Modelowanie układów dynamicznych: laboratorium nr 2

Kacper Połuszejko, 412183

1 Zadanie

1.1 Punkty stałe i ich stabilność

$$\frac{dx}{dt} = kx(1-x) \tag{1}$$

Po przyrównaniu prawej strony do 0 otrzymujemy punkty stałe: $x_1 = 0$ oraz $x_2 = 1$. Następnie obliczamy: $f'(x_1) = k$ oraz $f'(x_2) = -k$, gdzie $f(x) = kx(1-x)$.

Możemy przeprowadzić teraz analizę stabilności wyznaczonych punktów stałych. Mamy dwa przypadki:

1. $k > 0$ - wtedy punnkt $x_1 = 0$ jest niestabilny, natomimast $x_2 = 1$ jest stabilny
2. $k < 0$ - wtedy punnkt $x_1 = 0$ jest stabilny, natomimast $x_2 = 1$ jest niestabilny

1.2 Linearyzacja i przybliżone rozwiązania

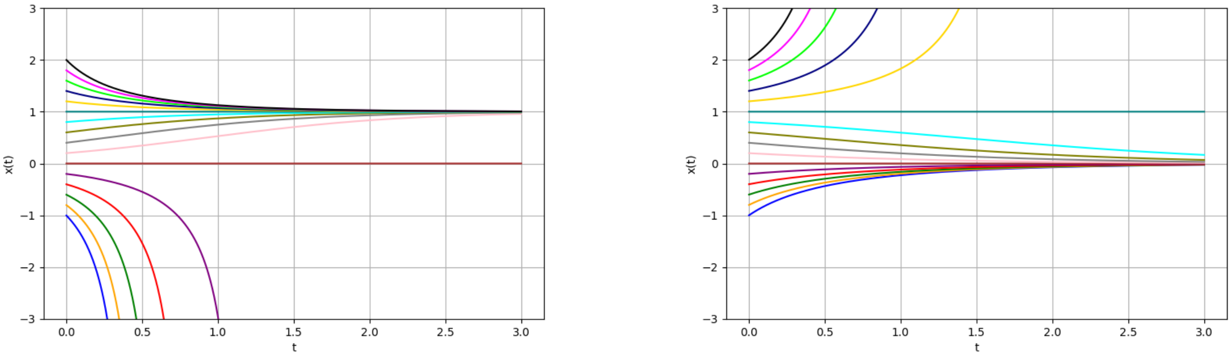
Możemy teraz zlinearyzować równanie wokół punktów stałych za pomocą rozwinięcia Taylora. Otrzymujemy:

1. Dla $x_1 = 0$ - $f(x) = kx$
2. Dla $x_2 = 1$ - $f(x) = -k(x-1)$

Dla warunku początkowego $x(t=0) = x0$ otrzymujemy rozwiązania:

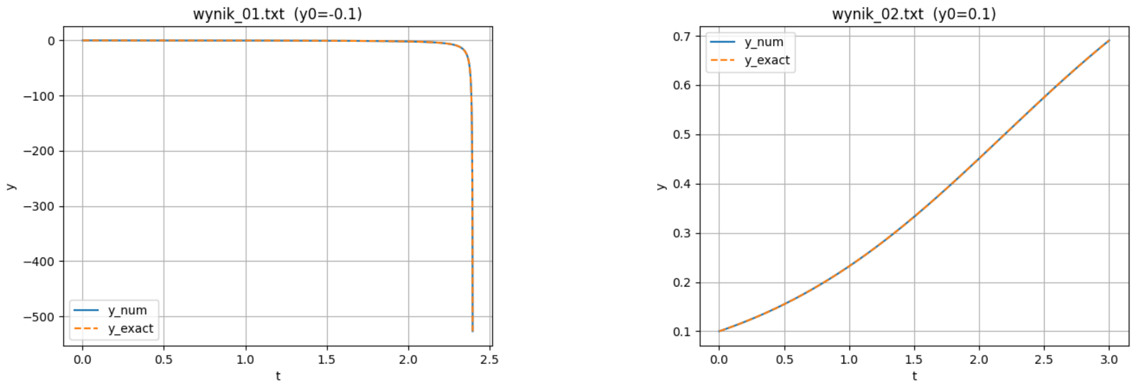
1. Dla $x_1 = 0$ - $x = x_0 e^{kt}$
2. Dla $x_2 = 1$ - $x = (x_0 - 1)e^{-kt} + 1$

