Modelowanie układów dynamicznych: laboratorium nr 10

Kacper Połuszejko, 412183

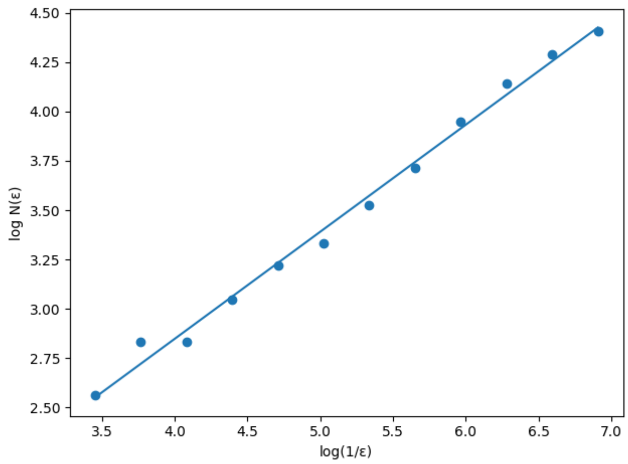
1 Zadanie

Liczymy pudełkowy wymiar fraktalny dla odwzorowania logistycznego:

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n), \tag{1}$$

gdzie r = 3.569945672.

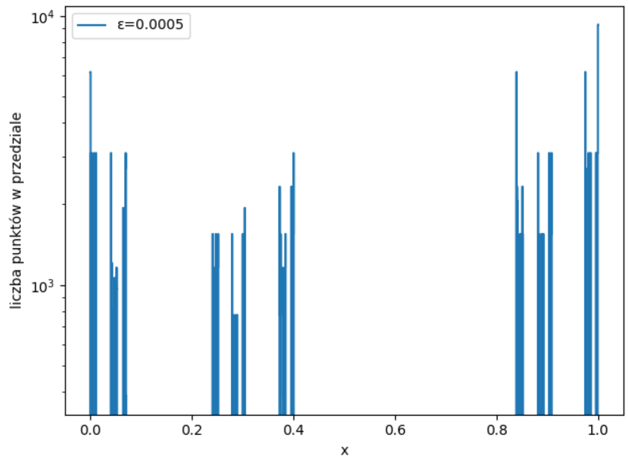
Otrzymany wynik: $d_f = 0.543 \pm 0.015$.



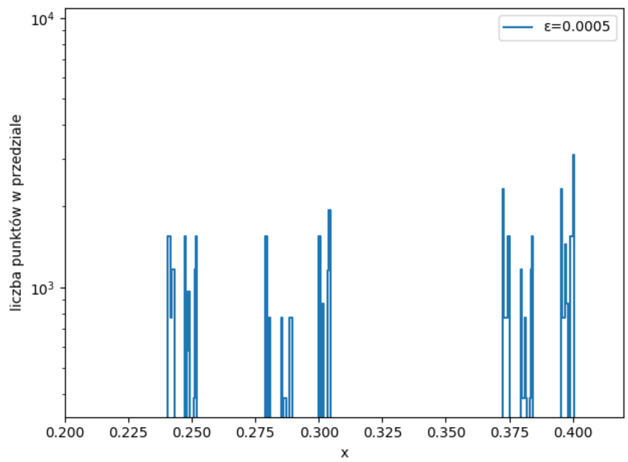
Rys. 1: Dopasowanie prostej do punktów.

2 Zadanie

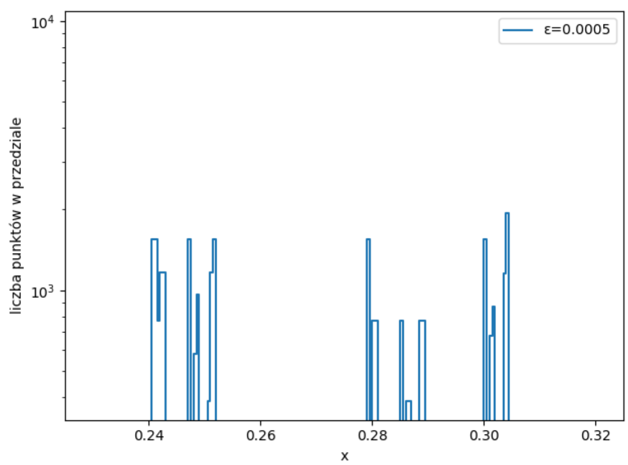
Rysujemy histogram ilstrujący ile punktów "wpada"do podprzedziałów o szerokości ϵ.



