

MUD Lab. 03

MW, WFiS AGH

2025-10-21

Równanie ruchu **wahadła prostego** (matematycznego) ma postać

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \theta. \quad (1)$$

Dla celów numerycznego rozwiązania przyjmijmy $g = 9.8 \text{ m/s}^2$, $l = 9.8 \text{ m}$ (oraz w dalszej części $m = 1 \text{ kg}$). Wtedy równanie (1) można zapisać nieco krócej: $\ddot{\theta} + \sin \theta = 0$.

Rozwijając funkcję $\sin \theta$ w szereg wokół $\theta = 0$,

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \dots, \quad (2)$$

w pierwszym przybliżeniu można przyjąć $\sin \theta \approx \theta$, a w kolejnym $\sin \theta \approx \theta - \theta^3/6$.

Możemy więc zapisać trzy "coraz dokładniejsze" równania:

$$\ddot{\theta} + \theta = 0, \quad (3)$$

$$\ddot{\theta} + \theta - \frac{1}{6}\theta^3 = 0, \quad (4)$$

$$\ddot{\theta} + \sin \theta = 0. \quad (5)$$

Po kolei **dla każdego z tych równań**: naprzód (3), potem (4) i na koniec (5), proszę wykonać poniższe polecenia:

1. **1 p.** zapisać wyjściowe równanie jako układ dwóch równań pierwszego rzędu i wyznaczyć punkty stałe
2. **★ 2 p.** określić stabilność punktów stałych na podstawie wartości własnych macierzy Jacobiego
3. **2 p.** wykonać szkic portretu fazowego w postaci pola wektorowego dla obszaru $\theta \in [-10; 10]$ oraz $\dot{\theta} \in [-5; 5]$
4. **3 p.** numerycznie (np. biblioteka GSL) wyznaczyć rozwiązania dla $t \in [0; 10]$ przyjmując warunki początkowe $\theta(0) = 0$ oraz $\omega(0) = \dot{\theta}(0) = 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0$; zaprezentować je na wykresach pokazujących (a) położenie kątowe $\theta(t)$ w funkcji czasu, (b) prędkość kątową $\omega(t) = \dot{\theta}(t)$ w funkcji czasu, oraz (c) trajektorie w przestrzeni fazowej $(\theta, \dot{\theta})$
5. **★ 2 p.** przygotować wykresy energii mechanicznej układu $E(t)$ dla powyższych obliczeń (suma energii kinetycznej i energii potencjalnej "mgh"); co można powiedzieć o zachowaniu energii w układzie: czy energia jest zachowana? czy powinna być?; dla $\omega(0) = 0.5$ narysować odchylenie energii mechanicznej od wartości początkowej, $\Delta E(t) = E(t) - E(0)$.

*Uwaga: polecenia oznaczone **★ ... p.** można dokończyć po zajęciach bez utraty punktów (pozostałe też należy dokończyć, ale można wtedy otrzymać za nie max. 50% punktów).*