3

$\Rightarrow$ Załóżmy, że G jest drzewem. Załóżmy niewprost, że istnieją dwie ścieżki z u do v. Wtedy istniałby cykl przechodzący przez u i v co jest sprzeczne z założeniem że G jest drzewem.

$\Leftarrow$ Załóżmy, że dla dowolnej pary wierzchołków istnieje dokładnie jedna ścieżka między nimi. Niech będą to u i v. Skoro istnieje ścieżka pomiędzy dowolną parą wierzchołków to graf jest spójny. Skoro istnieje dokładnie jedna ścieżka między dowolną parą wierzchołków, to nie może istnieć cykl, wtedy świadczyło by to że istenieje druga ścieżka łącząca dowolną parę, co dałoby sprzeczność z istnieniem dokładnie jednej ścieżki.

6

Niech A oznacza zbiór wierzchołków takich, że jedynek jest parzyście wiele

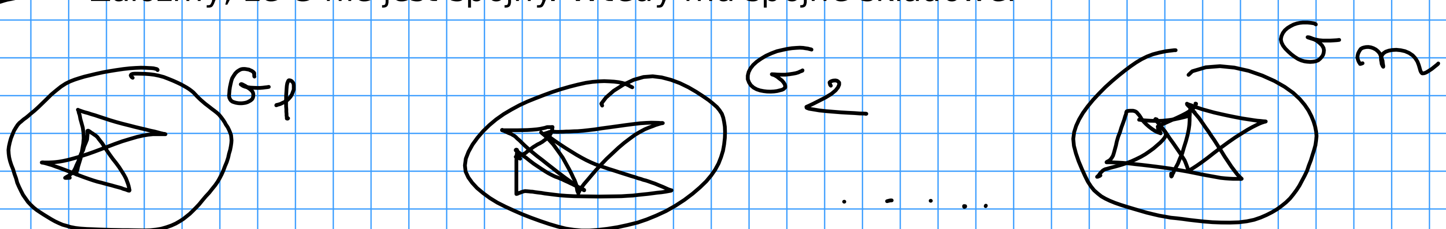
Analogicznie B oznacza zbiór wierzchołków takich, że jedynek jest nieparzyście wiele

Udowodnię, że nie może być krawędzi pomiędzy dwoma wierzchołkami z A, oraz dwoma z B.

Załóżmy, że jest krawędź pomiędzy dwoma wierzchołkami z A. Wiemy, że wierzchołki z A mają parzyście wiele jedynek. Skoro jest między nimi krawędź, to różnią się na jednej pozycji. Zatem jeden z nich ma o jedną jedynkę więcej niż drugi, co daje sprzeczność, bo wtedy jeden z nich ma ich nieparzyście wiele, czyli nie należy do A. Analogicznie wykazuje się, że nie ma krawędzi pomiędzy dwoma wierzchołkami w B. Co implikuje, że graf Qk jest dwudzielny.

9

Załóżmy, że G nie jest spójny. Wtedy ma spójne składowe:



Wtedy G' będzie spójny, ponieważ :

Rozważmy 2 przypadki:

i) niech u i v to dwa dowolne wierzchołki, $u \in G_i$ i $v \in G_j$; $i \neq j$

wtedy w G' musi istnieć droga z u do v bo należą do innych spójnych składowych G. Skoro istnieje droga, to ścieżka też (wiemy to z poprzedniej listy).

2) $u, v \in G_i$ (dowolne dwa wierzchołki spójnej składowej)

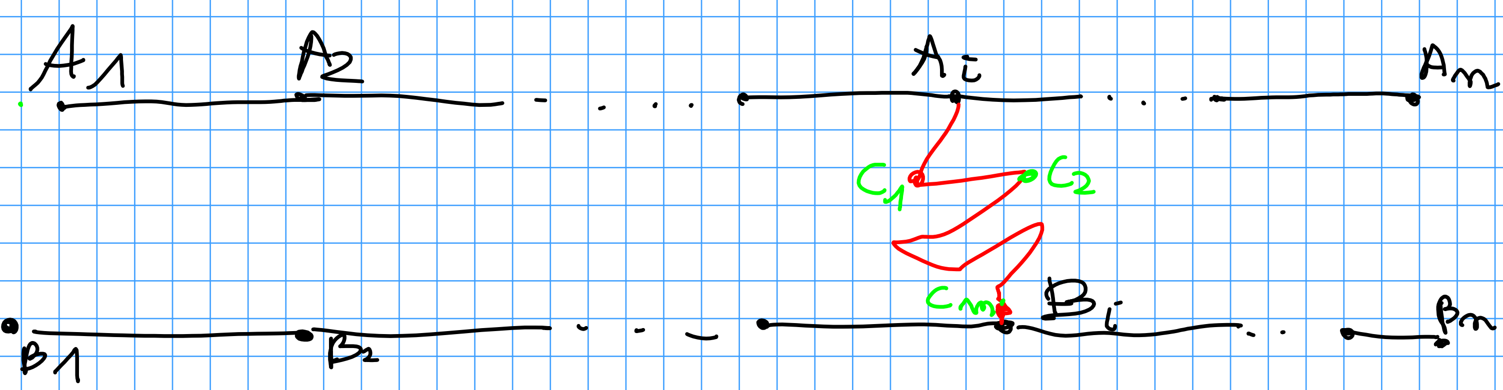
wtedy niech $t \in G_j$ gdzie $i \neq j$.

z u do t musi być ścieżka (z 1)) oraz z v do t też musi być ścieżka (z 1)), więc z u do v jest droga, czyli jest ścieżka

8

Załóżmy, że dwie najdłuższe ścieżki nie mają wspólnych wierzchołków

Niech mają one długość n.



