Материали по Алгебра

Пространството от линейните функции. Дуални пространства

Пространство от линейните функции

Нека $f(x) = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n$ е линейна функция на n неизвестни с коефициенти от полето F и $a = (a_1,\ldots,a_n)$ е произволен n-мерен вектор от F^n. Може да бъде пресметната стойността на тази линейна функция $f(x)$, когато стойностите на неизвестните са равни на координатите на вектора a, и се получава $f(a) = c_1a_1 + \ldots + c_na_n$.

За произволни n-мерни вектори $a = (a_1,\ldots,a_n)$ и $b = (b_1,\ldots,b_n)$ е изпълнено равенството:

$$f(a + b) = c_1(a_1 + b_1) + \ldots + c_n(a_n + b_n) = \tag{1}$$

$$= (c_1a_1 + \ldots + c_na_n) + (c_1b_1 + \ldots + c_nb_n) = f(a) + f(b)$$

Също и за произволен скалар $\mu \in F$ е изпълнено, че $f(\mu a) = c_1(\mu a_1) + \ldots + c_n(\mu a_n) = \mu(c_1a_1 + \ldots + c_na_n) = \mu f(a)$. (2)

Наличието на точно тези две свойства ни дава право да наричаме тази функция линейна функция. В общия случай определението за линейна функция е следното:

Определение: 1. ***Линейна функция (линеен функционал) на линейното пространство V над полето F се нарича такова изображение $f : V \to F$, което изпълнява свойствата***

$$f(a + b) = f(a) + f(b), \qquad \forall a,b \in V$$

$$f(\lambda a) = \lambda.f(a), \qquad \forall a \in V, \forall \lambda \in F$$

В следващото твърдение се показва, че всички линейни функции на крайномерно линейно пространство V над полето F могат да се представят в известния ни вид $f(x) = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n$.

Твърдение: 1. *Нека V е крайномерно линейното пространство над полето F, което има базис $e_1,\ldots,e_n$ и нека е зададена линейна функция $f : V \to F$. Ако $x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n \in V$, то*

$$f(x) = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n,$$

където коефициентите са $c_1 = f(e_1) \in F,\ldots,c_n = f(e_n) \in F$.

Доказателство: Нека x е произволен вектор от линейното пространство V и този вектор се представя спрямо базиса $e_1,\ldots,e_n$ по следния начин $x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$. Тогава използвайки свойството, че f е линейна функция, получаваме:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(x_1e_1 + \ldots + x_ne_n) = \\
&= f(x_1e_1) + \ldots + f(x_ne_n) = \\
&= x_1f(e_1) + \ldots + x_nf(e_n) = \\
&= c_1x_1 + \ldots + c_ne_n.
\end{aligned}
$$

В това равенство чрез $c_1,\ldots,c_n$ са отбелязани тези стойности от полето F, които приема функцията в базисните вектори, а именно $c_1 = f(e_1),\ldots,c_n = f(e_n)$. ♦

Нека с $L_n(F)$ да бележим множеството от всички линейни функции на n неизвестни, които имат коефициенти от полето F.

$$L_n(F) = \{f(x) = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n \mid c_1,\ldots,c_n \in F\}.$$

Ако $f(x) = c_1x_1+\ldots+c_nx_n$ и $g(x) = d_1x_1+\ldots+d_nx_n$ са две линейни функции, може да се разгледа действието събиране на линейни функции, което е определено по най-стандартния начин:

$$f(x) + g(x) = (c_1 + d_1)x_1 + \ldots + (c_n + d_n)x_n,$$

а също и ако λ е произволен елемент от полето F се определя произведението на линейната функция по този елемент $\lambda.f(x) = \lambda c_1x_1+\ldots+\lambda c_nx_n$. Сумата на линейни функции $f(x) + g(x)$ и произведението на линейна функция със скалар $\lambda.f(x)$ също са линейни функции.

Не е трудно да се установи, че $L_n(F)$ е линейно пространство над полето F относно тези две действия - събиране на линейни функции и умножаване на линейна функция по елемент от полето. Това пространство има размерност n и един негов базис представляват следните линейни функции:

$$g_1(x) = x_1 = 1.x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; g_n(x) = x_n = 0x_1 + \ldots + 0x_{n-1} + 1.x_n$$

Съответствие между подпространствата на F^n и

подпространствата на дуалното му пространство $L_n(F)$

Пространството $L_n(F)$, състоящо се от линейните функции на n променливи с коефициенти от полето F **се нарича дуално** пространство на n мерното векторно пространство F^n и този факт се бележи с $L_n(F) = (F^n)^*$.

Има едно най-естествено еднозначно съответствие между всички подпространства на F^n и всички подпространства на дуалното му пространство $L_n(F)$, съответствие описващо връзката между хомогенните системи и подпространството от решенията им.

Нека M е подпространство на пространството от линейните функции $L_n(F)$ със M^0 ще бележим множеството от всички n-мерни вектори, които са решения на хомогенните уравнения $f(x) = 0$ за всяка функция $f(x) \in M$, т.е. множеството от нулиращите вектори за всички функции от M и M^0 ще наричаме анулиращо подпространство (**или анулатор).**

$$M^0 = \{a \in F^n \mid f(a) = 0, \forall f(x) \in M\} \subset F^n$$

Нека линейните функции $f_1(x),\dots,f_k(x)$ образуват базис на подпространството $M \subset L_n(F)$. За да намерим пространството от векторите, нулиращи тези функции е достатъчно да се реши съответната хомогенната система, получена от тези линейни функции.

$$U: \left| \begin{array}{lcl} f_1(x) = c_{11}.x_1 + \ldots + c_{1n}.x_n & = & 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ f_k(x) = c_{k1}.x_1 + \ldots + c_{kn}.x_n & = & 0 \end{array} \right.$$

Нека да бележим с U решението на тази система. Известно ни е, че множеството от решения U е подпространство на F^n, което има размерност равна на $\dim U = n - k$, където k е броят на линейните функции в базиса на $M \subset L_n(F)$.
Освен това, ако един вектор $a \in U$ е решение на хомогенните уравнения $f_1(x) = 0,\dots,f_k(x) = 0$, то тогава този вектор е решение на произволна линейна комбинация от тези уравнения $\mu_1 f_1(x)+\dots+\mu_k f_k(x) = 0$, следователно е решение на всяко хомогенно уравнение от линейната обвивка на тези функции, т.е. a е нулиращ вектор за всички линейни функции от пространството $M = \grave{}(f_1(x),\dots,f_k(x))$.

По този начин се установява, че $M^0 = U$, т.е. нулиращото подпространство M^0 е точно подпространството U от решение на хомогенната система, с уравнения съставени от базис на подпространството M и е изпълнено: $\dim M^0 = n - \dim M$.

Пример $\{0x_1+\dots+0x_n\}^0 = F^n$, защото всички вектори са решение на нулевото уравнение.

Пример Да се определи анулатора M^0 от нулиращи вектори за пространството $M = \grave{}(x_1 + \dots + x_n)$. Разглежда се линейната система, съставена от единственото уравнение $x_1 + \dots + x_n = 0$. Лесно се вижда, че всеки вектор от вида $a_1 = (1,-1,0,\dots,0), a_2 = (0,1,-1,0,\dots,0),\dots,a_{n-1} = (0,\dots,0,1,-1)$

е решение на това уравнение. Тези $n-$мерни вектори са линейно независими и пораждат подпространство с размерност $n - 1$, колкото е и размерността на търсеното подпространство от нулиращи вектори. Следователно $M^0 = (\grave{}(x_1 + \dots + x_n))^0 = \grave{}(a_1,\dots,a_{n-1})$.

Аналогично може да се постъпи, ако U е подпространство на F^n. Тогава пространството от нулиращи функции за векторите от U се бележи с U^0 и съдържа точно тези линейни функции, за които всеки вектор от U е решение на съответното им хомогенно уравнение:

$$U^0 = \{f(x) \in L_n(f) \mid f(a) = 0, \forall a \in U\}.$$

Знаем, че съществува хомогенна линейна система, която има за решение подпространството U, също е известно и, че рангът на матрицата на тази система е точно $n - \dim U$. Това означава, че пространството от нулиращи функции U^0 може да се намери, като се вземе линейната обвивка на уравненията на тази система ще получим че $\dim U^0 = n - \dim U$.
Пример $\{\vartheta\}^0 = L_n(F)$, защото нулевият вектор е решение на всяко хомогенно линейно уравнение.

Пример Да се определи пространството от нулиращи функции за подпространството $U = \grave{}(1,\dots,1)$. Едно типично линейно уравнение може да се запише във вида $c_1x_1 + \dots + c_nx_n = 0$. Записваме условието, че вектора $(1,\dots,1)$ е решение на това уравнение и получаваме следната зависимост за коефициентите на уравнението

$$c_1.1 + \dots + c_n.1 = 0.$$

Линейно независимите решения на тази зависимост ни дават коефициентите на уравненията на една система, която има за решение вектора $(1,\dots,1)$. По този начин се получава системата:

$$\left| \begin{array}{l} f_1(x) = x_1 - x_2 = 0 \\ f_2(x) = x_2 - x_3 = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_{n-1} = x_{n-1} - x_n = 0 \end{array} \right.$$

Всяко уравнение, което е линейна комбинация на уравненията от тази система $\lambda_1 f_1(x) + \dots + \lambda_{n-1} f_{n-1}(x) = 0$

също има решение $(1,\dots,1)$.

Линейните функции $f_1,\dots,f_{n-1}$ са линейно независими и пораждат подпространството с размерност $n-1$ и всички функции от това подпространство са нулиращи функции за вектора $(1,\dots,1)$. Тези функции са нулиращи също и за всички вектори от линейната обвивка $U = \ell(1,\dots,1)$. Следователно $U^0 = (\ell(1,\dots,1))^0 = \ell(f_1,\dots,f_{n-1})$.

Изпълнени са следните свойства:

- Ако $T \subset M$ са подпространства на $L_n(F)$, тогава $T^0 \supset M^0$
- Ако $U \subset W$ са подпространства на F^n, тогава $U^0 \supset W^0$
- $(U + W)^0 = U^0 \cap W^0$, където U,W са подпространства на F^n
- $(T + M)^0 = T^0 \cap M^0$, където T,M са подпространства на $L_n(F)$
- $(U \cap W)^0 = U^0 + W^0$, където U,W са подпространства на F^n - $(T \cap M)^0 = T^0 + M^0$, където T,M са подпространства на $L_n(F)$ - Ако T е подпространство на $L_n(F)$, тогава $(T^0)^0 = T$. - Ако U е подпространство на F^n, тогава $(U^0)^0 = U$.

Дуалното пространство на $L_n(F)$ е n- мерното векторно пространство F^n

Нека $c = (c_1,\dots,c_n)$ е произволен n-мерен вектор от пространството F^n. Накратко чрез $f_c(x)$ ще записваме линейната функция, за която коефициентите пред неизвестните са точно координатите на вектора c, а именно $f_c(x) = c_1x_1 + \dots + c_nx_n$.

Тогава, при зададен вектор $a = (a_1,\dots,a_n)$ може да се пресметне стойността $f_c(a) = c_1a_1 + \dots + c_na_n \in F$, която е елемент от полето F. По този начин се получава едно изображение

$$\phi_a(f_c(x)) = f_c(a) = c_1a_1 + \dots + c_na_n,$$

което на всяка линейна функция задава скалар който представлява стойността на функцията, когато се заменят неизвестните с координатите на вектора a.

За изображението ϕ_a е изпълнено:

$$\begin{aligned} \phi_a(f_c(x)) + \phi_a(f_d(x)) &= f_c(a) + f_d(a) = \\ &= (c_1a_1 + \dots + c_na_n) + (d_1a_1 + \dots + d_na_n) = \\ &= (c_1 + d_1)a_1 + \dots + (c_n + d_n)a_n = f_{c+d}(a) = \\ &= \phi_a(f_{c+d}(x)) = \phi_a(f_c(x) + f_d(x)). \end{aligned} \quad (3)$$

Аналогично е изпълнено и $\phi_a(\lambda f_c(x)) = \lambda(c_1a_1 + \dots + c_na_n) = \lambda\phi_a(f_c(x))$ (4)

По този начин се получава, че $\phi_a(f_c(x))$ изпълнява определение (1) за линеен функционал за пространството от линейните функции $L_n(F)$. По този начин за произволен вектор a може да получим по един линеен функционал: $\phi_a : L_n(F) \to F$

Нека $\psi : L_n(F) \to F$ е произволен линеен функционал и нека

$$g_1(x) = x_1 = 1.x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; g_n(x) = x_n = 0x_1 + \ldots + 0x_{n-1} + 1.x_n$$

е стандартния базис на $L_n(F)$. Тогава за произволна линейна функция $f_c(x) = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n = c_1g_1(x) + \ldots + c_ng_n(x)$ е изпълнено:

$$\begin{aligned} \psi(f_c(x)) = \quad & \psi(c_1g_1(x) + \ldots + c_ng_n(x)) = \\ = \quad & c_1\psi(g_1(x)) + \ldots + c_n\psi(g_n(x)) = \\ = \quad & c_1b_1 + \ldots + c_nb_n \\ = \quad & f_c(b) = \phi_b(f_c(x)). \end{aligned}$$

В това равенство с вектора $b = (b_1,\ldots,b_n)$ сме белязали вектора, получен от стойностите, които се получават от базисните функции под действие на функционала ψ:

$$b_1 = \psi(g_1(x)),\ldots,b_n = \psi(g_n(x)).$$

Следователно този линеен функционал $\psi : L_n(F) \to F$ може да се получи като се вземат стойностите на функциите, когато неизвестните се заместят с координатите на вектора $b = (b_1,\ldots,b_n)$.

Поради тази причина се получава, че всички линейни функционали на пространството $L_n(F)$ се описват от $n-$мерните вектори и затова можем да напишем $(L_n(F))^* = F^n$.

