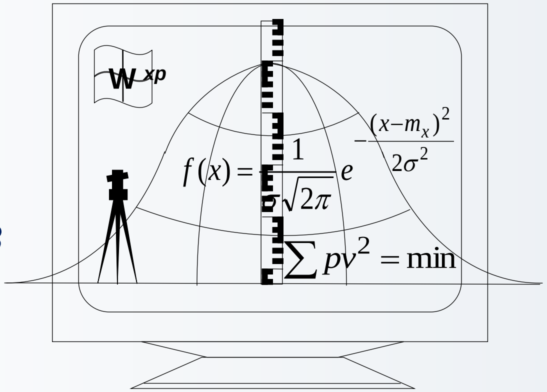
Національний університет
водного господарства
та природокористування

Кафедра геодезії та картографії

Спеціальність 193 “Геодезія та землеустрій”

Дисципліна ***МАТЕМАТИЧНА ОБРОБКА ГЕОДЕЗИЧНИХ ВИМІРІВ***
Модуль 2 ***ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОХИБОК ВИМІРІВ***



Лектор О.А.Тадєєв

Тема 3

МАТЕМАТИЧНА ОБРОБКА НЕРІВНОТОЧНИХ ВИМІРІВ ВЕЛИЧИНИ

1. Зміст і мета розв'язування завдання
2. Загальна арифметична середина
3. Ваги вимірів та функцій виміряних величин
4. Середня квадратична похибка одиниці ваги. Похибки вимірів і загальної арифметичної середини
5. Формули обчислення середньої квадратичної похибки одиниці ваги

1. Зміст і мета розв'язування завдання

Нерівноточними вимірами окремої фізичної величини називають виміри, які проведено в різних умовах. З точки зору числових оцінок точності нерівноточні виміри характеризуються різними як істинними, так і середніми квадратичними похибками.

Постановка завдання

Проведено n нерівноточних вимірів величини.

$x_1, x_2, ..., x_n$ - результати вимірів.

$m_1 \neq m_2 \neq ... \neq m_n$ - середні квадратичні похибки результатів вимірів.

Істинне значення X та істинні похибки $\theta_i = x_i - X$ результатів вимірів невідомі.

За результатами математичної обробки результатів вимірів величини ***необхідно визначити***:

1) найбільш надійне значення величини $\tilde{x}$, яке має замінити і бути найбільш близьким до істинного;
2) середню квадратичну похибку найбільш надійного значення $m_{\tilde{x}}$;
3) середні квадратичні похибки вимірів $m_1, m_2, ..., m_n$.

2. Загальна арифметична середина

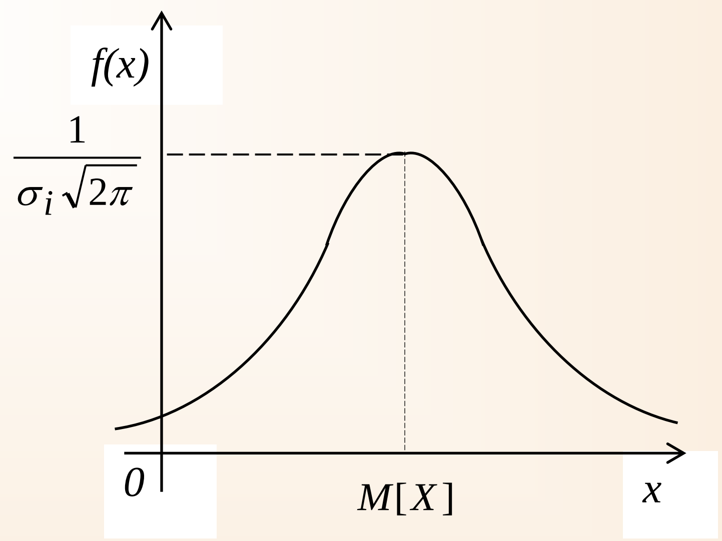
За умови відсутності в результатах вимірів x_i систематичних похибок $\delta = M[x] - X$ їх точність визначається лише випадковими похибками $\zeta_i = x_i - M[x]$, які підпорядковуються нормальному законові розподілу. За такої умови істинне значення X вимірюваної величини замінюють найбільш надійним значенням $\tilde{x}$, яке за ймовірністю є найбільш близьким до істинного і ототожнюється з математичним сподіванням $M[X]$. $M[X]$ відповідає найбільшому значенню ймовірності сукупності результатів вимірів цієї величини. Це слідує з функції щільності нормального закону розподілу

$$f(x_i) = \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i - M[X])^2}{2\sigma_i^2}}$$

