(1) Упражнение 29 за 1, 2 и 3 група

Интеграли от диференциален бином

Това са интегралите от вида $\int x^m(a+bx^n)^p dx$, където $a, b \in \mathbb{R}$ и $m, n, p \in \mathbb{Q}$.

Тези интеграли могат да се изразят чрез елементарни функции само в 3 случая:

1 сл. $p \in \mathbb{Z} \longrightarrow$ полагаме $x = t^k$, където k е НОК на знаменателите на m и n;

2 сл. $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z} \longrightarrow$ полагаме $a+bx^n = t^k$, където k е знаменателя на p;

3 сл. $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z} \longrightarrow$ полагаме $ax^{-n} + b = t^k$, където k е знаменателя на p.

И в 3-те случая след съответното полагане се получава интеграл от рационална функция.

Пресметнете неопределените интеграли:

Зад. 1 $I = \int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}(1+\sqrt[3]{x})^3} dx$

Решение: $I = \int x^{-\frac{2}{3}}(1+x^{\frac{1}{3}})^{-3} dx$

$m = -\frac{2}{3}$, $n = \frac{1}{3}$, $p = -3$

$p \in \mathbb{Z}$ и е налице 1-вия случай.

Сл. полагаме $x = t^3$.

$I = \int t^{-2}(1+t)^{-3} dt^3 = \int \cancel{t^{-2}}(1+t)^{-3} 3\cancel{t^2} dt =$

$= 3\int (1+t)^{-3} d(1+t) = 3\frac{(1+t)^{-2}}{-2} + c = \frac{-3}{2(1+t)^2} + c$,

където $t = \sqrt[3]{x}$.

Зад. 2 $I = \int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}} dx$

Решение: $I = \int x^{-\frac{2}{3}}(1+x^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}} dx$

$m = -\frac{2}{3}$, $n = \frac{1}{3}$, $p = \frac{1}{2}$

$\frac{m+1}{n} = 1 \in \mathbb{Z}$ и е налице 2-рия случай.

Сл. полагаме $1 + x^{\frac{1}{3}} = t^2$.

② $x^{\frac{1}{3}} = t^2-1$, $x=(t^2-1)^3$, $x^{-\frac{2}{3}}=(t^2-1)^{-2}$,

$I=\int (t^2-1)^{-2}\cdot t\, d(t^2-1)^3 =$

$=\int \cancel{(t^2-1)^{-2}}.t.3\cancel{(t^2-1)^2}.2t\,dt = 6\int t^2\,dt =$

$=6\,\frac{t^3}{3}+c = 2t^3+c$, където $t=\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}$.

Зад. 3 $I=\int \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}\,dx$

Решение: $I=\int x^{-2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx$

$m=-2$, $n=2$, $p=-\frac{1}{2}$

$\frac{m+1}{n}+p=-1\in\mathbb{Z}$ и е налице третия случай.

Сл. полагаме $x^{-2}+1=t^2$.

$x^{-2}=t^2-1$, $x=(t^2-1)^{-\frac{1}{2}}$, $x^2=(t^2-1)^{-1}=\frac{1}{t^2-1}$,

$I=\int (t^2-1)\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)^{-\frac{1}{2}} d(t^2-1)^{-\frac{1}{2}} =$

$=\int (t^2-1)\left(\frac{t^2}{t^2-1}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{\cancel{2}}\right)(t^2-1)^{-\frac{3}{2}}\cancel{2}t\,dt=$

$=-\int \cancel{(t^2-1)}\frac{\cancel{t^{-1}}}{\cancel{(t^2-1)^{-\frac{1}{2}}}}\cancel{(t^2-1)^{-\frac{3}{2}}}\cancel{t}\,dt=$

$=-\int 1\,dt=-t+c$, където $t=\sqrt{x^{-2}+1}$.

Зад. 4 $I=\int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}\,dx$

Упътване: $I=\int x^{\frac{1}{2}}(1+x^{\frac{1}{3}})^{-2}\,dx$

$m=\frac{1}{2}$, $n=\frac{1}{3}$, $p=-2$

$p\in\mathbb{Z}$, налице е 1-вия случай и полагаме $x=t^6$.

