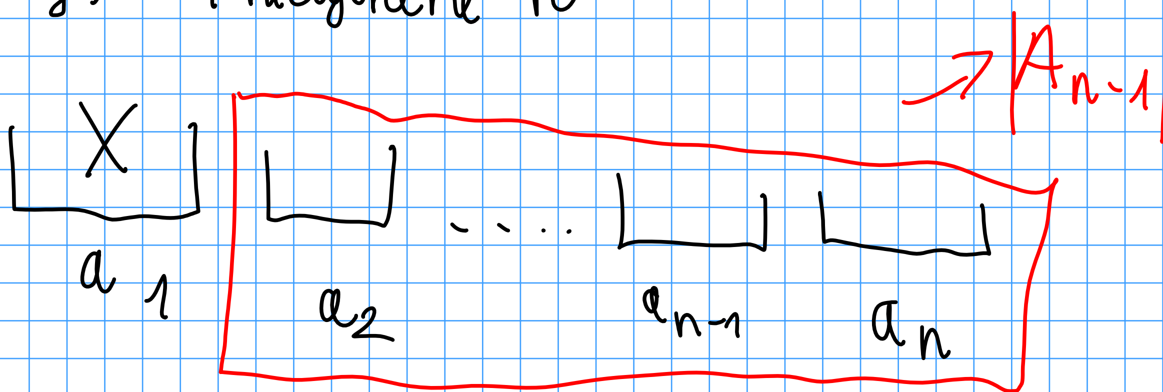
Zad 1

A_k – liczba podzbiorów zbioru k elementowego w którym nie ma dwóch kolejnych liczb

Niech te liczby to $a_1, a_2, \dots, a_n$

1° Jeśli a_1 wybrane to

2° Jeśli a_1 niewybrane to



więc $|A_n| = |A_{n-1}| + |A_n|$

ciąg Fibonacciego

odp:

$$F_n = F_{n-1} + F_n$$

Zad 4

A_i – zbiór tych permutacji, że i-ty element jest na swoim miejscu

$n!$ – ilość wszystkich permutacji

szukamy:

$$n! - |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = X$$

$$|A_i| = (n-1)! \; ; \quad |A_i \cap A_j| = (n-2)! \; ; \ldots ;$$

$$|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}| = (n-k)!$$

więc:

$$X = n! - \left(\binom{n}{1}(n-1)! - \binom{n}{2}(n-2)! + \ldots - \binom{n}{n}(n-n)!\right)$$

zauważmy, że $\binom{n}{k} \cdot (n-k)! = \frac{n!}{k!}$

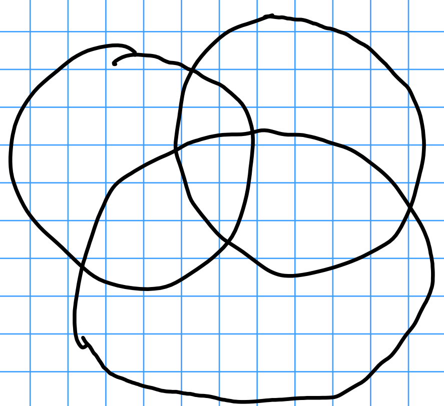
$$X = n! - \left(\frac{n!}{1!} - \frac{n!}{2!} + \ldots - \frac{n!}{n!}\right)$$

$$X = n! - n!\left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \ldots - \frac{1}{n!}\right)$$

$$X = n! - n! \cdot \frac{1}{e} = n!\left(1 - \frac{1}{e}\right)$$

Zad 7

Zauważmy, że każde przecięcie generuje dwa nowe obszary



$$a_1 = 2$$
$$a_2 = 4$$
$$\vdots$$
$$a_n = a_{n-1} + 2(n-1)$$

$$a_n = a_{n-2} + 2(n-2) + 2(n-1) = \dots = a_1 + 2(1) + \dots + 2(n-1) =$$

$$= 2 + 2\left(1 + 2 + \dots + (n-1)\right) = 2 + \cancel{2} \cdot \frac{(n-1)n}{\cancel{2}} =$$

$$= 2 + (n-1)n = \underline{n^2 - n + 2}.$$

Zad 5

Lemat 1 $\quad NWD(F_N, F_{N+1}) = 1$

Lemat 2 $\quad F_{m+n} = F_m \cdot F_{n-1} + F_{m+1} \cdot F_n$

Lemat 3 $\quad k \mid l \Rightarrow F_k \mid F_l$

D-d 1 Lista 4 zad 8

D-d 2

i)
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{bmatrix}$$

Indukcja: $n=1$
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 & F_1 \\ F_1 & F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Krok ind:
$$M^{n+1} = M^1 \cdot M^n = M^1 \cdot \begin{bmatrix} F_{N-1} & F_N \\ F_N & F_{N+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{N-1} & F_N \\ F_N & F_{N+1} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} F_N & F_{N+1} \\ F_{N-1}+F_N & F_N+F_{N+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_n & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_{n+2} \end{bmatrix} \quad \checkmark$$

ii)
$$M^{n+k} = M^k \cdot M^n$$

$$M^{n+k} \overset{z\,(i)}{=} \begin{bmatrix} F_{n+k-1} & F_{n+k} \\ F_{n+k} & F_{n+k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{k-1} & F_k \\ F_k & F_{k+1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{bmatrix}$$

po prostych przekształceniach:

$$\begin{bmatrix} F_{n+k-1} & F_{n+k} \\ F_{n+k} & F_{n+k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{k-1}F_{n-1} + F_kF_n & F_{k-1}F_n + F_kF_{n+1} \\ F_kF_{n-1} + F_{k+1}F_n & F_kF_n + F_{k+1}F_{n+1} \end{bmatrix}$$

