

Wahadła sprzężone

Kacper Kłos

29 maja 2025

W poniższym raporcie wyznaczyliśmy współczynnik sprężystości sprężyny trzema metodami. Najpierw zawiesiliśmy sprężynę i podczepialiśmy pod nią ciężarki, mierząc rozciągnięcie. Do punktów pomiarowych dopasowaliśmy zależność liniową, z której parametrów otrzymaliśmy stałą sprężystości $k_0 = (29,34 \pm 0,21) \text{ N m}^{-1}$.

Następnie dwa identyczne wahadła połączyliśmy sprężyną na tej samej wysokości i mierzyliśmy osobno drgania w fazie i w przeciwfazie. W oby przypadkach do wyznaczenia częstotliwości wykorzystaliśmy transformację Fouriera. Doświadczenie powtórzyliśmy dla trzech różnych odległości sprężyny od osi obrotu. Dla tych pomiarów średnia ważona stałej sprężystości wyniosła $k_p = (32,4 \pm 2,0) \text{ N m}^{-1}$.

Na końcu zbadaliśmy dudnienia obu połączonych wahadeł, wyznaczając stałą sprężystości z dwóch częstotliwości, z jakimi wahadła drgały. Średnia z pomiarów dla trzech odległości sprężyny od osi obrotu wynosi $k_d = (29,6 \pm 2,0) \text{ N m}^{-1}$.

1 Wyniki pomiarów

W raporcie będziemy korzystać ze stałej grawitacyjnej $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$.

1.1 Pomiar statyczny

Pomiar rozpoczynamy od zawieszenia sprężyny i kolejnego podwieszania ciężarków na jej końcu.

Nr	Masa m [g]	Długość sprężyny L [cm]
1	49,14	31,4
2	91,27	32,8
3	151,85	34,8
4	201,43	36,6
5	250,71	38,2
6	299,12	39,7
7	348,18	41,4

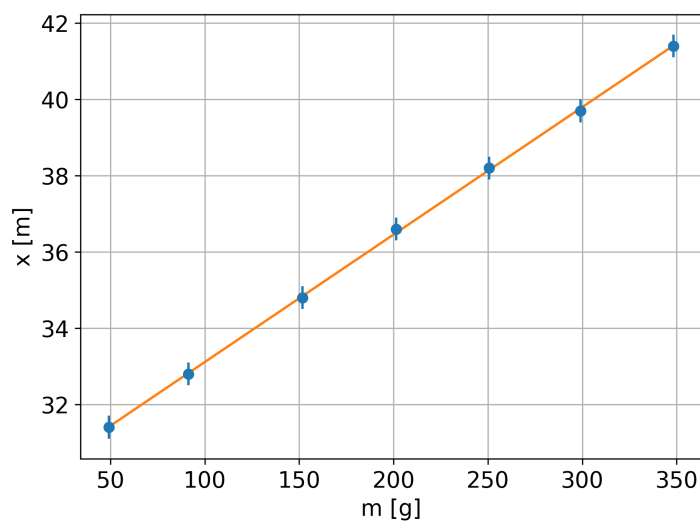
Tablica 1: Długość sprężyny L w zależności od masy obciążenia m .

Za błąd pomiarowy długości przyjmujemy 0,3 cm, natomiast błąd wagi na poziomie 0,01 g uznajemy za pomijalnie mały w porównaniu z błędem długości.

Do zebranych danych dopasowujemy równanie liniowe

$$L = am + L_0,$$

otrzymując wykres



Rysunek 1: Zależność długości sprężyny od zawieszonej masy wraz z dopasowaniem liniowym.

