

# Modelowanie układów dynamicznych: laboratorium nr 4

Kacper Połuszejko, 412183

## 1 Zadanie

### 1.1 Punkty stałe i ich stabilność

Rozważany układ równań:

$$\begin{cases} \dot{x} = -2y - x[(x^2 + y^2)^2 - 4(x^2 + y^2) + 1], \\ \dot{y} = 2x - y[(x^2 + y^2)^2 - 4(x^2 + y^2) + 1]. \end{cases}$$

Jedyny punkt stały:  $(x^*, y^*) = (0, 0)$ .

$$\begin{cases} f(x, y) = -2y - x[(x^2 + y^2)^2 - 4(x^2 + y^2) + 1], \\ g(x, y) = 2x - y[(x^2 + y^2)^2 - 4(x^2 + y^2) + 1]. \end{cases}$$

Oznaczmy

$$F(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 4(x^2 + y^2) + 1.$$

Wówczas

$$\dot{x} = -2y - xF, \quad \dot{y} = 2x - yF.$$

Obliczmy pochodne  $F$  (poźniej będą przydatne).

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 4x[(x^2 + y^2) - 2], \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 4y[(x^2 + y^2) - 2].$$

Możemy teraz wyznaczyć macierz Jacobiego w punkcie  $(x, y)$ .

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -F - xF_x & -2 - xF_y \\ 2 - yF_x & -F - yF_y \end{pmatrix}.$$

Podstawiamy teraz punkt stały  $(x^*, y^*) = (0, 0)$ .

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dostajemy ślad i wyznacznik:

$$\text{tr } J = -2, \quad \det J = 5.$$

na podstawie których możemy znaleźć wartości własne:

$$\lambda^2 - \text{tr}(J)\lambda + \det(J) = 0 \quad (1)$$

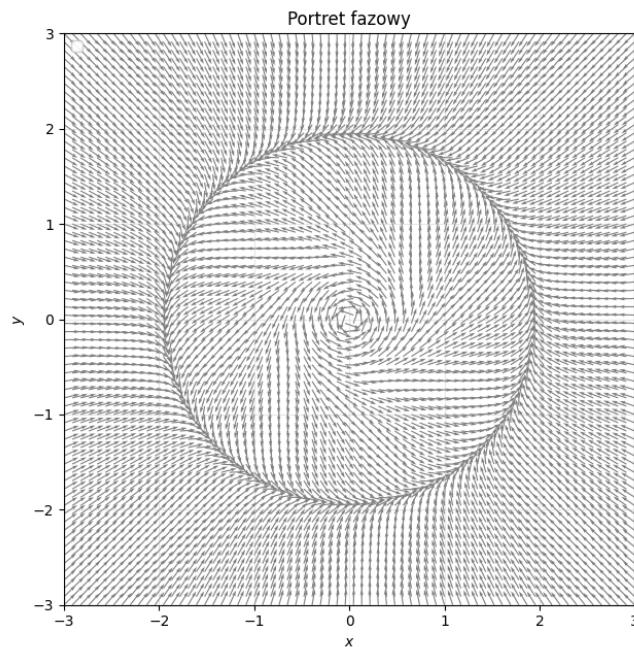
$$\lambda_{1,2} = -1 \pm 2i.$$

**Wniosek** Ponieważ wartości własne są zespolone, a części rzeczywiste obu wartości własnych są ujemne, możemy stwierdzić, że:

*punkt*(0, 0) jest stabilnym ogniskiem

Trajektorie kręczą się w pobliżu zera (część urojona  $\pm 2$ ) i gasną wykładniczo.

