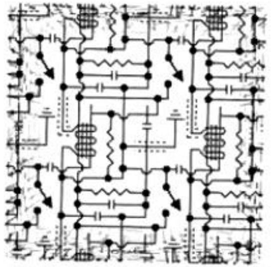
ТЕМА №8

Растеризация



Съдържание

Растер

Какво е растеризацията?

Растеризация

- Изобразяване на векторен или параметричен обект в дискретна мрежа от пиксели

Особености

- Растеризацията е апроксимация
- Искаме бързи целочислени алгоритми
- Понякога се работи с подпиксели

Пиксели

Пиксел (*pixel, pic’s element, picture’s element*)

- Най-малък елемент на растера

В някои страни

- Пел (*pel, picture element*)

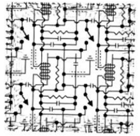
Растерни пространства

Двумерно

- Основният елемент е **пиксел**
- В текстурите елементът е **тексел** (*texel*, *texture pixel*)
- В сензорите е **сенсел** (*sensel, sensor pixel*)

Тримерно

- Основният елемент е **воксел** (*voxel, volumetric pixel*)



Растерна топология

Топология

- Растерното пространство е дискретно
- Част от геометричните правила вече не важат или поне не са монополни

Основни проблеми

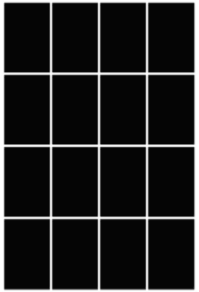
- Запазване на пропорции
- Запазване на разстояния
- Запазване на гладкост

Проблеми с пропорциите

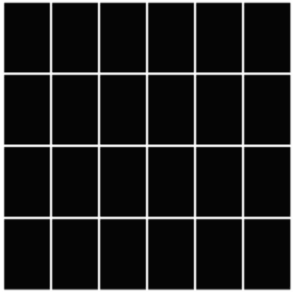
- Пикселът има размери
- Понякога пикселът не е „квадратен“

Пример с квадрат

- Съотношение на размерите на пиксел (аспект) 1:1.5



Неправилен квадрат
4x4 пиксела



Правилен квадрат
6x4 пиксела

Проблем с разстоянията

– Разстоянието не е уникално

Пример с правоъгълен триъгълник

– Всеки от катетите е 9 пиксела

– Хипотенузата също е 9 пиксела

– Евклиде и Питагоре, извинявайте!

Три разстояния

Три дефиниции на разстояния

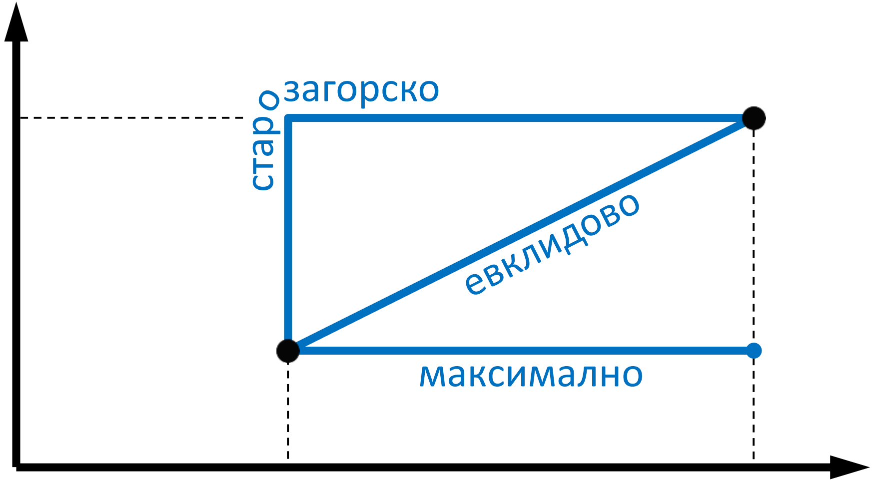
- Евклидово: $r = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$
- Таксиметрово или Манхатънско,
  а защо не и Старозагорско: $r_{sz} = |\Delta x| + |\Delta y|$
- Максимално: $r_{max} = \max(|\Delta x|, |\Delta y|)$

