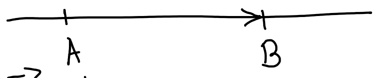
1) Насочена отсечка

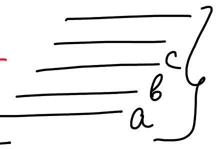


$\overrightarrow{AB}$, A – начало
B – край

$\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$

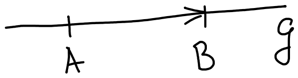
2) Елементи

2.1) Направление

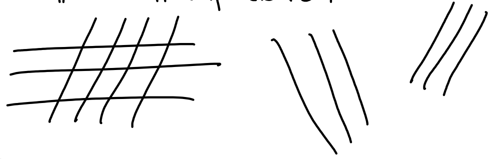


$a \parallel g,\ b \parallel g$

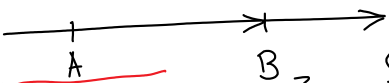
„$\parallel$" – направление



g – директриса на AB



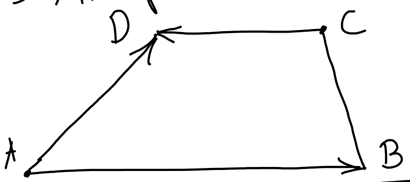
2.2) Посока на $\overrightarrow{AB}$: посоката на движение върху g от A към B.



2.3) Дължина на $\overrightarrow{AB}$: $|\overrightarrow{AB}| \geq 0$

3. Сравняване на насочени отсечки

3.1) Направления:

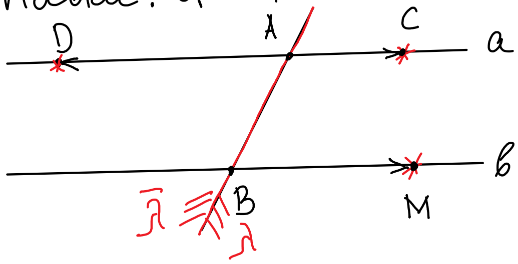


Разгл. $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$ – колинеарни (линейно зависими)

$\overrightarrow{AB} \nparallel \overrightarrow{AD}$ – неколинеарни (линейно независими)

3.2) Посоки: сравняване посоки само на колинеарни нас. отсечки



$\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BM}$

$C \in \lambda,\ M \in \lambda$

$\Downarrow$

$\overrightarrow{AC} \uparrow\uparrow \overrightarrow{BM}$

еднопосочни

„$\uparrow\uparrow$" – релация на еквивалентност

$\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BM}$

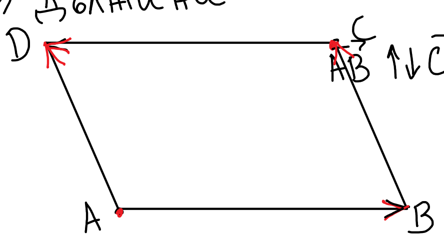
$D \in \bar{\lambda},\ M \in \lambda$

$\Downarrow$

$\overrightarrow{AD} \uparrow\downarrow \overrightarrow{BM}$

противопосочни

3.3) Дължини



$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$

$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$

$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$

противоположни

$\overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{BC}$

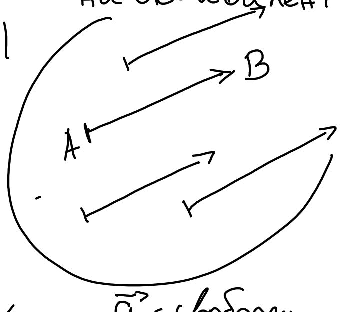
$\overrightarrow{AD} \uparrow\uparrow \overrightarrow{BC}$

$|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{BC}|$

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

равни

„=" е релация на еквивалентност.



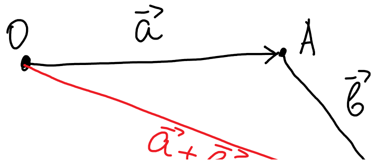
$\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ $\vee$

