

Projekt 10: Propagacja sygnału elektrycznego w linii transmisyjnej.

Kacper Połuszejko, 412183

1 Wstęp

1.1 Sformułowanie różniczkowe problemu

Sygnał elektryczny przemieszczający się w jednowymiarowej linii transmisyjnej opisujemy przy użyciu rozkładu napięcia $u(x, t)$ oraz prądu $i(x, t)$. Obie wielkości są ze sobą ściśle związane, gdyż stanowią rozwiązanie układu równań różniczkowych stanowiących tzw. równanie telegrafistów

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -L \frac{\partial i}{\partial t} - Ri \quad (1)$$

$$\frac{\partial i}{\partial x} = -C \frac{\partial u}{\partial t} - Gu \quad (2)$$

gdzie: L , C , R , G to indukcyjność, pojemność, opór i konduktancja linii na jednostkę długości. Dokonujemy transformacji

$$f(x, t) = \frac{1}{2} (u + R_0 i) \quad (3)$$

$$b(x, t) = \frac{1}{2} (u - R_0 i) \quad (4)$$

gdzie:

$$R_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (5)$$

a $f(x, t)$ to rozwiązanie przemieszczające się w kierunku dodatnich wartości x -a (forward), a $b(x, t)$ porusza się w przeciwną stronę (backward). Prowadzi to do alternatywnego układu równań różniczkowych

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -c \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda b - (\lambda + \mu) f \quad (6)$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} = c \frac{\partial b}{\partial x} + \lambda f - (\lambda + \mu) b \quad (7)$$

gdzie:

$$c = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (8)$$

$$\mu = \frac{G}{C} \quad (9)$$

$$\lambda = \frac{1}{2} \left(\frac{R}{L} - \frac{G}{C} \right) \quad (10)$$

1.2 Sformułowanie całkowe problemu

Stosując metodę linii przekształcamy problem różniczkowy do postaci całkowej

$$f(x, t) = f_0(x - ct)e^{-(\lambda+\mu)t} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \int_0^t (\lambda + \mu)e^{-(\lambda+\mu)s} b(x - cs, t - s) ds, \quad (f_0(x) = f(x, 0)) \quad (11)$$

$$b(x, t) = b_0(x + ct)e^{-(\lambda+\mu)t} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \int_0^t (\lambda + \mu)e^{-(\lambda+\mu)s} f(x + cs, t - s) ds, \quad (b_0(x) = b(x, 0)) \quad (12)$$

Zauważmy, że pod obiema całkami znajduje się fgp

$$p(s) = (\lambda + \mu)e^{-(\lambda+\mu)s} \quad (13)$$

którą wykorzystujemy do określenia dwóch prawdopodobieństw

$$P_1 = P\{s \leq t\} = \int_0^t p(s) ds = 1 - e^{-(\lambda+\mu)t} \quad (14)$$

$$P_2 = P\{s > t\} = 1 - P\{s \leq t\} = e^{-(\lambda+\mu)t} \quad (15)$$

Możemy je wykorzystać do określenia wkładów pierwszego (f_0 lub b_0) i drugiego wyrazu (całka) do rozwiązania. W tym celu losujemy zmienną z rozkładu wykładniczego

$$s = \frac{-\ln U_1}{\lambda + \mu}, \quad U_1 \sim U(0, 1) \quad (16)$$

i określamy wkład do rozwiązania $f(x, t)$

$$\begin{cases} s \leq t, & f(x, t) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} b(x - cs, t - s) \\ s > t, & f(x, t) = f_0(x - ct) \end{cases} \quad (17)$$

lub $b(x, t)$

$$\begin{cases} s \leq t, & b(x, t) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} f(x + cs, t - s) \\ s > t, & b(x, t) = b_0(x + ct) \end{cases} \quad (18)$$

Rozwiązanie układów równań odbywa się rekurencyjnie poprzez naprzemienne wzajemne wywołania funkcji f i b .

