МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого»

Физико-Механический институт

Высшая школа теоретической механики и математической физики

Дисциплина: Теория управления

Курс IV

Расчетное задание 1

«Устойчивость линейной системы автоматического управления»

Вариант 10

Выполнила
студентка группы 5030103/00301 Качевская О. А.

Принял
Доцент ВШМиПУ Суханов А. А.

Санкт-Петербург

Осень 2023

1. Постановка задачи

Дана передаточная функция разомкнутой системы и численные значения коэффициентов функции. Требуется определить устойчивость системы с данной передаточной функцией тремя способами: на основании алгебраического критерия Гурвица или Льенара-Шипара и частотных критериев Михайлова и Найквиста.

Передаточная функция разомкнутой системы:

$$H_{раз} = \frac{K(T_1 p + 1)}{p(p^2 + \omega_0^2)(T_2 p + 1)(T_3 p + 1)},$$

где

$$K = \frac{i}{4}, \omega_0 = i, T_1 = 0.01, T_2 = 0.02i, T_3 = 0.01i$$

$i = 10$ (порядковый номер в списке группы)

$$H_{раз} = \frac{2.5\ (0.01p + 1)}{p(p^2 + 100)(0.2p + 1)(0.1p + 1)}$$

Числитель передаточной функции разомкнутой системы:

$$\alpha_0(p) = 2.5\ (0.01p + 1)$$

Знаменатель передаточной функции разомкнутой системы:

$$\beta_0(p) = \ p(p^2 + 100)(0.2p + 1)(0.1p + 1)$$

Полином замкнутой системы $\alpha(p) = \alpha_0(p) + \beta_0(p)$

$$\alpha(p) = T_2 T_3 p^5 + (T_2 + T_3)p^4 + (1 + T_2 T_3 \omega_0^2)p^3 + \omega_0^2(T_2 + T_3)p^2 + (\omega_0^2 + KT_1) + K =$$

$$= \ 0.02p^5 + 0.3p^4 + 3p^3 + 30p^2 + 100.025p + 2.5$$

2.1. Алгебраический критерий

Необходимое условие Стодолы: для устойчивости системы необходимо, чтобы многочлен знаменателя передаточной функции имел положительные коэффициенты. При малом порядке многочлена (до второго) порядка необходимое условие является и достаточным.

Необходимое и достаточное условие Льенара – Шипара: для устойчивости объекта управления достаточно выполнение необходимого условия Стодолы, а также положительность всех четных и нечетных миноров матрицы Гурвица, составленной из коэффициентов знаменателя передаточной функции.

Проверка выполнения необходимого условия Стодола:

$$a_0 = 0.02 > 0$$

$$a_1 = 0.3 > 0$$

$$a_2 = 3 > 0$$

$$a_3 = 30 > 0$$

$$a_4 = 100.025 > 0$$

$$a_5 = 2.5 > 0$$

Общий вид матрицы Гурвица для $\alpha(p)$:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & a_5 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0.3 & 30 & 2.5 & 0 & 0 \\ 0.02 & 3 & 100.025 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 30 & 2.5 & 0 \\ 0 & 0.02 & 3 & 100.025 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 30 & 2.5 \end{bmatrix}$$

Определители матрицы Гурвица:

$$\Delta_1 = 0.3 > 0$$

$$\Delta_3 = 0.01275 > 0$$

$$\Delta_5 = 1.308 > 0$$

Нечетные определители матрицы Гурвица одного знака и положительны, а также все коэффициенты положительны. Следовательно, система устойчива по алгебраическому критерию Льенара – Шипара.

2.2. Частотный критерий Михайлова

Характеристический многочлен замкнутой системы при гармоническом воздействии:

$$\alpha(j\omega) = 0.02(j\omega)^5 + 0.3(j\omega)^4 + 3(j\omega)^3 + 30(j\omega)^2 + 100.025(j\omega) + 2.5$$

Действительная и мнимая части характеристического многочлена:

$$Re\ \alpha(j\omega) = 0.3\ \omega^4 - 30\ \omega^2 + 2.5$$

$$Im\ \alpha(j\omega) = 0.02\ \omega^5 - 3\ \omega^3 + 100.025\ \omega$$

Критерий Михайлова: для того, чтобы система была устойчива необходимо и достаточно, чтобы кривая Михайлова при изменении частоты ω от 0 до ∞, начинаясь при $\omega = 0$ на вещественной положительной полуоси, обходила только против часовой стрелки последовательно n квадрантов комплексной плоскости, где n – порядок характеристического уравнения.

