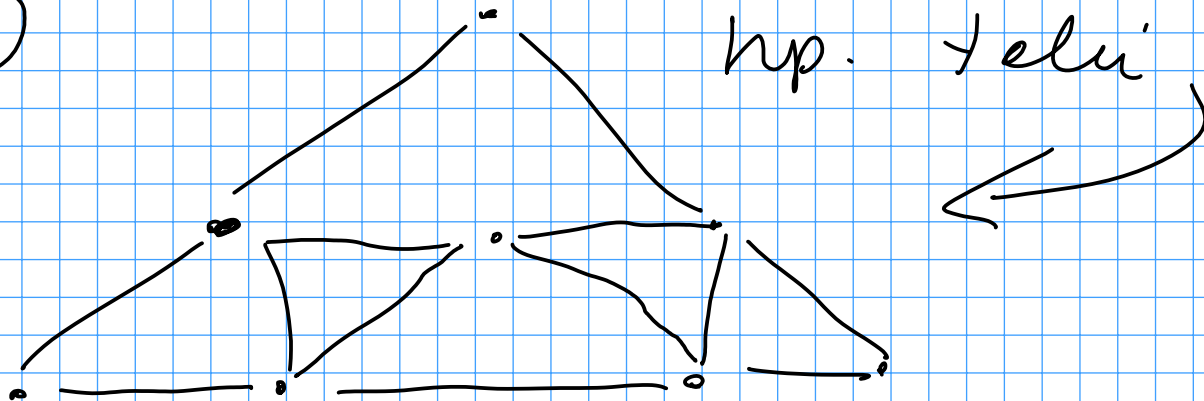


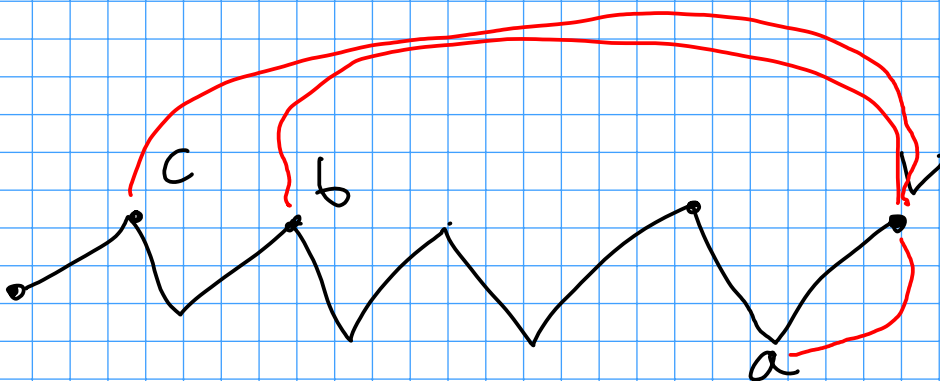
Lista 12

1



8

Weźmy najdłuższą ścieżkę w grafie i jej ostatni wierzchołek nazwijmy v . Wszyscy sąsiedzi v muszą się na niej znajdować, jeśli nie to nie będzie ona najdłuższa. Niech sąsiadami v są a, b, c (od najbliższego).

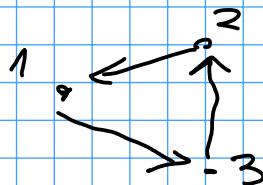


Z zasady szufladkowej wiemy, że dwie ze ścieżek $a \rightarrow v$ / $b \rightarrow v$ / $c \rightarrow v$ mają długość tej samej parzystości, zatem ich różnica jest liczbą parzystą, dodając jedną z czerwonych krawędzi otrzymujemy cykl nieparzystej długości.

4

Tyle ile permutacji:

$$\text{hp. } \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$



ale musimy wykluczyć permutacje typu $\begin{pmatrix} 2 & a \\ 2 & \dots & a & \dots \end{pmatrix}$

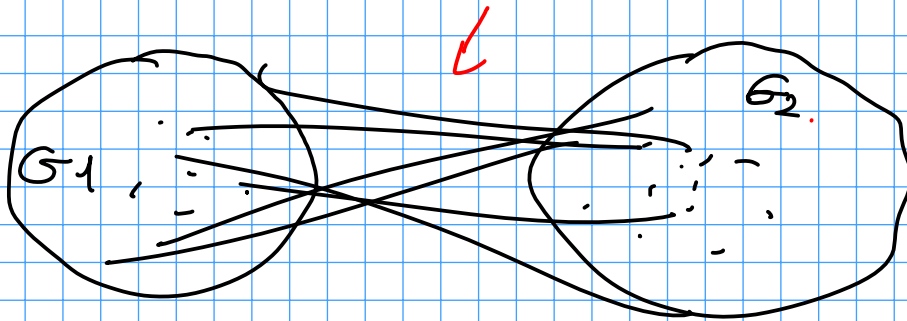
bo wtedy będą pętle.

