①

Упражнение 8

Развиване на функции в степенен ред, част 2

Първо да припомним основните маклоренови развития:

① $e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\dots,\ x\in\mathbb{R}$

② $\sin x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots,\ x\in\mathbb{R}$

③ $\cos x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots,\ x\in\mathbb{R}$

④ $\ln(1+x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots,\ x\in(-1,1]$

⑤ $(1+x)^{\alpha}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n=\binom{\alpha}{0}+\binom{\alpha}{1}x+\binom{\alpha}{2}x^2+\binom{\alpha}{3}x^3+\dots,\ x\in(-1,1)$

⑥ $\frac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+\dots,\ x\in(-1,1)$

Зад. 1 Намерете сумата на числовия ред

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+7n+9}{3^n(n^2+5n+4)}.$$

Решение: Да означим търсената сума с S. Тогава

$$S=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+7n+9}{3^n(n^2+5n+4)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n^2+5n+4)+(2n+5)}{3^n(n^2+5n+4)}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(1+\frac{2n+5}{n^2+5n+4}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(1+\frac{(n+4)+(n+1)}{(n+4)(n+1)}\right)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+4}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n(n+1)}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n(n+4)}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n}+3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^{n+1}(n+1)}+81\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^{n+4}(n+4)}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n}+3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n n}+81\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{3^n n}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n}+3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n3^n}+81\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n3^n}-\frac{1}{3}-\frac{1}{18}-\frac{1}{81}\right)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n}+84\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n3^n}-27-\frac{9}{2}-1=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n+84\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n3^n}-\frac{65}{2}.$$

В ⑥ полагаме $x=\frac{1}{3}$ и получаваме, че

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{2}.$$

② В ④ заместваме x с $-x$ и получаваме, че

$$\ln(1-x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(-x)^n}{n},\ x\in[-1,1),\ \text{т.е.}$$

$$-\ln(1-x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n},\ x\in[-1,1) \quad (*)$$

В $(*)$ полагаме $x=\frac{1}{3}$ и получаваме, че

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n3^n}=-\ln\left(1-\frac{1}{3}\right)=-\ln\frac{2}{3}=\ln\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}=\ln\frac{3}{2}.$$

Окончателно $S=\frac{3}{2}+84\ln\frac{3}{2}-\frac{65}{2}=84\ln\frac{3}{2}-31.$

Отг. на зад. 1: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+7n+9}{3^n(n^2+5n+4)}=84\ln\frac{3}{2}-31.$

Упражнение: Намерете сумата на числовия ред $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+7n+11}{2^n(n^2+6n+8)}$. Отг. $10\ln 2-\frac{13}{3}$.

Зад. 2 Намерете сумата на числовия ред

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+5n+8}{9^n n!}.$$

Решение: Да означим търсената сума с S, т.е. нека $S=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+5n+8}{9^n n!}$.

Да забележим, че ако $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+5n+8}{n!}x^n$, то $S=f\left(\frac{1}{9}\right)$. Сл., за да пресметнем S, е достатъчно да пресметнем $f(x)$.

Имаме, че $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{n!}x^n+5\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n!}x^n+8\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\ (*)$

От ① следва, че $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x,\ x\in\mathbb{R} \quad (**)$

Диференцираме $(**)$, използвайки ТПДСР, и получаваме, че $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{n!}=e^x,\ x\in\mathbb{R}$, откъдето

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n!}x^n=xe^x,\ x\in\mathbb{R} \quad (***).$$

Диференцираме $(***)$, използвайки ТПДСР, и получаваме, че $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{n!}x^{n-1}=(xe^x)'=(1+x)e^x,\ x\in\mathbb{R}$, откъдето

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{n!}x^n=x(1+x)e^x,\ x\in\mathbb{R} \quad (****).$$

③ От (*), (**), (***) и (****) следва, че

$f(x)=x(1+x)e^x+5xe^x+8e^x=(x^2+6x+8)e^x,\ x\in\mathbb{R}$.

Тогава $S=f\left(\frac{1}{9}\right)=\left(\frac{1}{81}+\frac{6}{9}+8\right)e^{\frac{1}{9}}=\frac{1+54+648}{81}e^{\frac{1}{9}}=$
$=\frac{703}{81}\sqrt[9]{e}$.

Отг. на зад. 2: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+5n+8}{9^n n!}=\frac{703}{81}\sqrt[9]{e}$.

Упражнение: Намерете сумата на числовия ред $\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n\frac{n^2-7n+8}{n!}$. Отг. $\frac{24}{e^2}$.

Зад. 3 Нека $g(x)=\frac{1}{1-x-x^2}$.

а) Развийте $g(x)$ в ред на Маклорен.

б) Ако редът на Маклорен на $g(x)$ е $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, докажете, че $a_0=a_1=1$ и $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$ за $n\geqq 2$.

в) Ако $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ е редицата на Фибоначи, определена с равенствата $f_0=f_1=1$ и $f_n=f_{n-1}+f_{n-2}$ за $n\geqq 2$, намерете явна формула за f_n.

