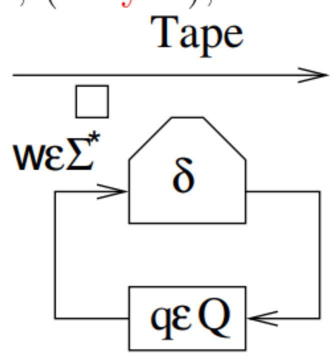
1. Детерминирани крайни автомати.

Един детерминистичен краен автомат $A = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ се състои от:

(детерминистичен краен автомат=DFA)

- ☐ Q, крайно множество от състояния;
- ☐ Σ, крайно множество от (входни) символи, (азбука);
- ☐ $\delta : Q \times \Sigma \to Q$, функция на прехода;
- ☐ $s \in Q$, начално състояние;
- ☐ $F \subseteq Q$, множество от крайни състояния.



Разширяваме функцията δ върху думи:

$$\hat{\delta}(q,\varepsilon) = q$$

$$\hat{\delta}(q,aw) = \hat{\delta}(\delta(q,a),w)$$

$A = (Q,\Sigma,\delta,s,F)$ разпознава езика

$$L(A) := \left\{ w \in \Sigma^* : \hat{\delta}(s,w) \in F \right\}$$

Еквивалентна дефиниция:

$$\hat{\delta}(q,\varepsilon) = q$$

$$\hat{\delta}(q,wa) = \delta(\hat{\delta}(q,w),a)$$

Свойство: $\forall q,u,v : \hat{\delta}(q,uv) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q,u),v)$.

2. Недетерминирани крайни автомати.

1.1.2 Недетерминистични крайни автомати NFA

- допускат се повече от един преход от дадено състояние с един символ

Недетерминистичен краен автомат $A = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$

- Q, множество от състояния
- Σ, азбука
- $\delta : Q \times \Sigma \to 2^Q$, функция на прехода
- $s \in Q$, начално състояние
- $F \subseteq Q$, крайни състояния

Преходът от q до q' при вход a: $q' \in \delta(q, a)$

повече възможности!

Разширяване на $\boldsymbol{\delta}$

Подмножества от състояния: $\bar{\delta} : 2^Q \times \Sigma \to 2^Q$

$$\bar{\delta}(M,a) := \bigcup_{p\in M} \delta(p,a)$$

Подмножества от състояния и входна дума :
$\hat{\delta} : 2^Q \times \Sigma^* \to 2^Q$

$$\hat{\delta}(M,\varepsilon) := M$$
$$\hat{\delta}(M,aw) := \hat{\delta}(\bar{\delta}(M,a),w)$$

$$L(A) := \left\{ w \in \Sigma^* : \hat{\delta}(\{s\},w) \cap F \neq \emptyset \right\}$$

3. Представяне на всеки недетерминиран краен автомат с детерминиран (с доказателство).

Даден: NFA $A = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$

Теорема: (Детерминизация на NFA)[Рабин, Скот 1959]
DFA $A' := (2^Q, \Sigma, \bar{\delta}, \{s\}, \{M \subseteq Q : M \cap F \neq \emptyset\})$ разпознава $L(A)$.

Упражнение: Дайте алгоритъм, който по даден NFA A и дума w да изчислява $\hat{\delta}(\{s\}, w)$ за време $\mathcal{O}(|w| \cdot |\delta|)$. Тук $|\delta|$ е броят на преходите от вида $p \in \delta(q, a)$, достатъчни да дефинираме δ.

$A = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$
$A' := (2^Q, \Sigma, \bar{\delta}, \{s\}, F')$, $F' := \{M \subseteq Q : M \cap F \neq \emptyset\}$, където
$\bar{\delta}(M, a) := \bigcup_{p \in M} \delta(p, a)$
Твърдим: $L(A') = L(A)$
Д-во: Първо да отбележим, че $\hat{\bar{\delta}}(\{s\}, w) = \hat{\delta}(\{s\}, w)$.
Тогава

$$
\begin{aligned}
L(A) &= \left\{ w \in \Sigma^* : \hat{\delta}(\{s\}, w) \cap F \neq \emptyset \right\} && \text{Деф. L(A)} \\
&= \left\{ w \in \Sigma^* : \hat{\delta}(\{s\}, w) \in F' \right\} && \text{Деф. F'} \\
&= L(A') && \text{Деф. L(A')}
\end{aligned}
$$

($\hat{\delta}$ играе двойна роля!) $\square$

- Цеци учебник

Теорема 1.1. *$\forall A =< Q,\ \Sigma,\ \delta,\ s,\ F >$ - краен автомат, $\exists!\ A^{det} =< 2^Q,\ \Sigma,\ \delta',\ \{s\} \in 2^Q,\ F' \subseteq 2^Q >$ - краен, детерминиран, тотален автомат: $L(A) \equiv L(A')$*

$$\delta' \equiv \bar{\delta}\ :\ \bar{\delta}(M \subseteq Q,\ a \in \Sigma) = \bigcup_{q \in M} \delta(q,\ a)$$

Лема 1.1. *Ще докажем, че $\hat{\delta}' \equiv \hat{\bar{\delta}}$*

Доказателство. Нека $M \subseteq Q$

Индукция по думата w:

База: $w = \varepsilon \Rightarrow \hat{\delta}'(M,\ \varepsilon) = M = \hat{\bar{\delta}}(M,\ \varepsilon)$

ИХ: Нека твърдението е вярно за $u \in \Sigma^*, |u| = n$

ИС: Нека $w = au$, тогава:

$$\hat{\delta}'(M,\ au) = \hat{\delta}'(\delta'(M,\ a),\ u) = \hat{\delta}'(\bar{\delta}(M,\ a), u) \underset{\text{ИХ}}{=} \hat{\bar{\delta}}(\bar{\delta}(M,\ a), u) \underset{\text{def}}{=} \hat{\bar{\delta}}(M,\ au)$$ □

Нека $w \in L(A) \iff \hat{\bar{\delta}}(\{s\},\ w) \cap F \neq \emptyset \underset{\text{Лема 1.1}}{\iff} \hat{\delta}'(\{s\},\ w) \in F' \iff w \in L(a')$

4. Регулярни операции.

Регулярни езици

- $\emptyset$, $\{\varepsilon\}$ и $\{a\}$ за всяко $a \in \Sigma$ са основни регулярни езици;
- Ако L_1 и L_2 са регулярни, то и $L_1 \cup L_2$ е регулярен;
- Ако L_1 и L_2 са регулярни , то и $L_1.L_2$ е регулярен;
- Ако L е регулярен, то и L^* е регулярен.

Един език е регулярен, ако се получава от основните с помощта на операциите обединение, конкатенация и звезда, приложени краен брой пъти.

5. Доказателство за затвореност на автоматните езици относно регулярните операции.

Един език L се нарича автоматен, ако има краен автомат A такъв, че $L(A) = L$.

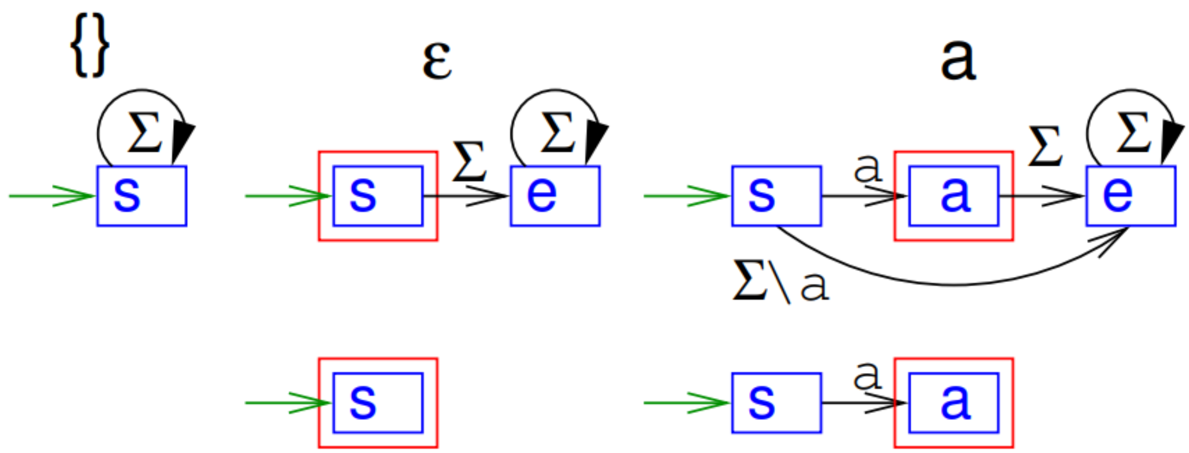
Теорема Всеки регулярен език е автоматен.

