ако B е зададено с общо уравнение $Ax = b$, то тъй като A има ранг $n - k$, системата може да се реши относно $n - k$ от координатите. Останалите k координати се полагат параметри и се получават параметрични уравнения на B.

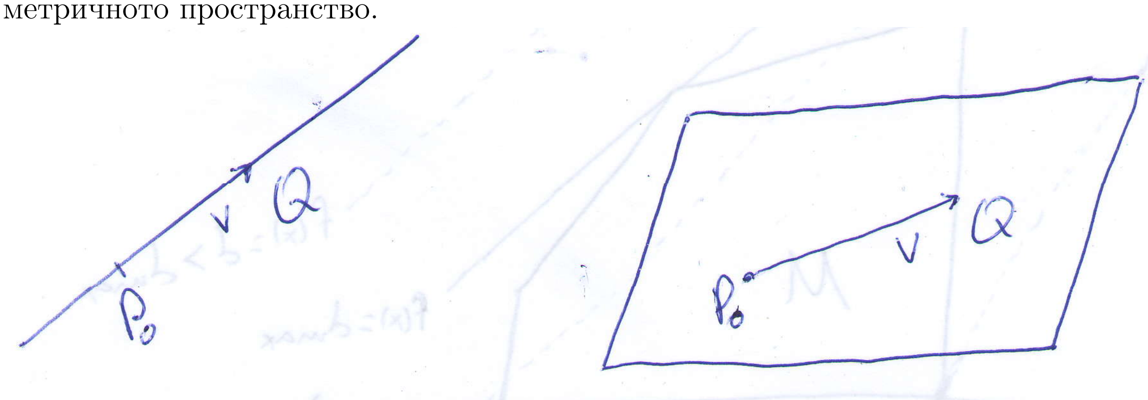
Горните разсъждения с някои малки допълнения и модификации всъщност дават алтернативно доказателство на Теорема 1. Това доказателство е в основната си част на практика повторение на доказателството на твърдението от въпроса за афинни подпространства, че всяко линейно подпространство на $\mathbb{R}^n$ е пространството от решенията на някоя хомогенна система (тук става дума за афинни подпространства, така че ще се появяват и свободни членове). А доказателството на Теорема 1, което дадохме след формулировката ѝ, беше построено така, че да не повтаря доказателствата на резултати за линейни и афинни подпространства на $\mathbb{R}^n$, а направо да използва тия резултати.

Дотук беше припомнянето от миналия път.

Общо уравнение на афинно подпространство — продължение

Теорема 4 *Нека афинното подпространство B на $\mathcal{A}$ има спрямо K уравнение $Ax = b$ (в частност, това може да е общо уравнение на B) и нека векторът $v \in U$ има спрямо K координатен вектор $\xi \in \mathbb{R}^n$. Тогава $v \parallel B \Leftrightarrow A\xi = 0$ (тоест когато ξ е решение на хомогенната система $Ax = 0$, съответна на $Ax = b$).*

Доказателство: Ако ви е нужна някаква нагледна представа, можете да си мислите за права в геометричната равнина или геометричното пространство или равнина в геометричното пространство.



Нека направляващото пространство на B е V и $P_0 \in B$. Тогава $B = \left\{ P \in \mathcal{A} : \overrightarrow{P_0P} \in V \right\}$. Нека координатният вектор спрямо K на P_0 е x_0. От $P_0 \in B$ следва $Ax_0 = b$. Нека $Q \in \mathcal{A}$ е точката, за която $\overrightarrow{P_0Q} = v$. Ако координатният вектор спрямо K на Q е y, то от $\overrightarrow{P_0Q} = v$ следва $y - x_0 = \xi$, тоест $y = x_0 + \xi$. Тогава получаваме $v \parallel B \Leftrightarrow v \in V \Leftrightarrow \overrightarrow{P_0Q} \in V \Leftrightarrow Q \in B \Leftrightarrow Ay = b \Leftrightarrow A(x_0 + \xi) = Ax_0 \Leftrightarrow A\xi = 0$. □

Частни случаи:

1. Хиперравнина: $k = n - 1$.

   Теорема 4′ *Нека хиперравнината B в $\mathcal{A}$ има спрямо K общо уравнение $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$, а векторът $v \in U$ има спрямо K координатен вектор $\xi \in \mathbb{R}^n$. Тогава $v \parallel B \Leftrightarrow a_1\xi_1 + \cdots + a_n\xi_n = 0$.*

2. Права в 2-мерно афинно пространство (в частност, в геометричната равнина): $n = 2$, $k = 1 = n - 1$.
   Нека координатите са (x, y) вместо (x_1, x_2).

   Теорема 4″ *Нека правата l в 2-мерното афинно пространство $\mathcal{A}$ има спрямо K общо уравнение $Ax + By + C = 0$, а векторът v има спрямо K координати (ξ, η). Тогава $v \parallel l \Leftrightarrow A\xi + B\eta = 0$.*
   В частност, векторът $u(-B, A)$ е ненулев вектор, колинеарен с l.

3. Равнина в 3-мерно афинно пространство (в частност, в геометричното пространство): $n = 3$, $k = 2 = n - 1$.
   Нека координатите са (x, y, z) вместо (x_1, x_2, x_3).

