Базис, размерност, координати

доц. Евгения Великова

Октомври 2020

Базис на линейно пространство

V е линейно пространство над поле F

Базис - определение

B е базис на пространството V, ако е изпълнено

- $\ell(b_1, \dots, b_n) = V$;
- $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ е линейно независимо

Example

геометрични вектори в равнината $\mathbb{R}^2$ и координатна система $O\overrightarrow{e}_1\overrightarrow{e}_2$
$\overrightarrow{e}_1$, $\overrightarrow{e}_2$ базис на $\mathbb{R}^2$

примери

Example

$\mathbb{C}$ комплексни числа, $\mathbb{C} = \{z = a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

- $1, i$ - базис на $\mathbb{C}$ като линейно пространство над $\mathbb{R}$
- 1 - базис на $\mathbb{C}$ като линейно пространство над $\mathbb{C}$.

Example

F^n-про-во от n- мерни вектори над поле F. **Стандартен базис** на F^n:

$$
\begin{aligned}
e_1 &= (1, 0, 0, \dots, 0, 0)\\
e_2 &= (0, 1, 0, \dots, 0, 0)\\
&\dots\dots\dots\\
e_n &= (0, 0, 0, \dots, 0, 1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A &= (a_1, a_2, \dots, a_n) =\\
&= (a_1, 0, \dots, 0) + (0, a_2, 0, \dots, 0) + \dots + (0, \dots, 0, a_n) =\\
&= a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n
\end{aligned}
$$

Безкрайномерно пространство

Безкрайномерно пространство - определение

Линейно пространство V над F е безкрайномерно, когато за произволно $n \in \mathbb{N}$ и за произволни вектори $b_1, \ldots, b_n$ е изпълнено $\ell(b_1, \ldots, b_n) \neq V$.

Забележка: Ако V е безкрайномерно линейно пространство, тогава за всяко $n \in \mathbb{N}$ съществува линейно независими n вектора от V.

Example

$F[x]$- полиномите с коефициенти от поле F е безкрайномерно пр-во
$n \in \mathbb{N}$- произволно, избираме n полинома $f_1(x), \ldots, f_n(x)$,
нека k - максималната от степените на $f_1(x), \ldots, f_n(x) \Rightarrow$
степента на $\alpha_1 f_1(x) + \ldots + \alpha_n f_n(x)$ е $\leq k \Rightarrow \ell(f_1(x), \ldots, f_n(x)) \neq F[x]$.

Example

Полето $\mathbb{R}$, като линейно пространство над $\mathbb{Q}$ е безкрайномерно.
$1, \pi, \pi^2, \pi^3, \ldots, \pi^k, \ldots$ - произволен набор от n числа са ЛНЗ.

Крайнопородено пространство

Теорема

V е линейно пространство ($V \neq \{\mathcal{O}\}$) над поле F и $\ell(a_1, \dots, a_t) = V$.

Тогава V има базис $b_1, \dots, b_n$, за който $\{b_1, \dots, b_n\} \subseteq \{a_1, \dots, a_t\}$.

Доказателство:

$\ell(a_1, \dots, a_t) = V \neq \{\mathcal{O}\} \Rightarrow \exists a_i \neq \mathcal{O}$ полагаме $b_1 = a_i$

<u>Стъпка 1:</u> b_1 е ЛНЗ

- ако $\{a_1, \dots, a_t\} \subset \ell(b_1) \Rightarrow \{b_1\}$ е базис и край.
- ако $\exists a_l \notin \ell(b_1)$, тогава $b_2 = a_l \Rightarrow b_1, b_2$ ЛНЗ $\rightarrow$ Стъпка 2.

<u>Стъпка k</u>- ако $\{b_1, \dots, b_k\}$ ЛНЗ и $\{b_1, \dots, b_k\} \subset \{a_1, \dots, a_t\}$, тогава:

- ако $\{a_1, \dots, a_t\} \subset \ell(b_1, \dots, b_k)$, тогава $\{b_1, \dots, b_k\}$ е базис и край.
- ако съществува $a_p \notin \ell(b_1, \dots, b_k)$, тогава $b_{k+1} = a_p \Rightarrow$ $b_1, \dots, b_k, b_{k+1}$ ЛНЗ и $\rightarrow$ Стъпка $k+1$.

$$\left.\begin{array}{ccc} b_1, \dots, b_n & \text{са} & \text{ЛНЗ} \\ \{b_1, \dots, b_n\} & \subseteq & \{a_1, \dots, a_t\} \\ \{a_1, \dots, a_t\} & \subseteq & \ell(b_1, \dots, b_n) \end{array}\right\} \Rightarrow b_1, \dots, b_n \text{ е базис}$$

Размерност

Теорема

Ако $e_1, \ldots, e_n$ и $g_1, \ldots, g_k$ са два базиса на V, тогава $n = k$.