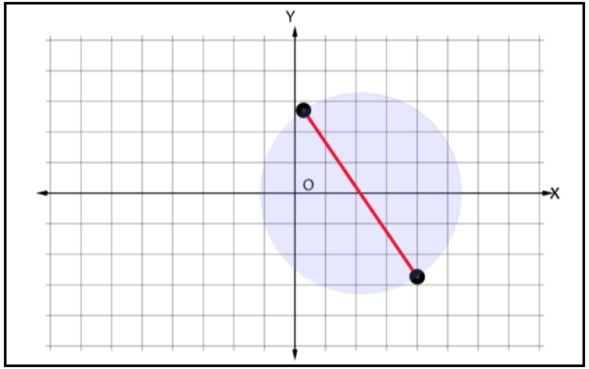
Употреба

- И трите се ползват в КГ

Да ги видим

- Максималното разстояние е всъщност най-малко





Растеризиране на отсечка

Основна задача

Основната задача на растеризирането

- Да се намерят координатите на пикселите
- Най-доброто визуално приближение до отсечката

Алгоритми

- Рекурсивен алгоритъм с деление на 2
- Алгоритъм със закръгляне
- Алгоритъм на Брезенхам

Рекурсивен алгоритъм
с целочислено
деление
на две

Рекурсивен алгоритъм

Начални данни

– Целочислени координати на два пиксела P и Q

Алгоритъм

Бонус 1т. Защо?

– Намираме пиксел $M = \frac{1}{2}(P + Q)$, но не $\frac{1}{2}P + \frac{1}{2}Q$

И още 1т.
Пак защо?

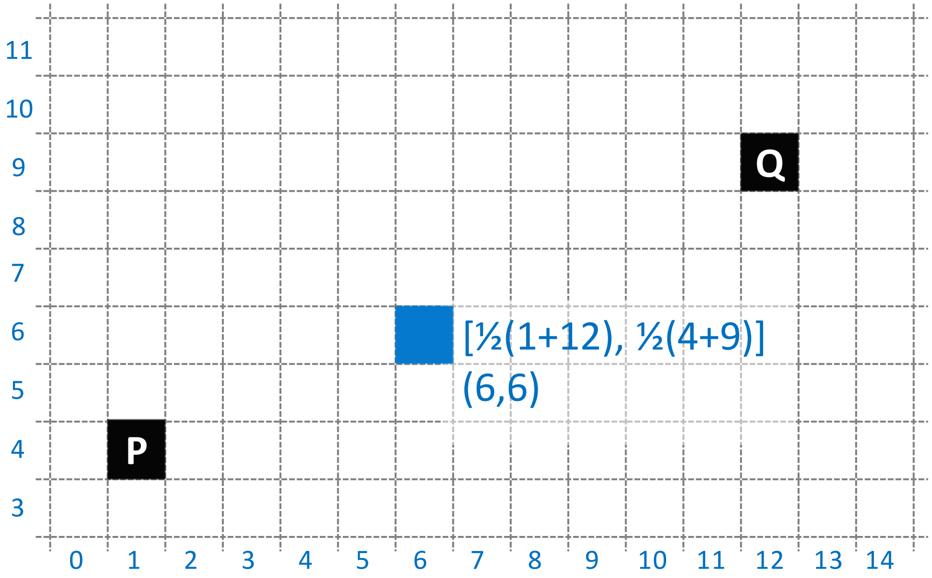
– Ако $\mathrm{M} \neq P$, повтаряме с PM

– Ако $\mathrm{M} \neq Q$, повтаряме с MQ

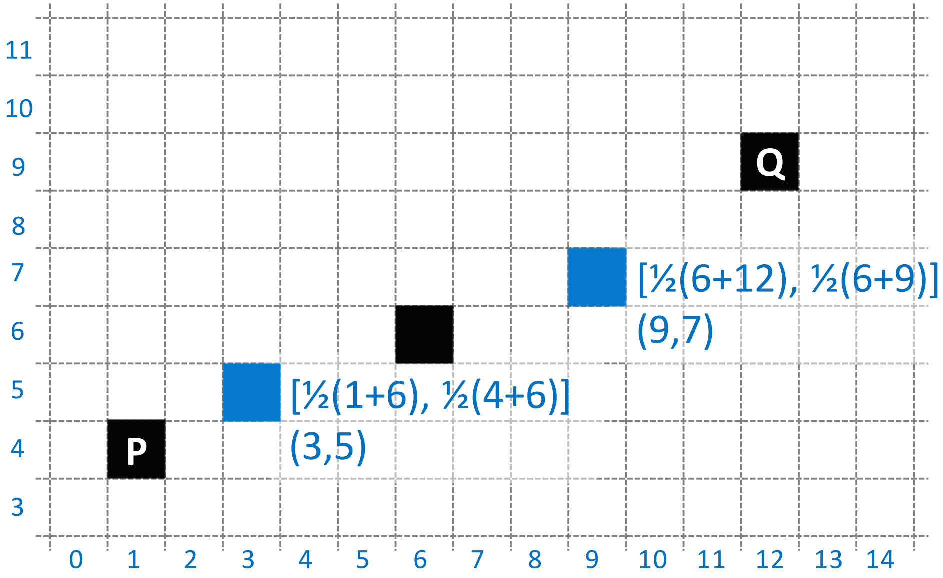
– Работим само с отсечки с $r_{max} > 1$

