

$$2 \text{ сл. } \sum \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 2^{-5} \sum \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix} = 1, \text{ т. е.}$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2} \Leftrightarrow g_1 \parallel g_2$$

$$3 \text{ сл. } \sum \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix} = 2 \Leftrightarrow \nexists! \text{ т. } S = g_1 \cap g_2$$

\* \* \*

/2 зад. (Успоредни прави)

Дадени са правата  $a: 3x + 4y + 2 = 0$  и точка  $A(1, -2)$ . Да се намери уравнение на правата  $a_1$   $\begin{cases} \perp a \\ \text{и } A \end{cases}$ .

Решение:

$$a: 3x + 4y + 2 = 0$$

$$a_1 \perp a \Rightarrow a_1: 3x + 4y + C = 0$$

$$A(1, -2) \in a_1 \Rightarrow 3 \cdot 1 + 4 \cdot (-2) + C = 0$$

$$C = 5 \Rightarrow a_1: 3x + 4y + 5 = 0$$

\* \* \*

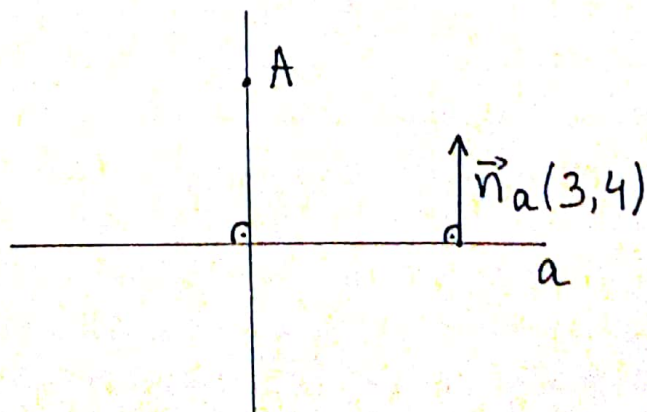
/3 зад. (Перпендикулярни прави)

$$a: 3x + 4y + 2 = 0, A(1, -2)$$

Да се намери уравнение

$$\text{на правата } b \begin{cases} \perp a \\ \text{и } A \end{cases}$$

Решение



$$b \begin{cases} ZA(1, -2) \\ \parallel \vec{n}_a(3, 4) \end{cases} \Rightarrow b: \begin{cases} x = 1 + 3\lambda / 4 \\ y = -2 + 4\lambda / (-3) \end{cases} \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b: 4x - 3y - 10 = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Извод: } a: 3x + 4y + 2 &= 0 & \vec{n}_a(3, 4) \\ b: 4x - 3y - 10 &= 0 & \vec{n}_b(4, -3) \\ & & \vec{n}_a \cdot \vec{n}_b = 0 \end{aligned}$$

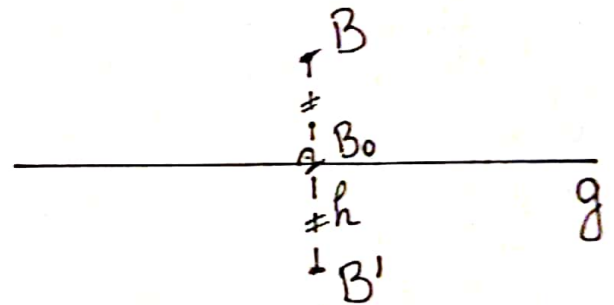
\* \* \*

4 зад. (Симетрия относно права)

Дадени са права  $g: x + y - 1 = 0$  и т.  $B(0, -1)$

$\sigma_g$  - симетрия отн.  $g$

$$т. B \xrightarrow{\sigma_g} т. B' \Leftrightarrow g \equiv S_{BB'}$$



Да се намерят координатите на т.  $B'$ .

Решение:

$$\begin{aligned} 1) \text{ Уравнения на } h \begin{cases} \perp g \\ ZB \end{cases} &\Rightarrow \begin{aligned} g: x + y - 1 &= 0 \\ h: x - y + C &= 0 \end{aligned} \\ B(0, -1) &\Rightarrow C = -1 \\ h: x - y - 1 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) т. B_0 &= h \cap g \\ \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} &\Rightarrow \underline{B_0(1, 0)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) B_0 \text{ е средата на } BB' \\ \begin{aligned} B(0, -1) & \quad \frac{x' + 0}{2} = 1 \Rightarrow x' = 2 \\ B_0(1, 0) & \\ B'(x', y') & \quad \frac{y' + (-1)}{2} = 0 \Rightarrow y' = 1 \\ & \quad \underline{B'(2, 1)} \end{aligned} \end{aligned}$$

5 зад. (Светлинни лъчи)

Дадени са права  $m: x+y-3=0$ , т.  $P(-5,4)$ , т.  $Q(-1,1)$

Светлинен лъч  $\ell \rightarrow$  минава през т.  $P$ ,  
отразява се от правата  $m$  и  
отразеният лъч  $\ell' \rightarrow$  минава през т.  $Q$ .

