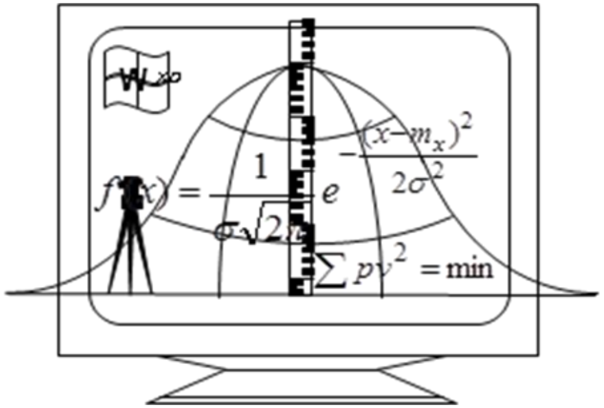
Національний університет
водного господарства
та природокористування



Кафедра геодезії та картографії

Спеціальність 193 “Геодезія та землеустрій”

Дисципліна **МАТЕМАТИЧНА ОБРОБКА ГЕОДЕЗИЧНИХ ВИМІРІВ**
Модуль 3 **МЕТОД НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ**

Лектор О.А. Тадєєв

Тема 3

ЗРІВНОВАЖУВАННЯ ВИМІРІВ КОРЕЛАТНИМ СПОСОБОМ

1. ЗАГАЛЬНА ТЕОРІЯ ТА ЧЕРГОВІСТЬ ДІЙ

1. *Формування системи умовних рівнянь поправок*
2. *Формування системи нормальних рівнянь корелат*
3. *Розв’язування системи нормальних рівнянь корелат*
4. *Обчислення зрівноважених результатів вимірів*

Корелатним способом зрівноважування за принципом найменших квадратів називають спосіб знаходження мінімуму функції $[pv^2]$ методом Лагранжа із застосуванням допоміжних множників незалежних умовних рівнянь.

Викладемо черговість дій під час зрівноважування вимірів у геодезичних мережах, опираючись на загальну теорію корелатного способу.

1. Формування системи умовних рівнянь поправок

Нехай проведено виміри n величин X_i $(i=\overrightarrow{1,n})$ і одержано результати вимірів x_i з вагами p_i. Допустимо, величини зв'язані між собою незалежними умовними рівняннями загального вигляду

$$\varphi_j(X_1,...,X_n)=0. \tag{3.1}$$

Кількість умовних рівнянь $j=\overrightarrow{1,r}$; r – число надлишкових виміряних величин.

Результати вимірів обтяжені похибками, тому умови рівнянь (3.1), складених за результатами вимірів x_i, не будуть дотримані:

$$\varphi_j(x_1,...,x_n)=W_j. \tag{3.2}$$

Величини W_j називаються нев'язки умовних рівнянь. Нев'язки W_j виражають істинні похибки умовних рівнянь і є наслідком впливу на результати похибок вимірів. У ході зрівноважування необхідно позбутись нев'язок. З цією метою потрібно виправити результати вимірів x_i відповідними поправками v_i таким чином, щоб зрівноважені значення $\tilde{x}_i=x_i+v_i$ задовольняли рівнянням (3.1):

$$\varphi_j(\tilde{x}_1,...,\tilde{x}_n)=0. \tag{3.3}$$

В геодезичній практиці умовні рівняння можуть мати нелінійний вигляд. З метою уніфікації розв'язку і забезпечення однозначного алгоритму, всі математичні умови, задані нелінійними формами, перетворюють до лінійного вигляду. Лінеаризацію нелінійних умов можна здійснити шляхом розкладу функцій (3.3) в ряд Тейлора. Враховуючи, що поправки v_i завжди малі порівняно з величинами x_i, без втрати точності розв'язку задачі у членах ряду достатньо брати до уваги лише перші похідні та перші степені поправок. Членами ряду другого і вище порядків, які виражають нелінійну складову, можна нехтувати. Отже,

$$\varphi_j(x_1+v_1,\ldots,x_n+v_n)=\varphi_j(x_1,\ldots,x_n)+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\right)_{\mathrm{o}}v_i \tag{3.4}$$

$$a_{j1}v_1+\ldots+a_{jn}v_n+W_j=0; \tag{3.5}$$

$$[a_j v]+W_j=0; \tag{3.6}$$

$$a_{ji}=\left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\right)_{\mathrm{o}}. \tag{3.7}$$

Однорідні лінійні рівняння (3.5) чи (3.6) називаються умовні рівняння поправок. Система r умовних рівнянь поправок у матричній формі має вигляд:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rn} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \ldots \\ v_n \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \ldots \\ W_r \end{pmatrix}=0 \tag{3.8}$$

або

$$\underset{r\times n}{A}\cdot\underset{n\times 1}{V}+\underset{r\times 1}{W}=0. \tag{3.9}$$

Формування системи умовних рівнянь поправок передбачає виконання наступних дій:

1) вираження зв'язків між виміряними величинами незалежними умовними рівняннями (3.1);

