Записки от лекции и упражнения по Диференциално и интегрално смятане 2

Силви-Мария Тодорова Гюрова

2018

1 Определен интеграл

1.1 Определение за Риманов интеграл. Основни дефиниции.

Дадена е функцията $f(x)$, която е дефинирана затворения интервал $[a, b]$.

> Дефиниция 1:
> Дадено е една делене на сегмента $[a, b]$, ако са дадени точките $x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n$, за които $a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$. Делeнето на сегмента $[a, b]$ ще означаваме с $\{x_k\}$.

Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в сегмента $[a, b]$ и притежава крайни стойности във всички точки от този сегмент. Нека $[x_{k-1}, x_k]$ за $k = \overline{1, n}$ ги наречем частични сегменти, точките ξ_k за $k = \overline{1, n}$ междинни точки, $\xi \in [x_{k-1}, x_k]$. Ако означим с $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, то числото $d = max_{1 \le k \le n} \Delta x_k$[1] се нарича диаметър на разбиването x_k.
За конкретно делене $\{x_k\}$ ще намерим число, т.нар. интегрална сума $\sigma(x_k, \xi_k) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - k_{k-1})$, където $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Важно уточнение е, че интегралната сума $\sigma(x_k, \xi_k)$ зависи от разбиването $\{x_k\}$, както и от избора на междинната точка ξ_k. Друг запис на интегралната сума е :

$$\sigma(x_k, \xi_k) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k, \quad \xi_k \in [x_{k-1}, x_k].$$

> Дефиниция 2 (Интегруемост по Риман):
> Числото I се нарица граница на интегралните суми $\sigma(x_k, \xi_k)$, когато диаметърът d на деленето $\{x_k\}$ клони към 0, ако за всяко $\epsilon > 0$ съществува някакво $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, че при $d < \epsilon$ при всеки избор на междинни точки ξ_k е в сила неравенството
>
> $$|I - \sigma| < \epsilon$$

> Дефиниция 3:
> Функцията $f(x)$ ще наричаме интегруема по Риман в сегмента $[a, b]$, ако за тази функция в конкретния сегмент съществува границата I на интегралните й суми σ, когато диаметърът d на деленето $\{x_k\}$ клони към нула.

[1] Това е дължината на най-големият частичен сегмент

Границата на интегралната сума ще бележим с $I = \lim_{d->0} \sigma(x_k, \xi_k)$. Ако тази граница съществува, то I ще наричаме определен интеграл на Риман за функцията $f(x)$ в граници a до b и в символно означение има вида $\int_a^b f(x)dx$, т. е $\int_a^b f(x)dx = \lim_{d->0} \sigma(x_k, \xi_k)$. Числото a ще наричаме точна долна граница на интегрирането, а b - точна горна граница на интегрирането.

Твърдение:
Интегруемите по Риман функции са ограничени.

Доказателство:

Да допуснем противното,т.е интегруемите по Риман функции не са ограничени. Нека съществува $\epsilon > 0$, така че за $\forall \delta > 0$ имаме $\{x_k\}$ разбиване на разглеждания сегмент $\Delta = [a, b]$ с диаметър $d < \delta$. Нека $f(x)$ расте неограничено в частичния сегмент $[x_0, x_1]$ (може да предпопложим, че $x_0 = a$) и фиксираме една произволна междиннаточка $\xi_1 \in [x_0, x_1]$. Разглеждаме интегралната сума на Риман

$$\sigma(x_1, \xi_1) = f(\xi_1)(x_1 - x_0) + \sum_{k=2}^{n} f(x_k)(x_k - x_{k-1}) = f(\xi_1)\Delta x_1 + \sum_{k=2}^{n} f(x_k)\Delta x_k.$$

Изполваме дефиницията за интегруемост по Риман, т.е $|I - \sigma| < \epsilon$, с цел да покажем, че функцията ни е ограничена в частичния сегмент $[x_0, x_1]$. Ако тя е ограничена в него, то тя е ограничена и за всеки друг частичен сегмент, като обобщение ще е ограничена и за интервала, в който е дефинирана функцията ни $f(x)$.

$$|I - \sigma| < \epsilon \rightarrow \sigma < I + \epsilon,$$

$$f(\xi_1)\Delta x_1 + \sum_{k=2}^{n} f(x_k)\Delta x_k < I + \epsilon.$$

Правим оценка и използваме неравенството натриъгълника:

$$|f(\xi_1)\Delta x_1| \le |I - \sum_{k=2}^{n} f(x_k)\Delta x_k + \epsilon| \le |I| + |\epsilon| + |\sum_{k=2}^{n} f(x_k)\Delta x_k|.$$

От друга страна, използвайки отново неравенството на триъгълника, може да ограничим първия член на интегралната сума:

