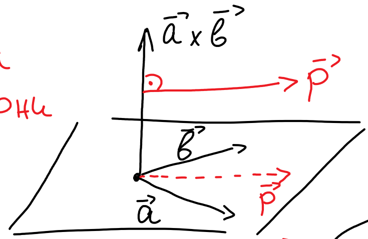
Вектори - обобщение

1 зад. (Основна) Формула за двойно векторно произведение

а) $(\vec a\times\vec b)\times\vec c = \vec p$, $\vec p\perp\vec a\times\vec b \Rightarrow \vec a,\vec b,\vec p$ са компланарни

$\vec a,\vec b$ - ЛНЗ $\qquad \vec p\perp\vec c$



$$(\underset{1}{\vec a}\times\underset{2}{\vec b})\times\underset{3}{\vec c} = (\underset{1}{\vec a}.\underset{3}{\vec c}).\underset{2}{\vec b} - (\underset{2}{\vec b}.\underset{3}{\vec c}).\underset{1}{\vec a} \;!$$

$\vec p = \alpha.\vec a+\beta.\vec b$ $\qquad (\vec a\times\vec b)$

б) $\vec a\times(\vec b\times\vec c) = -(\underset{1}{\vec b}\times\underset{2}{\vec c})\times\underset{3}{\vec a} = -[(\underset{1}{\vec b}.\underset{3}{\vec a}).\underset{2}{\vec c} - (\underset{2}{\vec c}.\underset{3}{\vec a}).\underset{1}{\vec b}] =$

$= (\vec a.\vec c).\vec b - (\vec b.\vec a).\vec c$!!

в) (Упр.) $\vec a\times(\vec b\times\vec c)+\vec b\times(\vec c\times\vec a)+\vec c\times(\vec a\times\vec b) \overset{?}{=} \vec 0$

---

2 зад. (Основна) ?, че за всеки 4 вектора $\vec a,\vec b,\vec c$ и $\vec d$ е изпълнено

$$(\vec a\times\vec b).(\vec c\times\vec d) = \begin{vmatrix}(\vec a.\vec c) & (\vec a.\vec d)\\ (\vec b.\vec c) & (\vec b.\vec d)\end{vmatrix} = \Delta$$

Д-во:

$(\vec a\times\vec b).\underbrace{(\vec c\times\vec d)}_{\vec v} = (\vec a\times\vec b).\vec v = \vec a.(\vec b\times\underset{\vec c\times\vec d}{\overset{\shortparallel}{\vec v}}) = \vec a.(\underset{1}{\vec b}\times(\underset{2}{\vec c}\times\underset{3}{\vec d})) =$

$= \vec a.[(\underset{1}{\vec b}.\underset{3}{\vec d}).\vec c - (\underset{1}{\vec b}.\underset{2}{\vec c}).\vec d] = (\vec b.\vec d).(\vec a.\vec c) - (\vec b.\vec c).(\vec a.\vec d) = \Delta$

$$(\vec a\times\vec b).(\vec a\times\vec b) = (\vec a\times\vec b)^2 = \begin{vmatrix}\vec a^2 & (\vec a\vec b)\\ (\vec a\vec b) & \vec b^2\end{vmatrix} = \Gamma(\vec a,\vec b) \Rightarrow |\vec a\times\vec b| = \sqrt{\Gamma(\vec a,\vec b)}$$

---

3 зад. (Основна): Да се докаже, че за всеки 3 вектора $\vec a,\vec b$ и $\vec c$ е изп.

$$(\vec a\vec b\vec c)^2 = \begin{vmatrix}\vec a^2 & (\vec a\vec b) & (ac)\\ (\vec a\vec b) & \vec b^2 & (\vec b\vec c)\\ (\vec a\vec c) & (\vec b\vec c) & \vec c^2\end{vmatrix} = \Gamma(\vec a,\vec b,\vec c)$$