Д-во идея:

ще построим автомати, разпознаващи основните езици (основните езици са автоматни)

ще покажем, че регулярните операции запазват автоматността

Базов случай

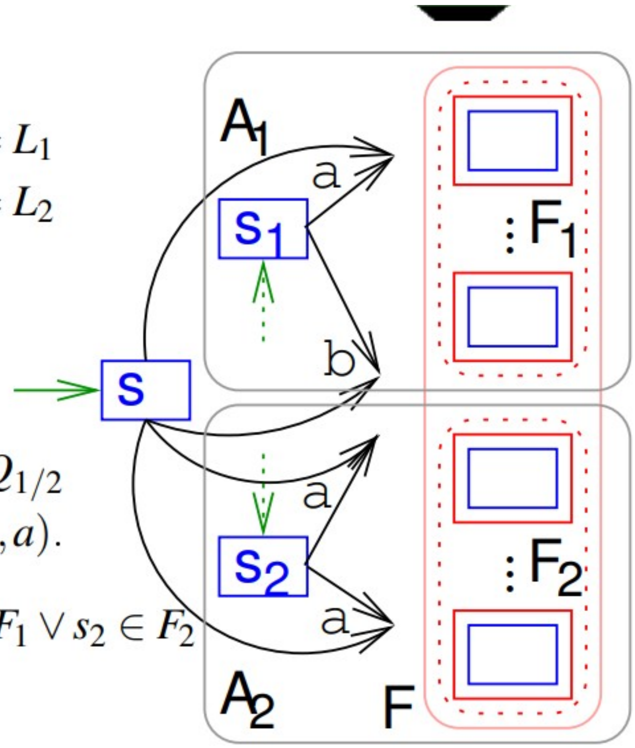


$L_1 \cup L_2$

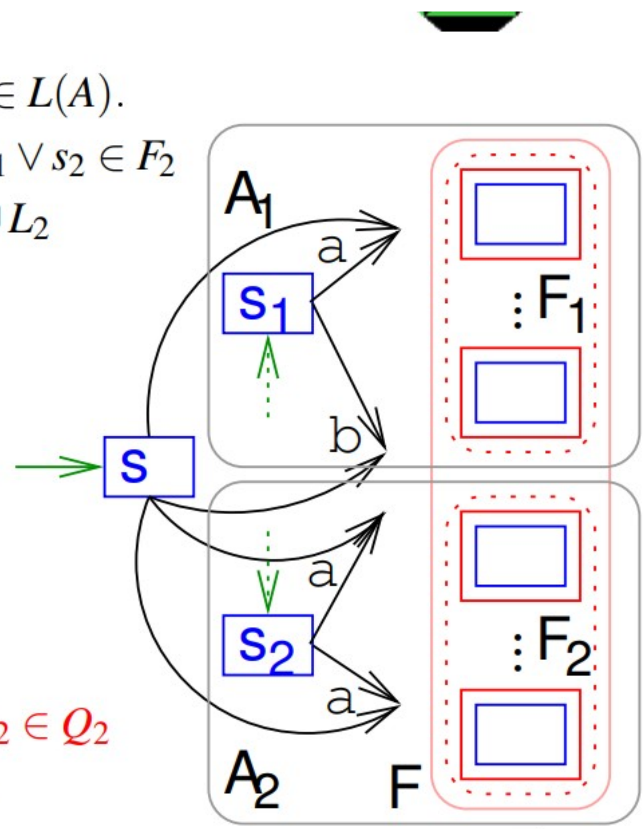
$A_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, s_1, F_1)$ и $L(A_1) = L_1$
$A_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, s_2, F_2)$ и $L(A_2) = L_2$
и БОО $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$

$A := (\{s\} \cup Q_1 \cup Q_2, \Sigma, \delta, s, F)$
δ е дефинирана като $\delta_{1/2}$ за $Q_{1/2}$
$\forall a \in \Sigma : \delta(s,a) := \delta(s_1,a) \cup \delta(s_2,a)$.

$$F := \begin{cases} F_1 \cup F_2 \cup \{s\} & \text{ако } s_1 \in F_1 \vee s_2 \in F_2 \\ F_1 \cup F_2 & \text{иначе} \end{cases}$$



Д-во на $L(A) \subseteq L_1 \cup L_2$
Нека w е произволна дума $w \in L(A)$.
Ако $w = \varepsilon \longrightarrow s \in F \longrightarrow s_1 \in F_1 \vee s_2 \in F_2$
$\longrightarrow \varepsilon \in L_1 \vee \varepsilon \in L_2 \longrightarrow \varepsilon \in L_1 \cup L_2$
Ако $w = ax$:
$\longrightarrow \exists$ път $P = s \overset{a}{\Rightarrow} q \overset{x}{\Rightarrow} f \in F$.
Ако $q = q_1 \in Q_1$:
$\longrightarrow \exists$ път $P_1 = s_1 \overset{a}{\Rightarrow} q_1 \overset{x}{\Rightarrow} f \in F_1$.
(само състояния,
достижими от q_1 са в Q_1.)
$\longrightarrow ax = w \in L_1 \subseteq L_1 \cup L_2$
В противен случай: $\longrightarrow q = q_2 \in Q_2$
$\longrightarrow \exists$ път $P_2 = s_2 \overset{a}{\Rightarrow} q_2 \overset{x}{\Rightarrow} f \in F_2$.
$\longrightarrow ax = w \in L_2 \subseteq L_1 \cup L_2$



$\square$

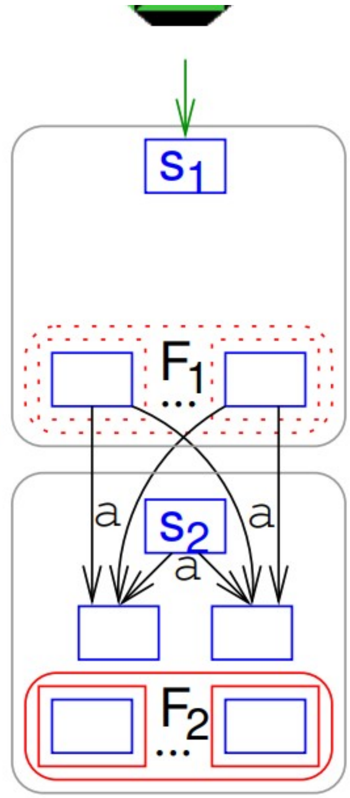
$L_1 \cdot L_2$

$A_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, s_1, F_1)$ и $L(A_1) = L_1$
$A_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, s_2, F_2)$ и $L(A_2) = L_2$
и $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$

$A := (Q_1 \cup Q_2, \Sigma, \delta, s_1, F), \forall a \in \Sigma :$

$$\delta(q,a) := \begin{cases} \delta_1(q,a) & \text{ако } q \in Q_1 \setminus F_1 \\ \delta_1(q,a) \cup \delta_2(s_2,a) & \text{ако } q \in F_1 \\ \delta_2(q,a) & \text{иначе} \end{cases}$$

$$F := \begin{cases} F_1 \cup F_2 & \text{ако } s_2 \in F_2 \\ F_2 & \text{иначе} \end{cases}$$

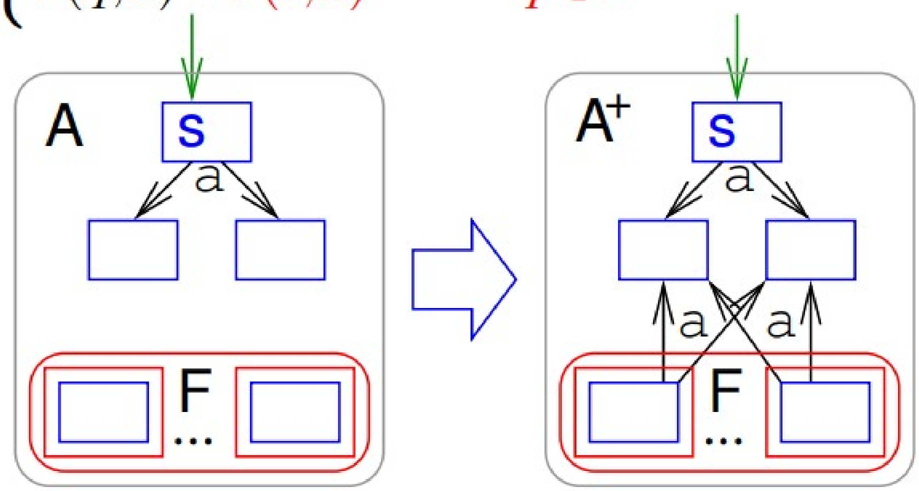


Позитивна обвивка $L^+ = \bigcup_{i \geq 1} L^i$

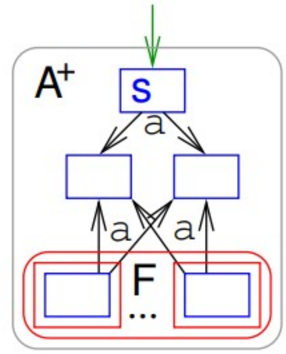
$A = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ и $L(A) = L$

$A^+ := (Q, \Sigma, \delta^+, s, F), \forall a \in \Sigma :$

$$\delta^+(q,a) := \begin{cases} \delta(q,a) & \text{ако } q \in Q \setminus F \\ \delta(q,a) \cup \delta(s,a) & \text{ако } q \in F \end{cases}$$



Д-во на $L(A^+) \subseteq L^+$

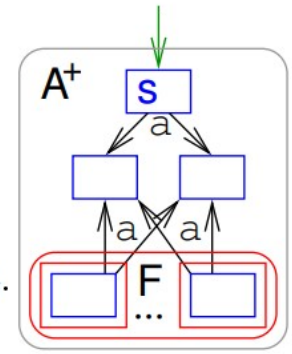


Нека $w \in L(A^+)$ е произволна и $w \neq \varepsilon$
Нека $P = s \overset{a_0}{\Rightarrow} q_0 \overset{*}{\Rightarrow} f$ е приемащ път за w.
Декомпозираме P на преходи от вида $f_j \overset{a_j}{\Rightarrow} q_j$
by $q_j \notin \delta(f_j, a_j)$, $j \in 1..i$, $i \geq 0$.
$\longrightarrow f_j \in F$, $q_j \in \delta(s, a_j)$.