Wyznaczone parametry krzywej wynoszą

$$a = (0,03344 \pm 0,00024) \text{ cm g}^{-1}, \quad b = (29,77 \pm 0,06) \text{ cm}.$$

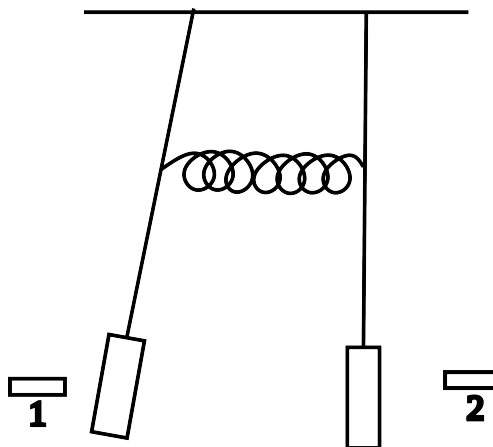
Na podstawie parametru a obliczamy stałą sprężystości

$$k_0 = \frac{g}{a} = (29,34 \pm 0,21) \text{ N m}^{-1}.$$

1.2 Pomiar dynamiczny

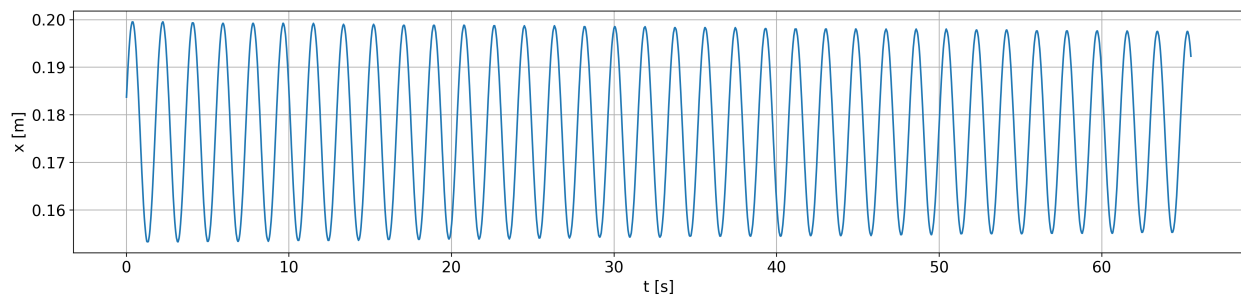
Za pomocą dwóch czujników PASCO PS-3219 rejestrowaliśmy położenia obu identycznych wahadeł w funkcji czasu; zebrane dane znajdują się w pliku dołączonym do dokumentu. Zawiera on trzy serie pomiarowe (po dwa pomiary): najpierw dudnienia, a następnie drgania w przeciwfazie, każdorazowo dla trzech odległości sprężyny od osi obrotu wahadła. Ostatnia seria dotyczy jednego wahadła bez podłączonej sprężyny. We wszystkich poniższych pomiarach błąd transformacji Fouriera przyjmujemy równy połowie jej rozdzielczości, $\frac{f_s}{2N}$, gdzie $f_s = 40 \text{ Hz}$ oznacza częstotliwość próbkowania, a N liczbę próbek w danej serii pomiarowej. Wyznaczana tą metodą częstotliwość była praktycznie identyczna dla obu wahadeł: różnice pojawiały się poza miejscem cyfr znaczących, dlatego ignoruję tę różnicę. Kluczowa w naszych pomiarach jest odległość środka masy, wyznaczona jako $r = (79,7 \pm 0,1) \text{ cm}$ poprzez balansowanie wahadła na cienkiej płytce, oraz masa wahadła $m = (3000 \pm 40) \text{ g}$. Przy pomiarach odległości od osi a zakładamy, że różnica pomiędzy wahadłami mieści się w granicach błędu pomiarowego, więc możemy ją pominąć.

