

MUD Lab. 02

MW, WFiS AGH

2025-10-14

Uwaga: polecenia oznaczone ★ ... p. można dokończyć po zajęciach bez utraty punktów (pozostałe też należy dokończyć, ale można otrzymać wtedy max. 50% punktów).

1. Dla równania

$$\dot{x} = kx(1 - x), \quad (1)$$

gdzie $k \neq 0$ jest parametrem:

- (a) **1 p.** wyznaczyć punkty stałe x_i^* równania (1); określić ich stabilność;
- (b) **1 p.** zlinearyzować równanie w otoczeniach punktów stałych i zapisać rozwiązania analityczne $\tilde{x}_i(t)$ tych zlinearyzowanych równań z warunkiem początkowym $x(t = 0) = x_0$;
- (c) **2 p.** numerycznie (biblioteka GSL) wyznaczyć rozwiązania $x(t)$ dla $t \in [0; 3]$ przyjmując warunki początkowe $x(0) = x_0 = -1, -0.8, -0.6, \dots, 1.6, 1.8, 2.0$, osobno dla $k = 1$ oraz $k = -1$; zaprezentować je na wykresach $x(t)$;
- (d) ★ **1 p.** dla $x_0 = -0.1, 0.1, 0.9, 1.1$ porównać na wykresie analityczne rozwiązania $\tilde{x}_i(t)$ dla $k = 1$ z odpowiednimi rozwiązaniami numerycznymi;
- (e) ★ **1 p.** dla równań typu $\dot{x} = f(x)$ można się posłużyć fizyczną analogią *potencjału* $V(x)$, tutaj zdefiniowanego warunkiem $f(x) = -dV/dx$:
 - wyznaczyć i naszkicować $V(x)$ dla $k = 1$ oraz $k = -1$,
 - przedyskutować związek z wcześniej określoną stabilnością punktów stałych.

2. Dla układu równań

$$\dot{x} = x(y - 1) \quad (2a)$$

$$\dot{y} = 3x - 2y + x^2 - 2y^2 \quad (2b)$$

- (a) **1 p.** wyznaczyć punkty stałe;
- (b) ★ **2 p.** wykonać portret fazowy **nie rozwiązując** równania (*wskazówki dla gnuplotu: [Vector field from function](#), [Vector field from data file](#)*);
zaznaczyć izokliny zerowego wzrostu;
wstępnie określić spodziewaną stabilność punktów stałych na podstawie wyglądu portretu fazowego;
- (c) ★ **1 p.** nanieść kilka numerycznych rozwiązań układu (2) na portret fazowy w celu jego weryfikacji – zadbać o to, żeby obrazowały zachowanie w otoczeniu punktów stałych;
te same rozwiązania pokazać na wykresach $x(t)$ oraz $y(t)$.