Пример P(1,4) и Q(12,9)

– Стъпка №1

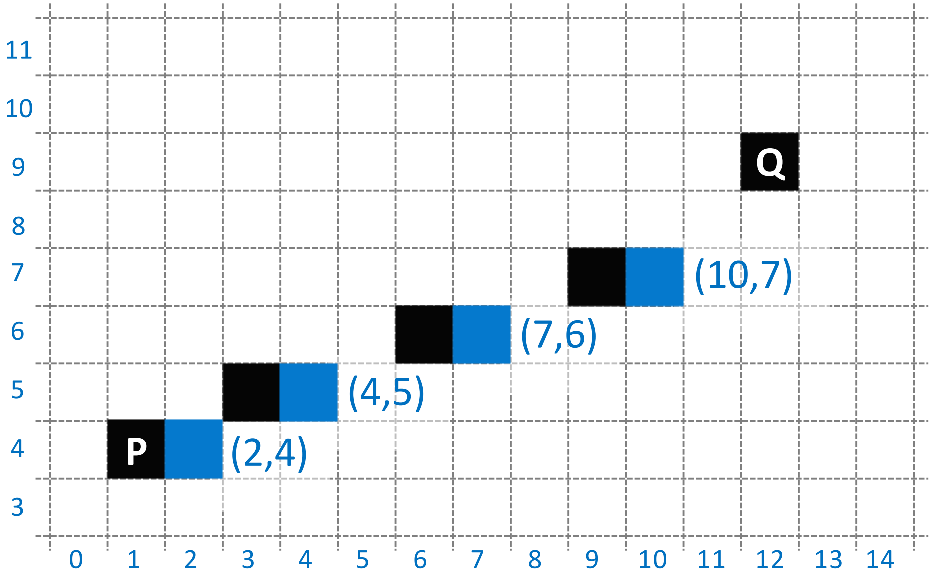


– Стъпка №2

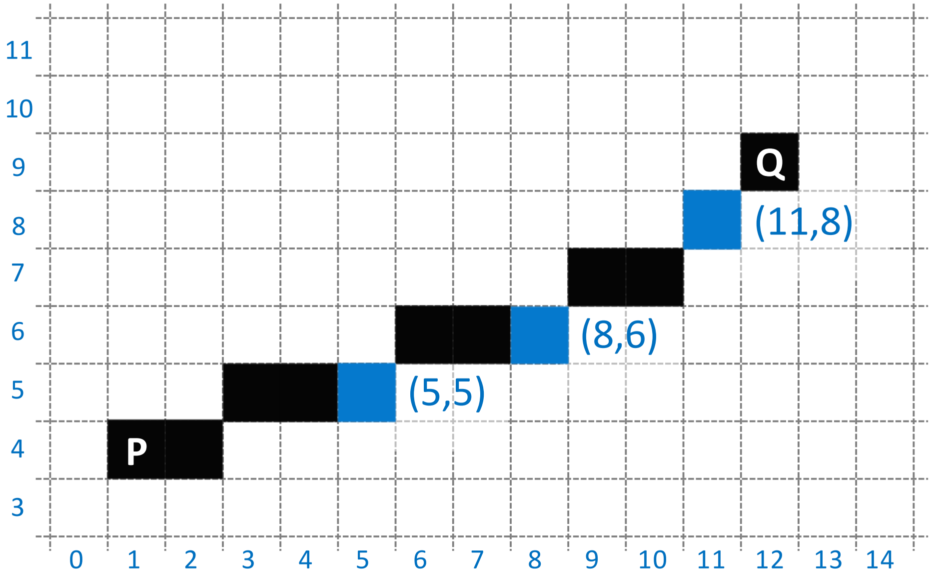


11
10
9
8
7
6
5
4
3
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
Q
P
[½(6+12), ½(6+9)]
(9,7)
[½(1+6), ½(4+6)]
(3,5)