Максимум $\frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}}$ функції $f(x_i)$ досягається при найменшому значенні показника степені

$$F = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - M[X])^2}{2\sigma_i^2} = \min$$

Максимум функції $f(x_i)$ відповідає центру розподілу, яким є математичне сподівання $M[X]$.



2. Загальна арифметична середина

Таким чином, найбільшу ймовірність сукупності результатів вимірів x_i і найбільш надійне значення $\tilde{x}$ цих результатів можна отримати лише за умови мінімуму функції виду

$$F = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - M[X])^2}{2\sigma_i^2} = \min \quad \text{або} \quad F = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \tilde{x})^2}{2m_i^2} = \min ,$$

враховуючи, що $\sigma_i = m_i$, а $M[X]$ ототожнюється з $\tilde{x}$. Розв'язок поставленої задачі можливий, якщо частинні похідні функції дорівнюють нулю:

$$\frac{dF}{dx_i} = 0$$

Після диференціювання отримаємо:

$$\frac{d}{dx_i}\left\{\frac{(x_1 - \tilde{x})^2}{2m_1^2} + \ldots + \frac{(x_n - \tilde{x})^2}{2m_n^2}\right\} = 2\frac{x_1 - \tilde{x}}{2m_1^2} + \ldots + 2\frac{x_n - \tilde{x}}{2m_n^2} = 0 \qquad x_1\frac{c}{m_1^2} - \tilde{x}\frac{c}{m_1^2} + \ldots + x_n\frac{c}{m_n^2} - \tilde{x}\frac{c}{m_n^2} = [x\frac{c}{m^2}] - \tilde{x}[\frac{c}{m^2}] = 0$$

де c - довільний сталий додатній коефіцієнт пропорційності. Звідси найбільш надійне значення

$$\tilde{x} = \frac{[x\frac{c}{m^2}]}{[\frac{c}{m^2}]} \quad \text{або} \quad \boxed{\tilde{x} = \frac{[xp]}{[p]}}$$

Відношення $\frac{c}{m_i^2} = p_i$ називають **ваги нерівноточних результатів вимірів величини**.

Величина $\tilde{x}$ - це найбільш надійне значення нерівноточних вимірів величини і називається середнє вагове або загальна арифметична середина. В деяких практичних задачах $\tilde{x}$ зручно обчислювати за формулою

$$\tilde{x} = x_{\min} + \frac{[p\varepsilon]}{[p]}$$

де $x_{\min}$ - найменший результат вимірів ; $\varepsilon_i = x_i - x_{\min}$.

3. Ваги вимірів та функцій виміряних величин

Ваги вимірів

Вагами вимірів називають безрозмірні показники ступеню довіри до результатів нерівноточних вимірів величини. З такого визначення слідує, що більшим за числовим значенням вагам вимірів відповідає вища точність вимірів (або менша середня квадратична похибка). Тому ваги і середні квадратичні похибки мають обернену пропорційну залежність:

$$p_i = \frac{c}{m_i^2}$$

На практиці часто середні квадратичні похибки вимірів невідомі, але аналіз умов вимірів дає підстави вважати отримані результати нерівноточними. Тоді ваги вимірів встановлюють за існуючими підставами і в кожному конкретному випадку при обчисленні ваг враховують як саме зміна тих чи інших умов впливає на точність результатів вимірів. **Деякі типові приклади обчислення ваг:**

