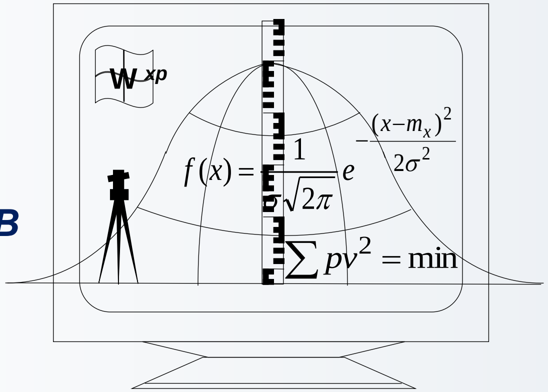
Національний університет
водного господарства
та природокористування

Кафедра геодезії та картографії

Спеціальність 193 “Геодезія та землеустрій”

Дисципліна ***МАТЕМАТИЧНА ОБРОБКА ГЕОДЕЗИЧНИХ ВИМІРІВ***
Модуль 2 ***ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОХИБОК ВИМІРІВ***

Лектор О.А.Тадєєв



Тема 1

ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ ТЕОРІЇ ПОХИБОК ВИМІРІВ

1. Предмет і завдання теорії похибок вимірів
2. Відомості про виміри та їх точність. Класифікація вимірів та похибок
3. Критерії точності результатів вимірів та обчислень
4. Оцінка точності функцій виміряних величин

Література

Базова

1. Войтенко С.П. Математична обробка геодезичних вимірів. Теорія похибок вимірів. Навч. посібник. – К.: КНУБА, 2003. – 216с.
2. Зазуляк П.М., Гавриш В.І., Євсєєва Е.М., Йосипчук М.Д. Основи математичного опрацювання геодезичних вимірювань. Підручник. – Львів: Растр-7, 2007. – 408 с.

Допоміжна

1. Большаков В.Д., Гайдаев П.А. Теория математической обработки геодезических измерений. Підручник. – М.: Недра, 1977. – 367с.
2. Большаков В.Д., Маркузе Ю.И. Практикум по теории математической обработки геодезических измерений. Навч. посібник. – М.: Недра, 1984. – 352с.
3. Большаков В.Д. Теория ошибок наблюдений. Підручник. – М.: Недра, 1983. – 223с.
4. Бугай П.Т. Теорія помилок і спосіб найменших квадратів. Підручник. – Львів: ЛДУ, 1960. – 366с.
5. Видуев Н.Г., Григоренко А.Г. Математическая обработка геодезических измерений. Навч посібник. – К.: Вища школа, 1978. – 376с.
6. Мазмишвили А.И. Способ наименьших квадратов. Навч. посібник. – Москва: Недра, 1968. – 437с.

Література

Методичне забезпечення

1. Основи теорії похибок вимірів. Методичні вказівки до виконання самостійних та практичних робіт з дисципліни «Математична обробка геодезичних вимірів» студентами спеціальності 193 «Геодезія та землеустрій» ***05-04-46*** / О.А. Тадєєв, Т.І. Дець – Рівне: НУВГП, 2014. – 40с.

2. Методичні вказівки до виконання розрахунково-графічної роботи №2 з дисципліни «Математична обробка геодезичних вимірів» студентами спеціальності 193 «Геодезія та землеустрій» ***05-04-79*** / О.А. Тадєєв, Т.І. Дець - Рівне: НУВГП, 2018. – 41 с.

1. Предмет і завдання теорії похибок вимірів

Будь-які виміри завжди супроводжуються похибками – відхиленнями виміряних значень величин від їх істинних значень. Отримати абсолютно безпомилково результати вимірів неможливо. Вдосконалюючи прилади і методи вимірів, можна лише наближати результат виміру величини до її істинного значення.
З цієї причини всякий результат виміру розглядають з двох точок зору:

- кількісної – це, власне, є отримане значення величини.
- якісної – це є точність отриманого значення (похибка, якою обтяжене отримане значення). Точність завжди виражається конкретними усталеними числовими критеріями.

Базові терміни:

Вимір величини – процес її порівняння з однорідною фізичною величиною, яку прийнято одиницею міри.

Результат виміру величини – підсумок виконання усіх вимірювальних дій.

Точність виміру величини – це числовий критерій, який є імовірнісною характеристикою відхилень отриманих результатів вимірів величини від її істинного значення.

Всі величини, якими оперують в геодезії, розділяють на два види:

- ***виміряні*** – їх наближені значення отримують безпосередніми вимірами.
- ***обчислені*** (або посередні) – їх визначають шляхом обчислень як функції виміряних величин.

1. Предмет і завдання теорії похибок вимірів

Теорія похибок вимірів – розділ математичної обробки геодезичних вимірів, який вивчає засоби і методи кількісного та якісного описування результатів вимірів та їх функцій.

***Основні завдання теорії похибок вимірів*:**

1. Систематизація вимірів та їх похибок.

2. Вивчення законів виникнення та розподілу похибок вимірів.

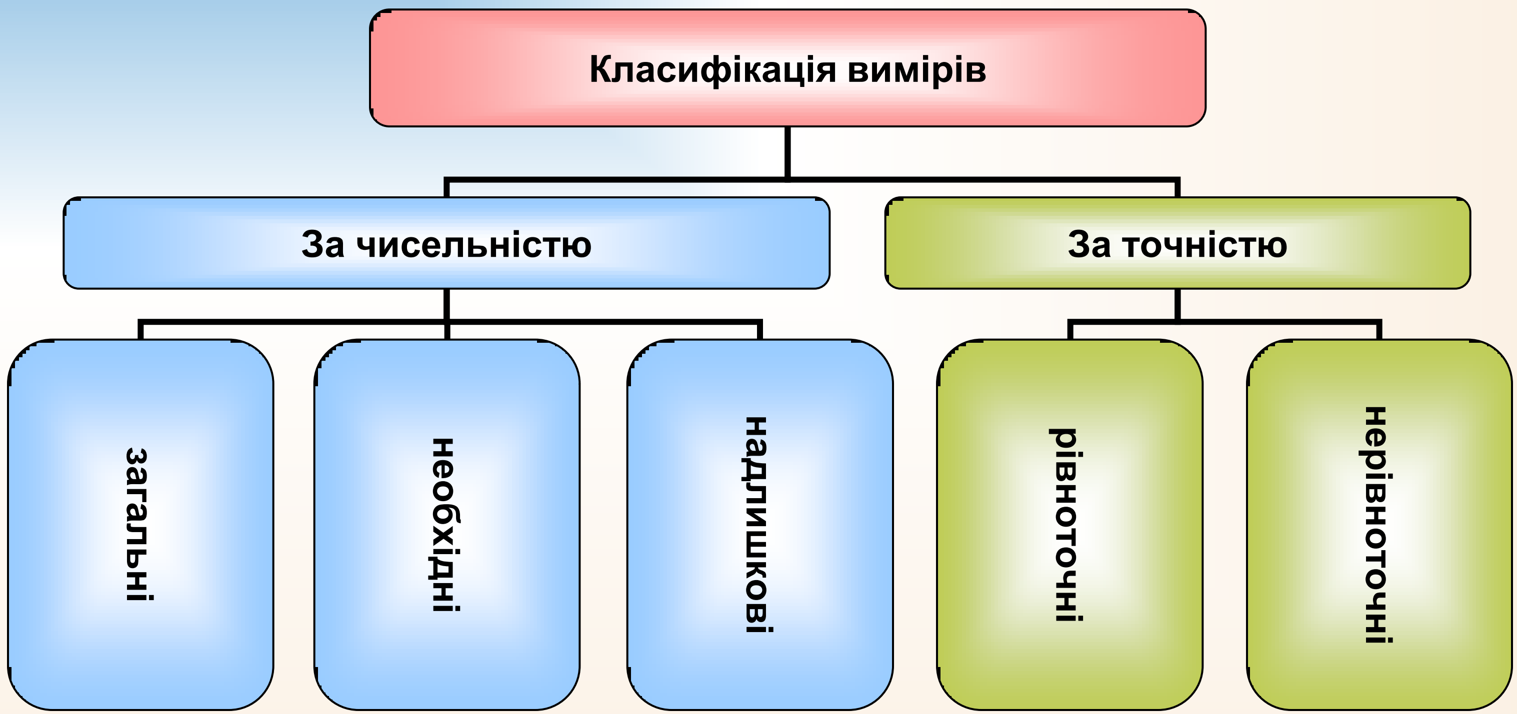
3. Встановлення критеріїв і методів оцінювання точності вимірів.

4. Визначення найбільш надійних значень результатів вимірів окремих величин та оцінка їх точності

5. Оцінювання точності функцій результатів вимірів.

