Лекция 15.4.2021

1 Параметрични уравнения на афинно подпространство

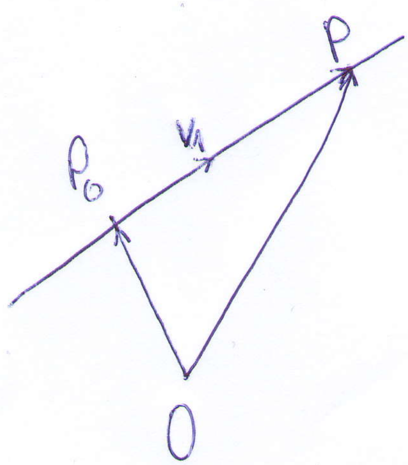
Нека $\mathcal{A}$ е n-мерно афинно пространство, моделирано върху линейното пространство U, и $K = Oe_1 \dots e_n$ е афинна координатна система в $\mathcal{A}$.

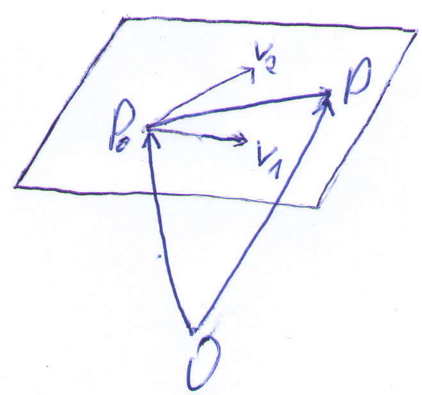
Теорема 1 *Нека точката $P_0 \in \mathcal{A}$, а векторите $v_1, \dots, v_k \in U$ са линейно независими. Означаваме $r_0 = \overrightarrow{OP_0}$. Тогава k-мерното афинно подпространство B на $\mathcal{A}$, което минава през P_0 и е успоредно на $v_1, \dots, v_k$, има спрямо K векторно параметрично уравнение*

$$(1) \qquad B : r = r_0 + \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k, \qquad \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R} \quad (\text{или } (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k).$$

При това за различни набори параметри се получават радиус-вектори на различни точки.

Доказателство: Ако ви е нужна някаква нагледна представа, можете да си мислите за права в геометричната равнина или геометричното пространство ($k = 1$, $n = 2$ или 3) или равнина в геометричното пространство ($k = 2$, $n = 3$).





Знаем, че $B = \left\{ P \in \mathcal{A} : \exists \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R} : \overrightarrow{P_0P} = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k \right\}$. Тъй като за произволна точка P означаваме $r = \overrightarrow{OP}$, имаме $\overrightarrow{P_0P} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0} = r - r_0$. Тогава
$P \in B \Leftrightarrow \exists \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R} : \ r - r_0 = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k$, тоест $r = r_0 + \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k$.
Това означава, че B има векторно параметрично уравнение (1).

Ако за два набора параметри $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ и $\mu_1, \dots, \mu_k$ се получава радиус-векторът на една и съща точка, то $r_0 + \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k = r_0 + \mu_1 v_1 + \dots + \mu_k v_k$ и следователно $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_k v_k$. От това и от линейната независимост на $v_1, \dots, v_k$ следва $\lambda_1 = \mu_1, \dots, \lambda_k = \mu_k$. Значи за различни набори параметри се получават радиус-вектори на различни точки. $\square$

Теорема 2 *1. Нека точката $P_0 \in \mathcal{A}$ и линейно независимите вектори $v_1, \dots, v_k \in U$ имат спрямо K координати $P_0(x_{10}, \dots, x_{n0})$, $v_j(\xi_{1j}, \dots, \xi_{nj})$, $j = 1, \dots, k$. Тогава k-мерното афинно подпространство B на $\mathcal{A}$, което минава през P_0 и е успоредно на $v_1, \dots, v_k$, има спрямо K скаларни параметрични уравнения*

$$(2) \qquad B : \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & x_{10} + \lambda_1 \xi_{11} + \dots + \lambda_k \xi_{1k} \\ & \vdots & \\ x_i & = & x_{i0} + \lambda_1 \xi_{i1} + \dots + \lambda_k \xi_{ik} \\ & \vdots & \\ x_n & = & x_{n0} + \lambda_1 \xi_{n1} + \dots + \lambda_k \xi_{nk} \end{array} \right. , \qquad \begin{array}{c} \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R} \\ (\textit{или } (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k) \end{array},$$

тоест

$$B : x = x_0 + \lambda_1 \xi_1 + \dots + \lambda_k \xi_k, \quad \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R} \quad (\textit{или } (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k),$$

където $x_0, \xi_1, \dots, \xi_k \in \mathbb{R}^n$ са координатните вектори на $P_0, v_1, \dots, v_k$. При това за различни набори параметри се получават координатни вектори на различни точки.

2. Обратно: Множеството B с параметрични уравнения (2), където $\xi_1, \dots, \xi_k \in \mathbb{R}^n$ са линейно независими, е k-мерното афинно подпространство на $\mathcal{A}$, което минава през точката $P_0(x_0)$ и е успоредно на векторите $v_1(\xi_1), \dots, v_k(\xi_k)$.