Намерете уравнения на правите  
 $\ell$  и  $\ell'$ , както съдържат лъчите.

Решение:

Важно:

Нека т.  $P \xrightarrow{m} P'$ , то

$P' \in \ell'$ .

1) Намираме т.  $P'$

$$h \begin{cases} \in P(-5,4) \\ \perp m: x+y-3=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow h: x-y+C=0$$

$$P \in h \Rightarrow -5-4+C=0$$

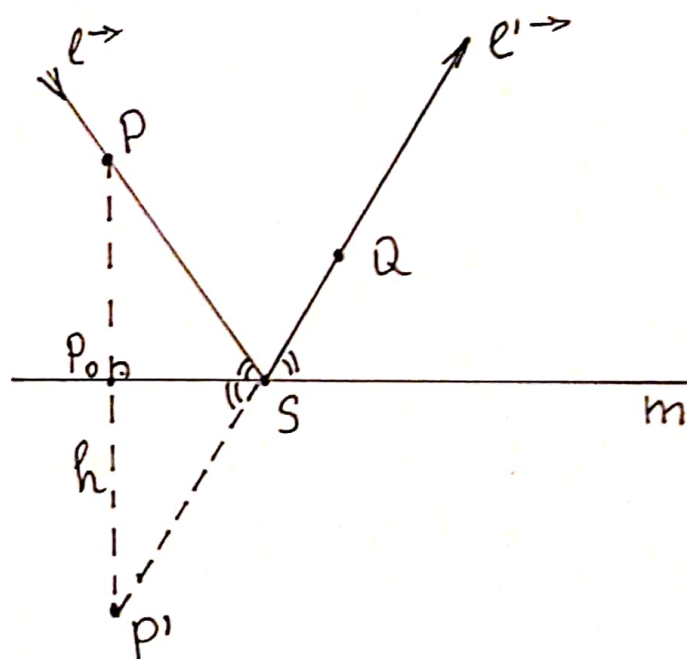
$$h: x-y+9=0$$

$$т. P_0 = h \cap m$$

$$\begin{cases} x+y-3=0 \\ x-y+9=0 \end{cases}$$

$$x=-3$$

$$y=6$$



т.  $P_0(-3,6)$  - средата

т.  $P(-5,4)$

т.  $P'(x',y')$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{x'+(-5)}{2} = -3 \Rightarrow x' = -1$$

$$\frac{y'+4}{2} = 6 \Rightarrow y' = 8$$

т.  $P'(-1,8)$



2) Общо уравнение на  $\ell'$   $\begin{cases} Z Q(-1, 1) \\ Z P'(-1, 8) \end{cases}$ , т.  $M(x, y)$  произв.

$$\ell': \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 8 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -7x - 7 = 0 \quad / : (-7)$$

$$\underline{\ell': x + 1 = 0}$$

Важно: От  $x_Q = x_{P'} = -1 \Rightarrow x = -1$  за всяка точка от  $\ell' \Rightarrow$  направо може да се напише

$$\underline{\ell': x = -1}$$

3) Намираме т.  $S = \ell' \cap m$

$$\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ x = -1 \end{cases} \Rightarrow y = 4 \Rightarrow S(-1; 4)$$

4) Общо уравнение на  $\ell$   $\begin{cases} Z P(-5, 4) \\ Z S(-1, 4) \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underline{\ell: y = 4}$$

\* \* \*

6 зад. (Упражнение)

Дадени са т.  $P(2, 4)$  и т.  $Q(0, 1)$ .

Светлинен лъч  $\ell \rightarrow Z P$ , отразява се от абсцисната ос  $Ox (y = 0)$  и отразеният лъч  $\ell' \rightarrow Z Q$ . Намерете уравнения на правите  $\ell$  и  $\ell'$ .

