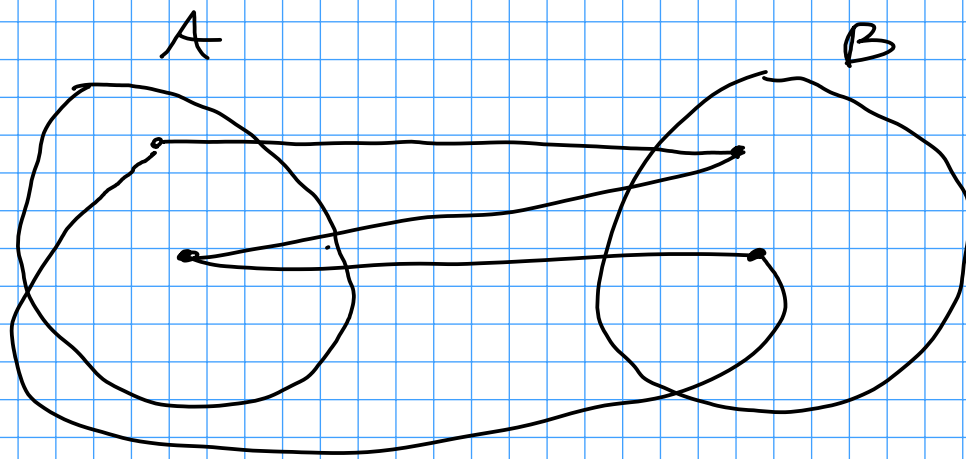
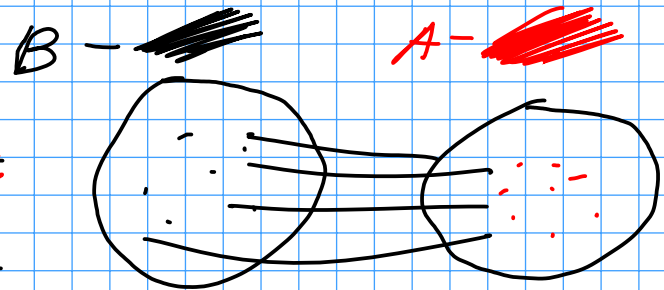


4



$$|A| = |B| = n$$

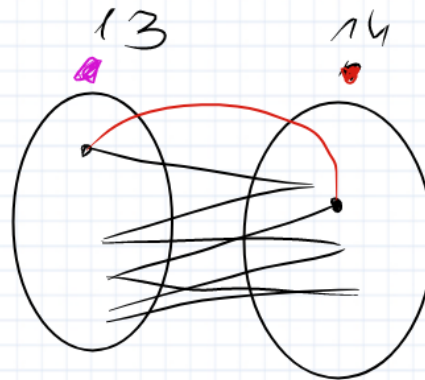
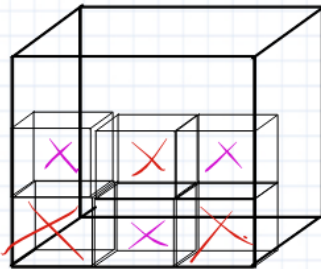
<del>///</del>	<del>///</del>	<del>///</del>	<del>///</del>	<del>///</del>
<del>///</del>	<del>///</del>	<del>///</del>	<del>///</del>	<del>///</del>
<del>///</del>	<del>///</del>	<del>///</del>	<del>///</del>	<del>///</del>
<del>///</del>	<del>///</del>	<del>///</del>	<del>///</del>	<del>///</del>
<del>///</del>	<del>///</del>	<del>///</del>	<del>///</del>	<del>///</del>



Wtedy  $|A| = 13$   
 $|B| = 12$

wiec  $|A| \neq |B|$   
 wiec to nie moze byc  
 (z powodu zadania)

5



Jesli by sie dalo zjesc  
 srodkowy to daloby  
 sie stworzyc cykl  
 hamiltona (dokladaja  
 c jedna krawedz) ale  
 sprzeczosc z  
 mocami  
 (poopzednie zad)  
 nie moze tu istniec

X	X	X
X	X	X
X	X	X

X	X	X
X	X	X
X	X	X

X	X	X
X	X	X
X	X	X

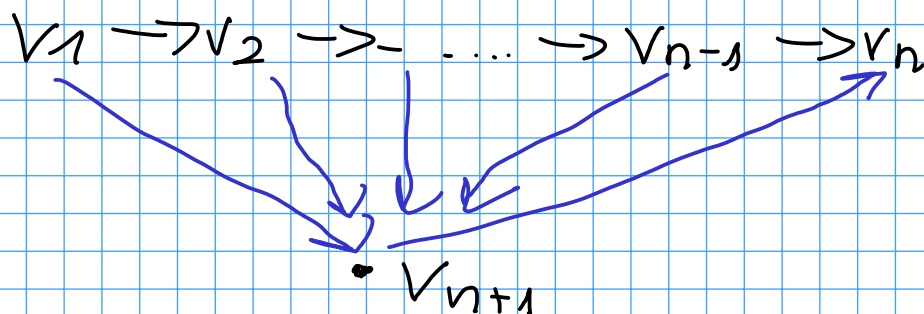
## ⑥ Dowód indukcyjny.

