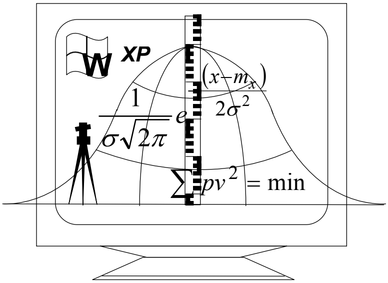
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ВОДНОГО ГОСПОДАРСТВА ТА ПРИРОДОКОРИСТУВАННЯ

Інститут агроекології та землеустрою

Кафедра геодезії та картографії



05-04-79

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до виконання розрахунково-графічної роботи №2 з дисципліни
«МАТЕМАТИЧНА ОБРОБКА ГЕОДЕЗИЧНИХ ВИМІРІВ»
студентами спеціальності «Геодезія та землеустрій»

Рекомендовано
науково-методичною комісією
зі спеціальності 193 «Геодезія та землеустрій».
Протокол № 4 від 14 грудня 2017 р.

РІВНЕ – 2018

Методичні вказівки до виконання розрахунково-графічної роботи №2 з дисципліни «Математична обробка геодезичних вимірів» студентами спеціальності 193 «Геодезія та землеустрій»: / О. А.Тадєєв, Т. І.Дець, Рівне: НУВГП, 2018. – 41 с.

Упорядники: О.А. Тадєєв, кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри геодезії та картографії;
Т. І. Дець, кандидат технічних наук, доцент кафедри геодезії та картографії.

Відповідальний за випуск: Р. М. Янчук, кандидат технічних наук, доцент, завідувач кафедри геодезії та картографії.

ЗМІСТ

сторінка

ВСТУП

Метою виконання розрахунково-графічної роботи є засвоєння студентами законів розподілу та критеріїв помилок вимірів, способів оцінки точності результатів вимірів. Після виконання розрахунково-графічної роботи студент повинен знати методи, які забезпечують розв'язування перерахованих завдань обробки геодезичних вимірів з використанням доступних сучасних технологій та технічних засобів обчислень.

ВИМОГИ ДО ОФОРМЛЕННЯ РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНОЇ РОБОТИ

Розрахунково-графічна робота (надалі РГР) починається із титульної сторінки, яку включають до загальної нумерації сторінок, але не нумерують. За титульною сторінкою послідовно наводяться зміст, вступ, пункти виконання роботи, висновки, список використаних джерел, додатки. Всі вони починаються з нової сторінки, а кожен з пунктів роботи – після закінчення попереднього.

Пояснювальна записка РГР має бути надрукована на одній стороні білого паперу формату А4 без помилок та виправлень. Сторінки обмежуються полями: ліве – 25 мм, верхнє та нижнє – 20 мм, праве – 10 мм. Рекомендована гарнітура – Times New Roman, кегль – 14, інтервал між рядками – 1,5, вирівнювання тексту – по ширині, абзац – 1,0.

Заголовки структурних частин роботи «ЗМІСТ», «ВСТУП», «ВИСНОВКИ», «СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ», «ДОДАТКИ» друкують великими літерами по центру відносно основного тексту. Заголовки пунктів друкуються жирним шрифтом малими літерами (крім першої великої) з абзацу. В кінці заголовка крапки не ставлять. Між назвою пункту та його пояснювальною запискою потрібно залишити один пустий рядок. Текст розрахунково-графічної роботи може ілюструватись рисунками, схемами, графіками, діаграмами та таблицями, на які обов'язково слід давати посилання. Наприклад: «… у табл. 1.1…» або «… (див. рис.1.5)…». Ілюстрації та таблиці потрібно наводити в роботі безпосередньо після тексту за першою згадкою або на наступній сторінці. Нумерують їх послідовно в межах пункту. Номер, як правило, складається із номера пункту та порядкового номера таблиці чи рисунка, між якими ставиться крапка. Назва рисунка, номер та пояснювальні підписи розміщуються послідовно під ним, вирівнювання по центру. Назва таблиці, номер та пояснювальні підписи розміщуються над таблицею, вирівнювання по центру.

Наприклад: Рисунок 1.1 – Назва рисунка
Таблиця 2.3 – Назва таблиці

Таблицю з великою кількістю рядків можна переносити на іншу сторінку. В такому разі на наступній сторінці пишуть «Продовження табл. …».

Формули набираються з нового рядка та позначаються певним номером, написаним у дужках. Нумерують формули у межах пункту, якщо їх більше, ніж одна, і при потребі вказують на них посилання: «… у формулі (2.8)…». Пояснення значень символів і числових коефіцієнтів необхідно наводити безпосередньо під формулою у послідовності, наведеній у формулі.

Наприклад: «…Статистичне середнє квадратичне відхилення (стандарт) обчислюється за формулою

$$\sigma^* = \sqrt{D_x^*} \, . \tag{1.12}$$

де D_x^* – статистична дисперсія.»

Посилання на наукові літературні джерела в тексті наводяться у квадратних дужках на джерело в цілому [2-4] або на джерело з зазначенням конкретної сторінки [6, с.113].Для оформлення списку використаних джерел слід скористатися Національним стандартом України «Інформація та документація. Бібліографічна посилання. Загальні положення та правила складання. ДСТУ 8302:2015». Джерела можна розміщувати в алфавітному порядку прізвищ перших авторів чи заголовків (такий спосіб є найпоширеніший), а також за послідовністю посилань у тексті. Спочатку наводять літературу видану кирилицею, далі – латиною. Крім того є певний порядок розташування літературних джерел. Спочатку подають законодавчі та нормативні акти, далі книжкові видання, статті в журналах та інших періодичних виданнях, матеріали з Інтернету.

ЗАВДАННЯ 1. Математична обробка рівноточних вимірів величини

Основні теоретичні положення

Рівноточними називають однорідні результати, отримані при вимірах величини одним і тим же приладом або приладами однакової точності, одним чи рівноцінними методами вимірів, однаковим числом прийомів чи станцій і за інших рівних умов. З точки зору числових оцінок точності рівноточними вважають однорідні результати вимірів, які мають рівні середні квадратичні похибки. Під математичною обробкою результатів рівноточних вимірів величини розуміють визначення найбільш надійного значення величини, похибок вимірів та найбільш надійного значення.

1. Найбільш надійне значення рівноточних вимірів величини.

Якщо істинне значення величини невідоме, то його замінюють деяким найбільш надійним значенням, яке розраховують за результатами вимірів величини за умови, щоб за ймовірністю воно наближалось до істинного значення.

Після відбракування результатів вимірів із грубими похибками точність вимірюваної величини залежатиме від впливу систематичних та випадкових похибок. Випадкові похибки зумовлюють відхилення результатів вимірів від їх математичного сподівання. Внаслідок впливу систематичних похибок математичне сподівання результатів вимірів відхиляється від істинного значення величини. Відхилення математичного сподівання від істинного значення при обробці результатів вимірів зменшити неможливо. Вплив систематичних похибок зменшується тільки під час вимірів використанням відповідного методу вимірів та їх належною організацією. Для вилучення з результатів систематичних похибок до них вводяться необхідні поправки. Звільнені від грубих та систематичних похибок результати вимірів дають можливість з їх математичної обробки визначити математичне сподівання.

З теорії ймовірностей відомо, що найкращим наближенням до математичного сподівання при рівноточних вимірах величини є середнє арифметичне результатів цих вимірів. Це обґрунтовується законом великих чисел, зокрема теоремою Чебишева. Тому за умови відсутності в результатах вимірів систематичних похибок, математичне сподівання можна вважати істинним значенням вимірюваної величини, а середнє арифметичне (або проста арифметична середина) буде найбільш надійним її значенням. Принцип простої арифметичної середини полягає у тому, що гранично при необмежено великому числі вимірів і за умови відсутності в результатах систематичних похибок проста арифметична середина $\widetilde{x}$ прямує за ймовірністю до істинного значення X величини: $\lim\limits_{n\to\infty} \widetilde{x} = X$.

Проста арифметична середина

$$\widetilde{x} = \frac{[x]}{n}, \tag{1.1}$$

де x_i – результати вимірів; $i = \overline{1,n}$; n – число вимірів.

В деяких практичних задачах $\widetilde{x}$ зручно обчислювати за формулою

$$\widetilde{x} = x_{\min} + \frac{[\varepsilon]}{n}, \tag{1.2}$$

де $x_{\min}$ – найменший з результатів вимірів x_i ; $\varepsilon_i = x_i - x_{\min}$.

Формула (1.2) еквівалентна формулі (1.1).

2. Середня квадратична похибка рівноточних вимірів величини.

Основним критерієм точності вимірів є істинні похибки

$$\theta_i = x_i - X ,$$

де x_i – результат виміру; X – істинне значення величини.

Керуючись методами математичної статистики, за ними можна розрахувати середню квадратичну похибку вимірів *m*. Оскільки істинні похибки θ_i є центрованими результатами вимірів величини, то при відомому істинному значенні величини середню квадратичну похибку рівноточних вимірів можна розрахувати із сукупності отриманих результатів за формулою статистичної дисперсії:

$$m = \sqrt{\frac{[\theta^2]}{n}} . \tag{1.3}$$

Формулу (1.3) називають формулою Гауса для обчислення середньої квадратичної похибки рівноточних вимірів за істинними похибками вимірів.

При невідомому істинному значенні X, якщо його замінюють приблизним найбільш надійним значенням $\widetilde{x}$, середня квадратична похибка m рівноточних вимірів величини приблизно обчислюється за формулою оцінки дисперсії:

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}}\ , \tag{1.4}$$

де v_i – відхилення результатів рівноточних вимірів величини від простої арифметичної середини: $v_i = x_i - \widetilde{x}$.

Формулу (1.4) називають формулою Бесселя для обчислення середньої квадратичної похибки рівноточних вимірів за відхиленнями результатів вимірів від простої арифметичної середини.

Відхилення v_i мають властивості, якими можна скористатись для контролю проміжних розрахунків при виконанні таких вручну:

1) алгебраїчна сума відхилень дорівнює нулю при будь-якому числі вимірів:

$$[v] = 0\ . \tag{1.5}$$

Здебільшого обчислене значення $\widetilde{x}$ доводиться заокруглювати. Якщо при обчисленні v_i користувались заокругленим значенням простої арифметичної середини $\widetilde{x}_{окр}$ і абсолютна похибка заокруглення

$$\widetilde{x} - \widetilde{x}_{окр} = \Delta\ , \tag{1.6}$$

то

$$[v] = n\Delta\ . \tag{1.7}$$

2) сума квадратів відхилень v_i є мінімальною та завжди менша суми квадратів відхилень тих же результатів вимірів від будь-якої іншої величини, яка не дорівнює $\widetilde{x}$:

$$[v^2] = \min\ ; \qquad [v^2] < [\delta^2]\ , \tag{1.8}$$

де $\delta_i = x_i - x'$; $x' \neq \widetilde{x}$.

Якщо проста арифметична середина $\widetilde{x}$ обчислена за формулою (1.2), то

$$[v^2] = [\varepsilon^2] - \frac{[\varepsilon]^2}{n}\ . \tag{1.9}$$

3. Середня квадратична похибка найбільш надійного значення величини.

Найбільш надійним значенням величини є проста арифметична середина, яка обчислюється за формулою (1.1) як функція результатів її рівноточних вимірів. Приймаючи до уваги, що при рівноточних вимірах середні квадратичні похибки результатів рівні поміж собою ($m_1 = m_2 = \ldots = m_n = m$), то середня квадратична похибка $m_{\tilde{x}} = M$ функції незалежних аргументів виду (1.1) виразиться з формули $m_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{\circ}^{2} m_i^2}$ і остаточно матиме такий вигляд:

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}}. \qquad (1.10)$$

Середня квадратична похибка M є істинною похибкою простої арифметичної середини $\tilde{x}$ як найбільш надійного значення величини. Оскільки $\tilde{x}$ приблизно виражає істинне значення величини X, то використовуючи $\tilde{x}$ та M, на основі розподілу Стьюдента можна визначити похибку заміни X на $\tilde{x}$ і побудувати довірчий інтервал для невідомого істинного значення величини:

$$I_\beta = \left(\tilde{x} - t_\beta M; \tilde{x} + t_\beta M\right). \qquad (1.11)$$

Тут t_β – параметр розподілу Стьюдента, який можна вибрати з таблиці розподілу Стьюдента за довірчою ймовірністю $\beta \to 1$ і числом ступенів свободи $r = n - 1$ (див. таблицю додатку 1). При числі вимірів $n \geq 20$ розподіл Стьюдента мало відрізняється від нормального. Тому при такому n параметр t_β потрібно визначати з таблиці додатку 2 як параметр нормального закону розподілу на основі формули $t_\beta = \arg \Phi^* \left(\frac{1+\beta}{2}\right)$ при належній довірчій імовірності β.

Довірчий інтервал (1.11) вказує границі, в яких з ймовірністю β буде знаходитись невідоме істинне значення величини X: $\tilde{x} - t_\beta M \leq X \leq \tilde{x} + t_\beta M$.

При великому числі вимірів n середні квадратичні похибки m та M обчислюються із достатньою надійністю. Однак на практиці здебільшого число вимірів обмежене порядком $n = 10 \div 20$. В таких випадках похибки m та M є сумнівними і в достатній мірі неточними. Тому при математичній обробці результатів за числом вимірів $n < 20$ рекомендується виконувати оцінку точності середніх квадратичних похибок m та M.

Для цього обчислюють середні квадратичні похибки m_m та m_M значень середніх квадратичних похибок m та M:

$$m_m \approx \frac{m}{\sqrt{2(n-1)}}; \qquad (1.12)$$

$$m_M \approx \frac{M}{\sqrt{2(n-1)}}. \qquad (1.13)$$

Завдання 1. Виконати математичну обробку n результатів рівноточних вимірів величини.

