Jakub Karwalski 251543
Kacper Majkowski 251578

Rok akademicki 2024/2025
środa, 12:15

METODY NUMERYCZNE – LABORATORIUM

Zadanie 2 – Rozwiązywanie N układów równań z N niewiadomymi metodą eliminacji Jordana.

Opis rozwiązania

Opis:

Metoda eliminacji Jordana-Gaussa (inaczej zwana metodą Gaussa-Jordana) to modyfikacja eliminacji Gaussa, której celem jest doprowadzenie rozszerzonej macierzy układu równań do postaci zredukowanej schodkowej (postaci kanonicznej).

Algorytm:

1. Tworzymy rozszerzoną macierz A|b z układu równań (macierz współczynników oraz kolumnę wyrazów wolnych).
2. Dla każdej kolumny i od 0 do N−1:
   a. Wybieramy element główny (pivot):
   b. Znajdujemy wiersz r z największą wartością bezwzględną w kolumnie i (od wiersza i w dół).
   c. Jeśli A[r][i] == 0:
      i. Jeśli cała kolumna i zawiera zera, to sprawdzamy, czy układ jest nieoznaczony lub sprzeczny.
      ii. Jeśli nie da się znaleźć pivotu różnego od zera, to wnioskujemy, że układ nie ma jednoznacznego rozwiązania.
   d. Zamieniamy wiersze i i r (pivotowanie).
   e. Normalizujemy wiersz i, aby element główny był równy 1:
      i. Dzielimy cały wiersz i przez A[i][i].
   f. Zerujemy wszystkie inne elementy w kolumnie i (nad i pod pivotem):
      i. Dla każdego j ≠ i, odejmujemy A[j][i] * wiersz i od wiersza j, tak aby A[j][i] = 0.
3. Po wykonaniu wszystkich kroków dla każdej kolumny:
   a. Sprawdzamy, czy macierz A stała się jednostkowa – wtedy wektor wynikowy zawiera rozwiązanie.
4. Kończymy – odczytujemy rozwiązanie z ostatniej kolumny macierzy.

Wyniki

Oznaczenie przykładu	Zawartość przykładu	Wartość teoretyczna	Wartość poznana w programie
a.	$\begin{bmatrix}3&3&1\\2&5&7\\1&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12\\33\\8\end{bmatrix}$	$x_1=1,\ x_2=2, x_3=3$	$x_1=1,\ x_2=2, x_3=3$
b.	$\begin{bmatrix}3&3&1\\2&5&7\\-4&-10&-14\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\20\\-40\end{bmatrix}$	Układ nieoznaczony	Układ nieoznaczony
c.	$\begin{bmatrix}3&3&1\\2&5&7\\-4&-10&-14\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\20\\-20\end{bmatrix}$	Układ sprzeczny	układ
d.	$\begin{bmatrix}0.5&-0.0625&0.1875&0.0625\\-0.0625&0.5&0&0\\0.1875&0&0.375&0.105\\0.0625&0&0.125&0.25\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.5\\-1.625\\1\\0.4375\end{bmatrix}$	$x_1=2,\ x_2=-3,$ $x_3=1.5, x_4=5$	

e.	$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 7 & 8 & 1 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$	Układ sprzeczny	Układ sprzeczny
f.	$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 \\ 1 \\ 21 \\ -5 \end{bmatrix}$	$x_1 = 7,\ x_2 = 5, x_3 = 3,$ $x_4 = 5$	$x_1 = 7,\ x_2 = 5, x_3$ $= 3,$ $x_4 = 5$
g.	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}$	$x_1 = 7,\ x_2 = 5, x_3 = 3$	$x_1 = 7,\ x_2 = 5, x_3$ $= 3$
h.	$\begin{bmatrix} 10 & -5 & 1 \\ 4 & -7 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 19 \end{bmatrix}$	$x_1 = 1,\ x_2 = 2, x_3 = 3$	$x_1 = 1,\ x_2 = 2, x_3$ $= 3$
i.	$\begin{bmatrix} 6 & -4 & 2 \\ -5 & 5 & 2 \\ 0.9 & 0.9 & 3.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 11 \\ 13,5 \end{bmatrix}$	Układ nieoznaczony	Układ nieoznaczony
j.	$\begin{bmatrix} 1 & 0.2 & 0.3 \\ 0.1 & 1 & -0.3 \\ -0.1 & -0.2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ -0.3 \\ 0.7 \end{bmatrix}$	$x_1 = 1,\ x_2 = 1, x_3 = 1$	$x_1 = 1,\ x_2 = 1, x_3 =$

Wnioski

Metoda eliminacji Jordana może być bardziej czasochłonna niż klasyczna eliminacja Gaussa (dużo więcej operacji), ale łatwa do zaimplementowania komputerowo oraz działa bez konieczności "podstawiania wstecz".