## Cockoba: EAИ October 5, 2010



# Теорема на Клини

Теорема Всеки автоматен език е регулярен.

Д-во: Даден: DFA  $A = (\{1,\ldots,n\}, \Sigma, \delta, s, F)$ 

Резултат: регулярен израз  $\alpha$  такъв, че  $L(A) = L(\alpha)$ .

За всяко  $f \in F$  нека  $L_f = \left\{ w \in \Sigma^* : \hat{\delta}(s, w) = f \right\}.$ 

Ще намерим RegExp за  $L_f$ . Тъй като  $L(A) = \bigcup_{f \in F} L_f$ ,

теоремата ще е доказана, защото F е крайно.

### Cockoba: EAИ October 5, 2010



Даден: DFA  $A_f = (\{1, \dots, n\}, \Sigma, \delta, s, \{f\})$ 

Резултат: регулярен израз  $\alpha$  и  $L_f = L(A_f) = L(\alpha)$ .

Нека  $L_{ij} := L((\{1,\ldots,n\}\,,\Sigma,\boldsymbol{\delta},\underbrace{i},\{j\}))$ 

В частност  $L_{sf} = L_f$ .

Ако  $i \neq j$ :  $L_{ii}^0 := \{a \in \Sigma : j \in \delta(i,a)\}$ 

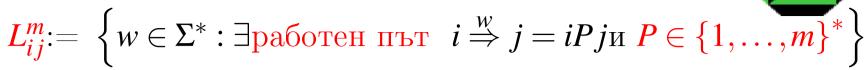
Ако i=j:  $L^0_{ij}$ :=  $\{a \in \Sigma : j \in \delta(i,a)\} \cup \{\varepsilon\}$ 

 $m{L}^m_{ij} \! := \; \left\{ w \in \Sigma^* : \exists ext{pаботен път} \;\; i \stackrel{w}{\Rightarrow} j = i P j \; \text{и} \; P \in \{1, \dots, m\}^* 
ight\}$ 

Тук преход iPj озаначава преход от i до j, с междинни състояния с номера  $\leq m$ .

Забележете, че  $L_{ij} = L_{ij}^n$ .

Ще построим реулярен израз за  $L^m_{ij}$  индуктивно, използвайки регулярните изрази за по-малките m.



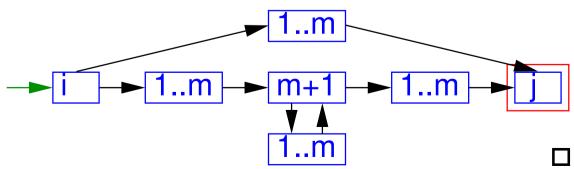
Даден: регулярен израз  $oldsymbol{lpha}_{ij}^k,\, k < m$  и  $L(oldsymbol{lpha}_{ij}^k) = L_{ij}^k$ 

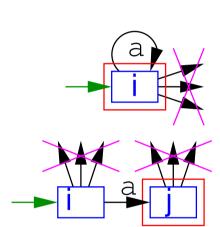
Резултат:  $oldsymbol{lpha_{ij}^m}$  и  $L(oldsymbol{lpha_{ij}^m}) = L_{ij}^m$ 

Ако 
$$m=0, i=j$$
:  $\alpha_{ii}^0=\bigcup_{a\in\Sigma:\delta(i,a)=i}a\cup\varepsilon$   
Ако  $m=0, i\neq j$ :  $\alpha_{ij}^0=\bigcup_{a\in\Sigma:\delta(i,a)=j}a$ 

Ako  $m \rightsquigarrow m+1$ :

$$\alpha_{ij}^{m+1} = \alpha_{ij}^m \cup \alpha_{i,m+1}^m \cdot (\alpha_{m+1,m+1}^m)^* \cdot \alpha_{m+1,j}^m$$

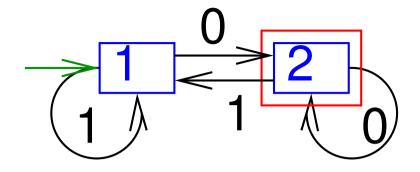




 $\alpha_{21}^{0}=1$ 

## Cockoba: EAИ October 5, 2010

# Пример



$$egin{aligned} lpha_{11}^0 &= 1 \cup arepsilon & lpha_{22}^0 &= 0 \cup arepsilon & lpha_{12}^0 &= 0 & lpha_{21}^0 &= 1 \ lpha_{12}^1 &= lpha_{12}^0 \cup lpha_{11}^0 \cdot (lpha_{11}^0)^* \cdot lpha_{12}^0 & lpha_{22}^1 &= lpha_{22}^0 \cup lpha_{21}^0 \cdot (lpha_{11}^0)^* \cdot lpha_{12}^0 \ &= 0 \cup (1 \cup arepsilon) \cdot (1 \cup arepsilon)^* \cdot 0 & = 0 \cup arepsilon \cup 1 \cdot (1 \cup arepsilon)^* \cdot 0 \ &= 1^*0 \cup arepsilon \end{aligned}$$

$$\alpha_{12}^{2} = \alpha_{12}^{1} \cup \alpha_{12}^{1} \cdot (\alpha_{22}^{1})^{*} \cdot \alpha_{22}^{1}$$

$$= 1^{*}0 \cup 1^{*}0 \cdot (1^{*}0 \cup \varepsilon)^{*} \cdot (1^{*}0 \cup \varepsilon)$$

$$= 1^{*}0(1^{*}0)^{*}$$

$$L(\alpha_{12}^2) = L_{12}^2 = L_{12} = L_2$$
, където  $F = \{2\}$ .