Jakub Karwalski 251543
Kacper Majkowski 251578

Rok akademicki 2024/2025
środa, 12:15

METODY NUMERYCZNE – LABORATORIUM

Zadanie 1 – Metody wyznaczania miejsca zerowego

Opis rozwiązania

Opis:

Metoda bisekcji – funkcja na badanym przedziale musi być określona, ciągła, oraz na krańcach przedziału musi mieć różne znaki. Dzięki tym założeniom wiemy że w badanym przedziale musi występować co najmniej jedno miejsce zerowe. Dzielimy dany przedział na połowy, aż do warunku stopu.

Wzory:

$$x_0 = \frac{a+b}{2}$$

Gdzie: x_0 – środek przedziału, a- lewy kraniec przedziału, b- prawy kraniec przedziału

Algorytm:

1. Liczymy wartości funkcji na krańcach podanego przedziału
2. Jeśli funkcja nie ma wartości z różnym znakiem na krańcu przedziału, czyli $f_a \cdot f_b > 0$, to zakończ z błędem, jeśli nie to kontynuujemy
3. Wyznaczamy środek przedziału x_0, ze wzoru powyżej
4. Jeśli $f(x_0) < \varepsilon$, lub osiągnięto liczbę żądanych iteracji – zakończ program, jeśli nie to kontynuujemy
5. Obliczamy wartość funkcji na środku przedziału
6. Jeśli $f(x_0) \cdot f(a) < 0$ to b = x_0, w przeciwnym wypadku jeśli $f(x_0) \cdot f(b) < 0$, to a = x_0
7. Wracamy do kroku 3

Opis:

Metoda Falsi- W metodzie traktujemy funkcję tak, jakby była funkcją, której wykres jest prostą. Prosta ta przecina oś OX w punkcie, który jest przybliżeniem pierwiastka. Wyliczamy punkt przecięcia fałszywej prostej x_0 z osią OX, obliczamy wartość funkcji w tym punkcie. Jeśli jest ona dostatecznie bliska zeru, to kończymy z wynikiem x_0. Jeśli nie trafiliśmy, to punkt x_0 dzieli przedział poszukiwań pierwiastka na dwie części (tutaj nie będą to zwykle połówki jak w metodzie bisekcji). Za nowy przedział przyjmujemy tę część, w której funkcja ma różne znaki na krańcach.

Wzory:

$$x_0 = \frac{f(b) \cdot a - f(a) \cdot b}{f(b) - f(a)}$$

Gdzie: x_0 – przybliżony pierwiastek funkcji, f(a)- wartość funkcji w punkcie a, f(b)- wartość funkcji w punkcie b, a- lewy kraniec przedziału, b- prawy kraniec przedziału

Algorytm

1. Liczymy wartości funkcji na krańcach podanego przedziału
2. Jeśli funkcja nie ma wartości z różnym znakiem na krańcu przedziału, czyli $f_a \cdot f_b > 0$, to zakończ z błędem, jeśli nie to kontynuujemy
3. Wyznaczamy środek przedziału x_0, ze wzoru powyżej
4. Jeśli $x_0 < \varepsilon$, lub osiągnięto liczbę żądanych iteracji – zakończ program, jeśli nie to kontynuujemy
5. Obliczamy wartość funkcji na środku przedziału
6. Jeśli $f(x_0) \cdot f(a) < 0$ to b = x_0 oraz f(b) = $f(x_0)$, w przeciwnym wypadku, jeśli $f(x_0) \cdot f(b) < 0$, to a = x_0, oraz f(a)=$f(x_0)$
7. Wracamy do kroku 3