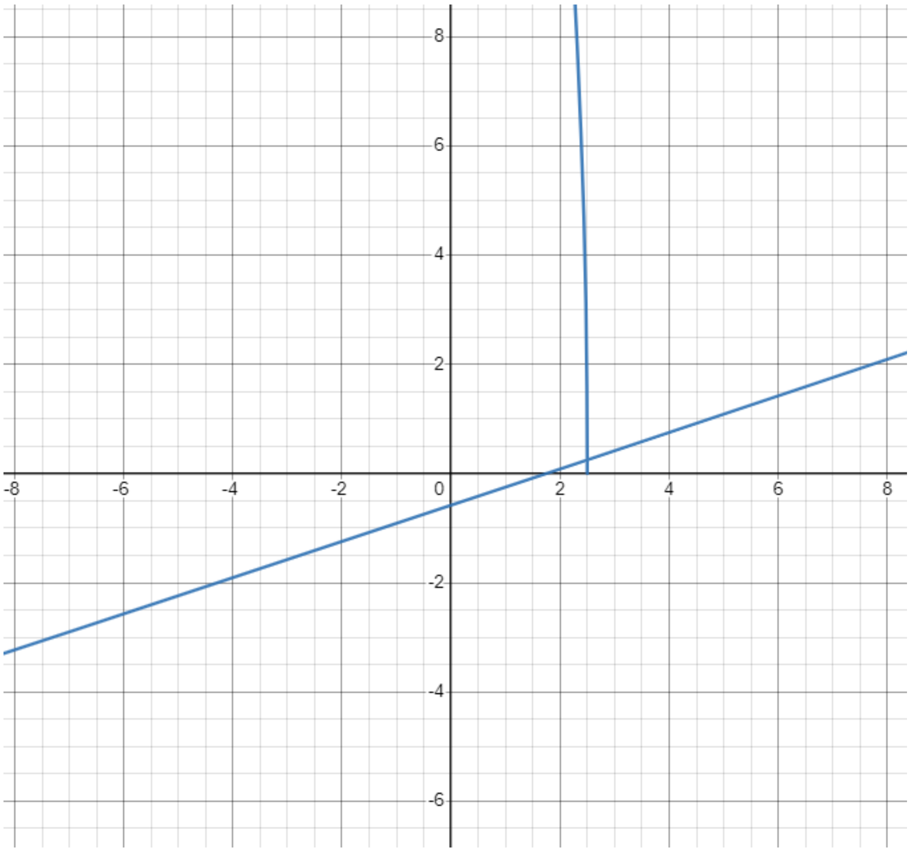

Рис. 1 Годограф Михайлова вблизи нуля

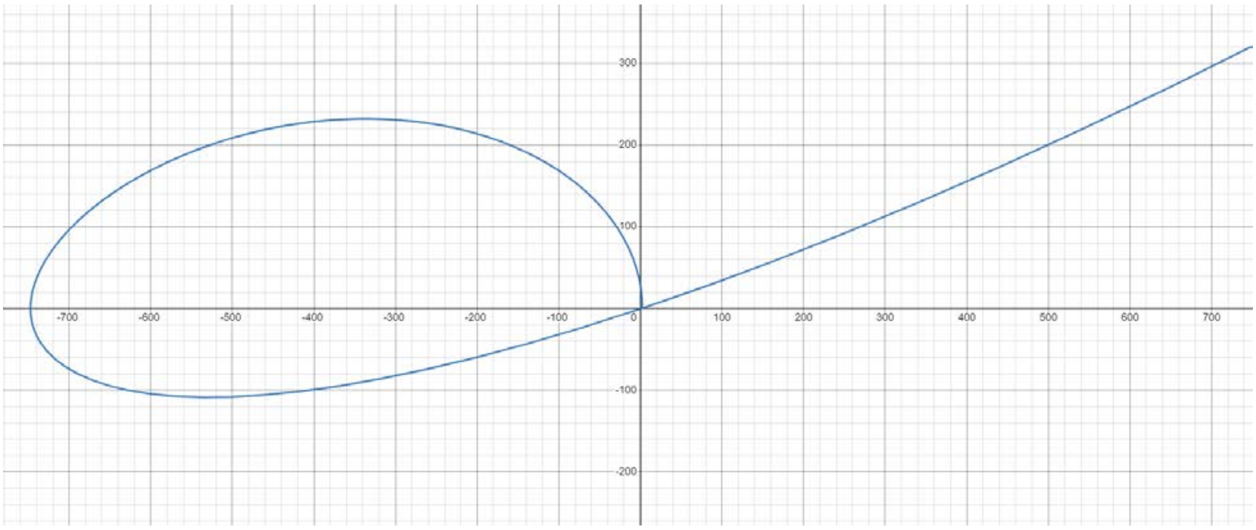

Рис. 2 Годограф Михайлова

Порядок системы равен пяти $(n = 5) \rightarrow \Delta\varphi = \frac{5\pi}{2}$, годограф Михайлова проходит ниже начала координат (Рис. 2) и $\Delta\varphi = \frac{5\pi}{2}$.Следовательно, система является устойчивой по частотному критерию Михайлова.

2.3. Частотный критерий Найквиста

Корни знаменателя разомкнутой системы:

$$p_1 = 0$$

$$p_2 = -10j$$

$$p_3 = 10j$$

$$p_4 = -5$$

$$p_5 = -10$$

Количество правых корней $l = 0$.

Передаточная функция разомкнутой системы при гармоническом воздействии:

$$H(j\omega) = \frac{K(T_1(j\omega) + 1)}{(j\omega)((j\omega)^2 + \omega_0^2)(T_2(j\omega) + 1)(T_3(j\omega) + 1)}$$

Умножим числитель и знаменатель на комплексно-сопряженное выражение $\alpha_0(-j\omega)$:

$$H(j\omega) = \frac{K(T_1(j\omega) + 1)(-j\omega)(T_2(-j\omega) + 1)(T_3(-j\omega) + 1)}{(\omega^2)(-\omega^2 + \omega_0^2)({T_2}^2\omega^2 + 1)({T_3}^2\omega^2 + 1)}$$