Външно произведение (*inner product*) на вектори от F^n

Нека $c = (c_1,\ldots,c_n)$ е произволен n-мерен вектор от пространството F^n. Чрез $f_c(x) = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n$ ще записваме линейната функция, която има за коефициенти координатите на вектора c. Изпълнено е:

$$\begin{aligned} f_c(x) + f_d(x) \quad = \quad & (c_1x_1 + \ldots + c_nx_n) + (d_1x_1 + \ldots + d_nx_n) = \\ = \quad & (c_1 + d_1)x_1 + \ldots + (c_n + d_n)x_n = , f_{c+d}(x), \text{ където } d = \\ = \quad & (d_1,\ldots,d_n) \in F^n \end{aligned}$$

също и $\lambda f_c(x) = \lambda(c_1x_1 + \ldots + c_nx_n) = (\lambda c_1)x_1 + \ldots + (\lambda c_n)x_n = f_{\lambda c}(x)$,за $\lambda \in F$.

Определение: 2. *Външно произведение (inner product) на векторите $a,b \in F^n$ се бележи чрез $< a,c >$ и е равно на израза $< a,c >= a_1c_1 +$ $\ldots + a_nc_n$.*

Изразът $< a,c >= c_1a_1 + \ldots + c_na_n$ може да бъде получен по два начина:

- *Първи начин:* ако в уравнението $f_c(x) = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n$ се замести с вектора $a = (a_1,\ldots,a_n)$, тогава се получава $< a,c >= c_1a_1 +$ $\ldots + c_na_n = f_c(a)$;
- *Втори начин:* ако в уравнението $f_a(x) = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$ се замести с вектора $c = (c_1,\ldots,c_n)$ пак се получава същия израз $< a,c >= a_1c_1 + \ldots + a_nc_n = f_a(c)$.

Лесно се вижда, че това изображение $< a,c >$ е линейно по всеки от двата си аргумента (т.е. се билинейно), защото

$< a+b, c > = f_c(a+b) = f_c(a) + f_c(b) = < a, c > + < b, c >$; $< \mu a, c > = f_c(\mu a) = \mu f_c(a) = \mu < a, c >$;

$< a, c+d > = f_{c+d}(a) = f_c(a) + f_d(a) = < a, c > + < a, d >$;

$< a, \lambda c > = f_{(\lambda c)}(a) = \lambda f_c(a) = \lambda < a, c >$;

$< a, c > = f_c(a) = f_a(c) = < c, a >$. Наличието на тези свойства отбелязваме, че това изображение е билинейно и симитрично.

Тогава нулиращото пространство (U^0) много често се бележи с $U^\perp$ и се определя по следния начин

$U^\perp = \{x \in F^n \mid < x, a > = 0, \forall a \in U\}$ Подпространството $U^\perp$ често се нарича допълнение на подпространството U. В сила са свойствата :

$(U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$

$(U \cap W)^\perp = U^\perp + W^\perp$

$(U^\perp)^\perp = U$.

Полилинейна и антисиметрична функция

1. Линейна функция и полилинейна функция

Дефиниция 3.1. *Нека V е линейно пространство над поле F. Казваме, че изображението $f : V \longrightarrow F$ е линейна функция, ако при всеки избор на* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ *и* $\alpha, \beta \in F$ *е в сила равенството* $f(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \alpha f(\mathbf{x}) + \beta f(\mathbf{y})$.

Линейните функции имат следните свойства:

а) Ако с $\mathbf{0}$ е отбелязан нулевия вектор от пространството V, тогава е изпълнено $f(\mathbf{0}) = 0$ (следва от $f(\mathbf{0}) = f(0.\mathbf{0}) = 0.f(\mathbf{0}) = 0$). б) Ако $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ е базис на V, то

$f(\alpha_1\mathbf{e}_1 + \dots + \alpha_n\mathbf{e}_n) = \alpha_1 f(\mathbf{e}_1) + \dots + \alpha_n f(\mathbf{e}_n)$. Дефиниция 3.2. *Казваме, че функцията на k променливи*

$$\varphi : \underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_{k} \longrightarrow F$$

е полилинейна, ако тя е линейна по всеки един от аргументите си. С други думи: за всяко $i = 1, \dots, k$ е изпълнено

$$\phi(\mathbf{a}_1, \dots, \alpha\mathbf{a}'_i + \beta\mathbf{a}''_i, \dots, \mathbf{a}_n) = \alpha\phi(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}'_i, \dots, \mathbf{a}_n) + \beta\phi(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}''_i, \dots, \mathbf{a}_n).$$

Следствие 3.3. *Нека ϕ е полилинейна функция на k аргумента,* $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ *е базис на V, а* $\mathbf{a}_i = \alpha_{i1}\mathbf{e}_1 + \dots + \alpha_{in}\mathbf{e}_n$ *за $i = 1, \dots, k$. Тогава*

$$\varphi(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k) = \sum_{j_1=1}^{n}\sum_{j_2=1}^{n}\cdots\sum_{j_k=1}^{n} \alpha_{1j_1}\alpha_{2j_2}\dots\alpha_{kj_k}\varphi(\mathbf{e}_{j_1}, \mathbf{e}_{j_2}, \dots, \mathbf{e}_{j_k}).$$

Доказателство. Прилагаме линейността по всички аргументи:

$$\varphi(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k) = \varphi(\sum_{j_1=1}^{n}\alpha_{1j_1}\mathbf{e}_{j_1}, \sum_{j_2=1}^{n}\alpha_{2j_2}\mathbf{e}_{j_2}, \dots, \sum_{j_k=1}^{n}\alpha_{1j_k}\mathbf{e}_{j_k}) =$$

$$= \sum_{j_1=1}^{n}\alpha_{1j_1}\varphi(e_{j_1}, \sum_{j_2=1}^{n}\alpha_{1j_2}\mathbf{e}_{j_2}, \dots, \sum_{j_k=1}^{n}\alpha_{1j_k}\mathbf{e}_{j_k}) = \cdots =$$

$$= \sum_{j_1=1}^{n}\sum_{j_2=1}^{n}\cdots\sum_{j_k=1}^{n}\alpha_{1j_1}\alpha_{2j_2}\dots\alpha_{kj_k}\varphi(\mathbf{e}_{j_1}, \mathbf{e}_{j_2}, \dots, \mathbf{e}_{j_k}).$$

2. Антисиметрична функция

Дефиниция 3.4. *Нека V е линейно пространство над поле F. Казваме, че функцията на k аргумента ϕ : $V\times V\times\cdots\times V \longrightarrow F$ е антисиметрична, ако за всяка двойка индекси i,j от $1,\dots,k$ е изпълнено:*

$$\phi(\mathbf{a}_1,\dots,\underset{\substack{\uparrow\\ i}}{\mathbf{a}_i},\dots,\underset{\substack{\uparrow\\ j}}{\mathbf{a}_j},\dots,\mathbf{a}_k) = -\phi(\mathbf{a}_1,\dots,\underset{\substack{\uparrow\\ i}}{\mathbf{a}_j},\dots,\underset{\substack{\uparrow\\ j}}{\mathbf{a}_i},\dots,\mathbf{a}_k).$$

Ясно е, че една функция е антисиметрична, когато тя си сменя знака при смяна местата на два от аргументите.

Твърдение 3.5. *Нека ϕ е антисиметрична функция. Ако два от аргументите на ϕ са равни, то ϕ се анулира.*

Доказателство. Да разгледаме $\phi(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_k)$, където $\mathbf{a}_i = \mathbf{a}_j = \mathbf{b}$. Тогава $\phi(\mathbf{a}_1,\dots,\underset{\substack{\uparrow\\ i}}{\mathbf{b}},\dots,\underset{\substack{\uparrow\\ j}}{\mathbf{b}},\dots,\mathbf{a}_k) = \phi(\mathbf{a}_1,\dots,\underset{\substack{\uparrow\\ i}}{\mathbf{a}_i},\dots,\underset{\substack{\uparrow\\ j}}{\mathbf{a}_j},\dots,\mathbf{a}_k) =$

$$= -\varphi(\mathbf{a}_1,\dots,\underset{\substack{\uparrow\\ i}}{\mathbf{a}_j},\dots,\underset{\substack{\uparrow\\ j}}{\mathbf{a}_i},\dots,\mathbf{a}_k) = -\varphi(\mathbf{a}_1,\dots,\underset{\substack{\uparrow\\ i}}{\mathbf{b}},\dots,\underset{\substack{\uparrow\\ j}}{\mathbf{b}},\dots,\mathbf{a}_k).$$

Тогава

$$2\varphi(\mathbf{a}_1,\dots,\underset{\substack{\uparrow\\ i}}{\mathbf{b}},\dots,\underset{\substack{\uparrow\\ j}}{\mathbf{b}},\dots,\mathbf{a}_k) = 0$$

и следователно

$$\varphi(\mathbf{a}_1,\dots,\underset{\substack{\uparrow\\ i}}{\mathbf{b}},\dots,\underset{\substack{\uparrow\\ j}}{\mathbf{b}},\dots,\mathbf{a}_k) = 0.$$

Твърдение 3.6. *Нека ϕ е полинейна функция. Тогава, ако ϕ се анулира винаги, когато два от аргументите и´ са равни, то ϕ е антисиметрична.*

Доказателство.

$$0 = \varphi(\mathbf{a}_1,\dots,\underset{\substack{\uparrow\\ i}}{\mathbf{a}_i+\mathbf{a}_j},\dots,\underset{\substack{\uparrow\\ j}}{\mathbf{a}_i+\mathbf{a}_j},\dots,\mathbf{a}_k) =$$

$$= \phi(\mathbf{a}_1,\dots,\underset{\substack{\uparrow\\ i}}{\mathbf{a}_i},\dots,\underset{\substack{\uparrow\\ j}}{\mathbf{a}_j},\dots,\mathbf{a}_k) + \phi(\mathbf{a}_1,\dots,\underset{\substack{\uparrow\\ i}}{\mathbf{a}_j},\dots,\underset{\substack{\uparrow\\ j}}{\mathbf{a}_j},\dots,\mathbf{a}_k) +$$

$$+\phi(\mathbf{a}_1,\dots,\underset{\substack{\uparrow\\ i}}{\mathbf{a}_j},\dots,\underset{\substack{\uparrow\\ j}}{\mathbf{a}_i},\dots,\mathbf{a}_k) + \phi(\mathbf{a}_1,\dots,\underset{\substack{\uparrow\\ i}}{\mathbf{a}_i},\dots,\underset{\substack{\uparrow\\ j}}{\mathbf{a}_i},\dots,\mathbf{a}_k) =$$

$$= \phi(\mathbf{a}_1,\dots,\underset{\substack{\uparrow\\ i}}{\mathbf{a}_j},\dots,\underset{\substack{\uparrow\\ j}}{\mathbf{a}_i},\dots,\mathbf{a}_k) + \phi(\mathbf{a}_1,\dots,\underset{\substack{\uparrow\\ i}}{\mathbf{a}_i},\dots,\underset{\substack{\uparrow\\ j}}{\mathbf{a}_j},\dots,\mathbf{a}_k)$$

Следователно $\phi(\mathbf{a}_1,\dots,\underset{\substack{\uparrow\\ i}}{\mathbf{a}_i},\dots,\underset{\substack{\uparrow\\ j}}{\mathbf{a}_j},\dots,\mathbf{a}_k) = -\phi(\mathbf{a}_1,\dots,\underset{\substack{\uparrow\\ i}}{\mathbf{a}_j},\dots,\underset{\substack{\uparrow\\ j}}{\mathbf{a}_i},\dots,\mathbf{a}_k)$.

Следствие 3.7. *Нека V е n-мерно линейно пространство с базис $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n$ и ϕ е полилинейна и антисиметрична функция на n аргумента. Ако $\mathbf{a}_i = \alpha_{i1}\mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha_{in}\mathbf{e}_n$ за $i = 1,\dots,n$, тогава* $\phi(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n) = \sum_{j_1,\dots,j_n\in S_n} \alpha_{1j_1}\alpha_{2j_2}\dots\alpha_{nj_n}\phi(\mathbf{e}_{j_1},\mathbf{e}_{j_2},\dots,\mathbf{e}_{j_n})$.

където S_n е множеството на всички пермутации на числата $1,\dots,n$.

Доказателство. Функцията ϕ е полилинейна и за нея прилагаме следствие 3.3 и получаваме

$$\varphi(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n) = \sum_{j_1=1}^{n}\sum_{j_2=1}^{n}\cdots\sum_{j_n=1}^{n}\alpha_{1j_1}\alpha_{2j_2}\dots\alpha_{nj_n}\varphi(\mathbf{e}_{j_1},\mathbf{e}_{j_2},\dots,\mathbf{e}_{j_n}).$$

Ако за някое събираемо е изпълнено, че $j_s = j_t$, когато $s \neq t$, то тогава $\phi(\mathbf{e}_{j_1},\mathbf{e}_{j_2},\dots\mathbf{e}_{j_n})$ има два равни аргумента и приема стойност 0. Следователно ненулеви са само събираемите, за които $j_1,j_2,\dots,j_n$ са различни числа, т.е. когато са пермутация на числата $1,\dots,n$. От това получаваме

$$\phi(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n) = \sum_{j_1,\dots,j_n \in S_n} \alpha_{1j_1}\alpha_{2j_2}\dots\alpha_{nj_n}\phi(\mathbf{e}_{j_1},\mathbf{e}_{j_2},\dots,\mathbf{e}_{j_n}).$$

3. Инверсии в пермутация и антисиметрична функция

Дефиниция 3.8. ***Нека $i_1,i_2,\dots,i_k$ е пермутация на числата $1,2,\dots,k$. Казваме, че числата i_p и i_q от пермутацията са в инверсия когато $i_p - i_q$ и $p-q$ са числа с различни знаци, т.е. когато по-голямо число стои по-напред в пермутацията от по-малко число. Броят на инверсиите в пермутацията $i_1,i_2,\dots,i_k$ ще бележим с $[i_1,i_2,\dots,i_k]$.***

Дефиниция 3.9. ***Пермутацията $i_1,i_2,\dots,i_k$ на числата $1,2,\dots,k$ се нарича четна, ако броят на инверсиите $[i_1,i_2,\dots,i_k]$ е четно число. Ако броят на инверсиите е нечетно число, тогава пермутацията се нарича нечетна.***

Пермутациите имат следните свойства:

Свойство 1: Пермутацията $1,2,\dots,n$ е четна.

