Лекция 2: Примитивно рекурсивни функции (продължение)

1.4 Примитивна рекурсивност на някои функции

(продължение от миналия час)

Твърдение 1.5. Следните функции са примитивно рекурсивни:

а) $f(x, y) = x + y$ (събиране).

Доказателство. Ще конструираме примитивно рекурсивна схема за f. Избираме си рекурсията да е по втория аргумент на f (тя е комутативна, тъй че няма значение кой от двата ще изберем). Базисният случай е ясен:

$$f(x, 0) = x + 0 = x.$$

Сега трябва да намерим връзка между $f(x, y)$ и $f(x, y + 1)$. В случая тя се вижда веднага:

$$f(x, y + 1) = x + (y + 1) = (x + y) + 1 = f(x, y) + 1 = \mathcal{S}(f(x, y)).$$

Получаваме общо

$$\left| \begin{array}{ll} f(x,0) & = I_1^1(x) \\ f(x,y+1) & = F(x,y,f(x,y)) \end{array} \right.$$

за $F(x, y, z) = \mathcal{S}(z)$. Тази функция е примитивно рекурсивна, защото се получава от изходната $\mathcal{S}$ с добавяне на две фиктивни променливи (тук използваме доказаното по-горе *Твърдение* 1.4). Финално, f се получава с примитивна рекурсия от примитивно рекурсивните функции I_1^1 и F, следователно f е примитивно рекурсивна. □

Въпрос: Как мислите, защо не използвахме по-краткото разсъждение, че събирането може да се представи като композиция на изходните функции $\mathcal{S}$ и I_1^2, което се вижда от следните равенства:

$$x + y = x + \underbrace{1 + \dots + 1}_{y \text{ пъти}} = \underbrace{\mathcal{S}(\dots\mathcal{S}}_{y \text{ пъти}}(x)\dots) = \underbrace{\mathcal{S}(\dots\mathcal{S}}_{y \text{ пъти}}(I_1^2(x,y))\dots)?$$

б) $g(x, y) = x.y$ (умножение).

Доказателство. Отново ще използваме примитивна рекурсия. Имаме

$$x.0 = 0$$
$$x.(y + 1) = x.y + x,$$

и значи схемата за g трябва да е ето тази:

$$\left| \begin{array}{l} g(x,0) = 0 = \mathcal{O}(x) \\ g(x,y+1) = g(x,y) + x = G(x,y,g(x,y)). \end{array} \right.$$

Функцията $G(x, y, z) = x + z$ е примитивно рекурсивна съгласно а) и *Твърдение* 1.4, следователно g ще е примитивно рекурсивна също. □

в) $h(x, y) = x^y$ (степенуване). Тук по дефиниция $0^0 = 1$. **Доказателство.** Използваме, че

$$x^0 = 1$$
$$x^{y+1} = x^y.x,$$

откъдето

$$\left| \begin{array}{l} h(x, 0) = 1 = C_1^1(x) \\ h(x, y + 1) = h(x, y).x = H(x, y, h(x, y)), \end{array} \right.$$

където $H(x, y, z) = x.z$ е примитивно рекурсивна, съгласно вече доказаното в б). □

Въпрос: Как ще изглежда функцията $u(x, y)$, която се получава от функцията h (степенуването) по начина, по който h беше получена от умножението? А ако повторите това разсъждение, като вместо h вземете новата функция u?

г) $p(x) = x \dot{-} 1$ — функцията *предшественик* (**p**redecessor), като по дефиниция:

$$x \dot{-} 1 = \begin{cases} x - 1, & \text{ако } x > 0 \\ 0, & \text{ако } x = 0. \end{cases}$$

Доказателство. Лесно се вижда, че

$$0 \dot{-} 1 = 0$$
$$(x + 1) \dot{-} 1 = x,$$

или все едно имаме следната примитивно рекурсивна схема за p:

$$\left| \begin{array}{l} p(0) = 0 \\ p(x + 1) = x = I_1^2(x, p(x)). \end{array} \right.$$

□

д) $u(x, y) = x \dot{-} y$. Това е функцията *коригирана разлика*, която се дефинира като:

$$x \dot{-} y = \begin{cases} x - y, & \text{ако } x \geq y \\ 0, & \text{ако } x < y. \end{cases}$$

