Лекция III - Дискретни случайни величини

Лекция III - Дискретни случайни величини

- Разпределение на дискретна случайна величина
- Независимост на случайни величини
- Смяна на променливите
- Функция на разпределение
- Математическо очакване
- Дисперсия

Случайни величини

Случайната величина е обект, който може да взима за стойности случайни реални числа с някаква вероятност. За означаване на сл.в. ще използваме главните латински букви - X, Y и т.н. Различните стойности на сл.в. X, ще означаваме с малките букви - $x_1, x_2, \ldots$.

Ще разглеждаме два типа случайни величини.

- Случайни величини, които могат да взимат само краен, или най-много изброим брой стойности, наричаме **дискретни** сл.в. Такива например са: точките паднали се върху зар, броя опити необходим за да изтеглим асо от тесте карти, броят студенти прочели тази лекция и т.н.

Случайни величини

Случайната величина е обект, който може да взима за стойности случайни реални числа с някаква вероятност. За означаване на сл.в. ще използваме главните латински букви - X, Y и т.н. Различните стойности на сл.в. X, ще означаваме с малките букви - $x_1, x_2, \dots$.

Ще разглеждаме два типа случайни величини.

- Случайни величини, които могат да взимат само краен, или най-много изброим брой стойности, наричаме **дискретни** сл.в. Такива например са: точките паднали се върху зар, броя опити необходим за да изтеглим асо от тесте карти, броят студенти прочели тази лекция и т.н.
- Тези случайни величини, които взимат стойности в някое неизброимо множество, наричаме **непрекъснати** сл.в. Такава например е външната температура в момента.

Случайни величини

Случайната величина е обект, който може да взима за стойности случайни реални числа с някаква вероятност. За означаване на сл.в. ще използваме главните латински букви - X, Y и т.н. Различните стойности на сл.в. X, ще означаваме с малките букви - $x_1, x_2, \ldots$.

Ще разглеждаме два типа случайни величини.

- Случайни величини, които могат да взимат само краен, или най-много изброим брой стойности, наричаме **дискретни** сл.в. Такива например са: точките паднали се върху зар, броя опити необходим за да изтеглим асо от тесте карти, броят студенти прочели тази лекция и т.н.
- Тези случайни величини, които взимат стойности в някое неизброимо множество, наричаме **непрекъснати** сл.в. Такава например е външната температура в момента.

В тази глава ще изучаваме свойствата на дискретните случайни величини.

Формална дефиниция на дискретна случайна величина

Пример

Нека хвърляме два зара. Възможно е да търсим просто вероятността на някое събитие. Възможно е да изучаваме някакъв по сложен обект, свързан с опита, например:

X - сумата от точките върху заровете

Y - броя на падналите се шестици

Z - максимума на точките

При всеки резултат от хвърлянето на заровете X, Y и Z ще приемат някакави реални (в този частен случай цели) числа за стойности.

Формална дефиниция на дискретна случайна величина

Пример

Нека хвърляме два зара. Възможно е да търсим просто вероятността на някое събитие. Възможно е да изучаваме някакъв по сложен обект, свързан с опита, например:

X - сумата от точките върху заровете

Y - броя на падналите се шестици

Z - максимума на точките

При всеки резултат от хвърлянето на заровете X, Y и Z ще приемат някакави реални (в този частен случай цели) числа за стойности.

Ако изходът е

$\omega = \{1,1\}$, то $\quad X(\{1,1\}) = 2 \quad Y(\{1,1\}) = 0 \quad Z(\{1,1\}) = 1$

$\omega = \{1,2\}$, то $\quad X(\{1,2\}) = 3 \quad Y(\{1,2\}) = 0 \quad Z(\{1,2\}) = 2$

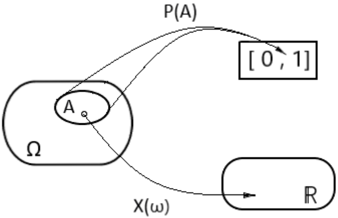
и т.н.

В действителност X, Y и Z са функции $X(\omega)$, $Y(\omega)$ и $Z(\omega)$ с аргумент елементарното събитие ω.

Подобни функции се наричат случайни величини.

Формална дефиниция на дискретна случайна величина

Нека Ω е пространство на елементарните събития, т.е. елементите му ω са резутата от някакъв прост опит. За подмножествата на Ω, поне за тези от тях, които са в съответната σ-алгебра, въведохме понятието вероятност. Като на всяко такова множество съпоставяме число от интервала $[0, 1]$. Вероятността $P(A)$ е изображение от множеството Ω в този интервал. Прието е изображение, което на множество съпоставя число да се наричат "мярка". Вероятността е мярка.



Случайната величина $X(\omega)$ е изображение от множеството Ω върху множеството на реалните числа, като на всяко елементарно събитие съпоставя число.

Формална дефиниция на дискретна случайна величина

Множеството Ω е произволно, върху него не се налагат никакви ограничения, така че то може да е с много сложна структура и съответно изображение от него в $\mathbb{R}$ да не е добре дефинирано. Затова се налага да се направи следната конструкция:

Формална дефиниция на дискретна случайна величина

Множеството Ω е произволно, върху него не се налагат никакви ограничения, така че то може да е с много сложна структура и съответно изображение от него в $\mathbb{R}$ да не е добре дефинирано. Затова се налага да се направи следната конструкция:

Нека $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ е вероятностно пространство и нека H_j, $j = 1, 2, \ldots$ са разлагане(покритие) на Ω:

- $H_j \in \mathcal{A}$
- $\forall i, j : H_i H_j = \emptyset$
- $\bigcup\limits_j H_j = \Omega$

Формална дефиниция на дискретна случайна величина

Множеството Ω е произволно, върху него не се налагат никакви ограничения, така че то може да е с много сложна структура и съответно изображение от него в $\mathbb{R}$ да не е добре дефинирано. Затова се налага да се направи следната конструкция:

Нека $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ е вероятностно пространство и нека H_j, $j = 1, 2, \ldots$ са разлагане(покритие) на Ω:

- $H_j \in \mathcal{A}$
- $\forall i, j : H_i H_j = \emptyset$
- $\bigcup_j H_j = \Omega$

Ще дефинираме случайната величина X да взима различни стойности върху всяко от множествата H_j. За целта ще ни трябват индикаторите $\mathbb{I}_{H_j}$ на множествата. Да припомним:

$$\mathbb{I}_{H_j}(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in H_j; \\ 0, & \omega \notin H_j. \end{cases}$$

Формална дефиниция на дискретна случайна величина

Дефиниция - Дискретна случайна величина

Нека H_j, $j = 1, 2, \ldots$ е някое разлагане на Ω, а x_j са произволни различни реални числа.

Дискретна случайна величина наричаме:

$$X(\omega) = \sum_j x_j \, \mathbb{I}_{H_j}(\omega),$$

където $\mathbb{I}_{H_j}(\omega)$ е индикатора на множеството H_j.

Формална дефиниция на дискретна случайна величина

Дефиниция - Дискретна случайна величина

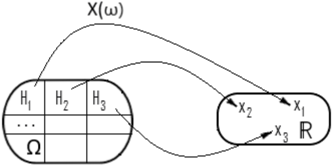
Нека H_j, $j = 1, 2, \dots$ е някое разлагане на Ω, а x_j са произволни различни реални числа.

Дискретна случайна величина наричаме:

$$X(\omega) = \sum_j x_j \, \mathbb{I}_{H_j}(\omega),$$

където $\mathbb{I}_{H_j}(\omega)$ е индикатора на множеството H_j.

Тъй като H_j е разлагане на Ω, т.е. множествата H_j са непресичащи се, то ω принадлежи точно на едно множество H_j. Следователно в горната сума само един от индикаторите H_j е равен на едно, т.е. единствените стойности които сл.в. X приема са x_j, при това $\mathrm{P}(X(\omega) = x_j) = \mathrm{P}(H_j)$



Разпределение на дискретна случайна величина

Ние рядко използваме формалната дифиницията на случайна величина, по-често работим с нейното разпределение.

Дефиниция - Разпределение на дискретна сл.в.