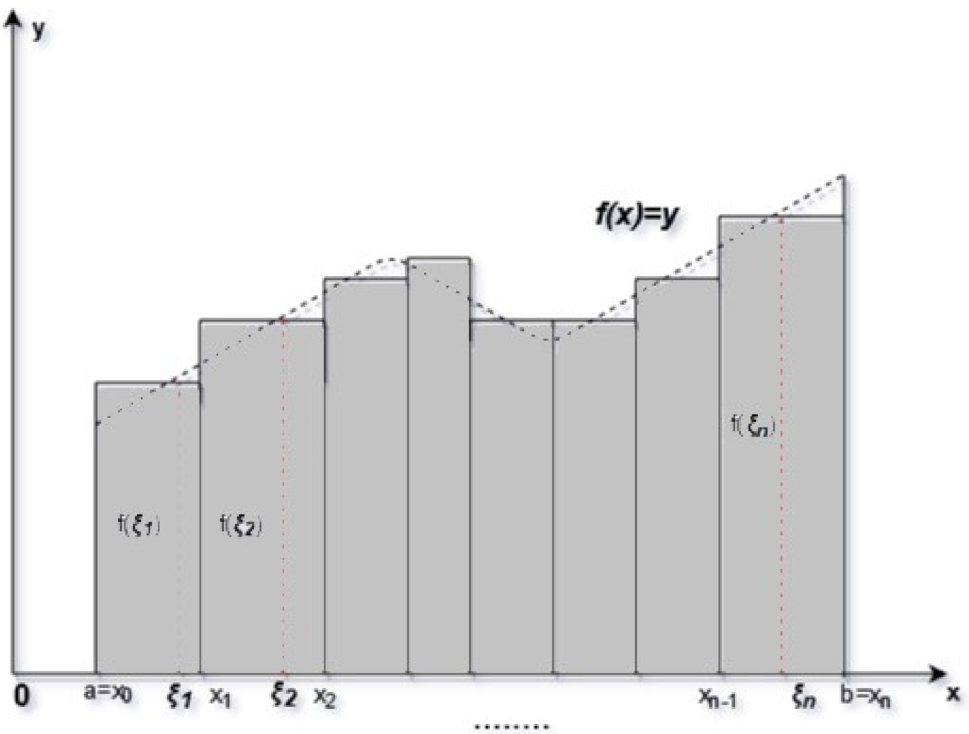
$$|f(\xi_1)\Delta x_1| \le |f(\xi_1)||\Delta x_1|.$$

Използвайки двете горни неравенства, достигаме до извода, че функцията ни в междинната точка ξ_1 е ограничена, с което достигаме до противорение.

$$|f(\xi_1)| \le \frac{|I| + |\epsilon| + |\sum_{k=2}^{n} f(x_k)\Delta x_k|}{|\Delta x_1|}, \quad \text{противоречие с допуснатото.}$$

1.1.1 Геометрична интерпретация

Разглеждаме криволинеен трапец, фигурата ограничена от графиката на непрекъсната неотрицателна функцията $y = f(x)$, зададена в сегмента $[a, b]$, правите $x = a, x = b$, които са перпендикулярни на Ox и абцисата Ox (фиг. 1). Интегралната сума $\sigma(x_k, \xi_k)$, отговарящо на избраното делене $\{x_k\}$ и избраните междинни точки ξ_k представляват лицето на стъполовидната фигура, която на фигурата е в сив цвят[1].



Фигура 1: Геометрично тълкувание на Риманови суми.

1.1.2 Примери:

$\boxed{\text{Пример 1:}}$ Нека е дадена константна функция $f(x) = c$, където c е константа за всяко $x \in [a,b]$. Докажете, че $f(x)$ е интегруема в дадения интервал, имаща стойност на интеграла $c(b-a)$.
$\boxed{\text{Решение:}}$

Нека дадения интервал $[a,b]$ го разбием на множество от подинтервали, определени от точките $\{x_k\}$, за $k = \overline{0,n}$, т.е имаме делението $a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$.
За всеки подинтервал $[x_{k-1}, x_k]$, $\quad k = \overline{k = 0,n}$ избираме междиннта точка $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$.

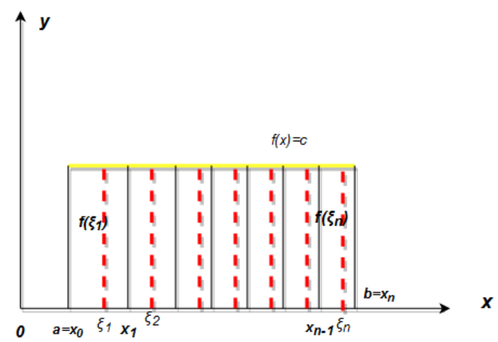
За всяка такава междинна точка стойността на функцията ще е постоянна - $f(\xi_k) = c, \quad \xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Използвайки идеята за Риманови суми, получаваме за интеграланата сума

$$\sigma(x_k, \xi_k) = \sum_{k=0}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\ \xi \in [x_{k-1}, x_k], k = \overline{0,n}$$

Когато разпишем подробно сумата, знаейки че $f(x_k) = c$ за всяко $k = \overline{0,n}$, ще получим

$$\sigma(x_k, \xi_k) = c(x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + ... + x_n - x_{n-1}) =$$
$$= c(x_n - x_0) = c(b-a).$$

Затова $\int_a^b c\,dx = \lim_{d->0} \sigma(x_k, \xi_k) = \lim_{d->0} c(b-a) = c(b-a)$.



Фигура 2: Графика на разглеждатана константна функция (в жълто), използвайки геометричната интерпретация на Риманови суми.

$\boxed{\text{Пример 2:}}$ [2]

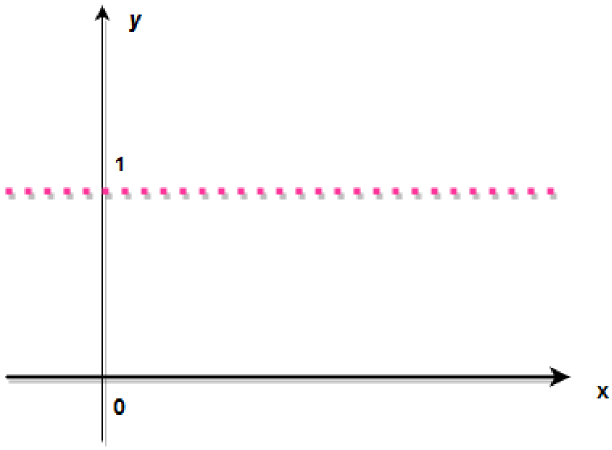
Нека е дадена функцията на Дирихле

$$D(x) = \begin{cases} 1, x \in Q \\ 0, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Ще докажем, че тя не е интегруема в Риманов смисъл[1].

