Aby sformułować tezę jakiej postaci będzie macierz M^k weźmy macierz M rozmiaru 4×4:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = M \; ; \; M^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1\cdot 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\cdot 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \; ; \; M^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1\cdot 2\cdot 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \; ; \; M^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Zatem jak łatwo zauważyć każda kolejna „potęga" macierzy przesuwa jej „przekątną" o jeden w prawo, oraz każdą niezerową pozycję w wierszu domnaża przez kolejną liczbę naturalną.

Udowodnimy indukcyjnie, że M^k rozmiaru $n \times n$ jest postaci:

$$\begin{array}{l} n-k \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right. \\ k \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right. \end{array} \begin{bmatrix} \underbrace{0 \ldots 0}_{k} \; \frac{k!}{0!} \; \underbrace{0 \ldots 0}_{n-(k+1)} \\ \underbrace{0 \ldots\ldots 0}_{k+1} \; \frac{(k+1)!}{1!} \; \underbrace{0 \ldots 0}_{n-(k+2)} \\ \vdots \\ \underbrace{0 \ldots\ldots\ldots\ldots 0}_{n-1} \; \frac{(n-1)!}{(n-(k+1))!} \\ 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 0 \\ \vdots \\ 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 0 \end{bmatrix}$$

(1) Podstawa indukcji $k=1$

$$M^1: \begin{bmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 2 \ldots & 0 \\ \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & n-1 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 \end{bmatrix} \overset{?}{=} \begin{array}{l} n-1 \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right. \\ 1 \{ \end{array} \begin{bmatrix} 0 \; \frac{1!}{0!} \ldots 0 \\ 0 \; 0 \; \frac{2!}{1!} \ldots 0 \\ \vdots \\ 0 \ldots\ldots \frac{(n-1)!}{(n-2)!} \\ 0 \ldots\ldots 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 2 \ldots & 0 \\ \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & n-1 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 \end{bmatrix} \checkmark$$

(2) Krok indukcyjny:

Załóżmy, że M^k jest powyższej postaci, pokażę że $M^k \cdot M$ jest postaci M^{k+1} czyli:

$$M^{k+1}: \begin{array}{l} n-(k+1) \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right. \\ k+1 \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right. \end{array} \begin{bmatrix} \underbrace{0 \ldots 0}_{k+1} \; \frac{(k+1)!}{0!} \; \underbrace{0 \ldots 0}_{n-(k+2)} \\ \underbrace{0 \ldots 0}_{k+2} \; \frac{(k+2)!}{1!} \; \underbrace{0 \ldots 0}_{n-(k+3)} \\ \vdots \\ \underbrace{0 \ldots\ldots\ldots 0}_{n-1} \; \frac{(n-1)!}{(n-(k+2))!} \\ 0 \ldots\ldots\ldots\ldots 0 \\ \vdots \\ 0 \ldots\ldots\ldots\ldots 0 \end{bmatrix} \overset{?}{=} M^k \cdot M: \begin{array}{l} n-k \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right. \\ k \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right. \end{array} \begin{bmatrix} \underbrace{0 \ldots 0}_{k} \; \frac{k!}{0!} \; \underbrace{0 \ldots 0}_{n-(k+1)} \\ \underbrace{0 \ldots\ldots 0}_{k+1} \; \frac{(k+1)!}{1!} \; \underbrace{0 \ldots 0}_{n-(k+2)} \\ \vdots \\ \underbrace{0 \ldots\ldots\ldots 0}_{n-1} \; \frac{(n-1)!}{(n-(k+1))!} \\ 0 \ldots\ldots\ldots 0 \\ \vdots \\ 0 \ldots\ldots\ldots 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{array}{l} n-1 \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right. \\ 1 \{ \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 2 \ldots & 0 \\ \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & n-1 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 \end{bmatrix}$$

Wymnażamy prawą stronę i otrzymujemy:

$$\begin{bmatrix} \underbrace{0 \ldots 0}_{k+1} \; \frac{k!}{0!} \cdot (k+1) \; \underbrace{0 \ldots 0}_{n-(k+2)} \\ \underbrace{0 \ldots\ldots 0}_{k+2} \; \frac{(k+1)!}{1!} \cdot (k+2) \; \underbrace{0 \ldots 0}_{n-(k+3)} \\ \vdots \\ \underbrace{0 \ldots\ldots\ldots 0}_{n-1} \; \frac{(n-2)!}{(n-(k+2))!} \cdot (n-1) \\ \underbrace{0 \ldots\ldots\ldots 0}_{n-1} \; \frac{(n-1)!}{(n-(k+1))!} \cdot 0 \\ 0 \ldots\ldots\ldots 0 \\ 0 \ldots\ldots\ldots 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} n-(k+1) \\ \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} k+1 \end{array} = \begin{array}{l} n-(k+1) \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right. \\ k+1 \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right. \end{array} \begin{bmatrix} \underbrace{0 \ldots 0}_{k+1} \; \frac{(k+1)!}{0!} \; \underbrace{0 \ldots 0}_{n-(k+2)} \\ \underbrace{0 \ldots 0}_{k+2} \; \frac{(k+2)!}{1!} \; \underbrace{0 \ldots 0}_{n-(k+3)} \\ \vdots \\ \underbrace{0 \ldots\ldots\ldots 0}_{n-1} \; \frac{(n-1)!}{(n-(k+2))!} \\ 0 \ldots\ldots\ldots 0 \\ \vdots \\ 0 \ldots\ldots\ldots 0 \end{bmatrix} \quad \square$$