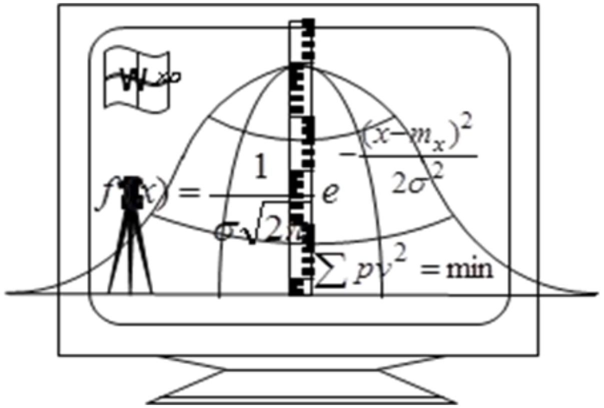
Національний університет
водного господарства
та природокористування



Кафедра геодезії та картографії

Спеціальність 193 “Геодезія та землеустрій”

Дисципліна **МАТЕМАТИЧНА ОБРОБКА ГЕОДЕЗИЧНИХ ВИМІРІВ**
Модуль 3 **МЕТОД НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ**

Лектор О.А. Тадєєв

Тема 2

ЗРІВНОВАЖУВАННЯ ВИМІРІВ ПАРАМЕТРИЧНИМ СПОСОБОМ

2. ОЦІНКА ТОЧНОСТІ ЗА РЕЗУЛЬТАТАМИ ЗРІВНОВАЖУВАННЯ

1. *Постановка і шляхи досягнення розв’язку задачі*
2. *Обчислення ваг зрівноважених параметрів*
3. *Обчислення ваг функцій параметрів*
4. *Обчислення ваг зрівноважених результатів вимірів*

1. Постановка і шляхи досягнення розв'язку задачі

Під оцінкою точності за результатами зрівноважування параметричним способом розуміють розрахунок середніх квадратичних похибок зрівноважених результатів вимірів, параметрів та їх функцій.

Загалом середня квадратична похибка M будь-якої величини виражається формулою

$$M = \mu\sqrt{\frac{1}{P}}, \tag{2.46}$$

де μ - середня квадратична похибка одиниці ваги; P - вага оцінюваної величини. За умови зрівноважування результатів рівноточних вимірів формула (2.46) набуває вигляду

$$M = m\sqrt{\frac{1}{P}}, \tag{2.47}$$

де m - середня квадратична похибка рівноточних вимірів.

Виходячи з останніх формул, завдання оцінки точності можна поділити на дві частини:

1. Розрахунок середньої квадратичної похибки одиниці ваги μ або середньої квадратичної похибки результатів рівноточних вимірів m.

Числове значення μ в задачі зрівноважування параметричним способом можна обчислити за формулою Бесселя

$$\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-k}}\,. \tag{2.48}$$

Різниця $n-k=r$ виражає число надлишкових виміряних величин. Формула (2.48) є узагальненням формули Бесселя для оцінювання точності вимірів окремої величини при $k=1$.

Величину m виражає узагальнена формула Бесселя вигляду

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-k}}\,. \tag{2.49}$$

2. Розрахунок ваги оцінюваної величини.

Для вирішення цієї частини завдання величина виражається функцією результатів вимірів x_i загального вигляду

$$F = f(x_1, x_2, ..., x_n).$$

Далі застосовується відома формула теорії похибок вимірів, за якою вага оцінюваної величини обчислюється як вага функції виміряних величин:

$$\frac{1}{P_F} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_o^2 \frac{1}{p_i}.$$

Тут p_i - ваги результатів вимірів x_i. **Складність обчислення оберненої ваги $\frac{1}{P_F}$ у задачі зрівноважування полягає у тому, що оцінювані величини виражаються функціями зрівноважених параметрів або зрівноважених значень виміряних величин, а не безпосередніх результатів вимірів цих величин**. Тому передусім потрібно розкрити зв'язок результатів вимірів величин та зрівноважених вимірів, зрівноважених параметрів чи їх функцій. Відтак хід дій з обчислення ваги оцінюваної величини залежить від того, як вона виражається через виміряні величини.

З метою оцінювання точності деякої величини $F = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ окреслимо покроково зв'язок результатів вимірів величин x_i із зрівноваженими вимірами $\tilde{x}_i$, із зрівноваженими параметрами t_j чи їх функціями.

1. Всі результати вимірів x_i $(i = \overrightarrow{1,n})$ виражаються через параметри t_j $(j = \overrightarrow{1,k})$ рівняннями $x_i = \tilde{x}_i - v_i = f_i(t_1, t_2, ..., t_k) - v_i$. Тому слід визнати наступне: $F = F(t_1, t_2, ..., t_k)$.