– Стъпка №3

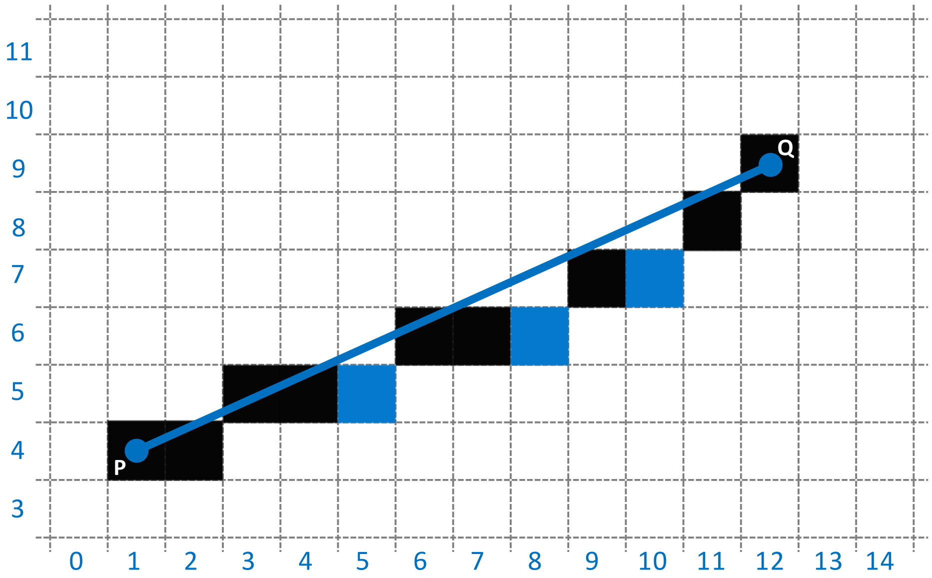


– Стъпка №4



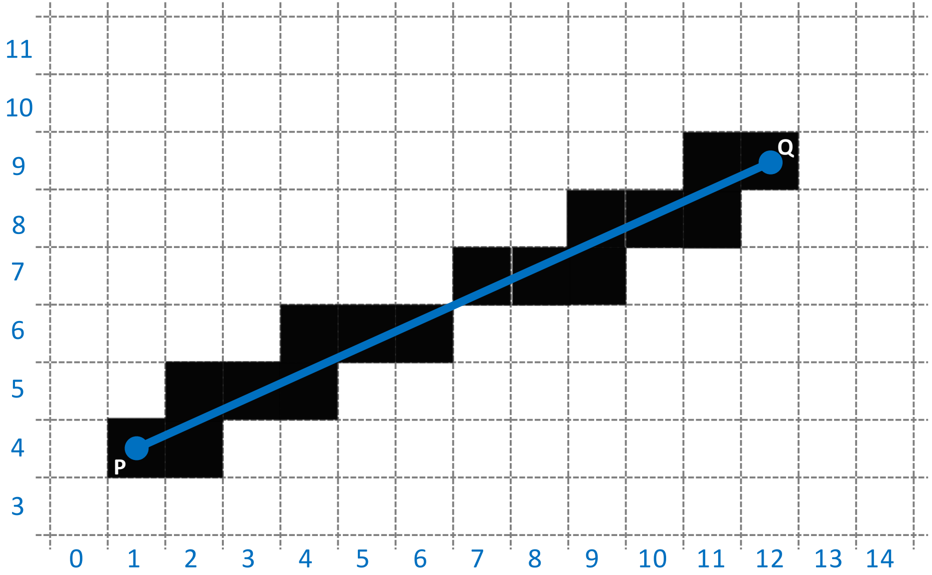
Проблем

– Външни пиксели, защото делим целочислено



А с реални числа?