Вихідні дані. В таблиці вихідних даних (табл. 1.1) всього задано 30 результатів рівноточних вимірів різних величин. Для виконання завдання передусім за номером групи u потрібно вибрати вимірювану величину:

- для першої групи $(u=1)-$ горизонтальний кут β;
- для другої групи $(u=2)-$ вертикальний кут ϑ;
- для третьої групи $(u=3)-$ горизонтальний кут β;
- для четвертої групи $(u=4)-$ довжина лінії D;
- для п'ятої групи $(u=5)-$ перевищення h;
- для шостої групи $(u=6)-$ вертикальний кут ϑ.

Далі з таблиці вихідних даних потрібно викреслити u результатів вимірів величини, розпочинаючи з номера $N=v$, де $v-$ номер варіанту студента. Для виконання математичної обробки залишається $n=30-u$ результатів рівноточних вимірів величини.

Черговість виконання завдання.

1. Розрахунок найбільш надійного значення величини як простої арифметичної середини результатів її рівноточних вимірів.
2. Розрахунок середньої квадратичної похибки рівноточних вимірів величини за формулою Бесселя.
3. Розрахунок середньої квадратичної похибки найбільш надійного значення величини.
4. Оцінка точності істинного значення величини довірчим інтервалом при довірчій імовірності 0.95.
5. Оцінка точності значень середніх квадратичних похибок вимірів і найбільш надійного значення.

Таблиця 1.1 – Таблиця вихідних даних до завдання №1

№	Результати вимірів величин					
	$u=1$	$u=2$	$u=3$	$u=4$	$u=5$	$u=6$
	β_i	ϑ_i	β_i	D_i	h_i	ϑ_i
1	$63^\circ 11' 20''$	$1^\circ 10'$	$71^\circ 31' 30''$	119.61*м*	1.485*м*	$7^\circ 01'$
2	21	11	31	62	486	02
3	22	12	32	63	487	03
4	23	13	33	64	488	04
5	24	14	34	65	489	05
6	25	15	35	66	490	06
7	26	16	36	67	491	07
8	27	17	37	68	492	08
9	28	18	38	69	493	09
10	29	19	39	70	494	10
11	30	20	40	71	495	11
12	31	21	41	72	496	12
13	32	22	42	73	497	13
14	33	23	43	74	498	14
15	34	24	44	75	499	15
16	35	25	45	76	500	16
17	36	26	46	77	501	17
18	37	27	47	78	502	18
19	38	28	48	79	503	19
20	39	29	49	80	504	20
21	40	30	50	81	505	21
22	41	31	51	82	506	22
23	42	32	52	83	507	23
24	43	33	53	84	508	24
25	44	34	54	85	509	25
26	45	35	55	86	510	26
27	46	36	56	87	511	27
28	47	37	57	88	512	28
29	48	38	58	89	513	29
30	49	39	59	90	514	30

Приклад та порядок виконання роботи

Під час виконання роботи виконується математична обробка результатів багатократних рівноточних вимірів величини.

Завдання для прикладу. Відомо результати n = 12 рівноточних вимірів кута. В ході математичної обробки результатів потрібно визначити: 1)найбільш надійне значення кута; 2)середню квадратичну похибку результатів вимірів; 3)середню квадратичну похибку найбільш надійного значення; 4)довірчий інтервал для істинного значення кута при довірчій імовірності $\beta = 0.95$; 5)точність обчислення середніх квадратичних похибок.

Порядок виконання роботи. Вихідні дані та результати проміжних розрахунків показано в таблиці 1.2:

Таблиця 1.2 – Результати вимірів та проміжні розрахунки

№ вимірів	Результати вимірів	ε_i	ε_i^2	v_i	v_i^2
1	$34°43'$	3	9	- 0.2	0.04
2	46	6	36	2.8	7.84
3	43	3	9	-0.2	0.04
4	45	5	25	1.8	3.24
5	40	0	0	-3.2	10.24
6	42	2	4	-1.2	1.44
7	45	5	25	1.8	3.24
8	44	4	16	0.8	0.64
9	41	1	1	-2.2	4.84
10	44	4	16	0.8	0.64
11	43	3	9	-0.2	0.04
12	42	2	4	-1.2	1.44
$\sum$	–	38	154	-0.4	33.68

1. Найбільш надійне значення кута обчислюємо за формулою (1.2). Найменший результат вимірів $x_{\min} = 34°40'$. $\tilde{x} = 34°43.16667'$. $\tilde{x}_{окр} = 34°43.2'$. Абсолютна похибка заокруглення $\Delta = -0.03333'$.

2. Середню квадратичну похибку m кожного з рівноточних результатів вимірів кута розраховуємо за формулою Бесселя (1.4).

Відхилення $v_i = x_i - \tilde{x}_{окр}$ і сума їх квадратів $[v^2]$, які використовуються в цій формулі, обчислені в таблиці 1.2.

Контроль розрахунків у таблиці можна виконати за формулами (1.7) і (1.9):

1) $n\Delta = -0.4 = [v]$; 2) $[\varepsilon^2] - \dfrac{[\varepsilon]^2}{n} = 33.68 = [v^2]$.

Умови контролів задовольняються, тому $m = \sqrt{\dfrac{33.68}{12-1}} = \pm 1.7'$.

Отже, кожен із результатів вимірів кута має середню квадратичну похибку $m = \pm 1.7'$.

3. Середня квадратична похибка M простої арифметичної середини як найбільш надійного значення кута обчислюється за формулою (1.10):

$$M = \frac{1.7}{\sqrt{12}} = \pm 0.49'.$$

Отже, найбільш надійне значення вимірюваного кута $\widetilde{x} = 34^\circ 43.2' \pm 0.49'$.

4. Довірчий інтервал для істинного значення кута виражається формулою (1.11). Оскільки $n < 20$, то значення параметру t_β вибираємо з таблиці розподілу Стьюдента (додаток 1) за довірчою ймовірністю $\beta = 0.95$ та числом ступенів свободи $r = n - 1 = 11$: $t_\beta = 2.20$.

Отже, довірчий інтервал $I_\beta = \left(34^\circ 42.1'; 34^\circ 44.3'\right)$.

Тому з ймовірністю $\beta = 0.95$ можна стверджувати, що істинне значення X вимірюваного кута задовольняє нерівності $34^\circ 42.1' \le X \le 34^\circ 44.3'$.

5. Оцінку точності середніх квадратичних похибок m і M виконаємо за формулами (1.12) і (1.13):

$$m_m \approx \frac{1.7}{\sqrt{2(12-1)}} = \pm 0.36'; \qquad m_M \approx \frac{0.49}{\sqrt{2(12-1)}} = \pm 0.10'.$$

Отже, середня квадратична похибка результату виміру кута $m = 1.7' \pm 0.36'$, середня квадратична похибка найбільш надійного значення кута $M = 0.49' \pm 0.10'$.

ЗАВДАННЯ 2. Математична обробка нерівноточних вимірів величини

Основні теоретичні положення

Нерівноточними називають однорідні результати, отримані при багатократних вимірах величини приладами неоднакової точності, різними методами вимірів, різним числом прийомів чи станцій і за інших несхожих умов. З точки зору числових оцінок точності нерівноточними вважають однорідні результати вимірів, які мають неоднакові середні квадратичні похибки. Якщо з n вимірів отримано деякі результати $x_i \left(i = \overline{1, n}\right)$, то їх називають нерівноточними за умови, що відповідні середні квадратичні похибки m_i різняться поміж собою: $m_1 \ne m_2 \ne \ldots \ne m_n$. Під математичною обробкою результатів нерівноточних вимірів величини розуміють визначення найбільш надійного значення величини, похибок вимірів та похибки найбільш надійного значення.

1. Найбільш надійне значення нерівноточних вимірів величини. Ваги нерівноточних вимірів і їх функцій.

Нехай з n вимірів деякої величини отримано результати x_i з істинними похибками $\theta_i = x_i - X$, які підпорядковуються нормальному законові розподілу. Істинне значення X вимірюваної величини відповідає найбільшому значенню ймовірності сукупності результатів вимірів цієї величини. Це слідує з функції щільності нормального закону розподілу, зокрема такої її властивості: максимум $\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ цієї функції досягається при найменшому значенні показника степені $\dfrac{x_i - X}{\sigma}$ і відповідає центру розподілу значень величини, яким гранично є істинне значення цієї величини. При невідомому істинному значенні величини його замінюють найбільш надійним значенням $\tilde{x}$, яке за ймовірністю має бути близьким до істинного і за умови відсутності в результатах вимірів x_i систематичних похибок дорівнює математичному сподіванню отриманих результатів. Точність результатів вимірів x_i в такому випадку буде виражатись їх середніми квадратичними похибками m_i. Виходячи з цього, найбільшу ймовірність сукупності результатів вимірів x_i і найбільш надійне значення $\tilde{x}$ цих результатів можна отримати лише за умови мінімуму функції виду

$$F = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - \tilde{x}}{m_i}\right)^2 = \min . \tag{2.1}$$

Розв’язок задачі можливий, якщо частинні похідні $\dfrac{\partial F}{\partial x_i} = 0$.

Після диференціювання $\dfrac{\partial F}{\partial x_i} = \left[2\dfrac{x - \tilde{x}}{m^2}\right] = \left[x\dfrac{c}{m^2}\right] - \tilde{x}\left[\dfrac{c}{m^2}\right] = 0$.

Звідси найбільш надійне значення

$$\tilde{x} = \frac{\left[x\dfrac{c}{m^2}\right]}{\left[\dfrac{c}{m^2}\right]}, \tag{2.2}$$

де $c = const -$ деякий сталий додатній коефіцієнт.

Відношення

$$p_i = \frac{c}{m_i^2} \tag{2.3}$$

називають вагами нерівноточних результатів вимірів величини.

З формули (2.3) слідує, що більшій точності вимірів (або меншим похибкам вимірів) відповідають більші ваги. Тому вагою називають безрозмірну величину, яка виражає ступінь довіри до окремого результату нерівноточних вимірів величини.

При обчисленні ваг сталий коефіцієнт c вибирають з такого розрахунку, щоб ваги p_i результатів вимірів x_i були, по можливості, близькі до одиниці. Розмірність c дорівнює розмірності m_i^2. Остаточно

$$\widetilde{x} = \frac{[xp]}{[p]}. \tag{2.4}$$

Величина $\widetilde{x}$ є найбільш надійним значенням нерівноточних вимірів величини і називається середнім ваговим або загальною арифметичною серединою. В деяких практичних задачах $\widetilde{x}$ зручно обчислювати за формулою

$$\widetilde{x} = x_{\min} + \frac{[p\varepsilon]}{[p]}, \tag{2.5}$$

де $x_{\min}$ – найменший із результатів вимірів x_i; $\varepsilon_i = x_i - x_{\min}$.
Формула (2.5) еквівалентна формулі (2.4).

Якщо за формулою загальної арифметичної середини (2.4) визначати найбільш надійне значення результатів рівноточних вимірів величини, то $\widetilde{x} = \frac{[x]}{n}$, оскільки середні квадратичні похибки і ваги рівноточних вимірів рівні між собою і при $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = 1$ маємо $[p] = n$. Отже, проста арифметична середина (1.1) є частковим випадком загальної арифметичної середини (2.4).

Вагу простої арифметичної середини можна обчислити за її середньою квадратичною похибкою M, виходячи з формули (1.10): $P = \frac{c}{M^2} = \frac{cn}{m^2}$.

Вага одного рівноточного результату виміру $p = \frac{c}{m^2}$.

З відношення $\frac{P}{p} = n$ маємо, що вага простої арифметичної середини в n разів більша ваги одного рівноточного результату виміру. З цього слідує, що вага загальної арифметичної середини $P_{\widetilde{x}}$ дорівнює сумі ваг нерівноточних результатів вимірів величини:

$$P_{\widetilde{x}} = [p]. \tag{2.6}$$

Нехай деяка величина F визначається посереднім способом за результатами нерівноточних результатів вимірів величин x_i з функції загального вигляду

$$F = f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

де $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – результати безпосередніх вимірів величин (аргументи функції); n – число аргументів функції.

Якщо вимірювані величини (аргументи функції) залежні між собою, то середня квадратична похибка m_F функції $F = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ виражається формулою

$$m_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{\circ}^{2} m_i^2 + 2\sum_{i<j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{\circ} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)_{\circ} r_{ij} m_i m_j}\ ,$$

де m_i – середні квадратичні похибки аргументів x_i; r_{ij} – коефіцієнт кореляції величин X_i та X_j; символ $i < j$ означає, що до суми потрібно залучати всі парні комбінації аргументів функції.

Враховуючи співвідношення (2.3) з формули середньої квадратичної похибки m_F можна виразити обернену вагу $\frac{1}{P_F}$ функції $F = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$:

$$\frac{1}{P_F} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{\circ}^{2} \frac{1}{p_i} + 2\sum_{i<j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{\circ} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)_{\circ} \frac{r_{ij}}{\sqrt{p_i p_j}}\ , \qquad (2.7)$$

де $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{\circ}$ – значення частинних похідних функції по аргументах x_i; p_i – ваги аргументів x_i; r_{ij} – коефіцієнт кореляції величин X_i та X_j; символ $i < j$ означає, що до суми потрібно залучати всі парні комбінації аргументів функції.

Аналогічно для оберненої ваги функції незалежних аргументів на основі формули $m_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{\circ}^{2} m_i^2}$ можна записати

$$\frac{1}{P_F} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{\circ}^{2} \frac{1}{p_i}\,. \qquad (2.8)$$

Загальна арифметична середина (2.4) є функцією результатів незалежних нерівноточних вимірів x_i з відповідними вагами p_i. Якщо вагу такої функції визначати за формулою (2.8), то остаточно маємо $P_F = P_{\tilde{x}} = [p]$: вага найбільш надійного значення нерівноточних вимірів величини дорівнює сумі ваг отриманих результатів вимірів. Цим підтверджується рівність (2.6).