1.3 Wahadło bez sprężyny i drgania w przeciwfazie

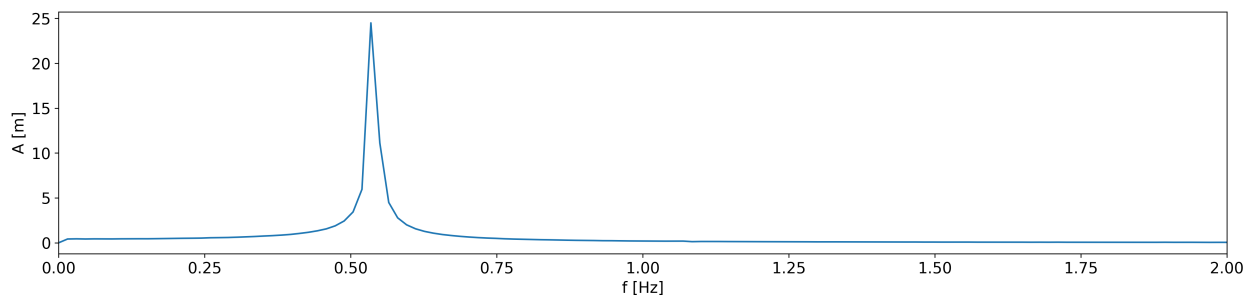


Rysunek 2: Diagram układu pomiarowego stosowanego w eksperymencie. Widoczne są dwa wahadła oraz dwa czujniki odległości 1 i 2.

Analizę danych rozpoczynamy od przypadku bez podłączonej sprężyny, w którym badamy zachowanie pojedynczego wahadła.



Rysunek 3: Wychylenie wahadła bez sprężyny w funkcji czasu.



Rysunek 4: Transformacja Fouriera danych z rys. 3.

Uzyskana częstotliwość wynosi

$$f_0 = (0,5346 \pm 0,008) \text{ Hz.}$$

Wiadomo, że częstotliwość drgań wahadła spełnia[1]

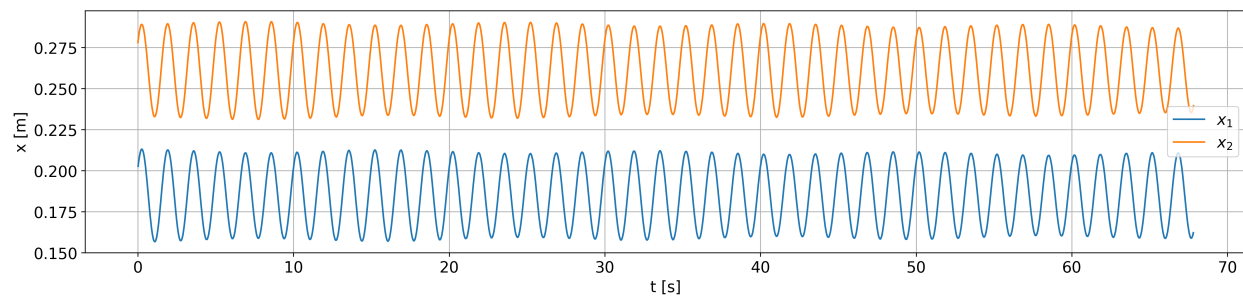
$$\omega_1^2 = (2\pi f_0)^2 = \frac{mgr}{I}.$$

Stąd moment bezwładności wynosi

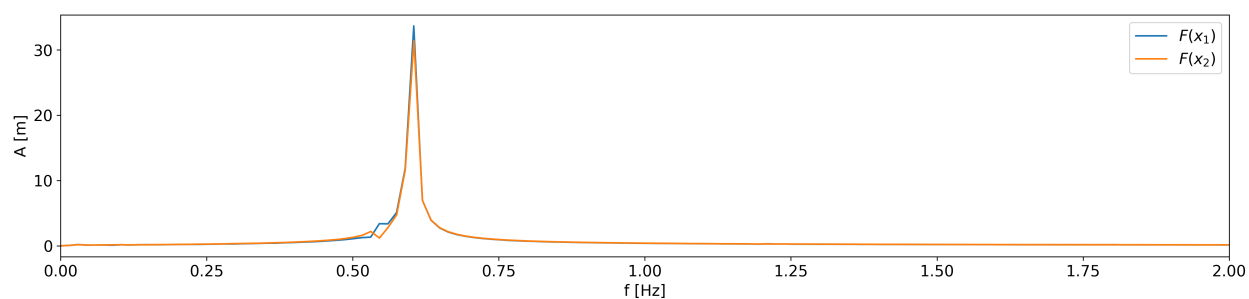
$$I = \frac{mgr}{(2\pi f_0)^2} = (2,08 \pm 0,07) \text{ kg m}^2.$$

