Ранг на система вектори. Ранг на матрица

Нека V е линейно пространство над полето F. Под *ранг* $\operatorname{rank}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k)$ на системата вектори

$$(1) \qquad \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$$

от V ще разбираме $\dim l(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k)$.

Ясно е, че ако поне един от векторите $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ е ненулев, то $1 \le \operatorname{rank}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k) \le k$. При това,

$$rank(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k) = k \iff \text{векторите } \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k \text{ са линейно независими.}$$

Задача. Да се намери рангът r на системата вектори $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \dots$ и максимална линейно независима подсистема (МЛНП) на тази система, ако

а) $\mathbf{a}_1 = (1, 3, 1, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (2, 1, -1, 0)$, $\mathbf{a}_3 = (-3, 1, 3, 1)$.

Решение.

$$\begin{array}{c} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -3 & -2 \\ 0 & 10 & 6 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \end{array}$$

Имаме $\mathbf{f}_1 = \mathbf{a}_1$, $\mathbf{f}_2 = \mathbf{a}_2 - 2\mathbf{a}_1$, $\mathbf{0} = \mathbf{a}_3 + 3\mathbf{a}_1 + 2(\mathbf{a}_2 - 2\mathbf{a}_1) = -\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3$. Следователно $U = l(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = l(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$. При това, векторите $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ са линейно независими и значи са базис на U. Оттук $r = \dim U = 2$. Тъй като $\operatorname{rank}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = 2$, то $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ са линейно независими и образуват МЛНП.

б) $\mathbf{a}_1 = (1, 0, 0, -1)$, $\mathbf{a}_2 = (2, 1, 1, 0)$, $\mathbf{a}_3 = (1, 1, 1, 1)$, $\mathbf{a}_4 = (0, 1, 2, 3)$, $\mathbf{a}_5 = (1, 2, 3, 4)$.

Решение.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Следователно $r = 3$ и $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4$ е МЛНП.

в) $\mathbf{a}_1 = (0, 6, 6, 1, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (3, 1, 1, 0, 0)$, $\mathbf{a}_3 = (1, -1, 3, 1, -2)$, $\mathbf{a}_4 = (2, -3, -1, 0, -1)$, $\mathbf{a}_5 = (2, 3, 5, 1, -1)$, $\mathbf{a}_6 = (1, -6, 4, 2, -5)$

Решение.

$$\begin{pmatrix} 0 & 6 & 6 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & -1 \\ 1 & -6 & 4 & 2 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 6 & 6 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -7 & -3 & 0 & -2 \\ 2 & -3 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -18 & -8 & 0 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -18 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 10 & -4 & 0 & 0 & -2 \\ 5 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ 5 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ 25 & -10 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -18 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Следователно $r = 3$ и $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ е МЛНП.

г) $\mathbf{a}_1 = (2, 1, -3, 1, -2)$, $\mathbf{a}_2 = (1, 2, 1, -2, 1)$, $\mathbf{a}_3 = (2, -1, 1, 3, 2)$, $\mathbf{a}_4 = (1, -1, 2, -1, 3)$, $\mathbf{a}_5 = (1, -1, 3, -1, 7)$.

Решение.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & -1 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 7 & -4 & 5 \\ 4 & 0 & -2 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 1 & -5 & 1 & 0 \\ -18 & 0 & 12 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -12 & 0 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & -9 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 20 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 10 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \mid :2 \\ \\ \\ \mid :2 \end{array} \sim$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & -9 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -19 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Следователно $\operatorname{rank}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5) = 5$ и значи $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5$ е МЛНП.

Задача. Линейно зависими или линейно независими са векторите

а) $\mathbf{a}_1 = (1,1,1,1)$, $\mathbf{a}_2 = (2,2,2,1)$, $\mathbf{a}_3 = (3,3,2,1)$, $\mathbf{a}_4 = (4,3,2,1)$

Решение.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Имаме $\operatorname{rank}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4) = 4$ и значи $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ са линейно независими.

б) $\mathbf{a}_1 = (2,4,3,2,0)$, $\mathbf{a}_2 = (3,2,4,0,2)$, $\mathbf{a}_3 = (7,10,10,3,2)$, $\mathbf{a}_4 = (-2,-4,-3,-1,0)$.

