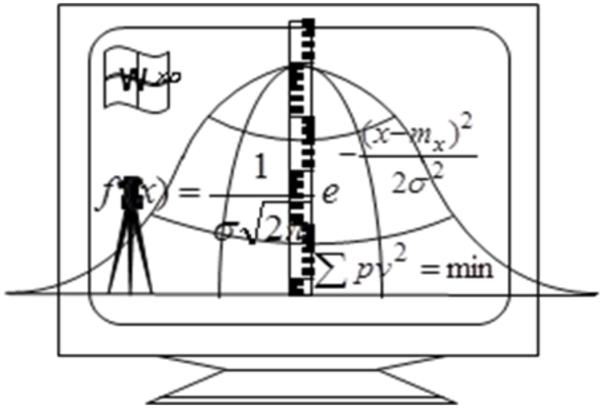
Національний університет
водного господарства
та природокористування

Кафедра геодезії та картографії

Спеціальність 193 “Геодезія та землеустрій”



***Дисципліна* МАТЕМАТИЧНА ОБРОБКА ГЕОДЕЗИЧНИХ ВИМІРІВ**

***Модуль 3* МЕТОД НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ**

Лектор О.А. Тадєєв

Тема 1

ПРИНЦИП НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ ТА ЗАВДАННЯ ЗРІВНОВАЖУВАННЯ ВИМІРІВ У ГЕОДЕЗИЧНИХ МЕРЕЖАХ

1. Зміст завдання сумісної обробки результатів вимірів кількох величин
2. Принцип найменших квадратів
3. Зв'язок принципу найменших квадратів з принципом арифметичної середини
4. Способи розв’язування завдання зрівноважування

Література

Базова

1. Войтенко С.П. Математична обробка геодезичних вимірів. Метод найменших квадратів. Навч. посібник. – К.: КНУБА, 2005. – 236 с.
2. Зазуляк П.М., Гавриш В.І., Євсєєва Е.М., Йосипчук М.Д. Основи математичного опрацювання геодезичних вимірювань. Підручник. – Львів: Растр-7, 2007. – 408 с.

Допоміжна

1. Большаков В.Д., Гайдаев П.А. Теория математической обработки геодезических измерений. Підручник. – М.: Недра, 1977. – 367с.
2. Большаков В.Д., Маркузе Ю.И., Голубев В.В. Уравнивание геодезических построений. Навч. посібник. – М.: Недра, 1989. – 413с.
3. Большаков В.Д., Маркузе Ю.И. Практикум по теории математической обработки геодезических измерений. Навч. посібник. – М.: Недра, 1984. – 352с.
4. Бугай П.Т. Теорія помилок і спосіб найменших квадратів. Підручник. – Львів: ЛДУ, 1960. – 366с.
5. Видуев Н.Г., Григоренко А.Г. Математическая обработка геодезических измерений. Навч посібник. – К.: Вища школа, 1978. – 376с.
6. Мазмишвили А.И. Способ наименьших квадратов. Навч. посібник. – Москва: Недра, 1968. – 437с

Література

Методичне забезпечення

1. Зрівноважування результатів вимірів параметричним способом. Методичні вказівки до виконання самостійних та практичних робіт з дисципліни «Математична обробка геодезичних вимірів» студентами спеціальності 193 «Геодезія та землеустрій» ***05-04-32*** / О.А. Тадєєв, Т.І. Дець – Рівне: НУВГП, 2014. – 46с.

2. Зрівноважування результатів вимірів корелатним способом. Методичні вказівки до виконання самостійних та практичних робіт з дисципліни «Математична обробка геодезичних вимірів» студентами спеціальності 193 «Геодезія та землеустрій» ***05-04-33*** / О.А. Тадєєв, Т.І. Дець – Рівне: НУВГП, 2014. – 46с.

3. Побудова емпіричних формул методом найменших квадратів. Методичні вказівки до виконання самостійних та практичних робіт з дисципліни «Математична обробка геодезичних вимірів» студентами спеціальності 193 «Геодезія та землеустрій» ***05-04-74*** / О.А. Тадєєв, Т.І. Дець – Рівне: НУВГП, 2017. – 28с.

4. Методичні вказівки до виконання розрахунково-графічної роботи №2 з дисципліни «Математична обробка геодезичних вимірів» студентами спеціальності 193 «Геодезія та землеустрій» ***05-04-79*** / О.А. Тадєєв, Т.І. Дець - Рівне: НУВГП, 2018. – 41 с.

1. Зміст завдання сумісної обробки результатів вимірів кількох величин

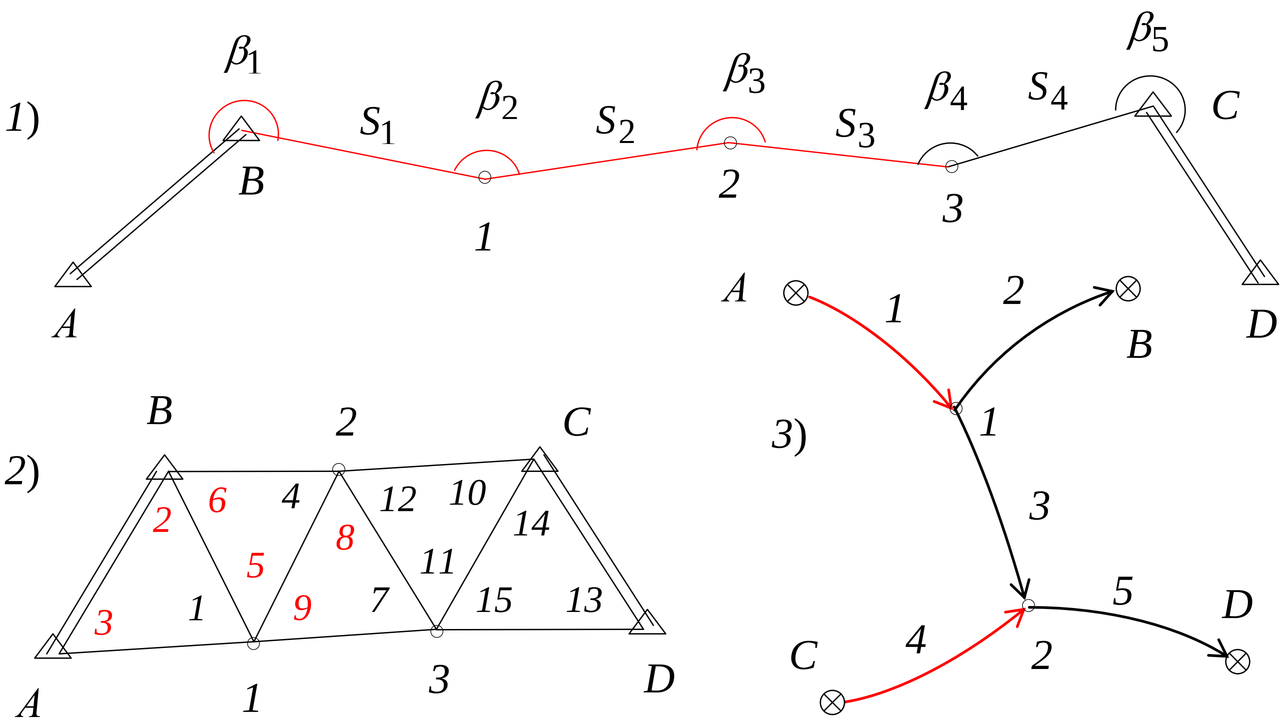
Теорія похибок вимірів розв’язує завдання математичної обробки багаторазових вимірів однієї величини. Таке завдання є частковим випадком задачі сумісної обробки сукупності результатів вимірів багатьох величин. Серед них необхідно розрізняти:

- ✓ загальне число вимірюваних величин
- ✓ необхідне число вимірюваних величин
- ✓ надлишкове число вимірюваних величин

В геодезичних задачах **загальне число вимірюваних величин *n*** завжди перевищує число вимірів необхідних величин k. **Необхідними називають *k* величин, яких мінімально достатньо для розв’язування задачі**. Виміри тільки необхідних величин не гарантують правдивість отриманого результату розв’язку задачі. **Різниця** $r = n - k$ **називається числом надлишкових (або додаткових) вимірів**. Надлишкові виміри окремої величини дають можливість здійснити контроль вимірів, виконати їх обробку з метою розрахунку надійного кінцевого значення, підвищують його точність і забезпечують її оцінку за тим чи іншим критерієм. Надлишкові виміряні величини в задачі сумісної обробки сукупності результатів вимірів величин, крім того, підвищують точність результатів розв’язку задачі, забезпечують контроль кінцевих результатів розв’язку з оцінкою їх точності.

Наявність надлишкових виміряних величин є обов’язковою !

Наприклад, в задачі прокладення полігонометричного ходу, зображеного на малюнку *1*, $n = 9$, $k = 6$, $r = 3$; для мережі тріангуляції (малюнок *2*) $n = 15$, $k = 6$, $r = 9$; для нівелірної мережі (малюнок *3*) $n = 5$, $k = 2$, $r = 3$.



Разом з надлишковими вимірами вирішальною умовою досягнення розв’язку задачі сумісної обробки вимірів багатьох величин є **наявність між вимірюваними величинами математичних взаємозв'язків**. Умови математичних співвідношень, якими виражаються ці зв’язки, після розв’язування задачі повинні задовольнятись. Наприклад, сума внутрішніх кутів трикутника, сума перевищень замкненого нівелірного ходу.

Задача сумісної обробки сукупності результатів вимірів багатьох величин, які зв’язані поміж собою математичними умовами, з метою знаходження найбільш надійних значень та оцінки точності цих величин і їх функцій, **називається зрівноважуванням результатів вимірів**.

У загальній формі зв’язки між вимірюваними величинами виражаються рівняннями

$$\varphi_j(X_1,\ldots,X_n)=0,$$

де X_i - істинні значення величин; $i=\overrightarrow{1,n}$; n – число величин. Серед складених рівнянь можуть бути такі, котрі залежні між собою. Із загального числа рівнянь потрібно враховувати лише незалежні рівняння. Вони завжди сформують систему рівнянь, число яких дорівнює числу надлишкових вимірів r: $j=\overrightarrow{1,r}$. Інші можливі рівняння будуть наслідками незалежних рівнянь сформованої системи. Утворена таким чином система рівнянь називається системою умовних рівнянь. Число умовних рівнянь r завжди менше числа невідомих величин n. Тому система умовних рівнянь є невизначеною і допускає нескінченне число розв’язків.

Умовні рівняння, складені з результатами вимірів величин x_i, мають вигляд

$$\varphi_j(x_1,\dots,x_n)=W_j.$$

Величини W_j називають нев'язками умовних рівнянь. Нев'язки – це істинні похибки функцій φ_j. Вони є наслідком впливу на результати вимірів похибок різного походження. Нев'язки виражають сумарну похибку вимірів тих величин, які є аргументами відповідних умовних рівнянь. Для здобуття розв'язку задачі зрівноважування результатів вимірів необхідно позбутись нев'язок умовних рівнянь. Це досягають виправленням результатів вимірів шляхом введення до них поправок v_i:

$$x_i+v_i=\tilde{x}_i.$$

Поправки v_i за абсолютним значенням повинні дорівнювати, а за знаком бути протилежними істинним похибкам вимірів величин. **Найбільш надійні значення $\tilde{x}_i$ називають зрівноваженими результатами вимірів**. Умовні рівняння, складені за зрівноваженими результатами, мають вигляд

$$\varphi_j(\tilde{x}_1,\dots,\tilde{x}_n)=0,$$

тобто **зрівноважені результати вимірів величин повинні задовольняти математичні умови, які закладені в умовних рівняннях**.

Отже, **мета зрівноважування** – визначити поправки v_i, які дозволять виправити результати вимірів і позбутись нев'язок умовних рівнянь.

Причина виникнення завдання зрівноважування – наявність похибок у результатах вимірів величин.

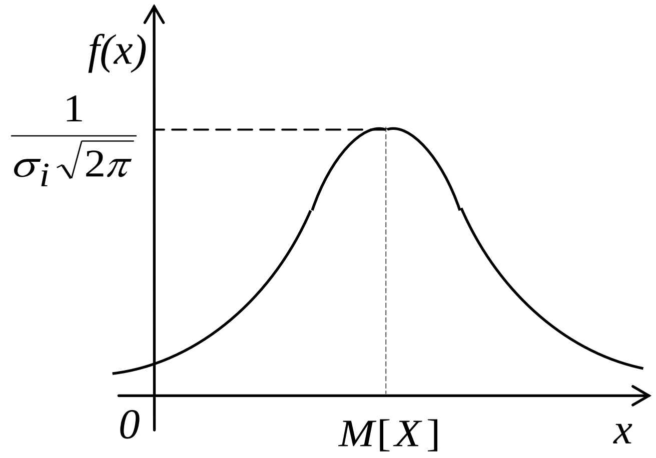
Основні умовами, які забезпечують розв'язок завдання, – це наявність надлишкових виміряних величин і математично виражених взаємозв'язків між усіма вимірюваними величинами.

Розв'язок окресленого завдання досягається за принципом найменших квадратів.

2. Принцип найменших квадратів

За умови нормального розподілу сукупності істинних похибок вимірів θ_i $(i = \overrightarrow{1,n})$ ймовірність цієї сукупності досягає свого максимуму $\frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}}$ при абсолютному значенні показника степені в функції щільності нормального закону $f(x_i) = \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i - X_i)^2}{2\sigma_i^2}}$, який буде найменший:

$$\left[\frac{\theta^2}{\sigma^2}\right] = \min .$$



Сукупність похибок θ_i, котра задовольняє такій умові, буде найбільш ймовірною з огляду на якість вимірів – грубі похибки вимірів відсутні, а їх систематична складова максимально врахована.

Беручи до уваги, що середня квадратична похибка виміру m за своїм змістом відповідає середньому квадратичному відхиленню (стандарту) σ, а в чисельному відношенні вони дорівнюють одне одному, маємо:

$$\left[\frac{\theta^2}{m^2}\right] = \min .$$

Якщо на поправки v_i накласти умову $\left[\frac{v^2}{m^2}\right] = \min$, то їх сукупність в імовірнісному відношенні буде найкраще наближатись до сукупності похибок θ_i. Оскільки за умовою поправки повинні ліквідовувати нев'язки, то за знаком вони мають бути протилежні до істинних похибок відповідних вимірів. Враховуючи зв'язок середньої квадратичної похибки m та ваги p результату виміру $p_i = \frac{c}{m_i^2}$, остаточно отримаємо:

$[pv^2] = \min$ або $[v^2] = \min$ за умови зрівноважування рівноточних результатів вимірів.

Одержана умова є математичним вираженням принципу найменших квадратів.

Задача зрівноважування розв'язується здебільшого для великих масивів результатів вимірів. Тоді представлення даних і розв'язок задачі зручно виконувати у матричній формі. Масив поправок до результатів вимірів формує матрицю $\underset{n\times 1}{V}=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix}$, а ваги вимірів – діагональну вагову матрицю $\underset{n\times n}{P}=\begin{pmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & p_n \end{pmatrix}$.

Тоді умова принципу найменших квадратів виражається функцією

$$\underset{1\times n}{V}^T \cdot \underset{n\times n}{P} \cdot \underset{n\times 1}{V} = \min$$

або

$$\underset{1\times n}{V}^T \cdot \underset{n\times 1}{V} = \min$$

за умови зрівноважування рівноточних результатів вимірів.

Оскільки кількість умовних рівнянь $\varphi_j(X_1,...,X_n)=0$ менша від числа невідомих істинних значень вимірюваних величин X_i, то система умовних рівнянь є невизначеною і допускає нескінченне число розв'язків. З усіх можливих, **розв'язок за умовою принципу найменших квадратів є однозначним і у порівнянні з іншими має деякі істотні переваги**. Головні з них такі:

1) наявність v_i^2 обмежує великі за абсолютною величиною поправки. Ця властивість передусім важлива у випадку зрівноважування рівноточних вимірів, оскільки отримані поправки будуть більш-менш рівномірно розподілятись поміж результатами вимірів;

2) у випадку зрівноважування нерівноточних вимірів ваги p_i при v_i^2 зменшують поправки до більш точних та збільшують поправки до менш точних результатів вимірів.

3. Зв'язок принципу найменших квадратів з принципом арифметичної середини

Принцип найменших квадратів – це загальний принцип математичної обробки результатів усіх геодезичних вимірів, у тому числі повторних вимірів окремої величини. Це легко обґрунтувати шляхом виконання нескладних арифметичних дій. Наприклад, виразимо за умовою принципу найменших квадратів найбільш надійне значення $\tilde{x}$ результатів n нерівноточних вимірів x_i окремої величини X, які отримано з вагами p_i $(i=\overrightarrow{1,n})$. Оскільки $x_i - \tilde{x} = v_i$, то відповідно до умови принципу найменших квадратів маємо: $F(x) = [p(x-\tilde{x})^2] = \min$. Для забезпечення мінімуму функції $F(x)$ її частинна похідна має дорівнювати нулю: $\frac{\partial F}{\partial x} = [p(x-\tilde{x})] = 0$. Звідси $[px] - \tilde{x}[p] = 0$ і остаточно $\tilde{x} = \frac{[px]}{[p]}$. Отримана формула виражає принцип загальної арифметичної середини. Якщо аналогічні дії виконати з метою визначення найбільш надійного значення для результатів рівноточних вимірів окремої величини, то отримаємо формулу, яка виражає принцип простої арифметичної середини: $\tilde{x} = \frac{[x]}{n}$.

Отже, якщо потрібно виразити кінцеве значення окремої вимірюваної величини за умовою принципу найменших квадратів, то для цього достатньо скористатись формулами загальної (або простої) арифметичної середини. Отримані результати засвідчують зв'язок принципу найменших квадратів та принципу арифметичної середини.

4. Способи розв'язування завдання зрівноважування

Задача зрівноважування результатів вимірів величин за умовою принципу найменших квадратів з математичної точки зору – це **задача знаходження умовного екстремуму: необхідно виразити мінімум функції** $[pv^2] = \min$**, якщо змінні** v_i **зв'язані поміж собою незалежними умовними рівняннями**. Така задача може бути розв'язана шляхом виконання різних математичних дій. На практиці вони зводяться до проведення обчислювальних процедур у межах окремих способів зрівноважування результатів вимірів. Усі способи зрівноважування ділять на три групи:

1) **параметричний (його ще називають способом посередніх вимірів або необхідних невідомих);**
2) **корелатний (або спосіб умов чи умовних вимірів);**
3) **видозмінені та комбіновані способи зрівноважування (або інакше видозміни чи комбінації параметричного та корелатного способів).**

Незважаючи на відмінності закладених у способах обчислювальних процедур, **усі способи еквівалентні** – вони забезпечують однакові у межах заданої точності кінцеві результати зрівноважування.

