Modelowanie układów dynamicznych: laboratorium nr 7

Kacper Połuszejko, 412183

1 Zadanie

Rozpatrujemy równanie:

$$x_{n+1} = f(x_n) = ax_n - x_n^3 \tag{1}$$

Punkty stałe

Szukamy punktów stałych:

$$x = ax - x^3.$$

$$x^3 + (1-a)x = 0,$$

czyli

$$x\left(x^2 + (1-a)\right) = 0.$$

Zatem punkty stałe to:

$$x_1 = 0, \qquad x_{2,3} = \pm\sqrt{a-1}.$$

Punkty $x_{2,3}$ istnieją tylko dla $a \geq 1$.

Stabilność punktów stałych

Pochodna funkcji:

$$f'(x) = a - 3x^2.$$

Punkt $x_1 = 0$

$$f'(0) = a.$$

Punkt jest stabilny jeżeli $|f'(x_0)| < 1$, zatem:

$$|a| < 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq a < 1.$$

W związku z tym punkt x_1 jest stabilny dla $0 \leq a < 1$, a niestabilny dla $a > 1$

Punkty $x_{2,3} = \pm\sqrt{a-1}$

$$f'\left(\pm\sqrt{a-1}\right) = a - 3(a-1) = 3 - 2a.$$

Punkt jest stabilny jeżeli $|f'(x_0)| < 1$, zatem:

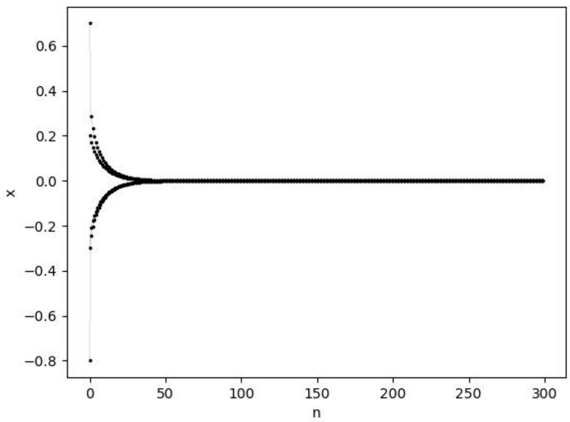
$$|3 - 2a| < 1.$$

Daje to:

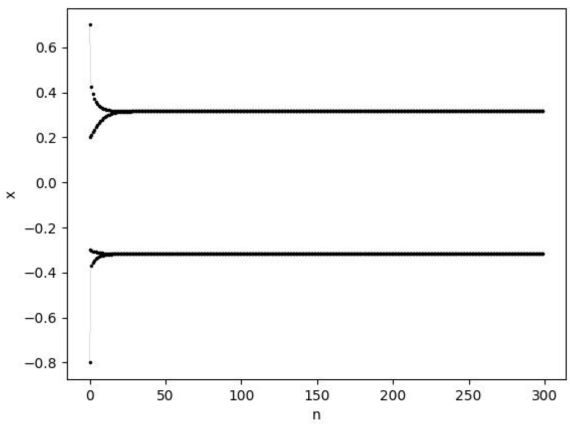
$$1 < a < 2.$$

W związku z tym punkty x_2 oraz x_3 są stabilne dla $1 < a < 2$, a niestabilne dla $a > 2$

