

Второ контролно по Вероятности, КН

Име....., Група....., ФН.....

04.06.2023 Вариант 1

Задача 1 Случайната величина (X, Y) има плътност $f(x, y) = \begin{cases} c(x+y)^2, & 0 < y < x < 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

Да се намерят:

- а) константата c и функцията на разпределение за X ;
- б) вероятността $\mathbf{P}(X \leq 2Y)$ и средната стойност $\mathbf{E}(X \mid Y = 1/2)$.

Задача 2 Височината на студентите е нормално разпределена случайна величина с параметри $\mathcal{N}(170, 4^2)$ за момчетата и $\mathcal{N}(174, 4^2)$ за момчетата. Да се определи вероятността:

- а) случайно избран студент да е по-висок от 170см, ако е известно, че е над 165см.
- б) от 12 случайно избрани студента, поне трима да имат ръст между 160см и 172см;

Задача 3 Нека $\{X_n\}_{n \geq 1}$ са независими и равномерно разпределени в $(0, 1)$. Редиците $\{Y_n\}_{n \geq 1}$ и $\{Z_n\}_{n \geq 1}$ са дефинирани чрез $Y_n = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, $Z_n = f(n(1 - Y_n))$, където $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ е строго растяща функция.

- а) Да се намери разпределението на Y_n и на Z_n , при $f(x) = x$;
- б) Да се докаже, че $\{Z_n\}_{n \geq 1}$ е сходяща по разпределение и да се намери разпределението на границата, при $f(x) = x^2$. Вярно ли е твърдението за произволна строго растяща f ?

Задача 4 Нека X_1, X_2, \dots, X_n са независими и еднакво разпределени случайни величини, като $\mathbf{P}(X_1 = k) = \frac{1}{m}$, $k = 0, 1, \dots, m-1$. Нека $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ и с $F(x)$ е означена функцията на разпределение за X . Да се намерят:

- а) пораждащата функция на X ;
- б) сумата на редът $\sum_{i=0}^{\infty} F(i)x^i$, при $|x| < 1$.

Задача 5 Нека n и k са естествени числа, като $2 \leq k \leq n-1$. Доставчик получава n поръчки в рамките на един час, като те пристигат независимо една от друга и равномерно разпределени в $(0, 1)$. Ние знаем, че поради претоварване, доставчикът може да изпълни само k -тата поръчка (в хронологичен ред). В кой момент от $(0, 1)$ е нужно да подадем своята поръчка, за да имаме максимална вероятност за нейното изпълнение.

Второ контролно по Вероятности, КН
Име....., Група....., ФН.....
04.06.2023 Вариант 2

Задача 1 Случайната величина (X, Y) има плътност $f(x, y) = \begin{cases} c(x+y)^2, & 0 < y < x < 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

Да се намерят:

- а) константата c и функцията на разпределение за X ;
- б) вероятността $\mathbf{P}(X \leq 2Y)$ и средната стойност $\mathbf{E}(X \mid Y = 1/2)$.

Задача 2 Височината на студентите е нормално разпределена случайна величина с параметри $\mathcal{N}(170, 4^2)$ за момчетата и $\mathcal{N}(174, 4^2)$ за момчетата. Да се определи вероятността:

- а) случайно избран студент да е по-висок от 170см, ако е известно, че е над 165см.
- б) от 12 случайно избрани студента, поне трима да имат ръст между 160см и 172см;

Задача 3 Нека $\{X_n\}_{n \geq 1}$ са независими и равномерно разпределени в $(0, 1)$. Редиците $\{Y_n\}_{n \geq 1}$ и $\{Z_n\}_{n \geq 1}$ са дефинирани чрез $Y_n = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, $Z_n = f(n(1 - Y_n))$, където $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ е строго растяща функция.

- а) Да се намери разпределението на Y_n и на Z_n , при $f(x) = x$;
- б) Да се докаже, че $\{Z_n\}_{n \geq 1}$ е сходяща по разпределение и да се намери разпределението на границата, при $f(x) = x^2$. Вярно ли е твърдението за произволна строго растяща f ?

Задача 4 Нека X_1, X_2, \dots, X_n са независими и еднакво разпределени случайни величини, като $\mathbf{P}(X_1 = k) = \frac{1}{m}$, $k = 0, 1, \dots, m-1$. Нека $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ и с $F(x)$ е означена функцията на разпределение за X . Да се намерят:

- а) пораждащата функция на X ;
- б) сумата на редът $\sum_{i=0}^{\infty} F(i)x^i$, при $|x| < 1$.

Задача 5 Нека n и k са естествени числа, като $2 \leq k \leq n-1$. Доставчик получава n поръчки в рамките на един час, като те пристигат независимо една от друга и равномерно разпределени в $(0, 1)$. Ние знаем, че поради претоварване, доставчикът може да изпълни само k -тата поръчка (в хронологичен ред). В кой момент от $(0, 1)$ е нужно да подадем своята поръчка, за да имаме максимална вероятност за нейното изпълнение.