   Теорема 4‴ *Нека равнината π в 3-мерното афинно пространство $\mathcal{A}$ има спрямо K общо уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$, а векторът v има спрямо K координати (ξ, η, ζ). Тогава $v \parallel \pi \Leftrightarrow A\xi + B\eta + C\zeta = 0$.*

4. Права в 3-мерно афинно пространство (в частност, в геометричното пространство): $n = 3$, $k = 1$.
   Нека координатите са (x, y, z) вместо (x_1, x_2, x_3).

Теорема 4'ᵛ *Нека правата l в 3-мерното афинно пространство $\mathcal{A}$ има спрямо K общо уравнение*

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases},$$

а векторът v има спрямо K координати (ξ, η, ζ). Тогава

$$v \parallel l \Leftrightarrow \begin{cases} A_1\xi + B_1\eta + C_1\zeta = 0 \\ A_2\xi + B_2\eta + C_2\zeta = 0 \end{cases}.$$

Забележка 4 В горните неща никъде не се използват някакви специфични свойства на полето на реалните числа, така че всичко важи без промяна и ако вместо $\mathbb{R}$ се вземе произволно поле F, тоест ако U е линейно пространство над произволно поле.

2 Взаимно положение на две афинни подпространства

Нека $\mathcal{A}$ е n-мерно афинно пространство, моделирано върху линейното пространство U, и $K = Oe_1 \dots e_n$ е афинна координатна система в $\mathcal{A}$.

Определение 2 Нека B_1 и B_2 са афинни подпространства на $\mathcal{A}$, моделирани съответно върху линейните подпространства V_1 и V_2 на U, и нека $\dim B_1 \leq \dim B_2$.

1. Ако от $v \parallel B_1$ следва $v \parallel B_2$, тоест ако $V_1 \subset V_2$, то казваме, че *B_1 и B_2 са успоредни* и пишем $B_1 \parallel B_2$.
   В частност, ако $B_1 \subset B_2$, то $B_1 \parallel B_2$.

2. Ако $B_1 \bigcap B_2 \neq \emptyset$ и B_1 и B_2 не са успоредни (еквивалентно, $B_1 \bigcap B_2 \neq \emptyset$ и B_1 не се съдържа в B_2), то казваме, че *B_1 и B_2 са пресекателни.*

3. Ако $B_1 \bigcap B_2 = \emptyset$ и B_1 и B_2 не са успоредни, то казваме, че *B_1 и B_2 са кръстосани.*

Следващият пример е очевиден и той всъщност е мотивацията за горното определение.

Пример 1 В геометричната равнина

1. успоредните прави са успоредни в смисъл на горната дефиниция.

2. пресекателните прави са пресекателни в смисъл на горната дефиниция.

В геометричното пространство

1. успоредните прави, успоредните равнини, успоредните права и равнина са успоредни в смисъл на горната дефиниция.

2. пресекателните прави, пресекателните равнини, пресекателните права и равнина са пресекателни в смисъл на горната дефиниция.

3. кръстосаните прави са кръстосани в смисъл на горната дефиниция.

Теорема 5 *Нека афинните подпространства B_1 и B_2 на $\mathcal{A}$ имат спрямо K уравнения $A_1x = b_1$ и $A_2x = b_2$ (в частност, това може да са общи уравнения). Нека $\dim B_1 = k_1$, $\dim B_2 = k_2$, като $k_1 \leq k_2$. Означаваме $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \hline A_2 \end{pmatrix}$, $\widetilde{A} = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & b_1 \\ \hline A_2 & b_2 \end{array}\right)$. Тогава:*

1. *$B_1 \subset B_2$ ($B_1 = B_2$ при $k_1 = k_2$) $\Leftrightarrow r\left(\widetilde{A}\right) = n - k_1$ (и следователно и $r(A) = n - k_1$) $\Leftrightarrow$ редовете на $(A_2|b_2)$ са линейни комбинации на редовете на $(A_1|b_1)$.*

2. *$B_1 \parallel B_2$ и $B_1 \bigcap B_2 = \emptyset \Leftrightarrow r\left(\widetilde{A}\right) \neq r(A) = n - k_1$ (и следователно $r\left(\widetilde{A}\right) = n - k_1 + 1$) $\Leftrightarrow$ редовете на A_2 са линейни комбинации на редовете на A_1, но някой ред на $(A_2|b_2)$ не е линейна комбинация на редовете на $(A_1|b_1)$.*

3. *B_1 и B_2 са пресекателни $\Leftrightarrow r\left(\widetilde{A}\right) = r(A) \neq n - k_1$ (и следователно $r\left(\widetilde{A}\right) = r(A) > n - k_1$) $\Leftrightarrow r\left(\widetilde{A}\right) = r(A)$ и някой ред на A_2 не е линейна комбинация на редовете на A_1.*

4. *B_1 и B_2 са кръстосани $\Leftrightarrow r(A) \neq n - k_1$ и $r\left(\widetilde{A}\right) \neq r(A)$ (и следователно $r(A) > n - k_1$, $r\left(\widetilde{A}\right) = r(A) + 1$) $\Leftrightarrow r\left(\widetilde{A}\right) \neq r(A)$ и някой ред на A_2 не е линейна комбинация на редовете на A_1.*
   Тоя случай не може да възникне, ако B_2 е хиперравнина.

Доказателство: Доказателството по същество представлява приложение на теоремата на Руше за линейни системи и на формулата за размерността на пространството от решенията на линейна система чрез ранга на матрицата ѝ.