2) обчислення значень частинних похідних (3.7) і формування матриці $\underset{r\times n}{A}$ з коефіцієнтами a_{ji};

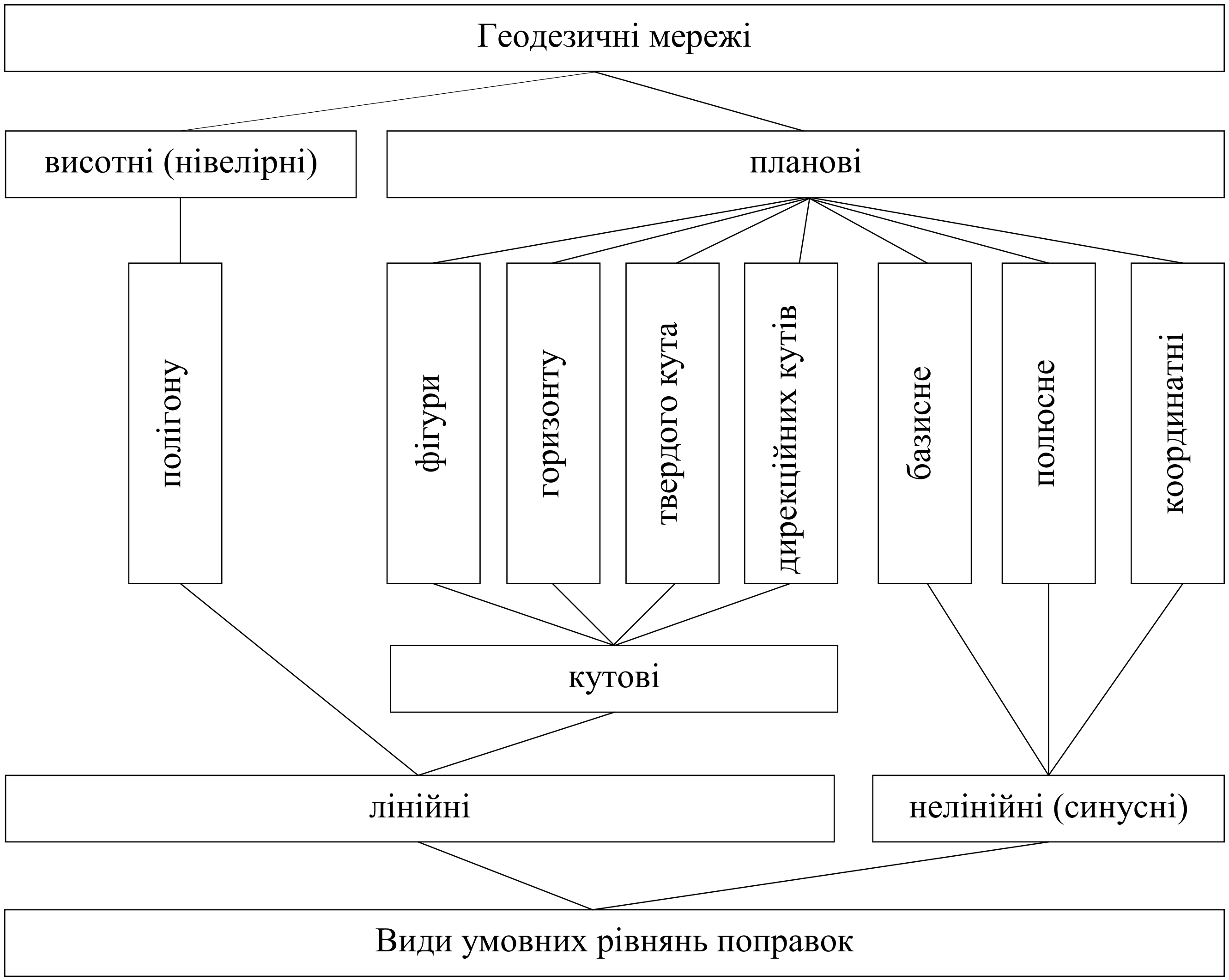
3)обчислення нев'язок умовних рівнянь (3.2);

4) складання умовних рівнянь поправок у лінійному вигляді (3.3.5) чи (3.3.9).

Умовні рівняння поправок – це однорідні лінійні рівняння, які навіть для різних за фізичним змістом виміряних величин різняться лише кількістю надлишкових виміряних величин, а також значеннями коефіцієнтів a_{ji} та вільних членів W_j, які цілком визначаються умовними рівняннями (3.1).

Якщо початкові математичні умови (3.3) виражаються лінійними рівняннями, то диференціювання (3.7) забезпечує значення коефіцієнтів a_{ji}, які дорівнюють ±1. Це свідчить про те, що лінеаризацію таких рівнянь виконувати немає потреби. Отже, лінійні умовні рівняння поправок можна складати лише за схемою мережі.