Разпределение на дискретната случайна величина X, наричаме следната таблица:

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n	$\dots$
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n	$\dots$

където
x_i са стойностите на сл.в. те могат да бъдат краен или изброим брой;
$p_j = \mathrm{P}(X = x_j)$ са вероятностите с които сл.в. взема съответните стойности.
За да бъде X добре дефинирана е необходимо

$$\sum_j p_j = 1.$$

Разпределение на дискретна случайна величина

Ние рядко използваме формалната дифиницията на случайна величина, по-често работим с нейното разпределение.

Дефиниция - Разпределение на дискретна сл.в.

Разпределение на дискретната случайна величина X, наричаме следната таблица:

X	x_1	x_2	$\ldots$	x_n	$\ldots$
P	p_1	p_2	$\ldots$	p_n	$\ldots$

където
x_i са стойностите на сл.в. те могат да бъдат краен или изброим брой;
$p_j = \mathrm{P}(X = x_j)$ са вероятностите с които сл.в. взема съответните стойности.
За да бъде X добре дефинирана е необходимо

$$\sum_j p_j = 1.$$

Също така "разпределение" много често наричаме и формула от която могат да бъдат пресметнати горните вероятности.

Разпределение на дискретна случайна величина

Пример

Нека хвърляме два зара и дефинираме сл.в. X -"сума от падналите се точки". Ще определим формалната дефиниция и разпределението на случайната величина.

Пример

Нека хвърляме два зара и дефинираме сл.в. X -"сума от падналите се точки". Ще определим формалната дефиниция и разпределението на случайната величина.

При хвърлянето на два зара Ω се състои от 36 елементарни събития - $(1,1),(1,2),(2,1),\ldots,(6,6)$, всяко от тях с вероятност 1/36. Тогава
$X = X(\omega) = 2$, само ако $\omega = (1,1)$
$X = X(\omega) = 3$, ако $\omega = (1,2)$ или $\omega = (2,1)$
$X = 4$, ако $\omega = (1,3)$, или $\omega = (3,1)$, или $\omega = (2,2)$
и т.н. ...

Разпределение на дискретна случайна величина

Пример

Нека хвърляме два зара и дефинираме сл.в. X -"сума от падналите се точки". Ще определим формалната дефиниция и разпределението на случайната величина.

При хвърлянето на два зара Ω се състои от 36 елементарни събития - $(1,1),(1,2),(2,1),\ldots,(6,6)$, всяко от тях с вероятност 1/36. Тогава
$X = X(\omega) = 2$, само ако $\omega = (1,1)$
$X = X(\omega) = 3$, ако $\omega = (1,2)$ или $\omega = (2,1)$
$X = 4$, ако $\omega = (1,3)$, или $\omega = (3,1)$, или $\omega = (2,2)$
и т.н. ...

Следователно формалната дефиниция на сл.в. X е

$$X(\omega) = 2\,\mathbb{I}_{(1,1)} + 3\,\mathbb{I}_{(1,2)\cup(2,1)} + 4\,\mathbb{I}_{(1,3)\cup(3,1)\cup(2,2)} + \ldots + 12\,\mathbb{I}_{(6,6)}$$

Пример

Нека хвърляме два зара и дефинираме сл.в. X -"сума от падналите се точки". Ще определим формалната дефиниция и разпределението на случайната величина.

При хвърлянето на два зара Ω се състои от 36 елементарни събития - $(1,1),(1,2),(2,1),\dots,(6,6)$, всяко от тях с вероятност 1/36. Тогава
$X = X(\omega) = 2$, само ако $\omega = (1,1)$
$X = X(\omega) = 3$, ако $\omega = (1,2)$ или $\omega = (2,1)$
$X = 4$, ако $\omega = (1,3)$, или $\omega = (3,1)$, или $\omega = (2,2)$
и т.н. ...

Следователно формалната дефиниция на сл.в. X е

$$X(\omega) = 2\,\mathbb{I}_{(1,1)} + 3\,\mathbb{I}_{(1,2)\cup(2,1)} + 4\,\mathbb{I}_{(1,3)\cup(3,1)\cup(2,2)} + \ldots + 12\,\mathbb{I}_{(6,6)}$$

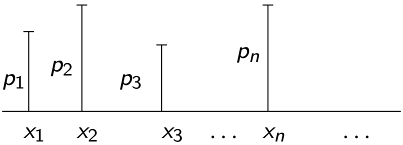
А разпределението има вида

X	2	3	4	...	7	...	12
P	1/36	2/36	3/36	...	6/36	...	1/36

Ясно е, че разпределението е далеч по-удобно за работа

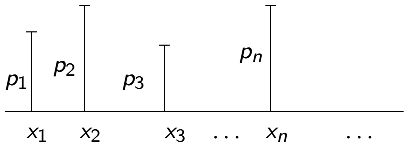
Разпределение на дискретна случайна величина

Графически ще представяме разпределението на случайните величини със схема подобна на хистограма. Като височината на j-тото стълбче съответства на вероятността p_j.



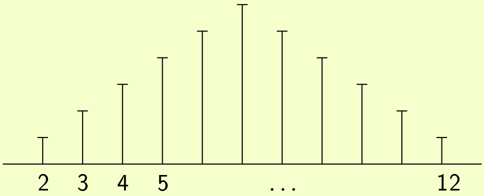
Разпределение на дискретна случайна величина

Графически ще представяме разпределението на случайните величини със схема подобна на хистограма. Като височината на j-тото стълбче съответства на вероятността p_j.



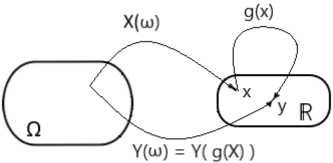
Пример

Разпределението от предходния пример изглежда по следния начин:



Смяна на променливите

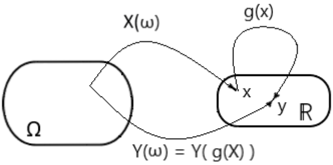
Нека X е дискретна случайна величина, а $y = g(x)$ е произволна реална функция, тогава $Y = g(X)$ също е случайна величина.



Наистина, ако $X(\omega)$ е изображение от Ω в $\mathbb{R}$, а $g(x)$ изображение от $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ то $Y(\omega) = g\left(X(\omega)\right)$ също е изображение от Ω в $\mathbb{R}$.

Смяна на променливите

Нека X е дискретна случайна величина, а $y = g(x)$ е произволна реална функция, тогава $Y = g(X)$ също е случайна величина.



Наистина, ако $X(\omega)$ е изображение от Ω в $\mathbb{R}$, а $g(x)$ изображение от $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ то $Y(\omega) = g\left(X(\omega)\right)$ също е изображение от Ω в $\mathbb{R}$.

Записано формално, ако

$$X(\omega) = \sum_j x_j\, \mathbb{I}_{H_j}(\omega),$$

то

$$Y(\omega) = \sum_j g(x_j)\, \mathbb{I}_{H_j}(\omega) = \sum_j y_j\, \mathbb{I}_{H_j}(\omega),$$

което явно е дефиниция на дискретна сл.в. Разбира се, ако за някой от стойностите $g(x_i) = g(x_j)$, т.е. ако функцията $g(X)$ не е еднозначно обратима, то съответните множества от разлагането се обединяват.

Смяна на променливите

Формулата $Y = g(X)$ всъщност задава начин да се преизчислят стойностите на случайната величина. Това действие обикновено се нарича „смяна на променливите“.

Разпределението на Y има вида:

Y	$g(x_1)$	$g(x_2)$	$\dots$	$g(x_n)$	$\dots$
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n	$\dots$

Като, ако за някой от стойностите $g(x_i) = g(x_j)$, то съответните вероятности се събират.

Смяна на променливите

Формулата $Y = g(X)$ всъщност задава начин да се преизчислят стойностите на случайната величина. Това действие обикновено се нарича „смяна на променливите“.

Разпределението на Y има вида:

Y	$g(x_1)$	$g(x_2)$	$\dots$	$g(x_n)$	$\dots$
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n	$\dots$

Като, ако за някой от стойностите $g(x_i) = g(x_j)$, то съответните вероятности се събират.