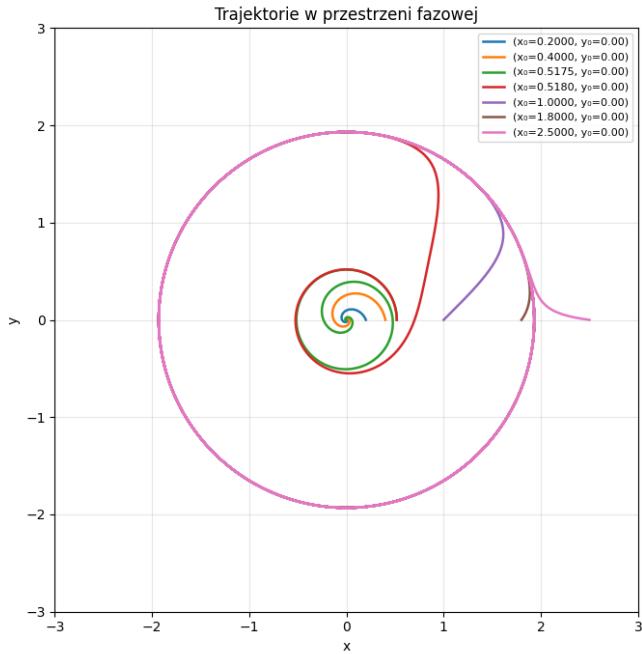
## 1.2 Portret fazowy



**Rys. 1:** Portret fazowy.

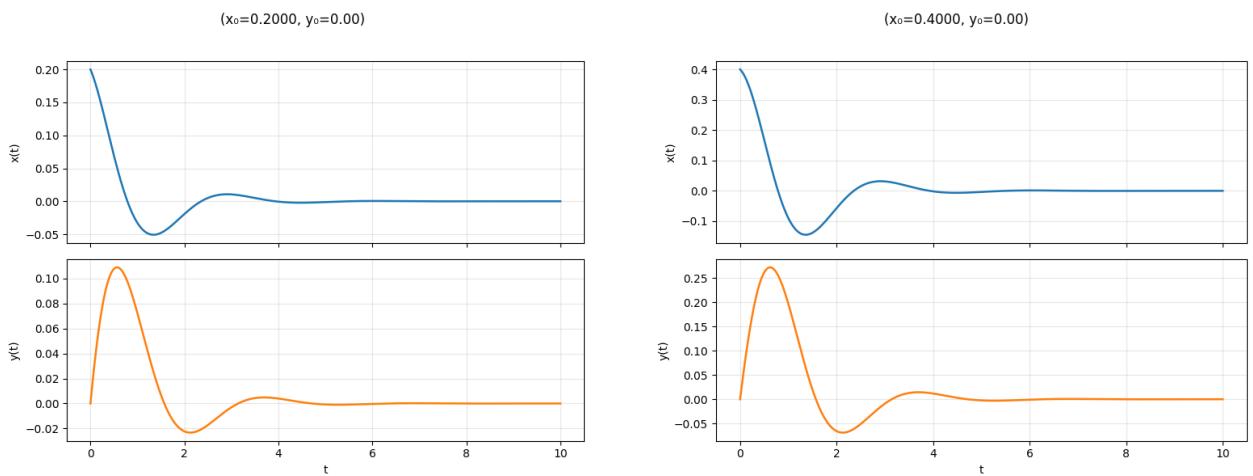
Na podstawie portretu fazowego potwierdza się, że punkt (0,0) rzeczywiście jest punktem stałym. Jakość rysunku nie pozwala jednak stwierdzić, czy punkt ten na pewno jest stabilny. Dodatkowo na rysunku widać orbitę, która najprawdopodobniej jest stabilna.

### 1.3 Numeryczne rozwiązania

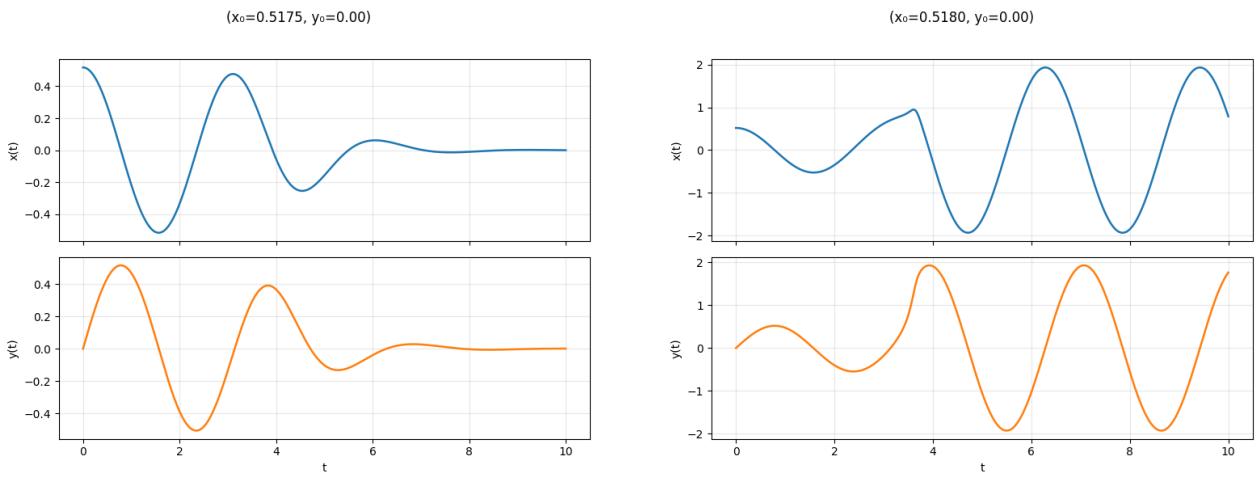


Rys. 2: Otrzymane trajektorie w przestrzeni fazowej.

