# Линейно пространство на свободните вектори

## Доказателство на свойства от 1) до 8)

1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;

2) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = \vec{a} + (\vec{b}+\vec{c})$;

3) $\exists \vec{o}: \ \vec{a} + \vec{o} = \vec{a}$;

4) $\forall \vec{a} \ \exists! (-\vec{a}): \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{o}$;

5) $\exists 1: 1.\vec{a} = \vec{a}$;

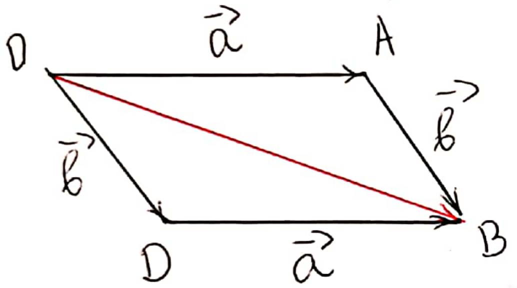
6) $\lambda.(\mu.\vec{a}) = (\lambda.\mu).\vec{a}$;

7) $(\lambda+\mu).\vec{a} = \lambda.\vec{a} + \mu.\vec{a}$;

8) $\lambda.(\vec{a}+\vec{b}) = \lambda.\vec{a} + \lambda.\vec{b}$.

* * *

1)




Нека OABD е успоредник

$\vec{OA} = \vec{DB} = \vec{a}$

$\vec{AB} = \vec{OD} = \vec{b}$

$\vec{a}+\vec{b} = \vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB}$

$\vec{b}+\vec{a} = \vec{OD} + \vec{DB} = \vec{OB}$ $\Rightarrow$

$\vec{a}+\vec{b} = \vec{b}+\vec{a}$

* * *

2) Нека $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{AB} = \vec{b}$ и $\vec{BC} = \vec{c}$

$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = (\vec{OA}+\vec{AB}) + \vec{BC} = \vec{OB} + \vec{BC} = \vec{OC}$ $\Rightarrow$

$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{OA} + (\vec{AB}+\vec{BC}) = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{OC}$

$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

* * *

3) $\vec{OP} = \vec{a}$, $\vec{PP} = \vec{o}$ $\Rightarrow$ $\vec{a} + \vec{o} = \vec{OP} + \vec{PP} = \vec{OP} = \vec{a}$

4) $\vec{OP} = \vec{a}$, $\vec{PO} = -\vec{a}$ $\Rightarrow$ $a + (-a) = \vec{OP} + \vec{PO} = \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{o}$

5) $1.\vec{a} = \vec{a}$ - следва от дефиницията за умножение

6) Ще докажем, че $\lambda.(\mu.\vec{a}) = (\lambda.\mu).\vec{a}$
Разглеждаме насочените отсечки:
$\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \mu.\vec{a}$, $\vec{OC} = \lambda.(\mu.a)$ и $\vec{OD} = (\lambda.\mu).\vec{a}$

* Направления: $\vec{OA} \parallel \vec{OB} \parallel \vec{OC} \parallel \vec{OD}$

* Дължини: $|\vec{OC}| = |\lambda|.|\vec{OB}| = |\lambda|.|\mu|.|\vec{a}|$
$|\vec{OD}| = |\lambda.\mu|.|\vec{OA}| = |\lambda|.|\mu|.|\vec{a}|$ $\Rightarrow |\vec{OC}| = |\vec{OD}|$

* Посоки:

1сл. $\lambda > 0, \mu > 0 \Rightarrow \lambda.\mu > 0$
$\vec{OC} \uparrow\uparrow \vec{OB} \uparrow\uparrow \vec{OA} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \vec{OC} \uparrow\uparrow \vec{OA} \\ \vec{OD} \uparrow\uparrow \vec{OA} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \vec{OC} \uparrow\uparrow \vec{OD}$

2сл. $\lambda > 0, \mu < 0 \Rightarrow \lambda.\mu < 0$
$\vec{OC} \uparrow\uparrow \vec{OB} \uparrow\downarrow \vec{OA} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \vec{OC} \uparrow\downarrow \vec{OA} \\ \vec{OD} \uparrow\downarrow \vec{OA} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \vec{OC} \uparrow\uparrow \vec{OD}$

3сл. $\lambda < 0, \mu > 0 \Rightarrow \lambda.\mu < 0$
$\vec{OC} \uparrow\downarrow \vec{OB} \uparrow\uparrow \vec{OA} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \vec{OC} \uparrow\downarrow \vec{OA} \\ \vec{OD} \uparrow\downarrow \vec{OA} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \vec{OC} \uparrow\uparrow \vec{OD}$

4сл. $\lambda < 0, \mu < 0 \Rightarrow \lambda.\mu > 0$
$\vec{OC} \uparrow\downarrow \vec{OB} \uparrow\downarrow \vec{OA} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \vec{OC} \uparrow\uparrow \vec{OA} \\ \vec{OD} \uparrow\uparrow \vec{OA} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \vec{OC} \uparrow\uparrow \vec{OD}$