Доказателство:

1. Това следва от Теорема 1 и от факта, че като напишем векторно параметрично уравнение покоординатно получаваме скаларни параметрични уравнения.

2. Това следва от 1., защото от линейната независимост на координатните вектори $\xi_1, \dots, \xi_k$ следва линейната независимост на $v_1, \dots, v_k$. $\square$

Забележка 1 Ако в Теорема 1 и Теорема 2 векторите $v_1, \dots, v_k$ са линейно зависими, то афинното подпространство определено от P_0 и $l(v_1, \dots, v_k)$ пак има същите параметрични уравнения (1) и (2), но $\dim B < k$ и една точка се получава за много набори на параметрите.

Теорема 3 *Нека $k \leq n$ и нележащите в $(k-1)$-мерно афинно подпространство на $\mathcal{A}$ точки $P_0, \dots, P_k \in \mathcal{A}$ имат спрямо K координати $P_j(x_{1j}, \dots, x_{nj})$, $j = 0, \dots, k$. Тогава k-мерното афинно подпространство B на $\mathcal{A}$, което минава през $P_0, \dots, P_k$, има спрямо K скаларни параметрични уравнения*

$$(3) \qquad B : \begin{cases} x_1 &= x_{10} + \lambda_1(x_{11} - x_{10}) + \dots + \lambda_k(x_{1k} - x_{10}) \\ &\vdots \\ x_i &= x_{i0} + \lambda_1(x_{i1} - x_{i0}) + \dots + \lambda_k(x_{ik} - x_{i0}) \\ &\vdots \\ x_n &= x_{n0} + \lambda_1(x_{n1} - x_{n0}) + \dots + \lambda_k(x_{nk} - x_{n0}) \end{cases} , \quad \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R},$$

тоест

$$B : x = x^0 + \lambda_1(x^1 - x^0) + \dots + \lambda_k(x^k - x^0), \quad \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R},$$

където $x^0, \dots, x^k \in \mathbb{R}^n$ са координатните вектори на $P_0, \dots, P_k$,
или еквивалентно

$$(4) \qquad B : \begin{cases} x_1 &= (1 - \lambda_1 - \dots - \lambda_k)x_{10} + \lambda_1 x_{11} + \dots + \lambda_k x_{1k} \\ &\vdots \\ x_i &= (1 - \lambda_1 - \dots - \lambda_k)x_{i0} + \lambda_1 x_{i1} + \dots + \lambda_k x_{ik} \\ &\vdots \\ x_n &= (1 - \lambda_1 - \dots - \lambda_k)x_{n0} + \lambda_1 x_{n1} + \dots + \lambda_k x_{nk} \end{cases} , \quad \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R},$$

тоест

$$B : x = (1 - \lambda_1 - \dots - \lambda_k)x^0 + \lambda_1 x^1 + \dots + \lambda_k x^k, \quad \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R},$$

или еквивалентно

$$(5) \qquad B : \begin{cases} x_1 &= \lambda_0 x_{10} + \lambda_1 x_{11} + \dots + \lambda_k x_{1k} \\ &\vdots \\ x_i &= \lambda_0 x_{i0} + \lambda_1 x_{i1} + \dots + \lambda_k x_{ik} \\ &\vdots \\ x_n &= \lambda_0 x_{n0} + \lambda_1 x_{n1} + \dots + \lambda_k x_{nk} \end{cases} , \quad \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R} : \sum_{j=0}^{k} \lambda_j = 1,$$

тоест

$$B : x = \lambda_0 x^0 + \lambda_1 x^1 + \dots + \lambda_k x^k, \quad \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R} : \lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1.$$

Доказателство: Знаем, че $B = \left\{ P \in \mathcal{A} : \exists \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R} : \overrightarrow{P_0 P} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \overrightarrow{P_0 P_i} \right\}$, тоест B е k-мерното афинно подпространство B на $\mathcal{A}$, което минава през P_0 и е успоредно на $\overrightarrow{P_0 P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0 P_k}$. Тогава (3) следва от Теорема 2, приложена за точката P_0 и векторите $v_j = \overrightarrow{P_0 P_j}$, $j = 1, \dots, k$, чиито координатни вектори спрямо K са $\xi_j = x^j - x^0$, $j = 1, \dots, k$. (4) очевидно е (3), написано по друг начин, а (5) се получава като в (4) се положи $\lambda_0 = 1 - \lambda_1 - \dots - \lambda_k$ (и затова се появява изискването $\sum_{j=0}^{k} \lambda_j = 1$). $\square$

Забележка 2 В Теорема 3 изискването $k \leq n$ и точките $P_0, \ldots, P_k \in \mathcal{A}$ да не лежат в $(k-1)$-мерно афинно подпространство на $\mathcal{A}$ може да се замени с изискването точките $P_0, \ldots, P_k$ да не лежат в афинно подпространство на $\mathcal{A}$ с размерност строго по-малка от k.
Това е защото при $k \leq n$ всяко афинно подпространство с размерност строго по-малка от k се съдържа в $(k-1)$-мерно афинно подпространство (ще уголемим направляващото пространство до $(k-1)$-мерно), а $k > n$ при това изискване е невъзможно, защото точките лежат в n-мерното $\mathcal{A}$.

