Jakub Karwalski 251543
Kacper Majkowski 251578

Rok akademicki 2024/2025
środa, 12:15

METODY NUMERYCZNE – LABORATORIUM

Zadanie 3 – Metoda interpolacji Lagrange'a dla węzłów równoodległych

Opis rozwiązania

Interpolację stosuje się wtedy, gdy chcemy oszacować (przybliżyć) wartość funkcji w punkcie, dla którego nie mamy bezpośrednio dostępnych danych, ale znamy jej wartości w kilku innych punktach.

Interpolacja Lagrange'a to jedna z klasycznych metod numerycznych służących do przybliżania funkcji na podstawie skończonego zbioru punktów (węzłów). Dla danego zbioru $n+1$ punktów $(x0, y0), (x1, y1), \dots, (x_n, y_n)(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ w których x_i są **równoodległe**, tzn. $x_{i+1} - x_i = h = const$, można skonstruować wielomian interpolacyjny $L_n(x)$ postaci:

$$L_n(x) \;= \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot l_i(x)$$

gdzie $l_i(x)$ to tzw. **wielomiany bazowe Lagrange'a**, zdefiniowane jako:

$$l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Każdy z wielomianów bazowych $l_i(x)$ ma wartość 1 w punkcie $x = x_i$ oraz 0 w pozostałych węzłach. Dzięki temu wielomian interpolacyjny $L_n(x)$ przechodzi dokładnie przez wszystkie dane punkty.

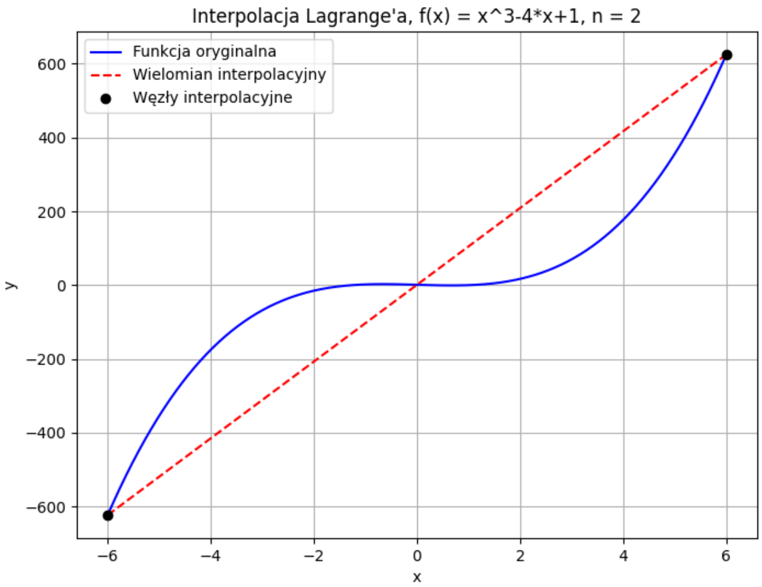
Zaletą stosowania węzłów równoodległych jest uproszczenie obliczeń i możliwość wykorzystania efektywnych algorytmów numerycznych. Jednak należy pamiętać, że przy dużej liczbie węzłów może wystąpić zjawisko Rungego – oscylacje wielomianu na końcach przedziału interpolacji.