Класифікація видів умовних рівнянь поправок залежно від фізичного змісту вимірюваних величин у геодезичних мережах та форми зв'язку між ними:

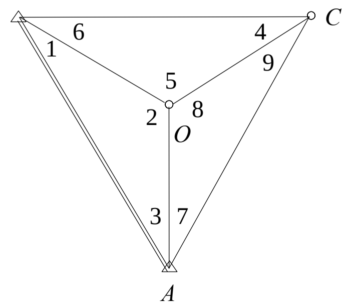


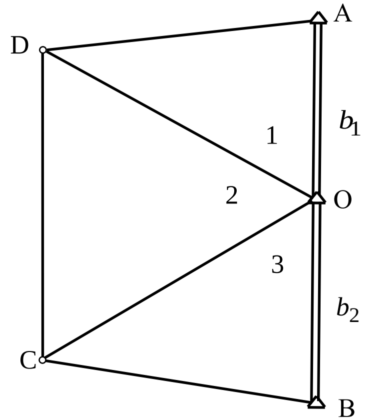
Види умовних рівнянь поправок

1. Умовні рівняння полігонів. Рівняння полігонів складають у нівелірних мережах для вибраних r незалежних замкнених чи розімкнених полігонів. Незалежними вважають такі полігони, серед яких жоден не був би комбінацією інших. Умовне рівняння полігону має загальний вигляд $\sum_{i\in j} \pm v_i + W_j = 0$, де $\sum_{i\in j} v_i$ - сума поправок до перевищень h_i вздовж тих ходів мережі, які утворюють полігон за номером j . Знак “+” перед поправкою ставлять тоді, коли напрями ходу і полігону співпадають; знак “–” – якщо їх напрями протилежні. Нев’язка $W_j = \sum_{i\in j} \pm h_i - (H_{кінц} - H_{поч})$, де $H_{поч}$ та $H_{кінц}$ - відмітки початкового та кінцевого реперів полігону. Для замкнених полігонів $H_{поч} = H_{кінц}$.

2. Умовні рівняння фігур. Істинні значення виміряних кутів плоского трикутника повинні задовольняти початковому умовному рівнянню зв’язку $X_1 + X_2 + X_3 - 180^{\circ} = 0$. Йому відповідає рівняння $v_1 + v_2 + v_3 + W = 0$, яке називається умовним рівнянням фігури. Нев’язка $W = x_1 + x_2 + x_3 - 180^{\circ}$; x_1, x_2, x_3 – результати вимірів кутів трикутника.

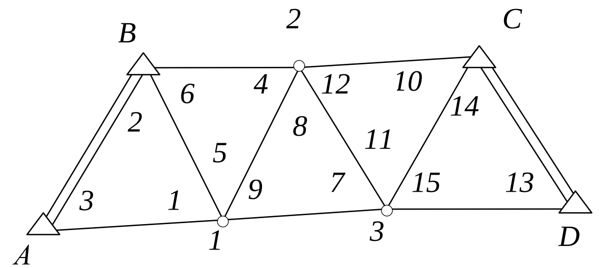
3. Умовні рівняння горизонту. Якщо в окремому пункті вимірювались усі кути, які мають спільні прилеглі сторони, то виникає умова $X_2 + X_5 + X_8 - 360^{\circ} = 0$. Відповідне рівняння має вигляд $v_2 + v_5 + v_8 + W = 0$, де нев’язка $W = x_2 + x_5 + x_8 - 360^{\circ}$.





4. Умовні рівняння твердого кута. В мережах тріангуляції з відомими сторонами, які мають спільні пункти, виникає умовне рівняння зв'язку $X_1 + X_2 + X_3 - \angle AOB = 0$. Відповідне рівняння поправок має вигляд $v_1 + v_2 + v_3 + W = 0$ і називається умовним рівнянням твердого кута, де нев'язка $W = x_1 + x_2 + x_3 - \angle AOB$.

5. Умовні рівняння дирекційних кутів. Якщо в мережах відомі дирекційні кути твердих сторін, які не мають спільних пунктів, то для них можна сформулювати таку умову: дирекційний кут кінцевої сторони $\alpha_{кінц}$, обчислений за дирекційним кутом початкової сторони $\alpha_{поч}$ та кутами мережі вздовж вибраного напряму ходової лінії, повинен дорівнювати його заданому значенню. Такій умові відповідає рівняння, яке називають умовним рівнянням дирекційних кутів.



Наприклад, для ланцюжка трикутників вздовж ходової лінії (*D*-*C*-*2*-*B*-*A*) рівняння має вигляд $v_2 + v_4 + v_6 + v_8 + v_{10} + v_{12} + v_{14} + W = 0$;

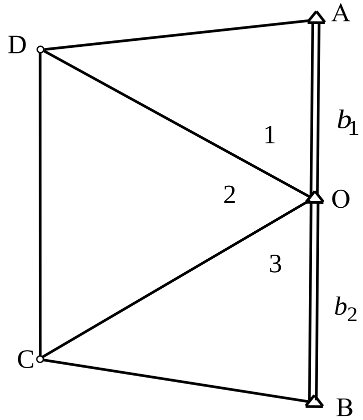
$W = \alpha_{CD} - \alpha_{BA} + x_2 + x_4 + x_6 + x_8 + x_{10} + x_{12} + x_{14} - 180^{\circ} \cdot k$, де $k = 2$ – число невідомих сторін ходової лінії.

