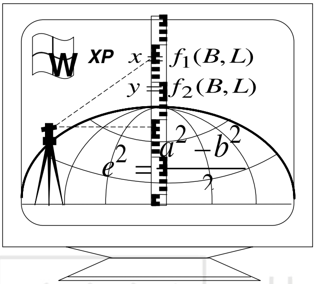
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ВОДНОГО ГОСПОДАРСТВА ТА ПРИРОДОКОРИСТУВАННЯ

Інститут агроекології та землеустрою

Кафедра геодезії та геоінформатики



05-04-32

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до виконання самостійних та практичних робіт з дисципліни
„МАТЕМАТИЧНА ОБРОБКА ГЕОДЕЗИЧНИХ ВИМІРІВ”
студентами напряму 0801 „Геодезія, картографія та землеустрій”
Розділ 3. Метод найменших квадратів.
Зрівноважування результатів вимірів параметричним способом.

Рекомендовано
методичною комісією напряму підготовки 0801
„Геодезія, картографія та землеустрій”.
Протокол № 2 від 22 жовтня 2013р.

РІВНЕ – 2014

Методичні вказівки до виконання самостійних та практичних робіт з дисципліни „Математична обробка геодезичних вимірів" студентами напряму 0801 „Геодезія, картографія та землеустрій" Розділ 3. Метод найменших квадратів. Зрівноважування результатів вимірів параметричним способом. / О.А.Тадєєв, Т.І.Дець, Рівне: НУВГП, 2014. – 46 с.

Упорядники: О.А.Тадєєв, кандидат технічних наук, доцент кафедри геодезії та геоінформатики;
Т.І. Дець, асистент кафедри геодезії та геоінформатики.

ЗМІСТ

сторінка

Вступ..3

1. Зрівноважування результатів вимірів параметричним способом..........4
   1.1. Формування системи параметричних рівнянь поправок…………….4
   1.2. Формування системи нормальних рівнянь поправок……………7
   1.3. Розв'язування системи нормальних рівнянь поправок…………....9
   1.4. Обчислення зрівноважених значень результатів вимірів та невідомих параметрів……………………………………12
   1.5. Оцінка точності за результатами зрівноважування……………13
   1.6. Приклад зрівноважування результатів вимірів параметричним способом……………………………………..19

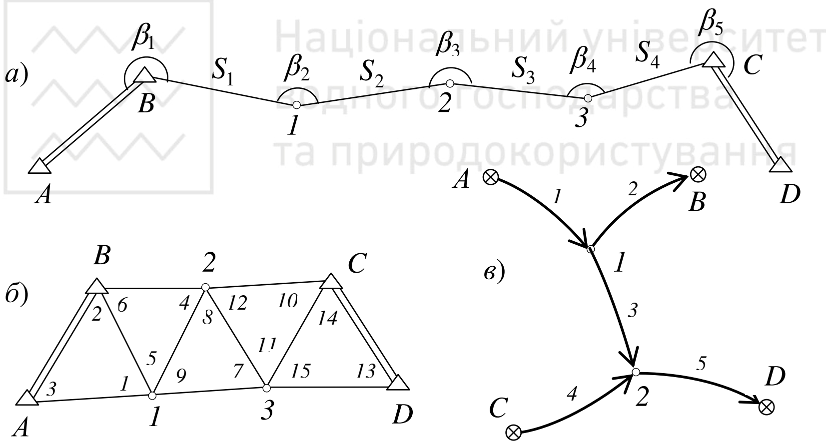
Розподіл балів, що присвоюються студентам за виконання практичних робіт...39

Перелік рекомендованої літератури……………………...……40

Додатки...40

ВСТУП

В геодезичних задачах загальне число вимірюваних величин *n* завжди перевищує число вимірів необхідних величин *k*. Необхідними називають величини, яких мінімально достатньо для розв'язування задачі. Виміри тільки необхідних величин не гарантують правдивість отриманого результату розв'язку задачі. Різниця $r = n - k$ називається числом надлишкових (або додаткових) вимірів. Надлишкові виміри окремої величини дають можливість здійснити контроль вимірів, виконати їх обробку з метою розрахунку надійного кінцевого значення, підвищують його точність і забезпечують її оцінку за тим чи іншим критерієм. Надлишкові виміряні величини в задачі сумісної обробки сукупності результатів вимірів величин, крім того, підвищують точність результатів розв'язку задачі, забезпечують контроль кінцевих результатів розв'язку з оцінкою їх точності. Наприклад, в задачі прокладення полігонометричного ходу, зображеного на малюнку 3.1.*а*, $n = 9$, $k = 6$, $r = 3$; для мережі тріангуляції (малюнок 3.1.*б*) $n = 15$, $k = 6$, $r = 9$; для нівелірної мережі (малюнок 3.1.*в*) $n = 5$, $k = 2$, $r = 3$.



Малюнок 3.1.

Разом з надлишковими вимірами вирішальною умовою досягнення розв'язку задачі сумісної обробки сукупності результатів вимірів багатьох величин є наявність між цими величинами певних взаємозв'язків. Умови математичних співвідношень, якими виражаються ці зв'язки, після розв'язування задачі повинні задовольнятись.

Задача сумісної обробки сукупності результатів вимірів багатьох величин, які зв'язані поміж собою математичними умовами, з метою знаходження найбільш надійних значень та оцінки точності цих величин і їх функцій, називається зрівноважуванням результатів вимірів.

Зрівноважування результатів вимірів виконується за принципом найменших квадратів: $[pv^2] = \min$ (або $[v^2] = \min$ за умови зрівноважування рівноточних результатів вимірів). З усіх можливих розв'язків системи умовних рівнянь розв'язок за умовою принципу найменших квадратів є однозначним і у порівнянні з іншими має деякі істотні переваги. А саме: 1)наявність v_i^2 обмежує великі за абсолютною величиною поправки. Ця властивість передусім важлива у випадку зрівноважування рівноточних вимірів, оскільки отримані поправки будуть більш-менш рівномірно розподілятись поміж результатами вимірів; 2)у випадку зрівноважування нерівноточних вимірів ваги p_i при v_i^2 зменшують поправки до більш точних та збільшують поправки до менш точних результатів вимірів.

1. ЗРІВНОВАЖУВАННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ВИМІРІВ ПАРАМЕТРИЧНИМ СПОСОБОМ

Параметричним способом зрівноважування за принципом найменших квадратів називають спосіб абсолютного екстремуму, в якому всі виміряні величини виражають функціями незалежних невідомих параметрів.

Викладемо черговість дій та методичні рекомендації під час зрівноважування результатів вимірів у геодезичних мережах, опираючись на загальну теорію параметричного способу.

1.1. Формування системи параметричних рівнянь поправок

Насамперед необхідно визначитись із вибором необхідних невідомих параметрів T_j ($j = \overrightarrow{1,k}$; $k -$ число необхідних вимірів). Вибір параметрів – важливий момент, оскільки він зумовлює складність параметричних рівнянь і об'єм обчислювальних робіт. Параметрами установлюють величини, які не підлягають безпосереднім вимірам, але їх зрівноважені значення мають певну практичну цінність, наприклад, невідомі висоти вузлових реперів при зрівноважуванні результатів нівелювання, невідомі координати пунктів, дирекційні кути чи довжини сторін при зрівноважуванні результатів вимірів у планових мережах тощо. Далі всі виміряні величини виражають функціями вибраних параметрів: $$X_i = f_i(T_1, \cdots, T_k)\,. \qquad (3.2.1)$$

$i = \overrightarrow{1,n}$. Рівності (3.2.1) називаються параметричними рівняннями зв'язку. Якщо зрівноважені значення параметрів позначити t_j, то за результатами зрівноважування отримаємо: $$\widetilde{x}_i = f_i(t_1, \cdots, t_k)\,. \qquad (3.2.2)$$

Враховуючи співвідношення $x_i + v_i = \widetilde{x}_i$, $\quad v_i = f_i(t_1, \cdots, t_k) - x_i\,.$ (3.2.3)

$$f_i(t_1, \cdots, t_k) = f_i(t_1^\circ, \cdots, t_k^\circ) + \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{\partial f_i}{\partial t_j} \right)_\circ \tau_j\,. \qquad (3.2.5)$$

Тут t_j° – приблизні значення параметрів; $\tau_j = t_j - t_j^{\circ}$ – поправки до приблизних значень параметрів; $\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial t_j}\right)_{\circ} = a_{ij}$ – значення частинних похідних рівнянь зв'язку f_i за параметрами t_j. Тепер

$$v_i = a_{i1}\tau_1 + \cdots + a_{ik}\tau_k + f_i(t_1^{\circ}, \cdots, t_k^{\circ}) - x_i\,; \qquad v_i = a_{i1}\tau_1 + \cdots + a_{ik}\tau_k + l_i\,. \quad (3.2.6)$$

Тут $l_i = f_i(t_1^{\circ}, \cdots, t_k^{\circ}) - x_i$ – вільні члени рівнянь. Однорідні лінійні рівняння (3.2.6) називаються параметричними рівняннями поправок.

За допомогою системи рівнянь (3.2.6) здійснюється лінійне перетворення системи величин τ_j ($j = \overrightarrow{1,k}$) у систему величин v_i ($i = \overrightarrow{1,n}$):

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \cdots \\ \tau_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \cdots \\ l_n \end{pmatrix}; \quad (3.2.7)$$

$$\underset{n\times 1}{V} = \underset{n\times k}{A} \cdot \underset{k\times 1}{\tau} + \underset{n\times 1}{l}\,. \quad (3.2.8)$$

Залежно від фізичного змісту вимірюваної величини можна виділити найбільш типові *види параметричних рівнянь поправок* :

1. У нівелірних мережах для кожного виміряного перевищення h_i параметричні рівняння зв'язку мають вигляд $X_i = f_i(T_1, \cdots, T_k) = T_{кінц} - T_{поч}$, де $T_{поч}$та $T_{кінц}$ - відмітки початкового та кінцевого реперів ходу. Рівняння поправок мають загальний вигляд $v_i = t_{кінц} - t_{поч} - h_i$ або у лінійному вигляді $v_i = \tau_{кінц} - \tau_{поч} + l_i$, $l_i = t_{кінц}^{\circ} - t_{поч}^{\circ} - h_i$. Оскільки рівняння зв'язку мають лінійний вигляд, то коефіцієнти a_{ij} набувають значень ± 1 (або 0 при поправках τ_j до приблизних значень відміток реперів, які відсутні у рівнянні). Якщо один з реперів ходу відомий, то його відмітку не іменують параметром, вважаючи сталою величиною.

2. Параметричне рівняння поправок до суми виміряних кутів окремого полігонометричного ходу має вигляд $v_i = \tau_{\alpha_{кінц}} - \tau_{\alpha_{поч}} + l_i$, де $\tau_{\alpha_{поч}}$ та $\tau_{\alpha_{кінц}}$ - поправки до приблизних значень $\alpha_{поч}^{\circ}$ та $\alpha_{кінц}^{\circ}$ дирекційних кутів у вузлових точках ходу; $l_i = \alpha_{кінц}^{\circ} - \alpha'_{кінц}$; $\alpha'_{кінц}$ – дирекційний кут вузлового напряму, обчислений за дирекційним кутом $\alpha_{поч}^{\circ}$ та виміряними кутами ходу між початковою та кінцевою вузловими точками.

Рівняння поправок має вагу $P=\left[\frac{1}{p_i}\right]^{-1}$, де p_i - ваги виміряних кутів.

3. Довжина сторони S між пунктами *B* і *C* виражається через координати X_B, Y_B та X_C, Y_C пунктів параметричним рівнянням зв'язку вигляду $S=\sqrt{(X_C-X_B)^2+(Y_C-Y_B)^2}=f(X,Y)$. Координати пунктів слід вважати невідомими параметрами. Частинні похідні рівняння зв'язку дають такі коефіцієнти рівняння поправок:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial X_B}\right)_\circ=-\cos\alpha^\circ;\left(\frac{\partial f}{\partial Y_B}\right)_\circ=-\sin\alpha^\circ;\left(\frac{\partial f}{\partial X_C}\right)_\circ=\cos\alpha^\circ;\left(\frac{\partial f}{\partial Y_C}\right)_\circ=\sin\alpha^\circ\cdot$$

Чисельні значення коефіцієнтів можна розрахувати за дирекційним кутом α° напряму *BC*, обчисленим за приблизними значеннями параметрів X_B°, Y_B° та X_C°, Y_C°. Вільний член рівняння поправок $l=f(X^\circ,Y^\circ)-s=\sqrt{(X_C^\circ-X_B^\circ)^2+(Y_C^\circ-Y_B^\circ)^2}-s$; s - результат виміру довжини сторони. Остаточно поправка до результату виміру довжини s виражається параметричним рівнянням вигляду

$$v=-\cos\alpha^\circ\cdot\tau_{X_B}-\sin\alpha^\circ\cdot\tau_{Y_B}+\cos\alpha^\circ\cdot\tau_{X_C}+\sin\alpha^\circ\cdot\tau_{Y_C}+l\,.$$

4. Істинне значення дирекційного кута $\overline{\alpha}$ з пункту *B* на пункт *C* виражається через параметри (координати X_B, Y_B та X_C, Y_C пунктів) параметричним рівнянням зв'язку $\overline{\alpha}=arctg\frac{Y_C-Y_B}{X_C-X_B}=f(X,Y)$. Частинні похідні рівняння зв'язку є коефіцієнтами рівняння поправок

$$\left(\frac{\partial f}{\partial X_B}\right)_\circ=\frac{\rho}{s^\circ}\sin\alpha^\circ;\left(\frac{\partial f}{\partial Y_B}\right)_\circ=-\frac{\rho}{s^\circ}\cos\alpha^\circ;\left(\frac{\partial f}{\partial X_C}\right)_\circ=-\frac{\rho}{s^\circ}\sin\alpha^\circ;\left(\frac{\partial f}{\partial Y_C}\right)_\circ=\frac{\rho}{s^\circ}\cos\alpha^\circ\cdot$$

Чисельні значення коефіцієнтів можна отримати за дирекційним кутом α° та довжиною s° сторони *BC*, обчисленими за приблизними значеннями параметрів X_B°, Y_B° та X_C°, Y_C°. Параметричне рівняння поправки до результату виміру дирекційного кута α має вигляд $v=\frac{\rho}{s^\circ}(\sin\alpha^\circ\cdot\tau_{X_B}-\cos\alpha^\circ\cdot\tau_{Y_B}-\sin\alpha^\circ\cdot\tau_{X_C}+\cos\alpha^\circ\cdot\tau_{Y_C})+l_\alpha$, де вільний член $l_\alpha=f(X^\circ,Y^\circ)-\alpha=arctg\frac{Y_C^\circ-Y_B^\circ}{X_C^\circ-X_B^\circ}-\alpha\,.$

5. Для результату виміру горизонтального кута β на пункті B між напрямами на пункти C і D параметричне рівняння поправок легко отримати відніманням рівнянь поправок, складених для дирекційних кутів α_{BC} та α_{BD}: $v = v_{\alpha_{BC}} - v_{\alpha_{BD}} + l$, де вільний член $l = l_{\alpha_{BC}} - l_{\alpha_{BD}} = \alpha^{\circ}_{BC} - \alpha^{\circ}_{BD} - \beta$.

1.2. Формування системи нормальних рівнянь поправок

Враховуючи рівняння (3.2.6), математичне вираження принципу найменших квадратів має вигляд

$$[pv^2] = [p(a_1\tau_1 + \cdots + a_k\tau_k + l)^2] = F(\tau_1, \cdots \tau_k) = \min. \qquad (3.2.9)$$

За такої умови невідомі поправки τ_j можна установити з розв'язування системи рівнянь:

$$\frac{\partial F}{\partial \tau_j} = 0. \qquad (3.2.10)$$

Частинні похідні $\frac{\partial v_i}{\partial \tau_j}$, виражені за рівняннями (3.2.6), дають чисельні значення коефіцієнтів цих рівнянь $\frac{\partial v_i}{\partial \tau_j} = a_{ij}$, які, зауважимо, формують відповідну матрицю $\underset{n\times k}{A}$. З урахуванням частинних похідних рівняння системи (3.2.10) набувають вигляду: $[pa_j v] = 0$ (3.2.11)

або

$$\underset{k\times n}{A^T} \cdot \underset{n\times n}{P} \cdot \underset{n\times 1}{V} = 0; \qquad (3.2.12)$$

$$\underset{k\times n}{A^T} \cdot \underset{n\times n}{P} \cdot \underset{n\times k}{A} \cdot \underset{k\times 1}{\tau} + \underset{k\times n}{A^T} \cdot \underset{n\times n}{P} \cdot \underset{n\times 1}{l} = 0. \qquad (3.2.13)$$

Рівняння (3.2.13) називають нормальним рівнянням поправок. Воно виражає систему нормальних рівнянь поправок вигляду

$$\left.\begin{array}{l} [pa_1a_1]\tau_1 + [pa_1a_2]\tau_2 + \cdots + [pa_1a_k]\tau_k + [pa_1l] = 0 \\ [pa_2a_1]\tau_1 + [pa_2a_2]\tau_2 + \cdots + [pa_2a_k]\tau_k + [pa_2l] = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ [pa_ka_1]\tau_1 + [pa_ka_2]\tau_2 + \cdots + [pa_ka_k]\tau_k + [pa_kl] = 0 \end{array}\right\}. \qquad (3.2.14)$$

Добуток $\underset{k\times k}{N} = \underset{k\times n}{A^T} \cdot \underset{n\times n}{P} \cdot \underset{n\times k}{A}$ дає квадратну симетричну матрицю порядку k з коефіцієнтами $N_{js} = [pa_ja_s] = p_1a_{1j}a_{1s} + p_2a_{2j}a_{2s} + \cdots + p_na_{nj}a_{ns}$. Вздовж головної діагоналі містяться коефіцієнти, які завжди додатні: $N_{11}, N_{22}, \cdots, N_{kk}$. Їх називають квадратичними. Коефіцієнти, розміщені симетрично відносно головної діагоналі, попарно дорівнюють один одному: $N_{js} = N_{sj}$. Ця рівність виражає властивість симетричності коефіцієнтів системи. Тому обчисленню підлягають лише коефіцієнти, розташовані у верхній трикутній частині матриці N.

