Метрични канонични уравнения на кривите от II степен

1 зад. ОКС $K = Oxy = O\vec{e}_1\vec{e}_2$

$k: \underset{a_{11}}{5}x^2 + \underset{2.a_{12}}{8}xy + \underset{a_{22}}{5}y^2 - 18x - 18y + 9 = 0$

а) Да се намери метрично канонично уравнение на кр. k и последователните координатни трансформации, които водят до него;

$$\boxed{\begin{aligned} &k: x^2+y^2=R^2 \\ &\mathcal{E}: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \\ &\chi: \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \\ &\Pi: y^2=2p.x \end{aligned}}$$

Консултация
01.06 от 18:00 часа
* Вектори
* права в равнината
* права и равнина в пространството
* канонизация

I $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

Търсим база $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$, спрямо която A да е в диагонален вид.

$\underset{\text{Спр. } \vec{e}_1\vec{e}_2 \text{ ОКС}}{A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}} \longrightarrow \underset{\text{Спр. } \vec{b}_1, \vec{b}_2 \text{ ОКС}}{A' = \begin{pmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{pmatrix}}$:

$\vec{b}_1$ и $\vec{b}_2$ са собствените вектори на A.

s_1 и s_2 са собствените стойности на A.

1. $\vec{b}_1(\alpha_1, \beta_1)$ е собствен за A, ако $\exists\, s_1$:

$A.\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = s_1.\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}$

$(A - s_1.E).\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ – ХСЛУ, търсим решение $(\alpha_1, \beta_1) \neq (0,0) \Longleftrightarrow$

$|A - s.E| = 0$ – характеристично уравнение, решенията s_1 и s_2 са собствените стойн. на A

$\begin{vmatrix} 5-s & 4 \\ 4 & 5-s \end{vmatrix} = 0 \quad (5-s)^2 - 4^2 = 0 \quad \boxed{s_1 = 1 \qquad s_2 = 9}$

$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$ x^2 $x.y$ y^2

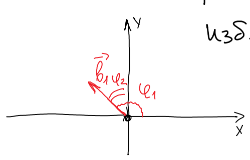
1сл. Ако $s_1 = s_2 \neq 0$, то k е окръжност;
2сл. Ако $s_1.s_2 > 0$, то k е елипса;
3сл. Ако $s_1.s_2 < 0$, то k е хипербола;
4сл. Ако $s_1 = 0$, $s_2 \neq 0$, то k е парабола

За $s_1 = 1 \Rightarrow \vec{b}_1(\alpha_1, \beta_1)$ – собствен в-р, $|\vec{b}_1| = 1 \Longleftrightarrow \alpha_1^2 + \beta_1^2 = 1$

$\begin{pmatrix} 5-1 & 4 \\ 4 & 5-1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left| \begin{aligned} &4.\alpha_1 + 4.\beta_1 = 0 \\ &\alpha_1^2 + \beta_1^2 = 1 \end{aligned} \right. \Rightarrow \left| \begin{aligned} &\alpha_1 = -\beta_1 \\ &(-\beta_1)^2 + \beta_1^2 = 1 \Rightarrow \beta_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned} \right.$

изб. $\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

За $s_1 = 1 \Rightarrow \vec{b}_1\left(\underset{\cos\varphi_1}{-\frac{\sqrt{2}}{2}}, \underset{\cos\varphi_2}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)$



За $s_2 = 9 \Rightarrow \vec{b}_2(\alpha_2, \beta_2)$, $|\vec{b}_2| = 1 \Longleftrightarrow \alpha_2^2 + \beta_2^2 = 1$

$\begin{pmatrix} 5-9 & 4 \\ 4 & 5-9 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left| \begin{aligned} &-4\alpha_2 + 4\beta_2 = 0 \\ &\alpha_2^2 + \beta_2^2 = 1 \end{aligned} \right. \Rightarrow \alpha_2 = \beta_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

За $s_2 = 9 \Rightarrow \vec{b}_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

2 Извършваме смяна на ОКС

$K = Oxy \xrightarrow{T_1} K' = Ox'y'$: $Ox' \uparrow\uparrow \vec{b}_1 \longleftrightarrow s_1 = 1$

$$0_{\boxed{y'}} \uparrow\uparrow \boxed{\vec{b}_2} \longleftrightarrow S_2 = 9$$

