8.9

a) $E_n(\alpha f) = \inf_{w_n \in \Pi_n} \|\alpha f - \alpha w_n\| =$

w_n^* optymalny

$= \inf_{w_n \in \Pi_n} \|\alpha (f - w_n)\| = \max_{a \le x \le b} |\alpha (f(x) - w_n^*(x))|$

$= |\alpha| \cdot \max_{a \le x \le b} |f(x) - w_n^*(x)| = |\alpha| \cdot \inf_{w \in \Pi_n} \|f - w\|$

$= |\alpha| \cdot E_n(f)$

b) $E_n(f+g) = \inf_{w_n \in \Pi_n} \|f + g - w_n\|$

możemy zapisać $w_n = w_1 + w_2$

$w_1^* + w_2^*$ optymalny dla $f+g$

$= \inf_{w_1, w_2 \in \Pi_n} \|(f - w_1) + (g - w_2)\| = \max_{a \le x \le b} |f - w_1^* + g - w_2^*|$

$\overset{(?)}{\le} \underbrace{\max_{a \le x \le b} |f - w_1^*| + \max_{a \le x \le b} |g - w_2^*|}_{E_n(f) + E_n(g)}$

(?) D-d:

$$+\begin{cases} f(x)-w_1^*(x) \le \max|f(x)-w_1^*(x)| \\ g(x)-w_2^*(x) \le \max|g(x)-w_2^*(x)| \end{cases}$$

$$\left(f(x)-w_1^*(x)\right)+\left(g(x)-w_2^*(x)\right) \le \max|f(x)-w_1^*(x)| + \max|g(x)-w_2^*(x)|$$

więc:

$$\boxed{\max|f(x)-w_1^*(x)+g(x)-w_2^*(x)| \le \max|f(x)-w_1^*(x)| + \max|g(x)-w_2^*|}$$

c) $E_n(f+w) = \inf\limits_{w_n\in\Pi_n} \|f+\underbrace{w-w_n}_{-w_1}\| =$

$= \inf\limits_{w_1\in\Pi_n} \|f-w_1\| = E_n(f)$

w_n^* optym. dla f

d) $E_n(f) = \inf\limits_{w_n\in\Pi_n} \|f-w_n\| = \max\limits_{a\le x\le b} |f-w_n^*|$

$\le \max\limits_{a\le x\le b} |f(x)-0| = \max\limits_{a\le x\le b} |f(x)| = \underline{\|f\|_\infty}$