Modelowanie układów dynamicznych: laboratorium nr 3

Kacper Połuszejko, 412183

1 Zadanie

1.1 Punkty stałe i ich stabilność

Rozważane równania przedstawiamy w postaci układu dwóch równań w celu ułatwienia obliczeń numerycznych.

$$\ddot{\theta} + \theta = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} \dot{\theta} = \omega, \\ \dot{\omega} = -\theta, \end{cases} \tag{1}$$

$$\ddot{\theta} + \theta - \frac{1}{6}\theta^3 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} \dot{\theta} = \omega, \\ \dot{\omega} = -\theta + \frac{1}{6}\theta^3, \end{cases} \tag{2}$$

$$\ddot{\theta} + \sin\theta = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} \dot{\theta} = \omega, \\ \dot{\omega} = -\sin\theta. \end{cases} \tag{3}$$

Teraz łatwo możemy wyznaczyć punkty stałe:

$$\textbf{1)} \;\; \ddot{\theta} + \theta = 0 \quad \Rightarrow \quad (\theta, \omega) = (0, 0).$$

$$\textbf{2)} \;\; \ddot{\theta} + \theta - \tfrac{1}{6}\theta^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega = 0,\ -\theta + \tfrac{1}{6}\theta^3 = 0 \implies (\theta, \omega) \in \{(0,0), (\sqrt{6}, 0), (-\sqrt{6}, 0)\}.$$

$$\textbf{3)} \;\; \ddot{\theta} + \sin\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega = 0,\ \sin\theta = 0 \implies (\theta, \omega) = (k\pi, 0), \quad k \in Z.$$

1.2 Określenie stabilności punktów stałych

Układ 1

$$\begin{cases} \dot\theta = \omega, \\ \dot\omega = -\theta. \end{cases}$$

1) Macierz Jacobiego.

$$f(\theta,\omega) = \begin{pmatrix} \omega \\ -\theta \end{pmatrix}, \qquad J(\theta,\omega) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial\theta} & \frac{\partial f_1}{\partial\omega} \\ \frac{\partial f_2}{\partial\theta} & \frac{\partial f_2}{\partial\omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Warto zauważyć, że J nie zależy od punktu, więc $J(0,0) = J$.

2) Równanie własne.

$$\det(J - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0.$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm i.$$

3) Wniosek o stabilności. Ponieważ wartości własne są czysto urojone, rozwiązania zlinearyzowanego układu $\dot\xi = J\xi$ są ograniczone i okresowe (rotacja w płaszczyźnie). Otrzymujemy rozwiązania typu $e^{i\omega t}$. Punkt stały jest więc centrum, wokół którego krąży rozwiązanie.

Układ 2

$$\ddot\theta + \theta - \frac{1}{6}\theta^3 = 0 \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} \dot\theta = \omega, \\ \dot\omega = -\theta + \frac{1}{6}\theta^3. \end{cases}$$

2) Jacobian:

$$J(\theta,\omega) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\dot\theta}{\partial\theta} & \frac{\partial\dot\theta}{\partial\omega} \\ \frac{\partial\dot\omega}{\partial\theta} & \frac{\partial\dot\omega}{\partial\omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 + \frac{1}{2}\theta^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

3) Analiza stabilności punktów równowagi.

Dla $(0,0)$:

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det(J - \lambda I) = \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i.$$

Czysto urojone wartości własne **centrum**, stabilny (ale nie asymptotycznie).

Dla $(\sqrt{6},0)$ i $(-\sqrt{6},0)$:

$$J(\pm\sqrt{6},0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det(J - \lambda I) = \lambda^2 - 2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2}.$$

Jedno λ dodatnie, drugie ujemne **siodło**, niestabilny punkt równowagi.

4) Wniosek:

$$\boxed{(\theta,\omega) = (0,0) \text{ – centrum (stabilny)}, \quad (\pm\sqrt{6},0) \text{ – siodła (niestabilne).}}$$

Układ 3

$$\ddot{\theta} + \sin\theta = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \dot{\theta} = \omega, \\ \dot{\omega} = -\sin\theta. \end{cases}$$

2) Jacobian.

$$J(\theta, \omega) = \begin{pmatrix} \partial_\theta \dot{\theta} & \partial_\omega \dot{\theta} \\ \partial_\theta \dot{\omega} & \partial_\omega \dot{\omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos\theta & 0 \end{pmatrix}.$$

3) Analiza stabilności w punktach stałych.

<u>Dla $\theta^* = 2k\pi$:</u> $\cos\theta^* = 1$

$$J(2k\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \det(J - \lambda I) = \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i.$$

Wartości własne czysto urojone ⇒ **centrum** (stabilne, ale nie asymptotycznie).