– Получава се по-добре
– Но не изглежда равномерно дебела

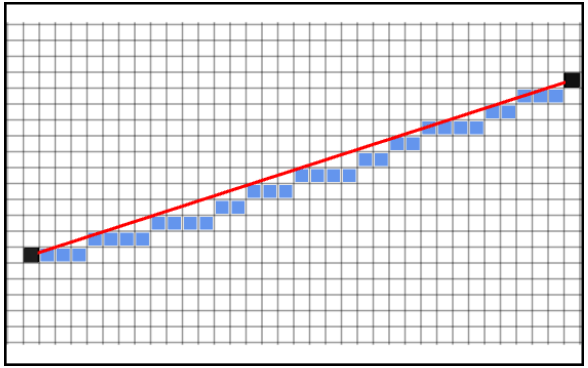


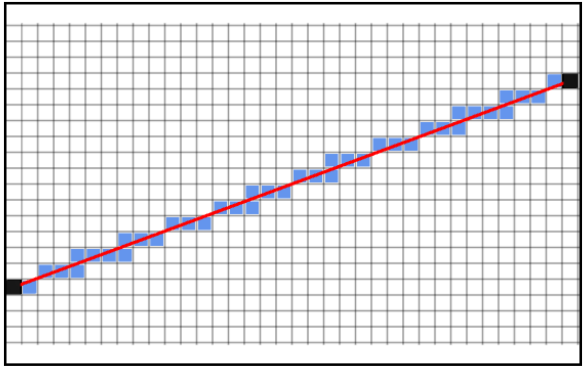
P	=	(1.00, 4.00)
Q	=	(12.00, 9.00)
M_1	=	(6.50, 6.50)
M_2	=	(3.75, 5.25)
M_3	=	(9.25, 7.75)
M_4	≈	(2.38, 4.63)
M_5	≈	(1.69, 4.31)
M_6	≈	(3.06, 4.94)
M_7	≈	(5.13, 5.88)
M_8	≈	(4.44, 5.56)
M_9	≈	(5.81, 6.19)
M_{10}	≈	(7.88, 7.13)
M_{11}	≈	(8.56, 7.44)
M_{12}	≈	(10.63, 8.38)
M_{13}	≈	(9.94, 8.06)
M_{14}	≈	(11.31, 8.69)

Да видим

Визуално сравнение

- Растеризация с целочислено деление
- Растеризация с реално деление





Алгоритъм
с единичен вектор

Основни идеи

Алгоритъм с единичен вектор

– С реални числа, за да не допусне външни пиксели
– Използва се наклонът на отсечката
– Получава пикселите последователно чрез единичния вектор

Алгоритъм

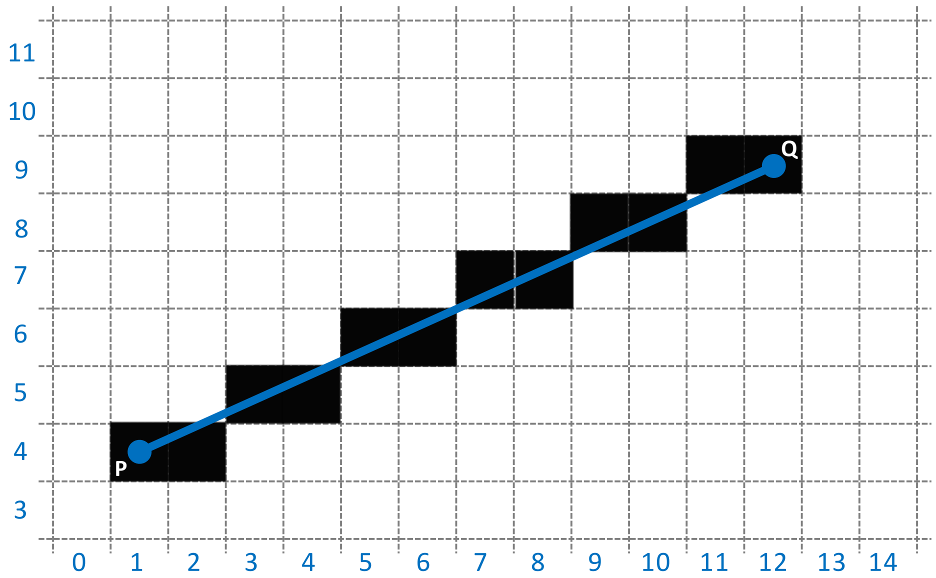
Определяне на единичен вектор

- Това е вектор $\vec{r}$ успореден на $\overrightarrow{PQ}$
- Има дължина $r_{max} = 1$ (не r и не r_{sz})
- Ако имаме нарисуван пиксел R_i, то следващият пиксел е $R_{i+1} = R_i + \vec{r}$
  (това гарантира, че R_{i+1} е съседен на R_i)
- Започваме от $R_0 = P$

Пример P(1,4) и Q(12,9)

– Намиране на $\vec{r}$

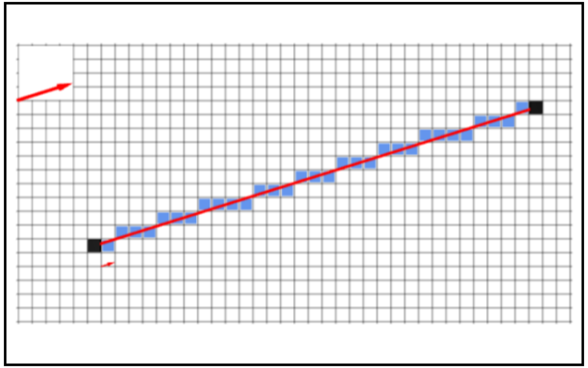
$$\left|\begin{aligned}\Delta x &= 12-1=11\\ \Delta y &= 9-4=5\end{aligned}\right. \Rightarrow\ |\Delta x| \geq |\Delta y|\ \Rightarrow\ \vec{r} = \left(\frac{\Delta x}{|\Delta x|}, \frac{\Delta y}{|\Delta x|}\right) \approx (1{,}0.455)$$