Доказателство. Целта ни е да изразим $x \dot{-} (y + 1)$ чрез $x \dot{-} y$. Да се убедим, че

$$x \dot{-} (y + 1) = (x \dot{-} y) \dot{-} 1.$$

Разглеждаме случаите от дефиницията на $x \dot{-} (y + 1)$:
1 сл. $x \geq y + 1$. Тогава $x - y \geq 1$ и следователно за израза вдясно ще имаме:

$$(x \dot{-} y) \dot{-} 1 \;=\; (x - y) \dot{-} 1 \;=\; x - y - 1.$$

Понеже $x \geq y+1$, вляво ще имаме:

$$x \dot{-} (y+1) = \ x-(y+1) \ = \ x-y-1,$$

и значи в този случай двете страни са равни.

2 сл. $x < y+1$. Тогава $x \leq y$ и лесно се вижда, че двете страни на горното равенство са 0. Сега преписваме тържествено:

$$\left| \begin{array}{l} u(x,0) = x \\ u(x,y+1) = u(x,y) \dot{-} 1 = p(u(x,y)), \end{array} \right.$$

откъдето се вижда, че функцията u е примитивно рекурсивна. $\square$

е) функцията $sg(x)$ (*сигнум*), дефинирана като:

$$sg(x) = \begin{cases} 0, & \text{ако } x = 0 \\ 1, & \text{ако } x > 0. \end{cases}$$

Да отбележим, че всъщност $sg(x)$ различава не знака на аргумента си, а дали той е равен или различен от 0.

Доказателство. Имаме

$$\left| \begin{array}{l} sg(0) = 0 \\ sg(x+1) = 1 = C_1^2(x, sg(x)). \end{array} \right.$$

$\square$

ж) функцията $\overline{sg}(x)$:

$$\overline{sg}(x) = \begin{cases} 1, & \text{ако } x = 0 \\ 0, & \text{ако } x > 0. \end{cases}$$

Доказателство. Очевидно

$$\overline{sg}(x) = 1 \dot{-} sg(x).$$

$\square$

з) $|x-y|$ — абсолютната стойност на разликата на x и y.

Доказателство. Следва от равенството

$$|x-y| = (x \dot{-} y) + (y \dot{-} x),$$

което се проверява директно с разглеждане на случаите $x \geq y$ и $x < y$. Следователно $|x-y|$ ще е примитивно рекурсивна като суперпозиция на функции, за които вече доказахме, че са примитивно рекурсивни. $\square$

и) $max(x, y)$.

Доказателство. Да се убедим, че

$$max(x, y) \;=\; x + (y \dot{-} x).$$

Наистина, ако $x \geq y$, стойността на израза вдясно ще е

$$x + (y \dot{-} x) = x + 0 = x,$$

което е точно $max(x, y)$ в този случай. Ако пък $x < y$, тогава

$$x + (y \dot{-} x) = x + (y - x) = y,$$

което сега е по-голямото от двете числа x и y. □

к) $min(x, y)$.

Доказателство. Следва от равенството

$$min(x, y) \;=\; x \dot{-} (x \dot{-} y),$$

което се проверява както по-горе. □

Задачи:

1 зад. а) Докажете, че всеки полином с коефициенти от $\mathbb{N}$ е примитивно рекурсивна функция.
б) Докажете, че е примитивно рекурсивна функцията $|p(x)|$, където $p(x)$ е полином с *цели* коефициенти.

Решение. а) Полиномът $p(x) = a_0x^n + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ можем да препишем като

$$p(x) = C^1_{a_0}(x).x^n + \cdots + C^1_{a_{n-1}}(x).x + C^1_{a_n}(x).$$

Сега остава да приложим *Задача* 1.4 и предишното твърдение. □

б) Можем да си мислим $p(x)$ като разлика на два полинома $p_1(x)$ и $p_2(x)$ с коефициенти от $\mathbb{N}$. Тогава

$$|p(x)| \;=\; |p_1(x) - p_2(x)|,$$

и сега прилагаме *Твърдение* 1.5 з).