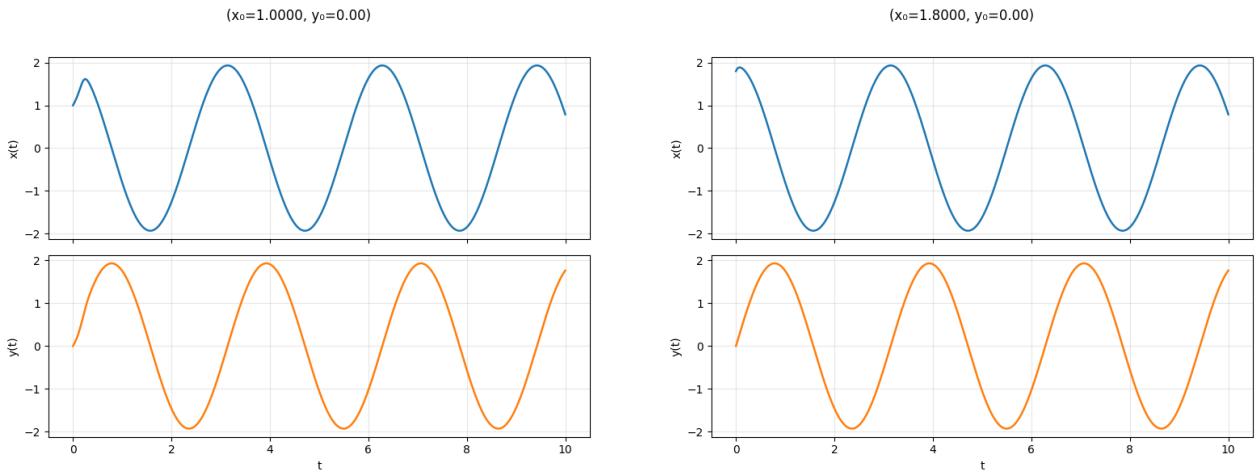
Widzimy, że rozwiązania dla niskich wartości początkowych dążą do punktu  $(0,0)$ . Natomiast gdy  $x_0$  przekracza  $0.518$  trajektorie oddalają się od środka układu i "uciekają" do orbity na zewnątrz (okrąg o promieniu równym mniej więcej 2). Możemy więc już ostatecznie potwierdzić, że punkt  $(0,0)$  jest ogniskiem stabilnym, natomiast nie każda trajektoria będzie zbiegać się do tego punktu z powodu istnienia orbity stabilnej.



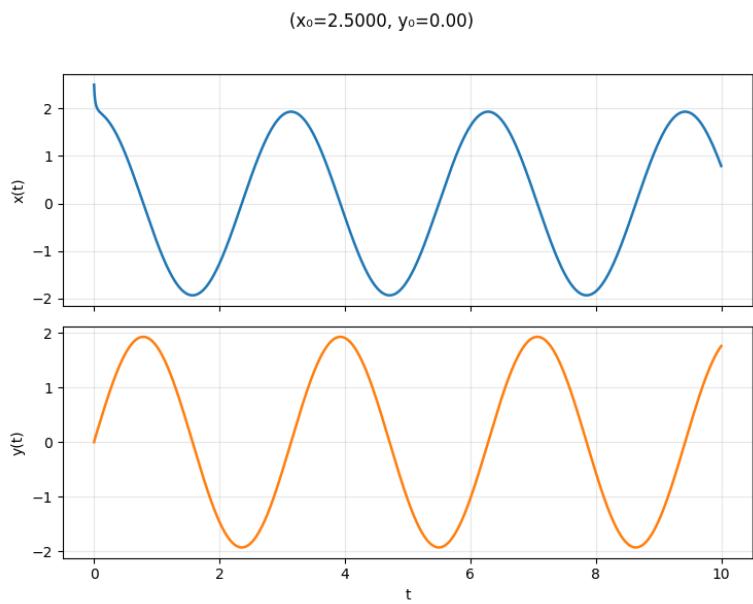
Rys. 3: Wykresy  $x(t)$  oraz  $y(t)$  dla różnych wartości początkowych.



**Rys. 4:** Wykresy  $x(t)$  oraz  $y(t)$  dla różnych wartości początkowych.



**Rys. 5:** Wykresy  $x(t)$  oraz  $y(t)$  dla różnych wartości początkowych.



**Rys. 6:** Wykresy  $x(t)$  oraz  $y(t)$  dla różnych wartości początkowych.

## 1.4 Równanie we współrzędnych biegunowych

Oznaczmy

$$F(r) = (r^2)^2 - 4r^2 + 1 = r^4 - 4r^2 + 1, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

**Przejście do współrzędnych biegunowych.**

$$\dot{r} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{r}, \quad \dot{\theta} = \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{r^2}.$$

Po podstawieniu równań układu otrzymujemy

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \frac{x(-2y - Fx) + y(2x - Fy)}{r} = -F \frac{x^2 + y^2}{r} = -F(r)r, \\ \dot{\theta} &= \frac{x(2x - Fy) - y(-2y - Fx)}{r^2} = \frac{2(x^2 + y^2)}{r^2} = 2.\end{aligned}$$

Otrzymujemy nowy układ równań we współrzędnych biegunowych

$$\begin{cases} \dot{r} = -rF(r) \\ \dot{\theta} = 2 \end{cases} \quad (2)$$

Rozwiązaniami tego układu są liczby  $r_1 = 0, r_2 = \sqrt{2 - \sqrt{3}}, r_3 = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$ .