Вільні члени $L_j = [pa_j l] = p_1 a_{1j} l_1 + p_2 a_{2j} l_2 + \cdots + p_n a_{nj} l_n$. Тому

$$\underset{k\times k}{N}\cdot \underset{k\times 1}{\tau} + \underset{k\times 1}{L} = 0. \tag{3.2.15}$$

$$\left.\begin{array}{l} N_{11}\tau_1 + N_{12}\tau_2 + \cdots + N_{1k}\tau_k + L_1 = 0 \\ N_{21}\tau_1 + N_{22}\tau_2 + \cdots + N_{2k}\tau_k + L_2 = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ N_{k1}\tau_1 + N_{k2}\tau_2 + \cdots + N_{kk}\tau_k + L_k = 0 \end{array}\right\}. \tag{3.2.16}$$

За умови зрівноважування рівноточних вимірів

$$\underset{k\times n}{A^T}\cdot \underset{n\times k}{A}\cdot \underset{k\times 1}{\tau} + \underset{k\times n}{A^T}\cdot \underset{n\times 1}{l} = 0; \tag{3.2.17}$$

$$\left.\begin{array}{l} [a_1a_1]\tau_1 + [a_1a_2]\tau_2 + \cdots + [a_1a_k]\tau_k + [a_1 l] = 0 \\ [a_2a_1]\tau_1 + [a_2a_2]\tau_2 + \cdots + [a_2a_k]\tau_k + [a_2 l] = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ [a_ka_1]\tau_1 + [a_ka_2]\tau_2 + \cdots + [a_ka_k]\tau_k + [a_k l] = 0 \end{array}\right\}. \tag{3.2.18}$$

Контроль обчислення коефіцієнтів та вільних членів системи нормальних рівнянь поправок можна виконати методом додавання їх чисельних значень. Для цього завчасно обчислюють суми коефіцієнтів та вільних членів рівнянь поправок (3.2.6): $a_{i1} + a_{i2} + \cdots + a_{ik} + l_i = s_i$. Якщо з урахуванням вільних членів l_i та значень s_i побудувати розширену матрицю $\underset{n\times(k+2)}{A}$, то з добутку матриць $\underset{(k+2)\times n}{A^T}\cdot \underset{n\times n}{P}\cdot \underset{n\times(k+2)}{A}$ маємо:

$$\left.\begin{array}{r} [pa_1a_1] + [pa_1a_2] + \cdots + [pa_1a_k] + [pa_1 l] = [pa_1 s] \\ [pa_2a_1] + [pa_2a_2] + \cdots + [pa_2a_k] + [pa_2 l] = [pa_2 s] \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ [pa_ka_1] + [pa_ka_2] + \cdots + [pa_ka_k] + [pa_k l] = [pa_k s] \\ [pa_1 l] + [pa_2 l] + \cdots + [pa_k l] + [pll] = [pls] \\ [pa_1 s] + [pa_2 s] + \cdots + [pa_k s] + [pls] = [pss] \end{array}\right\}$$

або

$$\left.\begin{array}{r} N_{11} + N_{12} + \cdots + N_{1k} + L_1 = \Sigma_1 \\ N_{21} + N_{22} + \cdots + N_{2k} + L_2 = \Sigma_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ N_{k1} + N_{k2} + \cdots + N_{kk} + L_k = \Sigma_k \\ L_1 + L_2 + \cdots + L_k + N_{(k+1)(k+1)} = \Sigma_{k+1} \\ \Sigma_1 + \Sigma_2 + \cdots + \Sigma_k + \Sigma_{k+1} = \Sigma_{k+2} \end{array}\right\}. \tag{3.2.19}$$

Величини $[pa_1 s] = \Sigma_1$, $[pa_2 s] = \Sigma_2$, … , $[pa_k s] = \Sigma_k$ є контрольними числами, яким повинні дорівнювати суми коефіцієнтів та вільних членів відповідних рівнянь.

За числом $[pls]=\Sigma_{k+1}$ можна перевірити вільні члени нормальних рівнянь, а за значенням $[pss]=\Sigma_{k+2}$ - усі попередні контрольні числа.

За умови проведення розрахунків вручну зручно користуватись типовою таблицею, яку називають схемою обчислення коефіцієнтів та вільних членів нормальних рівнянь (див. таблицю додатку 1).

1.3. Розв'язування системи нормальних рівнянь поправок Матрична форма.

Розв'язування системи нормальних рівнянь поправок полягає у визначенні вектора $\tau=(\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_k)$, елементами якого є корені рівнянь τ_j ($j=\overrightarrow{1,k}$). Формально розв'язок матричного рівняння (3.2.15) має вигляд

$$\underset{k\times 1}{\tau}=-\underset{k\times k}{Q}\cdot\underset{k\times 1}{L}, \tag{3.2.20}$$

де $\underset{k\times k}{Q}=\underset{k\times k}{N}^{-1}$ – обернена матриця до матриці коефіцієнтів нормальних рівнянь.

Спосіб послідовного виключення невідомих Гаусса.

За умови розв'язування задачі зрівноважування вручну серед великого числа існуючих способів розв'язування систем лінійних рівнянь заслуговує на увагу спосіб послідовного виключення невідомих Гаусса як найбільш адаптований до поставленої задачі. Розглянемо спосіб Гаусса на прикладі розв'язування системи трьох нормальних рівнянь:

$$\left.\begin{aligned}N_{11}\tau_1+N_{12}\tau_2+N_{13}\tau_3+L_1=0\\N_{21}\tau_1+N_{22}\tau_2+N_{23}\tau_3+L_2=0\\N_{31}\tau_1+N_{32}\tau_2+N_{33}\tau_3+L_3=0\end{aligned}\right\}. \tag{3.2.21}$$

Виразимо перше невідоме τ_1 через інші з першого рівняння:

$$\tau_1=-\frac{N_{12}}{N_{11}}\tau_2-\frac{N_{13}}{N_{11}}\tau_3-\frac{L_1}{N_{11}}$$

Отриману рівність називають першим елімінаційним рівнянням. Підставимо його у друге та третє рівняння основної системи:

$$\left.\begin{aligned}(N_{22}-\frac{N_{12}N_{12}}{N_{11}})\tau_2+(N_{23}-\frac{N_{12}N_{13}}{N_{11}})\tau_3+(L_2-\frac{N_{12}L_1}{N_{11}})=0\\(N_{23}-\frac{N_{12}N_{13}}{N_{11}})\tau_2+(N_{33}-\frac{N_{13}N_{13}}{N_{11}})\tau_3+(L_3-\frac{N_{13}L_1}{N_{11}})=0\end{aligned}\right\},$$

або
$$\left.\begin{aligned}N_{22}^{(1)}\tau_2+N_{23}^{(1)}\tau_3+L_2^{(1)}=0\\N_{23}^{(1)}\tau_2+N_{33}^{(1)}\tau_3+L_3^{(1)}=0\end{aligned}\right\}.$$

Верхній індекс (1) вказує, що з основної системи скорочено перше невідоме. Виразимо з першого рівняння перетвореної системи друге невідоме τ_2 через третє τ_3. Отримаємо друге елімінаційне рівняння

$$\tau_2 = -\frac{N_{23}^{(1)}}{N_{22}^{(1)}}\tau_3 - \frac{L_2^{(1)}}{N_{22}^{(1)}}.$$

Підставивши його у друге рівняння перетвореної системи, маємо другу перетворену систему рівнянь вигляду

$$(N_{33}^{(1)} - \frac{N_{23}^{(1)}N_{23}^{(1)}}{N_{22}^{(1)}})\tau_3 + (L_3^{(1)} - \frac{N_{23}^{(1)}L_2^{(1)}}{N_{22}^{(1)}}) = 0; \qquad N_{33}^{(2)}\tau_3 + L_3^{(2)} = 0.$$

Верхній індекс (2) вказує, що з системи рівнянь скорочено друге невідоме. Тепер отримаємо третє елімінаційне рівняння: $\tau_3 = -\frac{L_3^{(2)}}{N_{33}^{(2)}}$.

Підставляючи значення τ_3 у друге елімінаційне рівняння, виразимо невідоме τ_2; підставляючи значення τ_2 та τ_3 у перше рівняння, виразимо невідоме τ_1. Отже, для обчислення невідомих потрібно записати відповідні їм елімінаційні рівняння, які виражаються з перших рівнянь основної та перетворених систем. Необхідні перші рівняння утворюють систему

$$\left.\begin{aligned} N_{11}\tau_1 + N_{12}\tau_2 + N_{13}\tau_3 + L_1 = 0 \\ N_{22}^{(1)}\tau_2 + N_{23}^{(1)}\tau_3 + L_2^{(1)} = 0 \\ N_{33}^{(2)}\tau_3 + L_3^{(2)} = 0 \end{aligned}\right\}.$$

Її називають еквівалентною основній системі нормальних рівнянь.

Узагальнюючи наведений приклад розв'язування трьох нормальних рівнянь, можна отримати потрібні співвідношення для системи рівнянь будь-якої розмірності.

$$N_{ii}^{(i-1)}\tau_i + N_{i(i+1)}^{(i-1)}\tau_{i+1} + \cdots + N_{ik}^{(i-1)}\tau_k + L_i^{(i-1)} = 0. \qquad (3.2.22)$$

Потрібний коефіцієнт рівняння еквівалентної системи можна розкрити за правилом, яке виражається співвідношенням загального вигляду

$$N_{ij}^{(s)} = N_{ij}^{(s-1)} - \frac{N_{si}^{(s-1)}N_{sj}^{(s-1)}}{N_{ss}^{(s-1)}}. \qquad (3.2.23)$$

Так само для вільних членів рівнянь еквівалентної системи

$$L_i^{(s)} = L_i^{(s-1)} - \frac{N_{si}^{(s-1)}L_s^{(s-1)}}{N_{ss}^{(s-1)}}. \qquad (3.2.24)$$

Елімінаційне рівняння для останнього невідомого має вигляд:

$$\tau_k = -\frac{L_k^{(k-1)}}{N_{kk}^{(k-1)}}. \qquad (3.2.25)$$

Інші елімінаційні рівняння :

$$\tau_i = -\frac{N_{i(i+1)}^{(i-1)}}{N_{ii}^{(i-1)}}\tau_{i+1} - \frac{N_{i(i+2)}^{(i-1)}}{N_{ii}^{(i-1)}}\tau_{i+2} - \ldots - \frac{N_{ik}^{(i-1)}}{N_{ii}^{(i-1)}}\tau_k - \frac{L_i^{(i-1)}}{N_{ii}^{(i-1)}} \qquad (3.2.26)$$

або з врахуванням позначень коефіцієнтів та вільних членів

$$\tau_i = E_{i(i+1)}\tau_{i+1} + E_{i(i+2)}\tau_{i+2} + \ldots + E_{ik}\tau_k + E_{iL}. \qquad (3.2.27)$$

Алгоритм розв'язування нормальних рівнянь способом Гаусса має усталену систему позначень та виразну методичну упорядкованість дій незалежно від розмірності системи рівнянь. Такі властивості вдало реалізовано у вигляді спеціальної обчислювальної схеми. Типову компактну таблицю, у якій виконують розв'язування системи нормальних рівнянь алгоритмом Гаусса, називають схемою Гаусса-Дулітля (додаток 2). Здійснення розрахунків у схемі Гаусса-Дулітля передбачає, поміж іншого, можливість проведення поточних контролів.

1. Контроль за допоміжними невідомими $u_i = \tau_i - 1$:

$$\left.\begin{array}{l} N_{11}u_1 + N_{12}u_2 + \cdots + N_{1k}u_k + \Sigma_1 = 0 \\ N_{21}u_1 + N_{22}u_2 + \cdots + N_{2k}u_k + \Sigma_2 = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ N_{k1}u_1 + N_{k2}u_2 + \cdots + N_{kk}u_k + \Sigma_k = 0 \end{array}\right\}. \qquad (3.2.28)$$

Якщо повторити розв'язування рівнянь з вільними членами Σ_j, то отримаємо контрольні невідомі, котрі різняться з основними невідомими τ_j на 1.

Для реалізації цього контролю до схеми Гаусса-Дулітля приєднується один додатковий стовпчик, в який у рядках коефіцієнтів та вільних членів рівнянь записують значення контрольних чисел Σ_j. Після повторення перетворень з контрольними числами у цьому стовбці в контрольних рядках перевіряють правильність проведених розрахунків методом додавання чисел, розташованих лівіше перетвореного контрольного числа.

2. Контроль коефіцієнтів та вільних членів рівнянь еквівалентної системи:

$$N_{ii}^{(i-1)} + N_{i(i+1)}^{(i-1)} + \cdots + N_{ik}^{(i-1)} + L_i^{(i-1)} = \Sigma_i^{(i-1)}. \qquad (3.2.29)$$

де $\Sigma_i^{(i-1)}$ - результат перетворення Σ_i за правилом (3.2.24)

3. Контроль коефіцієнтів та вільних членів елімінаційних рівнянь. Даний контроль виконують на початку кожного наступного перетворення системи нормальних рівнянь:

$$-1 - \frac{N_{i(i+1)}^{(i-1)}}{N_{ii}^{(i-1)}} - \frac{N_{i(i+2)}^{(i-1)}}{N_{ii}^{(i-1)}} - \ldots - \frac{N_{ik}^{(i-1)}}{N_{ii}^{(i-1)}} - \frac{L_i^{(i-1)}}{N_{ii}^{(i-1)}} = -\frac{\Sigma_i^{(i-1)}}{N_{ii}^{(i-1)}} \qquad (3.2.30)$$

$$-1 + E_{i(i+1)} + E_{i(i+2)} + \ldots + E_{ik} + E_{iL} = E_{i\Sigma}. \qquad (3.2.31)$$

4. Заключний контроль розв'язування нормальних рівнянь. Для контролю обчислення коефіцієнтів та вільних членів нормальних рівнянь (3.2.19) встановлюють значення $[pll] = N_{(k+1)(k+1)}$ та контрольне число $[pls] = \Sigma_{k+1}$. Після проведення перетворень відповідно до алгоритму Гаусса система рівнянь (3.2.19) відобразиться еквівалентною їй системою рівнянь виду

$$\left.\begin{aligned} N_{11}+N_{12}+\cdots+N_{1k}+L_1=\Sigma_1 \\ N_{22}^{(1)}+\cdots+N_{2k}^{(1)}+L_2^{(1)}=\Sigma_2^{(1)} \\ \ldots\ldots \\ N_{kk}^{(k-1)}+L_k^{(k-1)}=\Sigma_k^{(k-1)} \\ N_{(k+1)(k+1)}^{(k)}=\Sigma_{k+1}^{(k)} \end{aligned}\right\}. \quad (3.2.32)$$

Рівняння

$$N_{(k+1)(k+1)}^{(k)}=\Sigma_{k+1}^{(k)} \quad (3.2.33)$$

виражає заключний контроль розв'язування нормальних рівнянь.

5. Контроль за $[pv^2]$. Порівнюючи співвідношення (3.2.33) та $N_{(k+1)(k+1)}^{(k)}=[pv^2]$, маємо: $$N_{(k+1)(k+1)}^{(k)}=\Sigma_{k+1}^{(k)}=[pv^2]. \quad (3.2.34)$$

З одержаного слідує, що обидва останні способи контролів доповнюють один одного і забезпечують перевірку величини $[pv^2]$. Разом з тим, обчислене значення величини $[pv^2]$ має збігатись із значенням

$$[pv^2]=p_1v_1^2+p_2v_2^2+\cdots+p_nv_n^2. \quad (3.2.35)$$

6. Контроль невідомих можна здійснити двома способами:

а) за системою нормальних рівнянь (3.2.16).

б) за сумою рівнянь

$$(\Sigma_1-L_1)\tau_1+(\Sigma_2-L_2)\tau_2+\cdots+(\Sigma_k-L_k)\tau_k+[L]=0. \quad (3.2.36)$$

Схема розв'язування трьох нормальних рівнянь у такому вигляді, який наведено у додатку 2, називається повною схемою Гаусса-Дулітля. До неї записують заокруглені результати усіх проміжних розрахунків. Коефіцієнти перетворених рівнянь у рядках 5, 10 та 16, які є сумами коефіцієнтів рівнянь основної системи і добутків двох множників, можна обчислити відразу без проміжних записів. Тоді відпадає необхідність включати до схеми рядки 4, 8, 9, 13, 14, 15 і вона міститиме тільки рядки коефіцієнтів та вільних членів основних, перетворених та елімінаційних рівнянь. Крім того, кожне з невідомих τ_1, τ_2 та τ_3 також можна розрахувати без проміжних записів та заокруглень і записати в схемі в одному рядку. З такими змінами схема розв'язування трьох рівнянь міститиме лише 11 рядків, а точність кінцевих значень підвищиться, оскільки зменшиться вплив помилок заокруглення результатів проміжних обчислень. Така видозміна повної схеми називається скороченою схемою Гаусса-Дулітля.

1.4. Обчислення зрівноважених значень результатів вимірів та невідомих параметрів

Зрівноважені значення результатів вимірів $\tilde{x}_i$ виражаються рівностями $\tilde{x}_i=x_i+v_i$ ($i=\overrightarrow{1,n}$) або $$\underset{n\times1}{\tilde{x}}=\underset{n\times1}{x}+\underset{n\times1}{V}, \quad (3.2.37)$$

Поправки v_i виражаються рівняннями (3.2.6) або (3.2.8) за поправками τ_j.