На практиці під час розв'язування поставленої задачі вибирають оптимальний спосіб, виходячи з таких критеріїв відбору:

- ✓ спосіб, який забезпечує менший об'єм обчислювальних робіт;
- ✓ спосіб, з використанням якого обчислювальні операції виконуються простіше;
- ✓ **спосіб, у межах якого простіше сформувати вхідну систему математичних умов.**

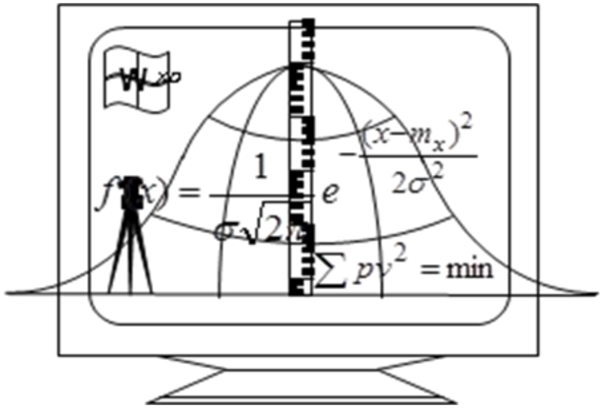
Зважаючи на нинішні можливості всебічного застосування сучасних технологій та технічних засобів обчислень, переважно до уваги беруть лише останній критерій.

Щодо способів останньої групи, то на сьогоднішній день вони мають обмежене коло практичного застосування. Передусім це зумовлено тим, що переважна більшість цих способів була розроблена з метою зменшення об'єму обчислювальних робіт у порівнянні з параметричним чи корелатним способами, що тепер втратило свою актуальність. Однак з іншого боку, вибір деяких способів третьої групи обумовлений необхідністю зрівноважування геодезичних мереж спеціального призначення, потребою визначення разом із зрівноваженими результатами вимірів великого числа зрівноважених значень їх функцій, тощо.

Для детального вивчення пропонуються параметричний та корелатний способи. За умови досконалого володіння цими способами фахівцеві не складно буде оволодіти їх видозмінами чи комбінаціями.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Кафедра геодезії та картографії



Спеціальність 193 “Геодезія та землеустрій”

Дисципліна **МАТЕМАТИЧНА ОБРОБКА ГЕОДЕЗИЧНИХ ВИМІРІВ**
Модуль 3 **МЕТОД НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ**

Лектор О.А. Тадєєв

Тема 2

ЗРІВНОВАЖУВАННЯ ВИМІРІВ ПАРАМЕТРИЧНИМ СПОСОБОМ

1. ЗАГАЛЬНА ТЕОРІЯ ТА ЧЕРГОВІСТЬ ДІЙ

1. Формування системи параметричних рівнянь поправок
2. Формування системи нормальних рівнянь поправок
3. Розв’язування системи нормальних рівнянь поправок
4. Обчислення зрівноважених результатів вимірів та параметрів

Параметричним способом зрівноважування за принципом найменших квадратів називають спосіб абсолютного екстремуму, в якому всі вимірювані величини виражають функціями незалежних невідомих параметрів.

Викладемо черговість дій під час зрівноважування вимірів у геодезичних мережах, опираючись на загальну теорію параметричного способу.

1. Формування системи параметричних рівнянь поправок

Насамперед необхідно визначитись із вибором необхідних невідомих параметрів T_j ($j=\overrightarrow{1,k}$; k – число необхідних вимірів). Вибір параметрів – важливий момент, оскільки він зумовлює складність параметричних рівнянь і об'єм обчислювальних робіт. Параметрами установлюють величини, які не підлягають безпосереднім вимірам, але їх зрівноважені значення мають певну практичну цінність. Наприклад, невідомі висоти вузлових реперів при зрівноважуванні результатів нівелювання, невідомі координати пунктів, дирекційні кути чи довжини сторін при зрівноважуванні результатів вимірів у планових мережах тощо.

Всі вимірювані величини виражають функціями вибраних параметрів

$$X_i = f_i(T_1,...,T_k). \tag{2.1}$$

$i=\overrightarrow{1,n}$. **Рівняння (2.1) називаються параметричні рівняння зв'язку**. Якщо зрівноважені значення параметрів позначити t_j, то за результатами зрівноважування умови рівнянь (2.1) повинні виконуватись:

$$\tilde{x}_i = f_i(t_1,...,t_k). \tag{2.2}$$

Враховуючи рівності $x_i + v_i = \tilde{x}_i$,

$$v_i = f_i t_1,...,t_k) - x_i. \tag{2.3}$$

Тепер умова принципу найменших квадратів набуває вигляду $[p(f(t_1,...,t_k)-x)^2]=\min$. Тут невідомими є тільки величини t_j. Тому умова набуває вигляду: $F(t_1,...,t_k)=\min$. Таким чином, розв'язування задачі зрівноважування способом умовного екстремуму перетворюється до розв'язування задачі на абсолютний екстремум. Для здобуття розв'язку необхідно скласти систему рівнянь вигляду

$$\frac{\partial F}{\partial t_j} = 0 \tag{2.4}$$

і виразити з останньої необхідні невідомі t_j.

Рівняння (2.4) можуть мати нелінійний вигляд. У такому випадку їх лінеаризують шляхом розкладення правих частин параметричних рівнянь зв'язку в ряд Тейлора:

$$f_i(t_1,...,t_k) = f_i(t_1^{\text{o}},...,t_k^{\text{o}}) + \sum_{j=1}^{k}\left(\frac{\partial f_i}{\partial t_j}\right)_{\text{o}} \tau_j + R. \tag{2.5}$$

Тут t_j^{o} – приблизні значення параметрів; $\tau_j = t_j - t_j^{\text{o}}$ – поправки до приблизних значень параметрів; коефіцієнти $\left(\frac{\partial f_i}{\partial t_j}\right)_{\text{o}} = a_{ij}$ – це значення частинних похідних рівнянь зв'язку f_i за параметрами t_j (їх можна вирахувати за результатами вимірів x_i та приблизними значеннями параметрів t_j^{o}); R – сума всіх нелінійних членів ряду, включаючи другий і вище порядки. Якщо значення t_j^{o} розрахувати з точністю, яка відповідає точності результатів вимірів, то поправки τ_j будуть малими настільки, що гранично величина $R \to 0$. За такої умови величиною R можна нехтувати, а рівняння (2.3) набувають вигляду $v_i = a_{i1}\tau_1 + ... + a_{ik}\tau_k + f_i(t_1^{\text{o}},...,t_k^{\text{o}}) - x_i$ або

$$v_i = a_{i1}\tau_1 + ... + a_{ik}\tau_k + l_i. \tag{2.6}$$

Однорідні лінійні рівняння (2.6) називаються параметричні рівняння поправок. $l_i = f_i(t_1^{\text{o}},...,t_k^{\text{o}}) - x_i$ – це вільні члени рівнянь.

За допомогою системи параметричних рівнянь поправок (2.6) з відомими коефіцієнтами a_{ij} та вільними членами l_i здійснюється лінійне перетворення системи величин τ_j $(j=\overrightarrow{1,k})$ у систему величин $v_i(i=\overrightarrow{1,n})$. Число рівнянь дорівнює числу виміряних величин n . За правилами лінійної алгебри таке перетворення можна показати матричною формою такого вигляду

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \dots \\ \tau_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \dots \\ l_n \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

або **з врахуванням позначень відповідних матриць параметричні рівняння поправок (2.6) мають вигляд**

$$\underset{n\times1}{V} = \underset{n\times k}{A} \cdot \underset{k\times1}{\tau} + \underset{n\times1}{l} . \tag{2.8}$$

Формування системи параметричних рівнянь поправок передбачає чіткий **порядок дій**:

1) вибір параметрів T_j і обчислення їх приблизних значень t_j^{o};
2) формування системи параметричних рівнянь зв'язку (2.1);
3) складання рівнянь поправок у загальному вигляді (2.3);
4) формування масивів коефіцієнтів a_{ij} та вільних членів l_i. Вільні члени рекомендовано при можливості виражати такими одиницями міри, щоб їх абсолютні значення були цілими числами;
5) складання параметричних рівнянь поправок у лінійному вигляді (2.6).

Параметричні рівняння поправок навіть для різних за фізичним змістом виміряних величин різняться лише числом та значеннями коефіцієнтів a_{ij} та вільних членів l_i. Останні ж повністю визначаються параметричними рівняннями зв'язку (2.1). Оскільки рівняння зв'язку (2.1) складають для окремого виду вимірюваної величини, то саме вона і визначає собою вид параметричного рівняння поправок. Залежно від фізичного змісту вимірюваної величини можна виділити найбільш типові **види параметричних рівнянь поправок** :

- ✓ для виміряних перевищень у нівелірних мережах. Тут параметрами встановлюють невідомі відмітки вузлових реперів;
- ✓ для виміряних довжин сторін у мережах трилатерації чи полігонометрії. Тут параметрами встановлюють невідомі координати пунктів;
- ✓ для виміряних кутів у мережах тріангуляції чи полігонометрії. Тут також параметрами встановлюють невідомі координати пунктів.

Алгоритми складання різних видів параметричних рівнянь поправок детально розкрито в методичних вказівках до зрівноважування параметричним способом.

2. Формування системи нормальних рівнянь поправок

Невідомі поправки до результатів вимірів v_i виражаються параметричними рівняннями поправок як лінійне перетворення через невідомі поправки до приблизних значень параметрів τ_j. Кількість невідомих поправок перевищує кількість рівнянь, тому така система не має однозначного аналітичного розв'язку. Для досягнення розв'язку використаємо принцип найменших квадратів.

Враховуючи параметричні рівняння поправок (2.6), математичне вираження принципу найменших квадратів має вигляд

$$[pv^2] = [p(a_1\tau_1 + ... + a_k\tau_k + l)^2] = F(\tau_1,...\tau_k) = \min. \qquad (2.9)$$

За такої умови невідомі поправки τ_j можна визначити з розв'язування системи рівнянь

$$\frac{\partial F}{\partial \tau_j} = 0. \qquad (2.10)$$

Отже: $\frac{\partial F}{\partial \tau_j} = 2[pv\frac{\partial v}{\partial \tau_j}] = 0$. Частинні похідні $\frac{\partial v_i}{\partial \tau_j}$, які виражені за параметричними рівняннями поправок (2.6), дають числові значення коефіцієнтів цих рівнянь: $\frac{\partial v_i}{\partial \tau_j} = a_{ij}$. Тому

$$[pa_jv] = 0. \qquad (2.11)$$

Беручи до уваги, що коефіцієнти a_{ij} формують матрицю $\underset{n\times k}{A}$, система рівнянь (2.10) має вигляд

$$\underset{k\times n}{A^T}\cdot\underset{n\times n}{P}\cdot\underset{n\times 1}{V}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1k} & a_{2k} & \ldots & a_{nk} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} p_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & p_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & p_n \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \ldots \\ v_n \end{pmatrix}=0. \qquad (2.12)$$

Якщо умова отриманих рівнянь буде витримана, тим самим буде забезпечена умова мінімуму функції(2.9), яка виражає принцип найменших квадратів.

Замінимо у останній формулі масив невідомих поправок v_i рівнянням (2.8) $\underset{n\times 1}{V}=\underset{n\times k}{A}\cdot\underset{k\times 1}{\tau}+\underset{n\times 1}{l}$. Отримаємо:

$$\underset{k\times n}{A^T}\cdot\underset{n\times n}{P}\cdot\underset{n\times k}{A}\cdot\underset{k\times 1}{\tau}+\underset{k\times n}{A^T}\cdot\underset{n\times n}{P}\cdot\underset{n\times 1}{l}=0. \qquad (2.13)$$

Отримані **рівняння (2.13) називають нормальні рівняння поправок**. Система нормальних рівнянь поправок у розгорнутому вигляді:

$$\left.\begin{aligned} &[pa_1a_1]\tau_1+[pa_1a_2]\tau_2+\ldots+[pa_1a_k]\tau_k+[pa_1l]=0 \\ &[pa_2a_1]\tau_1+[pa_2a_2]\tau_2+\ldots+[pa_2a_k]\tau_k+[pa_2l]=0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &[pa_ka_1]\tau_1+[pa_ka_2]\tau_2+\ldots+[pa_ka_k]\tau_k+[pa_kl]=0 \end{aligned}\right\}. \qquad (2.14)$$

Система нормальних рівнянь поправок містить k лінійних рівнянь з k невідомими поправками τ_j.

Добуток $\underset{k\times n}{A^T}\cdot\underset{n\times n}{P}\cdot\underset{n\times k}{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1k} & a_{2k} & \dots & a_{nk} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & p_n \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} \end{pmatrix}$ дає квадратну симетричну матрицю порядку k з коефіцієнтами $N_{js}=[pa_j a_s]=p_1a_{1j}a_{1s}+p_2a_{2j}a_{2s}+\dots+p_na_{nj}a_{ns}$:

$$\underset{k\times n}{A^T}\cdot\underset{n\times n}{P}\cdot\underset{n\times k}{A}=\underset{k\times k}{N}=\begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} & \dots & N_{1k} \\ N_{21} & N_{22} & \dots & N_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ N_{k1} & N_{k2} & \dots & N_{kk} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} [pa_1a_1] & [pa_1a_2] & \dots & [pa_1a_k] \\ [pa_2a_1] & [pa_2a_2] & \dots & [pa_2a_k] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [pa_ka_1] & [pa_ka_2] & \dots & [pa_ka_k] \end{pmatrix}.$$

Вздовж головної діагоналі (зліва донизу вправо) містяться коефіцієнти, які завжди додатні: $N_{11}, N_{22},\dots,N_{kk}$. Їх називають квадратичними. Коефіцієнти, розміщені симетрично відносно головної діагоналі, попарно дорівнюють один одному: $N_{js}=N_{sj}$. Ця рівність виражає властивість симетричності недіагональних коефіцієнтів.

Добуток $\underset{k\times n}{A^T}\cdot\underset{n\times n}{P}\cdot\underset{n\times 1}{l} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1k} & a_{2k} & \dots & a_{nk} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & p_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \dots \\ l_n \end{pmatrix}$ дає масив вільних членів

$$L_j = [pa_j l] = p_1 a_{1j} l_1 + p_2 a_{2j} l_2 + \dots + p_n a_{nj} l_n:$$

$$\underset{k\times n}{A^T}\cdot\underset{n\times n}{P}\cdot\underset{n\times 1}{l} = \underset{k\times 1}{L} = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \dots \\ L_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [pa_1 l] \\ [pa_2 l] \\ \dots \\ [pa_k l] \end{pmatrix}.$$

З врахуванням введених позначень **нормальне рівняння поправок має вигляд**

$$\underset{k\times k}{N}\cdot\underset{k\times 1}{\tau} + \underset{k\times 1}{L} = 0. \qquad (2.15)$$

Система нормальних рівнянь поправок у розгорнутому вигляді:

$$\left.\begin{array}{l} N_{11}\tau_1 + N_{12}\tau_2 + \dots + N_{1k}\tau_k + L_1 = 0 \\ N_{21}\tau_1 + N_{22}\tau_2 + \dots + N_{2k}\tau_k + L_2 = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ N_{k1}\tau_1 + N_{k2}\tau_2 + \dots + N_{kk}\tau_k + L_k = 0 \end{array}\right\}. \qquad (2.16)$$

За умови зрівноважування рівноточних вимірів кожному результатові можна приписати вагу $p_i = 1$. Тоді вагова матриця $\underset{n\times n}{P}$ перетворюється у одиничну матрицю $\underset{n\times n}{P} = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & p_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & .. \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \underset{n\times n}{E}$, а нормальне рівняння (2.13) набуває вигляду

$$\underset{k\times n}{A^T} \cdot \underset{n\times k}{A} \cdot \underset{k\times 1}{\tau} + \underset{k\times n}{A^T} \cdot \underset{n\times 1}{l} = 0. \qquad (2.17)$$

У розгорнутому вигляді

$$\left.\begin{array}{l} [a_1a_1]\tau_1 + [a_1a_2]\tau_2 + \dots + [a_1a_k]\tau_k + [a_1l] = 0 \\ [a_2a_1]\tau_1 + [a_2a_2]\tau_2 + \dots + [a_2a_k]\tau_k + [a_2l] = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ [a_ka_1]\tau_1 + [a_ka_2]\tau_2 + \dots + [a_ka_k]\tau_k + [a_kl] = 0 \end{array}\right\}. \qquad (2.18)$$

Отримана система рівнянь зберігає за собою усі властивості системи нормальних рівнянь (2.16). З практичної точки зору це означає, що за умови зрівноважування рівноточних вимірів при формуванні системи нормальних рівнянь і обчисленні її коефіцієнтів $N_{js} = [a_ja_s]$ та вільних членів $L_j = [a_jl]$ ваги не враховуються, а відповідні позначення можна опустити і не приймати до уваги.

Система нормальних рівнянь має бути добре обумовленою. Визначник матриці N завжди є величиною додатною за умови, що жоден з її квадратичних коефіцієнтів не дорівнює нулю. З метою досягнення ефективного вирішення завдання зрівноважування квадратичні коефіцієнти повинні значно перевищувати абсолютні значення не квадратичних, а вільні члени рівнянь мають бути невеликими.

3. Розв'язування системи нормальних рівнянь поправок

Розв'язування системи нормальних рівнянь поправок – це найбільш трудомістка частина задачі зрівноважування. Систему лінійних рівнянь (2.16) можна розв'язати будь-яким способом лінійної алгебри. Однак у застосуванні до поставленої задачі обраний спосіб має забезпечити оцінку точності потрібних величин та їх функцій за результатами зрівноважування. При великому числі рівнянь доцільно залучати доступні сучасні технічні засоби та технології обчислень. З цієї точки зору доцільно розглядати і реалізовувати розв'язок завдання у матричній формі.

Розв'язування системи нормальних рівнянь поправок має за мету визначення вектора

$$\tau = (\tau_1, \tau_2, ..., \tau_k), \tag{2.19}$$

елементами якого є корені рівнянь τ_j ($j = \overrightarrow{1,k}$).

Формально розв'язок матричного рівняння (2.15) має вигляд

$$\underset{k\times 1}{\tau} = -\underset{k\times k}{Q} \cdot \underset{k\times 1}{L}. \tag{2.20}$$

Тут $\underset{k\times k}{Q} = \underset{k\times k}{N}^{-1}$– це обернена матриця до матриці коефіцієнтів нормальних рівнянь $\underset{k\times k}{N} = \underset{k\times n}{A^T} \cdot \underset{n\times n}{P} \cdot \underset{n\times k}{A}$.

