① Упражнение 11 за 1, 2 и 3 група

Критерий на Раабе и Дюамел

Нека $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е числов ред с положителни членове, за който съществува границата $R = \lim_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\right]$ (крайна или безкрайна). Тогава:

1) ако $R>1$, то редът $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ;

2) ако $R<1$, то редът $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е разходящ

Критерият на Раабе и Дюамел е по-силен от критерия на Даламбер, в смисъл, че дава отговор за сходимостта на по-голямо множество от редове.

Изследвайте за сходимост реда:

Зад. 1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!\,2^n}{3.7\ldots(4n-1)}$ (1)

Забележка: По определение

$(2n-1)!! = 1.3.5.7\ldots(2n-1)$

$(2n)!! = 2.4.6.8\ldots(2n)$, $n\in\mathbb{N}$

Решение: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(2n+1)!!\,2^{n+1}}{\cancel{3.7\ldots(4n-1)}(4n+3)}}{\frac{(2n-1)!!\,2^n}{\cancel{3.7\ldots(4n-1)}}}$, защото

$2(n+1)-1 = 2n+1$

и $4(n+1)-1 = 4n+3$. Така $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2.(2n+1)}{4n+3} =$

$= \frac{4n+2}{4n+3} = \frac{4+\frac{2}{n}}{4+\frac{3}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, при това отново

② Кр. на Даламбер не дава отговор за сходимостта на (1).

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=n\left(\frac{4+\frac{3}{n}}{4+\frac{2}{n}}-1\right)=$$

$$=n\cdot\frac{\frac{1}{n}}{4+\frac{2}{n}}=\frac{1}{4+\frac{2}{n}}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{4}<1.$$

По кр. на Раабе и Дюамел (1) е разходящ.

Зад. 2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})\dots(2+\sqrt{n})}$ (2)

Решение: $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{\sqrt{(n+1)!}}{\cancel{(2+\sqrt{1})\dots(2+\sqrt{n})}(2+\sqrt{n+1})}}{\frac{\sqrt{n!}}{\cancel{(2+\sqrt{1})\dots(2+\sqrt{n})}}}=$

$$=\frac{\sqrt{n+1}}{2+\sqrt{n+1}}=\frac{1}{\frac{2}{\sqrt{n+1}}+1}\xrightarrow[n\to\infty]{}1,$$ при това отляво.

Кр. на [illegible] Даламбер не дава отговор за сходимостта на (2).

$$n\cdot\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=n\left(\frac{2}{\sqrt{n+1}}+1-1\right)=\frac{2n}{\sqrt{n+1}}=$$

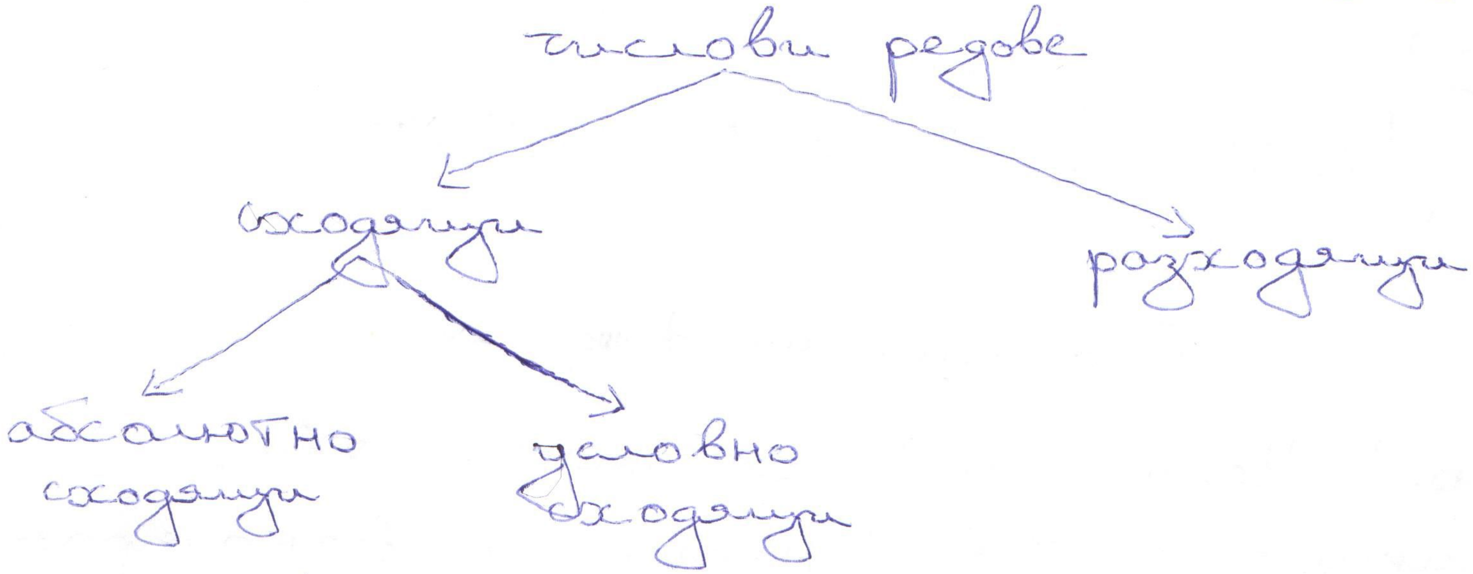
$$=\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty>1.$$