Свойство 2: Ако разменим местата на два съседни елемента в една пермутация, то тя си сменя четността.

Свойство 3: Ако разменим местата на два произволни елемента в една пермутация, то тя си променя четността.

Свойство 4: Когато n>1 половината от всички пермутации са четни и половината са нечетни.

Теорема 3.10. *Нека ϕ е антисиметрична функция на k аргумента и $i_1,i_2,\dots,i_k$ е пермутация на числата $1,2,\dots,k$. Тогава*

$$\phi(\mathbf{a}_{i_1},\mathbf{a}_{i_2},\dots,\mathbf{a}_{i_k}) = (-1)^{[i_1,i_2,\dots,i_k]}.\phi(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\dots,\mathbf{a}_k).$$

Доказателство. Ще докажем твърдението с индукция по k.
При $k = 1$ твърдението е тривиално.
Нека твърдението е в сила за произволна функция на $k-1$ аргумента и да разгледаме $i_1,i_2,\dots,i_k$ пермутация на числата $1,2,\dots,k$.

- Ако числото k е на последно място, т.е. $i_k = k$, тогава k не учавства в инверсия и пермутаците $i_1,i_2,\dots,i_{k-1}$ и $i_1,i_2,\dots,i_{k-1},k$ имат по равен брой инверсии. От индукционното предположение се получава:

$$\phi(\mathbf{a}_{i_1},\mathbf{a}_{i_2},\dots,\mathbf{a}_{i_{k-1}},\mathbf{a}_k) = (-1)^{[i_1,i_2,\dots,i_{k-1}]}.\phi(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\dots,\mathbf{a}_{k-1},\mathbf{a}_k).$$

- Ако числото k не е на последно място, а е на j-то място, т.е. $i_j = k$ и $j < k$, тогава$\{i_1,\dots,i_{j-1},i_{j+1},\dots,i_k\} = \{1,\dots,k-1\}$. В тази пермутация числото k е в инверсия с всички $k-j$ елемента $\{i_{j+1},\dots,i_k\}$, записани след него. Следователно е изпълнено

$$[i_1,\dots,i_{j-1},k,i_{j+1},\dots,i_k] = [i_1,\dots,i_{j-1},i_{j+1},\dots,i_k] + (k-j).$$

Тогава, за антисиметричната функция ϕ е изпълнено

$$\phi(\mathbf{a}_{i_1},\dots,\mathbf{a}_{i_{j-1}},\mathbf{a}_k,\mathbf{a}_{i_{j+1}},\dots,\mathbf{a}_{i_k}) = = (-1).\phi(\mathbf{a}_{i_1},\dots,\mathbf{a}_{i_{j-1}},\mathbf{a}_{i_{j+1}},\mathbf{a}_k,\mathbf{a}_{i_{j+2}},\dots,\mathbf{a}_{i_k}) = \dots = =$$

$$(-1)^{k-j}\phi(\mathbf{a}_{i_1},\dots,\mathbf{a}_{i_{j-1}},\mathbf{a}_{i_{j+1}},\mathbf{a}_{i_{j+2}},\dots,\mathbf{a}_{i_k},\mathbf{a}_k).$$

От вече доказаното, за пермутация с последен елемент k получаваме

$$\phi(\mathbf{a}_{i_1},\dots,\mathbf{a}_{i_{j-1}},\mathbf{a}_k,\mathbf{a}_{i_{j+1}},\dots,\mathbf{a}_{i_k}) =$$

$$= (-1)^{k-j}.(-1)^{[i_1,\dots,i_{j-1},i_{j+1},\dots,i_k]}.\phi(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\dots,\mathbf{a}_k) =$$

$$= (-1)^{[i_1,\dots,i_k]}.\phi(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\dots,\mathbf{a}_k).$$

Следствие 3.11. *Нека V е n-мерно линейно пространство с базис $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n$ и ϕ е полилинейна и антисиметрична функция на n аргумента. Ако*

$$\mathbf{a}_i = \alpha_{i1}\mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha_{in}\mathbf{e}_n \qquad \text{за } i = 1,\dots,n,$$

то тогава $\phi(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n) = \phi(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\dots,\mathbf{e}_n) \cdot \sum_{j_1,\dots,j_n \in S_n} (-1)^{[j_1,\dots,j_n]}\alpha_{1j_1}\alpha_{2j_2}\dots\alpha_{nj_n}$,

където S_n е множеството на всички пермутации на числата $1,\dots,n$.

Доказателство. Функцията ϕ е полилинейна и антисиметрична и за нея прилагаме следствие 3.7 и получаваме $\phi(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n) = \sum_{j_1,\dots,j_n \in S_n} \alpha_{1j_1}\alpha_{2j_2}\dots\alpha_{nj_n}\phi(\mathbf{e}_{j_1},\mathbf{e}_{j_2},\dots,\mathbf{e}_{j_n})$.

За $\phi(\mathbf{e}_{j_1},\mathbf{e}_{j_2},\dots,\mathbf{e}_{j_n})$ прилагаме теорема 3.10 и получаваме $\phi(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n) = \sum_{j_1,\dots,j_n \in S_n} \alpha_{1j_1}\alpha_{2j_2}\dots\alpha_{nj_n} \cdot (-1)^{[j_1,\dots,j_n]}\phi(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\dots,\mathbf{e}_n) =$

$$= \phi(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\dots,\mathbf{e}_n) \cdot \sum_{j_1,\dots,j_n \in S_n} (-1)^{[j_1,\dots,j_n]}\alpha_{1j_1}\alpha_{2j_2}\dots\alpha_{nj_n}.$$

Опр./ Детерминанта на кв. матр. $A_{n\times n}$ е полилинейна и антисиметрична ф-я на редовете на матрицата, която за E дава стойност 1.

$\det: \underbrace{F^n \times \dots \times F^n}_{n} \to F \qquad \det(E) = \det(e_1, \dots e_n) = 1$

$$\det A = \det(a_1, \dots, a_n) = |A| = \sum_{\substack{j_1 \dots j_n \\ \text{перм. на } 1, \dots n}} (-1)^{[j_1 \dots j_n]} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$$

Т/ Съществува единствена ф-я детерминанта

Д-во/ Ако допуснем, че $\varphi_1, \varphi_2 : \underbrace{F^n \times \dots \times F^n}_{n} \to F$

φ_1, φ_2 полилинейни антисимет. нормирани $\quad a_1, \dots a_n \in F^n$

$$\Rightarrow \varphi_1 = \sum_{j_1 \dots j_n} (-1)^{[j_1 \dots j_n]} a_{1j_1} \dots a_{nj_n} = \varphi_2(a_1, \dots, a_n)$$

$\Rightarrow \varphi_1 = \varphi_2 \Rightarrow$ единственост

Нека $f = \sum_{j_1 \dots j_n \in S_n} (-1)^{[j_1 \dots j_n]} a_{1j_1} \dots a_{nj_n} \qquad e_1 \dots e_n, \; e_{ii} = 1, \; e_{ij} = 0$ за $i \neq j$

$[12 \dots n]$

$f(e_1 \dots e_n) = \dots = (-1) e_{11} e_{22} \dots e_{nn} = 1 \Rightarrow f$ нормирана

$a_s = a_s' + a_s'' \; \cancel{\in F^n} = (a_{s1}' + a_{s1}'', \dots, a_{sn}' + a_{sn}'')$

$$f(a_1, \dots, a_s' + a_s'', \dots, a_n) = \sum_{j_1 \dots j_n \in S_n} (-1)^{[j_1 \dots j_n]} a_{1j_1} \dots (a_{sj_1}' + a_{sj_2}'') \dots a_{nj_n}$$

$$= \sum (-1)^{[j_1 \dots j_n]} (a_{1j_1} \dots a_{sj_s}' \dots a_{nj_n} + a_{1j_1} \dots a_{sj_s}'' \dots a_{nj_n}) =$$

$$= \sum (-1)^{[j_1 \dots j_n]} a_{1j_1} \dots a_{sj_s}' \dots a_{nj_n} + \sum (-1)^{[j_1 \dots j_n]} a_{1j_1} \dots a_{sj_s}'' \dots a_{nj_n}$$

$$= f(a_1, \dots, a_s', \dots, a_n) + f(a_1, \dots, a_s'', \dots, a_n)$$

$$f(a_1, \dots, \lambda a_s, \dots, a_n) = \sum_{j_1 \dots j_n} a_{1j_1} \dots \lambda a_{sj_s} \dots a_{nj_n} = \lambda \sum \dots$$

~~полилинейност~~ $= \lambda f(a_1, \dots, a_s, \dots a_n)$

антисиметричност

Нека $s, t \in \{1, \dots, n\}, s \neq t, \quad a_s = a_t = b$

$$f(a_1, \dots, \underset{b}{\underset{\parallel}{a_s}}, \dots \underset{b}{\underset{\parallel}{a_t}}, \dots a_n) = \sum_{j_1 \dots j_n} (-1)^{[j_1 \dots j_n]} a_{1j_1} \dots \underset{b_{js}}{\underset{\parallel}{a_{sj_s}}} \dots \underset{b_{jt}}{\underset{\parallel}{a_{tj_t}}} \dots a_{nj_n}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} j_1 \dots j_s \dots j_t \dots j_n \to a_{1j_1} \dots \underline{b_{js}} \dots b_{jt} \dots a_{nj_n} \\ j_1 \dots j_t \dots j_s \dots j_n \to a_{1j_1} \dots b_{jt} \dots b_{js} \dots a_{nj_n} \end{array} \right.$$

стойности съвпдат но имат разл. знак в $\sum$

елем. се групират по 2-ки

сума на елем. във $\forall$ двойка е $= 0$

$$\Rightarrow f(a_1, \dots, \underset{b}{\underset{\parallel}{a_s}} \dots \underset{b}{\underset{\parallel}{a_t}} \dots a_n) = 0 \Rightarrow \text{антисиметрична}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 \dots j_n \in S_n} (-1)^{[j_1 \dots j_n]} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$$

$n!$ събираеми // $\frac{n!}{2}$ знак. $+$; $\frac{n!}{2}$ „ $-$"

$a_{1j_1} \dots a_{nj_n}$ по един множ. от всеки ред

по един множ. от всеки стълб.

Т// $\det A = 0 \iff$ редовете на матрицата са линейно зависими

1) Нека редов. са ЛЗ $\Rightarrow \exists a_k \in \ell(a_1, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, \dots, a_n)$

Нека $a_n \in \ell(a_1, \dots, a_{n-1}) \Rightarrow a_n = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_{n-1} a_{n-1}$

$$\left.\begin{aligned} &\det(a_1, \dots, a_{n-1}, \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_{n-1} a_{n-1}) = \\ &= \lambda_1 \det(a_1, \dots, a_{n-1}, a_1) + \\ &+ \dots \\ &\lambda_{n-1} \det(a_1, \dots, a_{n-1}, a_{n-1}) \end{aligned}\right\} = 0$$

2) $a_1, \dots, a_n$ са ЛНЗ образуват базис

$e_1, \dots, e_n$ $\quad e_k = \cancel{\alpha_1} a_1 + \dots + \alpha_n a_n$

$$\underbrace{\det(e_1, \dots, e_n)}_{=1} = \underbrace{\left(\sum_{i_1 \dots i_n} (-1)^{[i_1 \dots i_n]} \alpha_{1 i_1} \dots \alpha_{n i_n}\right)}_{=t} \det(a_1 \dots a_n)$$

$$1 = t \det(a_1 \dots a_n) \Rightarrow \det(a_1 \dots a_n) \neq 0$$

Св-ва /

1) Ако ред на det е $\theta \Rightarrow \det = 0$

2) Ако разменим местата на два реда $\Rightarrow$ det сменя знак

3) Ако има два равни реда $\Rightarrow \det = 0$

4) Ако умножим ред по число $\Rightarrow \det = \lambda \cdot$ предиш

$A_{3\times 3}$ $\quad \det 3A = 27 \det A$

5) Ако има два пропорционални реда $\det = 0$

6) $a_s = a_s' + a_s''$

$$\det(a_1, \dots, a_s' + a_s'', \dots, a_n) = \det(a_1, \dots, a_s', \dots, a_n) + \det(a_1, \dots, a_s'', \dots, a_n)$$

Тв

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{22} & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

a_{st}:
- $s = t$ в/у гл. диаг
- $s < t$ над гл. диаг
- $s > t$ отдолу под гл. диаг

$a_{1j_1} \dots a_{nj_n}$ $\quad$ имаме $\exists k\ j_k \neq k, k$

$j_1 \dots j_n \neq 1, \dots, n$ $\quad \Rightarrow$ имаме елем. под гл. диагонал има и елем. над гл. диаг.

$\Rightarrow$ остава $a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$

Т/ При транспониране детерминантата не се променя.

транспонира $a_{ij} \to a_{ji}$

Лема $k_1 \dots k_n$ пермутация, $s_1 \dots s_n$ пермутация $\{1, \dots n\}$

$$\sum_{j_1 \dots j_n \in S_n} (-1)^{[j_1 \dots j_n]} a_{1j_1} \dots a_{nj_n}$$

$a_{k_1 s_1} a_{k_2 s_2} \dots a_{k_n s_n}$ участва в det със знак $(-1)^{[s_1 \dots s_n] + [k_1 \dots k_n]}$ в произв.