$$P = s \overbrace{\overset{a_0}{\Rightarrow} q_0 \overset{x_0}{\Rightarrow} f_1 \overset{a_1}{\Rightarrow} q_1 \overset{x_1}{\Rightarrow} f_2 \overset{*}{\Rightarrow} f_i \overset{a_i}{\Rightarrow} q_i \overset{x_i}{\Rightarrow}}^{a_0 x_0 a_1 x_1 \cdots a_i x_i = w} f$$

Дефинираме $P_j := s \overset{a_j}{\Rightarrow} q_j \overset{x_j}{\Rightarrow} f_{j+1}$ (с $f_{i+1} := f$).
$\longrightarrow \forall j \in 0..i : P_j$ е един приемащ път A.
$\longrightarrow w \in L^+$ $\square$

Д-во на $L^i \subseteq L(A^+)$ за $i \geq 1$



Нека $w = w_1 \cdots w_i \in L^i$ $(\varepsilon \neq w_i \in L)$.
Да разгледаме $P_j = s \overset{a_j}{\Rightarrow} q_j \overset{x_j}{\Rightarrow} f_j,\ j \in 1..i,\ f_j \in F$,
които свидетелстват за $w_1 \in L, \ldots, w_i \in L$.

$$\longrightarrow P = s \overbrace{\overset{a_1}{\Rightarrow} q_1 \overset{x_1}{\Rightarrow} f_1 \overset{a_2}{\Rightarrow} q_2 \overset{x_2}{\Rightarrow} f_2 \overset{*}{\Rightarrow} f_{i-1} \overset{a_i}{\Rightarrow} q_i \overset{x_i}{\Rightarrow}}^{w} f_i$$

е път в A^+, свидетелстващ за $w \in L(A^+)$.

$\longrightarrow w \in L(A^+)$ $\square$

L^* -звезда на Клини

Построяваме автомат за $\varepsilon \cup L^+ = L^*$.

- Цеци учебник

2 Затвореност на езиците разпознавани от ДКА относно конкатенация

Теорема 2.1. *Нека Σ е азбука и $A_1 =< Q_1,\ \Sigma,\ \delta_1,\ s_1,\ F_1 >$ и $A_2 =< Q_2,\ \Sigma,\ \delta_2,\ s_2,\ F_2 >$ са тотални ДКА.*

$Q_1\ \cap\ Q_2\ = \emptyset$

Тогава нека $A =< Q_1 \cup Q_2,\ \Sigma,\ \delta,\ \{s_1\},\ F >\ \ \forall\ a \in \Sigma$

$$\Delta(q,a) = \begin{cases} \Delta_1(q,a),\ \textit{ако}\ q \in Q_1 \\ \ \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ F_1\ \cup\ F_2\ \cup\ \{s\},\ \textit{ако}\ s_1 \in F_1\ \cup\ s_2 \in F_2 \\ F_1\ \cup\ F_2,\ \textit{ако} s_1 \notin F_1\ \&\ s_2 \notin F_2 \end{cases} \tag{1}$$

$\delta\ :$

1. *Ако сме в* Q_1, *то* $\delta\ =\ \delta_1$.

2. *Ако сме в* Q_2, *то* $\delta\ =\ \delta_2$.

$\forall a \in \Sigma\ :\ \delta(s,a) := \delta(s_1,a)\ \cup\ \delta(s_2,a)$

$$F := \begin{cases} F_1\ \cup\ F_2\ \cup\ \{s\},\ \textit{ако}\ s_1 \in F_1\ \cup\ s_2 \in F_2 \\ F_1\ \cup\ F_2,\ \textit{ако} s_1 \notin F_1\ \&\ s_2 \notin F_2 \end{cases} \tag{2}$$

3 Затвореност на езиците разпознавани от ДКА относно обединение

Теорема 3.1. *Нека* Σ *е азбука и* $A_1 =< Q_1,\ \Sigma,\ \delta_1,\ s_1,\ F_1 >$ *и* $A_2 =< Q_2,\ \Sigma,\ \delta_2,\ s_2,\ F_2 >$ *са тотални ДКА. Тогава нека* $A =< \{s\} \cup Q_1 \cup Q_2,\ \Sigma,\ \delta,\ \{s\},\ F >$

δ :

1. *Ако сме в* Q_1, *то* $\delta\ =\ \delta_1$.

2. *Ако сме в* Q_2, *то* $\delta\ =\ \delta_2$.

$\forall a \in \Sigma\ :\ \delta(s,a) := \delta(s_1,a)\ \cup\ \delta(s_2,a)$

$$F := \begin{cases} F_1\ \cup\ F_2\ \cup\ \{s\},\ \textit{ако}\ s_1 \in F_1\ \cup\ s_2 \in F_2 \\ F_1\ \cup\ F_2,\ \textit{ако} s_1 \notin F_1\ \&\ s_2 \notin F_2 \end{cases} \qquad (3)$$

Доказателство. I Нека $w \in L_1 = L(A_1)$ w е произволна дума от езика L_1 Ако $w = \varepsilon$

$\implies s_1 \in F_1 \implies s \in F \implies w \in L(A)$

Ако $w = a.x$

$\implies \exists$ път $P_1\ =\ s_1 \xrightarrow{\text{a}} q_1 \xrightarrow{\text{x}} f_1 \in F_1 \subseteq F$

$\implies \exists$ път$P = s \xrightarrow{\text{a}} q_1 \xrightarrow{\text{x}} f_1 \in F$

$\implies w \in L(A)$

II Нека $w \in L_2 = L(A_2)$ w е произволна дума от езика L_2 Ако $w = \varepsilon$

$\implies s_2 \in F_2 \implies s \in F \implies w \in L(A)$

Ако $w = a.x$

$\implies \exists$ път $P_2 = s_2 \xrightarrow{\text{a}} q_2 \xrightarrow{\text{x}} f_2 \in F_1 \subseteq F$

$\implies \exists$ път $P = s \xrightarrow{\text{a}} q_2 \xrightarrow{\text{x}} f_2 \in F$

$\implies w \in L(A)$

III Доказателство на $L(A) \subseteq L_1 \cup L_2$

Нека $w \in L(A))$ w е произволна дума от езика $L(A)$

$w = \varepsilon$

$\implies s \in F \implies s_1 \in F_1 \cup s_2 \in F_2$

$\implies \varepsilon \in L_1 \cup \varepsilon \in L_2$

$\implies \varepsilon \in L_1 \cup L_2$

$w = a.x \implies \exists$ път $P = s \xrightarrow{\text{a}} q \xrightarrow{\text{x}} f \in F$

Ако $q = q_1 \in Q_1$

$\implies \exists$ път $P_1 = s \xrightarrow{\text{a}} q_1 \xrightarrow{\text{x}} f \in F_1$

само състояния достъпни от q_1 са в Q_1

$\implies ax = w \in L_1 \subseteq L_1 \cup L_2$

или $q = q_1 \in Q_2$

$\implies \exists$ път $P_2 = s \xrightarrow{\text{a}} q_2 \xrightarrow{\text{x}} f \in F_2$

само състояния достъпни от q_2 са в Q_2

$\implies ax = w \in L_2 \subseteq L_1 \cup L_2$

$\implies L(A) \subseteq L_1 \cup L_2$ ✓

$\square$

4 Допълнението на език разпознаван от ДКА е също език разпонзаван от ДКА

Теорема 4.1. *Нека* $A =< Q,\ \Sigma,\ \delta,\ s,\ F >$ *е тотален ДКА, знаем че БОО можем да го изискаме, налагаме го като изискване, защото всяка дума, за която не е дефиниран преход считаме, че не е в езика на автомата, но тя е в допълнението на езика и ни трябва начин, по който да разпознаем цялата дума, това може да стане като си поискаме автомата да е тотален, защото стигайки до състоянието на грешка, автомата след това автоматично прочита остатъка на дума и не променя своето състояние.*

Нека $A' =< Q,\ \Sigma,\ \delta,\ s,\ Q \backslash F >$*. Ще докажем, че* $L(A') = L(\bar{A})$*.*

$\overline{L} = \Sigma^\star - L$

Доказателство. Нека $L = L(A)$ за КДА $A =< Q, \Sigma, \delta, q_0, F >$. Тогава $\overline{L} = L(B)$, където B е КДА $< Q, \Sigma, \delta, q_0, Q - F >$. Това показва, че автоматът B е същият като A, но приемащите състояния на A са неприемащи при автомата B, и *vice versa* (Приемащи == финални). Тогава w е в $L(B) \iff \hat{\delta}(q_0, w)$ е в $Q - F$, което се появява $\iff$ когато w не е в $L(A)$. ☐

5 Затвореност на езиците разпознавни от ДКА относно операцията сечение

Нека Σ е азбука и $A_1 =< Q_1,\ \Sigma,\ \delta_1,\ s_1,\ F_1 >$ и $A_2 =< Q_2,\ \Sigma,\ \delta_2,\ s_2,\ F_2 >$ са тотални ДКА. Тогава нека $A =< Q_1 \times Q_2,\ \Sigma,\ \delta,\ (s_1,\ s_2),\ F_1 \times F_2 >$.