Решение.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 0 & 2 \\ 7 & 10 & 10 & 3 & 2 \\ -2 & -4 & -3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & -4 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & -4 & -3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -10 & 0 & 0 & 6 \\ -1 & 10 & 0 & 0 & -6 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -10 & 0 & -1 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -10 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Следователно $r = 3$ и значи векторите $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ са линейно зависими (тъй като $\operatorname{rank}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4) = 3 < 4$).

Задача. Да се докаже, че векторите $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \dots$ са линейно независими и да се допълни тази система до базис на F^4, където

а) $\mathbf{a}_1 = (-1,2,3,-2)$, $\mathbf{a}_2 = (2,1,-4,-3)$, $\mathbf{a}_3 = (1,3,-2,-3)$

Решение.

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -4 & -3 \\ 1 & 3 & -2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & 2 & -7 \\ 0 & 5 & 1 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Тъй като $\operatorname{rank}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = 3$, то $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ са линейно независими. Да означим $\mathbf{a}_4 = (0,0,0,1)$. Тогава $\operatorname{rank}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4) = 4$, т.е. $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ са линейно независими и значи са базис на F^4.

б) $\mathbf{a}_1 = (1,-1,2,3)$, $\mathbf{a}_2 = (2,-2,1,1)$

Решение.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -5 \end{pmatrix}$$

Тъй като $\operatorname{rank}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = 2$, то $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ са линейно независими. Да означим $\mathbf{a}_3 = (0,1,0,0)$, $\mathbf{a}_4 = (0,0,0,1)$. Тогава $\operatorname{rank}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4) = 4$, т.е. $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ са линейно независими и значи са базис на F^4.

Задача. Да се намери рангът r на матрицата.

а) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i & 1 \end{pmatrix}$

Решение.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & i-1 & -2 & -i-1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -i-1 & -2 & i-1 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & i-1 & -2 & -i-1 & 0 \\ 0 & -i-1 & -2 & i-1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2i & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2i & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4i & 0 \end{pmatrix}$$

Следователно $r=4$.

б) $\begin{pmatrix} 14 & -27 & -49 & 113 \\ 43 & -82 & -145 & 340 \\ -29 & 55 & 96 & -227 \\ 128 & -245 & -438 & 1017 \end{pmatrix}$

Решение.

$$\begin{pmatrix} 14 & -27 & -49 & 113 \\ 43 & -82 & -145 & 340 \\ -29 & 55 & 96 & -227 \\ 128 & -245 & -438 & 1017 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 14 & -27 & -49 & 113 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -13 & -77 & 99 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Следователно $r=3$.

Задача. Да се намери рангът r на матрицата в зависимост от стойностите на параметъра λ

а) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \lambda & 3 \\ 1 & 4 & \lambda^2 & 9 \\ 1 & 8 & \lambda^3 & 27 \end{pmatrix}$

Решение.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \lambda & 3 \\ 1 & 4 & \lambda^2 & 9 \\ 1 & 8 & \lambda^3 & 27 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda-1 & 2 \\ 0 & 3 & \lambda^2-1 & 8 \\ 0 & 7 & \lambda^3-1 & 26 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda-1 & 2 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)(\lambda-2) & 2 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)(\lambda^2+\lambda-6) & 12 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda-1 & 2 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)(\lambda-2) & 2 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda+3) & 12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda-1 & 2 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)(\lambda-2) & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2\lambda+6 \end{pmatrix}$$

Следователно, ако $\lambda \notin \{1,2,3\}$, то $r=4$. Ако $\lambda \in \{1,2,3\}$, то $r=3$.

б) $\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$

Решение.

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 2-\lambda & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 2-\lambda & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 2-\lambda & 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

Следователно, ако $\lambda \notin \{-2,2\}$, то $r=4$. Ако $\lambda=2$, то $r=1$. Ако $\lambda=-2$, то $r=3$.

в) $\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 4 & -2 \\ 2 & -1 & -\lambda & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$

Решение.

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 4 & -2 \\ 2 & -1 & -\lambda & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 & -1 \\ 2(1-\lambda) & 1-\lambda & 4 & -2 \\ 0 & -1 & -\lambda & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\lambda & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ + \\ |\,.-1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda-2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ + \\ \lambda \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda-2 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2-2\lambda+1 \end{pmatrix}$$

Следователно, ако $\lambda \neq 1$, то $r = 4$. Ако $\lambda = 1$, то $r = 2$.