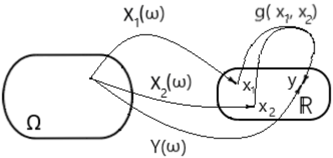
Пример

Нека X е случайната величина от предишния пример, а $Y = |X - 7|$. За разпределението на Y получаваме:

Y	0	1	2	$\dots$	5
P	6/36	10/36	8/36	$\dots$	2/36

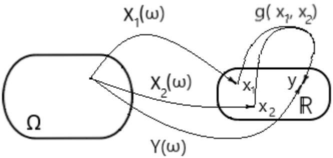
Смяна на променливите

По същия начин, ако X_1 и X_2 са случайни величини, а $y = g(x_1, x_2)$ е релна функция на две променливи, то $Y = g(X_1, X_2)$ е случайна величина, защото



Смяна на променливите

По същия начин, ако X_1 и X_2 са случайни величини, а $y = g(x_1, x_2)$ е релна функция на две променливи, то $Y = g(X_1, X_2)$ е случайна величина, защото



ако

$$X_1(\omega) = \sum_j x'_j \, \mathbb{I}_{H_j}(\omega) \qquad \text{и} \qquad X_2(\omega) = \sum_k x''_k \, \mathbb{I}_{T_k}(\omega)$$

то

$$Y(\omega) = \sum_j \sum_k g(x'_j, x''_k) \, \mathbb{I}_{H_j}(\omega) \mathbb{I}_{T_k}(\omega) = \sum_s y_s \, \mathbb{I}_{V_s}(\omega),$$

където означаваме $\mathbb{I}_{V_s}(\omega) = \mathbb{I}_{H_j}(\omega)\mathbb{I}_{T_k}(\omega) = \mathbb{I}_{H_j \cap T_k}(\omega)$ и $y_s = g(x'_j, x''_k)$.

Не е трудно да се съобрази, че ако H_j и T_k са покрития на Ω, то множеството от всички възможни техни сечения V_s също е покритие. И отново, ако имаме съвпадащи стойности на y_s за някои s, то съответните им множества от разлагането V_s се обединяват.

Независими случайни величини

По аналогия с независимостта на събития се въвежда и понятието независимост на случайни величини.

Дефиниция - Независимост при дискретни сл.в.

Казваме, че дискретните случайните величини X и Y са независими ($X \perp\!\!\!\perp Y$), ако са независими всички възможни двойки събития породени от тях, т.е.

$$X \perp\!\!\!\perp Y \quad \Leftrightarrow \quad \forall i, j : \ \mathrm{P}(X = x_i, Y = y_j) = \mathrm{P}(X = x_i)\, \mathrm{P}(Y = y_j).$$

Независими случайни величини

По аналогия с независимостта на събития се въвежда и понятието независимост на случайни величини.

Дефиниция - Независимост при дискретни сл.в.

Казваме, че дискретните случайните величини X и Y са независими ($X \perp\!\!\!\perp Y$), ако са независими всички възможни двойки събития породени от тях, т.е.

$$X \perp\!\!\!\perp Y \quad \Leftrightarrow \quad \forall i, j: \quad \mathrm{P}(X = x_i, Y = y_j) = \mathrm{P}(X = x_i)\,\mathrm{P}(Y = y_j).$$

Понятието „независимост“ може да се разбира в обичайния смисъл на тази дума. Независимостта на две случайни величини означава, че едната сл.в. не се влияе и не носи информация за другата. Например, ако се хвърлят два зара точките паднали се върху единия и върху другия зар са независими сл.в.

Функция на разпределение

Дефиниция - Функция на разпределение

Нека X е произволна сл.в. Функция на разпределение - $F(x)$ се дефинира с равенството:

$$F(x) = \mathrm{P}(X < x),$$

където x е произволно реално число.

Понякога като индекс се поставя самата случайна величина, т.е. записваме $F_X(x)$.

Функция на разпределение

Дефиниция - Функция на разпределение

Нека X е произволна сл.в. Функция на разпределение - $F(x)$ се дефинира с равенството:

$$F(x) = \mathrm{P}(X < x),$$

където x е произволно реално число.

Понякога като индекс се поставя самата случайна величина, т.е. записваме $F_X(x)$.

Ще обърнем внимание, че в тази дефиниция не се поставя условие случайната величина да бъде дискретна, т.е. със същата формула се определя и $F_X(x)$ при непрекъснати случайни величини.

Възможно е самата теория да бъде построена в обратен ред - първо да се въведе функцията на разпределение, а след това като "случайни величини" да се дефинират всички обекти, за който функцията $F_X(x)$ е определена, т.е. вероятността $\mathrm{P}(X < x)$ може да бъде пресметната за всяко реално x.

Доказва се, че тази дефиниция е еквивалентна на дефиницията за случайна величина, която ние въведохме по-горе.

Функция на разпределение

Функцията на разпределение на дискретни случайни величини се използва рядко, но тя е изключително полезна при работа с непрекъснати сл.в. По нататък в тези лекции ще докажем редица нейни свойства. Сега само ще начертаем типичната функция на разпределение на дискретна сл.в.

Нека x е произволно реално число и разпределението на сл.в. X е следното:

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Ако $x \leq x_1$, то $\mathrm{P}(X < x) = 0$ и следователно $F(x) = 0$.

Ако $x_1 < x \leq x_2$, то явно $\mathrm{P}(X < x) = \mathrm{P}(X = x_1) = p_1$.

Ако $x_2 < x \leq x_3$, то $\mathrm{P}(X < x) = \mathrm{P}(X = x_1 \cup X = x_2) = p_1 + p_2$.

Функция на разпределение

Функцията на разпределение на дискретни случайни величини се използва рядко, но тя е изключително полезна при работа с непрекъснати сл.в. По нататък в тези лекции ще докажем редица нейни свойства. Сега само ще начертаем типичната функция на разпределение на дискретна сл.в.

Нека x е произволно реално число и разпределението на сл.в. X е следното:

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Ако $x \le x_1$, то $\mathrm{P}(X < x) = 0$ и следователно $F(x) = 0$.

Ако $x_1 < x \le x_2$, то явно $\mathrm{P}(X < x) = \mathrm{P}(X = x_1) = p_1$.

Ако $x_2 < x \le x_3$, то $\mathrm{P}(X < x) = \mathrm{P}(X = x_1 \cup X = x_2) = p_1 + p_2$.

Явно $F(x)$ е ненамаляваща, стъпаловидна функция със стойности в интервала $[0, 1]$.

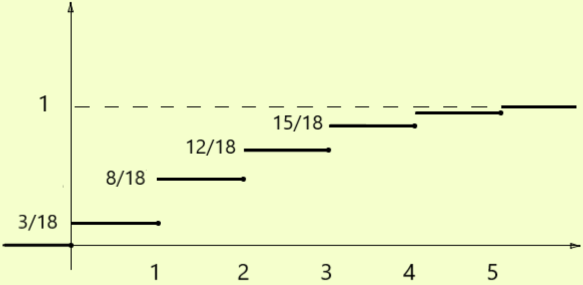
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le x_1 \\ p_1, & x_1 < x \le x_2 \\ p_1 + p_2, & x_2 < x \le x_3 \\ p_1 + p_2 + p_3, & x_3 < x \le x_4 \\ \dots & \\ 1, & x > x_n \end{cases}$$

Пример

Отново ще разгледаме случайната величина Y от предишния пример. Тя имаше разпределение:

Y	0	1	2	3	4	5
P	3/18	5/18	4/18	3/18	2/18	1/18

следователно нейната функция на разпределение има вида:



Математическо очакване

Математическо очакване на дискретната случайна величина X наричаме числото $\mathrm{E}X$ дефинирано по следния начин:

Дефиниция - Математическо очакване

$$\mathrm{E}X = \sum_j x_j \, p_j,$$

където $p_j = \mathrm{P}(X = x_j)$.

Математическо очакване

Математическо очакване на дискретната случайна величина X наричаме числото $\mathrm{E}X$ дефинирано по следния начин:

Дефиниция - Математическо очакване

$$\mathrm{E}X = \sum_j x_j \, p_j,$$

където $p_j = \mathrm{P}(X = x_j)$.