Rys. 2: Otrzymany histogram dla $\epsilon = 5e - 4$.



Rys. 3: Otrzymany histogram dla $\epsilon = 5e - 4$ (przybliżenie).



Rys. 4: Otrzymany histogram dla $\epsilon = 5e - 4$ (przybliżenie).

3 Zadanie 3

Szukamy multifraktalnych wymiarów uogólnionych dla zbioru Cantora.

W analizie multifraktalnej rozważamy gęstości w podprzedziałach. Dla skali ε miarę definiujemy jako

$$\mu_i(\varepsilon) = \frac{N_i(\varepsilon)}{N}, \tag{2}$$

gdzie $N_i(\varepsilon)$ oznacza liczbę punktów w i-tym podprzedziale, a N jest liczbą wszystkich punktów. Miara $\mu_i(\varepsilon)$ jest liczona tylko dla niepustych podprzedziałów.

Definiujemy funkcję:

$$Z(q, \varepsilon) = \sum_i \mu_i(\varepsilon)^q, \tag{3}$$

oraz wykładnik skalowania

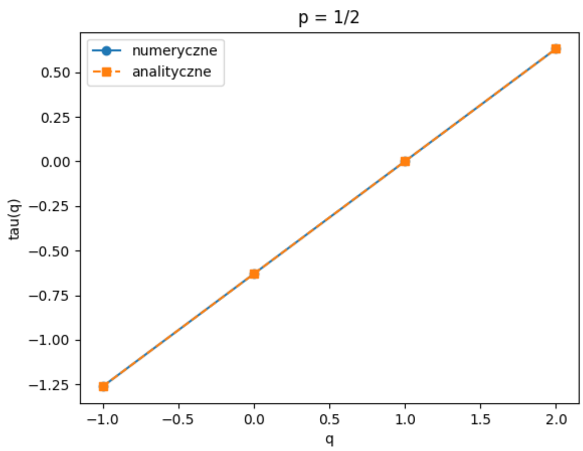
$$\tau(q) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln Z(q, \varepsilon)}{\ln \varepsilon}. \tag{4}$$

Numerycznie $\tau(q)$ wyznaczamy przez dopasowanie prostej do wykresu $\ln Z(q, \varepsilon)$ w funkcji $\ln \varepsilon$. Dla obiektów multifraktalnych funkcja $\tau(q)$ jest nieliniowa.

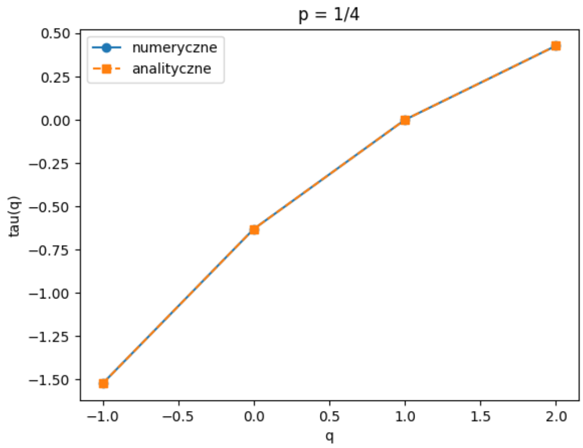
Multifraktalny wymiar uogólniony D_q dany jest wzorem

$$D_q = \frac{\tau(q)}{q-1}, \tag{5}$$

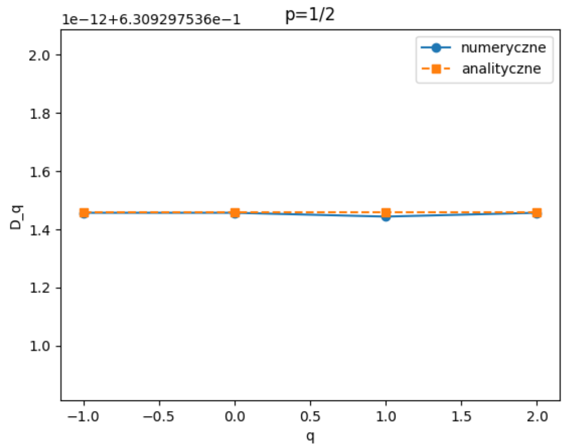
przy czym dla $q = 1$ należy wyznaczyć granicę tego wyrażenia. Dla $q = 0, 1, 2$ otrzymujemy odpowiednio wymiar pudełkowy, informacyjny i korelacyjny. Dla monofraktali $D_q = \text{const}$.



