Задача. 1.8. Нека $n \geq 3$ е естествено число и

$$A = \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{n} & -\sin\frac{2\pi}{n} \\ \sin\frac{2\pi}{n} & \cos\frac{2\pi}{n} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(съответно "ротация на ъгъл $\frac{2\pi}{n}$ около началото на фиксирана координатна система в равнината " и "симетрия относно абцисната ос"). Нека D_n е подгрупата на $GO_2(\mathbb{R})$, породена от A и B. Да се докаже, че:

а) $A^n = E,\ B^2 = E$ и $B^{-1}AB = A^{-1}$;

б) $D_n = \left\{A^iB^j \mid i = 0,1,\dots,n-1;\ j = 0,1\right\}$ и $A^iB^jA^kB^l = A^{i+k(-1)^j}B^{j+l}$;

в) D_n е неабелева група от ред $2n$ (диедрална група).

Решение. а) С индукция се доказва, че

$$A^k = \begin{pmatrix} \cos\frac{2k\pi}{n} & -\sin\frac{2k\pi}{n} \\ \sin\frac{2k\pi}{n} & \cos\frac{2k\pi}{n} \end{pmatrix}, \text{ за } k \in \mathbb{N}, \text{ откъдето } A^n = E.$$

Очевидно $B^2 = E$, т. е. $B^{-1} = B$. Директно проверяваме, че

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{n} & -\sin\frac{2\pi}{n} \\ \sin\frac{2\pi}{n} & \cos\frac{2\pi}{n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{n} & \sin\frac{2\pi}{n} \\ -\sin\frac{2\pi}{n} & \cos\frac{2\pi}{n} \end{pmatrix} = A^{-1}.$$

Ще обобщим този резултат, като докажем, че $B^{-1}A^kB = A^{-k}$, $k \in [1, n-1]$.

Нека повдигнем на k-та степен и двете страни на равенството $B^{-1}AB = A^{-1}$. Получаваме

$$(B^{-1}AB)^k = \underbrace{B^{-1}AB.B^{-1}AB\dots B^{-1}AB.B^{-1}AB}_{k \text{ - пъти}} = B^{-1}A^kB = A^{-k}.$$

б) Нека означим $G = \left\{A^iB^j \mid i = 0,1,\dots,n-1;\ j = 0,1\right\}$. По условие $D_n = \langle A, B\rangle$, тогава очевидно $G \subseteq D_n$.

Нека сега направим следното уточнение: за $s, t \in \mathbb{N}$ имаме $A^sB^t \in G$. Наистина, нека $s = nq_1 + r_1$, $0 \leq r_1 \leq n-1$, откъдето $A^s = A^{nq_1+r_1} = A^{nq_1}A^{r_1} = A^{r_1}$. Аналогично, нека $t = 2q_2 + r_2$, $0 \leq r_2 \leq 1$, откъдето получаваме $B^t = B^{2q_2+r_2} = B^{r_2}$.

Сега, за обратното включване е достатъчно да докажем, че $A^iB^jA^kB^l = A^{i+k(-1)^j}B^{j+l}$, за $0 \leq i, k \leq n-1$; $0 \leq j, l \leq 1$. Ще използваме доказаното в подточка а) $B^{-1}A^kB = A^{-k}$, откъдето $A^kB = BA^{-k}$. Разглеждаме поотделно случаите $j = 0$ и $j = 1$. В първия получаваме $A^iB^0A^kB^l = A^{i+k}B^l$. Във втория случай, използвайки равенството $A^kB = BA^{-k}$, получаваме $A^iB^1A^kB^l = A^{i-k}B^{1+l}$. Обединявайки двата случая получаваме желаното равенство.

Сега от дефиницията на група породена от множество (в случая всевъзможните произведения на елементите A и B и техните обратни), следва че $D_n \subseteq G$, откъдето $D_n = G$.

в) Фактът, че D_n е неабелева група е директно следствие на следното: $B^{-1}AB = A^{-1} \Rightarrow AB = BA^{-1} \neq BA$ (единственият случай, в който е изпълнено $A^sB = BA^s$, $s \in [1, n-1]$, е случаят за групи от четен ред, т. е. $n = 2k$, за който е изпълнено, че $A^kB = BA^k$).

От вида на D_n, получен в б), а именно

$$D_n = \left\{ A^iB^j \mid i = 0, 1, \ldots, n-1;\ j = 0, 1 \right\},$$

стигаме до извода, че максималният брой елементи на групата D_n е $2n$.

