Симетрична група

Сайт: learn.fmi.uni-sofia.bg
Курс: Алгебра 2, поток 1, летен семестър 2021/2022
Книга: Симетрична група
Разпечатано от: Мартин Попов
Дата: Thursday, 24 March 2022, 21:24

Съдържание

1. Определение и свойства

Нека M е непразно множество. Нека с $S(M)$ се означи множеството от всички биективни изображения в множеството $M \neq \emptyset$.

$$S(M) = \{\varphi \mid \varphi : M \to M, \varphi - \text{биекция}\}$$

Множеството от биекциите ще се разглежда с операцията композиция на изображения $\circ$:

$$\varphi \circ \psi(x) = \varphi(\psi(x)) \ , \ \forall x \in M.$$

За всяко непразно множество M е изпълнено, че множеството $S(M) = \{\varphi \mid \varphi : M \to M, \varphi - \text{биекция}\}$, съставено от всички биекции на M, разглеждано с операцията композиция на изображения, е група, която се нарича симетрична група на M.

1.1. S(M) е група

Твърдение 1. За всяко непразно множество M е изпълнено, че множеството, съставено от всички биекции на M, разглеждано с операцията композиция на изображения, е група, която се нарича симетрична група на M.

$$S(M) = \{\varphi \mid \varphi : M \to M, \varphi - \text{биекция}\}$$

Доказателство:

За композицията на изображения са в сила свойствата:

- Композицията е **бинарна операция** за множеството $S(M)$:

- $\varphi \circ \psi$ е *инекция*, защото ако $x \neq y$ са различни елементи от множеството M, тогава $\psi(x) \neq \psi(y)$, откъдето се получава и $\varphi(\psi(x)) \neq \varphi(\psi(y))$ ψ, φ са биекции),

- $\varphi \circ \psi$ е *сюрекция*, защото ако $z \in M$ е произволен елемент, φ е биекция и съществува елемент $y \in M$, за който е изпълнено $z = \varphi(y)$. Тъй като и ψ е биекция, затова съществува елемент $x \in M$, за който $y = \psi(x)$, откъдето получаваме $\varphi \circ \psi(x) = \varphi(\psi(x)) = \varphi(y) = z$.

По този начин се получава, че $\varphi \circ \psi$ е *биекция* на множеството M и принадлежи на $S(M)$ и доказахме, че композицията е **бинарна операция** за множеството $S(M)$.

- **Асоциативността** на композицията на изображения е в сила за произволни изображения $\varphi,\ \psi,\ \tau$ на множеството M. Нека $x \in M$ е произволен елемент и е изпълнено:

$$\varphi \circ (\psi \circ \tau)(x) = \varphi(\psi \circ \tau)(x) = \varphi(\psi(\tau(x)))$$
$$(\varphi \circ \psi) \circ \tau)(x) = (\varphi \circ \psi)(\tau(x)) = \varphi(\psi(\tau(x)))$$

$$\Rightarrow (\varphi \circ \psi) \circ \tau = \varphi \circ (\psi \circ \tau)$$

- Изображението *идентитет* $\mathrm{id} : M \to M$, за което е изпълнено $\mathrm{id}(x) = x, \forall x \in M$ е **неутрален елемент**, относно операцията композиция, защото $\varphi \circ \mathrm{id} = \varphi = \mathrm{id} \circ \varphi$.
- Ако изображението φ е биективно изображение, тогава е известно че съществува неговото **обратно изображение** φ^{-1} и е изпълнено $\varphi \circ \varphi^{-1} = \mathrm{id} = \varphi^{-1} \circ \varphi$.

Получихме, че множеството $S(M)$ от всички биекции на даено множество M, разглеждано относно операцията композиция на изображения удовлетворява условията от определението за група $(S(M), \circ)$. Тази група се нарича **симетрична група** за множеството M и обикновено се бележи с $S(M)$, а в случая когато множеството M е крайно с n елемента групата се бележи S_n и се нарича симетрична група от степен n.

<u>*Забележка :*</u> *Понякога композицията на изображения ще я записваме с* $"."$ *вместо с* $\circ$.

1.2. Некомутативност

Да си отговорим на един основен въпрос:
"Абелева ли е групата $S(M)$?"

- Случай 1- множество M има само един елемент, ако $M = \{a\}$ ($|M| = 1$, тогава всяко биективно изображение $\varphi : M \to M$ изпълнява $\varphi(a) = a$ и поради това $\varphi = \mathrm{id}$, $|S_1| = 1$ и групата S_1 е Абелева.
- Случай 2- когато $|M| = 2$, например $M = \{a, b\}$, да разгледаме биективното изображение $\varphi : M \to M$, което е различно от идентитета . Единствената възможност е φ да действа по следния начин $\varphi(a) = b, \ \ \varphi(b) = a.$ Получава се, че всички елементи на групата са $\{\mathrm{id}, \varphi\} = S(M) = S_2$. Непосредствено проверяваме, че е изпълнено $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi = \mathrm{id}$ и групата S_2 е Абелева. По-точно казано, групата S_2 е циклична група от ред 2, която се поражда от елемента φ.
- Случай 3, когато множеството има повече от два елемента се разглежда в следната теорема.

Теорема 1.

Ако е изпълнено $|M| > 2$, тогава групата $S(M)$ **не е комутативна** (не е Абелева).

Доказателство:

Нека $a, \ b, \ c$ са три различни елемента от множеството. Да разгледаме следните две изображения на M:

$\varphi(a) = b, \ \varphi(b) = a$ и $\varphi(x) = x$ за всяко $x \neq a, x \neq b$

$\psi(b) = c, \ \psi(c) = b$ и $\psi(y) = y$ за всяко $y \neq b, y \neq c$

Пресмятаме по какъв начин действа $\varphi \circ \psi$:

$$\varphi \circ \psi(a) = \varphi(\psi(a)) = \varphi(a) = b,$$

$$\varphi \circ \psi(b) = \varphi(\psi(b)) = \varphi(c) = c,$$

$$\varphi \circ \psi(c) = \varphi(\psi(c)) = \varphi(b) = a,$$

$$\varphi \circ \psi(x) = \varphi(\psi(x)) = \varphi(x) = x, \ \forall x \ , \{x \neq a, x \neq b, x \neq c\}$$

Аналогично, за $\psi \circ \varphi$ получаваме:

$$\psi \circ \varphi(a) = \psi(\varphi(a)) = \psi(b) = c,$$

$$\psi \circ \varphi(b) = \psi(\varphi(b)) = \psi(a) = a,$$

$$\psi \circ \varphi(c) = \psi(\varphi(c)) = \psi(c) = b,$$

$$\psi \circ \varphi(x) = \psi(\varphi(x)) = \psi(x) = x, \ \forall x \ , \{x \neq a, x \neq b, x \neq c\}$$

Получихме, че $\psi \circ \varphi \neq \varphi \circ \psi$, откъдето се установява, че групата $S(M)$ е некомутативна, когато $|M| > 2$, и в частност S_n не е Абелева за $n \geq 3$.

1.3. Брой на елементите

Нека множеството M е крайно и има n елемнта. Можем да номерираме тези числа и да считаме, че $M=\{1,2,\ldots,n\}$ и ще изразяваме по какъв начин елементите на S_n действат върху номерата на елементите. По този начин всяка една биекция φ от симетричната група може да се напише еднозначно по следния начин:

$$\varphi=\begin{pmatrix}1 & 2 & \ldots & n\\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n\end{pmatrix},$$

където $\varphi(1)=i_1$, $\varphi(2)=i_2,\ldots,$ $\varphi(n)=i_n$.

Елементът φ е биекция върху $M=\{1,2,\ldots,n\}$ и затова числата $i_1,i_2,\ldots,i_n$ са различни помежду си и представляват пермутация на $1,2,\ldots,n$. По този начин получаваме, че

$$|S_n|=n!$$

Много често елементите на симетричната група ще ги наричаме пермутации.

