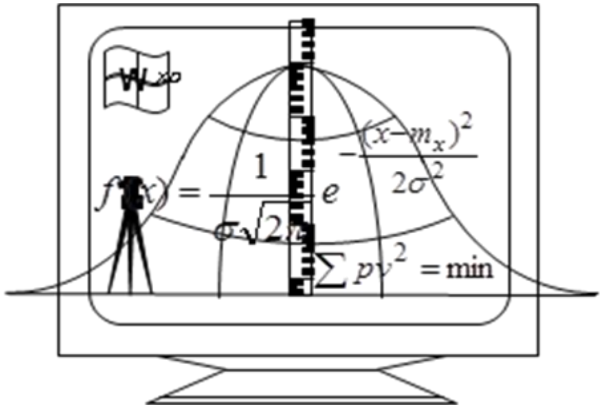
Національний університет
водного господарства
та природокористування



Кафедра геодезії та картографії

Спеціальність 193 “Геодезія та землеустрій”

Дисципліна **МАТЕМАТИЧНА ОБРОБКА ГЕОДЕЗИЧНИХ ВИМІРІВ**
Модуль 3 **МЕТОД НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ**

Лектор О.А. Тадєєв

Тема 4

АПРОКСИМАЦІЯ ФУНКЦІЙ МЕТОДОМ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ

1. Постановка задачі
2. Апроксимація функцій за результатами вимірів
3. Оцінка точності за результатами апроксимації

1. Постановка задачі

Допустимо, що величина Y залежить від величини X і потрібно за результатами їх вимірів знайти функцію $Y = F(X)$, яка описувала б їх залежність. **Задача описування результатів спостережень величин - це задача складання табличної функції, яку потрібно апроксимувати деякою функціональною залежністю у тій чи іншій аналітичній формі**. Встановлена функція діє лише для тих значень аргументу, які містяться у таблиці. За своєю суттю задача апроксимації табличних значень функціональною залежністю має на меті побудову емпіричних формул. **Емпіричною формулою називають всяку функцію, яка наближує табличну функцію, отриману з результатів спостережень**.

Коли потрібно визначити приблизні значення функції за значеннями аргументів, які відсутні у таблиці, але не виходять за межі табуляції, то розв'язується **задача інтерполяції**. Визначення значень емпіричної формули поза межами табуляції функції називають **задача екстраполяції**.

Задача побудови емпіричних формул вимагає дотримання двох умов:

1) потрібно вибрати аналітичну структуру функції, якою здійснюватиметься наближення табличної емпіричної функції

2) потрібно визначитись з критерієм оптимальності описування результатів експерименту різними функціями.

Побудову емпіричних формул з дотриманням зазначених умов здійснюють методом найменших квадратів.

Нехай за результатами експерименту величини X та Y набули значень $(x_i; y_i)$; $i = \overrightarrow{1,n}$; $n -$кількість вимірів. Точність результатів y_i характеризують середні квадратичні похибки m_i. Необхідно виконати апроксимацію емпіричних даних і визначити оптимальну емпіричну формулу.

2. Апроксимація функцій за результатами вимірів
2.1. Імовірнісне обґрунтування вирішення задачі

Допустимо, що істинну залежність Y від X виражає формула

$$Y = F(X), \tag{1}$$

а похибки вимірів m_i і результати y_i підпорядковані нормальному законові розподілу. Якщо виміри рівноточні, то $m_1 = m_2 = ... = m_n = m$. Тоді для функції щільності нормально розподіленої величини Y одержимо:

$$f_i(y_i) = \frac{1}{m\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{[y_i - F(x_i)]^2}{2m^2}}. \tag{2}$$

В такій постановці задачі похибки m_i - це середні квадратичні відхилення (стандарти), а $F(x_i)$ - математичні очікування результатів y_i. З метою забезпечення істинності умови (1) ймовірність сукупності результатів y_i має бути найбільшою. Для цього абсолютне значення показника степені у функції щільності (2) повинно бути найменшим. У межах проведеного експерименту $\frac{1}{2m^2} = const$. Тому,

$$\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - F(x_i)\right)^2 = \left[\theta^2\right] = \min . \tag{3}$$