За краткост в последващото вместо да казваме, че координатите спрямо K на точка или вектор удовлетворяват дадена система, ще казваме, че точката или векторът удовлетворяват системата.

Нека V_1 и V_2 са направляващите пространства съответно на B_1 и B_2.

По отношение на общите точки на B_1 и B_2 имаме две възможности: $B_1 \bigcap B_2 = \emptyset$ или $B_1 \bigcap B_2 \neq \emptyset$. А по отношение на включването на V_1 и V_2 имаме също две възможности: $V_1 \subset V_2$ или $V_1 \not\subset V_2$. Така че по отношение на тия два критерия получаваме общо $2.2 = 4$ възможности. Те съответстват на четирите възможности за взаимното положение на B_1 и B_2 по следния очевиден начин:

1. $B_1 \subset B_2 \Leftrightarrow B_1 \bigcap B_2 \neq \emptyset$ и $V_1 \subset V_2$.

2. $B_1 \parallel B_2$ и $B_1 \bigcap B_2 = \emptyset \Leftrightarrow B_1 \bigcap B_2 = \emptyset$ и $V_1 \subset V_2$.

3. B_1 и B_2 са пресекателни $\Leftrightarrow B_1 \bigcap B_2 \neq \emptyset$ и $V_1 \not\subset V_2$.

4. B_1 и B_2 са кръстосани $\Leftrightarrow B_1 \bigcap B_2 = \emptyset$ и $V_1 \not\subset V_2$.

Ще изразим възможностите за общите точки на B_1 и B_2 и за включването на V_1 и V_2 чрез ранговете на $\widetilde{A}$ и A.

Тъй като $B_1 : A_1x = b_1$ и $B_2 : A_2x = b_2$, то $B_1 \bigcap B_2$ се задава спрямо K със системата $\left| \begin{array}{l} A_1x = b_1 \\ A_2x = b_2 \end{array} \right.$, тоест $Ax = b$, където $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$. Матрицата на тая система е A, а разширената ѝ матрица е $\widetilde{A}$, така че по теоремата на Руше $B_1 \bigcap B_2 \neq \emptyset \Leftrightarrow r\left(\widetilde{A}\right) = r(A)$, а $B_1 \bigcap B_2 = \emptyset \Leftrightarrow r\left(\widetilde{A}\right) \neq r(A)$.

Тъй като V_i е множеството от решенията на хомогенната система $A_ix = 0$, $i = 1, 2$, то $V_1 \bigcap V_2$ е множеството от решенията на хомогенната система $\left| \begin{array}{l} A_1x = 0 \\ A_2x = 0 \end{array} \right.$, тоест $Ax = 0$. Имаме $V_1 \subset V_2 \Leftrightarrow V_1 \bigcap V_2 = V_1 \Leftrightarrow \dim V_1 \bigcap V_2 = \dim V_1$ (последното е защото V_1 е крайномерно и $V_1 \bigcap V_2$ е негово линейно подпространство). Тъй като $\dim V_1 \bigcap V_2 = n - r(A)$ и $\dim V_1 = k_1$, то получаваме $V_1 \subset V_2 \Leftrightarrow r(A) = n - k_1$, а $V_1 \not\subset V_2 \Leftrightarrow r(A) \neq n - k_1$.

Следователно

1. $B_1 \subset B_2 \Leftrightarrow r\left(\widetilde{A}\right) = r(A)$ и $r(A) = n - k_1$.

2. $B_1 \parallel B_2$ и $B_1 \bigcap B_2 = \emptyset \Leftrightarrow r\left(\widetilde{A}\right) \neq r(A)$ и $r(A) = n - k_1$.

3. B_1 и B_2 са пресекателни $\Leftrightarrow r\left(\widetilde{A}\right) = r(A)$ и $r(A) \neq n - k_1$.

4. B_1 и B_2 са кръстосани $\Leftrightarrow r\left(\widetilde{A}\right) \neq r(A)$ и $r(A) \neq n - k_1$.

С това е завършена основната част на доказателството. Останалата част са прости съображения, които показват, че десните страни на горните еквивалентности могат да се запишат във вида, в който са дадени във формулировката на теоремата.

Тъй като B_1 и B_2 са крайномерни, то е ясно, че при $k_1 = k_2$ условията $B_1 \subset B_2$ и $B_1 = B_2$ са едно и също нещо.

Имаме $r(A) \leq r\left(\widetilde{A}\right)$, защото A е подматрица на $\widetilde{A}$. От друга страна, $\widetilde{A}$ има само един стълб повече от A, така че $r\left(\widetilde{A}\right)$ е най-много с 1 по-голям от $r(A)$. Следователно $r(A) \leq r\left(\widetilde{A}\right) \leq r(A) + 1$. Освен това $\dim V_1 = k_1$ и V_1 е пространството от решенията на $A_1x = 0$, така че $r(A_1) = n - k_1$. А тъй като A_1 е подматрица на A, то $r(A_1) \leq r(A)$. Следователно $n - k_1 \leq r(A) \leq r\left(\widetilde{A}\right) \leq r(A) + 1$.

От тия неравенства следва:

1. $r\left(\widetilde{A}\right) = r(A)$ и $r(A) = n - k_1 \Leftrightarrow r\left(\widetilde{A}\right) = n - k_1$
(тоест от $r\left(\widetilde{A}\right) = n - k_1$ следва $r(A) = n - k_1$).

