Групи // Ред на елемент и циклична група

$(G,\cdot)$ $\quad k \in \mathbb{N}$

$$a^k = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{k}$$

$$a^{-k} = \underbrace{a^{-1} \cdot a^{-1} \cdot \ldots \cdot a^{-1}}_{k}$$

$$a^0 = e$$

$(L,+)$ $\quad k \in \mathbb{N}$

$x \in L$

$$k(x) = \underbrace{x + \ldots + x}_{k}$$

$$-k(x) = \underbrace{(-x) + (-x) + \ldots + (-x)}_{k}$$

$$0(x) = 0$$

$$a^k \cdot a^s = a^{k+s}$$

$$(a^k)^s = a^{k \cdot s}$$

$$k(x) + s(x) = (k+s)(x)$$

$$s(k(x)) = (sk)(x)$$

$H < G$, $a \in H \Rightarrow a^k \in H$, $\forall k \in \mathbb{Z}$

$\langle a \rangle = \{ a^k \mid k \in \mathbb{Z} \}$ циклична подгрупа, породена от a

$\langle a \rangle \subset H < G$

$G \neq \emptyset$ $\quad (G,\cdot)$

0) $\forall a,b \in G \to a \cdot b \in G$

1) $(ab)c = a(bc)$, $\forall a,b,c \in G$

2) $\exists\, e: a \cdot e = e \cdot a = a$, $\forall a$

3) $\forall a \in G$, $\exists\, b: ab = ba = e$

$\emptyset \neq H \subset G$ $\quad (G,\cdot)$

$(H,\cdot)$ $\quad H < G$

Тв $\emptyset \neq H \subset G$

$$H < G \Leftrightarrow \begin{cases} ab \in H, \forall a,b \in H \\ a^{-1} \in H, \forall a \in H \end{cases}$$

$(L,+)$

$\langle x \rangle = \{ k(x) \mid k \in \mathbb{Z} \}$

G е цикличная, когато $\exists\, a \in G\, !\quad G = \langle a \rangle$
в

$G = \{a^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Опр. $a \in G$
$|a| = r = ord(a)$, когато
r е min. естествено число
за което $a^r = e$

Ако такова не съществува
$\Rightarrow o(a) = |a| = \infty$

Опр. $(L, +)$
$|x| = t$ когато t е
min. ест. число за
което $t(x) = 0 = \underbrace{x + \dots + x}_{t}$

Т. Нека $(G, \cdot)$, $a \in G$!
$|a| = k \neq \infty$
1) $a^s = e \iff k \mid s$
2) $a^s = a^t \iff s \equiv t \pmod{k}$

Тв. $(G, \cdot)$ $a \in G$, $|a| = k \neq \infty$
Тогава $|a^s| = \dfrac{k}{(s,k)}$

$k_1 = \dfrac{k}{(k,s)}$

Д-во Нека $|a^s| = t$

НОД$(s,k) = d$
$s = s_1 d$
$k = k_1 d$

$(a^s)^t = a^{st} = e \Rightarrow k \mid st$
$\Rightarrow k_1 d \mid s_1 d t \Rightarrow k_1 \mid s_1 t \Rightarrow k_1 \mid t$

$(a^s)^{k_1} = a^{s_1 d k_1} = a^{s_1 k} = e \Rightarrow t \mid k_1 \Rightarrow k_1 = t$

I) $(G, \cdot)$ и $a \in G$ и $|a| = k \neq \infty$

Тогава $|\langle a \rangle| = k$

Д-во) $a^s = a^t \Longleftrightarrow s \equiv t \pmod{k}$

$\bar{s} = \{ s + kl \mid k \in \mathbb{Z} \}$

$p \in \bar{s} \Rightarrow a^p = a^s$

$\Rightarrow \langle a \rangle = \{ a^p \mid p \in \mathbb{Z} \} = \{ a^0, a^1, \dots, a^{k-1} \}$

$0 \leq p \neq t < k$

Допускаме че $a^p = a^t \Rightarrow k \mid (p - t)$ против.