Для нерівноточних результатів y_i з урахуванням зв’язку середньої квадратичної похибки m та ваги p

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \left(y_i - F(x_i)\right)^2 = \left[p\theta^2\right] = \min . \tag{4}$$

Різниці $y_i - F(x_i) = \theta_i$ виражають істинні похибки результатів y_i. Тому вирішення задачі зводиться до визначення поправок

$$v_i = F(x_i) - y_i, \tag{5}$$

які мають ліквідовувати наявні похибки.

З іншого боку, величини v_i показують відхилення результатів експерименту y_i і відповідних значень апроксимуючої функції $Y = F(X)$. Якщо встановити той чи інший числовий критерій, то відхилення v_i забезпечать визначення оптимальної аналітичної форми та параметрів функції. Отже, умови (3) та (4) набувають вигляду

$$[v^2] = \min, \tag{6}$$

$$[pv^2] = \min. \tag{7}$$

Формули (6) і (7) є математичним вираженням принципу найменших квадратів. Отже, ці умови є основою вирішення поставленого завдання.

2.2. Вираження залежності у загальному вигляді

Будь-яка функція $Y=F(X)$ містить сукупність постійних параметрів (коефіцієнтів) c_j $(j=\overline{1,k})$, значення яких апріорі невідомі. Тому загалом існуючу закономірність перебігу експерименту виражає функція

$$Y=F(X;c_1,...,c_k). \tag{8}$$

Співвідношення змінної X з параметрами c_j визначають характер аналітичної форми залежності Y від X. Якщо значеннями параметрів c_j сформувати матрицю $\underset{k\times 1}{c}=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdots \\ c_k \end{pmatrix}$, а результати y_i звести до матриці $\underset{n\times 1}{Y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}$, то функція (8) набуває вигляду

$$\underset{n\times 1}{Y}=\underset{n\times k}{A}\cdot\underset{k\times 1}{c}. \tag{9}$$

Тут $\underset{n\times k}{A}$ - матриця коефіцієнтів, які залежать від аналітичної форми функції (8) і значень змінної X. Наприклад, якщо залежність виражається лінійною функцією $Y=c_1X+c_2$, то $\underset{n\times 2}{A}=\begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \cdots & \cdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix}$. При параболічній залежності $Y=c_1X+c_2X^2+...+c_{k-1}X^{k-1}+c_k$ маємо $\underset{n\times k}{A}=\begin{pmatrix} x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{k-1} & 1 \\ x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{k-1} & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{k-1} & 1 \end{pmatrix}$.

2.3. Визначення параметрів апроксимуючої функції

Враховуючи функцію $Y = F(X; c_1,...,c_k)$, рівняння поправок $v_i = F(x_i) - y_i$ набувають вигляду

$$v_i = F(x_i; c_1,...,c_k) - y_i, \tag{10}$$

а завдання визначення числових значень невідомих параметрів c_j під умовою $[pv^2] = \min$ зводиться до розв'язування системи рівнянь

$$\left[pv \frac{\partial v}{\partial c_j} \right] = 0 \cdot \tag{11}$$

$$\left(\frac{\partial v_i}{\partial c_j} \right)_{\text{o}} = a_{ij}; \tag{12}$$

a_{ij} - це числові значення частинних похідних, які можна визначити за результатами експерименту x_i. Диференціювання рівнянь поправок (10) показує, що значення a_{ij} - це елементи матриці коефіцієнтів $\underset{n\times k}{A}$ рівняння $\underset{n\times 1}{Y} = \underset{n\times k}{A} \cdot \underset{k\times 1}{c}$. Тому система рівнянь (11) набуває вигляду

$$[pa_j v] = 0 \tag{13}$$

або у матричній формі

$$\underset{k\times n}{A^T} \cdot \underset{n\times n}{P} \cdot \underset{n\times 1}{V} = 0. \tag{14}$$

Тут $\underset{n\times 1}{V} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdots \\ v_n \end{pmatrix}$ - матриця поправок; $\underset{n\times n}{P} = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & p_n \end{pmatrix}$ - діагональна вагова матриця. Якщо умови (13) чи (14) будуть дотримані, то буде забезпечена вимога принципу найменших квадратів щодо мінімуму $[pv^2] = \min$.