1.3 Warunki brzegowe

Układ rozciąga się w obszarze $x \in [0, l]$. W $x = 0$ zlokalizowane jest źródło napięcia $V_g(t)$ o oporze własnym R_g , które powoduje spadek potencjału

$$u(0, t) = V_g(t) - i(0, t)R_g \quad (19)$$

natomiast na wyjściu dołączony jest opornik R_l , który wpływa na wartość prądu

$$i(l, t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(l, \tau) h(t - \tau) d\tau \quad (20)$$

gdzie: $h(t - \tau) = \delta(t - \tau)/R_l$ jest funkcją odpowiedzi odbiornika na impuls napięciowy (δ – delta Diraca). Po wykonaniu transformacji $(u, i) \rightarrow (f, b)$ dostajemy warunki:

- na lewym brzegu skąd pochodzi sygnał propagujący się w prawo ($f(x, t)$)

$$f(0, t) = V_g(t) + \Gamma_g b(0, t) \quad (21)$$

- na prawym brzegu gdzie generuje się sygnał $b(x, t)$ przemieszczający się w kierunku wstecznym

$$b(l, t) = \Gamma_l f(l, t) \quad (22)$$

gdzie:

$$R_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (23)$$

$$\zeta = R_0 + R_g \quad (24)$$

$$\Gamma_g = \frac{R_g - R_0}{R_g + R_0} \quad (25)$$

$$\Gamma_l = \frac{R_l - R_0}{R_l + R_0} \quad (26)$$

Warunki brzegowe uwzględniamy następująco:

- w przypadku gdy $x - cs < 0$ wówczas na lewym brzegu następuje odbicie $f \rightarrow \Gamma_g b$ a do rozwiązania należy dodać wkład od źródła napięcia $V_g(t)$
- jeśli rozwiązanie przekroczy prawy brzeg $x + cs > l$ wówczas również następuje odbicie sygnału $b \rightarrow \Gamma_l f$

Ponieważ na brzegach umieszczone są opory więc za każdym razem gdy sygnał dotrze do brzegu jego amplituda maleje ze względu na straty energii, współczynniki osłabienia sygnału to Γ_g i Γ_l , źródło napięcia V_g natomiast generuje sygnał na wejściu.

2 Metodyka

Do obliczeń przyjęto następujące parametry linii: $L = 0.25 \mu H$, $C = 100 pF$, $R = 12.5 \Omega$, $G = 0.5 mS$, $l = 2 m$ oraz opory: odbiornika $R_l = 12.5 \Omega$, generatora $R_g = 75 \Omega$. Potencjał generowany przez źródło napięcia opisano funkcją

$$V_g(t) = \sin(2\pi\nu t) \exp\left(-\frac{(t - t_0)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (27)$$

gdzie: $\nu = 1 GHz$ to częstotliwość, $t_0 = 7.5 ns$, $\sigma = 0.75 ns$.

