Lista nr 2

czwartek, 22 października 2020 11:52

Z1

czwartek, 22 października 2020 11:05

$$\prod_{i=1}^{n}(1+\alpha_i) \leqslant (1+|\alpha_1|+|\alpha_2|+|\alpha_1|\cdot|\alpha_2|)\prod_{i=3}^{n}(1+|\alpha_i|) = \qquad 1+E$$

$$(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)(1+\alpha_3) = 1+[\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_2\alpha_3]$$

$$= (1+|\alpha_1|+|\alpha_2|+|\alpha_3|+|\alpha_1\alpha_2|+|\alpha_1\alpha_3|+|\alpha_2\alpha_3|+|\alpha_1\alpha_2\alpha_3|)\prod_{i=4}^{n}(1+|\alpha_i|) = \dots$$

$$= \underbrace{1+\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i| + \sum_{1\leq i<j\leq n}|\alpha_i\alpha_j| + \dots + |\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dots\alpha_n|}_{1+|E|} \leqslant$$

$$1+nu+\frac{n(n-1)}{2!}u^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}u^3+\dots+\frac{n!}{(n-2)!\cdot 2!}u^{n-2}+\frac{n!}{(n-1)!}u^{n-1}+\frac{n!}{n!}u^n \leqslant \qquad (1)$$

$$\Downarrow$$

$$1+nu+\frac{1}{2}n^2u^2+n^3u^3+n^4u^4+n^5u^5+\dots+n^nu^n \leqslant$$

$$1+nu(1+\frac{1}{2}nu+n^2u^2+\dots+n^{n-1}u^{n-1}) \overset{??}{=}$$

$$= 1+nu(1+\frac{1}{2}nu(1+nu(1+nu(\dots(1+nu(1+nu\underbrace{(1+nu)}_{0{,}01\cdot 1{,}01})))))))^{nu\leq 0{,}01}$$

$$\leqslant$$

$$\underbrace{1+0{,}0101}_{}$$

$$0{,}01\cdot 1{,}0101$$

$$\underbrace{1+0{,}010101}_{}$$

$$\vdots$$

$$\leqslant 1+nu(1+0{,}5\cdot 0{,}01010101\dots 01) = 1+nu(1+0{,}0050505050\dots 05) < 1+1{,}01nu$$

czyli $1+\eta_n < 1 + 1{,}01nu$

$\eta_n < 1{,}01nu$

$$\prod_{j=1}^{n}(1+\alpha_j) \geq 1 + \sum_{i=1}^{n}|\alpha_i| - \sum_{1\leq i<j\leq n}|\alpha_i\alpha_j| - \dots - |\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n| =$$

$$= 1 - \left(\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i| + \sum_{1\leq i<j\leq n}|\alpha_i\alpha_j| + \dots + |\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n|\right) >$$

$1 - 1{,}01nu$

czyli $1+\eta_n > 1 - 1{,}01nu$

$\eta_n > -1{,}01nu$

A zatem $|\eta_n| \leq 1{,}01nu$

$\prod_{j=1}^{n}(1+\alpha_j) = 1+\eta_n$

$n=1$ $\quad 1+\alpha_1 = 1+\eta_1$

Z. $|\alpha_j| \leq u$ $\quad |\eta_1| \leq u \leq 1.01 \cdot u$ ✓

Zał. $|\eta_n| \leq 1.01\, nu$

T. $\prod_{j=1}^{n+1}(1+\alpha_j) = 1+\eta_{n+1}$ $\quad |\eta_{n+1}| \leq 1.01\,(n+1)u$

$$\text{Zał.: } |\eta_n| \le 1.01\, nu$$

$$\text{T.} \quad \prod_{j=1}^{n+1} (1+\alpha_j) = 1 + \eta_{n+1} \qquad |\eta_{n+1}| \le 1.01\,(n+1)u$$