т. $M(x,y)$ спр. K и $M(x',y')$ спр. K'

$$T_1: \begin{cases} x = -\frac{\sqrt2}{2}\cdot x' + \frac{\sqrt2}{2}\cdot y' \\ y = \frac{\sqrt2}{2}\cdot x' + \frac{\sqrt2}{2}\cdot y' \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt2}{2} & \frac{\sqrt2}{2} \\ \frac{\sqrt2}{2} & \frac{\sqrt2}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Спр. $K' \Rightarrow A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$ $\qquad K: \boxed{5x^2+8xy+5y^2} - 18x - 18y + 9 = 0$

$$K: 1\cdot x'^2 + 0\cdot x'y' + 9\cdot y'^2 - 18\cdot\left(-\frac{\sqrt2}{2}\cdot x' + \frac{\sqrt2}{2}\cdot y'\right) - 18\cdot\left(\frac{\sqrt2}{2}\cdot x' + \frac{\sqrt2}{2}\cdot y'\right) + 9 = 0$$

$$K: x'^2 + 9y'^2 + 0\cdot x' - 18\cdot\sqrt2\cdot y' + 9 = 0$$

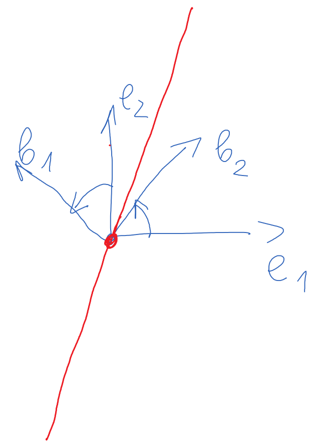
II Търсим централно уравнение на K

Нека т. $C(p,q)$ спр. K' е центърът на K

Извършваме смяна на ОКС

$$K' = Ox'y' \xrightarrow{T_2} K'' = Cx''y'' : \quad Cx'' \uparrow\uparrow Ox', \quad Cy'' \uparrow\uparrow Oy'$$

$$T_2: \begin{cases} x' = x'' + p \\ y' = y'' + q \end{cases} \qquad \vec{OC}(p,q)$$



$$K: x'^2 + 9y'^2 + 0\cdot x' - 18\cdot\sqrt2\cdot y' + 9 = 0$$

$$K: (x''+p)^2 + 9\cdot(y''+q)^2 - 18\cdot\sqrt2\cdot(y''+q) + 9 = 0$$

$$K: x''^2 + 2p\cdot x'' + p^2 + 9y''^2 + 18q\cdot y'' + 9\cdot q^2 - 18\sqrt2\cdot y'' - 18\sqrt2\cdot q + 9 = 0$$

$$K: x''^2 + 9\cdot y''^2 + \underbrace{2p}_{=0}\cdot x'' + 18\cdot y''\cdot\underbrace{(q-\sqrt2)}_{=0} + \underbrace{p^2 + 9q^2 - 18\sqrt2 q + 9}_{} = 0$$

$p=?, q=?$:

$$\begin{cases} 2p = 0 \\ q - \sqrt2 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} p = 0 \\ q = \sqrt2 \end{matrix} \Rightarrow C(0,\sqrt2) \text{ спр. } K', \quad T_2: \begin{cases} x' = x'' + 0 \\ y' = y'' + \sqrt2 \end{cases}$$

$$0^2 + 9.2 - 18.2 + 9 = -9$$

$$K: x''^2 + 9.y''^2 - 9 = 0 \;/ : 9$$

$$K: \frac{x''^2}{9} + \frac{y''^2}{1} = 1 \qquad K: \frac{x''^2}{3^2} + \frac{y''^2}{1^2} = 1$$

$a = 3, \; b = 1$

б) Да се намерят координатите на фокусите F_1 и F_2 спр. K

$a = 3, b = 1 \Rightarrow a > b$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{9-1} = \sqrt8 = 2.\sqrt2$$

$F_1(-c, 0)$ $\quad F_2(c, 0)$

$F_1(-2\sqrt2, 0)$ $\quad F_2(2\sqrt2, 0)$ спр. K''

$$F_1: \begin{cases} x'' = -2\sqrt2 \\ y'' = 0 \end{cases} \xrightarrow{T_2} \begin{matrix} x' = x'' + 0 = -2\sqrt2 \\ y' = y'' + \sqrt2 = \sqrt2 \end{matrix} \xrightarrow{T_1} \begin{cases} x = -\frac{\sqrt2}{2}\cdot x' + \frac{\sqrt2}{2}\cdot y' = -\frac{\sqrt2}{2}\cdot(-2\sqrt2) + \frac{\sqrt2}{2}\cdot\sqrt2 = 3 \\ y = \frac{\sqrt2}{2} x' + \frac{\sqrt2}{2} y' = \frac{\sqrt2}{2}\cdot(-2\sqrt2) + \frac{\sqrt2}{2}\cdot\sqrt2 = -1 \end{cases}$$

$F_1(3, -1)$ спр. K

$\lfloor y''=0 \qquad y'=y''+\sqrt{2}=\underset{\sim}{\sqrt{2}} \qquad \lfloor y=\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{\sqrt{2}}{2}y'=\frac{\sqrt{2}}{2}.(-2\sqrt{2})+\frac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{2}=-1$ спр. K

$F_2 \begin{cases} x''=2\sqrt{2} \\ y''=0 \end{cases}$ . .