Остава да проверим, дали измежду така зададените елементи на D_n има повтарящи се, т. е. $A^iB^k = A^jB^l \Rightarrow A^{i-j}B^{k-l} = E$, за някои $0 \leq i \neq j \leq n-1$; $0 \leq k, l \leq 1$. Нека означим за удобство $0 \leq i-j = s < n$ и $k-l = t < 2$. Тогава, ако $t = 0$, то имаме $A^sB^0 = A^s = E \Leftrightarrow s = i-j = 0$ - $\lightning$, това е един и същ елемент.

Нека сега разгледаме и другия случай

$$A^sB = \begin{pmatrix} \cos\frac{2s\pi}{n} & -\sin\frac{2s\pi}{n} \\ \sin\frac{2s\pi}{n} & \cos\frac{2s\pi}{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\frac{2s\pi}{n} & \sin\frac{2s\pi}{n} \\ \sin\frac{2s\pi}{n} & -\cos\frac{2s\pi}{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

последното равенство не се достига за никоя стойност на s.

Оказа се, че елементите на D_n са два по два различни и значи са точно $2n$ на брой.

■

Задача. 1.9. Да се докаже, че групата от всички симетрии на правилен n-ъгълник е изоморфна на диедралната група D_n.

Решение. Нека G е множеството от симетрии на правилен n-ъгълник, т. е. G е множеството от всички движения в пространството, които изобразяват n-ъгълника в себе си.[1]
Симетриите биват: ротация, относно центъра на n-ъгълника, на ъгъл $\frac{2\pi}{n}$ и отражение относно някоя от осите на симетрия.[2] В G разглеждаме елементите r -ротация на ъгъл $\frac{2\pi}{n}$ обратно на часовниковата стрелка и s - отражение относно оста прекарана през връх 1 (абсцисната ос). В G въвеждаме операцията композиция на изображенията, тя е бинарна (Защо?), асоциативна е, идентитетът играе ролята на единичен елемент, а обратният елемент на всеки е съответното обратно движение (ротация на ъгъл $\frac{2\pi}{n}$ по часовниковата стрелка и отражение относно ос на симетрия).

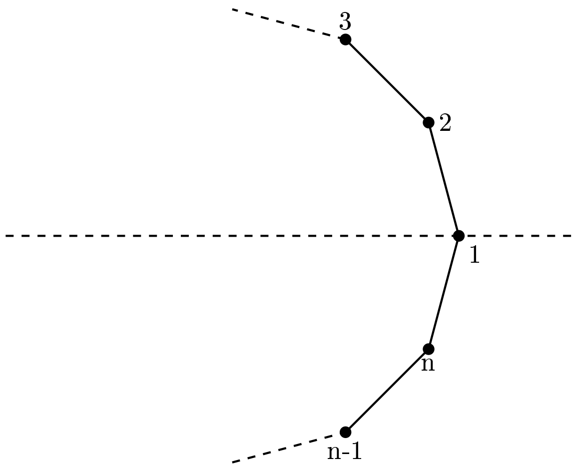
Очевидно $|r| = n$ и $|s| = 2$. Ще докажем, че $srs^{-1} = r^{-1}$. Нека приложим изображението върху произволен връх $i \in [1, n]$. Изпълнено е, че $r(i) = i+1$

[1] При тези движения n-ъгълникът не може да бъде усукван, т. е. ако под действието на някоя симетрия σ върхът i се изобрази във върха j, то неизбежно неговите съседи, под действието на това изображение остават съседи, с евентуална смяна на местата, т. е. $\sigma(i-1) \in \{j-1, j+1\}$ и аналогично $\sigma(i+1) \in \{j-1, j+1\}$.

[2] В случая на n - нечетно осите на симетрии са един вид: тези, които свързват връх със средата на срещуположна страна (симетрали). За n - четно има 2 вида оси на симетрия: такива които свързват два срещуположни върха и такива, които свързват средите на 2 срещуположни страни (симетрали).

и $s(i) = n+2-i$ (ако изберем $i = 1$ или в случая $n = 2k$, изберем $i = k+1$, то трябва да имаме предвид, че $s(1) = 1$ и $s(k+1) = k+1$, въпреки това горната формула е очевидно валидна и за тези върхове).

$$s_\circ r_\circ s^{-1}(i) = s_\circ r(s^{-1}(i)) = s(r(n+2-i)) = s(n+3-i) = i-1 = r^{-1}(i).$$