Решение: а) $1-x-x^2=0 \iff x^2+x-1=0 \iff$
$\iff x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}=x_1$ или $x=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}=x_2$.

Да отбележим, че $x_1-x_2=\sqrt{5}$, $x_2<0<x_1$ като $|x_1|<|x_2|$ и че по една от формулите на Виет $x_1x_2=-1$.

Имаме, че $g(x)=\frac{1}{(x_1-x)(x-x_2)}=\frac{1}{x_1-x_2}\frac{(x_1-x)+(x-x_2)}{(x_1-x)(x-x_2)}=$

$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{x-x_2}+\frac{1}{x_1-x}\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{x_1-x}-\frac{1}{x_2-x}\right)=$

$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{x_1}\frac{1}{1-\frac{x}{x_1}}-\frac{1}{x_2}\frac{1}{1-\frac{x}{x_2}}\right)\overset{\text{от ⑥}}{=}\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{x_1}\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{x_1}\right)^n}_{\text{за } x\in(-x_1,x_1)}-\frac{1}{x_2}\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{x_2}\right)^n}_{\text{за } x\in(x_2,-x_2)}\right)=$

$=\frac{1}{\sqrt{5}}\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{x_1^{n+1}}-\frac{1}{x_2^{n+1}}\right)x^n}_{\text{за } x\in(-x_1,x_1)}=\frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x_2^{n+1}-x_1^{n+1}}{(x_1x_2)^{n+1}}x^n\overset{(x_1x_2=-1)}{=}$

$=\frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-x_2)^{n+1}-(-x_1)^{n+1}\right]x^n,\ x\in(-x_1,x_1)$.

Отг. на а): маклореновото развитие на $g(x)$ е

$g(x)=\frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-x_2)^{n+1}-(-x_1)^{n+1}\right]x^n,\ x\in(-x_1,x_1)$ $\left(\begin{array}{l}x_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\\ x_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\end{array}\right)$

④ б) Нека $g(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $x\in(-x_1,x_1)$ е тейлъровото развитие на $g(x)$ (намерихме явния му вид в а)). Записваме равенството $g(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $x\in(-x_1,x_1)$ във вида (да припомним, че $g(x)=\frac{1}{1-x-x^2}$ по условие)

$$1=(1-x-x^2)(a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n+a_{n+1}x^{n+1}+\dots)$$
$$x\in(-x_1,x_1)$$

Оттук, приравнявайки коефициентите пред еднаквите степени на x, получаваме:

x^0 : $1=a_0$

x^1 : $0=a_1-a_0$

x^2 : $0=a_2-a_1-a_0$

. . . .

x^n : $0=a_n-a_{n-1}-a_{n-2}$

. . . .

См. $a_0=a_1=1$ и $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$ за $n\geqq 2$. Точно това трябваше да докажем в б).

в) От б) следва, че $f_n=a_n$, $n=0,1,2,3,4\dots$ (*)

От а) следва, че $a_n=\frac{(-x_2)^{n+1}-(-x_1)^{n+1}}{\sqrt{5}}$, $n=0,1,2,3,4\dots$ (**)

$$\left(x_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\ x_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

От (*) и (**) получаваме отговора на в).

Отг. на в): $f_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$, $n=0,1,2,3\dots$

Да припомним едно означение, което въведохме на упражненията по ДИС-1:

с $g(x)=o(f(x))$ при $x\to x_0$ означаваме факта, че $\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{f(x)}=0$.

Например $x^3=o(x^5)$ при $x\to+\infty$ и $x^6=o(x^4)$ при $x\to 0$.

Ако $n\in\mathbb{N}$ е фиксирано число, то разликата на две величини от вида $o(x^n)$ при $x\to x_0$ е пак величина от вида $o(x^n)$ при $x\to x_0$.

$$\left.\begin{array}{l} f=o(x^n) \text{ при } x\to x_0 \\ g=o(x^n) \text{ при } x\to x_0 \end{array}\right| \Rightarrow \left|\begin{array}{l} \frac{f}{x^n}\xrightarrow[x\to x_0]{} 0 \\ \frac{g}{x^n}\xrightarrow[x\to x_0]{} 0 \end{array}\right. \Rightarrow \frac{f-g}{x^n}\xrightarrow[x\to x_0]{} 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f-g=o(x^n) \text{ при } x\to x_0$$

(5) Зад. 4 Изследвайте за сходимост несобствения интеграл $I=\int_0^1 \frac{(\cos^2 2x - e^{-4x})^3}{x^p}dx \quad (p\in\mathbb{R})$.

Решение: Особената точка е 0. Имаме, че

$\cos^2 2x = \frac{1}{2}(1+\cos 4x) \overset{\text{от (3)}}{=}$

$=\frac{1}{2}\left[1+\left(1-\frac{(4x)^2}{2!}+\frac{(4x)^4}{4!}-\frac{(4x)^6}{6!}+\frac{(4x)^8}{8!}-\dots\right)\right], x\in\mathbb{R}$

и $e^{-4x} \overset{\text{от (1)}}{=} 1-4x+\frac{(-4x)^2}{2!}+\frac{(-4x)^3}{3!}+\frac{(-4x)^4}{4!}+\dots, x\in\mathbb{R}$

Оказа се, че $\cos^2 2x = 1+o(x)$ при $x\to 0$ и че $e^{-4x}=1-4x+o(x)$ при $x\to 0$.