2 зад. Докажете, че е примитивно рекурсивна функцията

$$f(x_1, \ldots, x_n) = max(x_1, \ldots, x_n).$$

Решение. Използваме представянето

$$max(x_1, \ldots, x_n) = max(x_1, max(x_2, \ldots, max(x_{n-1}, x_n) \ldots))$$

и прилагаме *Твърдение* 1.5 и). $\square$

3 зад. Нека f е примитивно рекурсивна функция. Докажете, че е примитивно рекурсивна и функцията

$$g(x_1, \ldots, x_n, y) = max\{f(x_1, \ldots, x_n, z) \mid z \leq y\}.$$

Решение. Лесно се съобразява, че g удовлетворява следната примитивно рекурсивна схема:

$$\left| \begin{array}{lcl} g(\bar{x}, 0) & = & f(\bar{x}, 0) \\ g(\bar{x}, y+1) & = & max(g(\bar{x}, y), f(\bar{x}, y+1)). \end{array} \right.$$

$\square$

4 зад. Нека $f(\bar{x}, y)$ и $b(\bar{x})$ са примитивно рекурсивни. Докажете, че е примитивно рекурсивна и функцията

$$g^*(\bar{x}) = max\{f(\bar{x}, z) \mid z \leq b(\bar{x})\}.$$

Решение. Функцията g^* можем да си представяме така:

$$g^*(\bar{x}) = g(\bar{x}, b(\bar{x})),$$

където g е функцията от предишната задача. $\square$

5 зад. Намерете явния вид на функцията f, която се определя с примитивно рекурсивната схема

$$\left| \begin{array}{ll} f(x, 0) & = g(x) \\ f(x, y+1) & = h(x, y, f(x, y)) \end{array} \right.$$

от функциите g и h, където:

а) $g(x) = x$ и $h(x, y, z) = z^x$;

б) $g(x) = 1$ и $h(x, y, z) = x^z$.

Решение. С индукция по y покажете, че:

а) $f(x, y) = x^{x^y}$;

б) $f(x, y) = \underbrace{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{x}}}}}_{y \text{ пъти}}$, като приемаме, че $\underbrace{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{x}}}}}_{0 \text{ пъти}} \stackrel{\text{деф}}{=} 1$. $\square$

6 зад. Докажете, че са примитивно рекурсивни функциите

а) $g(x) = \underbrace{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{x}}}}}_{x \text{ пъти}}$; б) $h(x) = \underbrace{2^{\cdot^{\cdot^{2^x}}}}_{x \text{ пъти}}$.

Решение. а) $g(x) = f(x, x)$, където f е функцията от подточка б) на предната задача.

б) Като използвате отново същата задача, напишете примитивно рекурсивна схема за по-общата функция $h^*(x, y) = \underbrace{2^{\cdot^{\cdot^{2^x}}}}_{y \text{ пъти}}$.

$\square$

1.5 Примитивно рекурсивни предикати

Предикат на n аргумента в множеството $\mathbb{N}$ е тотално изображение

$$p\colon\ \mathbb{N}^n \longrightarrow \{\mathbf{t}, \mathbf{f}\},$$

където $\mathbf{t}$ и $\mathbf{f}$ са булевите константи *истина* и *лъжа*.

Вместо $p(\bar{x}) = \mathbf{t}$ обикновено ще пишем само $p(\bar{x})$ и ще казваме, че предикатът p е истина (или е верен) в $\bar{x}$, а вместо $p(\bar{x}) = \mathbf{f}$ ще пишем $\neg p(\bar{x})$ и ще казваме, че предикатът p е лъжа (не е верен) в $\bar{x}$.

Примери.

1) $p(x) \overset{\text{деф}}{\iff} x$ е просто — *унарен* предикат;

2) $gt(x, y) \overset{\text{деф}}{\iff} x > y$ — *бинарен* предикат;

3) $q(x, y, z) \overset{\text{деф}}{\iff} z > 1 \;\&\; x \equiv y\ (mod\ z)$ — *тернарен* предикат.

1.5.1 Характеристична функция на предикат

За да можем говорим за примитивна рекурсивност на предикат p, е удобно преди това да въведем *числова* функция, която го представя. Тази функция се нарича *характеристична функция* на предиката и се означава с χ_p. По определение

$$\chi_p(\bar{x}) = \begin{cases} 0, & \text{ако } p(\bar{x}) = \mathbf{t} \\ 1, & \text{ако } p(\bar{x}) = \mathbf{f}. \end{cases}$$

Да обърнем внимание, че *истината* кодираме с 0, а *лъжата* — с 1, което е обратно на общоприетото, но има известни технически предимства.