Действительная и мнимая части передаточной функции:

$$Re\,H\,(\omega) = \frac{-K(T_1T_2T_3\omega^2 - T_1 + T_2 + T_3)}{(-\omega^2 + \omega_0^2)({T_2}^2\omega^2 + 1)({T_3}^2\omega^2 + 1)}$$

$$Im\,H\,(\omega) = \frac{K(T_1T_2\omega^2 + T_1T_3\omega^2 - T_2T_3\omega^2 + 1)}{-\omega(-\omega^2 + \omega_0^2)({T_2}^2\omega^2 + 1)({T_3}^2\omega^2 + 1)}$$

где $K = 2.5, \omega_0 = 10, T_1 = 0.01, T_2 = 0.2, T_3 = 0.1$

$$Re\,H\,(\omega) = \frac{-2.5(0.0002\omega^2 + 0.29)}{(-\omega^2 + 100)(0.04\omega^2 + 1)(0.01\omega^2 + 1)}$$

$$Im\,H\,(\omega) = \frac{2.5(1 - 0.017\omega^2)}{-\omega(-\omega^2 + 100)(0.046\omega^2 + 1)(0.01\omega^2 + 1)}$$

Критерий Найквиста: для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы количество оборотов передаточной функции разомкнутой системы вокруг точки (-1,0) было равно $l/2$, где l-количество корней в правой полуплоскости.