Извод: $\vec{OC} = \vec{OD}$ за $\forall\ \lambda, \mu \Rightarrow$ 6) е доказано

Лема 1: Да се докаже, че за $\forall \vec{a}$ $(-1).\vec{a} = -\vec{a}$.
Д-во:

1) Нека $\vec{a} = \vec{0}$, тогава $-\vec{a} = \vec{0}$
$(-1).\vec{a} = (-1).\vec{0} = \vec{0} \Rightarrow (-1).\vec{a} = -\vec{a}$;

2) Нека $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = (-1).\vec{a}$, $\vec{AO} = -\vec{a} \Rightarrow$

* $|\vec{OB}| = |\vec{OA}| = |\vec{AO}|$
* $\vec{OB} \uparrow\downarrow \vec{OA}$, $\vec{AO} \uparrow\downarrow \vec{OA} \Rightarrow \vec{OB} \uparrow\uparrow \vec{OA}$

$\Big\} \Rightarrow \vec{OB} = \vec{AO} \Rightarrow$
$\Rightarrow (-1).\vec{a} = -\vec{a}$

* * *

Лема 2: Да се докаже, че за $\forall \vec{a}$: $(-\lambda).\vec{a} = \lambda.(-\vec{a}) = -(\lambda.\vec{a})$.
Д-во:

$(-\lambda).\vec{a} = [\lambda.(-1).\vec{a}] \overset{\text{от } 6)}{=} \lambda.((-1).\vec{a}) \overset{\text{от Лема1}}{=} \lambda.(-\vec{a})$

$(-\lambda).\vec{a} = [(1).\lambda.\vec{a}] \overset{\text{от } 6)}{=} (-1).(\lambda.\vec{a}) \overset{\text{от Лема1}}{=} -(\lambda.\vec{a})$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda.(-\vec{a}) = -(\lambda.\vec{a}) = (-\lambda).\vec{a}$.

* * *

7) Нека $\lambda \neq 0$, $\mu \neq 0$, $\vec{a} \neq \vec{0}$, $(\lambda+\mu).\vec{a} \overset{?}{=} \lambda.\vec{a} + \mu.\vec{a}$
Нека $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \lambda.\vec{a}$, $\vec{BC} = \mu.\vec{a} \Rightarrow$ $\vec{OC} = \lambda.\vec{a} + \mu.\vec{a}$
$\vec{OD} = (\lambda+\mu).\vec{a}$

1сл. $\lambda > 0$, $\mu > 0$
$\vec{OA} \uparrow\uparrow \vec{OB} \uparrow\uparrow \vec{OC} \uparrow\uparrow \vec{OD} \Rightarrow \vec{OC} \uparrow\uparrow \vec{OD}$
$|\vec{OC}| = |\vec{OB}| + |\vec{BC}| = |\lambda|.|\vec{a}| + |\mu|.|\vec{a}| = (\lambda+\mu).|\vec{a}| = |\vec{OD}|$
Извод: $\vec{OC} = \vec{OD}$

2 сл. Нека $\lambda<0, \mu<0 \Rightarrow \lambda+\mu<0$

$$(\lambda+\mu).\vec{a} \underset{\text{Лема 2}}{=} (-\lambda-\mu).(-\vec{a}) \underset{\text{от 7) 1 сл.}}{=} (-\lambda).(-\vec{a})+(-\mu).(-\vec{a}) \underset{\text{Лема 2}}{=} \lambda.\vec{a}+\mu.\vec{a}$$

3 сл. Нека $\lambda>0, \mu<0$

3.1 $\lambda+\mu=0 \Rightarrow \mu=-\lambda$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda.\vec{a}+\mu.\vec{a}=\lambda.\vec{a}+(-\lambda).\vec{a}=\lambda.\vec{a}+(-(\lambda.\vec{a}))=\vec{o} \\ (\lambda+\mu).\vec{a}=0.\vec{a}=\vec{o} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow (\lambda+\mu).\vec{a}=\lambda.\vec{a}+\mu.\vec{a}$

3.2 $\lambda+\mu>0$ Разгл. $(\lambda+\mu)=\nu>0$, и $(-\mu)>0 \overset{\text{от 7) 1 сл.}}{\Longrightarrow}$

$$(\nu+(-\mu)).\vec{a}=\nu.\vec{a}+(-\mu).\vec{a}=\nu.\vec{a}-\mu.\vec{a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda.\vec{a}=\nu.\vec{a}-\mu.\vec{a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda.\vec{a}+\mu.\vec{a}=\nu.\vec{a}-\mu\vec{a}+\mu.\vec{a}=\nu.\vec{a}+\vec{o}=\nu.\vec{a}=(\lambda+\mu).\vec{a};$$