$\boxed{\text{Решение:}}$

Избираме произволно делене $\{x_k\}$ на разглеждания интервал $[a,b]$.



Фигура 3: Графиката на функцията на Дирихле.

Във всеки частичен сегмент съществува поне една точка, която е рационално число ξ_k. Прилагайки идеята за Риманови суми, получаваме вида на интегралната сума

$$\sigma(x_k, \xi_k) = \sum_{k=1}^{n} D(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = b - a$$

В тези сегменти $[x_{k-1}, x_k]$, $k = \overline{1,n}$ има ирационални точки ν_k, $\nu_k \in [x_{k-1}, x_k]$ $k = \overline{1,n}$. Поради този факт, интегралната сума, отговаряща на дадения избор от междинни точки ν_k, $\nu_k \in [x_{k-1}, x_k]$ $k = \overline{1,n}$, се записва по начина:

$$\sigma(x_k, \xi_k) = \sum_{k=1}^{n} D(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} 0.\Delta x_k = 0$$

Следователно, интегралните суми на функцията на Дирихле нямат граница, когато диаметърът на разбиването клони към нула, защото при всеки избор на междинна точка ξ_k, интегралната сума е равна на $b - a \neq 0$, а при други - на нула.

1.2 Суми на Дарбу

Нека $f(x)$ е дефинирана и ограничена в сегмента $[a,b]$ и съществува произволно делене $\{x_k\}$ на разглеждания интервал. От ограничеността на функцията в сегмента $[a,b]$, то тя ще е ограничена за всеки частичен сегмент $[x_{k-1}, x_k]$ $k = \overline{1,n}$. Поради този факт, функцията

[2] Този пример е за функция, ограничена в сегмента $[a,b]$, но не е интегруема по Риман

ще има точна долна граница m_k и точна горна граница във всеки частичен сегмент $[x_{k-1}, x_k]$ $k = \overline{1,n}$.

$$m_k = inf\{f(x)|x \in [x_{k-1}, x_k]\}, \quad M_k = sup\{f(x)|x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

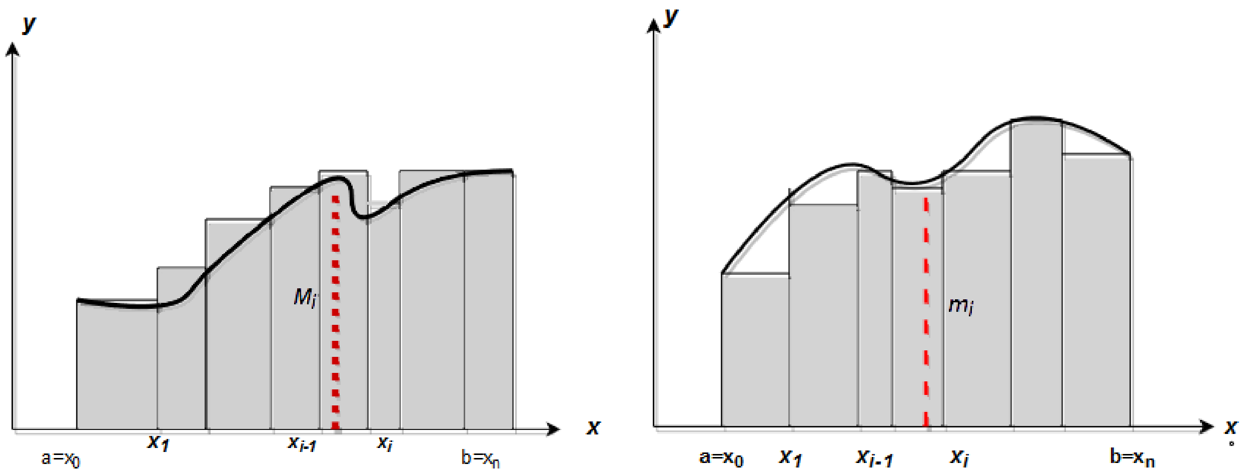
Дефиниция 4:
Сумите дефинирани по начина:

$$S = M_1\Delta x_1 + M_2\Delta x_2 + ... + M_n\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} M_k\Delta x_k \ ,$$

$$s = m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + ... + m_n\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} m_k\Delta x_k \ ,$$

ще наричаме съответно голяма сума на Дарбу и малка сума на Дарбу на функцията $f(x)$ за делението $\{x_k\}$ в сегмента $[a, b]$.

1.2.1 Геометрична интерпретация [1]



Фигура 4: Графики, обясняващи смисъла на големите и малките суми на Дарбу.

даден е криволинеен трапец, т.е фигурата ограничена от сегмента $[a, b]$ на оста Ox, отгоре от непрекъснатата графика на неотрицателната функция $y = f(x)$ и правите $x = a, x = b$, перпендикулярни на абцисата.Нека е дадено произволно делене $\{x_i\}$ на сегмента $[a, b]$.
Разглеждаме лявата картинка на фиг. 4, в която M_i е най-голямата стойност на функцията $y = f(x)$ в сегмента $[x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1,n}$. Всеки сегмент има такова число M_i. Сумирайки всичките лица на стъполовиднбата фигура,съдържаща криволинейния трапец, ще получим интегралнта сума, отговаряща на лицето на защрихованата фигура.
Аналогично за дясната картинка от фиг. 4. Малката сума е равна на лицето на стъполовидната фигура, която се съдържа в криволинейния трапец. Числото m_i се явява минимална стойност на функцията $f(x)$ за всеки частичен сегмент $[x_{i-1,} x_i]$, $i\overline{1,n}$.
След анализиране на геометричния смисъл на големите и малките суми на Дарбу, може да очакваме, че интегралът от интегралните суми ще бъде число, равняващо се на лицето

на криволинейния трапец, когато диаметърът на делението клони към нула. Затова е необходимо и достатъчно условие за интегруемост на функцията, разликата между големите и малките суми на Дарбу да клони към нула.