Oznaczmy sobie:

$$g(r) = -rF(r)$$

wtedy

$$g'(r) = -F(r) - rF'(r), \quad F'(r) = 4r(r^2 - 2).$$

Możemy przeprowadzić teraz standardową analizę stabilności. Wiemy już, że punkt  $r_1 = 0$  jest ogniskiem stabilnym, co tutaj tylko się potwierdza, ponieważ  $g'(0) < 0$ .

Dodatkowa pojawiają nam się dwa dodatkowe  $r$  dla których rozwiązanie jest stabilne:

- Dla  $r_2 = \sqrt{2 - \sqrt{3}}, g'(r_2) > 0$  - otrzymujemy zatem orbitę niestabilną (cykl odpychający). Rozwiązania będą "uciekać" od okręgu o promieniu  $r_2$  (co zresztą widać po trajektoriach na rysunkach powyżej).
- Dla  $r_2 = \sqrt{2 + \sqrt{3}}, g'(r_3) < 0$  - otrzymujemy orbitę stabilną (cykl przyciągający). Rozwiązania dążą do okręgu o promieniu  $r_3$  (co również dobrze widać po trajektoriach narysowanych w podpunkcie 1.3.)

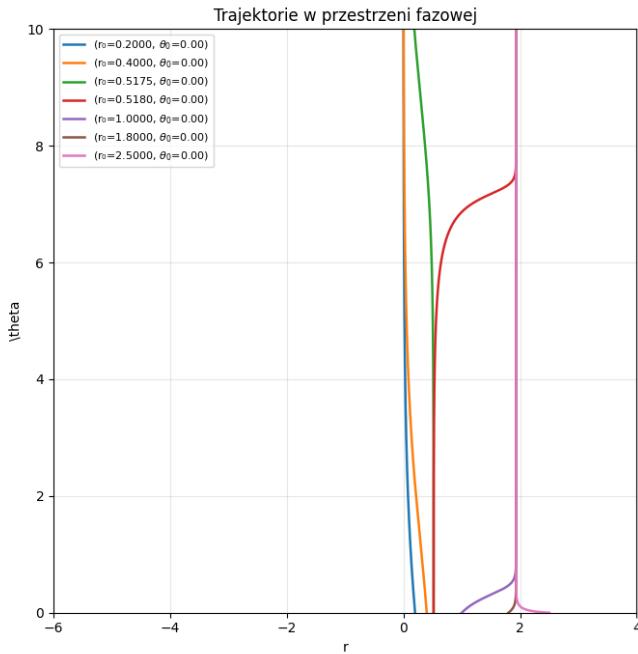
## 1.5 Rozwiązańe we współrzędnych biegunowych

Korzystając z otrzymanego w poprzednim podpunkcie układu (2), rozwiążemy zadane równanie we współrzędnych biegunowych.

Równanie  $\dot{\theta} = 2$  jest łatwe do rozwiązania analitycznie. Otrzymujemy zatem:

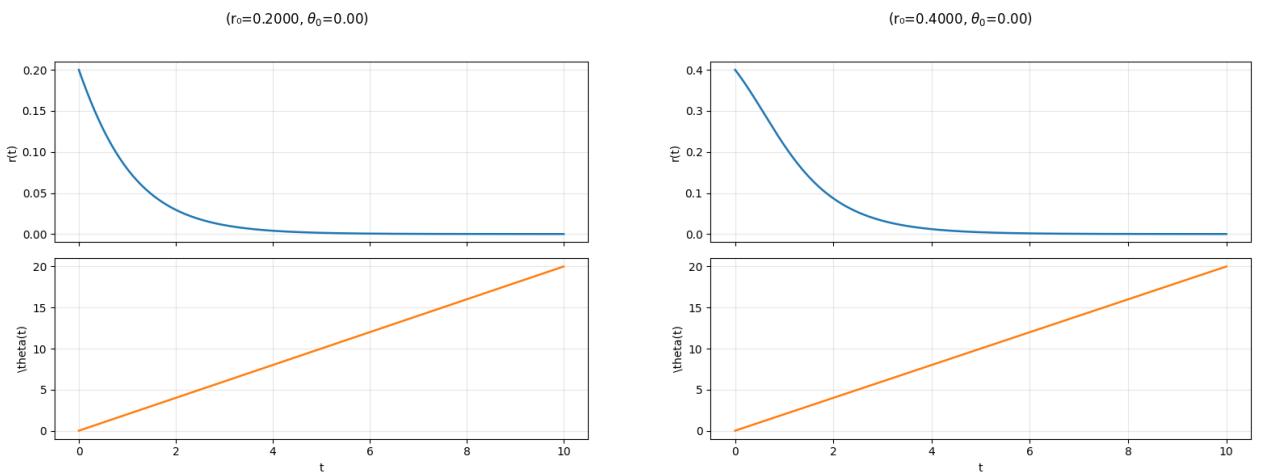
$$\theta = 2t + \theta_0. \quad (3)$$

Równanie na  $r$ , rozwiążemy numerycznie.