Ако сл.в. X има само краен брой стойности то горната сума е крайна. Тогава математическото очакване $\mathrm{E}X$ задължително съществува и попада в интервала, в който се менят стойностите на случайната величина X.

Ако стойностите на сл.в. X са изброим брой, то е възможно сумата да е разходяща. Тогава казваме, че не съществува математическо очакване.

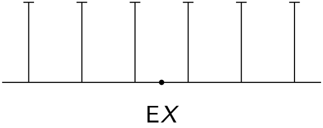
Математическо очакване

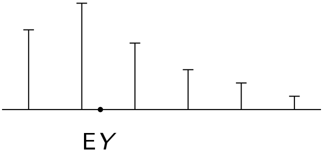
Като синоним на „математическо очакване“ се използва и изразът „средна стойност“. Наистина, намирането на математическото очакване всъщност е пресмятане на средната стойност на случайната величина, като вероятностите p_i играят ролята на тегла. Тогава, EX е точката на равновесие, т.е. физическия смисъл на понятието математическо очакването е център на тежестта.

Математическо очакване

Като синоним на „математическо очакване“ се използва и изразът „средна стойност“. Наистина, намирането на математическото очакване всъщност е пресмятане на средната стойност на случайната величина, като вероятностите p_i играят ролята на тегла. Тогава, EX е точката на равновесие, т.е. физическия смисъл на понятието математическо очакването е център на тежестта.

В частния случай, когато всички стойности на сл.в. X се падат с една и съща вероятност $p_1 = \ldots = p_n = \frac{1}{n}$, очакването е просто средното аритметично на стойностите $\mathrm{E}X = \frac{1}{n} \sum x_j$.





Ако Y е произволна случайна величина, математическото очакване се измества към по вероятните стойности на Y.

Математическо очакване

Вероятностния смисъл на математическото очакване се дава от закона за големите числа, който ще бъде доказан по-късно. Съгласно него, ако измерваме многократно стойностите на една случайна величина, средното аритметично на тези стойности клони към математическото очакване, т.е. средния резултат от много опити се дава от математическото очакване.

Математическо очакване

Вероятностния смисъл на математическото очакване се дава от закона за големите числа, който ще бъде доказан по-късно. Съгласно него, ако измерваме многократно стойностите на една случайна величина, средното аритметично на тези стойности клони към математическото очакване, т.е. средния резултат от много опити се дава от математическото очакване.

За да илюстрираме това свойство ще разгледаме следния пример.

Пример

Игра на рулетка. Известно е, че числата в рулетката са от 1 до 36 като половината са в червени сектори, а останалите в черни. Освен това има и зелен сектор с 0 (в американската рулетка има и 00). Играчът има право да залага по различни начини - на едно число, на няколко числа, на дузина, на червено и т.н. При това печалбите са както следва:

- залог на едно число - печалба 36x залога
- залог на червено - печалба 2x залога

В тези печалби е включен и самия залог.

Пример

Нека играчът залага 10 лв. на червено. Ще пресметнем математическото очакване на печалбата.

В една игра човек може или да загуби парите си или да спечели още 10 лв. Ако с X означим чистата печалба на играча, то разпределението на X е както следва:

Пример

Нека играчът залага 10 лв. на червено. Ще пресметнем математическото очакване на печалбата.

В една игра човек може или да загуби парите си или да спечели още 10 лв. Ако с X означим чистата печалба на играча, то разпределението на X е както следва:

X	-10	10
P	$19/37$	$18/37$

Пример

Нека играчът залага 10 лв. на червено. Ще пресметнем математическото очакване на печалбата.

В една игра човек може или да загуби парите си или да спечели още 10 лв. Ако с X означим чистата печалба на играча, то разпределението на X е както следва:

X	-10	10
P	$19/37$	$18/37$

Тогава, за математическото очакване на X получаваме:

$$\mathrm{E}X = -10\,.\frac{19}{37} + 10\,.\frac{18}{37} = -\frac{10}{37} \approx -0,27\text{лв.}$$

Математическо очакване

Пример

Нека играчът залага 10 лв. на червено. Ще пресметнем математическото очакване на печалбата.

В една игра човек може или да загуби парите си или да спечели още 10 лв. Ако с X означим чистата печалба на играча, то разпределението на X е както следва:

X	-10	10
P	$19/37$	$18/37$

Тогава, за математическото очакване на X получаваме:

$$\mathrm{E}X = -10\,.\frac{19}{37} + 10\,.\frac{18}{37} = -\frac{10}{37} \approx -0,27\text{лв.}$$

Математическото очакване е отрицателно, което означава, че играчът губи средно по 0,27 лв. на игра. Съответно казиното печели средно 0,27 лв. на игра.

Игри, в който очакваната печалбата е нула ($\mathrm{E}X = 0$) се наричат справедливи игри (такава би била играта на рулетка, ако в нея няма сектор нула). В справедлива игра, ако играчът играе достатъчно дълго той нито ще спечели, нито ще загуби, т.е. капиталът му ще се запази на началното ниво

Пример

Разбира се X е случайна величина и при малък брой игри е възможно играчът да спечели, както и да загуби, въпрос на късмет. При голям брой игри обаче, съгласно закона за големите числа, печалбата ще клони към математическото очакване. Това важи за казиното, в което на ден има хиляди игри. Така собственикът може да пресметне печалбата си независимо че тя зависи от случайни фактори. Например, при 10000 игри от горния тип печалбата за казиното ще е приблизително 2700 лв.

Пресметнете очакваната печалба, ако играчът залага на едно число. По-голямо или по-малко е математическото очакване в този случай?

Пресметнете печалбите в американската рулетка, т.е. ако имате още един зелен сектор 00.

Свойства на математическото очакване

По нататък, ще докажем някой по важни свойства на математическото очакване.

- Ако $C = const$, то $\mathrm{E}C = C$.

Свойства на математическото очакване

По нататък, ще докажем някой по важни свойства на математическото очакване.

- Ако $C = const$, то $\mathrm{E}C = C$.

  Док. Константите могат да се разглеждат като случайни величини X, който взимат една единствена стойност с вероятност единица $\mathrm{P}(X = C) = 1$, т.е. тяхното разпределение е от типа:

X	C
P	1

  Твърдението е очевидно $\square$

Свойства на математическото очакване

По нататък, ще докажем някой по важни свойства на математическото очакване.

- Ако $C = const$, то $\mathsf{E}C = C$.

  Док. Константите могат да се разглеждат като случайни величини X, който взимат една единствена стойност с вероятност единица $\mathsf{P}(X = C) = 1$, т.е. тяхното разпределение е от типа:

X	C
P	1

  Твърдението е очевидно $\square$

- $\mathsf{E}(cX) = c\,\mathsf{E}X$, където X е произволна сл.в., а $c = const$.

Свойства на математическото очакване

По нататък, ще докажем някой по важни свойства на математическото очакване.

- Ако $C = const$, то $\mathrm{E}C = C$.

  Док. Константите могат да се разглеждат като случайни величини X, който взимат една единствена стойност с вероятност единица $\mathrm{P}(X = C) = 1$, т.е. тяхното разпределение е от типа:

X	C
P	1

  Твърдението е очевидно $\square$

- $\mathrm{E}(cX) = c\,\mathrm{E}X$, където X е произволна сл.в., а $c = const$.

  Док. Съгласно приницила за смяна на променливите:

$$\mathrm{E}(cX) = \sum_j cx_j\,\mathrm{P}(X = x_j) = c\sum_j x_j\,\mathrm{P}(X = x_j) = c\,\mathrm{E}X$$

$\square$

Свойства на математическото очакване

- $\mathsf{E}(X + Y) = \mathsf{E}X + \mathsf{E}Y$, където X и Y са произволни сл.в.

Свойства на математическото очакване

- $\mathrm{E}(X+Y) = \mathrm{E}X + \mathrm{E}Y$, където X и Y са произволни сл.в.

Док.

$$\mathrm{E}(X+Y) = \sum_j \sum_i (x_j + y_i)\, \mathrm{P}(X = x_j, Y = y_i) =$$

Свойства на математическото очакване

- $\mathrm{E}(X+Y) = \mathrm{E}X + \mathrm{E}Y$, където X и Y са произволни сл.в.

