1

$$A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

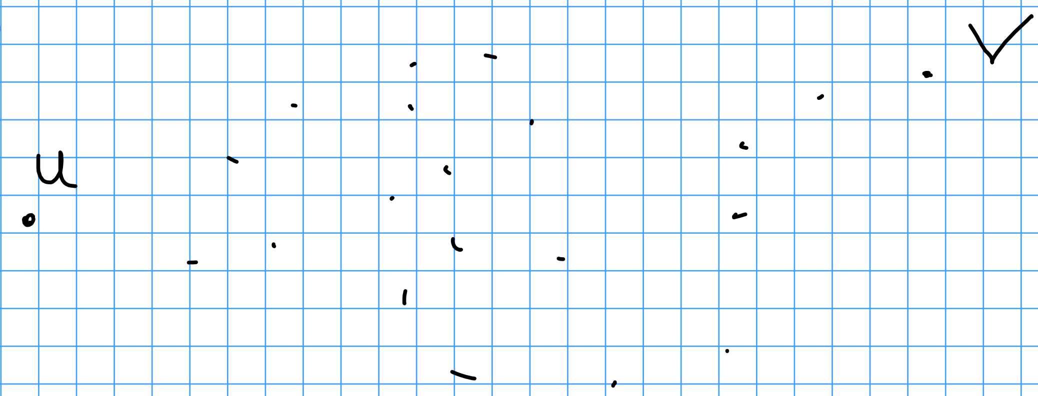
$$S_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$$

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots)(1 + x + x^2 + \ldots) = A(x) \cdot \frac{1}{1-x}$$

$$\underbrace{a_0}_{s_0} + (\underbrace{a_0 + a_1}_{s_1})x + (\underbrace{a_0 + a_1 + a_2}_{s_2})x^2 + \ldots = \frac{1}{1-x} A(x)$$

$$s_0 + s_1 x + s_2 x^2 + \ldots = \frac{1}{1-x} \cdot A(x)$$

10



niech droga $u \to v$ to

$$(u, w_1, w_2, \ldots, \underbrace{\boxed{a, \ldots,}}_{\text{skasować}} a, \ldots, v)$$

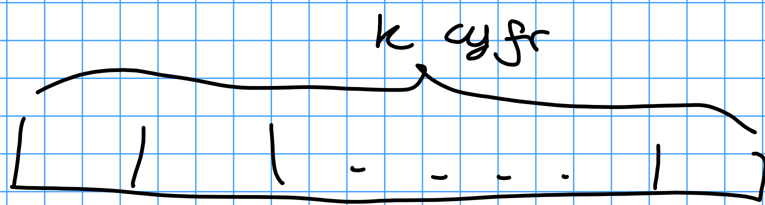
Jeśli w drodze z u do v wystąpi powtórzenie wierzchołka, wystarczy skasować z niej wszystkie wierzchołki włącznie z powtórzonym aż do jednego przed kolejnym powtórzeniem. Postępując analogicznie, każde powtórzenie wierzchołka możemy dzięki tej metodzie wyeliminować i otrzymać ścieżkę.

6

E – krawędzie

Lemat: $\sum_{i=1}^{n} \deg v_i = 2|E|$

Zauważmy, że każdy wierzchołek ma ten sam stopień, ponieważ dla dowolnej k cyfrowej liczby binarnej istnieje odpowiednio k innych różniących się od niej na jednej z cyfr.