Складемо рівняння поправок $v_i = F(x_i; c_1, ..., c_k) - y_i$ у матричній формі з урахуванням, що $\underset{n\times 1}{Y} = \underset{n\times k}{A} \cdot \underset{k\times 1}{c}$:

$$\underset{n\times 1}{V} = \underset{n\times k}{A} \cdot \underset{k\times 1}{c} - \underset{n\times 1}{Y}. \tag{15}$$

Підстановка його в рівняння $\underset{k\times n}{A^T} \cdot \underset{n\times n}{P} \cdot \underset{n\times 1}{V} = 0$ показує наступне:

$$\underset{k\times n}{A^T} \cdot \underset{n\times n}{P} \cdot \underset{n\times k}{A} \cdot \underset{k\times 1}{c} - \underset{k\times n}{A^T} \cdot \underset{n\times n}{P} \cdot \underset{n\times 1}{Y} = 0. \tag{16}$$

В теорії способу найменших квадратів такого типу рівняння називають нормальними рівняннями з коефіцієнтами $\underset{k\times n}{A^T} \cdot \underset{n\times n}{P} \cdot \underset{n\times k}{A} = \underset{k\times k}{N}$ і вільними членами $\underset{k\times n}{A^T} \cdot \underset{n\times n}{P} \cdot \underset{n\times 1}{Y} = \underset{k\times 1}{L}$. Для рівноточних результатів експерименту y_i одержимо

$$\underset{k\times n}{A^T} \cdot \underset{n\times k}{A} \cdot \underset{k\times 1}{c} - \underset{k\times n}{A^T} \cdot \underset{n\times 1}{Y} = 0, \tag{17}$$

де $\underset{k\times n}{A^T} \cdot \underset{n\times k}{A} = \underset{k\times k}{N}$ і $\underset{k\times n}{A^T} \cdot \underset{n\times 1}{Y} = \underset{k\times 1}{L}$. Таким чином, незалежно від умов експерименту маємо нормальне рівняння

$$\underset{k\times k}{N} \cdot \underset{k\times 1}{c} - \underset{k\times 1}{L} = 0. \tag{18}$$

Розв’язок нормального рівняння має вигляд

$$\underset{k\times 1}{c} = \underset{k\times k}{Q} \cdot \underset{k\times 1}{L}, \tag{19}$$

де $\underset{k\times k}{Q} = \underset{k\times k}{N^{-1}}$. Він забезпечує значення найбільш оптимальних параметрів c_j з точки зору вимоги $[pv^2] = \min$ в умовах проведеного експерименту. Розв’язок (19) можливий виключно за умови

$$k < n. \tag{20}$$

2.4. Апроксимація лінійної функції

Нехай залежність $\underset{n\times 1}{Y} = \underset{n\times k}{A} \cdot \underset{k\times 1}{c}$ виражає лінійна функція

$$Y = c_1 X + c_2 \tag{21}$$

з матрицею коефіцієнтів $\underset{n\times 2}{A} = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \dots & \dots \\ x_n & 1 \end{pmatrix}$, а результати y_i рівноточні. Тоді нормальне рівняння $\underset{k\times n}{A^T} \cdot \underset{n\times k}{A} \cdot \underset{k\times 1}{c} - \underset{k\times n}{A^T} \cdot \underset{n\times 1}{Y} = 0$ у розгорнутому вигляді $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \dots & \dots \\ x_n & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix} [x^2] & [x] \\ [x] & n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [xy] \\ [y] \end{pmatrix}$ розкриває систему двох рівнянь:

$$\left.\begin{array}{r} [x^2] \cdot c_1 + [x] \cdot c_2 = [xy] \\ [x] \cdot c_1 + n \cdot c_2 = [y] \end{array}\right\}. \tag{22}$$