R0	= (1, 4.000)	= P		
R1	≈ (2, 4.455)	≈ (2, 4)		
R2	≈ (3, 4.910)	≈ (3, 5)		
R3	≈ (4, 5.365)	≈ (4, 5)		
R4	≈ (5, 5.820)	≈ (5, 6)		
R5	≈ (6, 6,275)	≈ (6, 6)		
R6	≈ (7, 6.730)	≈ (7, 7)		
R7	≈ (8, 7.185)	≈ (8, 7)		
R8	≈ (9, 7.640)	≈ (9, 8)		
R9	≈ (10, 8.095)	≈ (10, 8)		
R10	≈ (11, 8.550)	≈ (11, 9)		
R11	≈ (12, 9.005)	≈ Q		

Алгоритъмът в действие

- Векторът е винаги с $|\Delta x|$=1 или $|\Delta y|$=1



За и против

Основни преимущества

- Правилно определя пикселите
- Броят стъпки е или $|\Delta x|$, или $|\Delta y|$

Основни недостатъци

- Ползва реални числа и това забавя
- Също води до опасност от акумулирана грешка
- Различни стандарти за реални числа

Алгоритъм на Брезенхам

Алгоритъм на Брезенхам

Обща информация за алгоритъма

- Предложен от Брезенхам през 1965
- Използва само цели числа
- Използва събиране, изваждане и умножение по 2 (все бързи операции)

За удобство

- Пикселите са възлите в мрежата (т.е. не са квадратчетата в мрежата)

Въведение

Ще разгледаме частен случай

- Точка Q е вдясно от P и нагоре от нея, но повече вдясно, отколкото нагоре
- Т.е. $0 < \Delta y < \Delta x$ и ъгълът между $\overrightarrow{PQ}$ и $\overrightarrow{O_x}$ е [0°, 45°)

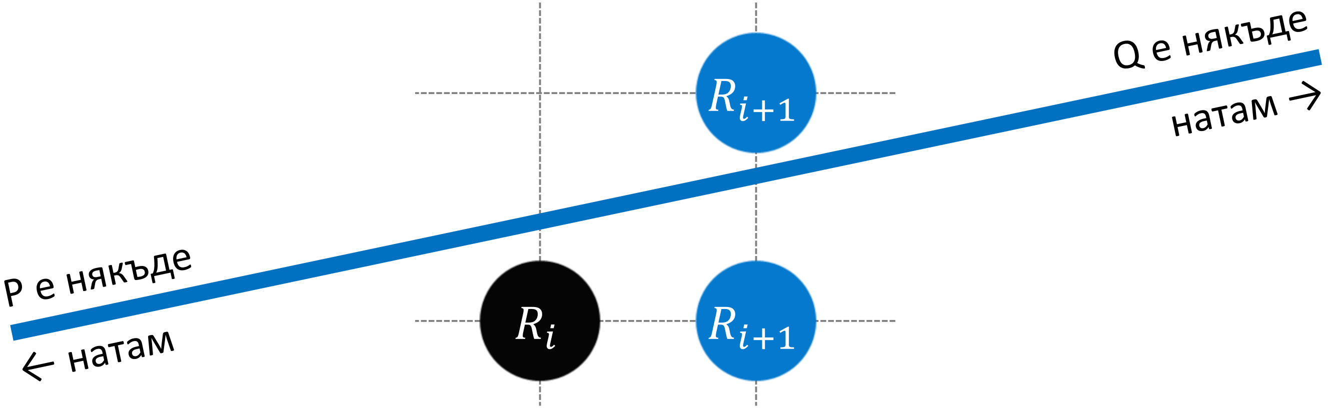
А другите случаи?

- Получават се от този чрез симетрия (сменят се знаци или се разменят X и Y)