Частни случаи:

1. $n = 2$, $k = 1$, тоест права в 2-мерно афинно пространство (в частност, в геометричната равнина).
   Нека координатите са (x, y) вместо (x_1, x_2).

   Теорема 2′ *Нека точката $P_0 \in \mathcal{A}$ и ненулевият вектор $v \in U$ имат спрямо K координати $P_0(x_0, y_0)$, $v(\xi, \eta)$. Тогава правата l, която минава през P_0 и е колинеарна с v, има спрямо K скаларни параметрични уравнения*

   $$l : \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & x_0 + \lambda\xi \\ y & = & y_0 + \lambda\eta \end{array} \right. , \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

   Теорема 3′ *Нека различните точки $P_0, P_1 \in \mathcal{A}$ имат спрямо K координати $P_j(x_j, y_j)$, $j = 0, 1$. Тогава правата l, определена от P_0 и P_1, има спрямо K скаларни параметрични уравнения*

   $$l : \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & x_0 + \lambda(x_1 - x_0) \\ y & = & y_0 + \lambda(y_1 - y_0) \end{array} \right. , \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

   или еквивалентно

   $$l : \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & (1-\lambda)x_0 + \lambda x_1 \\ y & = & (1-\lambda)y_0 + \lambda y_1 \end{array} \right. , \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

   или еквивалентно

   $$l : \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & \lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 \\ y & = & \lambda_0 y_0 + \lambda_1 y_1 \end{array} \right. , \quad \lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{R} : \lambda_0 + \lambda_1 = 1.$$

2. $n = 3$, $k = 1$, тоест права в 3-мерно афинно пространство (в частност, в геометричното пространство).
   Нека координатите са (x, y, z) вместо (x_1, x_2, x_3).

   Теорема 2″ *Нека точката $P_0 \in \mathcal{A}$ и ненулевият вектор $v \in U$ имат спрямо K координати $P_0(x_0, y_0, z_0)$, $v(\xi, \eta, \zeta)$. Тогава правата l, която минава през P_0 и е колинеарна с v, има спрямо K скаларни параметрични уравнения*

   $$l : \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & x_0 + \lambda\xi \\ y & = & y_0 + \lambda\eta \\ z & = & z_0 + \lambda\zeta \end{array} \right. , \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Теорема 3″ *Нека различните точки* $P_0, P_1 \in \mathcal{A}$ *имат спрямо* K *координати* $P_j(x_j, y_j, z_j)$, $j = 0, 1$. *Тогава правата* l, *определена от* P_0 *и* P_1, *има спрямо* K *скаларни параметрични уравнения*

$$l : \begin{cases} x = x_0 + \lambda(x_1 - x_0) \\ y = y_0 + \lambda(y_1 - y_0) \\ z = z_0 + \lambda(z_1 - z_0) \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

или еквивалентно

$$l : \begin{cases} x = (1-\lambda)x_0 + \lambda x_1 \\ y = (1-\lambda)y_0 + \lambda y_1 \\ z = (1-\lambda)z_0 + \lambda z_1 \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

или еквивалентно

$$l : \begin{cases} x = \lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 \\ y = \lambda_0 y_0 + \lambda_1 y_1 \\ z = \lambda_0 z_0 + \lambda_1 z_1 \end{cases}, \quad \lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{R} : \lambda_0 + \lambda_1 = 1.$$

3. $n = 3$, $k = 2$, тоест равнина в 3-мерно афинно пространство (в частност, в геометричното пространство).
   Нека координатите са (x, y, z) вместо (x_1, x_2, x_3).

   Теорема 2‴ *Нека точката* $P_0 \in \mathcal{A}$ *и неколинеарните (тоест линейно независими) вектори* $v_1, v_2 \in U$ *имат спрямо* K *координати* $P_0(x_0, y_0, z_0)$, $v_j(\xi_j, \eta_j, \zeta_j)$, $j = 1, 2$. *Тогава равнината* π, *която минава през* P_0 *и е компланарна с* v_1 *и* v_2, *има спрямо* K *скаларни параметрични уравнения*

$$\pi : \begin{cases} x = x_0 + \lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \xi_2 \\ y = y_0 + \lambda_1 \eta_1 + \lambda_2 \eta_2 \\ z = z_0 + \lambda_1 \zeta_1 + \lambda_2 \zeta_2 \end{cases}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

Теорема 3''' *Нека нележащите на една права точки $P_0, P_1, P_2 \in \mathcal{A}$ имат спрямо K координати $P_j(x_j, y_j, z_j)$, $j = 0, 1, 2$. Тогава равнината π, определена от P_0, P_1, P_2, има спрямо K скаларни параметрични уравнения*

$$\pi : \begin{cases} x &= x_0 + \lambda_1(x_1 - x_0) + \lambda_2(x_2 - x_0) \\ y &= y_0 + \lambda_1(y_1 - y_0) + \lambda_2(y_2 - y_0) \\ z &= z_0 + \lambda_1(z_1 - z_0) + \lambda_2(z_2 - z_0) \end{cases}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},$$

или еквивалентно

$$\pi : \begin{cases} x &= (1 - \lambda_1 - \lambda_2)x_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \\ y &= (1 - \lambda_1 - \lambda_2)y_0 + \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \\ z &= (1 - \lambda_1 - \lambda_2)z_0 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 \end{cases}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},$$

или еквивалентно

$$\pi : \begin{cases} x &= \lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \\ y &= \lambda_0 y_0 + \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \\ z &= \lambda_0 z_0 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 \end{cases}, \quad \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} : \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1.$$

4. $\mathcal{A} = \mathbb{R}^n$ със стандартната координатна система K^0.

