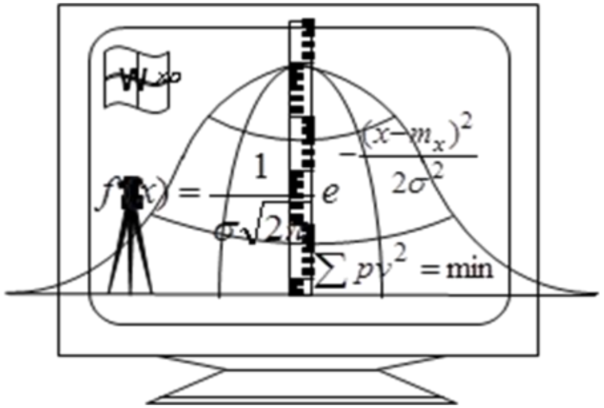
Національний університет
водного господарства
та природокористування

*Кафедра геодезії та картографії*




*Спеціальність 193 “Геодезія та землеустрій”*

*Дисципліна* **МАТЕМАТИЧНА ОБРОБКА ГЕОДЕЗИЧНИХ ВИМІРІВ**
*Модуль 3* **МЕТОД НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ**

*Лектор О.А. Тадєєв*

*Тема 1*

# ПРИНЦИП НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ ТА ЗАВДАННЯ ЗРІВНОВАЖУВАННЯ ВИМІРІВ У ГЕОДЕЗИЧНИХ МЕРЕЖАХ

1. Зміст завдання сумісної обробки результатів вимірів кількох величин
2. Принцип найменших квадратів
3. Зв'язок принципу найменших квадратів з принципом арифметичної середини
4. Способи розв’язування завдання зрівноважування

# Література

***Базова***

1. Войтенко С.П. Математична обробка геодезичних вимірів. Метод найменших квадратів. Навч. посібник. – К.: КНУБА, 2005. – 236 с.
2. Зазуляк П.М., Гавриш В.І., Євсєєва Е.М., Йосипчук М.Д. Основи математичного опрацювання геодезичних вимірювань. Підручник. – Львів: Растр-7, 2007. – 408 с.

***Допоміжна***

1. Большаков В.Д., Гайдаев П.А. Теория математической обработки геодезических измерений. Підручник. – М.: Недра, 1977. – 367с.
2. Большаков В.Д., Маркузе Ю.И., Голубев В.В. Уравнивание геодезических построений. Навч. посібник. – М.: Недра, 1989. – 413с.
3. Большаков В.Д., Маркузе Ю.И. Практикум по теории математической обработки геодезических измерений. Навч. посібник. – М.: Недра, 1984. – 352с.
4. Бугай П.Т. Теорія помилок і спосіб найменших квадратів. Підручник. – Львів: ЛДУ, 1960. – 366с.
5. Видуев Н.Г., Григоренко А.Г. Математическая обработка геодезических измерений. Навч посібник. – К.: Вища школа, 1978. – 376с.
6. Мазмишвили А.И. Способ наименьших квадратов. Навч. посібник. – Москва: Недра, 1968. – 437с

# Література

### *Методичне забезпечення*


1. Зрівноважування результатів вимірів параметричним способом. Методичні вказівки до виконання самостійних та практичних робіт з дисципліни «Математична обробка геодезичних вимірів» студентами спеціальності 193 «Геодезія та землеустрій» ***05-04-32*** / О.А. Тадєєв, Т.І. Дець – Рівне: НУВГП, 2014. – 46с.

2. Зрівноважування результатів вимірів корелатним способом. Методичні вказівки до виконання самостійних та практичних робіт з дисципліни «Математична обробка геодезичних вимірів» студентами спеціальності 193 «Геодезія та землеустрій» ***05-04-33*** / О.А. Тадєєв, Т.І. Дець – Рівне: НУВГП, 2014. – 46с.

3. Побудова емпіричних формул методом найменших квадратів. Методичні вказівки до виконання самостійних та практичних робіт з дисципліни «Математична обробка геодезичних вимірів» студентами спеціальності 193 «Геодезія та землеустрій» ***05-04-74*** / О.А. Тадєєв, Т.І. Дець – Рівне: НУВГП, 2017. – 28с.