$$(1+\eta_n)(1+\alpha_{n+1}) = 1 + \eta_{n+1}$$

$$|\eta_{n+1}| \le |\eta_n| + |\alpha_{n+1}| + |\eta_n \alpha_{n+1}| \le 1.01\,(n+1)u$$

$$1.01\,nu + u + 1.01\,nu^2 \le 1.01(n+1)u$$

$$1.01\,nu + u + 1.01\,nu^2 \le 1.01nu + 1.01\,u \qquad (1)$$

$$1.01\,nu^2 - 0.01\,u \le 0$$

$$1.01\,nu - 0.01 \le 0$$

$$1.01 \cdot nu \le \frac{1}{100}$$

$$nu \le \frac{1}{100} \cdot \frac{100}{101} = \frac{1}{101}$$

Za mało!

Z2

czwartek, 22 października 2020 11:07

Zad 2.2

środa, 21 października 2020 15:51

zad. 2.2)

$$\mathrm{cond}_p = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{q}{p^2}}} \qquad \frac{p \cdot f_p(p,q)}{f(p,q)} \qquad \frac{q \cdot f_q(p,q)}{f(p,q)}$$

$|\mathrm{cond}\, p|$ jest bardzo duże, kiedy $\left|\sqrt{1-\frac{q}{p^2}}\right|$ jest bardzo małe,

czyli kiedy $\frac{q}{p^2} \approx 1$, czyli kiedy $p^2 \approx q$ i $q>0$

Czyli zad. jest źle uw., kiedy $\boxed{p \approx \sqrt{q}}$, oraz $q>0$

$$\mathrm{cond}_q = -\frac{1+\sqrt{1-\frac{q}{p^2}}}{2\cdot\sqrt{1-\frac{q}{p^2}}}$$

$$= -\frac{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{q}{p^2}}}+1}{2} = -\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{q}{p^2}}}+1\right)$$

$|\mathrm{cond}\, q|$ bardzo duże, kiedy $\left|\sqrt{1-\frac{q}{p^2}}\right|$ bardzo małe,

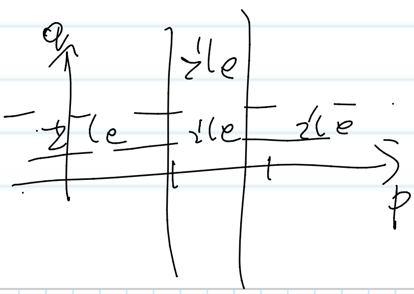
czyli kiedy $\frac{q}{p^2} \approx 1$, czyli $\underline{q \approx p^2 \text{ i } p>0}$

Zad. jest źle uw., kiedy ↗

$$f_1(p) = f(p,q)$$
$$f_2(q) = f(p,q)$$

źle uwar.
$[p \in A_p \vee q \in A_q]$

Dobre uwar.
$[p \in B_p \wedge q \in B_q]$



Z3

czwartek, 22 października 2020 11:08

2.3 Zał: $0 < y < x$ $\quad rd(x) = x \quad rd(y) = y \quad q, p \in \mathbb{Z}$

$$2^{-q} \leq 1 - \frac{y}{x} \leq 2^{-p} \qquad (1)$$

Liczby x i y możemy przedstawić również jako:

$$x = \underset{\text{mantysy}}{r} \cdot 2^{n} \qquad 1 \leq r, 1 < 2$$
$$y = 1 \cdot 2^{m}$$

Ponieważ $x > y$ zatem $n \geq m$.
Aby wykonać operację $x - y$ będziemy musieli zdenormalizować liczbę o mniejszym wykładniku, tak aby jej wykładnik był równy wykładnikowi większej. Zatem y można przedstawić jako:

$$y = (1 \cdot 2^{m-n}) \cdot 2^{n}$$

A więc:

$$x - y = (r - 1 \cdot 2^{m-n}) \cdot 2^{n} =$$
$$= r\left(1 - \frac{1 \cdot 2^{m}}{r \cdot 2^{n}}\right) \cdot 2^{n} = r \underbrace{\left(1 - \frac{x}{y}\right)}_{\text{mantysa wyniku odejmowania}} \cdot 2^{n}$$

OK.