Завдання побудови оберненої матриці полягає у розв'язуванні рівняння

$$\underset{k\times k}{N} \cdot \underset{k\times k}{Q} = \underset{k\times k}{E} \tag{2.21}$$

відносно $\underset{k\times k}{Q}$, де $\underset{k\times k}{E}$ - це одинична матриця. Якщо квадратна матриця $\underset{k\times k}{N}$ неособлива та її визначник $|N| \neq 0$, то існує однозначний розв'язок рівняння (2.20). Елементи Q_{js} матриці $\underset{k\times k}{Q} = \underset{k\times k}{N}^{-1}$ виражаються рівністю $Q_{js} = \dfrac{N'_{sj}}{|N|}$, де N'_{sj} − алгебраїчне доповнення елементу N_{sj} у визначнику $|N|$, тобто мінор, який помножений на $(-1)^{j+s}$ і одержаний з $|N|$ викреслюванням s −го рядка та j −го стовпця.

Обернена матриця $\underset{k\times k}{Q}$ має ті ж властивості, що і матриця коефіцієнтів $\underset{k\times k}{N}$. Основною є властивість симетричності не квадратичних коефіцієнтів відносно головної діагоналі, на якій розміщені квадратичні коефіцієнти. Для симетричної матриці коефіцієнтів нормальних рівнянь можна записати: $\underset{k\times k}{N} = \underset{k\times k}{N}^T$. Із цього слідує: $\underset{k\times k}{N}^{-1} = (\underset{k\times k}{N}^T)^{-1}$ або $\underset{k\times k}{N}^{-1} = (\underset{k\times k}{N}^{-1})^T$. Отже, $\underset{k\times k}{Q} = \underset{k\times k}{Q}^T$, тобто обернена матриця є симетричною відносно головної діагоналі.

Рівнянням (2.21) користуються для контролю побудови оберненої матриці, а рівняння (2.20) виражає розв'язок системи нормальних рівнянь поправок у матричній формі. За умови використання сучасних технічних засобів обчислень слід мати на увазі, що їх програмне забезпечення містить алгоритм розв'язку (2.20), тому немає необхідності складати алгоритм та створювати відповідне програмне забезпечення.

4. Обчислення зрівноважених результатів вимірів та параметрів

Зрівноважені значення результатів вимірів $\tilde{x}_i$ виражаються рівняннями $\tilde{x}_i = x_i + v_i \quad (i = \overrightarrow{1,n})$ або матричним рівнянням

$$\underset{n\times1}{\tilde{x}} = \underset{n\times1}{x} + \underset{n\times1}{V}. \tag{2.44}$$

Матриця-стовбець (або вектор) $\underset{n\times1}{\tilde{x}} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \dots \\ \tilde{x}_n \end{pmatrix}$ формується зрівноваженими значеннями результатів вимірів $\tilde{x}_i$.

$\underset{n\times1}{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ - це матриця результатів вимірів величин; $\underset{n\times1}{V} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix}$ - матриця поправок до результатів вимірів.

Невідомі поправки v_i виражаються параметричними рівняннями поправок вигляду (2.6) $v_i = a_{i1}\tau_1 + \dots + a_{ik}\tau_k + l_i$ або вигляду (2.8) $\underset{n\times1}{V} = \underset{n\times k}{A} \cdot \underset{k\times1}{\tau} + \underset{n\times1}{l}$ за поправками τ_j, які вже обчислено за результатами розв'язування системи нормальних рівнянь.

Зрівноважені значення невідомих параметрів t_j виражаються рівняннями $t_j = t_j^{o} + \tau_j$ $(j = \overrightarrow{1,k})$ або матричним рівнянням

$$\underset{k\times 1}{t} = \underset{k\times 1}{t^{o}} + \underset{k\times 1}{\tau}\,. \tag{2.45}$$

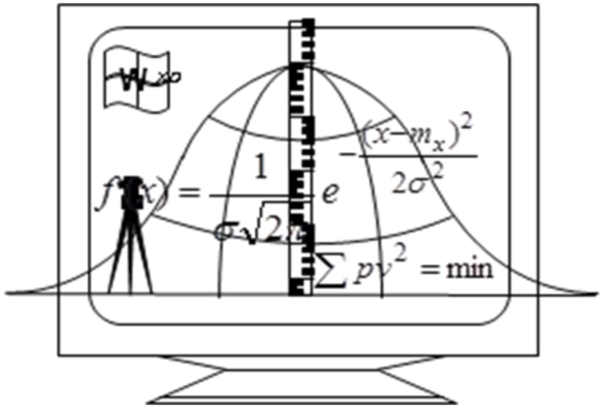
Тут матриці-стовбці (вектори) формуються такими елементами: $\underset{k\times 1}{t} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \dots \\ t_k \end{pmatrix}$ - зрівноважені значення параметрів;

$\underset{k\times 1}{t^{o}} = \begin{pmatrix} t_1^{o} \\ t_2^{o} \\ \dots \\ t_k^{o} \end{pmatrix}$ - приблизні значення параметрів; $\underset{k\times 1}{\tau} = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \dots \\ \tau_k \end{pmatrix}$ - поправки до приблизних значень параметрів.

Розкриттям числових значень $\tilde{x}_i$ $(i = \overrightarrow{1,n})$ та t_j $(j = \overrightarrow{1,k})$ завершується етап зрівноважувальних обчислень.

Завершальний контроль результатів зрівноважування здійснюється шляхом перевірки істинності умов, які закладено у параметричних рівнянь зв'язку (2.2): $\tilde{x}_i = f_i(t_1,\dots,t_k)$, тобто **зрівноважені значення результатів вимірів, які обчислено за рівняннями $\tilde{x}_i = x_i + v_i$, повинні дорівнювати відповідним значенням, які виражаються через зрівноважені параметри t_j у параметричних рівняннях зв'язку**.

Національний університет
водного господарства
та природокористування



Кафедра геодезії та картографії

Спеціальність 193 “Геодезія та землеустрій”

Дисципліна **МАТЕМАТИЧНА ОБРОБКА ГЕОДЕЗИЧНИХ ВИМІРІВ**
Модуль 3 **МЕТОД НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ**

Лектор О.А. Тадєєв

Тема 2

ЗРІВНОВАЖУВАННЯ ВИМІРІВ ПАРАМЕТРИЧНИМ СПОСОБОМ

2. ОЦІНКА ТОЧНОСТІ ЗА РЕЗУЛЬТАТАМИ ЗРІВНОВАЖУВАННЯ

1. Постановка і шляхи досягнення розв’язку задачі
2. Обчислення ваг зрівноважених параметрів
3. Обчислення ваг функцій параметрів
4. Обчислення ваг зрівноважених результатів вимірів

1. Постановка і шляхи досягнення розв'язку задачі

Під оцінкою точності за результатами зрівноважування параметричним способом розуміють розрахунок середніх квадратичних похибок зрівноважених результатів вимірів, параметрів та їх функцій.

Загалом середня квадратична похибка M будь-якої величини виражається формулою

$$M = \mu\sqrt{\frac{1}{P}}, \tag{2.46}$$

де μ - середня квадратична похибка одиниці ваги; P - вага оцінюваної величини. За умови зрівноважування результатів рівноточних вимірів формула (2.46) набуває вигляду

$$M = m\sqrt{\frac{1}{P}}, \tag{2.47}$$

де m - середня квадратична похибка рівноточних вимірів.

Виходячи з останніх формул, завдання оцінки точності можна поділити на дві частини:

1. Розрахунок середньої квадратичної похибки одиниці ваги μ або середньої квадратичної похибки результатів рівноточних вимірів m.

Числове значення μ в задачі зрівноважування параметричним способом можна обчислити за формулою Бесселя

$$\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-k}}. \qquad (2.48)$$

Різниця $n-k=r$ виражає число надлишкових виміряних величин. Формула (2.48) є узагальненням формули Бесселя для оцінювання точності вимірів окремої величини при $k=1$.

Величину m виражає узагальнена формула Бесселя вигляду

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-k}}. \qquad (2.49)$$

2. Розрахунок ваги оцінюваної величини.

Для вирішення цієї частини завдання величина виражається функцією результатів вимірів x_i загального вигляду

$$F = f(x_1, x_2, ..., x_n).$$

Далі застосовується відома формула теорії похибок вимірів, за якою вага оцінюваної величини обчислюється як вага функції виміряних величин:

$$\frac{1}{P_F} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{\text{o}}^{2} \frac{1}{p_i}.$$

Тут p_i - ваги результатів вимірів x_i. **Складність обчислення оберненої ваги $\frac{1}{P_F}$ у задачі зрівноважування полягає у тому, що оцінювані величини виражаються функціями зрівноважених параметрів або зрівноважених значень виміряних величин, а не безпосередніх результатів вимірів цих величин**. Тому передусім потрібно розкрити зв'язок результатів вимірів величин та зрівноважених вимірів, зрівноважених параметрів чи їх функцій. Відтак хід дій з обчислення ваги оцінюваної величини залежить від того, як вона виражається через виміряні величини.

З метою оцінювання точності деякої величини $F = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ окреслимо покроково зв'язок результатів вимірів величин x_i із зрівноваженими вимірами $\tilde{x}_i$, із зрівноваженими параметрами t_j чи їх функціями.

1. Всі результати вимірів x_i $(i = \overrightarrow{1,n})$ виражаються через параметри t_j $(j = \overrightarrow{1,k})$ рівняннями $x_i = \tilde{x}_i - v_i = f_i(t_1, t_2, ..., t_k) - v_i$. Тому слід визнати наступне: $F = F(t_1, t_2, ..., t_k)$.

2. Оскільки $t_j = t_j^{\text{o}} + \tau_j$, то величину F можна визнати функцією невідомих τ_j системи нормальних рівнянь. Отже, $F = F(\tau_1, \tau_2, ..., \tau_k)$. Таким чином, якщо τ_j виразити через x_i, то величина F буде розкрита функцією результатів вимірів x_i.

3. Невідомі τ_j обчислюються з розв'язування системи нормальних рівнянь $N_{j1}\tau_1 + N_{j2}\tau_2 + ... + N_{jk}\tau_k + L_j = 0$. Отже, вони залежні від вільних членів цих рівнянь. Вільні члени $L_j = [pa_j l]$, у свою чергу, є функціями вільних членів l_i параметричних рівнянь поправок. Тому можна вважати, що $F = F(l_1, l_2, ..., l_n)$.

Таким чином, поставлене завдання буде розв'язане, якщо врахувати, що вага величини $l_i = f_i(t_1^{\text{o}}, t_2^{\text{o}}, ..., t_k^{\text{o}}) - x_i$ дорівнює вазі результату виміру x_i. Інакше кажучи, вільні члени l_i у завданні оцінки точності ототожнюються з результатами вимірів x_i. Останнє твердження відіграє визначальну роль у обґрунтуванні способів та формуванні алгоритмів обчислення ваг потрібних величин.

З метою уніфікації та досягнення оптимального розв'язку завдання та методологічної систематики алгоритмів оцінювані величини виражають здебільшого функціями зрівноважених параметрів.

2. Обчислення ваг зрівноважених параметрів

Зрівноважені параметри t_j виражаються системою рівнянь $\underset{k\times 1}{t} = \underset{k\times 1}{t^{\text{o}}} + \underset{k\times 1}{\tau}$ і визначаються за значеннями невідомих τ_j. Невідомі τ_j виражаються лінійними функціями вільних членів нормальних рівнянь $\underset{k\times 1}{\tau} = -\underset{k\times k}{Q} \cdot \underset{k\times 1}{L}$. Для будь-якого невідомого у розгорнутому вигляді маємо:

$$\tau_j = -Q_{j1}L_1 - Q_{j2}L_2 - \ldots - Q_{jk}L_k \tag{2.50}$$

або $\tau_j = -Q_{j1}[pa_1 l] - Q_{j2}[pa_2 l] - \ldots - Q_{jk}[pa_k l]$. Розкривши останню рівність, отримаємо:

$$\tau_j = -p_1(a_{11}Q_{j1} + \ldots + a_{1k}Q_{jk})l_1 - \ldots - p_n(a_{n1}Q_{j1} + \ldots + a_{nk}Q_{jk})l_n, \tag{2.51}$$

$$\tau_j = -\sum_{i=1}^{n} p_i(a_{i1}Q_{j1} + \ldots + a_{ik}Q_{jk})l_i\,. \tag{2.52}$$

Встановимо позначення:

$$p_i(a_{i1}Q_{j1} + \ldots + a_{ik}Q_{jk}) = \alpha_{ij}\,. \tag{2.53}$$

α_{ij} - деякі сталі коефіцієнти, які утворюють матрицю

$$\underset{n\times k}{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1k} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nk} \end{pmatrix}.$$

Матриця $\underset{k\times n}{\alpha}^T$ виражається добутком

$$\underset{k\times n}{\alpha}^T = \underset{k\times k}{Q} \cdot \underset{k\times n}{A}^T \cdot \underset{n\times n}{P} . \tag{2.54}$$

Тоді

$$\tau_j = -\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} l_i = -[\alpha_j l] \tag{2.55}$$

або

$$\underset{k\times 1}{\tau} = -\underset{k\times n}{\alpha}^T \cdot \underset{n\times 1}{l} . \tag{2.56}$$

Отже, невідомі τ_j виражаються лінійними функціями вільних членів параметричних рівнянь поправок l_i.

У завданні оцінки точності вільні члени l_i ототожнюють результатам вимірів з вагами p_i. Тому на основі формули обчислення ваги функції виміряних величин

$$\frac{1}{P_F} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{\text{o}}^2 \frac{1}{p_i}$$

для оберненої ваги $\frac{1}{P_j}$ невідомого τ_j можна тепер записати:

$$\frac{1}{P_j} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \tau_j}{\partial l_i}\right)_{\text{o}}^2 \frac{1}{p_i} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}^2 \frac{1}{p_i} = \left[\frac{\alpha_j \alpha_j}{p}\right]. \tag{2.57}$$

Тут права частина розкриває добуток елементів матриць вигляду $\underset{k\times n}{\alpha^T} \cdot \underset{n\times n}{P^{-1}} \cdot \underset{n\times k}{\alpha}$, де $\underset{n\times n}{P^{-1}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{p_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{p_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{p_n} \end{pmatrix}$

- це діагональна матриця обернених ваг результатів вимірів. З такого добутку слідує:

$$\underset{k\times n}{\alpha}^T \cdot \underset{n\times n}{P^{-1}} \cdot \underset{n\times k}{\alpha} = \underset{k\times k}{Q} \cdot \underset{k\times n}{A}^T \cdot \underset{n\times n}{P} \cdot \underset{n\times n}{P^{-1}} \cdot \underset{n\times n}{P} \cdot \underset{n\times k}{A} \cdot \underset{k\times k}{Q} = \underset{k\times k}{Q} \cdot \underset{k\times n}{A}^T \cdot \underset{n\times n}{P} \cdot \underset{n\times k}{A} \cdot \underset{k\times k}{Q}.$$

Враховуючи рівності $\underset{k\times n}{A^T} \cdot \underset{n\times n}{P} \cdot \underset{n\times k}{A} = \underset{k\times k}{N}$ та $\underset{k\times k}{N} \cdot \underset{k\times k}{Q} = \underset{k\times k}{E}$, маємо:

$$\underset{k\times n}{\alpha}^T \cdot \underset{n\times n}{P^{-1}} \cdot \underset{n\times k}{\alpha} = \underset{k\times k}{Q} \tag{2.58}$$

або

$$\left[\frac{\alpha_j \alpha_s}{p}\right] = Q_{js}, \tag{2.59}$$

Остаточно для обернених ваг параметрів маємо рівність

$$\frac{1}{P_j} = \left[\frac{\alpha_j \alpha_j}{p}\right] = Q_{jj}. \tag{2.60}$$

З огляду на отриманий результат, **елементи оберненої матриці** $\underset{k\times k}{Q} = \underset{k\times k}{N}^{-1}$ **називають вагові коефіцієнти**.

Отже, обернені ваги параметрів дорівнюють квадратичним ваговим коефіцієнтам з відповідними індексами.

Не квадратичні вагові коефіцієнти виражають залежність між зрівноваженими значеннями параметрів. Коефіцієнт кореляції між параметрами t_i та t_j виражається формулою

$$r_{ij} = \frac{Q_{ij}}{\sqrt{Q_{ii} Q_{jj}}}. \tag{2.61}$$

Матрицю

$$\underset{k \times k}{M^2} = \mu^2 \cdot \underset{k \times k}{Q} \tag{2.62}$$

або при зрівноважуванні рівноточних вимірів

$$\underset{k \times k}{M^2} = m^2 \cdot \underset{k \times k}{Q} \tag{2.63}$$

називають **кореляційна матриця зрівноважених параметрів**. Вздовж головної діагоналі матриці $\underset{k \times k}{M^2}$ розташовані значення квадратів середніх квадратичних похибок параметрів з відповідними їм індексами.

3. Обчислення ваг функцій параметрів

Нехай дано функцію параметрів вигляду

$$F = F(t_1, t_2, ..., t_k). \tag{2.70}$$

Перетворимо її до лінійного вигляду шляхом розкладання в ряд Тейлора. Враховуючи, що $t_j = t_j^{o} + \tau_j$,

$$F(t_1, ..., t_k) = F(t_1^{o}, ..., t_k^{o}) + \left(\frac{\partial F}{\partial t_1}\right)_{o} \tau_1 + ... + \left(\frac{\partial F}{\partial t_k}\right)_{o} \tau_k + R. \tag{2.71}$$

$R -$сума всіх нелінійних членів ряду. Якщо на приблизні значення t_j^{o} накласти умову, щоб їх точність відповідала точності результатів вимірів, то поправки τ_j будуть малими настільки, що гранично величина $R \to 0$. За такої умови величиною R можна нехтувати. Тоді

$$F(t_1, ..., t_k) = F_0 + F_1 \tau_1 + ... + F_k \tau_k. \tag{2.72}$$

Тут прийнято позначення: $F_0 = F(t_1^{o}, ..., t_k^{o})$ - приблизне значення функції;

$$F_j = \left(\frac{\partial F}{\partial t_j}\right)_{o}. \tag{2.73}$$

F_j - числові значення частинних похідних функції за параметрами t_j.