Weźmy dowolne Ai oraz Bi. Skoro graf jest spójny to z Ai do Bi prowadzi droga, czyli też ścieżka

co daje sprzeczność z tym, że A1 -> ... -> An oraz B1->...->Bn są najdłuższymi ścieżkami,

ścieżka z A1->...->Ai->C1->...->Cm->Bi->...->Bn ma długość >= i + n-i+1 = n+1.

$(m \geq 0)$

5 $\Rightarrow$ d jest ciągiem stopni wierzchołków pewnego drzewa wtedy drzewo to ma n-1 krawędzi (bo to drzewo).

z lematu $\sum_{i=1}^{n} \deg v_i = \sum_{i=1}^{n} d_i = 2|E| = \underline{2(n-1)}$

$\Leftarrow$ d jest ciągiem stopni wierzchołków grafu, oraz

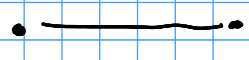
$$\sum_{i=1}^{n} \deg v_i = \sum_{i=1}^{n} d_i = 2(n-1)$$

1° W grafie o sumie stopni $2(n-1)$ istnieje jeden który ma stopień 1. Jeśli by tak nie było i każdy ≥ 2 to wtedy $\sum \deg v_i \geq 2n$ co daje sprzeczność z $\sum \deg v_i = 2(n-1)$.

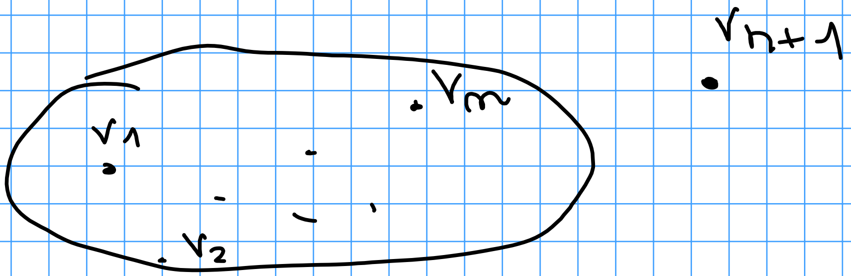
2° Indukcyjnie, pokażmy, że:

Jeśli $d_1, \ldots, d_n$ to ciąg stopni wierzchołków oraz $\sum d_i = 2(n-1)$ to jest to drzewo

i) podstawa ind.

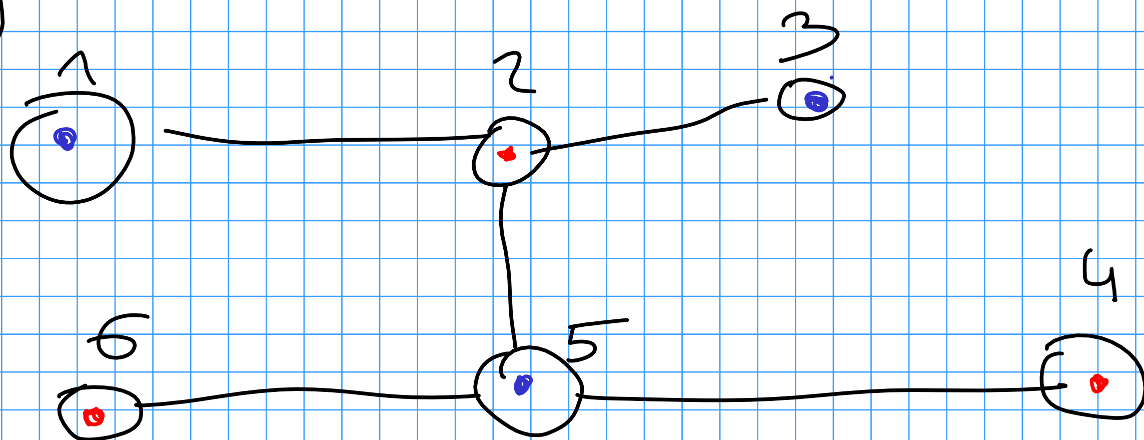
$n=2$ 

ii) załóżmy, że $d_1, \dots, d_n$ ciągiem stopni wierzchołków drzewa



2 1° niech v_{n+1} to liść wtedy $v_1, \dots, v_m$ tworzą drzewo z zał. indukcyjnego, więc jak dołączymy do drzewa liść (v_{n+1}) to dalej będzie drzewem. Co kończy dowód.

1



Wykonujemy DFS-a i kolorujemy każdy wierzchołek na zmiane na czerwono i niebiesko,

jeśli uda się go pokolorować to jest dwudzielny, jeśli chcemy pokolorować w pewnym wywołaniu rekurencyjnym wierzchołek który jest już pokolorowany na pewien kolor, który jest różny od jego początkowego koloru, to wtedy graf nie będzie dwudzielny. Jeśli chcemy pokolorować wierzchołek już wcześniej pokolorowany na ten sam kolor który posiada, to kontynuujemy algorytm,

jeśli uda nam się przejść cały graf bez kolorowania ponownie na inny kolor niż dany wierzchołek pierwotnie posiada, jest on wtedy dwudzielny.