$\Rightarrow$ елементите $a^0, a^1, \dots, a^{k-1}$ са различни помежду си

$\langle a \rangle = \{ a^0, a^1, \dots, a^{k-1} \}$

$|\langle a \rangle| = k$

когато $|a| = \infty$

$a^s = a^t \Longleftrightarrow s = t$

за $s \neq t$ $a^s \neq a^t$

всички са различни помежду си

$\{ a^s \mid s \in \mathbb{Z} \}$

$\Rightarrow |\langle a \rangle| = \infty$

T/ Всяка подгрупа на циклична група е циклична.

$G = \langle a \rangle \qquad H < G$

Нека $a^s \in H$ е такова че s е min естествено число за което $a^s \in H$

$a^s \in H \Rightarrow \langle a^s \rangle \subset H$

Тв/ Нека $G = \langle a \rangle$

$|\langle a \rangle| = k$

$H < G$

$\Rightarrow H = \langle a^d \rangle$ d - min естеств. число

$\Rightarrow d \mid k$ и $|H| = \frac{k}{d}$

Нека $a^d \in H$ (произволен)

$d = sq + r, \quad 0 \leq r < s$

$\underbrace{a^d}_{\in H} = a^{sq+r} = \underbrace{(a^s)^q}_{\in H} \cdot a^r \Rightarrow a^r = a^d \cdot a^{-sq} \in H$

$a^r \in H$ и от s - min $\Rightarrow r = 0$

$\Rightarrow d = sq \Rightarrow a^d = (a^s)^q \in \langle a^s \rangle$

$\Rightarrow H \subset \langle a^s \rangle \Rightarrow H = \langle a^s \rangle$

$C_n = \{1, w_1, w_1^2, \dots, w_1^{n-1}\} = \{x \in \mathbb{C} \mid x^n = 1\} = \langle w_1 \rangle$

$w_1 = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$

$C_{12} = \langle w_1 \rangle$

$|w_1^2| = \frac{12}{(12,2)} = 6$

$|w^3| = \frac{12}{(12,3)} = 4$

$|w^5| = \frac{12}{(12,5)} = 12$

$|w^8| = \frac{12}{(12,8)} = 3$

$\langle w_1^2 \rangle = \{1, w_1^2, w^4, w^6, w^8, w^{10}\} \cong C_6 = \langle w^{10} \rangle$

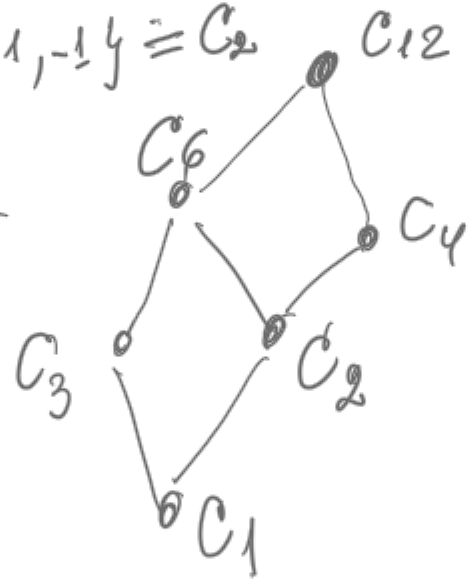
$\langle w_1^3 \rangle = \{1, w^3, w^6, w^9\} = C_4 = \langle w^9 \rangle$

$\langle w^4 \rangle = \{1, w^4, w^8\} = C_3 = \langle w^8 \rangle = \{1, w^8, w^4\}$

$\langle w^5 \rangle = C_{12} = \langle w_1 \rangle = \langle w_1^7 \rangle = \langle w^{11} \rangle$

$\langle w^6 \rangle = \{1, w^6\} = \{1, -1\} \cong C_2$

$\langle 1 \rangle = \{1\} = C_1$



Как изглеждат подгрупите на C_8; C_{20}

C_{24}