При математичній обробці вимірів нерівноточність результатів враховується їх вагами, які обчислюють за формулою (2.3). Часто середні квадратичні похибки вимірів невідомі і користуватись формулою (2.3) немає можливості, але аналіз умов вимірів дає підстави вважати отримані результати нерівноточними. Тоді ваги вимірів встановлюють за існуючими підставами і в кожному конкретному випадку при обчисленні ваг враховують як саме зміна тих чи інших умов впливає на точність результатів вимірів. Наприклад, якщо кут вимірювали різним числом прийомів k_i, то слід приймати до уваги, що збільшення числа прийомів зумовлює підвищення точності отриманих результатів вимірів (чи зменшення абсолютних значень їх похибок). Тому вага як ступінь довіри до результату виміру кута має розраховуватись із прямої залежності від числа прийомів: $p_i = \frac{k_i}{c}$. Якщо перевищення визначали різним числом станцій K_i або ходами різної довжини S_i, то потрібно враховувати, що збільшення числа станцій чи довжин ходів приводить до зниження точності результатів вимірів перевищення.

Вага кожного результату виміру перевищення повинна обчислюватись із оберненої співвідносної залежності з числом станцій чи довжиною ходу:

$$p_i = \frac{c}{K_i} \text{ або } p_i = \frac{c}{S_i}.$$

Вибір порядку сталого коефіцієнта c не змінює кінцевих результатів обробки вимірів. c відіграє роль коефіцієнта пропорційності. Якщо підібрати його з такого розрахунку, щоб ваги були близькими до одиниці, то це полегшить виконання подальших розрахунків.

Принципово важливим є не порядок ваг p_i, а їх взаємні співвідношення і розподіл між собою.

2. Середні квадратичні похибки нерівноточних вимірів величини.

Виділимо з результатів нерівноточних вимірів величини x_i деяке значення x_k, у якого вага дорівнює одиниці, тобто $p_k = 1$. Середню квадратичну похибку m_k такого результату позначують μ.

Тоді $p_k = \frac{\mu^2}{m_k^2} = 1$ і $\mu = m_k = \sqrt{c}$. Величину μ називають середньою квадратичною похибкою одиниці ваги.

Середня квадратична похибка одиниці ваги $\mu -$ це похибка результатів нерівноточних вимірів, в яких вага дорівнює одиниці.

Враховуючи співвідношення (2.3), $\mu = m_i \sqrt{p_i}$. Тому

$$m_i = \frac{\mu}{\sqrt{p_i}}, \tag{2.9}$$

тобто середня квадратична похибка m_i результату виміру величини x_i виражається через середню квадратичну похибку одиниці ваги μ і вагу p_i відповідного результату. З цього слідує, що величину μ при оцінці точності нерівноточних вимірів потрібно обчислювати завжди незалежно від того, чи є серед вимірів результати з вагою, яка дорівнює одиниці, чи такі результати відсутні.

Якщо відоме істинне значення вимірюваної величини X та істинні похибки вимірів $\theta_i = x_i - X$, середню квадратичну похибку одиниці ваги μ можна розрахувати за формулою Гауса, виходячи із сукупності результатів вимірів x_i та їх ваг p_i:

$$\mu = \sqrt{\frac{[p\theta^2]}{n}} . \tag{2.10}$$

При невідомому істинному значенні X, якщо його замінюють приблизним найбільш надійним значенням $\widetilde{x}$, середня квадратична похибка одиниці ваги μ приблизно обчислюється на основі формули Бесселя за відхиленнями $v_i = x_i - \widetilde{x}$ результатів нерівноточних вимірів величини x_i від загальної арифметичної середини $\widetilde{x}$ з врахуванням ваг вимірів p_i:

$$\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-1}} . \tag{2.11}$$

Відхилення v_i мають властивості, якими можна скористатись для контролю проміжних розрахунків при виконанні таких вручну:

1. Алгебраїчна сума добутків відхилень v_i на відповідні ваги p_i дорівнює нулю при будь-якому числі вимірів:

$$[pv] = 0 . \tag{2.12}$$

Якщо при обчисленні v_i користувались заокругленим значенням простої арифметичної середини $\widetilde{x}_{окр}$ і абсолютна похибка заокруглення $\widetilde{x} - \widetilde{x}_{окр} = \Delta$, то

$$[pv] = \Delta[p] . \tag{2.13}$$

2. Сума добутків квадратів відхилень v_i на відповідні ваги p_i є мінімальною та завжди менша суми добутків квадратів відхилень тих же результатів вимірів від будь-якої іншої величини, яка не дорівнює $\widetilde{x}$, на ваги відповідних вимірів p_i:

$$[pv^2] = \min ; \qquad [pv^2] < [p\delta^2] , \tag{2.14}$$

де $\delta_i = x_i - x'$; $x' \neq \widetilde{x}$.

Якщо загальна арифметична середина $\widetilde{x}$ обчислена за формулою (2.5), то

$$[pv^2] = [p\varepsilon^2] - \frac{[p\varepsilon]^2}{[p]}. \qquad (2.15)$$

3. Середня квадратична похибка найбільш надійного значення величини.

Найбільш надійним значенням величини $\widetilde{x}$ є загальна арифметична середина, яка обчислюється за формулою (2.4) як функція результатів незалежних нерівноточних вимірів величини.

Вага $P_{\widetilde{x}}$ функції (2.4), визначена за формулою (2.8), чи у відповідності до (2.6), дорівнює сумі ваг p_i результатів таких вимірів:

$$P_{\widetilde{x}} = [p].$$

Середню квадратичну похибку загальної арифметичної середини $m_{\widetilde{x}}$ можна виразити з формули (2.9) з врахуванням відповідної ваги $P_{\widetilde{x}}$:

$$m_{\widetilde{x}} = M = \frac{\mu}{\sqrt{P_{\widetilde{x}}}} = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}}. \qquad (2.16)$$

Середня квадратична похибка M є істинною похибкою загальної арифметичної середини $\widetilde{x}$ як найбільш надійного значення величини. Оскільки $\widetilde{x}$ приблизно виражає істинне значення величини X, то використовуючи $\widetilde{x}$ та M, можна визначити похибку заміни X на $\widetilde{x}$ і побудувати довірчий інтервал для невідомого істинного значення величини. Такий інтервал має вигляд (1.11) і визначається за правилами, які вже описані в завданні 1.

Довірчий інтервал (1.11) виражає точність істинного значення величини і з довірчою ймовірністю β окреслює діапазон його можливих значень.

При великому числі вимірів n середні квадратичні похибки μ, m_i та M обчислюються з достатньою надійністю.

Якщо число вимірів обмежене порядком $n = 10 \div 20$, то в таких випадках вирахувані значення середніх квадратичних похибок є сумнівними і в достатній мірі неточними.

При математичній обробці результатів за числом вимірів $n < 20$ рекомендується виконувати оцінку точності обчислених середніх квадратичних похибок μ, m_i та M.

Для цього обчислюють відповідні середні квадратичні похибки m_μ, m_{m_i} та m_M аналогічно тому, як це виражають формули (1.12) чи (1.13) у попередньому завданні.

Завдання 2. Виконати математичну обробку n результатів нерівноточних вимірів величини.

Вихідні дані. В таблиці вихідних даних всього задано 30 результатів нерівноточних вимірів різних величин. Для виконання завдання передусім за номером групи u потрібно вибрати вимірювану величину:

- для першої групи $(u = 1)$ – перевищення між двома реперами h. Результати вимірів h_i отримано по нівелірних ходах з різним числом станцій k_i;
- для другої групи $(u = 2)$ – перевищення між двома реперами h. Результати вимірів h_i отримано по нівелірних ходах різної довжини S_i;
- для третьої групи $(u = 3)$ – відмітка репера H. Значення відмітки H_i отримано по нівелірних ходах із середніми квадратичними похибками m_i;
- для четвертої групи $(u = 4)$ – горизонтальний кут β. Результати вимірів β_i отримано з різними середніми квадратичними похибками m_i;
- для п'ятої групи $(u = 5)$ – горизонтальний кут β. Результати вимірів β_i отримано різним числом прийомів k_i;
- для шостої групи $(u = 6)$ – довжина лінії D. Результати вимірів D_i отримано з різними середніми квадратичними похибками m_i.

Далі з таблиці вихідних даних потрібно викреслити u результатів вимірів величини, розпочинаючи з номера $N = v$, де v – номер варіанту студента. Для виконання математичної обробки залишається $n = 30 - u$ результатів нерівноточних вимірів величини.

Черговість виконання завдання.

1. Розрахунок ваг результатів нерівноточних вимірів величини.
2. Розрахунок найбільш надійного значення величини як загальної арифметичної середини результатів її нерівноточних вимірів.
3. Розрахунок середньої квадратичної похибки одиниці ваги за формулою Бесселя.
4. Розрахунок середніх квадратичних похибок результатів нерівноточних вимірів величини.
5. Розрахунок середньої квадратичної похибки найбільш надійного значення величини.
6. Оцінка точності істинного значення величини довірчим інтервалом при довірчій імовірності 0.9.
7. Оцінка точності значень середніх квадратичних похибок.

Таблиця 1. 3 – Таблиця вихідних даних до завдання №2

№	Результати вимірів величин											
	$u=1$		$u=2$		$u=3$		$u=4$		$u=5$		$u=6$	
	h_i	k_i	h_i	S_i	H_i	m_i	β_i	m_i	β_i	k_i	D_i	m_i
1	1.190 *м*	15	5.581 *м*	2.4 *км*	111.185 *м*	5.5 *мм*	$71^\circ 11' 11''$	$4.0''$	$61^\circ 41' 25''$	1	266 *м*	25 *см*
2	191	14	582	2.3	186	5.4	12	3.9	26	2	67	24
3	192	13	583	2.2	187	5.3	13	3.8	27	3	68	23
4	193	12	584	2.1	188	5.2	14	3.7	28	4	69	22
5	194	11	585	2.0	189	5.1	15	3.6	29	5	70	21
6	195	10	586	1.9	190	5.0	16	3.5	30	6	71	20
7	196	9	587	1.8	191	4.9	17	3.4	31	7	72	19
8	197	8	588	1.7	192	4.8	18	3.3	32	8	73	18
9	198	7	589	1.6	193	4.7	19	3.2	33	9	74	17
10	199	6	590	1.5	194	4.6	20	3.1	34	10	75	16
11	200	5	591	1.4	195	4.5	21	3.0	35	11	76	15
12	201	4	592	1.3	196	4.4	22	2.9	36	12	77	14
13	202	3	593	1.2	197	4.3	23	2.8	37	13	78	13
14	203	2	594	1.1	198	4.2	24	2.7	38	14	79	12
15	204	1	595	1.0	199	4.1	25	2.6	39	15	80	11
16	205	1	596	1.1	200	4.0	26	2.5	40	15	81	10
17	206	2	597	1.2	201	4.1	27	2.6	41	14	82	11
18	207	3	598	1.3	202	4.2	28	2.7	42	13	83	12
19	208	4	599	1.4	203	4.3	29	2.8	43	12	84	13
20	209	5	600	1.5	204	4.4	30	2.9	44	11	85	14
21	210	6	601	1.6	205	4.5	31	3.0	45	10	86	15
22	211	7	602	1.7	206	4.6	32	3.1	46	9	87	16
23	212	8	603	1.8	207	4.7	33	3.2	47	8	88	17
24	213	9	604	1.9	208	4.8	34	3.3	48	7	89	18
25	214	10	605	2.0	209	4.9	35	3.4	49	6	90	19
26	215	11	606	2.1	210	5.0	36	3.5	50	5	91	20
27	216	12	607	2.2	211	5.1	37	3.6	51	4	92	21
28	217	13	608	2.3	212	5.2	38	3.7	52	3	93	22
29	218	14	609	2.4	213	5.3	39	3.8	53	2	94	23
30	219	15	610	2.5	214	5.4	40	3.9	54	1	95	24

Приклад та порядок виконання роботи

Під час виконання роботи виконується математична обробка результатів багатократних нерівноточних вимірів величини.

Завдання для прикладу. Відомо результати n = 6 вимірів кута (табл. 1.4) різним числом прийомів. В ході математичної обробки результатів потрібно визначити: 1)найбільш надійне значення кута; 2)середні квадратичні похибки результатів вимірів; 3) середню квадратичну похибку найбільш надійного значення; 4)довірчий інтервал для істинного значення кута при довірчій імовірності $\beta = 0.9$; 5)точність обчислення середніх квадратичних похибок.

Порядок виконання завдання.

Вихідні дані та результати проміжних розрахунків показано в таблиці 1.4:

Таблиця 1.4 – Результати вимірів кута та проміжні розрахунки

Результати вимірів кута			Результати розрахунків						
№	x_i	число прийомів k_i	p_i	ε_i	$p_i\varepsilon_i$	$p_i\varepsilon_i^2$	v_i	p_iv_i	$p_iv_i^2$
1	$89^\circ47'16''$	12	4	0	0	0	-4.6	-18.4	84.64
2	19	18	6	3	18	54	-1.6	- 9.6	15.36
3	26	6	2	10	20	200	+5.4	+10.8	58.32
4	21	15	5	5	25	125	+0.4	+ 2.0	0.80
5	23	9	3	7	21	147	+2.4	+ 7.2	17.28
6	28	3	1	12	12	144	+7.4	+ 7.4	54.76
Σ	-	-	21	-	96	670	-	-0.6	231.16

1. Нерівноточність результатів x_i виражається різним числом прийомів k_i вимірів кута. Тому ваги вимірів обчислюємо із співвідношення $p_i = \dfrac{k_i}{c}$. Коефіцієнт пропорційності c приймаємо рівним найменшому значенню k_i. При такому виборі коефіцієнта всі ваги виражаються цілими числами, а вага $p_6 = 1$.