Wyniki

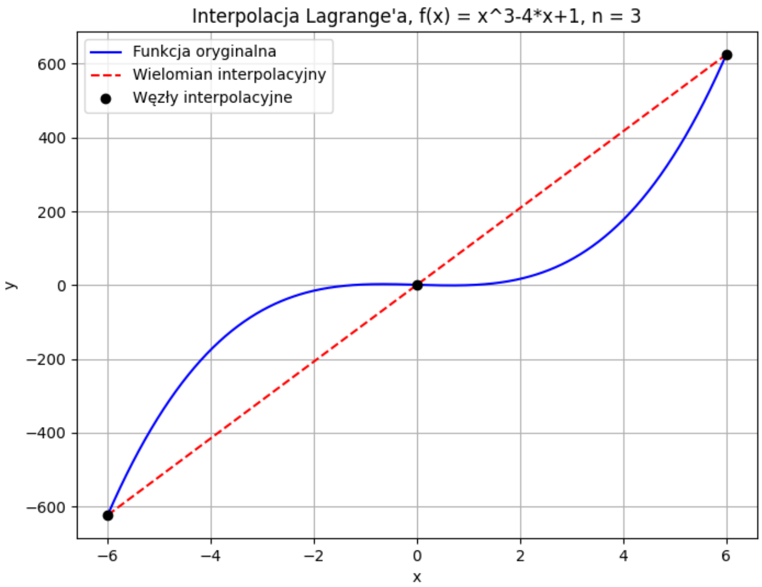
W programie mamy do wyboru następujące funkcje:

L.p.	Rodzaj funkcji	Wzór funkcji
1	liniowa	f(x) = 2*x + 1
2	wartość bezwzględna	f(x) = |x|
3	wielomianowa	f(x) = x^3 - 4*x + 1
4	trygonometryczna	f(x) = sin(x)
5	trygonometryczna	f(x) = cos(x)
6	trygonometryczna	f(x) = sin(x) + cos(x)
7	złożenie	f(x) = sin(|x|)
8	złożenie	f(x) = x *cos(x)
9	ręczne wprowadzenie węzłów	Nie dotyczy

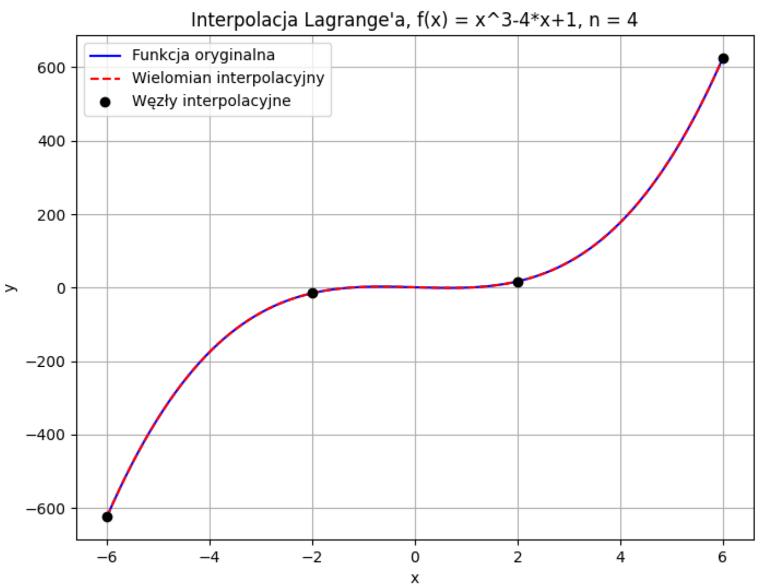
Zaprezentowane poniżej wyniki dotyczą funkcji nr. 3 interpolowanej na przedziale [-6;6] z ilościami węzłów 2, 3, 5, 30, 50, 100 oraz funkcji nr. 5 interpolowanej na przedziale [-12;12] z ilościami węzłów 5, 7, 10, 15, 17, 18, 20, 25, 50.



