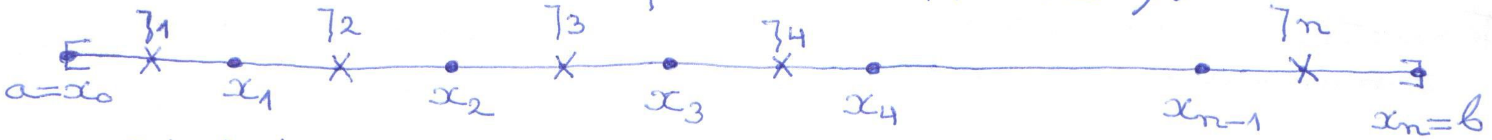
Упражнение 1

Определени интеграли, част 1

Нека $f(x)$ е дефинирана в $[a, b]$.
Нека $[a, b]$ е разделен на затворени подинтервали чрез точките $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ и във всеки от тези подинтервали е избрана по една точка ξ_i ($\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$).



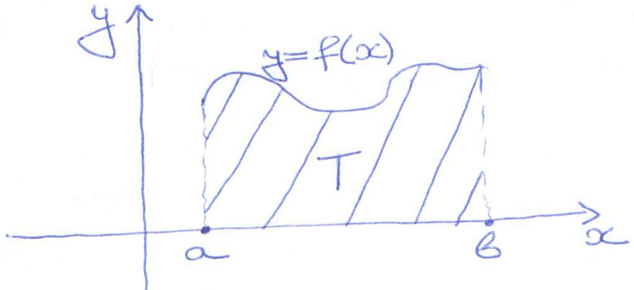
$$\sigma = f(\xi_1)\cdot(x_1 - x_0) + f(\xi_2)\cdot(x_2 - x_1) + f(\xi_3)\cdot(x_3 - x_2) + \ldots$$
$$\ldots + f(\xi_n)\cdot(x_n - x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$ – Риманова интегрална сума

$$\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1})$$ – диаметър на разбиването

Казваме, че $f(x)$ е интегруема в $[a, b]$, ако съществува $I \in \mathbb{R}$, такова че $\sigma \to I$ при $\lambda \to 0$. Числото I се нарича определен интеграл от $f(x)$ в $[a, b]$ и се означава така: $I = \int_a^b f(x)\,dx$

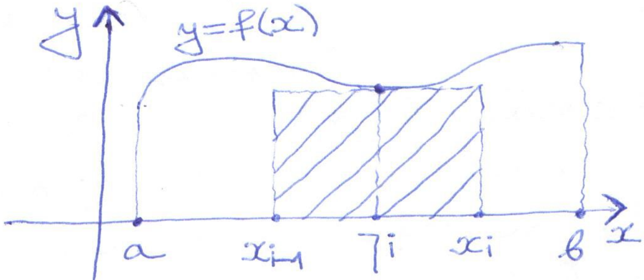
Физичен смисъл на определения интеграл:
Ако материална точка се движи по числова ос като в момента x има скорост $f(x)$, то $\int_a^b f(x)\,dx$ е ориентирания път, изминат от точката от момента $x = a$ до момента $x = b$ (т.е. преместването на точката, взето със знак „+", ако е по посоката на оста и взето със знак „–", ако е в обратната посока). $\mathbb{R}$

Геометричен смисъл на определения интеграл:
$\int_a^b f(x)\,dx$ е ориентираното лице на криволинейния трапец, заграден от графиката на $f(x)$ в $[a, b]$ и абсцисната ос (т.е. лицето, взето със знак „+", ако графиката на $f(x)$ е над абсцисната ос и взето със знак „–", ако графиката на $f(x)$ е под абсцисната ос).



$$\int_a^b f(x)\,dx = S(T)$$

Геометричен смисъл на определения интеграл



$f(\eta_i)\cdot(x_i - x_{i-1})$ е лицето на защрихования правоъгълник

Основни класове интегруеми функции:

1) непрекъснатите в $[a,b]$ функции;

2) ограничените в $[a,b]$ функции, които имат краен брой точки на прекъсване;

3) монотонните в $[a,b]$ функции.

По определение $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ и $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$.