<u>Dla $\theta^* = (2k+1)\pi$:</u> $\cos\theta^* = -1$

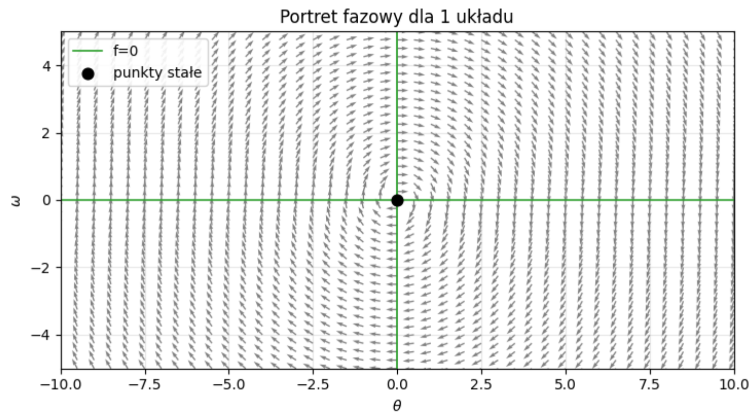
$$J((2k+1)\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \det(J - \lambda I) = \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 1.$$

Wartości własne rzeczywiste o przeciwnych znakach ⇒ **siodło** (niestabilny).

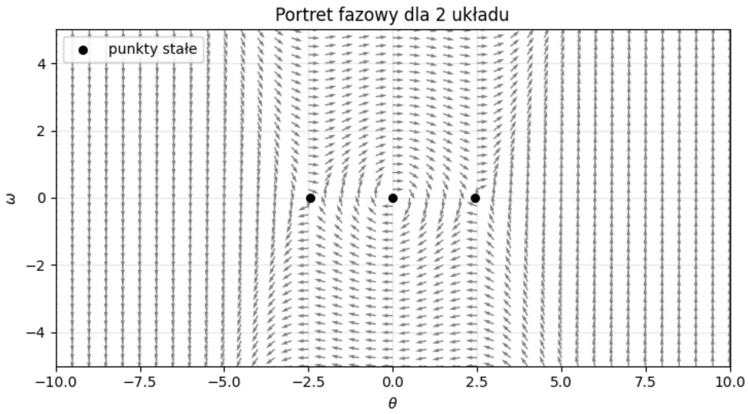
$$\boxed{\begin{array}{l} (2k\pi, 0) \text{ – centrum (stabilny, nie asymptotycznie),} \\ ((2k{+}1)\pi, 0) \text{ – siodło (niestabilny).} \end{array}}$$

1.3 Portret fazowy

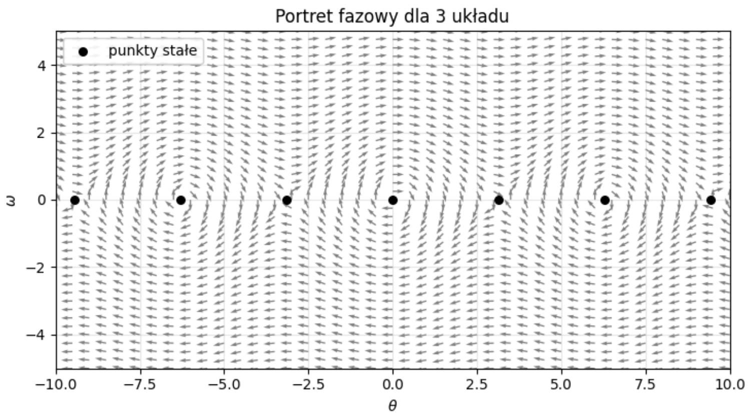
Wyznaczono szkice portretu fazowego w postaci pola wektorowego dla obszaru $\theta \in [-10; 10]$, $\dot{\theta} \in [-5; 5]$, dla wszystkich trzech równań.



Rys. 1: Portret fazowy dla 1 układu.



Rys. 2: Portret fazowy dla 2 układu.

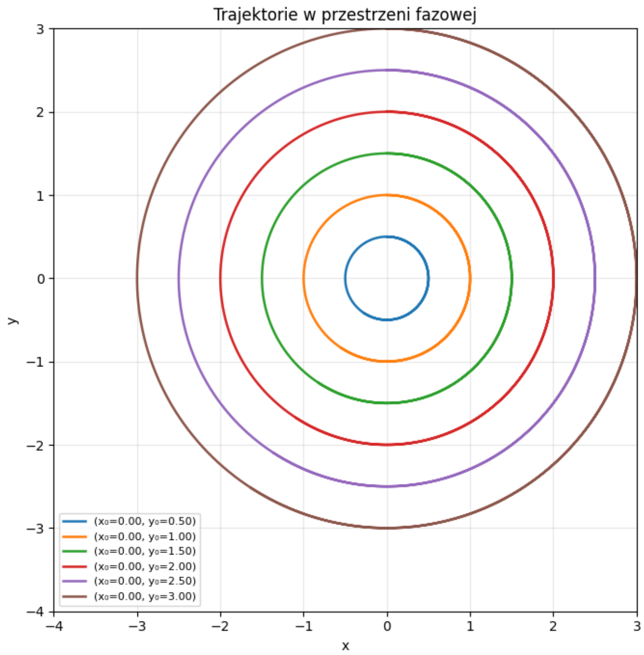


Rys. 3: Portret fazowy dla 3 układu.