Интеграли от рационална функция на $\sin x$ и $\cos x$

Това са интегралите от вида $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$, където $R(x_1, x_2)$ е рационална функция.

Тези интеграли се свеждат до интеграли от рационална функция чрез универсалната тригонометрична субституция $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, като се използва, че:

③ $\sin x = \dfrac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \dfrac{2\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} = \dfrac{2t}{1+t^2}$,

$\cos x = \dfrac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \dfrac{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$,

$x = 2\,\mathrm{arctg}\,t \Rightarrow dx = d(2\,\mathrm{arctg}\,t) = \dfrac{2}{1+t^2}\,dt$.

Има 3 частни случая, в които е за предпочитане друга субституция (защото се получава по-прост интеграл от рационална функция):

1сл.) ако $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то полагаме $t = \cos x$;

2сл.) ако $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то полагаме $t = \sin x$;

3сл.) ако $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то полагаме $t = \mathrm{tg}\,x$.

Пресметнете неопределените интеграли:

Зад. 1 $I = \displaystyle\int \frac{1}{2\sin x - \cos x + 5}\,dx$

Решение: Не е налице никой от 3-те частни случая и затова полагаме $t = \mathrm{tg}\frac{x}{2}$.

$$I = \int \frac{1}{\frac{4t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} + 5}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt =$$

$$= \int \frac{\cancel{1+t^2}}{6t^2+4t+4}\cdot\frac{2}{\cancel{1+t^2}}\,dt = \int\frac{1}{3t^2+2t+2}\,dt =$$

$$= \int \frac{3}{9t^2+6t+6}\,dt = \int \frac{1}{(3t+1)^2+5}\,d(3t+1) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{1}{\left(\frac{3t+1}{\sqrt{5}}\right)^2+1}\,d\frac{3t+1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{3t+1}{\sqrt{5}} + C,$$

където $t = \mathrm{tg}\frac{x}{2}$.

(4) Зад. 2 $I = \int \sin^2 x \cos^3 x \, dx$

Решение: $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ и затова полагаме $t = \sin x$.

$I = \int \sin^2 x \cos^2 x \cos x \, dx =$

$= \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x) \, d\sin x =$

$= \int t^2 (1 - t^2) \, dt = \int (t^2 - t^4) \, dt =$

$= \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C$, където $t = \sin x$.

Зад. 3 $I = \int \frac{\sin^5 x}{\cos^2 x} \, dx$

Решение: $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ и затова полагаме $t = \cos x$.

$I = \int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x} \cdot \sin x \, dx = -\int \frac{(1 - \cos^2 x)^2}{\cos^2 x} \, d\cos x =$

$= -\int \frac{(1 - t^2)^2}{t^2} \, dt = -\int \frac{1 - 2t^2 + t^4}{t^2} \, dt =$

$= -\int \left(\frac{1}{t^2} - 2 + t^2 \right) dt = -\left(-\frac{1}{t} - 2t + \frac{t^3}{3} \right) + C$,

където $t = \cos x$.

Зад. 4 $I = \int \frac{1}{\sin^4 x \cos^2 x} \, dx$

Решение: $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ и затова полагаме $t = \operatorname{tg} x$.

$I = \int \frac{1}{\sin^4 x} \, d\operatorname{tg} x = \int \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)^2}{\sin^4 x} \, d\operatorname{tg} x =$

$= \int \frac{\sin^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x}{\sin^4 x} \, d\operatorname{tg} x =$

$= \int \left(1 + 2 \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} + \frac{\cos^4 x}{\sin^4 x} \right) d\operatorname{tg} x =$

$= \int \left(1 + \frac{2}{\operatorname{tg}^2 x} + \frac{1}{\operatorname{tg}^4 x} \right) d\operatorname{tg} x =$

$= \int \left(1 + \frac{2}{t^2} + \frac{1}{t^4} \right) dt = \int (1 + 2t^{-2} + t^{-4}) \, dt =$

$= \left(t + 2\frac{t^{-1}}{-1} + \frac{t^{-3}}{-3} \right) + C = t - \frac{2}{t} - \frac{1}{3t^3} + C$, където $t = \operatorname{tg} x$.