Зрівноважені значення невідомих параметрів t_j виражаються рівностями $t_j = t_j^{\circ} + \tau_j$ ($j = \overrightarrow{1,k}$) або $$\underset{k\times1}{t} = \underset{k\times1}{t^{\circ}} + \underset{k\times1}{\tau}. \qquad (3.2.38)$$

Розкриттям чисельних значень $\tilde{x}_i$ $(i = \overrightarrow{1,n})$ та t_j $(j = \overrightarrow{1,k})$ завершується етап зрівноважувальних обчислень. Для остаточного контролю результатів зрівноважування перевіряють істинність умов, які випливають з рівнянь (3.2.2): зрівноважені значення результатів вимірів, обчислені за співвідношенням (3.2.37), мають дорівнювати відповідним значенням, які виражаються через зрівноважені параметри.

1.5. Оцінка точності за результатами зрівноважування

Під оцінкою точності за результатами зрівноважування розуміють розрахунок середніх квадратичних похибок зрівноважених результатів вимірів, параметрів та їх функцій. Загалом середня квадратична похибка M будь-якої величини

$$M = \mu\sqrt{\frac{1}{P}}\,; \qquad (3.2.39)$$

$$M = m\sqrt{\frac{1}{P}}\,, \qquad (3.2.40)$$

де μ - середня квадратична похибка одиниці ваги; P- вага оцінюваної величини; m - середня квадратична похибка рівноточних вимірів. Відтак завдання оцінки точності поділяється на дві частини:

1) розрахунок похибки одиниці ваги μ (або похибки результатів рівноточних вимірів m) за формулою Бесселя:

$$\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-k}}\,; \qquad (3.2.41)$$

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-k}}\,. \qquad (3.2.42)$$

Різниця n-k=r виражає число надлишкових виміряних величин.

2) розрахунок ваги оцінюваної величини. Для цього величина виражається функцією результатів вимірів x_i: $F = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$. Далі застосовується формула теорії похибок вимірів $\frac{1}{P_F} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{\circ}^{2}\frac{1}{p_i}$; p_i - ваги результатів вимірів x_i. Складність обчислення оберненої ваги у задачі зрівноважування полягає у тому, що оцінювані величини виражаються функціями зрівноважених параметрів або зрівноважених значень виміряних величин, а не безпосередніх результатів вимірів. Тому передусім потрібно розкрити зв'язок результатів вимірів величин та зрівноважених вимірів, зрівноважених

параметрів чи їх функцій. Відтак хід дій з обчислення ваги оцінюваної величини залежить від того, як вона виражається через виміряні величини.

Обчислення ваг зрівноважених параметрів.

Зрівноважені параметри t_j виражаються системою рівностей (3.2.38) і визначаються значеннями невідомих τ_j. Невідомі τ_j виражаються лінійними функціями вільних членів нормальних рівнянь з розв'язування системи (3.2.15) за допомогою оберненої матриці $\underset{k\times k}{Q} = \underset{k\times k}{N}^{-1}$: $\underset{k\times 1}{\tau} = -\underset{k\times k}{Q} \cdot \underset{k\times 1}{L}$. Тому

$$\tau_j = -Q_{j1}L_1 - Q_{j2}L_2 - \cdots - Q_{jk}L_k \qquad (3.2.43)$$

або

$$\tau_j = -Q_{j1}[pa_1 l] - Q_{j2}[pa_2 l] - \cdots - Q_{jk}[pa_k l], \qquad (3.2.44)$$

звідки:

$$\frac{1}{P_j} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \tau_j}{\partial l_i} \right)_{\circ}^{2} \frac{1}{p_i} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}^{2} \frac{1}{p_i} = \left[\frac{\alpha_j \alpha_j}{p} \right]. \qquad (3.2.45)$$

Права частина рівності (3.2.45) розкриває добуток елементів матриць виду

$$\underset{k\times n}{\alpha}^{T} \cdot \underset{n\times n}{P}^{-1} \cdot \underset{n\times k}{\alpha} = \underset{k\times k}{Q}; \qquad \left[\frac{\alpha_j \alpha_s}{p} \right] = Q_{js}, \qquad (3.2.46)$$

звідки

$$\frac{1}{P_j} = \left[\frac{\alpha_j \alpha_j}{p} \right] = Q_{jj}. \qquad (3.2.47)$$

З огляду на отриманий результат елементи оберненої матриці $\underset{k\times k}{Q} = \underset{k\times k}{N}^{-1}$ називають ваговими коефіцієнтами. Не квадратичні вагові коефіцієнти виражають залежність між зрівноваженими значеннями параметрів. Коефіцієнт кореляції між параметрами t_i та t_j виражається формулою

$$r_{ij} = \frac{Q_{ij}}{\sqrt{Q_{ii} Q_{jj}}}. \qquad (3.2.48)$$

Матрицю

$$\underset{k\times k}{M}^{2} = \mu^{2} \cdot \underset{k\times k}{Q} \qquad (3.2.49)$$

або при зрівноважуванні рівноточних вимірів:

$$\underset{k\times k}{M}^{2} = m^{2} \cdot \underset{k\times k}{Q} \qquad (3.2.50)$$

називають кореляційною матрицею зрівноважених параметрів. Вздовж головної діагоналі матриці $\underset{k\times k}{M}^{2}$ розташовані значення квадратів середніх квадратичних помилок параметрів з відповідними їм індексами.

Способи обчислення вагових коефіцієнтів при виконанні обчислень вручну.

Спосіб додаткових стовпців схеми Гаусса-Дулітля. Спосіб ґрунтується на властивості множення матриць: $\underset{k\times k}{N} \cdot \underset{k\times k}{Q} = \underset{k\times k}{E}$. Дане співвідношення запишемо у вигляді системи рівнянь:

$$\underset{k\times k}{N} \cdot \underset{k\times k}{Q} - \underset{k\times k}{E} = 0. \qquad (3.2.51)$$

Утворена система має таку ж матрицю коефіцієнтів, як і система нормальних рівнянь (3.2.15). Обидві системи різняться лише невідомими та вільними членами. Це дає підстави вважати, що систему рівнянь (3.2.51) можна розв'язувати такими ж способами і за тими ж правилами, як і систему нормальних рівнянь (3.2.15).

Позначимо стовпчик за номером s ($s=\overrightarrow{1,k}$) у матриці $\underset{k\times k}{Q}$ як $\underset{k\times 1}{Q_s}$, а у матриці $\underset{k\times k}{E}$ - відповідно як $\underset{k\times 1}{E_s}$. Отримаємо k систем рівнянь вигляду

$$\underset{k\times k}{N}\cdot\underset{k\times 1}{Q_s}-\underset{k\times 1}{E_s}=0\,. \qquad (3.2.52)$$

Якщо розв'язувати кожну з утворених систем рівнянь у схемі Гаусса-Дулітля, то для обчислення елементів стовпчиків $\underset{k\times 1}{Q_1}$, $\underset{k\times 1}{Q_2}$, … , $\underset{k\times 1}{Q_k}$ у схему необхідно додати відповідні їм стовпчики $\underset{k\times 1}{E_1}$, $\underset{k\times 1}{E_2}$, … , $\underset{k\times 1}{E_k}$. Розглядаючи їх як нові стовпці вільних членів, за ними будуть обчислені k стовпців $\underset{k\times 1}{Q_s}$ за тими ж формулами, що й невідомі τ_j. Такий алгоритм можна виразити правилом.

До схеми розв'язування нормальних рівнянь необхідно приєднати окремий стовпчик для кожного невідомого s- го рядка (чи стовпчика) вагових коефіцієнтів. В ньому записують -1 у рядку s- го рівняння основної системи нормальних рівнянь; у рядках інших рівнянь записують 0. У додатковому стовпці виконують такі ж самі перетворення, як і у стовпчику вільних членів L. Після завершення всіх перетворень вагові коефіцієнти обчислюють за елімінаційними рядками так само, як і невідомі τ_j, але користуються при цьому замість стовпця L відповідним додатковим стовпчиком:

$$Q_{is}=E_{i(i+1)}Q_{(i+1)s}+E_{i(i+2)}Q_{(i+2)s}+\ldots+E_{ik}Q_{ks}+E_{iQ_s}\,, \qquad (3.2.53)$$

де E_{iQ_s}- результат перетворення вільних членів E_s системи (3.2.52) в елімінаційному рядку за номером i ($i=\overrightarrow{1,k}$).

Спосіб Ганзена. Цей спосіб також опирається на властивість множення матриць $\underset{k\times k}{N}\cdot\underset{k\times k}{Q}=\underset{k\times k}{E}$. При послідовному обчисленні рядків (стовпців) $\underset{k\times 1}{Q_s}$ оберненої матриці, починаючи з останнього, потреба у додаткових стовпчиках схеми Гаусса-Дулітля зникає. Для обчислення всіх вагових коефіцієнтів потрібні тільки елімінаційні рівняння (3.2.53). Припустимо, k=3. Тоді $Q_{33}=\dfrac{1}{N_{33}^{(2)}}$. Коефіцієнти Q_{32} та Q_{31} виражаються з другого та першого елімінаційних рівнянь:

$$\left.\begin{aligned} Q_{32}&=E_{23}\cdot Q_{33}\\ Q_{31}&=E_{12}\cdot Q_{32}+E_{13}\cdot Q_{33}\end{aligned}\right\}$$

. Внаслідок симетричності

матриці маємо: $Q_{23}=Q_{32}$. Інші вагові коефіцієнти виражають відповідні їм елімінаційні рівняння: $\left.\begin{aligned} Q_{22}&=E_{23}\cdot Q_{23}+\frac{1}{N_{22}^{(1)}} \\ Q_{21}&=E_{12}\cdot Q_{22}+E_{13}\cdot Q_{23}\end{aligned}\right\}$. Враховуючи властивість симетричності $Q_{ij}=Q_{ji}$, обчисленню підлягає тільки ваговий коефіцієнт Q_{11}. Його виражає перше елімінаційне рівняння. Остаточно маємо:

$$\left.\begin{aligned} Q_{13}&=Q_{31} \\ Q_{12}&=Q_{21} \\ Q_{11}&=E_{12}\cdot Q_{12}+E_{13}\cdot Q_{13}+\frac{1}{N_{11}}\end{aligned}\right\}. \tag{3.2.54}$$

Наведені тут формули легко узагальнити для довільного значення k. Для цього за основу слід брати елімінаційні рівняння (3.2.53) загального вигляду

$$Q_{is}=E_{i(i+1)}Q_{(i+1)s}+E_{i(i+2)}Q_{(i+2)s}+\ldots+E_{ik}Q_{ks}+E_{iQ_s}.$$

Контролюють обчислення окремо для елементів кожного рядка $\underset{k\times 1}{Q_s}$:

$$(\Sigma_1-L_1)Q_{s1}+(\Sigma_2-L_2)Q_{s2}+\cdots+(\Sigma_k-L_k)Q_{sk}-1=0. \tag{3.2.55}$$

Останню рівність можна отримати для кожного s- го рядка вагових коефіцієнтів, якщо додати рівняння відповідної цьому рядкові системи $\underset{k\times k}{N}\cdot\underset{k\times 1}{Q_s}-\underset{k\times 1}{E_s}=0$ і згрупувати результати відносно невідомих. Такий спосіб контролю вагових коефіцієнтів можна застосовувати також при їх обчисленні у додаткових стовпцях схеми Гаусса-Дулітля.

Спосіб Енке.

Для останнього невідомого $$P_k=N_{kk}^{(k-1)}. \tag{3.2.56}$$

Для ваги передостаннього невідомого системи k нормальних рівнянь маємо:

$$P_{k-1}=\frac{N_{(k-1)(k-1)}^{(k-2)}}{N_{kk}^{(k-2)}}P_k. \tag{3.2.57}$$

Спосіб Енке помітно виділяється серед інших простотою обчислення ваг P_{k-1} та P_k. Але коло його практичного застосування обмежене задачами оцінки точності не більше двох невідомих параметрів.

Обчислення ваг функцій параметрів.

Нехай дано функцію параметрів вигляду $$F=F(t_1,t_2,\cdots,t_k). \tag{3.2.58}$$

Враховуючи, що $t_j=t_j^{\circ}+\tau_j$, її лінеаризована форма

$$F(t_1,\cdots,t_k)=F(t_1^{\circ},\cdots,t_k^{\circ})+\left(\frac{\partial F}{\partial t_1}\right)_{\circ}\tau_1+\cdots+\left(\frac{\partial F}{\partial t_k}\right)_{\circ}\tau_k. \tag{3.2.59}$$

$$F(t_1,\cdots,t_k)=F_0+F_1\tau_1+\cdots+F_k\tau_k\,. \tag{3.2.60}$$

$F_0=F(t_1^\circ,\cdots,t_k^\circ)$ - приблизне значення функції. F_j- чисельні значення частинних похідних функції за параметрами t_j: $F_j=\left(\dfrac{\partial F}{\partial t_j}\right)_\circ$, (3.2.61)

Враховуючи лінійну залежність поправок τ_j та вільних членів рівнянь поправок l_i ($\tau_j=-[\alpha_j l]$), $F(t_1,\cdots,t_k)=F_0-F_1[\alpha_1 l]-\cdots-F_k[\alpha_k l]$, (3.2.62)

$$F(t_1,\cdots,t_k)=F_0-\sum_{i=1}^{n}(\alpha_{i1}F_1+\cdots+\alpha_{ik}F_k)l_i=\Phi(l_1,\cdots l_n)\,. \tag{3.2.63}$$

Отже, функцію параметрів (3.2.58) можна визнати лінійною функцією вільних членів параметричних рівнянь поправок l_i. У завданні оцінки точності вільні члени l_i ототожнюють з результатами вимірів. Оскільки l_i мають ваги p_i, то

$$\frac{1}{P_F}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial l_i}\right)^2\frac{1}{p_i}=\sum_{i=1}^{n}(\alpha_{i1}F_1+\cdots+\alpha_{ik}F_k)^2\frac{1}{p_i}=$$

$$=\sum_{j=1}^{k}F_jF_jQ_{jj}+2\sum_{i<j}F_iF_jQ_{ij}\,. \tag{3.2.64}$$

Формула (3.2.64) розкриває добуток матриць $\dfrac{1}{P_F}=\underset{1\times k}{F}\cdot\underset{k\times k}{Q}\cdot\underset{k\times 1}{F^T}$. (3.2.65)

Формою (3.2.65) зручно користуватись, якщо оцінюють m функцій. Тоді матриця F має розмірність $m\times k$. Кожний її рядок відповідає функції $F_i(t_1,t_2,\cdots,t_k)$ ($i=\overrightarrow{1,m}$) і містить значення похідних $F_{ij}=\left(\dfrac{\partial F_i}{\partial t_j}\right)_\circ$. (3.2.66)

Тоді співвідношення (3.2.65) набуває вигляду $\underset{m\times k}{F}\cdot\underset{k\times k}{Q}\cdot\underset{k\times m}{F^T}=\underset{m\times m}{Q_F}$, (3.2.67)

де $\underset{m\times m}{Q_F}$ - вагова матриця системи m функцій. На її головній діагоналі розташовані обернені ваги $1/P_{Fi}$ функцій $F_i(t_1,t_2,\cdots,t_k)$. Інші елементи виражають залежність між функціями зрівноважених параметрів і називаються кореляційними моментами. Тіснота залежності між функціями за номерами i та j виражається коефіцієнтом кореляції

$$r_{F_iF_j}=\frac{Q_{F_{ij}}}{\sqrt{\dfrac{1}{P_{F_i}}\cdot\dfrac{1}{P_{F_j}}}}\,. \tag{3.2.68}$$

Матрицю
$$\underset{m\times m}{M^2}=\mu^2\cdot\underset{m\times m}{Q_F} \tag{3.2.69}$$

або при зрівноважуванні рівноточних вимірів $\underset{m\times m}{M^2}=m^2\cdot\underset{m\times m}{Q_F}$ (3.2.70)

називають кореляційною матрицею функцій зрівноважених параметрів. На головній діагоналі матриці $\underset{m\times m}{M^2}$ розташовані значення квадратів середніх квадратичних помилок M_i^2 функцій зрівноважених параметрів $F_i(t_1, t_2, \cdots, t_k)$ з відповідними їм індексами $i = \overrightarrow{1,m}$.

Обчислення ваг зрівноважених результатів вимірів.

Зрівноважені значення $\tilde{x}_i$ результатів вимірів x_i виражаються функціями зрівноважених параметрів t_j, які називаються параметричними рівняннями зв'язку (3.2.2). Вони є функціями зрівноважених параметрів, тому задачу слід визнати частковим випадком задачі оцінки точності функцій параметрів. Розв'язок спрощується тим, що частинні похідні (3.2.66) вже відомі: $F_{ij} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial t_j}\right)_{\circ} = a_{ij}$ - це коефіцієнти рівнянь (3.2.6). Для обчислення оберненої ваги зрівноваженого значення окремої величини за номером i матриця $\underset{1\times k}{F}$ у формулі (3.2.65) містить коефіцієнти a_{ij} параметричного рівняння поправок за тим же номером i. Загалом для усіх зрівноважених значень матриця F має розмірність $n\times k$, а її елементами є сукупність коефіцієнтів a_{ij}: $\underset{n\times k}{F} = \underset{n\times k}{A}$. Тоді

$$\underset{n\times n}{Q_F} = \underset{n\times n}{Q_{\tilde{x}}} = \underset{n\times k}{A} \cdot \underset{k\times k}{Q} \cdot \underset{k\times n}{A^T}. \qquad (3.2.71)$$

Обчислення ваг функцій у додатковому стовпці схеми Гаусса-Дулітля.

