Решения на задачите от контролно 1 по Вероятности
Компютърни науки

22.04.2023

Вариант 1, аналогично за Вариант 2

Задача 1 Хвърляме 3 зара n пъти. Считаме за "успех" всяко хвърляне, при което сумата от точките върху трите зара е нечетна и по-голяма от 12. Да се определи вероятността на:
а) събитие $A = \{$броят на успехите е по-голям от броя на неуспехите$\}$, за $n = 12$;
б) събитие $B = \{$седмия успех настъпва преди петия неуспех$\}$, за $n \geq 12$.

Решение: Ако p е вероятността за успех, то $p = \frac{34}{6^3}$ и нека $X \in \mathrm{Bi}(n, p)$. Имаме $A = \{X \geq 7\}$, т.е. $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(X \geq 7) = \sum_{k=7}^{12} \binom{12}{k} p^k (1-p)^{12-k}$. За б) нека $B_k = \{$седмия успех настъпва на $k-$тия опит$\}$. Следователно $B = \cup_{k=7}^{11} B_k$ и

$$\mathbf{P}(B) = \sum_{k=7}^{11} \mathbf{P}(B_k) = \sum_{k=7}^{11} \binom{k-1}{6} p^6 (1-p)^{k-7} p = \sum_{l=0}^{4} \binom{6+l}{6} p^7 (1-p)^l.$$

Задача 2 По случаен начин и независимо едно от друго се избират n числа в интервала $[0, 1]$. Да се определи вероятността сумата им да е по-голяма от 1, ако
а) $n = 2$ и е известно, че сумата е по-голяма от $\frac{1}{2}$;
б) $n = 3$ и е известно, че сумата е по-малка от 2.

Решение: а) Чертеж 1: $\mathbf{P}(\Sigma > 1 \mid \Sigma > 1/2) = \frac{\mathbf{P}(1<\Sigma)}{\mathbf{P}(\Sigma>1/2)} = \frac{1/2}{1-1/8} = \frac{4}{7}$.
б) Чертеж 2: $\mathbf{P}(\Sigma > 1 \mid \Sigma < 2) = \frac{\mathbf{P}(1<\Sigma<2)}{\mathbf{P}(\Sigma<2)} = \frac{1-2/6}{1-1/6} = \frac{4}{5}$.

Задача 3 Три карти са оцветени в три различни цвята, а четвърта карта има и трите цвята. Нека $A_k, k = 1, 2, 3$ са събитията: случайно избрана карта съдържа цвят k.
а) Независими ли са събитията A_k две по две? Независими ли са в съвкупност?

б) Теглим с връщане 5 карти. Каква е вероятността да изтеглим три пъти трицветната карта, ако е известно, че изтеглените едноцветни карти са различни?

в) Да се докаже, че $2^n - 1$ карти могат да бъдат оцветени в n цвята, така че за всеки k цвята, $1 \leq k \leq n$, да съществува единствена карта оцветена само в тези k цвята. Добавена е една безцветна карта към оцветените. Да се докаже, че събитията $A_k, k = 1, 2, \ldots, n$ са независими.

Р-е: а) От $\mathbf{P}(A_k) = \frac{1}{2}$ и $\mathbf{P}(A_iA_j) = \frac{1}{4}$, следва $\mathbf{P}(A_iA_j) = \mathbf{P}(A_i)\mathbf{P}(A_j)$. Така A_k са независими две по две. Но $\mathbf{P}(A_1A_2A_3) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_2)\mathbf{P}(A_3)$, следователно A_1, A_2, A_3 са зависими в съвкупност. За б) нека A и B са съответно събитията: при теглене на 5 карти с връщане - точно три пъти е изтеглена трицветната; изтеглените едноцветни карти са различни. Намираме

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{\binom{3}{2}|P(5;1,1,3)|/|V(4;5)|}{\sum_{k=0}^{3}\binom{3}{k}|P(5;\underbrace{1,\dots,1}_{k},5-k)|/|V(4;5)|} = \frac{15}{34} = 0.44117$$

в) Нека множеството от цветовете е $C_n = \{1, 2, \dots, n\}$, а множеството от картите е $\mathcal{C}$.Понеже $|\mathcal{P}(C_n) - \emptyset| = 2^n - 1 = |\mathcal{C}|$, то всяка биекция $(\mathcal{P}(C_n) - \emptyset) \longrightarrow \mathcal{C}$ задава оцветяване на картите с желаното свойство. Добавяйки безцветна: $\mathbf{P}(A_k) = 1/2$ и $\mathbf{P}(\cap_{1\le s\le k} A_{i_s}) = 1/2^k = \prod_{1\le s\le k}\mathbf{P}(A_{i_s})$.

Задача 4 На състезание участват 25 отбора: 8 отбора в категория джипове, 10 при камиони и 7 при мотоциклети. Джиповете завършват състезанието с вероятност 0.9, камионите с 0.7, а моторите с 0.6 След състезанието на случаен принцип се избират три отбора, за провеждане на технически контрол. Известно е, че един от избраните отбори е завършил състезанието, а другите два не. Каква е вероятността избраните три отбора да са от различни категории?

Решение: а) Нека $A_{i,j}$ и $H_{i,j,k}$ са съответно събитията: при избор на 3 отбора - i са завършили и j незавършили $(i + j = 3)$; i са джипки, j са камиони, k са мотори $(i + j + k = 3)$. Намираме

$$\mathbf{P}(H_{1,1,1} \mid A_{1,2}) = \frac{\mathbf{P}(A_{1,2} \mid H_{1,1,1})\mathbf{P}(H_{1,1,1})}{\sum_{i+j+k=3}\mathbf{P}(A_{1,2} \mid H_{i,j,k})\mathbf{P}(H_{i,j,k})}, \text{ където } \mathbf{P}(H_{i,j,k}) = \frac{\binom{8}{i}\binom{10}{j}\binom{7}{k}}{\binom{25}{3}}$$

$\mathbf{P}(A_{1,2} \mid H_{i,j,k}) = i(0.9\times0.1^{i-1}\times0.3^j\times0.4^k) + j(0.1^i\times0.7\times0.3^{j-1}\times0.4^k) + k(0.1^i\times0.3^j\times0.6\times0.4^{k-1})$.

Задача 5 Множеството $A_n = \{1, 2, \dots, 2n\}$ е разбито на n подмножества с по 2 елемента. Каква е вероятността сумата от елементите във всяко от подмножествата да е нечетна? Да се намери очакваният брой случайни разбивания на A_n, за достигане до нечетна конфигурация.

Р-е: Нека A множеството от всички разбивания на A_n на n двуелементни подмножества, а B множеството от всички разбивания, образуващи нечетни конфигурации, и $X \in \mathrm{G}(p)$. Тогава

$$|A| = \frac{|P(2n;2,2,\dots,2)|}{n!} = \frac{(2n)!}{n!2^n};\ |B| = n!;\ p = \frac{|B|}{|A|} = \frac{2^n}{\binom{2n}{n}};\ \mathbf{E}X = \frac{1}{p} = \frac{\binom{2n}{n}}{2^n}.$$

Оценяване: $\Sigma = 7 + 7 + 10 + 8 + 8 = (3 + 4) + (3 + 4) + (2 + 3 + 5) + (3 + 5) + (5 + 3) = 40$.