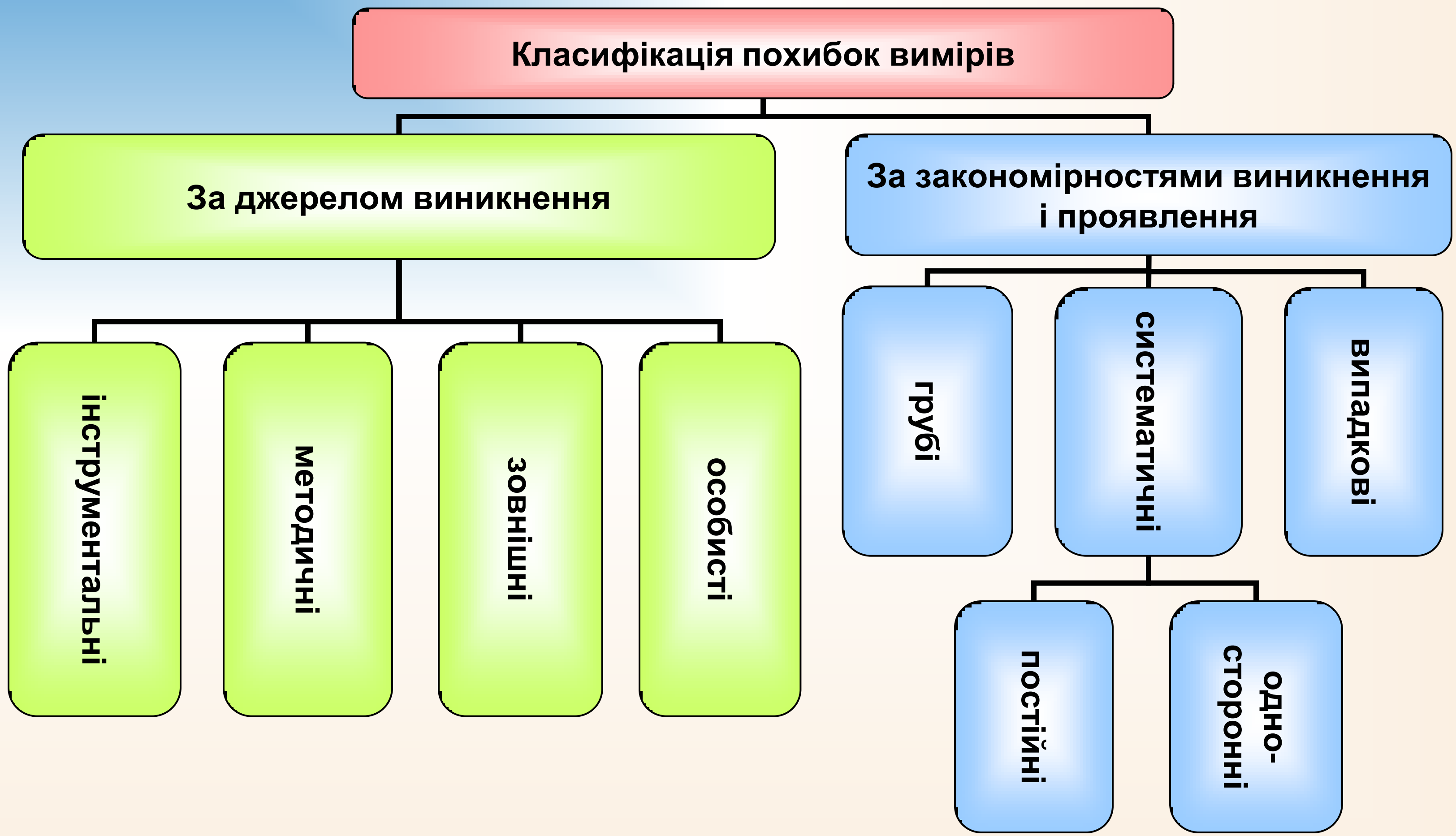
2. Відомості про виміри та їх точність

Класифікація вимірів та похибок



2. Відомості про виміри та їх точність

Класифікація вимірів та похибок



2. Відомості про виміри та їх точність

Класифікація вимірів та похибок
Випадкові похибки вимірів

Випадкові похибки вимірів є типовим прикладом неперервних випадкових величин. Їх конкретні значення неможливо передбачити наперед; можна визначити лише границі, в яких випадкові похибки набувають значень.

Властивості випадкових похибок вимірів є наслідком їх підпорядкованості нормальному законові розподілу:

1. Додатні та від'ємні похибки рівноможливі:

$$p(\theta > 0) = p(\theta < 0) = \frac{1}{2}$$

2. Середнє арифметичне значень похибок при необмеженому зростанні числа вимірів гранично прямує до нуля:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} \theta_i}{n} = 0$$

3. Малі за абсолютною величиною значення похибок трапляються частіше, ніж великі. Це слідує з властивості функції щільності нормального закону розподілу

4. Абсолютні значення похибок із заданою імовірністю не перевищують границю, яку встановлює “правило трьох сигма” нормального закону розподілу :

$$m_x \pm 3\sigma$$

3. Критерії точності результатів вимірів та обчислень

- **Критерії точності вимірів**
  - **Абсолютні похибки**
    - **істинна**
    - **середня квадратична**
      - **гранична**
  - **Відносні похибки**
    - **істинна**
    - **середня квадратична**
      - **гранична**

3. Критерії точності результатів вимірів та обчислень

Істинна похибка

Істинна похибка θ_i - це відхилення результату виміру x_i від істинного значення величини X :

$$\theta_i = x_i - X$$

Істинна похибка включає в себе дві складові:

1) випадкова складова ζ_i - це відхилення результату виміру x_i від математичного сподівання $M[x]$

$$\zeta_i = x_i - M[x]$$

2) систематична складова δ - це відхилення математичного сподівання $M[x]$ від істинного значення X

$$\delta = M[x] - X$$

Разом

$$\theta_i = \zeta_i + \delta = x_i - M[x] + M[x] - X = x_i - X$$

Для оцінювання точності результатів вимірів з використанням істинної похибки необхідно знати істинне значення вимірюваної величини. У випадку повторних вимірів окремої величини здебільшого такої можливості немає. Однак цей критерій має практичне використання при оцінюванні точності функцій результатів вимірів.

3. Критерії точності результатів вимірів та обчислень

Середня квадратична похибка

Середня квадратична похибка m - це критерій точності, який визначається за розсіюванням значень результатів вимірів x_i величини і відповідає за змістом характеристиці розсіювання сукупності отриманих результатів, яку в теорії ймовірностей і математичній статистиці називають середнє квадратичне відхилення (стандарт) σ :

$$m = \sigma$$

Якщо взяти до уваги, що $m^2 = \sigma^2 = D_x = \mu_2$ - це дисперсія (другий центральний момент), яка відповідає математичному сподіванню квадрату випадкової величини, то отримаємо наступне :

$$m^2 = M[\theta^2] = M[\zeta^2 + \delta^2 + 2\zeta\delta] = M[\zeta^2] + M[\delta^2]$$

Величина $M[\zeta^2] = m_\zeta^2$ - це дисперсія випадкової величини x . Величина $M[\delta^2] = m_\delta^2$ - це дисперсія випадкової величини δ . Тому

$$m^2 = m_\zeta^2 + m_\delta^2 \qquad \text{або} \qquad m = \sqrt{m_\zeta^2 + m_\delta^2}$$

Висновок:

Середня квадратична похибка виміру характеризує сумісний вплив на нього як випадкових похибок m_ζ , так і систематичних похибок m_δ .

За умови врахування систематичних похибок, беручи до уваги властивості випадкових похибок щодо підпорядкованості нормальному законові розподілу, можна оцінити діапазон допустимості похибок вимірів з використанням ***граничної середньої квадратичної похибки*** $m_{гран} = 3m$. Тут за основу взято “правило трьох сигма” нормального закону.

В геодезії середня квадратична похибка є основним критерієм оцінювання точності результатів вимірів величин та їх функцій.

3. Критерії точності результатів вимірів та обчислень

Відносна похибка

Відносною похибкою називають відношення тієї чи іншої абсолютної похибки до отриманого значення вимірюваної величини.

Відносну похибку виражають у вигляді дробу з чисельником, який дорівнює одиниці. Якщо x - це отримане значення величини, то

$\frac{\theta}{x} = \frac{1}{N_1}$ - відносна істинна похибка вимірюваної величини, де $N_1 = \frac{x}{\theta}$;

$\frac{m}{x} = \frac{1}{N_2}$ - відносна середня квадратична похибка величини, де $N_2 = \frac{x}{m}$;

$\frac{m_{гран}}{x} = \frac{1}{N_3}$ - відносна гранична середня квадратична похибка величини, де $N_3 = \frac{x}{m_{гран}}$.

Критеріями відносної похибки зручно користуватись при оцінюванні точності лінійних вимірів. Тоді вони виражають точність виміру довжини у розрахунку на одиницю міри довжини, наприклад, на один метр.

4. Оцінка точності функцій виміряних величин

Постановка задачі

Задано:

Функція загального вигляду $F = f(x_1,...,x_n)$

$x_1,...,x_n$ - виміряні аргументи функції;

$m_1,...,m_n$ - середні квадратичні похибки аргументів;

$X_1,...,X_n$ - істинні значення аргументів;

$\theta_1,...,\theta_n$ - істинні похибки аргументів: $\theta_i = x_i - X_i$

Визначити:

Істинна похибка функції: θ_F – ?

Середня квадратична похибка функції: m_F – ?

4. Оцінка точності функцій виміряних величин

Істинна похибка функції (нев'язка) виражається різницею значення функції, яке обчислене за виміряними аргументами, і теоретичного значення функції:

$$\theta_F = f(x_1,...,x_n) - f(X_1,...,X_n)$$

З визначення істинної похибки $\theta_i = x_i - X_i$ слідує: $X_i = x_i - \theta_i$. Тому

$$\theta_F = f(x_1,...,x_n) - f(x_1 - \theta_1,...,x_n - \theta_n)$$

Вираження теоретичного значення функції розкладаємо в ряд Тейлора:

$$\theta_F = f(x_1,...,x_n) - f(x_1,...,x_n) + (\frac{\partial f}{\partial x_1})_0 \cdot \theta_1 + ... + (\frac{\partial f}{\partial x_n})_0 \cdot \theta_n + R$$

Залишковий член розкладу, який дорівнює сумі всіх нелінійних членів ряду, гранично $R \to 0$, оскільки похибки вимірів аргументів завжди малі порівняно з їх виміряними абсолютними значеннями. Тому величиною R можна нехтувати. Остаточно для істинної похибки функції отримуємо:

$$\boxed{\theta_F = (\frac{\partial f}{\partial x_1})_0 \cdot \theta_1 + ... + (\frac{\partial f}{\partial x_n})_0 \cdot \theta_n}$$

4. Оцінка точності функцій виміряних величин

Середня квадратична похибка функції виражається через математичне сподівання квадрату її істинної похибки:

$$m_F^2 = M[\theta_F^2] = (\frac{\partial f}{\partial x_1})_0^2 \cdot M[\theta_1^2] + \ldots + (\frac{\partial f}{\partial x_n})_0^2 \cdot M[\theta_n^2] + 2(\frac{\partial f}{\partial x_1})_0 \cdot (\frac{\partial f}{\partial x_2})_0 \cdot M[\theta_1 \cdot \theta_2] + \ldots$$

В компактній формі

$$m_F^2 = \sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial f}{\partial x_i})_0^2 \cdot M[\theta_i^2] + 2\sum_{i<j} (\frac{\partial f}{\partial x_i})_0 \cdot (\frac{\partial f}{\partial x_j})_0 \cdot M[\theta_i \cdot \theta_j]$$

Відомо: $M[\theta_i^2] = m_i^2$.