З рівності (3.2.65) слідує $$-\frac{1}{P_F} = F_{k+1}^{(k)}. \qquad (3.2.72)$$

Це є підставою для обчислення оберненої ваги у схемі Гаусса-Дулітля одночасно з розв'язуванням основної системи нормальних рівнянь. Для цього до основної схеми приєднують додатковий стовпчик, у який в рядках коефіцієнтів системи нормальних рівнянь за номерами j записують з протилежними знаками значення частинних похідних з відповідними номерами j. У інших рядках стовпчика згідно алгоритму Гаусса виконують такі ж перетворення, що й у стовпці вільних членів нормальних рівнянь L. Після завершення перетворень обернена вага функції $1/P_F$ з протилежним знаком обчислюється за елімінаційними коефіцієнтами E_{jF} схеми Гаусса-Дулітля, які містяться у додатковому стовпці, згідно правила розкриття квадратичного коефіцієнта останнього рівняння розширеної еквівалентної системи:
$$-\frac{1}{P_F} = F_{k+1}^{(k)} = F_{k+1} + \sum_{j=1}^{k} E_{jF} F_j^{(j-1)}. \qquad (3.2.73)$$

Остаточно:
$$-\frac{1}{P_F} = \sum_{j=1}^{k} E_{jF} F_j^{(j-1)}, \qquad (3.2.74)$$

тобто обернена вага функції з протилежним знаком дорівнює сумі добутків чисел, які стоять на перетині елімінаційних рядків з додатковим стовпчиком, на числа цього ж стовпчика, котрі розміщені рядком вище.

1.6. Приклади зрівноважування результатів вимірів параметричним способом

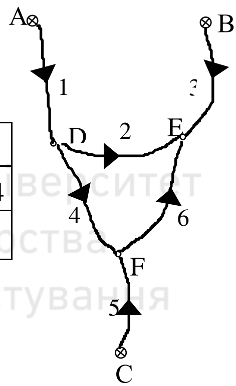
Завдання 1. У нівелірній мережі з трьома вузловими реперами виміряні перевищення у шести ходах різної довжини. Мережа опирається на три вихідних репери з відомими відмітками. Схема мережі зображена на малюнку 3.2. Визначити зрівноважені значення виміряних перевищень та відмітки вузлових реперів, оцінити точність зрівноваженого перевищення та відмітки вузлового репера. Вихідні дані для студентів денної та заочної форм навчання наведено в додатку 3.

Відмітки вихідних реперів:

$H_A = 183{,}496$ *м*; $H_B = 192{,}353$ *м*; $H_C = 191{,}890$ *м*.

Результати вимірів перевищень та довжини ходів:

№ ходу	1	2	3	4	5	6
Перевищення *h* (*м*)	6,125	8,320	5,580	1,368	-0,905	6,944
Довжина *S* (*км*)	12,6	16,4	14,1	10,0	12,0	13,2



Малюнок 3.2

Для заданої мережі загальне число вимірів $n = 6$,
число необхідних вимірів $k = 3$,
число надлишкових вимірів $r = 3$.

Послідовність та результати зрівноважування мережі вручну

1. Формування системи параметричних рівнянь поправок

1.1) вибір параметрів і обчислення їх приблизних значень:

Параметри	Приблизні значення параметрів (*м*)
$H_E = t_1 = t_1^\circ + \tau_1$	$t_1^\circ = H_D + h_3 = 197{,}933$
$H_F = t_2 = t_2^\circ + \tau_2$	$t_2^\circ = H_C + h_5 = 190{,}985$
$H_D = t_3 = t_3^\circ + \tau_3$	$t_3^\circ = H_A + h_1 = 189{,}621$

1.2) складання параметричних рівнянь зв'язку $\tilde{h}_i = f_i(t_1, t_2, t_3)$ та рівнянь поправок у загальному вигляді $v_i = f_i(t_1, t_2, t_3) - h_i$:

$$v_1 = t_3 - H_A - h_1; \quad v_2 = t_1 - t_3 - h_2; \quad v_3 = t_1 - H_B - h_3;$$

$$v_4 = t_2 - t_3 - h_4; \quad v_5 = t_2 - H_C - h_5; \quad v_6 = t_1 - t_2 - h_6.$$

1.3) обчислення вільних членів рівнянь поправок $l_i = f_i(t_1^\circ, t_2^\circ, t_3^\circ) - h_i$:

$l_1 = t_3^\circ - H_A - h_1 = 0;$ $\quad$ $l_2 = t_1^\circ - t_3^\circ - h_2 =$ - 8 *мм*;

$l_3 = t_1^\circ - H_B - h_3 = 0;$ $\quad$ $l_4 = t_2^\circ - t_3^\circ - h_4 =$ - 4 *мм*;

$l_5 = t_2^\circ - H_C - h_5 = 0;$ $\quad$ $l_6 = t_1^\circ - t_2^\circ - h_6 =$ 4 *мм*.

1.4) складання параметричних рівнянь поправок $v_i = a_{i1}\tau_1 + a_{i2}\tau_2 + a_{i3}\tau_3 + l_i$:

$v_1 = \tau_3;$ $\quad$ $v_2 = \tau_1 - \tau_3 - 8;$ $\quad$ $v_3 = \tau_1;$

$v_4 = \tau_2 - \tau_3 - 4;$ $\quad$ $v_5 = \tau_2;$ $\quad$ $v_6 = \tau_1 - \tau_2 + 4.$

2. Формування системи нормальних рівнянь поправок

Для заданої мережі система нормальних рівнянь поправок має вигляд

$$\left.\begin{aligned} N_{11}\tau_1 + N_{12}\tau_2 + N_{13}\tau_3 + L_1 = 0 \\ N_{21}\tau_1 + N_{22}\tau_2 + N_{23}\tau_3 + L_2 = 0 \\ N_{31}\tau_1 + N_{32}\tau_2 + N_{33}\tau_3 + L_3 = 0 \end{aligned}\right\} .$$

Коефіцієнти та вільні члени рівнянь обчислюємо у схемі

№ вимірів	$p_i = \frac{10}{S_i}$	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	l_i	s_i	v_i	$p_i v_i^2$
1	0,8			+1		+1	-2,6	5,6180
2	0,6	+1		-1	-8	-8	-4,6	12,6354
3	0,7	+1				+1	+0,8	0,4054
4	1,0		+1	-1	-4	-4	+0,6	0,4020
5	0,8		+1			+1	+2,0	3,1490
6	0,8	+1	-1		+4	+4	+2,8	6,1694
Σ		+3	+1	-1	-8	-5	$[pv^2] =$	28,3792
$[pa_1$		2,1	-0,8	-0,6	-1,6	-0,9		
$[pa_2$			2,6	-1,0	-7,2	-6,4		
$[pa_3$				2,4	8,8	9,6		
$[pl$					67,2	67,2		
$[ps$						69,5		

Отже, маємо систему нормальних рівнянь поправок вигляду

$$\left.\begin{aligned} 2{,}1\cdot\tau_1 - 0{,}8\cdot\tau_2 - 0{,}6\cdot\tau_3 - 1{,}6 = 0 \\ -0{,}8\cdot\tau_1 + 2{,}6\cdot\tau_2 - 1{,}0\cdot\tau_3 - 7{,}2 = 0 \\ -0{,}6\cdot\tau_1 - 1{,}0\cdot\tau_2 + 2{,}4\cdot\tau_3 + 8{,}8 = 0 \end{aligned}\right\} .$$

3. Розв'язування системи нормальних рівнянь поправок у схемі Гаусса-Дулітля (див. таблицю додатку 2)

№	Познач. дій	τ_1 / 1	τ_2 / 2	τ_3 / 3	L	Σ	t_3	F	Σ_K
1	N_{1i}	2,1	-0,8	-0,6	-1,6	-0,9	0	-1	-1,9
2	E_1	-1	0,3810	0,2857	0,7619	0,4286	0	0,4762	0,9048
3	N_{2i}		2,6	-1,0	-7,2	-6,4	0	0	-6,4
4	$N_{12}E_{1i}$		-0,3048	-0,2286	-0,6095	-0,3429	0	-0,3810	-0,7238
5	$N_{2i}^{(1)}$		2,2952	-1,2286	-7,8095	-6,7429	0	-0,3810	-7,1238
6	E_2		-1	0,5353	3,4025	2,9378	0	0,1660	3,1038
7	N_{3i}			2,4	8,8	9,6	-1	1	9,6
8	$N_{13}E_{1i}$			-0,1714	-0,4571	-0,2572	0	-0,2857	-0,5429
9	$N_{23}^{(1)}E_{2i}$			-0,6577	-4,1803	-3,6094	0	-0,2039	-3,8133
10	$N_{3i}^{(2)}$			1,5709	4,1625	5,7335	-1	0,5104	5,2438
11	E_3			-1	-2,6498	-3,6498	0,6366	-0,3249	-3,3381
12	N_{4i}				67,2	67,2			
13	L_1E_{1i}				-1,2190	-0,6858			
14	$L_2^{(1)}E_{2i}$				-26,5718	-22,9427			
15	$L_3^{(2)}E_{3i}$				-11,0298	-15,1922			
16	$N_{4i}^{(3)}$				28,3793	28,3793			
17	τ_3			-2,6498	-2,6498				
18	τ_2		1,9841	-1,4184	3,4025				
19	τ_1	0,7608	0,7559	-0,7570	0,7619				
20	Q_{33}			0,6366					
21	Q_{32}		0,3408						
22	Q_{31}	0,3117							

Контроль розв'язування системи нормальних рівнянь поправок:

3.1) за системою рівнянь:
$$\left.\begin{aligned} 2{,}1\cdot\tau_1 - 0{,}8\cdot\tau_2 - 0{,}6\cdot\tau_3 - 1{,}6 &= 0{,}0009 \\ -0{,}8\cdot\tau_1 + 2{,}6\cdot\tau_2 - 1{,}0\cdot\tau_3 - 7{,}2 &= -0{,}0004 \\ -0{,}6\cdot\tau_1 - 1{,}0\cdot\tau_2 + 2{,}4\cdot\tau_3 + 8{,}8 &= -0{,}0006 \end{aligned}\right\}.$$

3.2) за сумою рівнянь: $(\Sigma_1 - L_1)\tau_1 + (\Sigma_2 - L_2)\tau_2 + (\Sigma_3 - L_3)\tau_3 + [L] = 0$;

(-0,9+1,6)0,7608+(-6,4+7,2)1,9841+(9,6-8,8)(-2,6498)+0 = -0,0001.

4. Обчислення зрівноважених значень виміряних перевищень та відміток вузлових реперів

4.1) обчислення поправок до виміряних перевищень у схемі обчислення коефіцієнтів нормальних рівнянь: $v_i = a_{i1}\tau_1 + a_{i2}\tau_2 + a_{i3}\tau_3 + l_i$.

4.2) обчислення зрівноважених значень виміряних перевищень: $\tilde{h}_i = h_i + v_i$;

№ виміру	h_i *(мм)*	v_i *(мм)*	$\tilde{h}_i$ *(мм)*
1	6125	-2,6	6122,4
2	8320	-4,6	8315,4
3	5580	+0,8	5580,8
4	1368	+0,6	1368,6
5	-905	+2,0	-903,0
6	6944	+2,8	6946,8

4.3) обчислення зрівноважених значень відміток вузлових реперів.

Відмітки реперів	t_j° *(мм)*	τ_j *(мм)*	t_j *(мм)*
$H_E = t_1$	197933	+0,8	197933,8
$H_F = t_2$	190985	+2,0	190987,0
$H_D = t_3$	189621	-2,6	189618,4

4.4) контроль зрівноважування перевищень та відміток реперів за параметричними рівняннями зв'язку:

$\tilde{h}_1 = H_D - H_A = 6122{,}4$ *мм*;

$\tilde{h}_2 = H_E - H_D = 8315{,}4$ *мм*;

$\tilde{h}_3 = H_E - H_B = 5580{,}8$ *мм*;

$\tilde{h}_4 = H_F - H_D = 1368{,}6$ *мм*;

$\tilde{h}_5 = H_F - H_C = -903{,}0$ *мм*;

$\tilde{h}_6 = H_E - H_F = 6946{,}8$ *мм*.

5. Оцінка точності за результатами зрівноважування

5.1) обчислення середньої квадратичної похибки одиниці ваги за формулою Бесселя вигляду (3.2.41):

$$\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-k}} = \sqrt{\frac{28.3793}{6-3}} = \pm 3{,}08 \text{ (мм)}.$$

5.2) обчислення середньої квадратичної похибки нівелювання на 1 *км* ходу:

$$m_{км} = \frac{\mu}{\sqrt{P_{км}}} = \pm 0{,}97 \text{ (мм)},$$

де $P_{км} = 10$ - вага ходу довжиною S = 1 *км* (слідує з формули обчислення ваг виміряних перевищень у ходах різної довжини p_i=10/S_i).

5.3) оцінка точності зрівноважених значень відміток вузлових реперів (параметрів). Для прикладу визначимо середню квадратичну похибку відмітки репера *D*, позначену параметром t_3. Потрібна похибка виражається співвідношеннями вигляду $M_{H_D} = \mu\sqrt{\frac{1}{P_3}}$ або $M_{H_D} = \mu\sqrt{Q_{33}}$, де $\mu -$ середня квадратична похибка одиниці ваги; $P_3 -$ вага параметру t_3; $Q_{33} -$ відповідний цьому параметрові діагональний ваговий коефіцієнт.

5.3.1) обчислення вагових коефіцієнтів у схемі Гаусса-Дулітля. Оскільки необхідно оцінити точність відмітки репера *D*, то до схеми приєднуємо додатковий стовпчик, який іменуємо за позначкою відповідного параметру "t_3". У цьому стовпчику пишемо -1 у рядку третього рівняння основної системи; у рядках першого та другого рівнянь пишемо 0. У інших рядках виконуємо такі ж перетворення, як у стовпчику "*L*". Після завершення всіх перетворень за елімінаційними рядками схеми обчислюємо вагові коефіцієнти третього рядка (чи стовпчика) матриці $\underset{3\times3}{Q}$, записуємо результат у рядках 20, 21, 22 та перевіряємо способом за сумою рівнянь. Отже,

$$Q_{33} = 0{,}6366; \qquad Q_{32} = 0{,}3408; \qquad Q_{31} = 0{,}3117.$$

Контроль: $(\Sigma_1 - L_1)Q_{31} + (\Sigma_2 - L_2)Q_{32} + (\Sigma_3 - L_3)Q_{33} = 1{,}00005 \approx 1.$

5.3.2) обчислення вагових коефіцієнтів способом Ганзена:

$$Q_{33} = \frac{1}{N_{33}^{(2)}} = 0{,}6366; \qquad Q_{32} = E_{23}Q_{33} = 0{,}3408;$$

$$Q_{31} = E_{12}Q_{32} + E_{13}Q_{33} = 0{,}3117.$$

Контроль: $(\Sigma_1 - L_1)Q_{31} + (\Sigma_2 - L_2)Q_{32} + (\Sigma_3 - L_3)Q_{33} = 1{,}00005 \approx 1.$

$$Q_{23} = Q_{32} = 0{,}3408; \qquad Q_{22} = E_{23}Q_{23} + \frac{1}{N_{22}^{(1)}} = 0{,}6181;$$

$$Q_{21} = E_{12}Q_{22} + E_{13}Q_{23} = 0{,}3328.$$

Контроль: $(\Sigma_1 - L_1)Q_{21} + (\Sigma_2 - L_2)Q_{22} + (\Sigma_3 - L_3)Q_{23} = 1{,}00008 \approx 1.$

$$Q_{13} = Q_{31} = 0{,}3117; \qquad Q_{12} = Q_{21} = 0{,}3328;$$

$$Q_{11} = E_{12}Q_{12} + E_{13}Q_{13} + \frac{1}{N_{11}} = 0{,}6921.$$

Контроль: $(\Sigma_1 - L_1)Q_{11} + (\Sigma_2 - L_2)Q_{12} + (\Sigma_3 - L_3)Q_{13} = 1{,}00008 \approx 1.$

5.3.3) обчислення ваги параметру способом Енке: $P_{H_D} = P_3 = N_{33}^{(2)} = 1{,}5709.$

Таким чином, середня квадратична похибка відмітки репера *D*

$M_{H_D} = \mu\sqrt{\frac{1}{P_3}} = \mu\sqrt{Q_{33}} = \pm\,2{,}46$ (*мм*). Остаточно $H_D = 189618{,}4 \pm 2{,}46$ (*мм*).

5.4) оцінка точності зрівноважених перевищень. Зрівноважені перевищення виражаються функціями параметрів загального вигляду $\tilde{h}_i = F_i(t_1, t_2, t_3)$, які називають параметричними рівняннями зв'язку. Середня квадратична похибка такої функції виражається співвідношенням вигляду $M_{\tilde{h}} = M_F = \mu\sqrt{\dfrac{1}{P_F}}$, де $\mu -$ середня квадратична похибка одиниці ваги; $P_F -$ вага функції параметрів.

Для прикладу визначимо середню квадратичну похибку зрівноваженого перевищення $\tilde{h}_{DE}$. Отже, $\tilde{h}_{DE} = H_E - H_D = F(t_1, t_2, t_3) = t_1 - t_3$.