1.2.2 Основни свойства на големите и малките суми на Дарбу

Лема 1:
Нека $\sigma(x_k, \xi_k)$ е интегрална сума, отговаряща на делението $\{x_k\}$. Тогава за всеки избор на междинните точки $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = \overline{1,n}$ е в сила неравенството

$$s \leq \sigma \leq S,$$

където s, S са съответно малката и голямата сума на Дарбу, отговарящи на конкретното делене.

Доказателство:

Използваме дефинициите за числата m_k, M_k и получаваме, че

$$m_k \leq f(\xi_k) \leq M_k \ (1), \quad \forall \xi_k \in [x_{k-1}, x_k].$$

Умножаваме (1) с $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ и след това извършваме сумиране за $k = \overline{1,n}$.

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k,$$

като използваме и дефинициите за интегралните суми горното неравенство е това еквивалентно на :

$$s \leq \sigma(x_k, \xi_k) \leq S,$$

с което лемата е доказана.

Лема 2:
Нека $\{x_k\}$ е произволно делене на сегмента $[a, b]$, а ϵ е произволно фиксирано число. Тогава могат да се намерят междинни точки ξ_k, така че интегралната сума $\sigma(x_k, \xi_k)$ и голямата сума на Дарбу S да удовлетворяват неравенството $0 \leq S - \sigma < \epsilon$. Междинните точки ϕ_k са такива, че за малките суми на Дарбу s да е изпълнено неравенството $0 \leq \sigma - s < \epsilon$.

Доказателство:

Нека имаме произволно делене $\{x_k\}$ за сегмента $[a, b]$ и $\epsilon > 0$. Първото нещо, което ще докажем е неравенството свързано с големите суми на Дарбу. От дефиницията за числата $M_k = sup\{f(x) | x \in [x_{k-1}, x_k]\}$, то за избрано $\epsilon > 0$, съществува междинна точка $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, така че $0 \leq M_k - f(\xi_k) < \frac{\epsilon}{b-a}$. Умножаваме даденото неравенство с $\Delta x_k = (x_k - x_{k-1})$ и сумираме по k от 1 до n.

$$0 \leq \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k - \sigma(x_k, \xi_k) < \frac{\epsilon}{b-a}.(b-a),$$

а това е еквивалентно на

$$0 \leq S - \sigma(x_k, \xi_k) < \epsilon.$$

Аналогично постъпваме с доказването за неравенството свързано с малките суми на Дарбу. От дефиницията за числата $m_k = inf\{f(x)|x \in [x_{k-1}, x_k]\}$, следва че е в сила неравенството $0 \leq \sigma - m_k < \frac{\epsilon}{b-a}$. Умножаваме неравенството с Δx_k и сумираме по k от 1 до n и така получаваме

$$0 \leq \sigma - s < \epsilon, \quad \text{с което лемата е доказана.}$$

Следствие 1:
За всяко делене $\{x_k\}$ са верни

$$S = sup_{\xi_k} \sigma(x_k, \xi_k) \quad s = inf_{\phi_k} \sigma(x_k, \phi_k),$$

където точнта горна и точната долна граница се взимат при всеки избор на междинните точки.

Лема 3:
При раздробяване на дадено деление голямата сума може са да се намали, а малката - увеличи.

Доказателство:

Нека е дадено произволно делене $\{x_k\}$, а деленето $\{x'_k\}$ е друго, получено от първото делене като добавим само една точка x^*, където $x^* \in [x_{k-1}, x_k]$. тогава в израза за S събираемото $M_k(x_k - x_{k-1})$ се промена на $M'_k(x^* - x_{k-1}) + M''_k(x_k - x^*)$, където $M'_k = sup\{f(x)|x \in [x_{k-1}, x^*]\}, M''_k = sup\{f(x)|x \in [x^*, x_k]\}$. Точната горна граница на функцията върху част от сегмента не надминава точната горна граница на функцията в целия сегмент, т. е $M'_k \leq M_k, M''_k \leq M_k$.

$$M'_k(x^* - x_{k-1}) + M''_k(x_k - x^*) \leq M_k[(x^* - x_{k-1}) + (x_k - x^*)] = M_k \Delta x_k,$$

с което доказахме, че при добавянето на нова точка големите суми намаляват. Аналогично се доказва с малките суми.

Лема 4:
За две произволни (различни) деления на сегмента малката сума за едното от двете деления не надминава голямата сума за другото деление.

Доказателство:

Разглеждаме две произволни, различни деления $\{x'_k\}, \{x''_k\}$ за сегмента $[a, b]$, а с S', S'', s', s'' означаваме съптветните големи и малки суми на Дарбу за тези деления. Нека делението $\{x_k\}$ е обединение на двете предишни деления. Тогава с S, s е съответно голямата и малката сума на Дарбу за обединеното деление. Деленето $\{x_k\}$ се явява дребно за $\{x'_k\}, \{x''_k\}$. Използвайки Лема 3 в сила са неравенствата:

$$S' \geq S, \; S'' \geq S, \; s' \leq s, \; s'' \leq s.$$

От лема 1, знаме че $s \le S$, следва че:

$$s'' \le s \le S \le S'$$
$$s' \le s \le S \le S'',$$

откъдето сме доказали лемата.

Следствие 2:
Множеството на големите суми на функцията $f(x)$, които отговарят на всевъзможните деления на сегмента $[a,b]$, е ограничено отдолу. Множеството на малките суми е ограничено отгоре.

Определение 1:
Горен интеграл на Дарбу от функцията $f(x)$ се нарича точната долна граница $\overline{I}$ на множеството на големите суми на Дарбу $\{S\}$ за $f(x)$ за различните деления на сегмента $[a,b]$. Долен интеграл на Дарбу от функцията $f(x)$ се нарична точната горна граница $\underline{I}$ на множеството на малките суми на Дарбу $\{s\}$ за $f(x)$ за различните деления на сегмента $[a,b]$.