Przeanalizujemy teraz zachowanie wahadeł drgających w przeciwfazie dla różnych punktów zaczepienia sprężyny. Częstotliwości wyznaczamy z transformacji Fouriera.

$$d = (30 \pm 0,1) \text{ cm}$$



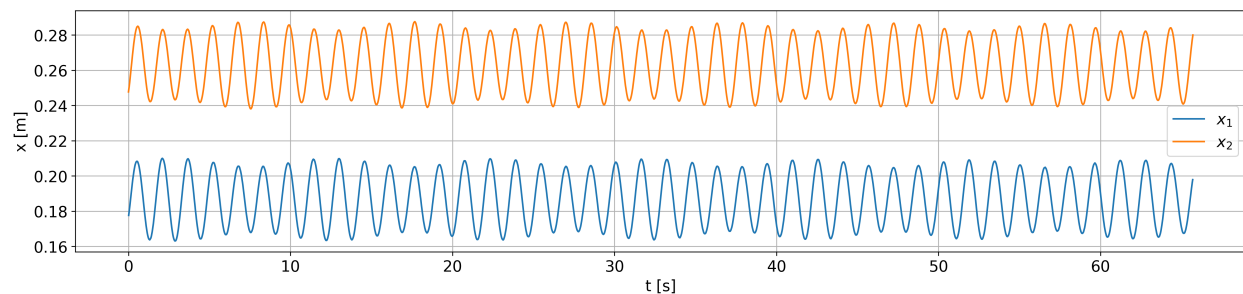
Rysunek 5: Wychylenia lewego (x_1) i prawego (x_2) wahadła w funkcji czasu przy drganiach w przeciwfazie dla $d = (30 \pm 0,1) \text{ cm}$.



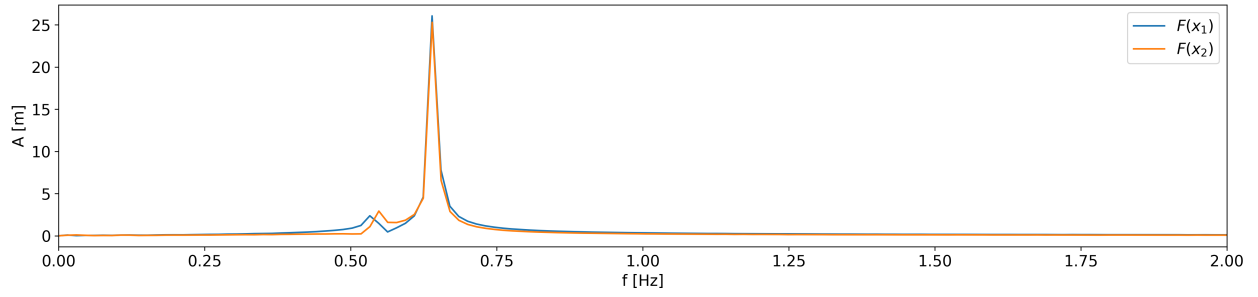
Rysunek 6: Transformacja Fouriera danych z rys. 5.