Междинна стъпка

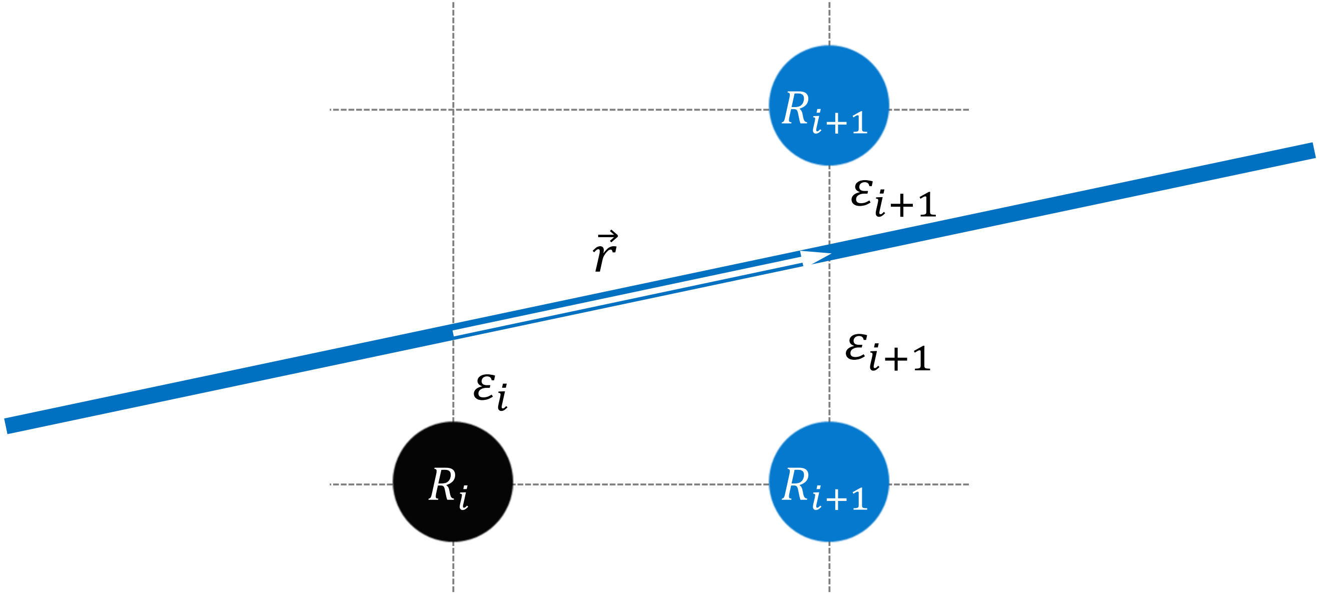
Нека вече сме нарисували точка R_i

– R_{i+1} ще бъде или вдясно от R_i, или диагонално нагоре-вдясно от R_i



Как решаваме кое R_{i+1} да ползваме?

- Отговор: което е по-близо правата
- Въвеждаме отклонение ε от реалния пиксел до нарисувания пиксел



Ако долното $\boldsymbol{\varepsilon_{i+1} \leq \frac{1}{2}}$

- Следващата точка е долната R_{i+1},
  а отклонението е $\varepsilon_{i+1} = \varepsilon_i + r_y = \varepsilon_i + \frac{\Delta y}{\Delta x}$
- Иначе следващата е горната R_{i+1}, а отклонението е $\varepsilon_{i+1} = \varepsilon_i + \frac{\Delta y}{\Delta x} - 1$ ← Помислете защо, но не ми казвайте

И още

- Началното $\varepsilon_0 = 0$, но по принцип $\varepsilon_i \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$
- И да не забравим, че $0 < \Delta y < \Delta x$, а векторът-стъпка е $\vec{r} = \left(1, \frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$

Сега събличаме текста и обличаме формулите

- Започваме с условието за избор на горното R_{i+1}:
  $\varepsilon_i + \frac{\Delta y}{\Delta x} > \frac{1}{2}$, т.е. $2\Delta x\varepsilon_i + 2\Delta y - \Delta x > 0$

Нека опростим

- Полагаме $d_i = 2\Delta x\varepsilon_i + 2\Delta y - \Delta x$
- И получаваме прекрасното условие $d_i > 0$
- Със следните свойства
  $d_0 = 2\Delta x\varepsilon_0 + 2\Delta y - \Delta x = 2\Delta y - \Delta x$
  $\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i = \frac{d_{i+1} - d_i}{2\Delta x}$

Забравихме отклонението

- Нека да му обърнем внимание в двата случая (за справка вижте слайда с оченце в горния десен ъгъл)
- Долно R_{i+1} при $d_i \leq 0$, горно R_{i+1} при $d_i > 0$
- Имаме $\varepsilon_{i+1} = \varepsilon_i + \frac{\Delta y}{\Delta x} - 1$, т.е. $\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i = \frac{\Delta y}{\Delta x} - 1$
- Изразяваме ε чрез d и имаме $\frac{d_{i+1} - d_i}{2\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} - 1$
- Така получаваме крайното $d_{i+1} = d_i - 2\Delta y - 2\Delta x$ (d_{i+1} се получава от предходното d_i и е цяло число)

Сега като алгоритъм

Начало

– Започваме от точка $R_0 = P$ и $d_0 = 2\Delta y - \Delta x$

Стъпка

Бонус 3т

Защо не разделим на две?

