Projekt 3: Generatory liczb pseudolosowych: rozkłady skorelowane w 2D.

Kacper Połuszejko, 412183

Wstęp

Celem ćwiczenia było wygenerowanie rozkładów dwuwymiarowych: normalnego, jednorodnego w kole 2D, oraz transformację afiniczną (koło –> elipsa), a także wyznaczenie macierzy kowariancji (dla tej ostatniej).

1 Metodyka

1.1 Rozkład sferycznie konturowany - normalny

Stosujemy metodę Boxa-Mullera:

$$\begin{gathered} U_1 \sim U(0,1), \quad U_2 \sim U(0,1) \\ X = \sqrt{-2\ln(1-U_1)}\cos(2\pi U_2), \quad X \sim N(0,1) \\ Y = \sqrt{-2\ln(1-U_1)}\sin(2\pi U_2), \quad Y \sim N(0,1) \end{gathered} \tag{1}$$

Wektory (X, Y) mają rozkład sferycznie konturowany, ponieważ ich gęstość zależy tylko od odległości od środka rozkładu.

1.2 Rozkład jednorodny w kole

Na podstawie rozkładu sferycznie konturowanego można umieścić wygenerowane punkty na obwodzie okręgu o promieniu jednostkowym, normalizując zmienne:

$$\begin{aligned} X' &= \frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2}} \\ Y' &= \frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2}} \end{aligned} \tag{2}$$

Następnie można przesunąć je do środka okręgu, skalując zmienne w następujący sposób:

$$\begin{gathered} X'' = RX' \\ Y'' = RY' \\ R = \sqrt{U1}, \quad U1 \sim U(0,1) \end{gathered} \tag{3}$$

Wektory (X'', Y'') mają rozkład jednorodny w kole o promieniu jednostkowym.

1.3 Transformacja afiniczna: koło → elipsa

Rozkład dwuwymiarowy możemy podać transformacji liniowej (afinicznej), która przekształci koło w elipsę. Docelowy kształt elipsy definiujemy, podając macierz transformacji $A = [\vec{r_1}, \vec{r_2}]$, gdzie $\vec{r_1}$ i $\vec{r_2}$ to wektory określające półosie główne.
Macierz A określa więc obrót oraz skalowanie wzdłuż półosi głównych.

Ponieważ półosie główne elipsy muszą być ortogonalne, tak jak wersory układu kartezjańskiego, wystarczy więc tylko obrócić je o zadany kąt α przy użyciu macierzy obrotu R_α i przeskalować ich długości:

$$\begin{aligned} \vec{r_1} &= b_1 R_\alpha \hat{e}_x, \quad \hat{e}_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^T \\ \vec{r_2} &= b_2 R_\alpha \hat{e}_y, \quad \hat{e}_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}^T \\ R_\alpha &= \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}, \quad \alpha \in [0, 2\pi] \end{aligned} \tag{4}$$

gdzie b_1 i b_2 to współczynniki skalujące.

1.4 Macierz kowariancji

Macierz kowariancji ma postać:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_y^2 \end{bmatrix}, \qquad \sigma_{xy} = \sigma_{yx}, \tag{5}$$

jej elementy możemy wykorzystać do wyznaczenia współczynnika korelacji:

$$r_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sqrt{\sigma_x^2 \sigma_y^2}}. \tag{6}$$

Macierz kowariancji można wyznaczyć ze wzoru:

$$\Sigma = ADA^T,$$

gdzie A jest macierzą transformacji.
Dla pierwotnego rozkładu $N^2(0, 1)$ macierz D jest postaci:

$$D = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & 0 \\ 0 & \sigma_y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

w związku z tym Σ ma prostą konstrukcję

$$\Sigma = AA^T \quad \rightarrow \quad \Sigma^{-1} = (A^T)^{-1} A^{-1}$$

Jeśli oznaczymy

$$A^{-1} \vec{r'} = \vec{z}$$

to losując wektory $\vec{z}$ z rozkładu $N^2(0, 1)$ dostaniemy rozkład skorelowany