Когато вече имаме с числова функция, която задава един предикат, следващото определение изглежда съвсем естествено:

Определение 1.11. Казваме, че предикатът p е *примитивно рекурсивен*, ако неговата характеристична функция χ_p е примитивно рекурсивна функция.

В редки случаи ще ни се налага да говорим за *рекурсивни* предикати. Определението им е аналогично на горното:

Определение 1.12. Казваме, че предикатът p е *рекурсивен*, ако характеристичната му функция χ_p е рекурсивна функция.

1.5.2 Основни свойства на примитивно рекурсивните предикати

Следват няколко съвсем прости твърдения, които ще използваме често по-нататък. Ще ги формулираме за примитивно рекурсивните предикати, но обръщаме внимание, че те остават в сила и когато заменим "примитивно рекурсивен" с "рекурсивен".

Твърдение 1.6. (НДУ за примитивна рекурсивност.) Предикатът p е примитивно рекурсивен тогава и само тогава, когато съществува примитивно рекурсивна функция f, такава че за всяко $\bar{x} \in \mathbb{N}^n$:

$$p(\bar{x}) \iff f(\bar{x}) = 0.$$

Доказателство. $\implies$ Ако p е примитивно рекурсивен, то в качеството на f можем да вземем характеристичната му функция χ_p (която има това допълнително свойство, че е 0-1 функция).

$\impliedby$ Обратно, ако има функция f с горното свойство, непосредствено се вижда, че за всяко $\bar{x}$

$$\chi_p(\bar{x}) = sg(f(\bar{x})),$$

т.е. $\chi_p = sg \circ f$ и следователно χ_p е примитивно рекурсивна. □

Задача 1.5. Докажете, че предикатите $=$ и $\geq$ са примитивно рекурсивни.

Решение. Лесно се вижда, че

$$x = y \iff \underbrace{|x - y|}_{f(x,y)} = 0 \qquad \text{и} \qquad x \geq y \iff \underbrace{y \dot{-} x}_{g(x,y)} = 0,$$

откъдето по горното твърдение получаваме, че тези два пердиката са примитивно рекурсивни. □

Твърдение 1.7. Нека p е k-местен примитивно рекурсивен предикат, а $f_1, \dots, f_k$ са примитивно рекурсивни функции, като всяка от тях е на n аргумента. Тогава предикатът q, който се дефинира с еквивалентността

$$q(x_1, \dots, x_n) \stackrel{\text{деф}}{\iff} p(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_k(x_1, \dots, x_n))$$

също е примитивно рекурсивен.

Доказателство. Следва от факта, че

$$\chi_q \;=\; \chi_p(f_1, \dots, f_k).$$

□

Пример. По горното твърдение, примитивно рекурсивен е предикатът

$$q(x, y, z) \iff x + y = z^2.$$

Твърдение 1.8. (Булевите операции запазват примитивната рекурсивност.) Нека p и q са примитивно рекурсивни предикати. Тогава са примитивно рекурсивни и предикатите $p \mathbin{\&} q$, $p \vee q$ и $\neg p$.

Доказателство. По определение:

$$(p \mathbin{\&} q)(\bar{x}) \iff p(\bar{x}) \mathbin{\&} q(\bar{x}) \iff \chi_p(\bar{x}) = 0 \mathbin{\&} \chi_q(\bar{x}) = 0 \iff \underbrace{\chi_p(\bar{x}) + \chi_q(\bar{x})}_{f(\bar{x})} = 0,$$

където f е примитивно рекурсивна, откъдето съгласно *Твърдение* 1.6 получаваме, че предикатът $p \mathbin{\&} q$ е примитивно рекурсивен.

Аналогично, за $p \vee q$ ще имаме:

$$(p \vee q)(\bar{x}) \iff p(\bar{x}) \vee q(\bar{x}) \iff \chi_p(\bar{x}) = 0 \vee \chi_q(\bar{x}) = 0 \iff \underbrace{\chi_p(\bar{x}).\chi_q(\bar{x})}_{g(\bar{x})} = 0,$$

където g е примитивно рекурсивна. Следователно предикатът $p \vee q$ е примитивно рекурсивен.

За характеристичната функция на $\neg p$ е в сила представянето:

$$\chi_{\neg p} = \overline{sg} \circ \chi_p.$$

□

Оттук, като използваме вече установения факт, че предикатите $=$ и $\geq$ са примитивно рекурсивни (*Задача* 1.5), получаваме примитивната рекурсивност на още няколко основни предикати.