Например всички елементи (всички пермутации)от S_3 са $\{\mathrm{id},\varphi_1,\ldots,\varphi_5\}$, където

$$\mathrm{id}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix},\ \varphi_1=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix},$$

$$\varphi_2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix},\ \varphi_3=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix},$$

$$\varphi_4=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix},\ \varphi_5=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix},$$

1.4. Пресмятания в Sn

Ето как се извършват основните пресмятанията в симетричната групата:

ПРИМЕР:

Нека са дадени елементите :

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

- *Композиция на две изображения* $\varphi \circ \psi$ - първо се записват двата реда от ψ и третия ред дава образите на елементите от втория ред при действие на φ

$$\varphi \circ \psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- *Намиране на обратен елемент* - разменят се двата реда на пермутацията и стълбовете се подреждат спрямо числата в новополучения първи ред

$$\varphi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \psi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

- *Повдигане на степен* k на елемент от S_n - на първия ред се записват числата $1, \ldots, n$, и се попълват още k реда, до получаване на общо $k+1$ реда. Всеки ред след първия се получава, прилагайки пермутацията върху числата от предишния ред. Междинните редове се махат и накрая се вземат само първи и последен ред.

$$\psi^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Цикли в Sn

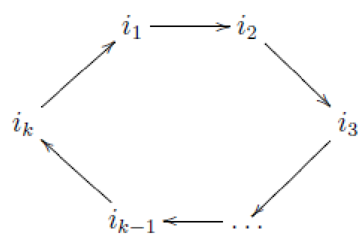
В много приложения, на само в математиката, се използват елементи от симетричната група за да се описват конкретни биекции на множества и най-често тези елементи са представят като произведение на цикли.

Определение: Нека $i_1, i_2, \ldots, i_k$ са различни числа от $1, \ldots, n$. Нека ψ е елемент от групата S_n, който задава биективно изображение на множеството M, действащо по следния начин

$$\psi(i_1) = i_2,\ \psi(i_2) = i_3, \ldots, \psi(i_{k-1}) = i_k, \psi(i_k) = i_1,$$

и всички останали елементи x на неподвижни (изпълнено е $\psi(x) = x$). Тогава ψ се нарича *цикъл с дължина* k и се записва по следния начин $\psi = (i_1, i_2, \ldots, i_k)$.

Действието на цикъла $\psi = (i_1, i_2, \ldots, i_k)$ можем да изобразим графично по следния начин.



Определение: Цикъл с дължина 2 се наричат *транспозиция*.

Пример: Всички елементи от S_3, които са различни от идентитета са цикли с дължина 2 или 3.

$$(2,3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},\ (1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},\ (1,3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(1,2,3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},\ (1,3,2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Получихме, че в S_3 има 3 транспозиции и 2 тройни цикъла.

$$S_3 = \{id,\ (1,2),\ (1,3),\ (1,4),\ (1,2,3),\ (1,3,2)$$

Естествено, в по-големите симетрични групи не всички елементи се представят като произведение на независими цикли,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (1,2) \circ (3,4),\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1,3) \circ (2,4),$$

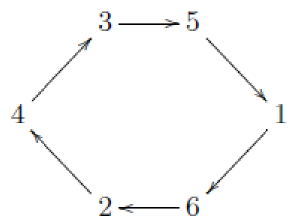
но въпреки това тези елементи се представят като композиция на цикли.

2.1. Примери 2.1

Пример 1: Да разгледаме следния елемент от S_6

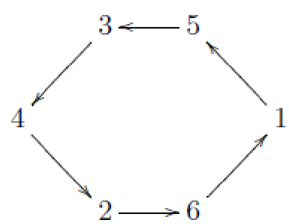
$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 5 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Разглеждайки действието на елемента, виждаме, че това е цикъл с дължина 6.



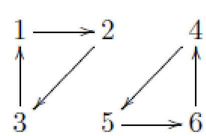
Този елемент може да се запише по няколко различни начини $\varphi = (1,6,2,4,3,5) = (3,5,1,6,2,4)$.
Може ли и по други начини да се запише елемента φ?

Пример 2: Обратният елемент на цикъла $\varphi = (1,6,2,4,3,5)$ от предния пример също е цикъл с дължина 6:



Разглеждайки действието на елемента $\varphi^{-1} = (1,6,2,4,3,5)^{-1}$, виждаме, че φ^{-1} също е цикъл , който може да се получи от изходния, като запишем числата в обратен ред $\varphi^{-1} = (1,5,3,4,2,6) = (3,5,1,6,2,4)$.

Пример 3: Нека разгледаме φ^2, където φ е пермутацията от предишните примери. Елементът действа по следния начин:



и виждаме, че това е пермутация, която не е цикъл, но е композиция на два цикъла с дължини 3.

$$\varphi^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 5 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix} = (1,2,3) \circ (4,5,6)$$

2.2. Свойства

Свойство 1.

Ако една пермутация ψ е цикъл с дължина k, тогава ψ може да се изпише по k различни начина като цикъл.

Ясно е, че цикъла $\psi = (i_1, i_2, \ldots, i_k)$ може да се запише като "започва" например от i_2 и се получава $\psi = (i_2, i_3, \ldots, i_k, i_1)$ или можем да запишем цикъла, като "започващ" от i_s ще получим

$$\psi = (i_s, i_{s+1}, \ldots, i_k, i_1, \ldots, i_{s-1})$$

Получаваме, че всеки цикъл с дължина k може да започне да се изписва от кой да е от неговите k елемента (например i_s) и след това ги подреждаме в съответния ред и след i_k се записва i_1, защото $\psi(i_k) = i_1$.

Свойство 2:

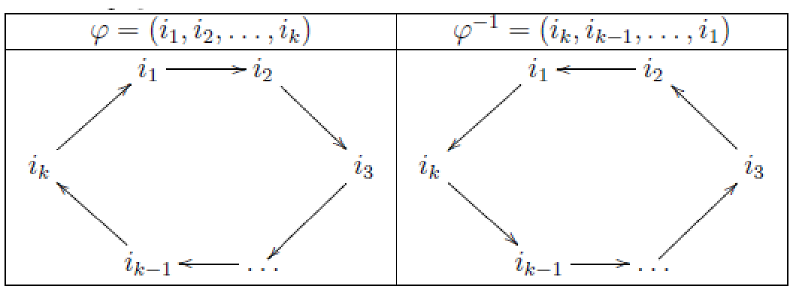
Всички пермутации от S_n, които са цикъл с дължина k са $\binom{n}{k} . (k-1)!$ броя.

От елементите $1, 2, \ldots, n$ могат да се изберат k конкретни елемента $i_1, \ldots, i_k$ по $C_n^k = \binom{n}{k}$ начина. От избраните елементи $i_1, \ldots, i_k$ можем да получим $k!$ пермутации, които могат да се изпишат като цикли. Но тъй като, всеки такъв цикъл може да се запише по k различни начини, затова броя на различните цикли, които можем да получим от избраните числа са $(k-1)! = \frac{k!}{k}$ и окончателно получаваме, че всички пермутации на S_n, които са цикъл с дължина k са $\binom{n}{k} . (k-1)! = C_n^k . (k-1)! = \dfrac{V_n^k}{k}$ броя.

Свойство 3:

Обратния елемент на цикъла $\psi = (i_1, i_2, \ldots, i_k)$ с дължина k е цикъл със същата дължина $\psi^{-1} = (i_k, i_{k-1}, \ldots, i_1)$.

В това лесно можем да се убедим ако разгледаме, схемите, по които действат φ и за да получим φ^{-1} обръщаме посоката на стрелките върху схемата :



2.3. Независими цикли

Определение:

Два цикъла $\varphi = (i_1, i_2, \ldots, i_k)$ и $\psi = (j_1, j_2, \ldots, j_s)$ се наричат независими, ако множествата $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ и $\{j_1, j_2, \ldots, j_s\}$ нямат общи елементи

$$\{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \cap \{j_1, j_2, \ldots, j_s\} = \emptyset.$$

Ако разгледаме отново пермутацията от пример 4, елементът който се получи е $\varphi^2 = (1,2,3) \circ (4,5,6)$ и представлява композиция на два независими цикъла. За този елемент също е изпълнено и $\varphi^2 = (4,5,6) \circ (1,2,3)$.

Не е трудно да се установи и в общия случай, че всеки два независими цикъла комутират.