$$f_{p1} = (0,6045 \pm 0,008) \text{ Hz.}$$

$$d = (40 \pm 0,1) \text{ cm}$$



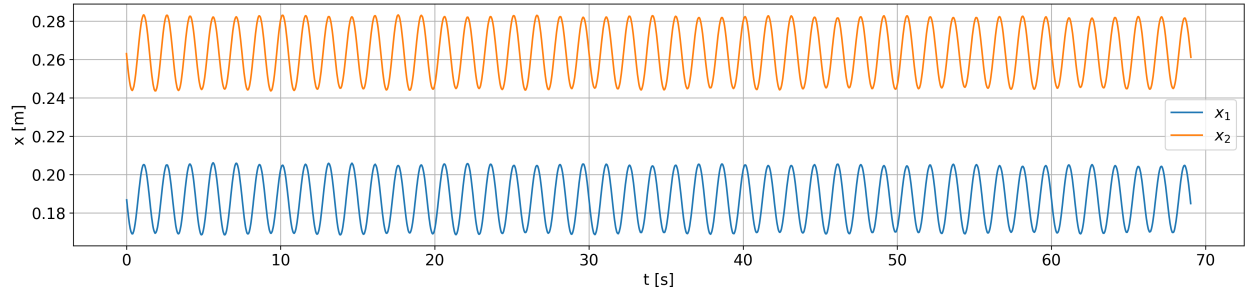
Rysunek 7: Wychylenia lewego (x_1) i prawego (x_2) wahadła w funkcji czasu przy drganiach w przeciwfazie dla $d = (40 \pm 0,1) \text{ cm}$.



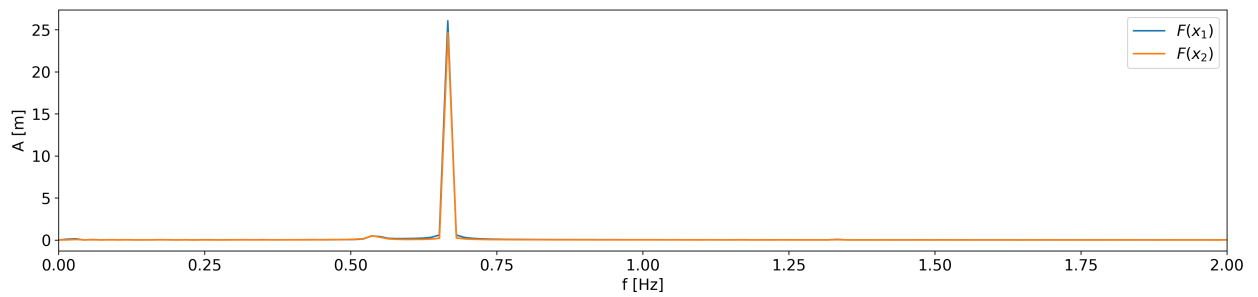
Rysunek 8: Transformacja Fouriera danych z rys. 7.

$$f_{p2} = (0,639 \pm 0,008) \text{ Hz.}$$

$$d = (45 \pm 0,1) \text{ cm}$$



Rysunek 9: Wychylenia lewego (x_1) i prawego (x_2) wahadła w funkcji czasu przy drganiach w przeciwfazie dla $d = (45 \pm 0,1) \text{ cm}$.



Rysunek 10: Transformacja Fouriera danych z rys. 9.

$$f_{p3} = (0,666 \pm 0,008) \text{ Hz.}$$

Dla przeciwfazy częstotliwość drgań spełnia[1]

$$\omega_2^2 = (2\pi f_p)^2 = \frac{mgr + 2ka^2}{I}.$$

Wykorzystując wyniki dla drgań bez sprężyny, możemy zapisać

$$k = 2\pi^2 I \frac{f_p^2 - f_0^2}{a^2}.$$

Otrzymujemy

$$k_1 = (36 \pm 6) \text{ N m}^{-1}, \quad k_2 = (32 \pm 4) \text{ N m}^{-1}, \quad k_3 = (32 \pm 3) \text{ N m}^{-1}.$$