$\delta = \{(((q_1,\ q_2),\ a),\ (\delta_1(q_1,\ a),\ \delta_2(q_2,\ a))) \mid q_1 \in Q_1,\ q_2 \in Q_2,\ a \in \Sigma\}$

Конструкцията е същата, като на автомата разпознаващ обединението на двата езика с изключение на финалните състояния, тук ще искаме думата да бъде разпонзата и от двата автомата едновременно за да кажем, че е разпозната от конструирания автомат.

Ще покажем, че $L(A) = L(A_1) \cap L(A_2)$.

Доказателство. От законите на ДеМорган знаем, че $L \cap M = \overline{\overline{L} \cup \overline{M}}$, както и че $L \cup M = \overline{\overline{L} \cap \overline{M}}$.

Имаме доказателство на това, че обединението запазва регулярността, както и на това, че допълнението има същия ефект върху новополучения език.

□

6. Регулярни езици.

Регулярни езици

- $\emptyset$, $\{\varepsilon\}$ и $\{a\}$ за всяко $a \in \Sigma$ са основни регулярни езици;
- Ако L_1 и L_2 са регулярни, то и $L_1 \cup L_2$ е регулярен;
- Ако L_1 и L_2 са регулярни , то и $L_1.L_2$ е регулярен;
- Ако L е регулярен, то и L^* е регулярен.

Един език е регулярен, ако се получава от основните с помощта на операциите обединение, конкатенация и звезда, приложени краен брой пъти.

7. Формулировка и доказателство на теоремата на Клини.

Теорема на Клини

Теорема Всеки автоматен език е регулярен.

Д-во: Даден: DFA $A = (\{1, \dots, n\}, \Sigma, \delta, s, F)$

Резултат: регулярен израз α такъв, че $L(A) = L(\alpha)$.

За всяко $f \in F$ нека $L_f = \left\{ w \in \Sigma^* : \hat{\delta}(s, w) = f \right\}$.

Ще намерим RegExp за L_f. Тъй като $L(A) = \bigcup_{f \in F} L_f$,

теоремата ще е доказана, защото F е крайно.

Даден: DFA $A_f = (\{1, \dots, n\}, \Sigma, \delta, s, \{f\})$

Резултат: регулярен израз α и $L_f = L(A_f) = L(\alpha)$.

Нека $L_{ij} := L((\{1, \dots, n\}, \Sigma, \delta, i, \{j\}))$

В частност $L_{sf} = L_f$.

Ако $i \neq j$: $L_{ij}^0 := \{a \in \Sigma : j \in \delta(i, a)\}$

Ако $i = j$: $L_{ij}^0 := \{a \in \Sigma : j \in \delta(i, a)\} \cup \{\varepsilon\}$

$L_{ij}^m := \left\{ w \in \Sigma^* : \exists \text{работен път } i \stackrel{w}{\Rightarrow} j = iPj \text{ и } P \in \{1, \dots, m\}^* \right\}$

Тук преход iPj озаначава преход от i до j, с междинни състояния с номера $\leq m$.

Забележете, че $L_{ij} = L_{ij}^n$.

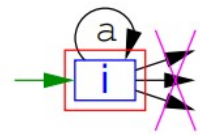
Ще построим реулярен израз за L_{ij}^m индуктивно, използвайки регулярните изрази за по-малките m.

$L_{ij}^m := \left\{ w \in \Sigma^* : \exists \text{работен път } i \overset{w}{\Rightarrow} j = iPj \text{ и } P \in \{1,\ldots,m\}^* \right\}$

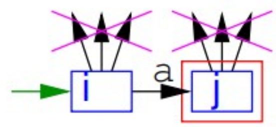
Даден: регулярен израз α_{ij}^k, $k < m$ и $L(\alpha_{ij}^k) = L_{ij}^k$

Резултат: α_{ij}^m и $L(\alpha_{ij}^m) = L_{ij}^m$

Ако $m = 0, i = j$: $\alpha_{ii}^0 = \bigcup_{a \in \Sigma : \delta(i,a) = i} a \cup \varepsilon$

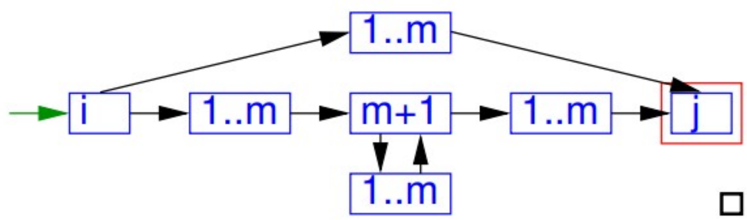


Ако $m = 0, i \neq j$: $\alpha_{ij}^0 = \bigcup_{a \in \Sigma : \delta(i,a) = j} a$

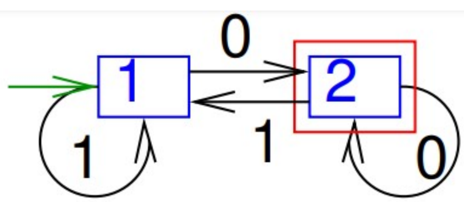


Ако $m \rightsquigarrow m+1$:

$$\alpha_{ij}^{m+1} = \alpha_{ij}^m \cup \alpha_{i,m+1}^m \cdot (\alpha_{m+1,m+1}^m)^* \cdot \alpha_{m+1,j}^m$$



Пример



$\alpha_{11}^0 = 1 \cup \varepsilon$ $\quad$ $\alpha_{22}^0 = 0 \cup \varepsilon$ $\quad$ $\alpha_{12}^0 = 0$ $\quad$ $\alpha_{21}^0 = 1$

$$\begin{aligned} \alpha_{12}^1 &= \alpha_{12}^0 \cup \alpha_{11}^0 \cdot (\alpha_{11}^0)^* \cdot \alpha_{12}^0 \\ &= 0 \cup (1 \cup \varepsilon) \cdot (1 \cup \varepsilon)^* \cdot 0 \\ &= 1^*0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_{22}^1 &= \alpha_{22}^0 \cup \alpha_{21}^0 \cdot (\alpha_{11}^0)^* \cdot \alpha_{12}^0 \\ &= 0 \cup \varepsilon \cup 1 \cdot (1 \cup \varepsilon)^* \cdot 0 \\ &= 1^*0 \cup \varepsilon \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_{12}^2 &= \alpha_{12}^1 \cup \alpha_{12}^1 \cdot (\alpha_{22}^1)^* \cdot \alpha_{22}^1 \\ &= 1^*0 \cup 1^*0 \cdot (1^*0 \cup \varepsilon)^* \cdot (1^*0 \cup \varepsilon) \\ &= 1^*0(1^*0)^* \end{aligned}$$

$L(\alpha_{12}^2) = L_{12}^2 = L_{12} = L_2$, където $F = \{2\}$.

- Цеци учебник

Теорема 7.1. $\forall A =< Q,\ \Sigma,\ \delta,\ s\ , F >: \exists\ L \subseteq \Sigma^*$ *- регулярен:* $L(A) = L$

Доказателство. Ще считаме, че $|F| = 1$, ако не е дефинираме $\forall f \in F : L_f \equiv L(A_f) : A_f =< Q,\ \Sigma,\ \delta,\ s,\ \{f\} >$, тогава $L \equiv \bigcup_{f \in F} L_f$

Ще считаме също, че $Q = \{1,\ \dots,\ n\} : |Q| = n$, както и $F = \{n\}$

Дефинираме $A_{i,j} =< Q,\ \Sigma,\ \delta, s = i,\ \{j\} >: L_{i,j} = L(A_{i,j})$. Следователно $L = L_{1,n}$. Ще търсим в общия случай - регулярен израз $\alpha_{i,j} : L(\alpha_{i,j}) \equiv L_{i,j}$.

Дефинираме също: $\forall m \in \{1, \dots, n\} : L^m_{i,j} = \{w | i \xrightarrow{w} j$като по пътя има състояния с номера $\leq$ m$\}$. Тогава $L^n_{1,n} \equiv L$.

Доказателство с индукция по m:

База: $m = 0 \implies$

$$\alpha^0_{i,j} = \bigcup_{i \xrightarrow{a} j} a \tag{4}$$

При $i = j$

$$\alpha^0_{i,j} = \bigcup_{i \xrightarrow{a} j} a \cup \{\varepsilon\} \tag{5}$$

При $i \neq j$ $L^0_{i,j} = \{w | i \xrightarrow{w} j$без междинни състояния$\} \implies a \in L^0_{i,j} \iff \exists i \xrightarrow{a} j \iff L(\alpha^0_{i,j}) \subseteq L(a) \implies L(\alpha^0_{i,j}) = \bigcup_{i \xrightarrow{a} j} a$

ИХ: Нека е вярно за $\forall i,\ j,\ m < n:$

$$L^m_{i,j} = L(\alpha^m_{i,j}) \tag{6}$$

ИС: Разглеждаме $L_{i,j}^{m+1}$.(Представяме си картинката на проф. Соскова с автоматите - може да мине през състояние с номер $m+1$, а може и да не мине).

I сл $i \xrightarrow{w}^{\leq m} j \underset{\text{по ИХ}}{\iff} w \in L(\alpha_{i,j}^m) = L_{i,j}^m$

II сл Минава през $m+1 \implies \exists\, u, v, x \in \Sigma^* :\ w = uv^*x$ и $i \xrightarrow{u} m+1 \xrightarrow{v} m+1 \xrightarrow{v} m+1 \xrightarrow{v} \ldots \xrightarrow{x} j$.