$a_{k_i s_i} \leftrightarrow a_{k_j s_j}$

$(-1)^{[s_1 \dots s_n] + [k_1 \dots k_n]}$ смяна $s_i \leftrightarrow s_j$, $k_i \leftrightarrow k_j$

и двете пермутации си сменят четността

$\Rightarrow [s_1, \dots, s_n] + [k_1 \dots k_n]$ не сменя четността си

$\Rightarrow a_{k_1 s_1} \dots a_{k_n s_n} \longleftrightarrow a_{1t_1} \dots a_{nt_n}$ $(-1)^{[t_1 \dots t_n] + [1, \dots n]}$

Пр. $a_{31} a_{45} a_{12} a_{67} a_{54} a_{76} a_{23}$

3 4 1 6 5 7 2
1 5 2 7 4 6 3

$\det A$ $A = (a_{ij})$ $B = A^t$ $b_{ij} = a_{ji}$

$$\det B = \sum_{j_1 \dots j_n} (-1)^{[j_1 \dots j_n]} b_{1j_1} \dots b_{nj_n} = \sum_{j_1 \dots j_n} (-1)^{[j_1 \dots j_n]} a_{j_1,1} \dots a_{j_n,n}$$

$a_{j_1,1} \dots a_{j_n n}$ в $\det A \to (-1)^{[j_1 \dots j_n] + [1, 2 \dots n]}$

участва с еднакъв знак в $\det A$, в $\det A^t$

$\Rightarrow \det A = \det A^t$

Сл/ Всички св-ва на det важат и по стълбове

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\substack{i_1 \dots i_n \\ \text{перм.}}} (-1)^{[i_1 \dots i_n]} a_{1i_1} \cdots a_{ni_n}$$

Лема

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots\ 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = \Delta_{nn} a_{nn}$$

$$\det A = \sum_{i_1 \dots i_n} (-1)^{[i_1 \dots i_n]} a_{1i_1} \cdots a_{ni_n} = \sum_{i_1 \dots i_{n-1}, n} (-1)^{\overbrace{[i_1 \dots i_{n-1}, n]}^{=[i_1 \dots i_{n-1}]}} a_{1i_1} \cdots a_{n-1,i_{n-1}} a_{nn}$$

$i_n = n$, $i_1 \dots i_{n-1}$ перм. на $1, \dots, n-1$

$i_n \neq n$

$a_{ni_n} = 0$

$$= \Big(\underbrace{\sum_{i_1 \dots i_{n-1}} (-1)^{[i_1 \dots i_{n-1}]} a_{1i_1} \cdots a_{n-1,i_{n-1}}}_{\Delta_{nn}} \Big) a_{nn}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \mathrm{I} & & \mathrm{II} & a_{1n} \\ & & a_{ij} & & \\ & \mathrm{III} & & \mathrm{IV} & \\ a_{n1} & & & & a_{nn} \end{vmatrix} \to i, \quad \uparrow j$$

$$\Delta_{ij} = \begin{vmatrix} \mathrm{I} & \mathrm{II} \\ \mathrm{III} & \mathrm{IV} \end{vmatrix} \quad \text{ред } n-1$$

$$\Delta_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ & & \mathrm{I} & & & \mathrm{II} & \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ & & \mathrm{III} & & & \mathrm{IV} & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

n^2

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 7 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 1 & 4 \\ 6 & 2 & 7 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \\ 6 & 7 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

Лема 2

$$\begin{array}{l} \\ i \to \\ \\ \end{array} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \cdots\ 0 & a_{ij} & 0 & \cdots\ 0 \\ a_{n1} & \cdots & & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \boxed{(-1)^{i+j} \Delta_{ij}} a_{ij} = A_{ij} a_{ij}$$

$$= (-1)^{n-i} \begin{vmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{i-1} \\ a_{i+1} \\ \vdots \\ a_n \\ a_i \end{vmatrix} = (-1)^{n-i} (-1)^{n-j} \begin{vmatrix} & & a_{1j} \\ \Delta_{ij} & & \vdots \\ & & a_{i-1,j} \\ & & a_{i+1,j} \\ & & \vdots \\ & & a_{nj} \\ 0 & \cdots\ 0 & a_{ij} \end{vmatrix} = (-1)^{2n-i-j} \Delta_{ij} a_{ij} =$$

$n-j$

размест. стълбове

$$(-1)^{i+j} \Delta_{ij} = A_{ij} \quad \text{адюнгирано количество}$$

T/ $\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}$ (i номер на ред)

$A_{n\times n}$

$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ $\Bigg\}$ $a_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) = \underbrace{(a_{i1}, 0, \dots, 0)}_{b_1} + \underbrace{(0, a_{i2}, 0, \dots, 0)}_{b_2} + \dots + \underbrace{(0,0,\dots 0, a_{in})}_{b_n}$

$a_i = b_1 + b_2 + \dots + b_n$

$$\det A = \det\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ b_1 + \dots + b_n \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ b_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ b_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \dots + \det\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ b_n \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

прилагаме лема 2

$$= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}.$$

Сл/ Нека j - номер на стълб

$$\det A = \det A^t = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}$$

T/ (фалшиво развитие) ②

Нека $A \in M_{n\times n}(F)$ и $i \neq j$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$

Тогава:

$0 = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \dots + a_{in}A_{jn}$ (фалшиво развитие по ред)

$0 = a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \dots + a_{ni}A_{nj}$ (фалшиво разв. по стълб)

Д-во

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ a_{j1} & \dots & a_{jn} \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{j1}A_{j1} + \dots + a_{jn}A_{jn}$$

за тези две det адюнгираните количества на j-тия ред са равни

$$0 = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$ развиваме по ред с №j $= a_{i1}A_{j1} + \dots + a_{in}A_{jn} = 0$

за стълбове е аналогично

Детерминанта на Вандермонд ③

започвайки от последния ред от всеки ред вадим предишния умножен по a_1

$$W(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & \dots & a_n - a_1 \\ \dots \\ 0 & a_2^{n-2} - a_1 a_2^{n-3} & \dots & a_n^{n-2} - a_1 a_n^{n-3} \\ 0 & a_2^{n-1} - a_1 a_2^{n-2} & \dots & a_n^{n-1} - a_1 a_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= 1A_{11} + 0A_{21} + \dots + 0A_{n1} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & \dots & a_n - a_1 \\ a_2(a_2 - a_1) & \dots & a_n(a_n - a_1) \\ \dots \\ a_2^{n-2}(a_2 - a_1) & \dots & a_n^{n-2}(a_n - a_1) \end{vmatrix} = (a_2 - a_1)\dots(a_n - a_1)\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ a_2 & & a_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_2^{n-2} & \dots & a_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$W(a_1, \dots, a_n) = (a_2 - a_1)\dots(a_n - a_1) W(a_2, \dots, a_n) =$$

$$= (a_2 - a_1)\dots(a_n - a_1)(a_3 - a_2)\dots(a_n - a_2) W(a_3, \dots, a_n) =$$

$$= \dots$$

$$= (a_2 - a_1)\dots(a_n - a_1)(a_3 - a_2)\dots(a_n - a_2)\dots(a_n - a_{n-1})\underbrace{W(a_n)}_{=1}$$

$$W(a_1, \dots, a_n) = \prod_{i>j}(a_i - a_j)$$

Формули на Крамер

(4)

$$\left|\begin{array}{l} a_{11}x_1+\dots+a_{1n}x_n=b_1 \;/\, t_1 \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1+\dots+a_{nn}x_n=b_n \;/\, t_n \end{array}\right.$$

Нека матр. A на систем. е неособена ($\det A \neq 0$)

$\det A = \Delta \neq 0$

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\dots+a_{ni}A_{nj}=\begin{cases}\det A, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$$

$$(a_{11}t_1+\dots+a_{n1}t_n)x_1+(a_{12}t_1+\dots+a_{n2}t_n)x_2+\dots+(a_{1n}t_1+\dots+a_{nn}t_n)x_n = b_1t_1+\dots+b_nt_n$$

за $t_1=A_{11};\ t_2=A_{21};\ \dots;\ t_n=A_{n1}$

$$\underbrace{(a_{11}A_{11}+\dots+a_{n1}A_{n1})}_{=\Delta}x_1+\underbrace{(a_{12}A_{11}+\dots+a_{n2}A_{n1})}_{=0}x_2+\dots+\overbrace{(a_{1n}A_{11}+\dots+a_{nn}A_{n1})}^{=0}x_n = b_1A_{11}+\dots+b_nA_{n1}$$

$$\Delta x_1 = b_1A_{11}+\dots+b_nA_{n1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ \vdots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix} = \Delta_1$$

в Δ се заменя първи стълб със стълба от свободни членове

$$\Rightarrow \Delta x_1 = \Delta_1 \Rightarrow x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$$

За да определим x_k, използваме адюнгираните количества на k-ти стълб в $\det A$ (5)

$t_1 = A_{1k}, \dots, t_n = A_{nk}$

$$(a_{11}A_{1k}+\dots+a_{n1}A_{nk})x_1+\dots+(a_{1k}A_{1k}+\dots+a_{nk}A_{nk})x_k+\dots+(a_{1n}A_{1k}+\dots+a_{nn}A_{nk})x_n = b_1A_{1k}+\dots+b_nA_{nk}$$

$$0x_1+\dots+\Delta x_k+\dots+0x_n = \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1,k-1} & b_1 & a_{1,k+1} \dots a_{1n}\\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} \dots a_{n,k-1} & b_n & a_{n,k+1} \dots a_{nn}\end{vmatrix} = \Delta_k$$

$$\Rightarrow \Delta x_k = \Delta_k \Rightarrow \boxed{x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}}$$

Δ_k се получава от Δ, като се замести k-ти стълб със стълба от свободни членове

I/ (Формули на Крамер)

$$(*)\ \left|\begin{array}{l} a_{11}x_1+\dots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \dots\dots \\ a_{n1}x_1+\dots+a_{nn}x_n=b_n \end{array}\right.$$

Когато матрицата на системата (*) има $\Delta = \det A \neq 0$, тогава системата има единствено решение, което се пресмята:

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta};\ x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta},\ \dots\ x_n=\frac{\Delta_n}{\Delta}$$

Връзка между минори на матрица и ранг (6)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ - & - & - \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix}; \quad s \leq \min\{k, n\} \quad \left| \begin{array}{l} \{i_1, .., i_s\} \subset \{1, .., k\} \\ \{j_1 .. j_s\} \subset \{1, .., n\} \end{array} \right.$$

Вземат се общите елементи, които са в пресечните точки на редовете с номера $i_1, .., i_s$ със стълбовете с номера $j_1 .. j_s$

$$M_s = \begin{vmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \cdots & a_{i_1j_s} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \cdots & a_{i_2j_s} \\ - & - & - & - \\ a_{i_sj_1} & a_{i_sj_2} & \cdots & a_{i_sj_s} \end{vmatrix} \quad \text{минор от ред } \underline{s}$$

За матрицата $A_{k\times n}$ има $\binom{k}{s}$ начина да се изберат $\underline{s}$ реда и $\binom{n}{s}$ начина да се изберат s стълба

$\Rightarrow$ ~~За~~ Матрицата $A_{k\times n}$ има $\binom{k}{s}\cdot\binom{n}{s}$ минори от ред $\underline{s}$

I/ Нека $A \in M_{k\times n}(F)$. Тогава е изпълнено: (7)

$r(A) = r \Leftrightarrow$ съществува минор на A, който е ненулев от ред $\underline{r}$ и всеки минор от ред $r+1$ е нулев.

$(\Rightarrow)$ $r(A) = r \Rightarrow r(\text{rows}A) = r \Rightarrow$ МЛНП на редовете има $\underline{r}$ реда с номера $i_1, .., i_r$

$r(\text{columns}A) = r \Rightarrow$ МЛНП на стълбовете има номера $j_1, .., j_r$

$$M_r = \begin{vmatrix} a_{i_1j_1} & \cdots & a_{i_1j_r} \\ - & - & - \\ a_{i_rj_1} & \cdots & a_{i_rj_r} \end{vmatrix} \neq 0$$

Всеки $r+1$ реда са линейно зависими и всеки $r+1$ стълба са лин. зависими

$\Rightarrow$ във всеки минор от ред $r+1$ има ЛЗ редове $\Rightarrow$ всички минори от ред $r+1$ са нулеви.

Минора определен от тези стълбове които образуват МЛНП на стълбовете и от тези редове, които образуват МЛНП на редовете се нарича $\boxed{\text{базисен минор.}}$

Добавка от мен за минор : Детерминантите на квадратните подматрици на матрицата A (принадлежи на Fm×n) се наричат минори на A. Нека A0 е квадратна подматрица от ред k на матрицата A. Тогава числото k се нарича ред на минора det(A0).

(⇐) Нека $i_1,\dots,i_r$ и $j_1\dots j_r$ са такива че определят ненулев минор и всеки минор от ред $r+1$ е нулев.
$\Rightarrow$ Редовете $i_1,\dots,i_r$ са ЛНЗ, също и стълбовете с номера $j_1\dots j_r$ са ЛНЗ

$$M_r=\begin{vmatrix} a_{i_1j_1} & \cdots & a_{i_1j_r} \\ - & - & - \\ a_{i_rj_1} & \cdots & a_{i_rj_r}\end{vmatrix}\neq 0$$

Нека $t\in\{1,\dots k\}$ и $s\in\{1,\dots n\}$ произволни индекси
M_{r+1} е или минор от ред $r+1$ и $M_{r+1}=0$
или M_{r+1} има равни редове/стълбове $=0$
развиво се по последен ред

$$M_{r+1}=\begin{vmatrix} a_{i_1j_1} & \cdots & a_{i_1j_r} & a_{i_1s} \\ - & - & - & - \\ a_{i_rj_1} & \cdots & a_{i_rj_r} & a_{i_rs} \\ a_{tj_1} & \cdots & a_{tj_r} & a_{ts}\end{vmatrix}=a_{tj_1}A_{r+1,1}+a_{tj_2}A_{r+1,2}+\dots+a_{tj_r}A_{r+1,r}+a_{ts}A_{r+1,r+1}$$

адюнгираните кол-ва не зависят от избора на t / зависят само от $i_1\dots i_r$)

$$0=\underbrace{\begin{pmatrix} a_{1j_1} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{kj_1}\end{pmatrix}}_{C_{j_1}}A_{r+1,1}+\dots+\underbrace{\begin{pmatrix} a_{1j_r} \\ \vdots \\ a_{kj_r}\end{pmatrix}}_{C_{j_r}}A_{r+1,r}+\underbrace{\begin{pmatrix} a_{1s} \\ \vdots \\ a_{ks}\end{pmatrix}}_{C_s}\underbrace{A_{r+1,r+1}}_{=M_r\neq 0}$$

$C_s=-\frac{1}{M_r}(A_{r+1,1}C_{j_1}+\dots+A_{r+1,r}C_{j_r})$
$\Rightarrow C_s\in \ell(C_{j_1},\dots,C_{j_r})$
$\Rightarrow C_{j_1}\dots C_{j_r}$ е МЛНП на стълбовете

Линейни изображения

Нека V_1 и V_2 са линейни пространства над поле F.

