

$$\textcircled{3.10} \quad \dim(\mathbb{R}^5) = \dim(\text{Im } M) + \dim(\text{Ker } M)$$

$$5 = \dim(\text{Im } M) + 3$$

$$2 = \dim(\text{Im } M)$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & -1 & -2 & 7 \\ 3 & 3 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & -1 & -2 & 7 \\ 3 & 3 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{Basis } M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \leftarrow \text{lin. indep.}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 9 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$