Найбільш надійне значення кута обчислюємо за формулою (2.5). Найменший результат вимірів $x_{\min} = 89^\circ47'16''$.Тоді $\widetilde{x} = 89^\circ47'20.5714285''$. Відповідно $\widetilde{x}_{окр} = 89^\circ47'20.6''$.

Абсолютна похибка заокруглення $\Delta = -0.0285715''$.

2. Істинне значення кута невідоме. Його замінюємо найбільш надійним значенням $\widetilde{x}_{окр}$. Тому середню квадратичну похибку одиниці ваги розраховуємо за формулою Бесселя (2.11).

Відхилення $v_i = x_i - \widetilde{x}_{окр}$ і сума $[pv^2]$, яка використовується в цій формулі, обчислені в таблиці 1.4.

Контроль розрахунків у таблиці можна виконати за формулами (2.13) і (2.15):

1) $\Delta[p] = -0.6 = [pv]$; 2) $[p\varepsilon^2] - \dfrac{[p\varepsilon]^2}{[p]} = 231.15 \approx [pv^2]$.

Умови контролів задовольняються.

Середня квадратична похибка одиниці ваги: $\mu = \sqrt{\dfrac{231.16}{6-1}} = \pm 6.8''$.

Середня квадратична похибка одиниці ваги – це похибка результату виміру кута, в якого вага дорівнює одиниці.

Оскільки $p_6 = 1$, то $x_6 = 89^\circ 47' 28'' \pm 6.8''$.

За значенням μ і вагами p_i на основі формули (2.9) розраховуємо середні квадратичні похибки результатів вимірів кута:

$$x_1 = 89^\circ 47' 16'' \pm 3.4'';$$

$$x_2 = 89^\circ 47' 19'' \pm 2.8'';$$

$$x_3 = 89^\circ 47' 26'' \pm 4.8'';$$

$$x_4 = 89^\circ 47' 21'' \pm 3.0'';$$

$$x_5 = 89^\circ 47' 23'' \pm 3.9''.$$

3. Середню квадратичну похибку M загальної арифметичної середини як найбільш надійного значення кута обчислюємо за формулою (2.16):

$$M = \frac{6.8}{\sqrt{21}} = \pm 1.48''.$$

Отже, найбільш надійне значення вимірюваного кута $\tilde{x} = 89^\circ 47' 20.6'' \pm 1.48''$.

4. Довірчий інтервал для істинного значення кута має вигляд (1.11). Оскільки $n < 20$, то значення параметру t_β вибираємо з таблиці розподілу Стьюдента (додаток 1) за довірчою ймовірністю $\beta = 0.9$ та числом ступенів свободи $r = n - 1 = 5$: $t_\beta = 2.02$.

Отже, довірчий інтервал $I_\beta = \left(89^\circ 47' 17.6''; 89^\circ 47' 23.6''\right)$.

Тому з ймовірністю $\beta = 0.9$ можна стверджувати, що істинне значення X вимірюваного кута задовольняє нерівності $89^\circ 47' 17.6'' \le X \le 89^\circ 47' 23.6''$.

5. Точність середніх квадратичних похибок μ та M розраховуємо за формулами:

$$m_\mu \approx \frac{\mu}{\sqrt{2(n-1)}} = \pm 2.15''; \; m_M \approx \frac{M}{\sqrt{2(n-1)}} = \pm 0.47''.$$

Отже, середня квадратична похибка одиниці ваги $\mu = 6.8'' \pm 2.15''$, середня квадратична похибка найбільш надійного значення кута $M = 1.48'' \pm 0.47''$.

ЗАВДАННЯ 3. Зрівноважування результатів вимірів у геодезичних мережах

Завдання 3.1 Зрівноважування результатів вимірів параметричним способом

Основні теоретичні положення

Параметричним способом зрівноважування за принципом найменших квадратів називають спосіб абсолютного екстремуму, в якому всі виміряні величини виражають функціями незалежних невідомих параметрів.

Основні теоретичні положення задачі зрівноважування результатів геодезичних вимірів параметричним способом викладено в «Методичних вказівках до виконання самостійних та практичних робіт з дисципліни «Математична обробка геодезичних вимірів» Розділ 3. Метод найменших квадратів. Зрівноважування результатів вимірів параметричним способом.» 05-04-32. О.А.Тадєєв, Т.І.Дець, Рівне: НУВГП, 2014. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://ep3.nuwm.edu.ua/5499/.

Далі буде викладено черговість дій та методичні рекомендації для виконання завдання розрахунково-графічної роботи

Завдання 3.1. В результаті рівноточних вимірів отримали n=9 кутів β_i мережі мікротріангуляції (див. рис. 1).

Розрахувати зрівноважені значення виміряних кутів та координат пунктів D і C, оцінити точність зрівноважених координат і довжини сторони DC.

Вихідні дані до завдання 3.1. Координати вихідних пунктів A, O, B, наближені значення координат пунктів D і C, а також результати вимірів кутів мережі приведено в таблицях вихідних даних 1.5 та 1.6.

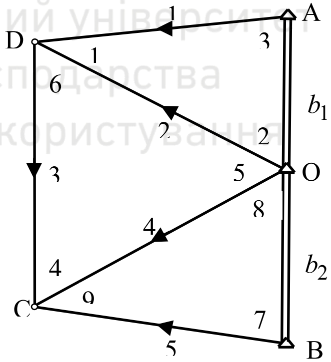


Рисунок 1 – Схема мережі мікротріангуляції

Черговість виконання завдання.

1. Вибір параметрів, складання рівнянь зв’язку вимірюваних величин та параметрів, формування системи параметричних рівнянь поправок.
2. Розрахунок коефіцієнтів та вільних членів нормальних рівнянь поправок, формування системи нормальних рівнянь поправок.
3. Розв’язування системи нормальних рівнянь поправок.
4. Розрахунок поправок до результатів вимірів величин за системою параметричних рівнянь поправок.
5. Розрахунок зрівноважених результатів вимірів та параметрів.
6. Контроль зрівноважування.
7. Оцінка точності за результатами зрівноважування.

Таблиця 1.5 – Координати вихідних пунктів *A, O, B* та наближені значення координат пунктів *D* і *C* (вихідні дані)

Пункти	X (*м*)	Y (*м*)
A	1813,119	0
O	0	0
B	-1527,638	1492,213
	X° (*м*)	Y° (*м*)
D	623,360	-1393,272
C	-897,701	-1488,183

Таблиця 1.6 – Таблиця результатів вимірів кутів мережі (вихідні дані)

№ варіанту	Результати вимірів кутів								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	64°36′	65°53′	49°30′	55°19′	55°12′	69°27′	33°44′	103°13′	43°02′
1	02,0 ″	45,2 ″	19,3 ″	45,2 ″	15,1 ″	52,6 ″	19,4 ″	43,4 ″	00,5 ″
2	00,9	43,0	19,3	45,2	15,1	52,6	19,4	45,0	01,7
3	00,9	45,2	18,1	45,2	15,1	52,6	20,5	43,4	01,7
4	01,5	45,2	19,3	47,0	15,1	52,6	19,4	43,4	01,7
5	00,9	46,1	19,3	45,2	17,6	52,6	19,4	43,4	01,7
6	00,9	45,2	19,0	45,2	15,1	54,3	19,4	43,4	01,7
7	00,7	45,2	19,3	45,2	15,1	52,6	18,0	43,4	01,7
8	00,9	44,8	19,3	45,2	15,1	52,6	19,4	42,0	01,7
9	00,9	45,2	21,1	45,2	15,1	52,6	19,4	43,4	03,1
10	00,1	45,2	19,3	45,2	15,1	52,6	18,8	43,4	01,7
11	00,9	44,0	19,3	45,2	15,1	52,6	19,4	46,0	01,7
12	00,9	45,2	20,0	45,2	15,1	52,6	19,4	43,4	02,0
13	03,0	45,2	19,3	45,2	15,1	52,6	19,4	44,6	01,7
14	00,9	47,0	19,3	45,2	15,1	52,6	19,4	43,4	00,1
15	00,9	46,8	18,7	45,2	15,1	52,6	19,4	45,2	01,1
16	00,9	47,3	19,3	45,2	15,1	52,6	19,4	43,4	05,0
17	00,5	45,2	19,3	45,2	15,1	52,6	19,4	43,4	02,0
18	00,9	45,0	19,3	45,2	15,1	52,6	19,4	43,0	01,7
19	00,9	45,2	16,3	45,2	15,1	52,6	21,3	43,4	01,7
20	02,5	45,2	19,3	44,6	15,1	52,6	19,4	43,4	01,7
21	00,9	43,5	19,3	45,2	16,8	52,6	19,4	43,4	01,7
22	00,9	45,2	17,7	45,2	15,1	53,5	19,4	43,4	01,7
23	01,6	45,2	19,3	45,2	15,1	52,6	19,6	43,4	01,7
24	00,9	44,3	19,3	45,2	15,1	52,6	19,4	43,6	01,7
25	00,9	45,2	19,8	45,2	15,1	52,6	19,4	43,4	01,2
26	02,6	45,2	19,3	45,2	15,1	52,6	20,5	43,4	01,7
27	00,9	42,1	19,3	45,2	15,1	52,6	19,4	45,2	01,7
28	00,9	45,2	18,6	45,2	15,1	52,6	19,4	43,4	03,5
29	03,5	45,2	19,3	45,2	15,1	52,6	19,4	44,0	01,7
30	00,9	46,5	19,3	45,2	15,1	52,6	19,4	43,4	04,3

31	01,4	45,2	19,3	45,2	15,1	52,6	19,4	43,4	02,8
32	00,9	44,5	19,3	45,2	15,1	52,6	19,4	44,8	01,7
33	00,9	45,2	17,3	45,2	15,1	52,6	22,0	43,4	01,7
34	00,9	46,8	19,3	50,0	15,1	52,6	19,4	43,4	01,7
35	03,5	45,2	19,3	45,2	18,6	52,6	19,4	43,4	01,7
36	00,9	45,2	19,0	45,2	15,1	52,2	19,4	43,4	01,7
37	00,7	45,2	19,3	45,2	15,1	52,6	20,8	43,4	01,7
38	00,9	43,6	19,3	45,2	15,1	52,6	19,4	45,0	01,7
39	00,9	45,2	20,4	45,2	15,1	52,6	19,4	43,4	02,1
40	03,6	45,2	19,3	45,2	15,1	52,6	22,9	43,4	01,7
41	00,9	43,6	19,3	45,2	15,1	52,6	19,4	42,8	01,7
42	00,9	45,2	21,1	45,2	15,1	52,6	19,4	43,4	04,0
43	02,6	45,2	19,3	45,2	15,1	52,6	19,4	46,0	01,7
44	00,9	47,3	19,3	45,2	15,1	52,6	19,4	43,4	05,0
45	00,1	45,2	19,3	44,5	15,1	52,6	20,0	43,4	01,7
46	00,9	44,0	19,3	45,2	16,8	52,6	19,4	43,9	01,7
47	00,9	45,2	18,8	45,2	15,1	54,0	19,4	43,4	03,5
48	02,3	45,2	19,3	46,8	15,1	52,6	17,8	43,4	01,7
49	00,9	47,5	19,3	45,2	18,0	52,6	19,4	40,8	01,7
50	00,9	45,2	22,0	45,2	15,1	56,4	19,4	43,4	00,2
51	00,2	45,2	19,3	48,0	15,1	52,6	22,0	43,4	01,7
52	00,9	39,5	19,3	45,2	14,1	52,6	19,4	42,1	01,7
53	00,9	45,2	15,8	45,2	15,1	50,1	19,4	43,4	04,0
54	01,9	45,2	19,3	49,1	15,1	52,6	18,0	43,4	01,7
55	00,9	46,8	19,3	45,2	16,9	52,6	19,4	40,2	01,7
56	00,9	45,2	20,8	45,2	15,1	54,1	19,4	43,4	00,5
57	00,6	45,2	19,3	44,1	15,1	52,6	17,5	43,4	01,7
58	00,9	43,0	19,3	45,2	14,1	52,6	19,4	40,9	01,7
59	00,9	45,2	18,1	45,2	15,1	51,6	19,4	43,4	01,1
60	03,8	45,2	19,3	50,1	15,1	52,6	22,6	43,4	01,7
61	00,9	47,3	19,3	45,2	18,6	52,6	19,4	44,5	01,7
62	00,9	45,2	21,8	45,2	15,1	55,4	19,4	43,4	04,9
63	00,5	45,2	19,3	44,8	15,1	52,6	16,2	43,4	01,7
64	00,9	42,1	19,3	45,2	14,8	52,6	19,4	41,8	01,7
65	00,9	45,2	17,2	45,2	15,1	51,4	19,4	43,4	00,9
66	03,9	45,2	19,3	49,1	15,1	52,6	19,4	43,4	01,7
67	00,9	45,2	19,3	45,2	16,8	52,6	19,4	46,5	01,7
68	00,9	45,2	22,0	45,2	15,1	54,8	19,4	43,4	01,7
69	00,9	45,2	19,3	44,1	15,1	52,6	23,0	43,4	01,7
70	00,9	44,3	19,3	45,2	16,0	52,6	19,4	43,4	01,7
71	00,9	45,2	19,3	45,2	15,1	57,5	19,4	43,4	02,9
72	03,1	45,2	19,3	45,2	15,1	52,6	18,0	43,4	01,7
73	00,9	43,8	19,3	45,2	15,1	52,6	19,4	46,0	01,7
74	00,9	45,2	21,4	45,2	15,1	52,6	19,4	43,4	00,7
75	00,9	45,2	19,3	47,3	15,1	52,6	21,1	43,4	01,7

