Zadanie 1

Załóżmy, że G1, G2 to drzewa które mają najmniejszą sumę wag. Jeśli sumy te byłyby

różne to jedno miałoby mniejszą więc otrzymujemy tezę. Załóżmy więc że sumy te są równe.

Spośród tych krawędzi które zawarte są dokładnie w jednym z drzew weźmy tą która ma

najmniejszą wagę. Niech wynosi ona k. Dokładamy do grafu G2 krawędź o wadze k (z G1).

Wtedy G2 nie jest drzewem bo jest acykliczny (ponieważ jeśli w drzewie rozpinającym
dołożymy dowolną krawędź, to będzie miało n krawędzi i n wierzchołków,
a skoro jest spójny, to nie może być drzewem.

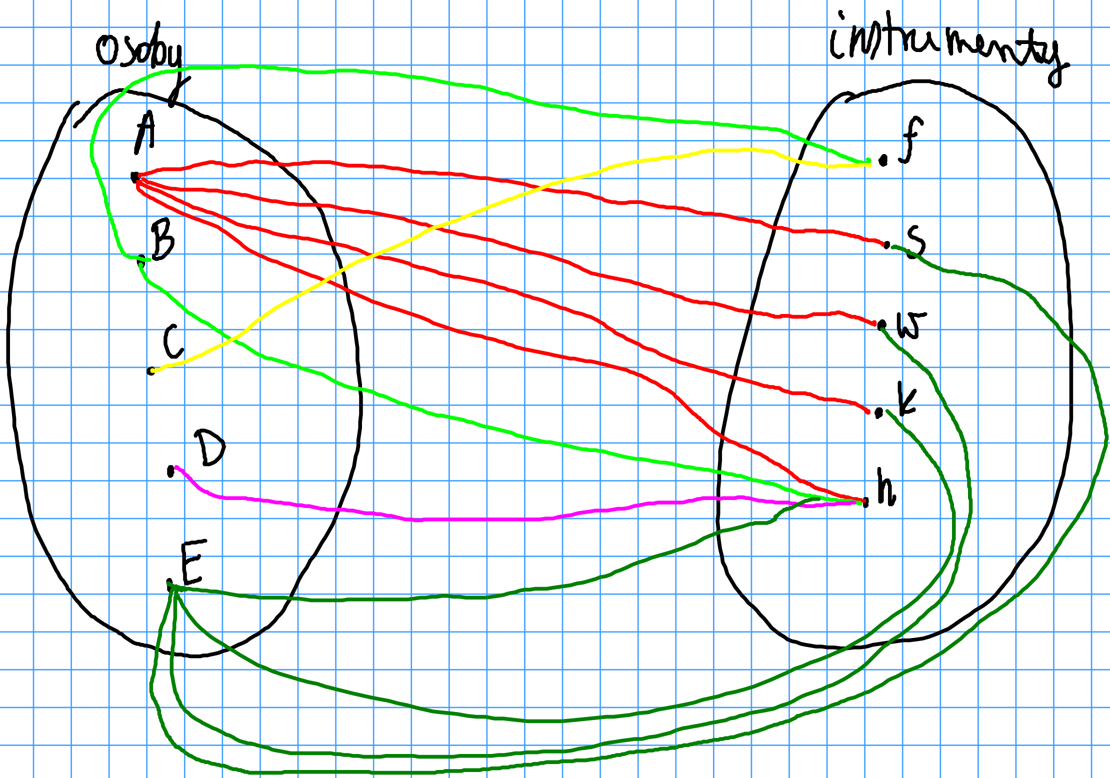
Powstaje jakiś cykl, który nie może być cały zawarty w G1, bo G1 jest drzewem więc jest acykliczny,
więc wybierzmy taką krawędź, która nie jest w G1, a jest w G2. Nazwijmy tę krawędź l.
Skoro l jest jedną z krawędzi, która jest zawarta w dokładnie jednym drzewie, to jej waga
jest większa od k (bo k wzięliśmy jako najmniejszą wagę). Gdy wyrzucimy l z G2 to
otrzymamy drzewo które ma większą mniejszą wagę, co daje sprzeczność.

Zadanie 2

1) Jeśli cykl nie przechodzi przez drzewo to otrzymujemy oczywiście tezę

2) Załózmy że cykl przechodzzi przez drzewo. Niech najcięższa krawędź przechodzi
przez to drzewo. Wtedy istnieje taka krawędź należąca do cyklu, która ma mniejszą wagę
i którą możemy podmienić z najcięższą krawędzią poprzedniego drzewa, tak aby
nowo powstałe drzewo było MST. Taką podmianę da się zrobić bo nie cały cykl
jest zawarty w drzewie.

zad 10



Tw (z wykładu) : Graf dwudzielny G jest skojarzeniem doskonałym <=> gdy spełniony jest warunek Halla.

Warunek Halla: $\forall A' \subseteq A, B' \subseteq B \quad |A'| \leq |N(A')| \wedge |B'| \leq |N(B')|$

Pokaże taki podzbiór, że warunek Halla nie jest spełniony co będzie implikowało, że nie uda się dobrać takiego składu.

$A' = \{B, C, D\}$; $|A'| = 3$

$N(A') = \{f, h\}$; $|N(A')| = 2$

więc $\underline{|A'| > |N(A')|}$

Zadanie 4

Dowód przez indukcje: (Jeżeli udowodnimy, że dla każdego kroku algorytmu Prima istnieje MST T_n zawierające drzewo G_n powstałe w kroku algorytmu, to udowodnimy poprawność algorytmu, ponieważ w ostatnim kroku znajdziemy MST całego grafu).

Dla n=1 otrzymujemy liść więc jest to MST

Załóżmy, że graf G_(n-1) zawiera się w pewnym minimalnym drzewie T_(n-1). Wybierana jest następnie krawędź e łącząca wierzchołek v należacy do G_(n-1) z wierzchołkiem v', który nie należy do G_(n-1).
1) Jeżeli e należy do T_(n-1) to wtedy T_n = T_(n-1)
2) Wpp. w drzewie T_(n-1) istnieje inna ścieżka (nazwijmy ją l) z v do v', która zawiera pewne wierzchołki w (należacy do G_(n-1) oraz w' (nienależący do G_(n-1)). Weźmy teraz graf T_n, który powstał poprzez usunięcie z T_(n-1) krawędzi l i dodanie krawędzi e. Krawędź e ma wagę mniejszą lub równą od l (jeśli by tak nie było, to algorytm by jej nie wybrał). Wynika stąd, że suma wag krawędzi grafu T_n jest mniejsza bądź równa od sumy wag krawędzi T_(n-1).

Dowód tego, że T_n jest drzewem rozpinającym:
Dla dowolnych wierzchołków dwóch wierzchołków istnieje w T_(n-1) ścieżka je łącząca.
Jeżeli ta ścieżka nie zawiera krawędzi l to zawiera się ona w T_n. Jeżeli zawiera, to można ją zastąpić ścieżką łączącą wierzchołki w i v, krawędzią e oraz i ścieżką łączącą v' z w'.