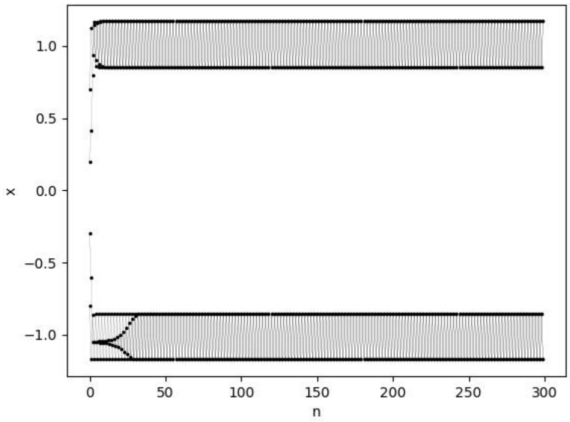
Zadanie 2 i 3



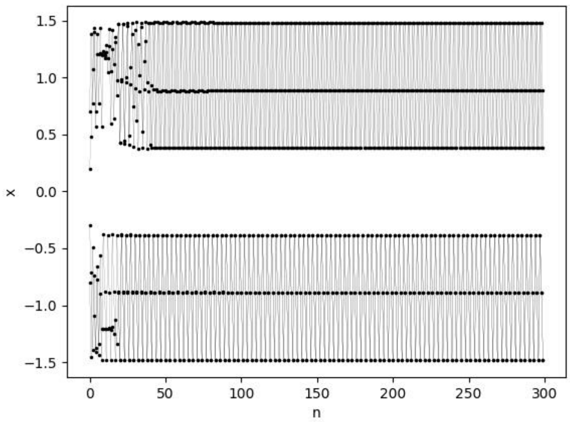
Rys. 1: Wykres $x_n(n)$, dla a = 0.9.



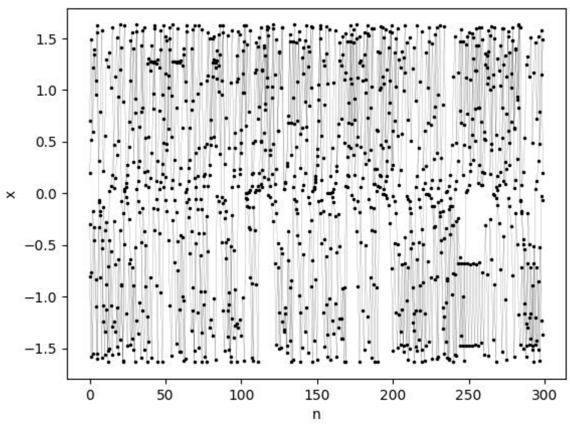
Rys. 2: Wykres $x_n(n)$, dla a = 1.1.



Rys. 3: Wykres $x_n(n)$, dla a $= 2.1$.

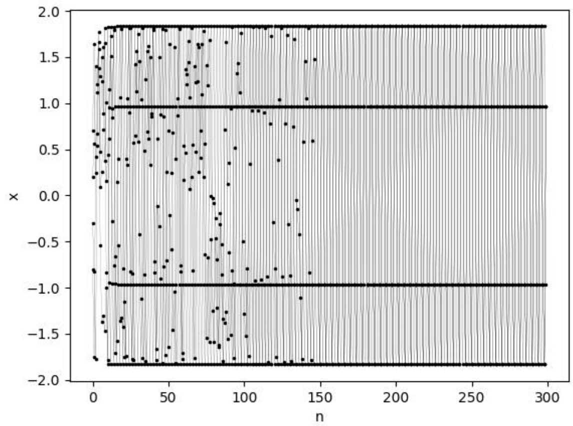


Rys. 4: Wykres $x_n(n)$, dla a $= 2.46$.



Rys. 5: Wykres $x_n(n)$, dla a $= 2.62$.

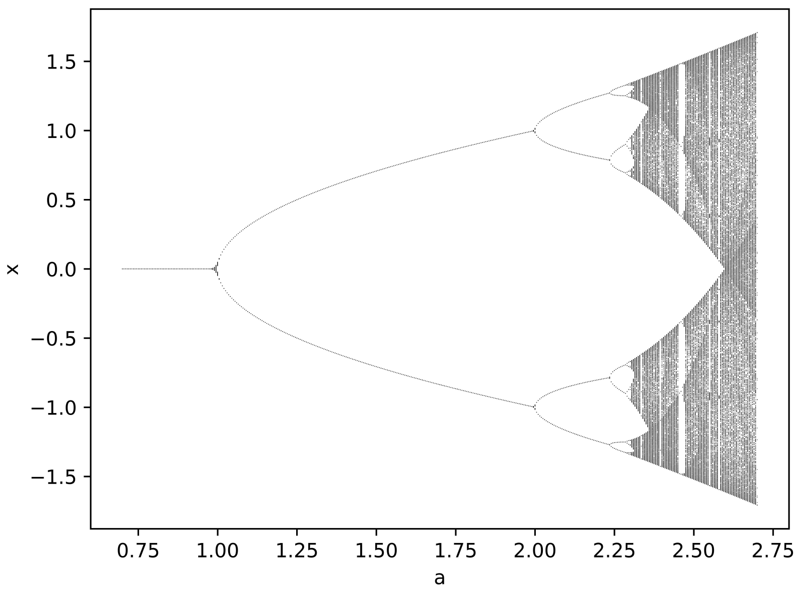
...



