Zad 10

$$a, b, n \in \mathbb{N}$$

Z:

$$NWD(a,n) = NWD(b,n) = 1$$

Skoro $NWD(a,n) = 1$ to

$$\exists_{x,y \in \mathbb{Z}} \quad xa + yn = 1$$

analogicznie

$$\exists_{z,t \in \mathbb{Z}} \quad zb + tn = 1$$

$$\begin{cases} xa + yn = 1 \\ zb + tn = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xa = 1 - yn \\ zb = 1 - tn \end{cases}$$

$$xa \cdot zb = (1-yn)(1-tn)$$

$$xa \cdot zb = 1 - tn - yn + tyn^2$$

$$\underbrace{xz}_{A}(ab) + \underbrace{(t + y - tyn)}_{B}n = 1$$

$$A \cdot (ab) + B \cdot n = 1$$

$$\Downarrow$$

$$NWD(ab, n) = 1$$

Zad 7

$$a, b \in \mathbb{N} \; ; \; a+b > 0$$

Niech $d > 0$ i $d = NWD\left(\frac{a}{NWD(a,b)} ; \frac{b}{NWD(a,b)}\right)$.

wtedy $d \mid \frac{a}{NWD(a,b)}$ i $d \mid \frac{b}{NWD(a,b)}$ więc

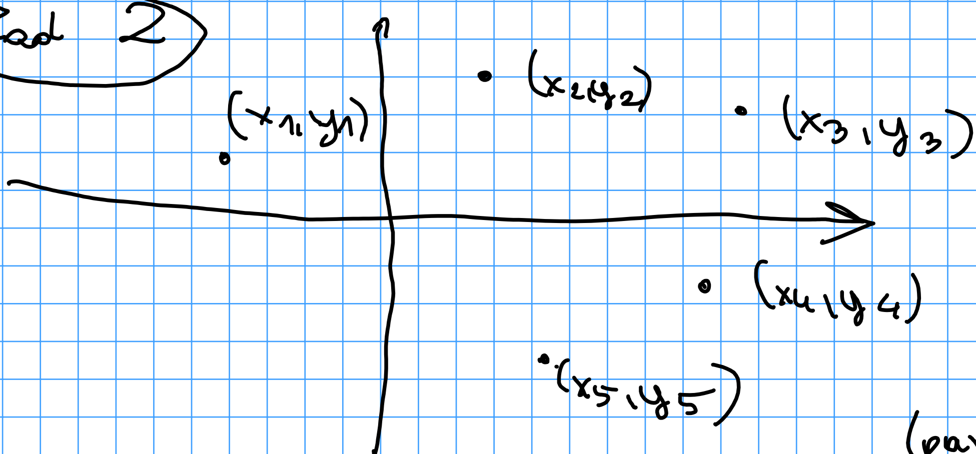
$$d \cdot NWD(a,b) \mid a \quad i \quad d \cdot NWD(a,b) \mid b$$

więc $d \cdot \cancel{NWD(a,b)} \leq \cancel{NWD(a,b)}$

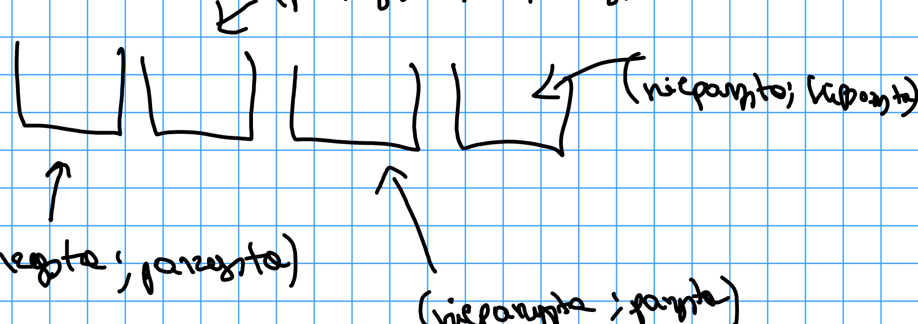
$$d \leq 1 \Rightarrow d = 1$$

więc $1 = NWD\left(\frac{a}{NWD(a,b)} ; \frac{b}{NWD(a,b)}\right)$.

Zad 2



cztery szufladki :



Zatem będą dwa punkty takie, że ich obydwie współrzędne są tej samej parzystości. Więc sumy ich odpowiednich współrzędnych będzie parzysta.

Więc: Punkt $\left(\frac{x_i+x_j}{2}; \frac{y_i+y_j}{2}\right)$ będzie miał obydwie współrzędne całkowite.

■

Zad 3

Niech $S_k = \sum_{i=1}^{k} a_i$

Szufladki to reszty modulo n

$\underbrace{\sqcup \ \sqcup \ \dots \ \sqcup}_{n \text{ reszt}}$ $\qquad S_1, S_2, \dots, S_n$

1° Każdy S_k w innej szufladce to jakieś jedno S_i w szufladce z resztą równą 0. Więc wtedy istnieje taka suma podzielna przez n.

2° Przypuśćmy jakieś dwie w tej samej szuflada.

Niech będzie S_x i S_y w tej samej szufladzie.

$\boxed{\text{Niech } x > y}$

wtedy $S_x \equiv S_y \pmod{n}$ więc

$$S_x - S_y \equiv 0 \pmod{n}$$

czyli $n \mid S_x - S_y$ a $S_x - S_y = a_1 + \dots + a_x - (a_1 + \dots + a_y) =$

$$= \underbrace{a_{y+1} + a_{y+2} + \dots + a_x}$$

więc $n \mid a_{y+1} + \dots + a_x$ ∎

Zad 5

np.

−1	1	0
−1	0	1
0	1	0

n kolumn, n wierszy, 2 przekątne więc jest $2n+2$ wyników.

Możliwych sum będzie: $2n+1$, ponieważ:

najmniejsza możliwa suma to $(-1)\cdot n = -n$ (same „-1")

największa to $1 \cdot n = n$ (same „1")

musimy jeszcze doliczyć sumę równą 0 (same „0")

Łącznie mamy $2n+1$ możliwych sum.

Szufladki: ilość możliwych sum $(2n+1)$

Kulki: ilość wyników $(2n+2)$

$$\underbrace{\sqcup \ \sqcup \ \dots \ \sqcup}_{2n+1}$$

więc przynajmniej dwa wyniki muszą być takie same.

Zad 1

$$\{1, 2, \dots, 2n\}$$

Każdą liczbę naturalną można zapisać jako

$2^x \cdot y$ gdzie $\boxed{y \geq 1}$ y jest nieparzyste.

Szufladki: $2^{x_1}\cdot 1$ $\quad 2^{x_2}\cdot 3$ $\quad 2^{x_3}\cdot 5$ $\quad \dots \quad 2^{x_n}\cdot y$

$\sqcup \ \sqcup \ \sqcup \ \dots \ \sqcup \ \dots$

Liczb nieparzystych od 1 do $2n$ jest n.

Więc mamy n szufladek

$2^{x_1}\cdot 1$ $\quad 2^{x_2}\cdot 3$ $\quad \ldots \quad 2^{x_n}\cdot n$

Wybieramy $n+1$ liczb więc w jednej szufladce dwie. Są one postaci $2^{x_i}\cdot y$ i $2^{x_j}\cdot y$ więc ich iloraz

$$\frac{2^{x_i}\cdot y}{2^{x_j}\cdot y} = 2^{x_i - x_j}.$$

(Przy założeniu, że $x_i \geq x_j$) ∎