Раніше встановлено лінійну залежність поправок τ_j та вільних членів параметричних рівнянь поправок l_i : $\tau_j = -[\alpha_j l]$. Тому

$$F(t_1, ..., t_k) = F_0 - F_1[\alpha_1 l] - ... - F_k[\alpha_k l]. \tag{2.74}$$

Розкриємо суми і згрупуємо доданки за вільними членами l_i:

$$F(t_1,...,t_k) = F_0 - \sum_{i=1}^{n}(\alpha_{i1}F_1 + ... + \alpha_{ik}F_k)l_i = \Phi(l_1,...,l_n) \qquad .(2.75)$$

Отже, оцінювану функцію параметрів $F = F(t_1, t_2,....,t_k)$ тепер можна визнати лінійною функцією вільних членів параметричних рівнянь поправок l_i. У завданні оцінки точності вільні члени l_i ототожнюють з результатами вимірів і. мають ваги p_i. Тому на основі формули обчислення ваги функції виміряних величин

$$\frac{1}{P_F} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0^2 \frac{1}{p_i}$$

для оберненої ваги функції $F = F(t_1, t_2,....,t_k)$ тепер можна записати:

$$\frac{1}{P_F} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial l_i}\right)^2 \frac{1}{p_i} = \sum_{i=1}^{n}(\alpha_{i1}F_1 + ... + \alpha_{ik}F_k)^2 \frac{1}{p_i} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(\alpha_{i1}\alpha_{i1}F_1F_1 + 2\alpha_{i1}\alpha_{i2}F_1F_2 + ... + \alpha_{i2}\alpha_{i2}F_2F_2 + 2\alpha_{i2}\alpha_{i3}F_2F_3 + ... + \alpha_{ik}\alpha_{ik}F_kF_k)\frac{1}{p_i} =$$

$$\left.\begin{aligned} = F_1F_1\left[\frac{\alpha_1\alpha_1}{p}\right] + 2F_1F_2\left[\frac{\alpha_1\alpha_2}{p}\right] + ... + 2F_1F_k\left[\frac{\alpha_1\alpha_k}{p}\right] + \\ + F_2F_2\left[\frac{\alpha_2\alpha_2}{p}\right] + 2F_2F_3\left[\frac{\alpha_2\alpha_3}{p}\right] + ... + 2F_2F_k\left[\frac{\alpha_2\alpha_k}{p}\right] + \\ + ... + \\ + F_kF_k\left[\frac{\alpha_k\alpha_k}{p}\right] \end{aligned}\right\}.$$

Якщо врахувати отриману раніше залежність вигляду $\left[\frac{\alpha_j \alpha_s}{p}\right] = Q_{js}$, то остаточно маємо:

$$\frac{1}{P_F} = \sum_{j=1}^{k} F_j F_j Q_{jj} + 2 \sum_{i<j} F_i F_j Q_{ij} , \tag{2.76}$$

де Q_{ij} - елементи оберненої матриці $\underset{k \times k}{Q}$ (вагові коефіцієнти).

Формула розкриває добуток матриць

$$\frac{1}{P_F} = \begin{pmatrix} F_1 & F_2 & \ldots & F_k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \ldots & Q_{1k} \\ Q_{21} & Q_{22} & \ldots & Q_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ Q_{k1} & Q_{k2} & \ldots & Q_{kk} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \ldots \\ F_k \end{pmatrix} = \underset{1 \times k}{F} \cdot \underset{k \times k}{Q} \cdot \underset{k \times 1}{F^T} . \tag{2.77}$$

Отримані рівняння виражають обернену вагу функції параметрів загального вигляду $F = F(t_1, t_2, ..., t_k)$.

Матричною формою (2.77) зручно користуватись, якщо оцінюють не одну, а m функцій. Тоді матриця F має розмірність $m \times k$. Кожний її рядок відповідає функції $F_i(t_1, t_2, ..., t_k)$ $(i = \overrightarrow{1, m})$ і містить значення похідних

$$F_{ij} = \left(\frac{\partial F_i}{\partial t_j} \right)_{\text{o}}. \tag{2.78}$$

Тоді (2.77) набуває вигляду

$$\begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & ... & F_{1k} \\ F_{21} & F_{22} & ... & F_{2k} \\ ... & ... & ... & ... \\ F_{m1} & F_{m2} & ... & F_{mk} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & ... & Q_{1k} \\ Q_{21} & Q_{22} & ... & Q_{2k} \\ ... & ... & ... & ... \\ Q_{k1} & Q_{k2} & ... & Q_{kk} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_{11} & F_{21} & ... & F_{m1} \\ F_{12} & F_{22} & ... & F_{m2} \\ ... & ... & ... & ... \\ F_{1k} & F_{2k} & ... & F_{mk} \end{pmatrix} = \underset{m \times k}{F} \cdot \underset{k \times k}{Q} \cdot \underset{k \times m}{F^T} = \underset{m \times m}{Q_F}, \tag{2.79}$$

де $\underset{m \times m}{Q_F} = \begin{pmatrix} \frac{1}{P_{F_1}} & Q_{F_{12}} & ... & Q_{F_{1m}} \\ Q_{F_{21}} & \frac{1}{P_{F_2}} & ... & Q_{F_{2m}} \\ ... & ... & ... & ... \\ Q_{F_{m1}} & Q_{F_{m2}} & ... & \frac{1}{P_{Fm}} \end{pmatrix}$ - вагова матриця системи m функцій. На її головній діагоналі розташовані обернені ваги $\frac{1}{P_{F_i}}$ оцінюваних функцій $F_i(t_1, t_2, ..., t_k)$.

Інші елементи матриці $\underset{m\times m}{Q_F}$ мають властивість симетричності відносно головної діагоналі $Q_{F_{ij}} = Q_{F_{ji}}$, оскільки добуток (2.79) зумовлює симетрична матриця вагових коефіцієнтів $\underset{k\times k}{Q}$. Ці елементи виражають залежність між функціями зрівноважених параметрів і називаються кореляційними моментами. Тіснота залежності між функціями за номерами i та j виражається коефіцієнтом кореляції

$$r_{F_i F_j} = \frac{Q_{F_{ij}}}{\sqrt{\frac{1}{P_{F_i}} \cdot \frac{1}{P_{F_j}}}}. \qquad (2.80)$$

Матрицю

$$\underset{m\times m}{M^2} = \mu^2 \cdot \underset{m\times m}{Q_F} \qquad (2.81)$$

або при зрівноважуванні рівноточних вимірів

$$\underset{m\times m}{M^2} = m^2 \cdot \underset{m\times m}{Q_F} \qquad (2.82)$$

називають **кореляційна матриця функцій зрівноважених параметрів**. На головній діагоналі матриці $\underset{m\times m}{M^2}$ розташовані значення квадратів середніх квадратичних похибок M_i^2 функцій зрівноважених параметрів $F_i(t_1, t_2, ..., t_k)$ з відповідними їм індексами $i = \overrightarrow{1, m}$.

4. Обчислення ваг зрівноважених результатів вимірів

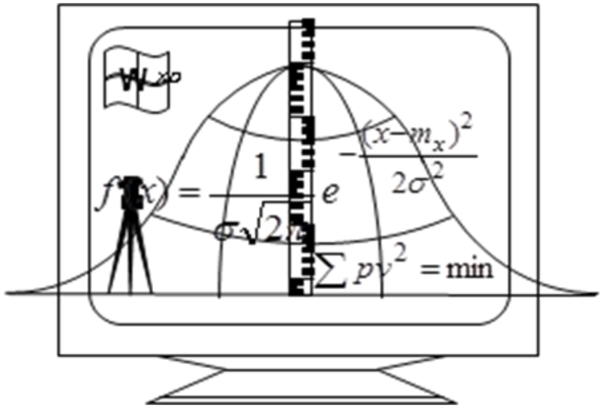
Зрівноважені значення $\tilde{x}_i$ результатів вимірів x_i виражаються функціями зрівноважених параметрів t_j, які називаються параметричними рівняннями зв'язку загального вигляду $\tilde{x}_i = f_i(t_1,...,t_k)$ $(i = \overrightarrow{1,n})$. Їх складають на початковій стадії зрівноважування. Тому задачу оцінки точності зрівноважених результатів вимірів слід визнати частковим випадком задачі оцінки точності функцій параметрів. Розв'язок такої задачі спрощується тим, що частинні похідні функцій за параметрами вже відомі - це коефіцієнти параметричних рівнянь поправок $F_{ij} = \left(\dfrac{\partial f_i}{\partial t_j}\right)_{\text{o}} = a_{ij}$. Тому для обчислення оберненої ваги зрівноваженого значення окремої вимірюваної величини за номером i матриця $\underset{1\times k}{F}$ у формулі (2.77) $\dfrac{1}{P_F} = \underset{1\times k}{F} \cdot \underset{k\times k}{Q} \cdot \underset{k\times 1}{F^T}$ містить коефіцієнти a_{ij} параметричного рівняння поправок за тим же номером i. Загалом для сукупності усіх зрівноважених значень результатів вимірів матриця F має розмірність $n\times k$, а її елементами є сукупність коефіцієнтів a_{ij}:

$$\underset{n\times k}{F} = \underset{n\times k}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} \end{pmatrix}.$$

Тоді вагова матриця зрівноважених результатів вимірів $\underset{n\times n}{Q_F} = \underset{n\times n}{Q_{\tilde{x}}}$ виражається рівнянням

$$\underset{n\times n}{Q_F} = \underset{n\times n}{Q_{\tilde{x}}} = \underset{n\times k}{A} \cdot \underset{k\times k}{Q} \cdot \underset{k\times n}{A^T}. \tag{2.83}$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування



Кафедра геодезії та картографії

Спеціальність 193 “Геодезія та землеустрій”

Дисципліна **МАТЕМАТИЧНА ОБРОБКА ГЕОДЕЗИЧНИХ ВИМІРІВ**
Модуль 3 **МЕТОД НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ**

Лектор О.А. Тадєєв

Тема 3

ЗРІВНОВАЖУВАННЯ ВИМІРІВ КОРЕЛАТНИМ СПОСОБОМ

1. ЗАГАЛЬНА ТЕОРІЯ ТА ЧЕРГОВІСТЬ ДІЙ

1. Формування системи умовних рівнянь поправок
2. Формування системи нормальних рівнянь корелат
3. Розв’язування системи нормальних рівнянь корелат
4. Обчислення зрівноважених результатів вимірів

Корелатним способом зрівноважування за принципом найменших квадратів називають спосіб знаходження мінімуму функції $[pv^2]$ методом Лагранжа із застосуванням допоміжних множників незалежних умовних рівнянь.

Викладемо черговість дій під час зрівноважування вимірів у геодезичних мережах, опираючись на загальну теорію корелатного способу.

1. Формування системи умовних рівнянь поправок

Нехай проведено виміри n величин X_i $(i=\overrightarrow{1,n})$ і одержано результати вимірів x_i з вагами p_i. Допустимо, величини зв'язані між собою незалежними умовними рівняннями загального вигляду

$$\varphi_j(X_1,...,X_n)=0. \tag{3.1}$$

Кількість умовних рівнянь $j=\overrightarrow{1,r}$; r –число надлишкових виміряних величин.

Результати вимірів обтяжені похибками, тому умови рівнянь (3.1), складених за результатами вимірів x_i, не будуть дотримані:

$$\varphi_j(x_1,...,x_n)=W_j. \tag{3.2}$$

Величини W_j називаються нев'язки умовних рівнянь. Нев'язки W_j виражають істинні похибки умовних рівнянь і є наслідком впливу на результати похибок вимірів. У ході зрівноважування необхідно позбутись нев'язок. З цією метою потрібно виправити результати вимірів x_i відповідними поправками v_i таким чином, щоб зрівноважені значення $\tilde{x}_i=x_i+v_i$ задовольняли рівнянням (3.1):

$$\varphi_j(\tilde{x}_1,...,\tilde{x}_n)=0. \tag{3.3}$$

В геодезичній практиці умовні рівняння можуть мати нелінійний вигляд. З метою уніфікації розв'язку і забезпечення однозначного алгоритму, всі математичні умови, задані нелінійними формами, перетворюють до лінійного вигляду. Лінеаризацію нелінійних умов можна здійснити шляхом розкладу функцій (3.3) в ряд Тейлора. Враховуючи, що поправки v_i завжди малі порівняно з величинами x_i, без втрати точності розв'язку задачі у членах ряду достатньо брати до уваги лише перші похідні та перші степені поправок. Членами ряду другого і вище порядків, які виражають нелінійну складову, можна нехтувати. Отже,

$$\varphi_j(x_1+v_1,\dots,x_n+v_n)=\varphi_j(x_1,\dots,x_n)+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\right)_{\text{o}} v_i \tag{3.4}$$

$$a_{j1}v_1+\dots+a_{jn}v_n+W_j=0; \tag{3.5}$$

$$[a_j v]+W_j=0; \tag{3.6}$$

$$a_{ji}=\left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\right)_{\text{o}}. \tag{3.7}$$

Однорідні лінійні рівняння (3.5) чи (3.6) називаються умовні рівняння поправок. Система r умовних рівнянь поправок у матричній формі має вигляд:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \dots \\ W_r \end{pmatrix} = 0 \tag{3.8}$$

або

$$\underset{r\times n}{A}\cdot\underset{n\times 1}{V}+\underset{r\times 1}{W}=0. \tag{3.9}$$

Формування системи умовних рівнянь поправок передбачає виконання наступних дій:

1) вираження зв'язків між виміряними величинами незалежними умовними рівняннями (3.1);

2) обчислення значень частинних похідних (3.7) і формування матриці $\underset{r\times n}{A}$ з коефіцієнтами a_{ji};

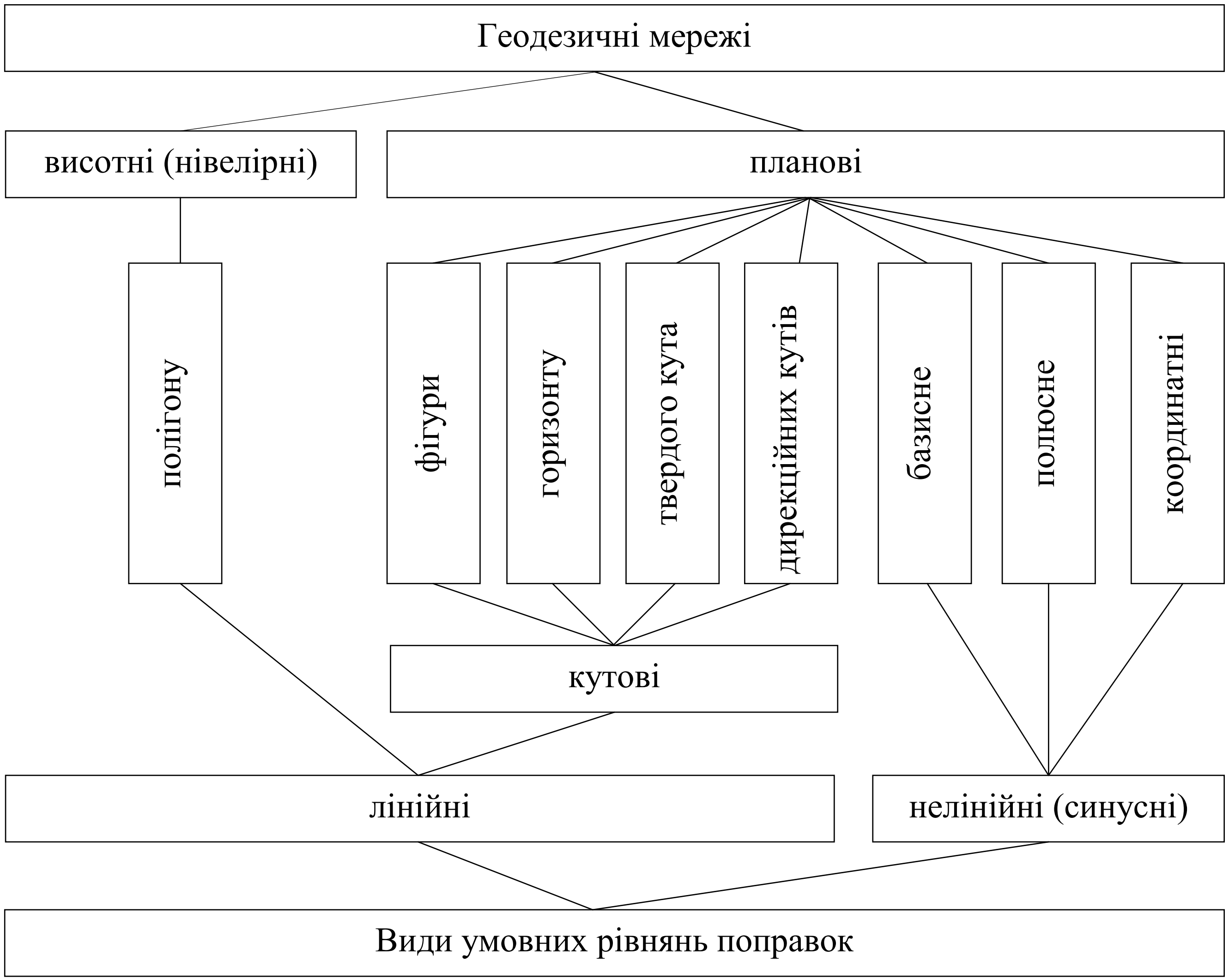
3)обчислення нев'язок умовних рівнянь (3.2);

4) складання умовних рівнянь поправок у лінійному вигляді (3.3.5) чи (3.3.9).

Умовні рівняння поправок – це однорідні лінійні рівняння, які навіть для різних за фізичним змістом виміряних величин різняться лише кількістю надлишкових виміряних величин, а також значеннями коефіцієнтів a_{ji} та вільних членів W_j, які цілком визначаються умовними рівняннями (3.1).

Якщо початкові математичні умови (3.3) виражаються лінійними рівняннями, то диференціювання (3.7) забезпечує значення коефіцієнтів a_{ji}, які дорівнюють ±1. Це свідчить про те, що лінеаризацію таких рівнянь виконувати немає потреби. Отже, лінійні умовні рівняння поправок можна складати лише за схемою мережі.

Класифікація видів умовних рівнянь поправок залежно від фізичного змісту вимірюваних величин у геодезичних мережах та форми зв'язку між ними:

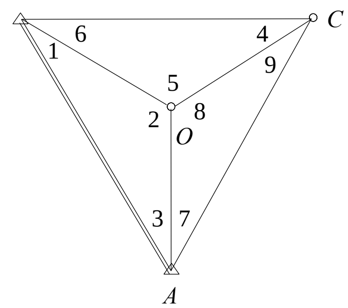


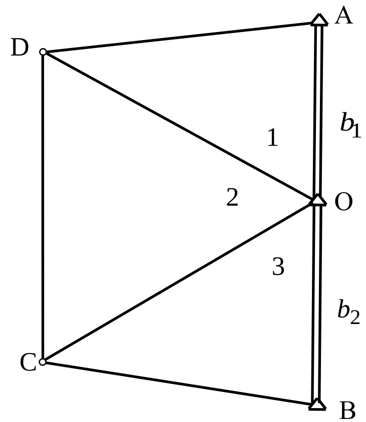
Види умовних рівнянь поправок

1. Умовні рівняння полігонів. Рівняння полігонів складають у нівелірних мережах для вибраних r незалежних замкнених чи розімкнених полігонів. Незалежними вважають такі полігони, серед яких жоден не був би комбінацією інших. Умовне рівняння полігону має загальний вигляд $\sum\limits_{i\in j} \pm v_i + W_j = 0$, де $\sum\limits_{i\in j} v_i$ - сума поправок до перевищень h_i вздовж тих ходів мережі, які утворюють полігон за номером j . Знак “+” перед поправкою ставлять тоді, коли напрями ходу і полігону співпадають; знак “–” – якщо їх напрями протилежні. Нев’язка $W_j = \sum\limits_{i\in j} \pm h_i - (H_{кінц} - H_{поч})$, де $H_{поч}$ та $H_{кінц}$ - відмітки початкового та кінцевого реперів полігону. Для замкнених полігонів $H_{поч} = H_{кінц}$.

