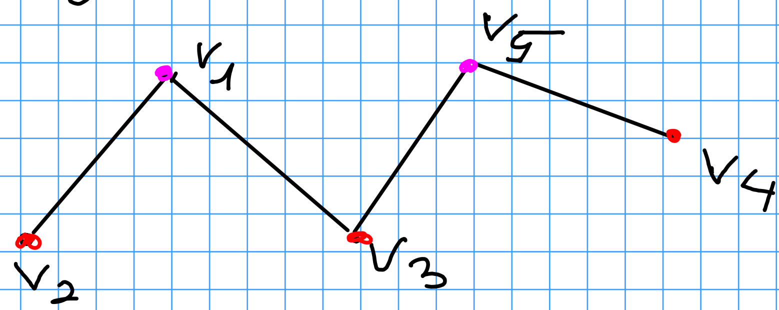
Lista 13

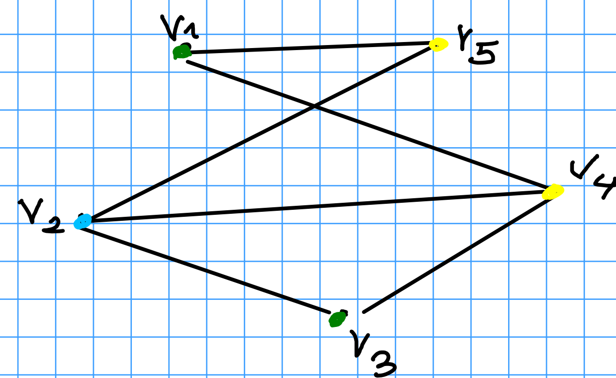
12

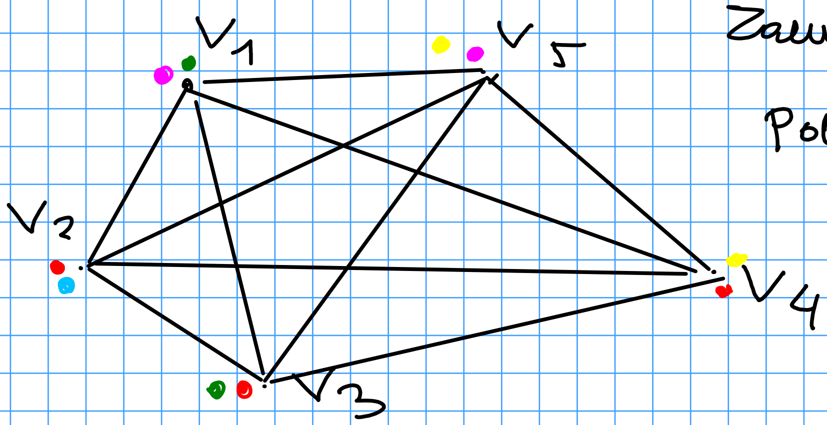
$$\chi(G)\cdot\chi(\bar{G}) \geq n = |V|$$

Przykład: G



G'





Zauważmy, że $G \cup G'$ to klika

Pokolorujmy oddzielnie graf $G \cup G'$

Niech G ma wierzchołki v1,...,vn, X(G) = k oraz X(G') = l. Każdemu wierzchołkowi przypisujemy pare kolorów (x,y) gdzie x wychodzi z kolorowania G a y z G'. Kolorowanie jest poprawne bo dowolne dwa wierzchołki nie są połączone w jednym z grafów G lub G', więc ich para kolorów będzie się różnić na conajmniej jednym miejscu. Wtedy X(G u G') = X(K_n) = n (K_n to klika n wierzchołkowa). Kolorując graf G u G' otrzymujemy k*l kolorów(nie możemy inaczej pokolorować grafu G u G' niż pomieszać kolory z grafów G i G', ponieważ każdy wierzchołek jest połączony z każdym innym), czyli w najlepszym
wypadku będzie ich n, może być więcej. Zatem X(G) * X(G') >= X(G u G') = X(K_n) = n.

1

$\{v_1, v_2, \dots\} \to$ kolor 1

$\{u_1, u_2, \dots\} \to$ kolor 2

itd

$\{k_1, k_2, \dots\} \to$ kolor n-ty

optymalne kolorowanie

Wystarczy wykonać algorytm sekwencyjny w kolejności: wierzchołki 1 koloru, wierzchołki 2 koloru, ..., wierzchołki n-tego koloru. Wtedy mamy pewność, że będzie to optymalne kolorowanie.

$$\overbrace{v_1, v_2, \dots}^{\text{kolor } 1}, \overbrace{u_1, u_2, \dots}^{\text{kolor } 2}, \dots, \overbrace{k_1, k_2, \dots}^{\text{kolor } n\text{-ty}}$$

D-d ind.

$n = 1$ $\quad v_1, v_2, \dots \to$ kolor 1 ✓

Załóżmy, że $\overbrace{v_1, v_2, \dots}^{\text{kolor } 1}, \overbrace{u_1, u_2, \dots}^{\text{kolor } 2}, \dots, \overbrace{k_1, k_2, \dots k_x}^{\text{kolor } n}$

Niech $\{a_1, \dots, a_l\}$ to ciąg wierzchołków

wtedy dokładając na końcu $a_1, \dots, a_l$

$$\overbrace{v_1, v_2, \dots}^{\text{kolor } 1}, \overbrace{u_1, u_2, \dots}^{\text{kolor } 2}, \dots, \overbrace{k_1, k_2, \dots, k_x}^{\text{kolor } n}, a_1, a_2, \dots, a_l$$

Mamy pewność, że wierzchołki a_i będą miały kolor conajwyżej n+1 (może się okazać, że mniejszy).

4

Weźmy zbiory wierzchołków takiego samego koloru (które pokolorował algorytm sekwencyjny). Załózmy, że jest k kolorów. W zbiorach nie ma krawędzi między wierzchołkami, ponieważ są tego samego koloru.
Między każdym zbiorem wierzchołków musi
być przynajmiej jedna krawędź, w przeciwnym przypadku wierzchołki te byłyby tego samego koloru co byłoby sprzeczne z kolorowaniem przez algorytm sekwencyjny.
Skoro pomiędzy każdym zbiorem jest przynajmniej jedna krawędź to jest ich k po 2 czyli k(k-1)/2. Identycznie postępujemy z optymalnym kolorowaniem, dzielimy wierzchołki na zbiory tego samego koloru i postępujemy tak samo (lub prościej, podstawmy za k = X(G) i dostajemy natychmiastowo teze).