5.3

Podstawa indukcji:

$k=0 \qquad q(x) = p[x] = p(x) \quad \checkmark$

$k=1 \qquad q(x) = p[x, x_1] = \frac{p[x] - p[x_1]}{x - x_1} = \frac{p(x) - p(x_1)}{x - x_1}$

zauważmy, że $\frac{p(x) - p(x_1)}{x - x_1} \in \Pi_{n-1} \setminus \Pi_{n-2}$

oraz $\frac{p(x_1) - p(x_1)}{x - x_1} = 0$ więc

$p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$

to $L(x) = p(x) - p(x_1) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 - p(x_1) =$

$= a_n (x - x_1)(x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0)$

więc $q(x) = \frac{L(x)}{x - x_1} = a_n (x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0)$ ma taki sam

współczynnik przy x^{n-1} co $p(x)$ przy x^n.

Krok indukcyjny

Załóżmy, że $q_1(x) = p[x, x_1, \dots, x_k] \in \Pi_{n-k} \setminus \Pi_{n-(k+1)}$

oraz $q_1(x)$ ma taki sam współczynnik przy x^{n-k} co $p(x)$ przy x^n.

Teza: $q_2(x) = p[x, x_1, \dots, x_{k+1}] \in \Pi_{n-(k+1)} \setminus \Pi_{n-(k+2)}$ oraz

$q_2(x)$ ma taki sam współczynnik przy $x^{n-(k+1)}$ co $p(x)$ przy x^n.

$$q_2(x) = p[x, x_1, \dots, x_{k+1}] = \frac{\overbrace{p[x, \dots, x_k]}^{q_1(x)} - p[x_1, \dots, x_{k+1}]}{x - x_{k+1}} =$$

$$= \frac{q_1(x) - p[x_1, \dots, x_{k+1}]}{x - x_{k+1}} \in \Pi_{n-(k+1)} \setminus \Pi_{n-(k+2)}$$

1 z założenia indukcyjnego

2 zauważmy że $q_1(x_{k+1}) - p[x_1, \dots, x_{k+1}] = 0$

więc $$q_2(x) = \frac{a_n \cancel{(x - x_{k+1})} \left(x^{n-(k+1)} + \dots + c_1 x + c_0\right)}{\cancel{x - x_{k+1}}} =$$

$$= \boxed{a_n} x^{n-(k+1)} + \dots\dots$$

z założenia indukcyjnego a_n stoi przy x^n w wielomianie $p(x)$ ■