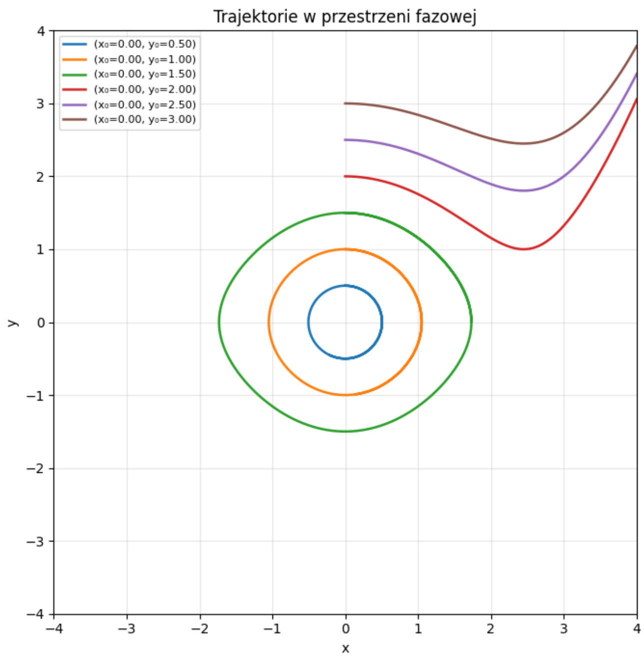
Otrzymane wykresy portretu fazowego potwierdzają rozważania przeprowadzone w poprzednim podpunkcie.

1.4 Numeryczne rozwiązania

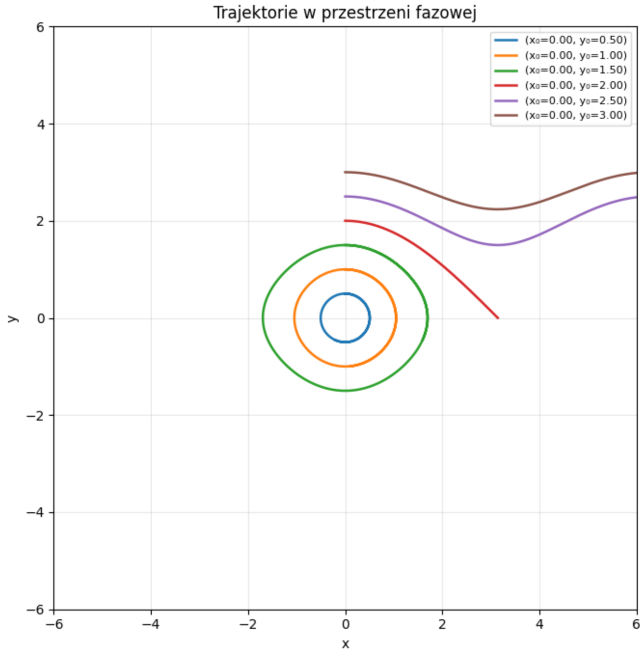
Numerycznie wyznaczono rozwiązania dla $t \in [0; 10]$ przyjmując różne warunki początkowe.



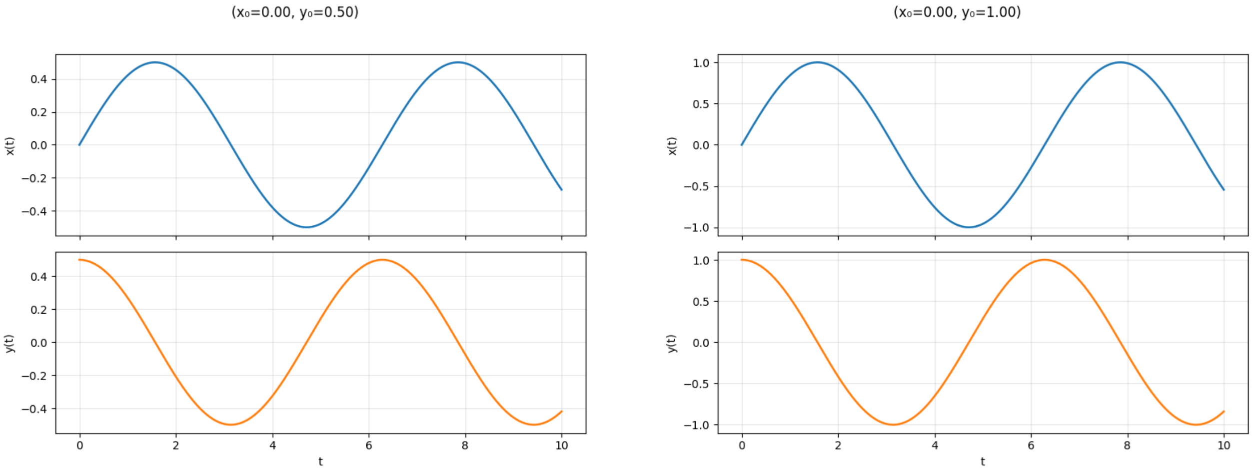
Rys. 4: Otrzymane trajektorie dla równania 1.