Невідомо: $M[\theta_i \cdot \theta_j] - ?$ Його можна виразити через формулу обчислення коефіцієнта кореляції:

$$r_{1,2} = \frac{K_{1,2}}{\sigma_1 \cdot \sigma_2} = \frac{M[(x_1 - X_1)(x_2 - X_2)]}{\sigma_1 \cdot \sigma_2} = \frac{M[\theta_1 \cdot \theta_2]}{m_1 \cdot m_2}$$

Звідки $M[\theta_1 \cdot \theta_2] = r_{1,2} \cdot m_1 \cdot m_2$. Тому

$$\boxed{m_F^2 = \sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial f}{\partial x_i})_0^2 \cdot m_i^2 + 2\sum_{i<j} (\frac{\partial f}{\partial x_i})_0 \cdot (\frac{\partial f}{\partial x_j})_0 \cdot r_{i,j} \cdot m_i \cdot m_j}$$

Отриманою формулою виражається середня квадратична похибка функції залежних аргументів. Якщо аргументи функції незалежні, то їх попарно взяті коефіцієнти кореляції дорівнюють нулю. Тому для незалежних аргументів

$$\boxed{m_F^2 = \sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial f}{\partial x_i})_0^2 \cdot m_i^2}$$

4. Оцінка точності функцій виміряних величин

Розрахунок точності вимірів величин (аргументів) за похибкою функції

Задача розв’язується моделюванням умов вимірів аргументів. Задана похибка функції розподіляється між похибками аргументів за тим чи іншим принципом залежно від очікуваних умов проведення вимірів.

1. Принцип рівного впливу. На розв’язок накладається умова, що вплив похибок аргументів на точність функції є рівним, тобто

$$\frac{m_F^2}{n} = m_0^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{\text{o}}^2 m_1^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_{\text{o}}^2 m_2^2 = \ldots = \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_{\text{o}}^2 m_n^2$$

Тут похибка m_0 оцінює середній вплив кожного аргумента на точність функції. Тоді середні квадратичні похибки вимірів окремих аргументів з врахуванням вигляду функції виражає формула

$$m_i = \frac{m_0}{\left|\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{\text{o}}\right|} = \frac{m_F}{\left|\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{\text{o}}\right|\sqrt{n}}$$

4. Оцінка точності функцій виміряних величин

Розрахунок точності вимірів величин (аргументів) за похибкою функції

2. Принцип пропорційного впливу

Можна змоделювати умови вимірів таким чином, що похибка функції буде розподілятись між аргументами нерівномірно. Тоді аргументи функції можна вимірювати з більшими чи меншими похибками залежно від точності наявних приладів, доступних методів вимірів чи у відповідності до тих чи інших нормативних інструкцій. За таких умов кожному аргументу потрібно встановити відповідний коефіцієнт K_i пропорційно його впливу на точність функції. Тоді

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0 m_i = K_i m_0 \qquad m_F = m_0\sqrt{\sum_{i=1}^{n} K_i^2}$$

За такого підходу середня квадратична похибка виміру окремого аргументу виразиться формулою

$$m_i = \frac{K_i m_0}{\left|\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0\right|}$$

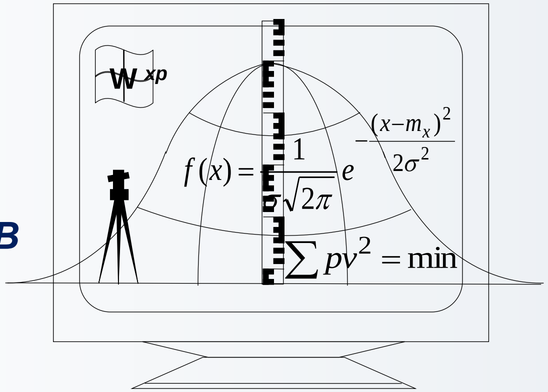
Такий спосіб розрахунку точності виміру аргументів опирається на принцип пропорційного впливу. Він забезпечує оптимальне обґрунтоване вирішення задачі, опираючись на співвідношення точності приладів та методів вимірів різних величин.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Кафедра геодезії та картографії

Спеціальність 193 “Геодезія та землеустрій”

Дисципліна ***МАТЕМАТИЧНА ОБРОБКА ГЕОДЕЗИЧНИХ ВИМІРІВ***
Модуль 2 ***ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОХИБОК ВИМІРІВ***



Лектор О.А.Тадєєв

Тема 2

МАТЕМАТИЧНА ОБРОБКА РІВНОТОЧНИХ ВИМІРІВ ВЕЛИЧИНИ

1. Зміст і мета розв'язування завдання
2. Проста арифметична середина
3. Похибка простої арифметичної середини
4. Похибки результатів рівноточних вимірів величини
5. Довірчий інтервал для істинного значення величини
6. Оцінка точності значень середніх квадратичних похибок

1. Зміст і мета розв'язування завдання

Рівноточними вимірами окремої фізичної величини називають однорідні виміри, які проведено в абсолютно однакових умовах. Результати рівноточних вимірів, як правило, відрізняються поміж собою. Тому з точки зору числових оцінок точності вони мають різні істинні похибки, проте завжди характеризуються однією, однаковою для всіх, середньою квадратичною похибкою.

Постановка завдання

Проведено n рівноточних вимірів величини.

$x_1, x_2, ..., x_n$ - результати вимірів.

$m_1 = m_2 = ... = m_n = m$ - середні квадратичні похибки результатів вимірів.

Істинне значення X та істинні похибки $\theta_i = x_i - X$ результатів вимірів невідомі.

За результатами математичної обробки результатів вимірів величини ***необхідно визначити***:

1) найбільш надійне значення величини $\tilde{x}$, яке має замінити і бути найбільш близьким до істинного;
2) середню квадратичну похибку найбільш надійного значення $m_{\tilde{x}}$;
3) середню квадратичну похибку вимірів m ;
4) (за потреби) довірчий інтервал для істинного значення величини;
5) (за потреби) точність значень похибок m та $m_{\tilde{x}}$.

2. Проста арифметична середина

Істинна похибка $\theta_i = x_i - X$ вимірюваної величини характеризується:

- відхиленням результатів вимірів від їх математичного сподівання $\zeta_i = x_i - M[x]$, що є наслідком впливу випадкових похибок вимірів;
- відхиленням математичного сподівання від істинного значення величини $\delta = M[x] - X$, що є наслідком впливу систематичних похибок вимірів.

Разом $\theta_i = \zeta_i + \delta = x_i - M[x] + M[x] - X = x_i - X$.

Імовірнісне обґрунтування.

Вплив систематичних похибок у процесі математичної обробки вимірів зменшити неможливо – це потрібно виконувати під час проведення вимірів шляхом їх відповідної організації та дотримання методики вимірів. Тому при обробці можна оцінити лише вплив випадкових похибок, а найбільш надійне значення потрібно знаходити наближенням результатів вимірів до математичного сподівання. Отже, **математичне сподівання виражає найбільш надійне значення вимірюваної величини**. Беручи до уваги закон великих чисел теорії ймовірностей (теорема Чебишева), найкращим наближенням до математичного сподівання за результатами рівноточних вимірів величини є середнє арифметичне цих результатів:

$$\tilde{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \qquad \tilde{x} = \frac{[x]}{n}$$

Таким чином, **за умови відсутності у результатах рівноточних вимірів систематичних похибок**, математичне сподівання є найкращим наближенням до істинного значення величини. Його називають найбільш надійне значення вимірюваної величини і обчислюють як середнє арифметичне отриманих результатів вимірів (проста арифметична середина).

2. Проста арифметична середина

Арифметичне обґрунтування має в основі:

- умову відсутності у результатах рівноточних вимірів систематичних похибок;
- властивість компенсації випадкових похибок вимірів

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[\theta]}{n}=0$$

Виконаємо прості арифметичні дії з рівнянням для істинних похибок $x_i - X = \theta_i$.

Додаємо ліві та праві частини рівняння: $[x]-nX=[\theta]$

Ділимо на кількість вимірів n : $\frac{[x]}{n}-X=\frac{[\theta]}{n}$

Враховуючи, що $\frac{[x]}{n}=\tilde{x}$, отримаємо $\tilde{x}-\frac{[\theta]}{n}=X$

або з врахуванням властивості компенсації випадкових похибок вимірів $\boxed{\lim_{n\to\infty}\tilde{x}=X}$

Отримана формула виражає **принцип простої арифметичної середини:** за умов нескінченно великої кількості вимірів та відсутності систематичних похибок вимірів проста арифметична середина прямує до істинного значення вимірюваної величини.

2. Проста арифметична середина

Видозміна формули простої арифметичної середини (середнього арифметичного)

Якщо з результатів вимірів $x_1, x_2, ..., x_n$ виокремити мінімальне значення $x_{\min}$, то всі наступні дії зводяться до використання рівняння для різниць .

$$x_i - x_{\min} = \varepsilon_i$$

Додаємо ліві та праві частини рівняння: $[x] - n x_{\min} = [\varepsilon]$

Ділимо на кількість вимірів n : $\dfrac{[x]}{n} - x_{\min} = \dfrac{[\varepsilon]}{n}$

Враховуючи, що $\dfrac{[x]}{n} = \tilde{x}$, остаточно формула середнього арифметичного набуває вигляду

$$\tilde{x} = x_{\min} + \frac{[\varepsilon]}{n}$$

3. Похибка простої арифметичної середини

Проста арифметична середина $\tilde{x}$ обчислюється за результатами вимірів $x_1, x_2, ..., x_n$. Отже, $\tilde{x}$ є функцією незалежних результатів вимірів: .

$$\tilde{x} = \frac{[x]}{n} = \frac{1}{n}x_1 + \frac{1}{n}x_2 + ... + \frac{1}{n}x_n = F(x)$$

Для визначення середньої квадратичної похибки $m_{\tilde{x}} = m_F$ використаємо формулу оцінки точності функцій незалежних результатів вимірів

$$m_F^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0^2 \cdot m_i^2$$

Отримаємо: $$m_{\tilde{x}}^2 = \frac{1}{n^2}m_1^2 + \frac{1}{n^2}m_2^2 + ... + \frac{1}{n^2}m_n^2$$

Враховуючи, що похибки рівноточних результатів вимірів $m_1 = m_2 = ... = m_n = m$,

$$m_{\tilde{x}}^2 = \frac{n}{n^2}m^2 = \frac{m^2}{n}$$

Остаточно формула середньої квадратичної похибки простої арифметичної середини набуває вигляду

$$\boxed{m_{\tilde{x}} = M = \frac{m}{\sqrt{n}}}$$

4. Похибки результатів рівноточних вимірів величини

За умови відомого істинного значення X вимірюваної величини можна оцінити:

1. Істинні похибки рівноточних результатів вимірів .

$$\theta_i = x_i - X$$

2. Середню квадратичну похибку рівноточних результатів вимірів

$$\boxed{m = \sqrt{\frac{[\theta^2]}{n}}}$$

Дана формула еквівалентна формулі характеристики середнього квадратичного відхилення (стандарту) σ розподілу випадкової величини, якою оперують у теорії ймовірностей і математичній статистиці. Її називають **формула Гаусса**.