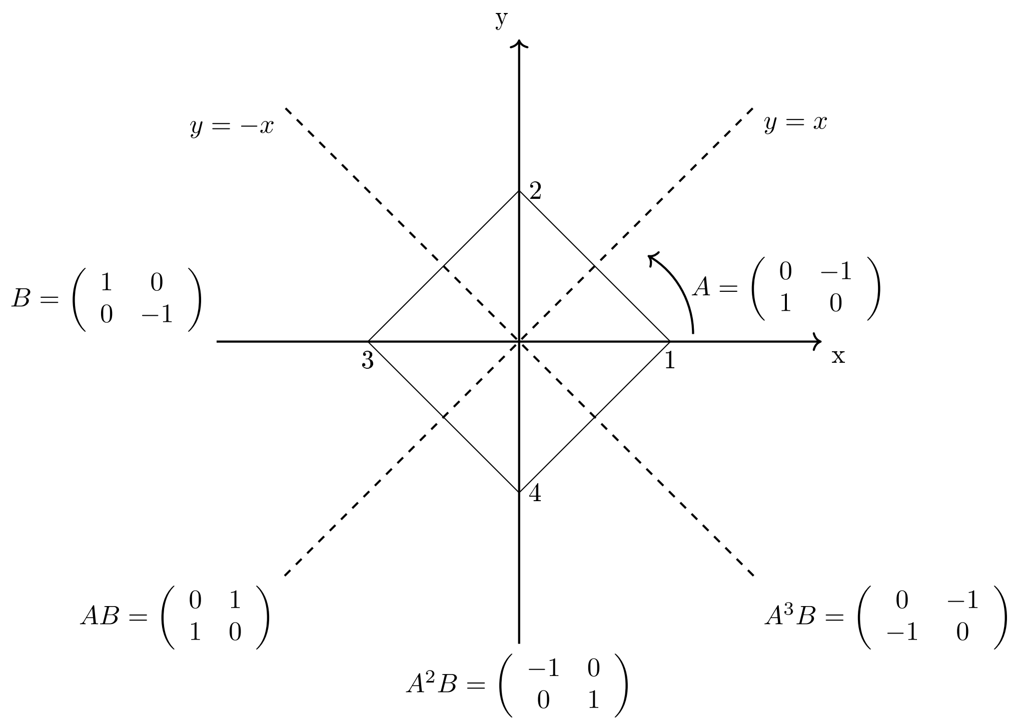


Така получихме, че $G = \langle r, s \mid r^n = s^2 = id,\ srs^{-1} = r^{-1}\rangle$, следователно $G \cong D_n$. ■

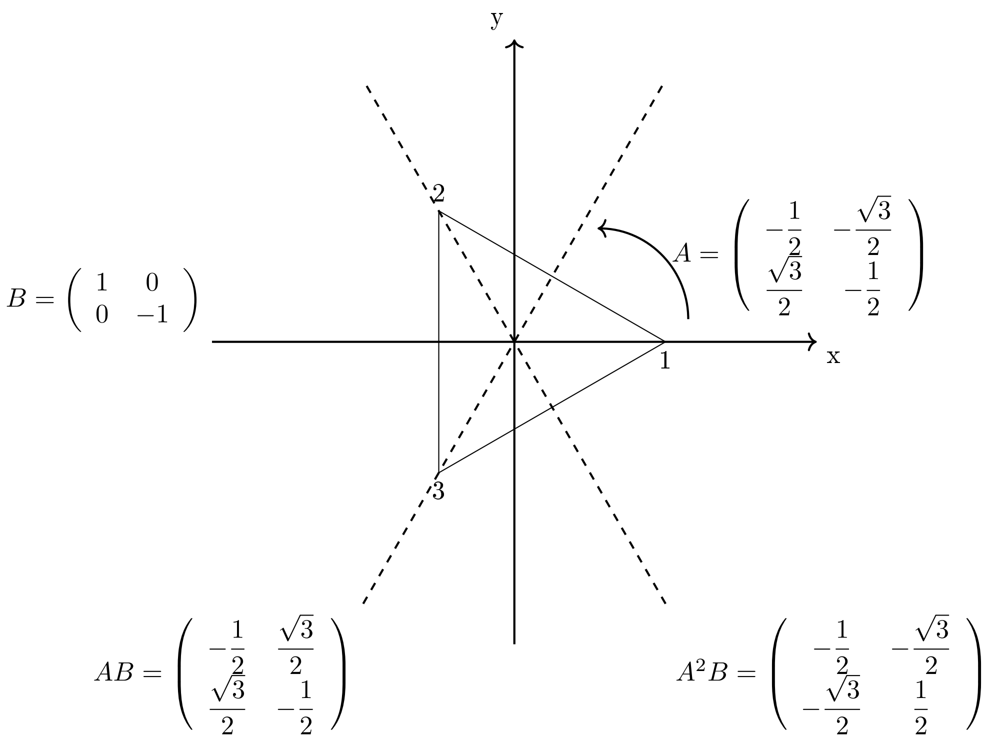
От теоремата на Кейли, следва че групата D_n може да се реализира като подгрупа на S_n. В зависимост от четността на n, в сила е един от следните 2 случая:

