Лекция: Метод на свиващите изображения

Гено Николов, ФМИ, СУ "Св. Климент Охридски"

Съдържание на лекцията

- Метод на свиващите изображения
- Ред на сходимост на итерационен процес

Итерационни методи

Голяма част от методите за приближено пресмятане на корените на уравнения са итерационни. При тях се тръгва от някакво начално приближение x_0 и след това с извършването на определена числена процедура (итерация) се намира следващото приближение x_1. Въз основа на x_1 и x_0 се определя x_2 и т.н. Построява се редица $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$, клоняща към корена ξ на уравнението $f(x) = 0$. Тогава, при достатъчно големи n числото x_n ще даде приближение на корена ξ със зададена точност ε. Ние ще разгледаме тук един клас от итерационни методи, които се базират на така наречения метод на свиващите изображения.

Метод на свиващите изображения

Нека $f(x)$ е функция, определена в $[a, b]$. Ще изследваме уравнението $f(x) = 0$. За нас ще бъде удобно да запишем това уравнение във вида

$$x = \varphi(x) .$$

Това може да стане, например, като добавим x към двете страни на уравнението $f(x) = 0$ или направим друго, еквивалентно преобразование. Ако ξ е корен на уравнението $f(x) = 0$, то очевидно $\xi = \varphi(\xi)$. Да изберем точка x_0 от $[a, b]$ и да построим редицата

$$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

по правилото

$$x_n = \varphi(x_{n-1}), \quad n = 1, 2, \ldots \tag{1}$$

Метод на свиващите изображения

Целта ни е да построим редица $\{x_n\}$, която клони към корена ξ на уравнението $x = \varphi(x)$. Ясно е, че правилото (1) не поражда такава редица за произволна функция φ. Има обаче един клас от уравнения (т.е. от функции φ), при които простото итерационно правило (1) наистина дава редица $\{x_n\}$, която клони към корена ξ. Сега да видим, какви условия върху φ биха гарантирали такава сходимост. Първо, трябва да можем да построим редицата $\{x_n\}$. За целта, всяка следваща точка от редицата трябва да принадлежи на дефиниционната област $[a, b]$ на φ. Това очевидно ще бъде така, ако е изпълнено

Условие 1. $\varphi(x) \in [a, b] \quad$ за всяко $x \in [a, b]$.

Метод на свиващите изображения

Наистина, ако φ удовлетворява Условие 1 и изберем произволно начално приближение x_0 от $[a, b]$, то $x_1 = \varphi(x_0)$ ще принадлежи също на $[a, b]$. Оттук $x_2 = \varphi(x_1) \in [a, b]$ и т.н. И така, доказахме

Лема 1.

Ако φ е изображение на $[a, b]$ в себе си, то при произволно начално приближение x_0 от $[a, b]$, всички останали точки от редицата $\{x_n\}$ принадлежат също на $[a, b]$.

Ние търсим корена на уравнението $x = \varphi(x)$, т.е. търсим точка ξ от $[a, b]$, за която $\xi = \varphi(\xi)$. Точката ξ е неподвижна точка при изображението φ. Следващото просто условие върху φ гарантира наличие на поне една неподвижна точка.

Условие 2. φ е непрекъснато изображение на интервала $[a, b]$ в себе си.

Метод на свиващите изображения

Наистина, нека φ е непрекъсната функция, която удовлетворява Условие 2 (т.е. φ е непрекъснато изображение на $[a, b]$ в себе си). Ако $a = \varphi(a)$, то a е неподвижна точка. Аналогично, ако $b = \varphi(b)$, то b е неподвижна точка. Да допуснем, че $a \neq \varphi(a)$ и $b \neq \varphi(b)$. Тъй като φ е изображение на $[a, b]$ в себе си, то $\varphi(a) \in [a, b]$, $\varphi(b) \in [a, b]$ и следователно $a < \varphi(a), \quad \varphi(b) < b$. Функцията $r(x) := x - \varphi(x)$ е непрекъсната в $[a, b]$ и

$$r(a) = a - \varphi(a) < 0, \quad r(b) = b - \varphi(b) > 0 .$$

Затова съществува точка ξ от $[a, b]$ такава, че $r(\xi) = 0$, т.е. $\xi = \varphi(\xi)$. Да формулираме ясно получения резултат.

Лема 2.

Ако φ е непрекъснато изображение на интервала $[a, b]$ в себе си, то φ има неподвижна точка в $[a, b]$.

Условие на Липшиц

Лема 2 е твърде частен случай от известна теорема от топологията, според която всяко непрекъснато изображение на едно изпъкнало множество Ω от $\mathbb{R}^n$ в себе си притежава неподвижна точка.
Остава да видим какви условия върху φ ще гарантират сходимост на редицата $\{x_n\}$ към неподвижната точка ξ.

Определение

Казваме, че функцията g удовлетворява условието на Липшиц с константа q в $[a, b]$, ако

$$|g(x) - g(y)| \leq q\ |x - y| \quad \text{за всяко} \quad x, y \in [a, b]\,.$$

Отбелязваме, че ако една функция удовлетворява условието на Липшиц в даден интервал, то тя е непрекъсната в този интервал.