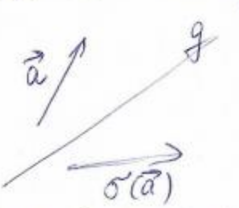
Опр// Изображението $\varphi: V_1\to V_2$
$\varphi: V_1\to V_2$ е линейно изображение, ако:
1) $\varphi(a+b)=\varphi(a)+\varphi(b)$, $\forall\, a,b\in V_1$
2) $\varphi(\lambda a)=\lambda\varphi(a)$, $\forall\, a\in V_1$, $\forall\lambda\in F$

Пример 1) Нека $\Theta: V\to\{\mathcal{O}\}$ $\quad\Theta(x)=\mathcal{O}$ е линейно
2) $k<n$ $\quad\varphi: F^n\to F^k$: $\varphi((a_1,\dots,a_n))=(a_1,\dots,a_k)\in F^k$
3) V има фиксиран базис $e_1,\dots,e_n$ над поле F
вземане на координати $\sigma: V\to F^n$: $\sigma(a_1e_1+\dots+a_ne_n)=(a_1,\dots,a_n)\in F^n$
$\sigma(x+y)=\sigma(x)+\sigma(y)$ и $\sigma(\lambda x)=\lambda\sigma(x)$
4) Нека $\ell_1,\dots,\ell_k: F^n\to F$ са k линейни функции
$\ell_i(x_1,\dots,x_n)=a_{i1}x_1+\dots+a_{in}x_n$
$\varphi: F^n\to F^k$ $\quad\varphi(x)=(\ell_1(x),\dots,\ell_k(x))$
стойността на x заместено в системата

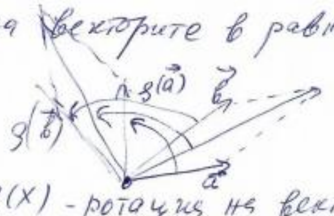
$\ell_1=a_{11}x_1+\dots+a_{1n}x_n$
$\vdots$
$\ell_k=a_{k1}x_1+\dots+a_{kn}x_n$

Линейни изображения // (2)

Нека $\mathbb{R}^2$ - лин. пр-во на векторите в равнината

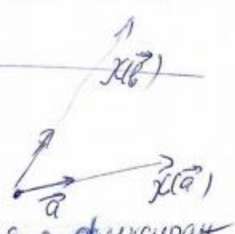


σ - осева симетрия относно фикс. права



$g(x)$ - ротация на векторите относно дадена фиксирана точка в равнината

π - Проекцията на векторите в/у дадена права



хомотетия с фиксиран коефициент

Линейни изображения /

(3)

Нека $\varphi: V_1 \to V_2$ е линейно изображение

1) $\varphi(\mathcal{O}_{(1)}) = \mathcal{O}_{(2)}$ $\quad (\varphi(\mathcal{O}) = \varphi(0.\mathcal{O}) = 0\varphi(\mathcal{O}) = \mathcal{O})$

2) Нека $a_1, .., a_s \in V_1$, $\lambda_1, .., \lambda_s \in F$
$\varphi(\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_s a_s) = \lambda_1 \varphi(a_1) + \cdots + \lambda_s \varphi(a_s)$

3) $\varphi(-a) = -\varphi(a)$ $\quad (\varphi(-a) = \varphi(-1a) = -1\varphi(a) = -\varphi(a))$

4) Ако $e_1, .., e_n$ е базис на V_1, тогава
$\varphi(a) = a_1\varphi(e_1) + \cdots + a_n\varphi(e_n)$
$a = a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n$
и φ се определя от стойностите на $\varphi(e_1), .., \varphi(e_n)$

Пример: $V = \mathbb{R}[x]$ $\quad \partial: \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$
$\partial(f) = f'$: $\partial(f+g) = (f+g)' = f' + g' = \partial(f) + \partial(g)$
$\partial(\lambda f) = (\lambda f)' = \lambda (f)' = \lambda \partial(f)$

(3')

Св-во / Нека $\varphi: V_1 \to V_2$ е линейно изобр.

Ако $a_1, .., a_k \in V_1$ са линейно зависими тогава $\varphi(a_1), .., \varphi(a_k)$ също са лин. зависими

Д-во $a_1, .., a_k$ ЛЗ $\Rightarrow \exists \lambda_1, .., \lambda_k \neq 0, .., 0$ и $\lambda_i \in F$
$\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_k a_k = \mathcal{O}$
$\Downarrow$
$\varphi(\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_k a_k) = \varphi(\mathcal{O})$
$\Rightarrow \lambda_1 \varphi(a_1) + \cdots + \lambda_k \varphi(a_k) = \mathcal{O}$
$\Rightarrow \varphi(a_1), \dots, \varphi(a_k)$ са ЛЗ

Т// Нека V_1, V_2 лин. пр-во над поле F (4)
и $\dim V_1 = n$ и $e_1, \dots, e_n$ базис на V_1
Ако $b_1, \dots, b_n$ са произволни вектори от V_2,
$\Rightarrow$ съществува единствено лин. изображение
$\varphi: V_1 \to V_2$, за което $\varphi(e_i) = b_i$, $i = 1, \dots, n$

Д-во//

(!) Нека $\varphi: V_1 \to V_2$ и $\psi: V_1 \to V_2$
са линейни изображения $\varphi(e_i) = \psi(e_i) = b_i$
Нека $a = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n \in V_1$ – произволен

$$\varphi(a) = \alpha_1 \varphi(e_1) + \dots + \alpha_n \varphi(e_n) = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n$$
$$\psi(a) = \alpha_1 \psi(e_1) + \dots + \alpha_n \psi(e_n) = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n$$
$$\Rightarrow \varphi(a) = \psi(a), \ \forall a \in V_1$$
$$\Rightarrow \psi = \varphi$$

(∃) Нека $b_1, \dots, b_n$ произволни от V_2 (5)
$e_1, \dots, e_n$ – базис на V_1
Дефинираме изображение $\varphi: V_1 \to V_2$
$$a = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n \Rightarrow \varphi(a) = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n \in V_2$$
Проверяваме, че φ е линейно изображение
Ако $c = \gamma_1 e_1 + \dots + \gamma_n e_n \in V_1$
$$\varphi(a + c) = \varphi((\alpha_1 + \gamma_1) e_1 + \dots + (\alpha_n + \gamma_n) e_n) =$$
$$= (\alpha_1 + \gamma_1) b_1 + \dots + (\alpha_n + \gamma_n) b_n =$$
$$= (\alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n) + (\gamma_1 b_1 + \dots + \gamma_n b_n) =$$
$$= \varphi(a) + \varphi(c)$$
$$\varphi(\lambda a) = \varphi(\lambda \alpha_1 e_1 + \dots + \lambda \alpha_n e_n) = \lambda_1 \alpha_1 b_1 + \dots + \lambda_n \alpha_n b_n =$$
$$= \lambda_1 (\alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n) = \lambda \varphi(a)$$
$\Rightarrow \varphi$ е линейно изображение

Зад// Да се намери линейно изображение (6)
$\varphi: F^3 \to F^2$ за което $\varphi(e_1) = (1,2)$; $\varphi(e_2) = (3,4)$; $\varphi(e_3) = (5,6)$

Р-е// $\varphi(x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3) = \varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1(1,2) + x_2(3,4) + x_3(5,6) =$
$= (x_1 + 3x_2 + 5x_3, 2x_1 + 4x_2 + 5x_6)$

т.е. $\begin{cases} l_1: x_1 + 3x_2 + 5x_3 = l_1(x) \\ l_2: 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 = l_2(x) \end{cases}$

Опр.// Ако V_1 и V_2 са линейни пространства над поле F, то φ е изоморфизъм, ако
1) $\varphi: V_1 \to V_2$ линейно изображение
2) φ е биекция $\begin{cases} \text{сюрекция}: \forall y \in V_2 \Rightarrow \exists x \in V_1: \varphi(x) = y \\ \text{инекция}: \text{Ако } \varphi(x_1) = \varphi(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \end{cases}$

Тогава $V_1 \cong V_2$

Св-ва// 1) $V \cong V$ $\quad (id: V \to V: \ id(x) = x)$

2) Ако $V_1 \cong V_2 \Rightarrow V_2 \cong V_1$
$V_1 \cong V_2 \Rightarrow \exists \varphi: V_1 \to V_2$ биекция и линейно изобр.
$\Rightarrow \exists \varphi^{-1}: V_2 \to V_1$. Нека $u, t \in V_2 \Rightarrow \exists a, b \in V_1$

$u = \varphi(a)$, $t = \varphi(b)$ $\Rightarrow \varphi(a + b) = u + t \Rightarrow \varphi^{-1}(u + t) = a + b = \varphi^{-1}(u) + \varphi^{-1}(t)$

$u = \varphi(a)$, $\lambda u = \varphi(\lambda a) \Rightarrow \varphi^{-1}(\lambda u) = \lambda a = \lambda \varphi^{-1}(u)$

T// Нека F е поле и V_1 и V_2 крайномерни пр-ва над F. Тогава е изпълнено:

$$V_1 \cong V_2 \iff \dim V_1 = \dim V_2$$

Д-во/

($\Rightarrow$) Нека $V_1 \cong V_2 \Rightarrow \exists\, \varphi: V_1 \to V_2$ изоморфизъм

Нека $e_1, .., e_n$ базис на V_1

Ще докажем, че $\varphi(e_1), .., \varphi(e_n)$ - базис на V_2

— Нека $b \in V_2$ - произволен

От φ - биекция $\Rightarrow \exists a \in V_1 : \varphi(a) = b$

ако $a = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$

$\Rightarrow b = \varphi(a) = a_1\varphi(e_1) + \dots + a_n\varphi(e_n) \in \ell(\varphi(e_1), .., \varphi(e_n))$

$\Rightarrow \ell(\varphi(e_1), .., \varphi(e_n)) = V_2$

— Допускаме, че $\beta_1, .., \beta_n \in F$: $\beta_1\varphi(e_1) + \dots + \beta_n\varphi(e_n) = \theta$ от φ - линейно $\Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi(\beta_1 e_1 + \dots + \beta_n e_n) = \varphi(\theta)$ от φ биекция $\Rightarrow$

$\Rightarrow \beta_1 e_1 + \dots + \beta_n e_n = \theta$ но $e_1, .., e_n$ са ЛНЗ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_n = 0 \Rightarrow \varphi(e_1) \dots \varphi(e_n)$ ЛНЗ

$\Rightarrow \varphi(e_1) \dots \varphi(e_n)$ базис на V_2

($\Leftarrow$) Нека $\dim V_1 = \dim V_2 = n$ и $e_1, .., e_n$ базис на V_1, $g_1, .., g_n$ базис на V_2

От Th $\Rightarrow \exists!$ линейно изобр. $\varphi: V_1 \to V_2 : \varphi(e_i) = g_i$

Ще док. че φ е биекция

- Нека $b \in V_2 \Rightarrow b = \beta_1 g_1 + \dots + \beta_n g_n = \beta_1\varphi(e_1) + \dots + \beta_n\varphi(e_n) = \varphi(\beta_1 e_1 + \dots + \beta_n e_n)$.