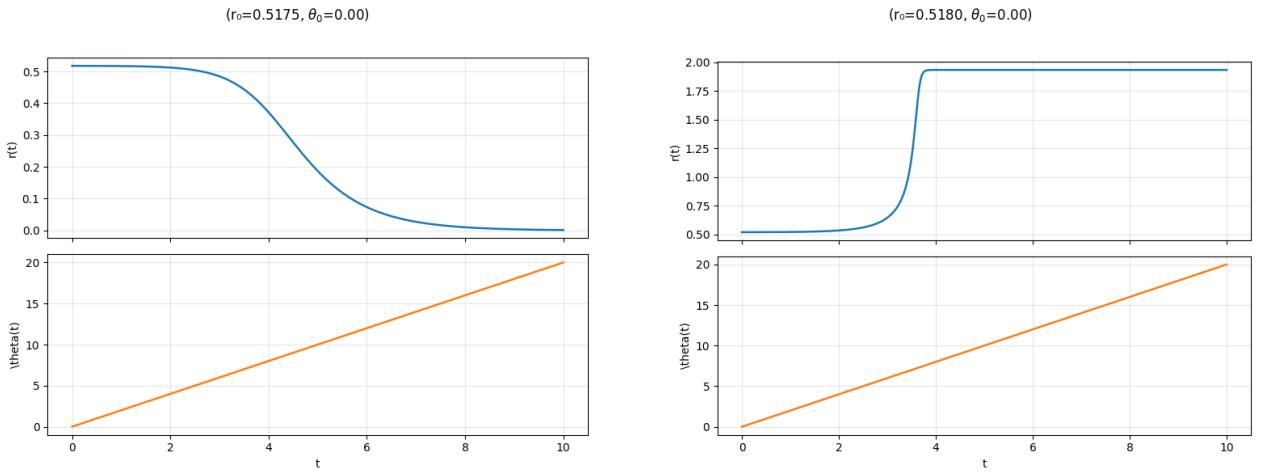


Rys. 7: Otrzymane trajektorie w przestrzeni fazowej  $(r, \theta)$ .

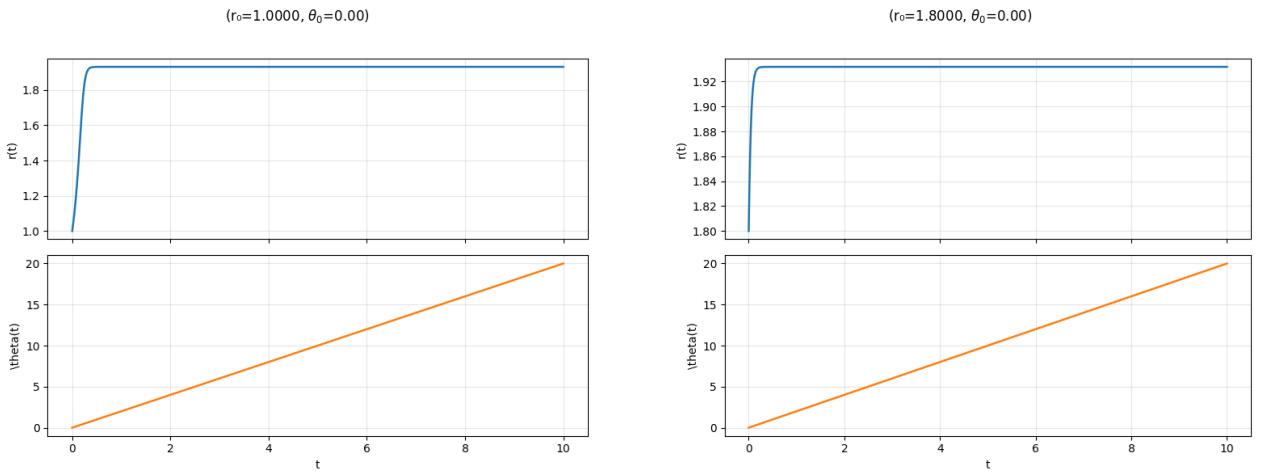
Widzimy, że rozwiązania dla niskich wartości początkowych  $r$  zbiegają się do jednej prostej  $r = 0$ . Z kolei dla  $r_0$  większych lub równych  $0.5180$  trajektorie zaczynają zbiegać się do prostej  $r = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$ . Proste te odpowiadają punktowi stabilnemu oraz orbicie stabilnej występującej na Rys. 2.