Rys. 6: Wykres $x_n(n)$, dla a = 2.83.

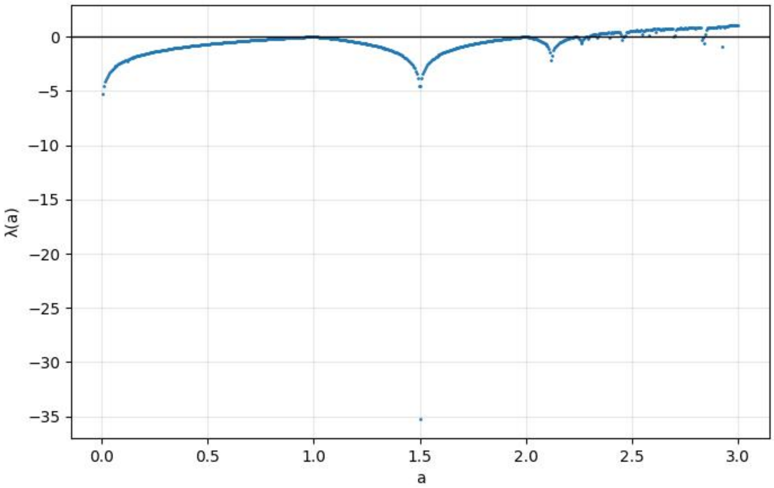
Powyższe wykresy potwierdzają analizę analityczną wykonaną w zadaniu 1. Dla a = 0.9, widzimy, że punkt $x_1 = 0$, jest stabilny, natomiast dla $a > 1$ staje się niestabilny. Z kolei punkty x_2 oraz x_3 nie istnieją dla a = 0.9, są stabilne dla a = 1.1, a następnie stają się niestabilne dla a>2. Widzimy również, że dla a>2, x_2 oraz x_3 "zmieniają się"w cykle periodyczne (tak jest dla a = 2.1, 2.46, 2.83). Dla a = 2.62 obserwujemy natomiast chaos.

Zadanie 4



Rys. 7: Diagram bifurkacyjny.

Zadanie 5



Rys. 8: Zależność wykładnika Lapunowa od parametru a, dla $x_0 = 0.2$.

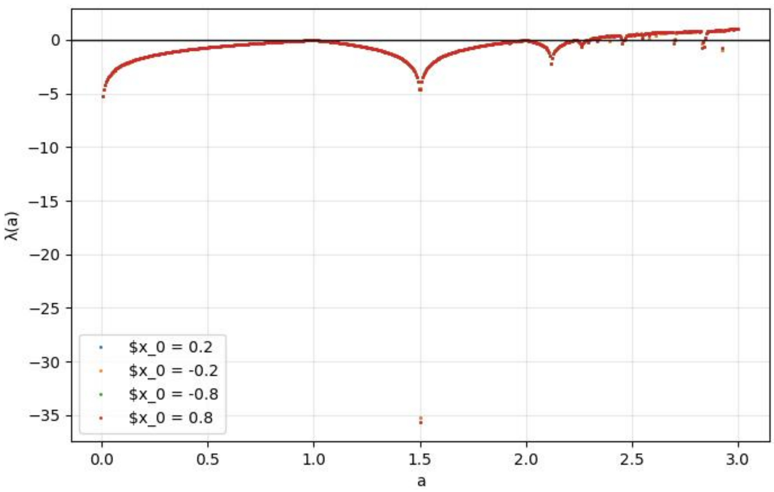
Zadanie 6

a	λ
0.9	-0.105361
1.1	-0.223144
2.1	-0.857399
2.46	-0.0297665
2.62	0.737786
2.83	-0.829958

Tabela 1: Wartości parametru a oraz odpowiadającego mu wykładnika Lapunowa λ, dla $x_0 = 0.2$.