Ponieważ wiemy, że:

$$2^{-q} \le 1-\frac{y}{x} \le 2^{-r}$$

$$\Downarrow$$

$$2^{-q} \le n\left(1-\frac{y}{x}\right) < 2\cdot 2^{-r}$$

Zatem nowa mantysa prezentuje się następująco:

$$\begin{array}{cccccccccccc} 2^{0} & & 2^{-1} & 2^{-2} & 2^{-3} & & 2^{r-1} & 2^{-r} & & & & \\ 0 & . & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & c_1 & \dots & c_n & 2^{n} \\ & & & & & & & 2^{-q} & & & & \end{array} \; : c_n \in \{0,1\}$$

Zatem utraciliśmy w wyniku odejmowania conajmniej r bitów i conajwyżej q bitów. Zatem

$$2^{-q} \le 1-\frac{y}{x} \le 2^{-r}$$

$$\Downarrow$$

$r \le$ liczba utraconych bitów przy $x-y \le q$

[redacted]

L2Z4

$|\varepsilon_i|, |\phi_i| \leq \frac{u}{1-u}$

$L(x) := a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$

Rozpisując zgodnie z definicją:

$$L(x) = w_0 = (\ldots \underbrace{((\overbrace{((a_n \times x)(1+\varepsilon_n) + a_{n-1})(1+\phi_n)}^{w_{n-1}} \times x)(1+\varepsilon_{n-1}) + a_{n-2})(1+\phi_{n-1})}_{w_{n-2}} \ldots) =$$

$$= a_n x^n \underbrace{\Pi_{i=0}^{n}(1-\varepsilon_i)\Pi_{i=1}^{n}(1+\phi_i)}_{1-E_n} + a_{n-1}x^{n-1} \underbrace{\Pi_{i=0}^{n-1}(1+\varepsilon_i)\Pi_{i=1}^{n-1}(1+\phi_i)}_{1+E_{n-1}} + \cdots + a_0(1+\varepsilon_0) =$$

$$= a_n x^n (1+E_n) + a_{n-1}x^{n-1}(1+E_{n-1}) + \cdots + a_0(1+E_0)$$

Obliczmy:

$$E_k = \Pi_{i=0}^{k}(1+\varepsilon_i)\Pi_{i=1}^{k}(1+\phi_i) \leqslant \frac{(2k+1)u}{1-(2k+1)u} \qquad (1)$$

gdzie u jest precyzją liczb.
~~Dla mało zaburzonych danych błąd jest mały~~. Algorytm jest numerycznie poprawny.

Obliczony wynik $\equiv$ wynikowi dokł. dla nieco zmienianych u.

$f(x, y)$

$A \equiv f(\hat{x}, \hat{y})(1+\alpha)$

$\hat{x} = x(1+\alpha_x) \quad \hat{y} = y(1+\alpha_y)$

$|\alpha|, |\alpha_x|, |\alpha_y| \leq \left\{\begin{matrix} K \\ K_x \\ K_y \end{matrix}\right\} \times \frac{u}{1-Ku}$

2.5 Obliczenie $a+a^2$, $a>2$

Algorytm:
- $x = a \cdot a$
- wynik: $a + x$

$$fl(a+a^2) = (a + a\cdot a(1+\varepsilon_1))(1+\varepsilon_2), \quad |\varepsilon_i| \leq u$$

(coś)$(1+\varepsilon_2)$
jakiś wynik

$a+a^2(1+\varepsilon_1)$ możemy przedstawić jako

$$a+a^2(1+\varepsilon_1) = (a+a^2)(1+\delta_1) \qquad (1)$$

Mamy wtedy

$$\cancel{a}+\cancel{a^2}+a^2\varepsilon_1 = \cancel{a}+\cancel{a^2}+(a+a^2)\delta_1$$

$$\frac{a^2}{a+a^2} < 1$$

czyli $\delta_1 = \dfrac{a^2\varepsilon_1}{a+a^2}$, zatem $|\delta_1| < |\varepsilon_1| \leq u$.

$$fl(a+a^2) = (a+a^2)(1+\delta_1)(1+\varepsilon_2) \overset{1.5}{=} (a+a^2)(1+\theta), \text{ gdzie } |\theta| \leq \frac{2u}{1-2u}$$

LISTA 2

ZAD 6.