- кут вимірювали різним числом прийомів k_i. Збільшення числа прийомів зумовлює підвищення точності отриманих результатів вимірів і вага має розраховуватись із прямої залежності від числа прийомів:

$$p_i = \frac{k_i}{c}$$

- перевищення визначали різним числом станцій K_i. Збільшення числа станцій зумовлює зниження точності результатів вимірів перевищення і вага повинна обчислюватись із оберненої співвідносної залежності з числом станцій:

$$p_i = \frac{c}{K_i}$$

- перевищення визначали за ходами різної довжини S_i. Збільшення довжини ходу зумовлює зниження точності результатів вимірів перевищення і вага повинна обчислюватись із оберненої співвідносної залежності з довжиною ходу:

$$p_i = \frac{c}{S_i}$$

Вибір коефіцієнта *с* не змінює кінцевих результатів обробки вимірів. Він відіграє роль коефіцієнта пропорційності. Принципово важливим є не порядок ваг, а їх взаємні співвідношення між собою. Коефіцієнт *с* встановлюють з такого розрахунку, щоб ваги були близькими до одиниці - це спрощує виконання подальших розрахунків.

3. Ваги вимірів та функцій виміряних величин

Ваги функцій виміряних величин

Дане завдання розв'язується аналогічно завданню визначення середньої квадратичної похибки m_F функції $F = f(x_1,...,x_n)$ виміряних величин $x_1, x_2,...,x_n$:

$$m_F^2 = \sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial f}{\partial x_i})_0^2 \cdot m_i^2 + 2\sum_{i<j} (\frac{\partial f}{\partial x_i})_0 \cdot (\frac{\partial f}{\partial x_j})_0 \cdot r_{i,j} \cdot m_i \cdot m_j$$

Коефіцієнт кореляції r_{ij} виражає ймовірну залежність результатів вимірів $x_1, x_2,...,x_n$. Беручи до уваги співвідношення ваг та середніх квадратичних похибок результатів вимірів

$$p_i = \frac{1}{m_i^2}$$

для оберненої ваги $\frac{1}{P_F}$ функції залежних аргументів отримаємо:

$$\frac{1}{P_F} = \sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial f}{\partial x_i})_0^2 \frac{1}{p_i} + 2\sum_{i<j} (\frac{\partial f}{\partial x_i})_0 (\frac{\partial f}{\partial x_j})_0 \frac{r_{ij}}{\sqrt{p_i p_j}}$$

Для оберненої ваги функції незалежних аргументів

$$\frac{1}{P_F} = \sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial f}{\partial x_i})_0^2 \frac{1}{p_i}$$

3. Ваги вимірів та функцій виміряних величин

Вага загальної арифметичної середини

Загальна арифметична середина $\tilde{x}$ є функцією $F = f(x_1,...,x_n)$ результатів нерівноточних вимірів $x_1, x_2,...,x_n$:

$$\tilde{x} = \frac{[xp]}{[p]} = \frac{x_1 p_1 + ... + x_n p_n}{[p]} = F$$

Застосовуючи до неї формулу обчислення оберненої ваги функції незалежних результатів вимірів

$$\frac{1}{P_F} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0^2 \frac{1}{p_i}$$

отримаємо:

$$\frac{1}{P_F} = \frac{1}{P_{\tilde{x}}} = \frac{p_1^2}{[p]^2} \cdot \frac{1}{p_1} + ... + \frac{p_n^2}{[p]^2} \cdot \frac{1}{p_n} = \frac{1}{[p]^2}(p_1 + ... + p_n) = \frac{1}{[p]}$$

Остаточно

$$P_{\tilde{x}} = [p]$$

4. Середня квадратична похибка одиниці ваги

Похибки вимірів і загальної арифметичної середини

Виділимо з результатів x_i нерівноточних вимірів величини значення x_k , в якого вага дорівнює одиниці, тобто $p_k = 1$. Середню квадратичну похибку m_k такого результату позначують μ. Тоді

$$p_k = \frac{\mu^2}{m_k^2} = 1 \qquad \text{і} \qquad \mu = m_k = \sqrt{c}$$

Величину μ називають середня квадратична похибка одиниці ваги. **Середня квадратична похибка одиниці ваги - це похибка результатів нерівноточних вимірів, в яких вага дорівнює одиниці.**

Беручи до уваги, що вага будь-якого результату $p_i = \frac{c}{m_i^2}$, отримаємо $\mu = m_i \sqrt{p_i}$. З цього слідує:

$$\boxed{m_i = \frac{\mu}{\sqrt{p_i}}}$$

тобто середні квадратичні похибки результатів нерівноточних вимірів величини виражаються через середню квадратичну похибку одиниці ваги і ваги відповідних результатів. Для середньої квадратичної похибки загальної арифметичної середини

$$\boxed{m_{\tilde{x}} = M = \frac{\mu}{\sqrt{P_{\tilde{x}}}} = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}}}$$

Таким чином, **середню квадратичну похибку одиниці ваги при оцінці точності нерівноточних вимірів потрібно обчислювати завжди** незалежно від того, чи є серед вимірів результати з вагою, яка дорівнює одиниці, чи такі результати відсутні.