   Теорема 2'$^{\text{v}}$ *Нека $x_0 \in \mathbb{R}^n$, а векторите $\xi_1, \dots, \xi_k \in \mathbb{R}^n$ са линейно независими. Тогава k-мерното афинно подпространство B на $\mathbb{R}^n$, което минава през x_0 и е успоредно на $\xi_1, \dots, \xi_k$, има спрямо K^0 скаларни параметрични уравнения*

$$B : x = x_0 + \lambda_1 \xi_1 + \dots + \lambda_k \xi_k, \quad \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}.$$

.

Следствие 1 *B е k-мерно афинно подпространство на $\mathcal{A} \Leftrightarrow \varkappa_K(B)$ е k-мерно афинно подпространство на $\mathbb{R}^n$.*

Доказателство: Това следва от Теорема 2 и факта, че параметричните уравнения на B спрямо K и на $\varkappa_K(B)$ спрямо K^0 са едни и същи:

Нека B е k-мерно афинно подпространство на $\mathcal{A}$. Нека $P_0(x_0)$ е точка от B, а $v_1(\xi_1), \dots, v_k(\xi_k)$ е базис на направляващото пространство на B. По Теорема 2 тогава B има спрямо K параметрични уравнения (2). Значи $\varkappa_K(B)$ има спрямо K^0 същите параметрични уравнения (2) и тъй като $\xi_1, \dots, \xi_k$ са линейно независими (защото са координатните вектори на линейно независимите $v_1, \dots, v_k$), то по Теорема 2'$^{\text{v}}$ $\varkappa_K(B)$ е k-мерно афинно подпространство на $\mathbb{R}^n$. С това е доказана правата посока.

Обратно, нека $\varkappa_K(B)$ е k-мерно афинно подпространство на $\mathbb{R}^n$. Нека x_0 е точка от $\varkappa_K(B)$, а $\xi_1, \dots, \xi_k$ е базис на направляващото пространство на $\varkappa_K(B)$. По Теорема 2'$^{\text{v}}$ тогава $\varkappa_K(B)$ има спрямо K^0 параметрични уравнения (2). Значи B има спрямо K същите параметрични уравнения (2). Нека $P_0 \in \mathcal{A}$ и $v_1, \dots, v_k \in U$ са точката и векторите, чиито координатни вектори спрямо K са съответно x_0 и $\xi_1, \dots, \xi_k$. Тъй като $\xi_1, \dots, \xi_k$ са линейно независими, то и $v_1, \dots, v_k$ са линейно независими. Тогава по Теорема 2 B е k-мерно афинно подпространство на $\mathcal{A}$. С това е доказана и обратната посока. $\square$

Забележка 3 В горните неща никъде не се използват някакви специфични свойства на полето на реалните числа, така че всичко важи без промяна и ако вместо $\mathbb{R}$ се вземе произволно поле F, тоест ако U е линейно пространство над произволно поле.

2 Общо уравнение на афинно подпространство

Нека $\mathcal{A}$ е n-мерно афинно пространство, моделирано върху линейното пространство U, и $K = Oe_1 \dots e_n$ е афинна координатна система в $\mathcal{A}$.

Определение 1 Нека B е k-мерно афинно подпространство на $\mathcal{A}$. *Общо уравнение на B спрямо K* е уравнение на B спрямо K от вида $Ax = b$ (или $Ax - b = 0$), където A е матрица $(n-k) \times n$, $b \in \mathbb{R}^{n-k}$ (и $r(A) = n-k$).
С други думи, общо уравнение на B спрямо K е линейна система с $n-k$ уравнения, която задава B спрямо K.

Забележка 4 Условието $r(A) = n-k$ следва от останалите условия – виж следващата теорема.

Теорема 4 *0. Подмножеството B на $\mathcal{A}$ е k-мерно афинно подпространство на $\mathcal{A}$ $\Leftrightarrow$ B се задава спрямо K с някоя съвместима линейна система от вида $Ax = b$, където рангът на матрицата A е $r(A) = n-k$.*

1. *Всяко k-мерно афинно подпространство на $\mathcal{A}$ има общо уравнение спрямо K, тоест задава се спрямо K с някоя линейна система $Ax = b$ с $n-k$ уравнения (и $r(A) = n-k$).*

2. *Обратно: Ако $Ax = b$ е линейна система с n неизвестни и броят на уравненията ѝ е равен на $r(A)$, то тя е съвместима и е общо уравнение спрямо K на някое k-мерно афинно подпространство на $\mathcal{A}$, където $k = n - r(A)$.*

Доказателство:

0. Това следва директно от следните факти, които вече знаем:

   - B е k-мерно афинно подпространство на $\mathcal{A}$
     $\Leftrightarrow$ $\varkappa_K(B)$ е k-мерно афинно подпространство на $\mathbb{R}^n$.
     (Това е последното следствие от предишния въпрос).
   - Дадено подмножество на $\mathbb{R}^n$ е k-мерно афинно подпространство на $\mathbb{R}^n$
     $\Leftrightarrow$ е множеството от решенията на някоя съвместима линейна система $Ax = b$, където рангът на матрицата A е $r(A) = n-k$.
     При това, ако въпросното подмножество е k-мерно афинно подпространство на $\mathbb{R}^n$, то системата може да се вземе с $n-k$ уравнения.
     (Това е във въпроса за афинни подпространства.)