2. Умовні рівняння фігур. Істинні значення виміряних кутів плоского трикутника повинні задовольняти початковому умовному рівнянню зв’язку $X_1 + X_2 + X_3 - 180^{\circ} = 0$. Йому відповідає рівняння $v_1 + v_2 + v_3 + W = 0$, яке називається умовним рівнянням фігури. Нев’язка $W = x_1 + x_2 + x_3 - 180^{\circ}$; x_1, x_2, x_3 – результати вимірів кутів трикутника.

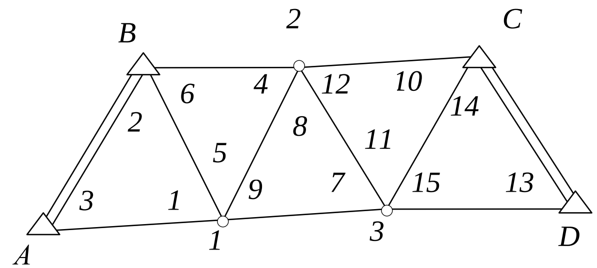
3. Умовні рівняння горизонту. Якщо в окремому пункті вимірювались усі кути, які мають спільні прилеглі сторони, то виникає умова $X_2 + X_5 + X_8 - 360^{\circ} = 0$. Відповідне рівняння має вигляд $v_2 + v_5 + v_8 + W = 0$, де нев’язка $W = x_2 + x_5 + x_8 - 360^{\circ}$.





4. Умовні рівняння твердого кута. В мережах тріангуляції з відомими сторонами, які мають спільні пункти, виникає умовне рівняння зв'язку $X_1 + X_2 + X_3 - \angle AOB = 0$. Відповідне рівняння поправок має вигляд $v_1 + v_2 + v_3 + W = 0$ і називається умовним рівнянням твердого кута, де нев'язка $W = x_1 + x_2 + x_3 - \angle AOB$.

5. Умовні рівняння дирекційних кутів. Якщо в мережах відомі дирекційні кути твердих сторін, які не мають спільних пунктів, то для них можна сформулювати таку умову: дирекційний кут кінцевої сторони $\alpha_{кінц}$, обчислений за дирекційним кутом початкової сторони $\alpha_{поч}$ та кутами мережі вздовж вибраного напряму ходової лінії, повинен дорівнювати його заданому значенню. Такій умові відповідає рівняння, яке називають умовним рівнянням дирекційних кутів.



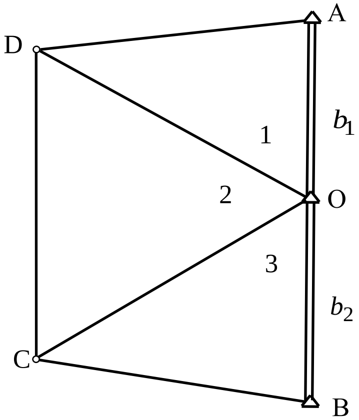
Наприклад, для ланцюжка трикутників вздовж ходової лінії (*D*-*C*-*2*-*B*-*A*) рівняння має вигляд $v_2 + v_4 + v_6 + v_8 + v_{10} + v_{12} + v_{14} + W = 0$;

$W = \alpha_{CD} - \alpha_{BA} + x_2 + x_4 + x_6 + x_8 + x_{10} + x_{12} + x_{14} - 180^{\circ} \cdot k$, де k =2 – число невідомих сторін ходової лінії.

Загальне число рівнянь дирекційних кутів мережі дорівнює числу її твердих дирекційних кутів, зменшеному на одиницю. За умови, що тверді сторони мають спільні пункти, замість умов дирекційних кутів для кожного з таких пунктів складають умовне рівняння твердого кута.

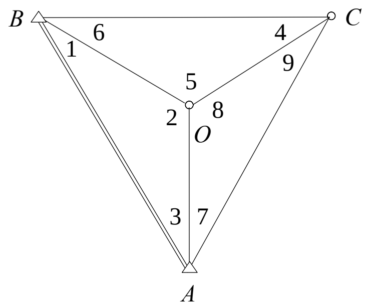
Умовні рівняння фігури, горизонту, твердого кута є окремими випадками рівняння **дирекційних кутів**. Початкові умови усіх цих рівнянь виражаються лінійними формами. Тому їх **називають лінійними кутовими рівняннями**.

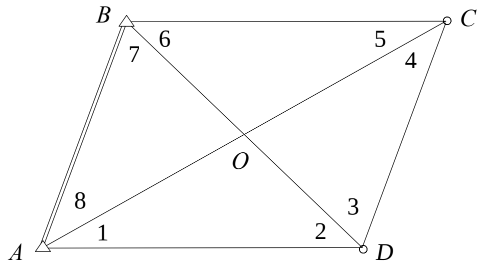
6. Базисні умовні рівняння. Якщо в мережі тріангуляції визначені довжини двох твердих сторін (базисів), то для неї можна сформулювати таку умову: довжина кінцевої сторони b_2, обчислена за довжиною початкової сторони b_1 та кутами мережі вздовж вибраного напряму ходової лінії, має дорівнювати її заданому значенню. Такій умові відповідає рівняння, яке називають базисним умовним рівнянням. Число базисних рівнянь для окремої мережі дорівнює числу базисів, зменшеному на одиницю. Напрям ходової лінії встановлюють від вибраного початкового базису вздовж суміжних сторін ланцюжка трикутників до кінцевого базису. Вздовж лінії почергово, розпочинаючи з першого трикутника, за теоремою синусів виражають довжини усіх суміжних сторін, завершуючи кінцевим базисом у останньому трикутнику.



Наприклад, у мережі, яка зображена на малюнку, ходова лінія має напрям b_1-OD-OC-b_2. Сторони трикутників у цьому напрямі виражаються співвідношеннями $S_{OD} = b_1 \dfrac{\sin X_3}{\sin X_1}$; $S_{OC} = S_{OD} \dfrac{\sin X_6}{\sin X_4}$; $b_2 = S_{OC} \dfrac{\sin X_9}{\sin X_7}$. Об'єднавши всі співвідношення, отримаємо рівняння $b_2 = b_1 \dfrac{\sin X_3 \cdot \sin X_6 \cdot \sin X_9}{\sin X_1 \cdot \sin X_4 \cdot \sin X_7}$. Воно зв'язує вимірювані кути умовою $\varphi(X_1, \ldots, X_9) = \dfrac{b_1}{b_2} \cdot \dfrac{\sin X_3 \cdot \sin X_6 \cdot \sin X_9}{\sin X_1 \cdot \sin X_4 \cdot \sin X_7} - 1 = 0$ і називається базисним умовним рівнянням. Відповідне йому рівняння поправок має загальну форму $\sum_{i=1}^{9} a_i \cdot v_i + W = 0$, де коефіцієнти $a_i = \left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)_0$; нев'язка $W = \dfrac{b_1}{b_2} \cdot \dfrac{\sin x_3 \cdot \sin x_6 \cdot \sin x_9}{\sin x_1 \cdot \sin x_4 \cdot \sin x_7} - 1$.

7. Полюсні умовні рівняння. Такого виду умовні рівняння складають для мереж тріангуляції у вигляді замкненого ланцюжка трикутників навколо однієї вершини, яку називають полюсом, а також у вигляді геодезичного чотирикутника.





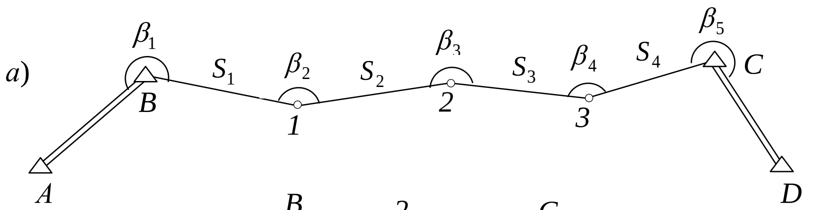
Полюсне рівняння виражає таку ж умову, як і базисне умовне рівняння. Особливість мереж, у яких складають полюсне рівняння, полягає у тому, що у них може не фігурувати жодного базису. Умова складається вздовж ходової лінії, яка бере початок від однієї із суміжних сторін замкненого ланцюжка трикутників і закінчується тією ж стороною. Така сторона опирається на точку полюсу. Якщо вибрану сторону умовно вважати базисом, то зв'язок вздовж ходової лінії виразиться рівнянням такої ж форми, що й базисне рівняння.

8. Координатні умовні рівняння абсцис та ординат виникають у мережах тріангуляції та полігонометрії, які опираються на ізольовані групи вихідних пунктів. Групу утворюють не менше двох вихідних пунктів мережі, які з'єднані між собою твердими сторонами. Якщо число груп дорівнює t, то число координатних рівнянь $r_{коорд} = 2(t-1)$. Помітивши початкову та кінцеву групи пунктів, координатні умови можна розкрити наступним чином: координати X та Y одного з пунктів кінцевої групи, обчислені за відповідними координатами одного із пунктів початкової групи та кутами ланцюжка трикутників вздовж вибраного напряму ходової лінії, повинні дорівнювати їх заданим значенням. Ходову лінію встановлюють у напрямі від пункту початкової групи через вершини проміжних кутів вздовж суміжних сторін ланцюжка трикутників до пункту кінцевої групи. Як виняток, кінцева група може містити один пункт. Зв'язок між вимірюваними кутами виражається на основі теореми синусів вздовж виділеного ланцюжка трикутників.

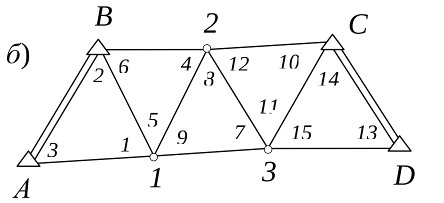
Загальні рекомендації встановлення видів та кількості рівнянь, які складають у планових мережах:

1) у мережах тріангуляції виникають лінійні кутові та нелінійні умовні рівняння усіх видів;
2) у мережах полігонометрії виникають умовні рівняння дирекційних кутів та координатні;
3) у мережах трилатерації умовні рівняння мають складний аналітичний вигляд, тому, як правило, корелатним способом трилатерацію не зрівноважують;

4) кількість лінійних кутових умовних рівнянь поправок $r_1 = n - l$, де n – кількість усіх виміряних кутів; l – кількість невідомих сторін. Наприклад, для полігонометричного ходу на малюнку *а*, $r_1 = 1$ (рівняння дирекційних кутів); для тріангуляції (малюнок *б*) $r_1 = 6$ (п’ять рівнянь фігур та рівняння дирекційних кутів);



$n = 9,\ k = 6,\ r = 3$



$n = 15,\ k = 6,\ r = 9$

5) кількість нелінійних умовних рівнянь поправок загалом $r_2 = r - r_1$ або для тріангуляції $r_2 = l - k$, де k – кількість необхідних виміряних величин, тому $r_2 = 3$ (базисне та два координатні рівняння);

6) при формуванні системи трапляються випадки взаємозамінних видів початкових умов. У таких ситуаціях потрібно вибирати комбінації найбільш простих умовних рівнянь.

2. Формування системи нормальних рівнянь корелат

Система умовних рівнянь поправок $\underset{r\times n}{A}\cdot\underset{n\times 1}{V}+\underset{r\times 1}{W}=0$ містить r однорідних лінійних рівнянь з n невідомими поправками v_i. Завжди $r<n$, тому така система за жодних умов не може мати прямого аналітичного розв'язку. Однозначний приблизний розв'язок можна досягти, якщо невідомі v_i задовольняють умові принципу найменших квадратів $\Phi(v_1,...,v_n)=[pv^2]=\underset{1\times n}{V^T}\cdot\underset{n\times n}{P}\cdot\underset{n\times 1}{V}=\min$ і відповідні частинні похідні $\dfrac{\partial\Phi}{\partial v_i}=0$, зокрема

$$d\Phi=d[pv^2]=[2pv\ \ dv]=0 \qquad (3.10) \qquad\qquad d\Phi=d(\underset{1\times n}{V^T}\cdot\underset{n\times n}{P}\cdot\underset{n\times 1}{V})=2\cdot\underset{1\times n}{V^T}\cdot\underset{n\times n}{P}\cdot\underset{n\times 1}{dV}=0, \qquad 3.11)$$

де $\underset{n\times 1}{dV}-$ диференціал вектора $\underset{n\times 1}{V}$.

Необхідні вимоги екстремуму можна виразити методом Лагранжа. Опираючись на умову принципу найменших квадратів, у відповідності з методом Лагранжа складемо функцію

$$\Phi(v_1,...,v_n)=\underset{1\times n}{V^T}\cdot\underset{n\times n}{P}\cdot\underset{n\times 1}{V}-2\cdot\underset{1\times r}{K^T}(\underset{r\times n}{A}\cdot\underset{n\times 1}{V}+\underset{r\times 1}{W})=\min, \qquad (3.12)$$

де $\underset{1\times r}{K^T}=(k_1\quad k_2\quad ...\quad k_r)-$ це **вектор невідомих множників Лагранжа, які називаються корелати**. Тоді

$$d\Phi=2\cdot\underset{1\times n}{V^T}\cdot\underset{n\times n}{P}\cdot\underset{n\times 1}{dV}-2\cdot\underset{1\times r}{K^T}\cdot\underset{r\times n}{A}\cdot\underset{n\times 1}{dV}=2\cdot(\underset{1\times n}{V^T}\cdot\underset{n\times n}{P}-\underset{1\times r}{K^T}\cdot\underset{r\times n}{A})\cdot\underset{n\times 1}{dV}=0.$$

Звідси слідує: $\underset{1\times n}{V^T}\cdot\underset{n\times n}{P}-\underset{1\times r}{K^T}\cdot\underset{r\times n}{A}=0;$ $\qquad \underset{1\times n}{V^T}\cdot\underset{n\times n}{P}=\underset{1\times r}{K^T}\cdot\underset{r\times n}{A}$.

або у транспонованій формі $\underset{n\times n}{P}\cdot\underset{n\times 1}{V}=\underset{n\times r}{A^T}\cdot\underset{r\times 1}{K}$, звідки $\underset{n\times 1}{V}=\underset{n\times n}{P^{-1}}\cdot\underset{n\times r}{A^T}\cdot\underset{r\times 1}{K}$.

Тут $\underset{n\times n}{P^{-1}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{p_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \frac{1}{p_2} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{p_n} \end{pmatrix}$ - діагональна матриця обернених ваг результатів вимірів. Якщо позначити $\frac{1}{p_i} = q_i$ та відповідно $\underset{n\times n}{P^{-1}} = \underset{n\times n}{q}$, то одержимо рівняння

$$\underset{n\times 1}{V} = \underset{n\times n}{q} \cdot \underset{n\times r}{A^T} \cdot \underset{r\times 1}{K}. \tag{3.13}$$

У розгорнутому вигляді маємо систему рівнянь

$$\left.\begin{array}{l} v_1 = q_1(a_{11}k_1 + a_{21}k_2 + \ldots + a_{r1}k_r) \\ v_2 = q_2(a_{12}k_1 + a_{22}k_2 + \ldots + a_{r2}k_r) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_n = q_n(a_{1n}k_1 + a_{2n}k_2 + \ldots + a_{rn}k_r) \end{array}\right\}. \tag{3.14}$$

Для окремого рівняння цієї системи можна написати:

$$v_i = q_i(a_{1i}k_1 + a_{2i}k_2 + \ldots + a_{ri}k_r). \tag{3.15}$$

Рівняння (3.13) – (3.15) називаються корелатні рівняння поправок. Система корелатних рівнянь поправок виражає лінійне перетворення сукупності величин k_j $(j = \overrightarrow{1,r})$ у сукупність величин v_i $(i = \overrightarrow{1,n})$. Для здійснення такого перетворення передусім належить визначити вектор корелат $\underset{r\times 1}{K}$.

Помістимо вектор поправок (3.13) $\underset{n\times 1}{V} = \underset{n\times n}{q} \cdot \underset{n\times r}{A^T} \cdot \underset{r\times 1}{K}$ до умовного рівняння (3.9) $\underset{r\times n}{A} \cdot \underset{n\times 1}{V} + \underset{r\times 1}{W} = 0$:

$$\underset{r\times n}{A} \cdot \underset{n\times n}{q} \cdot \underset{n\times r}{A^T} \cdot \underset{r\times 1}{K} + \underset{r\times 1}{W} = 0. \tag{3.16}$$

Рівняння (3.16) називаються нормальні рівняння корелат. У розгорнутому вигляді систему нормальних рівнянь корелат можна розкрити таким чином:

$$\left.\begin{array}{l} [qa_1a_1]k_1 + [qa_1a_2]k_2 + \ldots + [qa_1a_r]k_r + W_1 = 0 \\ [qa_2a_1]k_1 + [qa_2a_2]k_2 + \ldots + [qa_2a_r]k_r + W_2 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ [qa_ra_1]k_1 + [qa_ra_2]k_2 + \ldots + [qa_ra_r]k_r + W_r = 0 \end{array}\right\}. \tag{3.17}$$

Система містить r лінійних рівнянь з r невідомими корелатами k_j.

Добуток $\underset{r\times n}{A} \cdot \underset{n\times n}{q} \cdot \underset{n\times r}{A^T} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & q_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & q_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{r1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{r2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{rn} \end{pmatrix}$ дає квадратну симетричну матрицю порядку r з коефіцієнтами $N_{js} = [qa_ja_s] = q_1a_{j1}a_{s1} + q_2a_{j2}a_{s2} + \ldots + q_na_{jn}a_{sn}$:

$$\underset{r\times n}{A} \cdot \underset{n\times n}{q} \cdot \underset{n\times r}{A^T} = \underset{r\times r}{N} = \begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} & \ldots & N_{1r} \\ N_{21} & N_{22} & \ldots & N_{2r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ N_{r1} & N_{r2} & \ldots & N_{rr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [qa_1a_1] & [qa_1a_2] & \ldots & [qa_1a_r] \\ [qa_2a_1] & [qa_2a_2] & \ldots & [qa_2a_r] \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ [qa_ra_1] & [qa_ra_2] & \ldots & [qa_ra_r] \end{pmatrix}.$$

Вільними членами нормальних рівнянь корелат є нев'язки W_j, які вже виражені на попередньому етапі розв'язання задачі зрівноважування. Тож у підсумку одержимо нормальне рівняння корелат

$$\underset{r\times r}{N}\cdot\underset{r\times 1}{K}+\underset{r\times 1}{W}=0. \qquad (3.18)$$

або систему рівнянь

$$\left.\begin{array}{l} N_{11}k_1+N_{12}k_2+\ldots+N_{1r}k_r+W_1=0\\ N_{21}k_1+N_{22}k_2+\ldots+N_{2r}k_r+W_2=0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ N_{r1}k_1+N_{r2}k_2+\ldots+N_{rr}k_r+W_r=0 \end{array}\right\}. \qquad (3.19)$$

Важливо звернути увагу на те, що коефіцієнтам системи таких рівнянь властива ознака симетричності $N_{js}=N_{sj}$: коефіцієнти, розміщені симетрично відносно головної діагоналі, попарно рівні між собою.