2. Оскільки $t_j = t_j^{o} + \tau_j$, то величину F можна визнати функцією невідомих τ_j системи нормальних рівнянь. Отже, $F = F(\tau_1, \tau_2, ..., \tau_k)$. Таким чином, якщо τ_j виразити через x_i, то величина F буде розкрита функцією результатів вимірів x_i.

3. Невідомі τ_j обчислюються з розв’язування системи нормальних рівнянь $N_{j1}\tau_1 + N_{j2}\tau_2 + ... + N_{jk}\tau_k + L_j = 0$. Отже, вони залежні від вільних членів цих рівнянь. Вільні члени $L_j = [pa_j l]$, у свою чергу, є функціями вільних членів l_i параметричних рівнянь поправок. Тому можна вважати, що $F = F(l_1, l_2, ..., l_n)$.

Таким чином, поставлене завдання буде розв’язане, якщо врахувати, що вага величини $l_i = f_i(t_1^{o}, t_2^{o}, ..., t_k^{o}) - x_i$ дорівнює вазі результату виміру x_i. Інакше кажучи, вільні члени l_i у завданні оцінки точності ототожнюються з результатами вимірів x_i. Останнє твердження відіграє визначальну роль у обґрунтуванні способів та формуванні алгоритмів обчислення ваг потрібних величин.

З метою уніфікації та досягнення оптимального розв’язку завдання та методологічної систематики алгоритмів оцінювані величини виражають здебільшого функціями зрівноважених параметрів.

2. Обчислення ваг зрівноважених параметрів

Зрівноважені параметри t_j виражаються системою рівнянь $\underset{k\times1}{t} = \underset{k\times1}{t^{o}} + \underset{k\times1}{\tau}$ і визначаються за значеннями невідомих τ_j. Невідомі τ_j виражаються лінійними функціями вільних членів нормальних рівнянь $\underset{k\times1}{\tau} = -\underset{k\times k}{Q} \cdot \underset{k\times1}{L}$. Для будь-якого невідомого у розгорнутому вигляді маємо:

$$\tau_j = -Q_{j1}L_1 - Q_{j2}L_2 - \ldots - Q_{jk}L_k \tag{2.50}$$

або $\tau_j = -Q_{j1}[pa_1 l] - Q_{j2}[pa_2 l] - \ldots - Q_{jk}[pa_k l]$. Розкривши останню рівність, отримаємо:

$$\tau_j = -p_1(a_{11}Q_{j1} + \ldots + a_{1k}Q_{jk})l_1 - \ldots - p_n(a_{n1}Q_{j1} + \ldots + a_{nk}Q_{jk})l_n, \tag{2.51}$$

$$\tau_j = -\sum_{i=1}^{n} p_i(a_{i1}Q_{j1} + \ldots + a_{ik}Q_{jk})l_i\,. \tag{2.52}$$

Встановимо позначення:

$$p_i(a_{i1}Q_{j1} + \ldots + a_{ik}Q_{jk}) = \alpha_{ij}\,. \tag{2.53}$$

α_{ij} - деякі сталі коефіцієнти, які утворюють матрицю

$$\underset{n\times k}{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1k} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nk} \end{pmatrix}.$$

Матриця $\underset{k\times n}{\alpha}^{T}$ виражається добутком

$$\underset{k\times n}{\alpha}^{T} = \underset{k\times k}{Q} \cdot \underset{k\times n}{A}^{T} \cdot \underset{n\times n}{P} . \qquad (2.54)$$

Тоді

$$\tau_j = -\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} l_i = -[\alpha_j l] \qquad (2.55)$$

або

$$\underset{k\times 1}{\tau} = -\underset{k\times n}{\alpha}^{T} \cdot \underset{n\times 1}{l} . \qquad (2.56)$$

Отже, невідомі τ_j виражаються лінійними функціями вільних членів параметричних рівнянь поправок l_i.

