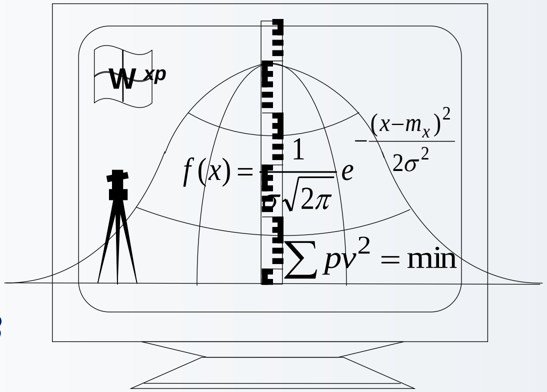
Національний університет
водного господарства
та природокористування



Кафедра геодезії та картографії

Спеціальність 193 "Геодезія та землеустрій"

Дисципліна ***МАТЕМАТИЧНА ОБРОБКА ГЕОДЕЗИЧНИХ ВИМІРІВ***
Модуль 2 ***ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОХИБОК ВИМІРІВ***

Лектор О.А.Тадєєв

Тема 4

ОБРОБКА ПОДВІЙНИХ ВИМІРІВ ОДНОРІДНИХ ВЕЛИЧИНИ

1. Зміст і мета розв'язування завдання
2. Обробка подвійних вимірів, які рівноточні в сукупності
3. Обробка подвійних нерівноточних вимірів, які рівноточні в парі для кожної величини
4. Обробка подвійних вимірів, які нерівноточні в сукупності

1. Зміст і мета розв'язування завдання

Подвійними вимірами n однорідних фізичних величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ називають виміри, які виконано двічі для кожної з цих величин:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n - \textit{перший вимір величин } X_1, X_2, \ldots, X_n$$
$$x'_1, x'_2, \ldots, x'_n - \textit{другий вимір величин } X_1, X_2, \ldots, X_n$$

За результатами математичної обробки результатів вимірів цих величин ***необхідно визначити***:
- найбільш надійні значення величин;
- середні квадратичні похибки найбільш надійних значень;
- середні квадратичні похибки вимірів.

В частині визначення найбільш надійних значень $\tilde{x}_i$ не виникає жодних проблем – їх обчислюють за правилами простої чи загальної арифметичної середини за парами подвійних вимірів кожної величини. Проте оцінка точності, виведена тільки з двох результатів вимірів, не є надійною. Тому ця частина математичної обробки виконується за сукупністю усіх результатів, виходячи з різниць подвійних вимірів кожної величини

$$d_i = x_i - x'_i$$

На практиці проведення подвійних вимірів мають місце наступні випадки:
1) усі виміри x_i та x'_i в сукупності рівноточні;
2) виміри в парах для кожної величини рівноточні, але пари вимірів величин між собою нерівноточні;
3) усі виміри x_i та x'_i в сукупності нерівноточні.

2. Обробка подвійних вимірів, які рівноточні в сукупності

Найбільш надійні значення $\tilde{x}_i$ величин x_i, кожна з яких виміряна двічі, обчислюють як проста арифметична середина (середнє арифметичне) з відповідних результатів вимірів x_i та x'_i:

$$\boxed{\tilde{x}_i = \frac{x_i + x'_i}{2}}$$

Кожне із значень $\tilde{x}_i$ є функцією результатів вимірів x_i та x'_i: $\tilde{x}_i = \frac{1}{2} x_i + \frac{1}{2} x'_i = F(x, x')$

Для визначення середньої квадратичної похибки $m_{\tilde{x}} = m_F$ використаємо формулу оцінки точності функцій незалежних результатів вимірів

$$m_F^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0^2 \cdot m_i^2 \qquad m_{\tilde{x}}^2 = \frac{1}{2^2} m_x^2 + \frac{1}{2^2} m_{x'}^2$$

Враховуючи, що похибки рівноточних результатів вимірів $m_x = m_{x'} = m$, $m_{\tilde{x}}^2 = \frac{1}{2} m^2$.