$\Rightarrow \varphi$ е сюрекция

- Нека $a_1, a_2 \in V_1$ такива, че $\varphi(a_1) = \varphi(a_2)$ $\quad a_1 = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$, $a_2 = \mu_1 e_1 + \dots + \mu_n e_n$

$\Downarrow$

$\varphi(\lambda e_1 + \dots + \lambda_n e_n) = \varphi(\mu_1 e_1 + \dots + \mu_n e_n)$

$\lambda_1 g_1 + \dots + \lambda_n g_n = \mu_1 g_1 + \dots + \mu_n g_n$

$\Rightarrow (\lambda_1 - \mu_1) g_1 + \dots + (\lambda_n - \mu_n) g_n = \theta$

$g_1 \dots g_n$ са ЛНЗ $\Rightarrow \lambda_1 - \mu_1 = 0, \dots, \lambda_n - \mu_n = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = \mu_1; \dots; \lambda_n = \mu_n \Rightarrow a_1 = a_2$

$\Rightarrow \varphi$ е инекция

$\Rightarrow \varphi$ е биекция $\Rightarrow V_1 \cong V_2$

Ядро и образ на линейно изображение

(1)

Опр/ Нека $\varphi: V_1 \to V_2$ е линейно изображение
$\Rightarrow Im\varphi = \{\varphi(x) \mid x \in V_1\} \subset V_2$ – образ на φ
$Ker\varphi = \{x \in V_1 \mid \varphi(x) = \mathcal{O}\} \subset V_1$ – ядро на φ
$(Im\varphi = \varphi(V_1))$

Тв/ $Ker\varphi$ е подпр-во на V_1 и $Im\varphi$ е подпр-во на V_2

Д-во Ако $a_1, a_2 \in Ker\varphi$, т.е. $\varphi(a_1) = \varphi(a_2) = \mathcal{O}$
$\Rightarrow \varphi(a_1 + a_2) = \varphi(a_1) + \varphi(a_2) = \mathcal{O} + \mathcal{O} = \mathcal{O} \Rightarrow a_1 + a_2 \in Ker\varphi$
$\varphi(\lambda a_1) = \lambda\varphi(a_1) = \lambda\mathcal{O} = \mathcal{O} \Rightarrow \lambda a_1 \in Ker\varphi$
$\Rightarrow Ker\varphi$ подпр-во на V_1

Ако $b_1, b_2 \in Im\varphi \Rightarrow \exists x_1, x_2 \in V_1 : \varphi(x_1) = b_1, \varphi(x_2) = b_2$
$\Rightarrow b_1 + b_2 = \varphi(x_1) + \varphi(x_2) = \varphi(x_1 + x_2) \Rightarrow b_1 + b_2 \in Im\varphi$
$\lambda b_1 = \lambda\varphi(x_1) = \varphi(\lambda x_1) \Rightarrow \lambda b_1 \in Im\varphi$
$\Rightarrow Im\varphi$ – подпр-во

---

(2)

Опр/ Нека $\varphi: V_1 \to V_2$ е линейно изображение
$\dim(Ker\varphi) = d(\varphi)$ – дефект на изображението
$\dim(Im\varphi) = r(\varphi)$ – ранг на изображението

Т// Нека V_1 и V_2 са лин. пространства над поле F и $\dim V_1 < \infty$. Ако $\varphi: V_1 \to V_2$ е линейно изображение $\Rightarrow d(\varphi) + r(\varphi) = \dim V_1$

Д-во/ $Ker\varphi$ подпр-во на V_1
$e_1 \dots e_d$ – базис на $Ker\varphi$; $\dim(Ker\varphi) = d = d(\varphi)$
допълваме до базис на V_1
$e_1, \dots, e_d, a_1, \dots, a_s$ – базис на V_1, $\boxed{\dim V_1 = d + s}$

φ: $e_1, \dots, e_d \mapsto \mathcal{O}$; $a_1 \mapsto b_1, \dots, a_s \mapsto b_s$

Нека $b_1 = \varphi(a_1), \dots, b_s = \varphi(a_s)$
ще док, че $b_1, \dots, b_s$ е базис на $Im\varphi$

(3)

Нека $y \in \operatorname{Im}\varphi \Rightarrow y = \varphi(x)$, $x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_d e_d + \mu_1 a_1 + \dots + \mu_s a_s$

$y = \varphi(x) = \lambda_1 \varphi(e_1) + \dots + \lambda_d \varphi(e_d) + \mu_1 \varphi(a_1) + \dots + \mu_s \varphi(a_s)$

$y = \lambda_1 \theta + \dots + \lambda_d \theta + \mu_1 b_1 + \dots + \mu_s b_s \in \ell(b_1, \dots, b_s)$

$\Rightarrow \operatorname{Im}\varphi \subset \ell(b_1, \dots, b_s)$

Но $b_1 = \varphi(a_1), \dots, b_s = \varphi(a_s) \Rightarrow \ell(b_1, \dots, b_s) \subset \operatorname{Im}\varphi$

$\Rightarrow \operatorname{Im}\varphi = \ell(b_1, \dots, b_s)$

Нека $\gamma_1 b_1 + \dots + \gamma_s b_s = \theta \Rightarrow \gamma_1 \varphi(a_1) + \dots + \gamma_s \varphi(a_s) = \theta$

$\Rightarrow \varphi(\gamma_1 a_1 + \dots + \gamma_s a_s) = \theta \Rightarrow \gamma_1 a_1 + \dots + \gamma_s a_s \in \operatorname{Ker}\varphi$

$\Rightarrow \exists\, \beta_1, \dots, \beta_d : \beta_1 e_1 + \dots + \beta_d e_d = \gamma_1 a_1 + \dots + \gamma_s a_s$

$\Rightarrow \beta_1 e_1 + \dots + \beta_d e_d - \gamma_1 a_1 - \dots - \gamma_s a_s = \theta$

Но $e_1, \dots, e_d, a_1, \dots, a_s$ са ЛНЗ $\Rightarrow \gamma_1 = \dots = \gamma_s = 0$, $\beta_1 = \dots = \beta_d = 0$

$\Rightarrow$ от $\gamma_1 b_1 + \dots + \gamma_s b_s = \theta \Rightarrow \gamma_1 = \dots = \gamma_s = 0$

$\Rightarrow b_1, \dots, b_s$ са ЛНЗ

$\Rightarrow b_1, \dots, b_s$ е базис на $\operatorname{Im}\varphi \Rightarrow \dim \operatorname{Im}\varphi = s = r(\varphi)$

$\Rightarrow \dim V_1 = d + s = d(\varphi) + r(\varphi)$

<u>Пример</u> (4)

Нека $\ell_1 : F^n \to F, \dots, \ell_k : F^n \to F$ линейни $\ell_i(x) = a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n$

$\ell : F^n \to F^k \quad \ell(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} \ell_1(x) \\ \vdots \\ \ell_k(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \dots \\ a_{k1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n \end{pmatrix}$

$\ell(x)$ е линейно изображ.

$\Rightarrow \operatorname{Ker}\varphi$ е решение на $\operatorname{Ker}\varphi: \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{k1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n = 0 \end{cases}$

$\operatorname{Im}\varphi$ е $\left\{ \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix} \,\middle|\, \right.$ системата със стълб $(b_1, \dots b_k)$ има решение $\left. \right\}$

$\Rightarrow$ Ако $c_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{k1} \end{pmatrix}; \dots; c_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{kn} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ системата има решение $\Leftrightarrow r(A) = r(\bar{A}) \Leftrightarrow b \in \ell(c_1, \dots, c_n)$

$\Rightarrow \operatorname{Im}\varphi = \ell(c_1, \dots, c_n) \Rightarrow r(\varphi) = r(c_1, \dots, c_n)$

$\dim \operatorname{Ker}\varphi = d(\varphi) = n - r(A) = n - r(c_1, \dots, c_n)$

$\Rightarrow d(\varphi) + r(\varphi) = n$

<u>Матрица на линейно изображение</u> (1)

Нека $\varphi : V_1 \to V_2$ е линейно изображение и $\dim V_1 = n$ и $e_1, \dots, e_n$ базис на V_1

$\dim V_2 = k$ и $g_1, \dots, g_k$ - базис на V_2

$\varphi(e_1) = a_{11}g_1 + a_{21}g_2 + \dots + a_{k1}g_k$

$\vdots$

$\varphi(e_n) = a_{1n}g_1 + a_{2n}g_2 + \dots + a_{kn}g_k$

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

$\uparrow \varphi(e_1) \qquad \uparrow \varphi(e_n)$

матрица на изображението φ спрямо базисите $e_1 \dots e_n$ и $g_1 \dots g_k$

(2)

<u>Св-во</u> V_1 с базис $e_1,\dots,e_n$ и V_2 с базис $g_1\dots g_k$ над полето F. Две линейни изображения

$\varphi: V_1 \to V_2$
$\psi: V_1 \to V_2$
съвпадат $\iff$ матрицата на φ съвпада с матрицата на ψ

<u>Д-во</u>

$$A_\varphi = A_\psi \iff \varphi(e_1)=\psi(e_1),\dots,\varphi(e_n)=\psi(e_n)$$
$$\iff \varphi(x)=\psi(x) \text{ за } \forall x\in V_1$$
$$\iff \varphi = \psi$$

<u>Св-во</u>/ Ако $x = x_1e_1+\dots+x_ne_n \in V_1$
$\Rightarrow \varphi(x) = y_1g_1+\dots+y_kg_k$ където $y_s = a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\dots+a_{sn}x_n$

$$\varphi(x) = x_1\varphi(e_1)+\dots+x_n\varphi(e_n) =$$
$$= x_1(a_{11}g_1+\dots+a_{k1}g_k)+$$
$$+x_2(a_{12}g_1+\dots+a_{k2}g_k)+$$
$$\dots\dots$$
$$+x_n(a_{1n}g_1+\dots+a_{kn}g_k) =$$

$$= (a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n)g_1+$$
$$+(a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n)g_2+$$
$$+\dots\dots$$
$$+(a_{k1}x_1+a_{k2}x_2+\dots+a_{kn}x_n)g_k$$

(3)

I/ Нека $\varphi: V_1 \to V_2$ линейно изображение
$e_1\dots e_n$ - базис на V_1, $g_1\dots g_k$ - базис на V_2
$A = A_\varphi$ - матрица на φ спрямо тези базиси

а) $\operatorname{Im}\varphi$ се описва с $\ell(c_1,\dots,c_n)$; c_i - стълбовете на A

б) $r(\varphi) = r(A_\varphi)$

в) $\operatorname{Ker}\varphi$ се описва с решението на $\left|\begin{array}{l} a_{11}x_1+\dots+a_{1n}x_n=0 \\ \dots\dots \\ a_{k1}x_1\dots a_{kn}x_n=0 \end{array}\right.$

<u>Д-во</u>

$c_1,\dots,c_n$ са координатите на $\varphi(e_1),\dots,\varphi(e_n)$ спрямо $g_1\dots g_n$
$\Rightarrow \ell(c_1,\dots,c_n)$ задава мн-вото от координатите на $\operatorname{Im}\varphi = \ell(\varphi(e_1),\dots,\varphi(e_n))$
$\Rightarrow r(c_1,\dots,c_n) = r(A) = \dim(\operatorname{Im}\varphi) = r(\varphi)$

в) $x = x_1e_1+\dots+x_ne_n \in \operatorname{Ker}\varphi \iff \varphi(x) = \mathcal{O} = y_1g_1+\dots+y_kg_k$

$$\iff (*)\left|\begin{array}{l} a_{11}x_1+\dots+a_{1n}x_n=0 \\ \vdots \\ a_{k1}x_1+\dots+a_{kn}x_n=0 \end{array}\right.$$

$(x_1,\dots,x_n)$ е решение на хомогенна система с матрица A

Умножение на матрици

$A_{k\times n} B_{n\times s} = C_{k\times s}$ броят на стълбовете на A трябва да е равен на броя на редовете на B

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{p=1}^{n} a_{ip}b_{pj}$$

Св-ва//

1) В общия случай $AB \neq BA$
2) $A, B \in M_{k\times n}$ и $C \in M_{n\times s}$ $\Rightarrow (A+B)C = AC + BC$
3) $A \in M_{k\times n}$, $B, C \in M_{n\times s}$ $A(B+C) = AB + AC$
4) $A_{k\times n}$, $B_{n\times s}$ $\lambda \in F$ $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot4+5\cdot2 & 2\cdot1+5\cdot7 \\ 1\cdot4+3\cdot2 & 1\cdot1+3\cdot7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 37 \\ 10 & 22 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8+1 & 20+3 \\ 4+7 & 10+21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 23 \\ 11 & 31 \end{pmatrix}$$

Умножение на детерминанти

Т// Нека F-поле и $\varphi: F^n \to F^n$ линейно изображение с матрица A спрямо $e_1, \dots, e_n$ - стандартен базис. Ако $a_1, \dots, a_n$ - произволни от F^n, тогава

$$\det(\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_n)) = \det A \cdot \det(a_1, \dots, a_n)$$

Д-во// I сл. $\det A = 0 \Rightarrow A$ има ЛЗ стълбове и $r(A) = r(\varphi) < n$

$\Rightarrow \varphi(a_1), \dots, \varphi(a_n)$ са ЛЗ ($\in \operatorname{Im}\varphi$ и $\dim \operatorname{Im}\varphi < n$)

$\Rightarrow 0 = \det(\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_n)) = \underbrace{0}_{\det A} \cdot \det(a_1, \dots, a_n) \Rightarrow$ изпълнено

II сл. Нека $\det A \neq 0$. Разглеждаме ф-я $f(a_1, \dots, a_n) = \dfrac{\det(\varphi(a_1) \dots \varphi(a_n))}{\det A}$

- $f(a_1, \dots, a_n)$ - полилинейна ($i \in 1, \dots, n$)

$$f(a_1, \dots, \lambda a_i' + \mu a_i'', \dots, a_n) = \frac{1}{\det A}\det(\varphi(a_1), \dots, \varphi(\lambda a_i' + \mu a_i''), \dots, \varphi(a_n)) =$$
$$= \frac{1}{\det A}\det(\varphi(a_1), \dots, \lambda\varphi(a_i') + \mu\varphi(a_i''), \dots, \varphi(a_n)) =$$
$$= \underbrace{\frac{\lambda}{\det A}\det(\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_i'), \dots, \varphi(a_n))}_{\lambda f(a_1, \dots, a_i', \dots, a_n)} + \underbrace{\frac{\mu}{\det A}\det(\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_i''), \dots, \varphi(a_n))}_{\mu f(a_1, \dots, a_i'', \dots, a_n)}$$

- антисиметрична $\det(\varphi(a_1) \dots \varphi(a_i) \dots \varphi(a_j) \dots \varphi(a_n))$ е антисим.
- $f(e_1, \dots, e_n) = \dfrac{1}{\det A}\det(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) = \dfrac{\det A^t}{\det A} = 1$

Т// Нека $A, B \in M_{n\times n}(F)$. Тогава $\det AB = \det A \cdot \det B$

Д-во// Нека $\varphi, \psi \in \operatorname{Hom}(F^n, F^n)$, за които A - е матрица на φ и B - матрица на ψ спрямо $e_1, \dots, e_n \Rightarrow AB$ е матрица на $\varphi\circ\psi$

$$\Rightarrow \det(AB) = \det(\varphi\circ\psi(e_1), \dots, \varphi\circ\psi(e_n)) = \det(\varphi(\psi(e_1)), \dots, \varphi(\psi(e_n))) =$$
$$= \det A \det(\psi(e_1), \dots, \psi(e_n)) =$$
$$= \det A \cdot \det B \det(e_1, \dots, e_n) =$$
$$= \det A \cdot \det B$$

Умножение на детерминанти

Лема 1 // Нека $A_{k\times k}$, $B_{s\times s}$, $C_{k\times s}$

$$\det\left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & B \end{array}\right)_{(k+s)\times(k+s)} = \det A \cdot \det B = \det D$$

Д-во // индукция по k: (1), за $k=1$ $\det\left(\begin{array}{c|c} a_{11} & C \\ \hline 0 & \\ 0 & B \end{array}\right) = a_{11}\det B$ развиване I стълб

Нека е изпълнено за $k-1$:

Нека поддетерминантите на матрицата D ги бележим $\tilde{\Delta}_{ij}$.

