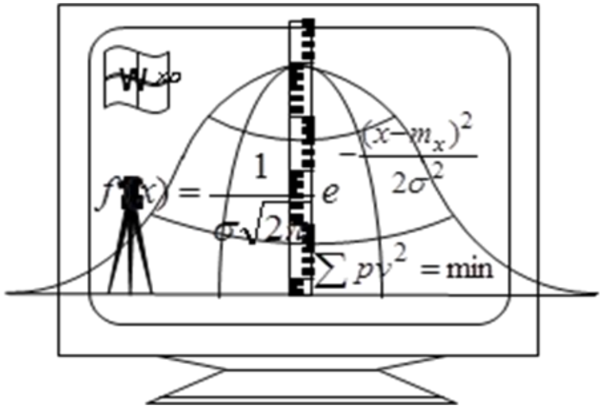
Національний університет
водного господарства
та природокористування



Кафедра геодезії та картографії

Спеціальність 193 “Геодезія та землеустрій”

Дисципліна **МАТЕМАТИЧНА ОБРОБКА ГЕОДЕЗИЧНИХ ВИМІРІВ**
Модуль 3 **МЕТОД НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ**

Лектор О.А. Тадєєв

Тема 3

ЗРІВНОВАЖУВАННЯ ВИМІРІВ КОРЕЛАТНИМ СПОСОБОМ

2. ОЦІНКА ТОЧНОСТІ ЗА РЕЗУЛЬТАТАМИ ЗРІВНОВАЖУВАННЯ

1. Постановка і шляхи досягнення розв’язку задачі
2. Оцінка точності зрівноважених результатів вимірів
3. Оцінка точності функцій зрівноважених вимірів

1. Постановка і шляхи досягнення розв'язку задачі

Під оцінкою точності за результатами зрівноважування корелатним способом розуміють розрахунок середніх квадратичних похибок зрівноважених результатів вимірів та їх функцій.

Оцінка точності потрібної величини - незмінна задача, рішення якої полягає у розрахунку середньої квадратичної похибки величини M за формулами

$$M = \mu\sqrt{\frac{1}{P}} \qquad \text{чи} \qquad M = m\sqrt{\frac{1}{P}}$$

за умови оцінювання нерівноточних чи рівноточних вимірів відповідно. Тут μ - середня квадратична похибка одиниці ваги; m - середня квадратична похибка рівноточних вимірів; P - вага оцінюваної величини.

Характеристика точності величини таким критерієм зводиться до вираження

- ✓ середніх квадратичних похибок одиниці ваги μ або рівноточних вимірів m;
- ✓ ваги оцінюваної величини P.

Значення похибок μ чи m можна розкрити за формулами Бесселя

$$\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-k}} \qquad \text{чи} \qquad m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-k}}\,.$$

Можна також користуватись формулою

$$\mu = \sqrt{\frac{[P_W W^2]}{r}}\,. \tag{3.43}$$

Тут W_j – нев'язки умовних рівнянь; P_{W_j} – ваги нев'язок; $j = \overrightarrow{1,r}$; r – число надлишкових виміряних величин. Ваги нев'язок виражає формула теорії похибок вимірів для ваги функції незалежних виміряних величин

$$\frac{1}{P_{W_j}} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\right)_0^2 \frac{1}{p_i} = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}^2 \frac{1}{p_i}\,. \tag{3.44}$$

Формула (3.43) є наслідком формули Гаусса, позаяк нев'язки W_j є істинними похибками r незалежних умовних рівнянь φ_j, які є функціями результатів вимірів.

Вагу P оцінюваної величини F встановлюють, виражаючи її функцією $F = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ результатів вимірів x_i з використанням формули теорії похибок

$$\frac{1}{P_F} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_{\mathrm{o}}^2 \frac{1}{p_i}.$$

За результатами зрівноважування корелатним способом оцінюванню підлягають зрівноважені результати вимірів або їх функції, але не безпосередні результати вимірів або їх функції. Тому пряме застосування цієї формули у такому вигляді неприпустиме. З цього слідує, що для вираження ваги оцінюваної величини F передусім потрібно встановити її зв'язок з результатами безпосередніх вимірів.