1.3 Numeryczne rozwiązania

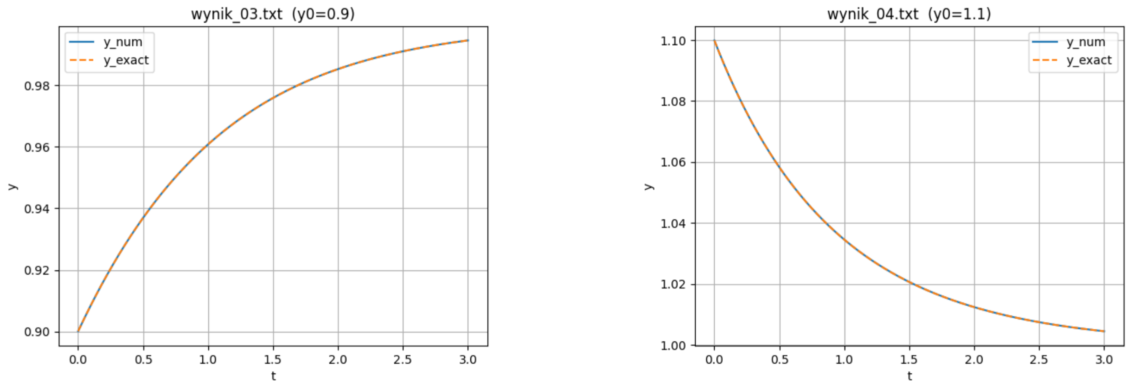


Rys. 1: Numerycznie wyznaczone rozwiązania dla warunków początkowych $x_0 = -1, -0.8, ..., 1.8, 2$ dla $k = 1$ (po lewej) oraz $k = -1$ (po prawej). Widzimy, że zgodnie z rozważaniami powyżej dla pierwszego przypadku punkt $x_1 = 0$ jest niestabilny, a punkt $x_2 = 1$ jest stabilny, natomiast dla drugiego jest odwrotnie.

1.4 Porównanie numerycznych rozwiązań z analitycznymi



Rys. 2: Porównanie rozwiązań numerycznych z analitycznymi dla $y_0 = -0.1$ oraz $y_0 = 0.1$.



Rys. 3: Porównanie rozwiązań numerycznych z analitycznymi dla $y_0 = 0.9$ oraz $y_0 = 1.1$.

1.5 Potencjał V(x)

Definiujemy potencjał za pomocą równania:

$$f(x) = -\frac{dV}{dx} \tag{2}$$

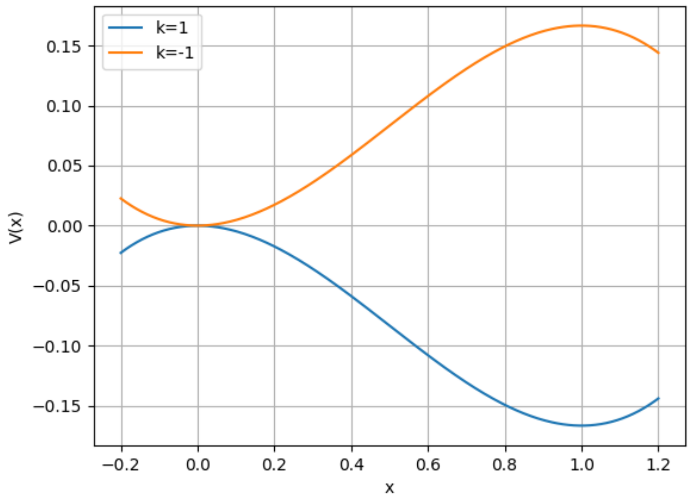
Rozwiązując powyższe równanie dla funkcji z równania (1) otrzymujemy:

$$V(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

oraz

$$V(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}.$$

odpowiednio dla $k = 1$ oraz $k = -1$.