Остаточно середня квадратична похибка найбільш надійних значень виразиться формулою:

$$\boxed{m_{\tilde{x}} = \frac{m}{\sqrt{2}}}$$

Вона є наслідком загальної формули простої арифметичної середини

$$m_{\tilde{x}} = M = \frac{m}{\sqrt{n}}$$

2. Обробка подвійних вимірів, які рівноточні в сукупності

Якби було б можливо виконати виміри безпомилково, то результати вимірів кожної величини були б рівними і різниці d_i дорівнювали б нулю. Фактично d_i набувають певних числових значень, що є наслідком впливу на процес вимірів похибок різного походження. Тому кожна різниця d_i є істинною похибкою самої різниці. На цій основі середня квадратична похибка m_d різниць d_i виражається за формулою **Гаусса**:

$$\boxed{m_d = \sqrt{\frac{[d^2]}{n}}}$$

Формулою Гаусса можна користуватись для обчислення похибки m_d тільки за умови відсутності в результатах подвійних вимірів систематичних похибок. Практично вона може бути використана і в тих випадках, коли їх вплив на результати вимірів є допустимим.

2. Обробка подвійних вимірів, які рівноточні в сукупності

Результати подвійних вимірів x_i та x_i' можуть містити систематичні похибки. Основна частина систематичних похибок вимірів компенсується при обчисленні різниць $d_i = x_i - x_i'$. Проте навіть це не забезпечує їх повного видалення. Середнє значення залишкового впливу систематичних похибок можна оцінити за величиною

$$\frac{[d]}{n} = \delta$$

Якщо результати подвійних вимірів обтяжені залишковим впливом систематичних похибок, то $\delta \neq 0$. Суттєвість такого впливу дає змогу оцінити нерівність

$$|\delta| \leq \frac{1}{5} m_d$$

або рівносильна щодо неї

$$|[d]| \leq 0.25[|d|]$$

Якщо умова однієї чи іншої нерівності **виконується**, то залишковий вплив систематичних похибок є несуттєвий і ним можна нехтувати. В такому разі оцінка точності ґрунтується на формулі Гаусса.
В протилежному випадку формулою Гаусса користуватись неприпустимо: якщо умова однієї чи іншої нерівності **не виконується**, потрібно насамперед видалити вплив наявних систематичних похибок на результати подвійних вимірів.

2. Обробка подвійних вимірів, які рівноточні в сукупності

Загалом систематичним похибкам властивий постійний або односторонній характер. При рівноточних подвійних вимірах однорідних величин систематичні похибки спричинюють на виміри постійний вплив, не змінюючи свій знак і абсолютну величину. Тому при обробці подвійних рівноточних вимірів систематичні похибки можна видалити за принципом рівномірного розподілу шляхом відніманням від різниць d_i середнього значення залишкового систематичного впливу δ :

$$d_i' = d_i - \delta$$

Тоді d_i' – це різниці подвійних рівноточних вимірів, які позбавлені впливу постійних систематичних похибок. При будь-якому числі вимірів має дотримуватись умова: $[d'] = 0$

Обчислені за такої умови значення різниць d_i' є відхиленнями результатів рівноточних вимірів від простої арифметичної середини δ . Тому після видалення з результатів подвійних рівноточних вимірів систематичних похибок середня квадратична похибка різниць m_d обчислюється за формулою **Бесселя**

$$\boxed{m_d = \sqrt{\frac{[d'^2]}{n-1}}}$$

Якщо при обчисленні різниць d_i' користувались заокругленим значенням $\delta_{окр}$ і $d_i' = d_i - \delta_{окр}$, то має місце похибка заокруглення $\Delta = \delta - \delta_{окр}$ і тоді $[d'] = n\Delta$. Різниці d_i' , як відхилення результатів подвійних рівноточних вимірів від простої арифметичної середини, мають властивість $[d'^2] = \min$. Тому

$$[d'^2] = [d^2] - \frac{[d]^2}{n}$$

Останніми рівностями можна користуватись для контролю проміжних розрахунків при визначенні середньої квадратичної похибки різниць подвійних вимірів за формулою Бесселя.

2. Обробка подвійних вимірів, які рівноточні в сукупності

Різниці $d_i = x_i - x_i'$ обчислюються за результатами вимірів x_i та x_i'. Отже, d_i є функціями результатів вимірів: $d_i = F = f(x_i, x_i')$. Тому для вираження середньої квадратичної похибки m_d можна використати формулу оцінювання точності функцій незалежних результатів вимірів:

$$m_F^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0^2 \cdot m_i^2 \qquad\qquad m_F^2 = m_d^2 = m_x^2 + m_{x'}^2$$

Оскільки виміри x_i та x_i' рівноточні з похибками $m_x = m_{x'} = m$, то $m_d = m\sqrt{2}$

На такій основі середня квадратична похибка окремого результату подвійних рівноточних **незалежних** вимірів виразиться формулою:

$$\boxed{m = \frac{m_d}{\sqrt{2}}}$$

Середня квадратична похибка різниць m_d обчислюється за формулами Гаусса або Бесселя, що визначається фактом відсутності чи наявності в результатах подвійних вимірів систематичних похибок.