У завданні оцінки точності вільні члени l_i ототожнюють результатам вимірів з вагами p_i. Тому на основі формули обчислення ваги функції виміряних величин

$$\frac{1}{P_F} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{\text{o}}^{2} \frac{1}{p_i}$$

для оберненої ваги $\frac{1}{P_j}$ невідомого τ_j можна тепер записати:

$$\frac{1}{P_j} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \tau_j}{\partial l_i}\right)_{\text{o}}^{2} \frac{1}{p_i} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}^{2} \frac{1}{p_i} = \left[\frac{\alpha_j \alpha_j}{p}\right]. \qquad (2.57)$$

Тут права частина розкриває добуток елементів матриць вигляду $\underset{k\times n}{\alpha^T}\cdot\underset{n\times n}{P^{-1}}\cdot\underset{n\times k}{\alpha}$, де $\underset{n\times n}{P^{-1}}=\begin{pmatrix}\frac{1}{p_1} & 0 & \dots & 0\\ 0 & \frac{1}{p_2} & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{p_n}\end{pmatrix}$

- це діагональна матриця обернених ваг результатів вимірів. З такого добутку слідує:

$$\underset{k\times n}{\alpha^T}\cdot\underset{n\times n}{P^{-1}}\cdot\underset{n\times k}{\alpha}=\underset{k\times k}{Q}\cdot\underset{k\times n}{A^T}\cdot\underset{n\times n}{P}\cdot\underset{n\times n}{P^{-1}}\cdot\underset{n\times n}{P}\cdot\underset{n\times k}{A}\cdot\underset{k\times k}{Q}=\underset{k\times k}{Q}\cdot\underset{k\times n}{A^T}\cdot\underset{n\times n}{P}\cdot\underset{n\times k}{A}\cdot\underset{k\times k}{Q}.$$

Враховуючи рівності $\underset{k\times n}{A^T}\cdot\underset{n\times n}{P}\cdot\underset{n\times k}{A}=\underset{k\times k}{N}$ та $\underset{k\times k}{N}\cdot\underset{k\times k}{Q}=\underset{k\times k}{E}$, маємо:

$$\underset{k\times n}{\alpha^T}\cdot\underset{n\times n}{P^{-1}}\cdot\underset{n\times k}{\alpha}=\underset{k\times k}{Q} \tag{2.58}$$

або

$$\left[\frac{\alpha_j\alpha_s}{p}\right]=Q_{js}, \tag{2.59}$$

Остаточно для обернених ваг параметрів маємо рівність

$$\frac{1}{P_j}=\left[\frac{\alpha_j\alpha_j}{p}\right]=Q_{jj}. \tag{2.60}$$

З огляду на отриманий результат, **елементи оберненої матриці** $\underset{k\times k}{Q}=\underset{k\times k}{N}^{-1}$ **називають вагові коефіцієнти**.

Отже, обернені ваги параметрів дорівнюють квадратичним ваговим коефіцієнтам з відповідними індексами.

Не квадратичні вагові коефіцієнти виражають залежність між зрівноваженими значеннями параметрів. Коефіцієнт кореляції між параметрами t_i та t_j виражається формулою

$$r_{ij} = \frac{Q_{ij}}{\sqrt{Q_{ii} Q_{jj}}}. \tag{2.61}$$

Матрицю

$$\underset{k \times k}{M^2} = \mu^2 \cdot \underset{k \times k}{Q} \tag{2.62}$$

або при зрівноважуванні рівноточних вимірів

$$\underset{k \times k}{M^2} = m^2 \cdot \underset{k \times k}{Q} \tag{2.63}$$

називають **кореляційна матриця зрівноважених параметрів**. Вздовж головної діагоналі матриці $\underset{k \times k}{M^2}$ розташовані значення квадратів середніх квадратичних похибок параметрів з відповідними їм індексами.

3. Обчислення ваг функцій параметрів

Нехай дано функцію параметрів вигляду

$$F = F(t_1, t_2, ..., t_k). \qquad (2.70)$$

Перетворимо її до лінійного вигляду шляхом розкладання в ряд Тейлора. Враховуючи, що $t_j = t_j^{\text{o}} + \tau_j$,

$$F(t_1,...,t_k) = F(t_1^{\text{o}},...,t_k^{\text{o}}) + \left(\frac{\partial F}{\partial t_1}\right)_{\text{o}} \tau_1 + ... + \left(\frac{\partial F}{\partial t_k}\right)_{\text{o}} \tau_k + R. \qquad (2.71)$$

R – сума всіх нелінійних членів ряду. Якщо на приблизні значення t_j^{o} накласти умову, щоб їх точність відповідала точності результатів вимірів, то поправки τ_j будуть малими настільки, що гранично величина $R \to 0$. За такої умови величиною R можна нехтувати. Тоді

$$F(t_1,...,t_k) = F_0 + F_1\tau_1 + ... + F_k\tau_k. \qquad (2.72)$$

Тут прийнято позначення: $F_0 = F(t_1^{\text{o}},...,t_k^{\text{o}})$ - приблизне значення функції;

$$F_j = \left(\frac{\partial F}{\partial t_j}\right)_{\text{o}}. \qquad (2.73)$$

F_j - числові значення частинних похідних функції за параметрами t_j.