Якщо зрівноважують рівноточні виміри, то $p_i=q_i=1$. Тоді вагова матриця перетворюється у одиничну матрицю $\underset{n\times n}{P}=\underset{n\times n}{q}=\underset{n\times n}{E}$ і нормальне рівняння (3.16) набуває вигляду

$$\underset{r\times n}{A}\cdot\underset{n\times r}{A^T}\cdot\underset{r\times 1}{K}+\underset{r\times 1}{W}=0 \qquad (3.20)$$

або

$$\left.\begin{array}{l} [a_1a_1]k_1+[a_1a_2]k_2+\Lambda+[a_1a_r]k_r+W_1=0\\ [a_2a_1]k_1+[a_2a_2]k_2+\Lambda+[a_2a_r]k_r+W_2=0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ [a_ra_1]k_1+[a_ra_2]k_2+\Lambda+[a_ra_r]k_r+W_r=0 \end{array}\right\}. \qquad (3.21)$$

Отже, за умови зрівноважування рівноточних вимірів їх ваги можна не брати до уваги і при формуванні системи нормальних рівнянь корелат відповідні позначення можна опустити.

Порівняння алгоритмів формування системи нормальних рівнянь поправок у параметричному та системи нормальних рівнянь корелат у корелатному способах зрівноважування дозволяє зробити такі висновки.

1. Обидва алгоритми опираються на єдину теоретичну основу – принцип найменших квадратів.

2. Система нормальних рівнянь у параметричному способі формується на основі системи параметричних рівнянь поправок, у корелатному – на основі системи умовних рівнянь поправок. Початкові системи рівнянь у обох способах різні за своїм змістом та походженням. Однак у підсумку це є системи лінійних рівнянь, які відрізняються лише кількістю рівнянь. Зокрема, система параметричних рівнянь поправок містить кількість рівнянь, яке дорівнює загальній кількості виміряних величин n; кількість умовних рівнянь поправок дорівнює кількості надлишкових виміряних величин r.

3. На основі різних початкових рівнянь, застосовуючи різні математичні прийоми, на завершальній стадії формування систем нормальних рівнянь у обох способах зрівноважування отримуємо однакові за своєю структурою та властивостями системи лінійних рівнянь. У параметричному способі їх називають нормальними рівняннями поправок, у корелатному – нормальними рівняннями корелат. Внаслідок відмінностей між алгоритмами, системи нормальних рівнянь у обох способах мають різну розмірність: кількість нормальних рівнянь у параметричному способі дорівнює кількості необхідних виміряних величин k, у корелатному – кількості надлишкових виміряних величин r.

3. Розв’язування системи нормальних рівнянь корелат

Сформульовані напередодні висновки дають підстави використати для розв’язування системи нормальних рівнянь корелат ті ж способи, які застосовувались при розв’язуванні системи нормальних рівнянь поправок у параметричному способі зрівноважування. Окреслимо деякі особливості реалізації методів при вирішенні завдання зрівноважування корелатним способом.

Розв’язування системи нормальних рівнянь корелат $\underset{r\times r}{N}\cdot\underset{r\times 1}{K}+\underset{r\times 1}{W}=0$ полягає у визначенні вектора $\underset{r\times 1}{K}$, елементами якого є корені рівнянь k_j $(j=\overrightarrow{1,r})$ – корелати. Розв’язок даного матричного рівняння має вигляд

$$\underset{r\times 1}{K}=-\underset{r\times r}{Q}\cdot\underset{r\times 1}{W}, \tag{3.23}$$

де $\underset{r\times r}{Q}=\underset{r\times r}{N}^{-1}$ – це обернена матриця до матриці коефіцієнтів $\underset{r\times r}{N}=\underset{r\times n}{A}\cdot\underset{n\times n}{q}\cdot\underset{n\times r}{A^T}$. Матриця $\underset{r\times r}{Q}$ має такі ж властивості, що і матриця коефіцієнтів $\underset{r\times r}{N}$. Серед них визначальною є властивість симетричності не квадратичних коефіцієнтів відносно головної діагоналі: $\underset{r\times r}{Q}=\underset{r\times r}{Q^T}$. Завдання побудови оберненої матриці полягає у розв’язуванні рівняння

$$\underset{r\times r}{N}\cdot\underset{r\times r}{Q}=\underset{r\times r}{E} \tag{3.24}$$

відносно $\underset{r\times r}{Q}$, де $\underset{r\times r}{E}$ - одинична матриця. Рівняння (3.24) застосовують для перевірки побудови оберненої матриці. **Рівняння (3.23) виражає розв’язок системи нормальних рівнянь корелат**. Перевірку розв’язку можна здійснити підстановкою вектора корелат k_j у нормальне рівняння $\underset{r\times r}{N}\cdot\underset{r\times 1}{K}+\underset{r\times 1}{W}=0$: умова рівняння повинна задовольнятись.

4. Обчислення зрівноважених результатів вимірів

Обчислення поправок до результатів вимірів v_i за корелатними рівняннями поправок (3.13) $\underset{n\times1}{V} = \underset{n\times n}{q} \cdot \underset{n\times r}{A^T} \cdot \underset{r\times1}{K}$. Їх числові значення визначає вектор корелат $\underset{r\times1}{K}$, який уже сформований за результатами розв'язування системи нормальних рівнянь корелат.

Контроль обчислення поправок v_i **за значенням** $[pv^2] = \underset{1\times n}{V^T} \cdot \underset{n\times n}{P} \cdot \underset{n\times1}{V}$**.**

Помножимо обидві частини корелатного рівняння поправок $\underset{n\times1}{V} = \underset{n\times n}{q} \cdot \underset{n\times r}{A^T} \cdot \underset{r\times1}{K}$ на величину $\underset{1\times n}{V^T} \cdot \underset{n\times n}{P}$:

$$\underset{1\times n}{V^T} \cdot \underset{n\times n}{P} \cdot \underset{n\times1}{V} = \underset{1\times n}{V^T} \cdot \underset{n\times n}{P} \cdot \underset{n\times n}{q} \cdot \underset{n\times r}{A^T} \cdot \underset{r\times1}{K}.$$

Тут $\underset{n\times n}{P} \cdot \underset{n\times n}{q} = \underset{n\times n}{E}$, де $\underset{n\times n}{E}$ – одинична матриця. Тому $\underset{1\times n}{V^T} \cdot \underset{n\times n}{P} \cdot \underset{n\times1}{V} = \underset{1\times n}{V^T} \cdot \underset{n\times r}{A^T} \cdot \underset{r\times1}{K}$.

З іншого боку, з умовного рівняння поправок (3.9) $\underset{r\times n}{A} \cdot \underset{n\times1}{V} + \underset{r\times1}{W} = 0$ слідує: $\underset{r\times n}{A} \cdot \underset{n\times1}{V} = -\underset{r\times1}{W}$ або $\underset{1\times n}{V^T} \cdot \underset{n\times r}{A^T} = -\underset{1\times r}{W^T}$.

Тому

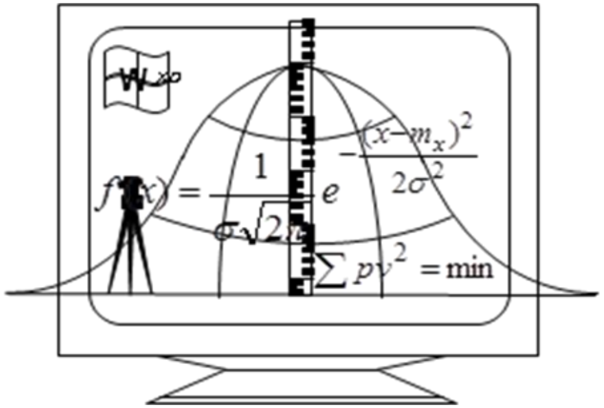
$$\underset{1\times n}{V^T} \cdot \underset{n\times n}{P} \cdot \underset{n\times1}{V} = -\underset{1\times r}{W^T} \cdot \underset{r\times1}{K}.$$

Значення $[pv^2] = -\underset{1\times r}{W^T} \cdot \underset{r\times1}{K}$ можна використати для контролю обчислення поправок до результатів вимірів шляхом його співставлення із значенням $[pv^2] = \underset{1\times n}{V^T} \cdot \underset{n\times n}{P} \cdot \underset{n\times1}{V}$.

Зрівноважені значення результатів вимірів $\tilde{x}_i$ виражаються рівностями $\tilde{x}_i = x_i + v_i \quad (i = \overline{1,n})$ або у матричній формі $\underset{n\times1}{\tilde{x}} = \underset{n\times1}{x} + \underset{n\times1}{V}$. Тут $\underset{n\times1}{\tilde{x}} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \dots \\ \tilde{x}_n \end{pmatrix}$ - зрівноважені значення результатів вимірів; $\underset{n\times1}{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ - результати вимірів; $\underset{n\times1}{V} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix}$ - поправки до результатів вимірів. Розкриттям числових значень $\tilde{x}_i \quad (i = \overline{1,n})$ завершується етап зрівноважувальних обчислень.

Заключний контроль зрівноважування реалізовується перевіркою істинності умов, які виражають незалежні умовні рівняння (3.3) $\varphi_j(\tilde{x}_1,\dots,\tilde{x}_n) = 0$: умовні рівняння, складені із зрівноваженими результатами вимірів $\tilde{x}_i$, дорівнюють нулю. Логічним наслідком зазначеної вимоги є ще наступна: нев'язки умовних рівнянь, обчислені за зрівноваженими результатами вимірів $\tilde{x}_i$, повинні дорівнювати нулю $W_j = \varphi_j(\tilde{x}_1,\dots,\tilde{x}_n) = 0$.

Національний університет
водного господарства
та природокористування



Кафедра геодезії та картографії

Спеціальність 193 “Геодезія та землеустрій”

Дисципліна ***МАТЕМАТИЧНА ОБРОБКА ГЕОДЕЗИЧНИХ ВИМІРІВ***
Модуль 3 ***МЕТОД НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ***

Лектор О.А. Тадєєв

Тема 3

ЗРІВНОВАЖУВАННЯ ВИМІРІВ КОРЕЛАТНИМ СПОСОБОМ
2. ОЦІНКА ТОЧНОСТІ ЗА РЕЗУЛЬТАТАМИ ЗРІВНОВАЖУВАННЯ

1. Постановка і шляхи досягнення розв’язку задачі
2. Оцінка точності зрівноважених результатів вимірів
3. Оцінка точності функцій зрівноважених вимірів

1. Постановка і шляхи досягнення розв'язку задачі

Під оцінкою точності за результатами зрівноважування корелатним способом розуміють розрахунок середніх квадратичних похибок зрівноважених результатів вимірів та їх функцій.

Оцінка точності потрібної величини - незмінна задача, рішення якої полягає у розрахунку середньої квадратичної похибки величини M за формулами

$$M = \mu\sqrt{\frac{1}{P}} \qquad \text{чи} \qquad M = m\sqrt{\frac{1}{P}}$$

за умови оцінювання нерівноточних чи рівноточних вимірів відповідно. Тут μ - середня квадратична похибка одиниці ваги; m - середня квадратична похибка рівноточних вимірів; P - вага оцінюваної величини.

Характеристика точності величини таким критерієм зводиться до вираження

- ✓ середніх квадратичних похибок одиниці ваги μ або рівноточних вимірів m;
- ✓ ваги оцінюваної величини P.

Значення похибок μ чи m можна розкрити за формулами Бесселя

$$\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-k}} \qquad \text{чи} \qquad m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-k}}.$$

Можна також користуватись формулою

$$\mu = \sqrt{\frac{[P_W W^2]}{r}}. \tag{3.43}$$

Тут W_j – нев'язки умовних рівнянь; P_{W_j} – ваги нев'язок; $j = \overrightarrow{1, r}$; r – число надлишкових виміряних величин. Ваги нев'язок виражає формула теорії похибок вимірів для ваги функції незалежних виміряних величин

$$\frac{1}{P_{W_j}} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \right)_0^2 \frac{1}{p_i} = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}^2 \frac{1}{p_i}. \tag{3.44}$$

Формула (3.43) є наслідком формули Гаусса, позаяк нев'язки W_j є істинними похибками r незалежних умовних рівнянь φ_j, які є функціями результатів вимірів.

Вагу P оцінюваної величини F встановлюють, виражаючи її функцією $F = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ результатів вимірів x_i з використанням формули теорії похибок

$$\frac{1}{P_F} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{\text{о}}^{2} \frac{1}{p_i}.$$

За результатами зрівноважування корелатним способом оцінюванню підлягають зрівноважені результати вимірів або їх функції, але не безпосередні результати вимірів або їх функції. Тому пряме застосування цієї формули у такому вигляді неприпустиме. З цього слідує, що для вираження ваги оцінюваної величини F передусім потрібно встановити її зв'язок з результатами безпосередніх вимірів.

Хід дій з обчислення ваги оцінюваної величини залежить від вигляду функції, яка виражає її через виміряні величини.

2. Оцінка точності зрівноважених результатів вимірів

Насамперед виразимо **зв'язок результатів вимірів** x_i **із зрівноваженими значеннями** $\tilde{x}_i$.

Зрівноважені значення $\tilde{x}_i$ виражаються функціями результатів вимірів x_i вигляду $\tilde{x}_i = F_i(x_i) = x_i + v_i$ $(i = \overrightarrow{1,n})$ або у матричній формі $\underset{n\times 1}{\tilde{x}} = \underset{n\times 1}{x} + \underset{n\times 1}{V}$.

Сукупність поправок

$$\underset{n\times 1}{V} = \underset{n\times 1}{\tilde{x}} - \underset{n\times 1}{x}, \tag{3.60}$$

за умовою завдання зрівноважування, повинна враховувати істинні похибки вимірів $\underset{n\times 1}{\theta} = -\underset{n\times 1}{V}$ і ліквідовувати нев'язки $W_j = \varphi_j(x_1,...,x_n)$, які виникають внаслідок похибок θ_i; $j = \overrightarrow{1,r}$; r – кількість надлишкових виміряних величин.

Масиви $\underset{n\times 1}{V}$ та $\underset{r\times 1}{W}$ зв'язані умовними рівняннями поправок $\underset{r\times n}{A} \cdot \underset{n\times 1}{V} + \underset{r\times 1}{W} = 0$. Якщо в ці рівняння помістити рівняння (3.60) $\underset{n\times 1}{V} = \underset{n\times 1}{\tilde{x}} - \underset{n\times 1}{x}$, одержимо:

$$\underset{r\times n}{A} \cdot \underset{n\times 1}{V} + \underset{r\times 1}{W} = \underset{r\times n}{A} \cdot \left(\underset{n\times 1}{\tilde{x}} - \underset{n\times 1}{x} \right) + \underset{r\times 1}{W} = \underset{r\times n}{A} \cdot \underset{n\times 1}{\tilde{x}} - \underset{r\times n}{A} \cdot \underset{n\times 1}{x} + \underset{r\times 1}{W} = 0.$$

Враховуючи умову (3.3) $\varphi_j(\tilde{x}_1,...,\tilde{x}_n) = 0$ або, що рівносильно, $\underset{r\times n}{A} \cdot \underset{n\times 1}{\tilde{x}} = 0$, одержимо:

$$\underset{r\times n}{A} \cdot \underset{n\times 1}{x} = \underset{r\times 1}{W}. \tag{3.61}$$

В ході розв’язання завдання зрівноважування поправки $\underset{n\times 1}{V}$ виражаються через корелати $\underset{r\times 1}{K}$ за допомогою корелатних рівнянь поправок $\underset{n\times 1}{V} = \underset{n\times n}{q} \cdot \underset{n\times r}{A^T} \cdot \underset{r\times 1}{K}$. Масив корелат $\underset{r\times 1}{K}$ формується за розв’язком системи нормальних рівнянь корелат: $\underset{r\times 1}{K} = -\underset{r\times r}{Q} \cdot \underset{r\times 1}{W}$. На такій основі для сукупності поправок $\underset{n\times 1}{V}$ отримаємо:

$$\underset{n\times 1}{V} = \underset{n\times n}{q} \cdot \underset{n\times r}{A^T} \cdot \underset{r\times 1}{K} = \underset{n\times n}{q} \cdot \underset{n\times r}{A^T} \cdot \left(-\underset{r\times r}{Q} \cdot \underset{r\times 1}{W} \right) = -\underset{n\times n}{q} \cdot \underset{n\times r}{A^T} \cdot \underset{r\times r}{Q} \cdot \underset{r\times n}{A} \cdot \underset{n\times 1}{x} . \tag{3.62}$$

Підстановка цього рівняння в рівняння $\underset{n\times 1}{\tilde{x}} = \underset{n\times 1}{x} + \underset{n\times 1}{V}$ забезпечує такий кінцевий результат:

$$\underset{n\times 1}{\tilde{x}} = \underset{n\times 1}{x} - \underset{n\times n}{q} \cdot \underset{n\times r}{A^T} \cdot \underset{r\times r}{Q} \cdot \underset{r\times n}{A} \cdot \underset{n\times 1}{x} . \tag{3.63}$$

Рівняння (3.63) виражає зв’язок результатів вимірів x_i із зрівноваженими значеннями $\tilde{x}_i$. Величина $\underset{n\times n}{q} \cdot \underset{n\times r}{A^T} \cdot \underset{r\times r}{Q} \cdot \underset{r\times n}{A} = const$ у межах окремої задачі.

Виразимо тепер середні квадратичні похибки та ваги корелат k_j, поправок v_i і зрівноважених значень $\tilde{x}_i$ як функцій результатів вимірів $\tilde{x}_i = F_i(x_1,...,x_n)$. За основу беремо рівняннями зв'язку (3.63) і формули теорії похибок $m_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_\text{o}^2 m_i^2}$ та $\frac{1}{P_F} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_\text{o}^2 \frac{1}{p_i}$.