Доказателство:
$e_1, \ldots, e_n$ - базис $\Rightarrow g_i \in V = \ell(e_1, \ldots, e_n),\ i = 1, \ldots, k$.
Ако допуснем,че $k > n$ тогава $g_1, \ldots, g_k$- ЛЗ, противоречие, $\Rightarrow k \leq n$.
От $g_1, \ldots, g_k$ - базис, и $e_1, \ldots, e_n \in \ell\{g_1, \ldots, g_k\}$ ЛНЗ $\Rightarrow n \leq k$.
$n = k \Rightarrow$ всички базиси в едно пространство имат равен брой вектори.

Размерност (определение)

Размерност на линейно пространство V над поле F е броя на векторите n в базис на пространството. $\dim_F V = n = \dim V$.
$\dim\{\mathcal{O}\} = 0$.

$2 = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$; $1 = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}$.
$n = \dim F^n$- стандартен базис $e_1, \ldots, e_n$

размерност на матричното пространство

$M_{n\times k}(F)$и разглеждаме матриците E_{ij} при които всички елементи са нулеви с изключение на 1 на ij място. В случай на 2×2 матрици:

$$E_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\ E_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\ E_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\ E_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

$$A=\begin{pmatrix}3&7\\-2&5\end{pmatrix}=3E_{11}+7E_{12}-2E_{21}+5E_{22},$$

всяка матрица от $M_{n\times k}(F)$ е линейна комбинация на
$B=\{E_{ij}\mid 1\leq i\leq n;\ \ 1\leq j\leq k\}$ - *матрични единици.*

$$\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq k}}\lambda_{ij}E_{ij}=\begin{pmatrix}\lambda_{11}&\lambda_{12}&\dots&\lambda_{1k}\\ \lambda_{21}&\lambda_{22}&\dots&\lambda_{2k}\\ \dots&\dots&\dots&\dots\\ \lambda_{n1}&\lambda_{n2}&\dots&\lambda_{nk}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&\dots&0\\0&0&\dots&0\\ \dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&\dots&0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \lambda_{ij}=0$ и $B=\{E_{ij}\mid 1\leq i\leq n;\ \ 1\leq j\leq k\}$ са ЛНЗ и са базис
$\dim(M_{n\times k}(F))=n.k$

Свойства

- Всеки n линейно независими вектора в n мерно линейно пространство образуват базис.
- Всеки $n+1$ вектора в n мерно линейно пространство са ЛЗ.

Доказателство:
Нека V е линейно пространство $n = \dim V$ и $e_1, \dots, e_n$ е базис. вектори $a_1, \dots, a_{n+1}$ от V и имаме $\{a_1, \dots, a_{n+1}\} \subset V = \ell(e_1, \dots, e_n)$
$\Rightarrow a_1, \dots, a_{n+1}$ ЛЗ.

Нека $b_1, \dots, b_n$ са ЛНЗ от n мерно пространство V и $c \in V$
$\Rightarrow b_1, \dots, b_n, c$ ЛЗ откъдето $c \in \ell(b_1, \dots, b_n)$
следователно $V = \ell(b_1, \dots, b_n)$ и $b_1, \dots, b_n$ е базис на V.

Свойства - 2

Твърдение

Нека V е крайномерно линейно пространство и $\dim V = n$

- Всяко линейно независимо множество от V може да се допълни до базис ;
- За всяко подпространство L, за което $L \neq V$ е изпълнено $\dim L < \dim V$.

Доказателство: Нека $a_1, \dots, a_s$ ЛНЗ и нека $e_1, \dots, e_n$ базис на V $\ell(a_1, \dots, a_s, e_1, \dots, e_n) = V$, определяме базис като $b_i = a_i, \;\; i = 1, \dots, s$, и следва че можем да определим още $n - s$ вектора измежду $e_1, \dots, e_n$, за които $b_1, \dots, b_n$ е базис.
Нека L е подпространство и $L \neq V$ и $b_1, \dots, b_k$ базис на L $\ell(b_1, \dots, b_k) \subsetneqq V$ и допълваме $b_1, \dots, b_k$ до базис на $V \Rightarrow$ $\dim L < \dim V$.
Пример: В $\mathbb{R}^4$- $a_1 = (1, -3, 0, 4)$ и $a_2 = (5, 1, 0, 7)$ ЛНЗ.

Свойства

Теорема

Нека V е крайномерно ненулево пространство, тогава :

$$\dim v = n \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \text{съществуват } n \text{ линейно независими вектора във } V \\ \text{всеки } n+1 \text{ вектора от } V \text{ са линейно зависими} \end{cases}$$

Доказателство: От доказаните свойства имаме, че е изпълнена едната посока на твърдението.

