

### METODY NUMERYCZNE – LABORATORIUM

#### Zadanie 4 – Metody całkowania numerycznego – złożona kwadratura Newtona-Cotesa oraz wielomiany Hermite'a

Opis rozwiązania:

Złożona kwadratura Newtona-Cotesa oparta na trzech węzłach, czyli złożona metoda Simpsona, to numeryczna metoda obliczania całki oznaczonej funkcji  $f(x)$  na przedziale  $[a,b]$ . Polega na przybliżeniu funkcji funkcją kwadratową (parabolą) na małych podprzedziałach i sumowaniu ich pól.

Dla trzech punktów:

$$\begin{aligned}x_0 &= a \\x_1 &= \frac{a+b}{2} \\x_2 &= b\end{aligned}$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6} (f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2))$$

To tzw. wzór Simpsona — interpoluje funkcję  $f(x)$  parabolą przechodzącą przez trzy punkty

Złożona metoda Simpsona:

Gdy przedział  $[a,b]$  dzielimy na  $n$  równych części (gdzie  $n$  musi być parzyste), całka aproksymowana jest sumą kilku takich prostych przybliżeń:

1. Dzielimy przedział  $[a,b]$  na  $n$  równych podprzedziałów długości  $h = \frac{b-a}{n}$
2. Obliczamy wartości funkcji w punktach  $x_0, x_1, \dots, x_n$  gdzie  $x_i = a + ih$
3. Stosujemy wzór:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3} \left[ f(x_0) + 4 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + 2 \sum_{i=2}^{n-2} f(x_i) + f(x_n) \right]$$

kwadratura Gaussa-Hermite'a To metoda numeryczna przeznaczona specjalnie do całek postaci:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) dx$$

Zamiast aproksymować funkcję na przedziale jak w Simpsona, dobiera się specjalne punkty (węzły) i wagi, zależne od wielomianów Hermite'a, aby dokładnie obliczać całki tej postaci.

Wzór kwadratury Gaussa-Hermite'a

Dla danego stopnia  $n$ , aproksymacja całki wygląda tak:

$x_i$  – węzły (punkty całkowania), czyli miejsca zerowe n-tego wielomianu Hermite'a

$w_i$  – wagi, zależne od tych węzłów i stopnia n

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n w_i \cdot f(x_i)$$

Wyniki, dokładność jest zawsze 1e-6. Przedziały są od -1 do 1

1. Dla funkcji  $x^2$

Obliczanie całki za pomocą kwadratury Simpsona na podanym przedziale...

Wynik kwadratury Simpsona: 0.6666666666666666

Obliczanie całki za pomocą kwadratury Gaussa-Hermite'a...

Wynik Gauss-Hermite (n=2): 0.8862269254527577

Wynik Gauss-Hermite (n=3): 0.886226925452758

Wynik Gauss-Hermite (n=4): 0.8862269254527582

Wynik Gauss-Hermite (n=5): 0.8862269254527578

2. Dla funkcji  $x^4 - 2x^2 + 1$

Obliczanie całki za pomocą kwadratury Simpsona na podanym przedziale...

Wynik kwadratury Simpsona: 2.0

Obliczanie całki za pomocą kwadratury Gaussa-Hermite'a...

Wynik Gauss-Hermite (n=2): 1.7724538509055159

Wynik Gauss-Hermite (n=3): 1.772453850905516

Wynik Gauss-Hermite (n=4): 1.7724538509055159

Wynik Gauss-Hermite (n=5): 1.7724538509055157

3. Dla funkcji  $\sin x$

Obliczanie całki za pomocą kwadratury Simpsona na podanym przedziale...

Wynik kwadratury Simpsona: 0.0

Obliczanie całki za pomocą kwadratury Gaussa-Hermite'a...

Wynik Gauss-Hermite (n=2): 0.0

Wynik Gauss-Hermite (n=3): 0.0

Wynik Gauss-Hermite (n=4): 0.0

Wynik Gauss-Hermite (n=5): -1.0408340855860843e-17

Wynik dla (sin(x)) jest oczekiwany i poprawny ze względu na symetrię funkcji i własności całkowania po przedziałach symetrycznych. Całka funkcji nieparzystej w przedziale symetrycznym zawsze wynosi 0.

4. Dla funkcji  $e^{-x^2}$

Wynik kwadratury Simpsona: 1.4936482812139706

Obliczanie całki za pomocą kwadratury Gaussa-Hermite'a...

Wynik Gauss-Hermite (n=2): 1.0750476034999203

Wynik Gauss-Hermite (n=3): 1.3134652044730937

Wynik Gauss-Hermite (n=4): 1.2331308972763744

Wynik Gauss-Hermite (n=5): 1.260069748687603

5. Dla funkcji  $\frac{1}{1+x^2}$

Obliczanie całki za pomocą kwadratury Simpsona na podanym przedziale...

Wynik kwadratury Simpsona: 1.5707963256124113

Obliczanie całki za pomocą kwadratury Gaussa-Hermite'a...

Wynik Gauss-Hermite (n=2): 1.1816359006036772

Wynik Gauss-Hermite (n=3): 1.4179630807244126

Wynik Gauss-Hermite (n=4): 1.3060186269830119

Wynik Gauss-Hermite (n=5): 1.363426039158089

Wnioski:

Cechy metody Simpsona:

- Dokładność: metoda jest dokładna dla wszystkich wielomianów stopnia  $\leq 3$
- Złożoność obliczeniowa: wymaga oceny funkcji w  $n+1$  punktach
- Warunek:  $n$  musi być parzyste

Cechy metody Gaussa-Hermite'a:

- Jest bardzo dokładna dla funkcji typu  $f(x) e^{-x^2}$ .
- Działa na przedziale  $(-\infty, +\infty)$  bez potrzeby całkowania po krańcach.
- Im większy stopień  $n$ , tym lepsze przybliżenie.
- Zera i wagi są tablicowane albo liczone numerycznie.