Хід дій з обчислення ваги оцінюваної величини залежить від вигляду функції, яка виражає її через виміряні величини.

2. Оцінка точності зрівноважених результатів вимірів

Насамперед виразимо **зв'язок результатів вимірів** x_i **із зрівноваженими значеннями** $\tilde{x}_i$.

Зрівноважені значення $\tilde{x}_i$ виражаються функціями результатів вимірів x_i вигляду $\tilde{x}_i = F_i(x_i) = x_i + v_i$ $(i = \overrightarrow{1,n})$ або у матричній формі $\underset{n\times1}{\tilde{x}} = \underset{n\times1}{x} + \underset{n\times1}{V}$.

Сукупність поправок

$$\underset{n\times1}{V} = \underset{n\times1}{\tilde{x}} - \underset{n\times1}{x}, \tag{3.60}$$

за умовою завдання зрівноважування, повинна враховувати істинні похибки вимірів $\underset{n\times1}{\theta} = -\underset{n\times1}{V}$ і ліквідовувати нев'язки $W_j = \varphi_j(x_1,\dots,x_n)$, які виникають внаслідок похибок θ_i; $j = \overrightarrow{1,r}$; r – кількість надлишкових виміряних величин.

Масиви $\underset{n\times1}{V}$ та $\underset{r\times1}{W}$ зв'язані умовними рівняннями поправок $\underset{r\times n}{A} \cdot \underset{n\times1}{V} + \underset{r\times1}{W} = 0$. Якщо в ці рівняння помістити рівняння (3.60) $\underset{n\times1}{V} = \underset{n\times1}{\tilde{x}} - \underset{n\times1}{x}$, одержимо:

$$\underset{r\times n}{A} \cdot \underset{n\times1}{V} + \underset{r\times1}{W} = \underset{r\times n}{A} \cdot \left(\underset{n\times1}{\tilde{x}} - \underset{n\times1}{x} \right) + \underset{r\times1}{W} = \underset{r\times n}{A} \cdot \underset{n\times1}{\tilde{x}} - \underset{r\times n}{A} \cdot \underset{n\times1}{x} + \underset{r\times1}{W} = 0.$$

Враховуючи умову (3.3) $\varphi_j(\tilde{x}_1,\dots,\tilde{x}_n) = 0$ або, що рівносильно, $\underset{r\times n}{A} \cdot \underset{n\times1}{\tilde{x}} = 0$, одержимо:

$$\underset{r\times n}{A} \cdot \underset{n\times1}{x} = \underset{r\times1}{W}. \tag{3.61}$$

В ході розв'язання завдання зрівноважування поправки $\underset{n\times 1}{V}$ виражаються через корелати $\underset{r\times 1}{K}$ за допомогою корелатних рівнянь поправок $\underset{n\times 1}{V} = \underset{n\times n}{q} \cdot \underset{n\times r}{A^T} \cdot \underset{r\times 1}{K}$. Масив корелат $\underset{r\times 1}{K}$ формується за розв'язком системи нормальних рівнянь корелат: $\underset{r\times 1}{K} = -\underset{r\times r}{Q} \cdot \underset{r\times 1}{W}$. На такій основі для сукупності поправок $\underset{n\times 1}{V}$ отримаємо:

$$\underset{n\times 1}{V} = \underset{n\times n}{q} \cdot \underset{n\times r}{A^T} \cdot \underset{r\times 1}{K} = \underset{n\times n}{q} \cdot \underset{n\times r}{A^T} \cdot \left(-\underset{r\times r}{Q} \cdot \underset{r\times 1}{W} \right) = -\underset{n\times n}{q} \cdot \underset{n\times r}{A^T} \cdot \underset{r\times r}{Q} \cdot \underset{r\times n}{A} \cdot \underset{n\times 1}{x}. \qquad (3.62)$$

Підстановка цього рівняння в рівняння $\underset{n\times 1}{\tilde{x}} = \underset{n\times 1}{x} + \underset{n\times 1}{V}$ забезпечує такий кінцевий результат:

$$\underset{n\times 1}{\tilde{x}} = \underset{n\times 1}{x} - \underset{n\times n}{q} \cdot \underset{n\times r}{A^T} \cdot \underset{r\times r}{Q} \cdot \underset{r\times n}{A} \cdot \underset{n\times 1}{x}. \qquad (3.63)$$

Рівняння (3.63) виражає зв'язок результатів вимірів x_i із зрівноваженими значеннями $\tilde{x}_i$. Величина $\underset{n\times n}{q} \cdot \underset{n\times r}{A^T} \cdot \underset{r\times r}{Q} \cdot \underset{r\times n}{A} = const$ у межах окремої задачі.