$\Downarrow$ $\forall v_i \in G$

$\Rightarrow \deg v_i = k$

zatem:

Wierzchołków jest: 2^k (tyle ile liczb binarnych k-cyfrowych)

Krawędzi: $\dfrac{2^k \cdot k}{2} = 2^{k-1} \cdot k$ (każdy wierzchołek ma k krawędzi)

2 a) $a_n = n^2$

$$1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x} \quad /'$$

$$1 + 2x + 3x^2 + \dots = \frac{1}{(1-x)^2} \quad / \cdot x$$

$$x + 2x^2 + 3x^3 + \dots = \frac{x}{(1-x)^2} \quad /'$$

$$1+4x+9x^2+\ldots = \frac{(1-x)^2+x\cdot 2(1-x)}{(1-x)^4} \quad / \cdot x$$

$$0^2+1^2x+2^2x^2+3^2x^3+\ldots = x\cdot\frac{(1-x)^2+x\cdot 2(1-x)}{(1-x)^4}$$

$\shortparallel$

funkcja tworząca n^2

b) $a_n=n^3$

z a) $0^2+1^2x+2^2x^2+3^2x^3+\ldots = x\cdot\frac{(1-x)^2+x\cdot 2(1-x)}{(1-x)^4}\Big)'$

$$1+2^3x+3^3x^2+\ldots = \left(x\cdot\frac{(1-x)^2+x\cdot 2(1-x)}{(1-x)^4}\right)' \quad / \cdot x$$

$$0^3+1^3x+2^3x^2+3^3x^3+4^3x^4+\ldots = \boxed{x\cdot\left(x\cdot\frac{(1-x)^2+x\cdot 2(1-x)}{(1-x)^4}\right)'}$$

funkcja tworząca $a_n=n^3$

c) $a_n=\binom{n+k}{n}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad /^{(k)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)x^{n-k} = \left(\frac{1}{1-x}\right)^{(k)} \quad / : k!$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}x^{n-k} = \left(\frac{1}{1-x}\right)^{(k)}\cdot\frac{1}{k!}$$

przesuńmy indeks o „k w prawo" i otrzymamy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)(n+k-1)\cdot\ldots\cdot(n+1)}{k!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}x^n \text{ więc}$$

funkcja tworząca $a_n = \binom{n+k}{k}$ jest

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(k)} \cdot \frac{1}{k!} = \frac{\cancel{k!}}{(1-x)^k} \cdot \frac{1}{\cancel{k!}} = \boxed{\left(\frac{1}{1-x}\right)^k}$$

3 $\quad a_n = \begin{cases} n & 2 \mid n \\ \frac{1}{n} & 2 \nmid n \end{cases}$

$A(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$ dla $a_n = n$

$$\begin{cases} \ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \\ \ln(-x+1) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots \end{cases} \quad -$$

$\frac{1}{1} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{5} \quad \dots \quad \frac{1}{n}$

$$\boxed{\frac{\ln(x+1) - \ln(-x+1)}{2}} = \frac{1}{1}x + \frac{x^3}{3} + \dots$$

$$\begin{cases} x + 2x^2 + 3x^3 + \dots = A(x) = \frac{x}{(1-x)^2} \\ -x + 2x^2 - 3x^3 + \dots = A(-x) = \frac{-x}{(1+x)^2} \end{cases} \quad +$$

$$2 \cdot 2x^2 + 2 \cdot 4x^4 + \dots = A(x) + A(-x) \quad / :2$$

$2 \quad 4 \quad \dots \quad n$

$$\underline{2x^2 + 4x^4 + \dots} = \boxed{\frac{A(x) + A(-x)}{2}} = \frac{\frac{x}{(1-x)^2} - \frac{x}{(1+x)^2}}{2}$$

Więc funkcja tworząca $a_n = \begin{cases} n & 2 \mid n \\ \frac{1}{n} & 2 \nmid n \end{cases}$

$$= \boxed{\frac{\ln(x+1) - \ln(-x+1)}{2} + \frac{\frac{x}{(1-x)^2} - \frac{x}{(1+x)^2}}{2}}$$

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \qquad H_0 = 0$$

$$a_n = \frac{1}{n} \xrightarrow{\text{funkcja tworząca z a)}} \boxed{-\ln(1-x)}$$

$$H_0 = a_0 = 0$$

$\boxed{\text{z zad 1}}$ $H_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$ więc

funkcja tworząca $H_n \to \boxed{\frac{1}{1-x} \cdot -\ln(1-x)}$