- Това, че някакво подмножество на $\mathbb{R}^n$ е множеството от решенията на някаква система уравнения, и това, че това подмножество се задава спрямо стандартната координатна система K^0 в $\mathbb{R}^n$ със същата система уравнения, е едно и също, защото координатното изображение $\varkappa_{K^0}$ е тъждественото изображение на $\mathbb{R}^n$.
- Уравненията спрямо K на произволно подмножество B на $\mathcal{A}$ и на $\varkappa_K(B)$ спрямо K^0 са едни и същи.

1. От допълнението във втория от използваните по-горе факти, започващо с „При това ...“, следва, че в 0. системата, която задава B спрямо K, може да се вземе с $n-k$ уравнения и значи е общо уравнение на B спрямо K.

2. Тъй като A е подматрица на разширената матрица $(A|b)$ на системата $Ax = b$, то $r(A) \leq r(A|b)$, а тъй като $r(A|b)$ е по-малък или равен на броя на редовете на $(A|b)$, който е $r(A)$, то $r(A|b) \leq r(A)$. Значи $r(A) = r(A|b)$ и от теоремата на Руше следва, че системата $Ax = b$ е съвместима. Нека B е подмножеството на $\mathcal{A}$, което се задава спрямо K със системата $Ax = b$. От 0. тогава следва, че B е k-мерно афинно подпространство на $\mathcal{A}$, където $k = n - r(A)$, и щом системата има $r(A) = n - k$ на брой уравнения, от определението получаваме, че $Ax = b$ е общо уравнение на B. □

Частни случаи:

1. Хиперравнина: $k = n - 1$.
   Следователно линейната система за общото уравнение се състои от $n - k = 1$ уравнение.

   Теорема 4′

   1. *Всяка хиперравнина в $\mathcal{A}$ има общо уравнение спрямо K, тоест уравнение от вида $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$ (и $(a_1, \ldots, a_n) \neq 0$).*
   2. *Обратно: Всяко уравнение от вида $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$, където $(a_1, \ldots, a_n) \neq 0$, е общо уравнение спрямо K на някоя хиперравнина в $\mathcal{A}$.*

2. Права в 2-мерно афинно пространство (в частност, в геометричната равнина): $n = 2$, $k = 1 = n - 1$.
   Нека координатите са (x, y) вместо (x_1, x_2).

   Теорема 4″

   1. *Всяка права в 2-мерно афинно пространство $\mathcal{A}$ има общо уравнение спрямо K, тоест уравнение от вида $Ax + By + C = 0$ (и $(A, B) \neq 0$).*
   2. *Обратно: Всяко уравнение от вида $Ax + By + C = 0$, където $(A, B) \neq 0$, е общо уравнение спрямо K на някоя права в $\mathcal{A}$.*

3. Равнина в 3-мерно афинно пространство (в частност, в геометричното пространство): $n = 3$, $k = 2 = n - 1$.
   Нека координатите са (x, y, z) вместо (x_1, x_2, x_3).

   Теорема 4‴

   1. *Всяка равнина в 3-мерно афинно пространство $\mathcal{A}$ има общо уравнение спрямо K, тоест уравнение от вида $Ax + By + Cz + D = 0$ (и $(A, B, C) \neq 0$).*
   2. *Обратно: Всяко уравнение от вида $Ax + By + Cz + D = 0$, където $(A, B, C) \neq 0$, е общо уравнение спрямо K на някоя равнина в $\mathcal{A}$.*

4. Права в 3-мерно афинно пространство (в частност, в геометричното пространство): $n = 3$, $k = 1$.
   Нека координатите са (x, y, z) вместо (x_1, x_2, x_3).

   Теорема 4$'^{\mathrm{v}}$

   1. *Всяка права в 3-мерно афинно пространство $\mathcal{A}$ има общо уравнение спрямо K, тоест уравнение от вида*
   $$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$
   (и матрицата $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$ има ранг 2).
   2. *Обратно: Всяка система от вида*
   $$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases},$$
   където рангът на матрицата на системата $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$ е 2, е общо уравнение спрямо K на някоя права в $\mathcal{A}$.

