$\boxed{\text{Zad 2.3}}$ $rd(x) = x$; $rd(y) = y$

$0 < x < y$; $2^{-q} \leq 1 - \frac{x}{y} \leq 2^{-p}$

D-d: Niech $x = a \cdot 2^n$ i $y = b \cdot 2^m$.

Ponieważ $x > y$ więc komputer w razie potrzeby przesuwa mantysę y tak aby zrównać cechy liczb ; tzn. wyraża y w postaci:

$$y = (2^{m-n} \cdot b) \cdot 2^n$$

Więc: $x - y = a \cdot 2^n - (2^{m-n} \cdot b) \cdot 2^n = (a - 2^{m-n} \cdot b) \cdot 2^n$

Zatem tymczasowa mantysa liczby $x-y$ jest równa:

$$a - 2^{m-n} \cdot b = a\left(1 - \frac{2^{m-n} \cdot b}{a}\right) = a\left(1 - \frac{2^m \cdot b}{a \cdot 2^n}\right) =$$

$= a\left(1 - \frac{y}{x}\right)$. Zauważmy, że $a \in \langle 1; 2)$ (bo to mantysa liczby x),

a z założenia $1 - \frac{y}{x} \leq 2^{-p}$, więc liczba

$a\left(1 - \frac{y}{x}\right) < 2^{-p+1}$. Ale $a\left(1 - \frac{y}{x}\right)$ jest

mantysą liczby $x-y$ więc musi $\in \langle 1; 2)$ więc

trzeba ją „przesunąć" o conajmniej p bitów w lewo.

Dla q dowód jest analogiczny.

$\blacksquare$