Задача 1.6. Докажете, че всеки от предикатите $<$, $\leq$, $>$ и $\neq$ е примитивно рекурсивен.

Решение. Следва от *Твърдение* 1.8 и еквивалентностите

$$x < y \iff \neg\,(x \geq y), \qquad x \leq y \iff x < y \;\vee\; x = y,$$

$$x > y \iff \neg\,(x \leq y), \qquad x \neq y \iff \neg\,(x = y).$$

□

1.5.3 Ограничени квантори

Определение 1.13. Нека $p(\bar{x}, y)$ е произволен предикат. Дефинираме предикатите q и r, които се получават от p посредством *ограничените квантори за съществуване и всеобщност* както следва:

$$q(\bar{x}, y) \iff \exists z_{z \leq y}\; p(\bar{x}, z)$$

$$r(\bar{x}, y) \iff \forall z_{z \leq y}\; p(\bar{x}, z).$$

С други думи, $q(\bar{x}, y)$ е истина, ако *за поне едно* $z \leq y$ предикатът p в $(\bar{x}, z)$ е истина, докато $r(\bar{x}, y)$ е истина, ако *за всяко* $z \leq y$ предикатът p в $(\bar{x}, z)$ е истина.

Тези дефиниции можем да препишем и така:

$$q(\bar{x}, y) \iff p(\bar{x}, 0) \vee p(\bar{x}, 1) \vee \dots \vee p(\bar{x}, y)$$

$$r(\bar{x}, y) \iff p(\bar{x}, 0) \;\&\; p(\bar{x}, 1) \;\&\; \dots \;\&\; p(\bar{x}, y).$$

Ограничените квантори запазват примитивната рекурсивност, за разлика от неограничените, където определено няма да е така.

Твърдение 1.9. (Ограничените квантори запазват примитивната рекурсивност.) Нека p е примитивно рекурсивен предикат. Тогава са примитивно рекурсивни и предикатите q и r, дефинирани като:

$$q(\bar{x}, y) \iff \exists z_{z \leq y}\; p(\bar{x}, z)$$

$$r(\bar{x}, y) \iff \forall z_{z \leq y}\; p(\bar{x}, z).$$

Доказателство. От определението на q се вижда, че

$$q(\bar{x}, y+1) \iff \underbrace{\exists z_{z \leq y}\; p(\bar{x}, z)}_{q(\bar{x}, y)} \vee p(\bar{x}, y+1),$$

откъдето

$$\chi_q(\bar{x}, y+1) = 0 \iff \chi_q(\bar{x}, y) = 0 \;\vee\; \chi_p(\bar{x}, y+1) = 0.$$

Оттук за χ_q можем да запишем

$$\chi_q(\bar{x}, y+1) \;=\; min(\chi_q(\bar{x}, y),\; \chi_p(\bar{x}, y+1)).$$

Освен това при $y = 0$ очевидно

$$q(\bar{x}, 0) \iff p(\bar{x}, 0).$$

Така получихме следната примитивно рекурсивна схема за χ_q:

$$\left|\begin{array}{ll} \chi_q(\bar{x}, 0) & = \chi_p(\bar{x}, 0) \\ \chi_q(\bar{x}, y+1) & = min(\chi_q(\bar{x}, y),\; \chi_p(\bar{x}, y+1)). \end{array}\right.$$

Но характеристичната функция χ_p е примитивно рекурсивна по условие, а функцията $min(x, y)$ е такава съгласно *Твърдение* 1.5 и), следователно и χ_q ще е примитивно рекурсивна.

За предиката r, който се определя чрез ограничения квантор за всеобщност, разсъждаваме по подобен начин, като забележим, че този път

$$r(\bar{x}, y+1) \iff \underbrace{\forall z_{z \leq y}\; p(\bar{x}, z)}_{r(\bar{x}, y)} \;\&\; p(\bar{x}, y+1),$$

и значи

$$\chi_r(\bar{x}, y+1) = 0 \iff \chi_r(\bar{x}, y) = 0 \ \& \ \chi_p(\bar{x}, y+1) = 0.$$

Тогава за χ_r ще имаме следната дефиниция с примитивна рекурсия:

$$\left|\begin{array}{ll} \chi_r(\bar{x}, 0) & = \chi_p(\bar{x}, 0) \\ \chi_r(\bar{x}, y+1) & = max(\chi_r(\bar{x}, y),\ \chi_p(\bar{x}, y+1)). \end{array}\right.$$