По кр. на Раабе-Дюамел (2) е сходящ.

Опр. 1 Казваме, че $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ е абсолютно сходящ, ако е сходящ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$.

③ Теорема 1 Ако $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е абсолютно сходящ, то той е сходящ.

Опр. 2 Казваме, че $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е условно сходящ, ако е сходящ, но не е абсолютно сходящ.



Критерий на Лайбниц Ако редицата $\{a_n\}$ е монотонна и $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, то $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ е сходящ.

Например по критерия на Лайбниц е сходящ реда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$, защото $\frac{1}{n} \downarrow 0$ (клони към 0 намалявайки), както е сходящ и реда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$, защото $\frac{1}{n^2} \downarrow 0$. Но да обърнем внимание, че

④ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ е условно сходящ, защото

$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{1}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ е разходящ, докато

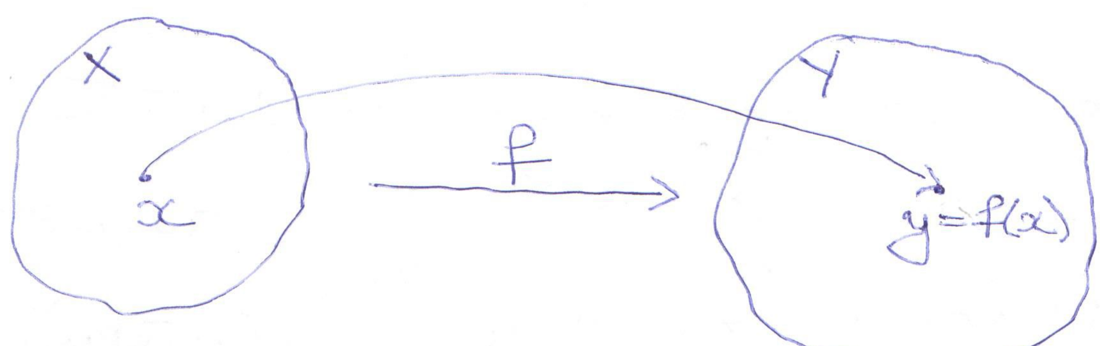
$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$ е абсолютно сходящ, защото

$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{1}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ е сходящ.

Граница на функция

Опр.1 Нека X и Y са множества. Функция на X в Y наричаме всяко правило f, което на всеки елемент $x \in X$ съпоставя единствен елемент $y \in Y$.

Означение: $f: X \longrightarrow Y$, $y = f(x)$.



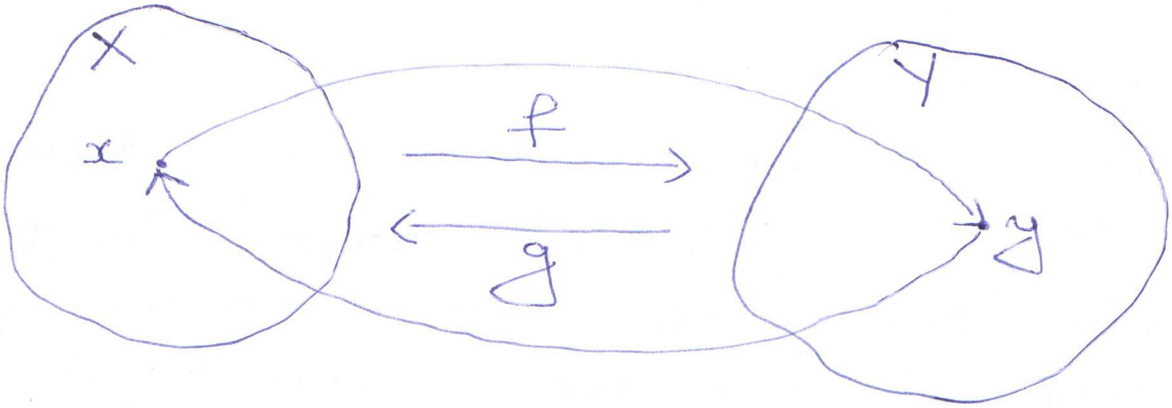
Функцията $f: X \longrightarrow Y$ се нарича:

