Jakub Karwalski 251543
Kacper Majkowski 251578

Rok akademicki 2024/2025
środa, 12:15

METODY NUMERYCZNE – LABORATORIUM
Zadanie 4 – Metody całkowania numerycznego – złożona kwadratura Newtona-Cotesa oraz wielomiany Hermite'a

Opis rozwiązania:
Złożona kwadratura Newtona-Cotesa oparta na trzech węzłach, czyli złożona metoda Simpsona, to numeryczna metoda obliczania całki oznaczonej funkcji f(x) na przedziale [a,b]. Polega na przybliżeniu funkcji funkcją kwadratową (parabolą) na małych podprzedziałach i sumowaniu ich pól.

Dla trzech punktów:

$$x_0 = a$$
$$x_1 = \frac{a+b}{2}$$
$$x_2 = b$$

$$\int_a^b \mathrm{f(x)dx} \approx \frac{b-a}{6}(\mathrm{f}(\mathrm{x}_0) + 4\mathrm{f}(\mathrm{x}_1) + \mathrm{f}(\mathrm{x}_2))$$

To tzw. wzór Simpsona — interpoluje funkcję f(x)f(x)f(x) parabolą przechodzącą przez trzy punkty
Złożona metoda Simpsona:

Gdy przedział [a,b] dzielimy na n równych części (gdzie n musi być parzyste), całka aproksymowana jest sumą kilku takich prostych przybliżeń:

1. Dzielimy przedział [a,b] na n równych podprzedziałów długości $h = \frac{b-a}{n}$
2. Obliczamy wartości funkcji w punktach x_0, x_1,..., x_n gdzie x_i=a+ih
3. Stosujemy wzór:

$$\int_a^b \mathrm{f(x)dx} \approx \frac{\mathrm{h}}{3}\left[\mathrm{f}(\mathrm{x}_0) + 4\sum_{i=1}^{n-1} \mathrm{f}(\mathrm{x}_i) + 2\sum_{i=2}^{n-2} \mathrm{f}(\mathrm{x}_i) + \mathrm{f}(\mathrm{x}_n)\right]$$

kwadratura Gaussa-Hermite'a To metoda numeryczna przeznaczona specjalnie do całek postaci:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x)dx$$

Zamiast aproksymować funkcję na przedziale jak w Simpsona, dobiera się specjalne punkty (węzły) i wagi, zależne od wielomianów Hermite'a, aby dokładnie obliczać całki tej postaci.

Wzór kwadratury Gaussa-Hermite'a

Dla danego stopnia n, aproksymacja całki wygląda tak:

x_i – węzły (punkty całkowania), czyli miejsca zerowe n-tego wielomianu Hermite'a

w_i– wagi, zależne od tych węzłów i stopnia n

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \mathrm{f(x)dx} \approx \sum_{i=1}^{n} \mathrm{w}_i \cdot \mathrm{f}(\mathrm{x}_i)$$

Wyniki, dokładność jest zawsze 1e-6:

1. Dla funkcji x^2

Wynik kwadratury Simpsona: 0.8862269256697538
Wynik Gauss-Hermite (n=2): 0.8862269254527577
Wynik Gauss-Hermite (n=3): 0.886226925452758
Wynik Gauss-Hermite (n=4): 0.8862269254527582
Wynik Gauss-Hermite (n=5): 0.8862269254527578

2. Dla funkcji $x^4 - 2x^2 + 1$

Wynik kwadratury Simpsona: 1.7724538509143644
Wynik Gauss-Hermite (n=2): 1.7724538509055159
Wynik Gauss-Hermite (n=3): 1.772453850905516
Wynik Gauss-Hermite (n=4): 1.7724538509055159
Wynik Gauss-Hermite (n=5): 1.7724538509055157

3. Dla funkcji $\sin x$

Wynik kwadratury Simpsona: 2.8067463598364233e-16
Wynik Gauss-Hermite (n=2): 0.0
Wynik Gauss-Hermite (n=3): 0.0
Wynik Gauss-Hermite (n=4): 0.0
Wynik Gauss-Hermite (n=5): -1.0408340855860843e-17
Wynik dla (sin(x)) jest oczekiwany i poprawny ze względu na symetrię funkcji i własności całkowania po przedziałach symetrycznych. Całka funkcji nieparzystej w przedziale symetrycznym zawsze wynosi 0.

4. Dla funkcji $|x|^2$

Wynik kwadratury Simpsona: 1.2533141373155001
Wynik Gauss-Hermite (n=2): 1.0750476034999203
Wynik Gauss-Hermite (n=3): 1.3134652044730937
Wynik Gauss-Hermite (n=4): 1.2331308972763744
Wynik Gauss-Hermite (n=5): 1.260069748687603

5. Dla funkcji $\frac{1}{1+x^2}$

Wynik kwadratury Simpsona: 1.343293421647079
Wynik Gauss-Hermite (n=2): 1.1816359006036772
Wynik Gauss-Hermite (n=3): 1.4179630807244126
Wynik Gauss-Hermite (n=4): 1.3060186269830119
Wynik Gauss-Hermite (n=5): 1.363426039158089
Wnioski:

Cechy metody Simpsona:

- Dokładność: metoda jest dokładna dla wszystkich wielomianów stopnia ≤ 3
- Złożoność obliczeniowa: wymaga oceny funkcji w n+1 punktach
- Warunek: n musi być parzyste

Cechy metody Gaussa-Hermite'a:

- Jest bardzo dokładna dla funkcji typu f(x) e^{-x^2}.
- Działa na przedziale (−∞,+∞) bez potrzeby całkowania po krańcach.
- Im większy stopień n, tym lepsze przybliżenie.
- Zera i wagi są tablicowane albo liczone numerycznie.