Będzie ich więc tyle ile nieporządów (lista 5
zad 4)

$$n! \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!}$$

2 \Rightarrow

Założmy że G jest Eulerowski i G_1 i G_2 to pewne podzbiory G , które łączą pewne krawędzie. Chcemy skasować te krawędzie (będzie to minimalne cięcie).

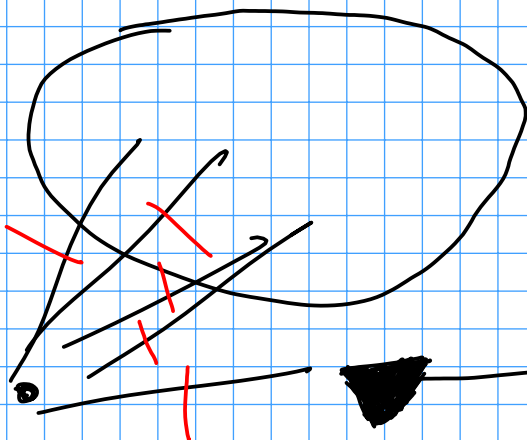


Żeby graf zawierał cykl Eulera to musi każdorazowo wychodząc ze spójnej G_1 wrócić do niej, co implikuje, że minimalne cięcie musi mieć parzystą ilość krawędzi.

Formalnie, jeśli G_1 ma wierzchołki v_1, \dots, v_n , wtedy suma stopni jego wierzchołków jest parzysta, niech między G_1 a G_2 jest k krawędzi.

$\sum \deg v'_i = \sum \deg v_i - k \Rightarrow 2 | k$ (bo $2 | \sum \deg v_i$ oraz $2 | \sum \deg v'_i$)
 $\deg v'_i$ - stopień wierzchołków G_1 po odcięciu k krawędzi

⚡ Załóżmy, że minimalne cięcie ma parzystą ilość krawędzi. Weźmy dowolny wierzchołek i nazwijmy go v . Skoro minimalne cięcie ma zawierać parzystą ilość krawędzi to z wierzchołka v musi wychodzić parzysta ilość krawędzi. Rozumowanie to przeprowadzamy dla dowolnego wierzchołka co implikuje, że każdy wierzchołek ma stopień parzysty, więc jest to cykl Eulera.

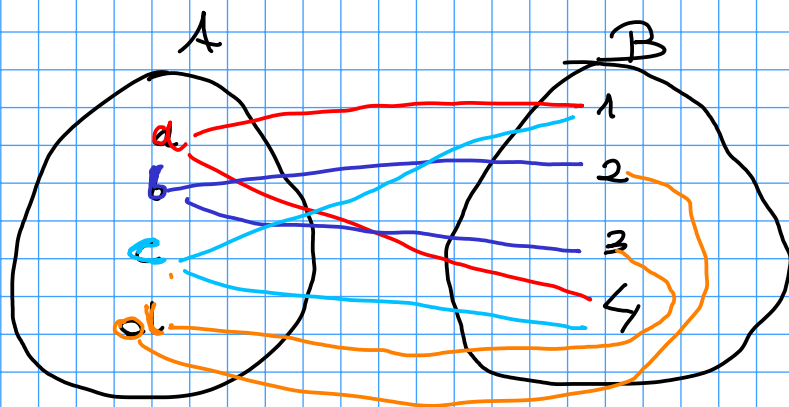


(każdemu wierzchołkowi
- trzeba uciąć jego wszystkie
krawędzie żeby był izolowany)

10

Przykład:

3	1	2	4
2	4	3	1

 a b c d niech k ogólności

np. a połączone z 1, 4
oznacza, że zamiast
 a może być 1 lub 4
żeby się zapadły
różne linie w kolumnie.

Chcemy, aby w gracie $G(A \cup B)$ spełniony był warunek Halla, wtedy implikować to będzie, że G ma skojarzenie doskonałe, więc będzie dało dodać się wiersz do prostokąta, tak aby spełnione były warunki zadania.

Biorę dowolny podzbiór $X \subset A$ złożony z t kolumn.

Z każdego wierzchołka z X wychodzi k . Czyli z całego zbioru X wychodzi tk krawędzi.

Gdyby ten podzbiór był połączony z mniej niż t wierzchołkami, to do któregoś wierzchołka z B prowadziłoby więcej niż k krawędzi (z zasady szufladkowej). Sprzeczność. Zatem warunek Halla musi być spełniony, co dowodzi, że każdy prostokąt można rozszerzyć o jeden wiersz.