|  |  |
| --- | --- |
| zJakub Karwalski 251543  Kacper Majkowski 251578 | Rok akademicki 2024/2025  środa, 12:15 |

METODY NUMERYCZNE – LABORATORIUM

Zadanie 4 – Metody całkowania numerycznego – złożona kwadratura Newtona-Cotesa oraz wielomiany Hermite’a

Opis rozwiązania:  
Złożona kwadratura Newtona-Cotesa oparta na trzech węzłach, czyli **złożona metoda Simpsona**, to **numeryczna metoda obliczania całki oznaczonej** funkcji f(x) na przedziale [a,b]. Polega na przybliżeniu funkcji **funkcją kwadratową (parabolą)** na małych podprzedziałach i sumowaniu ich pól.

Dla trzech punktów:

To tzw. **wzór Simpsona** — interpoluje funkcję f(x)f(x)f(x) parabolą przechodzącą przez trzy punkty

Złożona metoda Simpsona:

Gdy przedział [a,b] dzielimy na n równych części (gdzie n musi być parzyste), całka aproksymowana jest sumą kilku takich prostych przybliżeń:

1. Dzielimy przedział [a,b] na n równych podprzedziałów długości
2. Obliczamy wartości funkcji w punktach ,,…, gdzie =a+ih
3. Stosujemy wzór:

## kwadratura Gaussa-Hermite'a To metoda numeryczna przeznaczona specjalnie do całek postaci:

Zamiast aproksymować funkcję na przedziale jak w Simpsona, **dobiera się specjalne punkty (węzły)** i **wagi**, zależne od wielomianów Hermite’a, aby dokładnie obliczać całki tej postaci.

## Wzór kwadratury Gaussa-Hermite'a

Dla danego stopnia n, aproksymacja całki wygląda tak:

​ – **węzły (punkty całkowania)**, czyli miejsca zerowe n-tego wielomianu Hermite’a

– **wagi**, zależne od tych węzłów i stopnia n

Wyniki, dokładność jest zawsze 1e-6. Przedziały są od -1 do 1

1. Dla funkcji
   * Obliczanie całki za pomocą kwadratury Simpsona na podanym przedziale...
   * Wynik kwadratury Simpsona: 0.6666666666666666
   * Obliczanie całki za pomocą kwadratury Gaussa-Hermite'a...
   * Wynik Gauss-Hermite (n=2): 0.8862269254527577
   * Wynik Gauss-Hermite (n=3): 0.886226925452758
   * Wynik Gauss-Hermite (n=4): 0.8862269254527582
   * Wynik Gauss-Hermite (n=5): 0.8862269254527578
2. Dla funkcji
   * Obliczanie całki za pomocą kwadratury Simpsona na podanym przedziale...
   * Wynik kwadratury Simpsona: 2.0
   * Obliczanie całki za pomocą kwadratury Gaussa-Hermite'a...
   * Wynik Gauss-Hermite (n=2): 1.7724538509055159
   * Wynik Gauss-Hermite (n=3): 1.772453850905516
   * Wynik Gauss-Hermite (n=4): 1.7724538509055159
   * Wynik Gauss-Hermite (n=5): 1.7724538509055157
3. Dla funkcji

Obliczanie całki za pomocą kwadratury Simpsona na podanym przedziale...

Wynik kwadratury Simpsona: 0.0

Obliczanie całki za pomocą kwadratury Gaussa-Hermite'a...

Wynik Gauss-Hermite (n=2): 0.0

Wynik Gauss-Hermite (n=3): 0.0

Wynik Gauss-Hermite (n=4): 0.0

Wynik Gauss-Hermite (n=5): -1.0408340855860843e-17

Wynik dla (sin(x)) jest oczekiwany i poprawny ze względu na symetrię funkcji i własności całkowania po przedziałach symetrycznych. Całka funkcji nieparzystej w przedziale symetrycznym zawsze wynosi 0.

1. Dla funkcji
   * Wynik kwadratury Simpsona: 1.4936482812139706
   * Obliczanie całki za pomocą kwadratury Gaussa-Hermite'a...
   * Wynik Gauss-Hermite (n=2): 1.0750476034999203
   * Wynik Gauss-Hermite (n=3): 1.3134652044730937
   * Wynik Gauss-Hermite (n=4): 1.2331308972763744
   * Wynik Gauss-Hermite (n=5): 1.260069748687603
2. Dla funkcji

Obliczanie całki za pomocą kwadratury Simpsona na podanym przedziale...

Wynik kwadratury Simpsona: 1.5707963256124113

Obliczanie całki za pomocą kwadratury Gaussa-Hermite'a...

Wynik Gauss-Hermite (n=2): 1.1816359006036772

Wynik Gauss-Hermite (n=3): 1.4179630807244126

Wynik Gauss-Hermite (n=4): 1.3060186269830119

Wynik Gauss-Hermite (n=5): 1.363426039158089

Wnioski:

### Cechy metody Simpsona:

* **Dokładność:** metoda jest dokładna dla wszystkich wielomianów stopnia ≤ 3
* **Złożoność obliczeniowa:** wymaga oceny funkcji w n+1 punktach
* **Warunek:** n musi być **parzyste**

## Cechy metody Gaussa-Hermite’a:

* Jest bardzo **dokładna dla funkcji typu** f(x).
* Działa na przedziale (−∞,+∞) bez potrzeby całkowania po krańcach.
* Im większy stopień n, tym lepsze przybliżenie.
* Zera i wagi są tablicowane albo liczone numerycznie.