Верификация за нерегулярност

- Pumping Лема:

  +: Лесно се прилага

  −: Само необходимо условие

- Релацията на Нероуд

  +: Необходимо и достатъчно условие $(R_L) = \infty$

  −: Малко трудно се проверява

Релация на Нероуд

Пример: $L = \{a^n b^n : n \geq 1\}$

Твърдение: $\forall k > 1, j \neq k > 1 : [a^k b] \neq [a^j b]$

$[a^k b] = \{a^k b, a^{k+1} bb, \dots\} = \{a^{k+i} b^{i+1}\}$

така винаги $k-1$ повече а-та от b-та.

Следователно $[a^k b]$ и $[a^j b]$ са непресичащи. $\square$

Релация на Нероуд

Пример: $L = \{c^m a^\ell b^\ell : m, \ell \geq 0\} \cup \{a, b\}^*$

Твърдение: $\forall k > 1, j \neq k > 1 : [ca^k b] \neq [ca^j b]$

$[ca^k b] = \{c^m a^{k+i} b^{1+i} : m \geq 0, i \geq 1\}$

така винаги $k-1$ повече a-та от b-та.

Следователно $[ca^k b]$ и $[ca^j b]$ са непресичащи се. $\square$

1.1.6 Свойства на затвореност

Нека L, L' са регулярни езици.

Тогава и следните езици са регулярни:

$L \cup L'$, L^*, $L \cdot L'$: по дефиниция на рег. израз.

$\bar{L} := \Sigma^* \setminus L$: Да разгледаме DFA $A = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ с $L(A) = L$.
Нека $\bar{A} := (Q, \Sigma, \delta, s, Q \setminus F)$. Тогава $L(\bar{A}) = \bar{L}$.

$L \cap L' = \overline{\bar{L} \cup \bar{L}'}$ (Де Морган)

$L \setminus L' = L \cap \bar{L}'$

L^R: Упражнение. Упътване: Индукция по регулярен израз.

(Product автомат)

Конструкции на DFA за теоретико-мнжествените операции

L и L' са регулярни езици, дефинирани с DFAs

$A = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$,

$A' = (Q', \Sigma, \delta', s', F')$.

Идея: Автоматът $A_\times$ симулира поведението на A и A'.

Product автомат: $A_\times := (Q \times Q', \Sigma, \delta_\times, (s, s'), F_\times)$ с

$\delta_\times((q, q'), a) = (\delta(q, a), \delta(q', a))$

Дефинираме F в съответствие с операциите:

$L \cup L'$: $F_\times := Q \times F' \cup F \times Q'$

$L \cap L'$ $F_\times := F \times F'$

1.1.7 Разрешимост на прости свойства на един краен автомат

Word problem

$w \in L$?

Изброждаме DFA A.

Симулираме A с вход w.

Дали има крайно състояние, което е достижимо?

Линейно време, ако DFA ако е даден автоматът!

Проблемът за празнотата на езика

$L = \emptyset$?

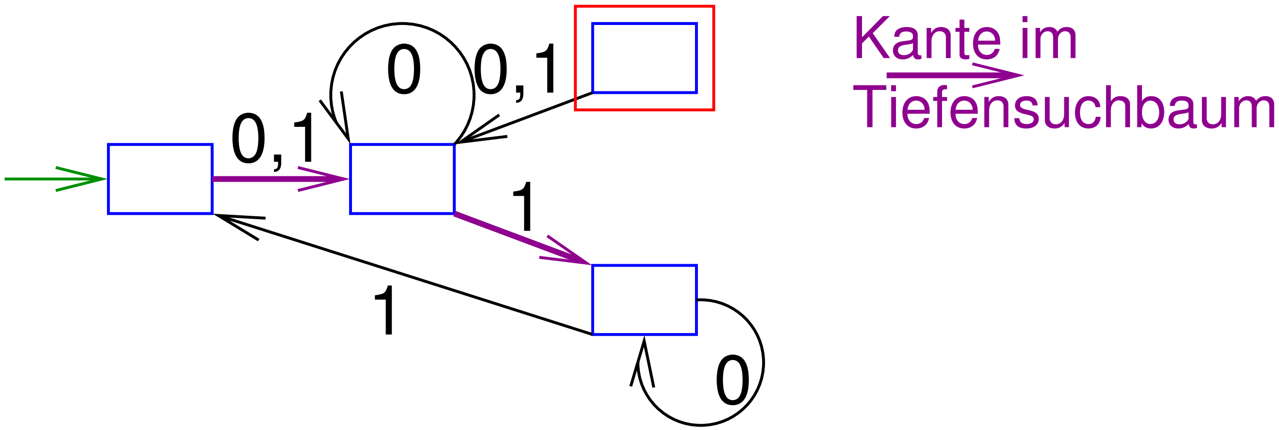
Представяне на DFA или NFA A:

$L = \emptyset \Leftrightarrow \neg \exists f \in F : f$ е от s достижимо

$\rightsquigarrow$ търсене в дълбочина, линейно време, както и за NFA.

