Fizyka układów złożonych
Dwuwymiarowy model Isinga

Krzysztof Malarz

W przypadku dwuwymiarowym, eneriga całkowita kwadratowej sieci L^2 oddziaływujących spinów σ_i wynosi

$$E = -\frac{1}{2}\sum_{(i,j)} J_{i,j}\sigma_i\sigma_j - \sum_i B\sigma_i, \tag{1}$$

gdzie zmienne spinowe σ_i przyjmują wartości ± 1, $J_{i,j}$ jest tak zwaną całką wymiany, a B natężeniem zewnętrznego pola magnetycznego a w pierwsze sumowanie odbywa się po parach najbliższych sąsiadów (sąsiedztwo von Neumanna — (x, y) ma czterech sąsiadów: $(x-1, y)$, $(x+1, y)$, $(x, y-1)$, $(x, y+1)$).

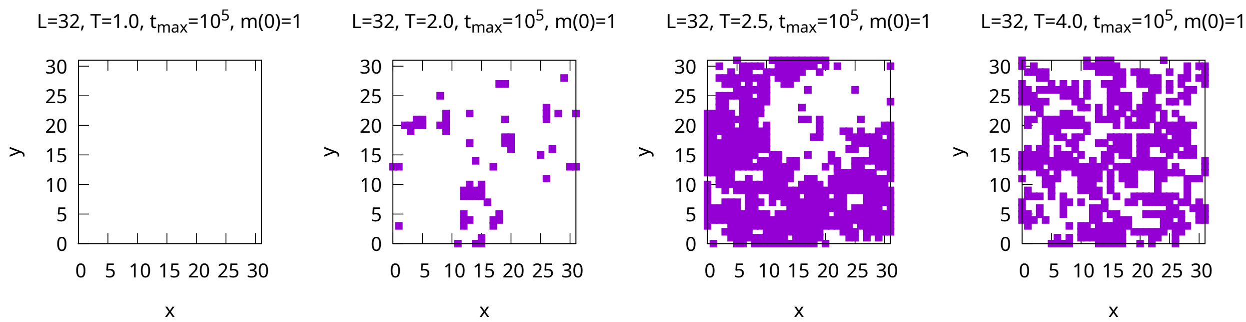
Załóżmy brak pola magnetycznego $B = 0$, układ składający się z $N = L^2 = (32)^2$ spinów i taką samą wartość całek wymiany między każdą parą najbliższych sąsiadów spinów $J_{i,j} = J = 1$ oraz $k_B = 1$. (Te dwie ostatnie równości, są tożsame z przyjęciem jednostek, w których temperatura mierzona jest w jednostkach $[J/k_B]$.) Zakładamy periodyczne warunki brzegowe. Tak jak poprzednio ewolucję czasową układu prowadzimy w oparciu o schemat Metropolisa.

Zadanie 1 (25 pkt.): Zaczynamy od stablicowania prawdopodbieństwa akceptacji $p(\Delta E)$ stanu próbnego. Proszę wypisać tablice prawdopodobieńswa $p(\Delta E)$ dla $T = 1{,}0;\ 2{,}0;\ 2{,}5;\ 4{,}0$. Powinno da się zauważyć pewną symetrię: prawdopodobieństwa te są zależne od sumę zmiennych spinowych σ_j w czterech najbliższych sąsiadach i niezależnie od ich przestrzennego rozłożenia:

- same $+1$: $\sum_j \sigma_j = +4$;
- trzy $+1$ i jedna -1: $\sum_j \sigma_j = +2$;
- dwie $+1$ i dwie -1: $\sum_j \sigma_j = 0$;
- trzy -1 i jedna $+1$: $\sum_j \sigma_j = -2$;
- same -1: $\sum_j \sigma_j = -4$.

Zadanie 2 (25 pkt.): Początkowo ustawiamy wszystkie spiny na wartość $+1$. Obserwujemy ewolucję czasową gęstości namagnesowania $m(t) = L^{-2}M(t) = L^{-2}\sum_i \sigma_i(t)$ przez pierwsze 10^5 MCS dla $T = 1{,}0;\ 2{,}0;\ 2{,}5;\ 4{,}0$. Zapisujemy stan sieci w postaci $(x, y, \sigma(x, y))$ na końcu symulacji.

Zadanie 3 (25 pkt.): Wizualizujemy mapę wartości spinowych σ_i dla $T = 1{,}0;\ 2{,}0;\ 2{,}5;\ 4{,}0$ na końcu symulacji (np. stawiając czarną kropkę w pozycjach (x, y), dla których $\sigma(x, y) = -1$).



