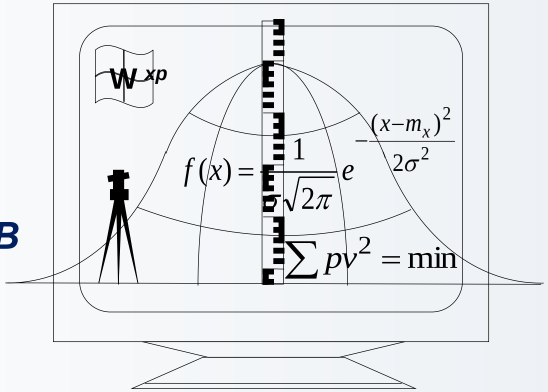
Національний університет
водного господарства
та природокористування

Кафедра геодезії та картографії

Спеціальність 193 “Геодезія та землеустрій”



Дисципліна ***МАТЕМАТИЧНА ОБРОБКА ГЕОДЕЗИЧНИХ ВИМІРІВ***
Модуль 2 ***ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОХИБОК ВИМІРІВ***

Лектор О.А.Тадєєв

Тема 2

МАТЕМАТИЧНА ОБРОБКА РІВНОТОЧНИХ ВИМІРІВ ВЕЛИЧИНИ

1. Зміст і мета розв'язування завдання
2. Проста арифметична середина
3. Похибка простої арифметичної середини
4. Похибки результатів рівноточних вимірів величини
5. Довірчий інтервал для істинного значення величини
6. Оцінка точності значень середніх квадратичних похибок

1. Зміст і мета розв'язування завдання

Рівноточними вимірами окремої фізичної величини називають однорідні виміри, які проведено в абсолютно однакових умовах. Результати рівноточних вимірів, як правило, відрізняються поміж собою. Тому з точки зору числових оцінок точності вони мають різні істинні похибки, проте завжди характеризуються однією, однаковою для всіх, середньою квадратичною похибкою.

Постановка завдання

Проведено n рівноточних вимірів величини.

$x_1, x_2, ..., x_n$ - результати вимірів.

$m_1 = m_2 = ... = m_n = m$ - середні квадратичні похибки результатів вимірів.

Істинне значення X та істинні похибки $\theta_i = x_i - X$ результатів вимірів невідомі.

За результатами математичної обробки результатів вимірів величини ***необхідно визначити***:

1) найбільш надійне значення величини $\tilde{x}$, яке має замінити і бути найбільш близьким до істинного;
2) середню квадратичну похибку найбільш надійного значення $m_{\tilde{x}}$;
3) середню квадратичну похибку вимірів m;
4) (за потреби) довірчий інтервал для істинного значення величини;
5) (за потреби) точність значень похибок m та $m_{\tilde{x}}$.

2. Проста арифметична середина

Істинна похибка $\theta_i = x_i - X$ вимірюваної величини характеризується:

- відхиленням результатів вимірів від їх математичного сподівання $\zeta_i = x_i - M[x]$, що є наслідком впливу випадкових похибок вимірів;
- відхиленням математичного сподівання від істинного значення величини $\delta = M[x] - X$, що є наслідком впливу систематичних похибок вимірів.

Разом $\theta_i = \zeta_i + \delta = x_i - M[x] + M[x] - X = x_i - X$.

Імовірнісне обґрунтування.

Вплив систематичних похибок у процесі математичної обробки вимірів зменшити неможливо – це потрібно виконувати під час проведення вимірів шляхом їх відповідної організації та дотримання методики вимірів. Тому при обробці можна оцінити лише вплив випадкових похибок, а найбільш надійне значення потрібно знаходити наближенням результатів вимірів до математичного сподівання. Отже, **математичне сподівання виражає найбільш надійне значення вимірюваної величини**. Беручи до уваги закон великих чисел теорії ймовірностей (теорема Чебишева), найкращим наближенням до математичного сподівання за результатами рівноточних вимірів величини є середнє арифметичне цих результатів:

$$\tilde{x} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n} \qquad \tilde{x} = \frac{[x]}{n}$$

Таким чином, **за умови відсутності у результатах рівноточних вимірів систематичних похибок**, математичне сподівання є найкращим наближенням до істинного значення величини. Його називають найбільш надійне значення вимірюваної величини і обчислюють як середнє арифметичне отриманих результатів вимірів (проста арифметична середина).

2. Проста арифметична середина

Арифметичне обґрунтування має в основі:

- умову відсутності у результатах рівноточних вимірів систематичних похибок;
- властивість компенсації випадкових похибок вимірів

$$\lim_{n\to\infty} \frac{[\theta]}{n} = 0$$

Виконаємо прості арифметичні дії з рівнянням для істинних похибок $x_i - X = \theta_i$.