7 зад. Дадени са:

$$b: 5x + 4y - 13 = 0$$

$$c: x + 2y - 5 = 0 \quad \text{и т. Н}(14, 15)$$

Да се намерят координатите на върховете на  $\triangle ABC$ , ако правите  $b$  и  $c$  съдържат съответно страните  $AC$  и  $AB$ , а т. Н е ортоцентърът на триъгълника.

Решение:

$$1) \text{ т. А} = b \cap c$$

$$\begin{cases} 5x + 4y - 13 = 0 \\ x + 2y - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x + 4y - 13 = 0 \\ x + 2y - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\text{т. А}(1; 2) \quad (?)$$

$$2) \text{ Уравнение на } h_c \begin{cases} \text{т. Н}(14, 15) \\ \perp c: x + 2y - 5 = 0 \end{cases}$$

$$h_c: 2x - y + D = 0$$

$$2 \cdot 14 - 15 + D = 0$$

$$D = -13$$

$$\Rightarrow h_c: 2x - y - 13 = 0$$

$$3) \text{ т. С} = h_c \cap b$$

$$\begin{cases} 2x - y - 13 = 0 \\ 5x + 4y - 13 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y - 13 = 0 \\ 5x + 4y - 13 = 0 \end{cases}$$

$$\text{т. С}(5, -3)$$

$$\text{За упр. } S_{\triangle ABC} = ?$$

$$4) h_b \begin{cases} \text{т. Н}(14, 15) \\ \perp b: 5x + 4y - 13 = 0 \end{cases}$$

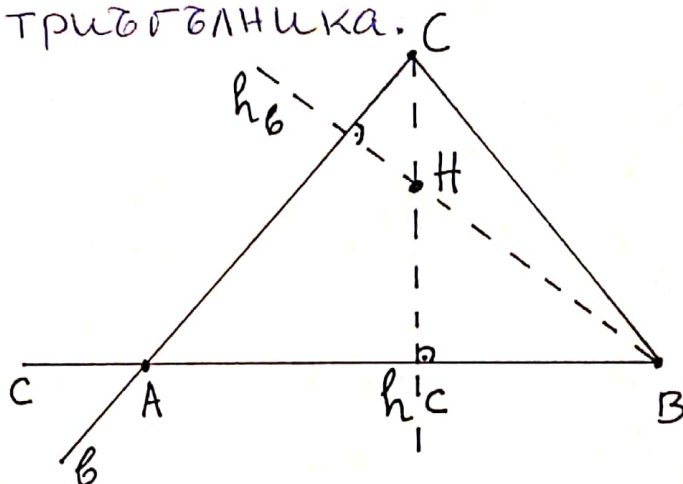
$$h_b: 4x - 5y + 19 = 0 \quad (?)$$

$$6) \text{ т. В} = h_b \cap c$$

$$\begin{cases} 4x - 5y + 19 = 0 \\ x + 2y - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x - 5y + 19 = 0 \\ x + 2y - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\text{т. В}(-1, 3)$$

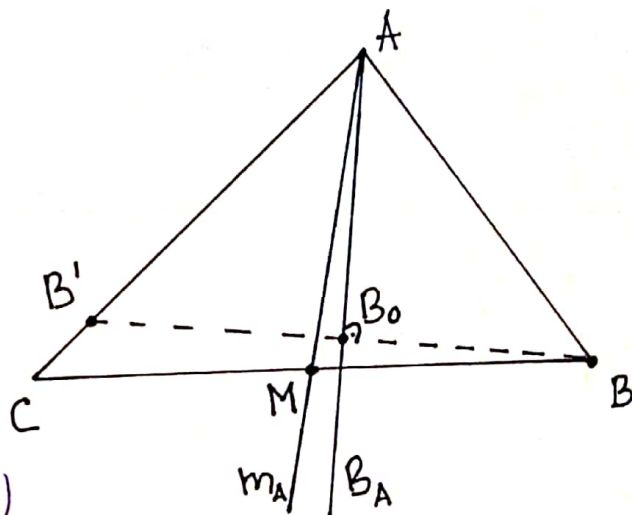


8 зад. Дадени са:  $v_A: 2x - 3y - 5 = 0$   
 $m_A: x - 8y + 4 = 0$   
 $T. B(3, -4)$

а) Да се нам. коорд. на върховете B и C на  $\triangle ABC$ , за който  $v_A$  и  $m_A$  са съотв. ъглополовяща и медиана през върха A.

1)  $T. A = v_A \cap m_A$

$$\begin{cases} 2x - 3y - 5 = 0 \\ x - 8y + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(4, 1)$$



2) Нека  $T. B \xrightarrow{v_A} T. B'$ ,  
 тогава  $T. B' \in AC$  (правата)

Намираме  $T. B'(-1, 2)$  (Упр.)