Основни свойства на определените интеграли:

1) Ако $f(x)$ и $g(x)$ са интегруеми в $[a,b]$, то $f(x) \pm g(x)$ и $cf(x)$, $c=const$ също са интегруеми в $[a,b]$ и $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$, а пък $\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$.

2) Ако $c \in (a,b)$, то $f(x)$ е интегруема в $[a,b]$ точно когато $f(x)$ е интегруема в $[a,c]$ и в $[c,b]$ и при това $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$.

3) Ако $f(x)$ и $g(x)$ са интегруеми в $[a,b]$ и $f(x) \leqq g(x)$ за $\forall x \in [a,b]$, то $\int_a^b f(x)\,dx \leqq \int_a^b g(x)\,dx$.

4) Ако $f(x)$ е интегруема в $[a,b]$, то $|f(x)|$ също е интегруема в $[a,b]$ и $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqq \int_a^b |f(x)|\,dx$.

5) (теорема на Лайбниц и Нютон)
Ако $f(x)$ е интегруема в $[a,b]$ и $c \in [a,b]$ е фиксирана точка, то $F(x) = \int_c^x f(t)\,dt$ е диференцируема във всяка точка $x_0 \in [a,b]$, в която $f(x)$ е непрекъсната и при това $F'(x_0) = f(x_0)$.

(3) 6) (формула на Лайбниц и Нютон)

Ако $f(x)$ е непрекъсната в $[a,b]$ и $F(x)$ е нейна примитивна в $[a,b]$ (т.е. $\int f(x)dx = F(x)+c$), то $\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a) \overset{def}{=} F(x)\Big|_a^b$.

Формулата на Лайбниц и Нютон е основното средство за пресмятане на определени интеграли.

7) (формула за интегриране по части)

Ако $f(x)$ и $g(x)$ са непрекъснато диференцируеми в $[a,b]$, то $\int_a^b f(x)dg(x) = [f(x).g(x)]\Big|_a^b - \int_a^b g(x)df(x)$

Пресметнете определените интеграли:

Зад. 1 $I = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} tg^2 x\,dx$

Решение: $I = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx = \int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx =$

$= \int_{-\pi/4}^{\pi/4}\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx \underset{\uparrow}{=} (tg\,x - x)\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = \left(1-\frac{\pi}{4}\right)-\left(-1+\frac{\pi}{4}\right) = 2-\frac{\pi}{2} = \frac{4-\pi}{2}.$

(по ф-лата на Лайбниц и Нютон)

Зад. 2 $I = \int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^2}dx$

Решение: $I = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}d(1+x^2) \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{1+x^2}\right)\Big|_0^1 =$

(по ф-лата на Лайбниц и Нютон)

$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right) = -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}.$

$\int \frac{1}{u^2}du = \int u^{-2}du = \frac{u^{-1}}{-1}+c = -\frac{1}{u}+c$

$(u = 1+x^2)$

Зад. 3 $I = \int_1^{e^3}\frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}dx$

Решение: $I = \int_1^{e^3}\frac{1}{\sqrt{1+\ln x}}d(1+\ln x) = \left(2\sqrt{1+\ln x}\right)\Big|_1^{e^3} =$

$= 2\left(\sqrt{4}-\sqrt{1}\right) = 2(2-1) = 2.1 = 2$

$\int\frac{1}{\sqrt{u}}du = \int u^{-\frac{1}{2}}du = \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+c = 2\sqrt{u}+c$

$(u = 1+\ln x)$

Зад. 4 $I = \int_0^{\pi/2}\cos^5 x\sin 2x\,dx$

Решение: $I = \int_0^{\pi/2}\cos^5 x(2\sin x\cos x)dx =$

$= 2\int_0^{\pi/2}\cos^6 x\sin x\,dx = -2\int_0^{\pi/2}\cos^6 x\,d\cos x =$

$= -\frac{2}{7}(\cos^7 x)\Big|_0^{\pi/2} = -\frac{2}{7}(0-1) = \frac{2}{7}.$

④ Зад. 5 $I=\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{\cos x-\cos^3 x}\,dx$

Решение: $I=\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{\cos x.\sin^2 x}\,dx=\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}|\sin x|\sqrt{\cos x}\,dx=$

