Wahadła sprzężone

Kacper Kłos

29 maja 2025

W poniższym raporcie wyznaczyliśmy współczynnik sprężystości sprężyny trzema metodami. Najpierw zawiesiliśmy sprężynę i podczepialiśmy pod nią ciężarki, mierząc rozciągnięcie. Do punktów pomiarowych dopasowaliśmy zależność liniową, z której parametrów otrzymaliśmy stałą sprężystości $k_0 = (29.34 \pm 0.21) \, \mathrm{N \, m^{-1}}$.

Następnie dwa identyczne wahadła połączyliśmy sprężyną na tej samej wysokości i mierzyliśmy osobno drgania w fazie i w przeciwfazie. W oby przypadkach do wyznaczenia częstotliwości wykorzystaliśmy transformację Fouriera. Doświadczenie powtórzyliśmy dla trzech różnych odległości sprężyny od osi obrotu. Dla tych pomiarów średnia ważona stałej sprężystości wyniosła $k_p = (32.4 \pm 2.0) \,\mathrm{N}\,\mathrm{m}^{-1}$.

Na końcu zbadaliśmy dudnienia obu połączonych wahadeł, wyznaczając stałą sprężystości z dwóch częstotliwości, z jakimi wahadła drgały. Średnia z pomiarów dla trzech odległości sprężyny od osi obrotu wynosi $k_d = (29.6 \pm 2.0)\,\mathrm{N\,m^{-1}}$.

1 Wyniki pomiarów

W raporcie będziemy korzystać ze stałej grawitacyjnej $g = 9.81 \,\mathrm{m \, s^{-2}}$.

1.1 Pomiar statyczny

Pomiar rozpoczynamy od zawieszenia sprężyny i kolejnego podwieszania ciężarków na jej końcu.

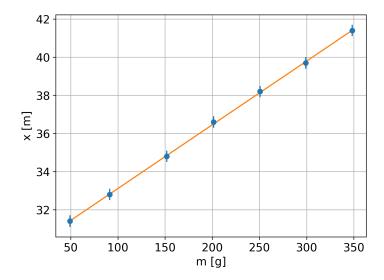
Nr	Masa m [g]	Długość sprężyny L [cm]
1	49,14	31,4
2	91,27	$32,\!8$
3	151,85	34,8
4	201,43	36,6
5	250,71	38,2
6	299,12	39,7
7	348,18	$41,\!4$

Tablica 1: Długość sprężyny L w zależności od masy obciążenia m.

Za błąd pomiarowy długości przyjmujemy $0.3\,\mathrm{cm}$, natomiast błąd wagi na poziomie $0.01\,\mathrm{g}$ uznajemy za pomijalnie mały w porównaniu z błędem długości. Do zebranych danych dopasowujemy równanie liniowe

$$L = am + L_0$$
,

otrzymując wykres



Rysunek 1: Zależność długości sprężyny od zawieszonej masy wraz z dopasowaniem liniowym.

Wyznaczone parametry krzywej wynoszą

$$a = (0.03344 \pm 0.00024) \,\mathrm{cm}\,\mathrm{g}^{-1}, \quad b = (29.77 \pm 0.06) \,\mathrm{cm}.$$

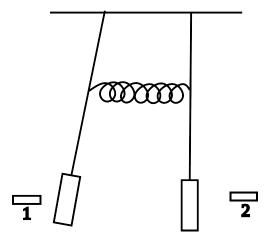
Na podstawie parametru a obliczamy stałą sprężystości

$$k_0 = \frac{g}{a} = (29.34 \pm 0.21) \,\mathrm{N \, m^{-1}}.$$

1.2 Pomiar dynamiczny

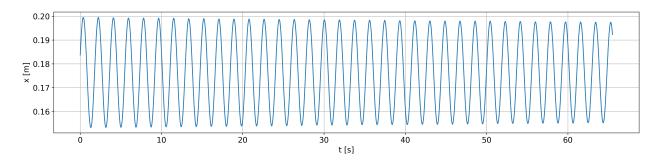
Za pomocą dwóch czujników PASCO PS-3219 rejestrowaliśmy położenia obu identycznych wahadeł w funkcji czasu; zebrane dane znajdują się w pliku dołączonym do dokumentu. Zawiera on trzy serie pomiarowe (po dwa pomiary): najpierw dudnienia, a następnie drgania w przeciwfazie, każdorazowo dla trzech odległości sprężyny od osi obrotu wahadła. Ostatnia seria dotyczy jednego wahadła bez podłączonej sprężyny. We wszystkich poniższych pomiarach błąd transformacji Fouriera przyjmujemy równy połowie jej rozdzielczości, $\frac{f_s}{2N}$, gdzie $f_s=40\,\mathrm{Hz}$ oznacza częstotliwość próbkowania, a N liczbę próbek w danej serii pomiarowej. Wyznaczana tą metodą częstotliwość była praktycznie identyczna dla obu wahadeł: różnice pojawiały się poza miejscem cyfr znaczących, dlatego ignorujem tę różnicę. Kluczowa w naszych pomiarach jest odległość środka masy, wyznaczona jako $r=(79,7\pm0,1)\,\mathrm{cm}$ poprzez balansowanie wachadła na cieńkiej płytce, oraz masa wahadła $m=(3000\pm40)\,\mathrm{g}$. Przy pomiarach odległości od osi a zakładamy, że różnica pomiędzy wahadłami mieści się w granicach błędu pomiarowego, więc możemy ją pominąć.