Твърдение:

Ако $\varphi = (i_1, i_2, \ldots, i_k)$ и $\psi = (j_1, j_2, \ldots, j_s)$ са независими цикли , тогава те комутират $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$.

$$\text{Ако } \{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \cap \{j_1, j_2, \ldots, j_s\} = \emptyset \ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ (i_1, i_2, \ldots, i_k) \circ (j_1, j_2, \ldots, j_s) = (j_1, j_2, \ldots, j_s) \circ (i_1, i_2, \ldots, i_k).$$

Доказателство:

Нека да разгледаме по какъв начин действат φ и ψ върху елементите на множествата $K = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$, $L = \{j_1, j_2, \ldots, j_s\}$ и $T = \{1, 2, \ldots, n\} \backslash (K \cup L)$. Изпълнено е:

За $\varphi = (i_1, i_2, \ldots, i_k)$	$\varphi(i) \in K, \ \forall i \in K = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ $\varphi(x) = x, \ \forall x \in L \cup T$
За $\psi = (j_1, j_2, \ldots, j_s)$	$\psi(j) \in L, \ \forall j \in L = \{j_1, j_2, \ldots, j_s\}$ $\psi(y) = y, \ \forall y \in K \cup T$

Тогава лесно се установява, че

$$\varphi \circ \psi(z) = \psi \circ \varphi(z) = \begin{cases} \varphi(z), & \text{за } z \in K \\ \psi(z), & \text{за } z \in L \\ z, & \text{за } z \in T \end{cases} .$$

2.4. Теорема - основна

Теорема:

Всеки елемент φ от групата S_n, който е различен от идентитета, може да се представи като произведение на независими цикли

$$\varphi=(i_1^{(1)},\ldots,i_{k_1}^{(1)})\circ(i_1^{(2)},\ldots,i_{k_2}^{(2)})\circ\ldots\circ(i_1^{(p)},\ldots,i_{k_p}^{(p)}),\ \text{за}\ p\geq 1,$$

(числата $i_1^{(1)},\ldots,i_{k_1}^{(1)}$, $i_1^{(2)},\ldots,i_{k_2}^{(2)},\ldots$, $i_1^{(p)},\ldots,i_{k_p}^{(p)}$ са различни помежду си и $k_1\geq 2,\ldots,k_p\geq 2$.)

Това представяне на елемента φ като произведение на независими цикли е единствено с точност до реда на множителлите.

Доказателство:

Съществуване : За всеки елемент $\varphi\neq id$ съществува представяне като независими цикли.

Нека $\varphi\neq id$ е елемент от групата S_n и да бележим с M_φ множеството от числата, които се разместват под действието на пермутацията φ и нека m_φ е броят на числата, които φ размества

$$M_\varphi=\{\ i\mid\varphi(i)\neq i\}\subset\{1,2,\ldots,n\}\ \text{ и }\ m_\varphi=|M_\varphi|.$$

Доказателството се извършва с индукция по m_φ:

- Не е възможно да е изпълнено $m_\varphi=1$, защото *ако допуснем*, че $M_\varphi=\{a\}$, само от начина на определяне на M_φ получаваме $b=\varphi(a)\neq a$ и виждаме, че е изпълнено $\varphi(b)\neq b$, защото φ е биективно изображение. По този начин се получава, че $b\in M_\varphi$, откъдето би следвало, че M_φ трябва да има поне два различни елемента, но това е в противоречие с $m_\varphi=1$
- Нека $m_\varphi=2$ и $M_\varphi=\{a,b\}$, тогава е изпълнено:

  $$a\neq\varphi(a)\in M_\varphi \text{ и } b\neq\varphi(b)\in M_\varphi.$$

  Единствената възможност е $b=\varphi(a)$ и $a=\varphi(b)$ и получаваме, че $\varphi=(a,b)$ - т.е. φ е цикъл с дължина 2.

- Нека $k>2$ и да допуснем, че твърдението от теоремата е в сила за всички биекции $\psi\in S_n$, за които е $m_\psi\leq k-1$.
- Нека φ е елемент на групата S_n, за който е изпълнено $m_\varphi=k$. Вземаме произволен елемент $i_1\in M_\varphi$, който се променя под действиието на това изображение $\varphi(i_1)\neq i_1$. Тогава :
  - Построяваме безкрайна редица от числа $i_1,i_2,\ldots$, по следното правило $i_{s+1}=\varphi(i_s)$ за всяко число $s=1,2,\ldots$. Тъй като $\varphi\in S_n$ затова всяко от тези числа е от множеството $M_\varphi\subset\{1,\ldots,n\}$;
  - В така построената редица има повторения на числа и ако вземем две равни числа в нея $i_s=i_t$, тогава :

    $$i_s=i_t\Rightarrow\varphi(i_{s-1})=\varphi(i_{t-1})$$

    и от биективността на изображението получаваме че и предните числа също са били равни $i_{s-1}=i_{t-1}$. Поради тази причина, първото число, което се повтаря в редицата $i_1,i_2,\ldots$ е числото i_1;
  - Нека първото повторение на числото i_1 е $i_{r+1}=i_1$. По този начин се получената редица добива вида

    $$i_1,\ldots,i_r,i_1,\ldots,i_r,\ldots$$

    откъдето установяваме че върху числата $i_1,\ldots,i_r$ изображението φ действа по същия начин, както цикъла $\tau=(i_1,\ldots,i_r)$, който има дължина r;
  - Разглеждаме изображението $\varphi_1=\tau^{-1}\circ\varphi$. За произволен елемен i_t от редицата, която получихме преди малко, пресмятаме

    $$\varphi_1(i_t)=\tau^{-1}(\varphi(i_t))=\tau^{-1}(i_{t+1})=i_t.$$

    Следователно всички елементи от редицата $i_1,\ldots,i_r$ остават неподвижни под действието на φ_1, откъдето се получава $M_{\varphi_1}=M_\varphi\backslash\{i_1,\ldots,i_r\}$;
  - След като установихме, че $m_{\varphi_1}<m_\varphi=k$, можем да приложим индукционното предположение към изображението φ_1 и да го представим като произведение на независими цикли:

    $$\varphi_1=(j_1^{(1)},\ldots,j_{k_1}^{(1)})\circ\ldots\circ(j_1^{(p)},\ldots,j_{k_p}^{(p)});$$

  - Тогава за φ се получава, че

$$\varphi=\tau\circ\varphi=(i_1,\ldots,i_r)\circ(j_1^{(1)},\ldots,j_{k_1}^{(1)})\circ\ldots\circ(j_1^{(p)},\ldots,j_{k_p}^{(p)})$$

И това е представяне на φ като произведение на независими цикли

- По този начин се убедихме, че всеки елемент от S_n, който е различен от идентитета може да се представи поне по един начин като произведение на независими цикли. *Редът на доказване на тази част от теоремата е точно такъв, по който се търсят тези цикли при конкретно зададени пермутации от S_n.*

Единственост: Единственост на представянето като произведение на независими цикли с точност до реда на множителите.
Нека да вземем две изразявания като произведения на независими цикли на един и същи елемен от $\varphi\in S_n$

$$\begin{aligned}\varphi&=(i_1^{(1)},\ldots,i_{k_1}^{(1)})\circ\ldots\circ(i_1^{(s)},\ldots,i_{k_s}^{(s)})\\ \varphi&=(j_1^{(1)},\ldots,j_{l_1}^{(1)})\circ\ldots\circ(j_1^{(m)},\ldots,j_{l_m}^{(m)})\end{aligned}.$$

Всяко число от множеството $M_1=\{i_1^{(1)},\ldots,i_{k_1}^{(1)},\ldots,i_1^{(s)},\ldots,i_{k_s}^{(s)}\}$ се размества от изображението φ и затова е изпълнено $M_1=M_\varphi$. Аналогично се получава за
$M_2=\{j_1^{(1)},\ldots,j_{l_1}^{(1)},\ldots,j_1^{(m)},\ldots,j_{l_m}^{(m)}\}$. Следователно

$$M_\varphi=\{i_1^{(1)},\ldots,i_{k_1}^{(1)},\ldots,i_1^{(s)},\ldots,i_{k_s}^{(s)}\}=\{j_1^{(1)},\ldots,j_{l_1}^{(1)},\ldots,j_1^{(m)},\ldots,j_{l_m}^{(m)}\}$$