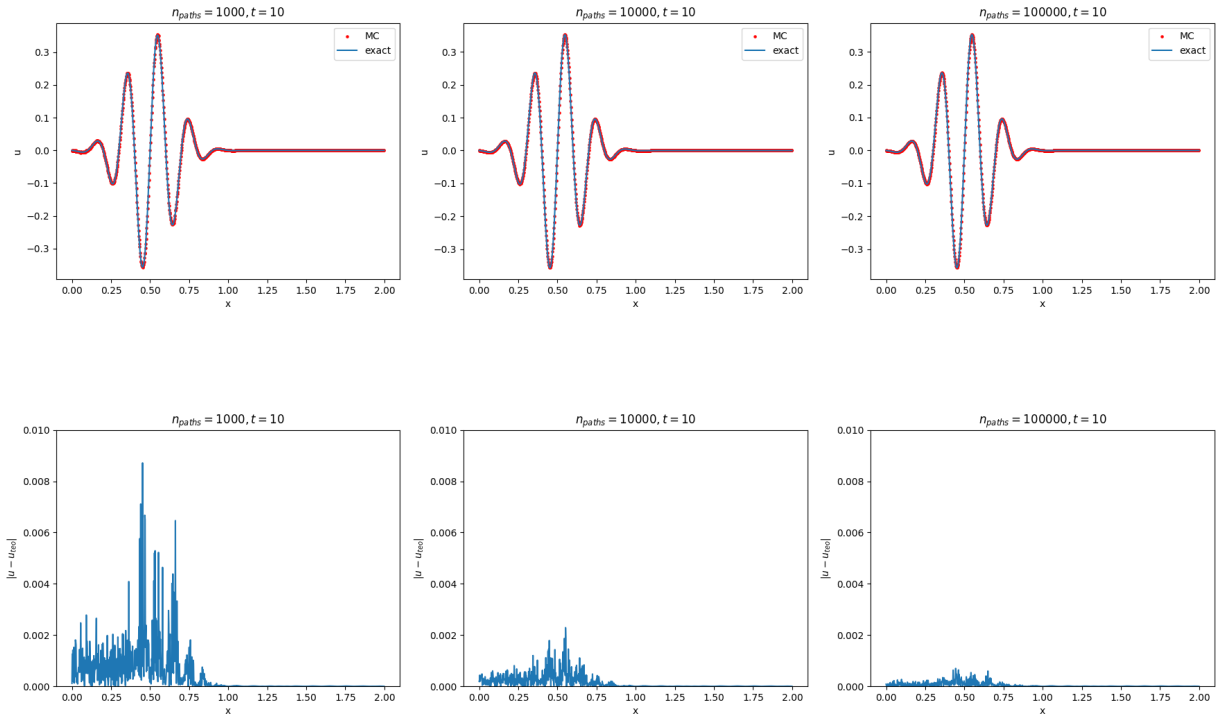
Wykonano symulacje metodą Monte Carlo w celu określenia rozkładu napięcia wzdłuż całej linii transmisyjnej dla wybranych chwil czasowych: $t = 10, 15, 