Загальне число рівнянь дирекційних кутів мережі дорівнює числу її твердих дирекційних кутів, зменшеному на одиницю. За умови, що тверді сторони мають спільні пункти, замість умов дирекційних кутів для кожного з таких пунктів складають умовне рівняння твердого кута.

Умовні рівняння фігури, горизонту, твердого кута є окремими випадками рівняння **дирекційних кутів**. Початкові умови усіх цих рівнянь виражаються лінійними формами. Тому їх **називають лінійними кутовими рівняннями**.

6. Базисні умовні рівняння. Якщо в мережі тріангуляції визначені довжини двох твердих сторін (базисів), то для неї можна сформулювати таку умову: довжина кінцевої сторони b_2, обчислена за довжиною початкової сторони b_1 та кутами мережі вздовж вибраного напряму ходової лінії, має дорівнювати її заданому значенню. Такій умові відповідає рівняння, яке називають базисним умовним рівнянням. Число базисних рівнянь для окремої мережі дорівнює числу базисів, зменшеному на одиницю. Напрям ходової лінії встановлюють від вибраного початкового базису вздовж суміжних сторін ланцюжка трикутників до кінцевого базису. Вздовж лінії почергово, розпочинаючи з першого трикутника, за теоремою синусів виражають довжини усіх суміжних сторін, завершуючи кінцевим базисом у останньому трикутнику.

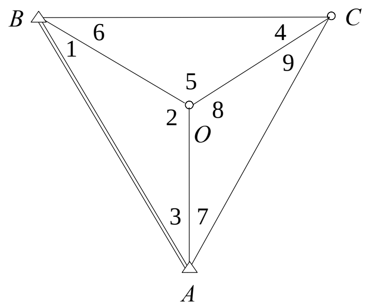
Наприклад, у мережі, яка зображена на малюнку, ходова лінія має напрям b_1-OD-OC-b_2. Сторони трикутників у цьому напрямі виражаються співвідношеннями $S_{OD} = b_1 \dfrac{\sin X_3}{\sin X_1}$; $S_{OC} = S_{OD} \dfrac{\sin X_6}{\sin X_4}$; $b_2 = S_{OC} \dfrac{\sin X_9}{\sin X_7}$. Об'єднавши всі співвідношення, отримаємо рівняння $b_2 = b_1 \dfrac{\sin X_3 \cdot \sin X_6 \cdot \sin X_9}{\sin X_1 \cdot \sin X_4 \cdot \sin X_7}$. Воно зв'язує вимірювані кути умовою $\varphi(X_1, \ldots, X_9) = \dfrac{b_1}{b_2} \cdot \dfrac{\sin X_3 \cdot \sin X_6 \cdot \sin X_9}{\sin X_1 \cdot \sin X_4 \cdot \sin X_7} - 1 = 0$ і називається базисним умовним рівнянням.

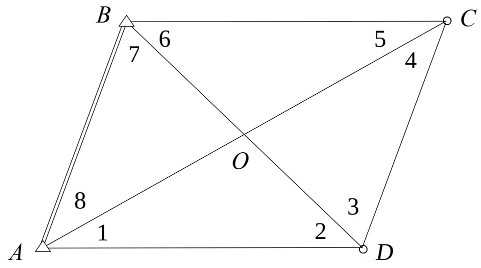


Відповідне йому рівняння поправок має загальну форму $\sum_{i=1}^{9} a_i \cdot v_i + W = 0$, де коефіцієнти $a_i = \left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)_{\text{o}}$; нев'язка

$$W = \frac{b_1}{b_2} \cdot \frac{\sin x_3 \cdot \sin x_6 \cdot \sin x_9}{\sin x_1 \cdot \sin x_4 \cdot \sin x_7} - 1.$$

7. Полюсні умовні рівняння. Такого виду умовні рівняння складають для мереж тріангуляції у вигляді замкненого ланцюжка трикутників навколо однієї вершини, яку називають полюсом, а також у вигляді геодезичного чотирикутника.





Полюсне рівняння виражає таку ж умову, як і базисне умовне рівняння. Особливість мереж, у яких складають полюсне рівняння, полягає у тому, що у них може не фігурувати жодного базису. Умова складається вздовж ходової лінії, яка бере початок від однієї із суміжних сторін замкненого ланцюжка трикутників і закінчується тією ж стороною. Така сторона опирається на точку полюсу. Якщо вибрану сторону умовно вважати базисом, то зв'язок вздовж ходової лінії виразиться рівнянням такої ж форми, що й базисне рівняння.