Нека да вземем едно число $t_1\in M_\varphi$, то участва в M_1 и се намира само в един цикъл от първия запис на изображението φ. Тъй като циклите от този запис са независими и комутират, можем да разместим местата им и без ограничение на общостта считаме, че елемента t_1 е от първия цикъл $(i_1^{(1)},\ldots,i_{k_1}^{(1)})$, но цикъла има множество различни записа, започвайки от различни елементи затова ще приемем, че $t_1=i_1^{(1)}$. Аналогично, без ограничение на общността можем да считаме, че $t_1=j_1^{(1)}$. Тогава е изпълнено

$$\begin{aligned}&t_2=i_2^{(1)}=\varphi(i_1^{(1)})=\varphi(t_1)=\varphi(j_1^{(1)})=j_2^{(1)}\\ &\ldots\\ &t_{p+1}=i_{p+1}^{(1)}=\varphi(i_p^{(1)})=\varphi(t_p)=\varphi(j_p^{(1)})=j_{p+1}^{(1)}\end{aligned},\forall p\in(N)$$

По този начин се получи, че първите цикли в двата записа съвпадат

$$k_1=l_1 \text{ и } (i_1^{(1)},\ldots,i_{k_1}^{(1)})=(j_1^{(1)},\ldots,j_{l_1}^{(1)})$$

Тези еднакви цикли можем да ги премахнем и да остане равенство, което има с по един множител по-малко от двете страни

$$(i_1^{(2)},\ldots,i_{k_2}^{(2)})\circ\ldots\circ(i_1^{(s)},\ldots,i_{k_s}^{(s)})=(j_1^{(2)},\ldots,j_{l_2}^{(2)})\circ\ldots\circ(j_1^{(m)},\ldots,j_{l_m}^{(m)}).$$

Като повторим тази процедура няколко пъти ще получим:
-броя на циклите в двата записа на φ е едно и също число $m=s$,
- след пренареждане, всеки цикъл от първия запис съвпада със съответния цикъл от втория запис.

2.5. Примери 2.2

Пример:

Да се представи елементът $\varphi \in S_{12}$ като произведение на независими цикли.

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & 7 & 2 & 11 & 1 & 8 & 4 & 10 & 6 & 12 & 3 & 9 \end{pmatrix}.$$

Използва се начина на построяване на първия цикъл от доказателството на теоремата.

- *Определяне на цикъл:* Вземаме, един елемент, който се размества от цикъла - например 1, след това образа му, който е 5 , след това неговия образ, който е 1. Получихме първоначалния елемент, което показва, че този цикъл е $(1,5)$.
- *Получаване на следващ цикъл:* Вземаме друг елемент, различен от вече намерените, който се размества от φ - например 2, след това намираме последователните образи

$$\begin{array}{rcr} & & 2 \\ 2 & \to & \varphi(2) = 7 \\ 7 & \to & \varphi(7) = 4 \\ 4 & \to & \varphi(4) = 11 \\ 11 & \to & \varphi(11) = 3 \\ 3 & \to & \varphi(3) = 2 \end{array} \quad \text{Получава се цикъла } (2,7,4,11,3)$$

- *Следващ цикъл*: Започваме със 6

$$\begin{array}{rcr} & & 6 \\ 6 & \to & \varphi(6) = 8 \\ 8 & \to & \varphi(8) = 10 \\ 10 & \to & \varphi(10) = 12 \\ 12 & \to & \varphi(12) = 9 \\ 9 & \to & \varphi(9) = 6 \end{array} \quad \text{Получава се цикъла } (6,8,10,12,9)$$

Няма други разместващи се от φ елементи, които са различни от вече определените цикли и така окончателно се получава

$$\varphi = (1,5) \circ (2,7,4,11,3) \circ (6,8,10,12,9).$$

Ако бяхме започнали от друг елемент, например 12 щяхме да получим:

$$\begin{array}{rcr||rcr||rcr} & & 12 & & & & & & 11 \\ 12 & \to & \varphi(12) = 9 & & & 5 & 11 & \to & \varphi(11) = 3 \\ 9 & \to & \varphi(9) = 6 & 5 & \to & \varphi(5) = 1 & 3 & \to & \varphi(3) = 2 \\ 6 & \to & \varphi(6) = 8 & 1 & \to & \varphi(1) = 5 & 2 & \to & \varphi(2) = 7 \\ 8 & \to & \varphi(8) = 10 & & & & 7 & \to & \varphi(7) = 4 \\ 10 & \to & \varphi(10) = 12 & & & & 4 & \to & \varphi(4) = 11 \\ \hline & \Downarrow & & & \Downarrow & & & \Downarrow & \\ & (12,9,6,8,10) & & & (5,1) & & & (11,3,2,7,4) & \end{array}$$

Получаваме $\varphi = (12,9,6,8,10) \circ (5,1) \circ (11,3,2,7,4)$ Това също е представяне като произведение на независими цикли и разликата е само в реда на множителите, защото циклите от двете представяния са равни помежду си $(12,9,6,8,10) = (6,8,10,12,9)$, $(1,5) = (5,1)$ и $(11,3,2,7,4) = (2,7,4,11,3)$.

2.6. Примери 2.3

Пример:

Да се представи елементът ψ като произведение на независими цикли.

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & 4 & 2 & 11 & 8 & 1 & 7 & 10 & 6 & 12 & 3 & 9 \end{pmatrix}.$$

Елементът 7 остава неподвижен под действието на ψ и той няма да участва в окончателния запис, а всички останали числа трябва да участват в точно един от независимите цикли. Получаваме последователно

$$\begin{array}{||ccc||ccc||}
 & & 1 & & & \\
1 & \rightarrow & 5 & & & 2 \\
5 & \rightarrow & 8 & 2 & \rightarrow & 4 \\
8 & \rightarrow & 10 & 4 & \rightarrow & 11 \\
10 & \rightarrow & 12 & 11 & \rightarrow & 3 \\
12 & \rightarrow & 9 & 3 & \rightarrow & 2 \\
9 & \rightarrow & 6 & & & \\
6 & \rightarrow & 1 & & & \\
\hline
 & \Downarrow & & & \Downarrow & \\
 & (1,5,8,10,12,9,6) & & & (2,4,11,3) &
\end{array}$$

От това получаваме $\psi = (1,5,8,10,12,9,6) \circ (2,4,11,3)$.

2.7. Примери 2.4

Пример

Да се представи като произведение на независими цикли елемента $\varphi = (3,5,7,1)\circ(2,3,4,5)\circ(4,6,1,7,2)$. Изображението φ е композиция на зависимите цикли $\psi_1 = (3,5,7,1)$, $\psi_2 = (2,3,4,5)$ и $\psi_3 = (4,6,1,7,2)$. Пресмятаме образите на числата под действието на $\varphi = \psi_1\circ\psi_2\circ\psi_3$:

$$
\begin{array}{lcl|l}
1 \xrightarrow{\psi_3} 7 \xrightarrow{\psi_2} 7 \xrightarrow{\psi_1} 1 & \Rightarrow & \varphi(1) = 1 & \text{числото } 1 \text{ не се размества} \\
\hline
2 \xrightarrow{\psi_3} 4 \xrightarrow{\psi_2} 5 \xrightarrow{\psi_1} 7 & \Rightarrow & \varphi(2) = 7 & \\
7 \xrightarrow{\psi_3} 2 \xrightarrow{\psi_2} 3 \xrightarrow{\psi_1} 5 & \Rightarrow & \varphi(7) = 5 & \text{цикъл } (2,7,5) \\
5 \xrightarrow{\psi_3} 5 \xrightarrow{\psi_2} 2 \xrightarrow{\psi_1} 2 & \Rightarrow & \varphi(5) = 2 & \\
\hline
3 \xrightarrow{\psi_3} 3 \xrightarrow{\psi_2} 4 \xrightarrow{\psi_1} 4 & \Rightarrow & \varphi(3) = 4 & \\
4 \xrightarrow{\psi_3} 6 \xrightarrow{\psi_2} 6 \xrightarrow{\psi_1} 6 & \Rightarrow & \varphi(4) = 6 & \text{цикъл } (3,4,6) \\
6 \xrightarrow{\psi_3} 1 \xrightarrow{\psi_2} 1 \xrightarrow{\psi_1} 3 & \Rightarrow & \varphi(6) = 3 &
\end{array}
$$