1.3 Wahadło bez sprężyny i drgania w przeciwfazie

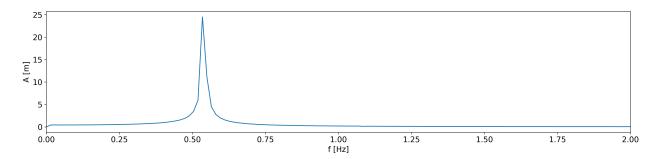


Rysunek 2: Diagram układu pomiarowego stosowanego w eksperymencie. Widoczne są dwa wahadła oraz dwa czujniki odległości 1 i 2.

Analizę danych rozpoczynamy od przypadku bez podłączonej sprężyny, w którym badamy zachowanie pojedynczego wahadła.



Rysunek 3: Wychylenie wahadła bez sprężyny w funkcji czasu.



Rysunek 4: Transformacja Fouriera danych z rys. 3.

Uzyskana częstotliwość wynosi

$$f_0 = (0.5346 \pm 0.008) \,\mathrm{Hz}.$$

Wiadomo, że częstotliwość drgań wahadła spełnia[1]

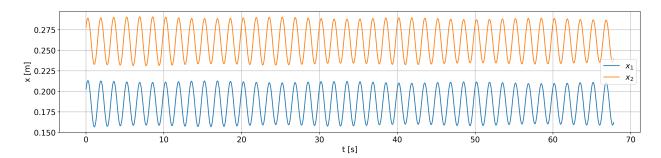
$$\omega_1^2 = (2\pi f_0)^2 = \frac{mgr}{I}.$$

Stąd moment bezwładności wynosi

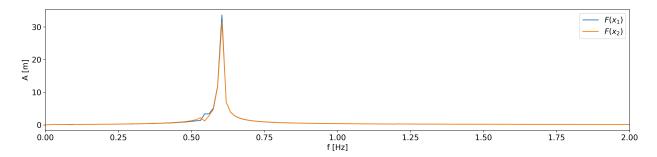
$$I = \frac{mgr}{(2\pi f_0)^2} = (2.08 \pm 0.07) \,\mathrm{kg} \,\mathrm{m}^2.$$

Przeanalizujemy teraz zachowanie wahadeł drgających w przeciwfazie dla różnych punktów zaczepienia sprężyny. Częstotliwości wyznaczamy z transformacji Fouriera.

$$d = (30 \pm 0.1) \,\mathrm{cm}$$



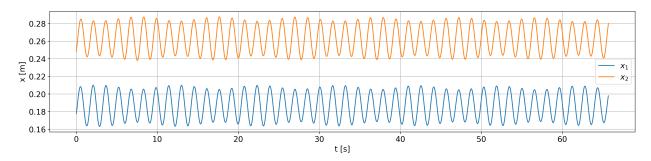
Rysunek 5: Wychylenia lewego (x_1) i prawego (x_2) wahadła w funkcji czasu przy drganiach w przeciwfazie dla $d = (30 \pm 0.1)$ cm.



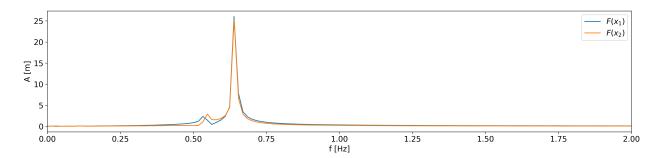
Rysunek 6: Transformacja Fouriera danych z rys. 5.

$$f_{p_1} = (0.6045 \pm 0.008) \,\mathrm{Hz}.$$

$$d = (40 \pm 0.1) \,\mathrm{cm}$$



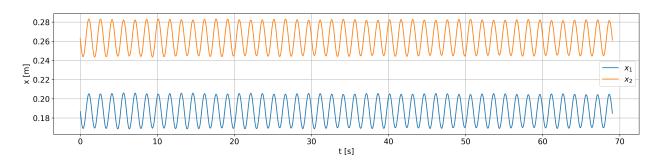
Rysunek 7: Wychylenia lewego (x_1) i prawego (x_2) wahadła w funkcji czasu przy drganiach w przeciwfazie dla $d=(40\pm0.1)\,\mathrm{cm}$.