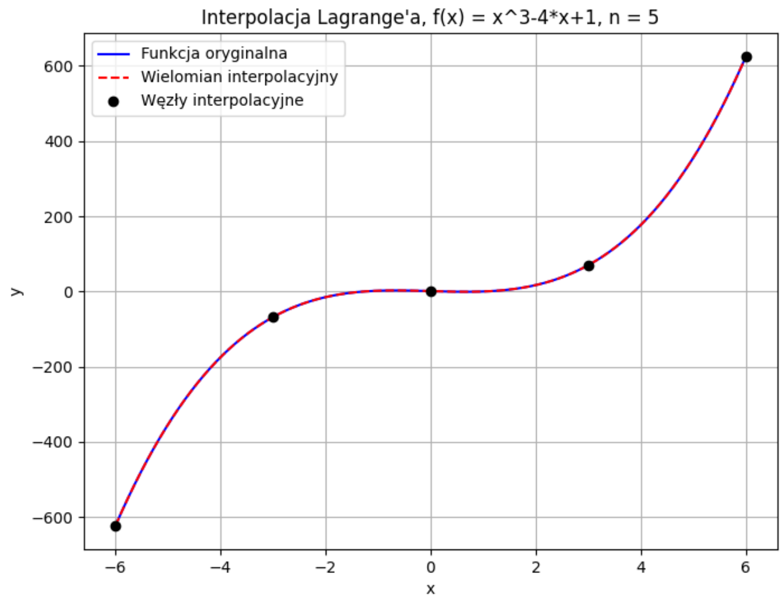
Interpolacja Lagrange'a, f(x) = x^3-4*x+1, n = 2
Funkcja oryginalna
Wielomian interpolacyjny
Węzły interpolacyjne
x
y

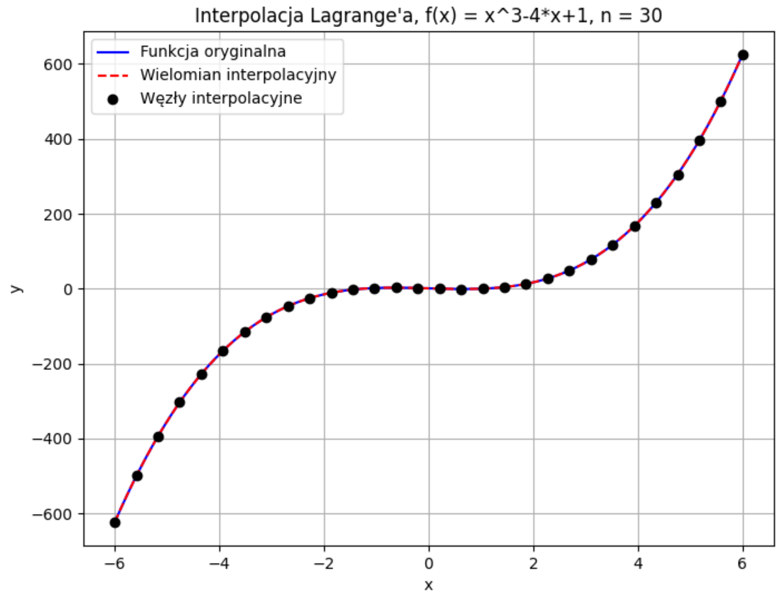


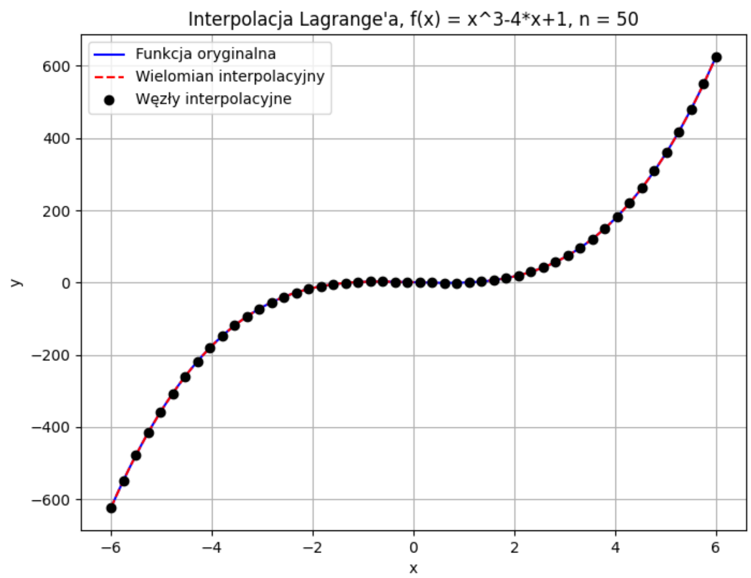
Interpolacja Lagrange'a, f(x) = x^3-4*x+1, n = 3
Funkcja oryginalna
Wielomian interpolacyjny
Węzły interpolacyjne
x
y