- $n = 2k$, $D_n \cong G < S_n$;
  $G = \langle \rho = (1, 2, \ldots, n), \sigma = (2, n)(3, n{-}1)\ldots(k, k{+}2) \mid \rho^n = \sigma^2 = id,\ \sigma\rho\sigma^{-1} = \rho^{-1}\rangle$.
- $n = 2k+1$, $D_n \cong G < S_n$;
  $G = \langle \rho = (1, 2, \ldots, n), \sigma = (2, n)(3, n{-}1)\ldots(k{+}1, k{+}2) \mid \rho^n = \sigma^2 = id,\ \sigma\rho\sigma^{-1} = \rho^{-1}\rangle$.

Да разгледаме следните примери - D_4 и D_3:



Разглеждана като подгрупа на S_4, групата D_4 има вида:
$D_4 = \langle (1234) = A, (24) = B \rangle$.



Разглеждана като подгрупа на S_3, групата D_3 има вида:
$D_3 \cong S_3 = \langle (123) = A, (23) = B \rangle$.

Задача. 2.10. Да се определят подгрупите на групата $\mathbb{Q}_8$.

Решение. $\mathbb{Q}_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ - група на кватернионите. Подгрупите ѝ са:

- $\{1\}, \mathbb{Q}_8$ - тривиални подгрупи;
- една циклична подгрупа $\langle -1 \rangle \cong \mathbb{C}_2$;
- три циклични подгрупи $\langle a \rangle = \{\pm 1, \pm a\} \cong \mathbb{C}_4$, където $a = \pm i, \pm j$ или $\pm k$.

Други подгрупи няма. Наистина, ако изберем кои да е два елемента, с условието $a \neq \pm b$, където $a, b \in M = \{\pm i, \pm j, \pm k\}$, то за произведението им $ab = c \in M$ е изпълнено: $c \neq \pm a$ и $c \neq \pm b$. При това $a^2 = b^2 = -1$ и $a^4 = b^4 = 1$. Получихме $\langle a, b \rangle = \mathbb{Q}_8$.

По този начин стигнахме до друго представяне на групата $\mathbb{Q}_8$, а именно:
$\mathbb{Q}_8 = \langle a, b \mid a^4 = 1, a^2 = b^2, ba^3 = ab \rangle$.

■

Задача. 2.11. Да се определят подгрупите на групата D_4.

Решение. Диедралната група от ред 8 има представянето $D_4 = \langle A, B \mid A^4 = B^2 = E, B^{-1}AB = A^{-1} \rangle$. Подгрупите на D_4 са:

- $\{E\}, D_4$ - тривиални подгрупи;
- всяко отражение образува циклична подгрупа от ред 2, същото се отнася и за ротацията на ъгъл π. Така получаваме 5 циклични подгрупи от ред 2: $\langle B\rangle$, $\langle AB\rangle$, $\langle A^2B\rangle$, $\langle A^3B\rangle$, $\langle A^2\rangle \cong \mathbb{C}_2$;
- ротацията на ъгъл $\pm\dfrac{\pi}{2}$ образува една циклична подгрупа от ред 4, т. е. $\langle A\rangle = \langle A^3\rangle \cong \mathbb{C}_4$;
- В предните два случая се изчерпаха единичните движения, остава да проверим дали комбинация от ротация и отражение може да породи подгрупа на D_4. Ако изберем ротацията да бъде на ъгъл $\pm\dfrac{\pi}{2}$ и приложим към нея кое да е отражение, директна проверка ни дава, че те пораждат цялата група, т. е. $\langle A^\varepsilon, A^iB\rangle = D_4$, където $\varepsilon = \pm 1$, $i = 0, 1, 2, 3$.

  Нека сега изберем ротацията на ъгъл π. В зависимост от избора на отражение, получаваме следните две подгрупи на D_4:

  1) $\langle A^2, B\rangle = \langle A^2, A^2B\rangle = \{E, A^2, B, A^2B\}$;
  2) $\langle A^2, AB\rangle = \langle A^2, A^3B\rangle = \{E, A^2, AB, A^3B\}$.