Rys. 4: Wykres $V(x)$ dla różnych k.

Widzimy, że otrzymane wykresy $V(x)$ mają swoje maksima i minima dokładnie w punktach stałych analizowanego wyżej równania różniczkowego (1). Mówiąc dokładniej, minima funkcji znajdują się w punktach stabilnych równania (1), a maksima w punktach niestabilnych

2 Zadanie 2

2.1 Punkty stabline

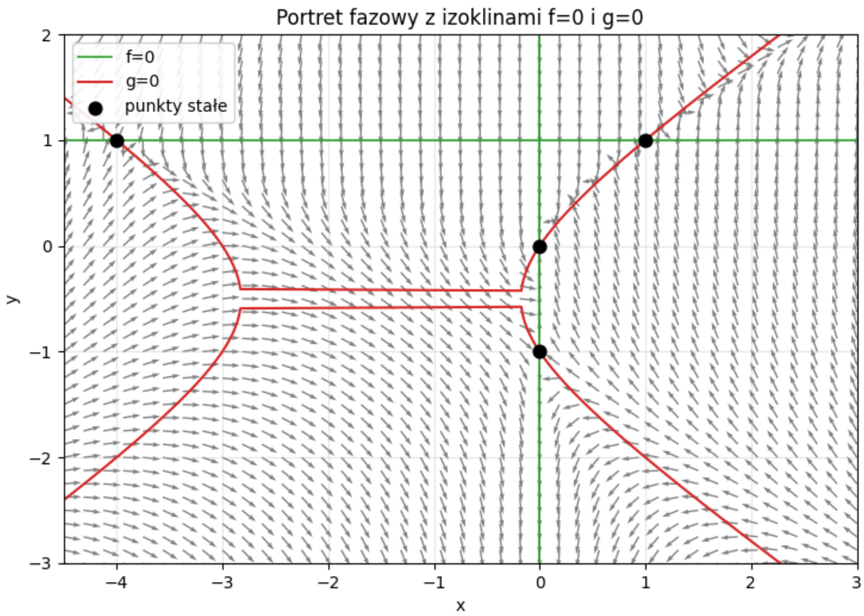
$$\frac{dx}{dt} = x(y-1) \tag{3}$$

$$\frac{dy}{dt} = 3x - 2y + x^2 - 2y^2 \tag{4}$$

Przyrównujemy obie strony do zera i otrzymujemy cztery punkty stałe:

1. $x_1 = 0,\ y_1 = 0$
2. $x_2 = 0,\ y_2 = -1$
3. $x_3 = -4,\ y_3 = 1$
4. $x_4 = 1,\ y_4 = 1$