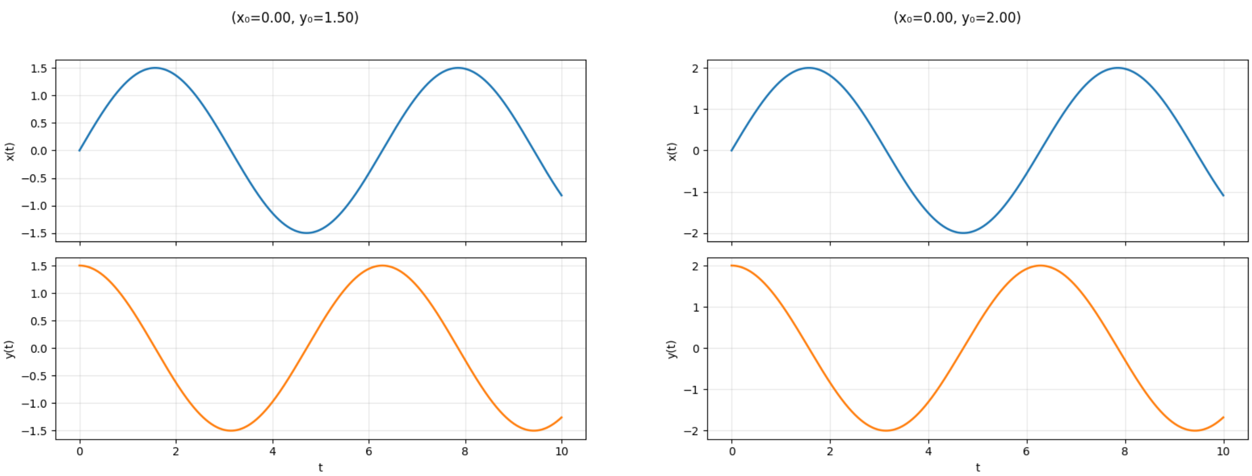
Rys. 5: Otrzymane trajektorie dla równania 2.



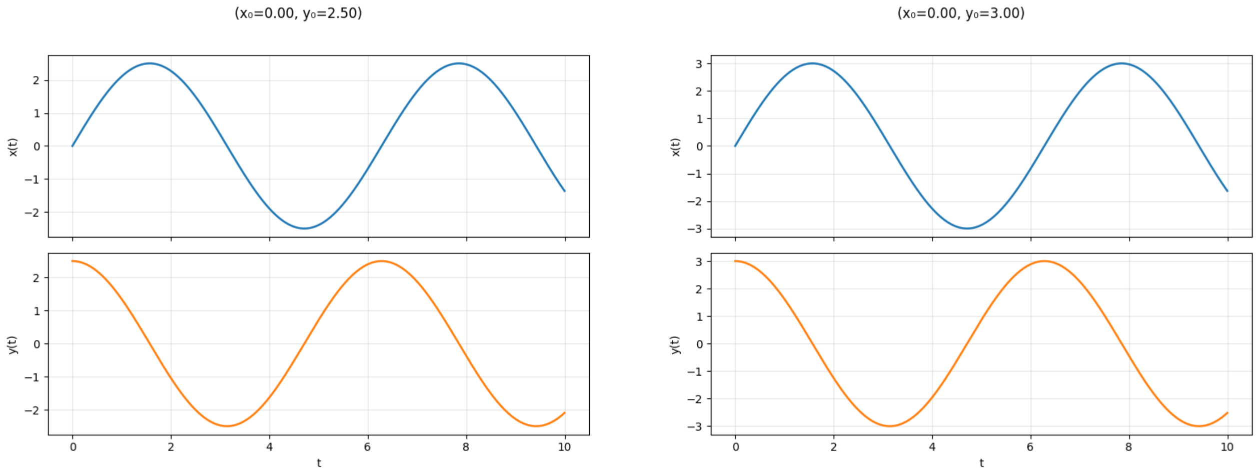
Rys. 6: Otrzymane trajektorie dla równania 3.