76	00,9	45,2	19,3	45,2	19,1	52,6	19,4	47,3	01,7
77	00,9	45,2	19,3	45,2	15,1	54,7	19,4	43,4	05,0
78	00,9	45,2	18,1	45,2	15,1	52,6	20,5	43,4	01,7
79	00,1	45,2	19,3	45,2	15,1	52,6	19,4	43,4	02,9
80	00,9	45,2	21,3	45,2	15,1	52,6	19,4	44,4	01,7
81	02,0	45,2	20,3	59,5	15,1	56,0	18,4	44,5	01,7
82	02,0	45,2	19,4	59,0	15,1	55,5	17,4	44,5	01,7
83	02,0	45,2	18,5	58,5	15,1	55,0	16,4	44,5	01,7
84	02,0	45,2	17,6	58,0	15,1	54,9	15,4	44,5	01,7
85	02,0	45,2	16,7	57,5	15,1	54,8	14,4	44,5	01,7
86	02,0	45,2	15,8	57,0	15,1	54,7	13,5	44,5	01,7
87	02,0	45,2	14,9	56,2	15,1	54,6	12,5	44,5	01,7
88	02,0	45,2	13,8	55,4	15,1	54,5	11,4	44,5	01,7
89	02,0	45,2	12,7	54,6	15,1	54,0	10,5	44,5	01,7
90	02,0	45,2	11,8	53,8	15,1	53,8	09,4	44,5	01,7
91	02,0	45,2	10,9	52,9	15,1	53,4	08,5	44,5	01,7
92	02,0	45,2	10,0	52,0	15,1	53,0	07,3	44,5	01,7
93	02,0	45,2	09,1	51,5	15,1	52,7	06,4	44,5	01,7
94	02,0	45,2	08,2	50,6	15,1	52,7	05,5	44,5	01,7
95	02,0	45,2	07,3	49,7	15,1	52,7	04,6	44,5	01,7
96	02,0	45,2	06,4	48,8	15,1	52,7	03,4	44,5	01,7
97	02,0	45,2	05,6	47,9	15,1	52,7	02,5	44,5	01,7
98	02,0	45,2	04,8	47,0	15,1	52,7	02,5	44,5	02,0
99	02,0	45,2	03,9	46,1	15,1	52,7	02,5	44,5	02,5
100	02,0	45,2	02,9	45,8	15,1	52,7	02,5	44,5	03,0
101	02,0	45,2	02,0	45,2	15,1	52,7	02,5	44,5	03,5
102	02,8	45,2	02,0	45,0	15,1	52,7	02,5	44,5	04,0
103	03,6	45,2	02,0	44,5	15,1	52,7	02,5	44,5	04,5
104	04,4	45,2	02,0	44,0	15,1	52,7	02,5	44,5	05,0
105	05,2	45,2	02,0	43,5	15,1	52,7	02,5	44,5	05,5
106	06,0	45,2	02,0	43,0	15,1	52,7	02,5	44,5	06,0
107	06,9	45,2	02,0	42,5	15,1	52,7	02,5	44,5	06,5
108	07,6	45,2	02,0	42,0	15,1	52,7	02,5	44,5	07,0
109	08,5	45,2	02,0	41,5	15,1	52,7	02,5	44,5	07,5
110	09,4	45,2	02,0	41,0	15,1	52,7	02,5	44,5	08,0
111	10,2	45,2	02,0	40,5	15,1	52,7	02,5	44,5	08,5
112	11,2	45,2	02,0	40,0	15,1	52,7	02,5	44,5	09,1
113	12,0	45,2	02,0	40,0	15,1	53,0	02,5	44,5	09,6
114	12,8	45,2	02,0	40,0	15,1	53,4	02,5	44,5	10,2
115	13,6	45,2	02,0	40,0	15,1	53,6	02,5	44,5	10,8
116	14,4	45,2	02,0	40,0	15,1	53,8	02,5	44,5	11,4
117	15,3	45,2	02,0	40,0	15,1	54,0	02,5	44,5	11,9
118	16,5	45,2	02,0	40,0	15,1	54,5	02,5	44,5	12,5
119	17,8	45,2	02,0	40,0	15,1	55,0	02,5	44,5	13,8
120	19,0	45,2	02,0	40,0	15,1	55,5	02,5	44,5	14,8

Приклад та порядок виконання роботи

Під час виконання роботи обчислюються зрівноважені значення виміряних кутів та координат пунктів *D* і *C*, оцінюється точність зрівноважених координат і довжини сторони *DC*.

Завдання для прикладу. В результаті рівноточних вимірів отримали *n*=9 кутів β_i мережі мікротріангуляції (рис. 1). Обчислити зрівноважені значення виміряних кутів та координат пунктів *D* і *C*, оцінити точність зрівноважених координат і довжини сторони *DC*. Координати вихідних пунктів *A, O, B*, приблизні значення координат пунктів *D* і *C*, а також результати вимірів кутів мережі задано в таблицях 1.5 та 1.7. Для заданої мережі $n = 9$, $k = 4$, $r = 5$.

Таблиця 1.7 – Результати вимірів кутів

№	β_i	№	β_i	№	β_i
1	64°36′00,9″	4	55°19′45,2″	7	33°44′19,4″
2	65°53′45,2″	5	55°12′15,1″	8	103°13′43,4″
3	49°30′19,3″	6	69°27′52,6″	9	43°02′01,7″

Порядок виконання роботи.

1. Формування системи параметричних рівнянь поправок

1.1) вибір параметрів і встановлення їх приблизних значень:

Параметри	Приблизні значення параметрів (*м*)
$X_D = t_1 = t_1^\circ + \tau_1$	$t_1^\circ = 623{,}360$
$Y_D = t_2 = t_2^\circ + \tau_2$	$t_2^\circ = -1393{,}272$
$X_C = t_3 = t_3^\circ + \tau_3$	$t_3^\circ = -897{,}701$
$Y_C = t_4 = t_4^\circ + \tau_4$	$t_4^\circ = -1488{,}183$

1.2) складання параметричних рівнянь поправок. Якщо при зрівноважуванні мереж тріангуляції параметрами встановлюють невідомі координати пунктів, то параметричні рівняння зв’язку кутів та координат мають складний вигляд. Внаслідок цього висока ймовірність виникнення помилок і складання неправильних параметричних рівнянь поправок. Тому цю частину завдання доцільно розв’язувати у два етапи:

1.2.1) складання параметричних рівнянь зв’язку та рівнянь поправок до дирекційних кутів сторін (проміжний етап).

Істинне значення дирекційного кута $\overline{\alpha}$ окремої сторони виражається через параметри (координати $X_{поч}, Y_{поч}$ та $X_{кінц}, Y_{кінц}$ початкового та кінцевого пунктів сторони) параметричним рівнянням зв’язку

$$\overline{\alpha} = arctg\,\frac{Y_{кінц} - Y_{поч}}{X_{кінц} - X_{поч}} = f(X, Y)\cdot$$

Частинні похідні такого рівняння дають коефіцієнти рівняння поправок:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial X_{поч}}\right)_{\circ} = \frac{\rho}{s^{\circ}}\sin\alpha^{\circ};$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial Y_{поч}}\right)_{\circ} = -\frac{\rho}{s^{\circ}}\cos\alpha^{\circ};\left(\frac{\partial f}{\partial X_{кінц}}\right)_{\circ} = -\frac{\rho}{s^{\circ}}\sin\alpha^{\circ};\left(\frac{\partial f}{\partial Y_{кінц}}\right)_{\circ} = \frac{\rho}{s^{\circ}}\cos\alpha^{\circ}.$$

$$\alpha^{\circ} = arctg\ \frac{Y^{\circ}_{кінц} - Y^{\circ}_{поч}}{X^{\circ}_{кінц} - X^{\circ}_{поч}},\ s^{\circ} = \sqrt{(X^{\circ}_{кінц} - X^{\circ}_{поч})^2 + (Y^{\circ}_{кінц} - Y^{\circ}_{поч})^2}.$$

$$v_{\alpha} = \frac{\rho}{s^{\circ}}(\sin\alpha^{\circ}\cdot\tau_{X_{поч}} - \cos\alpha^{\circ}\cdot\tau_{Y_{поч}} - \sin\alpha^{\circ}\cdot\tau_{X_{кінц}} + \cos\alpha^{\circ}\cdot\tau_{Y_{кінц}}) + l_{\alpha}.$$

Вільний член рівняння $l_{\alpha} = f(X^{\circ}, Y^{\circ}) - \alpha = \alpha^{\circ} - \alpha$ у даному завданні не може бути обчислений, оскільки невідомий результат виміру кута α.

Параметричні рівняння зв'язку та поправок для сторін заданої мережі мають наступний вигляд:

1) сторона AD: $\alpha_1^{\circ} = 229^{\circ}30'17.8''$; $s_1^{\circ} = 1832.139\,м$;

$$\overline{\alpha}_1 = arctg\frac{Y_D - Y_A}{X_D - X_A} = arctg\frac{t_2 - Y_A}{t_1 - X_A};$$

$$v_{\alpha_1} = \frac{\rho}{s_1^{\circ}}(-\sin\alpha_1^{\circ}\cdot\tau_1 + \cos\alpha_1^{\circ}\cdot\tau_2) + l_{\alpha_1} = 86\cdot\tau_1 - 73\cdot\tau_2 + l_{\alpha_1}.$$

2) сторона OD: $\alpha_2^{\circ} = 294^{\circ}06'14.7''$; $s_2^{\circ} = 1526.363\,м$;

$$v_{\alpha_2} = \frac{\rho}{s_2^{\circ}}(-\sin\alpha_2^{\circ}\cdot\tau_1 + \cos\alpha_2^{\circ}\cdot\tau_2) + l_{\alpha_2} = 123\cdot\tau_1 + 55\cdot\tau_2 + l_{\alpha_2}.$$

3) сторона DC: $\alpha_3^{\circ} = 183^{\circ}34'13.8''$; $s_3^{\circ} = 1524.019\,м$;

$$v_{\alpha_3} = \frac{\rho}{s_3^{\circ}}(\sin\alpha_3^{\circ}\cdot\tau_1 - \cos\alpha_3^{\circ}\cdot\tau_2 - \sin\alpha_3^{\circ}\cdot\tau_3 + \cos\alpha_3^{\circ}\cdot\tau_4) + l_{\alpha_3} =$$

$$= -8\cdot\tau_1 + 135\cdot\tau_2 + 8\cdot\tau_3 - 135\cdot\tau_4 + l_{\alpha_3}.$$

4) сторона OC: $\alpha_4^{\circ} = 238^{\circ}54'02.9''$; $s_4^{\circ} = 1737.975\,м$;

$$v_{\alpha_4} = \frac{\rho}{s_4^{\circ}}(-\sin\alpha_4^{\circ}\cdot\tau_3 + \cos\alpha_4^{\circ}\cdot\tau_4) + l_{\alpha_4} = 102\cdot\tau_3 - 61\cdot\tau_4 + l_{\alpha_4}.$$

5) сторона BC: $\alpha_5^{\circ} = 281^{\circ}56'03.8''$; $s_5^{\circ} = 3046.240\,м$;

$$v_{\alpha_5} = \frac{\rho}{s_5^{\circ}}(-\sin\alpha_5^{\circ}\cdot\tau_3 + \cos\alpha_5^{\circ}\cdot\tau_4) + l_{\alpha_5} = 66\cdot\tau_3 + 14\cdot\tau_4 + l_{\alpha_5}.$$

1.2.2) складання параметричних рівнянь поправок до виміряних кутів мережі.

Поправка до результату виміру кута на пункті дорівнює різниці поправок до дирекційних кутів напрямів (сторін), які виходять з його вершини: $v = v_{\alpha_{прав}} - v_{\alpha_{лів}}$. Тому рівняння поправки до результату виміру кута дорівнює різниці рівнянь поправок до дирекційних кутів відповідних сторін.

Коефіцієнти при невідомих τ_j у заключних рівняннях обчислюються як різниці коефіцієнтів при однойменних невідомих у рівняннях поправок до дирекційних кутів. Таким чином:

$$v_1 = v_{\alpha_2} - v_{\alpha_1} = 37 \cdot \tau_1 + 128 \cdot \tau_2 + l_1;$$

$$v_2 = -v_{\alpha_2} = -123 \cdot \tau_1 - 55 \cdot \tau_2 + l_2;$$

$$v_3 = v_{\alpha_1} = 86 \cdot \tau_1 - 73 \cdot \tau_2 + l_3;$$

$$v_4 = v_{\alpha_4} - v_{\alpha_3} = 8 \cdot \tau_1 - 135 \cdot \tau_2 + 94 \cdot \tau_3 + 74 \cdot \tau_4 + l_4;$$

$$v_5 = v_{\alpha_2} - v_{\alpha_4} = 123 \cdot \tau_1 + 55 \cdot \tau_2 - 102 \cdot \tau_3 + 61 \cdot \tau_4 + l_5;$$

$$v_6 = v_{\alpha_3} - v_{\alpha_2} = -131 \cdot \tau_1 + 80 \cdot \tau_2 + 8 \cdot \tau_3 - 135 \cdot \tau_4 + l_6;$$

$$v_7 = -v_{\alpha_5} = -66 \cdot \tau_3 - 14 \cdot \tau_4 + l_7;$$

$$v_8 = v_{\alpha_4} = 102 \cdot \tau_3 - 61 \cdot \tau_4 + l_8;$$

$$v_9 = v_{\alpha_5} - v_{\alpha_4} = -36 \cdot \tau_3 + 75 \cdot \tau_4 + l_9.$$

1.3) обчислення вільних членів параметричних рівнянь поправок.