Отметим важную точку ω^*, где мнимая часть передаточной функции разомкнутой системы обращается в 0.

$$Im\, H\,(\omega^*) = 0 \rightarrow \omega^* = \pm 7.67$$

$$Re\, H\,(\omega^*) = 0.00344$$

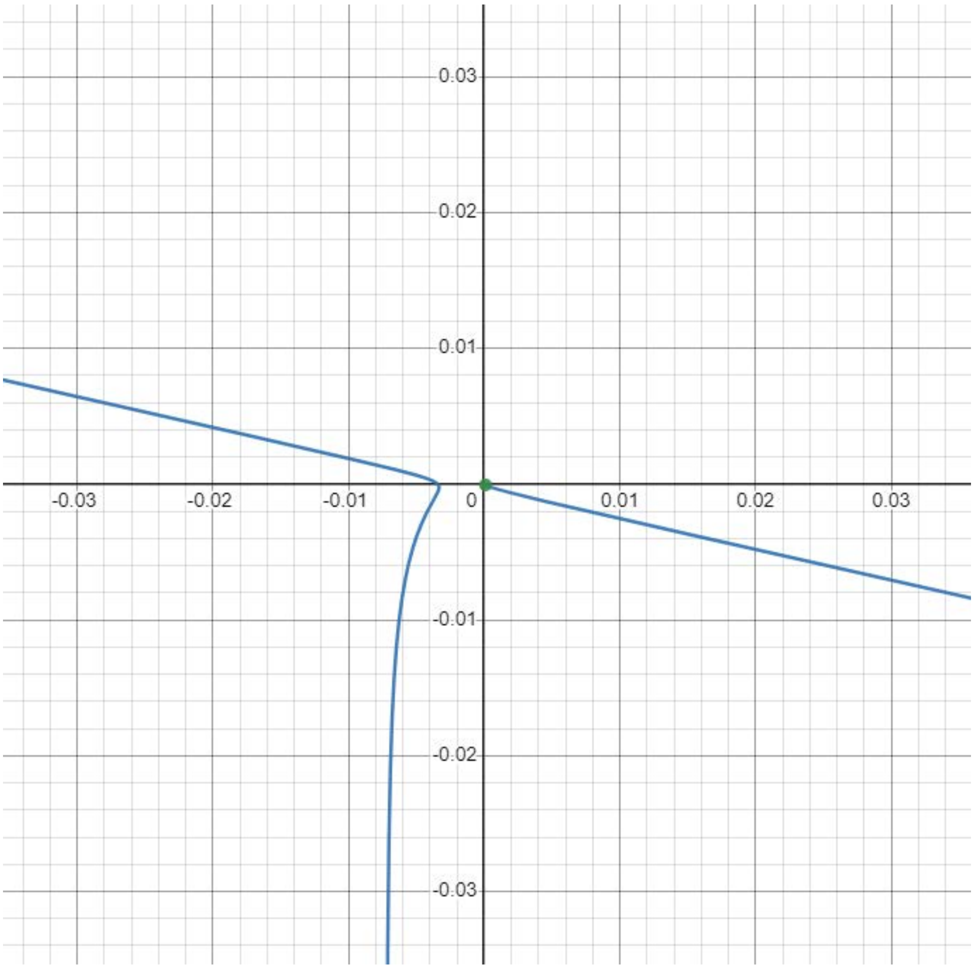

Рисунок 3. Годограф Найквиста

Количество корней со строго положительной вещественной частью $l = 0$.

Для того, чтобы замкнутая система была устойчива необходимо и достаточно, чтобы годограф $H_{раз}$ сделал $2\pi\frac{l}{2}$ оборотов около точки (-1, 0).

По правилу Цыпкина для устойчивости замкнутой системы нужно, чтобы сумма пересечений $Re(H_{раз})$ годографом левее точки (-1, 0) должна быть $\frac{l}{2}$.

Годограф Найквиста (Рис. 3) охватывает точку (-1, 0) 0 раз по часовой стрелке и 0 раз по Цыпкину. Система устойчива по частотному критерию Найквиста.

3. Результаты

Подводя итоги, можно сказать, что система устойчива, так как она оказалась устойчивой в результате проверки критериев Льенара-Шипара, Михайлова и Найквиста.

Ответ (Вариант 10): система устойчива