3) Общо уравнение на правата  $AB'$   $\begin{cases} \in A(4, 1) \\ \in B'(-1, 2) \end{cases}$

$$AB': \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \underline{AB': x + 5y - 9 = 0}$$

4) Търсим  $T. C(x_c, y_c)$

$$C \in AB' \Rightarrow \underline{x_c + 5y_c - 9 = 0 \quad (1)}$$

Нека  $T. M$  е средата на  $BC \Rightarrow T. M\left(\frac{x_c + 3}{2}, \frac{y_c + (-4)}{2}\right)$

$$M \in m_A \Rightarrow \left(\frac{x_c + 3}{2}\right) - 8 \cdot \left(\frac{y_c - 4}{2}\right) + 4 = 0 \quad (2)$$

$$\text{От (1) и (2)} \Rightarrow \underline{C(-11, 4)}$$

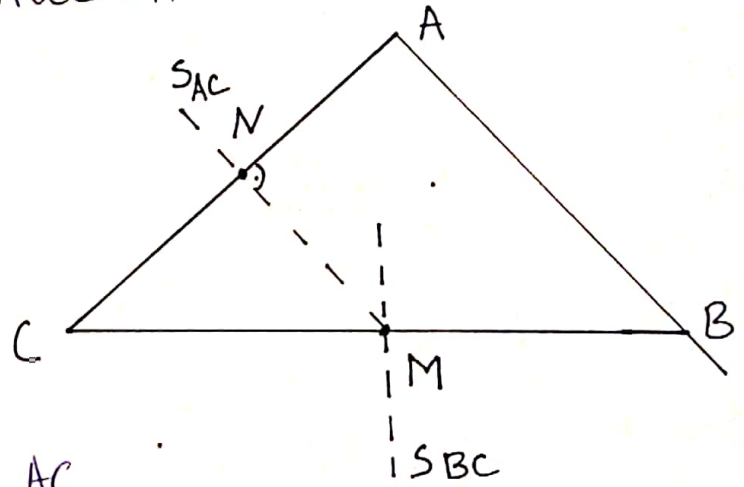


$$\delta) S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & 1 \\ -11 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 36 \text{ кв. ед.}$$

б) Да се намерят координатите на центъра  $S$  и радиуса на описаната около  $\triangle ABC$  окръжност.

Търсим уравнения на две от симетралите

$S_{AC}$  и  $S_{BC}$



$$1) S_{AC} \begin{cases} Z N - \text{средата на } AC \\ \perp AC \equiv AB' \end{cases}$$

$$AB': x + 5y - 9 = 0 \\ \text{т. } N \left(-\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right) \Rightarrow \underline{S_{AC}: 5x - y + 20 = 0}$$

$$2) S_{BC} \begin{cases} Z M - \text{средата на } BC, M(-4, 0) \\ \perp BC: 4x + 7y + 16 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{S_{BC}: 7x - 4y + 28 = 0}$$

$$3) \text{т. } S = S_{AC} \cap S_{BC}$$

$$\begin{cases} 5x - y + 20 = 0 \\ 7x - 4y + 28 = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{S(-4, 0) \equiv \text{т. } M}$$

$$4) R = |\vec{MB}| = \sqrt{65}$$

6 зад. (0с на кръстосани прави) ОКС  $K = Oxyz$

$$a: \begin{cases} x = 5 + s \\ y = -1 + 2s, s \in \mathbb{R} \\ z = 11 - s \end{cases}, \quad b: \begin{cases} x = -4 - 7p \\ y = 3 + 2p, p \in \mathbb{R} \\ z = 4 + 3p \end{cases}$$

а) Да се определи взаимното положение на  $a$  и  $b$

За две прави в пространството има четири възможни взаимни положения:

$a \equiv b$ ,  $a \parallel b$ ,  $\exists! \pi = a \cap b$ ,  $a$  и  $b$  - кръстосани

$$1) \begin{aligned} a \parallel \vec{a}(1, 2, -1) \\ b \parallel \vec{b}(-7, 2, 3) \end{aligned} \Rightarrow \vec{a} \text{ и } \vec{b} \text{ са ЛНЗ, т.е.} \\ \text{не са колинеарни}$$

извод:  $a \not\equiv b$ ,  $a \not\parallel b$

2) Остава да проверим дали  $a$  и  $b$  имат обща точка.

$$\begin{cases} x = 5 + s = -4 - 7p & (1) \\ y = -1 + 2s = 3 + 2p & (2) \\ z = 11 - s = 4 + 3p & (3) \end{cases} \quad \text{От (1) и (3)} \Rightarrow \begin{cases} p = -4 \\ s = 19 \end{cases}$$

заместваме в (2)

Не се получава върно рав.