Док.

$$\mathrm{E}(X+Y) = \sum_j \sum_i (x_j + y_i)\, \mathrm{P}(X = x_j, Y = y_i) =$$

Ще разделим сумата на две суми и ще прегрупираме събираемите

$$= \sum_j \sum_i x_j\, \mathrm{P}(X = x_j, Y = y_i) + \sum_j \sum_i y_i\, \mathrm{P}(X = x_j, Y = y_i) =$$

$$= \sum_j x_j \sum_i \mathrm{P}(X = x_j, Y = y_i) + \sum_i y_i \sum_j \mathrm{P}(X = x_j, Y = y_i)$$

Свойства на математическото очакване

- $\mathrm{E}(X+Y) = \mathrm{E}X + \mathrm{E}Y$, където X и Y са произволни сл.в.

Док.

$$\mathrm{E}(X+Y) = \sum_j \sum_i (x_j + y_i)\,\mathrm{P}(X = x_j, Y = y_i) =$$

Ще разделим сумата на две суми и ще прегрупираме събираемите

$$= \sum_j \sum_i x_j\,\mathrm{P}(X = x_j, Y = y_i) + \sum_j \sum_i y_i\,\mathrm{P}(X = x_j, Y = y_i) =$$

$$= \sum_j x_j \sum_i \mathrm{P}(X = x_j, Y = y_i) + \sum_i y_i \sum_j \mathrm{P}(X = x_j, Y = y_i)$$

Ще въведем следното означение $B_i = \{Y = y_i\}$. Тогава събитията B_i образуват пълна група от събития, т.е. $B_k B_n = \emptyset$ и $\bigcup B_i = \Omega$. Следователно, за произволно събитие A съгласно формулата за пълна вероятност е изпълнено $\sum_i \mathrm{P}(AB_i) = \mathrm{P}(A)$ Така, за първото събираемо в горното равенство получаваме:

$$\sum_j x_j \sum_i \mathrm{P}(X = x_j, Y = y_i) = \sum_j x_j\,\mathrm{P}(X = x_j) = \mathrm{E}X$$

Аналогично се преработва и второто събираемо □

Свойства на математическото очакване

Съгласно свойствата доказани дотук математическото очакване е линейно при произволни случайни величини.

Свойства на математическото очакване

Съгласно свойствата доказани дотук математическото очакване е линейно при произволни случайни величини.

За следващото свойство ще поставим условието случайните величини да са независими.

- Нека $X \perp\!\!\!\perp Y$, тогава $\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}X\,\mathrm{E}Y$

Свойства на математическото очакване

Съгласно свойствата доказани дотук математическото очакване е линейно при произволни случайни величини.

За следващото свойство ще поставим условието случайните величини да са независими.

- Нека $X \perp\!\!\!\perp Y$, тогава $\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}X\,\mathrm{E}Y$

Док.

$$\mathrm{E}(X\,Y) = \sum_i \sum_j x_j\,y_i\,\mathrm{P}(X = x_j, Y = y_i) =$$

Свойства на математическото очакване

Съгласно свойствата доказани дотук математическото очакване е линейно при произволни случайни величини.

За следващото свойство ще поставим условието случайните величини да са независими.

- Нека $X \perp\!\!\!\perp Y$, тогава $\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}X\,\mathrm{E}Y$

Док.

$$\mathrm{E}(X\,Y) = \sum_i \sum_j x_j\, y_i\, \mathrm{P}(X = x_j, Y = y_i) =$$

От независимостта на случайните величини следва, че за всеки i, j е изпълнено $\mathrm{P}(X = x_j, Y = y_i) = \mathrm{P}(X = x_j)\,\mathrm{P}(Y = y_i)$

Свойства на математическото очакване

Съгласно свойствата доказани дотук математическото очакване е линейно при произволни случайни величини.

За следващото свойство ще поставим условието случайните величини да са независими.

- Нека $X \perp\!\!\!\perp Y$, тогава $\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}X\,\mathrm{E}Y$

Док.

$$\mathrm{E}(X\,Y) = \sum_i \sum_j x_j\, y_i\, \mathrm{P}(X = x_j, Y = y_i) =$$

От независимостта на случайните величини следва, че за всеки i, j е изпълнено $\mathrm{P}(X = x_j, Y = y_i) = \mathrm{P}(X = x_j)\,\mathrm{P}(Y = y_i)$

$$= \sum_i \sum_j x_j\, y_i\, \mathrm{P}(X = x_j)\,\mathrm{P}(Y = y_i) =$$

Свойства на математическото очакване

Съгласно свойствата доказани дотук математическото очакване е линейно при произволни случайни величини.

За следващото свойство ще поставим условието случайните величини да са независими.

- Нека $X \perp\!\!\!\perp Y$, тогава $\mathsf{E}(XY) = \mathsf{E}X\,\mathsf{E}Y$

Док.

$$\mathsf{E}(X\,Y) = \sum_i \sum_j x_j\, y_i\, \mathsf{P}(X = x_j, Y = y_i) =$$

От независимостта на случайните величини следва, че за всеки i, j е изпълнено $\mathsf{P}(X = x_j, Y = y_i) = \mathsf{P}(X = x_j)\,\mathsf{P}(Y = y_i)$

$$= \sum_i \sum_j x_j\, y_i\, \mathsf{P}(X = x_j)\,\mathsf{P}(Y = y_i) =$$

Прегрупирваме

$$= \left(\sum_j x_j\, \mathsf{P}(X = x_j)\right)\left(\sum_i y_i\, \mathsf{P}(Y = y_i)\right) = \mathsf{E}X\ \mathsf{E}Y. \qquad \square$$

Дисперсия

Ще въведем още една важна числова характеристика на случайните величини, но преди това ще се върнем към примера с рулетката:

Дисперсия

Ще въведем още една важна числова характеристика на случайните величини, но преди това ще се върнем към примера с рулетката:

Пример

Нека сега играчът залага 10лв, но на едно число. В този случай, ако познае числото играчът ще получи печалба x36 по залога, т.е ще спечели 360лв. Ако с Y означим чистата печалба на играча, то разпределението на сл.в. Y ще бъде:

Дисперсия

Ще въведем още една важна числова характеристика на случайните величини, но преди това ще се върнем към примера с рулетката:

Пример

Нека сега играчът залага 10лв, но на едно число. В този случай, ако познае числото играчът ще получи печалба x36 по залога, т.е ще спечели 360лв. Ако с Y означим чистата печалба на играча, то разпределението на сл.в. Y ще бъде:

Y	-10	350
P	$36/37$	$1/37$

А за математическото очакване получаваме:

Дисперсия

Ще въведем още една важна числова характеристика на случайните величини, но преди това ще се върнем към примера с рулетката:

Пример

Нека сега играчът залага 10лв, но на едно число. В този случай, ако познае числото играчът ще получи печалба x36 по залога, т.е ще спечели 360лв. Ако с Y означим чистата печалба на играча, то разпределението на сл.в. Y ще бъде:

Y	-10	350
P	$36/37$	$1/37$

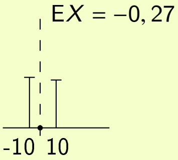
А за математическото очакване получаваме:

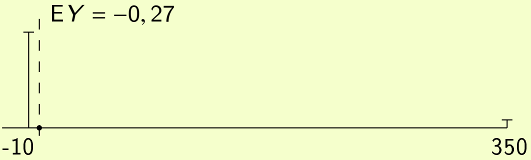
$$EY = -10 \,.\, \frac{36}{37} + 350 \,.\, \frac{1}{37} = -\frac{10}{37} \approx -0,27\text{лв.}$$

Дисперсия

Пример

Двете случайни величини имат равно математическо очакване, а в същото време са съвсем различни.

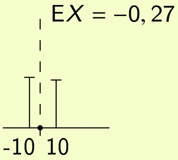


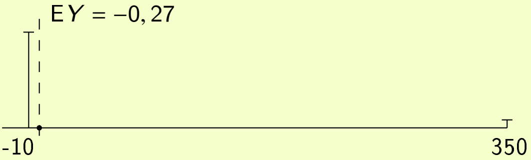


Дисперсия

Пример

Двете случайни величини имат равно математическо очакване, а в същото време са съвсем различни.