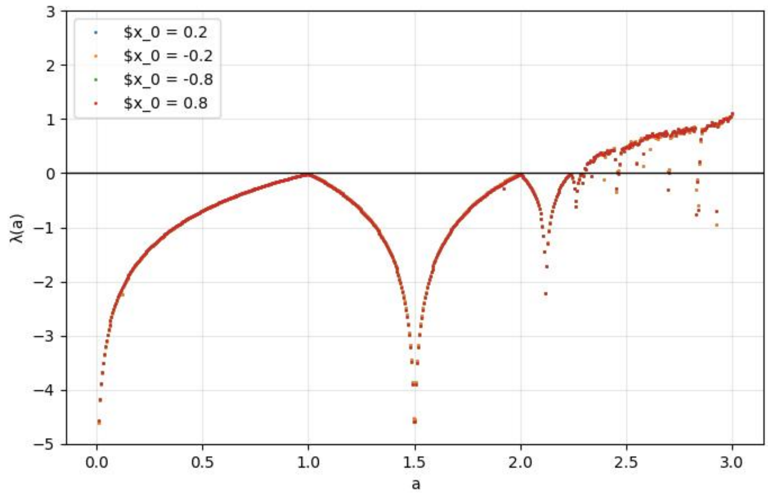
Widzimy zatem, że zgodnie z analizą w zadaniu 3, chaos obserwujemy jedynie dla a $= 2.62$ (jeżeli $\lambda < 0$ to trajektoria zbiega do czegoś stabilnego). Dla innych a pojawiają się albo punkty stabilne, albo periodyczne cykle stabilne.

Zadanie 7

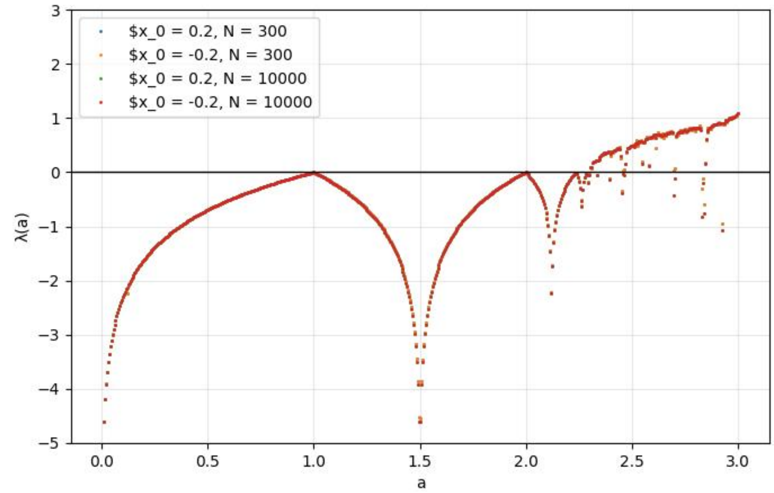


Rys. 9: Zależność wykładnika Lapunowa od paramameru a, dla różnych punktów początkowych x_0.

Na powyższym oraz poniższych wykresach widzimy, że dla różnych x_0 oraz N wartości parametru λ mogą się nieznacznie różnić. Różnice są niewielkie, ale wydaje się, że w pewnych przypadkach (na przykład dla większych a, gdzie pojawia się już chaos) mogą sprawić, że mylnie określona zostanie stabilność badanej trajektorii. Aby mieć jak największą pewność, że wyniki są prawidłowe, należy dobrać w miarę możliwości jak największą liczbę kroków N.



Rys. 10: Zależność wykładnika Lapunowa od paramameru a, dla różnych punktów początkowych x_0 (przybliżenie).



Rys. 11: Zależność wykładnika Lapunowa od paramaeru a, dla różnych punktów początkowych x_0 oraz dla różnych N.