Пример

$L(A) = \emptyset$



Проблемът за крайност на езика I — с Pumping Лемата

Нека n е числото от Pumping-Лемата за L - регулярен

Твърдение: $|L(G)| = \infty \Leftrightarrow \exists z \in L(G) : n \leq |z| < 2n$

Д-во:

$z \in L(G), n \leq |z| < 2n \longrightarrow$ Pumping лемата осигурява

$|L| = \infty$.

Ако $|L(G)| = \infty$ да разгледаме $z \in L(G)$ с минимална дължина $|z| \geq n$.

Да допуснем, че $|z| \geq 2n$.

$\xrightarrow{\text{Pumping Лема}} z = uvw$,

$1 \leq |v| \leq |uv| \leq n, uw \in L(G) \longrightarrow |uw| \geq n$.

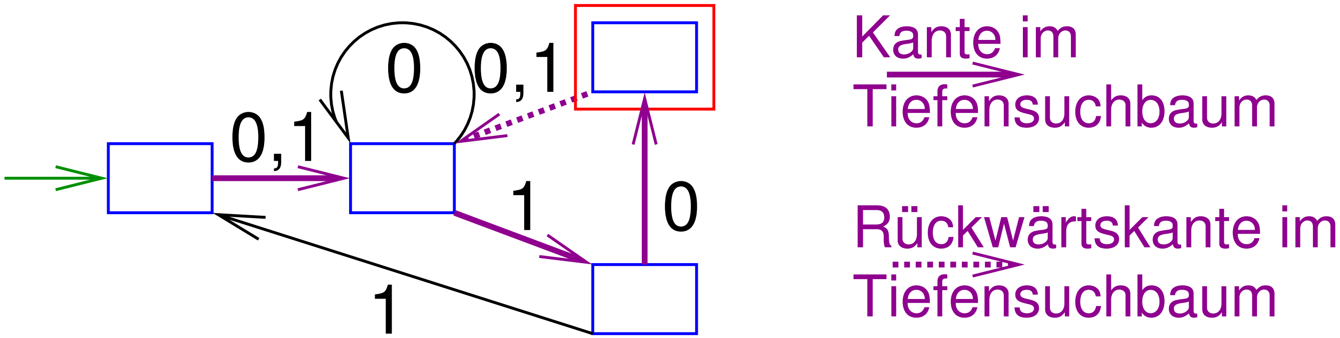
Противоречие с минималността на $|z|$.

Проблемът за крайност на езика II — намиране на цикли

$|L(A)| = \infty$? $\Leftrightarrow \exists$ приемащ път, съдържащ цикъл.
Нека NFA има $F = \{f\}$. Нека $G_A = (Q, E)$,
$E = \{(q,r) : \exists a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\} : r \in \delta(q,a)\}$

1. Махаме състоянията, от които f не е достижимо.
   Търсене в дълбочина в $\bar{G_A} = (Q, \{(q,r) : (r,q) \in E\})$ за f.

2. Можем ли да достигнем цикъл от s? $\Leftrightarrow$
   Дали търсенето в дълбочина от s в G_A среща вече посетен възел?


0
0,1
0,1
1
0
1
Kante im Tiefensuchbaum
Rückwärtskante im Tiefensuchbaum

Проблемът за пълнота

$L(A) = \Sigma^*$?

$\Leftrightarrow \neg\exists q \in Q \setminus F : q$ е достижимо от s?

$\rightsquigarrow$ търсене в дълбочина, линейно време, само за DFA!

(Еквивалентно: празнота на $\bar{L}$)

Пълнота на NFA:

Трансформираме в DFA. Не е известен по-добър алгоритъм.

Проблемът за еквивалентност

L и L' са регулярни езици разпознавани от DFAs A, A'.

Въпрос $L = L'$?