2. $r\left(\widetilde{A}\right) \neq r(A)$ и $r(A) = n - k_1 \Leftrightarrow r(A) = n - k_1$ и $r\left(\widetilde{A}\right) = n - k_1 + 1$
(тоест от $r\left(\widetilde{A}\right) \neq r(A)$ и $r(A) = n - k_1$ следва $r\left(\widetilde{A}\right) = n - k_1 + 1$).

3. $r\left(\widetilde{A}\right) = r(A)$ и $r(A) \neq n - k_1 \Leftrightarrow r\left(\widetilde{A}\right) = r(A) > n - k_1$
(тоест от $r\left(\widetilde{A}\right) = r(A)$ и $r(A) \neq n - k_1$ следва $r\left(\widetilde{A}\right) = r(A) > n - k_1$).

4. $r\left(\widetilde{A}\right) \neq r(A)$ и $r(A) \neq n - k_1 \Leftrightarrow r(A) > n - k_1$ и $r\left(\widetilde{A}\right) = r(A) + 1$
(тоест от $r\left(\widetilde{A}\right) \neq r(A)$ и $r(A) \neq n - k_1$ следва $r(A) > n - k_1$ и $r\left(\widetilde{A}\right) = r(A) + 1$).

С това са доказани първите еквивалентности във формулировката, тоест тия с ранговете. Остават вторите еквивалентности.

Имаме, че $r\left(\widetilde{A}\right) = n - k_1 \Leftrightarrow \widetilde{A}$ има $n - k_1$ линейно независими реда, а останалите ѝ редове са техни линейни комбинации. Също така, тъй като $B_1 : A_1 x = b_1$ и $\dim B_1 = k_1$, то $r(A_1|b_1) = r(A_1) = n - k_1$. Следователно $(A_1|b_1)$ има $n - k_1$ линейно независими реда, а останалите ѝ редове са техни линейни комбинации. Тъй като $\widetilde{A}$ се състои от редовете на $(A_1|b_1)$ и на $(A_2|b_2)$, от горното следва, че
$r\left(\widetilde{A}\right) = n - k_1 \Leftrightarrow$ редовете на $(A_2|b_2)$ са линейни комбинации на редовете на $(A_1|b_1)$.
С това е доказана втората еквивалентност в 1..

По съвършено същия начин от $r(A_1) = n - k_1$ следва, че $r(A) = n - k_1 \Leftrightarrow$ редовете на A_2 са линейни комбинации на редовете на A_1. Следователно $r\left(\widetilde{A}\right) \neq r(A)$ и $r(A) = n - k_1$ $\Leftrightarrow$ редовете на A_2 са линейни комбинации на редовете на A_1, но някой ред на $(A_2|b_2)$ не е линейна комбинация на редовете на $(A_1|b_1)$.
С това е доказана втората еквивалентност в 2..

Също получаваме, че $r\left(\widetilde{A}\right) = r(A)$ и $r(A) \neq n - k_1 \Leftrightarrow r\left(\widetilde{A}\right) = r(A)$ и някой ред на A_2 не е линейна комбинация на редовете на A_1, с което е доказана втората еквивалентност в 3., и че $r\left(\widetilde{A}\right) \neq r(A)$ и $r(A) \neq n - k_1 \Leftrightarrow r\left(\widetilde{A}\right) \neq r(A)$ и някой ред на A_2 не е линейна комбинация на редовете на A_1, с което е доказана втората еквивалентност в 4..

Последното, което остава да се провери, е че когато B_2 (тоест по-голямото от двете афинни подпространства) е хиперравнина четвъртият случай не може да възникне.

Ако B_2 е хиперравнина, то $k_2 = n - 1$ и следователно $r(A_2|b_2) = r(A_2) = n - k_2 = 1$. Значи $(A_2|b_2)$ има един линейно независим ред. От това следва, че $r\left(\widetilde{A}\right) \leq n - k_1 + 1$, защото към линейно независимите редове на $(A_1|b_1)$, които са $n - k_1$ на брой, може да се добави най-много един от редовете на $(A_2|b_2)$, така че получените редове да останат линейно независими. Това показва, че не е възможен случаят 4., защото в него бихме имали $r\left(\widetilde{A}\right) = r(A) + 1 > n - k_1 + 1$. $\square$

Теорема 6 *Нека k-мерното афинно подпространство B на $\mathcal{A}$ има спрямо K общо уравнение $Ax = b$. Тогава всевъзможните общи уравнения на B спрямо K са уравненията от вида $TAx = Tb$, където T е обратима квадратна матрица от ред $n - k$.*

Доказателство: Тъй като системата $Ax = b$ е общо уравнение на B спрямо K, то тя се състои от $n - k$ уравнения, тоест A и $(A|b)$ имат $n - k$ реда, и $r(A|b) = r(A) = n - k$.

Нека и $A'x = b'$ е общо уравнение на B спрямо K. Тогава и A' и $(A'|b')$ имат $n - k$ реда, и $r(A'|b') = r(A') = n - k$. Прилагаме правата посока на 1. в предишната теорема за $B_1 = B$, $(A_1|b_1) = (A|b)$, $B_2 = B$, $(A_2|b_2) = (A'|b')$ и получаваме, че редовете на $(A'|b')$ са линейни комбинации на редовете на $(A|b)$, тоест $(A'|b') = T(A|b)$, където T е квадратната матрица от ред $n - k$, чиито редове са коефициентите във въпросните линейни комбинации. От лемата по-долу следва, че T е обратима матрица. Тъй като равенството $(A'|b') = T(A|b)$ е еквивалентно на $A' = TA$, $b' = Tb$, получаваме, че всяко общо уравнение на B спрямо K има вида $TAx = Tb$, където T е обратима квадратна матрица от ред $n - k$.