Виразимо тепер середні квадратичні похибки та ваги корелат k_j, поправок v_i і зрівноважених значень $\tilde{x}_i$ як функцій результатів вимірів $\tilde{x}_i = F_i(x_1,...,x_n)$. За основу беремо рівняннями зв'язку (3.63) і формули теорії похибок $m_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{\text{o}}^2 m_i^2}$ та $\frac{1}{P_F} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{\text{o}}^2 \frac{1}{p_i}$.

Оцінюючи **точність масиву корелат** $\underset{r\times 1}{K} = -\underset{r\times r}{Q} \cdot \underset{r\times n}{A} \cdot \underset{n\times 1}{x}$, отримаємо:

$$\underset{r\times r}{M_K^2} = \underset{r\times r}{Q} \cdot \underset{r\times n}{A} \cdot \underset{n\times n}{M^2} \cdot \underset{n\times r}{A^T} \cdot \underset{r\times r}{Q}\,; \tag{3.64}$$

$$\underset{r\times r}{Q_K} = \underset{r\times r}{Q} \cdot \underset{r\times n}{A} \cdot \underset{n\times n}{q} \cdot \underset{n\times r}{A^T} \cdot \underset{r\times r}{Q} = \underset{r\times r}{Q} \cdot \underset{r\times r}{N} \cdot \underset{r\times r}{Q} = \underset{r\times r}{Q} \cdot \underset{r\times r}{E} = \underset{r\times r}{Q}\,, \tag{3.65}$$

де $\underset{n\times n}{M^2}$ – діагональна матриця квадратів середніх квадратичних похибок результатів вимірів; $\underset{r\times r}{M_K^2}$ і $\underset{r\times r}{Q_K}$ - кореляційна і вагова матриці, на головних діагоналях яких розташовані відповідно квадрати середніх квадратичних похибок та обернені ваги корелат.

Оцінюючи **точність масиву поправок** $\underset{n\times 1}{V} = \underset{n\times n}{q} \cdot \underset{n\times r}{A^T} \cdot \underset{r\times 1}{K}$, на основі (3.64) і (3.65), одержимо формули

$$\underset{n\times n}{M_V^2} = \underset{n\times n}{q} \cdot \underset{n\times r}{A^T} \cdot \underset{r\times r}{M_K^2} \cdot \underset{r\times n}{A} \cdot \underset{n\times n}{q}\,, \tag{3.66}$$

$$\underset{n\times n}{Q_V} = \underset{n\times n}{q} \cdot \underset{n\times r}{A^T} \cdot \underset{r\times r}{Q} \cdot \underset{r\times n}{A} \cdot \underset{n\times n}{q}\,. \tag{3.67}$$

Оцінюючи **точність масиву зрівноважених результатів вимірів** $\tilde{x}_i$, за рівняннями зв'язку (3.63) виразимо відповідні кореляційну $\underset{n\times n}{M^2_{\tilde{x}}}$ та вагову $\underset{n\times n}{Q_{\tilde{x}}}$ матриці.

$$\underset{n\times n}{M^2_{\tilde{x}}} = \underset{n\times n}{M^2} - \underset{n\times n}{q} \cdot \underset{n\times r}{A^T} \cdot \underset{r\times r}{Q} \cdot \underset{r\times n}{A} \cdot \underset{n\times n}{M^2} \cdot \underset{n\times r}{A^T} \cdot \underset{r\times r}{Q} \cdot \underset{r\times n}{A} \cdot \underset{n\times n}{q}; \tag{3.68}$$

$$\underset{n\times n}{Q_{\tilde{x}}} = \underset{n\times n}{q} - \underset{n\times n}{q} \cdot \underset{n\times r}{A^T} \cdot \underset{r\times r}{Q} \cdot \underset{r\times n}{A} \cdot \underset{n\times n}{q} \cdot \underset{n\times r}{A^T} \cdot \underset{r\times r}{Q} \cdot \underset{r\times n}{A} \cdot \underset{n\times n}{q}.$$