За умови невідомого істинного значення X вимірюваної величини здійснити оцінювання точності результатів вимірів з використанням зазначених формул неможливо.

4. Похибки результатів рівноточних вимірів величини

За умови невідомого істинного значення X вимірюваної величини його замінюють найбільш надійним значенням $\tilde{x}$, яке обчислюють за принципом простої арифметичної середини. Тоді **в основу оцінки точності покладають відхилення**

$$v_i = x_i - \tilde{x}$$

Властивості відхилень v_i .

1. Алгебраїчна сума відхилень v_i завжди дорівнює нулю: $[v] = 0$

Обґрунтування:

$$[v] = [x] - n\tilde{x} = [x] - n\frac{[x]}{n} = 0$$

Якщо значення $\tilde{x}$ заокруглюють і має місце похибка заокруглення $\Delta = \tilde{x} - \tilde{x}_{окр}$, то $[v] = n\Delta$.

2. Сума квадратів відхилень v_i мінімальна і завжди менша від суми квадратів відхилень тих же результатів вимірів від будь-якої іншої величини $x' \neq \tilde{x}$:

$$[v^2] = \min < [\varepsilon^2] \quad \text{де} \quad \varepsilon_i = x_i - x'$$

Обґрунтування:

Відхилення v_i і ε_i різняться між собою на сталу величину: $\varepsilon_i - v_i = x_i - x' - x_i + \tilde{x} = \tilde{x} - x' = c$

Звідси: $\varepsilon_i = v_i + c$ $\quad [\varepsilon^2] = [(v+c)^2] = [v^2 + c^2 + 2vc] = [v^2] + nc^2 + 2[v]c = [v^2] + nc^2$

Тому завжди $[v^2] < [\varepsilon^2]$. **Отже, проста арифметична середина у порівнянні з будь-якою іншою величиною є найбільш надійним значенням рівноточних результатів вимірів**. З цієї властивості слідує рівняння, яке використовують для контролю проміжних обчислень:

$$[\varepsilon] = [v] + nc = nc \qquad c = \frac{[\varepsilon]}{n} \qquad c^2 = \frac{[\varepsilon]^2}{n^2} \qquad [v^2] = [\varepsilon^2] - \frac{[\varepsilon]^2}{n}$$

4. Похибки результатів рівноточних вимірів величини

Середня квадратична похибка виміру, обчислена за відхиленнями v_i

Виразимо різницю $\theta_i - v_i$, беручи до уваги, що $\theta_i = x_i - X$ і $v_i = x_i - \tilde{x}$:

$$\theta_i - v_i = x_i - X - x_i + \tilde{x} = \tilde{x} - X = \eta$$

Величина $\eta = \theta_F$ - це **істинна похибка простої арифметичної середини**.

Здійснимо арифметичні перетворення рівняння $\theta_i = v_i + \eta$:

$$\theta_i^2 = v_i^2 + \eta^2 + 2v_i\eta \qquad [\theta^2] = [v^2] + n\eta^2 + 2\eta[v] = [v^2] + n\eta^2$$

$$\frac{[\theta^2]}{n} = \frac{[v^2]}{n} + \eta^2 = m^2$$, що слідує з формули Гаусса $m = \sqrt{\frac{[\theta^2]}{n}}$

Беручи до уваги граничну умову $\lim\limits_{n \to \infty} M = \eta$, маємо $\eta = M = \frac{m}{\sqrt{n}}$. На цій основі

$$m^2 = \frac{[v^2]}{n} + \frac{m^2}{n} \qquad \frac{[v^2]}{n} = m^2 - \frac{m^2}{n} = \frac{m^2(n-1)}{n} \qquad [v^2] = m^2(n-1)$$

Остаточно: $$\boxed{m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}}}$$

Отримана формула називається **формула Бесселя** для обчислення середньої квадратичної похибки рівноточних вимірів за відхиленнями результатів від простої арифметичної середини.

Черговість дій
при математичній обробці результатів рівноточних вимірів величини

1. Обчислення найбільш надійного значення (простої арифметичної середини) за формулами

$$\tilde{x} = \frac{[x]}{n} \qquad \text{або} \qquad \tilde{x} = x_{\min} + \frac{[\varepsilon]}{n}$$

2. Обчислення відхилень $v_i = x_i - \tilde{x}$ та $\varepsilon_i = x_i - x_{\min}$.

Контролі обчислень: 1) $[v] = n\Delta$ 2) $[v^2] = [\varepsilon^2] - \frac{[\varepsilon]^2}{n}$

3. Обчислення середньої квадратичної похибки вимірів за формулою Бесселя

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}}$$

4. Обчислення середньої квадратичної похибки простої арифметичної середини

$$m_{\tilde{x}} = M = \frac{m}{\sqrt{n}}$$

5. Довірчий інтервал для істинного значення величини

Проста арифметична середина $\tilde{x}$ приблизно виражає істинне значення величини X. Похибку заміни невідомого істинного значення величини простою арифметичною серединою можна визначити шляхом побудови довірчого інтервалу I_β при заданій довірчій імовірності β, використовуючи $\tilde{x}$ та її середню квадратичну похибку M:

$$I_\beta = \left(\tilde{x} - t_\beta M; \tilde{x} + t_\beta M\right)$$

При кількості вимірів $n < 20$ коефіцієнт t_β визначають з таблиць розподілу Стьюдента.

При кількості вимірів $n \geq 20$ розподіл Стьюдента мало відрізняється від нормального, тому коефіцієнт t_β визначають як параметр нормального закону розподілу на основі формули

$$t_\beta = \arg \Phi^* \left(\frac{1+\beta}{2}\right)$$

Довірчий інтервал I_β вказує границі, в яких з ймовірністю β буде знаходитись невідоме істинне значення вимірюваної величини X:

$$\tilde{x} - t_\beta M \leq X \leq \tilde{x} + t_\beta M$$

6. Оцінка точності значень середніх квадратичних похибок

При великій кількості вимірів середні квадратичні похибки вимірів m та найбільш надійного значення M обчислюються достатньо надійно.

На практиці часто кількість вимірів обмежена порядком 10-20. В таких випадках похибки m та M є сумнівними і в достатній мірі неточними. Тому при математичній обробці результатів за кількістю вимірів $n < 20$ рекомендується виконувати оцінку точності середніх квадратичних похибок m та M.

Для цього обчислюють середні квадратичні похибки m_m та m_M значень середніх квадратичних похибок m та M :

$$m_m \approx \frac{m}{\sqrt{2(n-1)}}$$

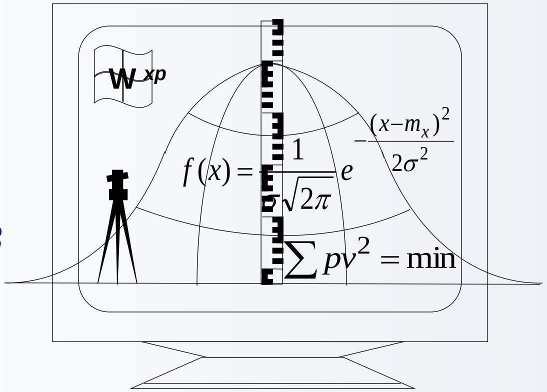
$$m_M \approx \frac{M}{\sqrt{2(n-1)}}$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Кафедра геодезії та картографії

Спеціальність 193 “Геодезія та землеустрій”

Дисципліна ***МАТЕМАТИЧНА ОБРОБКА ГЕОДЕЗИЧНИХ ВИМІРІВ***
Модуль 2 ***ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОХИБОК ВИМІРІВ***



Лектор О.А.Тадєєв

Тема 3

МАТЕМАТИЧНА ОБРОБКА НЕРІВНОТОЧНИХ ВИМІРІВ ВЕЛИЧИНИ

1. Зміст і мета розв'язування завдання
2. Загальна арифметична середина
3. Ваги вимірів та функцій виміряних величин
4. Середня квадратична похибка одиниці ваги. Похибки вимірів і загальної арифметичної середини
5. Формули обчислення середньої квадратичної похибки одиниці ваги

1. Зміст і мета розв'язування завдання

Нерівноточними вимірами окремої фізичної величини називають виміри, які проведено в різних умовах. З точки зору числових оцінок точності нерівноточні виміри характеризуються різними як істинними, так і середніми квадратичними похибками.

Постановка завдання

Проведено n нерівноточних вимірів величини.

$x_1, x_2, ..., x_n$ - результати вимірів.

$m_1 \neq m_2 \neq ... \neq m_n$ - середні квадратичні похибки результатів вимірів.

Істинне значення X та істинні похибки $\theta_i = x_i - X$ результатів вимірів невідомі.

За результатами математичної обробки результатів вимірів величини ***необхідно визначити***:

1) найбільш надійне значення величини $\tilde{x}$, яке має замінити і бути найбільш близьким до істинного;
2) середню квадратичну похибку найбільш надійного значення $m_{\tilde{x}}$;
3) середні квадратичні похибки вимірів $m_1, m_2, ..., m_n$.

2. Загальна арифметична середина

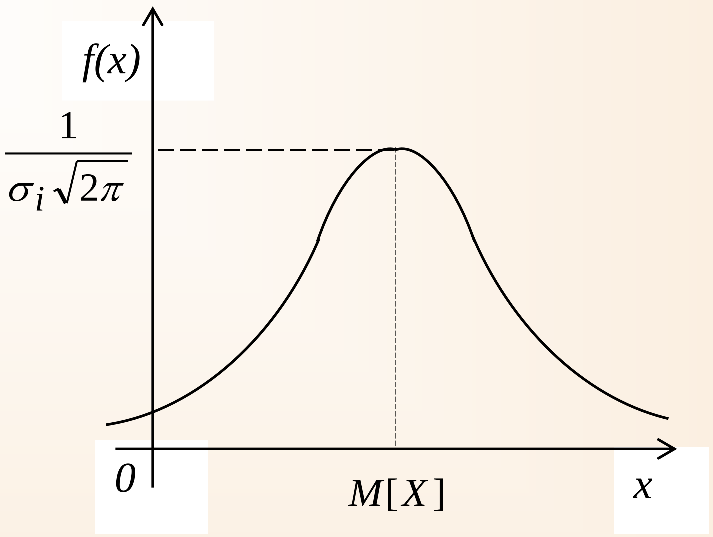
За умови відсутності в результатах вимірів x_i систематичних похибок $\delta = M[x] - X$ їх точність визначається лише випадковими похибками $\zeta_i = x_i - M[x]$, які підпорядковуються нормальному законові розподілу. За такої умови істинне значення X вимірюваної величини замінюють найбільш надійним значенням $\tilde{x}$, яке за ймовірністю є найбільш близьким до істинного і ототожнюється з математичним сподіванням $M[X]$. $M[X]$ відповідає найбільшому значенню ймовірності сукупності результатів вимірів цієї величини. Це слідує з функції щільності нормального закону розподілу

$$f(x_i) = \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i - M[X])^2}{2\sigma_i^2}}$$

Максимум $\frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}}$ функції $f(x_i)$ досягається при найменшому значенні показника степені

$$F = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - M[X])^2}{2\sigma_i^2} = \min$$

Максимум функції $f(x_i)$ відповідає центру розподілу, яким є математичне сподівання $M[X]$.