По този начин се получава

$$\varphi = (3,5,7,1)\circ(2,3,4,5)\circ(4,6,1,7,2) = (2,7,5)\circ(3,4,6)$$

Пример:

Елементът $\varphi = (1,3,5,7,9)\circ(2,5,8)\circ(1,4,6,9,3)\circ(6,2)$ да се представи като произведение на независими цикли.
Както в предния пример φ е композиция на зависими цикли и нека $\psi_1 = (1,3,5,7,9)$, $\psi_2 = (2,5,8)$, $\psi_3 = (1,4,6,9,3)$ и $\psi_4 = (6,2)$. Пресмятаме за $\varphi = \psi_1\circ\psi_2\circ\psi_3\circ\psi_4$:

$$
\begin{array}{lcl|l}
1 \xrightarrow{\psi_4} 1 \xrightarrow{\psi_3} 4 \xrightarrow{\psi_2} 4 \xrightarrow{\psi_1} 4 & \Rightarrow & \varphi(1) = 4 & \\
4 \xrightarrow{\psi_4} 4 \xrightarrow{\psi_3} 6 \xrightarrow{\psi_2} 6 \xrightarrow{\psi_1} 6 & \Rightarrow & \varphi(4) = 6 & \\
6 \xrightarrow{\psi_4} 2 \xrightarrow{\psi_3} 2 \xrightarrow{\psi_2} 5 \xrightarrow{\psi_1} 7 & \Rightarrow & \varphi(6) = 7 & \\
7 \xrightarrow{\psi_4} 7 \xrightarrow{\psi_3} 7 \xrightarrow{\psi_2} 7 \xrightarrow{\psi_1} 9 & \Rightarrow & \varphi(7) = 9 & \\
9 \xrightarrow{\psi_4} 9 \xrightarrow{\psi_3} 3 \xrightarrow{\psi_2} 3 \xrightarrow{\psi_1} 5 & \Rightarrow & \varphi(9) = 5 & \text{цикъл } (1,4,6,7,9,5,8,2) \\
5 \xrightarrow{\psi_4} 5 \xrightarrow{\psi_3} 5 \xrightarrow{\psi_2} 8 \xrightarrow{\psi_1} 8 & \Rightarrow & \varphi(5) = 8 & \\
8 \xrightarrow{\psi_4} 8 \xrightarrow{\psi_3} 8 \xrightarrow{\psi_2} 2 \xrightarrow{\psi_1} 2 & \Rightarrow & \varphi(8) = 2 & \\
2 \xrightarrow{\psi_4} 6 \xrightarrow{\psi_3} 9 \xrightarrow{\psi_2} 9 \xrightarrow{\psi_1} 1 & \Rightarrow & \varphi(2) = 1 &
\end{array}
$$

Получихме, че елементът φ е цикъл с дължина 9.

3. Ред на елемент и спрягане

Представянето на елемент като произведение на независими цикли ни помага да пресмятаме по-лесно редовете на елементите, и да правим изводи за степените на елемент от симетричната група. Освен това, чрез това представяне, лесно се определя кога два елемента в групата са спрегнати, както и кои са всички спрегнати елементи на фиксиран елемент.

3.1. Ред и степен на цикъл

Свойство 1:

Нека $\varphi = (i_1, i_2, \dots, i_k)$ е цикъл с дължина k.

Тогава :

а) редът на елемента е $k = \operatorname{ord}(\varphi)$;

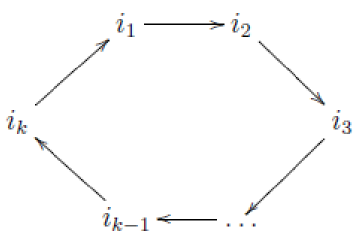
б) елемента φ^s има ред $\dfrac{k}{(k,s)} = \operatorname{ord}(\varphi^s)$

<u>Доказателство:</u>

Построяваме редицата от последователни образи на елемента i_1 при действието на цикъла $\varphi, \varphi^2, \dots, \varphi^s, \dots$.

$$j_1 = i_1,\ j_2 = \varphi(i_1),\ j_3 = \varphi^2(i_1) = \varphi(j_2), \dots,\ j_{s+1} = \varphi^s(i_1) = \varphi(j_s), \dots$$

От схемата на $\varphi = (i_1, i_2, \dots, i_k)$, лесно се вижда, че е изпълнено



$$\begin{aligned} & j_1 = i_1 \\ & j_2 = i_2 = \varphi(j_1) = \varphi(i_1); \\ & \vdots \\ & j_k = i_k = \varphi(j_{k-1}) = \varphi^{k-1}(i_1) \\ & j_{k+1} = i_1 = \varphi(j_k) = \varphi^k(i_1), \\ & j_{k+2} = i_2 = \varphi(j_{k+1}) = \varphi^{k+1}(i_1) \end{aligned}$$

В така получената редица, след елемента $j_k = i_k$ числата започват да се повтарят отначало.

а) Свойството следва от факта, че редицата $j_1, j_2, \dots, j_s, \dots$ е переодична с период k

$$\varphi^k(j_s) = \varphi^k(\varphi^{s-1}(i_1)) = \varphi^{s+k-1}(i_1) = j_{s+k} = \varphi^{s-1} \circ \varphi^k(i_1) = \varphi^{s-1}(i_1) = j_s$$

Откъдето можем да докажем и формално, че редът на цикъл с дължина k е равен на $k = \operatorname{ord}(\varphi)$

б) Получава се, като се приложи следното основно свойство за ред на елементи

Ако елементът g от мултипликативна група G има ред $k = \operatorname{ord}(g)$, тогава g^s има ред $\operatorname{ord}(g^s) = \dfrac{k}{(k,s)}$.

Ако се използва редицата, построена в доказателството, лесно може да се реши следната задача.

Задача:

Нека $\varphi = (i_1, i_2, \dots, i_k)$ е цикъл с дължина k и естественото числото s не е взаимно просто с k. Тогава φ^s се представя като произведение на d независими цикъла, всеки с дължина p, където $d = (k,s)$ е най-големия общ делител и $p = \dfrac{k}{(k,s)} < k = \operatorname{ord}(\varphi^s)$.

3.2. Ред на елемент на Sn

Теорема:

Ако елементът $\varphi = \sigma_1 \circ \ldots \circ \sigma_r$ се представя като произведение на независимите цикли $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$, които са с дължина $k_1 = \operatorname{ord}(\sigma_1), \ldots, k_r = \operatorname{ord}(\sigma_r)$, тогава редът на φ е най-малкото общо кратно на редовете на участващите цикли:

$$\operatorname{ord}(\varphi) = \operatorname{ord}(\sigma_1 \circ \ldots \circ \sigma_r) = \text{НОК}(k_1, \ldots, k_r)$$

Доказателство:

Елементът $\varphi = \sigma_1 \circ \ldots \circ \sigma_r$ е представен като произведение на независими цикли и те комутират и затова степените на елемента се пресмятат по следния начин

$$\varphi^s = \sigma_1^s \circ \ldots \circ \sigma_r^s$$

Ясно е, че σ_i^s и σ_j^s разместват различни числа, когато $i \neq j$. От това получаваме, че е изпълнено $\varphi^s = id$ тогава и само тогава когато за всеки един множител е изпълнено $\sigma_i^s = \mathrm{id}, \forall i \in \{1, \ldots, r\}$.
По този начин се получава, че е необходимо $s | k_i, \forall i \in \{1, \ldots, r\}$.
От това се получава, че най-малкото число, което изпълнява това условие е $\text{НОК}(k_1, \ldots, k_r)$ и следователно е изпълнено

$$\operatorname{ord}(\varphi) = \operatorname{ord}(\sigma_1 \circ \ldots \circ \sigma_r) = \text{НОК}(k_1, \ldots, k_r).$$

Примери:

Редът на елемента $(1, 2, 3, 4) \circ (5, 6, 7, 8, 9, 10)$ е $\text{НОК}(4, 6) = 12$.

В групата S_7 най-високия ред на елемент е 12 и се достига от елементи от вида $(i_1, i_2, i_3) \circ (i_4, i_5, i_6, i_7)$.