2. Обробка подвійних вимірів, які рівноточні в сукупності

Якщо різниці $d_i = x_i - x_i'$ є функціями $d_i = F = f(x_i, x_i')$ залежних результатів вимірів x_i та x_i' і цю залежність виражає коефіцієнт кореляції $r_{i,j} = r_{x,x'}$, то для визначення середньої квадратичної похибки m_d різниць d_i використовують формулу оцінювання точності функцій залежних результатів вимірів:

$$m_F^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0^2 \cdot m_i^2 + 2\sum_{i<j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0 \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)_0 \cdot r_{i,j} \cdot m_i \cdot m_j \qquad m_F^2 = m_d^2 = m_x^2 + m_{x'}^2 - 2m_x m_{x'} r_{x,x'}$$

Враховуючи рівність похибок $m_x = m_{x'} = m$, маємо:

$$m_d^2 = 2m^2 - 2m^2 r_{x,x'} = 2m^2(1 - r_{x,x'})$$

На такій основі середня квадратична похибка окремого результату подвійних рівноточних **залежних** вимірів виразиться формулою:

$$\boxed{m = \frac{m_d}{\sqrt{2(1 - r_{x,x'})}}}$$

Середня квадратична похибка різниць m_d обчислюється за формулами Гаусса або Бесселя, що визначається фактом відсутності чи наявності в результатах подвійних вимірів систематичних похибок.

2. Обробка подвійних вимірів, які рівноточні в сукупності

Черговість дій при обробці результатів вимірів

1. Обчислення різниць подвійних вимірів однорідних величин $d_i = x_i - x_i'$

2. Обчислення найбільш надійних значень величин $\tilde{x}_i$

3. Перевірка умови допустимого впливу систематичних похибок вимірів

$$\left|[d]\right| \le 0.25[|d|]$$

4. ***Якщо умова виконується***:

Обчислення середньої квадратичної похибки різниць m_d за формулою Гаусса

4. ***Якщо умова не виконується***:

4.1. Видалення залишкового впливу систематичних похибок за принципом рівномірного розподілу, обчислення різниць $d_i' = d_i - \delta$.

4.2. Обчислення середньої квадратичної похибки різниць m_d за формулою Бесселя

5. Обчислення середньої квадратичної похибки вимірів $m = \dfrac{m_d}{\sqrt{2}}$

6. Обчислення середньої квадратичної похибки найбільш надійних значень величин $m_{\tilde{x}} = \dfrac{m}{\sqrt{2}}$

3. Обробка подвійних нерівноточних вимірів, які рівноточні в парі для кожної величини

Ряд подвійних вимірів

$$x_1, x_2, \ldots, x_n - \textit{перший вимір величин } X_1, X_2, \ldots, X_n$$
$$x'_1, x'_2, \ldots, x'_n - \textit{другий вимір величин } X_1, X_2, \ldots, X_n$$

з точки зору точності характеризують наступні співвідношення середніх квадратичних похибок і ваг:

$$m_{x_i} = m_{x'_i} = m_i \quad m_1 \neq m_2 \neq \ldots \neq m_n$$
$$p_{x_i} = p_{x'_i} = p_i \quad p_1 \neq p_2 \neq \ldots \neq p_n$$

Різниці $d_i = x_i - x'_i$ є функціями результатів вимірів x_i та x'_i : $d_i = F = f(x_i, x'_i)$.
Для вираження ваг різниць використаємо формулу оцінки точності функцій незалежних результатів вимірів:

$$\frac{1}{P_F} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0^2 \frac{1}{p_i} \qquad \frac{1}{P_F} = \frac{1}{p_{d_i}} = \frac{1}{p_{x_i}} + \frac{1}{p_{x'_i}}$$

Враховуючи, що ваги кожної пари вимірів рівні $p_{x_i} = p_{x'_i} = p_i$, отримаємо:

$$\frac{1}{p_{d_i}} = \frac{2}{p_i} \qquad p_{d_i} = \frac{p_i}{2}$$

3. Обробка подвійних нерівноточних вимірів, які рівноточні в парі для кожної величини