  И за двете подгрупи е в сила следното: те са четириелементни, абелеви са, всеки техен неединичен елемент е от ред 2 и произведението на всеки два неединични елемента дава третия. Това са познатите ни релации в групата на Клайн K_4 (виж зад. 2.13. а)) и следователно всяка една от двете подгрупи е изоморфна на K_4.

  Други собствени групи на D_4 не могат да бъдат образувани.[3]

■

Задача. 2.12. Да се намерят подгрупите на групата S_3.

Решение. Самостоятелно (виж зад. 2.21. а)). ■

Задача. 2.13. Да се докаже, че в групата A_4:

а) множеството $K_4 = \{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ е абелева подгрупа (*група на Клайн*);

б) няма подгрупа от ред 6 (въпреки че $|A_4|$ се дели на 6).

Решение. а) Очевидно $K_4 \subset A_4$. Нека означим $a = (12)(34)$, $b = (13)(24)$, $c = (14)(23)$. Изършваме проверките за абелева подгрупа:

1) Затвореност и комутативност на операцията композиция.
   Единичният елемент (1) на A_4 очевидно изпълнява същата роля в K_4. Всеки неединичен елемент е произведение на 2 транспозиции и значи е от ред 2, т. е. $a^2 = b^2 = c^2 = (1)$.[4] Освен това,

[3] Последните две задачи са пример за неабелеви групи $\mathbb{Q}_8$ и D_4, всички собствени групи на които са абелеви.

[4] Тук може да се пропусне директната проверка за абелевост - K_4 е група, в която всеки неединичен елемент е от ред 2 $\overset{1.16.}{\Longrightarrow}$ K_4 е абелева група.

$$\left.\begin{array}{ll} & 1\ 2\ 3\ 4 \\ b=(13)(24) & 3\ 4\ 1\ 2 \\ a=(12)(34) & 4\ 3\ 2\ 1 \end{array}\right] = (14)(23) = c \in K_4.$$

$$\left.\begin{array}{ll} & 1\ 2\ 3\ 4 \\ a=(12)(34) & 2\ 1\ 4\ 3 \\ b=(13)(24) & 4\ 3\ 2\ 1 \end{array}\right] = (14)(23) = c \in K_4.$$

$$\left.\begin{array}{ll} & 1\ 2\ 3\ 4 \\ c=(14)(23) & 4\ 3\ 2\ 1 \\ a=(12)(34) & 3\ 4\ 1\ 2 \end{array}\right] = (13)(24) = b \in K_4.$$

$$\left.\begin{array}{ll} & 1\ 2\ 3\ 4 \\ a=(12)(34) & 2\ 1\ 4\ 3 \\ c=(14)(23) & 3\ 4\ 1\ 2 \end{array}\right] = (13)(24) = b \in K_4.$$

$$\left.\begin{array}{ll} & 1\ 2\ 3\ 4 \\ c=(14)(23) & 4\ 3\ 2\ 1 \\ b=(13)(24) & 2\ 1\ 4\ 3 \end{array}\right] = (12)(34) = a \in K_4.$$

$$\left.\begin{array}{ll} & 1\ 2\ 3\ 4 \\ b=(13)(24) & 3\ 4\ 1\ 2 \\ c=(14)(23) & 2\ 1\ 4\ 3 \end{array}\right] = (12)(34) = a \in K_4.$$

2) От факта, че нееднинчните елементи са от ред 2, следва че $a = a^{-1}$, $b = b^{-1}$, $c = c^{-1}$.

Получихме, че K_4 е абелева подгрупа на A_4.

б) $A_4 = \{\underbrace{(1), (12)(34), (14)(23), (13)(24)}_{K_4}, (123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243)\}$.

Нека допуснем, че съществува $H < A_4$ и $|H| = 6$. Нека $\sigma \in A_4$ е произволен троен цикъл. Имаме $|A_4 : H| = \dfrac{12}{6} = 2$ и значи два измежду левите съседни класове $H, \sigma H, \sigma^2 H$ съвпадат. Правим проверка:

1) $H = \sigma^i H \Leftrightarrow \sigma \in H$, $i = 1, 2$;
2) $\sigma H = \sigma^2 H \Leftrightarrow \sigma \in H$.

Всеки троен цикъл в A_4 принадлежи на H, но в A_4 има общо 8 тройни цикъла, а $|H| = 6$ $\lightning$.

$\blacksquare$

Задача. 2.14. Да се докаже, че за всеки естествен делител d на $|S_4|$ групата S_4 има подгрупа от ред d.