г) $\begin{pmatrix} \lambda+2 & \lambda & \lambda & \lambda & \lambda & -1 \\ \lambda+1 & \lambda & \lambda & \lambda & 0 & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda & 1 & \lambda & \lambda \\ \lambda-1 & \lambda & 2 & \lambda & \lambda & \lambda \\ \lambda-2 & 3 & \lambda & \lambda & \lambda & \lambda \\ 1 & \lambda & \lambda & \lambda & \lambda & \lambda \end{pmatrix}$

Решение.

$$\begin{pmatrix} \lambda+2 & \lambda & \lambda & \lambda & \lambda & -1 \\ \lambda+1 & \lambda & \lambda & \lambda & 0 & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda & 1 & \lambda & \lambda \\ \lambda-1 & \lambda & 2 & \lambda & \lambda & \lambda \\ \lambda-2 & 3 & \lambda & \lambda & \lambda & \lambda \\ 1 & \lambda & \lambda & \lambda & \lambda & \lambda \end{pmatrix} \begin{matrix} + \\ + \\ + \\ + \\ + \\ -1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda+1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1-\lambda \\ \lambda & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ \lambda-1 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ \lambda-2 & 0 & 2-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda-3 & 3-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & \lambda & \lambda & \lambda & \lambda \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1-\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1+5\lambda & \lambda & \lambda & \lambda & \lambda & \lambda \end{pmatrix}$$

Следователно, ако $\lambda \notin \left\{-1, 0, 1, 2, 3, -\dfrac{1}{5}\right\}$, то $r = 6$. Ако $\lambda \in \left\{-1, 0, 1, 2, 3, -\dfrac{1}{5}\right\}$, то $r = 5$.

д) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \lambda & \dots & \lambda & \lambda \\ 1 & \lambda & 0 & \dots & \lambda & \lambda \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \lambda & \lambda & \dots & 0 & \lambda \\ 1 & \lambda & \lambda & \dots & \lambda & 0 \end{pmatrix}$

Решение. Ако $\lambda = 0$, то $r = 2$. Нека сега $\lambda \neq 0$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \lambda & \dots & \lambda & \lambda \\ 1 & \lambda & 0 & \dots & \lambda & \lambda \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \lambda & \lambda & \dots & 0 & \lambda \\ 1 & \lambda & \lambda & \dots & \lambda & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} \frac{n-1}{\lambda} & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

Следователно в този случай $r = n$.

е) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & 1 \\ 1 & \lambda & 2 & 3 & \dots & n-2 & 1 \\ 1 & 2 & \lambda & 3 & \dots & n-2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \lambda & \dots & n-2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & \lambda & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & 1 \end{pmatrix}$

Решение.

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & 1 \\ 1 & \lambda & 2 & 3 & \dots & n-2 & 1 \\ 1 & 2 & \lambda & 3 & \dots & n-2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \lambda & \dots & n-2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & \lambda & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda-1 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 1 \\ 0 & \lambda-2 & -1 & -1 & \dots & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda-3 & -1 & \dots & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-4 & \dots & -1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda-(n-1) & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Следователно, ако $\lambda \notin \{1, 2, \dots, n-1\}$, то $r = n$. Ако $\lambda \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, то $r = n-1$.

ж) $\begin{pmatrix} \lambda+1 & \lambda & \lambda & \dots & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda+\frac{1}{2} & \lambda & \dots & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda+\frac{1}{3} & \dots & \lambda & \lambda \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \lambda & \lambda & \lambda & \dots & \lambda+\frac{1}{n-1} & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda & \dots & \lambda & \lambda+\frac{1}{n} \end{pmatrix}$

Решение.

$$\begin{pmatrix} \lambda+1 & \lambda & \lambda & \dots & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda+\frac{1}{2} & \lambda & \dots & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda+\frac{1}{3} & \dots & \lambda & \lambda \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \lambda & \lambda & \lambda & \dots & \lambda+\frac{1}{n-1} & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda & \dots & \lambda & \lambda+\frac{1}{n} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda+1 & \lambda & \lambda & \dots & \lambda & \lambda \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \frac{1}{3} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{n-1} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{n} \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1+\lambda(1+2+\dots+n) & \lambda & \lambda & \dots & \lambda & \lambda \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

Имаме $1+2+\dots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$. Следователно, ако $\lambda\neq-\dfrac{2}{n(n+1)}$, то $r=n$. Ако $\lambda=-\dfrac{2}{n(n+1)}$, то $r=n-1$.