Теорема

Следната теорема дава условията за прилагане на метода на свиващите изображения.

Теорема 1.

Нека φ е непрекъснато изображение на $[a, b]$ в себе си, което удовлетворява условието на Липшиц с константа $q < 1$. Тогава

а) Уравнението $x = \varphi(x)$ има единствен корен ξ в $[a, b]$;

б) Редицата $\{x_n\}$ клони към ξ при $n \to \infty$.
Нещо повече,

$$|x_n - \xi| \leq (b - a)\, q^n \quad \text{за всяко} \quad n. \tag{2}$$

Доказателство на Теорема 1

Доказателство. Най-напред ще докажем единствеността на неподвижната точка. Съгласно Лема 2, φ има поне една неподвижна точка. Да допуснем, че те са повече. Нека $\xi_1 = \varphi(\xi_1)$ и $\xi_2 = \varphi(\xi_2)$ за някои ξ_1, ξ_2 от $[a, b]$. Тогава при $\xi_1 \neq \xi_2$,

$$\begin{aligned} |\xi_1 - \xi_2| &= |\varphi(\xi_1) - \varphi(\xi_2)| \\ &\leq q\,|\xi_1 - \xi_2| \quad (\text{по условието на Липшиц}) \\ &< |\xi_1 - \xi_2| \quad (\text{защото } q < 1)\,. \end{aligned}$$

Стигнахме до абсурд. Следователно $\xi_1 = \xi_2$. Единствеността на неподвижната точка е доказана.

Доказателство на Теорема 1 (продължение)

Сега ще докажем оценката (2), от която очевидно следва б). Имаме

$$\begin{aligned} |x_n - \xi| &= |\varphi(x_{n-1}) - \varphi(\xi)| \leq q\,|x_{n-1} - \xi| \\ &= q\,|\varphi(x_{n-2}) - \varphi(\xi)| \leq q^2\,|x_{n-2} - \xi| \\ &. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\leq q^n\,|x_0 - \xi|\,. \end{aligned}$$

Тъй като $x_0 \in [a, b]$ и $\xi \in [a, b]$, то $|x_0 - \xi| < b - a$. С това оценката (2) е доказана. $\square$

Изображение φ, което изпълнява условието на Липшиц с константа по-малка от 1, се нарича свиващо изображение. При него разстоянието между образите $\varphi(x)$ и $\varphi(y)$ е строго по-малко от разстоянието между праобразите x и y (т.е. φ "свива" разстоянията).

Свиващи изображения: достатъчни условия

От теоремата за крайните нараствания следва, че ако φ е диференцируема функция в $[a, b]$ и $|\varphi'(x)| \leq q < 1$ за всяко $x \in [a, b]$, то φ е свиващо изображение. Наистина, по теоремата за крайните нараствания,

$$\varphi(x) - \varphi(y) = \varphi'(\eta)(x - y)$$

за някакво η между x и y. Тогава

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| = |\varphi'(\eta)|\ |(x - y)| \leq q|x - y| \quad (q < 1)$$

и следователно φ е свиващо изображение.

Сходящ итерационен процес

Определение

Нека уравнението $x = \varphi(x)$ има корен ξ в $[a, b]$. Ще казваме, че итерационният процес, породен от функцията φ е сходящ в $[a, b]$, ако при всяко начално приближение x_0 от $[a, b]$, редицата $\{x_n\}$, построена по формулата

$$x_n = \varphi(x_{n-1}), \; n = 1, 2, \dots,$$

е сходяща към корена ξ.

Теорема 1 представя метода на свиващите изображения за построяване на сходящи итерационни процеси. Сега ще приведем една по-слаба форма на тази теорема, която често се използва.

Сходящ итерационен процес

Следствие 1.

Нека ξ е корен на уравнението $x = \varphi(x)$. Да предположим, че φ има непрекъсната производна в околност $\mathcal{U}$ на ξ и $|\varphi'(\xi)| < 1$. Тогава при достатъчно добро начално приближение x_0 итерационният процес, породен от φ, е сходящ. Нещо повече, съществуват константи $C > 0$ и $0 < q < 1$ такива, че

$$|x_n - \xi| \le C\, q^n \quad \text{за всяко } n\,.$$

Доказателство. Тъй като $\varphi'(t)$ е непрекъсната функция в $\mathcal{U}$ и $|\varphi'(\xi)| < 1$, то съществуват $q < 1$ и $\varepsilon > 0$ такива, че

$$|\varphi'(t)| \le q \quad \text{за всяко } t \in [\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon]\,.$$

