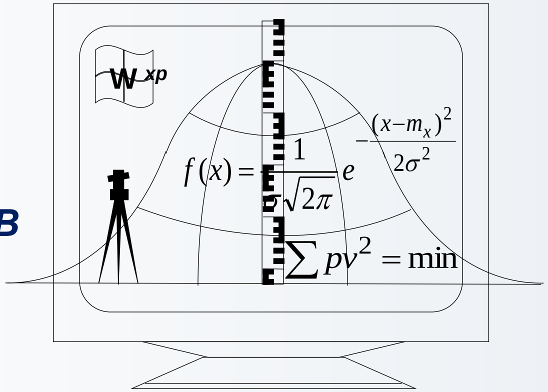
Національний університет
водного господарства
та природокористування

Кафедра геодезії та картографії

Спеціальність 193 “Геодезія та землеустрій”

Дисципліна ***МАТЕМАТИЧНА ОБРОБКА ГЕОДЕЗИЧНИХ ВИМІРІВ***
Модуль 2 ***ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОХИБОК ВИМІРІВ***



Лектор О.А.Тадєєв

Тема 1

ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ ТЕОРІЇ ПОХИБОК ВИМІРІВ

1. Предмет і завдання теорії похибок вимірів
2. Відомості про виміри та їх точність. Класифікація вимірів та похибок
3. Критерії точності результатів вимірів та обчислень
4. Оцінка точності функцій виміряних величин

Література

Базова

1. Войтенко С.П. Математична обробка геодезичних вимірів. Теорія похибок вимірів. Навч. посібник. – К.: КНУБА, 2003. – 216с.
2. Зазуляк П.М., Гавриш В.І., Євсєєва Е.М., Йосипчук М.Д. Основи математичного опрацювання геодезичних вимірювань. Підручник. – Львів: Растр-7, 2007. – 408 с.

Допоміжна

1. Большаков В.Д., Гайдаев П.А. Теория математической обработки геодезических измерений. Підручник. – М.: Недра, 1977. – 367с.
2. Большаков В.Д., Маркузе Ю.И. Практикум по теории математической обработки геодезических измерений. Навч. посібник. – М.: Недра, 1984. – 352с.
3. Большаков В.Д. Теория ошибок наблюдений. Підручник. – М.: Недра, 1983. – 223с.
4. Бугай П.Т. Теорія помилок і спосіб найменших квадратів. Підручник. – Львів: ЛДУ, 1960. – 366с.
5. Видуев Н.Г., Григоренко А.Г. Математическая обработка геодезических измерений. Навч посібник. – К.: Вища школа, 1978. – 376с.
6. Мазмишвили А.И. Способ наименьших квадратов. Навч. посібник. – Москва: Недра, 1968. – 437с.

Література

Методичне забезпечення

1. Основи теорії похибок вимірів. Методичні вказівки до виконання самостійних та практичних робіт з дисципліни «Математична обробка геодезичних вимірів» студентами спеціальності 193 «Геодезія та землеустрій» ***05-04-46*** / О.А. Тадєєв, Т.І. Дець – Рівне: НУВГП, 2014. – 40с.

2. Методичні вказівки до виконання розрахунково-графічної роботи №2 з дисципліни «Математична обробка геодезичних вимірів» студентами спеціальності 193 «Геодезія та землеустрій» ***05-04-79*** / О.А. Тадєєв, Т.І. Дець - Рівне: НУВГП, 2018. – 41 с.

1. Предмет і завдання теорії похибок вимірів

Будь-які виміри завжди супроводжуються похибками – відхиленнями виміряних значень величин від їх істинних значень. Отримати абсолютно безпомилково результати вимірів неможливо. Вдосконалюючи прилади і методи вимірів, можна лише наближати результат виміру величини до її істинного значення.
З цієї причини всякий результат виміру розглядають з двох точок зору:
- кількісної – це, власне, є отримане значення величини.
- якісної – це є точність отриманого значення (похибка, якою обтяжене отримане значення). Точність завжди виражається конкретними усталеними числовими критеріями.