3.3. Циклична структура на елемент

Определение:

Нека елементът $\varphi \in S_n$ да е представен като произведение на независими цикли и с m_s да бележим броя на циклите от това представяне, които имат дължина s, а с m_1 да бележим броя на неподвижните точки под действието на φ. Тогава вектора $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$ се нарича *циклична структура* на елемента φ.

Ако елементът $\varphi \in S_n$ има циклична структура $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$, тогава са изпълнени равенствата:

- $m_1 + m_\varphi = n$ -сумата от броя на неподвижните и броя на подвижните точки е n - общия брой точки в множеството;
- $1.m_1 + 2.m_2 + \ldots + n.\, m_n = n$ - получава се като пресметнем общо колко елемента има записани във всички цикли.

3.4. Примери 3.1

Пример:

Да разгледаме елемента $\varphi = (1,2)\circ(4,5,6)\circ(7,8) \in S_8$.

- елемента има циклична структура $(1,2,1,0,0,0,0,0)$ и е изпълнено, че $1.1+2.2+3.1=8$.
- Редът на елемента е $\operatorname{ord}(\varphi) = \text{НОК}(2,3,2) = 6$.
- Втората степен на елемента е $\varphi^2 = (1,2)^2\circ(4,5,6)^2\circ(7,8)^2 = \mathrm{id}\circ(4,6,5)\circ\mathrm{id}$ и има циклична структура $(5,0,1,0,0,0,0,0)$ и е от ред 3.
- Третата степен на елемента е $\varphi^3 = (1,2)^3\circ(4,5,6)^3\circ(7,8)^3 = (1,2)\circ\mathrm{id}\circ(7,8)$ има циклична структура $(4,2,0,0,0,0,0,0)$ и е от ред 2.

Пример:

Всеки елементот S_3, който е различен от идентитета е цикъл с дължина 2 или 3, и затова възможните циклични структури на елементите са

За симетричната група

S_3

циклична структура	елемент	ред на елемента	брой елементи от този тип
$(3,0,0)$	id	1	1
$(1,1,0)$	(x,y)	2	3
$(0,0,1)$	(x,y,z)	3	2

Пример:

Да определим каква може да бъде цикличната структура на елементите от S_4.

Ако елемент е цикъл, дължината на този цикъл може да бъде 2, 3 или 4. Ако елемента е произведение на два независими цикли, единствената възможност е и двата да са от ред 2. По този начин получаваме:

За симетричната група S_4

циклична структура	елемент	ред на елемента	брой елементи от този тип
$(4,0,0,0)$	id	1	1
$(2,1,0,0)$	(x,y)	2	6
$(1,0,1,0)$	(x,y,z)	3	8
$(0,0,0,1)$	(x,y,z,t)	4	6
$(0,2,0,0)$	$(x,y)\circ(z,t)$	2	3

3.5. Спрегнати елементи

Определение:
Ако g и h са елементи в мултипликативно записана група G, тогава елементът $t = hgh^{-1}$ се нарича *спрегнат* на g, като спрягането е извършено чрез елемента h.

Теорема

а) Ако се спрегне цикъл $\sigma = (i_1, \ldots, i_k)$, който има дължина k се получава пак цикъл с дължина k

$$\psi \circ \sigma \circ \psi^{-1} = (\psi(i_1), \ldots, \psi(i_k)) \, .$$

б) Ако един елемент е записан като произведение на цикли

$$\varphi = (i_1^{(1)}, \ldots, i_{k_1}^{(1)}) \circ \ldots \circ (i_1^{(p)}, \ldots, i_{k_p}^{(p)}),$$

тогава всеки спрегнат с него има същата циклична структура и е изпълнено

$$\psi \circ \varphi \circ \psi^{-1} = \left(\psi(i_1^{(1)}), \ldots, \psi(i_{k_1}^{(1)})\right) \circ \ldots \circ \left(\psi(i_1^{(p)}), \ldots, \psi(i_{k_p}^{(p)})\right),$$

в) Два елемента са спрегнати, тогава и само тогава когато имат еднаква циклична структура.

Доказателство:
а) Нека да разгледаме действието на елемента

$$\psi \circ \sigma \circ \psi^{-1} = (\psi(i_1), \ldots, \psi(i_k))$$

$$\boxed{\begin{array}{rcl}
\psi(i_1) \xrightarrow{\psi^{-1}} i_1 \xrightarrow{\sigma} i_2 \xrightarrow{\psi} \psi(i_2) & \Rightarrow & \psi \circ \sigma \circ \psi^{-1}(\psi(i_1)) = \psi(i_2) \\
\ldots & \ldots & \ldots \\
\psi(i_s) \xrightarrow{\psi^{-1}} i_s \xrightarrow{\sigma} i_{s+1} \xrightarrow{\psi} \psi(i_{s+1}) & \Rightarrow & \psi \circ \sigma \circ \psi^{-1}(\psi(i_s)) = \psi(i_{s+1}) \\
\ldots & \ldots & \ldots \\
\psi(i_k) \xrightarrow{\psi^{-1}} i_k \xrightarrow{\sigma} i_1 \xrightarrow{\psi} \psi(i_1) & \Rightarrow & \psi \circ \sigma \circ \psi^{-1}(\psi(i_k)) = \psi(i_1) \\
\hline
\psi(j) \xrightarrow{\psi^{-1}} j \xrightarrow{\sigma} j \xrightarrow{\psi} \psi(j) & \Rightarrow & \psi \circ \sigma \circ \psi^{-1}(\psi(j)) = \psi(j), \\
\text{за произволен елемент} & & j \notin \{i_1, \ldots, i_k\}
\end{array}}$$

Елементът, който получихме, действа кото цикъл $(\psi(i_1), \ldots, \psi(i_k))$.

б) Ако $\varphi = \sigma_1 \circ \ldots \circ \sigma_r$, тогава по принцип е изпълнено следното равенство

$$\psi \circ \varphi \circ \psi^{-1} = \psi \circ \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \ldots \circ \sigma_r \circ \psi^{-1} =$$

$$= (\psi \circ \sigma_1 \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ \sigma_2 \circ \psi^{-1}) \circ \ldots \circ (\psi \circ \sigma_r \circ \psi^{-1})$$

Към това равенство, ако приложим полученото в подточка а) ще получим търсеното тъждество

$$\psi \circ \varphi \circ \psi^{-1} = \left(\psi(i_1^{(1)}), \ldots, \psi(i_{k_1}^{(1)})\right) \circ \ldots \circ \left(\psi(i_1^{(p)}), \ldots, \psi(i_{k_p}^{(p)})\right),$$

в) В подточка б) установихме, че когато спрегнем една пермутация от S_n ще получим пак елемент от S_n, който има същата циклична структура.

Ако имаме два елемента с еднаква циклична структура, и да подредим циклите с равни дължини един под друг, имаме

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= (i_1^{(1)}, \dots, i_{k_1}^{(1)}) \circ \dots \circ (i_1^{(p)}, \dots, i_{k_p}^{(p)})\\ \varphi_2 &= (j_1^{(1)}, \dots, j_{k_1}^{(1)}) \circ \dots \circ (j_1^{(p)}, \dots, j_{k_p}^{(p)})\end{aligned}$$

Построяваме елемент τ по следния начин

$$\begin{array}{ccc|c|ccc|ccc} i_1^{(1)} & \dots & i_{k_1}^{(1)} & \dots & i_1^{(p)} & \dots & i_{k_p}^{(p)} & x_1 & \dots & x_t \\ \downarrow & \dots & \downarrow & \dots & \downarrow & \dots & \downarrow & \downarrow & \dots & \downarrow \\ j_1^{(1)} & \dots & j_{k_1}^{(1)} & \dots & j_1^{(p)} & \dots & j_{k_p}^{(p)} & y_1 & \dots & y_t \end{array}$$

В този запис, числата $x_1, \dots, x_t$ са неподвижните числа, под действието на φ_1, аналогично $y_1, \dots, y_t$ са неподвижните числа под действието н а φ_1. От доказаното в предишната точка е ясно, че $\tau \circ \varphi_1 \circ \tau = \varphi_2$.