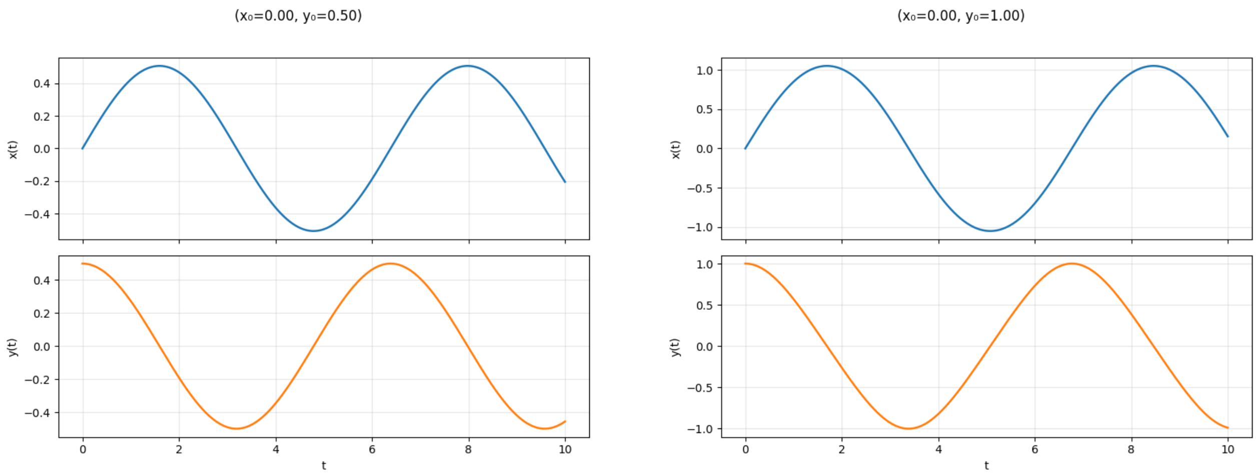
Rys. 7: Wykresy $x(t)$ oraz $y(t)$ dla różnych wartości początkowych dla równania 1.



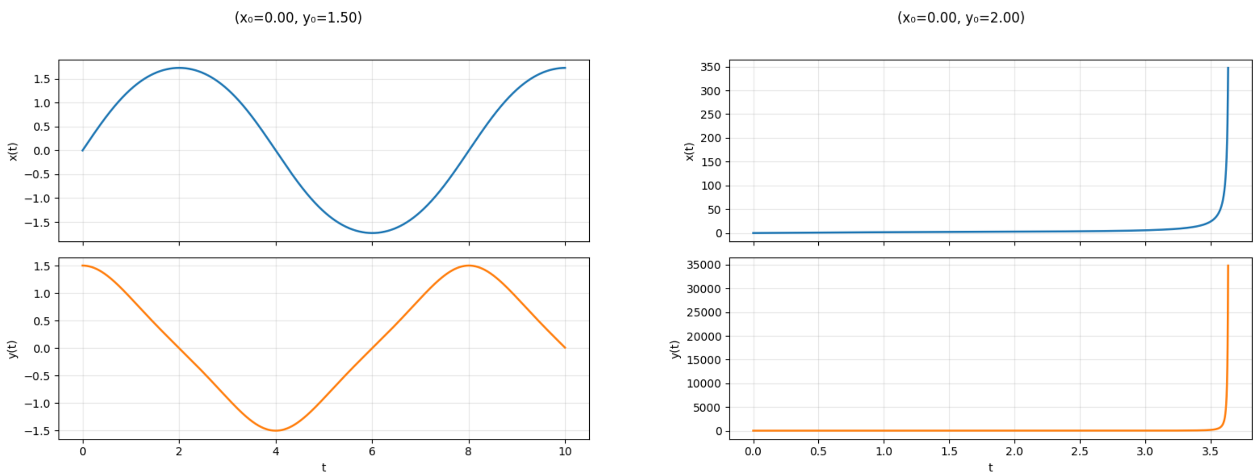
Rys. 8: Wykresy $x(t)$ oraz $y(t)$ dla różnych wartości początkowych dla równania 1.



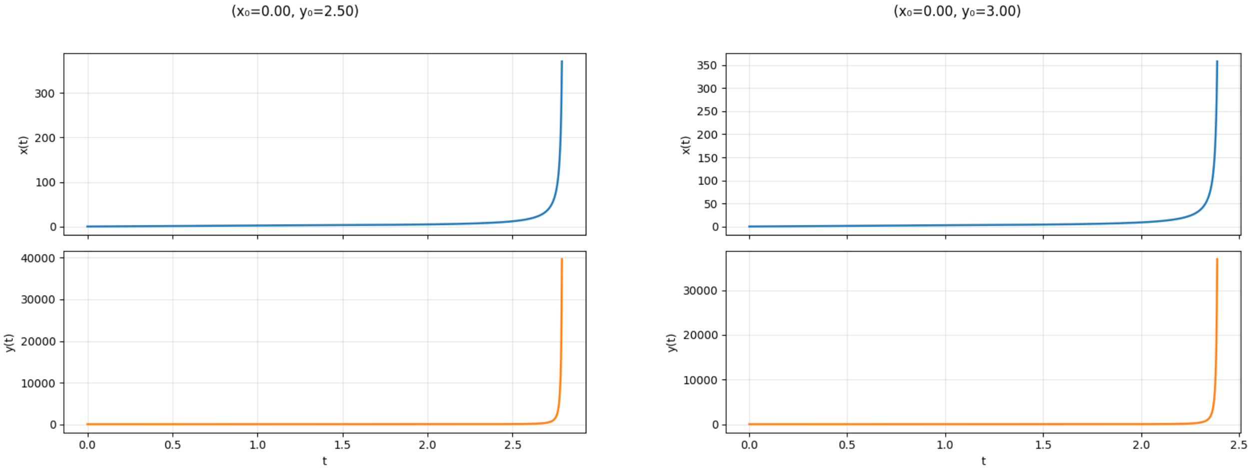
Rys. 9: Wykresy $x(t)$ oraz $y(t)$ dla różnych wartości początkowych dla równania 1.