Базові терміни:

Вимір величини – процес її порівняння з однорідною фізичною величиною, яку прийнято одиницею міри.

Результат виміру величини – підсумок виконання усіх вимірювальних дій.

Точність виміру величини – це числовий критерій, який є імовірнісною характеристикою відхилень отриманих результатів вимірів величини від її істинного значення.

Всі величини, якими оперують в геодезії, розділяють на два види:
- ***виміряні*** – їх наближені значення отримують безпосередніми вимірами.
- ***обчислені*** (або посередні) – їх визначають шляхом обчислень як функції виміряних величин.

1. Предмет і завдання теорії похибок вимірів

Теорія похибок вимірів – розділ математичної обробки геодезичних вимірів, який вивчає засоби і методи кількісного та якісного описування результатів вимірів та їх функцій.

***Основні завдання теорії похибок вимірів*:**

1. Систематизація вимірів та їх похибок.

2. Вивчення законів виникнення та розподілу похибок вимірів.

3. Встановлення критеріїв і методів оцінювання точності вимірів.

4. Визначення найбільш надійних значень результатів вимірів окремих величин та оцінка їх точності

5. Оцінювання точності функцій результатів вимірів.

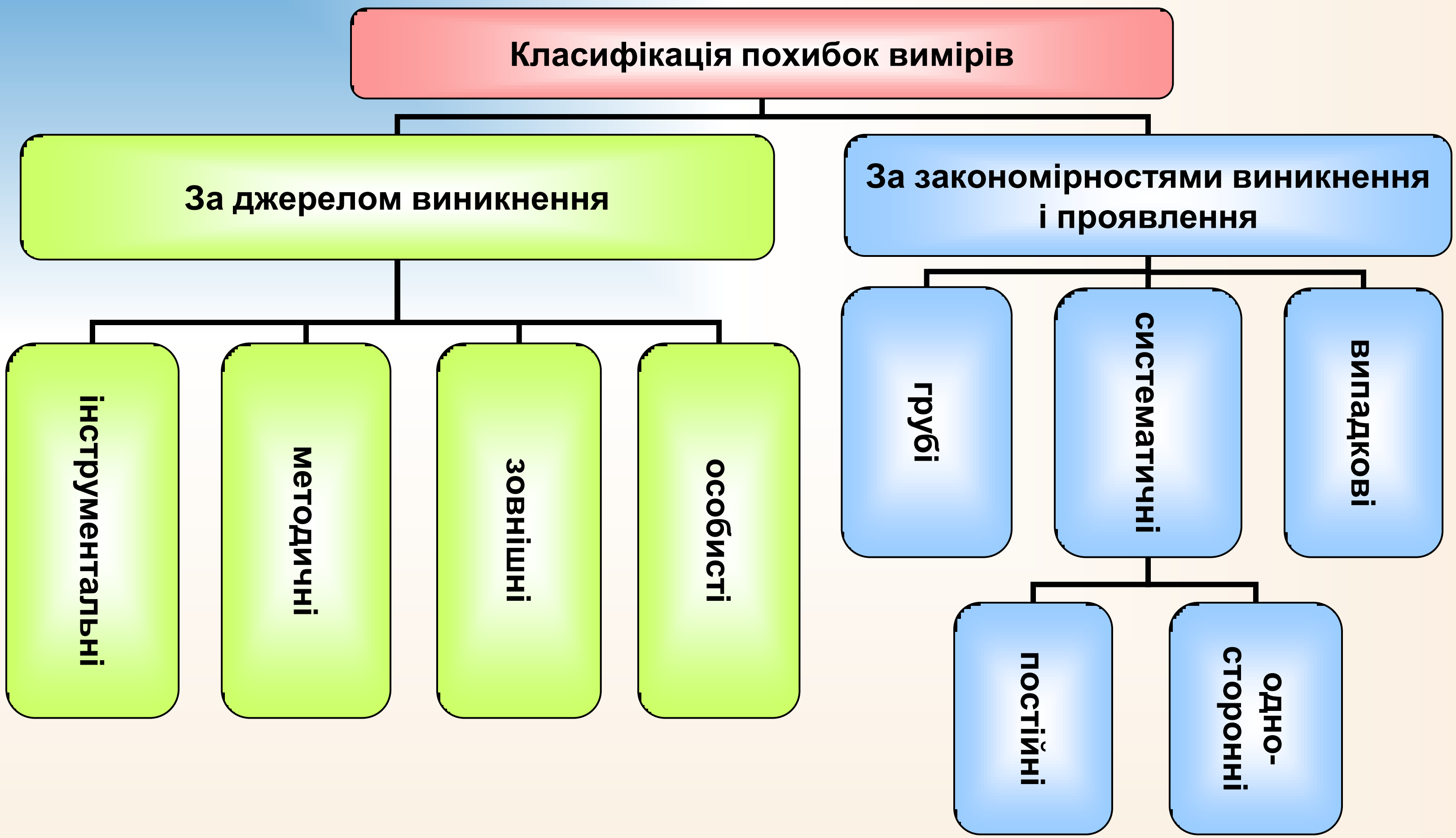
2. Відомості про виміри та їх точність

Класифікація вимірів та похибок

- **Класифікація вимірів**
  - **За чисельністю**
    - загальні
    - необхідні
    - надлишкові
  - **За точністю**
    - рівноточні
    - нерівноточні

2. Відомості про виміри та їх точність

Класифікація вимірів та похибок



2. Відомості про виміри та їх точність

Класифікація вимірів та похибок
Випадкові похибки вимірів

Випадкові похибки вимірів є типовим прикладом неперервних випадкових величин. Їх конкретні значення неможливо передбачити наперед; можна визначити лише границі, в яких випадкові похибки набувають значень.

Властивості випадкових похибок вимірів є наслідком їх підпорядкованості нормальному законові розподілу:

1. Додатні та від'ємні похибки рівноможливі:

$$p(\theta > 0) = p(\theta < 0) = \frac{1}{2}$$

2. Середнє арифметичне значень похибок при необмеженому зростанні числа вимірів гранично прямує до нуля:

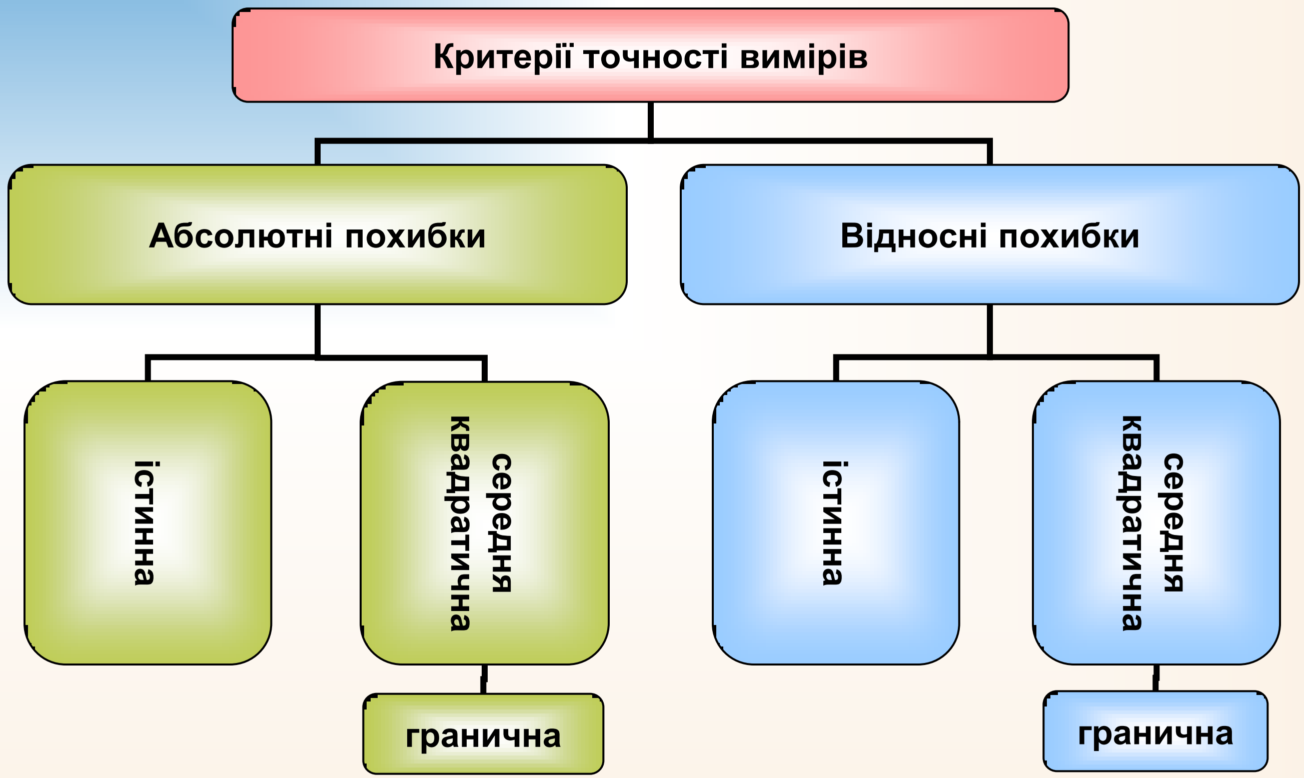
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} \theta_i}{n} = 0$$

