# LISTA 7

KACPER KINGSFORD
315348

5

$(0, 0, 0, 1, 3, 7, 15, 31, \dots)$

$$\begin{cases} 2^{n-3}-1 & \text{dla } n \geq 3 \\ 0 & \text{dla } n \in \{0,1,2\} \end{cases}$$

$1, 3, 7, \dots$

$\langle 2^n - 1 \rangle$

$\langle 2^n \rangle : 1 + 2x + 4x^2 + \dots = \frac{1}{1-2x}$

$\langle -1 \rangle : -(1 + x + x^2 + \dots) = \frac{-1}{1-x}$

$\langle 2^n - 1 \rangle : \frac{1}{1-2x} - \frac{1}{1-x}$

aby ciąg miał $a_0 = a_1 = a_2 = 0$

musimy przesunąć o 3 więc: $\underline{\left(\frac{1}{1-2x} - \frac{1}{1-x}\right) \cdot x^3}$

6 $A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$

$$B(x) = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + \ldots + 0 \cdot x^{k-1} + a_0 x^k + a_1 x^{k+1} + \ldots + a_n x^{k+n} + \ldots$$

$$B(x) = x^k(\underbrace{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots}_{A(x)})$$

$$B(x) = x^k \cdot A(x) \quad \checkmark$$

$$A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots \quad / - a_0 / : x$$

$$\frac{A(x) - a_0}{x} = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \ldots$$

analogicznie:

$$\frac{A(x) - a_0 - a_1 - \ldots - a_{k-1}}{x^k} = a_k + a_{k+1} x + \ldots + a_{k+i} x^i + \ldots$$

więc funkcja tworząca ciągu $c_k = a_{k+i}$ to

$$\boxed{\frac{A(x) - \sum_{i=0}^{k-1} a_i}{x^k}}$$

7

a) $$\prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^i}$$

b) $$\prod_{i=1}^{\infty} \left(1+x^{2i+1}\right)$$

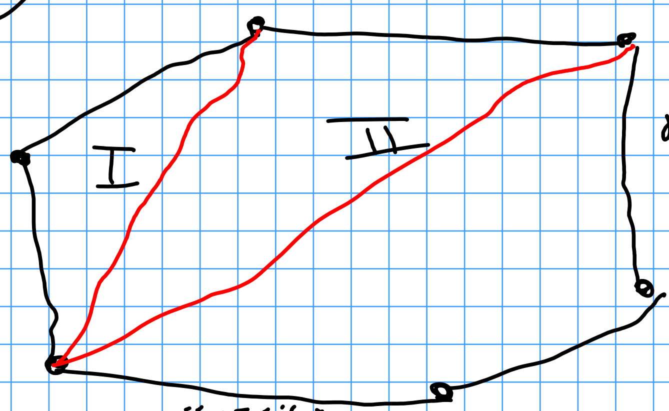
c) $$\left(1+x+x^2+\dots+x^m\right)^n$$

d) $$\prod_{i=0}^{\infty} \left(1+x^{2^i}\right)$$

1

Niech:

$C_n$ – liczba sposobów na jaki można podzielić $n+2$ kąt wypukły na rozłączne $\triangle$ za pomocą $n-1$ nieprzecinających się przekątnych




I pierwsza przekątna do najbliższego wierzchołka

II pierwsza przekątna do drugiego najbliższego wierzchołka

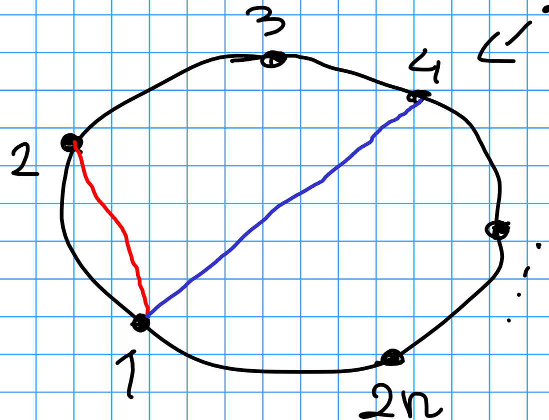
itd.

$$C_n = C_1 \cdot C_{n-1} + C_2 \cdot C_{n-2} + \dots + C_{n-1} \cdot C_1$$

zatem są to liczby Catalana.

(3) $C_n$ – liczba niekrzyżujących się uścisków dłoni które może wykonać jednocześnie n par osób siedzących przy okrągłym stole

2n osób




I 1 podaje 2 na $C_1$ sposobów reszta na $C_{n-1}$

II dzielimy na obszar osób

1–4 oraz 5–2n

2 pary, $n-2$ par

$C_2 \cdot C_{n-2}$

III dzielimy na obszar 1–6 oraz 7–2n

3 pary, $n-3$ par

$C_3 \cdot C_{n-3}$

analogicznie otrzymujemy

$$C_n = C_1 C_{n-1} + C_2 C_{n-2} + \dots + C_{n-1} C_1$$

Liczby Catalana.