12.2.

Jednopunktowa kwadratura dla x_0 ma mieć rząd 2 więc musi to być kwadratura Gaussa. (rząd $2n+2$)

x_0 to miejsce zerowe I wielomianu ortogonalnego

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = \left(x - \frac{\langle x P_0, P_0 \rangle}{\langle P_0, P_0 \rangle}\right) P_0(x)$$

$$x_0 = \frac{\langle x P_0, P_0 \rangle}{\langle P_0, P_0 \rangle}$$

$$\langle P_0, P_0 \rangle = \int p(x) P_0^2(x)\,dx =$$

$$= \underline{\int_a^b p(x)\,dx}$$

$$\langle x P_0, P_0 \rangle = \underline{\int_a^b p(x)\,x\,dx}$$

szukamy

$$\int_a^b p(x) f(x)\,dx = A_0 f(x_0)$$

Niech $w(x)$ to wielomian interp. $f(x)$

$$w(x) = \sum_{i=0}^{0} f(x_i) \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{0} \frac{x-x_j}{x_i-x_j} = f(x_0)$$

więc $\displaystyle\int_a^b p(x)w(x)\,dx = f(x_0)\underbrace{\int_a^b p(x)\,dx}_{A_0}$

odp: $\displaystyle\int_a^b p(x)f(x)\,dx = A_0 \cdot f(x_0)$

gdzie $\displaystyle A_0 = \int_a^b p(x)\,dx$ i $x_0 = \dfrac{\int_a^b x\,p(x)\,dx}{\int_a^b p(x)\,dx}$