$=\int\limits_{-\pi/2}^{0}|\sin x|\sqrt{\cos x}\,dx+\int\limits_{0}^{\pi/2}|\sin x|\sqrt{\cos x}\,dx=$

$=\int\limits_{-\pi/2}^{0}(-\sin x)\sqrt{\cos x}\,dx+\int\limits_{0}^{\pi/2}\sin x\sqrt{\cos x}\,dx=$

$=\int\limits_{-\pi/2}^{0}\sqrt{\cos x}\,d\cos x-\int\limits_{0}^{\pi/2}\sqrt{\cos x}\,d\cos x=$

$=\left.\frac{(\cos x)^{3/2}}{\frac{3}{2}}\right|_{-\pi/2}^{0}-\left.\frac{(\cos x)^{3/2}}{\frac{3}{2}}\right|_{0}^{\pi/2}=$

$=\frac{2}{3}(1-0)-\frac{2}{3}(0-1)=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=\frac{4}{3}.$

Зад. 6 $I=\int\limits_{0}^{1}x e^{x}\,dx$

Решение: $I=\int\limits_{0}^{1}x\,de^{x}=(xe^{x})\Big|_0^1-\int\limits_{0}^{1}e^{x}dx=$

$=(e-0)-e^{x}\Big|_0^1=e-(e-1)=1.$

Теорема за смяна на променливата при определените интеграли:

Нека: 1) $f(x)$ е непрекъснатата в интервала Δ;

2) $\varphi(t)$ е непрекъснато диференцируема в $[\alpha,\beta]$;

3) $\varphi(t)\in\Delta$ при $t\in[\alpha,\beta]$;

4) $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$.

Тогава $\int\limits_{a}^{b}f(x)dx=\int\limits_{\alpha}^{\beta}f[\varphi(t)]\,d\varphi(t)$.

Зад. 7 $I=\int\limits_{1}^{\sqrt{3}}\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}\,dx$

Решение: Правим смяна на променливата $x=\operatorname{tg}t$, $t\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]$ (за нея ни подсеща изразът 1^2+x^2).

$I=\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{1}{(1+\operatorname{tg}^2 t)^{3/2}}\,d\operatorname{tg}t=\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{1}{\left(1+\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}\right)^{3/2}}\,d\operatorname{tg}t=$

$=\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{1}{\left(\frac{1}{\cos^2 t}\right)^{3/2}}\,d\operatorname{tg}t=\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3}\cos^3 t.\frac{1}{\cos^2 t}\,dt=\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3}\cos t\,dt=\sin t\Big|_{\pi/4}^{\pi/3}=$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}.$

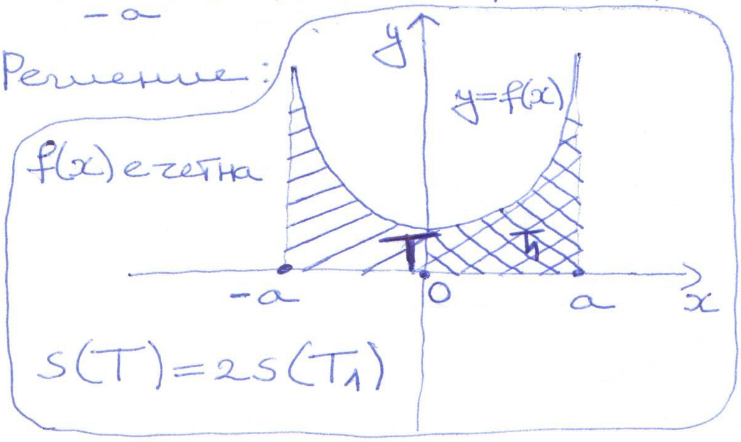
(5) Следващите две задачи се използват много често.