Додаємо ліві та праві частини рівняння: $[x] - nX = [\theta]$

Ділимо на кількість вимірів n : $\frac{[x]}{n} - X = \frac{[\theta]}{n}$

Враховуючи, що $\frac{[x]}{n} = \tilde{x}$, отримаємо $\tilde{x} - \frac{[\theta]}{n} = X$

або з врахуванням властивості компенсації випадкових похибок вимірів $\boxed{\lim_{n\to\infty} \tilde{x} = X}$

Отримана формула виражає **принцип простої арифметичної середини:** за умов нескінченно великої кількості вимірів та відсутності систематичних похибок вимірів проста арифметична середина прямує до істинного значення вимірюваної величини.

2. Проста арифметична середина

Видозміна формули простої арифметичної середини (середнього арифметичного)

Якщо з результатів вимірів $x_1, x_2, ..., x_n$ виокремити мінімальне значення $x_{\min}$, то всі наступні дії зводяться до використання рівняння для різниць .

$$x_i - x_{\min} = \varepsilon_i$$

Додаємо ліві та праві частини рівняння: $[x] - nx_{\min} = [\varepsilon]$

Ділимо на кількість вимірів n : $$\frac{[x]}{n} - x_{\min} = \frac{[\varepsilon]}{n}$$

Враховуючи, що $\frac{[x]}{n} = \tilde{x}$, остаточно формула середнього арифметичного набуває вигляду

$$\tilde{x} = x_{\min} + \frac{[\varepsilon]}{n}$$

3. Похибка простої арифметичної середини

Проста арифметична середина $\tilde{x}$ обчислюється за результатами вимірів $x_1, x_2, ..., x_n$. Отже, $\tilde{x}$ є функцією незалежних результатів вимірів: .

$$\tilde{x} = \frac{[x]}{n} = \frac{1}{n}x_1 + \frac{1}{n}x_2 + ... + \frac{1}{n}x_n = F(x)$$

Для визначення середньої квадратичної похибки $m_{\tilde{x}} = m_F$ використаємо формулу оцінки точності функцій незалежних результатів вимірів

$$m_F^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0^2 \cdot m_i^2$$

Отримаємо: $$m_{\tilde{x}}^2 = \frac{1}{n^2}m_1^2 + \frac{1}{n^2}m_2^2 + ... + \frac{1}{n^2}m_n^2$$

Враховуючи, що похибки рівноточних результатів вимірів $m_1 = m_2 = ... = m_n = m$,

$$m_{\tilde{x}}^2 = \frac{n}{n^2}m^2 = \frac{m^2}{n}$$

Остаточно формула середньої квадратичної похибки простої арифметичної середини набуває вигляду

$$\boxed{m_{\tilde{x}} = M = \frac{m}{\sqrt{n}}}$$

4. Похибки результатів рівноточних вимірів величини

За умови відомого істинного значення X вимірюваної величини можна оцінити:

1. Істинні похибки рівноточних результатів вимірів .

$$\theta_i = x_i - X$$

2. Середню квадратичну похибку рівноточних результатів вимірів

$$\boxed{m = \sqrt{\frac{[\theta^2]}{n}}}$$

Дана формула еквівалентна формулі характеристики середнього квадратичного відхилення (стандарту) σ розподілу випадкової величини, якою оперують у теорії ймовірностей і математичній статистиці. Її називають **формула Гаусса**.

За умови невідомого істинного значення X вимірюваної величини здійснити оцінювання точності результатів вимірів з використанням зазначених формул неможливо.

4. Похибки результатів рівноточних вимірів величини

За умови невідомого істинного значення X вимірюваної величини його замінюють найбільш надійним значенням $\tilde{x}$, яке обчислюють за принципом простої арифметичної середини. Тоді **в основу оцінки точності покладають відхилення**

$$v_i = x_i - \tilde{x}$$

Властивості відхилень v_i .

1. Алгебраїчна сума відхилень v_i завжди дорівнює нулю: $[v] = 0$

Обґрунтування:

$$[v] = [x] - n\tilde{x} = [x] - n\frac{[x]}{n} = 0$$

Якщо значення $\tilde{x}$ заокруглюють і має місце похибка заокруглення $\Delta = \tilde{x} - \tilde{x}_{окр}$, то $[v] = n\Delta$.

2. Сума квадратів відхилень v_i мінімальна і завжди менша від суми квадратів відхилень тих же результатів вимірів від будь-якої іншої величини $x' \neq \tilde{x}$:

$[v^2] = \min < [\varepsilon^2]$ де $\varepsilon_i = x_i - x'$

Обґрунтування:

Відхилення v_i і ε_i різняться між собою на сталу величину: $\varepsilon_i - v_i = x_i - x' - x_i + \tilde{x} = \tilde{x} - x' = c$

Звідси: $\varepsilon_i = v_i + c$ $[\varepsilon^2] = [(v + c)^2] = [v^2 + c^2 + 2vc] = [v^2] + nc^2 + 2[v]c = [v^2] + nc^2$