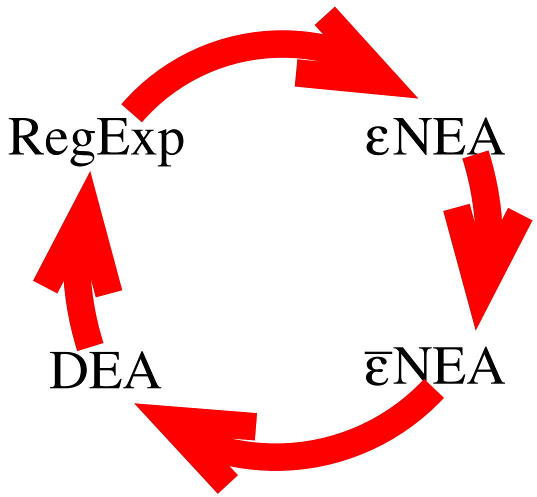
$\Leftrightarrow \neg\exists w : (w \in L \wedge w \notin L') \vee (w \notin L \wedge w \in L')$

$\Leftrightarrow \neg\exists w : (w \in L \wedge w \in \bar{L}') \vee (w \in \bar{L} \wedge w \in L')$

$\Leftrightarrow (L \cap \bar{L}') \cup (\bar{L} \cap L') = \emptyset$

за пример с product автомат

Проблем: бавно



Еквивалентност на DFA

L и L' са регулярни езици дефинирани от DFAs
$A = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$, $A' = (Q', \Sigma, \delta', s', F')$.

Идея: Минималният автомат е "‘единствен"’.
$\leadsto$ минимизирайте двата автомата и дикажете, че са "‘равни"’.

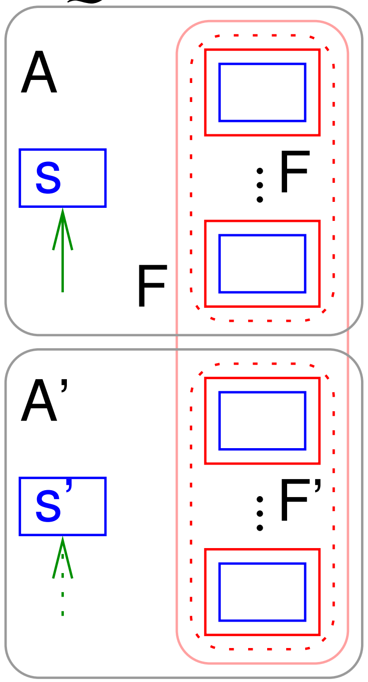
Проблем: Възможно е да са преименувани състоянията.
Сложността на изоморфизъм между по-общи графи е отрит въпрос.

Еквиванетност на DFA

L и L' са регулярни езици дефинирани с DFA

$A = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$, $A' = (Q', \Sigma, \delta', s', F')$. Нека $Q \cap Q' = \emptyset$.

Въпрос: $L = L'$?



Да разгледаме $A_\cup := (Q \cup Q', \Sigma, \delta_\cup, s, F \cup F')$,

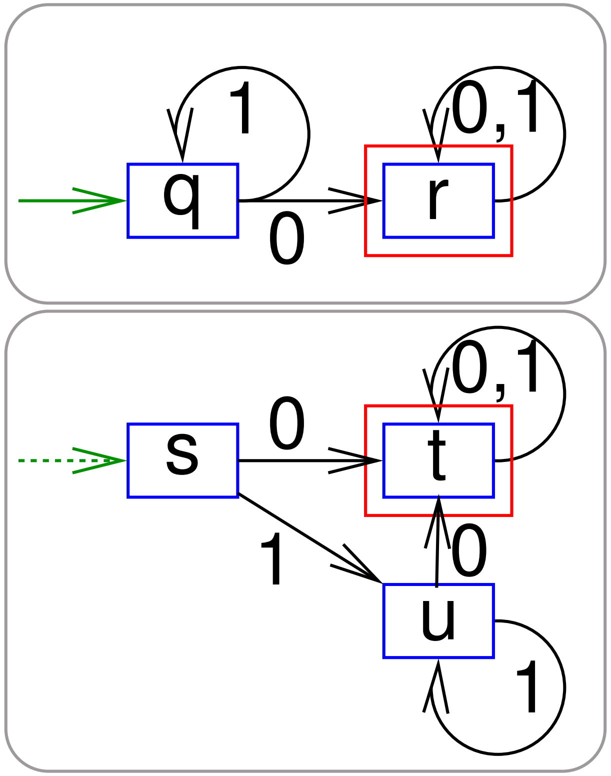
$$\delta_\cup(q,a) = \begin{cases} \delta(q,a) & \text{ако } q \in Q \\ \delta'(q,a) & \text{ако } q \in Q' \end{cases}$$

Намерете класовете на еквивалентност

от състояния за $A_\cup$. $L = L' \Leftrightarrow s \equiv s'$.

Пример

$L \subseteq \{0,1\}^*$ език, всички думи с поне една нула



Алгоритъмът за маркиране на нееквивалентните двойки състояния ни дава: $\{q,r\},\{q,t\},\{s,r\},\{s,t\},\{u,r\},\{u,t\}$

$\rightsquigarrow q \equiv s$

$\rightsquigarrow$ Двата автомата са еквивалентни.