Решение. Редът на групата S_4 е $|S_4| = 4! = 24$. Естествените делители на 24 са 1,2,3,4,6,8,12,24. Правим директна проверка за всеки делител:

- ред 1 - единичната подгрупа $\{(1)\}$;
- ред 2 - всяка транспозиция или (2,2) - транспозиция поражда циклична подгрупа изоморфна на $\mathbb{C}_2$;
- ред 3 - всеки троен цикъл поражда циклична подгрупа изоморфна на $\mathbb{C}_3$

- ред 4 - всеки четворен цикъл поражда циклична подгрупа изоморфна на $\mathbb{C}_4$, освен това $K_4 < S_4$;
- ред 6 - $S_3 < S_4$ и $|S_3| = 6$;
- ред 8 - нека разгледаме $H = \langle (1234), (13) \rangle < S_4$. Твърдим, че $H \cong D_4$ и съответно $|H| = 8$. Действително, изпълнено е $(1234)^4 = (13)^2 = (1)$ и $(13)(1234)(13) = (4321)$, което повтаря напълно релациите в D_4. По-точно видът на H е:

  $H = \{(1), (1234), (13)(24) = (1234)^2, (4321) = (1234)^3, (13), (12)(34) = (13)(1234), (24) = (13)(1234)^2, (14)(23) = (13)(1234)^3\}$;
- ред 12 - $A_4 < S_4$ и $|A_4| = 12$;
- ред 24 - цялата група S_4.

■

Задача. 2.16. Да се докаже, че всяка неабелева група G от ред 8 е изоморфна на точно една от групите $\mathbb{Q}_8$ и D_4.

Решение. Нека $|G| = 8$ и G е неабелева група. Не съществува елемент $g \in G$, такъв че $|g| = 8$ - в противен случай $G = \langle g \rangle$ - циклична $\Rightarrow$ абелева група $\lightning$.
G е група от четен ред $\stackrel{1.14.}{\Longrightarrow}$ G има елемент от ред 2.
Ако всеки неединичен елемент на G е от ред 2 $\stackrel{1.16.}{\Longrightarrow}$ G е абелева група $\lightning$.

Тъй като за всеки елемент $a \in G$ е изпълнено $|a| \mid |G| \Rightarrow \exists a \in G$: $|a| = 4$. Нека изберем елемент $b \in G \setminus \langle a \rangle$. От по-горе казаното $|b| = 2$ или $|b| = 4$, освен това $|G : \langle a \rangle| = \dfrac{8}{4} = 2$, $G = \langle a \rangle \cup \langle a \rangle b$ и значи $G = \langle a, b \rangle$ (също така $\langle a \rangle \cap \langle a \rangle b = \emptyset$, $|\langle a \rangle| = |\langle a \rangle b| = 4$). Проверяваме в кой клас попада елементът $b^{-1}ab$:

1) $b^{-1}ab \in \langle a \rangle b \Leftrightarrow b^{-1}ab = a^k b \Leftrightarrow b^{-1}a = a^k \Leftrightarrow b^{-1} = a^{k-1} \Leftrightarrow b \in \langle a \rangle$ $\lightning$;

2) Следователно, $b^{-1}ab \in \langle a \rangle$ и $b^{-1}ab = a^k$, $k = 0, 1, 2, 3$, но $\stackrel{1.12.}{\Longrightarrow}$ $|b^{-1}ab| = |a| = 4 \Rightarrow b^{-1}ab = a$ или $b^{-1}ab = a^3 = a^{-1}$. Случаят $b^{-1}ab = a$ води до $ab = ba$ и значи $G = \langle a, b \rangle$ е абелева $\lightning$. Така $b^{-1}ab = a^{-1}$.

Сега, за реда на елемента b имаме две възможности:

1) $|b| = 2$. Тогава за групата G получаваме:

   $G = \langle a, b \mid a^4 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle \cong D_4$;

2) $|b| = 4$. Ако допуснем, че $b^2 \in \langle a \rangle b$, то $b = a^k$, $k = 0, 1, 2, 3$ $\lightning$. Така $b^2 \in \langle a \rangle$ и тъй като $|b^2| = 2$, то $b^2 = a^2$.[5] Дотук получихме 6 от елементите на групата G, а именно $1, a, a^2 = b^2, a^3, b, b^3$, остава да покажем кои са последните 2 елемента - те трябва да принадлежат на съседния клас $\langle a \rangle b$.