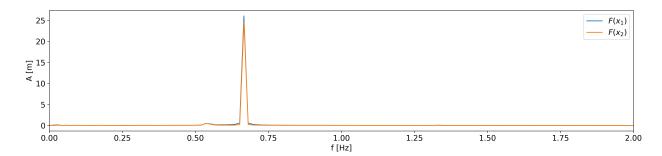
Rysunek 8: Transformacja Fouriera danych z rys. 7.

$$f_{p_2} = (0.639 \pm 0.008) \,\text{Hz}.$$

$$d = (45 \pm 0.1) \,\mathrm{cm}$$



Rysunek 9: Wychylenia lewego (x_1) i prawego (x_2) wahadła w funkcji czasu przy drganiach w przeciwfazie dla $d=(45\pm0.1)\,\mathrm{cm}$.



Rysunek 10: Transformacja Fouriera danych z rys. 9.

$$f_{p_3} = (0.666 \pm 0.008) \,\text{Hz}.$$

Dla przeciwfazy częstotliwość drgań spełnia[1]

$$\omega_2^2 = (2\pi f_p)^2 = \frac{mgr + 2ka^2}{I}.$$

Wykorzystując wyniki dla drgań bez sprężyny, możemy zapisać

$$k = 2\pi^2 I \frac{f_p^2 - f_0^2}{a^2}.$$

Otrzymujemy

$$k_1 = (36 \pm 6) \,\mathrm{N} \,\mathrm{m}^{-1}, \quad k_2 = (32 \pm 4) \,\mathrm{N} \,\mathrm{m}^{-1}, \quad k_3 = (32 \pm 3) \,\mathrm{N} \,\mathrm{m}^{-1}.$$

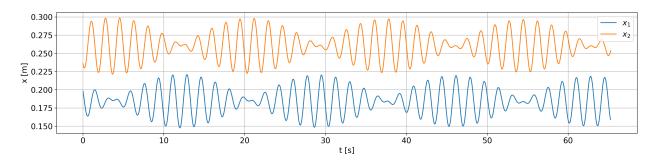
Średnia ważona z tych wyników wynosi

$$k_p = (32.4 \pm 2.0) \,\mathrm{N} \,\mathrm{m}^{-1}.$$

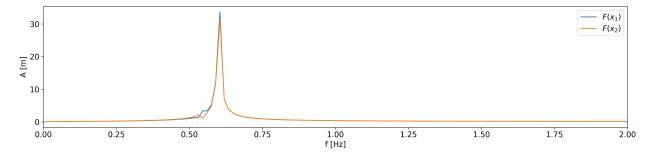
1.4 Dudnienie

Zbadamy teraz dudnienie wahadeł, również wyznaczając częstotliwości metodą transformacji Fouriera.

$$d = (30 \pm 0.1) \,\mathrm{cm}$$



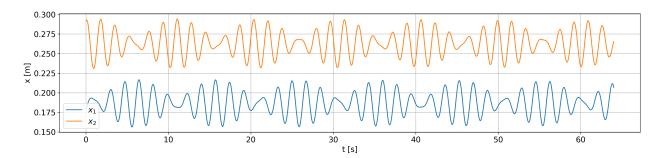
Rysunek 11: Wychylenia lewego (x_1) i prawego (x_2) wahadła w funkcji czasu przy dudnieniu dla $d=(30\pm0.1)$ cm.



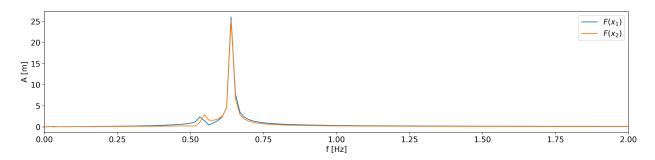
Rysunek 12: Transformacja Fouriera danych z rys. 11.

$$f_{d_{10}} = (0.536 \pm 0.016) \,\text{Hz}, \quad f_{d_{11}} = (0.598 \pm 0.008) \,\text{Hz}.$$

$$d = (40 \pm 0.1) \,\mathrm{cm}$$



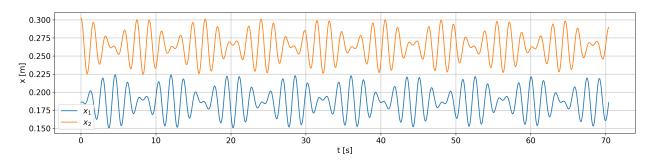
Rysunek 13: Wychylenia lewego (x_1) i prawego (x_2) wahadła w funkcji czasu przy dudnieniu dla $d=(40\pm0.1)$ cm.



