7

w „n-tej" próbie osiągniemy trzeci sukces.

$$P(X=n) = \binom{n-1}{2} p^2 \cdot (1-p)^{n-3} \cdot p$$

$$\underbrace{\sqcup \quad \sqcup \quad \dots \quad \overset{p}{\sqcup}}_{n}$$

wybieramy miejsce na dwa sukcesy z prawdopodobieństwem p, ostatnie miejsce to z automatu sukces, pozostałe to niepowodzenia (1-p).

$$P(X=n) = \frac{(n-1)(n-2)}{2} p^3 (1-p)^{n-3}$$

$$EX = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot P(X=k) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{(k-1)(k-2)}{2} p^3 (1-p)^{k-3}$$

$$= \frac{p^3}{2} \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)(k-2)(1-p)^{k-3}$$

niech $x = 1-p$; chcemy zwinąć sumę:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)(k-2)\, x^{k-3}$$

weźmy $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} x^k = \frac{x}{1-x} \quad /'$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k x^{k-1} = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2} \quad /''$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)(k-2) x^{k-3} = \left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)'' = \frac{6}{(x-1)^4}$$

więc $x := 1-p$

$$EX = \frac{p^3}{2} \cdot \frac{6}{(1-p-1)^4} = \frac{p^3}{2} \cdot \frac{6}{p^4} = \underline{\frac{3}{p}}$$