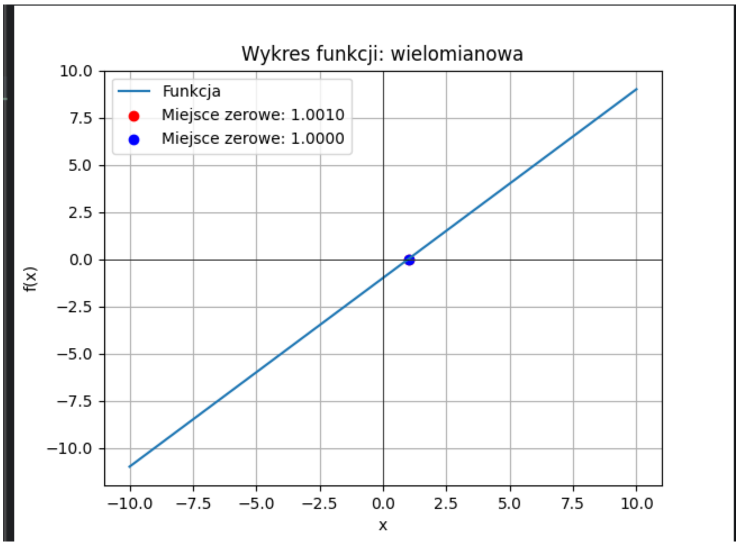
Wyniki

L.p.	Funkcja	Dokładność (epsilon)	Liczba maksymalnych iteracji	Zakres przedziałów	Wartość teoretyczna	Wartości zmierzone	Liczby iteracji
1	y=x-1	0.001	-	[-10,10]	1	Falsi- 1 Bisekcja- 1.0009765625	Falsi -1 Bisekcja- 12
2	y=x-1	-	10	[-10,10]	1	Falsi- 1 Bisekcja- 0.99609375	Maks
3	y=x^3-4x+1	0,1	-	[-3,0]	-2,114905741476	Falsi- (-2,10993357) Bisekcja- (-2,109375)	Falsi – 10 iteracji Bisekcja – 6 iteracji

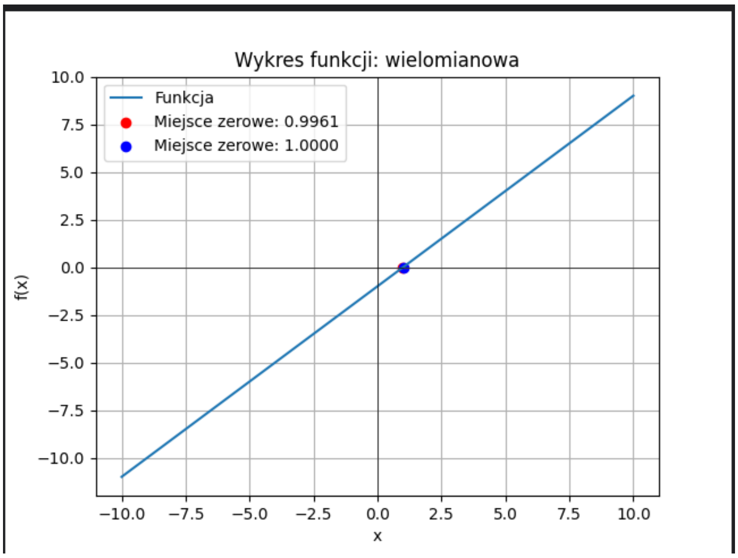
4	y=x^3-4x+1	-	20	[1,3]	1,861	Falsi-1,8607944375 Bisekcja-1,8608074188	Maks
5	y=sin(x)	0.001	-	[-2,2]	0	Falsi – 0.0 Bisekcja – 0.0	Falsi – 1 iteracja Bisekcja – 1 iteracja
6	y=sin(x)	-	4	[-2,1]	0	Falsi – 0.0000004116 Bisekcja - 0.0625	Maks
7	y=$e^x - 2$	-	100	[-100.100]	0,6931471785411	Falsi – (-100) Bisekcja-0,693147180	Maks
8	y=$e^x - 2$	-	100	[-2,2]	0,6931471785411	Falsi-0,693147180 Bisekcja-0, 693147180	Maks
9	y=2sin(2x+1)-0,5	0.01	-	[0,2]	0,9444561992177	Falsi-0,9442321763 Bisekcja-0,9453125	Falsi– 4 iteracje Bisekcja – 8 iteracji
10	y=2sin(2x+1)-0,5	-	20	[0,2]	0,9444561992177	Falsi-0,9444561992 Bisekcja-0,9444561004	Maks