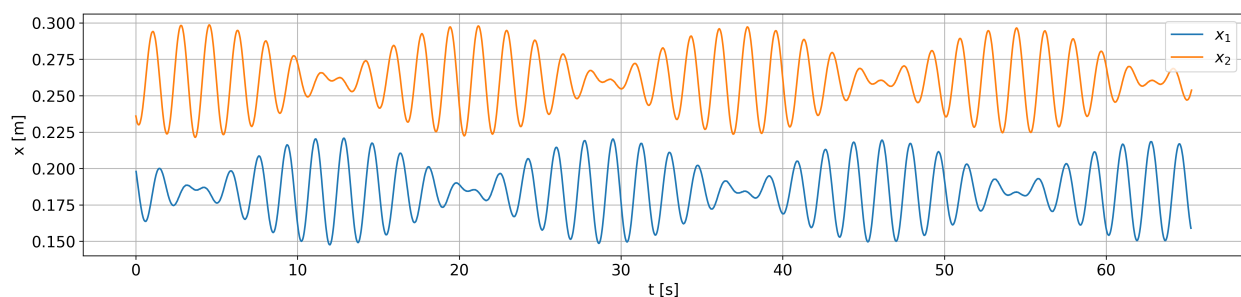
Średnia ważona z tych wyników wynosi

$$k_p = (32,4 \pm 2,0) \text{ N m}^{-1}.$$

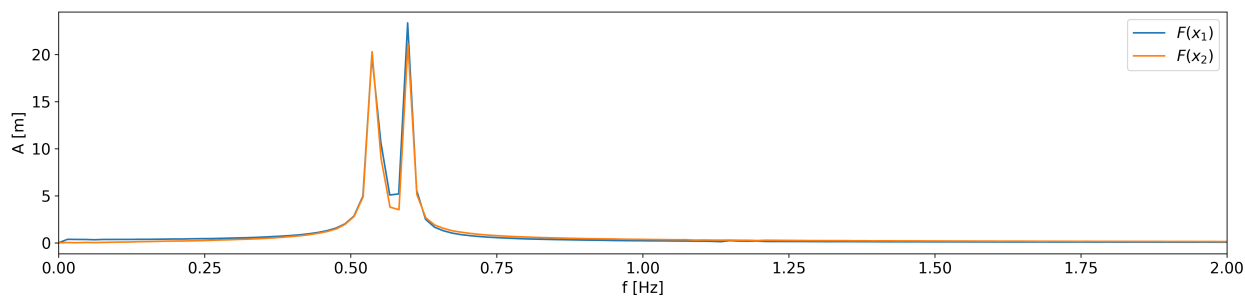
1.4 Dudnienie

Zbadamy teraz dudnienie wahadeł, również wyznaczając częstotliwości metodą transformacji Fouriera.

$$d = (30 \pm 0,1) \text{ cm}$$



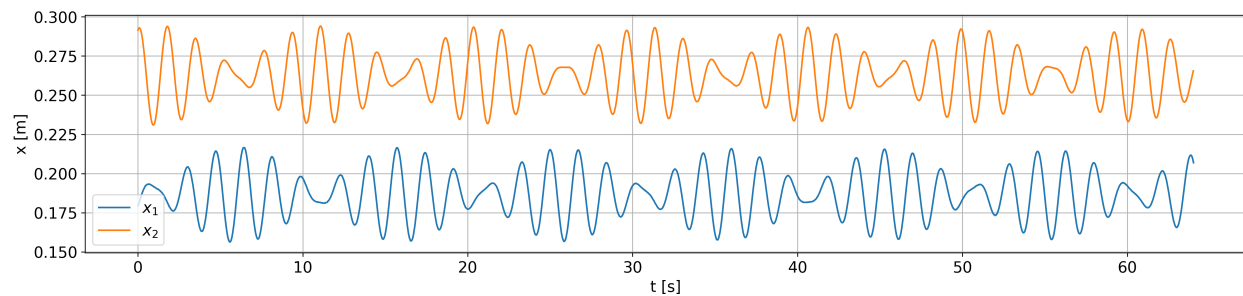
Rysunek 11: Wychylenia lewego (x_1) i prawego (x_2) wahadła w funkcji czasu przy dudnieniu dla $d = (30 \pm 0,1) \text{ cm}$.