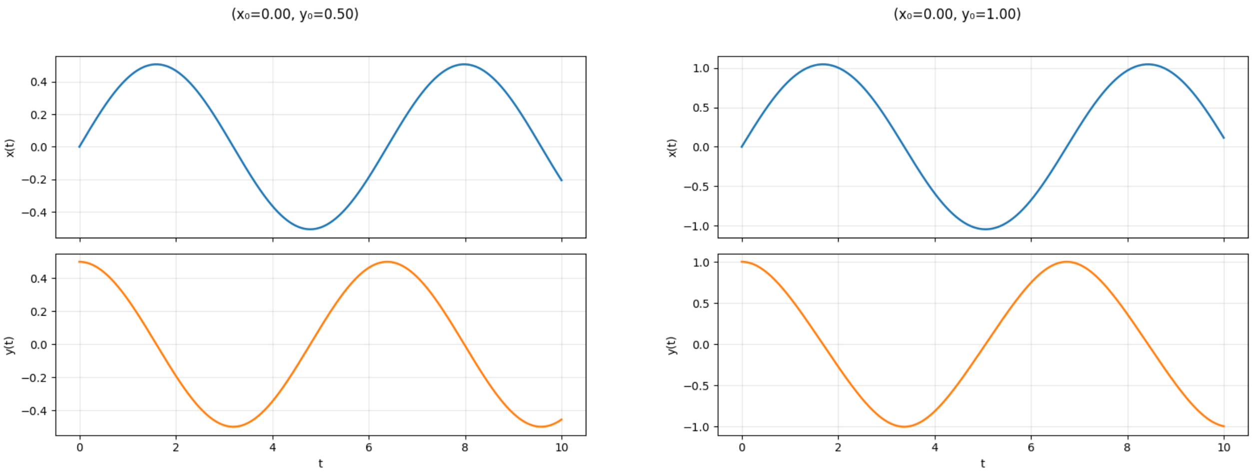
Rys. 10: Wykresy $x(t)$ oraz $y(t)$ dla różnych wartości początkowych dla równania 2.



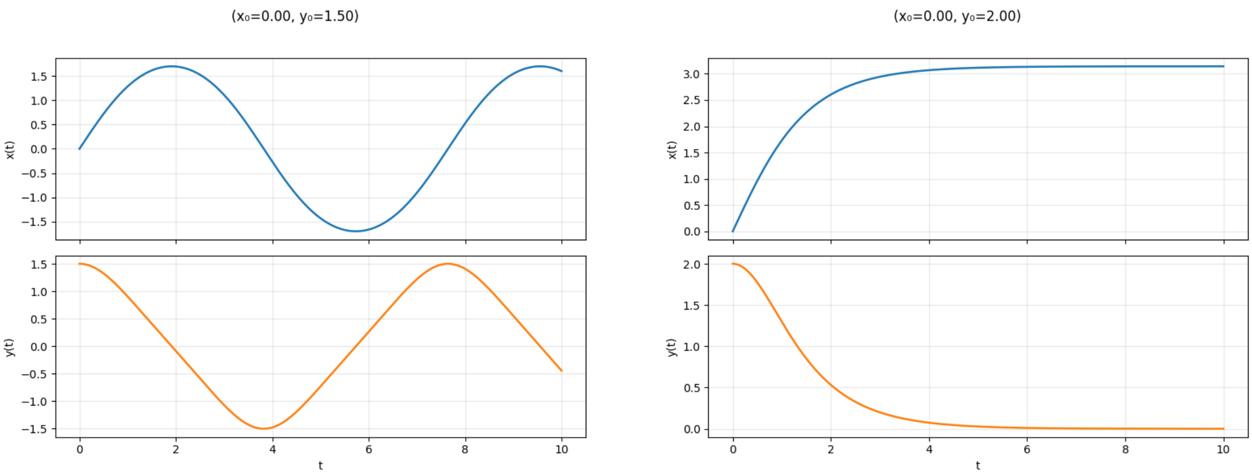
Rys. 11: Wykresy $x(t)$ oraz $y(t)$ dla różnych wartości początkowych dla równania 2.