Kolorem niebieskim oznaczone są wyniki uzyskane metodą Falsi, a kolorem czerwonym te uzyskane metodą bisekcji. Jeżeli widoczne jest tylko jedno z miejsc zerowych, oznacza to, że uzyskane wyniki są do siebie bardzo zbliżone.
Wykresy:

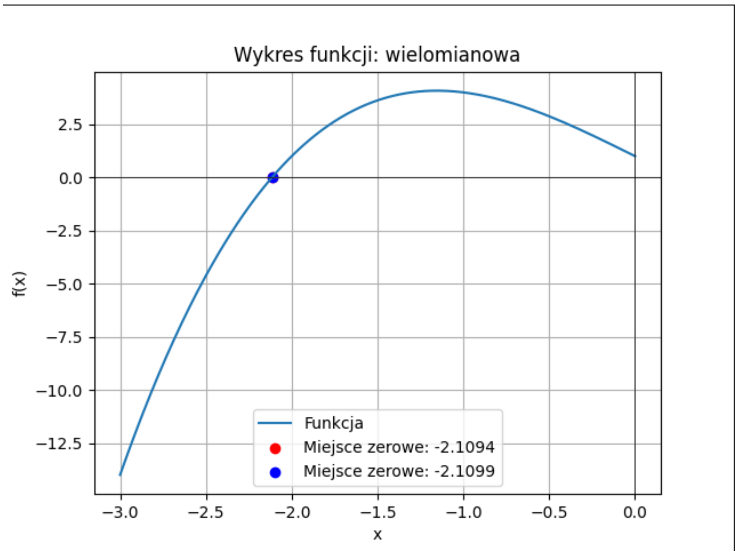
1. y=x-1 ; kryterium epsilon



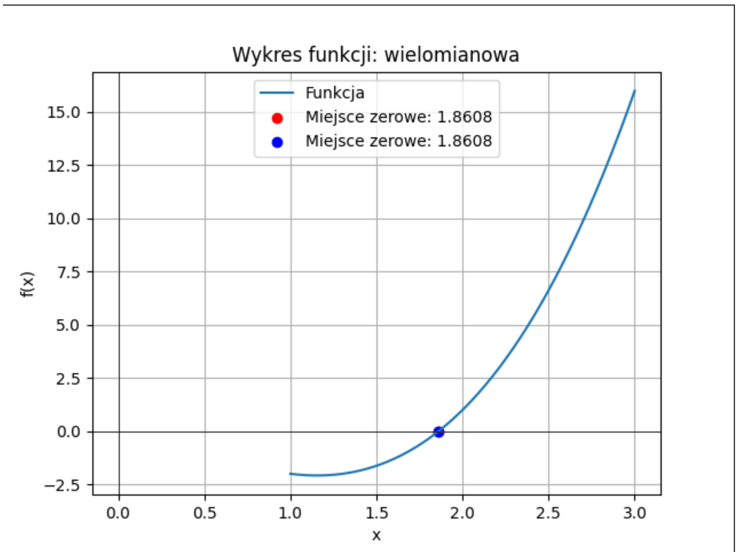
2. y=x-1 ; kryterium iteracji



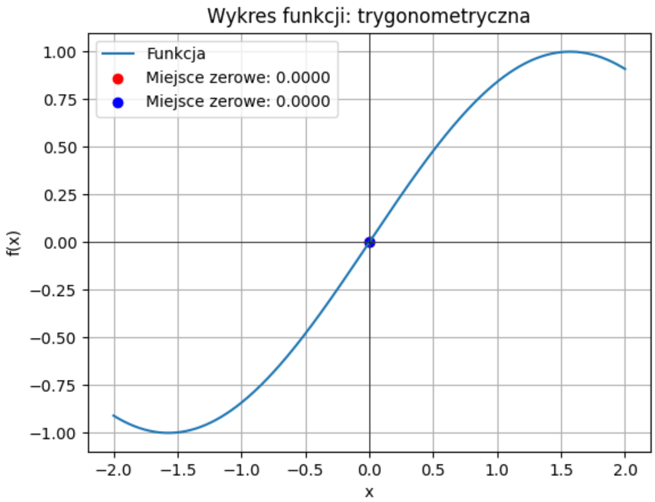
3. y=x^3-4x+1 ; kryterium epsilon



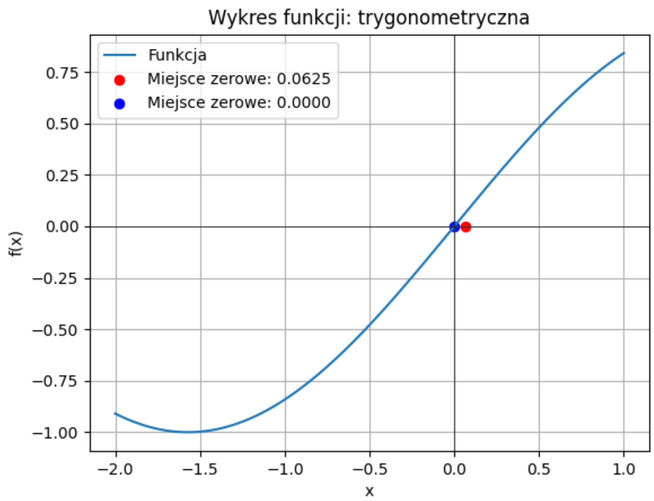
4. y=x^3-4x+1 ; kryterium iteracji



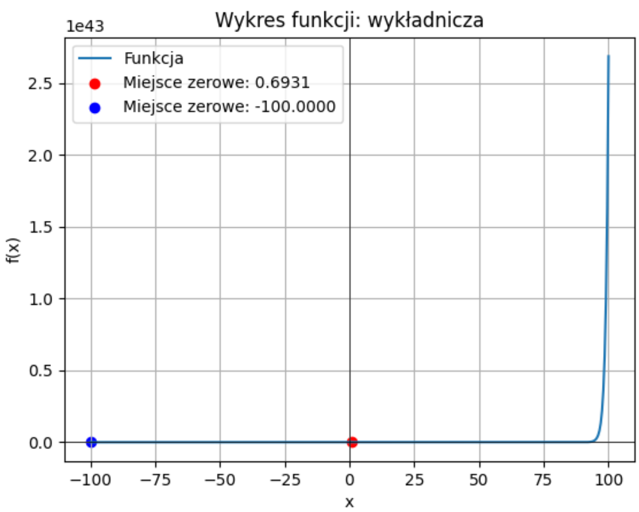