И в двата случая играчът ще губи средно по 0.27лв. на игра. При първата игра ще има чести малки печалби, капиталът на играча ще е в близост до математическото очакване. Във втората игра печалбите са много редки, но затова пък доста големи, капиталът на играча ще прави големи скокове около средната стойност. Такива игри в хазарта се наричат “волатилни”, те са за по-смелите.

Ясно е, че математическото очакване не носи достатъчно информация за случайната величина. Имаме нужда и от параметър, който да описва варирането на стойностите.

Дисперсия

Дисперсията е мярка за разсейването на стойностите на една случайна величина около нейното математическо очакване.

Дефиниция - Дисперсия

Нека X е произволна случайната величина. Дисперсия DX се дефинира с равенството:

$$\mathrm{D}X = \mathrm{E}\left(X - \mathrm{E}X\right)^2$$

Прието е $\sqrt{\mathrm{D}X}$ да се нарича стандартно отклонение.

Дисперсия

Дисперсията е мярка за разсейването на стойностите на една случайна величина около нейното математическо очакване.

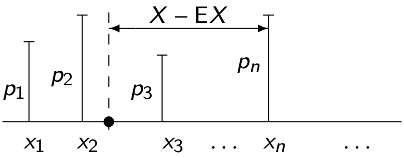
Дефиниция - Дисперсия

Нека X е произволна случайната величина. Дисперсия DX се дефинира с равенството:

$$\mathrm{D}X = \mathrm{E}\,(X - \mathrm{E}X)^2$$

Прието е $\sqrt{\mathrm{D}X}$ да се нарича стандартно отклонение.

Да припомним $\mathrm{E}X$ е число. Така, в скобите на горното равенство е отклонението от една конкретна стойност на случайната величина до нейното математическо очакване. Дисперсията е средната стойност на това отклонение (всъщност на неговия квадрат).



Дисперсия

Дисперсията е мярка за разсейването на стойностите на една случайна величина около нейното математическо очакване.

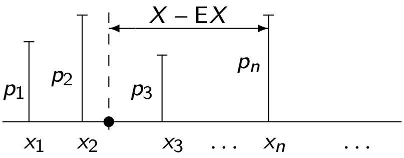
Дефиниция - Дисперсия

Нека X е произволна случайната величина. Дисперсия DX се дефинира с равенството:

$$\mathrm{D}X = \mathrm{E}\,(X - \mathrm{E}X)^2$$

Прието е $\sqrt{\mathrm{D}X}$ да се нарича стандартно отклонение.

Да припомним $\mathrm{E}X$ е число. Така, в скобите на горното равенство е отклонението от една конкретна стойност на случайната величина до нейното математическо очакване. Дисперсията е средната стойност на това отклонение (всъщност на неговия квадрат).



Възможно е, разбира се, дисперсията да не съществува, т.е. редът да е разходящ.

Дисперсия

Така дефинирана, дисперсията е математическото очакване на функция от случайна величина. Както знаем функциите от случайни величини също са случайни величини. Наистина, за произволна дискретна сл.в. X с разпределение:

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n	$\dots$
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n	$\dots$

Случайната величина $Y = g(X)$ има разпределение.

Дисперсия

Така дефинирана, дисперсията е математическото очакване на функция от случайна величина. Както знаем функциите от случайни величини също са случайни величини. Наистина, за произволна дискретна сл.в. X с разпределение:

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n	$\dots$
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n	$\dots$

Случайната величина $Y = g(X)$ има разпределение.

Y	$g(x_1)$	$g(x_2)$	$\dots$	$g(x_n)$	$\dots$
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n	$\dots$

с евентуално сумиране на вероятностите, ако $g(x_i) = g(x_j)$ за някой i, j.

Дисперсия

Така дефинирана, дисперсията е математическото очакване на функция от случайна величина. Както знаем функциите от случайни величини също са случайни величини. Наистина, за произволна дискретна сл.в. X с разпределение:

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n	$\dots$
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n	$\dots$

Случайната величина $Y = g(X)$ има разпределение.

Y	$g(x_1)$	$g(x_2)$	$\dots$	$g(x_n)$	$\dots$
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n	$\dots$

с евентуално сумиране на вероятностите, ако $g(x_i) = g(x_j)$ за някой i, j.

Тогава, от дефиницията за математическо очакване на $\mathrm{E}Y = \mathrm{E}g(X)$, получаваме начина за намиране на очакването на функция от сл.в.:

Твърдение - Очакване на функция от случайна величина

Нека X е дискретна случайна величина и $g(X)$ е произволна функция.

$$\mathrm{E}g(X) = \sum_j g(x_j)\, p_j$$

ако тази сума е сходяща.

Дисперсия

Това твърдение ни дава възможност да пресметнем дисперсията на една дискретна случайна величина.

$$\mathrm{D}X = \mathrm{E}\left(X - \mathrm{E}X\right)^2 = \sum_j \left(x_j - EX\right)^2 p_j$$

Дисперсия

Това твърдение ни дава възможност да пресметнем дисперсията на една дискретна случайна величина.

$$\mathrm{D}X = \mathrm{E}\left(X - \mathrm{E}X\right)^2 = \sum_j \left(x_j - EX\right)^2 p_j$$

Пример

Ще пресметнем дисперсията на сл.в. X от предишния пример. Знаем че, $\mathrm{E}X = -\frac{10}{37}$, тогава:

$$\mathrm{D}X = \left(-10 + \frac{10}{37}\right)^2 \frac{19}{37} + \left(10 + \frac{10}{37}\right)^2 \frac{18}{37} = \frac{136800}{1369} \approx 99.9$$

Дисперсия

Това твърдение ни дава възможност да пресметнем дисперсията на една дискретна случайна величина.

$$\mathrm{D}X = \mathrm{E}\left(X - \mathrm{E}X\right)^2 = \sum_j (x_j - EX)^2\, p_j$$

Пример

Ще пресметнем дисперсията на сл.в. X от предишния пример. Знаем че, $\mathrm{E}X = -\frac{10}{37}$, тогава:

$$\mathrm{D}X = \left(-10 + \frac{10}{37}\right)^2 \frac{19}{37} + \left(10 + \frac{10}{37}\right)^2 \frac{18}{37} = \frac{136800}{1369} \approx 99.9$$

Най-често сравняваме дисперсиите помежду им в аналогични случай.

Дисперсията не е безразмерна величина и не може да бъде измервана в някакви абсолютни единици. Парадоксът е, че в този пример когато случайната величина е в левове, дисперсията е в квадратни левове!?

Дисперсия

Това твърдение ни дава възможност да пресметнем дисперсията на една дискретна случайна величина.

$$\mathrm{D}X = \mathrm{E}\left(X - \mathrm{E}X\right)^2 = \sum_j \left(x_j - EX\right)^2 p_j$$

Пример

Ще пресметнем дисперсията на сл.в. X от предишния пример. Знаем че, $\mathrm{E}X = -\frac{10}{37}$, тогава:

$$\mathrm{D}X = \left(-10 + \frac{10}{37}\right)^2 \frac{19}{37} + \left(10 + \frac{10}{37}\right)^2 \frac{18}{37} = \frac{136800}{1369} \approx 99.9$$

Най-често сравняваме дисперсиите помежду им в аналогични случай.

Дисперсията не е безразмерна величина и не може да бъде измервана в някакви абсолютни единици. Парадоксът е, че в този пример когато случайната величина е в левове, дисперсията е в квадратни левове!?

Тази формула обикновено не е много удобна за работа, особено при случайна величина с много различни стойности. Ще изведем формула, даваща по-лесен начин за пресмятане на дисперсията.