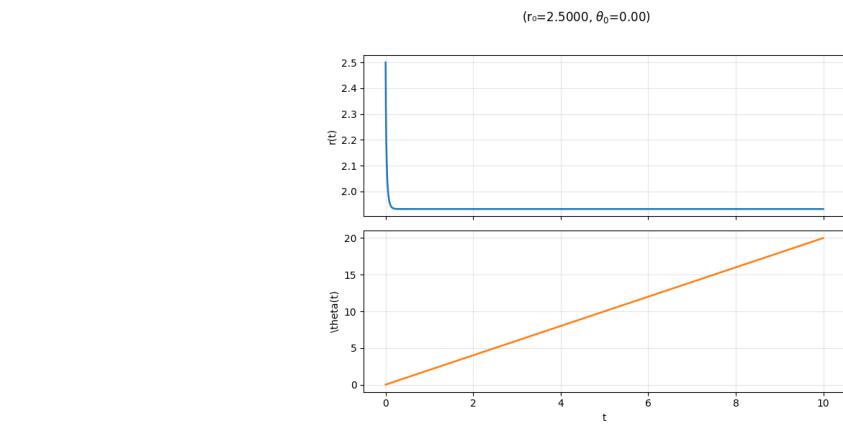
Rys. 8: Wykresy  $r(t)$  oraz  $\theta(t)$  dla różnych wartości początkowych.



Rys. 9: Wykresy  $r(t)$  oraz  $\theta(t)$  dla różnych wartości początkowych.



Rys. 10: Wykresy  $r(t)$  oraz  $\theta(t)$  dla różnych wartości początkowych.



Rys. 11: Wykresy  $r(t)$  oraz  $\theta(t)$  dla różnych wartości początkowych.

Otrzymane rozwiązania  $r(t)$  potwierdzają wcześniejszą analizę. Rozwiążanie zbiega się do punktu stabilnego w zerze, oraz do orbity stabilnej o promieniu bliskim 2. "Granicą" tych dwóch obszarów jest orbita niestabilna o promieniu  $r = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$ . Rozwiążanie  $\theta(t)$  jest zwykłą funkcją liniową, co wykazano już wcześniej analitycznie.

## 2 Zadanie

### 2.1 Punkty stałe, analiza stabilności

Równanie:

$$\ddot{x} + 2\left(\frac{1}{3}\dot{x}^2 - 1\right)\dot{x} + x = 0,$$

rodzielamy na dwa równania pierwszego rzędu:

$$\begin{cases} \dot{x} = v, \\ \dot{v} = -2\left(\frac{1}{3}v^2 - 1\right)v - x \end{cases} \quad (4)$$

Przyrównujemy oba równania do 0:

$$\dot{x} = 0, \quad \dot{v} = 0. \quad \Rightarrow \quad v = 0, \quad -x + 2 \cdot 0 - \frac{2}{3} \cdot 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0.$$

$$\boxed{(x^*, v^*) = (0, 0)}.$$

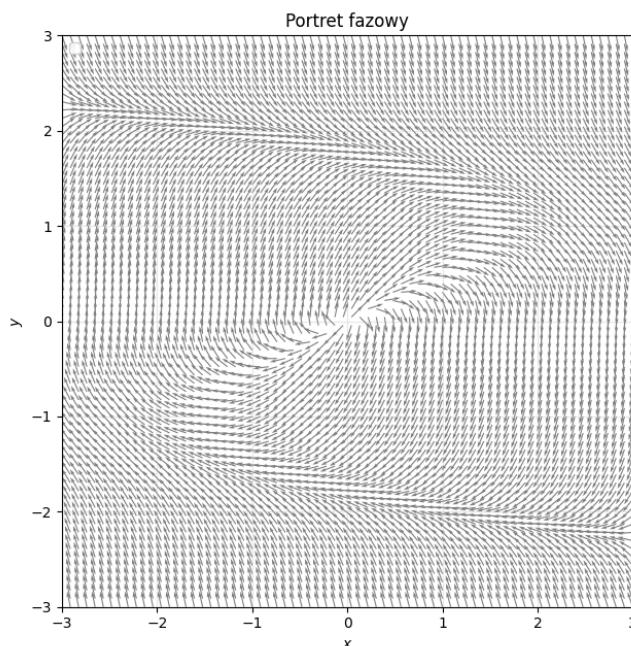
Macierz Jacobiego:

$$f(x, v) = \begin{pmatrix} v \\ -x + 2v - \frac{2}{3}v^3 \end{pmatrix}, \quad Df(x, v) = \begin{pmatrix} \partial_x \dot{x} & \partial_v \dot{x} \\ \partial_x \dot{v} & \partial_v \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 - 2v^2 \end{pmatrix}. \\ J = Df(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