Połóżmy, że wartości ~~funkcji~~ ciągów s_k i c_k odpowiadają wartościom ciągów odpowiednio s_k' i c_k' takimi, że

$c_k' = \cos\left(\frac{2\pi}{2^k}\right)$ i $s_k = \sin\left(\frac{2\pi}{2^k}\right)$

Podstawa indukcji

$k=2$ $s_2 = 1 = \sin\left(\frac{2\pi}{2^2}\right) = s_2'$

$c_2 = 0 = \cos\left(\frac{2\pi}{2^2}\right) = c_2'$

Krok indukcyjny

Zacznijmy od c. Weźmy dowolne $k > 2$ i $k \in \mathbb{N}$

załóżmy, że $c_k = c_k'$ czyli $c_k = \cos\left(\frac{2\pi}{2^k}\right)$

pokażmy, że $c_{k+1} = c_{k+1}'$ czyli $c_{k+1} = \cos\left(\frac{2\pi}{2^{k+1}}\right)$

$$c_{k+1} = \sqrt{\tfrac{1}{2}(1 + c_k)} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{z zał. ind.}}}{=} \sqrt{\tfrac{1}{2}(1 + c_k')} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \cos\frac{2\pi}{2^k}\right)} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \cos^2\frac{2\pi}{2^{k+1}} - \sin^2\frac{2\pi}{2^{k+1}}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \left(-\cos^2\frac{2\pi}{2^{k+1}}\right) - \sin^2\frac{2\pi}{2^{k+1}} + 2\cos^2\frac{2\pi}{2^{k+1}}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \left(\cos^2\frac{2\pi}{2^{k+1}} + \sin^2\frac{2\pi}{2^{k+1}}\right) + 2\cos^2\frac{2\pi}{2^{k+1}}\right)}$$

$$\underset{\uparrow}{=} \sqrt{\frac{1}{2}\left(2\cos^2\frac{2\pi}{2^{k+1}}\right)} = \cos\left(\frac{2\pi}{2^{k+1}}\right) = c_{k+1}'$$

z jedynki trygonometrycznej

analogicznie dla s. Weźmy dowolne $l > 2$ i $l \in \mathbb{N}$

załóżmy, że $s_l = s_l'$ czyli $s_l = \sin\left(\frac{2\pi}{2^l}\right)$

pokażmy, że $s_{l+1} = s_{l+1}'$ czyli $s_{l+1} = \sin\left(\frac{2\pi}{2^{l+1}}\right)$

pokażmy, że $s_{i+1} = s'_{i+1}$ czyli $s_{i+1} = \sin\left(\frac{2\pi}{2^{i+1}}\right)$

$$s_{i+1} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - c_i\right)} \overset{z.z.i.}{=} \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - c'_i\right)} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{2^i}\right)\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \cos^2\frac{2\pi}{2^{i+1}} + \sin^2\left(\frac{2\pi}{2^{i+1}}\right)\right)}$$

$= \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \cos^2\left(\frac{2\pi}{2^{i+1}}\right) - \sin^2\left(\frac{2\pi}{2^{i+1}}\right) + 2\sin^2\left(\frac{2\pi}{2^{i+1}}\right)\right.}$