Передусім виражаємо частинні похідні утвореної функції за параметрами t_j:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial t_1}\right)_0 = F_1 = 1; \left(\frac{\partial F}{\partial t_2}\right)_0 = F_2 = 0; \left(\frac{\partial F}{\partial t_3}\right)_0 = F_3 = \text{-}1.$$

5.4.1) обчислення оберненої ваги функції за формулою (3.2.64):

$$\frac{1}{P_F} = F_1F_1Q_{11} + 2F_1F_2Q_{12} + 2F_1F_3Q_{13} + F_2F_2Q_{22} + 2F_2F_3Q_{23} + F_3F_3Q_{33} = 0{,}7052.$$

5.4.2) обчислення оберненої ваги функції у схемі Гаусса-Дулітля. До схеми приєднуємо додатковий стовпчик, який іменуємо "*F*". У цьому стовпчику в рядках коефіцієнтів системи нормальних рівнянь за номерами *j* записують з протилежними знаками значення частинних похідних F_j з відповідними номерами j. У інших рядках стовпчика згідно алгоритму Гаусса виконують такі ж перетворення, що й у стовпці вільних членів нормальних рівнянь "*L*". Після завершення перетворень обернена вага функції $1/P_F$ з протилежним знаком обчислюється за елімінаційними коефіцієнтами E_{jF} схеми Гаусса-Дулітля, які містяться у додатковому стовпці, як сума добутків чисел, які стоять на перетині елімінаційних рядків з додатковим стовпчиком, на числа цього ж стовпчика, котрі розміщуються рядком вище:

$$-\frac{1}{P_F} = \sum_{j=1}^{k} E_{jF} F_j^{(j-1)} = \text{-}0{,}7052.$$

Істинність результатів проміжних розрахунків у додаткових стовпчиках схеми Гаусса-Дулітля можна перевірити методом суми за принципом сходження чисел у контрольному стовпчику "Σ". Для цього до схеми слід приєднати завершальним стовпчик контрольних чисел (у прикладі він іменований "$\sum_K$"). У ньому в рядках коефіцієнтів системи нормальних рівнянь записують суму чисел цих рядків у всіх стовпчиках, розташованих лівіше стовпчика "$\sum_K$". У інших рядках стовпчика виконують такі ж перетворення, що й у стовпці вільних членів нормальних рівнянь "*L*" і контролюють результати перетворень методом суми у рядках коефіцієнтів еквівалентних та елімінаційних рівнянь. За умови, що розв'язування системи нормальних рівнянь та оцінка точності у додаткових стовпчиках схеми Гаусса-Дулітля виконуються одночасно і результати контролюють у стовпчику "$\sum_K$", необхідність проведення контролю у стовпчику "$\sum$", як і присутність такого стовпчика у схемі загалом, відпадають.

Таким чином, середня квадратична похибка перевищення $\tilde{h}_{DE}$:

$M_{\tilde{h}_{DE}} = M_F = \mu\sqrt{\frac{1}{P_F}} = \pm\, 2{,}59$ (*мм*). Остаточно $\tilde{h}_{DE} =$ 8315,4 ± 2,59 (*мм*).

Послідовність та результати зрівноважування мережі у матричній формі

1. Формування системи параметричних рівнянь поправок

Цей етап зрівноважування детально описаний у попередньому прикладі. Параметричні рівняння поправок у лінійному вигляді у матричній формі $\underset{6\times1}{V} = \underset{6\times3}{A}\cdot \underset{3\times1}{\tau} + \underset{6\times1}{l}$, де матриці коефіцієнтів та вільних членів рівнянь утворені наступними елементами мають вигляд $\underset{6\times3}{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; $\underset{6\times1}{l} = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.

2. Формування системи нормальних рівнянь поправок:

Система нормальних рівнянь поправок має вигляд (3.2.21) або $\underset{3\times3}{N}\cdot \underset{3\times1}{\tau} + \underset{3\times1}{L} = 0$.

$\underset{3\times3}{N} = \underset{3\times6}{A^T}\cdot \underset{6\times6}{P}\cdot \underset{6\times3}{A}$, $\underset{3\times1}{L} = \underset{3\times6}{A^T}\cdot \underset{6\times6}{P}\cdot \underset{6\times1}{l}$, $p_i=10/S_i$ (S_i – довжини ходів):

$\underset{6\times6}{P} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 \end{pmatrix}$. Отже, $\underset{3\times3}{N} = \begin{pmatrix} 2.1 & -0.8 & -0.6 \\ -0.8 & 2.6 & -1.0 \\ -0.6 & -1.0 & 2.4 \end{pmatrix}$; $\underset{3\times1}{L} = \begin{pmatrix} -1.6 \\ -7.2 \\ 8.8 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 2.1 & -0.8 & -0.6 \\ -0.8 & 2.6 & -1.0 \\ -0.6 & -1.0 & 2.4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1.6 \\ -7.2 \\ 8.8 \end{pmatrix} = 0 .$$

3. Розв'язування системи нормальних рівнянь поправок

$\underset{3\times1}{\tau} = -\underset{3\times3}{Q}\cdot \underset{3\times1}{L}$, де $\underset{3\times3}{Q} = \underset{3\times3}{N^{-1}}$ – обернена матриця до матриці коефіцієнтів $\underset{3\times3}{N}$.

$\underset{3\times3}{Q} = \begin{pmatrix} 0.6921 & 0.3328 & 0.3117 \\ 0.3328 & 0.6181 & 0.3408 \\ 0.3117 & 0.3408 & 0.6366 \end{pmatrix}$; $\underset{3\times1}{\tau} = -\begin{pmatrix} 0.6921 & 0.3328 & 0.3117 \\ 0.3328 & 0.6181 & 0.3408 \\ 0.3117 & 0.3408 & 0.6366 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1.6 \\ -7.2 \\ 8.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7607 \\ 1.9842 \\ -2.6498 \end{pmatrix}$.

Для перевірки правильності побудови оберненої матриці можна використати рівність $\underset{3\times3}{N}\cdot\underset{3\times3}{Q}=\underset{3\times3}{E}$, де $\underset{k\times k}{E}$ - одинична матриця:

$$\begin{pmatrix} 2.1 & -0.8 & -0.6 \\ -0.8 & 2.6 & -1.0 \\ -0.6 & -1.0 & 2.4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0.6921 & 0.3328 & 0.3117 \\ 0.3328 & 0.6181 & 0.3408 \\ 0.3117 & 0.3408 & 0.6366 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

При потребі можна виконати контроль розв’язування системи нормальних рівнянь поправок способом “за системою рівнянь”, як це показано у попередньому прикладі, або на основі рівності $\underset{3\times3}{N}\cdot\underset{3\times1}{\tau}+\underset{3\times1}{L}=0$.

4. Обчислення зрівноважених значень виміряних перевищень та відміток вузлових реперів.

4.1) обчислення поправок до виміряних перевищень $\underset{6\times1}{V}=\underset{6\times3}{A}\cdot\underset{3\times1}{\tau}+\underset{6\times1}{l}$:

$$\underset{6\times1}{V}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0.7607 \\ 1.9842 \\ -2.6498 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.6498 \\ -4.5895 \\ 0.7607 \\ 0.6339 \\ 1.9842 \\ 2.7765 \end{pmatrix}.$$

4.2) обчислення зрівноважених перевищень. $\underset{6\times1}{\tilde{h}}=\underset{6\times1}{h}+\underset{6\times1}{V}$:

$$\underset{6\times1}{\tilde{h}}=\begin{pmatrix} 6125 \\ 8320 \\ 5580 \\ 1368 \\ -905 \\ 6944 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2.6 \\ -4.6 \\ 0.8 \\ 0.6 \\ 2.0 \\ 2.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6122.4 \\ 8315.4 \\ 5580.8 \\ 1368.6 \\ -903.0 \\ 6946.8 \end{pmatrix}.$$

4.3) обчислення зрівноважених відміток вузлових реперів $\underset{3\times1}{t}=\underset{3\times1}{t^{\circ}}+\underset{3\times1}{\tau}$, де

$$\underset{3\times1}{t^{\circ}}=\begin{pmatrix} t_1^{\circ} \\ t_2^{\circ} \\ t_3^{\circ} \end{pmatrix}: \qquad \underset{3\times1}{t}=\begin{pmatrix} 197933 \\ 190985 \\ 189621 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.8 \\ 2.0 \\ -2.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 197933.8 \\ 190987.0 \\ 189618.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_E \\ H_F \\ H_D \end{pmatrix}.$$

4.4) контроль зрівноважування перевищень та відміток реперів здійснюється за правилами, викладеними у попередньому прикладі.

5. Оцінка точності за результатами зрівноважування

5.1) обчислення середньої квадратичної похибки одиниці ваги

$$\mu=\sqrt{\frac{[pv^2]}{n-k}},$$

де $[pv^2]=\underset{1\times6}{V^T}\cdot\underset{6\times6}{P}\cdot\underset{6\times1}{V}=28{,}3792$: $\mu=\pm3{,}08$ *мм.*

5.2) оцінка точності зрівноважених значень відміток вузлових реперів (параметрів).. Наприклад, для параметру t_3 $M_{H_D} = \mu\sqrt{Q_{33}} = \pm 2{,}46$ (*мм*) і $H_D = 189618{,}4 \pm 2{,}46$ (*мм*).

5.3) оцінка точності зрівноважених перевищень. Загальновідомо, що похибка величини визначається похибкою одиниці ваги та вагою цієї величини. Для визначення оберненої ваги оцінюваної величини її потрібно виразити функцією параметрів і скористатись формулою вигляду (3.2.65): $\frac{1}{P_F} = \underset{1\times k}{F} \cdot \underset{k\times k}{Q} \cdot \underset{k\times 1}{F^T}$, де $\underset{1\times k}{F} = \begin{pmatrix} F_1 & F_2 & \cdots & F_k \end{pmatrix}$ утворена значеннями частинних похідних функції за параметрами t_j. Зрівноважені значення результатів вимірів виражаються функціями параметрів, які називають параметричними рівняннями зв'язку. Частинні похідні рівняння для зрівноваженого виміру за номером i - це коефіцієнти a_{ij} відповідного i-го параметричного рівняння поправок, які містяться у рядку з тим же номером i у матриці коефіцієнтів $\underset{n\times k}{A}$. Таким чином, для обчислення оберненої ваги зрівноваженого значення окремої вимірюваної величини за номером i матриця $\underset{1\times k}{F}$ містить елементи i-го рядка матриці $\underset{n\times k}{A}$. Наприклад, для перевищення $\tilde{h}_{DE} = \tilde{h}_2 = \tau_1 - \tau_3 - 8$, матриця $\underset{1\times 3}{F}$ містить частинні похідні $\underset{1\times 3}{F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, обернена вага

$$\frac{1}{P_F} = \frac{1}{P_{\tilde{h}_{DE}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0.6921 & 0.3328 & 0.3117 \\ 0.3328 & 0.6181 & 0.3408 \\ 0.3117 & 0.3408 & 0.6366 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0{,}7052,$$

а середня квадратична похибка $M_{\tilde{h}_{DE}} = M_F = \mu\sqrt{\frac{1}{P_F}} = \pm 2{,}59$ (*мм*).

Загалом для оцінки точності усіх зрівноважених значень результатів вимірів матриця F має розмірність $n \times k$, а її елементами є сукупність коефіцієнтів a_{ij}: $\underset{n\times k}{F} = \underset{n\times k}{A}$. Добуток $\underset{n\times k}{A} \cdot \underset{k\times k}{Q} \cdot \underset{k\times n}{A^T} = \underset{n\times n}{Q_F}$ виражає вагову матрицю системи n зрівноважених результатів вимірів. Для даної мережі

$$\underset{6\times 6}{Q_F} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0.6921 & 0.3328 & 0.3117 \\ 0.3328 & 0.6181 & 0.3408 \\ 0.3117 & 0.3408 & 0.6366 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$
=\begin{pmatrix}
0.6366 & -0.3249 & 0.3117 & -0.2958 & 0.3407 & -0.0291 \\
-0.3249 & 0.7052 & 0.3803 & 0.3170 & -0.0079 & 0.3883 \\
0.3117 & 0.3803 & 0.6920 & 0.0211 & 0.3328 & 0.3592 \\
-0.2958 & 0.3170 & 0.0211 & 0.5732 & 0.2773 & -0.2562 \\
0.3407 & -0.0079 & 0.3328 & 0.2773 & 0.6181 & -0.2853 \\
-0.0291 & 0.3883 & 0.3592 & -0.2562 & -0.2853 & 0.6445
\end{pmatrix}.
$$

Вздовж головної діагоналі матриці розташовані обернені ваги зрівноважених перевищень; інші елементи матриці виражають їх взаємні залежності і називаються кореляційними моментами. Коефіцієнт кореляції між зрівноваженими перевищеннями виражається формулою (3.2.68). Наприклад, тіснота залежності між першим та другим зрівноваженими перевищеннями

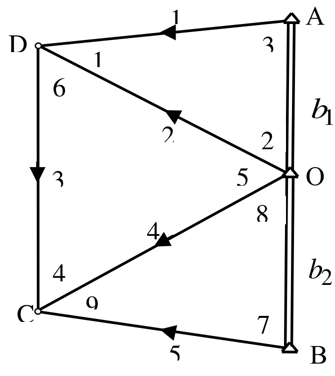
$$
r_{\tilde{h}_1\tilde{h}_2}=\frac{Q_{F_{12}}}{\sqrt{\dfrac{1}{P_{F_1}}\times\dfrac{1}{P_{F_2}}}}=\frac{-0.3249}{\sqrt{0.6366\times0.7052}}=-0.48.
$$

Матриця $\underset{n\times n}{M^2}=\mu^2\cdot\underset{n\times n}{Q_F}$ - кореляційна матриця зрівноважених результатів вимірів:

$$
\underset{6\times6}{M^2}=\begin{pmatrix}
6.0216 & -3.0733 & 2.9483 & -2.7984 & 3.2232 & -0.2748 \\
-3.0733 & 6.6713 & 3.5980 & 2.9983 & -0.0750 & 3.6729 \\
2.9483 & 3.5980 & 6.5463 & 0.1999 & 3.1482 & 3.3981 \\
-2.7984 & 2.9983 & 0.1999 & 5.4220 & 2.6235 & -2.4236 \\
3.2232 & -0.0750 & 3.1482 & 2.6235 & 5.8467 & -2.6985 \\
-0.2748 & 3.6729 & 3.3981 & -2.4236 & -2.6985 & 6.0966
\end{pmatrix}.
$$

На головній діагоналі матриці розташовані значення квадратів середніх квадратичних похибок $M^2_{\tilde{h}_i}$ зрівноважених значень результатів вимірів перевищень $\tilde{h}_i$.

Завдання 2. В результаті рівноточних вимірів отримали n=9 кутів β_i мережі мікротріангуляції (малюнок 3.3). Обчислити зрівноважені значення виміряних кутів та координат пунктів *D* і *C*, оцінити точність зрівноважених координат і довжини сторони *DC*. Координати вихідних пунктів *A, O, B*, приблизні значення координат пунктів *D* і *C*, а також результати вимірів кутів мережі задано в таблицях. Вихідні дані для студентів денної та заочної форм навчання наведені в додатку 4. Для заданої мережі $n=9$, $k=4$, $r=5$.



Малюнок 3.3

Координати пунктів:

Пункти	X ($м$)	Y ($м$)
A	1813,119	0
O	0	0
B	-1527,638	1492,213
	X° ($м$)	Y° ($м$)
D	623,360	-1393,272
C	-897,701	-1488,183

Результати вимірів кутів:

№	β_i	№	β_i	№	β_i
1	64°36′00,9″	4	55°19′45,2″	7	33°44′19,4″
2	65°53′45,2″	5	55°12′15,1″	8	103°13′43,4″
3	49°30′19,3″	6	69°27′52,6″	9	43°02′01,7″

Послідовність та результати зрівноважування мережі вручну

1. Формування системи параметричних рівнянь поправок

1.1) вибір параметрів і встановлення їх приблизних значень:

Параметри	Приблизні значення параметрів ($м$)
$X_D = t_1 = t_1^{\circ} + \tau_1$	$t_1^{\circ} = 623{,}360$
$Y_D = t_2 = t_2^{\circ} + \tau_2$	$t_2^{\circ} = -1393{,}272$
$X_C = t_3 = t_3^{\circ} + \tau_3$	$t_3^{\circ} = -897{,}701$
$Y_C = t_4 = t_4^{\circ} + \tau_4$	$t_4^{\circ} = -1488{,}183$

1.2) складання параметричних рівнянь поправок. Якщо при зрівноважуванні мереж тріангуляції параметрами встановлюють невідомі координати пунктів, то параметричні рівняння зв’язку кутів та координат мають складний вигляд. Внаслідок цього висока ймовірність виникнення помилок і складання неправильних параметричних рівнянь поправок. Тому цю частину завдання доцільно розв’язувати у два етапи:

1.2.1) складання параметричних рівнянь зв’язку та рівнянь поправок до дирекційних кутів сторін (проміжний етап). Істинне значення дирекційного кута $\overline{\alpha}$ окремої сторони виражається через параметри (координати $X_{поч}, Y_{поч}$ та $X_{кінц}, Y_{кінц}$ початкового та кінцевого пунктів сторони) параметричним рівнянням зв’язку $\overline{\alpha} = arctg\dfrac{Y_{кінц} - Y_{поч}}{X_{кінц} - X_{поч}} = f(X, Y)$. Частинні похідні такого рівняння дають коефіцієнти рівняння поправок: $\left(\dfrac{\partial f}{\partial X_{поч}}\right)_{\circ} = \dfrac{\rho}{s^{\circ}}\sin\alpha^{\circ}$;

$\left(\dfrac{\partial f}{\partial Y_{поч}}\right)_{\circ} = -\dfrac{\rho}{s^{\circ}}\cos\alpha^{\circ}$; $\left(\dfrac{\partial f}{\partial X_{кінц}}\right)_{\circ} = -\dfrac{\rho}{s^{\circ}}\sin\alpha^{\circ}$; $\left(\dfrac{\partial f}{\partial Y_{кінц}}\right)_{\circ} = \dfrac{\rho}{s^{\circ}}\cos\alpha^{\circ}$.

$$\alpha^\circ = arctg\frac{Y^\circ_{кінц} - Y^\circ_{поч}}{X^\circ_{кінц} - X^\circ_{поч}},\quad s^\circ = \sqrt{(X^\circ_{кінц} - X^\circ_{поч})^2 + (Y^\circ_{кінц} - Y^\circ_{поч})^2}\ .$$

$$v_\alpha = \frac{\rho}{s^\circ}(\sin\alpha^\circ \cdot \tau_{X_{поч}} - \cos\alpha^\circ \cdot \tau_{Y_{поч}} - \sin\alpha^\circ \cdot \tau_{X_{кінц}} + \cos\alpha^\circ \cdot \tau_{Y_{кінц}}) + l_\alpha\ .$$

Вільний член рівняння $l_\alpha = f(X^\circ, Y^\circ) - \alpha = \alpha^\circ - \alpha$ у даному завданні не може бути обчислений, оскільки невідомий результат виміру кута α.