з) $\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & 2-\lambda & 2 & \dots & 2 \\ 3 & 3 & 3-\lambda & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n-\lambda \end{pmatrix}$

Решение.

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & 2-\lambda & 2 & \dots & 2 \\ 3 & 3 & 3-\lambda & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n-\lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2\lambda & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ 3\lambda & 0 & -\lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n\lambda & 0 & 0 & \dots & -\lambda \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} -\lambda+\frac{n(n+1)}{2} & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda \end{pmatrix}$$

Следователно, ако $\lambda=0$, то $r=1$. Ако $\lambda=\dfrac{n(n+1)}{2}$, то $r=n-1$. Ако $\lambda\neq0$ и $\lambda\neq\dfrac{n(n+1)}{2}$, то $r=n$.

и) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2^2 & 2 & \lambda & \lambda & \dots & \lambda \\ 3^2 & \lambda & 3 & \lambda & \dots & \lambda \\ 4^2 & \lambda & \lambda & 4 & \dots & \lambda \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n^2 & \lambda & \lambda & \lambda & \dots & n \end{pmatrix}$

Решение.

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2^2 & 2 & \lambda & \lambda & \dots & \lambda \\ 3^2 & \lambda & 3 & \lambda & \dots & \lambda \\ 4^2 & \lambda & \lambda & 4 & \dots & \lambda \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n^2 & \lambda & \lambda & \lambda & \dots & n \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2^2-\lambda^2 & 2-\lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 3^2-\lambda^2 & 0 & 3-\lambda & 0 & \dots & 0 \\ 4^2-\lambda^2 & 0 & 0 & 4-\lambda & \dots & \lambda \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n^2-\lambda^2 & 0 & 0 & 0 & \dots & n-\lambda \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} \lambda-(2+\lambda)-(3+\lambda)-\dots-(n+\lambda) & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4-\lambda & \dots & \lambda \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n-\lambda \end{pmatrix}$$

Имаме $\lambda-(2+\lambda)-(3+\lambda)-\dots-(n+\lambda) = -(n-2)\lambda-\dfrac{(2+n)(n-1)}{2}$. Следователно, ако $\lambda \notin \left\{2,3,\dots,n,-\dfrac{(n+2)(n-1)}{2(n-2)}\right\}$, то $r=n$. Ако $\lambda \in \left\{2,3,\dots,n,-\dfrac{(n+2)(n-1)}{2(n-2)}\right\}$, то $r=n-1$.

Фундаментални системи решения

Нека U е множеството от решенията на хомогенната система

$$\left|\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}\right. \quad (*)$$

Всяко решение $(k_1,k_2,\dots,k_n)$ на (*) е наредена n-орка от числа от F, така че $U \subseteq F^n$. При това, $U \neq \emptyset$, тъй като нулевата n-орка е решение, т.е. $(0,0,\dots,0) \in U$. Нека $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n) \in U$ и $\beta=(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n) \in U$, т.е. $a_{i1}\alpha_1+a_{i2}\alpha_2+\dots+a_{in}\alpha_n=0$, $a_{i1}\beta_1+a_{i2}\beta_2+\dots+a_{in}\beta_n=0$ за $1 \le i \le m$, и нека $\lambda \in F$. Тогава

$$a_{i1}(\alpha_1+\beta_1)+a_{i2}(\alpha_2+\beta_2)+\dots+a_{in}(\alpha_n+\beta_n) = a_{i1}\alpha_1+a_{i2}\alpha_2+\dots+a_{in}\alpha_n+a_{i1}\beta_1+a_{i2}\beta_2+\dots+a_{in}\beta_n = 0+0=0,$$

$1 \le i \le m$, и значи $\alpha+\beta=(\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\dots,\alpha_n+\beta_n) \in U$. Освен това

$$a_{i1}(\lambda\alpha_1)+a_{i2}(\lambda\alpha_2)+\dots+a_{in}(\lambda\alpha_n) = \lambda(a_{i1}\alpha_1+a_{i2}\alpha_2+\dots+a_{in}\alpha_n) = \lambda.0=0,$$

$1 \le i \le m$, и значи $\lambda\alpha=(\lambda\alpha_1,\lambda\alpha_2,\dots,\lambda\alpha_n) \in U$. Следователно $U \le F^n$.