3.6. Примери 3.2

Пример:

Нека да разгледаме пермутациите $\varphi = (2,4)(3,5,8)(7,6)$ и $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & 7 & 8 & 2 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$. Да намерим спрегнатия елемент $\psi = \tau\varphi\tau^{-1}$. Цикличната структура на φ е (1,2,1,0,0,0,0,0) и търсеният спрегнат елемент ще има същата циклична структура. Спрегнатия на цикъла $(2,4)$ е $(5,8)$ и се получава, като на мястото на 2 и на 4 пишем образите им под действие на τ. Аналогично, спрягайки $(7,6)$ получаваме $(3,1)$, а спрегнатият на $(3,5,8)$ е $(7,2,6)$. Окончателно получаваме $(5,8)(7,2,6)(3,1)$.

Пример:

Нека да определим дали $\varphi = (2,4)(3,5,8)(7,6)$ и $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & 7 & 8 & 2 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$. от предишната задача са спрегнати помежду си.

За да се определи това трябва и двата елемента да са представени като произведение на независими цикли и да се види дали имат еднаква циклична снтруктура.

Представяме като независими цикли $\tau = (1,4,8,6)(2,5)(3,7)$.

$$\begin{array}{ll} \varphi & \text{има циклична структура } (1,2,1,0,0,0,0,0) \\ \tau & \text{има циклична структура } (0,2,0,1,0,0,0,0) \end{array}$$

Следователно, елементите не са спрегнати.

Пример:

Елементите $\varphi = (2,4)(3,5,8)(7,6)$ и $\psi = (1,8,6)(3,5)(2,7)$ са спрегнати и да се намерят различни елементи, чрез които може да се извърши това спрягане. Подреждаме циклите с еднаква дължина един под друг и получаваме елемент, чрез който е извършено спрятгане, ако променим подредбата, получаваме друг елемент.

$$\begin{array}{ccccc} (2,4) & (7,6) & (3,5,8) & \Rightarrow & \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 8 & 7 & 2 & 6 \end{pmatrix} \\ (3,5) & (2,7) & (1,8,6) & & \\ \hline (2,4) & (7,6) & (3,5,8) & \Rightarrow & \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 2 & 8 & 7 & 6 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\ (2,7) & (3,5) & (8,6,1) & & \\ \hline (2,4) & (7,6) & (3,5,8) & \Rightarrow & \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 7 & 6 & 2 & 1 & 5 & 3 & 8 \end{pmatrix} \\ (7,2) & (3,5) & (6,1,8) & & \\ \hline \end{array}$$

Колко са всички различни елементи, чрез които може да се извърши това спрягане?

4. Транспозиции

Да си припомним, че цикъл с дължина 2 се нарича транспозиция. Транспозицията a, b разменя числата a и b и всички останали числа остават неподвижни. Ясно е, че транспозицията е биекция, която на степен 2 дава идентитета $(a,b)^2 = \mathrm{id}$ и обратното изображение на една транспозиция е същата транспозиция $(a,b)^{-1} = (a,b)$

Нека да разгледаме следния пример:

Пример:

Искаме да получим действието на цикъла $(1,2,3,4)$ чрез последователно разместване на две числа. Например

$$\begin{array}{ccccl} 1 & 2 & 3 & 4 & \textit{прилага се транспозиция } (1,2) \\ \downarrow & \downarrow & & & \\ 2 & 1 & 3 & 4 & \textit{прилага се транспозиция } (1,3) \\ & \downarrow & \downarrow & & \\ 2 & 3 & 1 & 4 & \textit{прилага се транспозиция } (1,4) \\ & & \downarrow & \downarrow & \\ 2 & 3 & 4 & 1 & \end{array}$$

По този начин получаваме равенството $(1,2,3,4) = (1,4).(1,3).(1,2)$

Забележка: Композицията на транспозициите е означена с точка, вместо със $" \circ "$.

Твърдение:

всеки елемент от S_n може да се представи като произведение на транспозиции.

Доказателство:

За всяка транспозиция е изпълнено $(a,b)^2 = \mathrm{id}$, следователно идентитета се представя като произведение на транспозиции.

Ако една пермутация е цикъл $\sigma = (i_1, \ldots, i_k)$, тогава от схемата се вижда, че е изпълнено равенството.
$\sigma = (i_1, i_2).(i_1, i_3).\ldots.(i_1, i_k)$

$$\begin{array}{llllllll} i_1 \xrightarrow{(i_1,i_2)} & i_2 \xrightarrow{(i_1,i_3)} & i_2 \xrightarrow{(i_1,i_4)} & i_2 \rightarrow & \ldots & \rightarrow & i_2 \xrightarrow{(i_1,i_k)} & i_2 \\ i_2 \xrightarrow{(i_1,i_2)} & i_1 \xrightarrow{(i_1,i_3)} & i_3 \xrightarrow{(i_1,i_4)} & i_3 \rightarrow & \ldots & \rightarrow & i_3 \xrightarrow{(i_1,i_k)} & i_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & & & & & \\ i_k \xrightarrow{(i_1,i_2)} & i_k \xrightarrow{(i_1,i_3)} & i_k \xrightarrow{(i_1,i_4)} & i_k \rightarrow & \ldots & \rightarrow & i_k \xrightarrow{(i_1,i_k)} & i_1 \end{array}$$

Тъй като всеки неединичен елемент от може да се представи като произведение на цикли а от горното раветнство получихме, че всеки цикъл може да се представи като произведение на транспозиции, от там следва че всеки елемент е произведение на транспозиции.

4.1. Пример

Пример

Преди получихме равенството $(1,2,3,4)=(1,4).(1,3).(1,2)$. Ако се използва друг запис на цикъла, например $(2,3,4,1)$ може да се получи $(1,2,3,4)=(2,3).(2,4).(2,1)$.

Не е трудно да се установи, че е изпълнено също и

$$(1,2,3,4)=(2,3).(2,4).(2,1).(2,3).(2,1).(3,4).(3,2)$$

$$\begin{array}{llllllll}
1 \xrightarrow{(3,2)} & 1 \xrightarrow{(3,4)} & 1 \xrightarrow{(2,1)} & 2 \xrightarrow{(2,3)} & 3 \xrightarrow{(2,1)} & 3 \xrightarrow{(2,4)} & 3 \xrightarrow{(2,3)} & 2 \\
2 \rightarrow & 3 \rightarrow & 4 \rightarrow & 4 \rightarrow & 4 \rightarrow & 4 \rightarrow & 2 \rightarrow & 3 \\
3 \rightarrow & 2 \rightarrow & 2 \rightarrow & 1 \rightarrow & 1 \rightarrow & 2 \rightarrow & 4 \rightarrow & 4 \\
4 \rightarrow & 4 \rightarrow & 3 \rightarrow & 3 \rightarrow & 2 \rightarrow & 1 \rightarrow & 1 \rightarrow & 1
\end{array}$$

Получихме, че цикълът $(1,2,3,4)$ може да се представи като композиция на транспозиции и то не само по един начин.

От последния пример установяваме, че всеки от елементите на симетричната група може да се представи по най- различни начини като произведение натранспозиции, както и че в представянията може да има по различен брой множители.

4.2. Теорема

Теорема:
ако идентитета е представен като произведение на транспозиции, то в това произведение има четен брой множители

Доказателство:
Ще използваме следните равенства, които лесно се проверяват:

Ако a, b, c и x са произволни числа, тогава в сила са следните равенства за транспозиции
$(b,c)(a,x) = (a,x)(b,c)$
$(a,b)(a,x) = (b,x)(a,b) = (a,x,b)$
$(b,x)(a,x) = (a,x)(a,b) = (a,b,x)$
$(a,x)(a,x) = \mathrm{id} = (u,v).(u,v)$

Нека е изпълнено равенството $\mathrm{id} = \tau_1.\tau_2.\ldots.\tau_{s-1}.\tau_s$,, където $\tau_1,\ldots,\tau_s$ са транспозиции. Избираме си елемент x който участва в записа на тези транспозиции и се опитваме да променим транспозициите в равенството, така че да премахнем елемента x от него.

Започваме от транспозициите τ_{s-1},τ_s и преминаваме през всеки две съседни транспозицииτ_{r-1},τ_r, докато завършим със $\tau_1.\tau_2$.