Параметричні рівняння зв'язку та поправок для сторін заданої мережі мають наступний вигляд: 1) сторона AD : $\alpha_1^\circ = 229^\circ 30' 17.8''$; $s_1^\circ = 1832.139 м$;

$$\bar{\alpha}_1 = arctg\frac{Y_D - Y_A}{X_D - X_A} = arctg\frac{t_2 - Y_A}{t_1 - X_A}\ ;$$

$$v_{\alpha_1} = \frac{\rho}{s_1^\circ}(-\sin\alpha_1^\circ \cdot \tau_1 + \cos\alpha_1^\circ \cdot \tau_2) + l_{\alpha_1} = 86 \cdot \tau_1 - 73 \cdot \tau_2 + l_{\alpha_1}\ .$$

2) сторона OD : $\alpha_2^\circ = 294^\circ 06' 14.7''$; $s_2^\circ = 1526.363 м$;

$$v_{\alpha_2} = \frac{\rho}{s_2^\circ}(-\sin\alpha_2^\circ \cdot \tau_1 + \cos\alpha_2^\circ \cdot \tau_2) + l_{\alpha_2} = 123 \cdot \tau_1 + 55 \cdot \tau_2 + l_{\alpha_2}\ .$$

3) сторона DC : $\alpha_3^\circ = 183^\circ 34' 13.8''$; $s_3^\circ = 1524.019 м$;

$$v_{\alpha_3} = \frac{\rho}{s_3^\circ}(\sin\alpha_3^\circ \cdot \tau_1 - \cos\alpha_3^\circ \cdot \tau_2 - \sin\alpha_3^\circ \cdot \tau_3 + \cos\alpha_3^\circ \cdot \tau_4) + l_{\alpha_3} =$$
$$= -8 \cdot \tau_1 + 135 \cdot \tau_2 + 8 \cdot \tau_3 - 135 \cdot \tau_4 + l_{\alpha_3}\ .$$

4) сторона OC : $\alpha_4^\circ = 238^\circ 54' 02.9''$; $s_4^\circ = 1737.975 м$;

$$v_{\alpha_4} = \frac{\rho}{s_4^\circ}(-\sin\alpha_4^\circ \cdot \tau_3 + \cos\alpha_4^\circ \cdot \tau_4) + l_{\alpha_4} = 102 \cdot \tau_3 - 61 \cdot \tau_4 + l_{\alpha_4}\ .$$

5) сторона BC : $\alpha_5^\circ = 281^\circ 56' 03.8''$; $s_5^\circ = 3046.240 м$;

$$v_{\alpha_5} = \frac{\rho}{s_5^\circ}(-\sin\alpha_5^\circ \cdot \tau_3 + \cos\alpha_5^\circ \cdot \tau_4) + l_{\alpha_5} = 66 \cdot \tau_3 + 14 \cdot \tau_4 + l_{\alpha_5}\ .$$

1.2.2) складання параметричних рівнянь поправок до виміряних кутів мережі. Поправка до результату виміру кута на пункті дорівнює різниці поправок до дирекційних кутів напрямів (сторін), які виходять з його вершини: $v = v_{\alpha_{прав}} - v_{\alpha_{лів}}$. Тому рівняння поправки до результату виміру кута дорівнює різниці рівнянь поправок до дирекційних кутів відповідних сторін. Коефіцієнти при невідомих τ_j у заключних рівняннях обчислюються як різниці коефіцієнтів при однойменних невідомих у рівняннях поправок до дирекційних кутів. Таким чином:

$v_1 = v_{\alpha_2} - v_{\alpha_1} = 37 \cdot \tau_1 + 128 \cdot \tau_2 + l_1$; $v_2 = -v_{\alpha_2} = -123 \cdot \tau_1 - 55 \cdot \tau_2 + l_2$;

$v_3 = v_{\alpha_1} = 86 \cdot \tau_1 - 73 \cdot \tau_2 + l_3$; $v_4 = v_{\alpha_4} - v_{\alpha_3} = 8 \cdot \tau_1 - 135 \cdot \tau_2 + 94 \cdot \tau_3 + 74 \cdot \tau_4 + l_4$;

$v_5 = v_{\alpha_2} - v_{\alpha_4} = 123 \cdot \tau_1 + 55 \cdot \tau_2 - 102 \cdot \tau_3 + 61 \cdot \tau_4 + l_5$;

$v_6 = v_{\alpha_3} - v_{\alpha_2} = -131\cdot\tau_1 + 80\cdot\tau_2 + 8\cdot\tau_3 - 135\cdot\tau_4 + l_6$; $v_7 = -v_{\alpha_5} = -66\cdot\tau_3 - 14\cdot\tau_4 + l_7$;
$v_8 = v_{\alpha_4} = 102\cdot\tau_3 - 61\cdot\tau_4 + l_8$; $v_9 = v_{\alpha_5} - v_{\alpha_4} = -36\cdot\tau_3 + 75\cdot\tau_4 + l_9$.

1.3) обчислення вільних членів параметричних рівнянь поправок. Вільний член рівняння поправки до результату виміру кута на пункті дорівнює різниці вільних членів рівнянь поправок до дирекційних кутів напрямів (сторін), які виходять з його вершини, тобто

$$l = l_{\alpha_{прав}} - l_{\alpha_{лів}} = \overset{\circ}{\alpha}_{прав} - \alpha_{прав} - (\overset{\circ}{\alpha}_{лів} - \alpha_{лів}) = \overset{\circ}{\alpha}_{прав} - \overset{\circ}{\alpha}_{лів} - \beta\ .$$

$l_1 = \overset{\circ}{\alpha}_2 - \overset{\circ}{\alpha}_1 - \beta_1 =$ - 4,0″ ; $l_2 = \alpha_{OA} - \overset{\circ}{\alpha}_2 - \beta_2 =$ 0,1″ ; $l_3 = \overset{\circ}{\alpha}_1 - \alpha_{AO} - \beta_3 =$ - 1,5″ ;
$l_4 = \overset{\circ}{\alpha}_4 - \overset{\circ}{\alpha}_3 - \beta_4 =$ 3,9″ ; $l_5 = \overset{\circ}{\alpha}_2 - \overset{\circ}{\alpha}_4 - \beta_5 =$ - 3,3″ ; $l_6 = \overset{\circ}{\alpha}_3 - (\overset{\circ}{\alpha}_2 \pm 180^\circ) - \beta_6 =$ 6,5″;
$l_7 = \alpha_{BO} - \overset{\circ}{\alpha}_5 - \beta_7 =$ - 3,7″ ; $l_8 = \overset{\circ}{\alpha}_4 - \alpha_{OB} - \beta_8 =$ 0 ; $l_9 = \overset{\circ}{\alpha}_5 - \overset{\circ}{\alpha}_4 - \beta_9 =$ - 0,8″ ,

де $\alpha_{OA} = 0^\circ$, $\alpha_{OB} = 135^\circ 40' 19.5''$.

2. Формування системи нормальних рівнянь поправок

Схема обчислення коефіцієнтів та вільних членів нормальних рівнянь.

№	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	l_i	s_i	v_i	v_i^2
1	37	128			-4,0	161,0	-2,1	4,5911
2	-123	-55			0,1	-177,9	-2,8	7,6232
3	86	-73			-1,5	11,5	-0,5	0,2463
4	8	-135	94	74	3,9	44,9	2,0	4,1820
5	123	55	-102	61	-3,3	133,7	1,7	2,8420
6	-131	80	8	-135	6,5	-171,5	3,4	11,3512
7			-66	-14	-3,7	-83,7	-2,8	7,8396
8			102	-61	0	41,0	-2,1	4,5149
9			-36	75	-0,8	38,2	0,4	0,1804
∑	0	0	0	0	-2,8	-2,8	[v²] =43,3707	
[a_1	56248	428	-12842	25780	-1515,5	68098,5		
[a_2		52388	-17660	-17435	-596,0	17125,0		
[a_3			35360	-8344	1028,2	-2457,8		
[a_4				36964	-798,4	36166,6		
[l					100,94	-1780,76		
[s						117151,54		

Отже, маємо систему нормальних рівнянь поправок вигляду

$$\left.\begin{array}{r} 56248\,\tau_1 + 428\cdot\tau_2 - 12842\,\tau_3 + 25780\,\tau_4 - 15155 = 0 \\ 428\cdot\tau_1 + 52388\,\tau_2 - 17660\,\tau_3 - 17435\,\tau_4 - 5960 = 0 \\ -12842\,\tau_1 - 17660\,\tau_2 + 35360\,\tau_3 - 8344\,\tau_4 + 10282 = 0 \\ 25780\,\tau_1 - -17435\,\tau_2 - 8344\,\tau_3 + 36964\,\tau_4 - 7984 = 0 \end{array}\right\}.$$

3. Розв'язування системи нормальних рівнянь поправок у скороченій схемі Гаусса-Дулітля.

№	Познач. дій	τ_1	τ_2	τ_3	τ_4	L	Σ
		1	2	3	4		
1	N_{1i}	56248	428	-12842	25780	-1515,5	68098,5
2	E_1	-1	-0,007609	0,228310	-0,458327	0,026943	-1,210683
3	N_{2i}		52388	-17660	-17435	-596,0	17125,0
4	$N_{2i}^{(1)}$		52384,7433	-17562,2832	-17631,1641	-584,4683	16606,8277
5	E_2		-1	0,335256	0,336571	0,011157	-0,317016
6	N_{3i}			35360	-8344	1028,2	-2457,8
7	$N_{3i}^{(2)}$			26540,1833	-8369,1075	486,2494	18657,3251
8	E_3			-1	0,315337	-0,018321	-0,702984
9	N_{4i}				36964	-798,4	36166,6
10	$N_{4i}^{(3)}$				16575,0970	-147,1871	16427,9099
11	E_4				-1	0,008880	-0,991120
12	N_{5i}					100,94	-1780,76
13	$N_{5i}^{(4)}$					43,3708	43,3708
14	τ_j	0,019262	0,008942	-0,015521	0,008880		

Контроль: $(\Sigma_1 - L_1)\tau_1 + (\Sigma_2 - L_2)\tau_2 + (\Sigma_3 - L_3)\tau_3 + (\Sigma_4 - L_4)\tau_4 + [L] = 0{,}021456.$

4. Обчислення зрівноважених значень виміряних кутів та координат пунктів

4.1) обчислення поправок до виміряних кутів за параметричними рівняннями поправок (див. два додаткових стовпці схеми 2).

4.2) обчислення зрівноважених значень виміряних кутів: $\tilde{\beta}_i = \beta_i + v_i$;

№ виміру	β_i	v_i	$\tilde{\beta}_i$
1	64 ° 36 ′ 00,9 ″	-2,1 ″	64 ° 35 ′ 58,8 ″
2	65 ° 53 ′ 45,2 ″	-2,8 ″	65 ° 53 ′ 42,4 ″
3	49 ° 30 ′ 19,3 ″	-0,5 ″	49 ° 30 ′ 18,8 ″
∑	180 ° 00 ′ 05,4 ″	-5,4 ″	180 ° 00 ′ 00,0 ″
4	55 ° 19 ′ 45,2 ″	2,0 ″	55 ° 19 ′ 47,2 ″
5	55 ° 12 ′ 15,1 ″	1,7 ″	55 ° 12 ′ 16,8 ″
6	69 ° 27 ′ 52,6 ″	3,4 ″	69 ° 27 ′ 56,0 ″
∑	179 ° 59 ′ 52,9 ″	7,1 ″	180 ° 00 ′ 00,0 ″
7	33 ° 44 ′ 19,4 ″	-2,8 ″	33 ° 44 ′ 16,6 ″
8	103 ° 13 ′ 43,4 ″	-2,1 ″	103 ° 13 ′ 41,3 ″
9	43 ° 02 ′ 01,7 ″	0,4 ″	43 ° 02 ′ 02,1 ″
∑	180 ° 00 ′ 04,5 ″	-4,5 ″	180 ° 00 ′ 00,0 ″

4.3) обчислення зрівноважених значень координат пунктів: $t_j = t_j^{\circ} + \tau_j$:

Координати пунктів	t_j° *(м)*	τ_j *(м)*	t_j *(м)*
$X_D = t_1$	623,360	0,0193	623,3793
$Y_D = t_2$	-1393,272	0,0089	-1393,2631
$X_C = t_3$	-897,701	-0,0155	-897,7165
$Y_C = t_4$	-1488,183	0,0089	-1488,1741

4.4) контроль зрівноважування кутів та координат пунктів: виконується обчисленням за зрівноваженими координатами дирекційних кутів сторін, а за ними – зрівноважених значень виміряних кутів. Обчислені таким чином кути повинні дорівнювати їх значенням, які пораховані за поправками v_i:

$$\tilde{\alpha}_1 = 229°30'18.8''; \qquad \tilde{\alpha}_2 = 294°06'17.6'';$$

$$\tilde{\alpha}_3 = 183°34'13.6''; \qquad \tilde{\alpha}_4 = 238°54'00.8''; \qquad \tilde{\alpha}_5 = 281°56'02.9''.$$

$\tilde{\beta}_1 = \tilde{\alpha}_2 - \tilde{\alpha}_1 = 64°35'58{,}8''$; $\qquad \tilde{\beta}_2 = \alpha_{OA} - \tilde{\alpha}_2 = 65°53'42{,}4''$;

$\tilde{\beta}_3 = \tilde{\alpha}_1 - \alpha_{AO} = 49°30'18{,}8''$; $\qquad \tilde{\beta}_4 = \tilde{\alpha}_4 - \tilde{\alpha}_3 = 55°19'47{,}2''$;

$\tilde{\beta}_5 = \tilde{\alpha}_2 - \tilde{\alpha}_4 = 55°12'16{,}8''$; $\qquad \tilde{\beta}_6 = \tilde{\alpha}_3 - (\tilde{\alpha}_2 \pm 180°) = 69°27'56{,}0''$;

$\tilde{\beta}_7 = \alpha_{BO} - \tilde{\alpha}_5 = 33°44'16{,}6''$; $\qquad \tilde{\beta}_8 = \tilde{\alpha}_4 - \alpha_{OB} = 103°13'41{,}3''$;

$\tilde{\beta}_9 = \tilde{\alpha}_5 - \tilde{\alpha}_4 = 43°02'02{,}1''$.

Контроль зрівноважених кутів можна виконати також шляхом обчислення нев'язок трикутників, як це показано у останній таблиці: нев'язки трикутників, обчислені за зрівноваженими кутами, повинні дорівнювати нулю.

5. Оцінка точності за результатами зрівноважування

5.1) обчислення середньої квадратичної похибки окремого результату виміру кута за формулою Бесселя вигляду (3.2.42):

$$m=\sqrt{\frac{[v^2]}{n-k}}=\sqrt{\frac{43.3708}{9-4}}=\pm\,2{,}9\,''.$$

5.2) оцінка точності параметрів (зрівноважених значень координат пунктів).