Найбільш надійні значення $\tilde{x}_i$ величин X_i , кожна з яких виміряна двічі, обчислюють як проста арифметична середина (середнє арифметичне) з відповідних результатів вимірів x_i та x_i':

$$\boxed{\tilde{x}_i = \frac{x_i + x_i'}{2}}$$

Кожне із значень $\tilde{x}_i$ є функцією результатів вимірів x_i та x_i' : $\tilde{x}_i = \frac{1}{2}x_i + \frac{1}{2}x_i' = F(x, x')$

Для визначення ваг $p_{\tilde{x}_i}$ використаємо формулу оцінки точності функцій незалежних результатів вимірів

$$\frac{1}{P_F} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0^2 \frac{1}{p_i} \qquad \frac{1}{P_F} = \frac{1}{p_{\tilde{x}_i}} = \frac{1}{4p_{x_i}} + \frac{1}{4p_{x_i'}}$$

Враховуючи, що ваги кожної пари вимірів рівні $p_{x_i} = p_{x_i'} = p_i$, $p_{\tilde{x}_i} = 2p_i$.

Тоді середні квадратичні похибки найбільш надійних значень виразяться формулами:

$$\boxed{m_{\tilde{x}_i} = \frac{\mu}{\sqrt{p_{\tilde{x}_i}}}} \qquad \boxed{m_{\tilde{x}_i} = \frac{\mu}{\sqrt{2p_i}}} \qquad \boxed{m_{\tilde{x}_i} = \frac{\mu}{2\sqrt{p_{d_i}}}}$$

3. Обробка подвійних нерівноточних вимірів, які рівноточні в парі для кожної величини

Якби було б можливо виконати виміри безпомилково, то результати вимірів кожної величини були б рівними і різниці d_i дорівнювали б нулю. Фактично d_i набувають певних числових значень, що є наслідком впливу на процес вимірів похибок різного походження. Тому кожна різниця d_i є істинною похибкою самої різниці. На цій основі середня квадратична похибка одиниці ваги μ, обчислена за істинними похибками нерівноточних вимірів (різницями d_i), виражається за формулою **Гаусса**:

$$\boxed{\mu = \sqrt{\frac{[p_d d^2]}{n}}} \quad \text{або} \quad \boxed{\mu = \sqrt{\frac{[pd^2]}{2n}}}$$

Якщо різниці $d_i = x_i - x_i'$ є функціями залежних результатів подвійних вимірів x_i та x_i' кожної з однорідних величин і цю залежність виражає коефіцієнт кореляції $r_{x,x'}$, то

$$\mu = \sqrt{\frac{[pd^2]}{2n(1 - r_{x,x'})}}$$

Формулою Гаусса можна користуватись для обчислення середньої квадратичної похибки одиниці ваги тільки за умови відсутності в результатах подвійних вимірів систематичних похибок. Практично вона може бути використана і в тих випадках, коли їх вплив на результати вимірів є допустимим.

3. Обробка подвійних нерівноточних вимірів, які рівноточні в парі для кожної величини

Результати подвійних вимірів x_i та x_i' можуть містити систематичні похибки. Основна частина систематичних похибок вимірів компенсується при обчисленні різниць $d_i = x_i - x_i'$. Проте навіть це не забезпечує їх повного видалення. Середнє значення залишкового впливу систематичних похибок нерівноточних вимірів за умов $p_{x_i} = p_{x_i'} = p_i$ і $p_1 \neq p_2 \neq \ldots \neq p_n$ можна оцінити за величиною загальної арифметичної середини

$$\delta = \frac{[p_d d]}{[p_d]}$$

Якщо результати подвійних вимірів обтяжені залишковим впливом систематичних похибок, то $\delta \neq 0$.
Суттєвість такого впливу дає змогу оцінити нерівність

$$|\delta| \leq \frac{1}{5}\mu$$

або рівносильна щодо неї

$$\left|[d\sqrt{p_d}]\right| \leq 0.25\left[\left|d\sqrt{p_d}\right|\right]$$

Якщо умова однієї чи іншої нерівності **виконується**, то залишковий вплив систематичних похибок є несуттєвий і ним можна нехтувати. В такому разі оцінка точності ґрунтується на формулі Гаусса.
В протилежному випадку формулою Гаусса користуватись неприпустимо: якщо умова однієї чи іншої нерівності **не виконується**, потрібно насамперед видалити вплив наявних систематичних похибок на результати подвійних вимірів.