1°  $n=2$



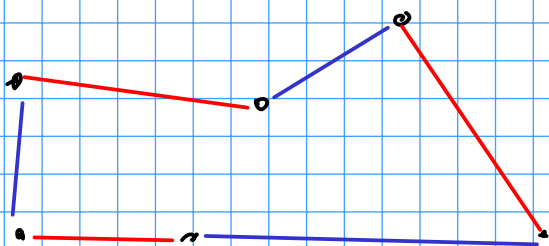
OK ✓

2° założymy, że  $v_1, \dots, v_n$  to ścieżka Hamiltona tego turnieju



Dokładają wierzchołek  $v_{n+1}$  jeśli będzie krawędź  $(v_n, v_{n+1})$  to otrzymujemy tezę, więc zrobmy krawędź  $(v_{n+1}, v_n)$ . Analogicznie jeśli będzie  $(v_{n+1}, v_1)$  to teza, więc zrobmy  $(v_1, v_{n+1})$ , kontynuując analogicznie jeśli damy krawędź  $(v_{n+1}, v_i)$  to będzie teza, więc dajmy wszędzie krawędź  $(v_i, v_{n+1})$ , ale wtedy mamy ścieżkę Hamiltona długości  $n+1$  ( $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_{n+1}, v_n$ ), co kończy dowód. (wszystko uwzględnione na rysunku)

## ⑨



Zauważmy, że graf ten aby miał drzewo musi być spójny, oraz stopnie jego każdego wierzchołka muszą być równe 1 lub 2

dla  $n=1$

nie ma drzewa niechromatycznego

dla  $n=2$

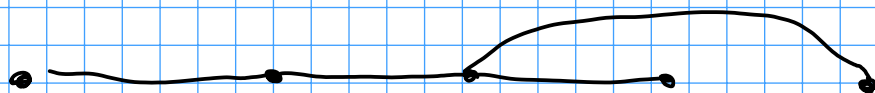


✓

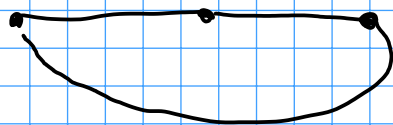
tez nie (jednym kolorem)

dla  $n \geq 3$ :

Jeśli każdy wierzchołek ma stopień 1 lub 2 to graf spójny jest ścieżką albo cyklem

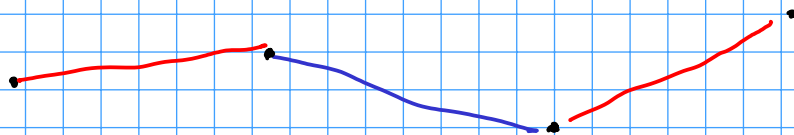


lub np.

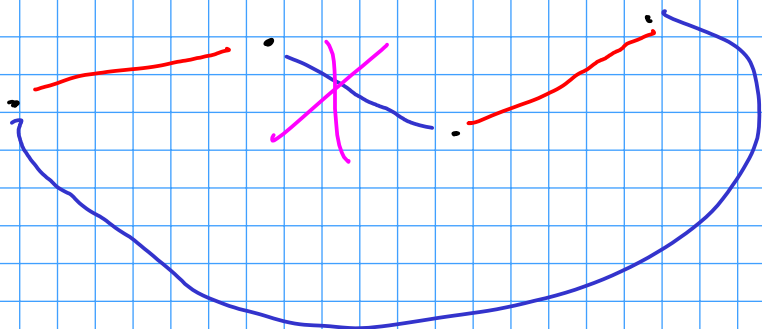


zatem jeśli nasz połączony graf  
jest ścieżką to on cały jest drzewem  
monochromatycznym.

np.



jeśli jest cyklem to wystarczy pozbyć się  
jednej krawędzi.



### 3 Dowód indukcyjny

$$n=2$$



Założmy, że turniej  $n$  wierzchołkowy  $(v_1, \dots, v_n)$  spełnia tę własność. Dołączmy kolejny wierzchołek  $v_{n+1}$ . Niech  $v_i$  to wierzchołek który z założenia indukcyjnego spełnia tę własność. Jeśli będzie krawędź między pewnym z sąsiadów bezpośrednich  $v_i$  do  $v_{n+1}$  to teza, założmy, że tak nie jest. Jeśli będzie krawędź z  $v_i$  do  $v_{n+1}$ , to również teza. Założmy, że tak nie jest. Czyli dla każdego sąsiada bezpośredniego  $v_i$  jest krawędź z  $v_{n+1}$  do nich, oraz jest krawędź z  $v_{n+1}$  do  $v_i$ . Wtedy  $v_{n+1}$  spełnia własność szukaną w zadaniu, ponieważ teraz każdym z jego bezpośrednich sąsiadów jest bezpośredni sąsiad  $v_i$  oraz  $v_i$ , a każdy jego sąsiad oddalony o 2 jest każdym sąsiadem oddalonym o 2 od  $v_i$ . Zatem odległość  $v_{n+1}$  od dowolnego wierzchołka jest równa 1 lub 2, co kończy dowód (rysunek dla uwagi).

