

Modelowanie układów dynamicznych: laboratorium nr 5

Kacper Połuszejko, 412183

1 Zadanie

1.1 Punkty stałe i ich stabilność

Rozważane równanie:

$$\dot{x} = G(x, m) = m - |x|, \quad (1)$$

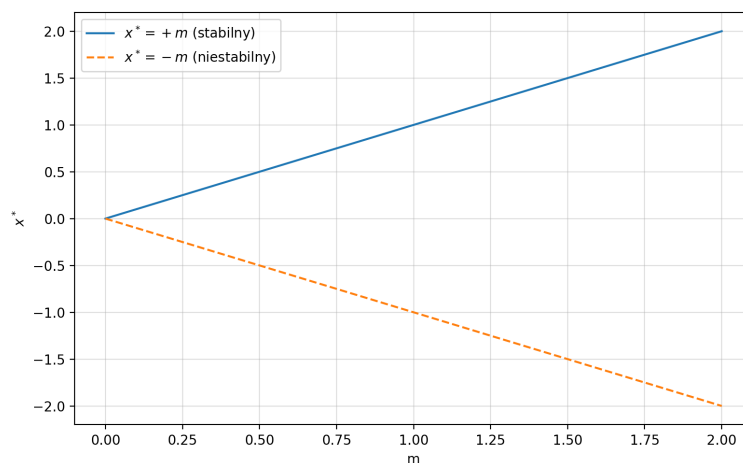
Spróbujemy znaleźć teraz punkty stałe w zależności od parametru m .

Punkty stałe spełniają warunek:

$$G(x^*, m) = 0 \quad \Rightarrow \quad |x^*| = m. \quad (2)$$

1. Dla $m = 0$, mamy jeden punkt stały $x^* = 0$. Punkt ten jest półstabilny (pochodna się zeruje).
2. Dla $m > 0$, mamy dwa punkty stałe $x_1^* = +m$, $x_2^* = -m$. Punkt x_1^* jest stabilny, ponieważ $\frac{dG}{dx} = -1$, natomiast punkt x_2^* jest niestabilny, ponieważ $\frac{dG}{dx} = 1$.
3. Dla $m < 0$, nie mamy żadnych punktów stałych

Wykres $x^*(m)$ obrazuje powyższe rozważania.

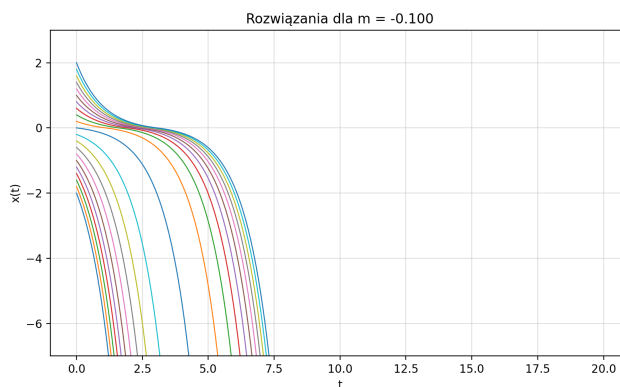


Rys. 1: Diagram bifurkacyjny

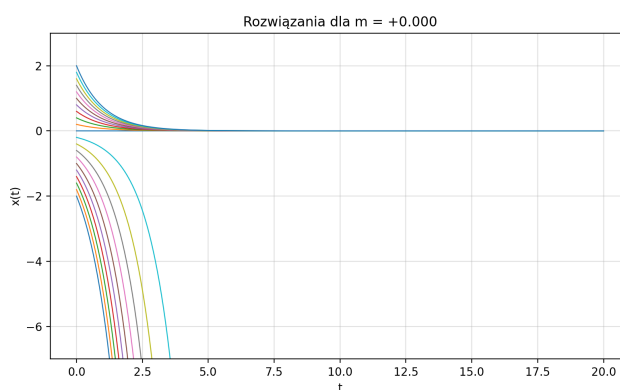
1.2 Bifurkacje

Na podstawie analizy z poprzedniego podpunktu możemy stwierdzić, że bifurkacja pojawia się w punkcie $m = 0$.

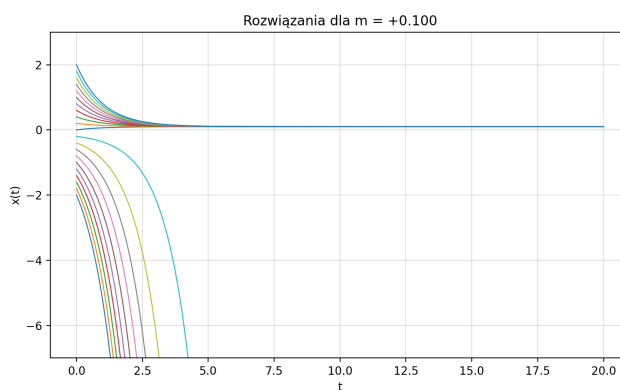
1.3 Rozwiązania numeryczne



Rys. 2: Rozwiązanie numeryczne dla $m = -0.1$. Na wykresie nie widzimy żadnych punktów stałych.