Враховуючи, що $\underset{r\times n}{A} \cdot \underset{n\times n}{q} \cdot \underset{n\times r}{A^T} = \underset{r\times r}{N}$ та $\underset{r\times r}{N} \cdot \underset{r\times r}{Q} = \underset{r\times r}{E}$,

$$\underset{n\times n}{Q_{\tilde{x}}} = \underset{n\times n}{q} - \underset{n\times n}{q} \cdot \underset{n\times r}{A^T} \cdot \underset{r\times r}{Q} \cdot \underset{r\times n}{A} \cdot \underset{n\times n}{q}. \tag{3.69}$$

З урахуванням кореляційної матриці результатів вимірів $\underset{n\times n}{M^2} = \mu^2 \underset{n\times n}{q}$ отримаємо наступне:

$$\underset{n\times n}{M^2_{\tilde{x}}} = \mu^2 \left(\underset{n\times n}{q} - \underset{n\times n}{q} \cdot \underset{n\times r}{A^T} \cdot \underset{r\times r}{Q} \cdot \underset{r\times n}{A} \cdot \underset{n\times n}{q} \cdot \underset{n\times r}{A^T} \cdot \underset{r\times r}{Q} \cdot \underset{r\times n}{A} \cdot \underset{n\times n}{q} \right);$$

$$\underset{n\times n}{M^2_{\tilde{x}}} = \mu^2 \left(\underset{n\times n}{q} - \underset{n\times n}{q} \cdot \underset{n\times r}{A^T} \cdot \underset{r\times r}{Q} \cdot \underset{r\times n}{A} \cdot \underset{n\times n}{q} \right); \tag{3.70}$$

$$\underset{n\times n}{M^2_{\tilde{x}}} = \mu^2 \underset{n\times n}{Q_{\tilde{x}}}. \tag{3.71}$$

За умови **зрівноважування рівноточних результатів вимірів**, які обтяжені похибкою m, беремо до уваги, що $\underset{n\times n}{q} = \underset{n\times n}{E}$. Тоді формули оцінки точності зрівноважених результатів вимірів $\tilde{x}_i$ спрощуються до вигляду

$$\underset{n\times n}{M_{\tilde{x}}^2} = m^2\left(\underset{n\times n}{E} - \underset{n\times r}{A^T} \cdot \underset{r\times r}{Q} \cdot \underset{r\times n}{A}\right); \tag{3.72}$$

$$\underset{n\times n}{Q_{\tilde{x}}} = \underset{n\times n}{E} - \underset{n\times r}{A^T} \cdot \underset{r\times r}{Q} \cdot \underset{r\times n}{A}; \tag{3.73}$$

$$\underset{n\times n}{M_{\tilde{x}}^2} = m^2 \underset{n\times n}{Q_{\tilde{x}}}. \tag{3.74}$$

Головна діагональ вагової матриці $\underset{n\times n}{Q_{\tilde{x}}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{P_{\tilde{x}_1}} & Q_{\tilde{x}_{12}} & \dots & Q_{\tilde{x}_{1n}} \\ Q_{\tilde{x}_{21}} & \frac{1}{P_{\tilde{x}_2}} & \dots & Q_{\tilde{x}_{2n}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Q_{\tilde{x}_{n1}} & Q_{\tilde{x}_{n2}} & \dots & \frac{1}{P_{\tilde{x}_n}} \end{pmatrix}$ містить обернені ваги $\frac{1}{P_{\tilde{x}_i}}$ зрівноважених результатів вимірів $\tilde{x}_i$. Інші елементи матриці називаються кореляційними моментами. Вони виражають тісноту залежності між зрівноваженими вимірами за допомогою коефіцієнтів кореляції

$$r_{\tilde{x}_i\tilde{x}_j} = \frac{Q_{\tilde{x}_{ij}}}{\sqrt{\frac{1}{P_{\tilde{x}_i}} \cdot \frac{1}{P_{\tilde{x}_j}}}}. \tag{3.75}$$