□

Задача 1.7. Докажете, че е примитивно рекурсивен предикатът sq, различаващ дали аргументът му е точен квадрат:

$$sq(x) \iff x \text{ е точен квадрат.}$$

Решение. По определение

$$sq(x) \iff \exists z(z^2 = x).$$

Ясно е, че горният квантор $\exists z$ се ограничава от x, т.е. всъщност имаме

$$sq(x) \iff \exists z_{z \leq x} \ (\underbrace{z^2 = x}_{q(x,z)}),$$

и значи sq е примитивно рекурсивен, съгласно *Твърдение* 1.7 и *Твърдение* 1.9. □

Често ще ни се налага да използваме следното обобщение на горното *Твърдение* 1.9:

Следствие 1.1. Нека $p(\bar{x}, y)$ е примитивно рекурсивен предикат, а $b(\bar{x})$ е примитивно рекурсивна функция. Тогава са примитивно рекурсивни и предикатите q^* и r^*, дефинирани с еквивалентностите:

$$q^*(\bar{x}) \iff \exists z_{z \leq b(\bar{x})} \ p(\bar{x}, z)$$

$$r^*(\bar{x}) \iff \forall z_{z \leq b(\bar{x})} \ p(\bar{x}, z).$$

Доказателство. Нека $q(\bar{x}, y)$ е предикатът, който се получава от $p(\bar{x}, y)$ с ограничения квантор за съществуване:

$$q(\bar{x}, y) \iff \exists z_{z \leq y} \ p(\bar{x}, z).$$

Тогава очевидно

$$q^*(\bar{x}) \iff q(\bar{x}, b(\bar{x}))$$

и следователно q^* е примитивно рекурсивен като суперпозиция, съгласно *Твърдение* 1.7. Аналогично разсъждаваме и за предиката r^*. □

1.6 Функционални операции, запазващи примитивната рекурсивност

В този раздел ще въведем няколко допълнителни операции над функции, за които ще покажем, че се изразяват чрез изходните операции суперпозиция и примитивна рекурсия. Това означава, че те не разширяват класа на примитивно рекурсивните функции, а по-скоро служат за улеснение.

1.6.1 Операцията "разглеждане на случаи" (case)

Определение 1.14. Нека са дадени k на брой частични n-местни функции $f_1, \dots, f_k$ и k на брой n-местни предиката $p_1, \dots, p_k$, за които е изпълнено условието

$$\forall \bar{x}\ \exists! i_{\ 1 \le i \le k}\ p_i(\bar{x}) = \mathbf{t}.$$

Дефинираме функция $g : \mathbb{N}^n \longrightarrow \mathbb{N}$ *с разглеждане на случаи* както следва:

$$g(\bar{x}) \simeq \begin{cases} f_1(\bar{x}), & \text{ако } p_1(\bar{x}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots \\ f_k(\bar{x}), & \text{ако } p_k(\bar{x}). \end{cases}$$

Твърдение 1.10. (Операцията case запазва примитивната рекурсивност.) При означенията по-горе, ако функциите $f_1, \dots, f_k$ и предикатите $p_1, \dots, p_k$ са примитивно рекурсивни, то и g е примитивно рекурсивна.

Доказателство. Следва от представянето на g като следната суперпозиция:

$$g(\bar{x}) \ = \ f_1(\bar{x}).\overline{sg}(\chi_{p_1}(\bar{x})) \ + \ \dots \ + f_k(\bar{x}).\overline{sg}(\chi_{p_k}(\bar{x})).$$

За да го проверим, да вземем произволно $\bar{x} \in \mathbb{N}^n$. Нека i е (единственото) такова, че $p_i(\bar{x}) = \mathbf{t}$. Тогава по дефиниция $g(\bar{x}) = f_i(\bar{x})$.

