(1) Упражнение 10 за 1, 2 и 3 група

В миналото упражнение доказахме следните два основни факта:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n \text{ е } \begin{cases} \text{сходящ, ако } q \in (-1,1) \\ \text{разходящ, ако } q \in (-\infty,-1] \cup [1,+\infty) \end{cases} \qquad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ е } \begin{cases} \text{сходящ, ако } \alpha > 1 \\ \text{разходящ, ако } \alpha \leq 1 \end{cases} \qquad (2)$$

Тези два реда са основните редове, които се използват за сравняване.

Изследвайте за сходимост редовете:

Зад. 1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{2n+1}$ (3)

Решение: Да допуснем, че (3) е сходящ. Тогава ще имаме $\frac{(-1)^n n}{2n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, откъдето и $\left|\frac{(-1)^n n}{2n+1}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Но $\left|\frac{(-1)^n n}{2n+1}\right| = \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2+\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}$ ↯.

Сл. (3) е разходящ.

Зад. 2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n}$, $a > 0$. (4)

Решение: 1 сл. $a \in (0,1)$

Сега $a^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ и значи $\frac{1}{1+a^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$.

Сл. (4) е разходящ (редицата от членовете му не клони към 0).

② 2 сл. $a=1$

Сега $\frac{1}{1+a^n}=\frac{1}{2} \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$ и ℓ. (4) е разходящ.

3 сл. $a\in(1,+\infty)$

Имаме, че $0<\frac{1}{1+a^n}<\frac{1}{a^n}=\left(\frac{1}{a}\right)^n$ за $\forall n$

и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a}\right)^n$ е сходящ понеже $\frac{1}{a}\in(0,1)$

(вж. (1)).

По принципа за мажориране (4) е сходящ.

Зад. 3 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ (5)

Решение: Имаме, че $\frac{\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}}{\frac{1}{n}}=\frac{n}{\sqrt{n(n+1)}}=$

$=\sqrt{\frac{n}{n+1}}=\sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{n}}}\xrightarrow[n\to\infty]{}1$ и по критерия за сравняване (5) $\sim\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, така че

(5) е разходящ (вж. (2)).

Зад. 4 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+n+1}{n^4+1}$ (6)

Решение: Имаме, че $\frac{\frac{n^2+n+1}{n^4+1}}{\frac{1}{n^2}}=\frac{n^4+n^3+n^2}{n^4+1}$

$=\frac{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^4}}\xrightarrow[n\to\infty]{}1$ и по критерия за сравняване (6) $\sim\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, така че

(6) е сходящ (вж. (2)).

③ Критерий на Даламбер

Нека $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е числов ред с положителни членове, за който съществува границата $D = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ (крайна или безкрайна)

Тогава:

1) ако $D<1$, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ;

2) ако $D>1$, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е разходящ;

3) ако $D=1$ и $\frac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ отдясно, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е разходящ.

Критерий на Коши

Нека $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е числов ред с положителни членове, за който съществува границата $C = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ (крайна или безкрайна).

Тогава:

1) ако $C<1$, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ;

2) ако $C>1$, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е разходящ;

3) ако $C=1$ и $\sqrt[n]{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ отдясно, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е разходящ.

Изследвайте за сходимост редовете:

Зад. 1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$ (1)

Решение: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{n+1}{3^{n+1}}}{\frac{n}{3^n}} = \frac{1}{3}\,\frac{n+1}{n} =$

$= \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{3} < 1.$

④ По кр. на Даламбер (1) е сходящ.

Зад. 2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!\,\frac{a^n}{n^n}$, $a>0$ (2)

Решение: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!\,\frac{a^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}}{n!\,\frac{a^n}{n^n}} =$

$= \frac{(n+1)\cdot\frac{a}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{1}{n^n}} = \frac{a}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{a}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{a}{e}$.

По кр. на Даламбер при $a<e$ (2) е сходящ, а при $a>e$ (2) е разходящ.

При $a=e$ $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ отдясно (т.е. със стойности по-големи от 1), защото $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \uparrow e$ (клони към е монотонно растейки) и по кр. на Даламбер (2) е разходящ.

Отг. на зад. 2: При $a\in(0,e)$ (2) е сходящ, а при $a\in[e,+\infty)$ (2) е разходящ.

Зад. 3 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a^n$, $a>0$ (3)

Решение: $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{n}\cdot a \xrightarrow[n\to\infty]{} a$, защото, както вече знаем (доказвано е на упражненията) $\sqrt[n]{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$.

По кр. на Коши (3) е сходящ при $a\in(0,1)$ и разходящ при $a\in(1,+\infty)$.

При $a=1$ (3) става $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n$ и е разходящ, например защото $n \not\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Отг. на зад. 3: (3) е сходящ при $a\in(0,1)$ и разходящ при $a\in[1,+\infty)$.

(5) Зад. 4 $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{n+1} \cdot \left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n^2}$ (4)

Решение:

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{3^{n+1} \cdot \left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n^2}} = 3^{\frac{n+1}{n}} \cdot \left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n} =$$

$$= 3^{1+\frac{1}{n}} \cdot \left(\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{3}{n}}\right)^{n} = 3^{1+\frac{1}{n}} \cdot \frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n}}{\left(1+\frac{3}{n}\right)^{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 3 \cdot \frac{e^2}{e^3} =$$

$= \frac{3}{e} > 1$ и (4) е разходящ по кр. на Коши.

Използваме, че $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{k}{n}\right)^{n} = e^{k}$, $k \in \mathbb{N}$ (доказано е на упражненията) и че $e = 2,7182\ldots$, така че $e < 3$.