Дисперсия

Твърдение - Формула за пресмятане на дисперсия

$$\mathsf{D}X = \mathsf{E}X^2 - (\mathsf{E}X)^2$$

Дисперсия

Твърдение - Формула за пресмятане на дисперсия

$$\mathrm{D}X = \mathrm{E}X^2 - (\mathrm{E}X)^2$$

Док. Използваме формула за съкратено умножение

$$\mathrm{D}X = \mathrm{E}\,(X - \mathrm{E}X)^2 =$$

Дисперсия

Твърдение - Формула за пресмятане на дисперсия

$$\mathrm{D}X = \mathrm{E}X^2 - (\mathrm{E}X)^2$$

Док. Използваме формула за съкратено умножение

$$\mathrm{D}X = \mathrm{E}\,(X - \mathrm{E}X)^2 = \mathrm{E}\left[X^2 - 2X\,\mathrm{E}X + (\mathrm{E}X)^2\right] =$$

както знаем математическото очакване е линейно

Твърдение - Формула за пресмятане на дисперсия

$$\mathrm{D}X = \mathrm{E}X^2 - (\mathrm{E}X)^2$$

Док. Използваме формула за съкратено умножение

$$\mathrm{D}X = \mathrm{E}\,(X - \mathrm{E}X)^2 = \mathrm{E}\left[X^2 - 2X\,\mathrm{E}X + (\mathrm{E}X)^2\right] =$$

както знаем математическото очакване е линейно

$$= \mathrm{E}X^2 - \mathrm{E}\,[2X\,\mathrm{E}X] + \mathrm{E}\left[(\mathrm{E}X)^2\right] =$$

Дисперсия

Твърдение - Формула за пресмятане на дисперсия

$$\mathrm{D}X = \mathrm{E}X^2 - (\mathrm{E}X)^2$$

Док. Използваме формула за съкратено умножение

$$\mathrm{D}X = \mathrm{E}\,(X - \mathrm{E}X)^2 = \mathrm{E}\left[X^2 - 2X\,\mathrm{E}X + (\mathrm{E}X)^2\right] =$$

както знаем математическото очакване е линейно

$$= \mathrm{E}X^2 - \mathrm{E}\,[2X\,\mathrm{E}X] + \mathrm{E}\left[(\mathrm{E}X)^2\right] =$$

$\mathrm{E}X$ е число, т.е. константа, $\mathrm{E}[2X\,\mathrm{E}X] = \mathrm{E}[(2\,\mathrm{E}X)X] = (2\,\mathrm{E}X)\,\mathrm{E}X = 2(\mathrm{E}X)^2$

Дисперсия

Твърдение - Формула за пресмятане на дисперсия

$$\mathrm{D}X = \mathrm{E}X^2 - (\mathrm{E}X)^2$$

Док. Използваме формула за съкратено умножение

$$\mathrm{D}X = \mathrm{E}\,(X - \mathrm{E}X)^2 = \mathrm{E}\left[X^2 - 2X\,\mathrm{E}X + (\mathrm{E}X)^2\right] =$$

както знаем математическото очакване е линейно

$$= \mathrm{E}X^2 - \mathrm{E}\,[2X\,\mathrm{E}X] + \mathrm{E}\left[(\mathrm{E}X)^2\right] =$$

$\mathrm{E}X$ е число, т.е. константа, $\mathrm{E}[2X\,\mathrm{E}X] = \mathrm{E}[(2\,\mathrm{E}X)X] = (2\,\mathrm{E}X)\,\mathrm{E}X = 2(\mathrm{E}X)^2$
$(\mathrm{E}X)^2$ също е константа, следва $\mathrm{E}\left[(\mathrm{E}X)^2\right] = (\mathrm{E}X)^2$

Дисперсия

Твърдение - Формула за пресмятане на дисперсия

$$DX = EX^2 - (EX)^2$$

Док. Използваме формула за съкратено умножение

$$DX = E\,(X - EX)^2 = E\left[X^2 - 2X\,EX + (EX)^2\right] =$$

както знаем математическото очакване е линейно

$$= EX^2 - E\,[2X\,EX] + E\left[(EX)^2\right] =$$

EX е число, т.е. константа, $E[2X\,EX] = E[(2\,EX)X] = (2\,EX)\,EX = 2(EX)^2$
$(EX)^2$ също е константа, следва $E\left[(EX)^2\right] = (EX)^2$

$$= EX^2 - 2(EX)^2 + (EX)^2 = EX^2 - (EX)^2 \qquad \square$$

Дисперсия

Твърдение - Формула за пресмятане на дисперсия

$$\mathrm{D}X = \mathrm{E}X^2 - (\mathrm{E}X)^2$$

Док. Използваме формула за съкратено умножение

$$\mathrm{D}X = \mathrm{E}\,(X - \mathrm{E}X)^2 = \mathrm{E}\left[X^2 - 2X\,\mathrm{E}X + (\mathrm{E}X)^2\right] =$$

както знаем математическото очакване е линейно

$$= \mathrm{E}X^2 - \mathrm{E}\,[2X\,\mathrm{E}X] + \mathrm{E}\left[(\mathrm{E}X)^2\right] =$$

$\mathrm{E}X$ е число, т.е. константа, $\mathrm{E}[2X\,\mathrm{E}X] = \mathrm{E}[(2\,\mathrm{E}X)X] = (2\,\mathrm{E}X)\,\mathrm{E}X = 2(\mathrm{E}X)^2$
$(\mathrm{E}X)^2$ също е константа, следва $\mathrm{E}\left[(\mathrm{E}X)^2\right] = (\mathrm{E}X)^2$

$$= \mathrm{E}X^2 - 2(\mathrm{E}X)^2 + (\mathrm{E}X)^2 = \mathrm{E}X^2 - (\mathrm{E}X)^2 \qquad \square$$

Пример

Ще намерим дисперсията на сл.в. Y от първия пример.

$$\mathrm{E}Y^2 = (-10)^2\frac{36}{37} + 350^2\frac{1}{37} = \frac{126100}{37}, \qquad \mathrm{D}Y = \frac{126100}{37} - \left(\frac{10}{37}\right)^2 \approx 3408$$

Както очаквахме дисперсията на Y е по-голяма от дисперсиятана X, тъй като има вероятност сл.в. Y да е по-далеч от математическото си очакване, т.е. разсейването е по-голямо.

Свойства на дисперсията

В следващите лекции ще покажем, как дисперсията може да бъде използвана, за да се оцени вероятноста случайната величина да вземе стойност далеч от математическото си очакване.

Сега ще изведем елементарните свойства на дисперсията:

Свойства на дисперсията

В следващите лекции ще покажем, как дисперсията може да бъде използвана, за да се оцени вероятноста случайната величина да вземе стойност далеч от математическото си очакване.

Сега ще изведем елементарните свойства на дисперсията:

- $\mathrm{D}X \geq 0$.

Свойства на дисперсията

В следващите лекции ще покажем, как дисперсията може да бъде използвана, за да се оцени вероятноста случайната величина да вземе стойност далеч от математическото си очакване.

Сега ще изведем елементарните свойства на дисперсията:

- $\mathsf{D}X \geq 0$.

  Док. Тъй като случайната величина $(X - \mathsf{E}X)^2 \geq 0$ то и математическото и очакване е неотрицателно,
  $\mathsf{D}X = \mathsf{E}\,(X - \mathsf{E}X)^2 \geq 0$. □

Свойства на дисперсията

В следващите лекции ще покажем, как дисперсията може да бъде използвана, за да се оцени вероятноста случайната величина да вземе стойност далеч от математическото си очакване.

Сега ще изведем елементарните свойства на дисперсията:

- $\mathrm{D}X \geq 0$.

  Док. Тъй като случайната величина $(X - \mathrm{E}X)^2 \geq 0$ то и математическото и очакване е неотрицателно,
  $\mathrm{D}X = \mathrm{E}\,(X - \mathrm{E}X)^2 \geq 0$. □

- $\mathrm{D}c = 0$, т.е. разсейването на константите е 0.

Свойства на дисперсията

В следващите лекции ще покажем, как дисперсията може да бъде използвана, за да се оцени вероятноста случайната величина да вземе стойност далеч от математическото си очакване.

Сега ще изведем елементарните свойства на дисперсията:

- $\mathrm{D}X \geq 0$.

  Док. Тъй като случайната величина $(X - \mathrm{E}X)^2 \geq 0$ то и математическото и очакване е неотрицателно,
  $\mathrm{D}X = \mathrm{E}\,(X - \mathrm{E}X)^2 \geq 0$. □

- $\mathrm{D}c = 0$, т.е. разсейването на константите е 0.