8. Координатні умовні рівняння абсцис та ординат виникають у мережах тріангуляції та полігонометрії, які опираються на ізольовані групи вихідних пунктів. Групу утворюють не менше двох вихідних пунктів мережі, які з'єднані між собою твердими сторонами. Якщо число груп дорівнює t, то число координатних рівнянь $r_{коорд} = 2(t-1)$. Помітивши початкову та кінцеву групи пунктів, координатні умови можна розкрити наступним чином: координати X та Y одного з пунктів кінцевої групи, обчислені за відповідними координатами одного із пунктів початкової групи та кутами ланцюжка трикутників вздовж вибраного напряму ходової лінії, повинні дорівнювати їх заданим значенням. Ходову лінію встановлюють у напрямі від пункту початкової групи через вершини проміжних кутів вздовж суміжних сторін ланцюжка трикутників до пункту кінцевої групи. Як виняток, кінцева група може містити один пункт. Зв'язок між вимірюваними кутами виражається на основі теореми синусів вздовж виділеного ланцюжка трикутників.

Загальні рекомендації встановлення видів та кількості рівнянь, які складають у планових мережах:

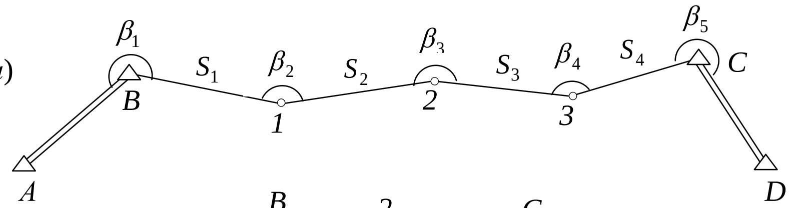
1) у мережах тріангуляції виникають лінійні кутові та нелінійні умовні рівняння усіх видів;

2) у мережах полігонометрії виникають умовні рівняння дирекційних кутів та координатні;

3) у мережах трилатерації умовні рівняння мають складний аналітичний вигляд, тому, як правило, корелатним способом трилатерацію не зрівноважують;

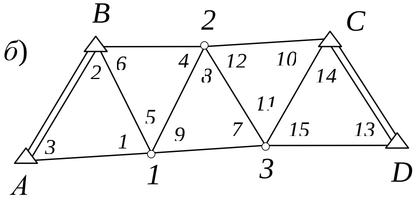
4) кількість лінійних кутових умовних рівнянь поправок $r_1 = n - l$, де n – кількість усіх виміряних кутів; l – кількість невідомих сторін. Наприклад, для полігонометричного ходу на малюнку *а*, $r_1 = 1$ (рівняння дирекційних кутів); для тріангуляції (малюнок *б*) $r_1 = 6$ (п’ять рівнянь фігур та рівняння дирекційних кутів);

а)



n = 9, k = 6, r = 3

б)



n = 15, k = 6, r = 9

5) кількість нелінійних умовних рівнянь поправок загалом $r_2 = r - r_1$ або для тріангуляції $r_2 = l - k$, де k – кількість необхідних виміряних величин, тому $r_2 = 3$ (базисне та два координатні рівняння);

6) при формуванні системи трапляються випадки взаємозамінних видів початкових умов. У таких ситуаціях потрібно вибирати комбінації найбільш простих умовних рівнянь.

2. Формування системи нормальних рівнянь корелат

Система умовних рівнянь поправок $\underset{r\times n}{A}\cdot\underset{n\times 1}{V}+\underset{r\times 1}{W}=0$ містить r однорідних лінійних рівнянь з n невідомими поправками v_i. Завжди $r<n$, тому така система за жодних умов не може мати прямого аналітичного розв'язку. Однозначний приблизний розв'язок можна досягти, якщо невідомі v_i задовольняють умові принципу найменших квадратів $\Phi(v_1,...,v_n)=[pv^2]=\underset{1\times n}{V^T}\cdot\underset{n\times n}{P}\cdot\underset{n\times 1}{V}=\min$ і відповідні частинні похідні $\dfrac{\partial\Phi}{\partial v_i}=0$, зокрема

$$d\Phi=d[pv^2]=[2pv\ \ dv]=0 \qquad (3.10)$$

$$d\Phi=d(\underset{1\times n}{V^T}\cdot\underset{n\times n}{P}\cdot\underset{n\times 1}{V})=2\cdot\underset{1\times n}{V^T}\cdot\underset{n\times n}{P}\cdot\underset{n\times 1}{dV}=0, \qquad 3.11)$$

де $\underset{n\times 1}{dV}-$ диференціал вектора $\underset{n\times 1}{V}$.

Необхідні вимоги екстремуму можна виразити методом Лагранжа. Опираючись на умову принципу найменших квадратів, у відповідності з методом Лагранжа складемо функцію

$$\Phi(v_1,...,v_n)=\underset{1\times n}{V^T}\cdot\underset{n\times n}{P}\cdot\underset{n\times 1}{V}-2\cdot\underset{1\times r}{K^T}(\underset{r\times n}{A}\cdot\underset{n\times 1}{V}+\underset{r\times 1}{W})=\min, \qquad (3.12)$$

де $\underset{1\times r}{K^T}=(k_1\quad k_2\quad\ldots\quad k_r)-$ це **вектор невідомих множників Лагранжа, які називаються корелати**. Тоді

$$d\Phi=2\cdot\underset{1\times n}{V^T}\cdot\underset{n\times n}{P}\cdot\underset{n\times 1}{dV}-2\cdot\underset{1\times r}{K^T}\cdot\underset{r\times n}{A}\cdot\underset{n\times 1}{dV}=2\cdot(\underset{1\times n}{V^T}\cdot\underset{n\times n}{P}-\underset{1\times r}{K^T}\cdot\underset{r\times n}{A})\cdot\underset{n\times 1}{dV}=0.$$

Звідси слідує: $\underset{1\times n}{V^T}\cdot\underset{n\times n}{P}-\underset{1\times r}{K^T}\cdot\underset{r\times n}{A}=0;$ $\qquad\underset{1\times n}{V^T}\cdot\underset{n\times n}{P}=\underset{1\times r}{K^T}\cdot\underset{r\times n}{A}$.