– Нарисували сме точка R_i

– Ако $d_i \leq 0$, точката R_{i+1} е тази вдясно, а новото $d_{i+1} = d_i + 2\Delta y$

– Иначе точката R_{i+1} е тази горе-вдясно, а новото $d_{i+1} = d_i + 2\Delta y - 2\Delta x$

Забележете

Свойства на алгоритъма

– Началните данни са целочислени
 (координатите на точките P и Q)

– Операциите са само целочислени
 (събиране, изваждане и умножение по две)

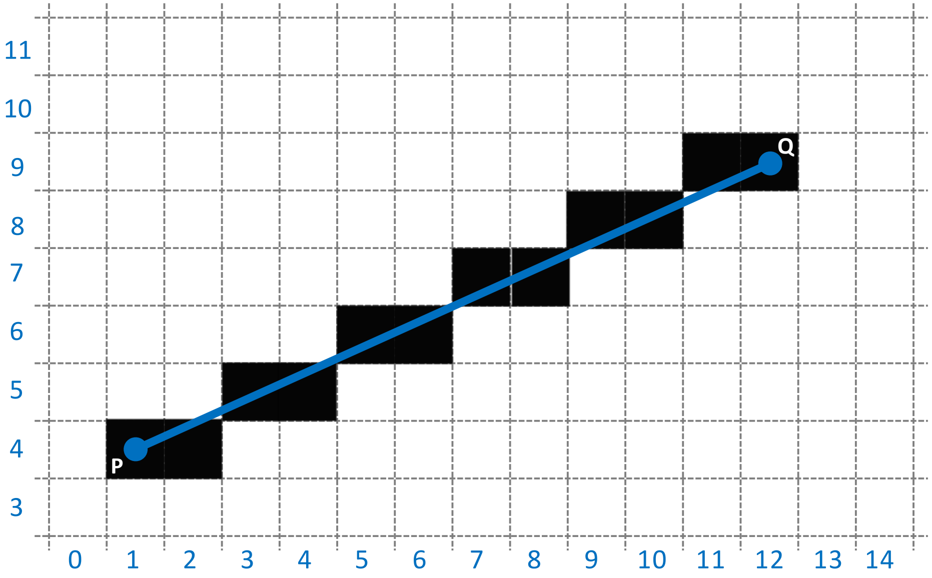
– Всички получени резултати са целочислени
 (и се получават достатъчно бързо, защото за тези операции има машинни инструкции в процесорите)

Пример P(1,4) и Q(12,9)

– Начални данни: $\Delta x = 11$ $\quad 2\Delta y = 10$ (при $d_i \leq 0$)

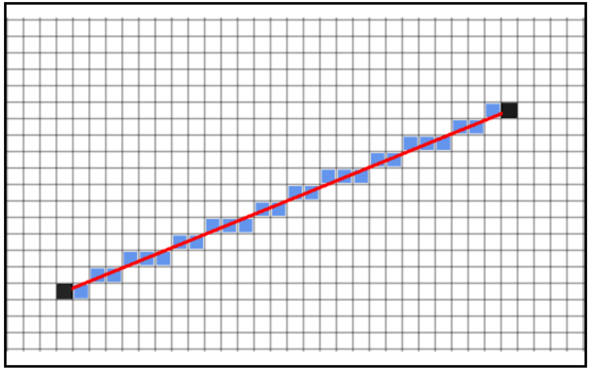
$\Delta y = 5$ $\quad 2\Delta y - 2\Delta x = -12$ (при $d_i > 0$)

$2\Delta y - \Delta x = -1$ (начално d_0)



$R_0 = (1, 4)$	$d_0 = -1$	} +10
$R_1 = (2, 4)$	$d_1 = 9$	} -12
$R_2 = (3, 5)$	$d_2 = -3$	} +10
$R_3 = (4, 5)$	$d_3 = 7$	} -12
$R_4 = (5, 6)$	$d_4 = -5$	} +10
$R_5 = (6, 6)$	$d_5 = 5$	} -12
$R_6 = (7, 7)$	$d_6 = -7$	} +10
$R_7 = (8, 7)$	$d_7 = 3$	} -12
$R_8 = (9, 8)$	$d_8 = -9$	} +10
$R_9 = (10, 8)$	$d_9 = 1$	} -12
$R_{10} = (11, 9)$	$d_{10} = -11$	
$R_{11} = (12, 9)$	$d_{11} =$ без значение	

Алгоритъмът в действие



Въпроси?

Повече информация

[**LUKI**] стр. 27-37
[**AGO2**] стр. 25-26
[**ALZH**] глава 4.2
[**KLAW**] стр. 43-55

А също и:

- Color Rasterizing primitives (стр. 2-14)
  http://alamos.math.arizona.edu/~rychlik/CourseDir/535/resources/LineDrawing.pdf
- Raster Algorithms (стр. 5-30)
  http://caig.cs.nctu.edu.tw/course/CG2007/slides/raster.pdf

Край