Тогава получаваме:

$$\alpha_{i,j}^{m+1} = \alpha_{i,j}^m + \alpha_{i,m+1}^m\ (\alpha_{m+1,m+1}^m)^*\ \alpha_{m+1,j}^m \tag{7}$$

Остава само да докажем, че $L_{i,j}^{m+1} \equiv L(\alpha_{i,j}^{m+1})$. Стандартно доказване за еднаквост на 2 езика.

I сл $w \in L_{i,j}^m \iff i \xrightarrow{w}^{\leq m} j \underset{\text{по ИХ}}{\iff} w \in L(\alpha_{i,j}^m)$

II сл $w \in L_{i,j}^{m+1} \setminus L_{i,j}^m \iff \exists u,\ v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_p,\ x \in \Sigma^* :\ i \xrightarrow{u}^{\leq m} m+1 \xrightarrow{v_1}^{\leq m} m+1 \xrightarrow{v_2}^{\leq m} m+1 \xrightarrow{v_3}^{\leq m} \ldots \xrightarrow{v_p}^{\leq m} m+1 \xrightarrow{x}^{\leq m} j \implies w = u\ v_1\ v_2\ \ldots\ v_p\ x$, но от преходите следват следните заключения: $u \in L_{i,m+1}^m$, $\forall i :\ v_i \in L_{m+1,m+1}^m$, $x \in L_{m+1,j}^m$. По ИХ имаме регулярни изрази за всеки от тези езици. $\implies w \in L(\underbrace{\alpha_{i,m+1}^m\ (\alpha_{m+1,m+1}^m)^*\ \alpha_{m+1,j}^m}_{\beta})$

$\implies w \in L_{i,j}^m \cup L_{i,m+1}^m\ (L_{m+1,m+1}^m)^*\ L_{m+1,j}^m \underset{\text{по ИХ}}{\iff} w \in \alpha_{i,j}^m + \alpha_{i,m+1}^m\ (\alpha_{m+1,m+1}^m)^*\ \alpha_{m+1,j}^m \underset{\text{по постоение}}{\iff} w \in L(\alpha_{i,j}^{m+1}) \underset{w\ \text{произволно}}{\implies} L_{i,j}^{m+1} \subseteq L(\alpha_{i,j}^{m+1})$

Обратната посока е значително по-кратка:

I сл $w \in L(\alpha_{i,j}^{m+1}) \underset{\text{по ИХ}}{\implies} w \in L_{i,j}^m$

II сл $w \in L(\beta^1) \implies w = u\ v_1\ v_2\ \ldots\ v_p\ x$, като за $u,\ v_i,\ x$ важат горните ограничения

$u \in L(\alpha_{i,m+1}^m) \underset{\text{по ИХ}}{\implies} L_{i,m+1}^m$

$v_i \in L(\alpha_{m+1,m+1}^m) \underset{\text{по ИХ}}{\implies} L_{m+1,m+1}^m$

$x \in L(\alpha_{m+1,j}^m) = L_{m+1,j}^m$

$\implies w \in L_{i,j}^m \cup L_{i,m+1}^m\ (L_{m+1,m+1}^m)^*\ L_{m+1,j}^m = L_{i,j}^{m+1}$

8. Формулировка и доказателство на лемата разрастване за регулярни езици (uvw-лема).

1.1.4 Pumping лема (лема за покачването)

Ако L регулярен език

$\longrightarrow \exists n \in \mathbb{N} : \forall w \in L : |w| > n$

$\longrightarrow \exists u, v, x : w = uvx \wedge$

1. $|v| \geq 1 \wedge$
2. $|uv| \leq n \wedge$
3. $\forall k \in \mathbb{N}_0 : uv^k x \in L$

С думи:

Достатъчно дългите думи на един регулярен език имат непразна поддума която можем да "pump"ваме (итерираме) без да напускаме езика.

Д-во на Pumping лемата

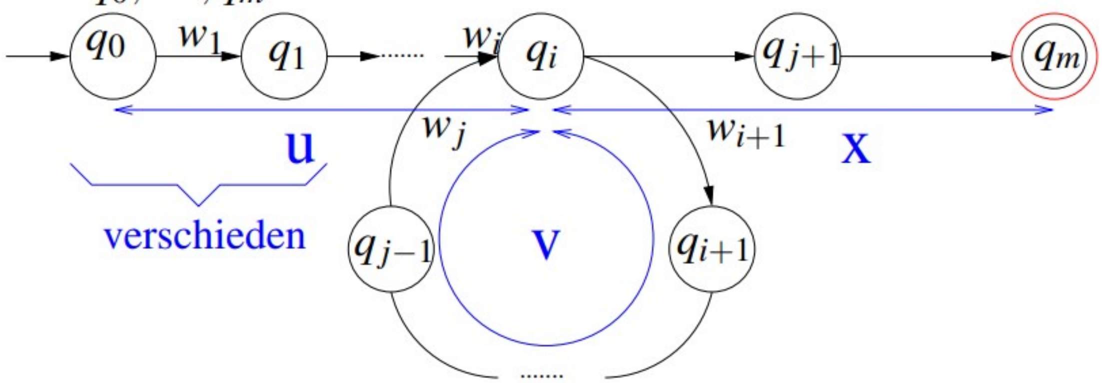
L регулярен $\longrightarrow \exists n \in \mathbb{N} : \forall w \in L : |w| > n \longrightarrow \exists u, v, x :$

$w = uvx \wedge |v| \geq 1 \wedge |uv| \leq n \wedge \forall k \in \mathbb{N}_0 : uv^k x \in L$

Д-во: Нека $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ DFA и $L(A) = L$.

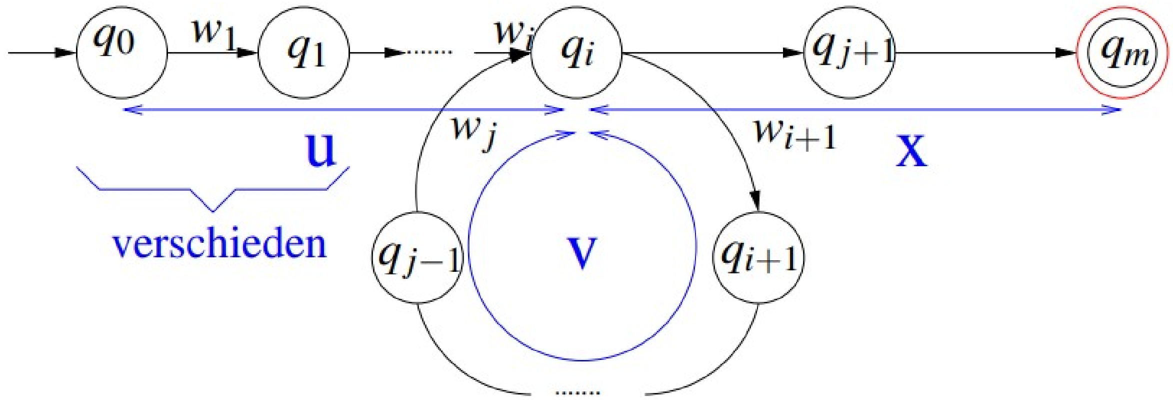
Нека $n = |Q|$ и $w \in L$ с $|w| = m \geq n$ (произволна).

Нека $q_0, \ldots, q_m$ състояния.



$(\exists i < j \leq n : q_i = q_j) \longrightarrow |v| \geq 1,\ |uv| \leq n,\ uv^k x$ са също в езика

Д-во на Pumping лемата



$w = w_1 \dots w_m$; $u = w_1 \dots w_i$; $v = w_{i+1} \dots w_j$; $x = w_{j+1} \dots w_m$
$(q_0, w) \vdash^* (q_i, w_{i+1} \dots w_j \dots w_m) \vdash^* (q_j, w_{j+1} \dots w_m) \Rightarrow$
$(q_0, w_1 \dots w_i) \vdash^* (q_i, \varepsilon)$ & $(q_i, w_{i+1} \dots w_j) \vdash^* (q_j, \varepsilon)$ & $q_i = q_j$
$\Rightarrow (q_0, w_1 \dots w_i w_{j+1} \dots w_m) \vdash^* (q_m, \varepsilon) \Rightarrow (q_0, ux) \vdash^* (q_m, \varepsilon)$
& $(q_0, uv^k x) \vdash^* (q_i, v^k x) \vdash^* (q_j, v^{k-1} x) \vdash^* \dots \vdash^* (q_j, vx) \vdash^*$
$(q_j, x) \vdash^* (q_m, \varepsilon)$.