Д-во: $(\vec p\times\vec q)^2 = \vec p^2.\vec q^2 - (\vec p.\vec q)^2 \Rightarrow (\vec p.\vec q)^2 = \vec p^2.\vec q^2 - (\vec p\times\vec q)^2$

$$(\vec a\vec b\vec c)^2=\Big(\underbrace{(\vec a\times\vec b)}_{\vec p}\cdot\underbrace{\vec c}_{\vec q}\Big)^2=\underline{(\vec a\times\vec b)^2}\cdot\vec c^{\,2}-\big(\underset{1}{(\vec a}\times\underset{2}{\vec b)}\times\underset{3}{\vec c}\big)^2=$$

$$=\left(\vec a^{\,2}\cdot\vec b^{\,2}-(\vec a\cdot\vec b)^2\right)\cdot\vec c^{\,2}-\Big[(\underset{1}{\vec a}\cdot\underset{3}{\vec c})\cdot\vec b-(\underset{2}{\vec b}\cdot\underset{3}{\vec c})\cdot\vec a\Big]^2=$$

$$=\vec a^{\,2}\cdot\vec b^{\,2}\cdot\vec c^{\,2}-(\vec a\cdot\vec b)^2\cdot\vec c^{\,2}-\Big[(\vec a\vec c)^2\cdot\vec b^{\,2}-2.(\vec a\cdot\vec c).(\vec b\cdot\vec c).(\vec b\cdot\vec a)+(\vec b\cdot\vec c)^2\cdot\vec a^{\,2}\Big]=$$

$$=\vec a^{\,2}\cdot\vec b^{\,2}\cdot\vec c^{\,2}+2.(\vec a\cdot\vec c).(\vec b\cdot\vec c).(\vec b\cdot\vec a)-(\vec a\vec b)^2\cdot\vec c^{\,2}-(\vec a\cdot\vec c)^2\cdot\vec b^{\,2}-(\vec b\cdot\vec c)^2\cdot\vec a^{\,2}=\Gamma(\vec a,\vec b,\vec c)$$

---

4 зад. $\vec a,\vec b,\vec c$, $|\vec a|=|\vec b|=|\vec c|=1$, $\angle(\vec a,\vec b)=\angle(\vec b,\vec c)=\angle(\vec c,\vec a)=\frac{\pi}{3}$

$\vec a^{\,2}=\vec b^{\,2}=\vec c^{\,2}=1$, $(\vec a\vec b)=(\vec b\vec c)=(\vec c\vec a)=\frac{1}{2}$

а) ? че $\vec a,\vec b,\vec c$ са ЛНЗ

Пресм. $(\vec a\vec b\vec c)^2=\Gamma(\vec a,\vec b,\vec c)=\begin{vmatrix}1&\frac12&\frac12\\ \frac12&1&\frac12\\ \frac12&\frac12&1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\neq 0\Rightarrow\vec a,\vec b,\vec c$ са ЛНЗ

б) $\vec{OA}=\vec a+\vec b$, $\vec{OB}=\vec b+\vec c$, $\vec{OC}=\vec c+\vec a$

$V_{OABC}=?$ $\boxed{V=\frac{1}{6}.\left|(\vec{OA}\ \vec{OB}\ \vec{OC})\right|}$

$$(\vec{OA}\ \vec{OB}\ \vec{OC})=\big[(\vec a+\vec b)\times(\vec b+\vec c)\big].(\vec c+\vec a)=\Big[(\vec a\times\vec b)+(\vec a\times\vec c)+\underbrace{(\vec b\times\vec b)}_{\vec 0}+(\vec b\times\vec c)\Big].(\vec c+\vec a)=$$

$$=\underbrace{(\vec a\vec b\vec c)}_{\neq 0}+\underbrace{(\vec a\vec b\vec a)}_{0}+\underbrace{(\vec a\vec c\vec c)}_{0}+\underbrace{(\vec a\vec c\vec a)}_{0}+\underbrace{(\vec b\vec c\vec c)}_{0}+\underbrace{(\vec b\vec c\vec a)}_{\neq 0}=(\vec a\vec b\vec c)+(\vec a\vec b\vec c)=2.(\vec a\vec b\vec c)$$

$(\vec{OA}\ \vec{OB}\ \vec{OC})=2.(\vec a\vec b\vec c)=2.\left(\pm\frac{1}{\sqrt2}\right)$ $\left\{(\vec a\vec b\vec c)^2=\frac12\right\}$

$V=\frac{1}{6}\cdot\sqrt2=\frac{\sqrt2}{6}$

---

5 зад. $\vec a,\vec b$: $|\vec a|=2$, $|\vec b|=1$, $\angle(\vec a,\vec b)=\frac{2\pi}{3}$ | $\vec a^{\,2}=4$, $\vec b^{\,2}=1$, $(\vec a\cdot\vec b)=-1$