5.2.1) обчислення вагових коефіцієнтів способом Ганзена:

$$Q_{44}=\frac{1}{N_{44}^{(3)}}=0{,}0000603; \qquad Q_{43}=E_{34}Q_{44}=0{,}0000190;$$

$$Q_{42}=E_{23}Q_{43}+E_{24}Q_{44}=0{,}0000267;$$

$$Q_{41}=E_{12}Q_{42}+E_{13}Q_{43}+E_{14}Q_{44}=\text{-}0{,}0000235.$$

Контроль: $(\Sigma_1-L_1)Q_{41}+(\Sigma_2-L_2)Q_{42}+(\Sigma_3-L_3)Q_{43}+(\Sigma_4-L_4)Q_{44}=1{,}001365.$

$$Q_{34}=Q_{43}=0{,}0000190; \qquad Q_{33}=E_{34}Q_{34}+\frac{1}{N_{33}^{(2)}}=0{,}0000437;$$

$$Q_{32}=E_{23}Q_{33}+E_{24}Q_{34}=0{,}0000210;$$

$$Q_{31}=E_{12}Q_{32}+E_{13}Q_{33}+E_{14}Q_{34}=0{,}0000011.$$

Контроль: $(\Sigma_1-L_1)Q_{31}+(\Sigma_2-L_2)Q_{32}+(\Sigma_3-L_3)Q_{33}+(\Sigma_4-L_4)Q_{34}=0{,}997477.$

$$Q_{24}=Q_{42}=0{,}0000267; \qquad Q_{23}=Q_{32}=0{,}0000210;$$

$$Q_{22}=E_{23}Q_{23}+E_{24}Q_{24}+\frac{1}{N_{22}^{(1)}}=0{,}0000351;$$

$$Q_{21}=E_{12}Q_{22}+E_{13}Q_{23}+E_{14}Q_{24}=\text{-}0{,}0000077.$$

Контроль: $(\Sigma_1-L_1)Q_{21}+(\Sigma_2-L_2)Q_{22}+(\Sigma_3-L_3)Q_{23}+(\Sigma_4-L_4)Q_{24}=0{,}996119.$

$$Q_{14}=Q_{41}=\text{-}0{,}0000235; \quad Q_{13}=Q_{31}=0{,}0000011; \quad Q_{12}=Q_{21}=\text{-}0{,}0000077;$$

$$Q_{11}=E_{12}Q_{12}+E_{13}Q_{13}+E_{14}Q_{14}+\frac{1}{N_{11}}=0{,}0000289.$$

Контроль: $(\Sigma_1-L_1)Q_{11}+(\Sigma_2-L_2)Q_{12}+(\Sigma_3-L_3)Q_{13}+(\Sigma_4-L_4)Q_{14}=0{,}985143.$

5.2.2) обчислення середніх квадратичних похибок параметрів:

$$M_{X_D}=m\sqrt{Q_{11}}=\pm\,0{,}0158\ \text{м}; \qquad M_{Y_D}=m\sqrt{Q_{22}}=\pm\,0{,}0175\ \text{м};$$

$$M_{X_C}=m\sqrt{Q_{33}}=\pm\,0{,}0195\ \text{м}; \qquad M_{Y_C}=m\sqrt{Q_{44}}=\pm\,0{,}0229\ \text{м}.$$

5.3) оцінка точності функцій параметрів (довжини сторони *DC*). Довжина сторони $\tilde{S}_{DC}$ виражається функцією параметрів вигляду

$$\tilde{S}_{DC}=F(t_1,t_2,t_3,t_4)=\sqrt{(t_3-t_1)^2+(t_4-t_2)^2}\ .$$

Частинні похідні функції за параметрами t_j :

$$\left(\frac{\partial F}{\partial t_1}\right)_\circ = F_1 = -\cos\alpha_3^\circ = 0{,}998059; \quad \left(\frac{\partial F}{\partial t_2}\right)_\circ = F_2 = -\sin\alpha_3^\circ = 0{,}062277;$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial t_3}\right)_\circ = F_3 = \cos\alpha_3^\circ = \text{-}0{,}998059; \quad \left(\frac{\partial F}{\partial t_4}\right)_\circ = F_4 = \sin\alpha_3^\circ = \text{-}0{,}062277.$$

Обернена вага функції обчислюється за формулою (3.2.76):

$$\frac{1}{P_F} = F_1F_1Q_{11} + 2F_1F_2Q_{12} + 2F_1F_3Q_{13} + 2F_1F_4Q_{14} + F_2F_2Q_{22} + 2F_2F_3Q_{23} + 2F_2F_4Q_{24} +$$

$$+ F_3F_3Q_{33} + 2F_3F_4Q_{34} + F_4F_4Q_{44} = 0{,}000072.$$

Наостанку середня квадратична помилка довжини сторони DC

$$M_F = m\sqrt{\frac{1}{P_F}} = \pm 0{,}025 \ (\textit{м}) \ \text{ і } \ \tilde{S}_{DC} = 1524{,}054 \pm 0{,}025 \ (\textit{м}).$$

Послідовність та результати зрівноважування мережі у матричній формі

1. Формування системи параметричних рівнянь поправок

Параметричні рівняння складено у попередньому прикладі. Система рівнянь у матричній формі має вигляд $\underset{9\times1}{V} = \underset{9\times4}{A}\cdot \underset{4\times1}{\tau} + \underset{9\times1}{l}$, де

$$\underset{9\times4}{A} = \begin{pmatrix} 37 & 128 & 0 & 0 \\ -123 & -55 & 0 & 0 \\ 86 & -73 & 0 & 0 \\ 8 & -135 & 94 & 74 \\ 123 & 55 & -102 & 61 \\ -131 & 80 & 8 & -135 \\ 0 & 0 & -66 & -14 \\ 0 & 0 & 102 & -61 \\ 0 & 0 & -36 & 75 \end{pmatrix}; \qquad \underset{9\times1}{l} = \begin{pmatrix} -4.0 \\ 0.1 \\ -1.5 \\ 3.9 \\ -3.3 \\ 6.5 \\ -3.7 \\ 0 \\ -0.8 \end{pmatrix}.$$

2. Формування системи нормальних рівнянь поправок

$$\left.\begin{aligned} N_{11}\tau_1 + N_{12}\tau_2 + N_{13}\tau_3 + N_{14}\tau_4 + L_1 = 0 \\ N_{21}\tau_1 + N_{22}\tau_2 + N_{23}\tau_3 + N_{24}\tau_4 + L_2 = 0 \\ N_{31}\tau_1 + N_{32}\tau_2 + N_{33}\tau_3 + N_{34}\tau_4 + L_3 = 0 \\ N_{41}\tau_1 + N_{42}\tau_2 + N_{43}\tau_3 + N_{44}\tau_4 + L_4 = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{або} \quad \underset{4\times4}{N}\cdot \underset{4\times1}{\tau} + \underset{4\times1}{L} = 0.$$

$$\underset{4\times4}{N} = \underset{4\times9}{A^T}\cdot \underset{9\times4}{A}, \quad \underset{4\times1}{L} = \underset{4\times9}{A^T}\cdot \underset{9\times1}{l}:$$

$$\underset{4\times4}{N}=\begin{pmatrix}56248 & 428 & -12842 & 25780\\ 428 & 52388 & -17660 & -17435\\ -12842 & -17660 & 35360 & -8344\\ 25780 & -17435 & -8344 & 36964\end{pmatrix};\qquad \underset{4\times1}{L}=\begin{pmatrix}-15155\\ -5960\\ 10282\\ -7984\end{pmatrix}.$$

Система нормальних рівнянь поправок має вигляд

$$\begin{pmatrix}56248 & 428 & -12842 & 25780\\ 428 & 52388 & -17660 & -17435\\ -12842 & -17660 & 35360 & -8344\\ 25780 & -17435 & -8344 & 36964\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\tau_1\\ \tau_2\\ \tau_3\\ \tau_4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-15155\\ -5960\\ 10282\\ -7984\end{pmatrix}=0.$$

3. Розв'язування системи нормальних рівнянь поправок

Розв'язування системи нормальних рівнянь здійснюється за формулою $\underset{4\times1}{\tau}=-\underset{4\times4}{Q}\cdot\underset{4\times1}{L}$, де $\underset{4\times4}{Q}=\underset{4\times4}{N}^{-1}$:

$$\underset{4\times4}{Q}=\begin{pmatrix}289 & -77 & 11 & -235\\ -77 & 351 & 210 & 267\\ 11 & 210 & 437 & 190\\ -235 & 267 & 190 & 603\end{pmatrix}\times10^{-7};$$

$$\underset{4\times1}{\tau}=-\begin{pmatrix}289 & -77 & 11 & -235\\ -77 & 351 & 210 & 267\\ 11 & 210 & 437 & 190\\ -235 & 267 & 190 & 603\end{pmatrix}\times10^{-7}\times\begin{pmatrix}-15155\\ -5960\\ 10282\\ -7984\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.019262\\ 0.008942\\ -0.015521\\ 0.008880\end{pmatrix}.$$

Контроль розв'язку:

1) $\underset{4\times4}{N}\cdot\underset{4\times4}{Q}=\underset{4\times4}{E}$:

$$\begin{pmatrix}56248 & 428 & -12842 & 25780\\ 428 & 52388 & -17660 & -17435\\ -12842 & -17660 & 35360 & -8344\\ 25780 & -17435 & -8344 & 36964\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}289 & -77 & 11 & -235\\ -77 & 351 & 210 & 267\\ 11 & 210 & 437 & 190\\ -235 & 267 & 190 & 603\end{pmatrix}\times10^{-7}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix};$$

2) $\underset{4\times4}{N}\cdot\underset{4\times1}{\tau}+\underset{4\times1}{L}=0$:

$$\begin{pmatrix}56248 & 428 & -12842 & 25780\\ 428 & 52388 & -17660 & -17435\\ -12842 & -17660 & 35360 & -8344\\ 25780 & -17435 & -8344 & 36964\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0.019262\\ 0.008942\\ -0.015521\\ 0.008880\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-15155\\ -5960\\ 10282\\ -7984\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.023234\\ -0.024308\\ 0.004396\\ 0.018134\end{pmatrix}.$$

4. Обчислення зрівноважених значень виміряних кутів та координат пунктів

4.1) обчислення поправок до виміряних кутів $\underset{9\times1}{V} = \underset{9\times4}{A} \cdot \underset{4\times1}{\tau} + \underset{9\times1}{l}$:

$$\underset{9\times1}{V} = \begin{pmatrix} 37 & 128 & 0 & 0 \\ -123 & -55 & 0 & 0 \\ 86 & -73 & 0 & 0 \\ 8 & -135 & 94 & 74 \\ 123 & 55 & -102 & 61 \\ -131 & 80 & 8 & -135 \\ 0 & 0 & -66 & -14 \\ 0 & 0 & 102 & -61 \\ 0 & 0 & -36 & 75 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0.019262 \\ 0.008942 \\ -0.015521 \\ 0.008880 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4.0 \\ 0.1 \\ -1.5 \\ 3.9 \\ -3.3 \\ 6.5 \\ -3.7 \\ 0 \\ -0.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.1427 \\ -2.7610 \\ -0.4963 \\ 2.0450 \\ 1.6858 \\ 3.3692 \\ -2.7999 \\ -2.1248 \\ 0.4248 \end{pmatrix}.$$

4.2) обчислення зрівноважених значень виміряних кутів $\underset{9\times1}{\tilde{\beta}} = \underset{9\times1}{\beta} + \underset{9\times1}{V}$:

$$\underset{9\times1}{\tilde{\beta}} = \begin{pmatrix} 64^\circ36'00.9'' \\ 65^\circ53'45.2'' \\ 49^\circ30'19.3'' \\ 55^\circ19'45.2'' \\ 55^\circ12'15.1'' \\ 69^\circ27'52.6'' \\ 33^\circ44'19.4'' \\ 103^\circ13'43.4'' \\ 43^\circ02'01.7'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2.1'' \\ -2.8'' \\ -0.5'' \\ 2.0'' \\ 1.7'' \\ 3.4'' \\ -2.8'' \\ -2.1'' \\ 0.4'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 64^\circ35'58.8'' \\ 65^\circ53'42.4'' \\ 49^\circ30'18.8'' \\ 55^\circ19'47.2'' \\ 55^\circ12'16.8'' \\ 69^\circ27'56.0'' \\ 33^\circ44'16.6'' \\ 103^\circ13'41.3'' \\ 43^\circ02'02.1'' \end{pmatrix}.$$

4.3) обчислення зрівноважених значень параметрів $\underset{4\times1}{t} = \underset{4\times1}{t^\circ} + \underset{4\times1}{\tau}$:

$$\underset{4\times1}{t} = \begin{pmatrix} 623.360 \\ -1393.272 \\ -897.701 \\ -1488.183 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.0193 \\ 0.0089 \\ -0.0155 \\ 0.0089 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 623.3793 \\ -1393.2631 \\ -897.7165 \\ -1488.1741 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_D \\ Y_D \\ X_C \\ Y_C \end{pmatrix}.$$

5. Оцінка точності за результатами зрівноважування

5.1) обчислення середньої квадратичної похибки результату виміру кута за формулою Бесселя $m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-k}}$, де $[v^2] = \underset{1\times9}{V^T} \cdot \underset{9\times1}{V} = 43{,}3708$: $m = \pm 2{,}9''$.

5.2) оцінка точності параметрів (зрівноважених значень координат пунктів). Середня квадратична помилка будь-якої оцінюваної величини за результатами зрівноважування рівноточних результатів вимірів виражається помилкою результатів вимірів та вагою оцінюваної величини. Обернені ваги параметрів дорівнюють діагональним елементам вагової матриці $\underset{k\times k}{Q}$ з відповідними індексами j. Інші елементи матриці виражають залежність між зрівноваженими значеннями параметрів. Загалом результатом оцінки точності параметрів є визначення кореляційної матриці $\underset{k\times k}{M^2} = m^2 \cdot \underset{k\times k}{Q}$ та коефіцієнтів кореляції $r_{ij} = \dfrac{Q_{ij}}{\sqrt{Q_{ii}Q_{jj}}}$ між потрібними параметрами t_i та t_j.

Для даного завдання $$\underset{4\times 4}{M^2} = 8.6742 \times \begin{pmatrix} 289 & -77 & 11 & -235 \\ -77 & 351 & 210 & 267 \\ 11 & 210 & 437 & 190 \\ -235 & 267 & 190 & 603 \end{pmatrix} \times 10^{-7} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2.50 & -0.67 & 0.09 & -2.04 \\ -0.67 & 3.05 & 1.83 & 2.31 \\ 0.09 & 1.83 & 3.79 & 1.65 \\ -2.04 & 2.31 & 1.65 & 5.23 \end{pmatrix} \times 10^{-4}.$$ На головній діагоналі матриці розташовані значення квадратів похибок параметрів з відповідними індексами. Середні квадратичні похибки параметрів:

$$M_{t_1} = M_{X_D} = \pm\, 0{,}0158\ м; \qquad M_{t_2} = M_{Y_D} = \pm\, 0{,}0175\ м;$$

$$M_{t_3} = M_{X_C} = \pm\, 0{,}0195\ м; \qquad M_{t_4} = M_{Y_C} = \pm\, 0{,}0229\ м.$$

5.3) оцінка точності функцій параметрів (довжини сторони *DC*).

Обернена вага функції $F(t_1, t_2, t_3, t_4) = \sqrt{(t_3 - t_1)^2 + (t_4 - t_2)^2} = \widetilde{S}_{DC}$ виражається формулою $\dfrac{1}{P_F} = \underset{1\times 4}{F} \cdot \underset{4\times 4}{Q} \cdot \underset{4\times 1}{F^T}$, де матриця $\underset{1\times 4}{F} = \begin{pmatrix} F_1 & F_2 & F_3 & F_4 \end{pmatrix}$ утворена значеннями частинних похідних $F_j = \left(\dfrac{\partial F}{\partial t_j}\right)_{\circ}$:

$$\frac{1}{P_F} = \begin{pmatrix} 0.998059 & 0.062277 & -0.998059 & -0.062277 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 289 & -77 & 11 & -235 \\ -77 & 351 & 210 & 267 \\ 11 & 210 & 437 & 190 \\ -235 & 267 & 190 & 603 \end{pmatrix} \times 10^{-7} \times \begin{pmatrix} 0.998059 \\ 0.062277 \\ -0.998059 \\ -0.062277 \end{pmatrix} = 0.00007$$

Середня квадратична помилка функції

$$M_F = m\sqrt{\frac{1}{P_F}} = \pm 0{,}025\ (\ м\ ) \text{ і } \widetilde{S}_{DC} = 1524{,}054 \pm 0{,}025\ (\ м\ ).$$

Питання для самостійної роботи

1. Які виміри називають необхідними та надлишковими?
2. Зміст завдання сумісної обробки результатів вимірів багатьох величин.
3. В чому полягає принцип найменших квадратів?
4. Зміст завдання зрівноважування вимірів параметричним способом.
6. Правила складання параметричного рівняння поправки до результату виміру. Види параметричних рівнянь поправок.
7. Обчислення і контроль коефіцієнтів та вільних членів нормальних рівнянь поправок.
11. Схема обчислення коефіцієнтів та вільних членів нормальних рівнянь.
12. Розв’язування системи нормальних рівнянь поправок у матричній формі.
13. Розв’язування системи нормальних рівнянь поправок способом Гаусса.
14. Як скласти рівняння еквівалентної системи?
15. Способи контролю розв’язування системи нормальних рівнянь поправок.
18. Обчислення та контроль поправок до результатів вимірів.
19. Обчислення зрівноважених значень результатів вимірів і параметрів.
22. Обчислення СКП одиниці ваги та результатів вимірів.
23. Обчислення ваг та оцінка точності параметрів.
25. Що називають ваговими коефіцієнтами?
26. Обчислення вагових коефіцієнтів у схемі Гаусса-Дулітля.
27. Обчислення вагових коефіцієнтів способом Ганзена та Енке.
28. Способи обчислення ваг та оцінка точності функцій параметрів.

РОЗПОДІЛ БАЛІВ,
що присвоюються студентам за виконання практичних робіт на тему:

№ з/п	Назви завдань	Кількість балів	
		Практичні заняття	Тести
1	Формування системи параметричних рівнянь поправок	2	2
2	Розв’язування системи нормальних рівнянь поправок у схемі Гаусса-Дулітля	2	2
3	Обчислення зрівноважених значень виміряних величин	1	2
4	Оцінка точності за результатами зрівноважування: ч.1	1	2
5	Оцінка точності за результатами зрівноважування: ч.2	1	1

ПЕРЕЛІК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Войтенко С.П. Математична обробка геодезичних вимірів. Метод найменших квадратів: Навчальний посібник. – К.: КНУБА, 2005. – 236 с.
2. Зазуляк П.М., Гавриш В.І., Євсєєва Е.М., Йосипчук М.Д. Основи математичного опрацювання геодезичних вимірювань: Підручник. – Львів: Растр-7, 2007. – 408 с.
3. Гайдаев П.А., Большаков В.Д. Теория математической обработки геодезических измерений. М., Недра, 1969. – 367с.
4. Видуев Н.Г., Григоренко А.Г. Математическая обработка геодезических измерений. Киев, Высшая школа, 1978.
5. Мазмишвили А.И. Способ наименьших квадратов, М., Недра, 1968. – 437 с.
6. Большаков В.Д., Маркузе Ю.И., Голубев В.В. Уравнивание геодезических построений. М., Недра, 1989. – 413 с.

ДОДАТКИ

Додаток 1

Схема обчислення коефіцієнтів та вільних членів нормальних рівнянь поправок у параметричному способі зрівноважування.