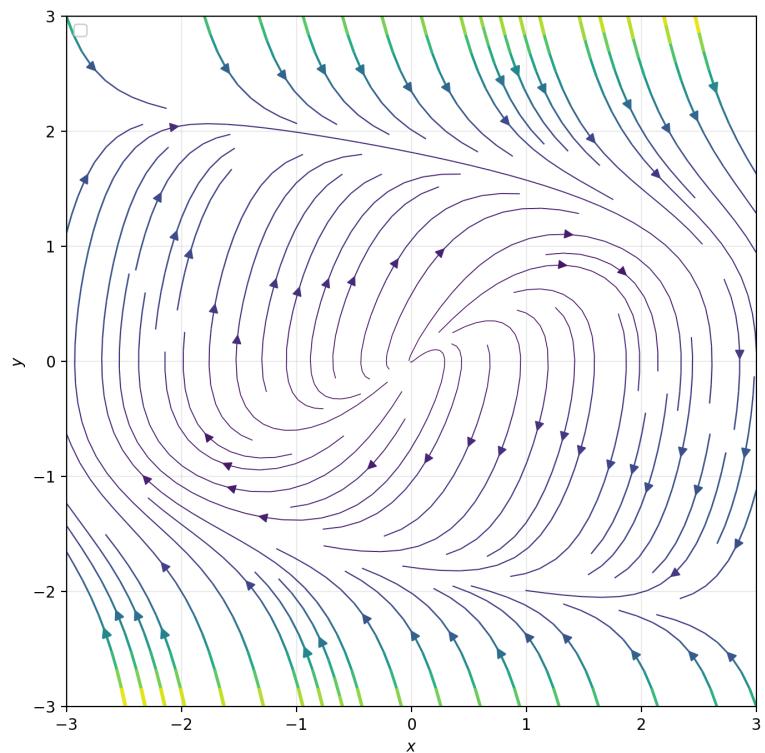
$$\chi(\lambda) = \det(\lambda I - J) = \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda - 2 \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2. \\ \lambda_{1,2} = 1 (> 0)$$

Otrzymujemy podwójną wartość własną, która jest dodatnia. W związku z tym możemy stwierdzić, że jedyny punkt stały  $x_0^* = 0, v_0^* = 0$  jest niestabilny.

### 2.2 Portret fazowy

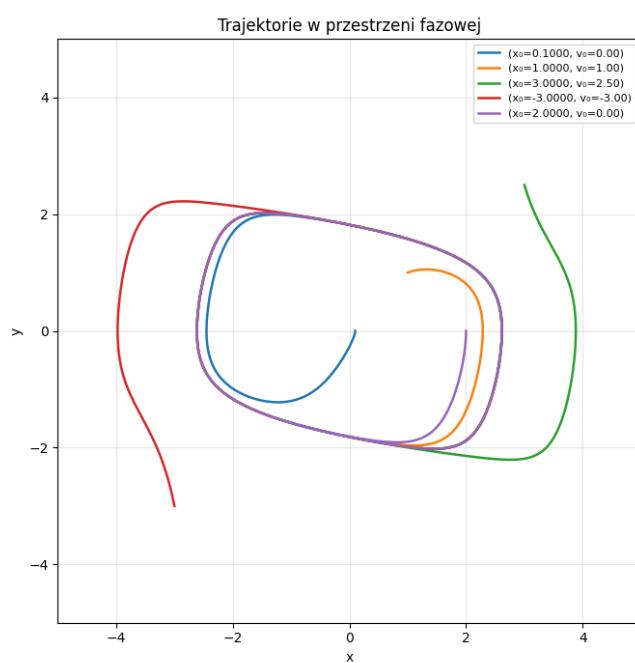


**Rys. 12:** Portret fazowy.

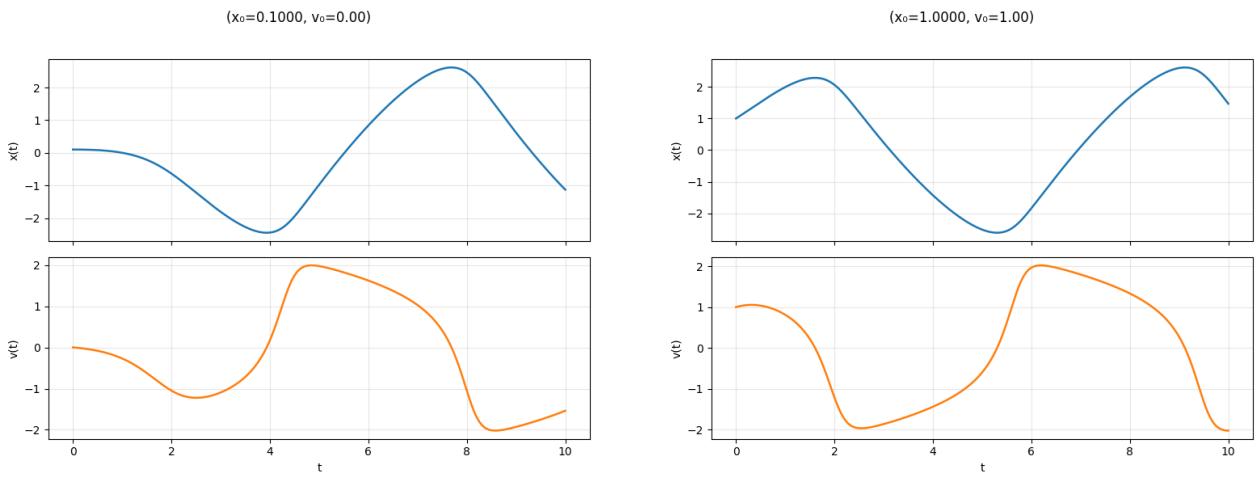


Rys. 13: Portret fazowy.