Сл. $\cos^2 2x - e^{-4x} = [\cancel{1}+o(x)]-[\cancel{1}-4x+o(x)] =$

$=4x+o(x)$ при $x\to 0$.

Тогава $I=\int_0^1 \frac{(4x+o(x))^3}{x^p}dx = \int_0^1 \frac{x^3\left(4+\frac{o(x)}{x}\right)^3}{x^p}dx =$

$=\int_0^1 \frac{\left(4+\frac{o(x)}{x}\right)^3}{x^{p-3}}dx \sim \int_0^1 \frac{1}{x^{p-3}}dx = \int_0^1 \frac{1}{(x-0)^{p-3}}dx.$

$\left(4+\frac{o(x)}{x}\right)^3 \xrightarrow[x\to 0]{} 4^3$

Сл. I е сходящ $\iff p-3<1 \iff p<4$.

Отг. на зад. 4: I е сходящ $\iff p<4$.

Зад. 5 Изследвайте за сходимост несобствения интеграл $I=\int_0^1 \frac{(x\ln(1+x)-\sin^2 x)^2}{x^p}dx \quad (p\in\mathbb{R})$.

Решение: Особената точка на I е 0. Имаме, че

$x\ln(1+x) \overset{\text{от (4)}}{=} x^2-\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{3}-\frac{x^5}{4}+\frac{x^6}{5}-\dots, x\in(-1,1]$

и $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x) \overset{\text{от (3)}}{=}$

$=\frac{1}{2}\left[1-\left(1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}-\frac{(2x)^6}{6!}+\frac{(2x)^8}{8!}-\dots\right)\right], x\in\mathbb{R}.$

Оказа се, че $x\ln(1+x)=x^2-\frac{x^3}{2}+o(x^3)$ при $x\to 0$ и че $\sin^2 x = x^2+o(x^3)$ при $x\to 0$.

Сл. $x\ln(1+x)-\sin^2 x = \left[\cancel{x^2}-\frac{x^3}{2}+o(x^3)\right]-\left[\cancel{x^2}+o(x^3)\right]=$

$=-\frac{x^3}{2}+o(x^3)$ при $x\to 0$.

Тогава $I=\int_0^1 \frac{\left(-\frac{x^3}{2}+o(x^3)\right)^2}{x^p}dx = \int_0^1 \frac{x^6\left(-\frac{1}{2}+\frac{o(x^3)}{x^3}\right)^2}{x^p}dx =$

$$⑥ = \int_0^1 \frac{\left(-\frac{1}{2}+\frac{o(x^3)}{x^3}\right)^2}{x^{p-6}}\,dx \sim \int_0^1 \frac{1}{x^{p-6}}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{(x-0)^{p-6}}\,dx.$$

$$\left(-\frac{1}{2}+\frac{o(x^3)}{x^3}\right)^2 \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{4}$$

Сл. I е сходящ $\iff p-6<1 \iff p<7$.

Отг. на зад. 5: I е сходящ $\iff p<7$.

Функции на много променливи (уводни бележки)

С $f'_x, f'_y, f'_z, \dots$ ще означаваме първите частни производни на функцията $f(x,y,z,\dots)$ съответно по променливите $x, y, z, \dots$. Например f'_x се пресмята така: във функцията $f(x,y,z,\dots)$ фиксираме всички променливи освен x (т.е. гледаме на всички променливи освен x като на константи); тогава $f(x,y,z,\dots)$ се превръща във функция само на x; диференцираме тази функция по x и това, което се получава е f'_x. Примери: 1) Ако $f(x,y,z)=4x+5y+6z$, то $f'_x=4$, $f'_y=5$, $f'_z=6$. 2) Ако $f(x,y,z)=xy^2z^3$, то $f'_x=y^2z^3$, $f'_y=2xyz^3$, $f'_z=3xy^2z^2$.

$\mathbb{R}^n \overset{def}{=} \{(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}$ за $i=1,2,3,\dots,n\}$.

Например $\mathbb{R}^1=\mathbb{R}$ е правата, $\mathbb{R}^2$ е равнината, $\mathbb{R}^3$ е тримерното пространство (в което живеем).

Ако $D \subseteq \mathbb{R}^n$, то:

- с $\operatorname{int} D$ означаваме вътрешността на D;
- с ∂D означаваме границата (контура) на D;
- с $\operatorname{ext} D$ означаваме външността на D.

Множеството $D \subseteq \mathbb{R}^n$ се нарича:

- отворено, ако не съдържа никоя от граничните си точки
- затворено, ако съдържа всичките си гранични точки
- ограничено, ако се съдържа в кълбо с център началото
- компактно, ако е едновременно ограничено и затворено.