а) инективна, ако от $x_1, x_2 \in X$ и $x_1 \neq x_2$ следва, че $f(x_1) \neq f(x_2)$;

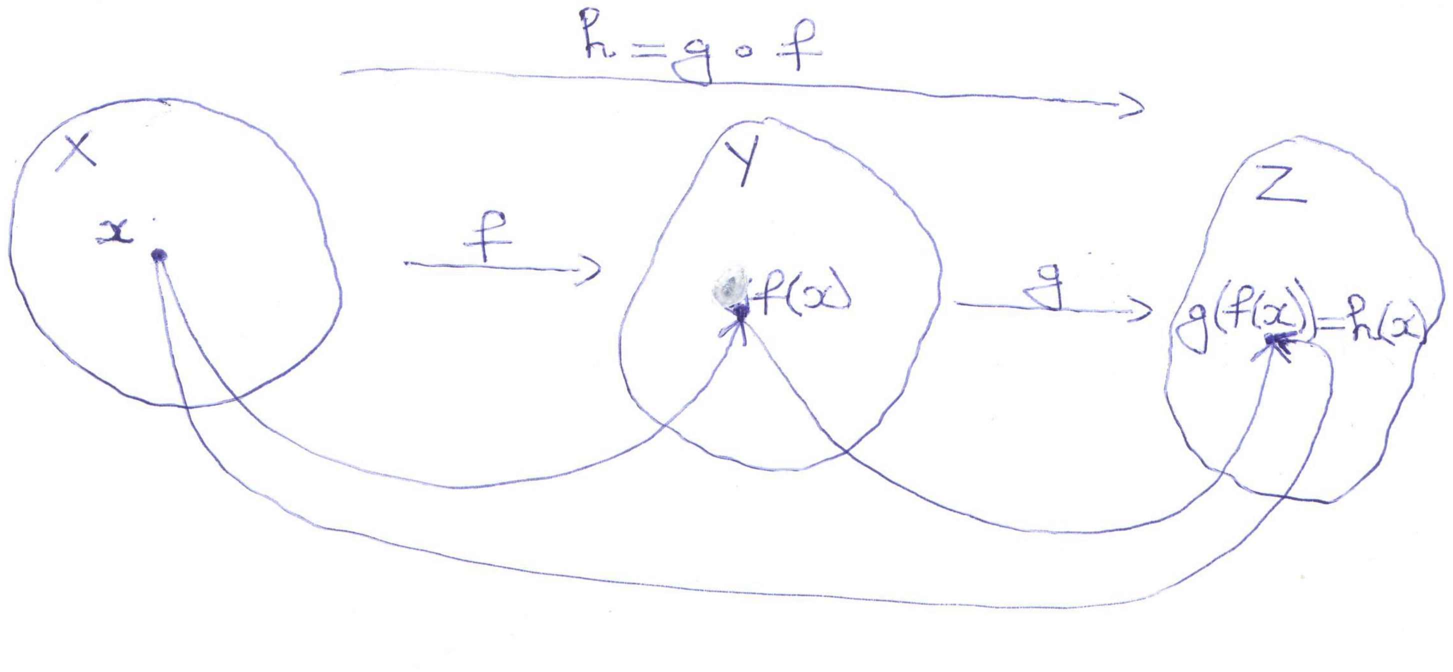
б) сюрективна, ако за всяко $y \in Y$ съществува $x \in X$, такова че $f(x) = y$;

5 в) биективна, ако е едновременно инективна и сюрективна.

Ако $f: X \longrightarrow Y$ е биективна функция, то съществува нейна обратна функция $g: Y \longrightarrow X$, действаща така: ако $f(x)=y$, то $g(y)=x$.



Ако $f: X \longrightarrow Y$ и $g: Y \longrightarrow Z$, то под композиция на g и f разбираме функцията $h: X \longrightarrow Z$, определена така: $h(x) = g(f(x))$, $x \in X$. Означение: $h = g \circ f$.



(6) Казахме тези най-, най-важни неща за понятието „функция", защото за да разберем какво е „граница на функция", трябва преди всичко да знаем какво е „функция".
Освен това понятието „функция" е едно от най-важните понятия в цялата математика.

Оттук нататък ще разглеждаме функции от вида $f: \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, където $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}$.
За такива функции в началото на следващото упражнение ще кажем какво е граница на функция, а после ще почнем да пресмятаме конкретни граници.