Теорема 5 *Нека точката $P_0 \in \mathcal{A}$ и линейно независимите вектори $v_1, \dots, v_k \in U$ имат спрямо K координати $P_0(x_0)$, $v_j(\xi_j)$, $j = 1, \dots, k$. Тогава k-мерното афинно подпространство B на $\mathcal{A}$, което минава през P_0 и е успоредно на $v_1, \dots, v_k$, има спрямо K уравнение*

$$B : \left\{ \det M_{i_1 \dots i_{k+1}} = 0, \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_{k+1} \leq n \right., \tag{6}$$

където $M_{i_1 \dots i_{k+1}}$ е квадратната подматрица от ред $k + 1$ на $M = (\underbrace{x - x_0 \ \xi_1 \ \dots \ \xi_k}_{\text{стълбове}})$, състояща се от редовете с номера $i_1, \dots, i_{k+1}$.
Ако в (6) се вземат онези $n - k$ уравнения, които се получават от подматриците, съдържащи фиксирана квадратна подматрица от ред k на $M' = (\underbrace{\xi_1 \ \dots \ \xi_k}_{\text{стълбове}})$ с ненулева детерминанта, то получената система е общо уравнение на B спрямо K.

Доказателство: Знаем, че B има параметрично уравнение

$$B : x = x_0 + \lambda_1 \xi_1 + \cdots + \lambda_k \xi_k, \quad \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}.$$

Това означава, че $P(x) \in B \Leftrightarrow x - x_0$ е линейна комбинация на $\xi_1, \ldots, \xi_k$.
Поради линейната независимост на $\xi_1, \ldots, \xi_k$ последното условие е еквивалентно на това $x - x_0, \xi_1, \ldots, \xi_k$ да са линейно зависими. Тъй като това са стълбовете на M, то това означава, че $r(M) < k + 1$. (И всъщност означава, че $r(M) = k$, защото $r(M) \geq k$ поради линейната независимост на k-те стълба $\xi_1, \ldots, \xi_k$.) Условието $r(M) < k + 1$ е еквивалентно на това всички минори на M от ред $k + 1$ да са 0. Тъй като M има $k + 1$ стълба, то за да се получи квадратна подматрица от ред $k+1$ трябва да се вземат всички стълбове и някои $k+1$ реда. Така че всевъзможните квадратни подматрици от ред $k+1$ на M са описаните във формулировката матрици $M_{i_1 \ldots i_{k+1}}$, $1 \leq i_1 < \cdots < i_{k+1} \leq n$ и значи всевъзможните минори от ред $k + 1$ на M са $\det M_{i_1 \ldots i_{k+1}}$, $1 \leq i_1 < \cdots < i_{k+1} \leq n$.
Следователно $P(x) \in B \Leftrightarrow \det M_{i_1 \ldots i_{k+1}} = 0$, $1 \leq i_1 < \cdots < i_{k+1} \leq n$,
което означава, че B се задава спрямо K със системата (6). С това е доказана първата част.

Първата част следваше от начина за определяне на ранга на матрица, който произтича от дефиницията на ранг: Рангът на матрица е k, ако има ненулев минор от ред k и всички минори от ред $k + 1$ са 0. Втората част следва от следния по-икономичен начин за определяне на ранга (би трябвало да е известен от курса по алгебра): Рангът на матрица е k, ако съществува ненулев минор от ред k и за един такъв минор всички минори от ред $k+1$, които го съдържат, са 0, тоест 0 са детерминантите на квадратните подматрици от ред $k + 1$, които съдържат квадратната подматрица от ред k, на която разглежданият ненулев минор от ред k е детерминантата. (Начинът е по-икономичен, защото не е нужно да се пресмятат всички минори от ред $k + 1$.)

Тъй като подматрицата M' на M има k стълба, които са линейно независими, то рангът ѝ е k. Значи има квадратна подматрица от ред k, чиято детерминанта е ненулева. Фиксираме една такава. Тъй като това е подматрица и на M, то $r(M) = k$
$\Leftrightarrow$ детерминантите на всички квадратни подматрици от ред $k + 1$ на M, които я обхващат, са 0.
За да се получи такава подматрица от ред $k + 1$ трябва към k-те реда, които участват в разглежданата подматрица от ред k, да се добави още един ред на M (за стълбовете вече видяхме, че трябва да се вземат всичките $k + 1$ стълба). Тъй като M има n реда, то за тоя ред има $n - k$ възможности. Значи ако в (6) оставим само уравненията, идващи от тия $n - k$ подматрици, получената система също ще задава B спрямо K (тоест останалите уравнения в (6) са излишни). Тъй като това е линейна система за x, която се състои от $n - k$ уравнения, то тя представлява общо уравнение на B спрямо K. $\square$

Теорема 6 *Нека $k \le n$ и нележащите в $(k-1)$-мерно афинно подпространство на $\mathcal{A}$ точки $P_0, \dots, P_k \in \mathcal{A}$ имат спрямо K координати $P_j(x^j)$, $j = 0, \dots, k$. Тогава k-мерното афинно подпространство B на $\mathcal{A}$, което минава през $P_0, \dots, P_k$, има спрямо K уравнение*

$$B : \left\{ \det M_{i_1 \dots i_{k+1}} = 0, \quad 1 \le i_1 < \dots < i_{k+1} \le n \right. , \tag{7}$$