Rys. 12: Wykresy $x(t)$ oraz $y(t)$ dla różnych wartości początkowych dla równania 2.

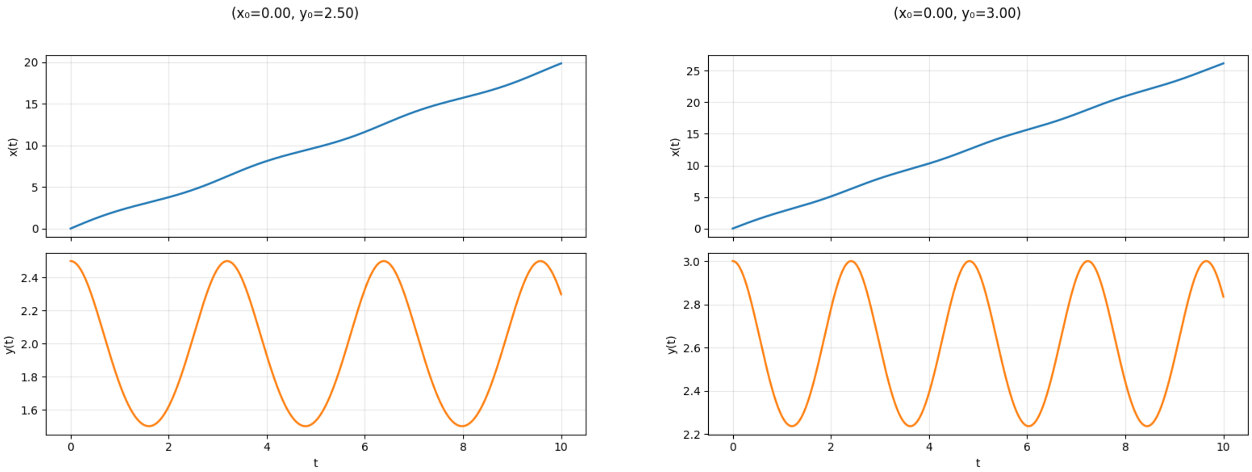


Rys. 13: Wykresy $x(t)$ oraz $y(t)$ dla różnych wartości początkowych dla równania 3.



Rys. 14: Wykresy $x(t)$ oraz $y(t)$ dla różnych wartości początkowych dla równania 3.

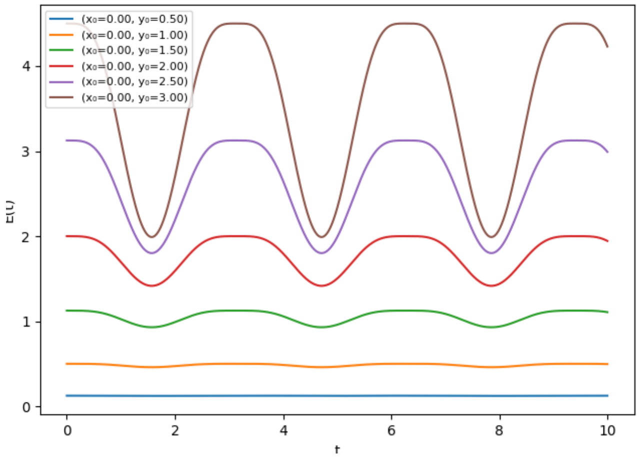
...



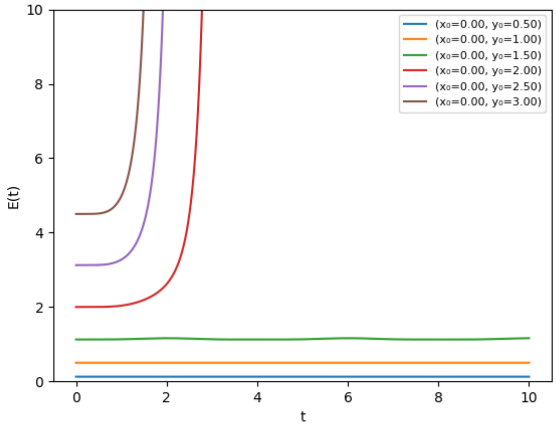
Rys. 15: Wykresy $x(t)$ oraz $y(t)$ dla różnych wartości początkowych dla równania 3.