Розділивши рівняння на n, переходимо до системи такого вигляду:

$$\left.\begin{aligned} \frac{[x^2]}{n}c_1 + \frac{[x]}{n}c_2 = \frac{[xy]}{n} \\ \frac{[x]}{n}c_1 + c_2 = \frac{[y]}{n} \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

або
$$\left.\begin{aligned} \alpha_2^*[X]\cdot c_1 + \tilde{X}\cdot c_2 = \alpha_{1,1}^*[XY] \\ \tilde{X}\cdot c_1 + c_2 = \tilde{Y} \end{aligned}\right\}. \tag{24}$$

Тут позначено: $\tilde{X} = \alpha_1^*[X]$, $\tilde{Y} = \alpha_1^*[Y]$, $\alpha_2^*[X]$, $\alpha_{1,1}^*[XY]$ - початкові статистичні моменти. З другого рівняння утвореної системи виражаємо невідомий параметр c_2

$$c_2 = \tilde{Y} - \tilde{X}\cdot c_1 \tag{25}$$

і одержаний вираз підставляємо до першого рівняння: $\alpha_2^*[X]\cdot c_1 + \tilde{X}\left(\tilde{Y} - \tilde{X}\cdot c_1\right) = \alpha_{1,1}^*[XY]$. Звідси

$$c_1 = \frac{\alpha_{1,1}^*[XY] - \tilde{X}\cdot\tilde{Y}}{\alpha_2^*[X] - \tilde{X}^2}. \tag{26}$$

Рівняння (25) та (26) забезпечують однозначний розв’язок завдання апроксимації експериментальних даних, яке є найбільш оптимальним з точки зору принципу найменших квадратів для лінійної залежності $Y = c_1X + c_2$.

В математичній статистиці існують співвідношення, які виражають зв'язок початкових і центральних моментів такого вигляду: $\alpha_{1,1}^*[XY] - \alpha_1^*[X] \cdot \alpha_1^*[Y] = \mu_{1,1}^*[XY]$; $\alpha_2^*[X] - \left(\alpha_1^*[X]\right)^2 = \mu_2^*[X]$. Другий змішаний центральний момент $\mu_{1,1}^*[XY]$ називається кореляційним моментом: $\mu_{1,1}^*[XY] = K_{x,y}^* = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \widetilde{X})(y_i - \widetilde{Y})}{n}$.

Другий центральний момент $\mu_2^*[X] = D_x^* = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \widetilde{X})^2}{n}$ виражає дисперсію величини X. Для величини Y $\mu_2^*[Y] = D_y^* = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i - \widetilde{Y})^2}{n}$, тому за центральними моментами можна виразити статистичний коефіцієнт кореляції $r_{x,y}^* = \dfrac{K_{x,y}^*}{\sqrt{D_x^* \cdot D_y^*}}$.

Наведені статистичні співвідношення дають можливість розкрити за ними невідомий параметр c_1:

$$c_1 = \frac{K^*_{x,y}}{D^*_x} = r^*_{x,y} \frac{\sqrt{D^*_y}}{\sqrt{D^*_x}}. \tag{27}$$

Формула (27) виражає коефіцієнт регресії Y на X: $\rho_{y/x} = c_1$. Враховуючи формулу (25) $c_2 = \tilde{Y} - \tilde{X} \cdot c_1$, лінійна залежність (21) $Y = c_1 X + c_2$ тепер виразиться рівнянням

$$Y = \rho_{y/x} X + \tilde{Y} - \rho_{y/x} \tilde{X}$$

або

$$Y - \tilde{Y} = \rho_{y/x}\left(X - \tilde{X}\right). \tag{28}$$

Рівняння (28) називається рівняння регресії Y на X. Відношення

$$\frac{Y - \tilde{Y}}{X - \tilde{X}} = \rho_{y/x} = tg\varphi \tag{29}$$

виражає кутовий коефіцієнт прямої, яка відповідає рівнянням (21) $Y = c_1 X + c_2$ чи (28) $Y - \tilde{Y} = \rho_{y/x}\left(X - \tilde{X}\right)$.