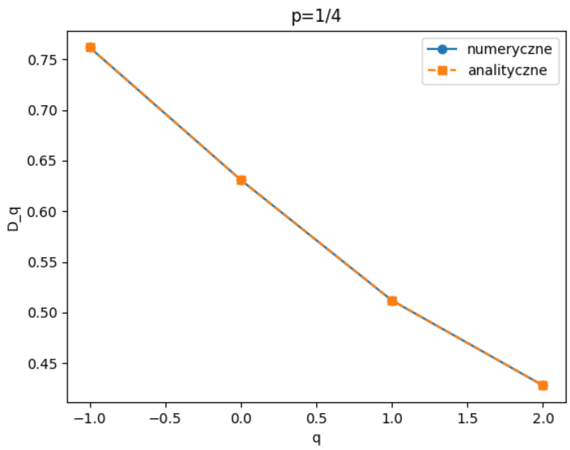
Rys. 5: $\tau(q)$ dla p = 1/2.



Rys. 6: $\tau(q)$ dla p = 1/4.

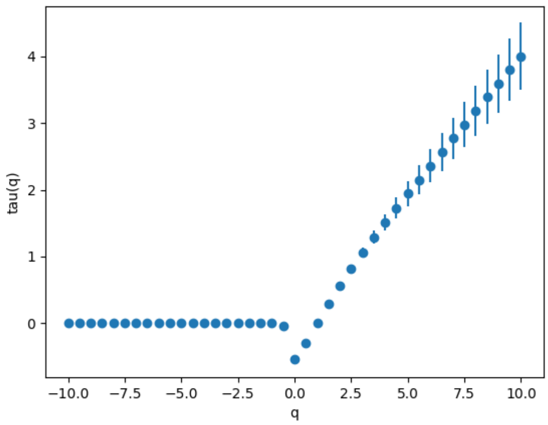


Rys. 7: $D_q(q)$ dla p = 1/2.

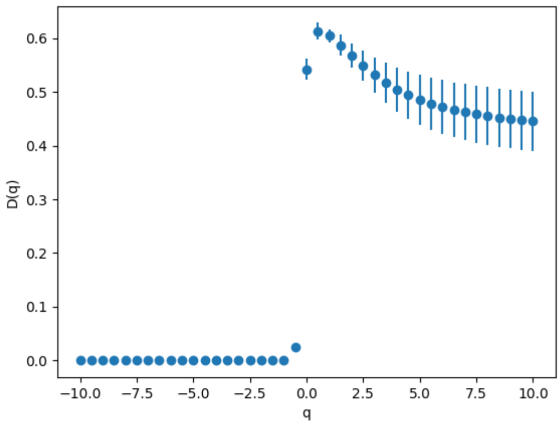


Rys. 8: $D_q(q)$ dla p = 1/4.

4 Zadanie



Rys. 9: Zależność $\tau(q)$ ze słupkami niepewności.



Rys. 10: Zależność Dq ze słupkami niepewności.

Otrzymane wyniki:

$D_0 = 0.542 \pm 0.020$

$D_1 = 0.604 \pm 0.013$

$D_2 = 0.568 \pm 0.023$

Komentarz do wyników Dla ujemnych wartości parametru q otrzymane wyniki są niestabilne i nie mają jednoznacznej interpretacji fizycznej. W tym zakresie obliczenia są zdominowane przez najsłabiej obsadzone komórki, co w zastosowanym algorytmie prowadzi do zaburzenia skalowania i błędnej estymacji funkcji $\tau(q)$ oraz wymiarów D_q. Z tego powodu wyniki dla $q < 0$ nie są wiarygodne i nie były dalej analizowane.

Dla dodatnich wartości q uzyskano stabilne widmo multifraktalne. Wyznaczone wartości D_0, D_1 i D_2 są zbliżone do wartości literaturowych, jednak nie spełniają dokładnie relacji

$D_0 \geq D_1 \geq D_2$. Szczególnie wymiar D_1, wyznaczany z granicy $q \to 1$, jest wrażliwy na szum numeryczny i może być przeszacowany. Zaobserwowane rozbieżności wynikają z ograniczeń numerycznych zastosowanej metody.