2. Загальна арифметична середина

Таким чином, найбільшу ймовірність сукупності результатів вимірів x_i і найбільш надійне значення $\tilde{x}$ цих результатів можна отримати лише за умови мінімуму функції виду

$$F=\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-M[X])^2}{2\sigma_i^2}=\min \quad \text{або} \quad F=\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\tilde{x})^2}{2m_i^2}=\min,$$

враховуючи, що $\sigma_i=m_i$, а $M[X]$ ототожнюється з $\tilde{x}$. Розв'язок поставленої задачі можливий, якщо частинні похідні функції дорівнюють нулю:

$$\frac{dF}{dx_i}=0$$

Після диференціювання отримаємо:

$$\frac{d}{dx_i}\{\frac{(x_1-\tilde{x})^2}{2m_1^2}+\ldots+\frac{(x_n-\tilde{x})^2}{2m_n^2}\}=2\frac{x_1-\tilde{x}}{2m_1^2}+\ldots+2\frac{x_n-\tilde{x}}{2m_n^2}=0 \qquad x_1\frac{c}{m_1^2}-\tilde{x}\frac{c}{m_1^2}+\ldots+x_n\frac{c}{m_n^2}-\tilde{x}\frac{c}{m_n^2}=[x\frac{c}{m^2}]-\tilde{x}[\frac{c}{m^2}]=0$$

де c - довільний сталий додатній коефіцієнт пропорційності. Звідси найбільш надійне значення

$$\tilde{x}=\frac{[x\frac{c}{m^2}]}{[\frac{c}{m^2}]} \quad \text{або} \quad \boxed{\tilde{x}=\frac{[xp]}{[p]}}$$

Відношення $\frac{c}{m_i^2}=p_i$ називають **ваги нерівноточних результатів вимірів величини**.

Величина $\tilde{x}$ - це найбільш надійне значення нерівноточних вимірів величини і називається середнє вагове або загальна арифметична середина. В деяких практичних задачах $\tilde{x}$ зручно обчислювати за формулою

$$\tilde{x}=x_{\min}+\frac{[p\varepsilon]}{[p]}$$

де $x_{\min}$ - найменший результат вимірів ; $\varepsilon_i=x_i-x_{\min}$.

3. Ваги вимірів та функцій виміряних величин

Ваги вимірів

Вагами вимірів називають безрозмірні показники ступеню довіри до результатів нерівноточних вимірів величини. З такого визначення слідує, що більшим за числовим значенням вагам вимірів відповідає вища точність вимірів (або менша середня квадратична похибка). Тому ваги і середні квадратичні похибки мають обернену пропорційну залежність:

$$p_i = \frac{c}{m_i^2}$$

На практиці часто середні квадратичні похибки вимірів невідомі, але аналіз умов вимірів дає підстави вважати отримані результати нерівноточними. Тоді ваги вимірів встановлюють за існуючими підставами і в кожному конкретному випадку при обчисленні ваг враховують як саме зміна тих чи інших умов впливає на точність результатів вимірів. **Деякі типові приклади обчислення ваг:**

- кут вимірювали різним числом прийомів k_i. Збільшення числа прийомів зумовлює підвищення точності отриманих результатів вимірів і вага має розраховуватись із прямої залежності від числа прийомів:

$$p_i = \frac{k_i}{c}$$

- перевищення визначали різним числом станцій K_i. Збільшення числа станцій зумовлює зниження точності результатів вимірів перевищення і вага повинна обчислюватись із оберненої співвідносної залежності з числом станцій:

$$p_i = \frac{c}{K_i}$$

- перевищення визначали за ходами різної довжини S_i. Збільшення довжини ходу зумовлює зниження точності результатів вимірів перевищення і вага повинна обчислюватись із оберненої співвідносної залежності з довжиною ходу:

$$p_i = \frac{c}{S_i}$$

Вибір коефіцієнта *c* не змінює кінцевих результатів обробки вимірів. Він відіграє роль коефіцієнта пропорційності. Принципово важливим є не порядок ваг, а їх взаємні співвідношення між собою. Коефіцієнт *c* встановлюють з такого розрахунку, щоб ваги були близькими до одиниці - це спрощує виконання подальших розрахунків.

3. Ваги вимірів та функцій виміряних величин

Ваги функцій виміряних величин

Дане завдання розв'язується аналогічно завданню визначення середньої квадратичної похибки m_F функції $F = f(x_1,...,x_n)$ виміряних величин $x_1, x_2,...,x_n$:

$$m_F^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0^2 \cdot m_i^2 + 2\sum_{i<j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0 \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)_0 \cdot r_{i,j} \cdot m_i \cdot m_j$$

Коефіцієнт кореляції r_{ij} виражає ймовірну залежність результатів вимірів $x_1, x_2,...,x_n$. Беручи до уваги співвідношення ваг та середніх квадратичних похибок результатів вимірів

$$p_i = \frac{1}{m_i^2}$$

для оберненої ваги $\frac{1}{P_F}$ функції залежних аргументів отримаємо:

$$\frac{1}{P_F} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0^2 \frac{1}{p_i} + 2\sum_{i<j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)_0 \frac{r_{ij}}{\sqrt{p_i p_j}}$$

Для оберненої ваги функції незалежних аргументів

$$\frac{1}{P_F} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0^2 \frac{1}{p_i}$$

3. Ваги вимірів та функцій виміряних величин

Вага загальної арифметичної середини

Загальна арифметична середина $\tilde{x}$ є функцією $F = f(x_1,...,x_n)$ результатів нерівноточних вимірів $x_1, x_2,...,x_n$:

$$\tilde{x} = \frac{[xp]}{[p]} = \frac{x_1 p_1 + ... + x_n p_n}{[p]} = F$$

Застосовуючи до неї формулу обчислення оберненої ваги функції незалежних результатів вимірів

$$\frac{1}{P_F} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0^2 \frac{1}{p_i}$$

отримаємо:

$$\frac{1}{P_F} = \frac{1}{P_{\tilde{x}}} = \frac{p_1^2}{[p]^2} \cdot \frac{1}{p_1} + ... + \frac{p_n^2}{[p]^2} \cdot \frac{1}{p_n} = \frac{1}{[p]^2}(p_1 + ... + p_n) = \frac{1}{[p]}$$

Остаточно

$$P_{\tilde{x}} = [p]$$

4. Середня квадратична похибка одиниці ваги

Похибки вимірів і загальної арифметичної середини

Виділимо з результатів x_i нерівноточних вимірів величини значення x_k , в якого вага дорівнює одиниці, тобто $p_k = 1$. Середню квадратичну похибку m_k такого результату позначують μ. Тоді

$$p_k = \frac{\mu^2}{m_k^2} = 1 \qquad \text{і} \qquad \mu = m_k = \sqrt{c}$$

Величину μ називають середня квадратична похибка одиниці ваги. **Середня квадратична похибка одиниці ваги - це похибка результатів нерівноточних вимірів, в яких вага дорівнює одиниці.**

Беручи до уваги, що вага будь-якого результату $p_i = \dfrac{c}{m_i^2}$, отримаємо $\mu = m_i \sqrt{p_i}$. З цього слідує:

$$\boxed{m_i = \frac{\mu}{\sqrt{p_i}}}$$

тобто середні квадратичні похибки результатів нерівноточних вимірів величини виражаються через середню квадратичну похибку одиниці ваги і ваги відповідних результатів. Для середньої квадратичної похибки загальної арифметичної середини

$$\boxed{m_{\tilde{x}} = M = \frac{\mu}{\sqrt{P_{\tilde{x}}}} = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}}}$$

Таким чином, **середню квадратичну похибку одиниці ваги при оцінці точності нерівноточних вимірів потрібно обчислювати завжди** незалежно від того, чи є серед вимірів результати з вагою, яка дорівнює одиниці, чи такі результати відсутні.

5. Формули обчислення середньої квадратичної похибки одиниці ваги
Середня квадратична похибка одиниці ваги, обчислена за істинними похибками вимірів

За умови відомого істинного значення X вимірюваної величини можна оцінити:

1. Істинні похибки нерівноточних результатів вимірів .

$$\theta_i = x_i - X$$

2. Середню квадратичну похибку одиниці ваги

$$\boxed{\mu = \sqrt{\frac{[p\theta^2]}{n}}}$$

Дана формула називається **формула Гаусса** для обчислення похибки одиниці ваги. Вона є узагальненням формули Гаусса для оцінювання похибок результатів рівноточних вимірів і еквівалентна формулі характеристики середнього квадратичного відхилення (стандарту) σ розподілу випадкової величини, якою оперують у теорії ймовірностей і математичній статистиці.

За умови невідомого істинного значення X вимірюваної величини здійснити оцінювання точності результатів вимірів з використанням зазначених формул неможливо.

5. Формули обчислення середньої квадратичної похибки одиниці ваги

Відхилення результатів вимірів від загальної арифметичної середини

За умови невідомого істинного значення X вимірюваної величини його замінюють найбільш надійним значенням $\tilde{x}$, яке обчислюють за принципом загальної арифметичної середини. Тоді **в основу оцінки точності покладають відхилення**

$$v_i = x_i - \tilde{x}$$

Властивості відхилень v_i .

Обґрунтування властивостей здійснюється на такій же основі, як і для рівноточних вимірів.

1. Алгебраїчна сума добутків відхилень v_i на відповідні їм ваги p_i завжди дорівнює нулю: $[vp]=0$

Якщо значення $\tilde{x}$ заокруглюють і має місце похибка заокруглення $\Delta = \tilde{x} - \tilde{x}_{окр}$, то $[vp] = \Delta[p]$.