Раніше встановлено лінійну залежність поправок τ_j та вільних членів параметричних рівнянь поправок l_i : $\tau_j = -[\alpha_j l]$. Тому

$$F(t_1,...,t_k) = F_0 - F_1[\alpha_1 l] - ... - F_k[\alpha_k l]. \qquad (2.74)$$

Розкриємо суми і згрупуємо доданки за вільними членами l_i:

$$F(t_1,...,t_k) = F_0 - \sum_{i=1}^{n}(\alpha_{i1}F_1 + ... + \alpha_{ik}F_k)l_i = \Phi(l_1,...,l_n) \qquad .(2.75)$$

Отже, оцінювану функцію параметрів $F = F(t_1, t_2,....,t_k)$ тепер можна визнати лінійною функцією вільних членів параметричних рівнянь поправок l_i. У завданні оцінки точності вільні члени l_i ототожнюють з результатами вимірів і. мають ваги p_i. Тому на основі формули обчислення ваги функції виміряних величин

$$\frac{1}{P_F} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{\text{o}}^2 \frac{1}{p_i}$$

для оберненої ваги функції $F = F(t_1, t_2,....,t_k)$ тепер можна записати:

$$\frac{1}{P_F} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial l_i}\right)^2 \frac{1}{p_i} = \sum_{i=1}^{n}(\alpha_{i1}F_1 + ... + \alpha_{ik}F_k)^2 \frac{1}{p_i} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(\alpha_{i1}\alpha_{i1}F_1F_1 + 2\alpha_{i1}\alpha_{i2}F_1F_2 + ... + \alpha_{i2}\alpha_{i2}F_2F_2 + 2\alpha_{i2}\alpha_{i3}F_2F_3 + ... + \alpha_{ik}\alpha_{ik}F_kF_k)\frac{1}{p_i} =$$

$$\left.\begin{aligned} = F_1F_1\left[\frac{\alpha_1\alpha_1}{p}\right] + 2F_1F_2\left[\frac{\alpha_1\alpha_2}{p}\right] + ... + 2F_1F_k\left[\frac{\alpha_1\alpha_k}{p}\right] + \\ + F_2F_2\left[\frac{\alpha_2\alpha_2}{p}\right] + 2F_2F_3\left[\frac{\alpha_2\alpha_3}{p}\right] + ... + 2F_2F_k\left[\frac{\alpha_2\alpha_k}{p}\right] + \\ + ... + \\ + F_kF_k\left[\frac{\alpha_k\alpha_k}{p}\right] \end{aligned}\right\}.$$

Якщо врахувати отримані раніше залежність вигляду $\left[\dfrac{\alpha_j \alpha_s}{p}\right] = Q_{js}$, то остаточно маємо:

$$\frac{1}{P_F} = \sum_{j=1}^{k} F_j F_j Q_{jj} + 2\sum_{i<j} F_i F_j Q_{ij}\ , \tag{2.76}$$

де Q_{ij} - елементи оберненої матриці $\underset{k\times k}{Q}$ (вагові коефіцієнти).

Формула розкриває добуток матриць

$$\frac{1}{P_F} = \begin{pmatrix} F_1 & F_2 & \dots & F_k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \dots & Q_{1k} \\ Q_{21} & Q_{22} & \dots & Q_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Q_{k1} & Q_{k2} & \dots & Q_{kk} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \dots \\ F_k \end{pmatrix} = \underset{1\times k}{F} \cdot \underset{k\times k}{Q} \cdot \underset{k\times 1}{F^T}\ . \tag{2.77}$$

Отримані рівняння виражають обернену вагу функції параметрів загального вигляду $F = F(t_1, t_2, ..., t_k)$.

Матричною формою (2.77) зручно користуватись, якщо оцінюють не одну, а m функцій. Тоді матриця F має розмірність $m \times k$. Кожний її рядок відповідає функції $F_i(t_1, t_2, ..., t_k)$ $(i = \overrightarrow{1, m})$ і містить значення похідних

$$F_{ij} = \left(\frac{\partial F_i}{\partial t_j} \right)_{\text{o}}. \tag{2.78}$$

