

13.4

$$\|A\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

$$\|A\|_{\infty} = \max_{\|x\|_{\infty}=1} \|Ax\|_{\infty}$$

$$\|x\|_{\infty} = 1 \iff \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| = 1$$

Wzmiemy gęstość, tzn. $\max_{\|x\|_{\infty}=1} \|Ax\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$

$$\Rightarrow \|x\|_{\infty} = 1 \Rightarrow |x_i| \leq 1 \text{ dla } i = 1, \dots, n$$

$$\text{zatem } \exists_k |x_k| = 1$$

$$\|Ax\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| |x_j|$$

$$\forall b_i \in \mathbb{R} \quad |b_1 + b_2 + \dots + b_n| \leq |b_1| + \dots + |b_n|$$

$$\text{ale } |x_i| \leq 1 \text{ wic}$$

$$\|Ax\|_{\infty} \leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

$$\text{wzmiemy } x = \begin{bmatrix} \text{sgn}(a_{11}) \\ \vdots \\ \text{sgn}(a_{1n}) \end{bmatrix} \text{ wtedy}$$

$$\|Ax\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^m |a_{ij}|$$

(Pierwszy wiersz mnożony mo maksymalne sumy modułów)