3. Малі за абсолютною величиною значення похибок трапляються частіше, ніж великі. Це слідує з властивості функції щільності нормального закону розподілу

4. Абсолютні значення похибок із заданою імовірністю не перевищують границю, яку встановлює “правило трьох сигма” нормального закону розподілу :

$$m_x \pm 3\sigma$$

3. Критерії точності результатів вимірів та обчислень



3. Критерії точності результатів вимірів та обчислень

Істинна похибка

Істинна похибка θ_i - це відхилення результату виміру x_i від істинного значення величини X :

$$\theta_i = x_i - X$$

Істинна похибка включає в себе дві складові:

1) випадкова складова ζ_i - це відхилення результату виміру x_i від математичного сподівання $M[x]$

$$\zeta_i = x_i - M[x]$$

2) систематична складова δ - це відхилення математичного сподівання $M[x]$ від істинного значення X

$$\delta = M[x] - X$$

Разом

$$\theta_i = \zeta_i + \delta = x_i - M[x] + M[x] - X = x_i - X$$

Для оцінювання точності результатів вимірів з використанням істинної похибки необхідно знати істинне значення вимірюваної величини. У випадку повторних вимірів окремої величини здебільшого такої можливості немає. Однак цей критерій має практичне використання при оцінюванні точності функцій результатів вимірів.

3. Критерії точності результатів вимірів та обчислень

Середня квадратична похибка

Середня квадратична похибка m - це критерій точності, який визначається за розсіюванням значень результатів вимірів x_i величини і відповідає за змістом характеристиці розсіювання сукупності отриманих результатів, яку в теорії ймовірностей і математичній статистиці називають середнє квадратичне відхилення (стандарт) σ :

$$m = \sigma$$

Якщо взяти до уваги, що $m^2 = \sigma^2 = D_x = \mu_2$ - це дисперсія (другий центральний момент), яка відповідає математичному сподіванню квадрату випадкової величини, то отримаємо наступне :

$$m^2 = M[\theta^2] = M[\zeta^2 + \delta^2 + 2\zeta\delta] = M[\zeta^2] + M[\delta^2]$$

Величина $M[\zeta^2] = m_\zeta^2$ - це дисперсія випадкової величини x . Величина $M[\delta^2] = m_\delta^2$ - це дисперсія випадкової величини δ . Тому

$$m^2 = m_\zeta^2 + m_\delta^2 \qquad \text{або} \qquad m = \sqrt{m_\zeta^2 + m_\delta^2}$$

Висновок:

Середня квадратична похибка виміру характеризує сумісний вплив на нього як випадкових похибок m_ζ , так і систематичних похибок m_δ .

