МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого»

Физико-Механический институт

Высшая школа теоретической механики и математической физики

Дисциплина: Теория управления

Курс IV

Расчетное задание 2

«Оптимизация стабилизирующей обратной связи»

Вариант 10

Выполнила
студентка группы 5030103/00301 Качевская О.А.

Принял
Доцент ВШМиПУ Суханов А. А.

Санкт-Петербург

Осень 2023

Постановка задачи.

Дана линейная система второго порядка

$$\ddot{x} - \omega_0^2 x = u, x(0) = x_0, \dot{x}(0) = v_0,$$

где u – вход, x – выход.

Требуется определить оптимальное управление, минимизирующее интегрально-квадратичный функционал:

$$J = \int_0^\infty (x^2 + q\dot{x}^2 + ru^2)\, dt \to \underbrace{min}_{u}$$

где

$$q = \frac{1}{i}, r = \frac{1}{i^2}, \omega_0 = \frac{i}{2}, x_0 = 1, v_0 = i + 5$$

В случае варианта этой работы ($i = 7$), тогда

$$q = \frac{1}{10}, r = \frac{1}{100}, \omega_0 = \frac{10}{2} = 5, x_0 = 1, v_0 = 10 + 5 = 15$$

Требуется найти оптимальную обратную связь и значение J_{min}.

Основная часть.

Перепишем исходную систему в переменных состояния:

$$a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = u \leftrightarrow \dot{X} = AX + Bu$$

$$\ddot{x} - \omega_0^2 x = u \leftrightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \omega_0^2 x_1 + u \end{cases}, \text{где } x_1 = x$$

Тогда

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 15 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega_0^2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 25 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Перепишем подынтегральное выражение F функционала J с помощью x_1, x_2:

$$F(x_1, x_2, u) = x_1^2 + qx_2^2 + ru^2 = X^T Q X + U^T R U$$

Тогда

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} \end{pmatrix}, R = (r) = \left(\frac{1}{100}\right)$$

Перейдем к решению матричного уравнения Риккати.

Оптимальное управление $u_{opt} = -KX = -(R^{-1}B^T P)X$ существует, если существует симметричная положительно-определенная матрица P. P – симметричная положительно-определенная матрица, являющаяся решением матричного уравнения Риккати.

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix}$$

Матрица P является решением матричного уравнения Риккати:

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0$$

Найдем слагаемые матричного уравнения:

$$A^T P = \begin{pmatrix} 0 & 25 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25p_{12} & 25p_{22} \\ p_{11} & p_{12} \end{pmatrix}$$

$$PA = \begin{pmatrix} 25p_{12} & p_{11} \\ 25p_{22} & p_{12} \end{pmatrix}$$

$$PB = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix}$$

$$B^T P = (p_{12} \quad p_{22})$$

$$PBB^T P = \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix} (p_{12} \quad p_{22}) = \begin{pmatrix} p_{12}^2 & p_{12}p_{22} \\ p_{12}p_{22} & p_{22}^2 \end{pmatrix}$$

Тогда матричное квадратичное уравнение Риккати-Лурье будет иметь следующий вид:

$$\begin{pmatrix} -100p_{12}^2 + 50p_{12} + 1 & -100p_{12}p_{22} + 25p_{22} + p_{11} \\ -100p_{12}p_{22} + 25p_{22} + p_{11} & -100p_{22}^2 + 2p_{12} + \dfrac{1}{10} \end{pmatrix} = 0$$

Матрица P положительно-определенна по критерию Сильвестра при таких корнях.

$$p_{11} = 2.8783$$

$$p_{12} = 0.519$$

$$p_{22} = 0.107$$

Матрица P имеет следующий вид:

$$P = \begin{pmatrix} 2.8783 & 0.519 \\ 0.519 & 0.107 \end{pmatrix}$$

Тогда матрица обратной связи оптимального управления $K = R^{-1}B^T P$ будет следующей:

$$K = (51.9 \;\; 10.7)$$

Тогда $u_{opt} = -KX = -51.9\, x_1 - 10.7\, x_2$

Минимальное значение интеграла J_{min} находится по формуле $J_{min} = X_0^T P X_0$. В этой задаче минимальное значение будет таким:

$$J_{min} = 42.5233$$

Ответ (вариант 10).

В работе было получено оптимальное уравнение в виде линейной обратной связи

$K = (51.9 \;\; 10.7)$ – коэффициенты обратной связи

$J_{min} = 42.5233$– минимальное значение функционала

$i = 10 -$ номер варианта