$F_2(-1,3)$

---

2 зад. ОКС $K=O_{xy}=O\vec{e}_1\vec{e}_2$

$k: \underbrace{9}_{a_{11}}x^2 \underbrace{-24}_{2a_{12}}xy+\underbrace{16}_{a_{22}}y^2-10x-70y+125=0$

I $A=\begin{pmatrix} 9 & -12 \\ -12 & 16 \end{pmatrix}$

$|A-s.E|=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 9-s & -12 \\ -12 & 16-s \end{vmatrix}=0$

$(9-s).(16-s)-144=0$

$144-25.s+s^2-144=0$

$s^2-25.s=0$

$s.(s-25)=0$

$\boxed{s_1=0 \quad s_2=25}$

За $s_1=0 \Rightarrow \vec{b}_1(\alpha_1,\beta_1)$, $|\vec{b}_1|=1$

$\begin{pmatrix} 9-0 & -12 \\ -12 & 16-0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 9\alpha_1-12\beta_1=0 \\ \alpha_1^2+\beta_1^2=1 \end{cases} \quad \begin{cases} \beta_1=\frac{3}{4}\alpha_1 \\ \alpha_1^2+\left(\frac{3}{4}\alpha_1\right)^2=1 \end{cases}$

$\vec{b}_1\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)$

За $s_1=0 \rightarrow \vec{b}_1\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)$

За $s_2=25 \rightarrow \vec{b}_2(\alpha_2,\beta_2)$, $|\vec{b}_2|=1$

$\begin{pmatrix} 9-25 & -12 \\ -12 & 16-25 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -16\alpha_2-12\beta_2=0 \\ \alpha_2^2+\beta_2^2=1 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_2=-\frac{3}{4}\beta_2 \\ \alpha_2^2+\beta_2^2=1 \end{cases}$

$\vec{b}_2\left(-\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$

За $s_2=25 \rightarrow \vec{b}_2\left(\frac{-3}{5},\frac{4}{5}\right)$

Изв. смяна на ОКС $K=O_{xy} \xrightarrow{T_1} K'=O_{x'y'}$: $O_{x'} \uparrow\uparrow \vec{b}_2$, $O_{y'} \uparrow\uparrow \vec{b}_1$

$T_1: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\frac{1}{5}.\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

Спрямо $K' \rightarrow A'=\begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$k: 25.x'^2+0.x'y'+0.y'^2-10.\left(\frac{4}{5}.x'-\frac{3}{5}y'\right)-70.\left(\frac{3}{5}.x'+\frac{4}{5}y'\right)+125$

$\left\{ k: \underbrace{9}_{a_{11}}x^2 \underbrace{-24}_{2a_{12}}xy+\underbrace{16}_{a_{22}}y^2-10x-70y+125=0 \right\}$ спр. K

$k: 25x'^2-50.x'-50y'+125=0 \quad |:25$

$k: x'^2-2x'-2y'+5=0$

II Търсим координатите на т. $V(p,q)$ – връх на параболата

$K'=O_{x'y'} \xrightarrow{T_2} K''=V_{x''y''}$: $V_{x''} \uparrow\uparrow O_{x'}$

$T_2: \{ x'=x''+p$

II) Търсим координатите на т. $V(p,q)$ – връх на параболата

$$K' = O_{x'y'} \xrightarrow{T_2} K'' = V_{x''y''} : \quad V_{x''} \uparrow\uparrow O_{x'}, \quad V_{y''} \uparrow\uparrow O_{y'}$$

$$T_2 : \begin{cases} x' = x'' + p \\ y' = y'' + q \end{cases}$$

$$\text{Спр. } K'' \Rightarrow k: (x''+p)^2 - 2.(x''+p) - 2.(y''+q) + 5 = 0$$

$$k: x''^2 + 2px'' + p^2 - 2x'' - 2p - 2y'' - 2q + 5 = 0$$

$$k: x''^2 - 2y'' + x''.\underbrace{(2p-2)}_{0} + \underbrace{p^2 - 2p - 2q + 5}_{0} = 0$$

$$\left| \begin{array}{l} 2p - 2 = 0 \Rightarrow p = 1 \\ p^2 - 2p - 2q + 5 = 0 \Rightarrow q = 2 \end{array} \right.$$

$$V(1,2) \text{ спр } K', \quad T_2 : \begin{cases} x' = x'' + 1 \\ y' = y'' + 2 \end{cases}$$

$$k: x''^2 - 2y'' = 0$$