25, 35, 50 ns$ oraz liczby ścieżek $npaths = 10^3, 10^4, 10^5$.

Rozkład napięcia wyznaczano ze wzoru:

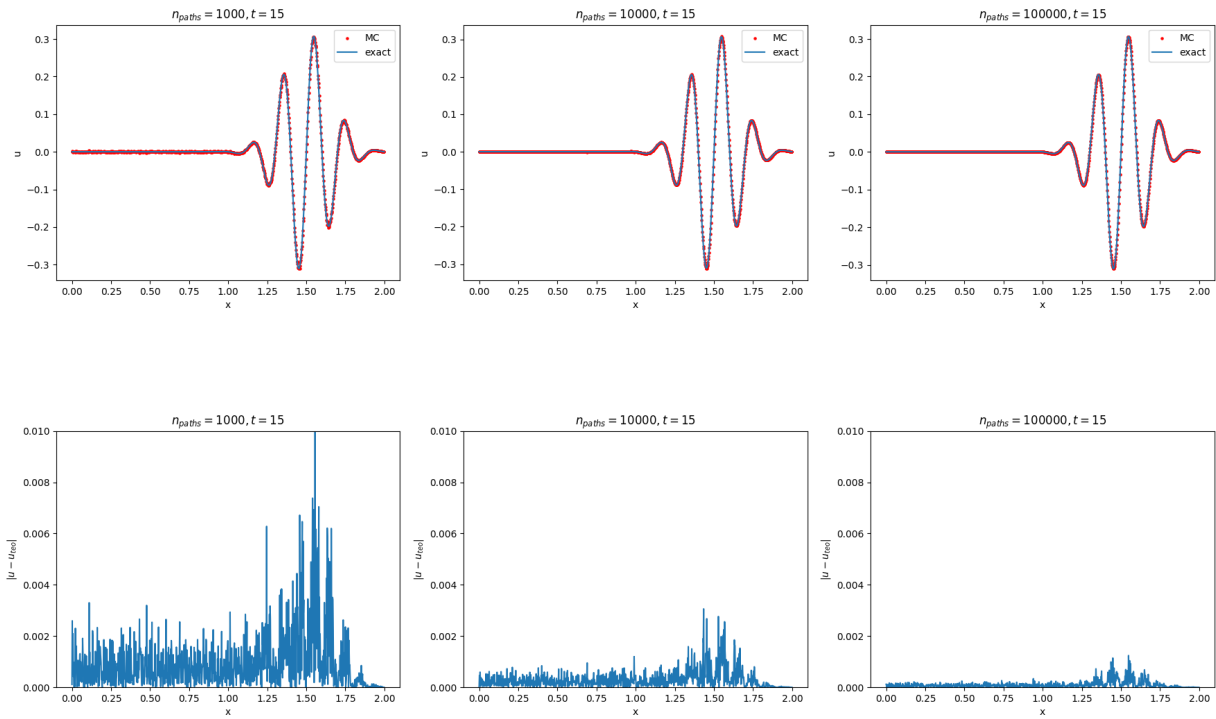
$$u(x, t) = f(x, t) + b(x, t) \quad (28)$$