3. Оцінка точності функцій зрівноважених вимірів

Нехай за результатами зрівноважування потрібно оцінити точність величини F, яка виражається функцією

$$F = F\left(\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_n\right). \tag{3.77}$$

Функції (3.77) можуть мати нелінійний вигляд. Тому традиційно, з метою уніфікації алгоритму вирішення завдання, їх лінеаризують шляхом розкладу в ряд Тейлора:

$$F = F\left(x_1,\ldots,x_n\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)_{\mathrm{o}} v_i + R. \tag{3.78}$$

З огляду точності розв'язку завдання сумою всіх нелінійних членів розкладу R можна нехтувати. Позначимо

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)_{\mathrm{o}} = F_i\,. \tag{3.79}$$

Тоді

$$F = F(x) + \sum_{i=1}^{n} F_i v_i \tag{3.80}$$

або

$$F = F(x) + \underset{1\times n}{F} \cdot \underset{n\times 1}{V}\,, \tag{3.81}$$

де матриця $\underset{1\times n}{F} = \begin{pmatrix} F_1 & F_2 & \ldots & F_n \end{pmatrix}$ формується частинними похідними (3.79). Лінеаризована форма (3.80) або (3.81) функції (3.77) називається **вагова функція**.

Залежність масивів поправок $\underset{n\times1}{V}$ та результатів вимірів $\underset{n\times1}{x}$ виражає рівняння (3.62): $\underset{n\times1}{V} = -\underset{n\times n}{q}\cdot\underset{n\times r}{A^T}\cdot\underset{r\times r}{Q}\cdot\underset{r\times n}{A}\cdot\underset{n\times1}{x}$. Підстановка його до вагової функції (3.81) $F = F(x) + \underset{1\times n}{F}\cdot\underset{n\times1}{V}$ зумовлює рівняння

$$F = F(x) - \underset{1\times n}{F}\cdot\underset{n\times n}{q}\cdot\underset{n\times r}{A^T}\cdot\underset{r\times r}{Q}\cdot\underset{r\times n}{A}\cdot\underset{n\times1}{x}, \tag{3.82}$$

Рівняння (3.82) виражає оцінювану величину *F* як функцію результатів вимірів x_i.

За формулами теорії похибок $m_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0^2 m_i^2}$ і $\frac{1}{P_F} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0^2 \frac{1}{p_i}$ виражаємо точність функції (3.82):

$$M_F^2 = \underset{1\times n}{F}\cdot\underset{n\times n}{M^2}\cdot\underset{n\times1}{F^T} - \underset{1\times n}{F}\cdot\underset{n\times n}{q}\cdot\underset{n\times r}{A^T}\cdot\underset{r\times r}{Q}\cdot\underset{r\times n}{A}\cdot\underset{n\times n}{M^2}\cdot\underset{n\times r}{A^T}\cdot\underset{r\times r}{Q}\cdot\underset{r\times n}{A}\cdot\underset{n\times n}{q}\cdot\underset{n\times1}{F^T}; \tag{3.83}$$

$$\frac{1}{P_F} = \underset{1\times n}{F}\cdot\underset{n\times n}{q}\cdot\underset{n\times1}{F^T} - \underset{1\times n}{F}\cdot\underset{n\times n}{q}\cdot\underset{n\times r}{A^T}\cdot\underset{r\times r}{Q}\cdot\underset{r\times n}{A}\cdot\underset{n\times n}{q}\cdot\underset{n\times1}{F^T}. \tag{3.84}$$

Тут $\underset{n\times n}{M^2}$ – кореляційна матриця середніх квадратичних похибок m_i результатів вимірів x_i.