Извод:  $a$  и  $b$  не се пресичат

Окончателно:  $a$  и  $b$  са кръстосани.

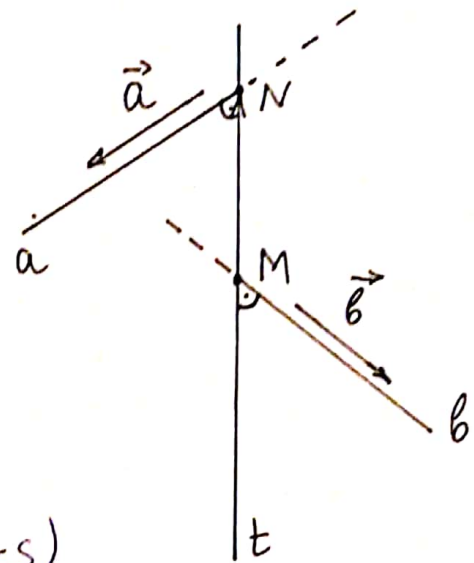
Не съществува равнина, която да ги съдържа едновременно.



8) Да се намерят уравнения на оста  $t$  на кръст. прави  $a$  и  $b$

Търсим координатите на:

$$\begin{cases} T. N \in a \\ T. M \in b \\ MN \perp a \\ MN \perp b \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Тези условия} \\ \text{еднозначно} \\ \text{определят} \\ \text{правата } MN \equiv t \end{array}$$



$$\text{От } N \in a \Rightarrow N(5+s, -1+2s, 11-s)$$

$$\text{От } M \in b \Rightarrow M(-4-7p, 3+2p, 4+3p)$$

$$\overrightarrow{MN}(9+7p+s, -4-2p+2s, 7-3p-s)$$

$$\vec{a} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$(\overrightarrow{MN} \cdot \vec{a}) = 0$$

$$(\overrightarrow{MN} \cdot \vec{b}) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (9+7p+s) \cdot 1 + (-4-2p+2s) \cdot 2 + (7-3p-s) \cdot (-1) = 0 \\ (9+7p+s) \cdot (-7) + (-4-2p+2s) \cdot 2 + (7-3p-s) \cdot 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6p+6s=6 \\ -62p-6s=50 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} p=-1 \Rightarrow M(3, 1, 1) \\ s=2 \Rightarrow N(7, 3, 9) \end{array}$$

$$\overrightarrow{MN}(4, 2, 8)$$

$$t \begin{cases} \ni M \\ \parallel \overrightarrow{MN} \end{cases} \Rightarrow t \begin{cases} x=3+2 \cdot \lambda \\ y=1+1 \cdot \lambda \\ z=1+4 \cdot \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$|\overrightarrow{MN}| = \sqrt{4^2 + 2^2 + 8^2} = \sqrt{84}$$

разстояние между  
правите  $a$  и  $b$

7 зад. (Упражнение) - 17 -  
Да се намерят уравнения  
на оста на кръстосаните прави

$$a: \begin{cases} x = 7 + s \\ y = 0 + 2s, s \in \mathbb{R} \\ z = 1 + 2s \end{cases} \quad \text{и} \quad b: \begin{cases} x = -1 + 2p \\ y = -4 + 2p, p \in \mathbb{R} \\ z = 3p \end{cases}$$

и разстоянието между тях.

$$\text{Отг. т. } N(9, 4, 5) \in a \\ \text{т. } M(5, 2, 9) \in b$$

\* \* \*

8 зад. ОКС  $K = O_{xyz}$

$$m: \begin{cases} x = 2 - s \\ y = s, s \in \mathbb{R} \\ z = 1 + 2s \end{cases} \quad g: \begin{cases} x + 2y + 2z - 1 = 0 \\ y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$$

$$L: x - z + 2 = 0.$$

а) Намерете уравнения на оста на кръстосаните  
приви  $m$  и  $g$ , и разстоянието между тях;

б) Намерете уравнения на ортогоналната  
проекция на правата  $g$  върху равнината  $L$ .