  Док.

$$\mathrm{D}c = \mathrm{E}\,(c - \mathrm{E}c)^2 = \mathrm{E}\,(c - c)^2 = \mathrm{E}0 = 0$$ □

Свойства на дисперсията

В следващите лекции ще покажем, как дисперсията може да бъде използвана, за да се оцени вероятноста случайната величина да вземе стойност далеч от математическото си очакване.

Сега ще изведем елементарните свойства на дисперсията:

- $\mathrm{D}X \geq 0$.

  Док. Тъй като случайната величина $(X - \mathrm{E}X)^2 \geq 0$ то и математическото и очакване е неотрицателно,
  $\mathrm{D}X = \mathrm{E}\,(X - \mathrm{E}X)^2 \geq 0$. □

- $\mathrm{D}c = 0$, т.е. разсейването на константите е 0.

  Док.

  $$\mathrm{D}c = \mathrm{E}\,(c - \mathrm{E}c)^2 = \mathrm{E}\,(c - c)^2 = \mathrm{E}0 = 0 \qquad \square$$

- $\mathrm{D}(cX) = c^2\mathrm{D}X$.

Свойства на дисперсията

В следващите лекции ще покажем, как дисперсията може да бъде използвана, за да се оцени вероятноста случайната величина да вземе стойност далеч от математическото си очакване.

Сега ще изведем елементарните свойства на дисперсията:

- $\mathrm{D}X \geq 0$.

  Док. Тъй като случайната величина $(X - \mathrm{E}X)^2 \geq 0$ то и математическото и очакване е неотрицателно,
  $\mathrm{D}X = \mathrm{E}\,(X - \mathrm{E}X)^2 \geq 0$. $\square$

- $\mathrm{D}c = 0$, т.е. разсейването на константите е 0.

  Док.

$$\mathrm{D}c = \mathrm{E}\,(c - \mathrm{E}c)^2 = \mathrm{E}\,(c - c)^2 = \mathrm{E}0 = 0 \qquad \square$$

- $\mathrm{D}(cX) = c^2\mathrm{D}X$.

  Док.

$$\mathrm{D}(c\,X) = \mathrm{E}\,(cX - \mathrm{E}(cX))^2 = \mathrm{E}\,(cX - c\mathrm{E}X)^2 =$$
$$= \mathrm{E}\left[c^2\,(X - \mathrm{E}X)^2\right] = c^2\mathrm{E}\,(X - \mathrm{E}X)^2 = c^2\mathrm{D}X \qquad \square$$

Това свойство показва, че при промяна на мерната единица на случайната величина, дисперсията ѝ се променя. Например, ако преминем от метри в километри, дисперсията ще намалее един милион пъти.

Свойства на дисперсията

- Нека $X \perp\!\!\!\perp Y$, тогава $\mathrm{D}(X + Y) = \mathrm{D}X + \mathrm{D}Y$.

Свойства на дисперсията

- Нека $X \perp\!\!\!\perp Y$, тогава $\mathrm{D}(X+Y) = \mathrm{D}X + \mathrm{D}Y$.

  Док. Ще използваме формула за съкратено умножение и линейността на математическото очакване.

$$\mathrm{D}(X+Y) = \mathrm{E}\left[X + Y - \mathrm{E}(X+Y)\right]^2 = \mathrm{E}\left[(X - \mathrm{E}X) + (Y - \mathrm{E}Y)\right]^2 =$$

$$= \mathrm{E}\,(X - \mathrm{E}X)^2 + \mathrm{E}\,(Y - \mathrm{E}Y)^2 + 2\mathrm{E}\left[(X - \mathrm{E}X)(Y - \mathrm{E}Y)\right] =$$

$$= \mathrm{D}X + \mathrm{D}Y + 2\mathrm{E}\left[(X - \mathrm{E}X)(Y - \mathrm{E}Y)\right]$$

Свойства на дисперсията

- Нека $X \perp\!\!\!\perp Y$, тогава $\mathrm{D}(X+Y) = \mathrm{D}X + \mathrm{D}Y$.

  Док. Ще използваме формула за съкратено умножение и линейността на математическото очакване.

$$\mathrm{D}(X+Y) = \mathrm{E}\left[X+Y-\mathrm{E}(X+Y)\right]^2 = \mathrm{E}\left[(X-\mathrm{E}X)+(Y-\mathrm{E}Y)\right]^2 =$$

$$= \mathrm{E}\,(X-\mathrm{E}X)^2 + \mathrm{E}\,(Y-\mathrm{E}Y)^2 + 2\mathrm{E}\left[(X-\mathrm{E}X)(Y-\mathrm{E}Y)\right] =$$

$$= \mathrm{D}X + \mathrm{D}Y + 2\mathrm{E}\left[(X-\mathrm{E}X)(Y-\mathrm{E}Y)\right]$$

  За да завършим доказателството е достатъчно да покажем, че последното събираемо е нула. X и Y са независими случайни величини, тогава $\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}X\,\mathrm{E}Y$, следователно:

$$\mathrm{E}\left[(X-\mathrm{E}X)(Y-\mathrm{E}Y)\right] = \mathrm{E}\left(XY - Y\,\mathrm{E}X - X\,\mathrm{E}Y + \mathrm{E}X\,\mathrm{E}Y\right) =$$

$$= \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}Y\,\mathrm{E}X - \mathrm{E}X\,\mathrm{E}Y + \mathrm{E}(\mathrm{E}X\,\mathrm{E}Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}Y\,\mathrm{E}X = 0 \qquad \square$$

Свойства на дисперсията

- Нека $X \perp\!\!\!\perp Y$, тогава $\mathrm{D}(X+Y) = \mathrm{D}X + \mathrm{D}Y$.

  Док. Ще използваме формула за съкратено умножение и линейността на математическото очакване.

$$\mathrm{D}(X+Y) = \mathrm{E}\left[X+Y-\mathrm{E}(X+Y)\right]^2 = \mathrm{E}\left[(X-\mathrm{E}X)+(Y-\mathrm{E}Y)\right]^2 =$$

$$= \mathrm{E}\,(X-\mathrm{E}X)^2 + \mathrm{E}\,(Y-\mathrm{E}Y)^2 + 2\mathrm{E}\left[(X-\mathrm{E}X)(Y-\mathrm{E}Y)\right] =$$

$$= \mathrm{D}X + \mathrm{D}Y + 2\mathrm{E}\left[(X-\mathrm{E}X)(Y-\mathrm{E}Y)\right]$$

  За да завършим доказателството е достатъчно да покажем, че последното събираемо е нула. X и Y са независими случайни величини, тогава $\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}X\,\mathrm{E}Y$, следователно:

$$\mathrm{E}\left[(X-\mathrm{E}X)(Y-\mathrm{E}Y)\right] = \mathrm{E}\,(XY - Y\,\mathrm{E}X - X\,\mathrm{E}Y + \mathrm{E}X\,\mathrm{E}Y) =$$

$$= \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}Y\,\mathrm{E}X - \mathrm{E}X\,\mathrm{E}Y + \mathrm{E}(\mathrm{E}X\,\mathrm{E}Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}Y\,\mathrm{E}X = 0 \qquad \square$$

Това твърдение не е валидно в обратна посока, от $\mathrm{D}(X+Y) = \mathrm{D}X + \mathrm{D}Y$ не следва, че случайните величини X и Y, са независими.

Задача

Разбърква се тесте от 52 карти. Определете математическото очакване на броя на картите, които не променят място си.

Задача

Разбърква се тесте от 52 карти. Определете математическото очакване на броя на картите, които не променят място си.

Намирането на разпределението на случайната величина от тази задача не е проста работа. Обаче, ако се използват свойствата на математическото очакване, задачата може да се реши по елементарен начин.

Задача

Разбърква се тесте от 52 карти. Определете математическото очакване на броя на картите, които не променят място си.

Намирането на разпределението на случайната величина от тази задача не е проста работа. Обаче, ако се използват свойствата на математическото очакване, задачата може да се реши по елементарен начин.