От друга страна, в този случай имаме, че $\overline{sg}(\chi_{p_i}(\bar{x})) = 1$, а при $j \neq i$, $\overline{sg}(\chi_{p_j}(\bar{x})) = 0$, следователно

$$f_1(\bar{x}).\underbrace{\overline{sg}(\chi_{p_1}(\bar{x}))}_{0} + \dots + f_i(\bar{x}).\underbrace{\overline{sg}(\chi_{p_i}(\bar{x}))}_{1} + \dots + f_k(\bar{x}).\underbrace{\overline{sg}(\chi_{p_k}(\bar{x}))}_{0} = f_i(\bar{x}).$$

□

Типичният случай, в който ще прилагаме горното твърдение, е при $k = 2$, когато g можем да си представяме и така:

```
g(x̄) = if  p(x̄)  then f₁(x̄)  else  f₂(x̄)
```

Всъщност за този случай ще ни трябва и твърдение, което казва, че `if_then_else` конструкцията запазва и частичната рекурсивност. Този факт не може да се докаже с разсъжденията от доказателството на *Твърдение* 1.10, както не е трудно да се забележи, затова го формулираме и доказваме отделно:

Твърдение 1.11. (Операцията if then else запазва частичната рекурсивност.) Нека функцията g се дефинира чрез частичните функции f_1 и f_2 и предиката p както следва:

$$g(\bar{x}) \simeq \begin{cases} f_1(\bar{x}), & \text{ако } p(\bar{x}) \\ f_2(\bar{x}), & \text{ако } \neg p(\bar{x}). \end{cases}$$

Тогава ако f_1 и f_2 са частично рекурсивни, а p е рекурсивен, то g е частично рекурсивна.

Доказателство. Първо ще дефинираме две спомагателни функции F_1 и F_2:

$$\left| \begin{array}{ll} F_1(\bar{x},0) & = 0 \\ F_1(\bar{x},y+1) & \simeq f_1(\bar{x}) \end{array} \right.$$

и

$$\left| \begin{array}{ll} F_2(\bar{x},0) & = 0 \\ F_2(\bar{x},y+1) & \simeq f_2(\bar{x}) \end{array} \right.$$

Функциите F_i, $i = 1,2$, се получават с примитивна рекурсия от частично рекурсивните f_i, следователно те също са частично рекурсивни. Да се убедим, че за g е в сила представянето

$$g(\bar{x}) \simeq F_1(\bar{x}, \overline{sg}(\chi_p(\bar{x}))) \ + \ F_2(\bar{x}, \chi_p(\bar{x})).$$

Наистина, ако $\bar{x} \in \mathbb{N}^n$ е такова, че $p(\bar{x})$ е истина, то

$$g(\bar{x}) \ \simeq \ F_1(\bar{x}, \underbrace{\overline{sg}(\chi_p(\bar{x}))}_{1}) \ + \ F_2(\bar{x}, \underbrace{\chi_p(\bar{x})}_{0}) \ \simeq \ F_1(\bar{x},1) + F_2(\bar{x},0) \simeq f_1(\bar{x}).$$

Ако $p(\bar{x})$ е лъжа, то

$$g(\bar{x}) \ \simeq \ F_1(\bar{x}, \underbrace{\overline{sg}(\chi_p(\bar{x}))}_{0}) \ + \ F_2(\bar{x}, \underbrace{\chi_p(\bar{x})}_{1}) \ \simeq \ F_1(\bar{x},0) + F_2(\bar{x},1) \simeq f_2(\bar{x}).$$

Следователно g е частично рекурсивна като суперпозиция на такива функции. □

Разбира се, горното твърдение е в сила и за произволно k. Тъй като понататък в курса ще го получим като следствие от по-общо твърдение, няма да го формулираме тук.

Задача 1.8. Нека тоталната функция g се различава от f в краен брой точки. Докажете, че ако f е примитивно рекурсивна, то и g е такава.

Решение. Да разгледаме случая, когато f и g са едноместни (в общия случай разсъждението е аналогично). Нека те се различават в точките $a_1, \ldots, a_k$. Тогава g можем да представим по следния начин:

$$g(x) = \begin{cases} g(a_1), & \text{ако } x = a_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots \\ g(a_k), & \text{ако } x = a_k \\ f(x), & \text{в останалите случаи.} \end{cases}$$

Прилагаме *Твърдение* 1.10 и получаваме, че g е примитивно рекурсивна. $\square$

1.6.2 Операциите ограничена сума и ограничено произведение

Определение 1.15. По дадена функция $f(\bar{x}, y)$ дефинираме функция

$$g(\bar{x}, y) \simeq \sum_{z<y} f(\bar{x}, z),$$

за която ще казваме, че се получава от f с *ограничено сумиране* (или е *ограничена сума* на f).