або у транспонованій формі $\underset{n\times n}{P}\cdot\underset{n\times 1}{V}=\underset{n\times r}{A^T}\cdot\underset{r\times 1}{K}$, $\qquad$ звідки $\qquad\underset{n\times 1}{V}=\underset{n\times n}{P^{-1}}\cdot\underset{n\times r}{A^T}\cdot\underset{r\times 1}{K}$.

Тут $\underset{n\times n}{P^{-1}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{p_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{p_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{p_n} \end{pmatrix}$ - діагональна матриця обернених ваг результатів вимірів. Якщо позначити $\frac{1}{p_i} = q_i$ та відповідно $\underset{n\times n}{P^{-1}} = \underset{n\times n}{q}$, то одержимо рівняння

$$\underset{n\times 1}{V} = \underset{n\times n}{q} \cdot \underset{n\times r}{A^T} \cdot \underset{r\times 1}{K}. \tag{3.13}$$

У розгорнутому вигляді маємо систему рівнянь

$$\left.\begin{array}{l} v_1 = q_1(a_{11}k_1 + a_{21}k_2 + \dots + a_{r1}k_r) \\ v_2 = q_2(a_{12}k_1 + a_{22}k_2 + \dots + a_{r2}k_r) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ v_n = q_n(a_{1n}k_1 + a_{2n}k_2 + \dots + a_{rn}k_r) \end{array}\right\}. \tag{3.14}$$

Для окремого рівняння цієї системи можна написати:

$$v_i = q_i(a_{1i}k_1 + a_{2i}k_2 + \dots + a_{ri}k_r). \tag{3.15}$$

Рівняння (3.13) – (3.15) називаються корелатні рівняння поправок. Система корелатних рівнянь поправок виражає лінійне перетворення сукупності величин k_j $(j = \overrightarrow{1, r})$ у сукупність величин v_i $(i = \overrightarrow{1, n})$. Для здійснення такого перетворення передусім належить визначити вектор корелат $\underset{r\times 1}{K}$.

Помістимо вектор поправок (3.13) $\underset{n\times 1}{V} = \underset{n\times n}{q} \cdot \underset{n\times r}{A^T} \cdot \underset{r\times 1}{K}$ до умовного рівняння (3.9) $\underset{r\times n}{A} \cdot \underset{n\times 1}{V} + \underset{r\times 1}{W} = 0$:

$$\underset{r\times n}{A} \cdot \underset{n\times n}{q} \cdot \underset{n\times r}{A^T} \cdot \underset{r\times 1}{K} + \underset{r\times 1}{W} = 0. \tag{3.16}$$

Рівняння (3.16) називаються **нормальні рівняння корелат**. У розгорнутому вигляді систему нормальних рівнянь корелат можна розкрити таким чином:

$$\left.\begin{array}{l} [qa_1a_1]k_1 + [qa_1a_2]k_2 + \ldots + [qa_1a_r]k_r + W_1 = 0 \\ [qa_2a_1]k_1 + [qa_2a_2]k_2 + \ldots + [qa_2a_r]k_r + W_2 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ [qa_ra_1]k_1 + [qa_ra_2]k_2 + \ldots + [qa_ra_r]k_r + W_r = 0 \end{array}\right\}. \tag{3.17}$$

Система містить r лінійних рівнянь з r невідомими корелатами k_j.

Добуток $\underset{r\times n}{A} \cdot \underset{n\times n}{q} \cdot \underset{n\times r}{A^T} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & q_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & q_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{r1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{r2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{rn} \end{pmatrix}$ дає квадратну симетричну матрицю порядку r з коефіцієнтами $N_{js} = [qa_ja_s] = q_1a_{j1}a_{s1} + q_2a_{j2}a_{s2} + \ldots + q_na_{jn}a_{sn}$:

$$\underset{r\times n}{A} \cdot \underset{n\times n}{q} \cdot \underset{n\times r}{A^T} = \underset{r\times r}{N} = \begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} & \ldots & N_{1r} \\ N_{21} & N_{22} & \ldots & N_{2r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ N_{r1} & N_{r2} & \ldots & N_{rr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [qa_1a_1] & [qa_1a_2] & \ldots & [qa_1a_r] \\ [qa_2a_1] & [qa_2a_2] & \ldots & [qa_2a_r] \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ [qa_ra_1] & [qa_ra_2] & \ldots & [qa_ra_r] \end{pmatrix}.$$

