

Rafał Nowak

Analiza numeryczna

12 stycznia 2021

1. Metody Rungego-Kutty

Ogólna postać s -etapowej metody Rungego-Kutty, dla parametrów a_i, c_i, b_{ij} ($i, j = 1, \dots, s$), dana jest wzorem

$$y_{n+1} = y_n + \Phi_f(h; x_n, y_n, y_{n+1}), \quad (1)$$

gdzie

$$\Phi_f(h; x_n, y_n, y_{n+1}) = h \sum_{i=1}^s c_i k_i,$$

zaś

$$k_i \equiv k_i(h; x_n, y_n) = f\left(x_n + a_i h, y_n + h \sum_{j=1}^s b_{ij} k_j\right).$$

Wygodna forma zapisu tej metody dana jest w tabeli, w której często pomija się wyrazy zerowe:

a_1	b_{11}	\cdots	b_{1s}
a_2	b_{21}	\cdots	b_{2s}
\vdots			\vdots
a_s	b_{s1}	\cdots	b_{ss}
	c_1	\cdots	c_s

Definicja 1. Powiemy, że metoda opisana wzorem (1) jest *rzędu* p , jeśli po podstawieniu w nim $y_n := y(x_n)$ otrzymujemy y_{n+1} o własności

$$y_{n+1} - y(x_n + h) = \mathcal{O}(h^{p+1}).$$

Przykłady

- metody rzędu pierwszego
 - metoda jawna Eulera

0	
	1

- metoda niejawna Eulera (wzór wsteczny)

1	1
	1

- ulepszony (jawny) wzór wsteczny Eulera

0	
1	1
	0 1

— metody rzędu drugiego

— wzór trapezów

0		
1	0	1
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

— jawny wzór trapezów (metoda Heuna)

0		
1	1	
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

— jawna metoda punktu środkowego

0		
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	
	0	1

— metody rzędu trzeciego

— metoda Heuna (3)

0			
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$		
$\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	
	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{4}$

— metoda Rungego-Kutty (3)

0			
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		
1	0	1	
1	0	0	1
	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$

— metody rzędu czwartego

— metoda Rungego-Kutty

0			
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	
1	0	0	1
	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$

— reguła 3/8

0			
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$		
$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	
1	1	-1	1
	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$

— metoda Mersona (4,5)

0				
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$			
$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1		
1	1	-1	1	
	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

— metoda Scratona (4,5)

0					
2/9	2/9				
1/3	1/12	1/4			
3/4	69/128	-243/128	270/128		
0.9	-9 * 0.0345	9 * 0.2025	-9 * 0.1224	9 * 0.0544	
	17/162	0	81/170	32/135	250/1377

1.1. Analityczne badanie rzędu metody

Aby sprawdzić jakiego rzędu jest dana metoda należy rozwinąć w szereg Taylora wartości $y(x_n + h)$ oraz y_{n+1} , a następnie porównać współczynniki stojące przy kolejnych potęgach h . Do tego przydatne okazują się następujące wzory Taylora:

$$y(x_n + h) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{1}{2!}h^2y''(x_n) + \frac{1}{3!}h^3y'''(x_n) + \dots$$

Ponieważ $y'(x) = f(x, y(x))$, więc

$$y(x_n + h) = y_n + hf + \frac{1}{2!}h^2(f_x + f_yf) + \frac{1}{3!}h^3[f_{xx} + f_{xy}f + (f_{xy} + f_{yy}f)f + f_y(f_x + f_yf)] + \dots,$$

gdzie $f \equiv f(x_n, y_n)$, $f_x \equiv \frac{\partial}{\partial x}f(x_n, y_n)$, $f_y \equiv \frac{\partial}{\partial y}f(x_n, y_n)$, $f_{xx} \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x_n, y_n)$, \dots .

Z drugiej strony, aby znaleźć rozwinięcie wartości y_{n+1} , należy rozwinąć wszystkie wartości k_i we wzorze (1). Do tego celu stosujemy wzór Taylora dla funkcji wielu zmiennych:

$$f(x + ah, y + bh) = f(x, y) + df(x, y)(ah, bh) + \frac{1}{2!}d^2f(x, y)(ah, bh) + \frac{1}{3!}d^3f(x, y)(ah, bh) + \dots,$$

gdzie $df(x, y)(ah, bh)$ oznacza różniczkę zupełną funkcji f w punkcie (x, y) dla argumentu (ah, bh) :

$$d^j f(x, y)(ah, bh) = \left(\frac{\partial}{\partial x}ah + \frac{\partial}{\partial y}bh \right)^j f(x, y).$$

Na przykład

$$f(x_n + ah, y_n + bh) = f + h(af_x + bf_y) + \frac{1}{2}h^2(a^2f_{xx} + 2abf_{xy} + b^2f_{yy}) + \dots,$$

gdzie symbole f, f_x, f_y, \dots mają takie samo znaczenie, jak wcześniej.