3.3 $\lambda+\mu<0$ Прилагаме 7) 1 сл. за коефициентите $\lambda>0$ и $(-\lambda-\mu)>0$. Нека $-\lambda-\mu=\nu$

$$(\lambda+\nu).\vec{a}=\lambda.\vec{a}+\nu.\vec{a}=\lambda.\vec{a}+(-\lambda-\mu).\vec{a} \Rightarrow$$

$$(-\mu).\vec{a}=\lambda.\vec{a}+(-\lambda-\mu).\vec{a}$$

$$-(\mu.\vec{a})=\lambda.\vec{a}-(\lambda+\mu).\vec{a} \Rightarrow (\lambda+\mu).\vec{a}=\lambda.\vec{a}+\mu.\vec{a}$$

4 сл. $\lambda<0, \mu>0$ е аналогичен

Лема 3: $-(\vec{a}+\vec{b}) = -\vec{a} - \vec{b}$

Д-во:

$(\vec{a}+\vec{b}) + (-(\vec{a}+\vec{b})) = \vec{0} \quad | -\vec{a} \quad | -\vec{b}$

$\underbrace{-\vec{a}+\vec{a}}_{\vec{0}} + (-(\vec{a}+\vec{b})) + \underbrace{\vec{b}-\vec{b}}_{\vec{0}} = -\vec{a} + (-\vec{b}) \Rightarrow -(\vec{a}+\vec{b}) = -\vec{a} - \vec{b}$

* * *

8) Ще док., че $\lambda.(\vec{a}+\vec{b}) = \lambda.\vec{a} + \lambda.\vec{b}$

Нека $\lambda \neq 0$, $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$

1 сл. $\lambda > 0$

$\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{AB} = \vec{b}$, $\vec{OC} = \lambda.\vec{a}$, $\vec{OD} = \lambda.(\vec{a}+\vec{b})$, $\vec{OB} = \vec{a}+\vec{b}$

$\vec{OA} \parallel \vec{OC}$, $|\vec{OC}| = \lambda.|\vec{OA}|$ (*)

$\vec{OB} \parallel \vec{OD}$, $|\vec{OD}| = \lambda.|\vec{OB}|$

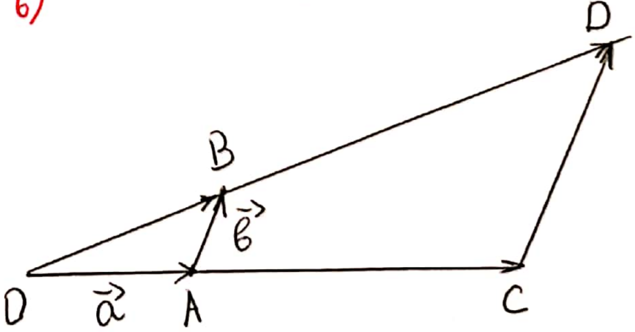
1.1 Ако $\vec{a} \parallel \vec{b} \Rightarrow$ O, A, B лежат на 1 права $\Rightarrow$

$\exists! \mu : \vec{b} = \mu.\vec{a} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda.(\vec{a}+\vec{b}) \underset{5)}{=} \lambda.(1.\vec{a} + \mu.\vec{a}) \underset{7)}{=} \lambda.((1+\mu).\vec{a}) \underset{6)}{=} (\lambda.(1+\mu)).\vec{a} =$

$= (\lambda + \lambda.\mu).\vec{a} \underset{7)}{=} \lambda.\vec{a} + (\lambda.\mu).\vec{a} \underset{6)}{=} \lambda.\vec{a} + \lambda.(\mu.\vec{a}) = \lambda.\vec{a} + \lambda.\vec{b}$

1.2 Ако $\vec{a}, \vec{b}$ – ЛНЗ




От (*) $\Rightarrow \dfrac{|\vec{OC}|}{|\vec{OA}|} = \dfrac{|\vec{OD}|}{|\vec{OB}|} = \lambda$

по Т на Талес $\Rightarrow$ AB ∥ CD и

$|AB| = \lambda.|CD| \Rightarrow \vec{AB}.\lambda = \vec{CD} \Rightarrow \vec{CD} = \lambda.\vec{b}$

$\lambda.\vec{a} + \lambda.\vec{b} = \vec{OC} + \vec{CD} = \vec{OD} = \lambda.(\vec{a}+\vec{b})$

2 сл. Ако $\lambda < 0$

$$\lambda.(\vec{a}+\vec{b}) \underset{A2}{=} (-\lambda).(-(\vec{a}+\vec{b})) \underset{A3}{=} -\lambda.(-\vec{a}-\vec{b}) \underset{8)}{=} (-\lambda).(-\vec{a})+(-\lambda).(-\vec{b}) =$$

$$\underset{A2}{=} \lambda.\vec{a}+\lambda.\vec{b}$$

* * *