В това определение имаме предвид, че

$$g(\bar{x}, y) \simeq \begin{cases} 0, & \text{ако } y = 0 \\ f(\bar{x}, 0) + \cdots + f(\bar{x}, y-1), & \text{ако } y > 0. \end{cases} \tag{1.3}$$

Аналогично определяме и операцията ограничено произведение:

Определение 1.16. Казваме, че $h(\bar{x}, y) \simeq \prod_{z<y} f(\bar{x}, z)$ е *ограничено произведение* на f, ако за нея е изпълнено:

$$h(\bar{x}, y) \simeq \begin{cases} 1, & \text{ако } y = 0 \\ f(\bar{x}, 0). \ \ldots \ .f(\bar{x}, y-1), & \text{ако } y > 0. \end{cases} \tag{1.4}$$

Да се убедим, че тези операции също запазват примитивната рекурсивност.

Твърдение 1.12. (Операциите ограничена сума и произведение запазват примитивната рекурсивност.) Ако функцията f е примитивно рекурсивна, то функциите g и h, дефинирани с равенствата (1.3) и (1.4) също са примитивно рекурсивни.

Доказателство. За g имаме представянето

$$g(\bar{x}, y+1) \;=\; \underbrace{f(\bar{x},0)+\dots+f(\bar{x},y-1)}_{g(\bar{x},y)}+f(\bar{x},y),$$

откъдето

$$\left|\begin{array}{lcl} g(\bar{x},0) & = & 0 \\ g(\bar{x},y+1) & = & g(\bar{x},y)+f(\bar{x},y) \;=\; G(\bar{x},y,g(\bar{x},y)) \end{array}\right.$$

за $G(\bar{x},y,z)=f(\bar{x},y)+z$.

Аналогично, за h ще имаме:

$$\left|\begin{array}{lcl} h(\bar{x},0) & = & 1 \\ h(\bar{x},y+1) & = & h(\bar{x},y).f(\bar{x},y) \;=\; H(\bar{x},y,h(\bar{x},y)), \end{array}\right.$$

където $H(\bar{x},y,z)=f(\bar{x},y).z$. □

Като следствие от горното твърдение получаваме следното

Следствие 1.2. Нека $b(\bar{x})$ е тотална функция. По дадена функция $f(\bar{x},y)$ дефинираме две функции g^* и h^* както следва:

$$g^*(\bar{x}) \;\simeq\; \sum_{z<b(\bar{x})} f(\bar{x},z) \quad \text{и}$$

$$h^*(\bar{x}) \;\simeq\; \prod_{z<b(\bar{x})} f(\bar{x},z).$$

Твърдим, че ако f и b са примитивно рекурсивни, то g^* и h^* също са примитивно рекурсивни.

Доказателство. Следва от равенствата

$$g^*(\bar{x}) \;=\; g(\bar{x},b(\bar{x})) \quad \text{и}$$

$$h^*(\bar{x}) \;=\; h(\bar{x},b(\bar{x})),$$

където g и h са функциите, определени с равенствата (1.3) и (1.4). □

Можем да отидем още по-нататък и да сложим функция и в долната граница на сумата/произведението:

Задача 1.9. Нека f, b_1 и b_2 са примитивно рекурсивни функции. Докажете, че тогава е примитивно рекурсивна и функцията

$$g(\bar{x}) = \begin{cases} \sum_{z=b_1(\bar{x})}^{b_2(\bar{x})} f(\bar{x},z), & \text{ако } b_1(\bar{x}) \le b_2(\bar{x}) \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Решение. Въвеждаме спомагателната функция

$$h(\bar{x}, y_1, y_2) = \begin{cases} \sum_{z=y_1}^{y_2} f(\bar{x}, z), & \text{ако } y_1 \leq y_2 \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Лесно се вижда, че за h е в сила представянето:

$$h(\bar{x}, y_1, y_2) = \sum_{z \leq y_2} f(\bar{x}, z) \ \dot{-} \ \sum_{z < y_1} f(\bar{x}, z).$$

(Разгледайте поотделно случаите $y_1 \leq y_2$ и $y_1 > y_2$.) Следователно h е примитивно рекурсивна като суперпозиция на примитивно рекурсивни.

Сега вече примитивната рекурсивност на g следва от равенството

$$g(\bar{x}) \ = \ h(\bar{x}, b_1(\bar{x}), b_2(\bar{x})).$$

□