Ако хомогенната система е неопределена, т.е. освен нулевото решение има и други, то $U \neq \{\mathbf{0}\}$ и значи има базис. Всеки базис на пространството от решенията на хомогенна система се нарича фундаментална система решения (ФСР).

Задача Да се намери ФСР на хомогенната система:

а) $U: \left|\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 0 \end{array}\right.$

Решение.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \overset{(-1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

Полагаме $x_3=p$, $x_4=q$ и тогава $x_2=3p+2q$, $x_1=-3p-2q-2p-3q=-5p-5q$ и

$$U=\{(-5p-5q,3p+2q,p,q) \mid p,q \in F\}.$$

$$\left.\begin{array}{ll} p=1, q=0: & \mathbf{c}_1=(-5,3,1,0) \\ p=0, q=1: & \mathbf{c}_2=(-5,2,0,1) \end{array}\right\} \text{ФСР}$$

Действително, $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2$ са линейно независими. Нека сега $\mathbf{c}=(-5p-5q, 3p+2q, p, q)$ е произволно решение на системата. Тогава

$$\mathbf{c}=p(-5,3,1,0)+q(-5,2,0,1)=p\mathbf{c}_1+q\mathbf{c}_2.$$

б) $U: \left| \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ -2x_1 & + & 6x_2 & + & 8x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & 7x_3 & = & 0 \end{array} \right.$

Решение.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & 8 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 8 & 4 \\ 0 & 10 & 10 \end{pmatrix} \mid :2 \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -20 \\ 0 & 0 & -20 \end{pmatrix} \mid :(-20) \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Последната система, а значи и първоначалната, е определена (т.е. има само нулевото решение) и няма ФСР.

в) $U: \left| \begin{array}{rcrcrcrcrcl} 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & + & 5x_5 & = & 0 \\ 6x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & + & 5x_4 & + & 7x_5 & = & 0 \\ 9x_1 & + & 6x_2 & + & 5x_3 & + & 7x_4 & + & 9x_5 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & & & - & 4x_5 & = & 0 \end{array} \right.$

Решение.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 6 & 4 & 3 & 5 & 7 \\ 9 & 6 & 5 & 7 & 9 \\ 3 & 2 & 4 & 0 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Полагаме $x_2=p$, $x_4=q$, $x_5=r$. Тогава $x_3=q+3r$, $x_1=\dfrac{-2p-q-3r-3q-5r}{3}=\dfrac{-2p-4q-8r}{3}$ и

$$U=\left\{\left(\frac{-2p-4q-8r}{3}, p, q+3r, q, r\right) \mid p,q,r \in F\right\}.$$

$$\left.\begin{array}{ll} p=3, q=0, r=0: & \mathbf{c}_1=(-2,3,0,0,0) \\ p=0, q=3, r=0: & \mathbf{c}_2=(-4,0,3,3,0) \\ p=0, q=0, r=3: & \mathbf{c}_2=(-8,0,9,0,3) \end{array}\right\} \text{ФСР.}$$

г) $U: \left| \begin{array}{rrcrcrcrcl} & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ & x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & - & 3x_4 & = & 0 \\ - & 3x_1 & - & 8x_2 & - & 4x_3 & + & 13x_4 & = & 0 \\ & 2x_1 & + & x_2 & + & 7x_3 & & & = & 0 \end{array} \right.$

Решение.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -3 \\ -3 & -8 & -4 & 13 \\ 2 & 1 & 7 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & 6 \end{pmatrix} \mid .(-1) \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \mid :(-6) \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Имаме $x_4=0$. Полагаме $x_3=p$ и тогава $x_2=p$, $x_1=-4p$ и

$$U=\{(-4p,p,p,0) \mid p \in F\}.$$

$$p=1: \quad \mathbf{c}_1=(-4,1,1,0) \text{ е ФСР.}$$