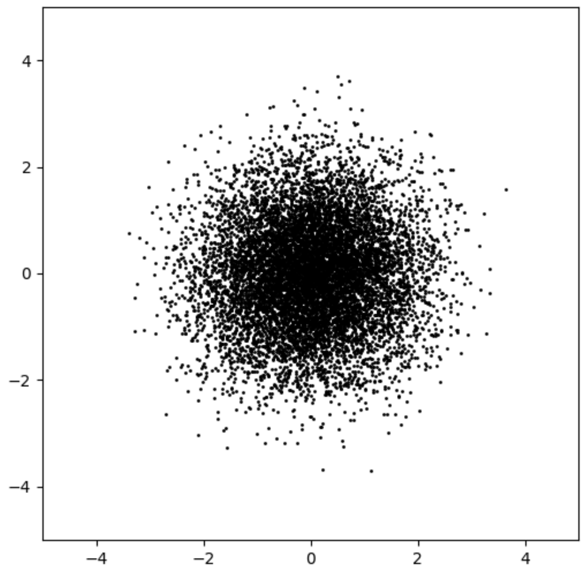
$$\vec{r'} = A\vec{z}$$

określony macierzą kowariancji $\Sigma = AA^T$

2 Wyniki

2.1 Rozkład sferycznie konturowany - normalny

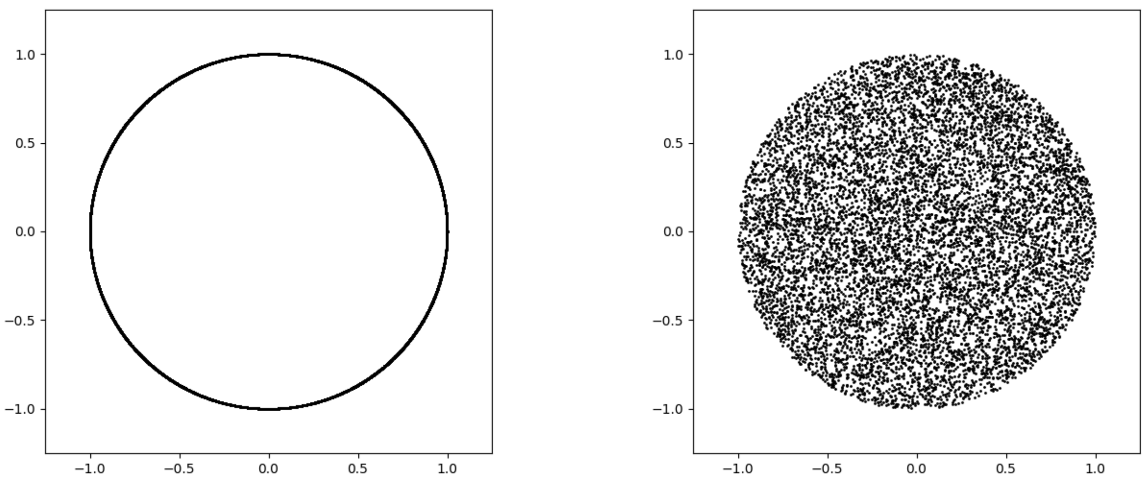
Wylosowano $n = 10^4$ punktów z dwuwymiarowego rozkładu normalnego $N^2(0, 1)$ przy użyciu metody Boxa-Mullera.



Rys. 1: Rozkład normalny w 2D wygenerowany za pomocą metody Boza-Mullera (1)

2.2 Rozkład jednorodny w kole

Za pomocą wzorów (2) oraz (3) wygenerowano rozkład jednorodny na okręgu oraz w kole.



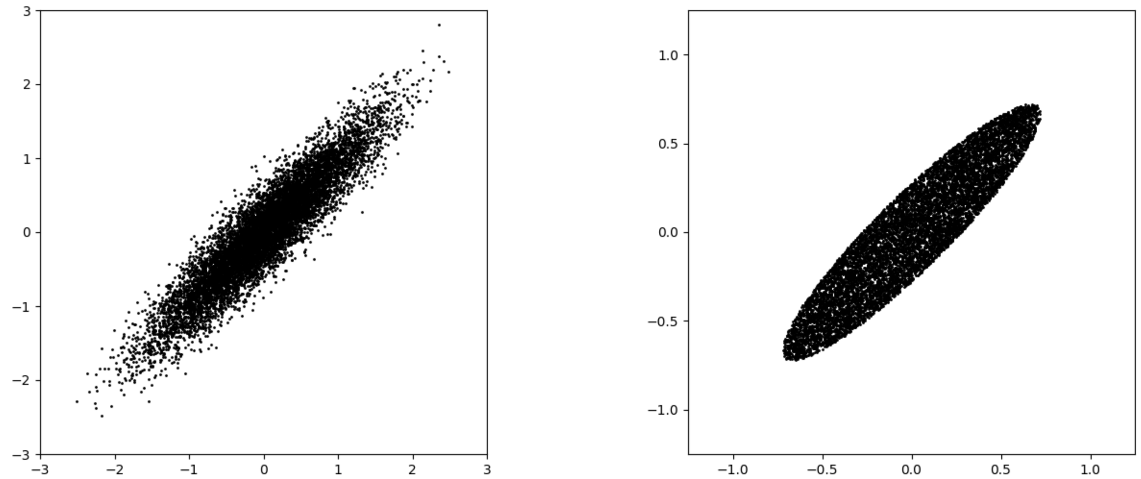
Rys. 2: Rozkład jednorodny na okręgu (po lewej) oraz w kole (po prawej).

2.3 Transformacja afiniczna

Za pomocą wzorów 4 dokonano transformacji dwóch rozkładów: normalnego w 2D (**Rys. 1**) oraz jednorodnego w kole (**Rys. 2**). Przyjęte parametry: $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $b_1 = 1$, $b_2 = 0.2$.

Macierz transformacji A wyniosła więc:

$$A = \begin{bmatrix} 0.71 & -0.14 \\ 0.71 & 0.14 \end{bmatrix}.$$



Rys. 3: Przetransformowany rozkład normalny $N^2(0,1)$ (po lewej) oraz rozkład skorelowany w elipsie (po prawej).

2.4 Macierz kowariancji oraz współczynnik korelacji

2.4.1 Rozkład skorelowany w elipsie

Macierz kowariancji wyniosła:

$$\Sigma \simeq \begin{bmatrix} 0.13 & 0.12 \\ 0.12 & 0.13 \end{bmatrix}.$$

Współczynnik korelacji: $r_{xy} \simeq 0.92$.

2.4.2 Skorelowany rozkład gaussa

Macierz kowariancji wyniosła:

$$\Sigma \simeq \begin{bmatrix} 0.52 & 0.48 \\ 0.48 & 0.53 \end{bmatrix}.$$

Co jest w przybliżeniu równe teoretycznemu wyrażeniu $\Sigma = AA^T$.

Współczynnik korelacji: $r_{xy} \simeq 0.92$.