4. Методичні вказівки до виконання розрахунково-графічної роботи №2 з дисципліни «Математична обробка геодезичних вимірів» студентами спеціальності 193 «Геодезія та землеустрій» ***05-04-79*** / О.А. Тадєєв, Т.І. Дець - Рівне: НУВГП, 2018. – 41 с.

# 1. Зміст завдання сумісної обробки результатів вимірів кількох величин

Теорія похибок вимірів розв'язує завдання математичної обробки багаторазових вимірів однієї величини. Таке завдання є частковим випадком задачі сумісної обробки сукупності результатів вимірів багатьох величин. Серед них необхідно розрізняти:

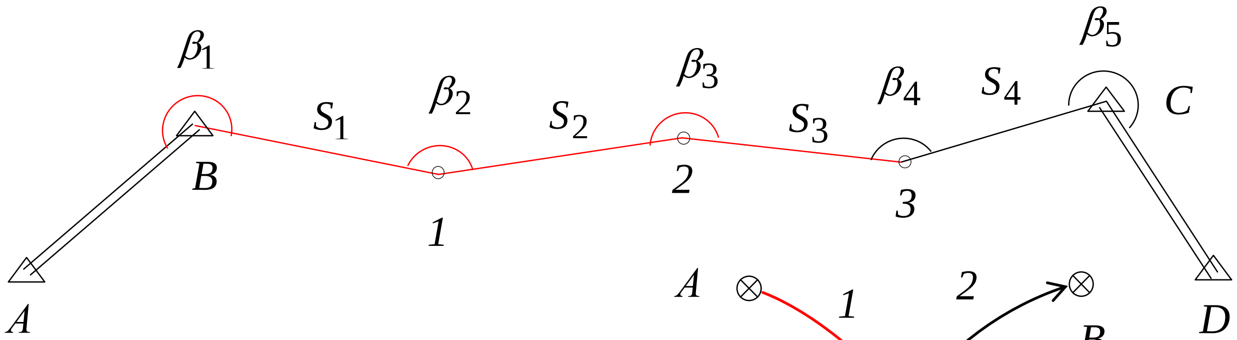
- ✓ загальне число вимірюваних величин
- ✓ необхідне число вимірюваних величин
- ✓ надлишкове число вимірюваних величин

В геодезичних задачах **загальне число вимірюваних величин *n*** завжди перевищує число вимірів необхідних величин $k$. **Необхідними називають *k* величин, яких мінімально достатньо для розв'язування задачі**. Виміри тільки необхідних величин не гарантують правдивість отриманого результату розв'язку задачі. **Різниця** $r = n - k$ **називається числом надлишкових (або додаткових) вимірів**. Надлишкові виміри окремої величини дають можливість здійснити контроль вимірів, виконати їх обробку з метою розрахунку надійного кінцевого значення, підвищують його точність і забезпечують її оцінку за тим чи іншим критерієм. Надлишкові виміряні величини в задачі сумісної обробки сукупності результатів вимірів величин, крім того, підвищують точність результатів розв'язку задачі, забезпечують контроль кінцевих результатів розв'язку з оцінкою їх точності.

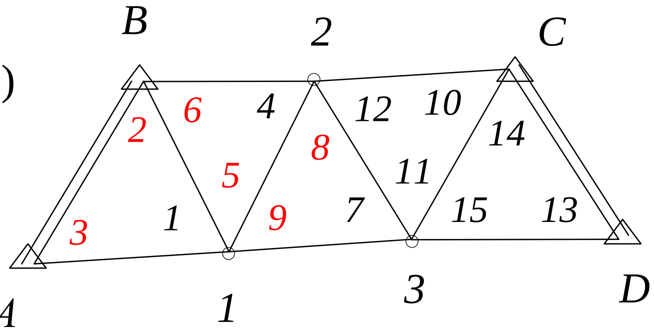
**Наявність надлишкових виміряних величин є обов'язковою !**

**Наприклад**, в задачі прокладення полігонометричного ходу, зображеного на малюнку *1*, $n = 9$, $k = 6$, $r = 3$; для мережі тріангуляції (малюнок *2*) $n = 15$, $k = 6$, $r = 9$; для нівелірної мережі (малюнок *3*) $n = 5$, $k = 2$, $r = 3$.