$= \sqrt{\frac{1}{2}\left(2\sin^2\frac{2\pi}{2^{i+1}}\right)} = \sin\frac{2\pi}{2^{i+1}} = s_{i+1}$

co wykazuje, że $s_k = \sin\frac{2\pi}{2^k}$ i $c_k = \cos\frac{2\pi}{2^k}$

wtedy $P_{2^k} := 2^{k-1} s_k$

$P_{2^k} = 2^{k-1}\sin\frac{2\pi}{2^k} = \frac{1}{2} 2^k \sin\frac{2\pi}{2^k}$ dla $n = 2^k$ $= \frac{1}{2} n \sin\frac{2\pi}{n}$

czyli algorytm wylicza poprawnie ~~(w przybliżeniu)~~ pole figur

b) L02 2 0 6 Adrienne . jl

c) tracimy precyzję. można temu zapobiec przez wyznaczenie sin inną metodą. np. przykład z $e^{-i\pi}$

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots$

p = 256

setprecision(p)

```
function s(x)
   if (x < 2)
      return "error"
      end
   if (x == 2)
      return BigFloat(1)
   end
   return sqrt(((BigFloat(1)-c(x-1)))*BigFloat(0.5))
end

function c(x)
   if (x < 2)
      return "error"
   end
   if (x == 2)
      return BigFloat(0)
   end
   return sqrt((BigFloat(1)+c(x-1))*BigFloat(0.5))
end

function P(x)
   if (x == 0)
      return BigFloat(2)
   end
   return BigFloat(2)^(x-1)*s(x)
end

Pi = BigFloat(π)

for i in 2:2*p
   println(Pi-P(i))
end
```

$$S_K = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - C_{K-1})} \qquad C_K = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + C_{K-1})}$$

$$S_K = \sin(\quad) \qquad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots$$

Z7

czwartek, 22 października 2020 11:17

Zad 7

a) $f(x) = \frac{1}{x^2+c}$, $c \in \mathbb{R}$

Liczymy wskaźnik uwarunkowania C_f

$$C_f = \frac{x \cdot f'(x)}{f(x)} \qquad (1)$$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x^2+c}\right)' = \frac{-1}{(x^2+c)^2} \cdot 2x = \frac{-2x}{(x^2+c)^2}$$

$$C_f = \frac{-2x^2}{(x^2+c)^2} \cdot (x^2+c) = \frac{-2x^2}{(x^2+c)} = \frac{-2}{1+\frac{c}{x^2}}$$

Jeżeli $c \geqslant 0$ to ~~$C_f \ \forall x$~~ $\forall x \ |C_f(x)| \leqslant 2$ ✓

Jeżeli $c < 0$ to dla $\lim_{x \to \sqrt{c}} |C_f(x)| = \pm\infty$

Czyli funkcja jest źle uwarunkowana, jeśli $c < 0$

oraz $x \approx \pm\sqrt{c}$

b) $f(x) = \frac{1-\cos x}{x^2}$ dla $x \neq 0$

$$C'_f = \frac{x \cdot f'(x)}{f(x)}$$

$$f'(x) = \left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)' = \frac{x^2 \sin x - 2x + 2x\cos x}{x^4} = \frac{x\sin x + 2\cos x - 2}{x^3}$$

$$C'_f = \frac{x\sin x + 2\cos x - 2}{x^2} \cdot \frac{x^2}{1-\cos x} = \boxed{\frac{x\sin x + 2\cos x - 2}{1-\cos x}}$$

$x = 0$ $\quad x = \pm 2\pi, \pm 6\pi, \ldots$

$2\cos - 2 \approx 0$ $\quad x\sin x \approx 0$

$\cancel{\lim_{\substack{x \to k\pi \\ k \in \mathbb{Z}}}}$ ~~Niech $k = 2\pi$~~

Niech $k = \mathbb{Z} \wedge k \neq 0$, wtedy ✓

$$\lim_{x \to 2k\pi} \frac{x\sin x + 2\cos x - 2}{1-\cos x} \approx \frac{x\sin x}{1-\cos x} \xrightarrow{x \to 2\pi k} -\infty$$

Widzimy że wskaźnik wybucha do $-\infty$ okresowo, więc funkcja jest źle uwarunkowana.