9.3

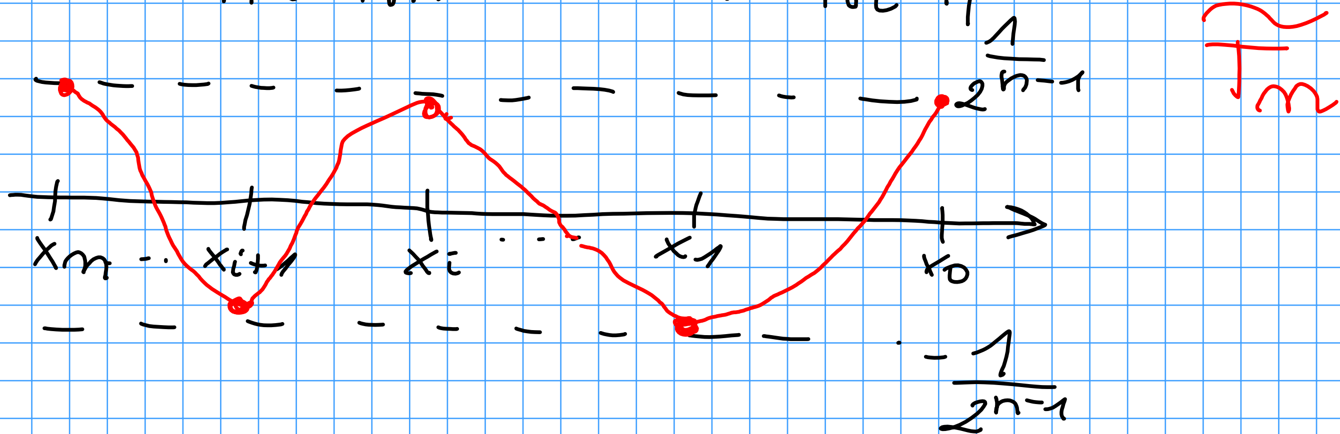
$$\widetilde{T_n} = \frac{T_n}{2^{n-1}} \qquad [-1,1]$$

$$A = \{x^n + \dots\}$$

$$\|\widetilde{T_n}\| = \frac{1}{2^{n-1}} \ ; \ T_n \in A$$

załóżmy nie wprost, że $\exists\, w_n \in \Pi_n$ t. że

$$\|w_n\| < \|\widetilde{T_n}\|$$



skoro $\|w_n\| < \|\widetilde{T_n}\|$

więc $\forall_{i \in \{0,\dots,n-1\}} \ \exists_{t_i} \ \widetilde{T_n}(t_i) = w_n(t_i)$

zatem wielomian $q_n(x) = w_n(x) - \widetilde{T_n}(x)$

ma n zer; ale skoro $w_n, \widetilde{T_n} \in A$ to

$w_n - \widetilde{T}_n \in \Pi_{n-1}$. Zatem $g_n \equiv 0$

więc $w_n \equiv \widetilde{T}_n$; co daje sprzeczność z

$\| w_n \| < \| \widetilde{T}_n \|$.

Jeśli $w \in \Pi_i$ gdzie $i < n$ to

$$\| w_i \| \geq \| T_i \| = \frac{1}{2^{i-1}} > \| T_n \| = \frac{1}{2^{n-1}}$$

zatem $\widetilde{T}_n$ ma najmniejszą normę

spośród wielomianów stopnia $\leq n$.