$W(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ gdzie $a_i \in \mathbb{R}$

1) $W(\overline{\alpha}) = \overline{W(\alpha)}$

Korzystając z własności:

i) $\overline{z} + \overline{w} = \overline{z+w}$; ii) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$; $z, w \in \mathbb{C}$

iii) $\overline{x} = x$; $x \in \mathbb{R}$

otrzymujemy

$$\overline{W(\alpha)} = \overline{a_n \alpha^n + \ldots + a_1 \alpha + a_0} = \overline{a_n}\, \overline{\alpha}^n + \ldots + \overline{a_1} \overline{\alpha} + \overline{a_0} = a_n \overline{\alpha}^n + \ldots + a_1 \overline{\alpha} + a_0 =$$
$$= W(\overline{\alpha}) \square$$

(2) $W(\beta) = 0 \overset{?}{\Rightarrow} W(\overline{\beta}) = 0$

Załóżmy, że $W(\beta) = 0$, po sprzężeniu obustronnie:

$\overline{W(\beta)} = \overline{0} \iff \overline{W(\beta)} = 0$ bo $\overline{0} = 0$

ale z (1) $\overline{W(\beta)} = W(\overline{\beta})$ więc $W(\overline{\beta}) = 0$.

(3) $\vec{V} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$

$$M \cdot \vec{V} = \beta \cdot \vec{V} \overset{?}{\Rightarrow} M \cdot \overline{\vec{V}} = \overline{\beta} \cdot \overline{\vec{V}}$$

Załóżmy, że $M \cdot \vec{V} = \beta \cdot \vec{V}$.

$M\vec{V} = \beta \vec{V} \iff \vec{V}(M - \beta \mathrm{Id}) = 0$, po sprzężeniu obustronnie:

$\overline{\vec{V}(M - \beta \mathrm{Id})} = \overline{0}$ ale $\overline{0} = 0$ więc

$$\overline{\vec{V}(M - \beta \mathrm{Id})} = 0 \iff \overline{\vec{V}}\, \overline{(M - \beta \mathrm{Id})} = 0 \iff \overline{\vec{V}}\, (\overline{M} - \overline{\beta}\, \overline{\mathrm{Id}}) = 0$$

$\iff \overline{\vec{V}}\, (M - \overline{\beta}\, \mathrm{Id}) = 0$, ponieważ dla dowolnej macierzy K o współczynnikach rzeczywistych $\overline{K} = K$, więc $\overline{M} = M$ oraz $\overline{\mathrm{Id}} = \mathrm{Id}$.

$\overline{\vec{V}}(M - \overline{\beta}\, \mathrm{Id}) = 0 \iff M\overline{\vec{V}} = \overline{\beta}\, \overline{\vec{V}}$ co było do udowodnienia. $\square$