Обратно, нека T е обратима квадратна матрица от ред $n-k$. Нека $A' = TA$, $b' = Tb$. Тогава $(A'|b') = T(A|b)$ и от лемата по-долу следва, че $r(A'|b') = r(A') = n-k$. Следователно $A'x = b'$ е общо уравнение спрямо K на някое k-мерно афинно подпространство B' на $\mathcal{A}$. Равенството $(A'|b') = T(A|b)$ означава, че редовете на $(A'|b')$ са линейни комбинации на редовете на $(A|b)$. Прилагаме обратната посока на 1. в предишната теорема за $B_1 = B$, $(A_1|b_1) = (A|b)$, $B_2 = B'$, $(A_2|b_2) = (A'|b')$ и получаваме, че $B = B'$. Следователно $A'x = b'$, тоест $TAx = Tb$, е общо уравнение на B спрямо K.

Значи всевъзможните общи уравнения на B спрямо K са точно уравненията от вида $TAx = Tb$, където T е обратима квадратна матрица от ред $n - k$. □

Следващата лема, която използвахме в доказателството на горната теорема, може би е известна под някаква форма от курса по алгебра.

Лема 1 *Нека M е матрица $m \times n$ с $r(M) = m$, T е матрица $m \times m$ и $M' = TM$. Тогава $r(M') = m \Leftrightarrow T$ е обратима.*

Доказателство: Нека S и S' са квадратните подматрици от ред m съответно на M и M', състоящи се от стълбовете с номера $i_1, \ldots, i_m$. Тъй като от правилата за умножение на матрици от $M' = TM$ следва, че стълбовете на M' се получават от стълбовете със същите номера на M чрез умножение отляво с T, то $S' = TS$. Следователно $\det S' = \det T . \det S$.

Нека $r(M') = m$. Тогава за някоя квадратна подматрица S' от ред m на M' имаме $\det S' \neq 0$ и от равенството $\det S' = \det T . \det S$ следва, че $\det T \neq 0$, тоест T е обратима. С това е доказана правата посока.

Нека T е обратима. Тогава $\det T \neq 0$. Тъй като $r(M) = m$, то за някоя квадратна подматрица S от ред m на M имаме $\det S \neq 0$. Следователно за съответната ѝ квадратна подматрица S' от ред m на M' получаваме $\det S' = \det T . \det S \neq 0$. Значи $r(M') = m$. С това е доказана и обратната посока. □

Частни случаи:

1. Хиперравнини: $k_1 = k_2 = n - 1$.
   Следователно $n - k_1 = 1$.

   Теорема 5′ *Нека хиперравнините B_1 и B_2 в $\mathcal{A}$ имат спрямо K общи уравнения $B_i : a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$, $i = 1, 2$.*
   Означаваме $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \end{pmatrix}$, $\widetilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \dots & a_{2n} & b_2 \end{array}\right)$. Тогава:

   1. $B_1 = B_2 \Leftrightarrow r(\widetilde{A}) = 1$ *(и следователно и $r(A) = 1$)* $\Leftrightarrow \exists\lambda \in \mathbb{R}$: $a_{2j} = \lambda a_{1j}$, $j = 1, \dots, n$, $b_2 = \lambda b_1$ *(автоматично $\lambda \neq 0$).*
   2. $B_1 \parallel B_2$ *и* $B_1 \neq B_2 \Leftrightarrow r(A) = 1$, $r(\widetilde{A}) = 2 \Leftrightarrow \exists\lambda \in \mathbb{R}$: $a_{2j} = \lambda a_{1j}$, $j = 1, \dots, n$, *но* $b_2 \neq \lambda b_1$ *(автоматично $\lambda \neq 0$).*
   3. B_1 *и* B_2 *са пресекателни* $\Leftrightarrow r(A) = 2$ *(и следователно и $r(\widetilde{A}) = 2$)* $\Leftrightarrow \nexists\lambda \in \mathbb{R}$: $a_{2j} = \lambda a_{1j}$, $j = 1, \dots, n$.

   Теорема 6′ *Нека хиперравнината B в $\mathcal{A}$ има спрямо K общо уравнение $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$. Тогава всевъзможните общи уравнения на B спрямо K са уравненията от вида $\lambda(a_1x_1 + \cdots + a_nx_n) = \lambda b$, където $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$.*

2. Прави в 2-мерно афинно пространство (в частност, в геометричната равнина): $n = 2$, $k_1 = k_2 = 1 = n - 1$.
   Нека координатите са (x, y) вместо (x_1, x_2).

