Деф. Азбука – крайно непразно м-во

Дума над азбука Σ – $w \in \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \Sigma^n$

$\Sigma^n = \underbrace{\Sigma \times \Sigma \times \ldots \times \Sigma}_{n} = \{ (w_1, w_2, \ldots, w_n) \mid w_1 \in \Sigma, w_2 \in \Sigma, \ldots, w_n \in \Sigma \}$

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$

$\Sigma^1 = \Sigma$, $\Sigma^0 = \{\varepsilon\}$, ε – празната дума

Пример $\Sigma = \{a, b, c\}$

Думи над Σ: ε, a, b, c, $aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc, \dots$

$|\Sigma^n| = |\Sigma|^n$

$$\Sigma^* \underset{def}{=} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Sigma^n$$

м-вото от всички думи над Σ

Език над Σ наричаме всяко $L \subseteq \Sigma^*$.

Пример $L = \{ w \in \Sigma^* \mid w \neq \varepsilon \underset{\underset{\text{и}}{\wedge}}{,} w_1 = a \}$

М-вото на всички езици е неизброимо.

Бихме искали за език L, който ни интересува, да имаме програма, т.че

input $w \in \Sigma^*$

output: дали $w \in L$

$\{ w \in \Sigma^* \mid w \neq \varepsilon \wedge w_1 = a \}$

```
bool p(char * w) {
  // if (w[0] == 0) {
  // { return false;
  int k = 0; k++;
  return w[0] == 'a';
}
```

$\in \Gamma^*$, за

Γ = ascii или

Γ = UNICODE или

$\Gamma = \{0, 1, 2, \ldots, 255\}$

Деф. Нека $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$.

$$L_1 \cdot L_2 \underset{def}{=} \{uv \mid u \in L_1, v \in L_2\}$$

Пример. $\{ab\} \cdot \{ab, \varepsilon, ba\} = \{abab, ab, abba\}$

Пример. $\emptyset \cdot L = \{uv \mid u \in \emptyset, v \in L\} = \emptyset$

$L \cdot \emptyset = \emptyset$

$(L_1 \cdot L_2) \cdot L_3 = (L_1 L_2) \cdot L_3$

$\{\varepsilon\} \cdot L = L$

$L \{\varepsilon\} = L$

Деф. Нека $L \subseteq \Sigma^*$.

$$L^0 \underset{def}{=} \{\varepsilon\}$$

$$L^{n+1} \underset{def}{=} L^n L$$

$$L^k = \underbrace{L \cdot L \cdot L \dots L}_{k}$$

$$L^* \underset{def}{=} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L^n$$

$$L^* = \underset{\{\varepsilon\}}{L^0} \cup L \cup L^2 \cup \dots$$

Деф. Нека $L \subseteq \Sigma^*$.

$$\begin{cases} L^0 \overset{=}{\scriptstyle def} \{\varepsilon\} \\ L^{n+1} \overset{=}{\scriptstyle def} L^n \cdot L \end{cases}$$

$$L^* \underset{def}{=} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L^n$$

$w \in \underbrace{L L L \dots L}_{n}$ за някое n

// $w \in L^* \iff$

$w \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L^n \iff$

$w \in L^n$ за някое $n \in \mathbb{N}$

// $w \in L \cdot L \iff \exists u \in L \; \exists v \in L : w = uv$

$\iff$ за някое n $\exists u^{(1)}, u^{(2)}, \dots u^{(n)} \in L$:

$w = u^{(1)} u^{(2)} \dots u^{(n)}$

$$\emptyset^* = \emptyset^0 \cup \emptyset^1 \cup \emptyset^2 \cup \dots = \{\varepsilon\} \cup \emptyset \cup \emptyset^n \cup \dots = \{\varepsilon\}$$

$$\{a,b,c\}^* = \{\varepsilon, a, b, c, aa, ab, ac, ba, bb, bc, aaa, aab, \dots ccc, \dots\}$$

$$\Sigma^* \cdot \{ab\} \cdot \Sigma^* = \{uvw \mid u \in \Sigma^*, v \in \{ab\}, w \in \Sigma^*\} = \{uabw \mid u, w \in \Sigma^*\} = \{\alpha \in \Sigma^* \mid \alpha \text{ содерж } ab\}$$

Деф (регулярен език над Σ)

1) $\emptyset$, $\{\varepsilon\}$, $\{x\}$ за вс $x \in \Sigma$ са р.е.

2) ИХ: Нека $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ са р.е

Тогава

а) $L_1 \cup L_2$ е р.е

б) $L_1 L_2$ е р.е

в) L_1^* е р.е

Зад. Нека $w \in \Sigma^*$. Док, че $L = \{w\}$ е р.е (над Σ).

Реш:

сл 1 $|w| = 0$

сл $w = \varepsilon$

$L = \{w\} = \{\varepsilon\}$ е р.е

сл 2 $|w| = 1$

Нека $w = x$, $x \in \Sigma$

$L = \{w\} = \{x\}$ е р.е

сл 3 $|w| \geq 2$

$w = w_1 w_2 \dots w_{|w|}$

$L = \{w\} = \{w_1\}\{w_2\}\{w_3\} \dots \{w_{|w|}\}$ е р.е

// $\{abc\} = \{a\} \cdot \{b\}\{c\}$

Зад. Нека $L \subseteq \Sigma^*$ е краен език. Док., че L е р.е.

Реш: **сл 1** $|L| = 0$

$L = \{\} = \emptyset$ е р.е.

сл 2 $|L| = 1$

$L = \{w\}$ е р.е. (предходната задача)

а) $L_1 \cup L_2$ е р.е.
б) $L_1 L_2$ е р.е.
в) L_1^* е р.е.

сл 3 $|L| = k \geq 2$

$L = \{w^{(1)}, w^{(2)}, \dots, w^{(k)}\}$.

$L = \{w^{(1)}\} \cup \{w^{(2)}\} \cup \dots \cup \{w^{(k)}\}$ е р.е.

ТВ Нека $L \subseteq \Sigma^*$. Тогава L е р.е.

Док: $L = \bigcup_{w \in L} \{w\}$. L е р.е., защото $\{w\}$ е р.е. за вс. w и обединение на р.е. е р.е. $\square$