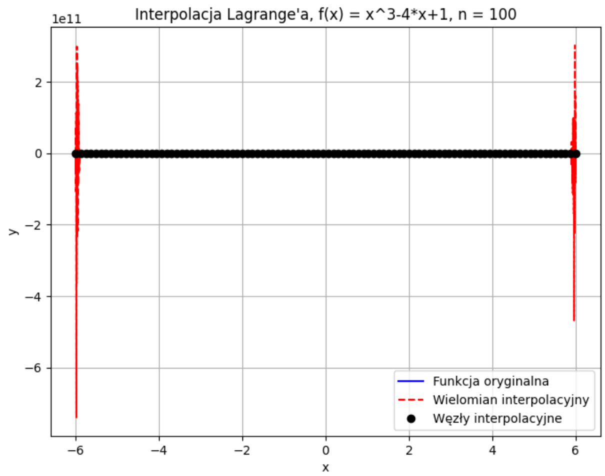


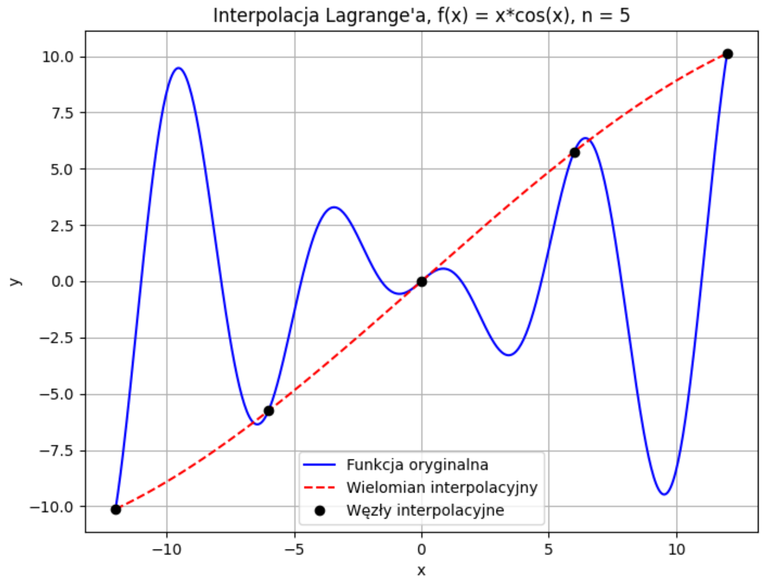
Interpolacja Lagrange'a, f(x) = x^3-4*x+1, n = 4
Funkcja oryginalna
Wielomian interpolacyjny
Węzły interpolacyjne
x
y