Лема 5:
Долният интеграл на Дарбу никога не надминава горнияинтеграл на Дарбу, т.е $\underline{I} \le \overline{I}$.

Доказателство:

Допускаме противното,т.е $\underline{I} > \overline{I}$. Нека $\underline{I} - \overline{I} = \epsilon > 0$.
За ϵ съгласно дефиницията за числото $\overline{I}$ съществува делене $\{x'_k\}$ на сегмента $[a,b]$, така че да е изпълнено неравенството $S' < \overline{I} + \frac{\epsilon}{2}$ (1), където S' е голямата сума на Дарбу за разглежданото деление. Нека имаме друго деление $\{x''_k\}$, за което е в сила $\underline{I} - \frac{\epsilon}{2} < s''$ (2), където s'' е малката сума на Дарбу за делението. Изваждаме (2) от (1) и получаваме

$$S' - s'' < \overline{I} - \underline{I} + \epsilon.$$

Използваме, че $\overline{I} - \underline{I} = -\epsilon$, затова $S' - s'' < 0$, т.е $S' < s''$, а полученото неравенство противоречи с доказаната лема 4. Следователно допускането е грешно и $\underline{I} \le \overline{I}$.

Определение 2:
Числото A се нарича граница на големите суми S, когато диаметърът на деленията d клони към нула, акоза всякао положително число ϵ може да се намери такова положително число δ, че при $d < \delta$ да е изпълнено неравенството $|S - A| < \epsilon$.

Тази граница може да се представи и във вида $A = \lim_{d->0} S$. Аналогично се определя и границата B на малките суми на Дарбу s.

Основна лема на Дарбу
Горният интеграл на Дарбу $\overline{I}$ е равенна границата на големите суми S, когато диаметърът на делението d клони към 0, т.е $\lim_{d->0} S = \overline{I}$. Аналогично $\lim_{d->0} s = \underline{I}$.

Доказателсвто:

Ще докажем за големите суми на Дарбу. По аналогичен начин се доказва за малките суми. Първо, да отбележим, че ако $f(x)=c, c-const.$, то $S=c(b-a)=\overline{I}$ за всяко деление, то е вярно твърдението.

Допускаме, че функцията ни не е константна, т.е $f(x)\neq c, c-const.$, то $M=sup\{f(x)|x\in[a,b]\} > m=inf\{f(x)|x\in[a,b]\}$. Нека $\epsilon>0$. Ипозлваме дефиницията за числото $\overline{I}$, т.е съществува деление $\{x'_k\}$, така че голямата сума S' на това деление да изпълнява условието $S'-\overline{I}<\frac{\epsilon}{2}$. Нека означим с n броя на точките на делението $\{x'_k\}$, несъвпадащи с краищата на интервала a, b.

Нека $\{x_k\}$ е друго деление на сегмента $[a,b]$, с диаметър $d<\delta=\frac{\epsilon}{2n(M-m)}$ и нека S е голямата сума на това деление. Нека раздробим делението $\{x_k\}$ като добавим тези n на брой точки. Нека полученото деление го означим с $\{x''_k\}$. Тогава голямата сума на новото деление S'' удовлетворява условието:

$$0\leq S-S''\leq(M-m)nd<\frac{\epsilon}{2}.$$

Делението $\{x''_k\}$ може да се разглежда като дробно на делението $\{x'_k\}$ като сме добавили точки от делението $\{x_k\}$, несъвпадащи с краищата на интервала. Използвайки лема 3 и определенниeто за $\overline{I}$, получаваме неравенството:

$$\overline{I}\leq S''\leq S'\to 0\leq S''-\overline{I}\leq S'-\overline{I}.$$

Бяхме предположили, че $S'-\overline{I}<\frac{\epsilon}{2}$, затова $0\leq S''-\overline{I}<\frac{\epsilon}{2}$. Из ползвайки последното неравенство и $0\leq S-S''<\frac{\epsilon}{2}$, получаваме $0\leq S-\overline{I}<\epsilon$, когато диаметърът d е по-малко от избраното по-горе δ. Оттук получаваме, че $\lim_{d->0}S=\overline{I}$, с което сме доказали лемата.

1.3 Теореми за необходими и достатъчни условия (НДУ) за интегруемост.

НДУ за интегруемост. Помощна теорема.
Ограничената функцията $f(x)$ в сегмента $[a,b]$ е интегруема в него $\Longleftrightarrow$ е изпълнено равенството $\overline{I}=\underline{I}$.

Доказателсвто:

Необходимост:

Нека функцията $f(x)$ е интегруема по Риман в разглеждания интервал $[a,b]$. Тогава съществува границата I на интегралните суми на РИман σ при димаметър на разбиването $d->0$. Нека $\forall\epsilon>0$ съществува $\delta>0$, че при всеки избор на междинни точки ξ_k от делението $\{x_k\}$ с диаметър $d<\delta$, то е изпълнено $|I-\sigma(x_k,\xi_k)|<\frac{\epsilon}{4}$. Може да изберем две различни междинни точки ξ'_k,ξ''_k във всеки частичен сегмент $[x_{k-1},x_k]$, така че да са изпълнени неравенствата:

$$S-\sigma(x_k,\xi'_k)\leq\frac{\epsilon}{4},\quad \sigma(x_k,\xi''_k)-s\leq\frac{\epsilon}{4}.$$

За това деление са изпълнени и неравенствата:

$$|I-\sigma(x_k,\xi'_k)|\leq\frac{\epsilon}{4},\quad |I-\sigma(x_k,\xi''_k)|\leq\frac{\epsilon}{4}.$$

Отбелязваме, че

$$S-s=\left[S-\sigma(x_k,\xi'_k)\right]+\left[\sigma(x_k,\xi'_k)\right]+\left[I-\sigma(x_k,\xi''_k)\right]+\left[\sigma(x_k,\xi''_k)-s\right].$$

Модулът на сумата ненадминава сумата на модулите на събираемите, излиза че $S-s<\epsilon$. По този начин при клонена на $d->0$ на делението $\{x_k\}$, границите на големите и малкиите суми съвпадат.За всяко деление са изпълнени неравенствата:

$$s \leq \underline{I} \leq \overline{I} \leq S,$$

и от $S-s<\epsilon>0$ следва, че $\overline{I}=\underline{I}$.