Оцінюючи **точність масиву корелат** $\underset{r\times 1}{K} = -\underset{r\times r}{Q} \cdot \underset{r\times n}{A} \cdot \underset{n\times 1}{x}$, отримаємо:

$$\underset{r\times r}{M_K^2} = \underset{r\times r}{Q} \cdot \underset{r\times n}{A} \cdot \underset{n\times n}{M^2} \cdot \underset{n\times r}{A^T} \cdot \underset{r\times r}{Q}\,; \tag{3.64}$$

$$\underset{r\times r}{Q_K} = \underset{r\times r}{Q} \cdot \underset{r\times n}{A} \cdot \underset{n\times n}{q} \cdot \underset{n\times r}{A^T} \cdot \underset{r\times r}{Q} = \underset{r\times r}{Q} \cdot \underset{r\times r}{N} \cdot \underset{r\times r}{Q} = \underset{r\times r}{Q} \cdot \underset{r\times r}{E} = \underset{r\times r}{Q}\,, \tag{3.65}$$

де $\underset{n\times n}{M^2}$ – діагональна матриця квадратів середніх квадратичних похибок результатів вимірів; $\underset{r\times r}{M_K^2}$ і $\underset{r\times r}{Q_K}$ - кореляційна і вагова матриці, на головних діагоналях яких розташовані відповідно квадрати середніх квадратичних похибок та обернені ваги корелат.

Оцінюючи **точність масиву поправок** $\underset{n\times 1}{V} = \underset{n\times n}{q} \cdot \underset{n\times r}{A^T} \cdot \underset{r\times 1}{K}$, на основі (3.64) і (3.65), одержимо формули

$$\underset{n\times n}{M_V^2} = \underset{n\times n}{q} \cdot \underset{n\times r}{A^T} \cdot \underset{r\times r}{M_K^2} \cdot \underset{r\times n}{A} \cdot \underset{n\times n}{q}\,, \tag{3.66}$$

$$\underset{n\times n}{Q_V} = \underset{n\times n}{q} \cdot \underset{n\times r}{A^T} \cdot \underset{r\times r}{Q} \cdot \underset{r\times n}{A} \cdot \underset{n\times n}{q}\,. \tag{3.67}$$

Оцінюючи **точність масиву зрівноважених результатів вимірів** $\tilde{x}_i$, за рівняннями зв'язку (3.63) виразимо відповідні кореляційну $\underset{n\times n}{M_{\tilde{x}}^2}$ та вагову $\underset{n\times n}{Q_{\tilde{x}}}$ матриці.

$$\underset{n\times n}{M_{\tilde{x}}^2} = \underset{n\times n}{M^2} - \underset{n\times n}{q} \cdot \underset{n\times r}{A^T} \cdot \underset{r\times r}{Q} \cdot \underset{r\times n}{A} \cdot \underset{n\times n}{M^2} \cdot \underset{n\times r}{A^T} \cdot \underset{r\times r}{Q} \cdot \underset{r\times n}{A} \cdot \underset{n\times n}{q}\ ; \tag{3.68}$$

$$\underset{n\times n}{Q_{\tilde{x}}} = \underset{n\times n}{q} - \underset{n\times n}{q} \cdot \underset{n\times r}{A^T} \cdot \underset{r\times r}{Q} \cdot \underset{r\times n}{A} \cdot \underset{n\times n}{q} \cdot \underset{n\times r}{A^T} \cdot \underset{r\times r}{Q} \cdot \underset{r\times n}{A} \cdot \underset{n\times n}{q}\ .$$

Враховуючи, що $\underset{r\times n}{A} \cdot \underset{n\times n}{q} \cdot \underset{n\times r}{A^T} = \underset{r\times r}{N}$ та $\underset{r\times r}{N} \cdot \underset{r\times r}{Q} = \underset{r\times r}{E}$,

$$\underset{n\times n}{Q_{\tilde{x}}} = \underset{n\times n}{q} - \underset{n\times n}{q} \cdot \underset{n\times r}{A^T} \cdot \underset{r\times r}{Q} \cdot \underset{r\times n}{A} \cdot \underset{n\times n}{q}\ . \tag{3.69}$$

З урахуванням кореляційної матриці результатів вимірів $\underset{n\times n}{M^2} = \mu^2 \underset{n\times n}{q}$ отримаємо наступне:

$$\underset{n\times n}{M_{\tilde{x}}^2} = \mu^2 \left(\underset{n\times n}{q} - \underset{n\times n}{q} \cdot \underset{n\times r}{A^T} \cdot \underset{r\times r}{Q} \cdot \underset{r\times n}{A} \cdot \underset{n\times n}{q} \cdot \underset{n\times r}{A^T} \cdot \underset{r\times r}{Q} \cdot \underset{r\times n}{A} \cdot \underset{n\times n}{q} \right);$$

$$\underset{n\times n}{M_{\tilde{x}}^2} = \mu^2 \left(\underset{n\times n}{q} - \underset{n\times n}{q} \cdot \underset{n\times r}{A^T} \cdot \underset{r\times r}{Q} \cdot \underset{r\times n}{A} \cdot \underset{n\times n}{q} \right); \tag{3.70}$$

$$\underset{n\times n}{M_{\tilde{x}}^2} = \mu^2 \underset{n\times n}{Q_{\tilde{x}}}\ . \tag{3.71}$$

За умови **зрівноважування рівноточних результатів вимірів**, які обтяжені похибкою m, беремо до уваги, що $\underset{n\times n}{q} = \underset{n\times n}{E}$. Тоді формули оцінки точності зрівноважених результатів вимірів $\tilde{x}_i$ спрощуються до вигляду

$$\underset{n\times n}{M_{\tilde{x}}^2} = m^2\left(\underset{n\times n}{E} - \underset{n\times r}{A^T} \cdot \underset{r\times r}{Q} \cdot \underset{r\times n}{A}\right); \tag{3.72}$$

$$\underset{n\times n}{Q_{\tilde{x}}} = \underset{n\times n}{E} - \underset{n\times r}{A^T} \cdot \underset{r\times r}{Q} \cdot \underset{r\times n}{A}; \tag{3.73}$$

$$\underset{n\times n}{M_{\tilde{x}}^2} = m^2 \underset{n\times n}{Q_{\tilde{x}}}. \tag{3.74}$$

Головна діагональ вагової матриці $\underset{n\times n}{Q_{\tilde{x}}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{P_{\tilde{x}_1}} & Q_{\tilde{x}_{12}} & \dots & Q_{\tilde{x}_{1n}} \\ Q_{\tilde{x}_{21}} & \frac{1}{P_{\tilde{x}_2}} & \dots & Q_{\tilde{x}_{2n}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Q_{\tilde{x}_{n1}} & Q_{\tilde{x}_{n2}} & \dots & \frac{1}{P_{\tilde{x}_n}} \end{pmatrix}$ містить обернені ваги $\frac{1}{P_{\tilde{x}_i}}$ зрівноважених результатів вимірів $\tilde{x}_i$. Інші елементи матриці називаються кореляційними моментами. Вони виражають тісноту залежності між зрівноваженими вимірами за допомогою коефіцієнтів кореляції

$$r_{\tilde{x}_i\tilde{x}_j} = \frac{Q_{\tilde{x}_{ij}}}{\sqrt{\frac{1}{P_{\tilde{x}_i}} \cdot \frac{1}{P_{\tilde{x}_j}}}}. \tag{3.75}$$

3. Оцінка точності функцій зрівноважених вимірів

Нехай за результатами зрівноважування потрібно оцінити точність величини F, яка виражається функцією

$$F = F(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n). \tag{3.77}$$

Функції (3.77) можуть мати нелінійний вигляд. Тому традиційно, з метою уніфікації алгоритму вирішення завдання, їх лінеаризують шляхом розкладу в ряд Тейлора:

$$F = F(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \right)_{\text{o}} v_i + R. \tag{3.78}$$

З огляду точності розв'язку завдання сумою всіх нелінійних членів розкладу R можна нехтувати. Позначимо

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \right)_{\text{o}} = F_i. \tag{3.79}$$

Тоді

$$F = F(x) + \sum_{i=1}^{n} F_i v_i \tag{3.80}$$

або

$$F = F(x) + \underset{1\times n}{F} \cdot \underset{n\times 1}{V}, \tag{3.81}$$

де матриця $\underset{1\times n}{F} = \begin{pmatrix} F_1 & F_2 & \ldots & F_n \end{pmatrix}$ формується частинними похідними (3.79). Лінеаризована форма (3.80) або (3.81) функції (3.77) називається **вагова функція**.

Залежність масивів поправок $\underset{n\times1}{V}$ та результатів вимірів $\underset{n\times1}{x}$ виражає рівняння (3.62): $\underset{n\times1}{V} = -\underset{n\times n}{q} \cdot \underset{n\times r}{A^T} \cdot \underset{r\times r}{Q} \cdot \underset{r\times n}{A} \cdot \underset{n\times1}{x}$. Підстановка його до вагової функції (3.81) $F = F(x) + \underset{1\times n}{F} \cdot \underset{n\times1}{V}$ зумовлює рівняння

$$F = F(x) - \underset{1\times n}{F} \cdot \underset{n\times n}{q} \cdot \underset{n\times r}{A^T} \cdot \underset{r\times r}{Q} \cdot \underset{r\times n}{A} \cdot \underset{n\times1}{x}, \tag{3.82}$$

Рівняння (3.82) виражає оцінювану величину *F* як функцію результатів вимірів x_i.

За формулами теорії похибок $m_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{o}^{2} m_i^2}$ і $\frac{1}{P_F} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{o}^{2}\frac{1}{p_i}$ виражаємо точність функції (3.82):

$$M_F^2 = \underset{1\times n}{F} \cdot \underset{n\times n}{M^2} \cdot \underset{n\times1}{F^T} - \underset{1\times n}{F} \cdot \underset{n\times n}{q} \cdot \underset{n\times r}{A^T} \cdot \underset{r\times r}{Q} \cdot \underset{r\times n}{A} \cdot \underset{n\times n}{M^2} \cdot \underset{n\times r}{A^T} \cdot \underset{r\times r}{Q} \cdot \underset{r\times n}{A} \cdot \underset{n\times n}{q} \cdot \underset{n\times1}{F^T}; \tag{3.83}$$

$$\frac{1}{P_F} = \underset{1\times n}{F} \cdot \underset{n\times n}{q} \cdot \underset{n\times1}{F^T} - \underset{1\times n}{F} \cdot \underset{n\times n}{q} \cdot \underset{n\times r}{A^T} \cdot \underset{r\times r}{Q} \cdot \underset{r\times n}{A} \cdot \underset{n\times n}{q} \cdot \underset{n\times1}{F^T}. \tag{3.84}$$

Тут $\underset{n\times n}{M^2}$ – кореляційна матриця середніх квадратичних похибок m_i результатів вимірів x_i.

Величини M_F^2 та $\frac{1}{P_F}$ виражають квадрат середньої квадратичної похибки та обернену вагу оцінюваної величини *F*. Їх пов'язує залежність вигляду

$$M_F^2 = \mu^2 \frac{1}{P_F}. \tag{3.85}$$

Якщо оцінюється відразу декілька функцій, наприклад s, то матриця $\underset{1\times n}{F}$ містить s рядків: $\underset{s\times n}{F}$. Рядки формуються окремо для кожної функції елементами

$$F_{ji} = \left(\frac{\partial F_j}{\partial x_i}\right)_{\text{o}}; \quad j = \overrightarrow{1,s};\ i = \overrightarrow{1,n}. \tag{3.86}$$

Тоді $\underset{s\times n}{F} = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & \dots & F_{1n} \\ F_{21} & F_{22} & \dots & F_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_{s1} & F_{s2} & \dots & F_{sn} \end{pmatrix}$, а формули оцінки точності (3.83) – (3.85) узагальнюються:

$$\underset{s\times s}{M_F^2} = \underset{s\times n}{F} \cdot \underset{n\times n}{M^2} \cdot \underset{n\times s}{F^T} - \underset{s\times n}{F} \cdot \underset{n\times n}{q} \cdot \underset{n\times r}{A^T} \cdot \underset{r\times r}{Q} \cdot \underset{r\times n}{A} \cdot \underset{n\times n}{M^2} \cdot \underset{n\times r}{A^T} \cdot \underset{r\times r}{Q} \cdot \underset{r\times n}{A} \cdot \underset{n\times n}{q} \cdot \underset{n\times s}{F^T}; \tag{3.87}$$

$$\underset{s\times s}{Q_F} = \underset{s\times n}{F} \cdot \underset{n\times n}{q} \cdot \underset{n\times s}{F^T} - \underset{s\times n}{F} \cdot \underset{n\times n}{q} \cdot \underset{n\times r}{A^T} \cdot \underset{r\times r}{Q} \cdot \underset{r\times n}{A} \cdot \underset{n\times n}{q} \cdot \underset{n\times s}{F^T}; \tag{3.88}$$

$$\underset{s\times s}{M_F^2} = \mu^2 \cdot \underset{s\times s}{Q_F}. \tag{3.89}$$

Кореляційна $\underset{s\times s}{M_F^2}$ і вагова $\underset{s\times s}{Q_F}$ матриці на головних діагоналях містять квадрати середніх квадратичних похибок $M_{F_j}^2$ і обернені ваги $\frac{1}{P_{F_j}}$ оцінюваних функції. Недіагональні елементи $Q_{F_{ij}}$ симетричної матриці $\underset{s\times s}{Q_F}$ називаються кореляційними моментами і виражають залежності між оцінюваними функціями. Тісноту залежності між функціями за номерами i та j характеризують коефіцієнти кореляції $r_{F_iF_j} = \frac{Q_{F_{ij}}}{\sqrt{\frac{1}{P_{F_i}} \cdot \frac{1}{P_{F_j}}}}$.

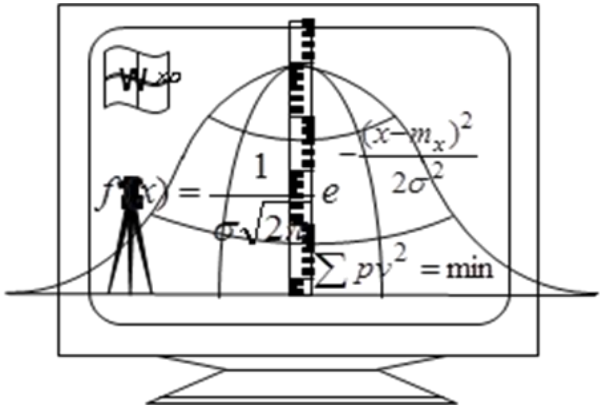
За умови **зрівноважування рівноточних результатів вимірів**, які обтяжені похибкою m, беремо до уваги, що $\underset{n\times n}{q} = \underset{n\times n}{E}$. Тоді

$$\underset{s\times s}{Q_F} = \underset{s\times n}{F} \cdot \underset{n\times s}{F^T} - \underset{s\times n}{F} \cdot \underset{n\times r}{A^T} \cdot \underset{r\times r}{Q} \cdot \underset{r\times n}{A} \cdot \underset{n\times s}{F^T}; \tag{3.90}$$

$$\underset{s\times s}{M_F^2} = m^2 \cdot \underset{s\times s}{Q_F}. \tag{3.91}$$

Порівняння формул оцінки точності зрівноважених результатів вимірів та функцій зрівноважених вимірів показує, що останні можна розглядати як загальні для обох випадків. Дійсно, якщо прийняти $s = n$, а оцінюваними функціями вважати зрівноважені виміри $F_j = F_j(\tilde{x}_1,...,\tilde{x}_n) = \tilde{x}_j$, то тоді матриця $\underset{s\times n}{F}$ перетворюється в одиничну матрицю: $\underset{s\times n}{F} = \underset{n\times n}{F} = \underset{n\times n}{E}$. Її підстановка до формул (3.88) і (3.90) дає у підсумку формули оцінки точності зрівноважених вимірів (3.69) і (3.73).

Національний університет
водного господарства
та природокористування



Кафедра геодезії та картографії

Спеціальність 193 “Геодезія та землеустрій”

Дисципліна **МАТЕМАТИЧНА ОБРОБКА ГЕОДЕЗИЧНИХ ВИМІРІВ**
Модуль 3 **МЕТОД НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ**

Лектор О.А. Тадєєв

Тема 4

АПРОКСИМАЦІЯ ФУНКЦІЙ МЕТОДОМ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ

1. Постановка задачі
2. Апроксимація функцій за результатами вимірів
3. Оцінка точності за результатами апроксимації

1. Постановка задачі

Допустимо, що величина Y залежить від величини X і потрібно за результатами їх вимірів знайти функцію $Y = F(X)$, яка описувала б їх залежність. **Задача описування результатів спостережень величин - це задача складання табличної функції, яку потрібно апроксимувати деякою функціональною залежністю у тій чи іншій аналітичній формі**. Встановлена функція діє лише для тих значень аргументу, які містяться у таблиці. За своєю суттю задача апроксимації табличних значень функціональною залежністю має на меті побудову емпіричних формул. **Емпіричною формулою називають всяку функцію, яка наближує табличну функцію, отриману з результатів спостережень**.

Коли потрібно визначити приблизні значення функції за значеннями аргументів, які відсутні у таблиці, але не виходять за межі табуляції, то розв'язується **задача інтерполяції**. Визначення значень емпіричної формули поза межами табуляції функції називають **задача екстраполяції**.

Задача побудови емпіричних формул вимагає дотримання двох умов:

1) потрібно вибрати аналітичну структуру функції, якою здійснюватиметься наближення табличної емпіричної функції

2) потрібно визначитись з критерієм оптимальності описування результатів експерименту різними функціями.

Побудову емпіричних формул з дотриманням зазначених умов здійснюють методом найменших квадратів.

Нехай за результатами експерименту величини X та Y набули значень $(x_i; y_i)$; $i = \overrightarrow{1,n}$; $n -$кількість вимірів. Точність результатів y_i характеризують середні квадратичні похибки m_i. Необхідно виконати апроксимацію емпіричних даних і визначити оптимальну емпіричну формулу.

2. Апроксимація функцій за результатами вимірів
2.1. Імовірнісне обґрунтування вирішення задачі

Допустимо, що істинну залежність Y від X виражає формула

$$Y = F(X), \tag{1}$$

а похибки вимірів m_i і результати y_i підпорядковані нормальному законові розподілу. Якщо виміри рівноточні, то $m_1 = m_2 = \ldots = m_n = m$. Тоді для функції щільності нормально розподіленої величини Y одержимо:

$$f_i(y_i) = \frac{1}{m\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{[y_i - F(x_i)]^2}{2m^2}}. \tag{2}$$

В такій постановці задачі похибки m_i - це середні квадратичні відхилення (стандарти), а $F(x_i)$ - математичні очікування результатів y_i. З метою забезпечення істинності умови (1) ймовірність сукупності результатів y_i має бути найбільшою. Для цього абсолютне значення показника степені у функції щільності (2) повинно бути найменшим. У межах проведеного експерименту $\frac{1}{2m^2} = const$. Тому,

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - F(x_i))^2 = \left[\theta^2\right] = \min . \tag{3}$$

Для нерівноточних результатів y_i з урахуванням зв'язку середньої квадратичної похибки m та ваги p

$$\sum_{i=1}^{n} p_i (y_i - F(x_i))^2 = \left[p\theta^2\right] = \min . \tag{4}$$

Різниці $y_i - F(x_i) = \theta_i$ виражають істинні похибки результатів y_i. Тому вирішення задачі зводиться до визначення поправок

$$v_i = F(x_i) - y_i, \tag{5}$$

які мають ліквідовувати наявні похибки.