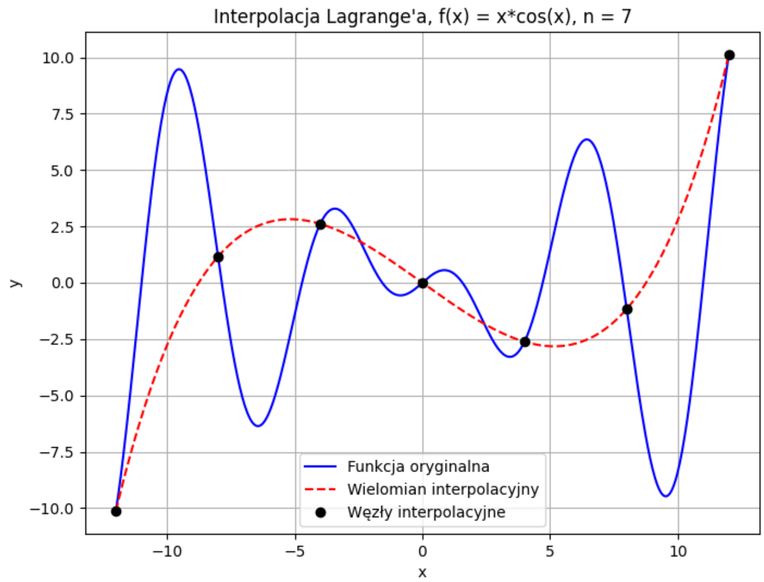

Interpolacja Lagrange'a, f(x) = x^3-4*x+1, n = 5
Funkcja oryginalna
Wielomian interpolacyjny
Węzły interpolacyjne
y
x

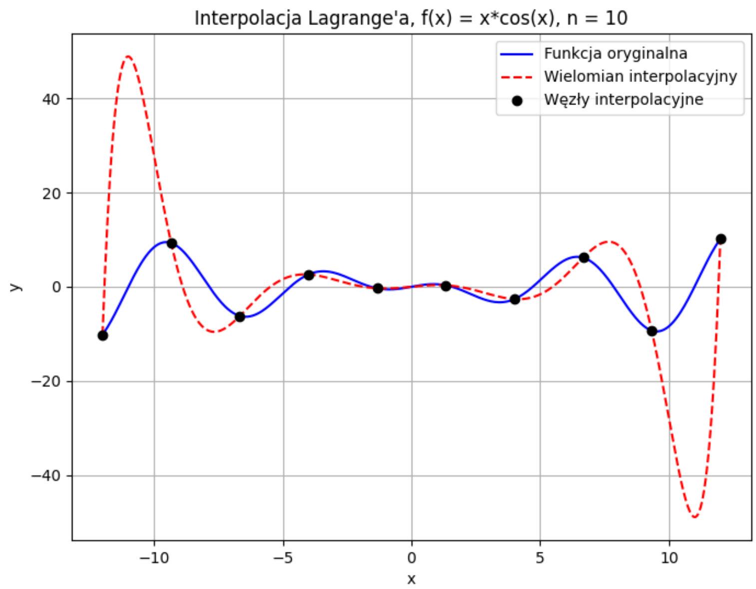

Interpolacja Lagrange'a, f(x) = x^3-4*x+1, n = 30
Funkcja oryginalna
Wielomian interpolacyjny
Węzły interpolacyjne
y
x

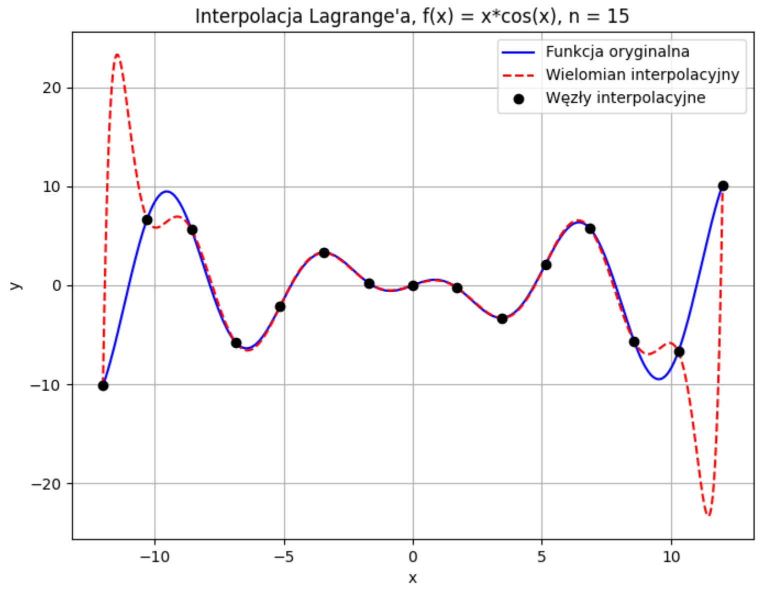

Interpolacja Lagrange'a, f(x) = x^3-4*x+1, n = 50
Funkcja oryginalna
Wielomian interpolacyjny
Węzły interpolacyjne
y
x