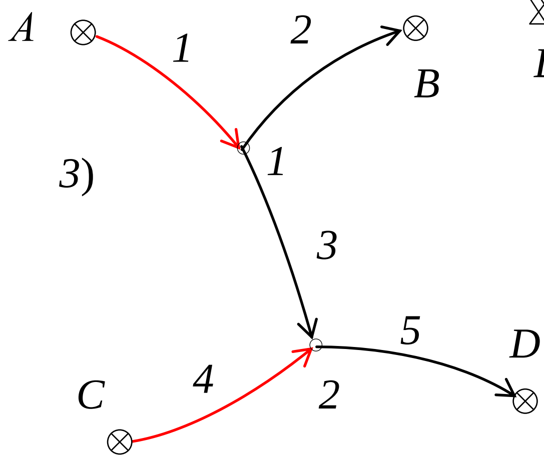
1)




2)




3)



Разом з надлишковими вимірами вирішальною умовою досягнення розв'язку задачі сумісної обробки вимірів багатьох величин є **наявність між вимірюваними величинами математичних взаємозв'язків**. Умови математичних співвідношень, якими виражаються ці зв'язки, після розв'язування задачі повинні задовольнятись. Наприклад, сума внутрішніх кутів трикутника, сума перевищень замкненого нівелірного ходу.

Задача сумісної обробки сукупності результатів вимірів багатьох величин, які зв'язані поміж собою математичними умовами, з метою знаходження найбільш надійних значень та оцінки точності цих величин і їх функцій, **називається зрівноважуванням результатів вимірів**.

У загальній формі зв'язки між вимірюваними величинами виражаються рівняннями

$$\varphi_j(X_1,...,X_n)=0,$$

де $X_i$ - істинні значення величин; $i=\overrightarrow{1,n}$; $n$ – число величин. Серед складених рівнянь можуть бути такі, котрі залежні між собою. Із загального числа рівнянь потрібно враховувати лише незалежні рівняння. Вони завжди сформують систему рівнянь, число яких дорівнює числу надлишкових вимірів $r$: $j=\overrightarrow{1,r}$. Інші можливі рівняння будуть наслідками незалежних рівнянь сформованої системи. Утворена таким чином система рівнянь називається системою умовних рівнянь. Число умовних рівнянь $r$ завжди менше числа невідомих величин $n$. Тому система умовних рівнянь є невизначеною і допускає нескінченне число розв'язків.

Умовні рівняння, складені з результатами вимірів величин $x_i$, мають вигляд

$$\varphi_j(x_1,...,x_n) = W_j .$$

**Величини $W_j$ називають нев'язками умовних рівнянь**. Нев'язки – це істинні похибки функцій $\varphi_j$. Вони є наслідком впливу на результати вимірів похибок різного походження. Нев'язки виражають сумарну похибку вимірів тих величин, які є аргументами відповідних умовних рівнянь. Для здобуття розв'язку задачі зрівноважування результатів вимірів необхідно позбутись нев'язок умовних рівнянь. Це досягають виправленням результатів вимірів шляхом введення до них поправок $v_i$:

$$x_i + v_i = \tilde{x}_i .$$

Поправки $v_i$ за абсолютним значенням повинні дорівнювати, а за знаком бути протилежними істинним похибкам вимірів величин. **Найбільш надійні значення $\tilde{x}_i$ називають зрівноваженими результатами вимірів**. Умовні рівняння, складені за зрівноваженими результатами, мають вигляд

$$\varphi_j(\tilde{x}_1,...,\tilde{x}_n) = 0 ,$$

тобто **зрівноважені результати вимірів величин повинні задовольняти математичні умови, які закладені в умовних рівняннях**.

Отже, **мета зрівноважування** – визначити поправки $v_i$, які дозволять виправити результати вимірів і позбутись нев'язок умовних рівнянь.