Rys. 3: Rozwiązanie numeryczne dla $m = 0$. Na wykresie widzimy punkt "poł"stabilny w $x = 0$. Rozwiązania o $x(0) > 0$ dążą do tego punktu, a o $x(0) < 0$ od niego uciekają.



Rys. 4: Rozwiązanie numeryczne dla $m = 0.1$. Sytuacja jest bardzo podobna do poprzedniego wykresu, z tą różnicą, że punkt stały w $x = 0.1$ jest stabilny, a punkt $x = -0.1$ jest niestabilny,

2 Zadanie

2.1 Punkty stałe i ich stabilność

Równanie:

$$\dot{x} = H(x, p) = (x - 1)(x^2 + 2x - p) \quad (3)$$

Szukamy punktów stałych w zależności od parametru p :

$$(x - 1)(x^2 + 2x - p) = 0.$$

Stąd

$$x_1^*(p) = 1, \quad x_{2,3}^*(p) = -1 \pm \sqrt{1 + p},$$

przy czym $x_{2,3}^*$ istnieją tylko dla $p \geq -1$.

Przeprowadzimy teraz analizę stabilności:

$$\frac{H_x(x, p)}{dx} = 3x^2 + 2x - (p + 2).$$

Dla $x_1^*(p) = 1$: $\frac{H_x(1, p)}{dx} = 3 - p$ (niestabilny dla $p < 3$, stabilny dla $p > 3$; w $p = 3$ pochodna się zeruje).

Dla $x_{2,3}^*$ p jest równe $p = x^2 + 2x$ mamy zatem:

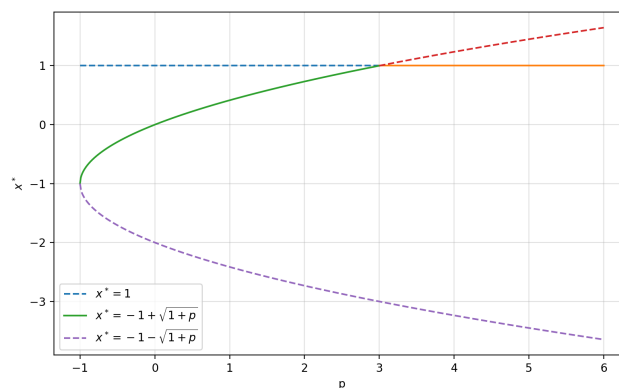
$$\frac{dH(x^*, p)}{dx} = 2(x^2 - 1) = 2(x - 1)(x + 1).$$

Punkty zerowe otrzymanej pochodnej to 1 oraz -1. Stabilność punktów stałych zależy od położenia punktów x^* względem tych miejsc zerowych. Dla $x_2^*(p) = -1 + \sqrt{1 + p}$ widzimy, że pochodna jest większa od zera dla $p > 3$, mniejsza od zera dla $-1 < p < 3$, a równa zero dla $p = -1$ oraz $p = 1$. Z kolei dla $x_3^*(p) = -1 - \sqrt{1 + p}$ pochodna jest większa od zera dla $p > -1$, a równa zero dla $p = -1$. Zatem:

$$x_2^*(p) = -1 + \sqrt{1 + p} : \begin{cases} \text{stabilny,} & -1 < p < 3, \\ \text{niestabilny,} & p > 3, \end{cases} \quad x_3^*(p) = -1 - \sqrt{1 + p} : \text{niestabilny dla } p > -1.$$

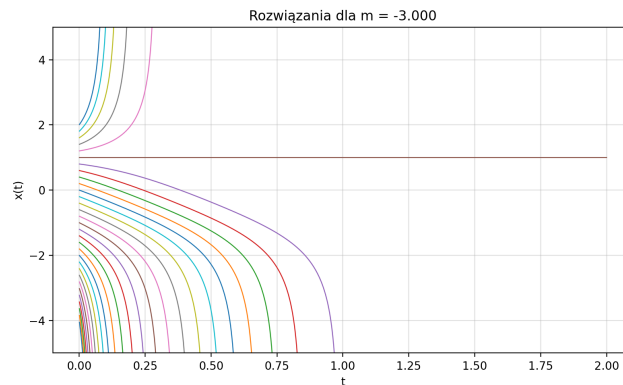
Bifurkacje powstają zatem w punktach: $p = -1$ oraz $p = 3$.

Powyższe rozważania obrazuje wykres $x^*(p)$.



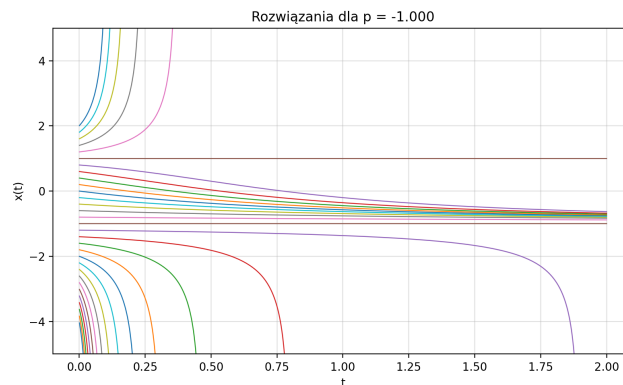
Rys. 5: Diagram bifurkacyjny.