З іншого боку, величини v_i показують відхилення результатів експерименту y_i і відповідних значень апроксимуючої функції $Y = F(X)$. Якщо встановити той чи інший числовий критерій, то відхилення v_i забезпечать визначення оптимальної аналітичної форми та параметрів функції. Отже, умови (3) та (4) набувають вигляду

$$[v^2] = \min, \tag{6}$$

$$[pv^2] = \min. \tag{7}$$

Формули (6) і (7) є математичним вираженням принципу найменших квадратів. Отже, ці умови є основою вирішення поставленого завдання.

2.2. Вираження залежності у загальному вигляді

Будь-яка функція $Y = F(X)$ містить сукупність постійних параметрів (коефіцієнтів) c_j ($j = \overrightarrow{1,k}$), значення яких апріорі невідомі. Тому загалом існуючу закономірність перебігу експерименту виражає функція

$$Y = F(X; c_1, ..., c_k). \tag{8}$$

Співвідношення змінної X з параметрами c_j визначають характер аналітичної форми залежності Y від X. Якщо значеннями параметрів c_j сформувати матрицю $\underset{k\times 1}{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdots \\ c_k \end{pmatrix}$, а результати y_i звести до матриці $\underset{n\times 1}{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}$, то функція (8) набуває вигляду

$$\underset{n\times 1}{Y} = \underset{n\times k}{A} \cdot \underset{k\times 1}{c}. \tag{9}$$

Тут $\underset{n\times k}{A}$ - матриця коефіцієнтів, які залежать від аналітичної форми функції (8) і значень змінної X. Наприклад, якщо залежність виражається лінійною функцією $Y = c_1 X + c_2$, то $\underset{n\times 2}{A} = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \cdots & \cdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix}$. При параболічній залежності $Y = c_1 X + c_2 X^2 + ... + c_{k-1} X^{k-1} + c_k$ маємо $\underset{n\times k}{A} = \begin{pmatrix} x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{k-1} & 1 \\ x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{k-1} & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{k-1} & 1 \end{pmatrix}$.

2.3. Визначення параметрів апроксимуючої функції

Враховуючи функцію $Y = F(X; c_1,...,c_k)$, рівняння поправок $v_i = F(x_i) - y_i$ набувають вигляду

$$v_i = F(x_i; c_1,...,c_k) - y_i, \tag{10}$$

а завдання визначення числових значень невідомих параметрів c_j під умовою $[pv^2] = \min$ зводиться до розв'язування системи рівнянь

$$\left[pv \frac{\partial v}{\partial c_j} \right] = 0 \cdot \tag{11}$$

$$\left(\frac{\partial v_i}{\partial c_j} \right)_o = a_{ij}; \tag{12}$$

a_{ij} - це числові значення частинних похідних, які можна визначити за результатами експерименту x_i. Диференціювання рівнянь поправок (10) показує, що значення a_{ij} - це елементи матриці коефіцієнтів $\underset{n\times k}{A}$ рівняння $\underset{n\times 1}{Y} = \underset{n\times k}{A} \cdot \underset{k\times 1}{c}$. Тому система рівнянь (11) набуває вигляду

$$[pa_j v] = 0 \tag{13}$$

або у матричній формі

$$\underset{k\times n}{A^T} \cdot \underset{n\times n}{P} \cdot \underset{n\times 1}{V} = 0. \tag{14}$$

Тут $\underset{n\times 1}{V} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdots \\ v_n \end{pmatrix}$ - матриця поправок; $\underset{n\times n}{P} = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & p_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & p_n \end{pmatrix}$ - діагональна вагова матриця. Якщо умови (13) чи (14) будуть дотримані, то буде забезпечена вимога принципу найменших квадратів щодо мінімуму $[pv^2] = \min$.

Складемо рівняння поправок $v_i = F(x_i; c_1,...,c_k) - y_i$ у матричній формі з урахуванням, що $\underset{n\times 1}{Y} = \underset{n\times k}{A} \cdot \underset{k\times 1}{c}$:

$$\underset{n\times 1}{V} = \underset{n\times k}{A} \cdot \underset{k\times 1}{c} - \underset{n\times 1}{Y}. \qquad (15)$$

Підстановка його в рівняння $\underset{k\times n}{A^T} \cdot \underset{n\times n}{P} \cdot \underset{n\times 1}{V} = 0$ показує наступне:

$$\underset{k\times n}{A^T} \cdot \underset{n\times n}{P} \cdot \underset{n\times k}{A} \cdot \underset{k\times 1}{c} - \underset{k\times n}{A^T} \cdot \underset{n\times n}{P} \cdot \underset{n\times 1}{Y} = 0. \qquad (16)$$

В теорії способу найменших квадратів такого типу рівняння називають нормальними рівняннями з коефіцієнтами $\underset{k\times n}{A^T} \cdot \underset{n\times n}{P} \cdot \underset{n\times k}{A} = \underset{k\times k}{N}$ і вільними членами $\underset{k\times n}{A^T} \cdot \underset{n\times n}{P} \cdot \underset{n\times 1}{Y} = \underset{k\times 1}{L}$. Для рівноточних результатів експерименту y_i одержимо

$$\underset{k\times n}{A^T} \cdot \underset{n\times k}{A} \cdot \underset{k\times 1}{c} - \underset{k\times n}{A^T} \cdot \underset{n\times 1}{Y} = 0, \qquad (17)$$

де $\underset{k\times n}{A^T} \cdot \underset{n\times k}{A} = \underset{k\times k}{N}$ і $\underset{k\times n}{A^T} \cdot \underset{n\times 1}{Y} = \underset{k\times 1}{L}$. Таким чином, незалежно від умов експерименту маємо нормальне рівняння

$$\underset{k\times k}{N} \cdot \underset{k\times 1}{c} - \underset{k\times 1}{L} = 0. \qquad (18)$$

Розв'язок нормального рівняння має вигляд

$$\underset{k\times 1}{c} = \underset{k\times k}{Q} \cdot \underset{k\times 1}{L}, \qquad (19)$$

де $\underset{k\times k}{Q} = \underset{k\times k}{N^{-1}}$. Він забезпечує значення найбільш оптимальних параметрів c_j з точки зору вимоги $[pv^2] = \min$ в умовах проведеного експерименту. Розв'язок (19) можливий виключно за умови

$$k < n. \qquad (20)$$

2.4. Апроксимація лінійної функції

Нехай залежність $\underset{n\times 1}{Y} = \underset{n\times k}{A} \cdot \underset{k\times 1}{c}$ виражає лінійна функція

$$Y = c_1 X + c_2 \qquad (21)$$

з матрицею коефіцієнтів $\underset{n\times 2}{A} = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \dots & \dots \\ x_n & 1 \end{pmatrix}$, а результати y_i рівноточні. Тоді нормальне рівняння $\underset{k\times n}{A^T} \cdot \underset{n\times k}{A} \cdot \underset{k\times 1}{c} - \underset{k\times n}{A^T} \cdot \underset{n\times 1}{Y} = 0$ у розгорнутому вигляді $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \dots & \dots \\ x_n & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} [x^2] & [x] \\ [x] & n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [xy] \\ [y] \end{pmatrix}$ розкриває систему двох рівнянь:

$$\left.\begin{aligned} [x^2] \cdot c_1 + [x] \cdot c_2 = [xy] \\ [x] \cdot c_1 + n \cdot c_2 = [y] \end{aligned}\right\}. \qquad (22)$$

Розділивши рівняння на n, переходимо до системи такого вигляду:

$$\left.\begin{aligned} \frac{[x^2]}{n}c_1 + \frac{[x]}{n}c_2 = \frac{[xy]}{n} \\ \frac{[x]}{n}c_1 + c_2 = \frac{[y]}{n} \end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

або
$$\left.\begin{aligned} \alpha_2^*[X]\cdot c_1 + \tilde{X}\cdot c_2 = \alpha_{1,1}^*[XY] \\ \tilde{X}\cdot c_1 + c_2 = \tilde{Y} \end{aligned}\right\}. \qquad (24)$$

Тут позначено: $\tilde{X} = \alpha_1^*[X]$, $\tilde{Y} = \alpha_1^*[Y]$, $\alpha_2^*[X]$, $\alpha_{1,1}^*[XY]$ - початкові статистичні моменти. З другого рівняння утвореної системи виражаємо невідомий параметр c_2

$$c_2 = \tilde{Y} - \tilde{X}\cdot c_1 \qquad (25)$$

і одержаний вираз підставляємо до першого рівняння: $\alpha_2^*[X]\cdot c_1 + \tilde{X}\left(\tilde{Y} - \tilde{X}\cdot c_1\right) = \alpha_{1,1}^*[XY]$. Звідси

$$c_1 = \frac{\alpha_{1,1}^*[XY] - \tilde{X}\cdot\tilde{Y}}{\alpha_2^*[X] - \tilde{X}^2}. \qquad (26)$$

Рівняння (25) та (26) забезпечують однозначний розв’язок завдання апроксимації експериментальних даних, яке є найбільш оптимальним з точки зору принципу найменших квадратів для лінійної залежності $Y = c_1 X + c_2$.

В математичній статистиці існують співвідношення, які виражають зв'язок початкових і центральних моментів такого вигляду: $\alpha^*_{1,1}[XY] - \alpha^*_1[X] \cdot \alpha^*_1[Y] = \mu^*_{1,1}[XY]$; $\alpha^*_2[X] - \left(\alpha^*_1[X]\right)^2 = \mu^*_2[X]$. Другий змішаний центральний момент $\mu^*_{1,1}[XY]$ називається кореляційним моментом: $\mu^*_{1,1}[XY] = K^*_{x,y} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \tilde{X})(y_i - \tilde{Y})}{n}$.

Другий центральний момент $\mu^*_2[X] = D^*_x = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \tilde{X})^2}{n}$ виражає дисперсію величини X. Для величини Y $\mu^*_2[Y] = D^*_y = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \tilde{Y})^2}{n}$, тому за центральними моментами можна виразити статистичний коефіцієнт кореляції $r^*_{x,y} = \frac{K^*_{x,y}}{\sqrt{D^*_x \cdot D^*_y}}$.

Наведені статистичні співвідношення дають можливість розкрити за ними невідомий параметр c_1:

$$c_1 = \frac{K^*_{x,y}}{D^*_x} = r^*_{x,y} \frac{\sqrt{D^*_y}}{\sqrt{D^*_x}}. \tag{27}$$

Формула (27) виражає коефіцієнт регресії Y на X: $\rho_{y/x} = c_1$. Враховуючи формулу (25) $c_2 = \tilde{Y} - \tilde{X} \cdot c_1$, лінійна залежність (21) $Y = c_1 X + c_2$ тепер виразиться рівнянням

$$Y = \rho_{y/x} X + \tilde{Y} - \rho_{y/x} \tilde{X}$$

або

$$Y - \tilde{Y} = \rho_{y/x}\left(X - \tilde{X}\right). \tag{28}$$

Рівняння (28) називається рівняння регресії Y на X. Відношення

$$\frac{Y - \tilde{Y}}{X - \tilde{X}} = \rho_{y/x} = tg\varphi \tag{29}$$

виражає кутовий коефіцієнт прямої, яка відповідає рівнянням (21) $Y = c_1 X + c_2$ чи (28) $Y - \tilde{Y} = \rho_{y/x}\left(X - \tilde{X}\right)$.

Отже, **завдання визначення параметрів c_1 та c_2 математично тотожне завданню побудови рівняння регресії**. Однак за суттю завдання різняться, адже наявність функціональної залежності передбачає, що коефіцієнт кореляції $r^*_{x,y} = \pm 1$. Говорити про встановлення функціонального зв'язку між величинами X та Y за результатами експерименту немає жодних підстав. Це є наслідком того, що результати вимірів обтяжені похибками. Тому **апроксимація експериментальних даних забезпечує хоча й однозначне, проте наближене розв'язання завдання вираження закономірності перебігу експерименту** обраним типом функціональної залежності.

3. Оцінка точності за результатами апроксимації

Алгоритм побудови емпіричних формул аналогічний алгоритму зрівноважування вимірів параметричним способом. Тому залишається аналогічною група формул оцінки точності за результатами вирішення задачі.

3.1. Оцінка точності прямих результатів експерименту

Точність результатів експерименту y_i характеризують середні квадратичні похибки m_i. Їх можна визначити за результатами побудови емпіричних формул.

Похибки m_i визначаються за сукупністю результатів y_i, взявши за основу відхилення від них відповідних значень встановленої емпіричної формули. Відхилення v_i виражаються рівняннями поправок $\underset{n\times1}{V} = \underset{n\times k}{A} \cdot \underset{k\times1}{c} - \underset{n\times1}{Y}$. Далі, відповідно до формули мінімуму, обчислюється значення $[pv^2] = \underset{1\times n}{V}^T \cdot \underset{n\times n}{P} \cdot \underset{n\times1}{V}$ і середня квадратична похибка одиниці ваги за формулою Бесселя $\mu = \sqrt{\dfrac{[pv^2]}{n-k}}$. Точність результатів y_i виражає формула $m_i = \dfrac{\mu}{\sqrt{p_i}}$. Якщо результати експерименту рівноточні, то їх точність виражає формула Бесселя $m = \sqrt{\dfrac{[v^2]}{n-k}}$, де $[v^2] = \underset{1\times n}{V}^T \cdot \underset{n\times1}{V}$.

Середні квадратичні похибки μ або m визначають точність результатів експерименту. З іншого боку, вони є критерієм вираження закономірностей його перебігу побудованою емпіричною формулою. З усіх типів функцій, які застосовувались для побудови емпіричних формул, найбільш оптимальною буде та, якій відповідає найменше значення μ або m. З цієї причини **похибки μ та m називають середніми квадратичними похибками апроксимації**.

3.2. Оцінка точності параметрів емпіричних формул

Згідно загальної теорії параметричного способу, точність розв’язання задачі зрівноважування визначає матриця вагових коефіцієнтів $\underset{k\times k}{Q}$. Це матриця, обернена до матриці коефіцієнтів системи нормальних рівнянь: $\underset{k\times k}{Q} = \underset{k\times k}{N}^{-1}$. В задачі апроксимації матриця $\underset{k\times k}{Q}$ зумовлює точність визначення параметрів емпіричних формул.

Обернені ваги $\frac{1}{P_j}$ невідомих параметрів $\underset{k\times 1}{c}$ системи нормальних рівнянь $\underset{k\times k}{N} \cdot \underset{k\times 1}{c} - \underset{k\times 1}{L} = 0$ дорівнюють квадратичним ваговим коефіцієнтам Q_{jj} з відповідними індексами: $\frac{1}{P_j} = Q_{jj}$. Середні квадратичні похибки параметрів c_j

$$M_j = \mu\sqrt{Q_{jj}} \tag{30}$$

розкриває кореляційна матриця $\underset{k\times k}{M}^2 = \mu^2 \cdot \underset{k\times k}{Q}$. При апроксимації рівноточних результатів експерименту

$$M_j = m\sqrt{Q_{jj}} \tag{31}$$

виражаються діагональними елементами кореляційної матриці $\underset{k\times k}{M}^2 = m^2 \cdot \underset{k\times k}{Q}$. Інші (не квадратичні) елементи матриці вагових коефіцієнтів $\underset{k\times k}{Q}$ виражають залежність між параметрами емпіричної формули. Коефіцієнт кореляції між параметрами c_i та c_j виражає формула $r_{ij} = \frac{Q_{ij}}{\sqrt{Q_{ii}Q_{jj}}}$.

3.3. Оцінка точності результатів інтерполяції та екстраполяції

Задачі інтерполяції та екстраполяції полягають у визначенні значень функції Y за значеннями змінної X, які відсутні у табличній формі функції і не брали участі у побудові емпіричної формули. За своїм змістом ці задачі аналогічні задачі визначення функцій параметрів за результатами зрівноважування параметричним способом. Як наслідок, при оцінці точності результатів інтерполяції та екстраполяції мають силу відповідні формули параметричного способу.

Нехай за емпіричною формулою, яка побудована апроксимацією функції визначеної аналітичної структури за табличною функцією $(x_i; y_i)$, для r значень змінної X обчислено відповідні значення Y:

$$y_l = F_l(x_l; c_1, \dots, c_k); \quad l = \overrightarrow{1, r}.$$

Згідно теорії параметричного способу, обернену вагу функції параметрів виражають формули

$$\frac{1}{P_F} = \sum_{j=1}^{k} F_j F_j Q_{jj} + 2\sum_{i<j} F_i F_j Q_{ij}$$

або у матричній формі

$$\frac{1}{P_F} = \begin{pmatrix} F_1 & F_2 & \dots & F_k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \dots & Q_{1k} \\ Q_{21} & Q_{22} & \dots & Q_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Q_{k1} & Q_{k2} & \dots & Q_{kk} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \dots \\ F_k \end{pmatrix} = \underset{1\times k}{F} \cdot \underset{k\times k}{Q} \cdot \underset{k\times 1}{F^T}.$$

Для r значень емпіричної формули, які є результатом інтерполяції та (або) екстраполяції, остання формула набуває вигляду

$$\underset{r\times r}{Q_F} = \underset{r\times k}{F} \cdot \underset{k\times k}{Q} \cdot \underset{k\times r}{F^T} . \qquad (32)$$

Вона виражає вагову матрицю r значень емпіричної формули з параметрами c_j, які визначено апроксимацією методом найменших квадратів. Матриця $\underset{r\times k}{F}$ формується значеннями частинних похідних емпіричної формули за її параметрами c_j:

$$F_{lj} = \left(\frac{\partial F_l}{\partial c_j} \right)_{\mathrm{o}} . \qquad (33)$$

Ними враховується аналітична структура емпіричної формули і значення x_l змінної X. Головна діагональ вагової матриці $\underset{r\times r}{Q_F}$ містить обернені ваги $\frac{1}{P_{y_l}}$ значень функції y_l, які є результатами інтерполяції та (або) екстраполяції за емпіричною формулою. Точність результатів розкриває кореляційна матриця $\underset{r\times r}{M^2}$:

$$\underset{r\times r}{M^2} = \mu^2 \cdot \underset{r\times r}{Q_F} ; \quad (34) \qquad\qquad \underset{r\times r}{M^2} = m^2 \cdot \underset{r\times r}{Q_F} . \quad (35)$$

На головній діагоналі кореляційної матриці розташовані квадрати середніх квадратичних похибок результатів інтерполяції та (або) екстраполяції за емпіричною формулою. Їх абсолютні значення

$$M_l = \mu\sqrt{Q_{ll}} ; \quad (36) \qquad\qquad M_l = m\sqrt{Q_{ll}} . \quad (37)$$

Останні формули середніми квадратичними похибками апроксимації μ та m враховують умови нерівноточності (або рівноточності) вхідних результатів експерименту.