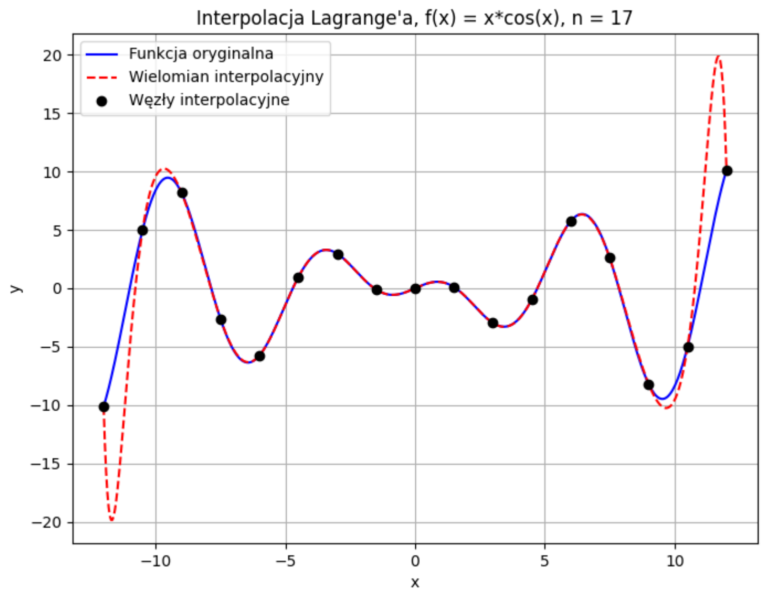

Interpolacja Lagrange'a, f(x) = x^3-4*x+1, n = 100
1e11
Funkcja oryginalna
Wielomian interpolacyjny
Węzły interpolacyjne
y
x

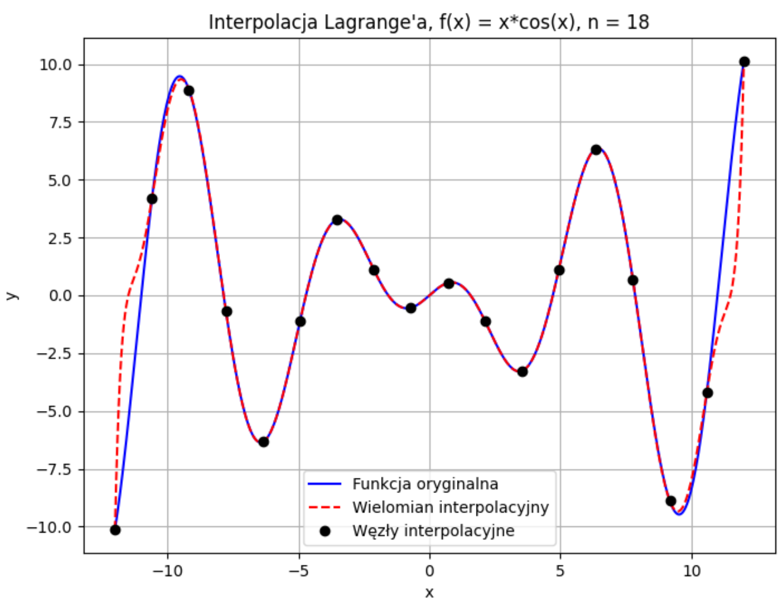

Interpolacja Lagrange'a, f(x) = x*cos(x), n = 5
Funkcja oryginalna
Wielomian interpolacyjny
Węzły interpolacyjne
y
x