[5] В зад. 2.10. показахме, че групата $\mathbb{Q}_8$ има същото представяне:

$$\mathbb{Q}_8 = \langle a, b \mid a^4 = 1, a^2 = b^2, ba^3 = ab \rangle.$$

Нека $c = ab$. Последователно получаваме (използваме, че $b^{-1}ab = a^{-1}$):

$c^2 = abab = ba^{-1}ab = b^2 = a^2 \Rightarrow |c| = 4$;

$a^2ba = b^3a = a^3b^3 = ab = c$;

$bc = bab = a^2cb = a^2abb = a^5 = a$;

$ca = aba = aa^2c = a^2ac = a^2aab = b$.

Получихме познатите ни релации в $\mathbb{Q}_8$. Конструираме изображението:

$$\varphi : G \longrightarrow \mathbb{Q}_8$$

$\varphi(1) = 1,\ \varphi(a) = i,\ \ \varphi(a^2) = -1,\ \varphi(a^3) = -i,\ \varphi(b) = j,$
$\varphi(b^3) = -j,\ \varphi(c) = k,\ \varphi(c^3) = -k.$

От казаното по-горе, следва че φ е хомоморфизъм на групи, очевидно е биекция, откъдето $G \cong \mathbb{Q}_8$.

Други неабелеви групи от ред 8 няма.

■

Задача. 2.17. Да се докаже, че H е нормална подгрупа на G:
а) G е абелева група, а H е произволна подгрупа на G; б) $G = S_n$, $H = A_n$; в) $G = GL_n(F)$, $H = SL_n(F)$; г) $G = GO_n(\mathbb{R})$, $H = SO_n(\mathbb{R})$.

Решение. а) G е абелева група $H \leq G$, то очевидно $g^{-1}hg = h$, $\forall g \in G, h \in H$;

б) Дадено е, че $G = S_n$ и $H = A_n$. Нека $\sigma = (i_1 \dots i_k) \dots (j_1 \dots j_s) \in H$ и нека $\rho \in G$. Тогава, тъй като спрегнатите елементи са с еднаква циклична структура, съответно и еднаква четност, то е изпълнено $\rho\sigma\rho^{-1} = (\rho(i_1) \dots \rho(i_k)) \dots (\rho(j_1) \dots \rho(j_s)) \in H$;

в) Дадено е, че $G = GL_n(F)$ и $H = SL_n(F)$. Нека $A \in H$, $B \in G$, тогава $B^{-1}AB \in H \Leftrightarrow det(B^{-1}AB) = 1$. Действително, $det(B^{-1}AB) = detB^{-1}.detA.detB = detB^{-1}.detB = 1$;

г) Нека $G = GO_n(\mathbb{R})$ и $H = SO_n(\mathbb{R})$. Аналогично на в) подточка.

■

Задача. 2.18. Да се докаже, че ако H е подгрупа с индекс 2 в група G, то H е нормална подгрупа на G.

Решение. Нека $g \in G \setminus H$. Изпълнено е $G = H \cup gH = H \cup Hg$ и $H \cap gH = H \cap Hg = \emptyset$ и значи $gH = Hg$.[6] ■

Задача. 2.19. Да се докаже, че всяка подгрупа на $\mathbb{Q}_8$ е нормална подгрупа (въпреки че $\mathbb{Q}_8$ не е абелева група).

Решение. Използваме зад. 2.10., в която определихме подгруповата структура на $\mathbb{Q}_8$.

Тривиалните подгрупи по дефиниция са нормални.

От нетривиалните, за трите циклични подгрупи от ред 4 е изпълнено, че индексът им в G е 2 и те са нормални.

[6] Това твърдение може да се използа в зад. 2.17 б) и г), там е изпълнено, че $|G : H| = 2$

Остава да се направи проверка за подгрупата $\langle -1 \rangle \cong \mathbb{C}_2$. Нека $a \in M = \{\pm i, \pm j, \pm k\}$. Изпълнено е: $a^{-1}(-1)a = a^{-1}a^2a = a^2 = -1 \Rightarrow \langle -1 \rangle \lhd \mathbb{Q}_8$.

■

Задача. 2.24. Нека G е група, $A \trianglelefteq G$, $B \trianglelefteq G$ и $A \cap B = \{1\}$. Да се докаже, че $ab = ba$ за всеки два елемента $a \in A$, $b \in B$.

Решение. Нека $a \in A \trianglelefteq G$ и $b \in B \trianglelefteq G$. Да разгледаме $[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab$ - комутатор на елементите a и b. Получаваме $[a, b] = a^{-1}\underbrace{b^{-1}ab}_{\in A} \in A$, а от друга страна $[a, b] = \underbrace{a^{-1}b^{-1}a}_{\in B} b \in B$, откъдето $[a, b] \in A \cap B$. По условие обаче $A \cap B = \{1\}$, т. е. $[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab = 1 \Leftrightarrow ab = ba$.