5. Формули обчислення середньої квадратичної похибки одиниці ваги

Середня квадратична похибка одиниці ваги, обчислена за істинними похибками вимірів

За умови відомого істинного значення X вимірюваної величини можна оцінити:

1. Істинні похибки нерівноточних результатів вимірів .

$$\theta_i = x_i - X$$

2. Середню квадратичну похибку одиниці ваги

$$\boxed{\mu = \sqrt{\frac{[p\theta^2]}{n}}}$$

Дана формула називається **формула Гаусса** для обчислення похибки одиниці ваги. Вона є узагальненням формули Гаусса для оцінювання похибок результатів рівноточних вимірів і еквівалентна формулі характеристики середнього квадратичного відхилення (стандарту) σ розподілу випадкової величини, якою оперують у теорії ймовірностей і математичній статистиці.

За умови невідомого істинного значення X вимірюваної величини здійснити оцінювання точності результатів вимірів з використанням зазначених формул неможливо.

5. Формули обчислення середньої квадратичної похибки одиниці ваги

Відхилення результатів вимірів від загальної арифметичної середини

За умови невідомого істинного значення X вимірюваної величини його замінюють найбільш надійним значенням $\tilde{x}$, яке обчислюють за принципом загальної арифметичної середини. Тоді **в основу оцінки точності покладають відхилення**

$$v_i = x_i - \tilde{x}$$

Властивості відхилень v_i .

Обґрунтування властивостей здійснюється на такій же основі, як і для рівноточних вимірів.

1. Алгебраїчна сума добутків відхилень v_i на відповідні їм ваги p_i завжди дорівнює нулю: $[vp] = 0$

Якщо значення $\tilde{x}$ заокруглюють і має місце похибка заокруглення $\Delta = \tilde{x} - \tilde{x}_{окр}$, то $[vp] = \Delta[p]$.

2. Сума добутків квадратів відхилень v_i на відповідні їм ваги p_i мінімальна і завжди менша від суми добутків квадратів відхилень тих же результатів вимірів від будь-якої іншої величини $x' \neq \tilde{x}$, на відповідні їм ваги:

$$[pv^2] = \min < [p\varepsilon^2] \qquad \text{де} \qquad \varepsilon_i = x_i - x'$$

З цієї властивості слідує рівняння, яке використовують для контролю проміжних обчислень:

$$[pv^2] = [p\varepsilon^2] - \frac{[p\varepsilon]^2}{[p]}$$

5. Формули обчислення середньої квадратичної похибки одиниці ваги

Середня квадратична похибка одиниці ваги, обчислена за відхиленнями v_i.

Виразимо різницю $\theta_i - v_i$, беручи до уваги, що $\theta_i = x_i - X$ і $v_i = x_i - \tilde{x}$:

$$\theta_i - v_i = x_i - X - x_i + \tilde{x} = \tilde{x} - X = \eta$$

Величина $\eta = \theta_F$ - це **істинна похибка загальної арифметичної середини**.

Здійснимо арифметичні перетворення рівняння $\theta_i = v_i + \eta$: $\theta_i^2 = v_i^2 + \eta^2 + 2v_i\eta$

$$\theta_i^2 p_i = v_i^2 p_i + \eta^2 p_i + 2v_i\eta p_i \qquad [\theta^2 p] = [v^2 p] + \eta^2 [p] + 2\eta[vp] = [v^2 p] + \eta^2 [p]$$

$$\frac{[\theta^2 p]}{n} = \frac{[v^2 p]}{n} + \frac{\eta^2 [p]}{n} = \mu^2$$, що слідує з формули Гаусса $$\mu = \sqrt{\frac{[p\theta^2]}{n}}$$