Пример: $L = \{a^k b^k : k \in \mathbb{N}\}$

Да допуснем, че L е регулярен.
Нека n е числото от Pumping лемата и нека
$w = a^n b^n = uvx$ в съответствие с Pumping лемата, тогава
$ux \in L$.
$|uv| \leq n, |v| \geq 1 \longrightarrow v = a^\ell$ за $\ell \geq 1$.
$ux = a^{n-\ell} b^n \in L$.
Противоречие. ■

- Цеци учебник

Лема 8.1. $L \subseteq \Sigma^*$ - *регулярен* $\implies$

$\exists n \in \mathbb{N}: \ \forall w \in L, \ |w| \geq n:$

1. $\exists x, y, z \in \Sigma^*: \ w = xyz$

2. $|xy| \leq n$

3. $|y| > 0$

4. $\forall i \in \mathbb{N} xy^i z \in L$

Доказателство. $L \subseteq \Sigma^*$ - регулярен $\underset{7}{\implies} \exists A =< Q, \ \Sigma, \ \delta, \ s, \ F >: \ L(A) \equiv L$, нека $|Q| = n$, $w \in L, \ |w| \geq n \implies w = a_1 \ a_2 \ \dots \ a_k, \ k \geq n$

$w \in L \implies \exists \ s \xrightarrow{a_1} q_1 \xrightarrow{a_2} q_2 \xrightarrow{a_3} \dots \xrightarrow{a_{k-1}} q_{k-1} \xrightarrow{a_k} f \in F$ - общо $k+1$ прехода, но състоянията са $n \leq k \underset{\text{по принципа на Дирихле}[2]}{\implies} \exists i \neq j : q_i \equiv q_j$. Избираме първото повторение. Тогава $\exists x, \ y, \ z \in \Sigma^*:$ $s \xrightarrow{y} q_i \xrightarrow{y} q_i \xrightarrow{z} f$, с което доказахме 1. Проверяваме условията 2, 3, 4:

2: $|xy| \overset{?}{\leq} n$. Знаем, че $s \xrightarrow{x} q_i \xrightarrow{y} q_i$, ако положим $|xy| = j \implies$ има $j+1$ преходи

3: $|y| \overset{?}{>} 0$. Това е по построение, защото $i \neq j \implies y \neq \varepsilon \implies |y| > 0$

4: $\forall i \in \mathbb{N}: \ xy^i z \overset{?}{\in} L$. Знаем, че $s \xrightarrow{x} q_i \xrightarrow{y} q_i \xrightarrow{z} f \implies$ можем да повторим цикъла n на брой пъти и ще останем в езика, защтото $s \xrightarrow{x} q_i \xrightarrow{y} q_i \xrightarrow{y} \dots \xrightarrow{y} q_i \xrightarrow{z} f \implies \forall n \in \mathbb{N}: \ xy^n z \in L$ □

9. Примери за нерегулярни езици.

Пример: $L = \left\{ a^k b^k : k \in \mathbb{N} \right\}$

Да допуснем, че L е регулярен.
Нека n е числото от Pumping лемата и нека
$w = a^n b^n = uvx$ в съответствие с Pumping лемата, тогава
$ux \in L$.
$|uv| \leq n, |v| \geq 1 \longrightarrow v = a^\ell$ за $\ell \geq 1$.
$ux = a^{n-\ell} b^n \in L$.
Противоречие. ■

$L = \{0^p : p \text{ is a prime number}\}$

Да допуснем, че L е регулярен.
Нека n е числото от Pumping лемата за L.
Нека $p \geq n+2$ е просто число.($\exists$ безкрайно много прости числа) $\longrightarrow 0^p \in L = uvw$, $|v| \geq 1$, $|uw| \geq 2$.
Pumping-лема: $uv^{|uw|}w \in L$.
$\longrightarrow |uw| + |uw| \cdot |v| = |uw|(1+|v|)$ е просто число.
Два нетривиални делителя $|uw| \geq 2$ и $(1+|v|) \geq 2$.
Противоречие. ■

$$L = \left\{ 0^{n^2} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

Да допуснем, че L е регулярен.

Нека n е числото от Pumping лемата за L.

Нека $\longrightarrow 0^{n^2} \in L = uvw,\ |v| \geq 1,\ |uv| \leq n$.

Pumping-лема: $uv^2w \in L$.

$\longrightarrow n^2 < |uv^2w| \leq n^2 + n < (n+1)^2$.

Противоречие. ∎

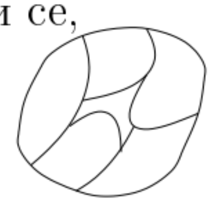
10. Формулировка и доказателство на теоремата на Майхил -Нероуд.

Припомняне: Релация на еквивалентност

Една релация $R \subseteq Y \times Y$ се нарича релация на еквивалентност, ако R е:

- □ рефлексивна $\forall x : xRx$
- □ транзитивна $\forall xyz : xRy \wedge yRz \longrightarrow xRz$
- □ симетрична. $\forall xy : xRy \longrightarrow yRx$

Клас на еквивалентност: $[x] = \{y : xRy\}$. Класовете на еквивалентност са непразни и непресичащи се, т.е. всеки елемент на Y принадлежи точно на един клас на еквививалентност

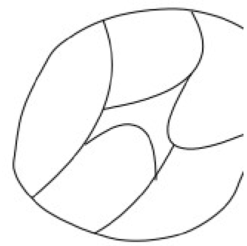


Индекс: индекс$|R|$:= $|$Клас на еквив.$| = |\{[x] : x \in Y\}|$

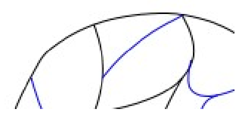
Прецизиране: R прецизира R' $(R \subseteq R')$

Лема: R прецизира $R' \longrightarrow \forall$ класове на еквивалентност $[x]_R : [x]_R \subseteq [x]_{R'}$
Д-во:

$$\begin{aligned} y \in [x]_R &\Leftrightarrow (y,x) \in R \\ &\xrightarrow{R \subseteq R'} (y,x) \in R' \\ &\Leftrightarrow y \in [x]_{R'} \end{aligned}$$



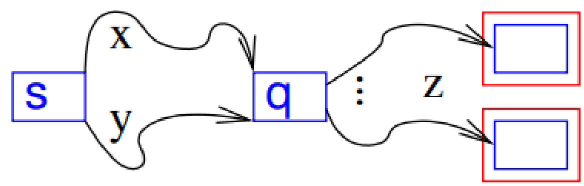
Следствие: R прецизира $R' \longrightarrow |R| \geq |R'|$
Д-во: Разгледайте $\rho([x]_R) = [x]_{R'}$.
Проверете, че е добре дефинирана функция, която е върху (сюрективна).



Релация на Нероуд

За езика L релацията на Нероуд е дефинирана като
$R_L := \{(x,y) \in \Sigma^* \times \Sigma^* : \forall z \in \Sigma^* : xz \in L \Leftrightarrow yz \in L\}$

Идея: класовете на еквивалентност съответстват на състоянията.
Защо?



DFA пораждат релация на еквивалентност

Нека $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ е DFA и $L(M) = L$.

$R_M := \left\{ (x,y) \in \Sigma^* \times \Sigma^* : \hat{\delta}(s,x) = \hat{\delta}(s,y) \right\}$.

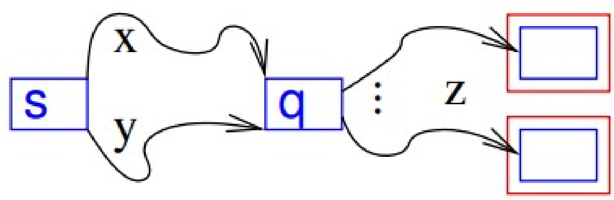
релация на еквивалентност! по един клас на еквивалентност (за достижимо от s) състояние.

Лема 1: R_M прецизира релацията на Нероуд $R_L =$

$$\{(x,y) \in \Sigma^* \times \Sigma^* : \forall z \in \Sigma^* : xz \in L \Leftrightarrow yz \in L\}$$

Д-во : $\forall (x,y) \in \Sigma^* \times \Sigma^* : \hat{\delta}(s,x) = \hat{\delta}(s,y) \longrightarrow$

$\forall z : \hat{\delta}(s,xz) = \hat{\delta}(s,yz) \longrightarrow \forall z : xz \in L \Leftrightarrow yz \in L$



Безкраен индекс на релацията на Нероуд

Наблюдение: индексът $|R_L| = \infty \longrightarrow L$ не е регулярен.

Д-во: Да допуснем, че L е регулярен.
$\longrightarrow \exists$ DFA $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F) : L(M) = L$.
$\longrightarrow R_M$ прецизира R_L.
$\longrightarrow |Q| \geq |R_M| \geq |R_L| = \infty$.
Противоречие.

Следователно: Ако L е регулярен, то индексът $|R_L| < \infty$.

Автомат от класовете на еквивалентност

$R_L := \{(x,y) \in \Sigma^* \times \Sigma^* : \forall z \in \Sigma^* : xz \in L \Leftrightarrow yz \in L\}$

Идея: когато класовете на еквивалентност $[w_1], \ldots, [w_k]$ на R_L съответстват на състоянията на един DFA $M_\equiv$, тогава по лемата по-долу минималният автомат за L е:

$M_\equiv := (\{[w_1], \ldots, [w_k]\}, \Sigma, \delta_\equiv, [\varepsilon], F_\equiv)$ с
$F_\equiv := \{[w] : w \in L\}$ и
$\delta_\equiv([w], a) := [wa]$.

Лема: $\delta_\equiv$ е добре дефинирана
Лема: $\hat{\delta}_\equiv([\varepsilon], w) = [w]$
Лема: $L(M_\equiv) = L$

Минимален автомат

$R_L := \{(x,y) \in \Sigma^* \times \Sigma^* : \forall z \in \Sigma^* : xz \in L \Leftrightarrow yz \in L\}$

$M_\equiv := (\{[w_1], \ldots, [w_k]\}, \Sigma, \delta_\equiv, [\varepsilon], F_\equiv)$, където

$F_\equiv := \{[w] : w \in L\}$ и

$\delta_\equiv([w], a) := [wa]$.