където $M_{i_1 \dots i_{k+1}}$ е квадратната подматрица от ред $k+1$ на
$M = (\underbrace{x - x^0 \;\; x^1 - x^0 \; \dots \; x^k - x^0}_{\text{стълбове}})$, състояща се от редовете с номера $i_1, \dots, i_{k+1}$.
Ако в (7) се вземат онези $n-k$ уравнения, които се получават от подматриците, съдържащи фиксирана квадратна подматрица от ред k на $M' = (\underbrace{x^1 - x^0 \; \dots \; x^k - x^0}_{\text{стълбове}})$ с ненулева детерминанта, то получената система е общо уравнение на B спрямо K.
В (7) вместо $M_{i_1 \dots i_{k+1}}$ може да се вземе квадратната матрица от ред $k+2$ $\left(\dfrac{N_{i_1 \dots i_{k+1}}}{1 \dots\dots 1}\right)$, където $N_{i_1 \dots i_{k+1}}$ е подматрицата на $N = (\underbrace{x \; x^1 \; \dots \; x^k \; x^0}_{\text{стълбове}})$, състояща се от редовете с номера $i_1, \dots, i_{k+1}$.
($N_{i_1 \dots i_{k+1}}$ е $(k+1) \times (k+2)$ и ѝ се добавя един ред единици за да стане $(k+2) \times (k+2)$.)

Доказателство: Знаем, че B е k-мерното афинно подпространство на $\mathcal{A}$, което минава през P_0 и е успоредно на $\overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_k}$. Тъй като координатният вектор спрямо K на $\overrightarrow{P_0P_j}$ е $\xi_j = x^j - x^0$, $j = 1, \dots, k$, то всичко без последното изречение следва от предишната теорема.

За последното изречение: Като извадим последния стълб на матрицата $\left(\dfrac{N_{i_1 \dots i_{k+1}}}{1 \dots\dots 1}\right)$ от останалите ѝ стълбове получаваме матрица със същата детерминанта. Но получената матрица всъщност е $\left(\begin{array}{c|c} M_{i_1 \dots i_{k+1}} & \begin{matrix} x^0_{i_1} \\ \vdots \\ x^0_{i_{k+1}} \end{matrix} \\ \hline 0 \dots\dots 0 & 1 \end{array}\right)$ и с развитие по последния ред виждаме, че детерминантата ѝ е $(-1)^{(k+2)+(k+2)} \det M_{i_1 \dots i_{k+1}} = \det M_{i_1 \dots i_{k+1}}$. Следователно $\det \left(\dfrac{N_{i_1 \dots i_{k+1}}}{1 \dots\dots 1}\right) = \det M_{i_1 \dots i_{k+1}}$. $\square$

Забележка 5 Формулите от Теорема 5 и Теорема 6 не са подходящи за конкретни пресмятания, защото в тях участват много детерминанти, чието пресмятане е трудоемко. Най-простият случай е когато имаме хиперравнина, защото тогава $k = n - 1$ и следователно имаме единствена квадратна подматрица от ред $k+1 = n$ на M, а именно самата M. Така че уравнението става само едно: $\det M = 0$. Всъщност и пресмятането на една детерминанта е твърде трудоемко. Но при $n = 2$ и $n = 3$ е лесно, така че при права в равнината и равнина в пространството формулите от Теорема 5 и Теорема 6 са удобни за конкретни пресмятания. За щастие това са случаите, които най-често се срещат на упражненията. В общия случай най-икономичният метод за получаване на общи уравнения в ситуациите от Теорема 5 и Теорема 6 е да се напишат параметрични уравнения, след което да се изключат параметрите, както е обяснено в Забележка 6 по-долу.

Частни случаи:

1. Хиперравнина: $k = n - 1$.
   M е $n \times (k+1) = n \times n$. Следователно квадратната подматрица на M от ред $k + 1 = n$ е единствена – самата M.

   Теорема 5′ *Нека точката $P_0 \in \mathcal{A}$ и линейно независимите вектори $v_1, \ldots, v_{n-1} \in U$ имат спрямо K координати $P_0(x_0)$, $v_j(\xi_j)$, $j = 1, \ldots, n-1$. Тогава определената от тях хиперравнина B в $\mathcal{A}$ има спрямо K общо уравнение*

$$B : \det(\underbrace{x - x_0 \;\; \xi_1 \; \ldots \; \xi_{n-1}}_{\textit{стълбове}}) = 0.$$

   Теорема 6′ *Нека нележащите в $(n-2)$-мерно афинно подпространство на $\mathcal{A}$ точки $P_0, \ldots, P_{n-1} \in \mathcal{A}$ имат спрямо K координати $P_j(x^j)$, $j = 0, \ldots, n-1$. Тогава определената от тях хиперравнина B в $\mathcal{A}$ има спрямо K общо уравнение*

$$B : \det(\underbrace{x - x^0 \;\; x^1 - x^0 \; \ldots \; x^{n-1} - x^0}_{\textit{стълбове}}) = 0,$$

   или еквивалентно

$$B : \det\left(\begin{array}{ccccc} x & x^1 & \ldots & x^{n-1} & x^0 \\ \hline 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \end{array}\right) = 0.$$

2. Права в 2-мерно афинно пространство (в частност, в геометричната равнина): $n = 2$, $k = 1 = n - 1$.
   Нека координатите са (x, y) вместо (x_1, x_2).