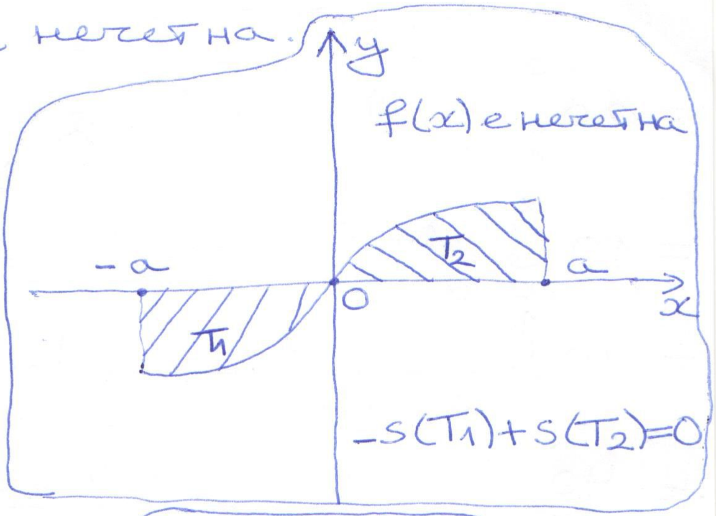
Зад. 8 (!) Нека $f(x)$ е непрекъсната в $[-a,a]$.

Док. че: а) $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx$, ако $f(x)$ е четна;

б) $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$, ако $f(x)$ е нечетна.

Решение:





$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx \overset{x=-t,\ t\in[a,0]}{=}$$

$$= \int\limits_{a}^{0} f(-t)\,d(-t) + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx = -\int\limits_{a}^{0} f(-t)\,dt + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_{0}^{a} f(-t)\,dt + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{0}^{a} [f(-x)+f(x)]\,dx =$$

$$= \begin{cases} 2\int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx, & \text{ако } f(x) \text{ е четна} \\ 0, & \text{ако } f(x) \text{ е нечетна} \end{cases}$$

Зад. 9 (!) Док. че ако $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ е непрекъсната и T-периодична, то $\int\limits_{a}^{a+T} f(x)\,dx = \int\limits_{0}^{T} f(x)\,dx$, където $a\in\mathbb{R}$ е произволно фиксирано число.

Решение: $\int\limits_{a}^{a+T} f(x)\,dx = \int\limits_{a}^{T} f(x)\,dx + \int\limits_{T}^{a+T} f(x)\,dx =$

$$= \int\limits_{a}^{T} f(x)\,dx + \int\limits_{T}^{a+T} f(x-T)\,d(x-T) \overset{u=x-T}{=}$$

$$= \int\limits_{a}^{T} f(x)\,dx + \int\limits_{0}^{a} f(u)\,du = \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx + \int\limits_{a}^{T} f(x)\,dx = \int\limits_{0}^{T} f(x)\,dx.$$

Зад. 10 $I = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{5+x-x^7}{2-|\sin 5x|}\,dx$

Решение: $I = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\frac{5}{2-|\sin 5x|}}_{\text{четна функция}}\,dx + \int\limits_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\frac{x-x^7}{2-|\sin 5x|}}_{\text{нечетна функция}}\,dx \overset{\text{от зад. 8}}{=}$

$$= 2\int\limits_{0}^{\pi} \frac{5}{2-|\sin 5x|}\,dx + 0 = 2\int\limits_{0}^{\pi} \frac{1}{2-|\sin 5x|}\,d(5x) \overset{t=5x}{=}$$

⑥ $= 2\int_0^{5\pi} \frac{1}{\underbrace{2-|\sin t|}_{\pi\text{-периодична функция}}}\, dt = 2\left(\int_0^{\pi}+\int_{\pi}^{2\pi}+\int_{2\pi}^{3\pi}+\int_{3\pi}^{4\pi}+\int_{4\pi}^{5\pi}\right) \overset{\text{от зад. 9}}{=}$

$= 2\cdot 5\int_0^{\pi} \overset{\text{от зад. 9}}{=} 10\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1}{\underbrace{2-|\sin t|}_{\text{четна функция}}}\,dt \overset{\text{от зад. 8}}{=} 20\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2-|\sin t|}\,dt=$

$=20\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2-\sin t}\,dt \overset{u=\operatorname{tg}\frac{t}{2}}{=} 20\int_0^1 \frac{1}{2-\frac{2u}{1+u^2}}\, d(2\operatorname{arctg} u)=$

$=10\int_0^1 \frac{\cancel{1+u^2}}{u^2-u+1}\cdot\frac{2}{\cancel{1+u^2}}\,du = 20\int_0^1\frac{1}{(u-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,du=$