Нека $b_1, \ldots, b_n$ са линейно независими вектори от пространството и всеки $n+1$ вектора от V са линейно зависими. Тогава за произволен вектор $c \in V$ е изпълнено, че $b_1, \ldots, b_n, c$ са линейно зависими и следователно $c \in \ell(b_1, \ldots, b_n)$. Тъва се отнася за всеки вектор от пространството и следователно $V \subseteq \ell(b_1, \ldots, b_n)$, откъдето се получава че $b_1, \ldots, b_n$ е базис на V и затова размерността е $\dim V = n$.

Теорема (НДУ за базис)

Теорема:

$\{b_1, \dots, b_n\}$ е базис за пространството $V \Leftrightarrow$ всеки $c \in V$ по единствен начин се изразява като линейна комбинация на $b_1, \dots, b_n$.

Доказателство:

$\boxed{\Rightarrow}$ Нека $\{b_1, \dots, b_n\}$ базис и $c \in V = \ell(b_1, \dots, b_n)$

$$\left.\begin{array}{ccccc} c & = & \alpha_1 b_1 + & \dots + & \alpha_n b_n \\ c & = & \beta_1 b_1 + & \dots + & \beta_n b_n \end{array}\right\} \Rightarrow \mathcal{O} = (\alpha_1 - \beta_1) b_1 + \dots + (\alpha_n - \beta_n) b_n.$$

$b_1, \dots, b_n$ ЛНЗ и c се представя по единствен начин чрез тях

$\boxed{\Leftarrow}$ Нека всеки вектор от V се представя по единствен начин като линейна комбинация на $b_1, \dots, b_n$.

Нека $\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n = \mathcal{O}$, имаме и $\mathcal{O} = 0 b_1 + \dots + 0 b_n$.

$\Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$, откъдето $b_1, \dots, b_n$ са ЛНЗ

$V = \ell(b_1, \dots, b_n) \Rightarrow b_1, \dots, b_n$ базис на V.

координати на вектор спрямо базис

Определение - координати спрямо базис

Нека $B = [b_1, \ldots, b_n]$ е базис (разглеждан с наредбата на векторите) на линейното пространство V. Ако за елементът на линейното пространство $a \in V$ е изпълнено, че $a = \alpha_1 b_1 + \ldots + \alpha_n b_n$, тогава n-мерния вектор, съставен от коефициентите на тази линейна комбинация се нарича координати на a, спрямо наредения базис B:

$$\sigma_B(a) = \sigma(a) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in F^n$$

Example

$V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ - базиси $B = [E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}]$ и $C = [E_{21}, E_{22}, E_{12}, E_{11}]$.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \implies \begin{array}{l} \sigma_B(A) = (3, 7, -2, 5), \\ \sigma_C(A) = (-2, 5, 7, 3). \end{array}$$

Базис $D = [E_{12}, E_{21}, A, E_{22}]$ и спрямо него $\sigma_D(A) = (0, 0, 1, 0)$.

Свойства на координатите

$B = [b_1, \dots, b_n]$ базис на V над полео F, координатите дават биекция:
$\sigma_B : V \to F^n, \quad a = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n \xrightarrow{\sigma_B} (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

Твърдение:

$B = [b_1, \dots, b_n]$ е базис на V и $a, c \in V$
$\sigma(a) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и $\sigma(c) = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$. Тогава :

- $\sigma(a + c) = \sigma(a) + \sigma(c)$,
- $\sigma(\lambda a) = \lambda \sigma(a)$, където $\lambda \in F$.

$$
\begin{array}{rcl}
a + c & = & \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n + \gamma_1 b_1 + \dots + \gamma_n b_n = \\
 & = & (\alpha_1 + \gamma_1) b_1 + \dots + (\alpha_n + \gamma_n) b_n \\
 & \Downarrow & \\
\sigma(a + c) & = & (\alpha_1 + \gamma_1 \ , \ \dots \ , \ \alpha_n + \gamma_n) \\
 & = & \sigma(a) + \sigma(c)
\end{array}
$$

$$
\left.
\begin{array}{rcl}
\lambda a & = & \lambda(\alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n) = \\
 & = & \lambda \alpha_1 b_1 + \dots + \lambda \alpha_n b_n
\end{array}
\right\} \Rightarrow \sigma(\lambda a) = (\lambda \alpha_1 \ , \ \dots \ , \ \lambda \alpha_n) = \lambda \sigma(a).
$$

Максимално линейно независима подсистема

определение МЛНП

V е линейно пространство над F и $A_1, \dots, A_k$ вектори от V.
$\{A_{i_1}, \dots, A_{i_r}\} \subset \{A_1, \dots, A_k\}$ е максимално линейно независима подсистема (МЛНП), когато

- $\{A_{i_1}, \dots, A_{i_r}\}$ са линейно независими,
- $A_j \in \ell(A_{i_1}, \dots, A_{i_r}), \quad \forall j = 1, \dots, k$.