2.2 Rozwiązania numeryczne



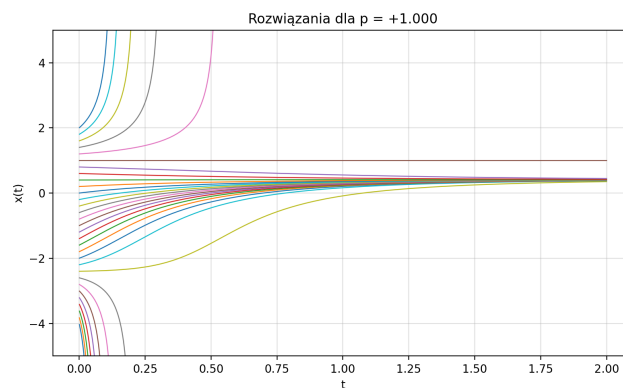
Rys. 6: Rozwiązanie numeryczne dla $p = -3$.

Na podstawie otrzymanego wykresu możemy spodziewać się punktu stałego w $x^* = 1$, który jest niestabilny (co potwierdza rozważania z powyższego punktu). Nie widzimy pozostałych punktów stałych, ponieważ dla $p < -1$ rozważane równanie nie ma więcej rzeczywistych miejsc zerowych.



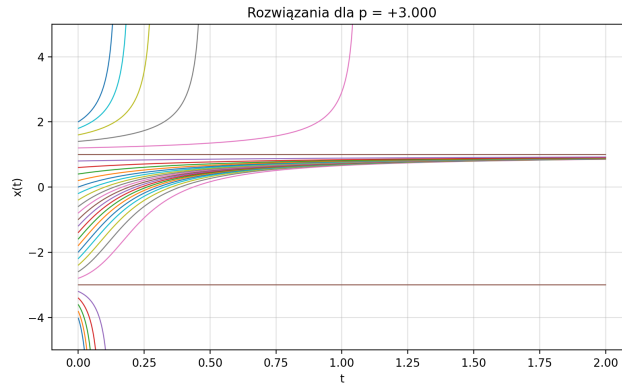
Rys. 7: Rozwiązanie numeryczne dla $p = -1$.

Dla $p = -1$ pojawia się drugi punkt stały równy $x_2^* = -1$, który, jak widzimy na wykresie, najprawdopodobniej jest półstabilny. Rozwiązania z jednej strony zbiegają się do tego punktu, a z drugiej uciekają.



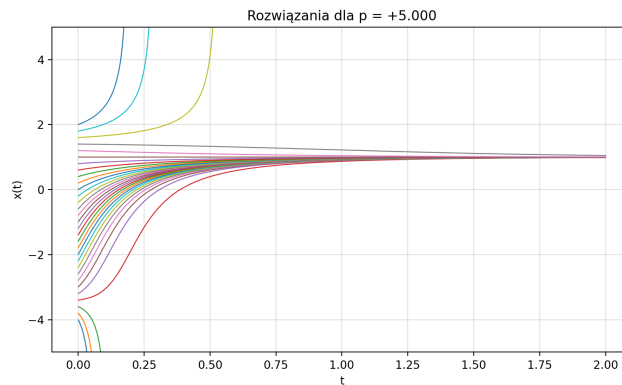
Rys. 8: Rozwiązanie numeryczne dla $p = 1$.

Dla $p = 1$ niezmiennie mamy punkt stały w $x_1^* = 1$, natomiast pojawiają się dwa dodatkowe punkty stałe w $x_2^* = \sqrt{2} - 1$ oraz $x_3^* = -\sqrt{2} - 1$. Punkt x_2^* jest stabilny, z kolei x_3^* jest niestabilny.



Rys. 9: Rozwiązanie numeryczne dla $p = 3$.

Dla $p = 3$ mamy dalej niestabilny punkt w $x_3^* = -1 - \sqrt{1+p} = -3$. Drugi punkt stały $x_2^* = -1 + \sqrt{1+p} = 1 = x_1^*$ natomiast okazuje się równy pierwszemu. Jest on półstabilny.



Rys. 10: Rozwiązanie numeryczne dla $p = 5$.

Dla $p = 5$ punkt $x_3^* = -1 - \sqrt{6}$ również jest niestabilny. Natomiast punkty x_2^* i x_1^* "wymieniły się" stabilnością. $x_1^* = 1$ jest teraz stabilny, z kolei $x_2^* = -1 + \sqrt{6}$ jest niestabilny.

2.3 Bifurkacje

Analiza stabilności została przedstawiona (*nieco przypadkowo*) w punkcie **2.1**. Wynika z niej, że punkty stałe zmieniają swoją stabilność w zależności od parametru p , a punktami bifurkacyjnymi są $p_1 = -1$ oraz $p_2 = 3$. W punkcie p_1 zachodzi bifurkacja siodłowo-węzłowa, natomiast w p_2 bifurkacja transkrytyczna.

Wnioski uzyskane z analizy analitycznej są zgodne z rozwiązaniami numerycznymi.