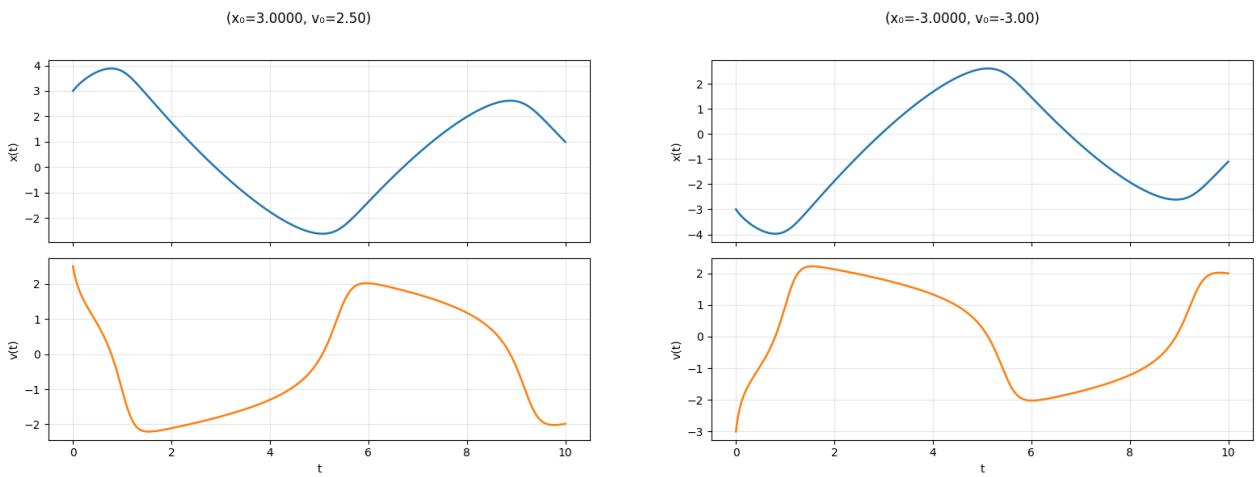
## 2.3 Numeryczne rozwiązania



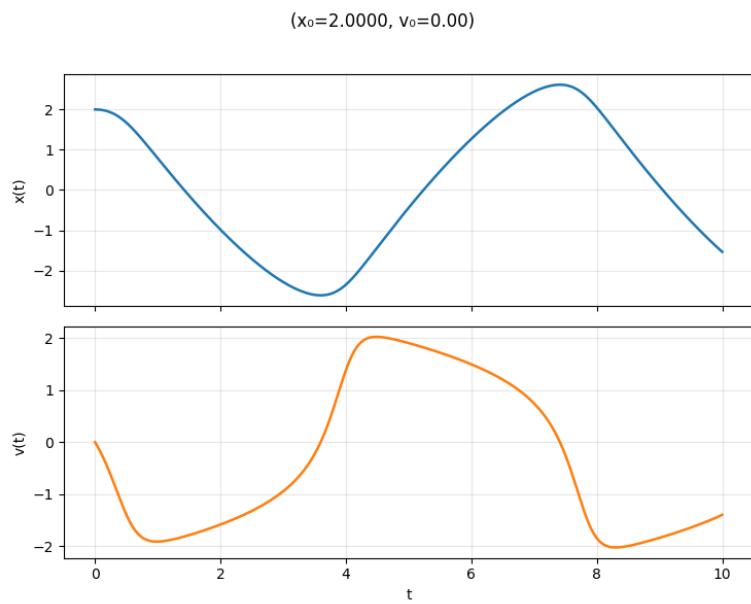
Rys. 14: Otrzymane rozwiązania w przestrzeni fazowej.



**Rys. 15:** Wykresy  $x(t)$  oraz  $y(t)$  dla różnych wartości początkowych.



**Rys. 16:** Wykresy  $x(t)$  oraz  $y(t)$  dla różnych wartości początkowych.



**Rys. 17:** Wykresy  $x(t)$  oraz  $y(t)$  dla różnych wartości początkowych.

Powyższe rozwiązania potwierdzają istnienie stałego punktu stabilnego w punkcie  $(0,0)$ . Dodatkowo, można zaobserwować stabilną orbitę przyciągającą.