■

Задача. 2.25. Нека G е група, A и B са подгрупи на G и $AB = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$. Да се докаже, че:

а) $A \subseteq AB$ и $AB = A$ точно когато $AB = BA$;

б) $|AB| = \dfrac{|A||B|}{|A \cap B|}$ (ако $|A| < \infty$, $|B| < \infty$);

в) $AB \leq G$ точно когато $AB = BA$;

г) ако $A \trianglelefteq G$ или $B \trianglelefteq G$, то $AB \leq G$;

д) ако $A \trianglelefteq G$, то $A \trianglelefteq AB$ и $A \cap B \trianglelefteq B$;

е) ако $A \trianglelefteq G$ и $B \trianglelefteq G$, то $AB \trianglelefteq G$ и $A \cap B \trianglelefteq G$.

Решение. а) $B \leq G \Rightarrow 1 \in B$, тогава $\forall a \in A$: $a = a1 \in AB \Rightarrow A \subseteq AB$.

Ще докажем, че $AB = A \Leftrightarrow AB = BA$.

$\Rightarrow$ $\forall a_i \in A$, $b \in B$ $\exists a_j \in A$: $a_i b = a_j \Rightarrow b = a_i^{-1}a_j \in A \Rightarrow B \leq A$;

$\Leftarrow$ ако $B \leq A$, то очевидно $\forall a \in A$ и $b \in B \Rightarrow ab \in A \Rightarrow AB \subseteq A$ и от $A \subseteq AB \Rightarrow AB = A$.

б) Нека означим $A \cap B = C \leq A$ и нека $a_1C, a_2C, \dots, a_nC$ са всички различни класове на A по подгрупата C, т. е. $|A : C| = n$.

Нека сега разгледаме съседните класове на G по подгрупата B:

$a_1B, a_2B, \dots, a_nB$. За тях е изпълнено:

1) $a_iB \cap a_jB = \emptyset$ за $1 \leq i \neq j \leq n$.
Наистина, $a_iB = a_jB \Leftrightarrow a_i^{-1}a_j \in B \Leftrightarrow a_i^{-1}a_j \in A \cap B = C$ $\lightning$;

2) $\forall ab \in AB$: $ab \in a_iB$, $1 \leq i \leq n$.
Действително, $\forall ab \in AB$, $a \in A \Rightarrow a \in a_iC$, за някое $1 \leq i \leq n$, но $aC = a_iC \Leftrightarrow aB = a_iB$.

Така получихме, че $AB = a_1B \cup a_2B \cup \dots \cup a_nB$ и $a_iB \cap a_jB = \emptyset$, $1 \leq i \neq j \leq n$. Следователно $|AB| = |A : C||B| = \dfrac{|A||B|}{|A \cap B|}$.

в) Трябва да докажем, че $AB \leq G \Leftrightarrow AB = BA$.

$\Rightarrow$ Нека $AB \leq G$. Тогава е изпълнено:

1) $\forall a_i, a_j \in A,\ b_i, b_j \in B\ \exists a_k \in A, b_k \in B$: $a_i b_i a_j b_j = a_k b_k$. Умножаваме последователно с a_i^{-1} - отляво и b_j^{-1} - отдясно. Получаваме
$b_i a_j = \underbrace{a_i^{-1} a_k}_{\in A} \underbrace{b_k b_j^{-1}}_{\in B} \in AB \Rightarrow BA \subseteq AB$;

2) $\forall c \in AB,\ \exists a \in A, b \in B$: $c = ab$ и $c^{-1} = (ab)^{-1} \in AB$, но $c^{-1} = (ab)^{-1} = \underbrace{b^{-1}}_{\in B} \underbrace{a^{-1}}_{\in A} \Rightarrow c^{-1} \in BA \Rightarrow AB \subseteq BA \Rightarrow AB = BA$;

$\Leftarrow$ Нека сега $AB = BA$, трябва да докажем, че $AB \leq G$.
$\forall a_i b_i, a_j b_j \in AB,\ \exists a_k b_k, a_s b_s \in AB$, така че е изпълнено:

1) $a_i \underbrace{b_i a_j}_{\in BA} b_j = \underbrace{a_i a_k}_{\in A} \underbrace{b_k b_j}_{\in B} \in AB$, (тук $b_i a_j = a_k b_k$);

2) $(a_i b_i)^{-1} = \underbrace{b_i^{-1} a_i^{-1}}_{\in BA} = a_s b_s \in AB$.

От двете проверки получихме, че $AB \leq G$.

■