**Причина виникнення завдання зрівноважування** – наявність похибок у результатах вимірів величин.

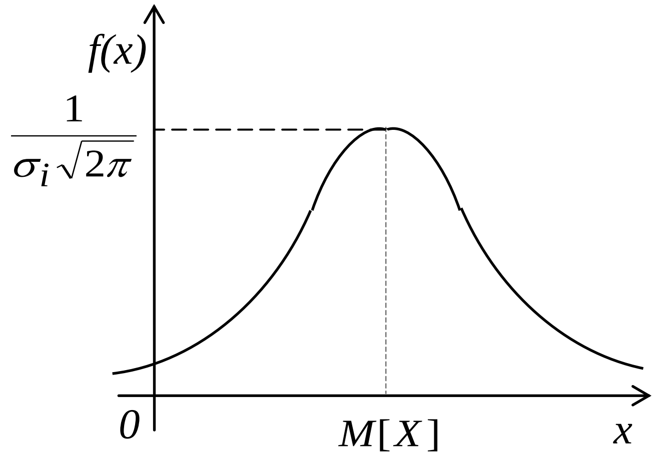
**Основні умовами, які забезпечують розв'язок завдання**, – це наявність надлишкових виміряних величин і математично виражених взаємозв'язків між усіма вимірюваними величинами.

**Розв'язок окресленого завдання досягається за принципом найменших квадратів.**

## 2. Принцип найменших квадратів

За умови нормального розподілу сукупності істинних похибок вимірів $\theta_i$ $(i=\overrightarrow{1,n})$ ймовірність цієї сукупності досягає свого максимуму $\frac{1}{\sigma_i\sqrt{2\pi}}$ при абсолютному значенні показника степені в функції щільності нормального закону $f(x_i)=\frac{1}{\sigma_i\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x_i-X_i)^2}{2\sigma_i^2}}$, який буде найменший:

$$\left[\frac{\theta^2}{\sigma^2}\right]=\min.$$




Сукупність похибок $\theta_i$, котра задовольняє такій умові, буде найбільш ймовірною з огляду на якість вимірів – грубі похибки вимірів відсутні, а їх систематична складова максимально врахована.

Беручи до уваги, що середня квадратична похибка виміру $m$ за своїм змістом відповідає середньому квадратичному відхиленню (стандарту) $\sigma$, а в чисельному відношенні вони дорівнюють одне одному, маємо:

$$\left[\frac{\theta^2}{m^2}\right] = \min .$$

Якщо на поправки $v_i$ накласти умову $\left[\frac{v^2}{m^2}\right] = \min$, то їх сукупність в імовірнісному відношенні буде найкраще наближатись до сукупності похибок $\theta_i$. Оскільки за умовою поправки повинні ліквідовувати нев'язки, то за знаком вони мають бути протилежні до істинних похибок відповідних вимірів. Враховуючи зв'язок середньої квадратичної похибки $m$ та ваги $p$ результату виміру $p_i = \frac{c}{m_i^2}$, остаточно отримаємо:

$[pv^2] = \min$ або $[v^2] = \min$ за умови зрівноважування рівноточних результатів вимірів.

**Одержана умова є математичним вираженням принципу найменших квадратів**.

Задача зрівноважування розв'язується здебільшого для великих масивів результатів вимірів. Тоді представлення даних і розв'язок задачі зручно виконувати у матричній формі. Масив поправок до результатів вимірів формує матрицю $\underset{n\times 1}{V} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix}$, а ваги вимірів – діагональну вагову матрицю $\underset{n\times n}{P} = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & p_n \end{pmatrix}$.

Тоді умова принципу найменших квадратів виражається функцією

$$\underset{1\times n}{V}^T \cdot \underset{n\times n}{P} \cdot \underset{n\times 1}{V} = \min$$

або

$$\underset{1\times n}{V}^T \cdot \underset{n\times 1}{V} = \min$$

за умови зрівноважування рівноточних результатів вимірів.

Оскільки кількість умовних рівнянь $\varphi_j(X_1,...,X_n)=0$ менша від числа невідомих істинних значень вимірюваних величин $X_i$, то система умовних рівнянь є невизначеною і допускає нескінченне число розв’язків. З усіх можливих, **розв’язок за умовою принципу найменших квадратів є однозначним і у порівнянні з іншими має деякі істотні переваги**. Головні з них такі:

1) наявність $v_i^2$ обмежує великі за абсолютною величиною поправки. Ця властивість передусім важлива у випадку зрівноважування рівноточних вимірів, оскільки отримані поправки будуть більш-менш рівномірно розподілятись поміж результатами вимірів;

2) у випадку зрівноважування нерівноточних вимірів ваги $p_i$ при $v_i^2$ зменшують поправки до більш точних та збільшують поправки до менш точних результатів вимірів.