Zadanie 4 (25 pkt.): Automatyzujemy proces wyliczania średniej czasowej $\langle M(t)\rangle$ oraz $\langle M^2(t)\rangle$ dla T od 0,25 do 4,0 co 0,25 z $\tau = 10^4$ ostatnich spośród 10^5 MCS i sporządzamy wykres gęstości namagnesowania

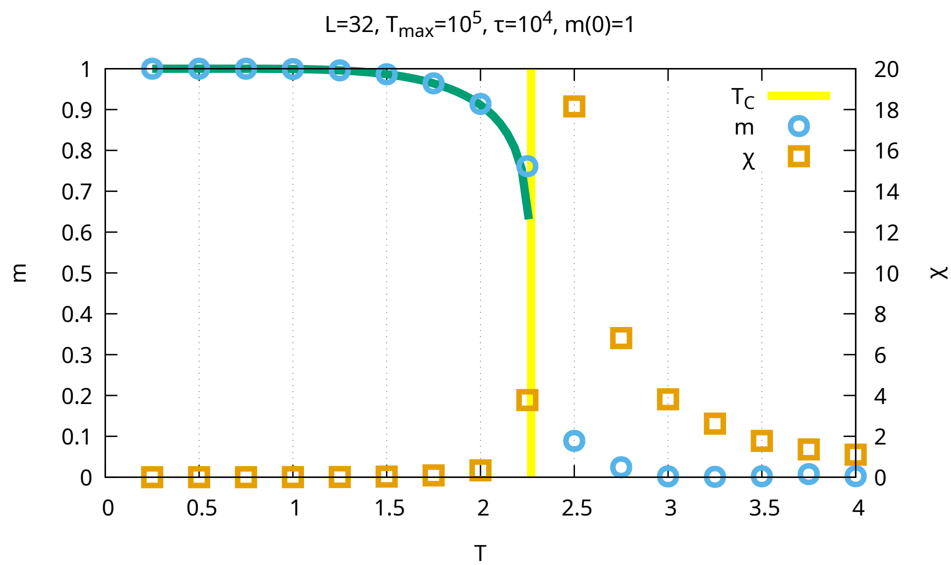
$$m(T) = \frac{1}{L^2} \cdot \langle M(t)\rangle$$

oraz podatności magnetycznej

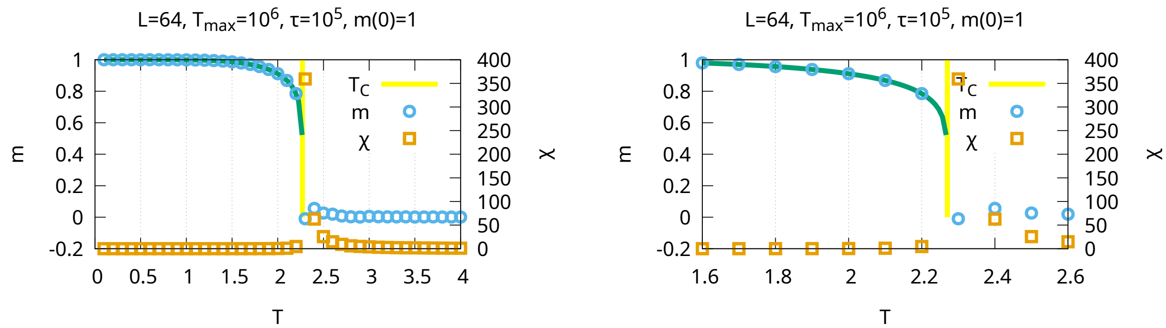
$$\chi(T) = \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{L^2} \cdot \left(\langle M^2(t)\rangle - \langle M(t)\rangle^2\right)$$

od temperatury T. Analityczna postać zależności namagnesowania od tempreatury to

$$m(T) = \begin{cases} \sqrt[8]{1-\sinh^{-4}(2/T)} & \text{dla } T < T_C, \\ 0 & \text{dla } T > T_C. \end{cases}$$



Poniżej przykłady tych zależności dla $L = 64$ przy dziesięciokrotnie dłuższym czasie symulacji i dziesięciokrotnie dłuższym czasie τ.


L=64, T_max=10^6, τ=10^5, m(0)=1
m
χ
T
T_C
m
χ
L=64, T_max=10^6, τ=10^5, m(0)=1
m
χ
T
T_C
m
χ