Доказателство на Следствие 1

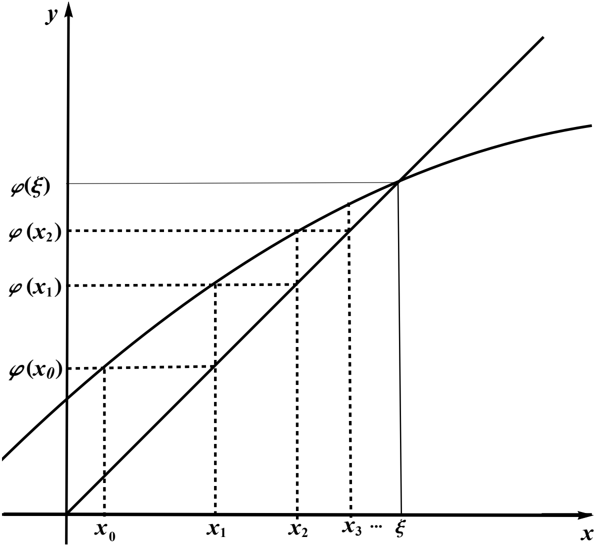
Освен това, при $t \in [\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon]$ имаме

$$|\varphi(t) - \xi| \leq q\, |t - \xi| \leq q\varepsilon < \varepsilon\,,$$

т.е. $\varphi(t) \in [\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon]$. Следователно φ е свиващо изображение на интервала $[\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon]$ в себе си. Тогава всички твърдения на следствието следват от доказаната вече Теорема 1. $\square$

На следващата картинка е представена геометрична илюстрация на метода на свиващите изображения.

Картинка



Ред на сходимост на итерационен процес

Скоростта на сходимост в (2) се определя от общия член q^n на една геометрична прогресия. Затова е прието да се казва, че съответният итерационен процес е сходящ със скорост на геометрична прогресия. Това е доста бърза сходимост. Например, при $q = \frac{1}{2}$ и $n = 10$ получаваме точност от порядъка на 10^{-3}. Има обаче процеси, които са много по-бързо сходящи. За да характеризираме тяхната скорост, ще въведем понятието ред на сходимост.

Определение

Казваме, че итерационният процес $x_0, x_1, \dots$ има ред на сходимост p, $(p > 1)$, ако съществуват положителни константи C и $q < 1$ такива, че

$$|x_n - \xi| \leq Cq^{p^n} \quad \text{за всяко } n\,.$$

Достатъчно условие за ред на сходимост p

Следващата теорема ни дава един начин за определяне реда на сходимост на итерационния процес, породен от функцията φ.

Теорема 2.

Нека φ има непрекъснати производни до p−тата включително в околност на точката ξ, която е неподвижна за φ. Нека

$$\varphi'(\xi) = \ldots = \varphi^{(p-1)}(\xi) = 0, \quad \varphi^{(p)}(\xi) \neq 0 \,.$$

Тогава, при достатъчно добро начално приближение x_0, итерационният процес, породен от φ, има ред на сходимост p.

Доказателство на Теорема 2

Доказателство. По формулата на Тейлър

$$\begin{aligned}\varphi(x) =& \varphi(\xi) + \frac{\varphi'(\xi)}{1!}(x-\xi) + \cdots + \frac{\varphi^{(p-1)}(\xi)}{(p-1)!}(x-\xi)^{p-1} \\ &+ \frac{\varphi^{(p)}(\xi+\theta(x-\xi))}{p!}(x-\xi)^{p},\end{aligned}$$

където $\theta \in (0,1)$. Тъй като $\varphi^{(j)}(\xi) = 0$ за $j = 1, \ldots, p-1$, то

$$\varphi(x) - \varphi(\xi) = \frac{\varphi^{(p)}(\xi+\theta(x-\xi))}{p!}(x-\xi)^{p}.$$

Следователно, при всяко x от достатъчно малка околност $\mathcal{U}$ на ξ,

$$|\varphi(x) - \varphi(\xi)| \leq M\,|x-\xi|^{p},$$

където $M := \max_{t\in\mathcal{U}} \left|\varphi^{(p)}(t)\right| / p!$.

Доказателство на Теорема 2 (продължение)

Специално при $x = x_n$ имаме

$$
\begin{aligned}
|x_{n+1} - \xi| &= |\varphi(x_n) - \varphi(\xi)| \leq M\,|x_n - \xi|^p \\
&= M\,|\varphi(x_{n-1}) - \varphi(\xi)|^p \leq M\,\left\{\, M\,|x_{n-1} - \xi|^p\,\right\}^p \\
&= M^{1+p}|x_{n-1} - \xi|^{p^2} \leq M^{1+p+p^2}|x_{n-2} - \xi|^{p^3} \leq \dots \\
&\leq M^{1+p+\dots+p^n}|x_0 - \xi|^{p^{n+1}} \\
&= M^{\frac{p^{n+1}-1}{p-1}}|x_0 - \xi|^{p^{n+1}} = M^{\frac{1}{1-p}}.\left\{M^{\frac{1}{p-1}}|x_0 - \xi|\right\}^{p^{n+1}}.
\end{aligned}
$$

Доказателство на Теорема 2 (продължение)

Когато x_0 е достатъчно близко до ξ, $M^{1/(p-1)}|x_0 - \xi| \leq q < 1$ и следователно

$$|x_{n+1} - \xi| \leq C\, q^{p^{n+1}} \quad \text{за всяко } n,$$

където сме положили $C = M^{1/(1-p)}$. С това доказателството на Теорема 2 е завършено. $\square$

Край на лекцията !