$=20\int_0^1\frac{1}{\frac{3}{4}\left[\frac{4}{3}(u-\frac{1}{2})^2+1\right]}\,du = 20\cdot\frac{4}{3}\int_0^1\frac{1}{\left(\frac{2u-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,du=$

$=\frac{40}{\sqrt{3}}\int_0^1 \frac{1}{\left(\frac{2u-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\, d\left(\frac{2u-1}{\sqrt{3}}\right) \overset{v=\frac{2u-1}{\sqrt{3}}}{=} \frac{40}{\sqrt{3}}\int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{1}{v^2+1}\,dv=$

$=\frac{80}{\sqrt{3}}\int_0^{1/\sqrt{3}}\frac{1}{v^2+1}\,dv = \frac{80}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg} v\Big|_0^{1/\sqrt{3}} = \frac{80}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{40\pi}{3\sqrt{3}}=\frac{40\sqrt{3}\pi}{9}$

Отг. $I=\frac{40\sqrt{3}}{9}\pi$

Зад. 11 $I=\int_0^{13\pi}\frac{1}{4\cos^2x+\sin2x+1}\,dx$

Решение: $\frac{1}{4\cos^2(x+\pi)+\sin2(x+\pi)+1} = \frac{1}{4\cos^2x+\sin 2x+1}$

и сл. подинтегралната функция е π-периодична.

Тогава $I=\int_0^\pi+\int_\pi^{2\pi}+\int_{2\pi}^{3\pi}+\dots+\int_{12\pi}^{13\pi}\overset{\text{от зад. 9}}{=}13\int_0^\pi \overset{\text{от зад. 9}}{=}$

$=13\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1}{4\cos^2x+\sin2x+1}\,dx = 13\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1}{5\cos^2x+2\sin x\cos x+\sin^2x}\,dx$

имаме, че

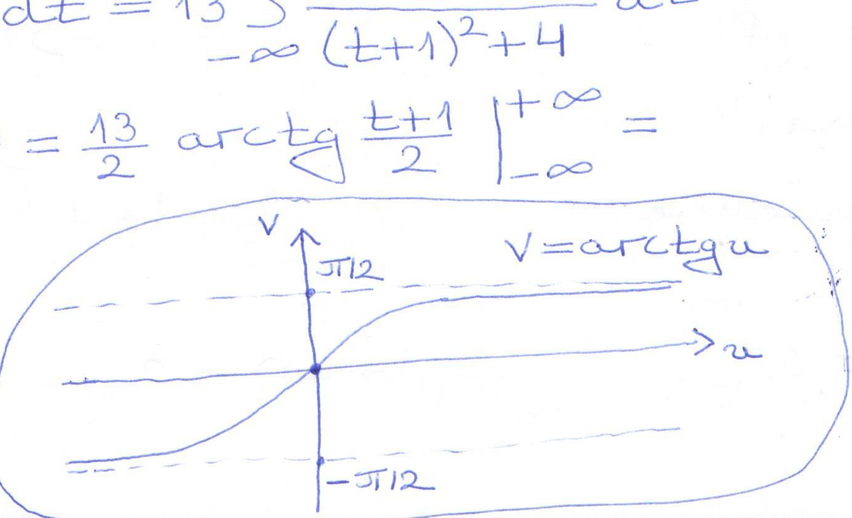
$R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$ и сл. полагаме $t=\operatorname{tg}x$.

$I=13\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\frac{1}{\cos^2x}}{5+2\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}^2x}\,dx = 13\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1}{\operatorname{tg}^2x+2\operatorname{tg}x+5}\,d\operatorname{tg}x=$

$\overset{t=\operatorname{tg}x}{=}13\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{t^2+2t+5}\,dt = 13\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(t+1)^2+4}\,dt=$

$=\frac{13}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\left(\frac{t+1}{2}\right)^2+1}\,d\frac{t+1}{2}=\frac{13}{2}\operatorname{arctg}\frac{t+1}{2}\Big|_{-\infty}^{+\infty}=$

$=\frac{13}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=\frac{13\pi}{2}$



Отг. $I=\frac{13\pi}{2}$