Вільний член рівняння поправки до результату виміру кута на пункті дорівнює різниці вільних членів рівнянь поправок до дирекційних кутів напрямів (сторін), які виходять з його вершини, тобто

$$l = l_{\alpha_{прав}} - l_{\alpha_{лів}} = \alpha^{\circ}_{прав} - \alpha_{прав} - (\alpha^{\circ}_{лів} - \alpha_{лів}) = \alpha^{\circ}_{прав} - \alpha^{\circ}_{лів} - \beta.$$

$l_1 = \alpha^{\circ}_2 - \alpha^{\circ}_1 - \beta_1 =$ - 4,0″; $l_2 = \alpha_{OA} - \alpha^{\circ}_2 - \beta_2 =$ 0,1″; $l_3 = \alpha^{\circ}_1 - \alpha_{AO} - \beta_3 =$ - 1,5″;
$l_4 = \alpha^{\circ}_4 - \alpha^{\circ}_3 - \beta_4 =$ 3,9″; $l_5 = \alpha^{\circ}_2 - \alpha^{\circ}_4 - \beta_5 =$ - 3,3″; $l_6 = \alpha^{\circ}_3 - (\alpha^{\circ}_2 \pm 180^{\circ}) - \beta_6 =$ 6,5″;
$l_7 = \alpha_{BO} - \alpha^{\circ}_5 - \beta_7 =$ - 3,7″; $l_8 = \alpha^{\circ}_4 - \alpha_{OB} - \beta_8 =$ 0; $l_9 = \alpha^{\circ}_5 - \alpha^{\circ}_4 - \beta_9 =$ - 0,8″,
де $\alpha_{OA} = 0^{\circ}$, $\alpha_{OB} = 135^{\circ}40'19.5''$.

Таким чином, параметричні рівняння складено у загальному вигляді. У матричній формі дана система рівнянь має вигляд $\underset{9\times1}{V} = \underset{9\times4}{A} \cdot \underset{4\times1}{\tau} + \underset{9\times1}{l}$, де

$$\underset{9\times4}{A} = \begin{pmatrix} 37 & 128 & 0 & 0 \\ -123 & -55 & 0 & 0 \\ 86 & -73 & 0 & 0 \\ 8 & -135 & 94 & 74 \\ 123 & 55 & -102 & 61 \\ -131 & 80 & 8 & -135 \\ 0 & 0 & -66 & -14 \\ 0 & 0 & 102 & -61 \\ 0 & 0 & -36 & 75 \end{pmatrix}; \qquad \underset{9\times1}{l} = \begin{pmatrix} -4.0 \\ 0.1 \\ -1.5 \\ 3.9 \\ -3.3 \\ 6.5 \\ -3.7 \\ 0 \\ -0.8 \end{pmatrix}.$$

2. Формування системи нормальних рівнянь поправок

$$\left.\begin{aligned} N_{11}\tau_1 + N_{12}\tau_2 + N_{13}\tau_3 + N_{14}\tau_4 + L_1 = 0 \\ N_{21}\tau_1 + N_{22}\tau_2 + N_{23}\tau_3 + N_{24}\tau_4 + L_2 = 0 \\ N_{31}\tau_1 + N_{32}\tau_2 + N_{33}\tau_3 + N_{34}\tau_4 + L_3 = 0 \\ N_{41}\tau_1 + N_{42}\tau_2 + N_{43}\tau_3 + N_{44}\tau_4 + L_4 = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{або} \quad \underset{4\times4}{N}\cdot\underset{4\times1}{\tau} + \underset{4\times1}{L} = 0 .$$

$$\underset{4\times4}{N} = \underset{4\times9}{A^T}\cdot\underset{9\times4}{A}\ ,\ \ \underset{4\times1}{L} = \underset{4\times9}{A^T}\cdot\underset{9\times1}{l}\ :$$

$$\underset{4\times4}{N} = \begin{pmatrix} 56248 & 428 & -12842 & 25780 \\ 428 & 52388 & -17660 & -17435 \\ -12842 & -17660 & 35360 & -8344 \\ 25780 & -17435 & -8344 & 36964 \end{pmatrix}; \qquad \underset{4\times1}{L} = \begin{pmatrix} -1515.5 \\ -596.0 \\ 1028.2 \\ -798.4 \end{pmatrix}.$$

Система нормальних рівнянь поправок має вигляд

$$\begin{pmatrix} 56248 & 428 & -12842 & 25780 \\ 428 & 52388 & -17660 & -17435 \\ -12842 & -17660 & 35360 & -8344 \\ 25780 & -17435 & -8344 & 36964 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ \tau_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1515.5 \\ -596.0 \\ 1028.2 \\ -798.4 \end{pmatrix} = 0 .$$

3. Розв'язування системи нормальних рівнянь поправок

Розв'язування системи нормальних рівнянь здійснюється за формулою $\underset{4\times1}{\tau} = -\underset{4\times4}{Q}\cdot\underset{4\times1}{L}$, де $\underset{4\times4}{Q} = \underset{4\times4}{N}^{-1}$:

$$\underset{4\times4}{Q} = \begin{pmatrix} 289 & -77 & 11 & -235 \\ -77 & 351 & 210 & 267 \\ 11 & 210 & 437 & 190 \\ -235 & 267 & 190 & 603 \end{pmatrix} \times 10^{-7};$$

$$\underset{4\times1}{\tau} = -\begin{pmatrix} 289 & -77 & 11 & -235 \\ -77 & 351 & 210 & 267 \\ 11 & 210 & 437 & 190 \\ -235 & 267 & 190 & 603 \end{pmatrix} \times 10^{-7} \times \begin{pmatrix} -1515.5 \\ -596.0 \\ 1028.2 \\ -798.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.019262 \\ 0.008942 \\ -0.015521 \\ 0.008880 \end{pmatrix}.$$

Контроль розв'язку:

1) $\underset{4\times4}{N}\cdot\underset{4\times4}{Q} = \underset{4\times4}{E}$:

$$\begin{pmatrix} 56248 & 428 & -12842 & 25780 \\ 428 & 52388 & -17660 & -17435 \\ -12842 & -17660 & 35360 & -8344 \\ 25780 & -17435 & -8344 & 36964 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 289 & -77 & 11 & -235 \\ -77 & 351 & 210 & 267 \\ 11 & 210 & 437 & 190 \\ -235 & 267 & 190 & 603 \end{pmatrix} \times 10^{-7} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

2) $\underset{4\times4}{N}\cdot\underset{4\times1}{\tau}+\underset{4\times1}{L}=0$:

$$\begin{pmatrix} 56248 & 428 & -12842 & 25780 \\ 428 & 52388 & -17660 & -17435 \\ -12842 & -17660 & 35360 & -8344 \\ 25780 & -17435 & -8344 & 36964 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 0.019262 \\ 0.008942 \\ -0.015521 \\ 0.008880 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1515.5 \\ -596.0 \\ 1028.2 \\ -798.4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0.023234 \\ -0.024308 \\ 0.004396 \\ 0.018134 \end{pmatrix}.$$

4. Обчислення зрівноважених значень виміряних кутів та координат пунктів

4.1) обчислення поправок до виміряних кутів $\underset{9\times1}{V}=\underset{9\times4}{A}\cdot\underset{4\times1}{\tau}+\underset{9\times1}{l}$:

$$\underset{9\times1}{V}=\begin{pmatrix} 37 & 128 & 0 & 0 \\ -123 & -55 & 0 & 0 \\ 86 & -73 & 0 & 0 \\ 8 & -135 & 94 & 74 \\ 123 & 55 & -102 & 61 \\ -131 & 80 & 8 & -135 \\ 0 & 0 & -66 & -14 \\ 0 & 0 & 102 & -61 \\ 0 & 0 & -36 & 75 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 0.019262 \\ 0.008942 \\ -0.015521 \\ 0.008880 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -4.0 \\ 0.1 \\ -1.5 \\ 3.9 \\ -3.3 \\ 6.5 \\ -3.7 \\ 0 \\ -0.8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2.1427 \\ -2.7610 \\ -0.4963 \\ 2.0450 \\ 1.6858 \\ 3.3692 \\ -2.7999 \\ -2.1248 \\ 0.4248 \end{pmatrix}.$$

4.2) обчислення зрівноважених значень виміряних кутів $\underset{9\times1}{\widetilde{\beta}}=\underset{9\times1}{\beta}+\underset{9\times1}{V}$:

$$\underset{9\times1}{\widetilde{\beta}}=\begin{pmatrix} 64^\circ36'00.9'' \\ 65^\circ53'45.2'' \\ 49^\circ30'19.3'' \\ 55^\circ19'45.2'' \\ 55^\circ12'15.1'' \\ 69^\circ27'52.6'' \\ 33^\circ44'19.4'' \\ 103^\circ13'43.4'' \\ 43^\circ02'01.7'' \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2.1'' \\ -2.8'' \\ -0.5'' \\ 2.0'' \\ 1.7'' \\ 3.4'' \\ -2.8'' \\ -2.1'' \\ 0.4'' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 64^\circ35'58.8'' \\ 65^\circ53'42.4'' \\ 49^\circ30'18.8'' \\ 55^\circ19'47.2'' \\ 55^\circ12'16.8'' \\ 69^\circ27'56.0'' \\ 33^\circ44'16.6'' \\ 103^\circ13'41.3'' \\ 43^\circ02'02.1'' \end{pmatrix}.$$

4.3) обчислення зрівноважених значень параметрів $\underset{4\times1}{t}=\underset{4\times1}{t^\circ}+\underset{4\times1}{\tau}$:

$$\underset{4\times1}{t}=\begin{pmatrix} 623.360 \\ -1393.272 \\ -897.701 \\ -1488.183 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0.0193 \\ 0.0089 \\ -0.0155 \\ 0.0089 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 623.3793 \\ -1393.2631 \\ -897.7165 \\ -1488.1741 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} X_D \\ Y_D \\ X_C \\ Y_C \end{pmatrix}.$$

5. Оцінка точності за результатами зрівноважування

5.1) обчислення середньої квадратичної похибки результату виміру кута за формулою Бесселя $m = \sqrt{\dfrac{[v^2]}{n-k}}$, де $[v^2] = \underset{1\times 9}{V^T} \cdot \underset{9\times 1}{V} = 43{,}3708$: $m = \pm\, 2{,}9\,''$.

5.2) оцінка точності параметрів (зрівноважених значень координат пунктів).

Середня квадратична похибка будь-якої оцінюваної величини за результатами зрівноважування рівноточних результатів вимірів виражається похибкою результатів вимірів та вагою оцінюваної величини.

Обернені ваги параметрів дорівнюють діагональним елементам вагової матриці $\underset{k\times k}{Q}$ з відповідними індексами j. Інші елементи матриці виражають залежність між зрівноваженими значеннями параметрів.

Загалом результатом оцінки точності параметрів є визначення кореляційної матриці $\underset{k\times k}{M^2} = m^2 \cdot \underset{k\times k}{Q}$ та коефіцієнтів кореляції $r_{ij} = \dfrac{Q_{ij}}{\sqrt{Q_{ii}Q_{jj}}}$ між потрібними параметрами t_i та t_j.

Для даного завдання

$$\underset{4\times 4}{M^2} = 8.6742 \times \begin{pmatrix} 289 & -77 & 11 & -235 \\ -77 & 351 & 210 & 267 \\ 11 & 210 & 437 & 190 \\ -235 & 267 & 190 & 603 \end{pmatrix} \times 10^{-7} = = \begin{pmatrix} 2.50 & -0.67 & 0.09 & -2.04 \\ -0.67 & 3.05 & 1.83 & 2.31 \\ 0.09 & 1.83 & 3.79 & 1.65 \\ -2.04 & 2.31 & 1.65 & 5.23 \end{pmatrix} \times 10^{-4}.$$

На головній діагоналі матриці розташовані значення квадратів похибок параметрів з відповідними індексами.

Середні квадратичні похибки параметрів:

$$M_{t_1} = M_{X_D} = \pm\, 0{,}0158\ м; \qquad M_{t_2} = M_{Y_D} = \pm\, 0{,}0175\ м;$$
$$M_{t_3} = M_{X_C} = \pm\, 0{,}0195\ м; \qquad M_{t_4} = M_{Y_C} = \pm\, 0{,}0229\ м.$$

5.3) оцінка точності функцій параметрів (довжини сторони *DC*).

Обернена вага функції $F(t_1, t_2, t_3, t_4) = \sqrt{(t_3 - t_1)^2 + (t_4 - t_2)^2} = \widetilde{S}_{DC}$ виражається формулою $\dfrac{1}{P_F} = \underset{1\times 4}{F} \cdot \underset{4\times 4}{Q} \cdot \underset{4\times 1}{F^T}$, де матриця $\underset{1\times 4}{F} = \begin{pmatrix} F_1 & F_2 & F_3 & F_4 \end{pmatrix}$ утворена значеннями частинних похідних $F_j = \left(\dfrac{\partial F}{\partial t_j}\right)_{\circ}$:

$$\frac{1}{P_F} = (0.998059 \quad 0.062277 \quad -0.998059 \quad -0.062277) \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 289 & -77 & 11 & -235 \\ -77 & 351 & 210 & 267 \\ 11 & 210 & 437 & 190 \\ -235 & 267 & 190 & 603 \end{pmatrix} \times 10^{-7} \times \begin{pmatrix} 0.998059 \\ 0.062277 \\ -0.998059 \\ -0.062277 \end{pmatrix} = 0.000072 \, .$$

Середня квадратична похибка функції

$$M_F = m\sqrt{\frac{1}{P_F}} = \pm 0{,}025 \; (\, м \,) \;\; і \;\; \widetilde{S}_{DC} = 1524{,}054 \pm 0{,}025 \; (\, м \,).$$

Завдання 3.2 Зрівноважування результатів вимірів корелатним способом

Основні теоретичні положення

Корелатним способом зрівноважування за принципом найменших квадратів називають спосіб знаходження мінімуму функції $[pv^2]$ методом Лагранжа із застосуванням допоміжних множників незалежних умовних рівнянь.