Лема: $\delta_\equiv$ е добре дефинирана

$xR_Ly \longrightarrow \forall a \in \Sigma : xaR_Lya$ дясно инвариантна

$xR_Ly \longrightarrow \forall z \in \Sigma^* : xz \in L \Leftrightarrow yz \in L$

$\longrightarrow \forall az \in \Sigma^* : x(az) \in L \Leftrightarrow y(az) \in L$

$\Leftrightarrow \forall a \in \Sigma : \forall z \in \Sigma^* : (xa)z \in L \Leftrightarrow (ya)z \in L$

$\longrightarrow \forall a \in \Sigma : xaR_Lya$ $\square$

Минимален автомат

$R_L := \{(x,y) \in \Sigma^* \times \Sigma^* : \forall z \in \Sigma^* : xz \in L \Leftrightarrow yz \in L\}$

$M_\equiv := (\{[w_1], \ldots, [w_k]\}, \Sigma, \delta_\equiv, [\varepsilon], F_\equiv)$, където

$F_\equiv := \{[w] : w \in L\}$ и

$\delta_\equiv([w], a) := [wa]$.

Лема: $\hat{\delta}_\equiv([x], y) = [xy]$

Индукция по $|y|$:

$\hat{\delta}_\equiv([x], \varepsilon) = [x]$.

$\hat{\delta}_\equiv([x], aw) \overset{\text{деф.}\hat{\delta}_\equiv}{=} \hat{\delta}_\equiv(\delta_\equiv([x], a), w) \overset{\text{деф.}\delta_\equiv}{=} \hat{\delta}_\equiv([xa], w) =$
$[xaw]$. $\square$

Минималният автомат: разпознава L

$R_L := \{(x,y) \in \Sigma^* \times \Sigma^* : \forall z \in \Sigma^* : xz \in L \Leftrightarrow yz \in L\}$

$M_\equiv := (\{[w_1], \ldots, [w_k]\}, \Sigma, \delta_\equiv, [\varepsilon], F_\equiv)$ с

$F_\equiv := \{[w] : w \in L\}$ и

$\delta_\equiv([w], a) := [wa]$.

Лема: $L(M_\equiv) = L$.

$w \in L(M_\equiv)$

$\Leftrightarrow \hat{\delta}_\equiv([\varepsilon], w) \in \{[w] : w \in L\}$ деф. $M_\equiv$

$\Leftrightarrow [w] \in \{[w] : w \in L\}$ предишната лема

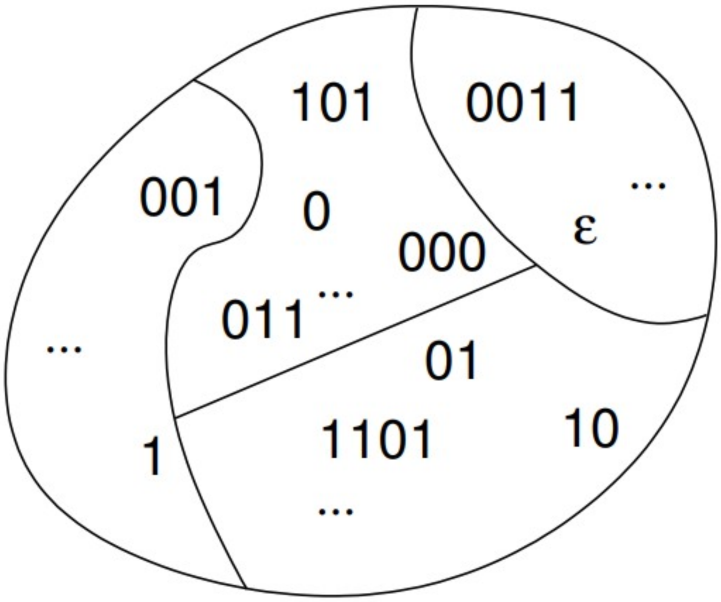
$\Leftrightarrow w \in L$ кл. на еквив. са или изцяло в, или извън L

$([w] \in \{[w] : w \in L\} \longrightarrow \exists x \in L : [x] = [w] \longrightarrow xR_Ly \longrightarrow$

$\forall z : xz \in L \Leftrightarrow wz \in L \longrightarrow x\varepsilon \in L \Leftrightarrow w\varepsilon \in L)$

Пример

$L \subseteq \{0,1\}^*$ език, всички думи с четен брой единици и
четен брой нули



Класовете на
еквивалентност:

$[\varepsilon], [0], [1], [01]$

Теорема на Майхил-Нероуд

Нека

$R_L := \{(x,y) \in \Sigma^* \times \Sigma^* : \forall z \in \Sigma^* : xz \in L \Leftrightarrow yz \in L\}$.

L не е регулярен $\longrightarrow |R_L| = \infty$

Теорема на Майхил-Нероуд: L регулярен $\iff |R_L| < \infty$.

Нека $|R_L| = k < \infty$

$M_\equiv := (\{[w_1], \dots, [w_k]\}, \Sigma, \delta_\equiv, [\varepsilon], F_\equiv)$

Тогава $L(M_\equiv) = L$

Ако L е реулярен и $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ произволен DFA с $L(M) = L$, то R_M прецизира R_L. Следователно $|R_L| \leq |Q|$, т.е. $M_\equiv$ е минимален автомат (с най-малък брой състояния), разпознаващ L.

Един автомат се нарича свързан, ако всяко състояние е достижимо от началното.

Следствие: Всички минимални автомати за L са изоморфни на $M_{\equiv}$.

Д-во: Нека $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ е свързан DFA, $L(M) = L$ и $|Q| = |R_L|$. Ще покажем, че $M \cong M_{\equiv}$, т.е. M е изоморфен на $M_{\equiv}$.

За всяко $q \in Q$ има дума w, такава че $\hat{\delta}(s, w) = q$.

Дефинираме $\kappa(q) = [w]$.

- деф на κ е коректна

  т.е. $\hat{\delta}(s, w_1) = \hat{\delta}(s, w) \longrightarrow w_1 R_L w \longrightarrow [w_1] = [w]$.

  $w_1 z \in L \iff \hat{\delta}(s, w_1 z) \in F \iff \hat{\delta}(\hat{\delta}(s, w_1), z) \in F \iff \hat{\delta}(\hat{\delta}(s, w), z) \in F \iff \hat{\delta}(s, wz) \in F \iff wz \in L$

- κ е биекция
  (еднозначна) Нека $q \neq q_1$ и $\hat{\delta}(s, w_1) = q_1$.
  Допускаме, че
  $\kappa(q) = \kappa(q_1) \longrightarrow [w] = [w_1]$ & $w \neg R_M w_1 \longrightarrow |R_M| > |R_L|$.
  Противоречие.
  (върху) $\forall w(q = \hat{\delta}(s, w) \longrightarrow \kappa(q) = [w])$.
- $\kappa(s) = [\varepsilon]$ $(\hat{\delta}(s, \varepsilon) = s)$
- $\kappa(\delta(q, a)) = \delta_{\equiv}(\kappa(q), a)$
  $q = \hat{\delta}(s, w) \longrightarrow \delta(q, a) = \hat{\delta}(s, wa) \longrightarrow \kappa(\delta(q, a)) =$
  $[wa] = \delta_{\equiv}([w], a) = \delta_{\equiv}(\kappa(q), a)$
- $f \in F \iff \kappa(f) \in F_{\equiv}$.

Еквивалентни състояния

Идея: разгледайте DFA $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$
(без недостижими състояния)
M не е минимален $\longrightarrow$
R_M прецизира $R_L \longrightarrow \exists q \neq r \in Q:$
$[w]_M \dot{\cup} [w']_M \subseteq K,\ \hat{\delta}(s,w) = q, \hat{\delta}(s,w') = r$
за някой клас на екв. K за R_L
q, r се наричат еквивалентни ($q \equiv r$),
т.е.:
$q \equiv r \Leftrightarrow \forall w \in \Sigma^* : \hat{\delta}(q,w) \in F \Leftrightarrow \hat{\delta}(r,w) \in F$

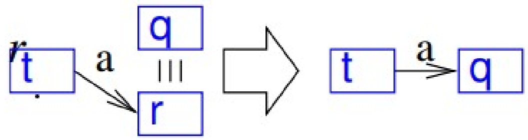
Махане на еквивалентните състояния

Да разгледаме $q \neq r \in Q : {\color{red} q \equiv r}$ и $r \neq s$

Махаме r:

$M' := (Q \setminus \{r\}, \Sigma, \delta', s, F \setminus \{r\})$ където

$$\delta'(t,a) := \begin{cases} q & \text{ако } \delta(t,a) = r, \\ \delta(t,a) & \text{иначе} \end{cases}$$



Лема: $L(M') = L$

Д-во:Упражнение

може би не всичко? (без минимизацията)

- **Цеци учебник**

Малко дефиниции: за $L \subseteq \Sigma^*$

Дефиниция 9.1. $R_L \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$

$\forall u,\ v \in \Sigma^* u\ R_L\ v \iff \forall\ z \in \Sigma^* :\ (uz \in L \leftrightarrow vz \in L)$

R_L - релация на еквивалентност

R_L - дясно инвариантна

Дефиниция 9.2. $R_A \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$

$\forall u,\ v \in \Sigma^* u\ R_A\ v \iff \hat{\delta}(s,x) = \hat{\delta}(s,y)$