Развиваме по I стълб

$$\det D = a_{11}(-1)^2\tilde{\Delta}_{11} + a_{21}(-1)^3\tilde{\Delta}_{21} + \dots + a_{k1}(-1)^{k+1}\tilde{\Delta}_{k1} =$$

Δ_{ij}: поддетерм. на A

$$= a_{11}(-1)^2\Delta_{11}\det B + a_{21}(-1)^3\Delta_{21}\det B + \dots + a_{k1}(-1)^{k+1}\Delta_{k1}\det B$$

$$= \left(a_{11}(-1)^2\Delta_{11} + a_{21}(-1)^3\Delta_{21} + \dots + a_{k1}(-1)^{k+1}\Delta_{k1}\right)\det B =$$

$$= \det A \cdot \det B$$

2

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = (7-12)\,W(1,2,3) =$$

$$= -5(2-1)(3-1)(3-2) = -5\cdot 2 = -10$$

Теорема// Нека $A, B \in M_{n\times n}(F)$. Тогава $\det AB = \det A \det B$

Д-во/ $D \in M_{2n\times 2n}(F)$; $D = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline -E & B \end{array}\right)$; $\det D = \det A . \det B$

работа по стълбове!

$$\det D = \left|\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ - & - & - & - & - & - \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline -1 & 0 \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & -1 \cdots & 0 & b_{21} & \cdots & b_{2n} \\ - & - & - & - & - & - \\ 0 & \cdots & -1 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{array}\right| = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline b_{11} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} + b_{11}\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \\ \hline -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + b_{21}\begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{n2} \\ \hline 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + b_{n1}\begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \\ \hline 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

анулираме

$$= \left|\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} & c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ - & - & - & - & - & - \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & c_{n1} & \cdots & c_{nn} \\ \hline -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & -1 \cdots & 0 & 0 & 0 \cdots & 0 \\ - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 \cdots 0 & -1 & 0 & 0 \cdots & 0 \end{array}\right| =$$

$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1}$

$\vdots$

$c_{n1} = a_{n1}b_{11} + a_{n2}b_{21} + \cdots + a_{nn}b_{n1}$

$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$

$\det D = \left|\begin{array}{c|c} A & AB \\ \hline -E & 0 \end{array}\right|$

$$\det A . \det B = \left|\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline -E & B \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} A & AB \\ \hline -E & 0 \end{array}\right| = \left\{\begin{array}{l} \text{разместваме} \\ \text{стълбовете} \\ i \leftrightarrow n+i \,/\, i=1..n \end{array}\right.$$

$$= (-1)^n \left|\begin{array}{c|c} AB & A \\ \hline 0 & -E \end{array}\right| = (-1)^n . \det(AB) . \det(-E) = (-1)^n . (-1)^n \det(AB)$$

$\Rightarrow \det A . \det B = \det AB$

$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

Пр/

$$\begin{vmatrix} (1+1)^4 & (1+2)^4 & (1+3)^4 & (1+4)^4 & (1+5)^4 \\ (2+1)^4 & (2+2)^4 & (2+3)^4 & (2+4)^4 & (2+5)^4 \\ (3+1)^4 & (3+2)^4 & (3+3)^4 & (3+4)^4 & (3+5)^4 \\ (4+1)^4 & (4+2)^4 & (4+3)^4 & (4+4)^4 & (4+5)^4 \\ (5+1)^4 & (5+2)^4 & (5+3)^4 & (5+4)^4 & (5+5)^4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1^4 & 4.1^3 & 6.1^2 & 4.1 & 1 \\ 2^4 & 4.2^3 & 6.2^2 & 4.2 & 1 \\ 3^4 & 4.3^3 & 6.3^2 & 4.3 & 1 \\ 4^4 & 4.4^3 & 6.4^2 & 4.4 & 1 \\ 5^4 & 4.5^3 & 6.5^2 & 4.5 & 1 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 1^3 & 2^3 & 3^3 & 4^3 & 5^3 \\ 1^4 & 2^4 & 3^4 & 4^4 & 5^4 \end{vmatrix}$$

$= 4.6.4\, W(1,2,3,4,5) . W(1,2,3,4,5) =$

$4.6.4\, (2.3.4.2.3.2)^2 = 4^4 . 6^5 . 4 = (24)^5$

Действия с линейни изображения

V_1, V_2, V_3 лин. пр-ва над поле F

$\varphi, \psi, \dots$ линейни изображения $\begin{cases} \varphi(a+b) = \varphi(a)+\varphi(b) \\ \varphi(\lambda a) = \lambda\varphi(a) \end{cases}$

Опр/ $\varphi; \psi: V_1 \to V_2$ линейни изображения

$\varphi+\psi: V_1 \to V_2$ определя се като $(\varphi+\psi)(x) = \varphi(x)+\psi(x)$

С-в-во: $\varphi+\psi$ също е линейно изображение

Док. $(\varphi+\psi)(a+b) = \varphi(a+b)+\psi(a+b) = \varphi(a)+\varphi(b)+\psi(a)+\psi(b) =$
$= (\varphi(a)+\psi(a)) + (\varphi(b)+\psi(b)) =$
$= (\varphi+\psi)(a) + (\varphi+\psi)(b)$

$(\varphi+\psi)(\lambda a) = \varphi(\lambda a)+\psi(\lambda a) = \lambda\varphi(a)+\lambda\psi(a) =$
$= \lambda(\varphi+\psi)(a)$

Опр. $\lambda \in F$ $(\lambda\varphi): V_1 \to V_2$ $\quad (\lambda\varphi)(a) = \lambda(\varphi(a))$
$\Rightarrow \lambda\varphi$ е линейно

Св-ва $\varphi, \psi, \tau: V_1 \to V_2$ линейни

1) $\varphi+\psi = \psi+\varphi$ $\quad (\varphi+\psi)(a) = \varphi(a)+\psi(a) = (\psi+\varphi)(a)$

2) $(\varphi+\psi)+\tau = \varphi+(\psi+\tau)$

3) $\mathcal{O}: V_1 \to V_2$ $\quad \mathcal{O}(a) = O_2$ е лин. изобр.
$(\varphi+\mathcal{O})a = \varphi(a)+\mathcal{O}(a) = \varphi(a) \Rightarrow \varphi+\mathcal{O} = \varphi$

4) $-\varphi: V_1 \to V_2$: $(-\varphi)(a) = -(\varphi(a))$ $\begin{cases} (-\varphi)(a+b) = -(\varphi(a+b)) \\ \quad (-\varphi)(a)+(-\varphi)(b) \\ (-\varphi)(\lambda a) = -(\varphi(\lambda a)) = \\ = \lambda(-\varphi(a)) = \lambda(-\varphi)(a) \end{cases}$
$\varphi+(-\varphi) = \mathcal{O}$

5) $1\varphi = \varphi$

6) $(\lambda+\mu)\varphi = \lambda\varphi+\mu\varphi$

7) $\lambda(\varphi+\psi) = \lambda\varphi+\lambda\psi$

8) $(\lambda\mu)\varphi = \lambda(\mu\varphi)$

за $\lambda, \mu \in F$, φ, ψ лин. изобр.

$((\lambda+\mu)\varphi)a = (\lambda+\mu)(\varphi(a)) = \lambda(\varphi(a))+\mu(\varphi(a)) =$
$= (\lambda\varphi)(a)+(\mu\varphi)(a) = (\lambda\varphi+\mu\varphi)a$

$(\lambda(\varphi+\psi))(a) = \lambda((\varphi+\psi)(a)) = \lambda(\varphi(a)+\psi(a)) =$
$= \lambda\varphi(a)+\lambda\psi(a) = (\lambda\varphi)(a)+(\lambda\psi)(a) =$
$= (\lambda\varphi+\lambda\psi)(a)$

$Hom(V_1,V_2)=\{\varphi \mid \varphi: V_1 \to V_2$ линейно изображение$\}$

I/ $Hom(V_1, V_2)$ е линейно пространство над полето F.

Опр./ Ако V_1 има базис $(e)\ e_1,\dots,e_n$ и V_2 има базис $(g)\ g_1,\dots g_k$ и $\varphi: V_1 \to V_2$ линейно изображ.

$$\varphi(e_1)=a_{11}g_1+a_{21}g_2+\dots+a_{k1}g_k$$
$$\varphi(e_2)=a_{12}g_1+a_{22}g_2+\dots+a_{k2}g_k$$
$$\dots$$
$$\varphi(e_n)=a_{1n}g_1+a_{2n}g_2+\dots+a_{kn}g_k$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}_{k\times n} = A_{\varphi,(e)(g)}$$

матрица на φ спрямо базисите (e) на V_1 и (g) на V_2

I/ Нека V_1, V_2 лин. пр-ва над F и $(e)=e_1\dots e_n$ баз. V_1, $(g)=g_1,\dots,g_k$ - базис V_2. Тогава

а) $\varphi, \psi: V_1 \to V_2$ линейни изображения

$\varphi=\psi \Leftrightarrow A_{\varphi,(e)(g)} = A_{\psi,(e),(g)}$

Д-во а) $\varphi=\psi \Leftrightarrow \varphi(e_1)=\psi(e_1) \dots \varphi(e_n)=\psi(e_n)$ $\Rightarrow A_\varphi=A_\psi$ имат равни стълбове

б) Ако $A\in M_{k\times n}(F)$ произволна $\Rightarrow \exists\, \psi: V_1\to V_2$ който има матрица A

б) Ако A - произв. $A=(a_{ij})_{k\times n}$ $\varphi(e_1)=b_1=a_{11}g_1+a_{21}g_2+\dots+a_{k1}g_k$

$\varphi(e_n)=b_n=a_{1n}g_1+a_{2n}g_2+\dots+a_{kn}g_k$

$\exists!$ лин. изобр. $\varphi: V_1\to V_2 : \varphi(e_i)=b_i$

в) Ако $\varphi: V_1\to V_2$ има матр. $A \Rightarrow \lambda\varphi: V_1\to V_2$ $(\lambda\in F)$ има матрица λA

$(\lambda\varphi)e_i=\lambda(\varphi(e_i))$ стълбовете на λA се получават от A чрез умнож. по λ

г) Ако $\varphi; \psi: V_1\to V_2$ линейни и A_φ, A_ψ - матриците им $\Rightarrow A_\varphi+A_\psi$ матрица на $\varphi+\psi$

$(\varphi+\psi)(e_i)=\varphi(e_i)+\psi(e_i)$ $i^{\text{ти}}$ стълб на матрицата на $\varphi+\psi$ е сумата на $i^{\text{ти}}$ стълб на A_φ + $i^{\text{ти}}$ стълб на A_ψ

Сл.) Нека V_1, V_2 линейни пр.-ва над полето F и $(e) = e_1, \dots, e_n$ - базис на V_1, $(g) = g_1, \dots, g_k$ - базис на V_2

$\mu: Hom(V_1, V_2) \to M_{k\times n}(F)$: $\mu(\varphi) = A_{\varphi,(e)(g)}$ матрицата на φ спрямо (e) и (g)

$\Rightarrow$ а) μ е изоморфизъм на линейни пространства

б) $\dim Hom(V_1, V_2) = \dim M_{k\times n}(F) = k.n$

Ако $\varphi: V_1 \to V_2$ - линейно изобр. с матр. φ

$\Rightarrow r(\varphi) = r(A)$

и координатите от векторите от $Im\varphi$ са k-мерните вектори от $\ell(c_1, \dots, c_n)$ където $c_1, \dots, c_n$ стълбовете на A

I) Нека V_1, V_2 лин. пр.-ва над F

$(e) = e_1, \dots, e_n$ базис на V_1, $(g) = g_1, \dots, g_k$ базис на V_2

$\varphi: V_1 \to V_2$ с матрица A

Ако $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \in V_1$

тогава $\varphi(x) = y_1 g_1 + \dots + y_k g_k$, където $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Д-во

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \varphi(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = \\ &= x_1\varphi(e_1) + x_2\varphi(e_2) + \dots + x_n\varphi(e_n) = \\ &= x_1(a_{11}g_1 + a_{21}g_2 + \dots + a_{k1}g_k) + \\ &+ x_2(a_{12}g_1 + a_{22}g_2 + \dots + a_{k2}g_k) + \\ &+ \dots \\ &+ x_n(a_{1n}g_1 + a_{2n}g_2 + \dots + a_{kn}g_k) =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n)g_1 + \\ &+ (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n)g_2 + \\ &+ \dots \\ &+ (a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n)g_k\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix}$$

Композиция на изображения и умножение на матрици

Нека V_1, V_2, V_3 лин. пр-ва над F и
$\varphi_1 : V_1 \to V_2$ линейни изображения
$\varphi_2 : V_2 \to V_3$
композицията $\varphi_2 \circ \varphi_1 : V_1 \to V_3$

$$\underset{V_1}{\overset{\Uparrow}{x}} \xrightarrow{\varphi_1} \underset{V_2}{\overset{\Uparrow}{\varphi(x)}} \xrightarrow{\varphi_2} \underset{V_3}{\overset{\Uparrow}{\varphi(\varphi(x))}}$$

$\varphi_2 \circ \varphi_1 (x) = \varphi_2(\varphi_1(x))$

Св-во: $\varphi_2 \circ \varphi_1 : V_1 \to V_3$ е линейно

$a, b \in V_1$

$(\varphi_2 \circ \varphi_1)(a+b) = \varphi_2(\varphi_1(a+b)) = \varphi_2(\varphi_1(a) + \varphi_1(b)) =$
$= \varphi_2(\varphi_1(a)) + \varphi_2(\varphi_1(b)) = (\varphi_2 \circ \varphi_1)(a) + (\varphi_2 \circ \varphi_1)(b)$