Wyniki symulacji porównano z rozwiązaniem dokładnym wyznaczonym przy użyciu gotowej procedury.

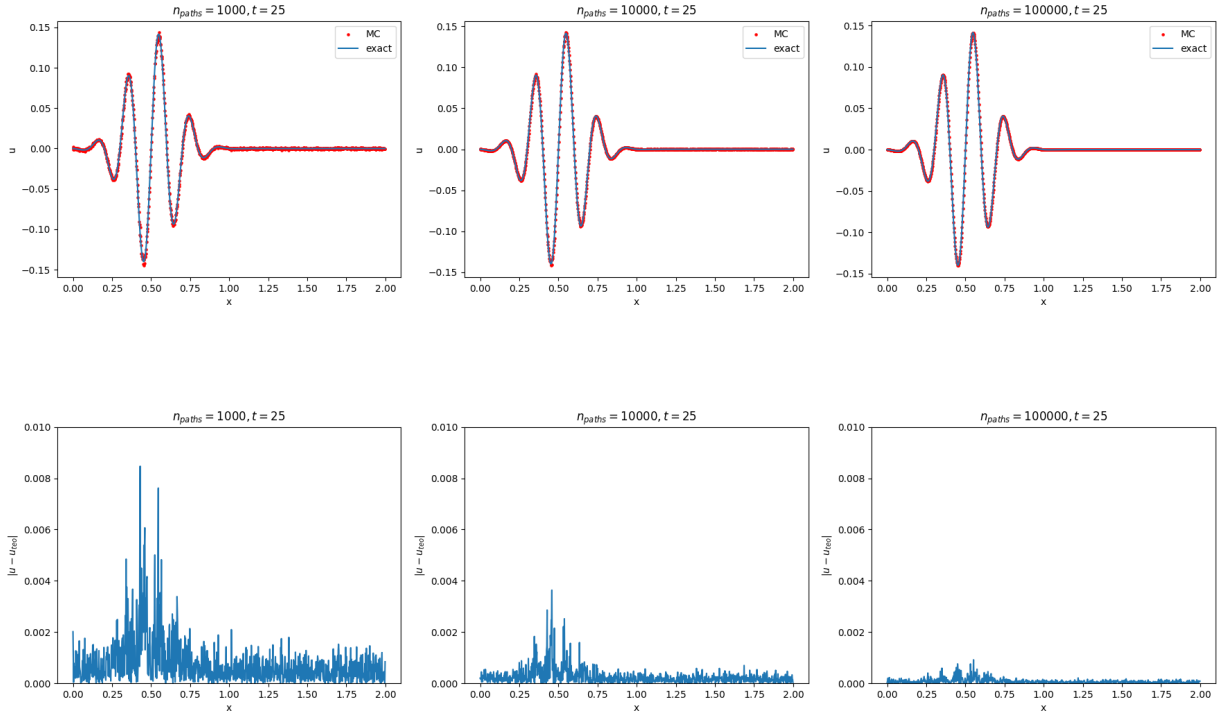
3 Wyniki



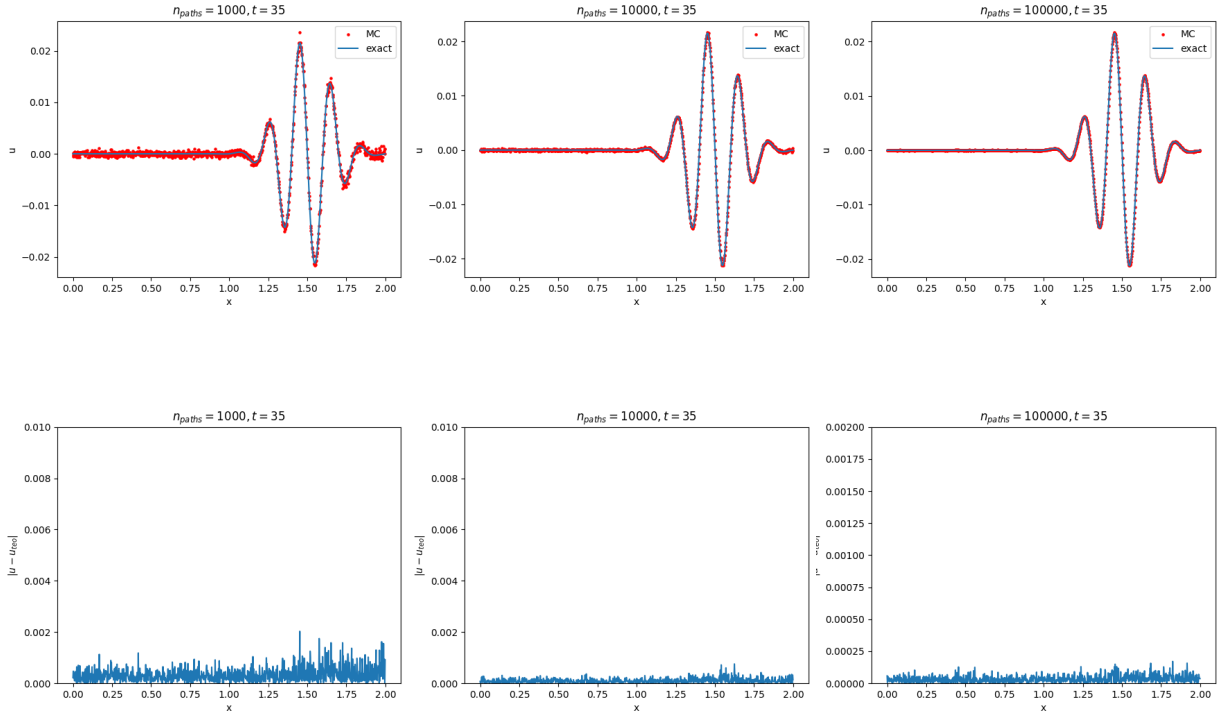
Rys. 1: Wyniki oraz wartości błęd bezwzględnych dla $t = 10$ ns.