R_A - релация на еквивалентност

R_A - дясно инвариантна

Лема 9.1. $R_A \subseteq R_L$

Доказателство. Нека $x,\ y \in \Sigma^* :\ \ x\ R_A\ y \iff \hat{\delta}(s,\ x) = \hat{\delta}(s,\ x)$, за $\forall z \in \Sigma^* :\ \ \hat{\delta}(s,\ xz) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(s,\ x),\ z) \underset{x\ R_A\ y}{=} \hat{\delta}(\hat{\delta}(s,\ y),\ z) = \hat{\delta}(s,\ yz) := q$. За q имаме 2 възможности $q \in F \vee q \notin F$:

1. $q \in F \implies xz \in L \wedge yz \in L$

2. $q \notin F \implies xz \notin L \wedge yz \notin L$

От тук можем да заключим, че: $(xz \in L \iff yz \in L) \implies x\ R_L\ y \implies R_A \subseteq R_L$ $\square$

Теорема 9.1 (Майхил-Нероуд). $L \subseteq \Sigma^* :$ *L - регулярен* $\iff |R_L| < \infty$

Доказателство. $\implies$ L - регулярен $\implies \exists\ A$ - детерминиран краен тотален автомат: $L(A) \equiv L$
По Лема 9.1 знаем, че $R_A \subseteq R_L \implies |R_A| \geq |R_L|$, но знам, че:

$$|R_A| = |Q| < \infty \implies |R_L| \leq |R_A| < \infty \implies |R_L| < \infty \tag{8}$$

$\impliedby$ $|R_L| = k < \infty \implies [w_1],\ [w_2],\ \dots\ [w_k]$. Дефинираме автомата на Нероуд: $M =< Q_{\equiv},\ \Sigma, \delta_{\equiv},\ s_{\equiv},\ F_{\equiv} >$, където:

$Q_{\equiv} = \{[w] \mid w \in L\}$

$\delta_{\equiv}([w],\ a) = [wa],\ \forall w \in \Sigma^*,\ a \in \Sigma$

$s_{\equiv} = [\varepsilon]$

$F_{\equiv} = \{[w] \mid w \in L\}$

Твърдим, че $L(M) \equiv L$, след коректностите се доказва лесно.

$\square$

Лема 9.2. *δ_M е коректно дефинирана (δ_M задава функция), т.е не зависи от думата в скобите, ако класа на еквивалентност е същия*

Доказателство. Нека $u,\ w \in \Sigma^* :\ u\ R_L w$. За тях имаме:

$$\delta_{\equiv}([w],\ a) = [wa]\delta_{\equiv}([u],\ a) = [ua] \tag{9}$$

$[wa] \stackrel{?}{\equiv} [ua]$

Знаем, че R_L е дясно инвариантна $\implies$ $wa\ R_L ua$ $\implies$ $[wa] \equiv [ua]$ $\implies$ $\delta_{\equiv}$ е добре дефинирана функция. □

Лема 9.3. $\hat{\delta}_{\equiv}([u],\ v) = [uv]$

Доказателство. Индукция по думата v:

База: $v = \varepsilon \implies \hat{\delta}_{\equiv}([u],\ \varepsilon) = [u]$

ИХ: Нека е вярно за някое v

ИС: Нека $v' = av$

$$\hat{\delta}_{\equiv}([u],\ av) = \hat{\delta}_{\equiv}(\delta_{\equiv}([u],\ a),\ v) = \hat{\delta}_{\equiv}([ua],\ v) \underset{\text{по ИХ}}{=} [uav] \tag{10}$$

□

Лема 9.4. $L(M) = L$

Доказателство. I $\subseteq$ $w \in L \implies [w] \in F_{\equiv}$

$\underset{\text{по Лема 9.3}}{\implies} [w] = \hat{\delta}_{\equiv}([\varepsilon], w) \in F_{\equiv} \iff w \in L(M) \implies L \subseteq L(M)$

II $\supseteq$ $w \in L(M) \implies \hat{\delta}_{\equiv}([\varepsilon],\ w) = [w] \in F_{\equiv}$

$\exists x \in L :\ ([w] \equiv [x] \iff xR_L w)$

$\iff \forall x \in \Sigma^* :\ wz \in L \iff xz \in L$

$z := \varepsilon :\ w \in L \iff x \in L$

$x \in L \implies w \in L \implies L(M) \subseteq L$

Следователно $L(M) \equiv L$ □

11. Алгоритъм за конструиране на минимален краен детерминиран тотален автомат, еквивалентен на даден детерминиран краен автомат.

Един лесен алгоритъм

$N := \emptyset$ // маркирани двойки

$N' := \{\{q, r\} \subseteq Q : q \in F \not\Leftrightarrow r \in F\}$ // следващите маркирани двойки

while $N' \neq \emptyset$ do

$\quad N := N \cup N'$

$\quad N' := \{\{q, r\} \subseteq Q : \exists a \in \Sigma : \{\delta(q, a), \delta(r, a)\} \in N\} \setminus N$

Общо време: $\mathcal{O}\left(|\Sigma| \cdot |Q|^3\right)$

Инициализация: $\mathcal{O}\left(|Q|^2\right)$

Време за цикъла: $\mathcal{O}\left(|\Sigma| \cdot |Q|^2\right)$

Колко цикъла? Сигурно $\leq |Q|^2$.

По-точно наблюдение: $\leq |Q|$ цикли

Минимален автомат

$q \equiv r \Leftrightarrow \forall z \in \Sigma^* : \hat{\delta}(q,z) \in F \Leftrightarrow \hat{\delta}(r,z) \in F$

релация на еививалентност

Нека $[q]$ е класът на еквивалентност съдържащ q.

$M' := (Q', \Sigma, \delta', [s], F')$, където

$Q' =: \{[q] : q \in Q\}$

$F' := \{[q] : [q] \cap F \neq \emptyset\}$ и

$\delta'([q],a) := [\delta(q,a)]$.

Лема 1: δ' е добре дефинирана

Лема 2: $\hat{\delta}'([s],w) = [\hat{\delta}(s,w)]$, следователно $L(M') = L(M)$

Лема 3: M' е с минимален брой състояния.

Минимален автомат

$q \equiv r \Leftrightarrow \forall z \in \Sigma^* : \hat{\delta}(q,z) \in F \Leftrightarrow \hat{\delta}(r,z) \in F$

Лема 1: δ' е добре дефинирана т.е.
ако $q \equiv p \longrightarrow \forall a \in \Sigma : \delta(q,a) \equiv \delta(p,a)$

Ако $\exists a \in \Sigma : \delta(q,a) \not\equiv \delta(p,a)$, то $q \not\equiv p$. $\square$

Лема 2.: $\hat{\delta}'([q],w) = [\hat{\delta}(q,w)]$, $q \in Q, w \in \Sigma^*$.

Индукция по $|w|$:
$\hat{\delta}'([q],\varepsilon) = [q] = [\hat{\delta}(q,\varepsilon)]$.
$\hat{\delta}'([q],aw) \overset{\text{деф.}\hat{\delta}'}{=} \hat{\delta}'(\delta'([q],a),w) \overset{\text{деф.}\delta'}{=} \hat{\delta}'([\delta(q,a)],w) \overset{\text{ИП}}{=}$
$[\hat{\delta}(\delta(q,a),w)] = [\hat{\delta}(q,aw)]$. $\square$

Следствие: $w \in L(M') \Leftrightarrow w \in L(M)$

$w \in L(M') \longrightarrow \hat{\delta}'([s], w) \in F' \longrightarrow$

$[\hat{\delta}(s, w)] \in F' \longrightarrow$ Лема 2

$\hat{\delta}(s, w) \equiv f \ \& \ f \in F \longrightarrow$ деф на F'

$\hat{\delta}(\hat{\delta}(s, w), \varepsilon) \in F \longrightarrow$ деф на $\equiv$

$\hat{\delta}(s, w) \in F \longrightarrow w \in L(M).$

$w \in L(M) \longrightarrow \hat{\delta}(s, w) \in F \longrightarrow$

$[\hat{\delta}(s, w)] \in F' \longrightarrow$ деф на F'

$\hat{\delta}'([s], w) \in F' \longrightarrow w \in L(M').$ Лема 2

$\square$

Така $L(M') = L(M)$.

Лема 3: M' е с минимален брой състояния.

M' е свързан (без недостижими състояния от s) и детерминиран автомат:
$\forall q \in Q \exists w \in \Sigma^*(\hat{\delta}(s,w) = q \longrightarrow \hat{\delta}'([s],w) = [q])$ по Лема 2.

Нека $L = L(M)$. Знаем, че $R_{M'}$ прецизира R_L.
Следовтелно $|R_{M'}| \geq |R_L|$.
Ще покажем, че R_L прецизира $R_{M'}$ т.е. $|R_{M'}| \leq |R_L|$.

Нека uR_Lv, $u,v \in \Sigma^*$. Да допуснем, че $u\neg R_{M'}v$.
$\hat{\delta}'([s],u) \neq \hat{\delta}'([s],v) \longrightarrow [\hat{\delta}(s,u)] \neq [\hat{\delta}(s,v)]$ (по Лема 2) $\longrightarrow$
$\hat{\delta}(s,u) \not\equiv \hat{\delta}(s,v)$
Тогава съществува дума w, такава че:
$\hat{\delta}(s,uw) \in F \not\Leftrightarrow \hat{\delta}(s,vw) \in F \longrightarrow$
$uw \in L \not\Leftrightarrow vw \in L$. Противоречие. $\square$