   Теорема 5″ *Нека правите l_1 и l_2 в 2-мерното афинно пространство $\mathcal{A}$ имат спрямо K общи уравнения $l_i : A_ix + B_iy + C_i = 0$, $i = 1, 2$. Означаваме*
   $A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix}$, $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$. *Тогава:*

   1. $l_1 = l_2 \Leftrightarrow r(\widetilde{A}) = 1$ *(и следователно и $r(A) = 1$)* $\Leftrightarrow \exists\lambda \in \mathbb{R}$: $A_2 = \lambda A_1$, $B_2 = \lambda B_1$, $C_2 = \lambda C_1$ *(автоматично $\lambda \neq 0$).*
   2. $l_1 \parallel l_2$ *и* $l_1 \neq l_2 \Leftrightarrow r(A) = 1$, $r(\widetilde{A}) = 2 \Leftrightarrow \exists\lambda \in \mathbb{R}$: $A_2 = \lambda A_1$, $B_2 = \lambda B_1$, *но* $C_2 \neq \lambda C_1$ *(автоматично $\lambda \neq 0$).*
   3. l_1 *и* l_2 *са пресекателни* $\Leftrightarrow r(A) = 2$ *(и следователно и $r(\widetilde{A}) = 2$)* $\Leftrightarrow \nexists\lambda \in \mathbb{R}$: $A_2 = \lambda A_1$, $B_2 = \lambda B_1 \Leftrightarrow \det A \neq 0$.

   Теорема 6″ *Нека правата l в 2-мерното афинно пространство $\mathcal{A}$ има спрямо K общо уравнение $Ax + By + C = 0$. Тогава всевъзможните общи уравнения на l спрямо K са уравненията от вида $\lambda(Ax + By + C) = 0$, където $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$.*

3. Равнини в 3-мерно афинно пространство (в частност, в геометричното пространство): $n = 3$, $k_1 = k_2 = 2 = n - 1$.
Нека координатите са (x, y, z) вместо (x_1, x_2, x_3).

Теорема 5‴ *Нека равнините π_1 и π_2 в 3-мерното афинно пространство $\mathcal{A}$ имат спрямо K общи уравнения $\pi_i : A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0$, $i = 1, 2$. Означаваме $A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$, $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix}$. Тогава:*

1. *$\pi_1 = \pi_2 \Leftrightarrow r(\widetilde{A}) = 1$ (и следователно и $r(A) = 1$) $\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}$: $A_2 = \lambda A_1$, $B_2 = \lambda B_1$, $C_2 = \lambda C_1$, $D_2 = \lambda D_1$ (автоматично $\lambda \neq 0$).*
2. *$\pi_1 \parallel \pi_2$ и $\pi_1 \neq \pi_2 \Leftrightarrow r(A) = 1$, $r(\widetilde{A}) = 2 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}$: $A_2 = \lambda A_1$, $B_2 = \lambda B_1$, $C_2 = \lambda C_1$, но $D_2 \neq \lambda D_1$ (автоматично $\lambda \neq 0$).*
3. *π_1 и π_2 са пресекателни $\Leftrightarrow r(A) = 2$ (и следователно и $r(\widetilde{A}) = 2$) $\Leftrightarrow \nexists \lambda \in \mathbb{R}$: $A_2 = \lambda A_1$, $B_2 = \lambda B_1$, $C_2 = \lambda C_1$.*

Теорема 6‴ *Нека равнината π в 3-мерното афинно пространство $\mathcal{A}$ има спрямо K общо уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$. Тогава всевъзможните общи уравнения на π спрямо K са уравненията от вида $\lambda(Ax + By + Cz + D) = 0$, където $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$.*

4. Права и равнина в 3-мерно афинно пространство (в частност, в геометричното пространство): $n = 3$, $k_1 = 1$, $k_2 = 2$.
Следователно $n - k_1 = 2$. Нека координатите са (x, y, z) вместо (x_1, x_2, x_3).

Теорема 5$^{\prime\mathrm{v}}$ *Нека правата l и равнината π в 3-мерното афинно пространство $\mathcal{A}$ имат спрямо K общи уравнения*

$$l : \begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases}, \quad \pi : A_3 x + B_3 y + C_3 z + D_3 = 0.$$

Означаваме $A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix}$, $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix}$. Тогава:

1. *$l \subset \pi \Leftrightarrow r(\widetilde{A}) = 2$ (и следователно и $r(A) = 2$) $\Leftrightarrow \exists (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$: $A_3 = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2$, $B_3 = \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2$, $C_3 = \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2$, $D_3 = \lambda_1 D_1 + \lambda_2 D_2$ (автоматично $(\lambda_1, \lambda_2) \neq 0$).*
2. *$l \parallel \pi$ и $l \bigcap \pi = \emptyset \Leftrightarrow r(A) = 2$, $r(\widetilde{A}) = 3 \Leftrightarrow \exists (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$: $A_3 = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2$, $B_3 = \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2$, $C_3 = \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2$, но $D_3 \neq \lambda_1 D_1 + \lambda_2 D_2$ (автоматично $(\lambda_1, \lambda_2) \neq 0$).*
3. *l и π са пресекателни $\Leftrightarrow r(A) = 3$ (и следователно и $r(\widetilde{A}) = 3$) $\Leftrightarrow$ $\nexists (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$: $A_3 = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2$, $B_3 = \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2$, $C_3 = \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 \Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$.*

Първата част на горната теорема може да се преформулира по следния начин:

Теорема 7 *Нека правата l в 3-мерното афинно пространство $\mathcal{A}$ има спрямо K общо уравнение*

$$l : \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} .$$

Тогава равнината π съдържа $l \Leftrightarrow \pi$ има спрямо K общо уравнение от вида $\lambda_1(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \lambda_2(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$, където $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, $(\lambda_1, \lambda_2) \neq 0$.

5. Прави в 3-мерно афинно пространство (в частност, в геометричното пространство): $n = 3$, $k_1 = k_2 = 1$.
   Следователно $n - k_1 = 2$. Нека координатите са (x, y, z) вместо (x_1, x_2, x_3).