$\vec{OA}=(\vec a\times\vec b)\times\vec a$

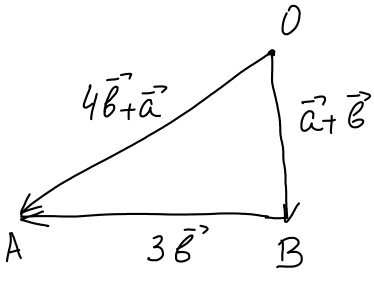
$\vec{OB}=\vec b\times(\vec a\times\vec b)$

а) $P_{\Delta AOB}=?$ $S_{\Delta AOB}=?$

1) $\vec{OA}=(\underset{1}{\vec a}\times\underset{2}{\vec b})\times\underset{3}{\vec a}=(\vec a^{\,2}).\vec b-(\vec b\cdot\vec a).\vec a=\boxed{4\vec b+\vec a}$

$\vec{OB}=\underset{1}{\vec b}\times(\underset{2}{\vec a}\times\underset{3}{\vec b})=(\vec b^{\,2}).\vec a-(\vec b\cdot\vec a).\vec b=\boxed{\vec a+\vec b}$

$\vec{BA}=\vec{OA}-\vec{OB}=4\vec b+\vec a-\vec a-\vec b=3.\vec b$



$P_{\triangle OAB} = |\vec{OA}| + |\vec{OB}| + |\vec{BA}|$ Упр.

!!! $\boxed{S_{\triangle OAB} = \dfrac{|\vec{OB} \times \vec{BA}|}{2}}$, $\vec{OB} \times \vec{BA} = (\vec{a}+\vec{b}) \times (3\vec{b}) = 3.(\vec{a}\times\vec{b} + \underbrace{\vec{b}\times\vec{b}}_{\vec{0}})$

$\vec{OB} \times \vec{BA} = 3.(\vec{a}\times\vec{b})$

$|\vec{OB}\times\vec{BA}| = 3.|\vec{a}\times\vec{b}| = 3.|\vec{a}|.|\vec{b}|.\sin\frac{2\pi}{3} = 3.2.1.\frac{\sqrt{3}}{2}$

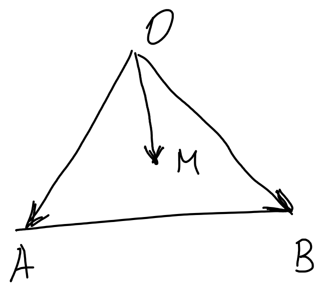
$|\vec{OB}\times\vec{BA}| = 3\sqrt{3}$

$S_{\triangle OAB} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

б) Нека M е медиц. на $\triangle OAB$

$\vec{OM} = ?$ чрез $\vec{a}$ и $\vec{b}$

$|\vec{OM}| = ?$



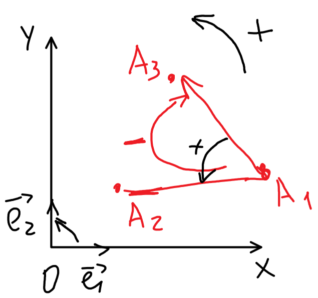
$\vec{OM} = \frac{1}{3}.(\vec{OA}+\vec{OB})$ (Защо?)

$\vec{OM} = \frac{1}{3}.(4\vec{b}+\vec{a}+\vec{a}+\vec{b}) = \frac{1}{3}.(5\vec{b}+2\vec{a})$

$|\vec{OM}|^2 = \frac{1}{9}.(5.\vec{b}+2.\vec{a})^2 = \frac{1}{9}.(25.\underbrace{\vec{b}^2}_{1} + 20.\underbrace{(\vec{a}.\vec{b})}_{-1} + 4.\underbrace{\vec{a}^2}_{4}) = \frac{1}{9}.(25-20+16) = \frac{21}{9}$

$|\vec{OM}| = \frac{\sqrt{21}}{3}$

Ориентирано лице на $\triangle$



$S_{\triangle A_1A_2A_3} = \frac{1}{2}.\left| \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \right|$

Oxy OKC

! $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} < 0$

---

6 зад. OKC $K = Oxyz$

$\begin{cases} A(3,1,2) \\ B(1,2,3) \\ C(2,3,1) \end{cases}$

$D(3,3,3)$

а) Ако същ. $\triangle ABC$, намерете $S_{\triangle ABC} = ?$

б) Ако същ. тетраедър ABCD, намерете $V_{ABCD} = ?$

---

a) $\vec{AB}(-2, 1, 1)$
$\vec{AC}(-1, 2, -1)$ Дали AB и AC са ЛЗ или ЛНЗ?