2.2 Portret fazowy

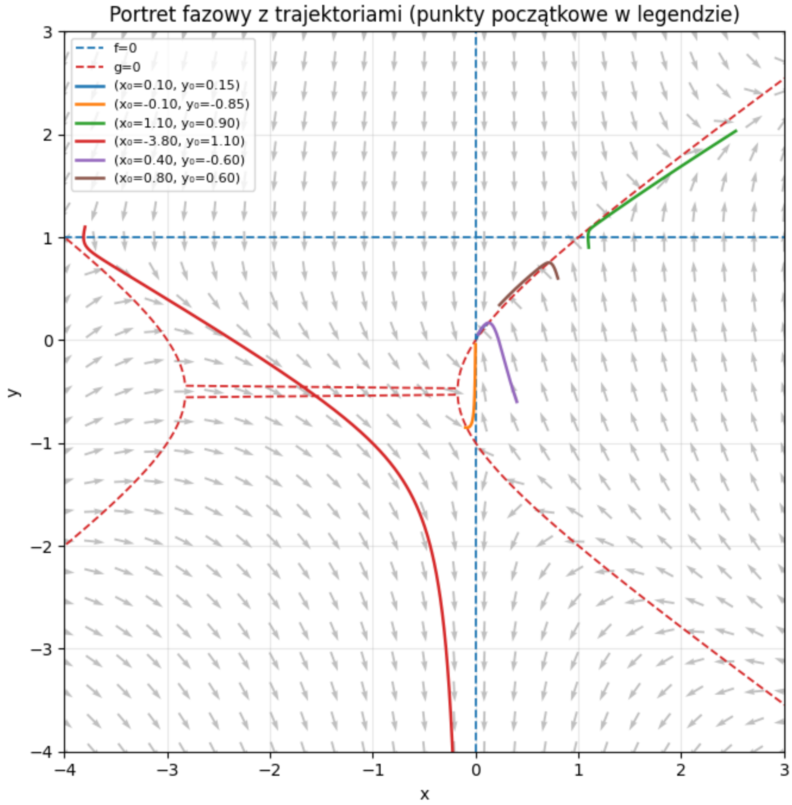


Rys. 5: Portret fazowy z zaznaczonymi izoklinami oraz punktami stałymi.

Już na podstawie takiego wykresu jesteśmy w stanie przeprowadzić wstępną analizę punktów stałych. Punkt $(0,0)$ powinien być punktem stabilnym, z kolei pozostałe punkty stałe to najprawdopodobniej punkty siodłowe.

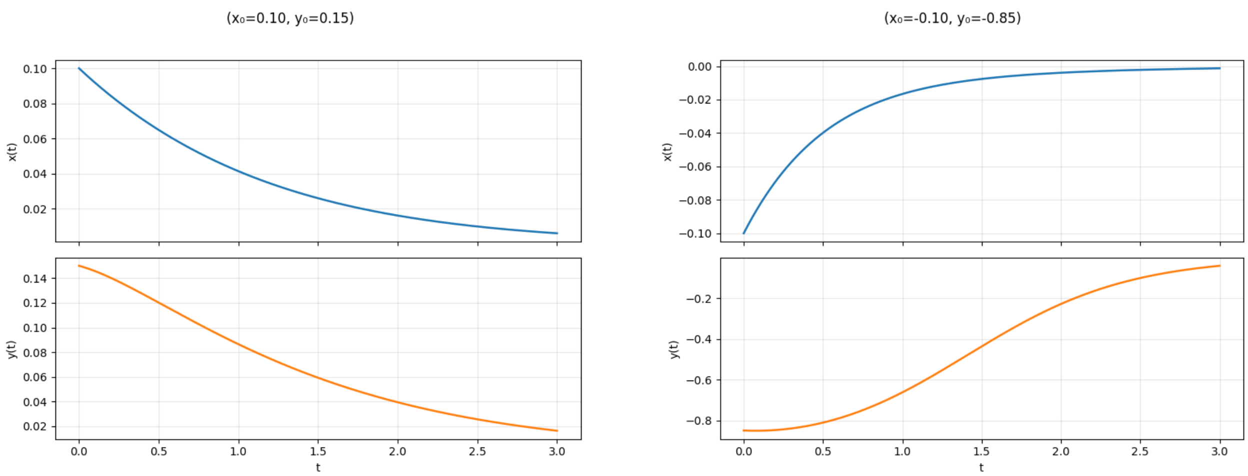
2.3 Numeryczne rozwiązania

...