2. Сума добутків квадратів відхилень v_i на відповідні їм ваги p_i мінімальна і завжди менша від суми добутків квадратів відхилень тих же результатів вимірів від будь-якої іншої величини $x' \neq \tilde{x}$, на відповідні їм ваги:

$$[pv^2] = \min < [p\varepsilon^2] \qquad \text{де} \qquad \varepsilon_i = x_i - x'$$

З цієї властивості слідує рівняння, яке використовують для контролю проміжних обчислень:

$$[pv^2] = [p\varepsilon^2] - \frac{[p\varepsilon]^2}{[p]}$$

5. Формули обчислення середньої квадратичної похибки одиниці ваги

Середня квадратична похибка одиниці ваги, обчислена за відхиленнями v_i.

Виразимо різницю $\theta_i - v_i$, беручи до уваги, що $\theta_i = x_i - X$ і $v_i = x_i - \tilde{x}$:

$$\theta_i - v_i = x_i - X - x_i + \tilde{x} = \tilde{x} - X = \eta$$

Величина $\eta = \theta_F$ - це **істинна похибка загальної арифметичної середини**.

Здійснимо арифметичні перетворення рівняння $\theta_i = v_i + \eta$: $\theta_i^2 = v_i^2 + \eta^2 + 2v_i\eta$

$$\theta_i^2 p_i = v_i^2 p_i + \eta^2 p_i + 2v_i\eta p_i \qquad [\theta^2 p] = [v^2 p] + \eta^2[p] + 2\eta[vp] = [v^2 p] + \eta^2[p]$$

$$\frac{[\theta^2 p]}{n} = \frac{[v^2 p]}{n} + \frac{\eta^2[p]}{n} = \mu^2$$, що слідує з формули Гаусса $\mu = \sqrt{\frac{[p\theta^2]}{n}}$

Беручи до уваги граничну умову $\lim\limits_{n\to\infty} M = \eta$, маємо $\eta^2 = M^2 = \frac{\mu^2}{[p]}$, де $M = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}}$.
На цій основі:

$$\mu^2 = \frac{[v^2 p]}{n} + \frac{[p]}{n}\frac{\mu^2}{[p]} = \frac{[v^2 p]}{n} + \frac{\mu^2}{n} \qquad \frac{[v^2 p]}{n} = \mu^2 - \frac{\mu^2}{n} = \frac{\mu^2(n-1)}{n} \qquad [v^2 p] = \mu^2(n-1)$$

Остаточно: $$\boxed{\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-1}}}$$

Отримана формула називається **формула Бесселя** для обчислення середньої квадратичної похибки одиниці ваги за відхиленнями результатів вимірів від загальної арифметичної середини.

Черговість дій
при математичній обробці результатів нерівноточних вимірів величини

1. Обчислення ваг вимірів за аналізом умов проведення вимірів і підставами вважати отримані результати нерівноточними.

2. Обчислення найбільш надійного значення (загальної арифметичної середини) за формулами

$$\tilde{x} = \frac{[xp]}{[p]} \quad \text{або} \quad \tilde{x} = x_{\min} + \frac{[p\varepsilon]}{[p]}$$

3. Обчислення відхилень $v_i = x_i - \tilde{x}$ та $\varepsilon_i = x_i - x_{\min}$.

Контролі обчислень: 1) $[vp] = \Delta[p]$, де $\Delta = \tilde{x} - \tilde{x}_{окр}$ 2) $[pv^2] = [p\varepsilon^2] - \frac{[p\varepsilon]^2}{[p]}$

4. Обчислення середньої квадратичної похибки одиниці ваги за формулою Бесселя

$$\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-1}}$$

5. Обчислення середніх квадратичних похибок вимірів

$$m_i = \frac{\mu}{\sqrt{p_i}}$$

6. Обчислення середньої квадратичної похибки загальної арифметичної середини

$$m_{\tilde{x}} = M = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}}$$

Довірчий інтервал для істинного значення величини

Загальна арифметична середина $\tilde{x}$ приблизно виражає істинне значення величини X. Похибку заміни невідомого істинного значення простою арифметичною серединою можна визначити шляхом побудови довірчого інтервалу I_β при заданій довірчій імовірності β, використовуючи $\tilde{x}$ та її середню квадратичну похибку M:

$$I_\beta = \left(\tilde{x} - t_\beta M ; \tilde{x} + t_\beta M\right)$$

При кількості вимірів $n < 20$ коефіцієнт t_β визначають з таблиць розподілу Стьюдента.

При кількості вимірів $n \geq 20$ розподіл Стьюдента мало відрізняється від нормального, тому коефіцієнт t_β визначають як параметр нормального закону розподілу на основі формули

$$t_\beta = \arg \Phi^* \left(\frac{1+\beta}{2}\right)$$

Довірчий інтервал I_β вказує границі, в яких з ймовірністю β буде знаходитись невідоме істинне значення вимірюваної величини X:

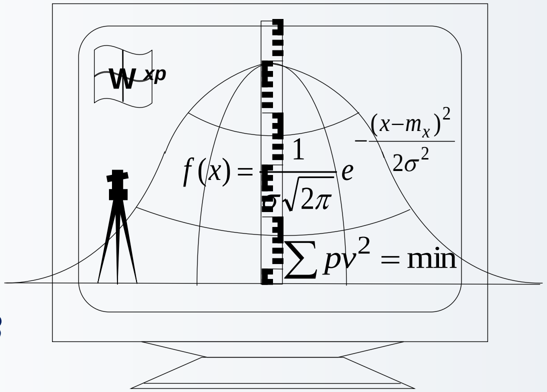
$$\tilde{x} - t_\beta M \leq X \leq \tilde{x} + t_\beta M$$

Оцінка точності значень середніх квадратичних похибок

При великій кількості вимірів середні квадратичні похибки одиниці ваги μ , вимірів m_i та найбільш надійного значення M обчислюються достатньо надійно.
На практиці часто кількість вимірів обмежена порядком 10-20. В таких випадках похибки μ , m_i та M є сумнівними і в достатній мірі неточними. Тому при математичній обробці результатів за кількістю вимірів $n < 20$ рекомендується виконувати оцінку точності середніх квадратичних похибок μ , m_i та M . Для цього обчислюють середні квадратичні похибки m_μ , m_{m_i} та m_M значень відповідних середніх квадратичних похибок :

$$m_\mu \approx \frac{\mu}{\sqrt{2(n-1)}} \qquad m_{m_i} \approx \frac{m_i}{\sqrt{2(n-1)}} \qquad m_M \approx \frac{M}{\sqrt{2(n-1)}}$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування



Кафедра геодезії та картографії

Спеціальність 193 “Геодезія та землеустрій”

Дисципліна ***МАТЕМАТИЧНА ОБРОБКА ГЕОДЕЗИЧНИХ ВИМІРІВ***
Модуль 2 ***ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОХИБОК ВИМІРІВ***

Лектор О.А.Тадєєв

Тема 4

ОБРОБКА ПОДВІЙНИХ ВИМІРІВ ОДНОРІДНИХ ВЕЛИЧИНИ

1. Зміст і мета розв'язування завдання
2. Обробка подвійних вимірів, які рівноточні в сукупності
3. Обробка подвійних нерівноточних вимірів, які рівноточні в парі для кожної величини
4. Обробка подвійних вимірів, які нерівноточні в сукупності

1. Зміст і мета розв'язування завдання

Подвійними вимірами n однорідних фізичних величин $X_1, X_2, ..., X_n$ називають виміри, які виконано двічі для кожної з цих величин:

$$x_1, x_2, ..., x_n - \textit{перший вимір величин } X_1, X_2, ..., X_n$$

$$x'_1, x'_2, ..., x'_n - \textit{другий вимір величин } X_1, X_2, ..., X_n$$

За результатами математичної обробки результатів вимірів цих величин ***необхідно визначити***:

- найбільш надійні значення величин;
- середні квадратичні похибки найбільш надійних значень;
- середні квадратичні похибки вимірів.

В частині визначення найбільш надійних значень $\tilde{x}_i$ не виникає жодних проблем – їх обчислюють за правилами простої чи загальної арифметичної середини за парами подвійних вимірів кожної величини. Проте оцінка точності, виведена тільки з двох результатів вимірів, не є надійною. Тому ця частина математичної обробки виконується за сукупністю усіх результатів, виходячи з різниць подвійних вимірів кожної величини

$$d_i = x_i - x'_i$$

На практиці проведення подвійних вимірів мають місце наступні випадки:
1) усі виміри x_i та x'_i в сукупності рівноточні;
2) виміри в парах для кожної величини рівноточні, але пари вимірів величин між собою нерівноточні;
3) усі виміри x_i та x'_i в сукупності нерівноточні.

2. Обробка подвійних вимірів, які рівноточні в сукупності

Найбільш надійні значення $\tilde{x}_i$ величин x_i, кожна з яких виміряна двічі, обчислюють як проста арифметична середина (середнє арифметичне) з відповідних результатів вимірів x_i та x_i':

$$\boxed{\tilde{x}_i = \frac{x_i + x_i'}{2}}$$

Кожне із значень $\tilde{x}_i$ є функцією результатів вимірів x_i та x_i': $\tilde{x}_i = \frac{1}{2}x_i + \frac{1}{2}x_i' = F(x, x')$

Для визначення середньої квадратичної похибки $m_{\tilde{x}} = m_F$ використаємо формулу оцінки точності функцій незалежних результатів вимірів

$$m_F^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0^2 \cdot m_i^2 \qquad m_{\tilde{x}}^2 = \frac{1}{2^2} m_x^2 + \frac{1}{2^2} m_{x'}^2$$

Враховуючи, що похибки рівноточних результатів вимірів $m_x = m_{x'} = m$, $m_{\tilde{x}}^2 = \frac{1}{2} m^2$.

Остаточно середня квадратична похибка найбільш надійних значень виразиться формулою:

$$\boxed{m_{\tilde{x}} = \frac{m}{\sqrt{2}}}$$

Вона є наслідком загальної формули простої арифметичної середини

$$m_{\tilde{x}} = M = \frac{m}{\sqrt{n}}$$

2. Обробка подвійних вимірів, які рівноточні в сукупності

Якби було б можливо виконати виміри безпомилково, то результати вимірів кожної величини були б рівними і різниці d_i дорівнювали б нулю. Фактично d_i набувають певних числових значень, що є наслідком впливу на процес вимірів похибок різного походження. Тому кожна різниця d_i є істинною похибкою самої різниці. На цій основі середня квадратична похибка m_d різниць d_i виражається за формулою **Гаусса**:

$$\boxed{m_d = \sqrt{\frac{[d^2]}{n}}}$$

Формулою Гаусса можна користуватись для обчислення похибки m_d тільки за умови відсутності в результатах подвійних вимірів систематичних похибок. Практично вона може бути використана і в тих випадках, коли їх вплив на результати вимірів є допустимим.