3. Обробка подвійних нерівноточних вимірів, які рівноточні в парі для кожної величини

При нерівноточних подвійних вимірах однорідних величин систематичні похибки спричинюють на виміри односторонній вплив, не змінюючи свій знак, але змінюючи абсолютну величину при зміні умов вимірів. Тому при обробці подвійних нерівноточних вимірів систематичні похибки можна видалити за принципом пропорційного розподілу шляхом відніманням від різниць d_i поправок δ_i :

$$d_i - \delta_i = d_i'$$

При обчисленні поправок δ_i потрібно проводити ретельний аналіз умов вимірів з метою встановлення факторів, які спричинюють односторонній вплив систематичних похибок. Залежно від таких факторів систематична похибка розподіляється у виміри диференційовано. Наприклад, при подвійних вимірах довжин ліній різного порядку

$$\delta_i = \frac{[d]}{[\tilde{x}]}\tilde{x}_i$$

$\tilde{x}_i$ – найбільш надійні значення подвійних вимірів довжин ліній. При подвійних вимірах перевищень в нівелірних ходах різної довжини

$$\delta_i = \frac{[d]}{[S]}S_i$$

S_i – довжини нівелірних ходів. При подвійних вимірах перевищень в ходах з різним числом штативів (станцій)

$$\delta_i = \frac{[d]}{[k]}k_i$$

k_i – число штативів відповідного ходу. Відношення

$$\frac{[d]}{[\tilde{x}]} = \delta_{\text{o}} \qquad \frac{[d]}{[S]} = \delta_{\text{o}} \qquad \frac{[d]}{[k]} = \delta_{\text{o}}$$

є сталою величиною для отриманого ряду подвійних вимірів. Величину δ_{o} називають коефіцієнтом залишкового систематичного впливу.

3. Обробка подвійних нерівноточних вимірів, які рівноточні в парі для кожної величини

Після врахування поправок δ_i , різниці $d_i - \delta_i = d_i'$ - це різниці подвійних нерівноточних вимірів, які позбавлені залишкового впливу односторонніх систематичних похибок. При будь-якому числі вимірів має дотримуватись умова:

$$[p_d d'] = 0$$

Обчислені за такої умови значення різниць d_i' є відхиленнями результатів нерівноточних вимірів від загальної арифметичної середини δ . Після видалення з результатів подвійних нерівноточних вимірів систематичних похибок середня квадратична похибка одиниці ваги μ обчислюється за формулою **Бесселя:**

$$\boxed{\mu = \sqrt{\frac{[p_d d'^2]}{n-1}}} \quad \text{або} \quad \boxed{\mu = \sqrt{\frac{[pd'^2]}{2(n-1)}}}$$

Якщо при обчисленні різниць d_i' користувались заокругленими значеннями δ_i і $d_i' = d_i - \delta_{окр}$, то має місце похибка заокруглення $\Delta = \delta - \delta_{окр}$ і тоді $[p_d d'] = \Delta [p_d]$. Різниці d_i' , як відхилення результатів подвійних нерівноточних вимірів від загальної арифметичної середини, мають властивість $[p_d d'^2] = \min$. Тому

$$[p_d d'^2] = [p_d d^2] - \frac{[p_d d]^2}{[p_d]}$$

Останніми рівностями можна користуватись для контролю проміжних розрахунків.

Після визначення середньої квадратичної похибки одиниці ваги за формулами Гаусса або Бесселя розраховують похибки результатів подвійних вимірів:

$$\boxed{m_i = \frac{\mu}{\sqrt{p_i}}}$$

3. Обробка подвійних нерівноточних вимірів, які рівноточні в парі для кожної величини

Черговість дій при обробці результатів вимірів

1. Обчислення різниць подвійних вимірів однорідних величин $d_i = x_i - x_i'$

2. Обчислення ваг вимірів p_i та ваг різниць p_{d_i}

3. Обчислення найбільш надійних значень величин $\tilde{x}_i$

4. Перевірка умови допустимого впливу систематичних похибок вимірів $\left|[d\sqrt{p_d}]\right| \le 0.25[|d\sqrt{p_d}|]$

5. ***Якщо умова виконується***:

Обчислення середньої квадратичної похибки одиниці ваги μ за формулою Гаусса

5. ***Якщо умова не виконується***:

5.1. Видалення залишкового впливу систематичних похибок за принципом пропорційного розподілу, обчислення різниць $d_i' = d_i - \delta_i$.