Твърдение

Всеки ненулев набор от вектори на линейното пространство V има максимално линейно независима подсистема.

Ако $U = \ell(A_1, \dots, A_k)$ имаме, че U е крайнопородено ненулево линейно подпространство на $V \Rightarrow$ съществува базис $A_{i_1}, \dots, A_{i_r}$ на U
$A_{i_1}, \dots, A_{i_r}$ е МЛНП на $A_1, \dots, A_k$.

пример

Вектори $A_1 = (3, 1, -4)$, $A_2 = (-1, -2, 3)$, $A_3 = (-4, -1, 5)$, $A_4 = (7, -7, 0)$, $A_5 = (2, 4, -6)$ и $A_6 = (-7, 2, 5)$ от $\mathbb{Q}^3$

$$\begin{pmatrix} A_1: & 3 & 1 & -4 \\ A_2: & -1 & -2 & 3 \\ A_3: & -4 & -1 & 5 \\ A_4: & 7 & -7 & 0 \\ A_5: & 2 & 4 & -6 \\ A_6: & -7 & 2 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A_1: & 3 & 1 & -4 \\ A_2 + 2A_1: & 5 & 0 & -5 \\ A_3 + A_1: & -1 & 0 & 1 \\ A_4 + 7A_1: & 28 & 0 & -28 \\ A_5 - 4A_1: & -10 & 0 & 10 \\ A_6 - 2A_1: & -13 & 0 & 13 \end{pmatrix}$$

Установяваме, че:
A_1, A_2 ЛНЗ, A_1, A_2, A_3 ЛЗ и следователно $A_3 \in \ell(A_1, A_2)$,
A_1, A_2, A_4 ЛЗ, A_1, A_2, A_5 са ЛЗ и A_1, A_2, A_6 са ЛЗ.
A_1, A_2 е МЛНП на $\{A_1, \dots, A_6\}$.

Твърдение:

Ако $A_{i_1}, \ldots, A_{i_r}$ и $A_{j_1}, \ldots, A_{j_s}$ са максимално линейни подсистеми на векторите $A_1, \ldots, A_k$, тогава $r = s$.

Да допуснем, че едното от двете числа е по-голямо, например $r > s$.
$A_{i_1}, \ldots, A_{i_r} \in \ell(\{A_{j_1}, \ldots, A_{j_s}), \Rightarrow \{A_{i_1}, \ldots, A_{i_r}\}$ са ЛЗ - противоречие (те са МЛНП)
$\Rightarrow \quad r = s.$

Ранг на система вектори - определение

Рангът на система вектори $A_1, \ldots, A_k$ е равен на броя на векторите в една максимално линейно независима подсистема, и се записва $r(A_1, \ldots, A_k) = r$.

$$r(A_1, \ldots, A_k) = r \quad \Leftrightarrow \quad \exists \{A_{i_1}, \ldots, A_{i_r}\}\text{- МЛНП}$$

Свойства:

Нека $A_1, \dots, A_k$ е набор от вектори от линейно пространство V. Тогава:

- Линейната обвивка на набора от вектори и на неговата МЛНП съвпадат,
- $r(A_1, \dots, A_k) = r = \dim \ell(A_1, \dots, A_k)$,
- $r(A_1, \dots, A_k) = r \Leftrightarrow$ в набора от вектори има r линейно независими вектора и всеки $r+1$ вектора са линейно зависими.

Доказателство: Нека $\{A_{i_1}, \dots, A_{i_r}\}$ е МЛНП за $A_1, \dots, A_k$.
Ако $U = \ell(A_{i_1}, \dots, A_{i_r})$ и $W = \ell(A_1, \dots, A_k)$. $\Rightarrow U \subset W$.
$A_j \in \ell(A_{i_1}, \dots, A_{i_r})$, $\forall j = 1, \dots, k \Rightarrow W \subset U$ получаваме, че $W = U$.

$\ell(A_{i_1}, \dots, A_{i_r}) = W = \ell(A_1, \dots, A_k)$ и $\{A_{i_1}, \dots, A_{i_r}\}$ ЛНЗ $\Rightarrow$те са базис на $\ell(A_1, \dots, A_k) \Rightarrow r(A_1, \dots, A_k) = r = \dim \ell(A_1, \dots, A_k)$.