Na powyższych wykresach widzimy, że rozwiązania są zgodne z portretami fazowymi z poprzedniego podpunktu. Rozwiązania krążą wokół punktów stabilnych (przykładowo wokół punktu (0,0), który jest stabilnym centrum), a odchodzą od niestabilnych punktów siodłowych, jak przykładowo na wykresie 2. Wykresy $x(t)$ oraz $y(t)$ również odwzorowują to zjawisko. Niektóre rozwiązania uciekają do nieskończoności, co dla równań będących przybliżeniem równania wahadła prostego jest naturalne. Z kolei w przypadku równania trzeciego (czyli pełnego równania wahadła), "uciekanie"$x(t)$ do nieskończoności spowodowane jest faktem, że nie nakładamy warunków periodyczności na kąt θ. Mówiąc prościej, dla większych prędkości początkowych wahadło kręci się w kółko, a kąt θ rośnie w nieskończoność.

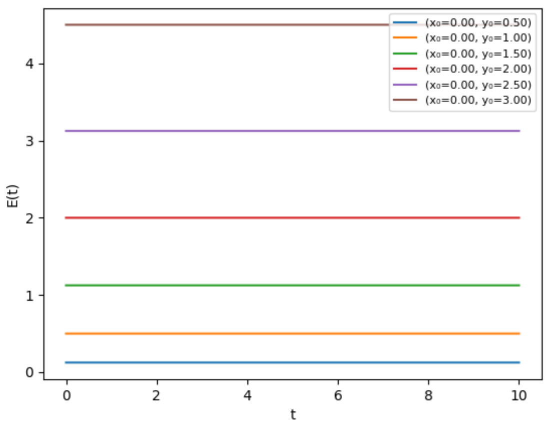
1.5 Wykresy energii mechanicznej



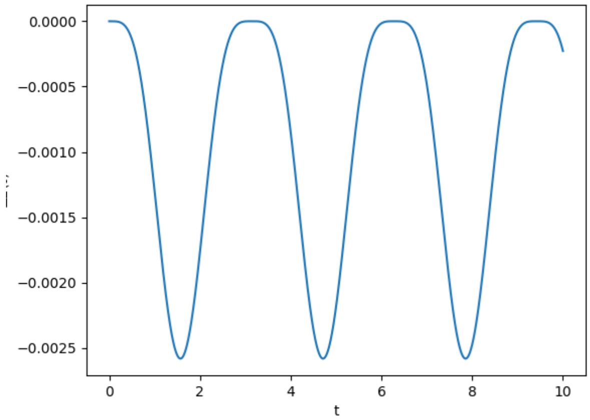
Rys. 16: Wykres energii mechanicznej układu $E(t)$ dla rozwiązań otrzymanych dla równania (1).



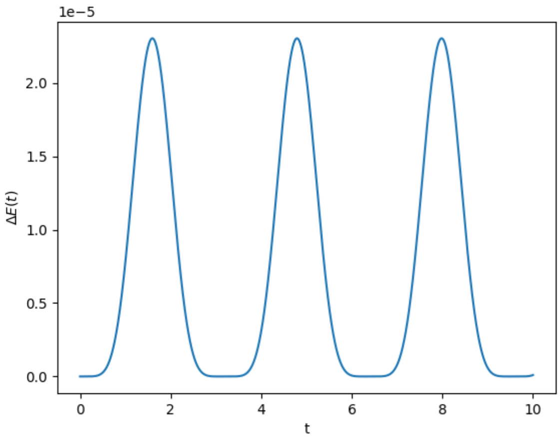
Rys. 17: Wykres energii mechanicznej układu $E(t)$ dla rozwiązań otrzymanych dla równania (2).



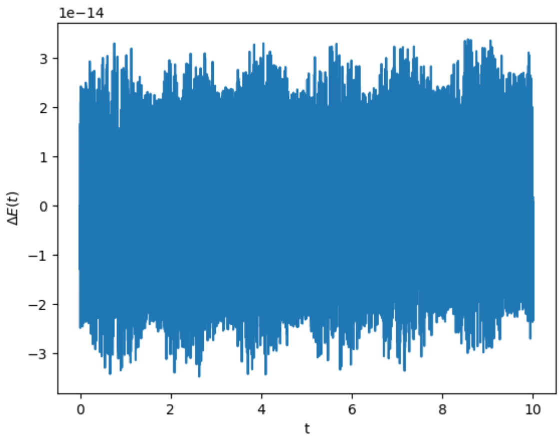
Rys. 18: Wykres energii mechanicznej układu $E(t)$ dla rozwiązań otrzymanych dla równania (3).



Rys. 19: Odchylenie energii mechanicznej od wartości początkowej dla $\omega_0 = 0.5$, dla równania (1).



Rys. 20: Odchylenie energii mechanicznej od wartości początkowej dla $\omega_0 = 0.5$, dla równania (2).



Rys. 21: Odchylenie energii mechanicznej od wartości początkowej dla $\omega_0 = 0.5$, dla równania (3).

Na powyższych wykresach widzimy, że energia najlepiej jest zachowana dla pełnego równania wahadła (bez żadnych przybliżeń). Oczywiście chcemy i spodziewamy się zachowania energii, ponieważ na układ nie działa żadna zewnętrzna siła.