$$\vec{AB}\times\vec{AC}\left(\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}1 & -2\\ -1 & -1\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}-2 & 1\\ -1 & 2\end{vmatrix}\right)$$

$$\vec{AB}\times\vec{AC}(-3, -3, -3) \neq \vec{0} \Rightarrow \vec{AB} \text{ и } \vec{AC} \text{ са ЛНЗ}$$

$\Rightarrow$ общ. $\triangle ABC$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{|\vec{AB}\times\vec{AC}|}{2} \quad \text{ОКС } Oxyz$$

$$|\vec{AB}\times\vec{AC}| = \sqrt{27} = 3.\sqrt{3} \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

б) $\vec{AB}(-2,1,1)$
$\vec{AC}(-1,2,-1)$ Дали $\vec{AB}, \vec{AC}$ и $\vec{AD}$ са ЛЗ?
$\vec{AD}(0,2,1)$

$$(\vec{AB}\ \vec{AC}\ \vec{AD}) = \begin{vmatrix}-2 & 1 & 1\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & 2 & 1\end{vmatrix} = -9 \quad !!!$$
ОКС

Може $\vec{AB}\times\vec{AC}(-3,-3,-3)$
$\vec{AD}(0,2,1)$
$\cdot \quad (-3).0+(-3).2+(-3).1=-9$

$(\vec{AB}\ \vec{AC}\ \vec{AD}) \neq 0 \Rightarrow A, B, C$ и D не лежат в 1 равнина

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\cdot|(\vec{AB}\ \vec{AC}\ \vec{AD})| = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} \text{ куб. ед.}$$

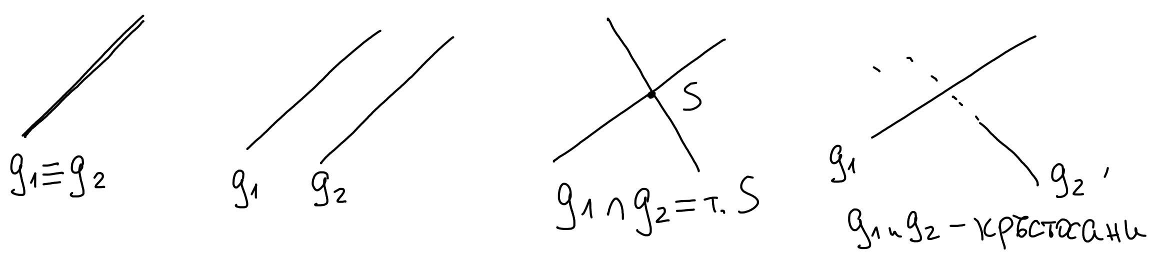
---

7 зад. ОКС $K = Oxyz$

$A(6,0,1)$, $B(-1,3,2)$
$C(5,1,3)$, $D(6,1,3)$

а) Определете взаимното положение на правите AB и CD.

$g_1 = AB$, $g_2 = CD$



$g_1 \cap g_2 = т.\ S$

g_1 и g_2 – кръстосани

1) Дали A, B, C и D лежат в 1 равнина?

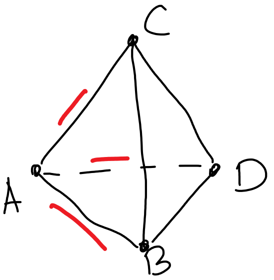
$(\vec{AB}\ \vec{AC}\ \vec{AD}) = ?$

$\vec{AB}(-7, 3, 1)$

$\vec{AC}(-1, 1, 2)$

$\vec{AD}(0, 1, 2)$

$$(\vec{AB}\ \vec{AC}\ \vec{AD}) = \begin{vmatrix} -7 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \Rightarrow \vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD} \text{ ЛНЗ}$$



A, B, C, D не са компланарни

$\Downarrow$

AB и CD – кръстосани

Предложение:

1) Дали $\vec{AB}$ и $\vec{CD}$ са колинеарни?

2) Дали A, B, C и D лежат в 1 р-на?

Изпити за КН 17.06 – задачи

21.06 – теория

Геометрия