## 3. Зв'язок принципу найменших квадратів з принципом арифметичної середини

Принцип найменших квадратів – це загальний принцип математичної обробки результатів усіх геодезичних вимірів, у тому числі повторних вимірів окремої величини. Це легко обґрунтувати шляхом виконання нескладних арифметичних дій. Наприклад, виразимо за умовою принципу найменших квадратів найбільш надійне значення $\tilde{x}$ результатів $n$ нерівноточних вимірів $x_i$ окремої величини $X$, які отримано з вагами $p_i$ $(i=\overrightarrow{1,n})$. Оскільки $x_i - \tilde{x} = v_i$, то відповідно до умови принципу найменших квадратів маємо: $F(x) = [p(x-\tilde{x})^2] = \min$. Для забезпечення мінімуму функції $F(x)$ її частинна похідна має дорівнювати нулю: $\frac{\partial F}{\partial x} = [p(x-\tilde{x})] = 0$. Звідси $[px] - \tilde{x}[p] = 0$ і остаточно $\tilde{x} = \frac{[px]}{[p]}$. Отримана формула виражає принцип загальної арифметичної середини. Якщо аналогічні дії виконати з метою визначення найбільш надійного значення для результатів рівноточних вимірів окремої величини, то отримаємо формулу, яка виражає принцип простої арифметичної середини: $\tilde{x} = \frac{[x]}{n}$.

Отже, якщо потрібно виразити кінцеве значення окремої вимірюваної величини за умовою принципу найменших квадратів, то для цього достатньо скористатись формулами загальної (або простої) арифметичної середини. Отримані результати засвідчують зв'язок принципу найменших квадратів та принципу арифметичної середини.

## 4. Способи розв’язування завдання зрівноважування

Задача зрівноважування результатів вимірів величин за умовою принципу найменших квадратів з математичної точки зору – це **задача знаходження умовного екстремуму: необхідно виразити мінімум функції** $[pv^2] = \min$**, якщо змінні** $v_i$ **зв’язані поміж собою незалежними умовними рівняннями**. Така задача може бути розв’язана шляхом виконання різних математичних дій. На практиці вони зводяться до проведення обчислювальних процедур у межах окремих способів зрівноважування результатів вимірів. Усі способи зрівноважування ділять на три групи:

**1) параметричний (його ще називають способом посередніх вимірів або необхідних невідомих);**

**2) корелатний (або спосіб умов чи умовних вимірів);**

**3) видозмінені та комбіновані способи зрівноважування (або інакше видозміни чи комбінації параметричного та корелатного способів).**

Незважаючи на відмінності закладених у способах обчислювальних процедур, **усі способи еквівалентні** – вони забезпечують однакові у межах заданої точності кінцеві результати зрівноважування.

На практиці під час розв’язування поставленої задачі вибирають оптимальний спосіб, виходячи з таких критеріїв відбору:

- ✓ спосіб, який забезпечує менший об’єм обчислювальних робіт;
- ✓ спосіб, з використанням якого обчислювальні операції виконуються простіше;
- ✓ **спосіб, у межах якого простіше сформувати вхідну систему математичних умов.**

Зважаючи на нинішні можливості всебічного застосування сучасних технологій та технічних засобів обчислень, переважно до уваги беруть лише останній критерій.

Щодо способів останньої групи, то на сьогоднішній день вони мають обмежене коло практичного застосування. Передусім це зумовлено тим, що переважна більшість цих способів була розроблена з метою зменшення об’єму обчислювальних робіт у порівнянні з параметричним чи корелатним способами, що тепер втратило свою актуальність. Однак з іншого боку, вибір деяких способів третьої групи обумовлений необхідністю зрівноважування геодезичних мереж спеціального призначення, потребою визначення разом із зрівноваженими результатами вимірів великого числа зрівноважених значень їх функцій, тощо.

Для детального вивчення пропонуються параметричний та корелатний способи. За умови досконалого володіння цими способами фахівцеві не складно буде оволодіти їх видозмінами чи комбінаціями.