2. Обробка подвійних вимірів, які рівноточні в сукупності

Результати подвійних вимірів x_i та x'_i можуть містити систематичні похибки. Основна частина систематичних похибок вимірів компенсується при обчисленні різниць $d_i = x_i - x'_i$. Проте навіть це не забезпечує їх повного видалення. Середнє значення залишкового впливу систематичних похибок можна оцінити за величиною

$$\frac{[d]}{n} = \delta$$

Якщо результати подвійних вимірів обтяжені залишковим впливом систематичних похибок, то $\delta \neq 0$.
Суттєвість такого впливу дає змогу оцінити нерівність

$$|\delta| \leq \frac{1}{5} m_d$$

або рівносильна щодо неї

$$|[d]| \leq 0.25[|d|]$$

Якщо умова однієї чи іншої нерівності **виконується**, то залишковий вплив систематичних похибок є несуттєвий і ним можна нехтувати. В такому разі оцінка точності ґрунтується на формулі Гаусса.
В протилежному випадку формулою Гаусса користуватись неприпустимо: якщо умова однієї чи іншої нерівності **не виконується**, потрібно насамперед видалити вплив наявних систематичних похибок на результати подвійних вимірів.

2. Обробка подвійних вимірів, які рівноточні в сукупності

Загалом систематичним похибкам властивий постійний або односторонній характер. При рівноточних подвійних вимірах однорідних величин систематичні похибки спричинюють на виміри постійний вплив, не змінюючи свій знак і абсолютну величину. Тому при обробці подвійних рівноточних вимірів систематичні похибки можна видалити за принципом рівномірного розподілу шляхом відніманням від різниць d_i середнього значення залишкового систематичного впливу δ :

$$d_i' = d_i - \delta$$

Тоді $d_i' -$ це різниці подвійних рівноточних вимірів, які позбавлені впливу постійних систематичних похибок. При будь-якому числі вимірів має дотримуватись умова: $[d'] = 0$

Обчислені за такої умови значення різниць d_i' є відхиленнями результатів рівноточних вимірів від простої арифметичної середини δ . Тому після видалення з результатів подвійних рівноточних вимірів систематичних похибок середня квадратична похибка різниць m_d обчислюється за формулою **Бесселя**

$$\boxed{m_d = \sqrt{\frac{[d'^2]}{n-1}}}$$

Якщо при обчисленні різниць d_i' користувались заокругленим значенням $\delta_{окр}$ і $d_i' = d_i - \delta_{окр}$, то має місце похибка заокруглення $\Delta = \delta - \delta_{окр}$ і тоді $[d'] = n\Delta$. Різниці d_i' , як відхилення результатів подвійних рівноточних вимірів від простої арифметичної середини, мають властивість $[d'^2] = \min$. Тому

$$[d'^2] = [d^2] - \frac{[d]^2}{n}$$

Останніми рівностями можна користуватись для контролю проміжних розрахунків при визначенні середньої квадратичної похибки різниць подвійних вимірів за формулою Бесселя.

2. Обробка подвійних вимірів, які рівноточні в сукупності

Різниці $d_i = x_i - x_i'$ обчислюються за результатами вимірів x_i та x_i'. Отже, d_i є функціями результатів вимірів: $d_i = F = f(x_i, x_i')$. Тому для вираження середньої квадратичної похибки m_d можна використати формулу оцінювання точності функцій незалежних результатів вимірів:

$$m_F^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0^2 \cdot m_i^2 \qquad m_F^2 = m_d^2 = m_x^2 + m_{x'}^2,$$

Оскільки виміри x_i та x_i' рівноточні з похибками $m_x = m_{x'} = m$, то $m_d = m\sqrt{2}$

На такій основі середня квадратична похибка окремого результату подвійних рівноточних **незалежних** вимірів виразиться формулою:

$$\boxed{m = \frac{m_d}{\sqrt{2}}}$$

Середня квадратична похибка різниць m_d обчислюється за формулами Гаусса або Бесселя, що визначається фактом відсутності чи наявності в результатах подвійних вимірів систематичних похибок.

2. Обробка подвійних вимірів, які рівноточні в сукупності

Якщо різниці $d_i = x_i - x_i'$ є функціями $d_i = F = f(x_i, x_i')$ залежних результатів вимірів x_i та x_i' і цю залежність виражає коефіцієнт кореляції $r_{i,j} = r_{x,x'}$, то для визначення середньої квадратичної похибки m_d різниць d_i використовують формулу оцінювання точності функцій залежних результатів вимірів:

$$m_F^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0^2 \cdot m_i^2 + 2\sum_{i<j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0 \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)_0 \cdot r_{i,j} \cdot m_i \cdot m_j \qquad m_F^2 = m_d^2 = m_x^2 + m_{x'}^2 - 2m_x m_{x'} r_{x,x'}$$

Враховуючи рівність похибок $m_x = m_{x'} = m$, маємо:

$$m_d^2 = 2m^2 - 2m^2 r_{x,x'} = 2m^2(1 - r_{x,x'})$$

На такій основі середня квадратична похибка окремого результату подвійних рівноточних **залежних** вимірів виразиться формулою:

$$\boxed{m = \frac{m_d}{\sqrt{2(1 - r_{x,x'})}}}$$

Середня квадратична похибка різниць m_d обчислюється за формулами Гаусса або Бесселя, що визначається фактом відсутності чи наявності в результатах подвійних вимірів систематичних похибок.

2. Обробка подвійних вимірів, які рівноточні в сукупності

Черговість дій при обробці результатів вимірів

1. Обчислення різниць подвійних вимірів однорідних величин $d_i = x_i - x_i'$

↓

2. Обчислення найбільш надійних значень величин $\tilde{x}_i$

↓

3. Перевірка умови допустимого впливу систематичних похибок вимірів

$$\left|[d]\right| \leq 0.25[|d|]$$

4. ***Якщо умова виконується***:

Обчислення середньої квадратичної похибки різниць m_d за формулою Гаусса

4. ***Якщо умова не виконується***:

4.1. Видалення залишкового впливу систематичних похибок за принципом рівномірного розподілу, обчислення різниць $d_i' = d_i - \delta$.

4.2. Обчислення середньої квадратичної похибки різниць m_d за формулою Бесселя

↓

5. Обчислення середньої квадратичної похибки вимірів $m = \frac{m_d}{\sqrt{2}}$

↓

6. Обчислення середньої квадратичної похибки найбільш надійних значень величин $m_{\tilde{x}} = \frac{m}{\sqrt{2}}$

3. Обробка подвійних нерівноточних вимірів, які рівноточні в парі для кожної величини

Ряд подвійних вимірів

$$x_1, x_2, \dots, x_n - \textit{перший вимір величин } X_1, X_2, \dots, X_n$$
$$x'_1, x'_2, \dots, x'_n - \textit{другий вимір величин } X_1, X_2, \dots, X_n$$

з точки зору точності характеризують наступні співвідношення середніх квадратичних похибок і ваг:

$$m_{x_i} = m_{x'_i} = m_i \quad m_1 \neq m_2 \neq \dots \neq m_n$$
$$p_{x_i} = p_{x'_i} = p_i \quad p_1 \neq p_2 \neq \dots \neq p_n$$

Різниці $d_i = x_i - x'_i$ є функціями результатів вимірів x_i та x'_i : $d_i = F = f(x_i, x'_i)$.
Для вираження ваг різниць використаємо формулу оцінки точності функцій незалежних результатів вимірів:

$$\frac{1}{P_F} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0^2 \frac{1}{p_i} \qquad \frac{1}{P_F} = \frac{1}{p_{d_i}} = \frac{1}{p_{x_i}} + \frac{1}{p_{x'_i}}$$

Враховуючи, що ваги кожної пари вимірів рівні $p_{x_i} = p_{x'_i} = p_i$, отримаємо:

$$\frac{1}{p_{d_i}} = \frac{2}{p_i} \qquad p_{d_i} = \frac{p_i}{2}$$

3. Обробка подвійних нерівноточних вимірів, які рівноточні в парі для кожної величини

Найбільш надійні значення $\tilde{x}_i$ величин X_i, кожна з яких виміряна двічі, обчислюють як проста арифметична середина (середнє арифметичне) з відповідних результатів вимірів x_i та x_i':

$$\boxed{\tilde{x}_i = \frac{x_i + x_i'}{2}}$$

Кожне із значень $\tilde{x}_i$ є функцією результатів вимірів x_i та x_i' : $\tilde{x}_i = \frac{1}{2}x_i + \frac{1}{2}x_i' = F(x, x')$

Для визначення ваг $p_{\tilde{x}_i}$ використаємо формулу оцінки точності функцій незалежних результатів вимірів

$$\frac{1}{P_F} = \sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial f}{\partial x_i})_0^2 \frac{1}{p_i} \qquad \frac{1}{P_F} = \frac{1}{p_{\tilde{x}_i}} = \frac{1}{4p_{x_i}} + \frac{1}{4p_{x_i'}}$$

Враховуючи, що ваги кожної пари вимірів рівні $p_{x_i} = p_{x_i'} = p_i$, $p_{\tilde{x}_i} = 2p_i$.

Тоді середні квадратичні похибки найбільш надійних значень виразяться формулами:

$$\boxed{m_{\tilde{x}_i} = \frac{\mu}{\sqrt{p_{\tilde{x}_i}}}} \qquad \boxed{m_{\tilde{x}_i} = \frac{\mu}{\sqrt{2p_i}}} \qquad \boxed{m_{\tilde{x}_i} = \frac{\mu}{2\sqrt{p_{d_i}}}}$$

3. Обробка подвійних нерівноточних вимірів, які рівноточні в парі для кожної величини

Якби було б можливо виконати виміри безпомилково, то результати вимірів кожної величини були б рівними і різниці d_i дорівнювали б нулю. Фактично d_i набувають певних числових значень, що є наслідком впливу на процес вимірів похибок різного походження. Тому кожна різниця d_i є істинною похибкою самої різниці. На цій основі середня квадратична похибка одиниці ваги μ, обчислена за істинними похибками нерівноточних вимірів (різницями d_i), виражається за формулою **Гаусса**:

$$\boxed{\mu = \sqrt{\frac{[p_d d^2]}{n}}} \quad \text{або} \quad \boxed{\mu = \sqrt{\frac{[pd^2]}{2n}}}$$

Якщо різниці $d_i = x_i - x_i'$ є функціями залежних результатів подвійних вимірів x_i та x_i' кожної з однорідних величин і цю залежність виражає коефіцієнт кореляції $r_{x,x'}$, то

$$\mu = \sqrt{\frac{[pd^2]}{2n(1 - r_{x,x'})}}$$

Формулою Гаусса можна користуватись для обчислення середньої квадратичної похибки одиниці ваги тільки за умови відсутності в результатах подвійних вимірів систематичних похибок. Практично вона може бути використана і в тих випадках, коли їх вплив на результати вимірів є допустимим.