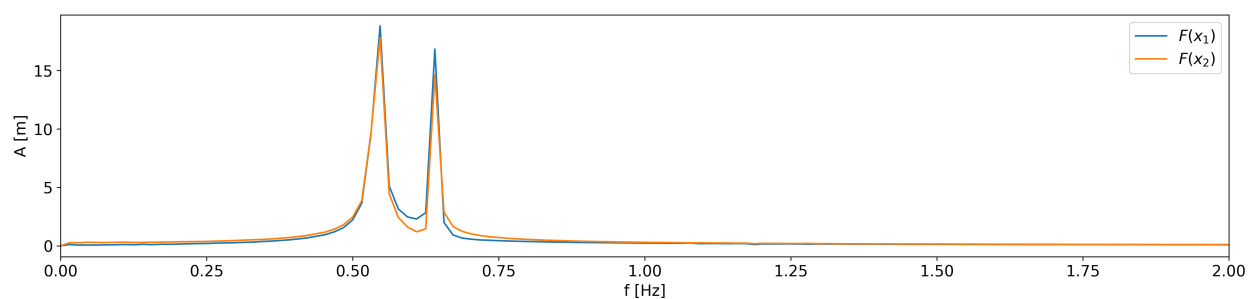
Rysunek 12: Transformacja Fouriera danych z rys. 11.

$$f_{d10} = (0,536 \pm 0,016) \text{ Hz}, \quad f_{d11} = (0,598 \pm 0,008) \text{ Hz}.$$

$$d = (40 \pm 0,1) \text{ cm}$$



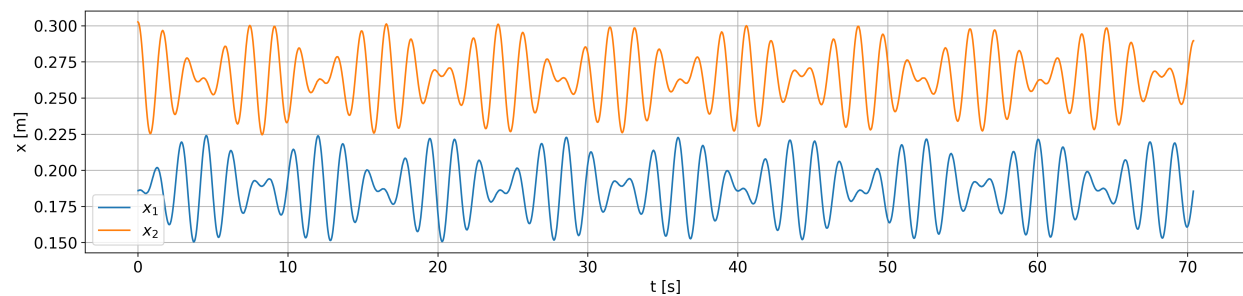
Rysunek 13: Wychylenia lewego (x_1) i prawego (x_2) wahadła w funkcji czasu przy dudnieniu dla $d = (40 \pm 0,1) \text{ cm}$.



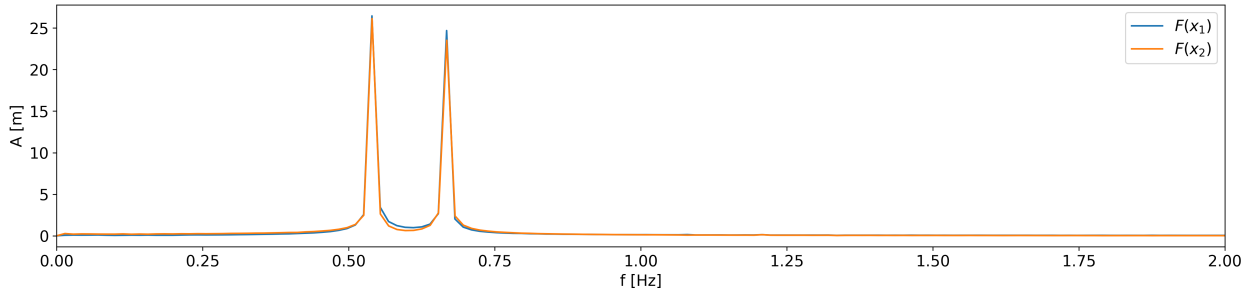
Rysunek 14: Transformacja Fouriera danych z rys. 13.