Вільними членами нормальних рівнянь корелат є нев’язки W_j, які вже виражені на попередньому етапі розв’язання задачі зрівноважування. Тож у підсумку одержимо нормальне рівняння корелат

$$\underset{r\times r}{N}\cdot\underset{r\times 1}{K}+\underset{r\times 1}{W}=0. \tag{3.18}$$

або систему рівнянь

$$\left.\begin{aligned} &N_{11}k_1+N_{12}k_2+\ldots+N_{1r}k_r+W_1=0\\ &N_{21}k_1+N_{22}k_2+\ldots+N_{2r}k_r+W_2=0\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &N_{r1}k_1+N_{r2}k_2+\ldots+N_{rr}k_r+W_r=0 \end{aligned}\right\}. \tag{3.19}$$

Важливо звернути увагу на те, що коефіцієнтам системи таких рівнянь властива ознака симетричності $N_{js}=N_{sj}$: коефіцієнти, розміщені симетрично відносно головної діагоналі, попарно рівні між собою.

Якщо зрівноважують рівноточні виміри, то $p_i=q_i=1$. Тоді вагова матриця перетворюється у одиничну матрицю $\underset{n\times n}{P}=\underset{n\times n}{q}=\underset{n\times n}{E}$ і нормальне рівняння (3.16) набуває вигляду

$$\underset{r\times n}{A}\cdot\underset{n\times r}{A^T}\cdot\underset{r\times 1}{K}+\underset{r\times 1}{W}=0 \tag{3.20}$$

або

$$\left.\begin{aligned} &[a_1a_1]k_1+[a_1a_2]k_2+\Lambda+[a_1a_r]k_r+W_1=0\\ &[a_2a_1]k_1+[a_2a_2]k_2+\Lambda+[a_2a_r]k_r+W_2=0\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &[a_ra_1]k_1+[a_ra_2]k_2+\Lambda+[a_ra_r]k_r+W_r=0 \end{aligned}\right\}. \tag{3.21}$$

Отже, за умови зрівноважування рівноточних вимірів їх ваги можна не брати до уваги і при формуванні системи нормальних рівнянь корелат відповідні позначення можна опустити.

Порівняння алгоритмів формування системи нормальних рівнянь поправок у параметричному та системи нормальних рівнянь корелат у корелатному способах зрівноважування дозволяє зробити такі висновки.

1. Обидва алгоритми опираються на єдину теоретичну основу – принцип найменших квадратів.

2. Система нормальних рівнянь у параметричному способі формується на основі системи параметричних рівнянь поправок, у корелатному – на основі системи умовних рівнянь поправок. Початкові системи рівнянь у обох способах різні за своїм змістом та походженням. Однак у підсумку це є системи лінійних рівнянь, які відрізняються лише кількістю рівнянь. Зокрема, система параметричних рівнянь поправок містить кількість рівнянь, яке дорівнює загальній кількості виміряних величин n; кількість умовних рівнянь поправок дорівнює кількості надлишкових виміряних величин r.

3. На основі різних початкових рівнянь, застосовуючи різні математичні прийоми, на завершальній стадії формування систем нормальних рівнянь у обох способах зрівноважування отримуємо однакові за своєю структурою та властивостями системи лінійних рівнянь. У параметричному способі їх називають нормальними рівняннями поправок, у корелатному – нормальними рівняннями корелат. Внаслідок відмінностей між алгоритмами, системи нормальних рівнянь у обох способах мають різну розмірність: кількість нормальних рівнянь у параметричному способі дорівнює кількості необхідних виміряних величин k, у корелатному – кількості надлишкових виміряних величин r.

3. Розв’язування системи нормальних рівнянь корелат

Сформульовані напередодні висновки дають підстави використати для розв’язування системи нормальних рівнянь корелат ті ж способи, які застосовувались при розв’язуванні системи нормальних рівнянь поправок у параметричному способі зрівноважування. Окреслимо деякі особливості реалізації методів при вирішенні завдання зрівноважування корелатним способом.

Розв’язування системи нормальних рівнянь корелат $\underset{r\times r}{N}\cdot\underset{r\times 1}{K}+\underset{r\times 1}{W}=0$ полягає у визначенні вектора $\underset{r\times 1}{K}$, елементами якого є корені рівнянь k_j ($j=\overrightarrow{1,r}$) – корелати. Розв’язок даного матричного рівняння має вигляд

$$\underset{r\times 1}{K}=-\underset{r\times r}{Q}\cdot\underset{r\times 1}{W}, \tag{3.23}$$

де $\underset{r\times r}{Q}=\underset{r\times r}{N}^{-1}$ – це обернена матриця до матриці коефіцієнтів $\underset{r\times r}{N}=\underset{r\times n}{A}\cdot\underset{n\times n}{q}\cdot\underset{n\times r}{A^T}$. Матриця $\underset{r\times r}{Q}$ має такі ж властивості, що і матриця коефіцієнтів $\underset{r\times r}{N}$. Серед них визначальною є властивість симетричності не квадратичних коефіцієнтів відносно головної діагоналі: $\underset{r\times r}{Q}=\underset{r\times r}{Q^T}$. Завдання побудови оберненої матриці полягає у розв’язуванні рівняння

$$\underset{r\times r}{N}\cdot\underset{r\times r}{Q}=\underset{r\times r}{E} \tag{3.24}$$