$\overrightarrow{AB} \in \vec{a}$

$\vec{a}$ – свободен вектор

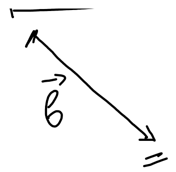
4. Сбор на вектори

4.1) Правило на Δ-ка

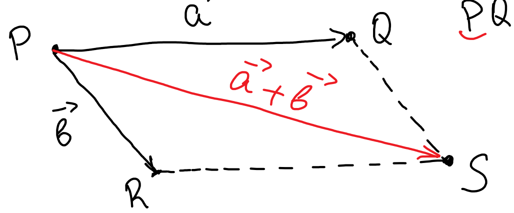


$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$

$\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$



$\vec{a}+\vec{b}=\vec{OA}+\vec{AB}=\vec{OB}$



$\vec{PQ}=\vec{a}$, $\vec{PR}=\vec{b}$

$\vec{PQ}+\vec{PR}=\vec{a}+\vec{b}=\vec{PS}$

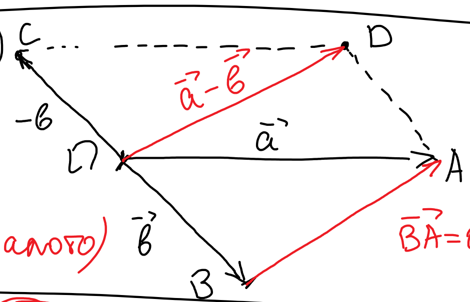
Свойства:

1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$
2) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$
3) $\exists!\ \vec{o}:\ \vec{a}+\vec{o}=\vec{a}$
4) $\forall\vec{a}\ \exists!(-\vec{a}):\ \vec{a}+(-\vec{a})=\vec{o}$

Разлика на вектори: $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$

$\vec{OA}-\vec{OB}=\vec{BA}$

$\vec{MN}=\vec{ON}-\vec{OM}$ (от края изваждаме началото)



$\vec{BA}=\vec{OD}=\vec{a}-\vec{b}$

5. Умножение на вектор с число

$\vec{a}\neq\vec{o}$, $k\in\mathbb{R}\Rightarrow k.\vec{a}=\vec{b}$: $\begin{cases}\text{направление}: \vec{b}\parallel\vec{a}\\ \text{посока}: \vec{b}\uparrow\uparrow\vec{a},\ k>0;\ \vec{b}\uparrow\downarrow\vec{a},\ k<0;\ k=0\Rightarrow\vec{b}=\vec{o}\\ |\vec{b}|=|k|.|\vec{a}|\end{cases}$

Свойства:

1) $k.(\vec{a}+\vec{b})=k.\vec{a}+k.\vec{b}$
2) $1.\vec{a}=\vec{a}$;
3) $k.(l.\vec{a})=(k.l).\vec{a}$
4) $(k+l).\vec{a}=k.\vec{a}+l.\vec{a}$

Задачи:

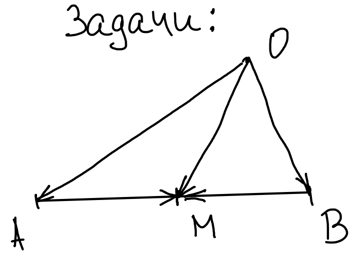
1 зад. (Основна)

$A\neq B$

т. O – произволна

т. M е средата на AB

?, че $\vec{OM}=\frac{1}{2}.(\vec{OA}+\vec{OB})$!



$\left.\begin{array}{l}\vec{OM}=\vec{OA}+\vec{AM}\\ \vec{OM}=\vec{OB}+\vec{BM}\end{array}\right\}+$

$2.\vec{OM}=\vec{OA}+\vec{OB}+\underbrace{\vec{AM}+\vec{BM}}_{=\vec{o}}\quad /.\frac{1}{2}$

$\vec{OM}=\frac{1}{2}.(\vec{OA}+\vec{OB})$

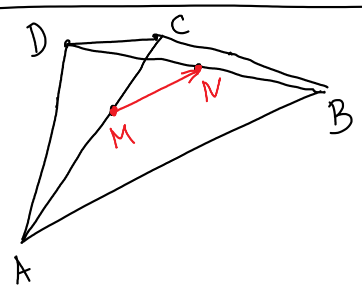
2 зад.