За транспозиции τ_{r-1} и τ_r. Ако x не участва в записа транспозиция τ_r, нищо не променяме. Ако числото x участва в записа транспозиция $\tau_r = (a,x)$, тогава правим следните замени:

- ако τ_{r-1} и τ_r нямат общи елементи, тогава разменяме местата на транспозициите;
- ако двете транспозиции имат общ елемент, който е различен от x, прилагаме равенството $(a,b)(a,x) = (b,x)(a,b)$ и вече във втората от двете транспозиции не участва x;
- ако двете транспозиции имат общ елемент, равен на x, прилагаме $(b,x)(a,x) = (a,x)(a,b)$ и пак е изпълнено, че във втората транспозиция няма x;
- ако двете транспозиции са равни заместваме, използваме, че тяхната композиция е идентитета и ги махаме от равенството. По този начин броя на транспозициите намалява с 2.

След като свършим и направим всички промени, получаваме, че x може да участва единствено в записа на транспозицията τ_1.

Ако допуснем, че x участва единствено в $\tau_1 = (a,x)$, ще получим противоречие, защото това означа, че x отива в a, при действието на тази композиция на транспозиции. Противоречие, защото композицията е равна на идентитета.

Следователно в новия запис не участва елемента x. Броя на транспозициите в новия запис е намалял с числото $2.t$, където t показва колко пъти сме използвали равенството $(a,x)(a,x) = \mathrm{id}$.

Продължаваме по този начин да намаляваме елементите, участващи в записа на транспозициите и едновременно с това да намаляваме броя на транспозициите с четно число. Накрая ще достигнем до момент, в който няма да останат елементи, с които да со записани транспозициите и транспозициите ще се свършат .т.е. остават 0 на брой.

По този начин получихме, че първоначалния брй на транспозициите е бил четно число.

4.3. Четност на елемент

Твърдение:
Ако произволен елемент от

S_n се представя като произведение на k транспозиции, а друг път като произведение на s транспозиции, тогава числата s и k имат еднаква четност.

$$s \equiv k \pmod 2.$$

Доказателство:

Нека елемента φ се задава по два начина като произведения на транспозиции $\varphi = \tau_1 . \dots . \tau_k$ и $\varphi = \sigma_1 . \dots . \sigma_s$. Получава се

$$\begin{aligned} \mathrm{id} &= \tau_1 . \dots . \tau_k . (\sigma_1 . \dots . \sigma_s)^{-1} = \\ &= \tau_1 . \dots . \tau_k . \sigma_s . \dots . \sigma_1 \end{aligned}$$

Идентитета е представен като произведение на $s+k$ транспозиции, прилагайки предното твърдение, получаваме че $s+k$ е четно число.
Следователно числата s и k имат еднаква четност.

Определение:
Една пермутация от S_nсе нарича **четна**, ако може да се предсатви като произведение на четен брой транспозиции и **нечетна**, ако се представя като произведение на нечетен брой транспозиции.

От доказаното равенство $(i_1, \dots, i_k) = (i_1, i_2) . (i_1, i_3) . \dots . (i_1, i_k)$, следва че един цикъл с дължина k е четен елемент от групата S_n точно когато числото k е нечетно число.

Пример:
Да видим от какви четности са елементите от S_4

$$\begin{array}{rl} \mathrm{id} & \text{четен} \\ (x,y) & \text{нечетен} \\ (x,y,z) & \text{четен} \\ (x,y,z,t) & \text{нечетен} \\ (x,y)\circ(z,t) & \text{четен} \end{array}$$

4.4. Свойства

Използвайки определението, лесно се вижда, че е изпълнено.

Свойство:

Ако φ и ψ са произволни елементи от S_n, тогава е изпълнено:

$$\begin{array}{llll} \varphi \text{ четен} & \text{и} & \psi \text{ четен} & \Rightarrow & \varphi \circ \psi \text{ четен} \\ \varphi \text{ четен} & \text{и} & \psi \text{ нечетен} & \Rightarrow & \varphi \circ \psi \text{ нечетен} \\ \varphi \text{ нечетен} & \text{и} & \psi \text{ четен} & \Rightarrow & \varphi \circ \psi \text{ нечетен} \\ \varphi \text{ нечетен} & \text{и} & \psi \text{ нечетен} & \Rightarrow & \varphi \circ \psi \text{ четен} \end{array}$$

Свойство:

Елементът φ е четен $\Leftrightarrow \varphi^{-1}$е четен.

Свойство:

Нека φ и $\psi = \tau \circ \varphi \circ \tau^{-1}$ са спрегнати елементи. Тогава:
φ е четен $\Leftrightarrow \psi$ е четен.

Пример:

Да се определи четността на елемента

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & 7 & 2 & 11 & 1 & 8 & 4 & 10 & 6 & 12 & 3 & 9 \end{pmatrix}.$$

Представяме елемента като произведение на независими цикли
$\varphi = (1,5)(2,7,4,11,3)(6,8,10,12,9)$. Първия цикъл е нечетна пермутация, другите два са четни пермутации и се получава, че φ е нечетен елемент.

4.5. четност и инверсии

Друг начин за намиране на четността на елемент от S_n е да се пресмята броя на инверсиите на пермутацията $i_1, i_2, \ldots, i_n$, която представлява втория ред в записа на този елемент

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix}, \text{ където } i_1 = \varphi(1),\ i_2 = \varphi(2), \ldots, i_n = \varphi(n).$$

Да разгледаме елемент ψ, който е композиция на φ и една транспозиция. Ясно е, че елементите φ и ψ имат различна четност.

$$\psi = \varphi \circ (k, s) = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & k & \ldots & s & \ldots & n \\ i_1 & \ldots & i_s & \ldots & i_k & \ldots & i_n \end{pmatrix},$$

Втория ред на ψ може да се получи, като разменим местата на числата i_k и i_s във втория ред на записа на φ.

В *ЛИНЕЙНАТА АЛГЕБРА* дефинирахме четност на пермутеция, като четността на броя на инверсиите. Едно от основните свойства тогава беше, че като разменим местата на два елемента в една пермутация, тогава се сменя четността. От това следва, че пермутациите, които формират втория ред на φ и на ψ са от различна четност.

Знаем, че пермутацията $1, 2, \ldots, n$ няма инверсии и е четна пермутация, както и идентитета, като елемент от S_n е четен елемент.
От това получаваме свойството:

Свойство:
Елементът $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix}$, е четен елемент тогава и само тогава когато пермутацията $i_1, i_2, \ldots, i_n$ съдържа четен брой инверсии.

Пример:
Пермутацията $5, 7, 2, 11, 1, 8, 4, 10, 6, 12, 3, 9$ от елемента

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & 7 & 2 & 11 & 1 & 8 & 4 & 10 & 6 & 12 & 3 & 9 \end{pmatrix},$$

разглеждан в предишния пример съдържа 27 инверсии и по този начин пак можем да получим, че елементът е нечетен.

4.6. Алтернативна подгрупа

Всички елементи от S_n разделяме на две подмножества

- четни елементи $A_n = \{\varphi \in S_n |\ \varphi \text{ четен}\};$
- нечетни елементи $B_n = \{\varphi \in S_n |\ \varphi \text{ нечетен}\};$

Изпълнено е, че $A_n \cap B_n = \emptyset$ и $A_n \cup B_n = S_n$.

Освен това, ясно е че:

$$\begin{array}{ccc}(1,2)\circ\varphi \in A_n & \Leftrightarrow & \varphi \in B_n \\ (1,2)\circ\varphi \in B_n & \Leftrightarrow & \varphi \in A_n\end{array}$$

откъдето получаваме, че когато $n > 1$, множествата A_n и B_n имат по равен брой елементи:

$$|A_n| = |B_n| = \frac{n!}{2}.$$

Знаем, че ако $\varphi \text{ четен } \text{ и } \psi \text{ четен } \Rightarrow \varphi\circ\psi \text{ четен}.$ Освен това, ако φ е четен, такъв е и φ^{-1}. Следователно елементите на подмножеството A_n образуват подгрупа.

Определение:

Всички четни елементи от S_n образуват подгрупа A_n, която се нарича алтернативна група от степен n.

Забележка: От свойството, че ако един елемент е четен, то и неговите спрегнати са четни следва че алтернативната група е нормална подгрупа на S_n

Елементите от B_n не образуват подгрупа, защото ако $\varphi \text{ нечетен } \text{ и } \psi \text{ нечетен}$ следва, че $\varphi\circ\psi$ е четен елемент.