Тому завжди $[v^2] < [\varepsilon^2]$. **Отже, проста арифметична середина у порівнянні з будь-якою іншою величиною є найбільш надійним значенням рівноточних результатів вимірів**. З цієї властивості слідує рівняння, яке використовують для контролю проміжних обчислень:

$$[\varepsilon] = [v] + nc = nc \qquad c = \frac{[\varepsilon]}{n} \qquad c^2 = \frac{[\varepsilon]^2}{n^2} \qquad [v^2] = [\varepsilon^2] - \frac{[\varepsilon]^2}{n}$$

4. Похибки результатів рівноточних вимірів величини

Середня квадратична похибка виміру, обчислена за відхиленнями v_i

Виразимо різницю $\theta_i - v_i$, беручи до уваги, що $\theta_i = x_i - X$ і $v_i = x_i - \tilde{x}$:

$$\theta_i - v_i = x_i - X - x_i + \tilde{x} = \tilde{x} - X = \eta$$

Величина $\eta = \theta_F$ - це **істинна похибка простої арифметичної середини**.

Здійснимо арифметичні перетворення рівняння $\theta_i = v_i + \eta$:

$$\theta_i^2 = v_i^2 + \eta^2 + 2v_i\eta \qquad [\theta^2] = [v^2] + n\eta^2 + 2\eta[v] = [v^2] + n\eta^2$$

$$\frac{[\theta^2]}{n} = \frac{[v^2]}{n} + \eta^2 = m^2$$, що слідує з формули Гаусса $m = \sqrt{\frac{[\theta^2]}{n}}$

Беручи до уваги граничну умову $\lim\limits_{n\to\infty} M = \eta$, маємо $\eta = M = \frac{m}{\sqrt{n}}$. На цій основі

$$m^2 = \frac{[v^2]}{n} + \frac{m^2}{n} \qquad \frac{[v^2]}{n} = m^2 - \frac{m^2}{n} = \frac{m^2(n-1)}{n} \qquad [v^2] = m^2(n-1)$$

Остаточно: $$\boxed{m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}}}$$

Отримана формула називається **формула Бесселя** для обчислення середньої квадратичної похибки рівноточних вимірів за відхиленнями результатів від простої арифметичної середини.

Черговість дій
при математичній обробці результатів рівноточних вимірів величини

1. Обчислення найбільш надійного значення (простої арифметичної середини) за формулами

$$\tilde{x} = \frac{[x]}{n} \qquad \text{або} \qquad \tilde{x} = x_{\min} + \frac{[\varepsilon]}{n}$$

2. Обчислення відхилень $v_i = x_i - \tilde{x}$ та $\varepsilon_i = x_i - x_{\min}$.

Контролі обчислень: 1) $[v] = n\Delta$ 2) $[v^2] = [\varepsilon^2] - \frac{[\varepsilon]^2}{n}$

3. Обчислення середньої квадратичної похибки вимірів за формулою Бесселя

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}}$$

4. Обчислення середньої квадратичної похибки простої арифметичної середини

$$m_{\tilde{x}} = M = \frac{m}{\sqrt{n}}$$

5. Довірчий інтервал для істинного значення величини

Проста арифметична середина $\tilde{x}$ приблизно виражає істинне значення величини X. Похибку заміни невідомого істинного значення величини простою арифметичною серединою можна визначити шляхом побудови довірчого інтервалу I_β при заданій довірчій імовірності β, використовуючи $\tilde{x}$ та її середню квадратичну похибку M :

$$I_\beta = \left(\tilde{x} - t_\beta M ; \tilde{x} + t_\beta M\right)$$

При кількості вимірів $n < 20$ коефіцієнт t_β визначають з таблиць розподілу Стьюдента.

При кількості вимірів $n \geq 20$ розподіл Стьюдента мало відрізняється від нормального, тому коефіцієнт t_β визначають як параметр нормального закону розподілу на основі формули

$$t_\beta = \arg \Phi^* \left(\frac{1+\beta}{2}\right)$$

Довірчий інтервал I_β вказує границі, в яких з ймовірністю β буде знаходитись невідоме істинне значення вимірюваної величини X :

$$\tilde{x} - t_\beta M \leq X \leq \tilde{x} + t_\beta M$$

6. Оцінка точності значень середніх квадратичних похибок

При великій кількості вимірів середні квадратичні похибки вимірів m та найбільш надійного значення M обчислюються достатньо надійно.
На практиці часто кількість вимірів обмежена порядком 10-20. В таких випадках похибки m та M є сумнівними і в достатній мірі неточними. Тому при математичній обробці результатів за кількістю вимірів $n < 20$ рекомендується виконувати оцінку точності середніх квадратичних похибок m та M.
Для цього обчислюють середні квадратичні похибки m_m та m_M значень середніх квадратичних похибок m та M :

$$m_m \approx \frac{m}{\sqrt{2(n-1)}}$$

$$m_M \approx \frac{M}{\sqrt{2(n-1)}}$$