   Теорема 5$^{\text{v}}$ *Нека правите l_1 и l_2 в 3-мерното афинно пространство $\mathcal{A}$ имат спрямо K общи уравнения*

   $$l_1 : \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} , \quad l_2 : \begin{cases} A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \\ A_4x + B_4y + C_4z + D_4 = 0 \end{cases} .$$

   Означаваме $A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 \end{pmatrix}$, $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{pmatrix}$. *Тогава:*

   1. $l_1 = l_2 \Leftrightarrow r(\widetilde{A}) = 2$ *(и следователно и* $r(A) = 2$*)* $\Leftrightarrow \exists (\lambda_1, \lambda_2), (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2 :$
      $A_3 = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2$, $B_3 = \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2$, $C_3 = \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2$, $D_3 = \lambda_1 D_1 + \lambda_2 D_2$,
      $A_4 = \mu_1 A_1 + \mu_2 A_2$, $B_4 = \mu_1 B_1 + \mu_2 B_2$, $C_4 = \mu_1 C_1 + \mu_2 C_2$, $D_4 = \mu_1 D_1 + \mu_2 D_2$
      (автоматично $\det \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{pmatrix} \neq 0$, *в частност* $(\lambda_1, \lambda_2) \neq 0$, $(\mu_1, \mu_2) \neq 0$*).*

   2. $l_1 \parallel l_2$ *и* $l_1 \neq l_2 \Leftrightarrow r(A) = 2$, $r(\widetilde{A}) = 3 \Leftrightarrow \exists (\lambda_1, \lambda_2), (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2 :$
      $A_3 = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2$, $B_3 = \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2$, $C_3 = \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2$,
      $A_4 = \mu_1 A_1 + \mu_2 A_2$, $B_4 = \mu_1 B_1 + \mu_2 B_2$, $C_4 = \mu_1 C_1 + \mu_2 C_2$,
      но поне едно от $D_3 = \lambda_1 D_1 + \lambda_2 D_2$ *и* $D_4 = \mu_1 D_1 + \mu_2 D_2$ *не е изпълнено*
      (автоматично $\det \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{pmatrix} \neq 0$, *в частност* $(\lambda_1, \lambda_2) \neq 0$, $(\mu_1, \mu_2) \neq 0$*).*

   3. l_1 *и* l_2 *са пресекателни* $\Leftrightarrow r(\widetilde{A}) = r(A) = 3$.

   4. l_1 *и* l_2 *са кръстосани* $\Leftrightarrow r(\widetilde{A}) = 4$ *(и следователно* $r(A) = 3$*)* $\Leftrightarrow \det \widetilde{A} \neq 0$.

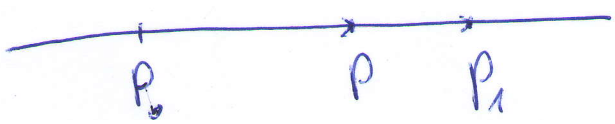
Забележка 5 В горните неща никъде не се използват някакви специфични свойства на полето на реалните числа, така че всичко важи без промяна и ако вместо $\mathbb{R}$ се вземе произволно поле F, тоест ако U е линейно пространство над произволно поле.

3 Отсечки и полупространства

Нека $\mathcal{A}$ е афинно пространство, моделирано върху линейното пространство U.

Нека P_0 и P_1 са различни точки в геометричната равнина или геометричното пространство. Тогава

$$\begin{array}{llllll} P \in & \text{правата} & P_0P_1 & \Leftrightarrow & \exists \lambda \in \mathbb{R}: & \overrightarrow{P_0P} = \lambda \overrightarrow{P_0P_1}, \\ P \in & \text{отворената отсечка} & P_0P_1 & \Leftrightarrow & \exists \lambda \in (0,1): & \overrightarrow{P_0P} = \lambda \overrightarrow{P_0P_1}, \\ P \in & \text{затворената отсечка} & P_0P_1 & \Leftrightarrow & \exists \lambda \in [0,1]: & \overrightarrow{P_0P} = \lambda \overrightarrow{P_0P_1}. \end{array}$$



Това мотивира следната дефиниция.

Определение 3 Нека P_0 и P_1 са различни точки от $\mathcal{A}$.

$$\begin{array}{ll} \textit{Отворена отсечка с краища } P_0 \textit{ и } P_1 \text{ е} & \{P \in \mathcal{A}: \ \exists \lambda \in (0,1): \ \overrightarrow{P_0P} = \lambda \overrightarrow{P_0P_1}\}. \\ \textit{Затворена отсечка с краища } P_0 \textit{ и } P_1 \text{ е} & \{P \in \mathcal{A}: \ \exists \lambda \in [0,1]: \ \overrightarrow{P_0P} = \lambda \overrightarrow{P_0P_1}\}. \end{array}$$

Считаме, че отворената отсечка P_0P_0 е $\emptyset$, а затворената отсечка P_0P_0 е $\{P_0\}$.