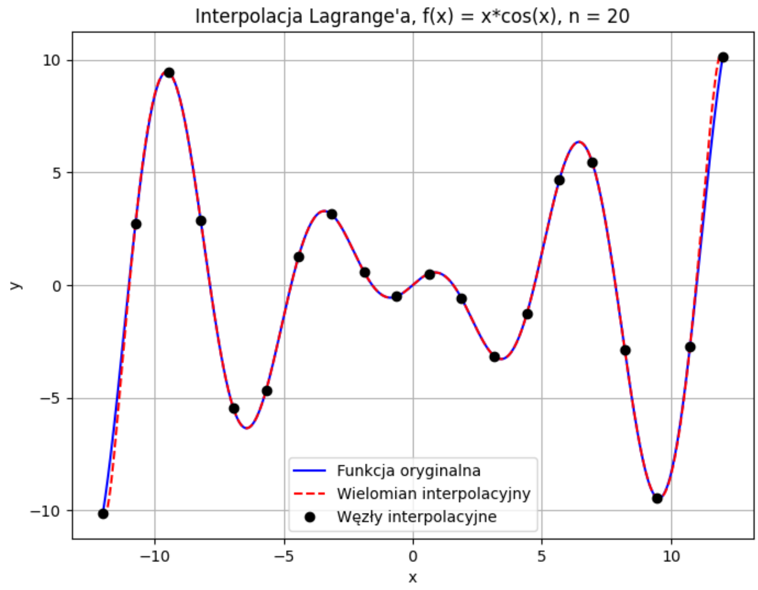

Interpolacja Lagrange'a, f(x) = x*cos(x), n = 7
Funkcja oryginalna
Wielomian interpolacyjny
Węzły interpolacyjne
y
x

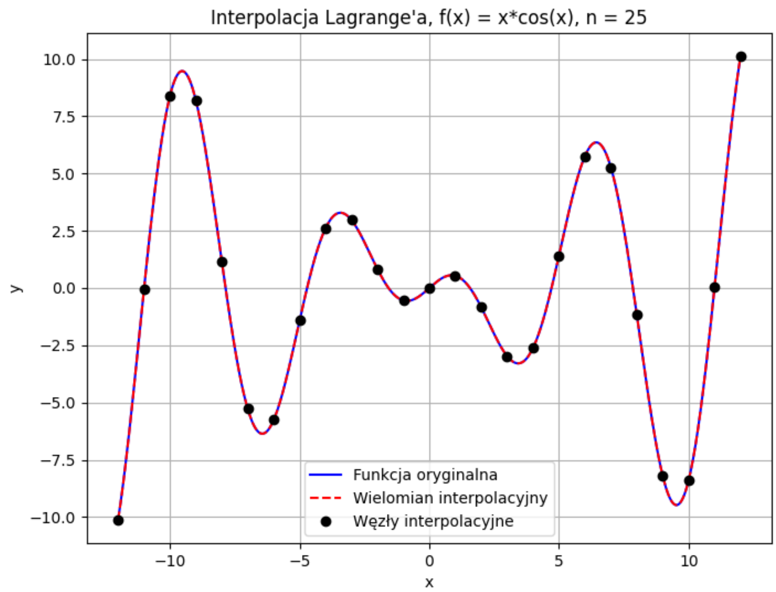

Interpolacja Lagrange'a, f(x) = x*cos(x), n = 10
Funkcja oryginalna
Wielomian interpolacyjny
Węzły interpolacyjne
y
x