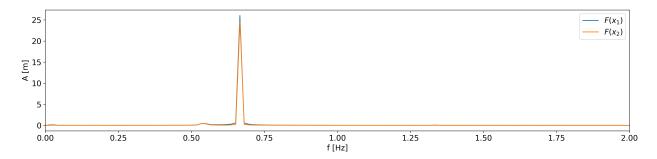
Rysunek 14: Transformacja Fouriera danych z rys. 13.

$$f_{d_{20}} = (0.547 \pm 0.016) \,\text{Hz}, \quad f_{d_{21}} = (0.641 \pm 0.008) \,\text{Hz}.$$

$$d = (45 \pm 0.1) \,\mathrm{cm}$$



Rysunek 15: Wychylenia lewego (x_1) i prawego (x_2) wahadła w funkcji czasu przy dudnieniu dla $d=(45\pm0.1)\,\mathrm{cm}.$



Rysunek 16: Transformacja Fouriera danych z rys. 15.

$$f_{d_{30}} = (0.540 \pm 0.055) \,\text{Hz}, \quad f_{d_{31}} = (0.668 \pm 0.007) \,\text{Hz}.$$

Dwie częstotliwości występujące podczas dudnienia odpowiadają częstotliwościom własnym układu[1], dlatego możemy powtórzyć analizę z poprzedniego przypadku, korzystając z wzorów

$$I = \frac{mgr}{(2\pi f_{d0})^2}, \qquad k = 2\pi^2 I \frac{f_{d1}^2 - f_{d0}^2}{a^2}.$$

Otrzymujemy

$$I_1 = (2.07 \pm 0.07) \,\mathrm{kg} \,\mathrm{m}^2, \quad I_2 = (1.99 \pm 0.07) \,\mathrm{kg} \,\mathrm{m}^2, \quad I_3 = (2.04 \pm 0.07) \,\mathrm{kg} \,\mathrm{m}^2,$$

 $k_1 = (32 \pm 6) \,\mathrm{N} \,\mathrm{m}^{-1}, \quad k_2 = (27 \pm 4) \,\mathrm{N} \,\mathrm{m}^{-1}, \quad k_3 = (31 \pm 3) \,\mathrm{N} \,\mathrm{m}^{-1}.$

Z tych wyników wyznaczamy średnią ważoną

$$k_d = (29.6 \pm 2.0) \,\mathrm{N} \,\mathrm{m}^{-1}.$$

2 Podsumowanie

Z otrzymanych wyników wynika, że najdokładniejszą metodą okazało się wyznaczanie stałej sprężystości poprzez statyczne podwieszanie ciężarków, które dało rezultat $k_0=(29,34\pm0,21)\,\mathrm{N\,m^{-1}}$. Obie metody wykorzystujące wahadła charakteryzują się tym samym błędem, jednak analiza dudnień dostarczyła wyniku bliższego wartości statycznej, $k_d=(29,6\pm2,0)\,\mathrm{N\,m^{-1}}$, podczas gdy badanie fazy i przeciwfazy oddzielnie zaowocowało $k_p=(32,4\pm2,0)\,\mathrm{N\,m^{-1}}$. Błąd w metodzie statycznej wynika głównie z trudności w dokładnym określeniu długości sprężyny, której nie można dotykać, aby nie zaburzyć długości oraz drobnych drgań sprężyny. Dla pomiarów z wahadłami największe znaczenie ma niepewność wynikająca z transformacji Fouriera; jej zmniejszenie wymagałoby dłuższych rejestracji. Warto zauważyć, że błąd był mniejszy dla większych wartości a, które zwiększały wpływ sprężyny w pomiarach. Z kolei analiza dudnień jest dokładniejsza od sztucznego rozdzielania drgań własnych, ponieważ w jej trakcie nie występuje przerwa czasowa, w której układ mógłby ulec nieznacznym zmianom wpływającym na wynik końcowy.

Literatura

 $[1]\ \ Wahadła\ sprzężone,$ Aneta Drabińska, Roman J. Nowak i Andrzej Witowski, Uniwersytet Warszawski.