5. y=sin(x)- kryterium epsilon



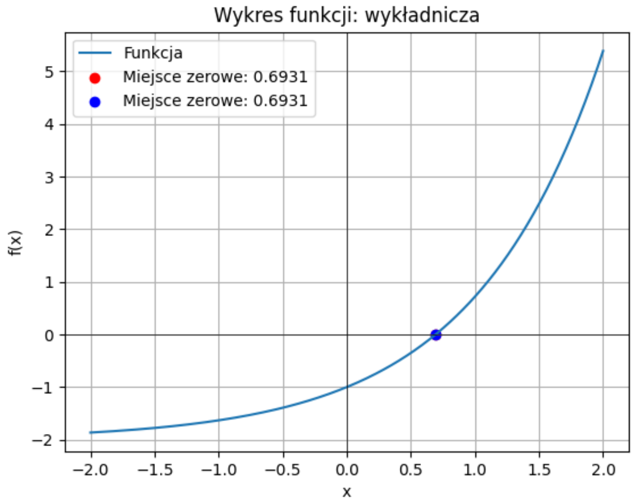
6. y=sin(x)- kryterium iteracji



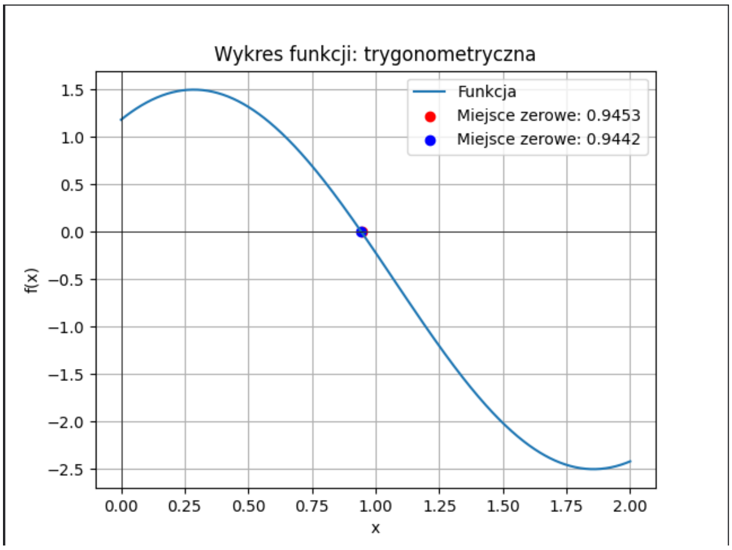
7. y=e^x-1 ; kryterium iteracji ; zakres [-100;100]



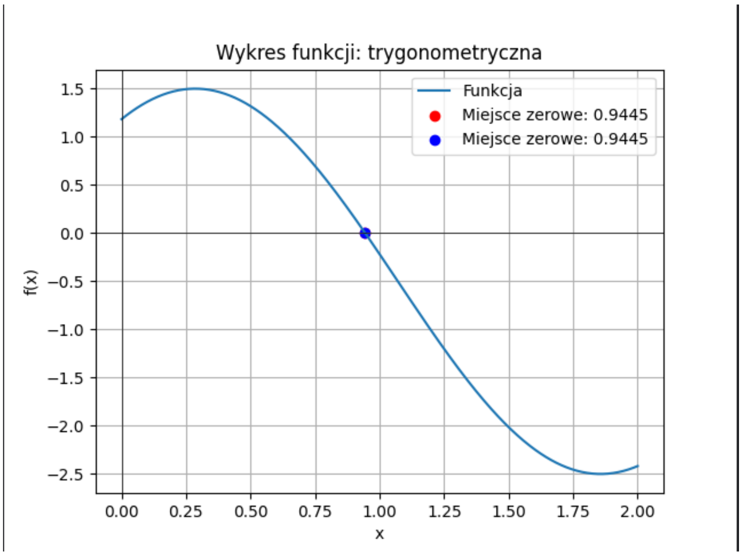
8. y=e^x-1 ; kryterium iteracji ; zakres [-2,2]



9. y=2sin(2x+1)-0,5 ; kryterium epsilon



10. y=2sin(2x+1)-0,5 ; kryterium iteracji



Wnioski

- Metoda Bisekcji znajduje coraz dokładniejszy pierwiastek z postępem wykładniczym- dzieląc przedział na połowy z każdym obiegiem szerokość maleje dwukrotnie, po 10 obiegach 2^{10} razy
- Metoda Falsi jest zwykle szybsza, dokładniejsza i wymaga mniej iteracji- ponieważ nie dzielimy tutaj bezwzględnie przedziału na połowy a badamy punkt przecięcia fałszywej prostej z osią OX co przyśpiesza rozwiązywanie pierwiastków. Można to zauważyć na przykładzie funkcji wielomianowej i trygonometrycznej.
- Jeśli chodzi o funkcje wykładnicze, to na dużych przedziałach metoda Falsi nie działa, przedziały muszą być dokładniejsze i krótsze aby metoda Falsi potrafiła sobie poradzić ze znalezieniem pierwiastka, co widać na przykładzie funkcji wykładniczej.