AN(M) 26.X

poniedziałek, 26 października 2020 11:44

$f = \Phi$ zwężające (Lagrange) Ogólniej: $\Phi'(x)$

$$f(\alpha) = 0 \iff \Phi(\alpha) = \alpha$$

$$x_{n+1} = \Phi(x_n) \qquad x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha \implies \alpha = \Phi(\alpha)$$

Zał. że $\Phi(x)$ jest zwężające

$$|\Phi(x) - \Phi(y)| \leq K|x-y| \qquad 0 < K < 1 \qquad (1)$$

$$|x_{n+1} - \alpha| = |\Phi(x_n) - \Phi(\alpha)| \leq K\underbrace{|x_n - \alpha|} \leq K^2 |x_{n-1} - \alpha| < \dots$$

$$|x_{n+1} - \alpha| \leq K^{n+1} |x_0 - \alpha| \qquad K^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Tw. Lagrange'a

$$\frac{g(x) - g(y)}{x - y} = g'(\eta) \qquad |g(x) - g(y)| = |g'(\eta)| \cdot |x - y|$$

Jeżeli $|g'(\cdot)| < 1$ to $g(x)$ – zwężające.

Metoda iter. $x_{n+1} = \Phi(x_n)$ jest zbieżna na obszarze t. że $|\Phi'(t)| < 1$

$$x_{n+1} = \Phi(x_n) \qquad \underbrace{\Phi(\alpha) = \alpha}$$

$$(2) \quad x_{n+1} = \Phi(\alpha) + (x_n - \alpha)\Phi'(\alpha) + \frac{(x_n - \alpha)^2}{2!}\Phi^{(2)}(\alpha) + \dots + \frac{(x_n - \alpha)^k}{k!}\Phi^{(k)}(\eta)$$

Zał. że $\Phi'(\alpha) = \Phi''(\alpha) = \dots = \Phi^{(k-1)}(\alpha) = 0$

$\Phi^{(k)}(\alpha) \neq 0$ tzn. w pewnym otoczeniu α

Oznaczenie $x_k - \alpha = \varepsilon_k$

$$(2a) \quad x_{n+1} - \alpha = \varepsilon_{n+1} = \underset{0}{(\Phi(\alpha) - \alpha)} + \varepsilon_n \Phi'(\alpha) + \dots + \frac{\varepsilon_n^k}{k!}\Phi^{(k)}(\eta_n)$$

$$(2b) \quad \varepsilon_{n+1} = \frac{\varepsilon_n^k}{k!}\Phi^{(k)}(\eta)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n^k} = \lim_{n\to\infty} \Phi^{(k)}(\eta_n) = \Phi^{(k)}(\alpha) \neq 0$$

Metoda zbieżna sześciennie:

$$x_{n+1} = \dots \qquad \Phi(x) = \frac{x(x^2 + 3R)}{3x^2 + R} \qquad \alpha = \sqrt{R}$$

Sprawdzić, że $\Phi(\sqrt{R}) = \sqrt{R}$ i.

$\Phi'(\sqrt{R}) = \Phi^{(2)}(\sqrt{R}) = 0$ ii iii

$\Phi^{(3)}(\sqrt{R}) \neq 0$ iv

$$\Phi^{(2)}(x) = -\frac{48Rx(R - x^2)}{(R + 3x^2)^3}$$

$$\Phi^{(2)}(\sqrt{R}) = \frac{-48R\sqrt{R}(R - R)}{-\|-} = 0$$

$\Phi^{(2)}(\ldots) = \ldots 4$

$$x_{n+1} = \Phi(x_n) \qquad \Phi(\alpha) = \alpha \quad (f(\alpha) = 0)$$

$$0 < |\Phi'(\alpha)| < 1$$

warunki

$$\Phi(x) = x - r f(x)$$

$$\Phi(\alpha) = \alpha \qquad \Phi'(\alpha) = \Phi^{(2)}(\alpha) = 0 \qquad \Phi^{(3)}(\alpha) \neq 0$$

(2) rząd zbieżności

$|\Phi'(x)| < 1$ obszar zbieżności

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n^2} \right| = K \neq 0 \qquad \varepsilon_k = x_k - \alpha \qquad \varepsilon_k = x_k$$

regula falsi example of linear convergence

Kincaid, Cheney tw. 3.2.3 (skrótowy dowód)

$$f(x) = (x-c)^2 \qquad c \text{ - podwójny pierwiastek}$$

$$f'(x) = 2(x-c)$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n-c)^2}{2(x_n-c)}$$

$$f(x) = (x-c)^2 g(x)$$

Newton dla podwójnej α

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n - \frac{\varepsilon_n}{2} = \frac{\varepsilon_n}{2}$$

$$\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} = \frac{1}{2} \qquad 0 < \overset{K}{\frac{1}{2}} < 1$$

Obliczmy $\sqrt{c} = \alpha$

$$f(x) = x^2 - c$$

$$f'(x) = 2x$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - c}{2x_n} = x_n - \frac{x_n}{2} - \frac{c}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n - \frac{c}{x_n}\right)$$

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{x} - c}$$