відносно $\underset{r\times r}{Q}$, де $\underset{r\times r}{E}$ - одинична матриця. Рівняння (3.24) застосовують для перевірки побудови оберненої матриці. **Рівняння (3.23) виражає розв’язок системи нормальних рівнянь корелат**. Перевірку розв’язку можна здійснити підстановкою вектора корелат k_j у нормальне рівняння $\underset{r\times r}{N}\cdot\underset{r\times 1}{K}+\underset{r\times 1}{W}=0$: умова рівняння повинна задовольнятись.

4. Обчислення зрівноважених результатів вимірів

Обчислення поправок до результатів вимірів v_i за корелатними рівняннями поправок (3.13) $\underset{n\times1}{V} = \underset{n\times n}{q} \cdot \underset{n\times r}{A^T} \cdot \underset{r\times1}{K}$. Їх числові значення визначає вектор корелат $\underset{r\times1}{K}$, який уже сформований за результатами розв'язування системи нормальних рівнянь корелат.

Контроль обчислення поправок v_i **за значенням** $[pv^2] = \underset{1\times n}{V^T} \cdot \underset{n\times n}{P} \cdot \underset{n\times1}{V}$ **.**

Помножимо обидві частини корелатного рівняння поправок $\underset{n\times1}{V} = \underset{n\times n}{q} \cdot \underset{n\times r}{A^T} \cdot \underset{r\times1}{K}$ на величину $\underset{1\times n}{V^T} \cdot \underset{n\times n}{P}$:

$$\underset{1\times n}{V^T} \cdot \underset{n\times n}{P} \cdot \underset{n\times1}{V} = \underset{1\times n}{V^T} \cdot \underset{n\times n}{P} \cdot \underset{n\times n}{q} \cdot \underset{n\times r}{A^T} \cdot \underset{r\times1}{K}\,.$$

Тут $\underset{n\times n}{P} \cdot \underset{n\times n}{q} = \underset{n\times n}{E}$, де $\underset{n\times n}{E}$ – одинична матриця. Тому $\underset{1\times n}{V^T} \cdot \underset{n\times n}{P} \cdot \underset{n\times1}{V} = \underset{1\times n}{V^T} \cdot \underset{n\times r}{A^T} \cdot \underset{r\times1}{K}$.

З іншого боку, з умовного рівняння поправок (3.9) $\underset{r\times n}{A} \cdot \underset{n\times1}{V} + \underset{r\times1}{W} = 0$ слідує: $\underset{r\times n}{A} \cdot \underset{n\times1}{V} = -\underset{r\times1}{W}$ або $\underset{1\times n}{V^T} \cdot \underset{n\times r}{A^T} = -\underset{1\times r}{W^T}$.

Тому

$$\underset{1\times n}{V^T} \cdot \underset{n\times n}{P} \cdot \underset{n\times1}{V} = -\underset{1\times r}{W^T} \cdot \underset{r\times1}{K}\,.$$

Значення $[pv^2] = -\underset{1\times r}{W^T} \cdot \underset{r\times1}{K}$ можна використати для контролю обчислення поправок до результатів вимірів шляхом його співставлення із значенням $[pv^2] = \underset{1\times n}{V^T} \cdot \underset{n\times n}{P} \cdot \underset{n\times1}{V}$.

Зрівноважені значення результатів вимірів $\tilde{x}_i$ виражаються рівностями $\tilde{x}_i = x_i + v_i \quad (i = \overrightarrow{1,n})$ або у матричній формі $\underset{n\times1}{\tilde{x}} = \underset{n\times1}{x} + \underset{n\times1}{V}$. Тут $\underset{n\times1}{\tilde{x}} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \cdots \\ \tilde{x}_n \end{pmatrix}$ - зрівноважені значення результатів вимірів; $\underset{n\times1}{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$ - результати вимірів; $\underset{n\times1}{V} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdots \\ v_n \end{pmatrix}$ - поправки до результатів вимірів. Розкриттям числових значень $\tilde{x}_i \ (i = \overrightarrow{1,n})$ завершується етап зрівноважувальних обчислень.

Заключний контроль зрівноважування реалізовується перевіркою істинності умов, які виражають незалежні умовні рівняння (3.3) $\varphi_j(\tilde{x}_1,...,\tilde{x}_n) = 0$: умовні рівняння, складені із зрівноваженими результатами вимірів $\tilde{x}_i$, дорівнюють нулю. Логічним наслідком зазначеної вимоги є ще наступна: нев'язки умовних рівнянь, обчислені за зрівноваженими результатами вимірів $\tilde{x}_i$, повинні дорівнювати нулю $W_j = \varphi_j(\tilde{x}_1,...,\tilde{x}_n) = 0$.