ABCD – четириъгълник

M – средата на AC

N – средата на BD

?, че $\vec{MN}=\frac{1}{2}.(\vec{AB}+\vec{CD})=\frac{1}{2}.(\vec{AD}+\vec{CB})$



M е средата на AC $\xrightarrow{\text{осн. зад.}}$

$\vec{OM}=\frac{1}{2}.(\vec{OA}+\vec{OC})$

N е средата BD $\xrightarrow{\text{осн. зад.}}$

$\vec{ON}=\frac{1}{2}.(\vec{OB}+\vec{OD})$

$\vec{MN}=\vec{ON}-\vec{OM}=$

$=\frac{1}{2}.(\vec{OB}+\vec{OD}-\vec{OA}-\vec{OC})=$

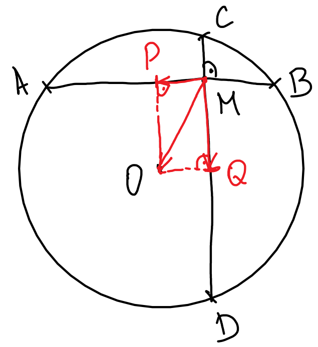
$=\frac{1}{2}.[(\vec{OB}-\vec{OA})+(\vec{OD}-\vec{OC})]=$

$=\frac{1}{2}.(\vec{AB}+\vec{CD})$

$$= \frac{1}{2}\cdot(\vec{AB} + \vec{CD})$$

3 зад.
$k(O)$
AB, CD – хорди
$AB \perp CD$
$AB \cap CD = M$ – вътрешна за k

?, че $2.\vec{MO} = \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD}$



Нека P и Q са средите съотв. на AB и CD.
$MPOQ$ е правоъгълник $\Rightarrow$
$\vec{MO} = \vec{MP} + \vec{MQ}$
P е средата на $AB \Rightarrow$
$\Rightarrow \vec{MP} = \frac{1}{2}\cdot(\vec{MA} + \vec{MB})$
Q е средата на $CD \Rightarrow$
$\Rightarrow \vec{MQ} = \frac{1}{2}\cdot(\vec{MC} + \vec{MD})$ +

$$\Rightarrow \vec{MO} = \frac{1}{2}\cdot(\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD})$$

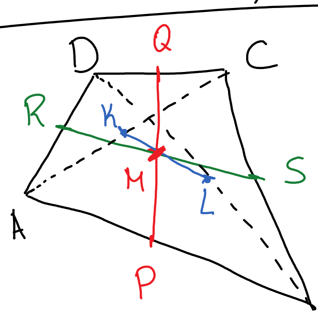
Опр.: Точката M се нарича медицентър (центроид) на сист. от точки $A_1, A_2, \dots, A_n$, ако:
(1) $\vec{MA_1} + \vec{MA_2} + \dots + \vec{MA_n} = \vec{o}$
! (2) $\vec{OM} = \frac{1}{n}\cdot(\vec{OA_1} + \vec{OA_2} + \dots + \vec{OA_n})$
т.O – произволна
$\vec{OM_1} = \vec{OM_2} \Rightarrow M_1 \equiv M_2$

(1) $\Longleftrightarrow$ (2)

Д-во:
I (1) $\vec{MA_1} + \dots + \vec{MA_n} = \vec{o}$
т.O – произволна
$\vec{MA_i} = \vec{OA_i} - \vec{OM}$, $i = 1, \dots, n \Rightarrow$
$\vec{OA_1} + \dots + \vec{OA_n} - n.\vec{OM} = \vec{o}$

II (2) $\vec{OM} = \frac{1}{n}\cdot(\vec{OA_1} + \dots + \vec{OA_n})$,
$O \equiv M \Rightarrow \vec{o} = \frac{1}{n}\cdot(\vec{MA_1} + \dots + \vec{MA_n})$

4 зад.
$ABCD$ – четириъгълник
Да се определи положението на онази т. M, за която
$\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} = \vec{o}$



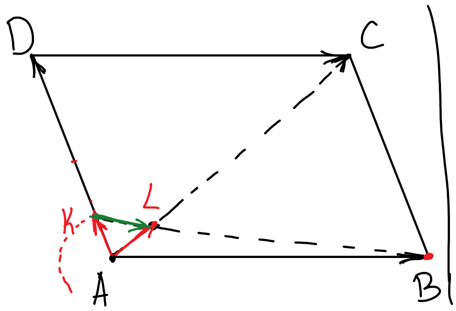
!