Основні теоретичні положення зрівноважування результатів вимірів у геодезичних мережах, опираючись на загальну теорію корелатного способу викладено у «Методичних вказівках до виконання самостійних та практичних робіт з дисципліни «Математична обробка геодезичних вимірів» Розділ 3. Метод найменших квадратів. Зрівноважування результатів вимірів корелатним способом. 05-04-33. О.А.Тадєєв, Т.І.Дець, Рівне: НУВГП, 2014. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://ep3.nuwm.edu.ua/5498/.

В даних методичних вказівках нами буде викладено черговість дій та рекомендації для виконання завдання розрахунково-графічної роботи.

Завдання 3.2. В результаті рівноточних вимірів отримали n=9 кутів β_i мережі мікротріангуляції (рисунок 1). Розрахувати зрівноважені значення виміряних кутів та оцінити точність довжини сторони DC. $\angle BOA = 224^\circ 19' 40{,}5''$. $\lg b_1 = 3{,}2584263$. $\lg b_2 = 3{,}3295004$.

Вихідні дані. Схему мережі та вихідні дані для виконання завдання № 3.2 приведено в завданні № 3.1 (таблиці 1.5 та 1.6).

Черговість виконання завдання.

1. Складання і формування системи умовних рівнянь поправок.
2. Складання вагових функцій.
3. Розрахунок коефіцієнтів нормальних рівнянь корелат і коефіцієнтів вагових функцій. Формування системи нормальних рівнянь корелат.
4. Розв’язування системи нормальних рівнянь корелат.

5. Формування системи корелатних рівнянь поправок та розрахунок поправок до результатів вимірів.
6. Розрахунок зрівноважених результатів вимірів.
7. Контроль зрівноважування.
8. Оцінка точності за результатами зрівноважування.

Приклад та порядок виконання роботи

Під час виконання завдання обчислюються зрівноважені значення виміряних кутів та оцінити точність довжини сторони DC.

Завдання для прикладу. В результаті рівноточних вимірів отримали n=9 кутів β_i мережі мікротріангуляції (рисунок 1). Обчислити зрівноважені значення виміряних кутів, оцінити точність довжини сторони DC. Координати вихідних пунктів А, О, В, приблизні значення координат пунктів D і С, а також результати вимірів кутів мережі задано в таблицях 1.5 та 1.7. $\angle BOA = 224^\circ 19' 40{,}5''$. $\lg b_1 = 3{,}2584263$. $\lg b_2 = 3{,}3295004$.

Порядок виконання роботи.

1. Формування системи умовних рівнянь поправок

У мережі проведено $n = 9$ вимірів кутів. Серед них число необхідних вимірів $k = 4$, число надлишкових вимірів $r = 5$. Тому тут потрібно складати п'ять умовних рівнянь, у тому числі чотири кутових (три рівняння фігур і рівняння твердого кута) і одне базисне умовне рівняння.

1.1) умовні рівняння фігур складаємо окремо для кожного трикутника мережі мікротріангуляції:

№ кутів	Результати вимірів кутів	Умовні рівняння поправок
1	64° 36′ 00.9″	
2	65° 53′ 45.2″	
3	49° 30′ 19.3″	$v_1 + v_2 + v_3 + 5.4'' = 0$
Σ	180° 00′ 05.4″	
W_1	5.4″	
4	55° 19′ 45.2″	
5	55° 12′ 15.1″	
6	69° 27′ 52.6″	$v_4 + v_5 + v_6 - 7.1'' = 0$
Σ	179° 59′ 52.9″	
W_2	-7.1″	
7	33° 44′ 19.4″	
8	103° 13′ 43.4″	
9	43° 02′ 01.7″	$v_7 + v_8 + v_9 + 4.5'' = 0$
Σ	180° 00′ 04.5″	
W_3	4.5″	

1.2) умовне рівняння твердого кута складаємо для суми кутів, вставлених між вихідними сторонами *OA* і *OB*. Значення твердого кута $\angle AOB$ виражається різницею дирекційних кутів вихідних сторін, обчислених з рішення оберненої геодезичної задачі за координатами вихідних пунктів.

№ кутів	Результати вимірів кутів	Умовне рівняння поправок
2	65° 53′ 45.2″	
5	55° 12′ 15.1″	
8	103° 13′ 43.4″	
$\sum$	224° 19′ 43.7″	$v_2 + v_5 + v_8 + 3.2'' = 0$
$\angle AOB$	224° 19′ 40.5″	
W_4	3.2″	

1.3) базисне умовне рівняння. Якщо встановити напрям ходової лінії b_1-*OD-OC*-b_2, то, згідно правила запису базисного рівняння, одержимо:

$$a_3 v_3 + a_6 v_6 + a_9 v_9 - a_1 v_1 - a_4 v_4 - a_7 v_7 + W_5 = 0,$$

де коефіцієнти $a_i = ctg\beta_i$, а нев'язка обчислюється за формулою

$$W_5 = \frac{b_1}{b_2} \cdot \frac{\sin\beta_3 \cdot \sin\beta_6 \cdot \sin\beta_9}{\sin\beta_1 \cdot \sin\beta_4 \cdot \sin\beta_7} - 1.$$

Довжини базисів b_1 і b_2 установлюються з рішення оберненої геодезичної задачі за координатами вихідних пунктів.

№ кутів	β_i	$\sin\beta_i$	a_i	№ кутів	β_i	$\sin\beta_i$	a_i
3	49°30′19.3″	0.76046673	0.85	1	64°36′00.9″	0.90333716	0.47
6	69°27′52.6″	0.93645570	0.37	4	55°19′45.2″	0.82243428	0.69
9	43°02′01.7″	0.68242975	1.07	7	33°44′19.4″	0.55540656	1.50
	b_1	1813.119			b_2	2135.504	
	$b_1 \sin\beta_3 \sin\beta_6 \sin\beta_9$	881.154			$b_2 \sin\beta_1 \sin\beta_4 \sin\beta_7$	881.176	
$W_5 \cdot \rho'' =$ -5.1″							

Отже, базисне рівняння має вигляд

$$0.85 \cdot v_3 + 0.37 \cdot v_6 + 1.07 \cdot v_9 - 0.47 \cdot v_1 - 0.69 \cdot v_4 - 1.50 \cdot v_7 - 5.1'' = 0.$$

Враховуючи складені п'ять умовних рівнянь поправок, які виникають у заданій мережі, у матричній формі згідно форми $\underset{r\times n}{A} \cdot \underset{n\times 1}{V} + \underset{r\times 1}{W} = 0$ їх можна записати у такому вигляді:

$$\left.\begin{array}{l} v_1 + v_2 + v_3 + 5.4 = 0 \\ v_4 + v_5 + v_6 - 7.1 = 0 \\ v_7 + v_8 + v_9 + 4.5 = 0 \\ v_2 + v_5 + v_8 + 3.2 = 0 \\ -0.47 \cdot v_1 + 0.85 \cdot v_3 - 0.69 \cdot v_4 + 0.37 \cdot v_6 - 1.5 \cdot v_7 + 1.07 \cdot v_9 - 5.1 = 0 \end{array}\right\} = \underset{5\times 9}{A} \cdot \underset{9\times 1}{V} + \underset{5\times 1}{W} = 0.$$

Матриці $\underset{5\times 9}{A}$ і $\underset{5\times 1}{W}$ містять коефіцієнти та нев'язки умовних рівнянь:

$$\underset{5\times 9}{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -0.47 & 0 & 0.85 & -0.69 & 0 & 0.37 & -1.5 & 0 & 1.07 \end{pmatrix}; \quad \underset{5\times 1}{W} = \begin{pmatrix} 5.4 \\ -7.1 \\ 4.5 \\ 3.2 \\ -5.1 \end{pmatrix}.$$

2. Формування системи нормальних рівнянь корелат

Система нормальних рівнянь корелат $\underset{r\times r}{N} \cdot \underset{r\times 1}{K} + \underset{r\times 1}{W} = 0$ при зрівноважуванні рівноточних вимірів має вигляд: $\underset{5\times 5}{N} \cdot \underset{5\times 1}{K} + \underset{5\times 1}{W} = \underset{5\times 9}{A} \cdot \underset{9\times 5}{A^T} \cdot \underset{5\times 1}{K} + \underset{5\times 1}{W} = 0$.

Тож після перемноження матриць $\underset{5\times 9}{A}$ та $\underset{9\times 5}{A^T}$ одержимо

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 & 0.38 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & -0.32 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -0.43 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0.38 & -0.32 & -0.43 & 0 & 4.9513 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \\ k_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5.4 \\ -7.1 \\ 4.5 \\ 3.2 \\ -5.1 \end{pmatrix} = 0$$

або в розгорнутому вигляді

$$\left.\begin{array}{l} 3 \cdot k_1 + k_4 + 0.38 \cdot k_5 + 5.4 = 0 \\ 3 \cdot k_2 + k_4 - 0.32 \cdot k_5 - 7.1 = 0 \\ 3 \cdot k_3 + k_4 - 0.43 \cdot k_5 + 4.5 = 0 \\ k_1 + k_2 + k_3 + 3 \cdot k_4 + 3.2 = 0 \\ 0.38 \cdot k_1 - 0.32 \cdot k_2 - 0.43 \cdot k_3 + 4.9513 \cdot k_5 - 5.1 = 0 \end{array}\right\}.$$

3. Розв'язування системи нормальних рівнянь корелат

Невідомі корелати k_j виражає формула $\underset{5\times 1}{K} = -\underset{5\times 5}{Q} \cdot \underset{5\times 1}{W}$.

Обернена матриця

$$\underset{5\times5}{Q} = \underset{5\times5}{N}^{-1} = \begin{pmatrix} 0.39123 & 0.05274 & 0.05193 & -0.16530 & -0.02211 \\ 0.05274 & 0.39226 & 0.05990 & -0.16830 & 0.02651 \\ 0.05193 & 0.05990 & 0.39448 & -0.16877 & 0.03414 \\ -0.16530 & -0.16830 & -0.16877 & 0.50079 & -0.01285 \\ -0.02211 & 0.02651 & 0.03414 & -0.01285 & 0.20834 \end{pmatrix}$$ забезпечує

результат розв'язку $\underset{5\times1}{K} = \begin{pmatrix} -1,55567 \\ 2,90444 \\ -0,91612 \\ -1,21088 \\ 1,25758 \end{pmatrix}$.

Контроль розв'язку: 1) $\underset{5\times5}{N} \cdot \underset{5\times5}{Q} = \underset{5\times5}{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $\underset{5\times5}{N} \cdot \underset{5\times1}{K} + \underset{5\times1}{W} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

4. Обчислення зрівноважених значень виміряних кутів

4.1) обчислення поправок до виміряних кутів за корелатними рівняннями поправок $\underset{9\times1}{V} = \underset{9\times5}{A^T} \cdot \underset{5\times1}{K}$:

$$\underset{9\times1}{V} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -0.47 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0.85 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -0.69 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0.37 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1.50 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1.07 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1,55567 \\ 2,90444 \\ -0,91612 \\ -1,21088 \\ 1,25758 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.1 \\ -2.8 \\ -0.5 \\ 2.0 \\ 1.7 \\ 3.4 \\ -2.8 \\ -2.1 \\ 0.4 \end{pmatrix}.$$

4.2) обчислення зрівноважених значень виміряних кутів $\underset{9\times1}{\tilde{\beta}} = \underset{9\times1}{\beta} + \underset{9\times1}{V}$:

$$\underset{9\times1}{\tilde{\beta}} = \begin{pmatrix} 64^\circ36'00.9'' \\ 65^\circ53'45.2'' \\ 49^\circ30'19.3'' \\ 55^\circ19'45.2'' \\ 55^\circ12'15.1'' \\ 69^\circ27'52.6'' \\ 33^\circ44'19.4'' \\ 103^\circ13'43.4'' \\ 43^\circ02'01.7'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2.1'' \\ -2.8'' \\ -0.5'' \\ 2.0'' \\ 1.7'' \\ 3.4'' \\ -2.8'' \\ -2.1'' \\ 0.4'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 64^\circ35'58.8'' \\ 65^\circ53'42.4'' \\ 49^\circ30'18.8'' \\ 55^\circ19'47.2'' \\ 55^\circ12'16.8'' \\ 69^\circ27'56.0'' \\ 33^\circ44'16.6'' \\ 103^\circ13'41.3'' \\ 43^\circ02'02.1'' \end{pmatrix}.$$

4.3) контроль зрівноважування виконується обчисленням нев'язок умовних рівнянь за зрівноваженими кутами (див. попередній приклад).

5. Оцінка точності за результатами зрівноважування

5.1) обчислення середньої квадратичної похибки результату виміру кута за формулою Бесселя: $m = \sqrt{\dfrac{[v^2]}{n-k}}$,

де $[v^2] = \underset{1\times 9}{V}^T \cdot \underset{9\times 1}{V} = 43{,}4331$: $m = \pm 2{,}9''$.

5.2) оцінимо точність зрівноважених кутів $\tilde{\beta}_i$ і довжини сторони *DC*. Значення частинних похідних $F_{ji} = \left(\dfrac{\partial F_j}{\partial \beta_i}\right)_\circ$ функцій $F_j\left(\tilde{\beta}_1,\ldots,\tilde{\beta}_n\right) = \tilde{\beta}_j$, які виражають зрівноважені кути, формують одиничну матрицю: $\underset{9\times 9}{F} = \underset{9\times 9}{E}$. Номер рядка *j* такої матриці дорівнює номеру оцінюваного кута.