За умови врахування систематичних похибок, беручи до уваги властивості випадкових похибок щодо підпорядкованості нормальному законові розподілу, можна оцінити діапазон допустимості похибок вимірів з використанням ***граничної середньої квадратичної похибки*** $m_{гран} = 3m$. Тут за основу взято “правило трьох сигма” нормального закону.

В геодезії середня квадратична похибка є основним критерієм оцінювання точності результатів вимірів величин та їх функцій.

3. Критерії точності результатів вимірів та обчислень

Відносна похибка

Відносною похибкою називають відношення тієї чи іншої абсолютної похибки до отриманого значення вимірюваної величини.

Відносну похибку виражають у вигляді дробу з чисельником, який дорівнює одиниці. Якщо x - це отримане значення величини, то

$\frac{\theta}{x} = \frac{1}{N_1}$ - відносна істинна похибка вимірюваної величини, де $N_1 = \frac{x}{\theta}$;

$\frac{m}{x} = \frac{1}{N_2}$ - відносна середня квадратична похибка величини, де $N_2 = \frac{x}{m}$;

$\frac{m_{гран}}{x} = \frac{1}{N_3}$ - відносна гранична середня квадратична похибка величини, де $N_3 = \frac{x}{m_{гран}}$.

Критеріями відносної похибки зручно користуватись при оцінюванні точності лінійних вимірів. Тоді вони виражають точність виміру довжини у розрахунку на одиницю міри довжини, наприклад, на один метр.

4. Оцінка точності функцій виміряних величин

Постановка задачі

Задано:

Функція загального вигляду $F = f(x_1,\ldots,x_n)$

$x_1,\ldots,x_n$ - виміряні аргументи функції;

$m_1,\ldots,m_n$ - середні квадратичні похибки аргументів;

$X_1,\ldots,X_n$ - істинні значення аргументів;

$\theta_1,\ldots,\theta_n$ - істинні похибки аргументів: $\theta_i = x_i - X_i$

Визначити:

Істинна похибка функції: θ_F – ?

Середня квадратична похибка функції: m_F – ?

4. Оцінка точності функцій виміряних величин

Істинна похибка функції (нев'язка) виражається різницею значення функції, яке обчислене за виміряними аргументами, і теоретичного значення функції:

$$\theta_F = f(x_1,\ldots,x_n) - f(X_1,\ldots,X_n)$$

З визначення істинної похибки $\theta_i = x_i - X_i$ слідує: $X_i = x_i - \theta_i$. Тому

$$\theta_F = f(x_1,\ldots,x_n) - f(x_1-\theta_1,\ldots,x_n-\theta_n)$$

Вираження теоретичного значення функції розкладаємо в ряд Тейлора:

$$\theta_F = f(x_1,\ldots,x_n) - f(x_1,\ldots,x_n) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_0 \cdot \theta_1 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_0 \cdot \theta_n + R$$

Залишковий член розкладу, який дорівнює сумі всіх нелінійних членів ряду, гранично $R \to 0$, оскільки похибки вимірів аргументів завжди малі порівняно з їх виміряними абсолютними значеннями. Тому величиною R можна нехтувати. Остаточно для істинної похибки функції отримуємо:

$$\boxed{\theta_F = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_0 \cdot \theta_1 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_0 \cdot \theta_n}$$

4. Оцінка точності функцій виміряних величин

Середня квадратична похибка функції виражається через математичне сподівання квадрату її істинної похибки:

$$m_F^2 = M[\theta_F^2] = (\frac{\partial f}{\partial x_1})_0^2 \cdot M[\theta_1^2] + \ldots + (\frac{\partial f}{\partial x_n})_0^2 \cdot M[\theta_n^2] + 2(\frac{\partial f}{\partial x_1})_0 \cdot (\frac{\partial f}{\partial x_2})_0 \cdot M[\theta_1 \cdot \theta_2] + \ldots$$