$$f_{d_{20}} = (0,547 \pm 0,016) \text{ Hz}, \quad f_{d_{21}} = (0,641 \pm 0,008) \text{ Hz}.$$

$$d = (45 \pm 0,1) \text{ cm}$$



Rysunek 15: Wychylenia lewego (x_1) i prawego (x_2) wahadła w funkcji czasu przy dudnieniu dla $d = (45 \pm 0,1) \text{ cm}$.



Rysunek 16: Transformacja Fouriera danych z rys. 15.

$$f_{d30} = (0,540 \pm 0,055) \text{ Hz}, \quad f_{d31} = (0,668 \pm 0,007) \text{ Hz}.$$

Dwie częstotliwości występujące podczas dudnienia odpowiadają częstotliwościom własnym układu[1], dlatego możemy powtórzyć analizę z poprzedniego przypadku, korzystając z wzorów

$$I = \frac{mgr}{(2\pi f_{d0})^2}, \quad k = 2\pi^2 I \frac{f_{d1}^2 - f_{d0}^2}{a^2}.$$

Otrzymujemy

$$I_1 = (2,07 \pm 0,07) \text{ kg m}^2, \quad I_2 = (1,99 \pm 0,07) \text{ kg m}^2, \quad I_3 = (2,04 \pm 0,07) \text{ kg m}^2,$$

$$k_1 = (32 \pm 6) \text{ N m}^{-1}, \quad k_2 = (27 \pm 4) \text{ N m}^{-1}, \quad k_3 = (31 \pm 3) \text{ N m}^{-1}.$$

Z tych wyników wyznaczamy średnią ważoną

$$k_d = (29,6 \pm 2,0) \text{ N m}^{-1}.$$

2 Podsumowanie

Z otrzymanych wyników wynika, że najdokładniejszą metodą okazało się wyznaczanie stałej sprężystości poprzez statyczne podwieszanie ciężarków, które dało rezultat $k_0 = (29,34 \pm 0,21) \text{ N m}^{-1}$. Obie metody wykorzystujące wahadła charakteryzują się tym samym błędem, jednak analiza dudnień dostarczyła wyniku bliższego wartości statycznej, $k_d = (29,6 \pm 2,0) \text{ N m}^{-1}$, podczas gdy badanie fazy i przeciwfazy oddzielnie zaowocowało $k_p = (32,4 \pm 2,0) \text{ N m}^{-1}$. Błąd w metodzie statycznej wynika głównie z trudności w dokładnym określeniu długości sprężyny, której nie można dotykać, aby nie zaburzyć długości oraz drobnych drgań sprężyny. Dla pomiarów z wahadłami największe znaczenie ma niepewność wynikająca z transformacji Fouriera; jej zmniejszenie wymagałoby dłuższych rejestracji. Warto zauważyć, że błąd był mniejszy dla większych wartości a , które zwiększały wpływ sprężyny w pomiarach. Z kolei analiza dudnień jest dokładniejsza od sztucznego rozdzielania drgań własnych, ponieważ w jej trakcie nie występuje przerwa czasowa, w której układ mógłby ulec nieznacznym zmianom wpływającym na wynik końcowy.

Literatura

- [1] *Wahadła sprzężone*, Aneta Drabińska, Roman J. Nowak i Andrzej Witowski, Uniwersytet Warszawski.