Зрівноважуванню підлягали рівноточні виміри, тому оцінка точності їх кінцевих значень повинна здійснюватись за формулами

$$\underset{n\times n}{Q_{\tilde{x}}} = \underset{n\times n}{E} - \underset{n\times r}{A^T} \cdot \underset{r\times r}{Q} \cdot \underset{r\times n}{A} \text{ і } \underset{n\times n}{M_{\tilde{x}}^2} = m^2 \underset{n\times n}{Q_{\tilde{x}}}.$$

Однак за поставленої умови задачі оцінку кутів $\tilde{\beta}_i$ зручно виконувати разом з оцінкою довжини s_{DC}. Задана довжина сторони виражається функцією зрівноважених кутів $s_{DC} = F\left(\tilde{\beta}_1,\ldots,\tilde{\beta}_n\right) = b_1 \dfrac{\sin\tilde{\beta}_3 \cdot \sin\tilde{\beta}_5}{\sin\tilde{\beta}_1 \cdot \sin\tilde{\beta}_4}$, а значення її частинних похідних $F_i = \left(\dfrac{\partial F}{\partial \beta_i}\right)_\circ$, які вже встановлені раніше, формують додатковий рядок одиничної матриці $\underset{9\times 9}{F} = \underset{9\times 9}{E}$. Тож у підсумку маємо матрицю частинних похідних усіх оцінюваних функцій:

$$\underset{10\times 9}{F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -720 & 0 & 1300 & -1050 & 1060 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вагову матрицю сукупності оцінюваних величин виражає формула

$$\underset{10\times10}{Q_F} = \underset{10\times9}{F} \cdot \underset{9\times10}{F^T} - \underset{10\times9}{F} \cdot \underset{9\times5}{A^T} \cdot \underset{5\times5}{Q} \cdot \underset{5\times9}{A} \cdot \underset{9\times10}{F^T} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0.542 & -0.242 & -0.300 & -0.123 & 0.119 & 0.004 & -0.216 & 0.123 & 0.093 & -524.315 \\ -0.242 & 0.439 & -0.196 & 0.091 & -0.220 & 0.128 & 0.064 & -0.219 & 0.154 & -409.723 \\ -0.300 & -0.196 & 0.496 & 0.032 & 0.101 & -0.133 & 0.152 & 0.095 & -0.247 & 934.039 \\ -0.123 & 0.091 & 0.032 & 0.545 & -0.215 & -0.331 & -0.212 & 0.123 & 0.089 & -669.989 \\ 0.119 & -0.220 & 0.101 & -0.215 & 0.444 & -0.229 & 0.129 & -0.224 & 0.094 & 740.996 \\ 0.004 & 0.128 & -0.133 & -0.331 & -0.229 & 0.560 & 0.083 & 0.101 & -0.183 & -71.007 \\ -0.216 & 0.064 & 0.152 & -0.212 & 0.129 & 0.083 & 0.239 & -0.194 & -0.045 & 712.390 \\ 0.123 & -0.219 & 0.095 & 0.123 & -0.224 & 0.101 & -0.194 & 0.442 & -0.249 & -331.272 \\ 0.093 & 0.154 & -0.247 & 0.089 & 0.094 & -0.183 & -0.045 & -0.249 & 0.294 & -381.118 \\ -524.315 & -409.723 & 934.039 & -669.989 & 740.996 & -71.007 & 712.390 & -331.272 & -381.118 & 3080700.889 \end{pmatrix}$$

Точність оцінюваних величин визначає кореляційна матриця

$$\underset{10\times10}{M_F^2} = m^2 \cdot \underset{10\times10}{Q_F} \; .$$

Приймаючи до уваги, що на головній діагоналі вагової матриці $\underset{10\times10}{Q_F}$ містяться обернені ваги $\frac{1}{P_{F_j}}$, середні квадратичні похибки потрібних величин можна виражати окремо за формулою $M = m\sqrt{\frac{1}{P}}$, де m – середня квадратична похибка рівноточних вимірів.

Наприклад,

$$M_{\tilde{\beta}_1} = m\sqrt{\frac{1}{P_{F_1}}} = 2.9''\sqrt{0.542} = \pm 2.2'';$$

$$M_{\tilde{\beta}_2} = m\sqrt{\frac{1}{P_{F_2}}} = 2.9''\sqrt{0.439} = \pm 2.0'';$$

$$M_S = \frac{m}{\rho''}\sqrt{\frac{1}{P_{F_{10}}}} = \frac{2.9''}{206265''}\sqrt{3080700.889} = \pm 0.025 \;(\text{м}).$$

Тісноту залежності між оцінюваними величинами виражає коефіцієнт кореляції. Наприклад, для перших двох зрівноважених кутів

$$r_{\tilde{\beta}_1\tilde{\beta}_2} = \frac{Q_{F_{12}}}{\sqrt{\frac{1}{P_{F_1}} \cdot \frac{1}{P_{F_2}}}} = \frac{-0.242}{\sqrt{0.542 \times 0.439}} = -0.5. \cdot$$

ДОДАТКИ

Додаток 1

Значення параметру розподілу Стьюдента t_β залежно від β та n-1

n-1 \ β	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95	0.98	0.99	0.999
1	0.158	0.325	0.510	0.727	1.000	1.376	1.963	3.08	6.31	12.71	31.8	63.7	636.6
2	142	289	445	617	0.816	1.061	336	1.886	2.92	4.30	6.96	9.92	31.6
3	137	277	424	584	765	0.978	250	638	2.35	3.18	4.54	5.84	12.94
4	134	271	414	569	741	941	190	533	2.13	2.77	3.75	4.60	8.61
5	132	267	408	559	727	920	156	476	2.02	57	3.36	4.03	6.86
6	132	265	404	553	718	906	134	440	1.943	45	3.14	3.71	5.96
7	130	263	402	549	711	896	119	415	895	36	3.00	50	5.40
8	130	262	399	546	706	889	108	397	860	31	2.90	36	5.04
9	129	261	398	543	703	883	100	383	833	26	82	25	4.78
10	129	260	397	542	700	879	093	372	812	23	76	17	4.59
11	0.129	0.260	0.396	0.540	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.20	2.72	3.11	4.49
12	128	259	395	539	695	873	083	356	782	18	68	3.06	32
13	128	259	394	538	694	870	079	350	771	16	65	3.01	22
14	128	258	393	537	692	868	076	345	761	14	62	2.98	14
15	128	258	393	536	691	866	074	341	753	13	60	95	07
16	128	258	392	535	690	865	071	337	746	12	58	92	4.02
17	128	257	392	534	689	863	069	333	740	11	57	90	3.96
18	127	257	392	534	688	862	067	330	734	10	55	88	92
19	127	257	391	533	688	861	066	328	729	09	54	86	88
20	127	257	391	533	687	860	064	325	725	09	53	84	85
21	0.127	0.257	0.391	0.532	0.686	0.859	1.063	1.323	1.721	2.08	2.52	2.83	3.82
22	127	256	390	532	686	858	061	321	717	07	51	82	79
23	127	256	390	532	685	858	060	319	714	07	50	81	77
24	127	256	390	531	685	857	059	318	711	06	49	80	74
25	127	256	390	531	684	856	058	316	708	06	48	79	72
26	127	256	390	531	684	856	058	315	706	06	48	78	71
27	127	256	389	531	684	855	057	314	703	05	47	77	69
28	127	256	389	530	683	855	056	313	701	05	47	76	67
29	127	256	389	530	683	854	055	311	699	04	46	76	66
30	127	256	389	530	683	854	055	310	697	04	46	75	65
40	0.126	0.255	0.388	0.529	0.681	0.851	1.050	1.303	1.684	2.02	2.42	2.70	3.55
60	126	254	387	527	679	848	046	296	671	2.00	39	66	46
120	126	254	386	526	677	845	041	289	658	1.98	36	62	37
∞	0.126	0.253	0.385	0.524	0.674	0.842	1.036	1.282	1.645	1.96	2.33	2.58	3.29

Додаток 2

Значення нормальної функції розподілу $\Phi^*(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{t} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

t	$\Phi^*(t)$	t	$\Phi^*(t)$	t	$\Phi^*(t)$	t	$\Phi^*(t)$	t	$\Phi^*(t)$	t	$\Phi^*(t)$
0.00	0.5000	0.40	0.6554	0.80	0.7881	1.20	0.8849	1.60	0.9452	2.00	0.9772
0.01	5040	0.41	6591	0.81	7910	1.21	8869	1.61	9463	2.10	9821
0.02	5080	0.42	6628	0.82	7939	1.22	8888	1.62	9474	2.20	9861
0.03	5120	0.43	6664	0.83	7967	1.23	8907	1.63	9484	2.30	9893
0.04	5160	0.44	6700	0.84	7995	1.24	8925	1.64	9495	2.40	9918
0.05	5199	0.45	6736	0.85	8023	1.25	8944	1.65	9505	2.50	9938
0.06	5239	0.46	6772	0.86	8051	1.26	8962	1.66	9515	2.60	9953
0.07	5279	0.47	6808	0.87	8078	1.27	8980	1.67	9525	2.70	9965
0.08	5319	0.48	6844	0.88	8106	1.28	8997	1.68	9535	2.80	9974
0.09	5359	0.49	6879	0.89	8133	1.29	9015	1.69	9545	2.90	9981
0.10	0.5398	0.50	0.6915	0.90	0.8159	1.30	0.9032	1.70	0.9554	3.00	0.9986
0.11	5438	0.51	6950	0.91	8186	1.31	9049	1.71	9564	3.10	9990
0.12	5478	0.52	6985	0.92	8212	1.32	9066	1.72	9573	3.20	9993
0.13	5517	0.53	7019	0.93	8238	1.33	9082	1.73	9582	3.30	9995
0.14	5557	0.54	7054	0.94	8264	1.34	9099	1.74	9591	3.40	9997
0.15	5596	0.55	7088	0.95	8289	1.35	9115	1.75	9599	3.50	9998
0.16	5636	0.56	7123	0.96	8315	1.36	9131	1.76	9608	3.60	9998
0.17	5675	0.57	7157	0.97	8340	1.37	9147	1.77	9616	3.70	9999
0.18	5714	0.58	7190	0.98	8365	1.38	9162	1.78	9625	3.80	0.9999
0.19	5753	0.59	7224	0.99	8389	1.39	9177	1.79	9633	3.90	1.0000
0.20	0.5793	0.60	0.7257	1.00	0.8413	1.40	0.9192	1.80	0.9641		
0.21	5832	0.61	7291	1.01	8437	1.41	9207	1.81	9649		
0.22	5871	0.62	7324	1.02	8461	1.42	9222	1.82	9656		
0.23	5910	0.63	7357	1.03	8485	1.43	9236	1.83	9664		
0.24	5948	0.64	7389	1.04	8508	1.44	9251	1.84	9671		
0.25	5987	0.65	7422	1.05	8531	1.45	9265	1.85	9678		
0.26	6026	0.66	7454	1.06	8554	1.46	9279	1.86	9686		
0.27	6064	0.67	7486	1.07	8577	1.47	9292	1.87	9693		
0.28	6103	0.68	7517	1.08	8599	1.48	9306	1.88	9699		
0.29	6141	0.69	7549	1.09	8621	1.49	9319	1.89	9706		
0.30	0.6179	0.70	0.7580	1.10	0.8643	1.50	0.9332	1.90	0.9713		
0.31	6217	0.71	7611	1.11	8665	1.51	9345	1.91	9719		
0.32	6255	0.72	7642	1.12	8686	1.52	9357	1.92	9726		
0.33	6293	0.73	7673	1.13	8708	1.53	9370	1.93	9732		
0.34	6331	0.74	7703	1.14	8729	1.54	9382	1.94	9738		
0.35	6368	0.75	7734	1.15	8749	1.55	9394	1.95	9744		
0.36	6406	0.76	7764	1.16	8770	1.56	9406	1.96	9750		
0.37	6443	0.77	7794	1.17	8790	1.57	9418	1.97	9756		
0.38	6480	0.78	7823	1.18	8810	1.58	9429	1.98	9761		
0.39	0.6517	0.79	0.7852	1.19	0.8830	1.59	0.9441	1.99	0.9767		

Національний університет
водного господарства
та природокористування

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Большаков В.Д., Маркузе Ю.И. Практикум по теории математической обработки геодезических измерений. Навч. посібник. – М.: Недра, 1984. – 352с.
2. Большаков В.Д. Теория ошибок наблюдений. Підручник. – М.: Недра, 1983. – 223с.
3. Войтенко С.П. Математична обробка геодезичних вимірів. Теорія похибок вимірів: Посібник. – Київ: КНУБА, 2003. – 216с.
4. Войтенко С.П. Математична обробка геодезичних вимірів. Метод найменших квадратів. Навч. посібник. – К.: КНУБА, 2005. – 236 с.
5. Зазуляк П.М., Гавриш В.І., Євсєєва Е.М., Йосипчук М.Д. Основи математичного опрацювання геодезичних вимірювань. Підручник. – Львів: Растр-7, 2007. – 408 с.
6. Мазмишвили А.И. Способ наименьших квадратов. Навч. посібник. – Москва: Недра, 1968. – 437с.
7. Методичні вказівки до виконання самостійних та практичних робіт з дисципліни МОГВ студентами напряму підготовки 0801 «Геодезія, картографія та землеустрій» Розділ 2. Основи теорії похибок вимірів, 05-04-46. Тадєєв О.А., Дець Т.І., Рівне, НУВГП, 2014. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://ep3.nuwm.edu.ua/5497/.
8. Методичні вказівки до виконання самостійних та практичних робіт з дисципліни «Математична обробка геодезичних вимірів» студентами напряму підготовки 0801. Розділ 3. Метод найменших квадратів. Зрівноважування результатів вимірів параметричним способом, 05-04-32. Тадєєв О.А., Дець Т.І., Рівне, НУВГП, 2014. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://ep3.nuwm.edu.ua/5499/.
9. Методичні вказівки до виконання самостійних та практичних робіт з дисципліни «Математична обробка геодезичних вимірів» студентами напряму підготовки 0801. «Розділ 3. Метод найменших квадратів. Зрівноважування результатів вимірів корелатним способом», 05-04-33. Тадєєв О.А., Дець Т.І., Рівне, НУВГП, 2014. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://ep3.nuwm.edu.ua/5498/.