   Теорема 5″ *Нека точката $P_0 \in \mathcal{A}$ и ненулевият вектор $v \in U$ имат спрямо K координати $P_0(x_0, y_0)$, $v(\xi, \eta)$. Тогава определената от тях права l в $\mathcal{A}$ има спрямо K общо уравнение*

   $$l : \det \begin{pmatrix} x - x_0 & \xi \\ y - y_0 & \eta \end{pmatrix} = 0.$$

   Теорема 6″ *Нека различните точки $P_0, P_1 \in \mathcal{A}$ имат спрямо K координати $P_j(x_j, y_j)$, $j = 0, 1$. Тогава определената от тях права l в $\mathcal{A}$ има спрямо K общо уравнение*

   $$l : \det \begin{pmatrix} x - x_0 & x_1 - x_0 \\ y - y_0 & y_1 - y_0 \end{pmatrix} = 0,$$

   или еквивалентно

   $$l : \det \begin{pmatrix} x & x_1 & x_0 \\ y & y_1 & y_0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

3. Равнина в 3-мерно афинно пространство (в частност, в геометричното пространство): $n = 3$, $k = 2 = n - 1$.
   Нека координатите са (x, y, z) вместо (x_1, x_2, x_3).

   Теорема 5‴ *Нека точката $P_0 \in \mathcal{A}$ и неколинеарните (тоест линейно независими) вектори $v_1, v_2 \in U$ имат спрямо K координати $P_0(x_0, y_0, z_0)$, $v_j(\xi_j, \eta_j, \zeta_j)$, $j = 1, 2$. Тогава определената от тях равнина π в $\mathcal{A}$ има спрямо K общо уравнение*

   $$\pi : \det \begin{pmatrix} x - x_0 & \xi_1 & \xi_2 \\ y - y_0 & \eta_1 & \eta_2 \\ z - z_0 & \zeta_1 & \zeta_2 \end{pmatrix} = 0.$$

   Теорема 6‴ *Нека нележащите на една права точки $P_0, P_1, P_2 \in \mathcal{A}$ имат спрямо K координати $P_j(x_j, y_j, z_j)$, $j = 0, 1, 2$. Тогава определената от тях равнина π в $\mathcal{A}$ има спрямо K общо уравнение*

   $$\pi : \det \begin{pmatrix} x - x_0 & x_1 - x_0 & x_2 - x_0 \\ y - y_0 & y_1 - y_0 & y_2 - y_0 \\ z - z_0 & z_1 - z_0 & z_2 - z_0 \end{pmatrix} = 0,$$

   или еквивалентно

   $$\pi : \det \begin{pmatrix} x & x_1 & x_2 & x_0 \\ y & y_1 & y_2 & y_0 \\ z & z_1 & z_2 & z_0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

4. Права в 3-мерно афинно пространство (в частност, в геометричното пространство): $n = 3$, $k = 1$.
   Нека координатите са (x, y, z) вместо (x_1, x_2, x_3).

   Теорема 5$'^{\text{v}}$ *Нека точката $P_0 \in \mathcal{A}$ и ненулевият вектор $v \in U$ имат спрямо K координати $P_0(x_0, y_0, z_0)$, $v(\xi, \eta, \zeta)$. Тогава определената от тях права l в $\mathcal{A}$ има спрямо K уравнение*

$$l : \begin{cases} \det \begin{pmatrix} y - y_0 & \eta \\ z - z_0 & \zeta \end{pmatrix} = 0 \\ \det \begin{pmatrix} z - z_0 & \zeta \\ x - x_0 & \xi \end{pmatrix} = 0 \\ \det \begin{pmatrix} x - x_0 & \xi \\ y - y_0 & \eta \end{pmatrix} = 0 \end{cases} .$$

   Ако се вземат двете уравнения, съдържащи фиксирана ненулева координата на v, то получената система е общо уравнение на l спрямо K.

Забележка 6 Преминаване от параметрични уравнения към общо уравнение може да се прави по следния начин. Ако B е зададено с параметрични уравнения

$$B : x = x_0 + \lambda_1 \xi_1 + \cdots + \lambda_k \xi_k, \quad \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R},$$

то тъй като векторите $\xi_1, \ldots, \xi_k$ са линейно независими и следователно матрицата $M' = (\xi_1 \ldots \xi_k)$ има ранг k, някои k уравнения могат да се решат относно $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Замествайки в останалите $n - k$ уравнения, получаваме линейна система за x, която е общо уравнение на B. (Всъщност Теорема 5 дава явна формула за общото уравнение.) Обратно: Ако B е зададено с общо уравнение $Ax = b$, то тъй като A има ранг $n - k$, системата може да се реши относно $n - k$ от координатите. Останалите k координати се полагат параметри и се получават параметрични уравнения на B.

Горните разсъждения с някои малки допълнения и модификации всъщност дават алтернативно доказателство на Теорема 4. Това доказателство е в основната си част на практика повторение на доказателството на твърдението от въпроса за афинни подпространства, че всяко линейно подпространство на $\mathbb{R}^n$ е пространството от решенията на някоя хомогенна система (тук става дума за афинни подпространства, така че ще се появяват и свободни членове). А доказателството на Теорема 4, което дадохме след формулировката ѝ, беше построено така, че да не повтаря доказателствата на резултати за линейни и афинни подпространства на $\mathbb{R}^n$, а направо да използва тия резултати.