Тоді (2.77) набуває вигляду

$$\begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & ... & F_{1k} \\ F_{21} & F_{22} & ... & F_{2k} \\ ... & ... & ... & ... \\ F_{m1} & F_{m2} & ... & F_{mk} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & ... & Q_{1k} \\ Q_{21} & Q_{22} & ... & Q_{2k} \\ ... & ... & ... & ... \\ Q_{k1} & Q_{k2} & ... & Q_{kk} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_{11} & F_{21} & ... & F_{m1} \\ F_{12} & F_{22} & ... & F_{m2} \\ ... & ... & ... & ... \\ F_{1k} & F_{2k} & ... & F_{mk} \end{pmatrix} = \underset{m \times k}{F} \cdot \underset{k \times k}{Q} \cdot \underset{k \times m}{F^T} = \underset{m \times m}{Q_F}, \tag{2.79}$$

де $\underset{m \times m}{Q_F} = \begin{pmatrix} \frac{1}{P_{F_1}} & Q_{F_{12}} & ... & Q_{F_{1m}} \\ Q_{F_{21}} & \frac{1}{P_{F_2}} & ... & Q_{F_{2m}} \\ ... & ... & ... & ... \\ Q_{F_{m1}} & Q_{F_{m2}} & ... & \frac{1}{P_{Fm}} \end{pmatrix}$ - вагова матриця системи m функцій. На її головній діагоналі розташовані обернені ваги $\frac{1}{P_{F_i}}$ оцінюваних функцій $F_i(t_1, t_2, ..., t_k)$.

Інші елементи матриці $\underset{m\times m}{Q_F}$ мають властивість симетричності відносно головної діагоналі $Q_{F_{ij}} = Q_{F_{ji}}$, оскільки добуток (2.79) зумовлює симетрична матриця вагових коефіцієнтів $\underset{k\times k}{Q}$. Ці елементи виражають залежність між функціями зрівноважених параметрів і називаються кореляційними моментами. Тіснота залежності між функціями за номерами i та j виражається коефіцієнтом кореляції

$$r_{F_i F_j} = \frac{Q_{F_{ij}}}{\sqrt{\frac{1}{P_{F_i}} \cdot \frac{1}{P_{F_j}}}}. \qquad (2.80)$$

Матрицю

$$\underset{m\times m}{M^2} = \mu^2 \cdot \underset{m\times m}{Q_F} \qquad (2.81)$$

або при зрівноважуванні рівноточних вимірів

$$\underset{m\times m}{M^2} = m^2 \cdot \underset{m\times m}{Q_F} \qquad (2.82)$$

називають **кореляційна матриця функцій зрівноважених параметрів**. На головній діагоналі матриці $\underset{m\times m}{M^2}$ розташовані значення квадратів середніх квадратичних похибок M_i^2 функцій зрівноважених параметрів $F_i(t_1, t_2, ..., t_k)$ з відповідними їм індексами $i = \overrightarrow{1, m}$.

4. Обчислення ваг зрівноважених результатів вимірів

Зрівноважені значення $\tilde{x}_i$ результатів вимірів x_i виражаються функціями зрівноважених параметрів t_j, які називаються параметричними рівняннями зв'язку загального вигляду $\tilde{x}_i = f_i(t_1,...,t_k)$ $(i = \overrightarrow{1,n})$. Їх складають на початковій стадії зрівноважування. Тому задачу оцінки точності зрівноважених результатів вимірів слід визнати частковим випадком задачі оцінки точності функцій параметрів. Розв'язок такої задачі спрощується тим, що частинні похідні функцій за параметрами вже відомі - це коефіцієнти параметричних рівнянь поправок $F_{ij} = \left(\dfrac{\partial f_i}{\partial t_j}\right)_0 = a_{ij}$. Тому для обчислення оберненої ваги зрівноваженого значення окремої вимірюваної величини за номером i матриця $\underset{1\times k}{F}$ у формулі (2.77) $\dfrac{1}{P_F} = \underset{1\times k}{F} \cdot \underset{k\times k}{Q} \cdot \underset{k\times 1}{F^T}$ містить коефіцієнти a_{ij} параметричного рівняння поправок за тим же номером i. Загалом для сукупності усіх зрівноважених значень результатів вимірів матриця F має розмірність $n \times k$, а її елементами є сукупність коефіцієнтів a_{ij}:

$$\underset{n\times k}{F} = \underset{n\times k}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} \end{pmatrix}.$$

Тоді вагова матриця зрівноважених результатів вимірів $\underset{n\times n}{Q_F} = \underset{n\times n}{Q_{\tilde{x}}}$ виражається рівнянням

$$\underset{n\times n}{Q_F} = \underset{n\times n}{Q_{\tilde{x}}} = \underset{n\times k}{A} \cdot \underset{k\times k}{Q} \cdot \underset{k\times n}{A^T}. \tag{2.83}$$