Беручи до уваги граничну умову $\lim\limits_{n\to\infty} M = \eta$, маємо $\eta^2 = M^2 = \frac{\mu^2}{[p]}$, де $M = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}}$.
На цій основі:

$$\mu^2 = \frac{[v^2 p]}{n} + \frac{[p]}{n}\frac{\mu^2}{[p]} = \frac{[v^2 p]}{n} + \frac{\mu^2}{n} \qquad \frac{[v^2 p]}{n} = \mu^2 - \frac{\mu^2}{n} = \frac{\mu^2 (n-1)}{n} \qquad [v^2 p] = \mu^2 (n-1)$$

Остаточно: $$\boxed{\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-1}}}$$

Отримана формула називається **формула Бесселя** для обчислення середньої квадратичної похибки одиниці ваги за відхиленнями результатів вимірів від загальної арифметичної середини.

Черговість дій
при математичній обробці результатів нерівноточних вимірів величини

1. Обчислення ваг вимірів за аналізом умов проведення вимірів і підставами вважати отримані результати нерівноточними.

2. Обчислення найбільш надійного значення (загальної арифметичної середини) за формулами

$$\tilde{x} = \frac{[xp]}{[p]} \quad \text{або} \quad \tilde{x} = x_{\min} + \frac{[p\varepsilon]}{[p]}$$

3. Обчислення відхилень $v_i = x_i - \tilde{x}$ та $\varepsilon_i = x_i - x_{\min}$.

Контролі обчислень: 1) $[vp] = \Delta[p]$, де $\Delta = \tilde{x} - \tilde{x}_{окр}$ 2) $[pv^2] = [p\varepsilon^2] - \frac{[p\varepsilon]^2}{[p]}$

4. Обчислення середньої квадратичної похибки одиниці ваги за формулою Бесселя

$$\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-1}}$$

5. Обчислення середніх квадратичних похибок вимірів

$$m_i = \frac{\mu}{\sqrt{p_i}}$$

6. Обчислення середньої квадратичної похибки загальної арифметичної середини

$$m_{\tilde{x}} = M = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}}$$

Довірчий інтервал для істинного значення величини

Загальна арифметична середина $\tilde{x}$ приблизно виражає істинне значення величини X. Похибку заміни невідомого істинного значення простою арифметичною серединою можна визначити шляхом побудови довірчого інтервалу I_β при заданій довірчій імовірності β , використовуючи $\tilde{x}$ та її середню квадратичну похибку M :

$$I_\beta = \left(\tilde{x} - t_\beta M; \tilde{x} + t_\beta M\right)$$

При кількості вимірів $n < 20$ коефіцієнт t_β визначають з таблиць розподілу Стьюдента.

При кількості вимірів $n \geq 20$ розподіл Стьюдента мало відрізняється від нормального, тому коефіцієнт t_β визначають як параметр нормального закону розподілу на основі формули

$$t_\beta = \arg \Phi^*\left(\frac{1+\beta}{2}\right)$$

Довірчий інтервал I_β вказує границі, в яких з ймовірністю β буде знаходитись невідоме істинне значення вимірюваної величини X :

$$\tilde{x} - t_\beta M \leq X \leq \tilde{x} + t_\beta M$$

Оцінка точності значень середніх квадратичних похибок

При великій кількості вимірів середні квадратичні похибки одиниці ваги μ, вимірів m_i та найбільш надійного значення M обчислюються достатньо надійно.
На практиці часто кількість вимірів обмежена порядком 10-20. В таких випадках похибки μ, m_i та M є сумнівними і в достатній мірі неточними. Тому при математичній обробці результатів за кількістю вимірів $n < 20$ рекомендується виконувати оцінку точності середніх квадратичних похибок μ, m_i та M. Для цього обчислюють середні квадратичні похибки m_μ, m_{m_i} та m_M значень відповідних середніх квадратичних похибок :

$$m_\mu \approx \frac{\mu}{\sqrt{2(n-1)}} \qquad m_{m_i} \approx \frac{m_i}{\sqrt{2(n-1)}} \qquad m_M \approx \frac{M}{\sqrt{2(n-1)}}$$