Твърдение 1 *Нека P_0 и P_1 са различни точки от $\mathcal{A}$. Тогава отворената и затворената отсечка P_0P_1 са подмножества на правата през P_0 и P_1.*

Доказателство: Твърдението е очевидно следствие от факта, че правата през P_0 и P_1 е множеството $\{P \in \mathcal{A}: \ \exists \lambda \in \mathbb{R}: \ \overrightarrow{P_0P} = \lambda \overrightarrow{P_0P_1}\}$. □

Твърдение 2 *Нека P_0 и P_1 са различни точки от $\mathcal{A}$, а $O \in \mathcal{A}$ е произволна точка. Тогава:*

$$\begin{array}{lll} \textit{отв. отс. } P_0P_1 & = \{P \in \mathcal{A} : \exists \lambda \in (0,1) : & \overrightarrow{OP} = (1-\lambda)\overrightarrow{OP_0} + \lambda \overrightarrow{OP_1}\} \\ & = \{P \in \mathcal{A} : \exists \lambda_0 > 0, \lambda_1 > 0, \lambda_0 + \lambda_1 = 1 : & \overrightarrow{OP} = \lambda_0 \overrightarrow{OP_0} + \lambda_1 \overrightarrow{OP_1}\}, \\ \textit{затв. отс. } P_0P_1 & = \{P \in \mathcal{A} : \exists \lambda \in [0,1] : & \overrightarrow{OP} = (1-\lambda)\overrightarrow{OP_0} + \lambda \overrightarrow{OP_1}\} \\ & = \{P \in \mathcal{A} : \exists \lambda_0 \geq 0, \lambda_1 \geq 0, \lambda_0 + \lambda_1 = 1 : & \overrightarrow{OP} = \lambda_0 \overrightarrow{OP_0} + \lambda_1 \overrightarrow{OP_1}\}. \end{array}$$

Доказателство: Имаме

$$\overrightarrow{P_0P} = \lambda \overrightarrow{P_0P_1} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0} = \lambda \left(\overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_0} \right) \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OP} = (1-\lambda)\overrightarrow{OP_0} + \lambda \overrightarrow{OP_1}.$$

От това следват първите равенства, а вторите равенства следват като в първите се положи $\lambda_0 = 1 - \lambda$, $\lambda_1 = \lambda$. □

Следствие 1 *Нека $P_0, P_1 \in \mathcal{A}$. Тогава отворените отсечки P_0P_1 и P_1P_0 съвпадат, а също и затворените отсечки P_0P_1 и P_1P_0 съвпадат.*

Доказателство: От вторите равенства в Твърдение 2 е ясно, че точките P_0 и P_1 играят симетрична роля. $\square$

Твърдение 3 *Нека $K = Oe_1 \dots e_n$ е афинна координатна система в $\mathcal{A}$ и спрямо нея различните точки P_0 и P_1 имат координати $P_0(x^0)$, $P_1(x^1)$. Тогава спрямо K параметрични уравнения на*

$$\begin{array}{lll} \textit{отворената отсечка} & P_0P_1 \ \ \textit{са} & x = (1-\lambda)x^0 + \lambda x^1, \quad \lambda \in (0,1), \\ \textit{затворената отсечка} & P_0P_1 \ \ \textit{са} & x = (1-\lambda)x^0 + \lambda x^1, \quad \lambda \in [0,1], \end{array}$$

или еквивалентно,

$$\begin{array}{lll} \textit{отворената отсечка} & P_0P_1 : & x = \lambda_0 x^0 + \lambda_1 x^1, \quad \lambda_0 > 0, \lambda_1 > 0, \ \lambda_0 + \lambda_1 = 1, \\ \textit{затворената отсечка} & P_0P_1 : & x = \lambda_0 x^0 + \lambda_1 x^1, \quad \lambda_0 \geq 0, \lambda_1 \geq 0, \ \lambda_0 + \lambda_1 = 1. \end{array}$$

Доказателство: Ако точката P има спрямо K координатен вектор x, то и векторът $\overrightarrow{OP}$ има спрямо K координатен вектор x. Аналогично $\overrightarrow{OP_0}$ и $\overrightarrow{OP_1}$ имат спрямо K координатни вектори x^0 и x^1. Тогава $\overrightarrow{OP} = (1-\lambda)\overrightarrow{OP_0} + \lambda\overrightarrow{OP_1} \Leftrightarrow x = (1-\lambda)x^0 + \lambda x^1$ и от първите равенства в Твърдение 2 получаваме

$$\begin{aligned} P \in \begin{array}{c} \text{отворената отсечка} \\ \text{затворената отсечка} \end{array} P_0P_1 \ &\Leftrightarrow \ \exists \lambda \in \begin{array}{c} (0,1) \\ [0,1] \end{array} : \ \overrightarrow{OP} = (1-\lambda)\overrightarrow{OP_0} + \lambda\overrightarrow{OP_1} \\ &\Leftrightarrow \ \exists \lambda \in \begin{array}{c} (0,1) \\ [0,1] \end{array} : \ x = (1-\lambda)x^0 + \lambda x^1. \end{aligned}$$

От това следват първите параметрични уравнения, а вторите следват по същия начин от вторите равенства в Твърдение 2 или пък като в първите параметрични уравнения се положи $\lambda_0 = 1 - \lambda$, $\lambda_1 = \lambda$.
(Всъщност в Твърдение 2 са написани векторни параметрични уравнения на двата вида отсечки, така че написвайки ги покоординатно получаваме скаларни параметрични уравнения. Така че това е съвсем същото както извода на скаларните параметрични уравнения на правата P_0P_1. Единствената разлика е, че при правата $\lambda \in \mathbb{R}$, а тук $\lambda \in (0,1)$ или $\lambda \in [0,1]$.) $\square$