$$F_{n+k} = F_k \cdot F_{n-1} + F_{k+1} \cdot F_n$$ dla $k = m$;

$$\boxed{F_{m+n} = F_m F_{n-1} + F_{m+1} F_n}$$

ZAD: $NWD(F_m, F_n) \overset{?}{=} F_{NWD(m,n)}$

$n = mk + r$; $0 \le r < m$

$$NWD(F_m, F_n) = NWD(F_m, F_{mk+r}) =$$ z (2)

$$= NWD(F_m, F_{mk} F_{r-1} + F_{mk+1} F_r)$$

z (3) $m | mk \Rightarrow F_m | F_{mk}$ więc $=$

$$= NWD(F_m, F_{mk+1} F_r)$$

z (3) $m | mk \Rightarrow F_m | F_{mk}$ oraz z (1) $NWD(F_{mk}, F_{mk+1}) = 1$

$$\Downarrow$$

$$NWD(F_m, F_{mk+1}) = 1$$

więc $NWD(F_m, F_{mk+1} F_r) = NWD(F_m, F_r) = NWD(F_m, F_{n \bmod m})$

z algorytmu Euklidesa:

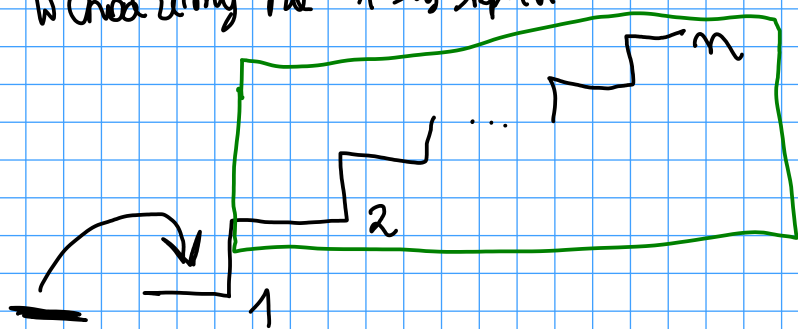
$$NWD(F_m, F_n) = NWD(F_m, F_{n \bmod m}) = \dots =$$

$$= NWD(F_{NWD(m,n)}; F_{NWD(m,n)}) = F_{NWD(m,n)}$$

Zad 10

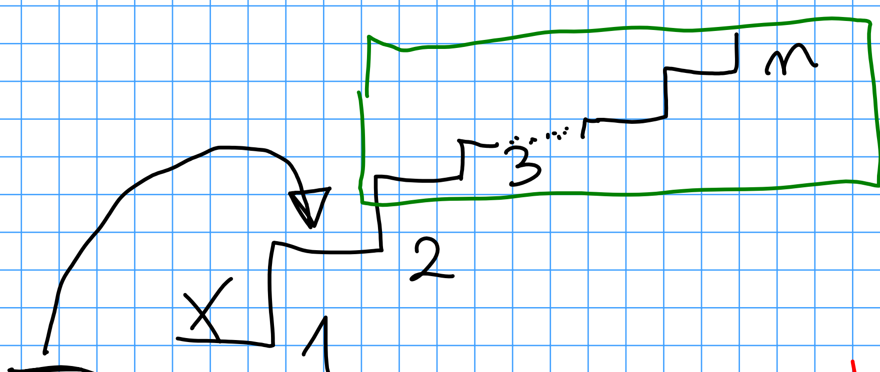
$|A_i|$ – ilość sposobów wejścia po schodach zbudowanych z i stopni jesli w każdym kroku można przejść jeden lub dwa stopnie

1° wchodzimy na 1-szy stopień



$\to |A_{n-1}|$

2° wchodzimy od razu na 2-gi stopień:



$\to |A_{n-2}|$

Odp: $|A_n| = |A_{n-1}| + |A_{n-2}|$

Ciąg Fibonacciego

Zad. 2

A – liczby niepodzielne przez 7

B – liczby podzielne przez 6

C – liczby podzielne przez 8

$$|A \cap (B \cup C)| = |(A \cap B) \cup (A \cap C)| =$$

$$= |A \cap B| + |A \cap C| - |A \cap B \cap C|$$

$$|A| = 800 - \left\lfloor \frac{800}{7} \right\rfloor = 800 - 114 = 686$$

$$|B| = \left\lfloor \frac{800}{6} \right\rfloor = 133$$

$$|C| = \left\lfloor \frac{800}{8} \right\rfloor = 100$$

podzielne przez 6 i przez 7

$$|A \cap B| = \underbrace{133}_{\text{podzielne przez 6}} - \left\lfloor \frac{133}{7} \right\rfloor = 133 - 19 = 114$$

podzielne przez 8 i 7

$$|A \cap C| = \underbrace{100}_{\text{podzielne przez 8}} - \left\lfloor \frac{100}{7} \right\rfloor = 100 - 14 = 86$$

podzielne przez 6 i 8 więc przez 24

$$|B \cap C| = \left\lfloor \frac{800}{24} \right\rfloor = 33$$

$$|A\cap B\cap C| = \underbrace{33}_{\leftarrow \text{podijelne per } 6 \text{ i } 8} - \left\lfloor \frac{33}{7} \right\rfloor_{\leftarrow \text{podijelne per } 6,8 \text{ i } 7} = 33-4=29$$

$$|(A\cap B)\cup(A\cap C)| = 114+86-29 = \underline{171}.$$