№ вимірів	p_i	a_{i1}	a_{i2}	…	a_{ik}	l_i	s_i
1	p_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1k}	l_1	s_1
2	p_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2k}	l_2	s_2
…	…	…	…	…	…	…	…
n	p_n	a_{n1}	a_{n2}	…	a_{nk}	l_n	s_n
$[pa_1$		$[pa_1a_1]$	$[pa_1a_2]$	…	$[pa_1a_k]$	$[pa_1l]$	$[pa_1s]$
$[pa_2$			$[pa_2a_2]$	…	$[pa_2a_k]$	$[pa_2l]$	$[pa_2s]$
…			…	…	…	…	…
$[pa_k$					$[pa_ka_k]$	$[pa_kl]$	$[pa_ks]$
$[pl$						$[pll]$	$[pls]$
$[ps$							$[pss]$

Додаток 2

Схема Гаусса-Дулітля
(приклад розв'язування системи трьох нормальних рівнянь).

№	Позначення дій	τ_1	τ_2	τ_3	L	Σ	Примітка
		1	2	3			
1	N_{1i}	N_{11}	N_{12}	N_{13}	L_1	Σ_1	
2	E_1	-1	$-\frac{N_{12}}{N_{11}}$	$-\frac{N_{13}}{N_{11}}$	$-\frac{L_1}{N_{11}}$	$-\frac{\Sigma_1}{N_{11}}$	контроль
3	N_{2i}		N_{22}	N_{23}	L_2	Σ_2	
4	$N_{12}E_{1i}$		$N_{12}E_{12}$	$N_{12}E_{13}$	$N_{12}E_{1L}$	$N_{12}E_{1\Sigma}$	
5	$N_{2i}^{(1)}$		$N_{22}^{(1)}$	$N_{23}^{(1)}$	$L_2^{(1)}$	$\Sigma_2^{(1)}$	контроль
6	E_2		-1	$-\frac{N_{23}^{(1)}}{N_{22}^{(1)}}$	$-\frac{L_2^{(1)}}{N_{22}^{(1)}}$	$-\frac{\Sigma_2^{(1)}}{N_{22}^{(1)}}$	контроль
7	N_{3i}			N_{33}	L_3	Σ_3	
8	$N_{13}E_{1i}$			$N_{13}E_{13}$	$N_{13}E_{1L}$	$N_{13}E_{1\Sigma}$	
9	$N_{23}^{(1)}E_{2i}$			$N_{23}^{(1)}E_{23}$	$N_{23}^{(1)}E_{2L}$	$N_{23}^{(1)}E_{2\Sigma}$	
10	$N_{3i}^{(2)}$			$N_{33}^{(2)}$	$L_3^{(2)}$	$\Sigma_3^{(2)}$	контроль
11	E_3			-1	$-\frac{L_3^{(2)}}{N_{33}^{(2)}}$	$-\frac{\Sigma_3^{(2)}}{N_{33}^{(2)}}$	контроль
12	N_{4i}				$[pll]$	Σ_4	
13	L_1E_{1i}				L_1E_{1L}	$L_1E_{1\Sigma}$	
14	$L_2^{(1)}E_{2i}$				$L_2^{(1)}E_{2L}$	$L_2^{(1)}E_{2\Sigma}$	
15	$L_3^{(2)}E_{3i}$				$L_3^{(2)}E_{3L}$	$L_3^{(2)}E_{3\Sigma}$	
16	$N_{4i}^{(3)}$				$N_{44}^{(3)}$	$\Sigma_4^{(3)}$	контроль
17	τ_3			$\tau_3 =$	E_{3L}		
18	τ_2		$\tau_2 =$	$E_{23}\cdot\tau_3$	E_{2L}		
19	τ_1	$\tau_1 =$	$E_{12}\cdot\tau_2$	$E_{13}\cdot\tau_3$	E_{1L}		

Додаток 3

Вихідні дані до завдання 1

№ варіанту студента	№ ходів						Оцінити точність	
	1	2	3	4	5	6	перевищення h	висоти репера H
	Перевищення h_i *(м)*							
	6.125	8.320	5.580	1.368	-0.905	6.944		
	Довжини ходів S_i *(км)*							
1	8,4	13,1	22,8	5,9	5,5	11,1	1	D
2	8,5	13,1	22,6	5,9	6,5	11,1	2	E
3	8,6	13,1	22,4	5,9	7,5	11,1	3	F
4	8,7	13,1	22,2	5,9	8,5	11,1	4	E
5	8,8	13,1	22,0	5,9	9,5	11,1	5	F
6	8,9	13,1	21,8	5,9	10,5	11,1	6	D
7	9,0	13,1	21,6	5,9	11,5	11,1	1	F
8	9,1	13,1	21,4	5,9	12,5	11,1	2	D
9	9,2	13,1	21,2	5,9	13,5	11,1	3	E
10	9,3	13,1	21,0	5,9	14,5	11,1	4	D
11	9,4	13,1	20,8	5,9	15,5	11,1	5	E
12	9,5	13,1	20,6	5,9	16,5	11,1	6	F
13	9,6	13,1	20,4	5,9	17,5	11,1	1	E
14	9,7	13,1	20,2	5,9	18,5	11,1	2	F
15	9,8	13,1	20,0	5,9	19,5	11,1	3	D
16	9,9	13,1	19,8	5,9	20,5	11,1	4	F
17	10,0	13,1	19,6	5,9	19,0	11,1	5	D
18	10,1	13,1	19,4	5,9	18,0	11,1	6	E
19	10,2	13,1	19,2	5,9	17,0	11,1	1	D
20	10,3	13,1	19,0	5,9	16,0	11,1	2	E
21	10,4	13,1	18,8	5,9	15,0	11,1	3	F
22	10,5	13,1	18,6	5,9	14,0	11,1	4	E
23	10,6	13,1	18,4	5,9	13,0	11,1	5	F
24	10,7	13,1	18,2	5,9	12,0	11,1	6	D
25	10,8	13,1	18,0	5,9	11,0	11,1	1	F
26	10,9	13,1	17,8	5,9	10,0	11,1	2	D
27	11,0	13,1	17,6	5,9	9,0	11,1	3	E
28	11,1	13,1	17,4	5,9	8,0	11,1	4	D
29	11,2	13,1	17,2	5,9	7,0	11,1	5	E
30	11,3	13,1	17,0	5,9	6,0	11,1	6	F
31	11,4	13,1	16,8	5,9	5,0	11,1	1	E
32	11,5	13,1	16,6	5,9	5,2	11,1	2	F
33	11,6	13,1	16,4	5,9	5,4	11,1	3	D
34	11,7	13,1	16,2	5,9	5,6	11,1	4	F
35	11,8	13,1	16,0	5,9	5,8	11,1	5	D
36	11,9	13,1	15,8	5,9	6,0	11,1	6	E

Продовження таблиці додатку 3

37	12,0	13,1	15,6	5,9	6,2	11,1	1	D
38	12,1	13,1	15,4	5,9	6,4	11,1	2	E
39	12,2	13,1	15,2	5,9	6,6	11,1	3	F
40	12,3	13,1	15,0	5,9	6,8	11,1	4	E
41	12,4	13,1	14,8	5,9	7,0	11,1	5	F
42	12,5	13,1	14,6	5,9	7,2	11,1	6	D
43	12,6	13,1	14,4	5,9	7,4	11,1	1	F
44	12,7	13,1	14,2	5,9	7,6	11,1	2	D
45	12,8	13,1	14,0	5,9	7,8	11,1	3	E
46	12,9	13,1	13,8	5,9	8,0	11,1	4	D
47	13,0	13,1	13,6	5,9	8,2	11,1	5	E
48	13,1	13,1	13,4	5,9	8,4	11,1	6	F
49	13,2	13,1	13,2	5,9	8,6	11,1	1	E
50	13,3	13,1	13,0	5,9	8,8	11,1	2	F
51	13,4	13,1	12,8	5,9	9,0	11,1	3	D
52	13,5	13,1	12,6	5,9	9,2	11,1	4	F
53	13,6	13,1	12,4	5,9	9,4	11,1	5	D
54	13,7	13,1	12,2	5,9	9,6	11,1	6	E
55	13,8	13,1	12,0	5,9	9,8	11,1	1	D
56	13,9	13,1	11,8	5,9	10,0	11,1	2	E
57	14,0	13,1	11,6	5,9	10,4	11,1	3	F
58	14,1	13,1	11,4	5,9	10,8	11,1	4	E
59	14,2	13,1	11,2	5,9	11,2	11,1	5	F
60	14,3	13,1	11,0	5,9	11,6	11,1	6	D
61	14,4	13,1	10,8	5,9	12,0	11,1	1	F
62	14,5	13,1	10,6	5,9	12,4	11,1	2	D
63	14,6	13,1	10,4	5,9	12,8	11,1	3	E
64	14,7	13,1	10,2	5,9	13,2	11,1	4	D
65	14,8	13,1	10,0	5,9	13,6	11,1	5	E
66	14,9	13,1	9,8	5,9	14,0	11,1	6	F
67	15,0	13,1	9,6	5,9	14,4	11,1	1	E
68	15,1	13,1	9,4	5,9	14,8	11,1	2	F
69	15,2	13,1	9,2	5,9	15,2	11,1	3	D
70	15,3	13,1	9,0	5,9	15,6	11,1	4	F
71	15,4	13,1	8,8	5,9	16,0	11,1	5	D
72	15,5	13,1	8,6	5,9	16,4	11,1	6	E
73	15,6	13,1	8,4	5,9	16,8	11,1	1	D
74	15,7	13,1	8,2	5,9	17,2	11,1	2	E
75	15,8	13,1	8,0	5,9	17,6	11,1	3	F
76	15,9	13,1	7,8	5,9	18,0	11,1	4	E
77	16,0	13,1	7,6	5,9	18,4	11,1	5	F
78	16,1	13,1	7,4	5,9	18,8	11,1	6	D
79	16,2	13,1	7,2	5,9	19,2	11,1	1	F
80	16,3	13,1	7,0	5,9	19,6	11,1	2	D

Додаток 4

Вихідні дані до завдання 2

Таблиця 1

Координати пунктів

Пункти	X (*м*)	Y (*м*)
A	1813,119	0
O	0	0
B	-1527,638	1492,213
	X° (*м*)	Y° (*м*)
D	623,360	-1393,272
C	-897,701	-1488,183

Таблиця 2

Результати вимірів кутів

№ варіанту студента	Результати вимірів кутів								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	64°36′	65°53′	49°30′	55°19′	55°12′	69°27′	33°44′	103°13′	43°02′
1	02,0″	45,2″	19,3″	45,2″	15,1″	52,6″	19,4″	43,4″	00,5″
2	00,9	43,0	19,3	45,2	15,1	52,6	19,4	45,0	01,7
3	00,9	45,2	18,1	45,2	15,1	52,6	20,5	43,4	01,7
4	01,5	45,2	19,3	47,0	15,1	52,6	19,4	43,4	01,7
5	00,9	46,1	19,3	45,2	17,6	52,6	19,4	43,4	01,7
6	00,9	45,2	19,0	45,2	15,1	54,3	19,4	43,4	01,7
7	00,7	45,2	19,3	45,2	15,1	52,6	18,0	43,4	01,7
8	00,9	44,8	19,3	45,2	15,1	52,6	19,4	42,0	01,7
9	00,9	45,2	21,1	45,2	15,1	52,6	19,4	43,4	03,1
10	00,1	45,2	19,3	45,2	15,1	52,6	18,8	43,4	01,7
11	00,9	44,0	19,3	45,2	15,1	52,6	19,4	46,0	01,7
12	00,9	45,2	20,0	45,2	15,1	52,6	19,4	43,4	02,0
13	03,0	45,2	19,3	45,2	15,1	52,6	19,4	44,6	01,7
14	00,9	47,0	19,3	45,2	15,1	52,6	19,4	43,4	00,1
15	00,9	46,8	18,7	45,2	15,1	52,6	19,4	45,2	01,1
16	00,9	47,3	19,3	45,2	15,1	52,6	19,4	43,4	05,0
17	00,5	45,2	19,3	45,2	15,1	52,6	19,4	43,4	02,0
18	00,9	45,0	19,3	45,2	15,1	52,6	19,4	43,0	01,7
19	00,9	45,2	16,3	45,2	15,1	52,6	21,3	43,4	01,7
20	02,5	45,2	19,3	44,6	15,1	52,6	19,4	43,4	01,7
21	00,9	43,5	19,3	45,2	16,8	52,6	19,4	43,4	01,7
22	00,9	45,2	17,7	45,2	15,1	53,5	19,4	43,4	01,7
23	01,6	45,2	19,3	45,2	15,1	52,6	19,6	43,4	01,7
24	00,9	44,3	19,3	45,2	15,1	52,6	19,4	43,6	01,7
25	00,9	45,2	19,8	45,2	15,1	52,6	19,4	43,4	01,2

Продовження таблиці 2

26	02,6	45,2	19,3	45,2	15,1	52,6	20,5	43,4	01,7
27	00,9	42,1	19,3	45,2	15,1	52,6	19,4	45,2	01,7
28	00,9	45,2	18,6	45,2	15,1	52,6	19,4	43,4	03,5
29	03,5	45,2	19,3	45,2	15,1	52,6	19,4	44,0	01,7
30	00,9	46,5	19,3	45,2	15,1	52,6	19,4	43,4	04,3
31	01,4	45,2	19,3	45,2	15,1	52,6	19,4	43,4	02,8
32	00,9	44,5	19,3	45,2	15,1	52,6	19,4	44,8	01,7
33	00,9	45,2	17,3	45,2	15,1	52,6	22,0	43,4	01,7
34	00,9	46,8	19,3	50,0	15,1	52,6	19,4	43,4	01,7
35	03,5	45,2	19,3	45,2	18,6	52,6	19,4	43,4	01,7
36	00,9	45,2	19,0	45,2	15,1	52,2	19,4	43,4	01,7
37	00,7	45,2	19,3	45,2	15,1	52,6	20,8	43,4	01,7
38	00,9	43,6	19,3	45,2	15,1	52,6	19,4	45,0	01,7
39	00,9	45,2	20,4	45,2	15,1	52,6	19,4	43,4	02,1
40	03,6	45,2	19,3	45,2	15,1	52,6	22,9	43,4	01,7
41	00,9	43,6	19,3	45,2	15,1	52,6	19,4	42,8	01,7
42	00,9	45,2	21,1	45,2	15,1	52,6	19,4	43,4	04,0
43	02,6	45,2	19,3	45,2	15,1	52,6	19,4	46,0	01,7
44	00,9	47,3	19,3	45,2	15,1	52,6	19,4	43,4	05,0
45	00,1	45,2	19,3	44,5	15,1	52,6	20,0	43,4	01,7
46	00,9	44,0	19,3	45,2	16,8	52,6	19,4	43,9	01,7
47	00,9	45,2	18,8	45,2	15,1	54,0	19,4	43,4	03,5
48	02,3	45,2	19,3	46,8	15,1	52,6	17,8	43,4	01,7
49	00,9	47,5	19,3	45,2	18,0	52,6	19,4	40,8	01,7
50	00,9	45,2	22,0	45,2	15,1	56,4	19,4	43,4	00,2
51	00,2	45,2	19,3	48,0	15,1	52,6	22,0	43,4	01,7
52	00,9	39,5	19,3	45,2	14,1	52,6	19,4	42,1	01,7
53	00,9	45,2	15,8	45,2	15,1	50,1	19,4	43,4	04,0
54	01,9	45,2	19,3	49,1	15,1	52,6	18,0	43,4	01,7
55	00,9	46,8	19,3	45,2	16,9	52,6	19,4	40,2	01,7
56	00,9	45,2	20,8	45,2	15,1	54,1	19,4	43,4	00,5
57	00,6	45,2	19,3	44,1	15,1	52,6	17,5	43,4	01,7
58	00,9	43,0	19,3	45,2	14,1	52,6	19,4	40,9	01,7
59	00,9	45,2	18,1	45,2	15,1	51,6	19,4	43,4	01,1
60	03,8	45,2	19,3	50,1	15,1	52,6	22,6	43,4	01,7
61	00,9	47,3	19,3	45,2	18,6	52,6	19,4	44,5	01,7
62	00,9	45,2	21,8	45,2	15,1	55,4	19,4	43,4	04,9
63	00,5	45,2	19,3	44,8	15,1	52,6	16,2	43,4	01,7
64	00,9	42,1	19,3	45,2	14,8	52,6	19,4	41,8	01,7
65	00,9	45,2	17,2	45,2	15,1	51,4	19,4	43,4	00,9
66	03,9	45,2	19,3	49,1	15,1	52,6	19,4	43,4	01,7
67	00,9	45,2	19,3	45,2	16,8	52,6	19,4	46,5	01,7
68	00,9	45,2	22,0	45,2	15,1	54,8	19,4	43,4	01,7
69	00,9	45,2	19,3	44,1	15,1	52,6	23,0	43,4	01,7

Продовження таблиці 2

70	00,9	44,3	19,3	45,2	16,0	52,6	19,4	43,4	01,7
71	00,9	45,2	19,3	45,2	15,1	57,5	19,4	43,4	02,9
72	03,1	45,2	19,3	45,2	15,1	52,6	18,0	43,4	01,7
73	00,9	43,8	19,3	45,2	15,1	52,6	19,4	46,0	01,7
74	00,9	45,2	21,4	45,2	15,1	52,6	19,4	43,4	00,7
75	00,9	45,2	19,3	47,3	15,1	52,6	21,1	43,4	01,7
76	00,9	45,2	19,3	45,2	19,1	52,6	19,4	47,3	01,7
77	00,9	45,2	19,3	45,2	15,1	54,7	19,4	43,4	05,0
78	00,9	45,2	18,1	45,2	15,1	52,6	20,5	43,4	01,7
79	00,1	45,2	19,3	45,2	15,1	52,6	19,4	43,4	02,9
80	00,9	45,2	21,3	45,2	15,1	52,6	19,4	44,4	01,7