Достатъчност:

Нека $\overline{I}=\underline{I}=A$. Според основната лема на Дарбу $\lim_{d->0} S=\overline{I}, \lim_{d->0} s=\underline{I}$. Затова $\forall \epsilon>0$ може да се намери $\delta>0$, че при всяко деление с диаметър $d<\delta$ са изпълнение неравенствата $\underline{I}-s=A-s<\epsilon,\ S-\overline{I}=S-A<\epsilon$.. От друга страна, знаем $s\leq \sigma(x_k,\xi_k)\leq S$, от което следва

$$A-\epsilon<s\leq \sigma(x_k,\xi_k)\leq S<A+\epsilon$$

Оттук получаваме, че $|A-\sigma(x_k,\xi_k)|<\epsilon$ (за всяко деление с диаметър $d<\delta$), така че $=\lim_{d->0}\sigma(x_k,\xi_k)$, т.е $f(x)$ е интегруема.

Основна теорема

За да е ограничена в сегмента $[a,b]$ функцията $f(x)$, интегруема в същия сегмент, е НДУ за $\forall\epsilon>0$ да съществува деление $\{x_k\}$ на сегмента $[a,b]$, за което $S-s<\epsilon$.

Доказателсвто:

Необходимост: Нека $f(x)$ е интегруема в $[a,b]$. Нека $\epsilon>0$. Числото $I+\frac{\epsilon}{2}$ не е точна долна граница на големите суми на Дарбу. Тогав съществува разбиване $\{x_k'\}$,такова че $I\leq S'\leq I+\frac{\epsilon}{2}$, където S' са големите суми наДарбу за разбиването $\{x_k'\}$. Числото $I-\frac{\epsilon}{2}$ не е точна горна граница за малките суми на Дарбу. Нека съществува деление $\{x_k''\}$, така че $I-\frac{\epsilon}{2}\leq s''\leq I$, където s'' са малките суми на Дарбу за делението $\{x_k''\}$. Обединяваме двете деления, т. е $\{x_k\}=\{x_k'\}\bigcup\{x_k''\}$ и получаваме

$$I-\frac{\epsilon}{2}\leq s''\leq s\leq S\leq S'\leq I+\frac{\epsilon}{2}$$

Откъдето за обединеното деление $\{x_k\}$ получаваме

$$S-s\leq\epsilon, \text{ ,с което доказахме необходимостта.}$$

Достатъчност:

За $\forall\epsilon>0$, съществува такова деление $\{x_k\}$ на сегмента $[a,b]$, че да е в сила $S-s<\epsilon$ за съответните големи и малки суми на Дарбу. Тогава, тъй като $s\leq\underline{I}\leq\overline{I}\leq S$, то $\overline{I}-\underline{I}<\epsilon$. От последното неравенство и произволно ϵ получаваме, че $\overline{I}=\underline{I}$. Иползвайки и помощната теорема следва, че $f(x)$ е интегруема.

Теорема 1

Непрекъснатите в сегмента $[a,b]$ функции са интегруеми по Риман в дадения сегмент.

Доказателство:

Нека $f(x)$ е непрекъсната в $[a,b]$ и $\epsilon > 0$. Пожене функцията ни е непрекъсната в разглеждания сегмент, то тя е равномерна непрекъсната и за конкретното ϵ съществува $\delta > 0$, че съществуват различни точки $\xi', \xi'' \in [a,b]$, за които $|\xi' - \xi''| < \delta$, то $|f(\xi') - f(\xi'')| < \frac{\epsilon}{b-a}$. Това означава, че разликата между точните горна и долна граници на $f(x)$ в произволен сегмент с дължина (d) по-малка от δ е по-малка от числото $\frac{\epsilon}{b-a}$. Нека имаме делението $\{x_k\}$ на сегмента $[a,b]$ с диаметър $d < \delta$. Нека

$$M_k = sup f(x)|x \in [x_{k-1}, x_k] \quad m_k = inf f(x)|x \in [x_{k-1}, x_k].$$

Съгласно определенията за малките и големите суми Дарбу имаме, че

$$S - s = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\Delta x_k.$$

Използвайки $M_k - m_k < \frac{\epsilon}{b-a}$, получаваме

$$S - s < \frac{\epsilon}{b-a} \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = \epsilon,$$

с което доказваме, че функцията $f(x)$ е интегруема в сегмента $[a,b]$.

Теорема 2

Всяка монотонна функция $f(x)$ в сегменнта $[a,b]$ е интегруема в дадения сегмент.

Доказателство:

В случая, когато $f(x) = c, c - const.$ е очевидно доказателството. Нека $f(x)$ е ненамаляваща функция в сегмента $[a,b]$.Нека $\epsilon > 0$ и е дадено разбиването $\{x_k\}$ на сегмента $[a,b]$ с диаметър $d < \frac{\epsilon}{f(b)-f(a)}$. Понеже $f(x)$ не е константа, взимаме предвид, че $f(a) < f(b)$. Целта ни е да оценим разликата $S - s = \sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k)/\Delta x_k$, където M_k, m_k са горната и долната граница на $f(x)$ в $[x_{k-1}, x_k]$. Получаваме, че $S - s < \epsilon \sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k)/(f(b) - f(a))$. За ненамаляваща функция имаме, че $\sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k) = f(b) - f(a)$, откъдето получаваме, че $S - s < \epsilon$, т.е функцията $f(x)$ е интегруема.