В компактній формі

$$m_F^2 = \sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial f}{\partial x_i})_0^2 \cdot M[\theta_i^2] + 2\sum_{i<j} (\frac{\partial f}{\partial x_i})_0 \cdot (\frac{\partial f}{\partial x_j})_0 \cdot M[\theta_i \cdot \theta_j]$$

Відомо: $M[\theta_i^2] = m_i^2$.

Невідомо: $M[\theta_i \cdot \theta_j] - ?$ Його можна виразити через формулу обчислення коефіцієнта кореляції:

$$r_{1,2} = \frac{K_{1,2}}{\sigma_1 \cdot \sigma_2} = \frac{M[(x_1 - X_1)(x_2 - X_2)]}{\sigma_1 \cdot \sigma_2} = \frac{M[\theta_1 \cdot \theta_2]}{m_1 \cdot m_2}$$

Звідки $M[\theta_1 \cdot \theta_2] = r_{1,2} \cdot m_1 \cdot m_2$. Тому

$$\boxed{m_F^2 = \sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial f}{\partial x_i})_0^2 \cdot m_i^2 + 2\sum_{i<j} (\frac{\partial f}{\partial x_i})_0 \cdot (\frac{\partial f}{\partial x_j})_0 \cdot r_{i,j} \cdot m_i \cdot m_j}$$

Отриманою формулою виражається середня квадратична похибка функції залежних аргументів. Якщо аргументи функції незалежні, то їх попарно взяті коефіцієнти кореляції дорівнюють нулю. Тому для незалежних аргументів

$$\boxed{m_F^2 = \sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial f}{\partial x_i})_0^2 \cdot m_i^2}$$

4. Оцінка точності функцій виміряних величин

Розрахунок точності вимірів величин (аргументів) за похибкою функції

Задача розв’язується моделюванням умов вимірів аргументів. Задана похибка функції розподіляється між похибками аргументів за тим чи іншим принципом залежно від очікуваних умов проведення вимірів.

1. Принцип рівного впливу. На розв’язок накладається умова, що вплив похибок аргументів на точність функції є рівним, тобто

$$\frac{m_F^2}{n} = m_0^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_o^2 m_1^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_o^2 m_2^2 = \ldots = \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_o^2 m_n^2$$

Тут похибка m_0 оцінює середній вплив кожного аргумента на точність функції. Тоді середні квадратичні похибки вимірів окремих аргументів з врахуванням вигляду функції виражає формула

$$m_i = \frac{m_0}{\left|\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_o\right|} = \frac{m_F}{\left|\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_o\right|\sqrt{n}}$$

4. Оцінка точності функцій виміряних величин

Розрахунок точності вимірів величин (аргументів) за похибкою функції

2. Принцип пропорційного впливу

Можна змоделювати умови вимірів таким чином, що похибка функції буде розподілятись між аргументами нерівномірно. Тоді аргументи функції можна вимірювати з більшими чи меншими похибками залежно від точності наявних приладів, доступних методів вимірів чи у відповідності до тих чи інших нормативних інструкцій. За таких умов кожному аргументу потрібно встановити відповідний коефіцієнт K_i пропорційно його впливу на точність функції. Тоді

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0 m_i = K_i m_0 \qquad m_F = m_0\sqrt{\sum_{i=1}^{n} K_i^2}$$

За такого підходу середня квадратична похибка виміру окремого аргументу виразиться формулою

$$m_i = \frac{K_i m_0}{\left|\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0\right|}$$

Такий спосіб розрахунку точності виміру аргументів опирається на принцип пропорційного впливу. Він забезпечує оптимальне обґрунтоване вирішення задачі, опираючись на співвідношення точності приладів та методів вимірів різних величин.