5.2. Обчислення середньої квадратичної похибки одиниці ваги μ за формулою Бесселя

6. Обчислення середніх квадратичних похибок вимірів $m_i = \dfrac{\mu}{\sqrt{p_i}}$

7. Обчислення середніх квадратичних похибок найбільш надійних значень величин $m_{\tilde{x}_i} = \dfrac{\mu}{\sqrt{2p_i}}$

4. Обробка подвійних вимірів, які нерівноточні в сукупності

Ряд подвійних вимірів

$$x_1, x_2, \ldots, x_n - \textit{перший вимір величин } X_1, X_2, \ldots, X_n$$
$$x'_1, x'_2, \ldots, x'_n - \textit{другий вимір величин } X_1, X_2, \ldots, X_n$$

з точки зору точності характеризують наступні співвідношення середніх квадратичних похибок і ваг:

$$m_{x_i} \neq m_{x'_i}; \quad p_{x_i} \neq p_{x'_i}.$$

У такому випадку всі виміри проведені в неоднакових умовах і мають різні середні квадратичні похибки та ваги.

4. Обробка подвійних вимірів, які нерівноточні в сукупності

Оцінку точності вимірів виконують за сукупністю різниць $d_i = x_i - x_i'$. Вага кожної різниці виражається як вага функції $d_i = F = f(x_i, x_i')$ результатів незалежних нерівноточних вимірів x_i та x_i' :

$$\frac{1}{P_F} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0^2 \frac{1}{p_i} \qquad \frac{1}{p_{d_i}} = \frac{1}{p_{x_i}} + \frac{1}{p_{x_i'}} = \frac{p_{x_i} + p_{x_i'}}{p_{x_i} p_{x_i'}} \qquad p_{d_i} = \frac{p_{x_i} p_{x_i'}}{p_{x_i} + p_{x_i'}}$$

Якщо подвійні виміри обтяжені лише допустимими систематичними похибками, то середню квадратичну похибку одиниці ваги розраховують за формулою Гаусса:

$$\mu = \sqrt{\frac{[p_d d^2]}{n}}$$

Якщо подвійні виміри містять значні систематичні похибки і вони попередньо виключені з різниць d_i за принципом пропорційного розподілу, то середню квадратичну похибку одиниці ваги розраховують за формулою Бесселя:

$$\mu = \sqrt{\frac{[p_d d'^2]}{n-1}}$$

Тут $d_i' = d_i - \delta_i$. Допустимість впливу систематичних похибок перевіряють нерівністю

$$\left|[d\sqrt{p_d}]\right| \leq 0.25[\left|d\sqrt{p_d}\right|]$$

4. Обробка подвійних вимірів, які нерівноточні в сукупності

Середні квадратичні похибки кожного з подвійних вимірів x_i чи x_i' виражається з врахуванням відповідних їм ваг p_{x_i} чи $p_{x_i'}$:

$$m_{x_i} = \frac{\mu}{\sqrt{p_{x_i}}} \qquad m_{x_i'} = \frac{\mu}{\sqrt{p_{x_i'}}}$$

Найбільш надійні значення $\tilde{x}_i$ кожної з однорідних величин X_i виражаються за принципом загальної арифметичної середини (середнє вагове) як функції результатів нерівноточних вимірів x_i та x_i' :

$$\tilde{x}_i = \frac{x_i p_{x_i} + x_i' p_{x_i'}}{p_{x_i} + p_{x_i'}}$$

Вага загальної арифметичної середини, як найбільш надійного значення кожної величини, дорівнює сумі ваг результатів нерівноточних вимірів цієї величини:

$$p_{\tilde{x}_i} = p_{x_i} + p_{x_i'}$$

На цій основі, середні квадратичні похибки $m_{\tilde{x}_i}$ найбільш надійних значень $\tilde{x}_i$ виражаються, враховуючи відповідні цим значенням ваги $p_{\tilde{x}_i}$:

$$m_{\tilde{x}_i} = \frac{\mu}{\sqrt{p_{x_i} + p_{x_i'}}}$$