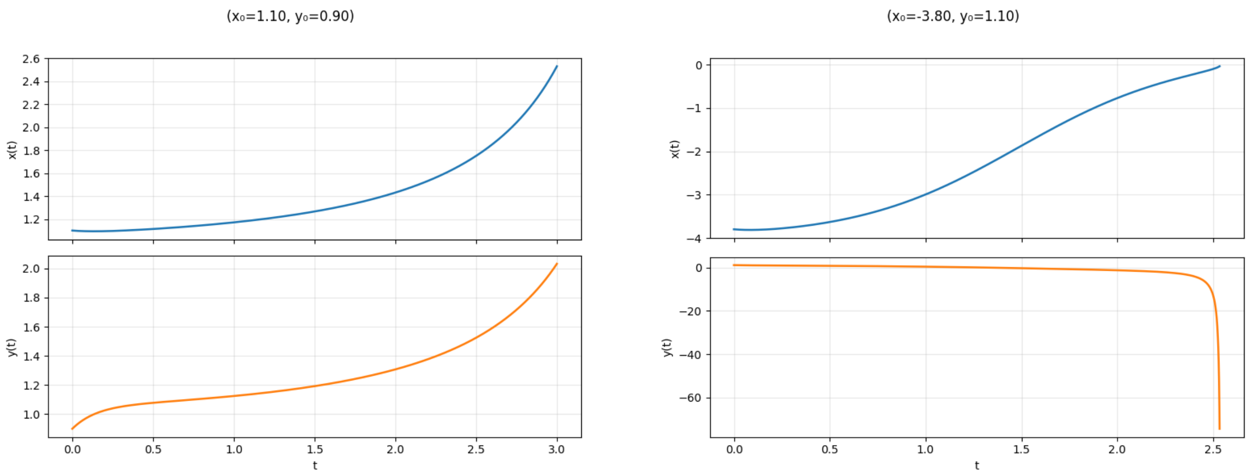


Rys. 6: Portret fazowy z zaznaczonymi izoklinami, punktami stałymi oraz przykładowymi rozwiązaniami.

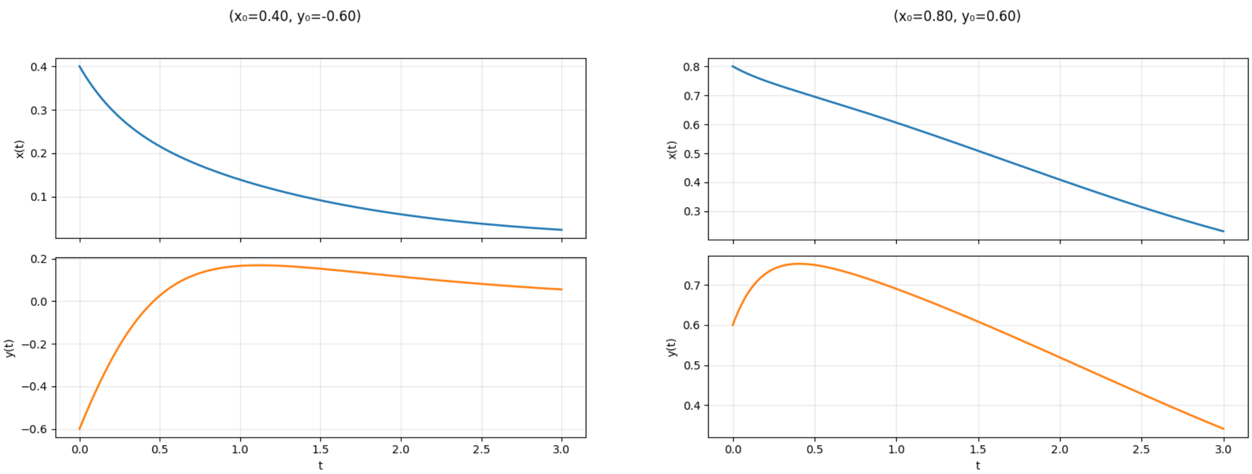
Na powyższym wykresie wyraźnie widzimy, że punkt (0,0) jest punktem stabilnym. Rozwiązania oznaczone pomarańczowym, brązowym oraz fioletowym kolorem, po krótkiej ewolucji, zatrzymały się właśnie w tym punkcie. Z kolei pozostałe punkty stałe najprawdopodobniej są punktami siodłowymi.



Rys. 7: Wykresy $x(t)$ oraz $y(t)$ dla różnych wartości początkowych.



Rys. 8: Wykresy $x(t)$ oraz $y(t)$ dla różnych wartości początkowych.



Rys. 9: Wykresy $x(t)$ oraz $y(t)$ dla różnych wartości początkowych.

Widzimy, że otrzymane wykresy $x(t)$ oraz $y(t)$ odwzorowują rozwiązania naniesione na portret fazowy. Część dąży do punktu stabilnego (0,0), pozostałe natomiast dążą do nieskończoności. Dodatkowego komentarza wymaga pierwszy wykres ($x_0 = 0.10, y_0 = 0.15$), którego odpowiednika nie widać na portrecie fazowym. Powodem tego jest fakt, że punkt początkowy znajduje się bardzo blisko punktu stabilnego (0,0). Naniesione rozwiązanie zostało więc najprawdopodobniej przykryte przez pozostałe rozwiązania.