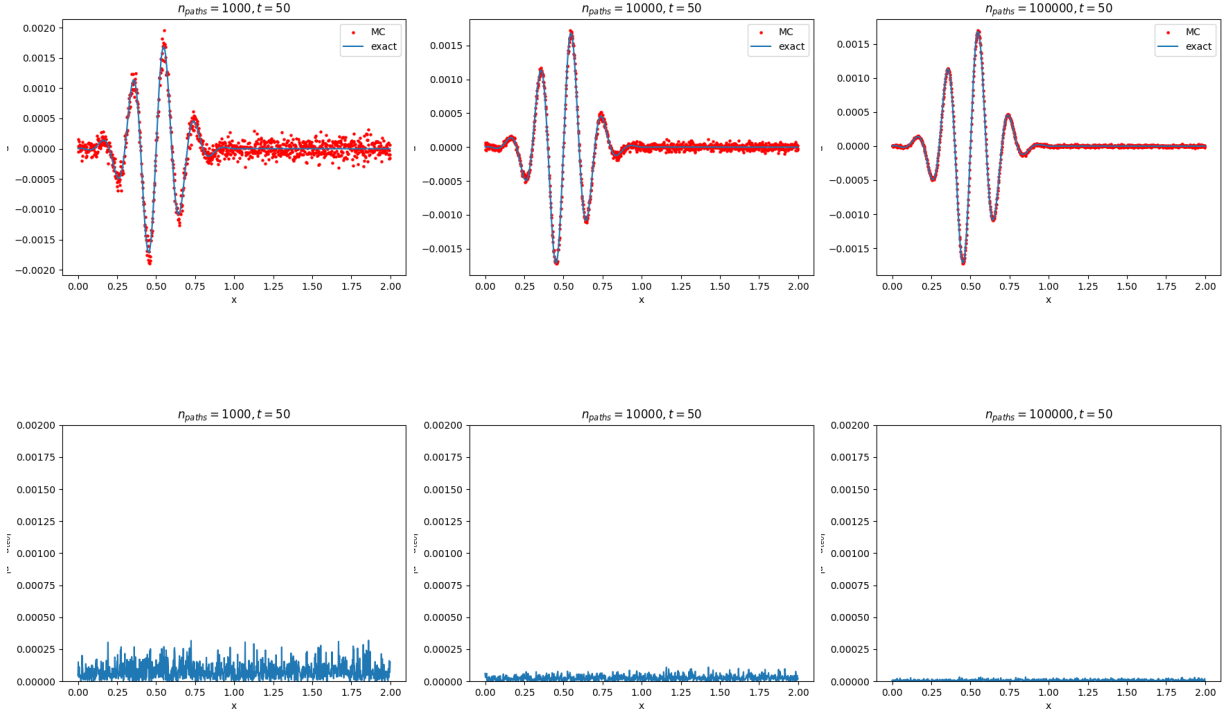
Rys. 2: Wyniki oraz wartości błęd bezwzględnych dla $t = 15$ ns.



Rys. 3: Wyniki oraz wartości błędu bezwzględnego dla $t = 25$ ns.



Rys. 4: Wyniki oraz wartości błędu bezwzględnego dla $t = 35$ ns.



Rys. 5: Wyniki oraz wartości błędu bezwzględnego dla $t = 50ns$.

Jak widać na powyższych rysunkach, różnice między wartościami dokładnymi a tymi pochodzącymi z symulacji MC są raczej niewielkie. Dodatkowo, jak można było się spodziewać, wyraźnie maleją wraz ze zwiększaniem liczby ścieżek n_{paths} . Wyniki są również zgodne z przewidywaniami teoretycznymi. Sygnał elektryczny wędruje wzdłuż linii długiej, a następnie się odbija (na rysunku 3 mamy już sygnał odbity). Po każdym odbiciu maleje również jego amplituda (dlatego maleje również błąd bezwzględny).

Podsumowując, metoda MC jest dobrą alternatywą dla metody różnic skończonych. Dodatkową zaletą jest fakt, metoda ta pozwala na wyznaczenie napięcia u w dowolnej chwili t oraz dowolnym miejscu x bez konieczności wyznaczania u w innym miejscu przestrzeni x lub t .