Отже, **завдання визначення параметрів c_1 та c_2 математично тотожне завданню побудови рівняння регресії**. Однак за суттю завдання різняться, адже наявність функціональної залежності передбачає, що коефіцієнт кореляції $r^*_{x,y} = \pm 1$. Говорити про встановлення функціонального зв'язку між величинами X та Y за результатами експерименту немає жодних підстав. Це є наслідком того, що результати вимірів обтяжені похибками. Тому **апроксимація експериментальних даних забезпечує хоча й однозначне, проте наближене розв'язання завдання вираження закономірності перебігу експерименту** обраним типом функціональної залежності.

3. Оцінка точності за результатами апроксимації

Алгоритм побудови емпіричних формул аналогічний алгоритму зрівноважування вимірів параметричним способом. Тому залишається аналогічною група формул оцінки точності за результатами вирішення задачі.

3.1. Оцінка точності прямих результатів експерименту

Точність результатів експерименту y_i характеризують середні квадратичні похибки m_i. Їх можна визначити за результатами побудови емпіричних формул.

Похибки m_i визначаються за сукупністю результатів y_i, взявши за основу відхилення від них відповідних значень встановленої емпіричної формули. Відхилення v_i виражаються рівняннями поправок $\underset{n\times 1}{V} = \underset{n\times k}{A} \cdot \underset{k\times 1}{c} - \underset{n\times 1}{Y}$. Далі, відповідно до формули мінімуму, обчислюється значення $[pv^2] = \underset{1\times n}{V}^T \cdot \underset{n\times n}{P} \cdot \underset{n\times 1}{V}$ і середня квадратична похибка одиниці ваги за формулою Бесселя $\mu = \sqrt{\dfrac{[pv^2]}{n-k}}$. Точність результатів y_i виражає формула $m_i = \dfrac{\mu}{\sqrt{p_i}}$. Якщо результати експерименту рівноточні, то їх точність виражає формула Бесселя $m = \sqrt{\dfrac{[v^2]}{n-k}}$, де $[v^2] = \underset{1\times n}{V}^T \cdot \underset{n\times 1}{V}$.

Середні квадратичні похибки μ або m визначають точність результатів експерименту. З іншого боку, вони є критерієм вираження закономірностей його перебігу побудованою емпіричною формулою. З усіх типів функцій, які застосовувались для побудови емпіричних формул, найбільш оптимальною буде та, якій відповідає найменше значення μ або m. З цієї причини **похибки μ та m називають середніми квадратичними похибками апроксимації**.

3.2. Оцінка точності параметрів емпіричних формул

Згідно загальної теорії параметричного способу, точність розв'язання задачі зрівноважування визначає матриця вагових коефіцієнтів $\underset{k\times k}{Q}$. Це матриця, обернена до матриці коефіцієнтів системи нормальних рівнянь: $\underset{k\times k}{Q} = \underset{k\times k}{N}^{-1}$. В задачі апроксимації матриця $\underset{k\times k}{Q}$ зумовлює точність визначення параметрів емпіричних формул.

Обернені ваги $\frac{1}{P_j}$ невідомих параметрів $\underset{k\times 1}{c}$ системи нормальних рівнянь $\underset{k\times k}{N} \cdot \underset{k\times 1}{c} - \underset{k\times 1}{L} = 0$ дорівнюють квадратичним ваговим коефіцієнтам Q_{jj} з відповідними індексами: $\frac{1}{P_j} = Q_{jj}$. Середні квадратичні похибки параметрів c_j

$$M_j = \mu\sqrt{Q_{jj}} \tag{30}$$

розкриває кореляційна матриця $\underset{k\times k}{M}^2 = \mu^2 \cdot \underset{k\times k}{Q}$. При апроксимації рівноточних результатів експерименту