Величини M_F^2 та $\frac{1}{P_F}$ виражають квадрат середньої квадратичної похибки та обернену вагу оцінюваної величини *F*. Їх пов’язує залежність вигляду

$$M_F^2 = \mu^2\frac{1}{P_F}. \tag{3.85}$$

Якщо оцінюється відразу декілька функцій, наприклад s, то матриця $\underset{1\times n}{F}$ містить s рядків: $\underset{s\times n}{F}$. Рядки формуються окремо для кожної функції елементами

$$F_{ji} = \left(\frac{\partial F_j}{\partial x_i}\right)_{\text{o}}; \quad j = \overrightarrow{1,s};\ i = \overrightarrow{1,n}. \tag{3.86}$$

Тоді $\underset{s\times n}{F} = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & \ldots & F_{1n} \\ F_{21} & F_{22} & \ldots & F_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ F_{s1} & F_{s2} & \ldots & F_{sn} \end{pmatrix}$, а формули оцінки точності (3.83) – (3.85) узагальнюються:

$$\underset{s\times s}{M_F^2} = \underset{s\times n}{F} \cdot \underset{n\times n}{M^2} \cdot \underset{n\times s}{F^T} - \underset{s\times n}{F} \cdot \underset{n\times n}{q} \cdot \underset{n\times r}{A^T} \cdot \underset{r\times r}{Q} \cdot \underset{r\times n}{A} \cdot \underset{n\times n}{M^2} \cdot \underset{n\times r}{A^T} \cdot \underset{r\times r}{Q} \cdot \underset{r\times n}{A} \cdot \underset{n\times n}{q} \cdot \underset{n\times s}{F^T}; \tag{3.87}$$

$$\underset{s\times s}{Q_F} = \underset{s\times n}{F} \cdot \underset{n\times n}{q} \cdot \underset{n\times s}{F^T} - \underset{s\times n}{F} \cdot \underset{n\times n}{q} \cdot \underset{n\times r}{A^T} \cdot \underset{r\times r}{Q} \cdot \underset{r\times n}{A} \cdot \underset{n\times n}{q} \cdot \underset{n\times s}{F^T}; \tag{3.88}$$

$$\underset{s\times s}{M_F^2} = \mu^2 \cdot \underset{s\times s}{Q_F}. \tag{3.89}$$

Кореляційна $\underset{s\times s}{M_F^2}$ і вагова $\underset{s\times s}{Q_F}$ матриці на головних діагоналях містять квадрати середніх квадратичних похибок $M_{F_j}^2$ і обернені ваги $\frac{1}{P_{F_j}}$ оцінюваних функції. Недіагональні елементи $Q_{F_{ij}}$ симетричної матриці $\underset{s\times s}{Q_F}$ називаються кореляційними моментами і виражають залежності між оцінюваними функціями. Тісноту залежності між функціями за номерами i та j характеризують коефіцієнти кореляції $r_{F_i F_j} = \frac{Q_{F_{ij}}}{\sqrt{\frac{1}{P_{F_i}} \cdot \frac{1}{P_{F_j}}}}$.

За умови **зрівноважування рівноточних результатів вимірів**, які обтяжені похибкою m, беремо до уваги, що $\underset{n\times n}{q} = \underset{n\times n}{E}$. Тоді

$$\underset{s\times s}{Q_F} = \underset{s\times n}{F} \cdot \underset{n\times s}{F^T} - \underset{s\times n}{F} \cdot \underset{n\times r}{A^T} \cdot \underset{r\times r}{Q} \cdot \underset{r\times n}{A} \cdot \underset{n\times s}{F^T}; \tag{3.90}$$

$$\underset{s\times s}{M_F^2} = m^2 \cdot \underset{s\times s}{Q_F}. \tag{3.91}$$

Порівняння формул оцінки точності зрівноважених результатів вимірів та функцій зрівноважених вимірів показує, що останні можна розглядати як загальні для обох випадків. Дійсно, якщо прийняти $s = n$, а оцінюваними функціями вважати зрівноважені виміри $F_j = F_j(\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_n) = \tilde{x}_j$, то тоді матриця $\underset{s\times n}{F}$ перетворюється в одиничну матрицю: $\underset{s\times n}{F} = \underset{n\times n}{F} = \underset{n\times n}{E}$. Її підстановка до формул (3.88) і (3.90) дає у підсумку формули оцінки точності зрівноважених вимірів (3.69) і (3.73).