P и Q са средите съотв. на AB и CD
От осн. зад. $\Rightarrow$
$\Rightarrow \vec{MP} = \frac{1}{2}\cdot(\vec{MA} + \vec{MB})$
$\vec{MQ} = \frac{1}{2}\cdot(\vec{MC} + \vec{MD})$ +
$\vec{MP} + \vec{MQ} = \frac{1}{2}\cdot(\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD}) = \vec{o}$
$\vec{MP} + \vec{MQ} = \vec{o} \Rightarrow$ M е средата на PQ

M е средата на PQ
M е средата на RS
M е средата на KL

5 зад.
$ABCD$ – успоредник
т.K: $\vec{AK} = \frac{1}{5}\cdot\vec{AD}$
т.L: $\vec{AL} = \frac{1}{6}\cdot\vec{AC}$

?, че K, L и B лежат на една права (колинеарни)



$\vec{AB} = \vec{DC} = \vec{AC} - \vec{AD} = 6.\vec{AL} - 5.\vec{AK}$

Разгл. $\vec{KL}$ и $\vec{LB}$

на една права (колинеарни)

$\vec{AB}=\vec{DC}=\vec{AC}-\vec{AD}=\underbrace{6.\vec{AL}-5.\vec{AK}}_{\vec{LB}}$

Разгл. $\vec{KL}$ и $\vec{LB}$

Ще док., че $\vec{KL}=x.\vec{LB}$

Ще изразим $\vec{KL}$ и $\vec{LB}$ чрез $\vec{AK}$ и $\vec{AL}$

$\vec{KL}=\vec{AL}-\vec{AK}$

$\vec{LB}=\underbrace{\vec{AB}}_{?}-\vec{AL}=6.\vec{AL}-5.\vec{AK}-\vec{AL}=5.(\vec{AL}-\vec{AK})=5.\vec{KL}$ / $\vec{LB}=5.\vec{KL}\Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{LB}\parallel\vec{KL}$, обща т. L

$\Rightarrow L, B$ и K лежат на 1 пр.

---

6 зад.

$OABC$ – тетраедър (триъгълна пирамида)

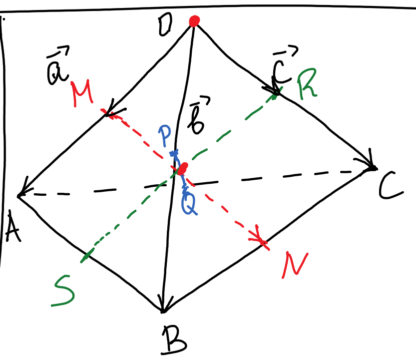
$\vec{OA}=\vec{a}$, $\vec{OB}=\vec{b}$, $\vec{OC}=\vec{c}$

M, P и R са средите съотв. OA, OB и OC

N, Q и S са средите съотв. BC, AC и AB

а) Да се изразят $\vec{MN}$, $\vec{PQ}$ и $\vec{RS}$ чрез $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$;

б) ?, че отсечките MN, PQ и RS имат обща среда.



а) $\vec{MN}=\vec{ON}-\vec{OM}$

$\vec{OM}=\frac{1}{2}.\vec{a}$

$\vec{ON}=\frac{1}{2}.(\vec{b}+\vec{c})$

$\vec{MN}=\frac{1}{2}.(\vec{b}+\vec{c}-\vec{a})$

$\vec{RS}=\vec{OS}-\vec{OR}$

$\vec{OR}=\frac{1}{2}.c$

$\vec{OS}=\frac{1}{2}(a+b)$

$\vec{RS}=\frac{1}{2}.(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})$

$\vec{PQ}=\vec{OQ}-\vec{OP}=\frac{1}{2}.(\vec{a}+\vec{c}-\vec{b})$ (Защо?)

б) Нека O_1 е средата на $MN\Rightarrow \vec{OO_1}=\frac{1}{2}.(\vec{OM}+\vec{ON})=\frac{1}{2}.\left(\frac{\vec{a}}{2}+\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}\right)=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{4}$

O_2 е средата на $PQ\Rightarrow \vec{OO_2}=\frac{1}{2}.(\vec{OP}+\vec{OQ})=\frac{1}{2}.\left(\frac{\vec{b}}{2}+\frac{\vec{a}+\vec{c}}{2}\right)=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{4}$

O_3 е средата на $RS\Rightarrow \vec{OO_3}=\dots=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{4}$

$\vec{OO_1}=\vec{OO_2}=\vec{OO_3}\Rightarrow O_1\equiv O_2\equiv O_3$

$\vec{OO_1}=\frac{1}{4}.(\underbrace{\vec{OO}}_{\vec{0}}+\underbrace{\vec{OA}}_{\vec{a}}+\underbrace{\vec{OB}}_{\vec{b}}+\underbrace{\vec{OC}}_{\vec{c}})=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{4}$

O, A, B, C

01.03.2021, пн. от 9:15