1.4 Примитивна на непрекъсната функция. Правила за интегриране на функции.

1.5 Основни свойства на определения интеграл

В тази графа ще бъдат показани основните свойства на определения интеграл. Те наподобяват свойствата на неопределения интеграл. Първото свойство е свързано, че определеният интеграл не зависи от означението на независимата променлива.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt \tag{1}$$

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \tag{2}$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \tag{3}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \tag{4}$$

където $a, b, c \in [a, b]$. Това свойство се нарича адитивност.

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx, \tag{5}$$

където c е константа.

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx, \tag{6}$$

Нека $f(x) \geq 0$ и $f(x)$ е непрекъсната фунцкяи в $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0,\ a \leq b \tag{7}$$

Ако $f(x) \leq g(x)$ и $a \leq b$, то

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx \tag{8}$$

Нека $f(x)$ е непрекъсната в сегмента $[a, b]$. Тогава

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)\int_a^c f(x)dx \tag{9}$$

, където $\xi \in (a, b)$. Това е правило е известно като теорема за средните стойности.

Забележка:

Ако подинтегралната функция е четна или нечетна в конкретен симетричен интервал, притежава едно от двете свойства:

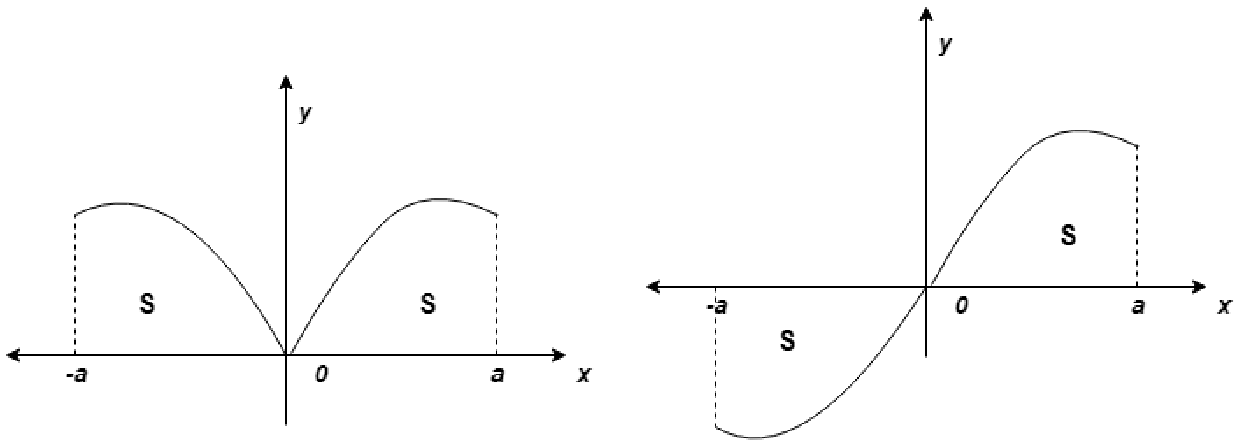
1. $$\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$$

2. $$\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$$

1.6 Интегрални неравенства

В тази графа ще разгледаме доказателства на някои известни неравенства, използвайки дефинициите за интеграли.

Неравенство на Коши-Буняковски-Шварц



Фигура 5: Графики на четна фунцкия (ляво), нечетна фунцкия (дясно) и лицата ка криволинейните трапци, определящи се от тях.

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}\sqrt{\int_a^b g^2(x)dx}$$

Доказателство:

Дефинираме нова функция $F(x) = f(x) - \lambda g(x)$, където λ е произволно число, която е неотрицателна, т.е $F(x) \geq 0(1)$. Интегрираме (1) отновно интервала $[a, b]$. Използвайки свойство (7) от предната глава и повдигайки на квадрат функцията $F(x)$, получаваме:

$$\int_a^b F^2(x)dx \geq 0 \Rightarrow \int_a^b [f(x) - \lambda g(x)]^2 dx \geq 0$$

След разкриване на квадрата достигаме до квадратен тричлен относно λ.

$$\lambda^2 \int_a^b g^2(x)dx - 2\lambda \int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b f^2(x)dx \geq 0$$

За да може горното неравенството да е вярно, трябва дискриминантата да е нестрого отрицателна , т.е $D \leq 0$. ИЗползваме съкратената дискриминанта:

$$\frac{D}{4} = \left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 - \int_a^b f^2(x)dx.\int_a^b g^2(x)dx \leq 0$$

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx.\int_a^b g^2(x)dx$$

Последната стъпка в доказателството е да коренуваме последното неравевстно.

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}\sqrt{\int_a^b g^2(x)dx}.$$

Неравенство на Юнг[1]

Дадени са две неотрицателни числа a, b и две числа p, q, за които знам че са по-големи от единица и $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. В сила е следното неравенство:

$$ab \leq \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}.$$

Доказателство:

Дефинираме функцията $f(x)=x^{\frac{1}{p}}-\frac{x}{p}$ за $x \geq 0$. Понеже $f'(x)=\frac{1}{p}(x^{-\frac{1}{q}}-1)$, то $f'(x)>0$ за $0<x<1$ и $f'(x)<0$ за $x>1$. В точката $x=1$ $f'(1)=0$ приема най-голямата си стойсност $f(1)=1-\frac{1}{p}=\frac{1}{q}$. Откъдето следва, че дефинираната от нас функция $f(x)=x^{\frac{1}{p}}-\frac{x}{p} \leq \frac{1}{q}$ за $x \geq 0$. Полагаме $x=\frac{a^p}{b^q},\ b \neq 0$ и получаваме търсеното неравенство.

