9.2

i) Z: $P_{2m+1}(x) = x R_m(x^2)$

rozpatrzmy:

$$\langle R_k(t); R_i(t) \rangle = \int_0^{a^2} \sqrt{t} \cdot p(\sqrt{t}) \cdot R_k(t) \cdot R_i(t)\, dt$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} t = x^2 \\ dt = 2x\,dx \end{array} \right\} = 2\int_0^a x \, p(x) \cdot R_k(x^2) \cdot R_i(x^2) \cdot x \, dx$$

● oraz ● to funkcje nieparzyste (z zał.)

● to funkcja parzysta, zatem

ich iloczyn jest funkcją parzystą.

Możemy więc zapisać całkę jako:

$$\int_{-a}^{a} p(x) \cdot P_{2k+1}(x) \cdot P_{2i+1}(x)\, dx = 0$$

(bo $\{P_L\}$ ortogonalne)

ii) Z: $P_{2m}(x) = S_m(x^2)$

$$\langle S_k(t); S_i(t) \rangle = \int_0^{a^2} \frac{p(\sqrt{t})}{\sqrt{t}} \cdot S_k(t) \cdot S_i(t)\, dt =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} t = x^2 \\ dt = 2x\,dx \end{array} \right\} = 2\int_0^a \frac{P(x)}{x} S_k(x^2) S_i(x^2)\, x\, dx$$

parzysta

nieparzysta

nieparzysta

zatem ich iloczyn jest parzysty, więc

$$\int_{-a}^{a} \frac{P(x)}{\cancel{x}} \cdot P_{2k}(x) \cdot P_{2i}(x) \cdot \cancel{x}\, dx = 0$$

(bo $\{P_i\}$ ortogonalne)