Зада. (Трансверзали) <sup>-18-</sup> ДКС  $K = Oxyz$

$$a: \begin{cases} x = p \\ y = -2 + p \\ z = -1 + 2p \end{cases}, p \in \mathbb{R}, \quad b: \begin{cases} x + z = 0 \\ y + z - 2 = 0 \end{cases}, \quad c: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -1 + 6\lambda \\ z = 2 - \lambda \end{cases}$$

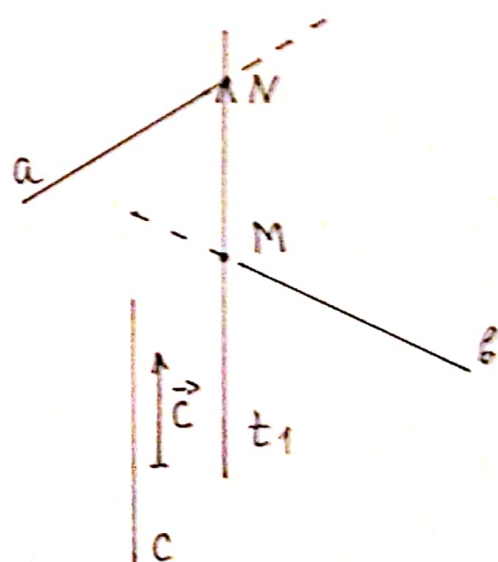
а) Да се намерят уравнения на  
опази трансверзала  $t_1$  на  $a$  и  $b$ ,  
която е успоредна на правата  $c$ ;

І начин

1) Коорд. парам. уравн. на  $b$

$$b: \begin{cases} x + z = 0 \\ y + z - 2 = 0 \end{cases}, \text{ изб. } z = s$$

$$b: \begin{cases} x = -s \\ y = 2 - s \\ z = s \end{cases}, s \in \mathbb{R}$$



$$M \in b \Rightarrow M(-s, 2-s, s)$$

$$N \in a \Rightarrow N(p, -2+p, -1+2p)$$

$$\vec{MN}(p+s, -4+p+s, -1+2p-s) \parallel \vec{c}(2, 6, -1) \Rightarrow$$

$$\frac{p+s}{2} = \frac{-4+p+s}{6} = \frac{-1+2p-s}{-1}$$

$$\begin{cases} -(p+s) = 2 \cdot (-1+2p-s) \\ 6 \cdot (p+s) = 2 \cdot (-4+p+s) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = 0 \Rightarrow M(0, 2, -1) \\ s = -2 \Rightarrow N(2, 4, -2) \end{cases} \Rightarrow t_1: \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 4 + 6\lambda \\ z = -2 - \lambda \end{cases} \lambda \in \mathbb{R}$$



## II начин (Упражнение) - 19-

1) Намира се уравнение на равнината  $\beta \begin{cases} \perp a \\ \parallel c \end{cases}$

2) Намира се  $\tau, N = \beta \cap \beta$

3)  $t_1 \begin{cases} \perp N \\ \parallel \vec{c}(2, 6, -1) \end{cases}$

\*

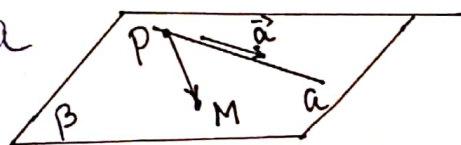
\*

\*

б) Да се намерят уравнения на онези трансверзала  $t_2$  на  $a$  и  $b$ , която минава през  $\tau, M(6, 0, 4)$

1) Търсим общо уравнение

на  $\beta \begin{cases} \perp M \\ \perp a \end{cases}$



$$\beta \parallel \vec{a}(1, 1, 2)$$

$$\beta \perp M(6, 0, 4)$$

$$\beta \perp P(0, -2, -1) \in a$$

$$\Rightarrow \beta \parallel \vec{PM}(6, 2, 5)$$

$$\beta: \begin{vmatrix} x-6 & y & z-4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \beta: x + 7y - 4z + 10 = 0$$

2) Търсим  $\tau, N = \beta \cap \beta$

$$x = -s$$

$$y = 2-s$$

$$z = s$$

$$x + 7y - 4z + 10 = 0$$

$$\Rightarrow s = 2$$

$$N(-2, 0, 2)$$

$$M(6, 0, 4)$$

$$\vec{NM}(8, 0, 2)$$

$$\Rightarrow t_2: \begin{cases} x = 6 + 4\mu \\ y = 0 \\ z = 4 + 1\mu \end{cases}, \mu \in \mathbb{R}$$