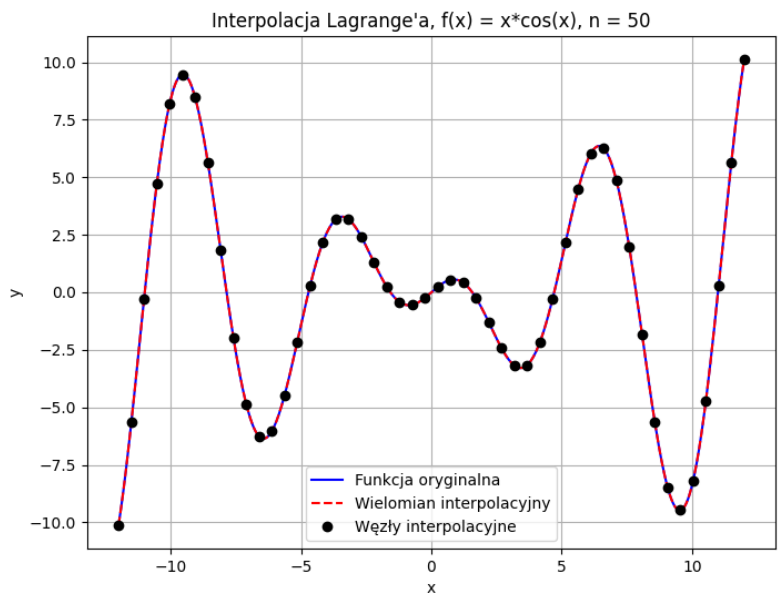

Interpolacja Lagrange'a, f(x) = x*cos(x), n = 15
Funkcja oryginalna
Wielomian interpolacyjny
Węzły interpolacyjne
y
x


Interpolacja Lagrange'a, f(x) = x*cos(x), n = 17
Funkcja oryginalna
Wielomian interpolacyjny
Węzły interpolacyjne
y
x


Interpolacja Lagrange'a, f(x) = x*cos(x), n = 18
Funkcja oryginalna
Wielomian interpolacyjny
Węzły interpolacyjne
y
x


Interpolacja Lagrange'a, f(x) = x*cos(x), n = 20
10
5
0
−5
−10
y
−10
−5
0
5
10
x
Funkcja oryginalna
Wielomian interpolacyjny
Węzły interpolacyjne


Interpolacja Lagrange'a, f(x) = x*cos(x), n = 25
10.0
7.5
5.0
2.5
0.0
−2.5
−5.0
−7.5
−10.0
y
−10
−5
0
5
10
x
Funkcja oryginalna
Wielomian interpolacyjny
Węzły interpolacyjne


Interpolacja Lagrange'a, f(x) = x*cos(x), n = 50
10.0
7.5
5.0
2.5
0.0
−2.5
−5.0
−7.5
−10.0
y
−10
−5
0
5
10
x
Funkcja oryginalna
Wielomian interpolacyjny
Węzły interpolacyjne

Wnioski

Z przykładowych wykresów wynika, że wraz ze wzrostem liczby węzłów wzrasta dokładność interpolacji.

Przy małej ilości węzłów, dodanie jednego czy dwóch kolejnych węzłów powoduje duże zmiany wielomianu interpolacyjnego, natomiast przy większych ilościach mała zmiana w węzłach powoduje małą zmianę wielomianu. Wygląda to tak, jakby wzrost dokładności był w pewnym stopniu proporcjonalny do procentowego przyrostu ilości węzłów.

Od pewnego momentu zwiększanie ilości węzłów daje niewielkie korzyści.

Aby zinterpolować wielomian N-tego stopnia potrzeba N+1 węzłów, co potwierdzają wykresy funkcji numer 3.

Metoda Lagrange'a pozwala na interpolację funkcji z dużą dokładnością, szczególnie wtedy, gdy liczba węzłów jest odpowiednio dobrana, a funkcja nie wykazuje dużych zmian w krótkich odstępach. Jednak należy zachować ostrożność przy dużej liczbie równoodległych węzłów, ponieważ pojawia się ryzyko wystąpienia zjawiska Rungego, zaobserwowane na wykresie funkcji numer 3 przy zastosowaniu 100 węzłów interpolacyjnych, czyli niepożądanych oscylacji wielomianu, zwłaszcza na krańcach przedziału interpolacji. Dla dużej liczby węzłów korzystniejsze może być zastosowanie innych metod.