Допълнение към тема 30: пресмятане на двоен интеграл върху криволинеен трапец

Криволинеен трапец

Нека $\varphi, \psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ са непрекъснати и $\varphi(x) \leq \psi(x), \quad x \in [a, b]$.
Множеството

$$T := \{(x, y) : a \leq x \leq b,\ \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\} \tag{1}$$

се нарича криволинеен трапец.
От самата дефиниция на пеано-жорданова мярка следва, че ако $f(x)$ е неотрицателна, интегруема функция, дефинирана върху $[a, b]$, и положим

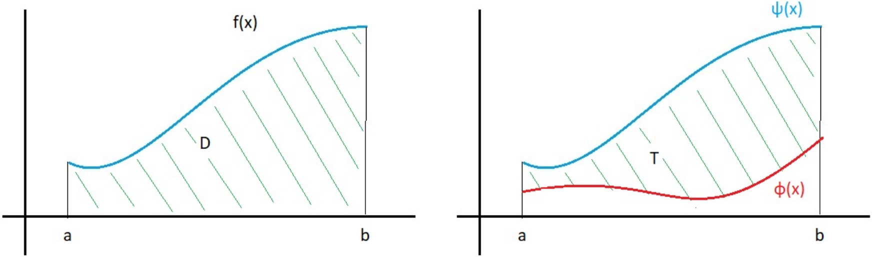
$$D := \{(x, y) : a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\} \tag{2}$$

то D е измеримо и

$$\mu(D) = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{3}$$

Следователно

$$\mu(T) = \int_a^b [\psi(x) - \varphi(x)]\,dx. \tag{4}$$


f(x)
D
a
b
ψ(x)
T
ϕ(x)
a
b

Теорема

Нека T е криволинеен трапец, дефиниран чрез (1) и $f : T \to \mathbb{R}$ е непрекъсната. Тогава

$$\iint\limits_T f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \right) dx. \tag{5}$$

Бележка: Десният интеграл съществува, защото T е измеримо и $f(x,y)$ е непрекъсната. Дясната страна е също добре дефинирана, защото, както може да се докаже, функцията

$$I(x) := \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \tag{6}$$

е дефинирана и непрекъсната в $[a,b]$ и следователно интегруема.

Схема на д-вото

Ще скицираме доказателството на формулата от теоремата.
Нека $\eta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ е разбиване на $[a, b]$,

$$\lambda_k(x) := \varphi(x) + \frac{k}{n}[\psi(x) - \varphi(x)], \quad k = 0, 1, \ldots, n, \tag{7}$$

$$T_{i,k} := \{(x, y) : x_{i-1} \leq x \leq x_i,\ \lambda_{k-1}(x) \leq y \leq \lambda_k(x)\}, \quad i, k = 1, 2, \ldots, n.$$

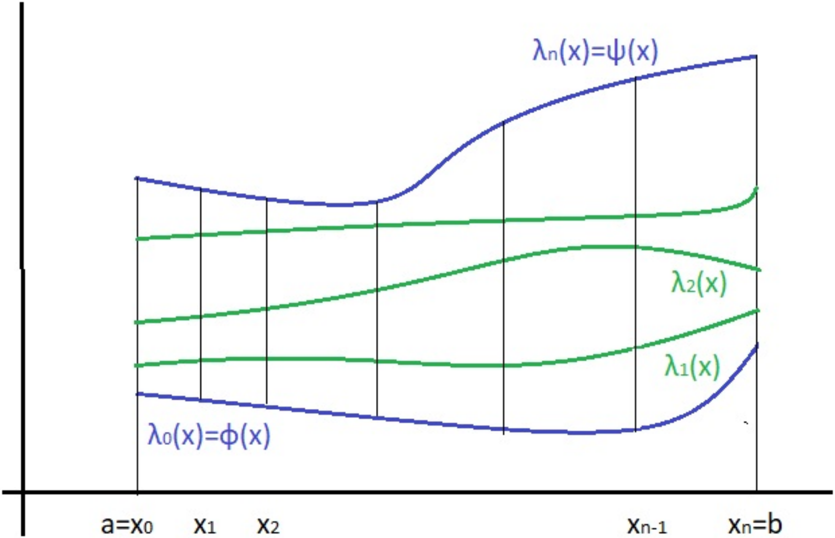
Тогава $\tau := \{T_{i,k}\}_{i,k=1}^{n}$ е измеримо разбиване на T.
Накрая нека

$$S_\tau := \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} M_{i,k}\mu(T_{i,k}), \quad M_{i,k} := \sup_{(x,y)\in T_{i,k}} f(x, y), \tag{8}$$

$$s_\tau := \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} m_{i,k}\mu(T_{i,k}), \quad m_{i,k} := \inf_{(x,y)\in T_{i,k}} f(x, y). \tag{9}$$

Тогава

$$s_\tau \leq \iint_T f(x, y)\, dxdy \leq S_\tau. \tag{10}$$


λn(x)=ψ(x)
λ2(x)
λ1(x)
λ0(x)=ϕ(x)
a=x0
x1
x2
xn-1
xn=b

Имаме

$$\int_a^b I(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} I(x)\,dx, \tag{11}$$

както и

$$I(x) = \sum_{k=1}^{n} \int_{\lambda_{k-1}(x)}^{\lambda_k(x)} f(x,y)\,dy. \tag{12}$$

Следователно

$$\int_a^b I(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\int_{\lambda_{k-1}(x)}^{\lambda_k(x)} f(x,y)\,dy \right) dx. \tag{13}$$

Използваме, че

$$\int_a^b I(x)\,dx = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\int_{\lambda_{k-1}(x)}^{\lambda_k(x)} \underbrace{f(x,y)}_{\substack{\leq M_{i,k},\\ (x,y)\in T_{i,k}}} \; dy \right) dx \tag{14}$$

$$\leq \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\int_{\lambda_{k-1}(x)}^{\lambda_k(x)} M_{i,k}\,dy \right) dx \tag{15}$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n M_{i,k} \underbrace{\int_{x_{i-1}}^{x_i} [\lambda_k(x) - \lambda_{k-1}(x)]\,dx}_{=\mu(T_{i,k})} \overset{\text{по деф.}}{=} S_\tau. \tag{16}$$

Аналогично се установява, че

$$\int_a^b I(x)\,dx \geq \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n m_{i,k}\mu(T_{i,k}) \overset{\text{по деф.}}{=} s_\tau. \tag{17}$$

Така показахме, че

$$s_\tau \leq \int_a^b I(x)\,dx \leq S_\tau. \tag{18}$$

Оттук и (10) следва

$$\left| \iint_T f(x,y)\,dxdy - \int_a^b I(x)\,dx \right| \leq S_\tau - s_\tau. \tag{19}$$

Остава да забележим, че благодарение на непрекъснатостта на $f(x,y)$ върху компакта T имаме, че тя е дори равномерно непрекъсната и следователно можем да направим разликата $S_\tau - s_\tau$ колкото искаме малка стига да вземем достатъчно дребно разбиване τ от разглеждания тук вид на T, за което е достатъчно всъщност да вземем достатъчно дребно разбиване η на $[a,b]$ (тогава и n расте).