$$M_j = m\sqrt{Q_{jj}} \tag{31}$$

виражаються діагональними елементами кореляційної матриці $\underset{k\times k}{M}^2 = m^2 \cdot \underset{k\times k}{Q}$. Інші (не квадратичні) елементи матриці вагових коефіцієнтів $\underset{k\times k}{Q}$ виражають залежність між параметрами емпіричної формули. Коефіцієнт кореляції між параметрами c_i та c_j виражає формула $r_{ij} = \frac{Q_{ij}}{\sqrt{Q_{ii}Q_{jj}}}$.

3.3. Оцінка точності результатів інтерполяції та екстраполяції

Задачі інтерполяції та екстраполяції полягають у визначенні значень функції Y за значеннями змінної X, які відсутні у табличній формі функції і не брали участі у побудові емпіричної формули. За своїм змістом ці задачі аналогічні задачі визначення функцій параметрів за результатами зрівноважування параметричним способом. Як наслідок, при оцінці точності результатів інтерполяції та екстраполяції мають силу відповідні формули параметричного способу.

Нехай за емпіричною формулою, яка побудована апроксимацією функції визначеної аналітичної структури за табличною функцією $(x_i; y_i)$, для r значень змінної X обчислено відповідні значення Y:

$$y_l = F_l(x_l; c_1, \ldots, c_k); \quad l = \overrightarrow{1, r}.$$

Згідно теорії параметричного способу, обернену вагу функції параметрів виражають формули

$$\frac{1}{P_F} = \sum_{j=1}^{k} F_j F_j Q_{jj} + 2\sum_{i<j} F_i F_j Q_{ij}$$

або у матричній формі

$$\frac{1}{P_F} = \begin{pmatrix} F_1 & F_2 & \ldots & F_k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \ldots & Q_{1k} \\ Q_{21} & Q_{22} & \ldots & Q_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ Q_{k1} & Q_{k2} & \ldots & Q_{kk} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \ldots \\ F_k \end{pmatrix} = \underset{1\times k}{F} \cdot \underset{k\times k}{Q} \cdot \underset{k\times 1}{F^T}.$$

Для r значень емпіричної формули, які є результатом інтерполяції та (або) екстраполяції, остання формула набуває вигляду

$$\underset{r\times r}{Q_F} = \underset{r\times k}{F} \cdot \underset{k\times k}{Q} \cdot \underset{k\times r}{F^T}. \qquad (32)$$

Вона виражає вагову матрицю r значень емпіричної формули з параметрами c_j, які визначено апроксимацією методом найменших квадратів. Матриця $\underset{r\times k}{F}$ формується значеннями частинних похідних емпіричної формули за її параметрами c_j:

$$F_{lj} = \left(\frac{\partial F_l}{\partial c_j}\right)_0. \qquad (33)$$

Ними враховується аналітична структура емпіричної формули і значення x_l змінної X. Головна діагональ вагової матриці $\underset{r\times r}{Q_F}$ містить обернені ваги $\frac{1}{P_{y_l}}$ значень функції y_l, які є результатами інтерполяції та (або) екстраполяції за емпіричною формулою. Точність результатів розкриває кореляційна матриця $\underset{r\times r}{M^2}$:

$$\underset{r\times r}{M^2} = \mu^2 \cdot \underset{r\times r}{Q_F}; \quad (34) \qquad \underset{r\times r}{M^2} = m^2 \cdot \underset{r\times r}{Q_F}. \quad (35)$$

На головній діагоналі кореляційної матриці розташовані квадрати середніх квадратичних похибок результатів інтерполяції та (або) екстраполяції за емпіричною формулою. Їх абсолютні значення

$$M_l = \mu\sqrt{Q_{ll}}; \quad (36) \qquad M_l = m\sqrt{Q_{ll}}. \quad (37)$$

Останні формули середніми квадратичними похибками апроксимації μ та m враховують умови нерівноточності (або рівноточності) вхідних результатів експерименту.