3. Обробка подвійних нерівноточних вимірів, які рівноточні в парі для кожної величини

Результати подвійних вимірів x_i та x_i' можуть містити систематичні похибки. Основна частина систематичних похибок вимірів компенсується при обчисленні різниць $d_i = x_i - x_i'$. Проте навіть це не забезпечує їх повного видалення. Середнє значення залишкового впливу систематичних похибок нерівноточних вимірів за умов $p_{x_i} = p_{x_i'} = p_i$ і $p_1 \neq p_2 \neq \ldots \neq p_n$ можна оцінити за величиною загальної арифметичної середини

$$\delta = \frac{[p_d d]}{[p_d]}$$

Якщо результати подвійних вимірів обтяжені залишковим впливом систематичних похибок, то $\delta \neq 0$. Суттєвість такого впливу дає змогу оцінити нерівність

$$|\delta| \leq \frac{1}{5}\mu$$

або рівносильна щодо неї

$$\left|[d\sqrt{p_d}]\right| \leq 0.25\left[\left|d\sqrt{p_d}\right|\right]$$

Якщо умова однієї чи іншої нерівності **виконується**, то залишковий вплив систематичних похибок є несуттєвий і ним можна нехтувати. В такому разі оцінка точності ґрунтується на формулі Гаусса.

В протилежному випадку формулою Гаусса користуватись неприпустимо: якщо умова однієї чи іншої нерівності **не виконується**, потрібно насамперед видалити вплив наявних систематичних похибок на результати подвійних вимірів.

3. Обробка подвійних нерівноточних вимірів, які рівноточні в парі для кожної величини

При нерівноточних подвійних вимірах однорідних величин систематичні похибки спричинюють на виміри односторонній вплив, не змінюючи свій знак, але змінюючи абсолютну величину при зміні умов вимірів. Тому при обробці подвійних нерівноточних вимірів систематичні похибки можна видалити за принципом пропорційного розподілу шляхом відніманням від різниць d_i поправок δ_i :

$$d_i - \delta_i = d_i'$$

При обчисленні поправок δ_i потрібно проводити ретельний аналіз умов вимірів з метою встановлення факторів, які спричинюють односторонній вплив систематичних похибок. Залежно від таких факторів систематична похибка розподіляється у виміри диференційовано. Наприклад, при подвійних вимірах довжин ліній різного порядку

$$\delta_i = \frac{[d]}{[\tilde{x}]}\tilde{x}_i$$

$\tilde{x}_i$ – найбільш надійні значення подвійних вимірів довжин ліній. При подвійних вимірах перевищень в нівелірних ходах різної довжини

$$\delta_i = \frac{[d]}{[S]}S_i$$

S_i – довжини нівелірних ходів. При подвійних вимірах перевищень в ходах з різним числом штативів (станцій)

$$\delta_i = \frac{[d]}{[k]}k_i$$

k_i – число штативів відповідного ходу. Відношення

$$\frac{[d]}{[\tilde{x}]} = \delta_o \qquad \frac{[d]}{[S]} = \delta_o \qquad \frac{[d]}{[k]} = \delta_o$$

є сталою величиною для отриманого ряду подвійних вимірів. Величину δ_o називають коефіцієнтом залишкового систематичного впливу.

3. Обробка подвійних нерівноточних вимірів, які рівноточні в парі для кожної величини

Після врахування поправок δ_i , різниці $d_i - \delta_i = d_i'$ - це різниці подвійних нерівноточних вимірів, які позбавлені залишкового впливу односторонніх систематичних похибок. При будь-якому числі вимірів має дотримуватись умова:

$$[p_d d'] = 0$$

Обчислені за такої умови значення різниць d_i' є відхиленнями результатів нерівноточних вимірів від загальної арифметичної середини δ . Після видалення з результатів подвійних нерівноточних вимірів систематичних похибок середня квадратична похибка одиниці ваги μ обчислюється за формулою **Бесселя:**

$$\boxed{\mu = \sqrt{\frac{[p_d d'^2]}{n-1}}} \quad \text{або} \quad \boxed{\mu = \sqrt{\frac{[pd'^2]}{2(n-1)}}}$$

Якщо при обчисленні різниць d_i' користувались заокругленими значеннями δ_i і $d_i' = d_i - \delta_{окр}$, то має місце похибка заокруглення $\Delta = \delta - \delta_{окр}$ і тоді $[p_d d'] = \Delta[p_d]$. Різниці d_i' , як відхилення результатів подвійних нерівноточних вимірів від загальної арифметичної середини, мають властивість $[p_d d'^2] = \min$. Тому

$$[p_d d'^2] = [p_d d^2] - \frac{[p_d d]^2}{[p_d]}$$

Останніми рівностями можна користуватись для контролю проміжних розрахунків.

Після визначення середньої квадратичної похибки одиниці ваги за формулами Гаусса або Бесселя розраховують похибки результатів подвійних вимірів:

$$\boxed{m_i = \frac{\mu}{\sqrt{p_i}}}$$

3. Обробка подвійних нерівноточних вимірів, які рівноточні в парі для кожної величини

Черговість дій при обробці результатів вимірів

1. Обчислення різниць подвійних вимірів однорідних величин $d_i = x_i - x_i'$

2. Обчислення ваг вимірів p_i та ваг різниць p_{d_i}

3. Обчислення найбільш надійних значень величин $\tilde{x}_i$

4. Перевірка умови допустимого впливу систематичних похибок вимірів $\left|[d\sqrt{p_d}]\right| \le 0.25\left[\left|d\sqrt{p_d}\right|\right]$

5. ***Якщо умова виконується***:

Обчислення середньої квадратичної похибки одиниці ваги μ за формулою Гаусса

5. ***Якщо умова не виконується***:

5.1. Видалення залишкового впливу систематичних похибок за принципом пропорційного розподілу, обчислення різниць $d_i' = d_i - \delta_i$.

5.2. Обчислення середньої квадратичної похибки одиниці ваги μ за формулою Бесселя

6. Обчислення середніх квадратичних похибок вимірів $m_i = \dfrac{\mu}{\sqrt{p_i}}$

7. Обчислення середніх квадратичних похибок найбільш надійних значень величин $m_{\tilde{x}_i} = \dfrac{\mu}{\sqrt{2p_i}}$

4. Обробка подвійних вимірів, які нерівноточні в сукупності

Ряд подвійних вимірів

$$x_1, x_2, \ldots, x_n - \textit{перший вимір величин } X_1, X_2, \ldots, X_n$$

$$x'_1, x'_2, \ldots, x'_n - \textit{другий вимір величин } X_1, X_2, \ldots, X_n$$

з точки зору точності характеризують наступні співвідношення середніх квадратичних похибок і ваг:

$$m_{x_i} \neq m_{x'_i}; \quad p_{x_i} \neq p_{x'_i}.$$

У такому випадку всі виміри проведені в неоднакових умовах і мають різні середні квадратичні похибки та ваги.

4. Обробка подвійних вимірів, які нерівноточні в сукупності

Оцінку точності вимірів виконують за сукупністю різниць $d_i = x_i - x'_i$. Вага кожної різниці виражається як вага функції $d_i = F = f(x_i, x'_i)$ результатів незалежних нерівноточних вимірів x_i та x'_i:

$$\frac{1}{P_F} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0^2 \frac{1}{p_i} \qquad \frac{1}{p_{d_i}} = \frac{1}{p_{x_i}} + \frac{1}{p_{x'_i}} = \frac{p_{x_i} + p_{x'_i}}{p_{x_i} p_{x'_i}} \qquad p_{d_i} = \frac{p_{x_i} p_{x'_i}}{p_{x_i} + p_{x'_i}}$$

Якщо подвійні виміри обтяжені лише допустимими систематичними похибками, то середню квадратичну похибку одиниці ваги розраховують за формулою Гаусса:

$$\mu = \sqrt{\frac{[p_d d^2]}{n}}$$

Якщо подвійні виміри містять значні систематичні похибки і вони попередньо виключені з різниць d_i за принципом пропорційного розподілу, то середню квадратичну похибку одиниці ваги розраховують за формулою Бесселя:

$$\mu = \sqrt{\frac{[p_d d'^2]}{n-1}}$$

Тут $d'_i = d_i - \delta_i$. Допустимість впливу систематичних похибок перевіряють нерівністю

$$\left|[d\sqrt{p_d}]\right| \leq 0.25[\left|d\sqrt{p_d}\right|]$$

4. Обробка подвійних вимірів, які нерівноточні в сукупності

Середні квадратичні похибки кожного з подвійних вимірів x_i чи x_i' виражається з врахуванням відповідних їм ваг p_{x_i} чи $p_{x_i'}$:

$$m_{x_i} = \frac{\mu}{\sqrt{p_{x_i}}} \qquad m_{x_i'} = \frac{\mu}{\sqrt{p_{x_i'}}}$$

Найбільш надійні значення $\tilde{x}_i$ кожної з однорідних величин X_i виражаються за принципом загальної арифметичної середини (середнє вагове) як функції результатів нерівноточних вимірів x_i та x_i' :

$$\tilde{x}_i = \frac{x_i p_{x_i} + x_i' p_{x_i'}}{p_{x_i} + p_{x_i'}}$$

Вага загальної арифметичної середини, як найбільш надійного значення кожної величини, дорівнює сумі ваг результатів нерівноточних вимірів цієї величини:

$$p_{\tilde{x}_i} = p_{x_i} + p_{x_i'}$$

На цій основі, середні квадратичні похибки $m_{\tilde{x}_i}$ найбільш надійних значень $\tilde{x}_i$ виражаються, враховуючи відповідні цим значенням ваги $p_{\tilde{x}_i}$:

$$m_{\tilde{x}_i} = \frac{\mu}{\sqrt{p_{x_i} + p_{x_i'}}}$$