$(\varphi_2 \circ \varphi_1)(\lambda a) = \varphi_2(\varphi_1(\lambda a)) = \varphi_2(\lambda \varphi_1(a)) = \lambda \varphi_2(\varphi_1(a)) =$
$= \lambda (\varphi_2 \circ \varphi_1)(a)$

I/ Нека V_1, V_2, V_3 лин. пр-ва над F

$(e) = e_1, \dots, e_n$ базис на V_1
$(g) = g_1 \dots g_k$ базис на V_2
$(h) = h_1, \dots h_s$ базис на V_3

$\varphi_1 : V_1 \to V_2$ с матр. $A = (a_{ij})$
$\varphi_2 : V_2 \to V_3$ с матр. $B = (b_{ij})$

$\Longrightarrow \varphi_2 \circ \varphi_1$ има матрица BA

$(\varphi_2 \circ \varphi_1) e_i = \varphi_2(\varphi_1(e_i)) =$
$= \varphi_2(a_{1i} g_1 + a_{2i} g_2 + \dots + a_{ki} g_k) =$
$= a_{1i} \varphi_2(g_1) + a_{2i} \varphi_2(g_2) + \dots + a_{ki} \varphi_2(g_k) =$
$= a_{1i}(b_{11} h_1 + b_{21} h_2 + \dots + b_{s1} h_s) +$
$+ a_{2i}(b_{12} h_1 + b_{22} h_2 + \dots + b_{s2} h_s) +$
$+ \dots$
$+ a_{ki}(b_{1k} h_1 + b_{2k} h_2 + \dots + b_{sk} h_s) =$

$= \varphi_2(\varphi_1(e_i)) =$
$= (b_{11} a_{1i} + b_{12} a_{2i} + \dots + b_{1k} a_{ki}) h_1 +$
$+ (b_{21} a_{1i} + b_{22} a_{2i} + \dots + b_{2k} a_{ki}) h_2 +$
$+ \dots$
$+ (b_{s1} a_{1i} + b_{s2} a_{2i} + \dots + b_{sk} a_{ki}) h_s$

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ \dots & & & \\ b_{s1} & b_{s2} & \dots & b_{sk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & \dots & & \\ a_{k1} & \dots & a_{ki} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

мат. свойства φ_i, ψ_i - лин. изобр

1) $(A+B)C = AC+BC$	1) $(\varphi_1+\varphi_2)\psi = \varphi_1\circ\psi + \varphi_2\circ\psi$
2) $A(B+C) = AB+AC$	2) $\varphi\circ(\psi_1+\psi_2) = \varphi\circ\psi_1 + \varphi\circ\psi_2$
3) $(\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B)$, $\lambda \in F$	3) $(\lambda\varphi)\circ\psi = \lambda(\varphi\circ\psi) = \varphi\circ(\lambda\psi)$
4) $(AB)C = A(BC)$	4) $(\varphi\circ\psi)\circ\tau = \varphi\circ(\psi\circ\tau)$
5) E = единична матрица, $AE = EA = A$	5) $id_V: V\to V : id(x) = x$, $id\circ\varphi = \varphi\circ id = \varphi$

Обратими матрици

Опр.// $A \in M_{n\times n}(F)$. A е обратима матрица, ако $\exists\ B \in M_{n\times n}(F)$, така че $AB = BA = E$

Св-ва

1) Ако A е обратима $\Rightarrow \exists!\ B$ (единствена) за която $AB = BA = E$

Д-во Ако B_1 и B_2 са такива $\Rightarrow$
$B_1 = B_1E = B_1(AB_2) = (B_1A)B_2 = EB_2 = B_2 \Rightarrow B_1 = B_2$

$B_2 = B_1 = A^{-1}$ обратна на A

2) $(A^{-1})^{-1} = A$ т.е. $A.A^{-1} = A^{-1}A = E \Rightarrow \{ A^{-1}$ е обратна на A, A е обратна на A^{-1}

3) Ако A, B са обратими матрици $\Rightarrow AB$ обратима и $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Д-во// $(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}EB = B^{-1}B = E$
$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E$

Обратим линеен оператор

Опр. Нека $\varphi: V\to V$ лин. оператор
φ е обратим, ако $\exists\ \psi: V\to V$ линеен, такъв че $\varphi\circ\psi = \psi\circ\varphi = id$ / $id: V\to V$: $id(x) = x$)

Св-ва

1) Ако φ - обратим $\Rightarrow \exists!\ \psi$ със свойството $\varphi\circ\psi = \psi\circ\varphi = id$

$\psi = \varphi^{-1}$ обратен на φ

ψ_1, ψ_2 ако изпълняват това
$\psi_1 = \psi_1\circ id = (\psi_1\circ\varphi)\circ\psi_2 = id\circ\psi_2 = \psi_2$

2) $(\varphi^{-1})^{-1} = \varphi$, т.е. $\varphi\circ\varphi^{-1} = \varphi^{-1}\circ\varphi = id$

3) Ако φ, ψ - обратими оператори, тогава $(\varphi\circ\psi)^{-1} = \psi^{-1}\circ\varphi^{-1}$

$(\varphi\circ\psi)\circ(\psi^{-1}\circ\varphi^{-1}) = \varphi\circ(\psi\circ\psi^{-1})\circ\varphi^{-1} = \varphi\circ\varphi^{-1} = id$

$(\psi^{-1}\circ\varphi^{-1})\circ(\varphi\circ\psi) = \psi^{-1}\circ\underbrace{(\varphi^{-1}\circ\varphi)}_{=id}\circ\psi = \psi^{-1}\circ\psi = id$

Теорема // Нека $A \in M_{n\times n}(F)$.
A е обратима $\iff \det A \neq 0$ и тогава

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & \cdots & A_{nn}\end{pmatrix},$$ където A_{ij} - адюнгирано количество

Д-во

($\Rightarrow$) A-обратима $\Rightarrow \exists A^{-1}$

$$AA^{-1} = E \Rightarrow \det(AA^{-1}) = \det E = 1$$
$$\Rightarrow \det A \cdot \det A^{-1} = 1$$
$$\Rightarrow \det A \neq 0 \text{ и } \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

($\Leftarrow$) Нека $\det A \neq 0$ и $B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn}\end{pmatrix}$

$$BA = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ - & - & & - \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ - & - & - \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_k A_{k1}a_{k1} & \sum_k A_{k1}a_{k2} & \cdots & \sum_k A_{k1}a_{kn} \\ - & - & - & - \\ \sum_k A_{kn}a_{k1} & \sum_k A_{kn}a_{k2} & \cdots & \sum_k A_{kn}a_{kn}\end{pmatrix}$$

развитие на $\det A$ по стълб и фалшиво развитие

$$\Rightarrow BA = \begin{pmatrix} \det A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det A & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \det A\end{pmatrix} = (\det A)\cdot E \Rightarrow \left(\frac{1}{\det A}B\right)A = E$$

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ - & - & & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ - & - & & - \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum a_{1i}A_{1i} & \sum a_{1i}A_{2i} & \cdots & \sum a_{1i}A_{ni} \\ - & - & & - \\ \sum a_{ni}A_{1i} & \sum a_{ni}A_{2i} & \cdots & \sum a_{ni}A_{ni}\end{pmatrix}$$

развитие на $\det A$ по ред и фалшиво развитие

$$AB = \begin{pmatrix} \det A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det A & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \det A\end{pmatrix} = (\det A)E \Rightarrow A\cdot\left(\frac{1}{\det A}B\right) = E \Rightarrow A \text{ обратима}$$

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}, \det A = ad - bc \neq 0$$
$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22}\end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4\end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{4-6}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1\end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2\end{pmatrix}^{-1} = ?$$

$\det A = 5$

$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2\end{vmatrix} = 5$

$A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2\end{vmatrix} = -(-5)$

$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1\end{vmatrix} = -5$

$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2\end{vmatrix} = -3$

$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2\end{vmatrix} = -1$

$A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1\end{vmatrix} = -(-4)$

$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3\end{vmatrix} = 2$

$A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3\end{vmatrix} = -1$

$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1\end{vmatrix} = -1$

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 5 & -1 & -1 \\ -5 & 4 & -1\end{pmatrix}$$

Матрица на линеен оператор

Нека V е лин. пр-во над полето F и $e_1, \dots, e_n$ - базис на V и $\varphi: V \to V$ е линеен оператор

(когато $V = V_1 = V_2$ се взема един базис)

матрица на φ спрямо базиса $e_1, \dots, e_n$)

$\Rightarrow \varphi(e_1) = a_{11}e_1 + \dots + a_{n1}e_n$

$\varphi(e_2) = a_{12}e_1 + \dots + a_{n2}e_n$

$\varphi(e_n) = a_{1n}e_1 + \dots + a_{nn}e_n$

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \varphi(e_1) & \varphi(e_2) & \varphi(e_n) \end{array}$$

$A_\varphi \in M_{n \times n}(F)$

Пр. $\frac{d}{dx}: \mathbb{R}^4[x] \to \mathbb{R}^4[x]$

Базис $1, x, x^2, x^3, x^4$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{S}$ 

$$\begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad \varphi(X) = AX$

$E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ базис

$$M_\varphi = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

---

(2)

Св-во V_1 с базис $e_1, \dots e_n$ и V_2 с базис $g_1 \dots g_k$ над полето F. Две линейни изображения

$\varphi: V_1 \to V_2$
$\psi: V_1 \to V_2$

съвпадат $\Leftrightarrow$ матрицата на φ съвпада с матрицата на ψ

Д-во

$A_\varphi = A_\psi \Leftrightarrow \varphi(e_1) = \psi(e_1), \dots, \varphi(e_n) = \psi(e_n)$

$\Leftrightarrow \varphi(x) = \psi(x)$ за $\forall x \in V_1$

$\Leftrightarrow \varphi = \psi$

Св-во Ако $x = x_1e_1 + \dots + x_ne_n \in V_1$

$\Rightarrow \varphi(x) = y_1g_1 + \dots + y_kg_k$ където $y_s = a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \dots + a_{sn}x_n$

$\varphi(x) = x_1\varphi(e_1) + \dots + x_n\varphi(e_n) =$
$= x_1(a_{11}g_1 + \dots + a_{k1}g_k) +$
$+ x_2(a_{12}g_1 + \dots + a_{k2}g_k) +$
$- - - - - - -$
$+ x_n(a_{1n}g_1 + \dots + a_{kn}g_k) =$

$= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n)g_1 +$
$+ (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n)g_2 +$
$+ - - - - -$
$+ (a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n)g_k$

I/ Нека $\varphi: V_1 \to V_2$ линейно изображение
$e_1 \dots e_n$ - базис на V_1, $g_1 \dots g_k$ - базис на V_2
$A = A_\varphi$ - матрица на φ спрямо тези базиси
а) $\operatorname{Im}\varphi$ се описва с $\ell(c_1,\dots,c_n)$; c_i - стълбове на A
б) $r(\varphi) = r(A_\varphi)$
в) $\operatorname{Ker}\varphi$ се описва с решението на $\left|\begin{array}{l} a_{11}x_1+\dots+a_{1n}x_n=0 \\ \dots \\ a_{k1}x_1 \dots a_{kn}x_n=0 \end{array}\right.$

Д-во

$c_1,\dots,c_n$ са координатите на $\varphi(e_1),\dots,\varphi(e_n)$ спрямо $g_1 \dots g_n$
$\Rightarrow \ell(c_1,\dots,c_n)$ задава мн-вото от координатите на $\operatorname{Im}\varphi = \ell(\varphi(e_1),\dots,\varphi(e_n))$
$\Rightarrow r(c_1,\dots,c_n) = r(A) = \dim(\operatorname{Im}\varphi) = r(\varphi)$

в) $x = x_1e_1+\dots+x_ne_n \in \operatorname{Ker}\varphi \iff \varphi(x) = o = y_1g_1+\dots+y_kg_k$
$\iff (*) \left|\begin{array}{l} a_{11}x_1+\dots+a_{1n}x_n=0 \\ \vdots \\ a_{k1}x_1+\dots+a_{kn}x_n=0 \end{array}\right.$ $(x_1,\dots,x_n)$ е решение на хомогенна система с матрица A

Зад В тримерното пр-во $\mathbb{R}^3$ с базис e_1,e_2,e_3 е зададен линеен оператор $\varphi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ с матрица спрямо базиса $A=\begin{pmatrix}1&-2&-3\\3&5&1\\5&1&-5\end{pmatrix}$

а) образът на $a=(2,4,1)$

$$\begin{pmatrix}1&-2&-3\\3&5&1\\5&1&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9\\27\\9\end{pmatrix} \Rightarrow \varphi(a)=(-9,27,9)$$

б) $\operatorname{Im}\varphi = ?$ $\quad \varphi(e_1)=(1,3,5)$, $\varphi(e_2)=(-2,5,1)$, $\varphi(e_3)=(-3,1,-5)$

$\operatorname{Im}\varphi = \ell(\varphi(e_1),\varphi(e_2),\varphi(e_3))$

$$A \sim \begin{pmatrix}1&-2&-3\\3&5&1\\5&1&-5\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&-2&-3\\0&11&10\\0&11&10\end{pmatrix} \Rightarrow r(A)=2=r(\varphi) \Rightarrow \varphi(e_1) \text{ и } \varphi(e_2) \text{ базис на } \operatorname{Im}\varphi$$

в) $\operatorname{Ker}\varphi = ?$

$\left|\begin{array}{l} x_1-2x_2-3x_3=0 \\ 3x_1+5x_2+x_3=0 \\ 5x_1-x_2-5x_3=0 \end{array}\right.$

$x_1 = 2x_2+3x_3$

	x_1	x_2	x_3
$u=$	12	−10	11

$\Rightarrow u=(12,-10,11)$
$\Rightarrow \operatorname{Ker}\varphi = \ell(u)$; $d(\varphi)=1$