Неравенство на Хьолдер

Нека $f(x), g(x)$ са произволни две интегруеми функции в сегмента $[a, b]$. Нека p, q са две числа по-големи от 1 и за тях е в сила $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Товага е изпълнено следното неравенство:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \leq \left\{\int_a^b f^p(x)dx\right\}^{\frac{1}{p}} . \left\{\int_a^b g^q(x)dx\right\}^{\frac{1}{q}}.$$

Доказателство:

Дадени са функциите $f(x), g(x)$, които са неотрицателни, дефинирани и интегруеми в сегмента $[a, b]$. Нека имаме произволно делене $\{x_i\},\ i=\overline{0,n}$, т.е $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$. Нека разгледаме неравенството:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \sum_{i=1}^{n}\left(a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} . \sum_{i=1}^{n}\left(b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}, \quad p, q>1, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

Полагаме $a_i=f(x_i)(x_i-x_{i-1})^{\frac{1}{p}},\ b_i=g(x_i)(x_i-x_{i-1})^{\frac{1}{q}}$ за $i=\overline{1,n}$ и заместваме в горното неравенство като изпозлваме факта, че $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)g(x_i) \leq \left\{\sum_{i=1}^{n} f^p(x_i)(x_i-x_{i-1})\right\}^{\frac{1}{p}} . \left\{\sum_{i=1}^{n} g^q(x_i)(x_i-x_{i-1})\right\}^{\frac{1}{q}}$$

Може да направим аналог на полученото неравенство с интегралните Риманови суми. Следващата ни стъпка в доказателството е да направим граничен преход $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}->0$ в горното неравенството и така получаваме:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \leq \left\{\int_a^b f^p(x)dx\right\}^{\frac{1}{p}} . \left\{\int_a^b g^q(x)dx\right\}^{\frac{1}{q}}.$$ [3]

Неравенство на Минковски

Нека $f(x), g(x)$ са две произволни неотрицатлени функции, които са интегруеми в сегмента $[a, b]$ и числото $k \geq 1$. Тогава е в сила неравенството:

$$\left\{\int_a^b [f(x)+g(x)]^k dx\right\}^{\frac{1}{k}} \leq \left\{\int_a^b f^k(x)dx\right\}^{\frac{1}{k}}+\left\{\int_a^b g^k(x)dx\right\}^{\frac{1}{k}}$$

[3] При p=q=2 получаваме неравенстото на Коши-Буняковски-Шварц.

Доказателство:

Нека $f(x), g(x)$ са произволни две интегруеми функции в сегмента $[a, b]$. Нека имаме произволно делене $\{x_i\}$, $i = \overline{0, n}$, т.е $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b$. Нека разгледаме неравенството:

$$\left\{\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^k\right\}^{\frac{1}{k}} \leq \left\{\sum_{i=1}^{n} a_i^k\right\}^{\frac{1}{k}} . \left\{\sum_{i=1}^{n} b_i^k\right\}^{\frac{1}{k}}.$$

Полагаме $a_i = f(x_i)(x_i - x_{i-1})^{\frac{1}{k}}$, $b_i = g(x_i)(x_i - x_{i-1})^{\frac{1}{k}}$ за $i = \overline{1, n}$ и заместваме в горното неравенство.

$$\left\{\sum_{i=1}^{n}(f(x_i)+g(x_i))^k(x_i-x_{i-1})\right\}^{\frac{1}{k}} \leq \left\{\sum_{i=1}^{n} f^k(x_i)(x_i-x_{i-1})\right\}^{\frac{1}{k}} . \left\{\sum_{i=1}^{n} g^k(x_i)(x_i-x_{i-1})\right\}^{\frac{1}{k}}.$$

Полученото неравенство има аналог с интегралните Риманови суми. Следващата ни стъпка в доказателството е да направим граничен преход $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} -> 0$ в горното неравенството и така получаваме:

$$\left\{\int_a^b [f(x)+g(x)]^k dx\right\}^{\frac{1}{k}} \leq \left\{\int_a^b f^k(x)dx\right\}^{\frac{1}{k}} + \left\{\int_a^b g^k(x)dx\right\}^{\frac{1}{k}}.$$

Интегрално неравенство на Йенсен

Нека функцията $p(x)$ е дефинирана и неотрицателна в сегмента $[a, b]$, а функцията $\phi(x)$ е дефинирана в същия сегмент, приемаща стойности в разглежднаия интервал Δ. Функцията $f(x)$ е изпъкнала в Δ. Тогава е изпълнено неравенството:

$$f\left[\frac{\int_a^b p(x)\phi(x)dx}{\int_a^b p(x)dx}\right] \leq \frac{\int_a^b p(x)f(\phi(x))dx}{\int_a^b p(x)dx}.$$

Доказателство:

Дадедно е, че функцията $f(x)$ е изпъкнала в Δ за $x_i \in \Delta$, $i = \overline{0, n}$. Нека p_i са положителни числа. В разглеждания сегмент $[a, b]$ съществува произволно делене x_i. Разглеждаме неравенството:

$$f\left[\frac{\sum_{i=1}^n p_i x_i}{\sum_{i=1}^n p_i}\right] \leq \frac{\sum_{i=1}^n p_i f(x_i)}{\sum_{i=1}^n p_i}.$$

Полагаме в горното неравенство $x_i \to \phi(x_i), p_i \to p_i(x_i - x_{i-1})$. Извършваме грнаичен преход $\Delta x = x_i - x_{i-1} -> 0$ и получаваме търсеното неравенство.

1.7 Задачи с примерни решения:

Съдържание

Литература

[1] В.А. Илин, В. А. Сандовничи, Бл. Сендов, Математически анализ 1, Наука и изкуство, 1979, СОфия.