# Projekt 4: Proste całkownie z szacowaniem wariancji.

Kacper Połuszejko, 412183

## Wstęp

Celem ćwiczenia było oszacowanie powierzchni części wspólnej dwóch kół metodą całkowania Monte Carlo.

Koła na płaszczyźnie definiujemy w następujący sposób:

$$K_A = \left\{(x, y) : (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 \leq R_A^2\right\} \tag{1}$$

$$K_B = \left\{(x, y) : (x - x_B)^2 + (y - y_B)^2 \leq R_B^2\right\} \tag{2}$$

# 1 Metodyka

## 1.1 Generator rozkładu jednorodnego w kole

Do wygenerowania punktów w danym kole wykorzystujemy rozkład jednorodny sferycznie konturowany. Losowanie przeprowadzamy na podstawie poniższego algorytmu.

$$\begin{aligned}
u_1, u_2 &\sim U(0,1) \\
x &= \sqrt{-2\ln(u_1)}\sin(2\pi u_2) \\
y &= \sqrt{-2\ln(u_1)}\cos(2\pi u_2) \\
r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\
x &\leftarrow \frac{x}{r} \\
y &\leftarrow \frac{y}{r}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_3 &\sim U(0,1) \\
q &= \sqrt{u_3} \\
x &\leftarrow q \cdot x \cdot R_\alpha + x_\alpha \\
y &\leftarrow q \cdot y \cdot R_\alpha + y_\alpha
\end{aligned}$$

## 1.2 Powierzchnia części wspólnej

Powierzchnię koła znajdziemy licząc całkę po powierzchni koła $K_\alpha$

$$S_\alpha = \iint\limits_{(x,y)\in K_\alpha} 1\, dx\, dy = \iint\limits_{(x,y)\in K_\alpha} \frac{1}{f_\alpha(x,y)} f_\alpha(x,y)\, dx\, dy = \pi R_\alpha^2 \iint\limits_{(x,y)\in K_\alpha} f_\alpha(x,y)\, dx\, dy, \tag{3}$$

gdzie $f_\alpha(x,y) = const = C = \frac{1}{\pi R_\alpha^2}$ jest fgp rozkładu jednorodnego w kole.

Analogicznie możemy zdefiniować całkę powierzchniową dla części wspólnej

$$S_{\alpha,\beta} = \pi R_\alpha^2 \iint\limits_{(x,y)\in K_\alpha} \theta_{\alpha,\beta}(x,y)\, dx\, dy \tag{4}$$

$$\theta_{\alpha,\beta}(x,y) = \begin{cases} 1 & \Leftrightarrow (x,y) \in K_\alpha \wedge (x,y) \in K_\beta \\ 0 & \text{w przeciwnym wypadku} \end{cases} \tag{5}$$

$\theta$ pełni rolę funkcji wskaźnikowej o wartości binarnej (metoda eliminacji). Pole powierzchni części wspólnej w MC liczymy jako średnią z $N$ wartości funkcji podcałkowej ($\mu^{(1)}$ - pierwszy moment rozkładu)

$$\mu^{(1)} = \bar{S}_{\alpha,\beta} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \pi R_\alpha^2 \theta_{\alpha,\beta}(x_i,y_i) \tag{6}$$

gdzie punkty $(x_i, y_i)$ losujemy z rozkładu jednorodnego w kole $K_\alpha$. Analogicznie liczymy drugi moment, uwzględniając własność $\theta_{\alpha,\beta}^2 = \theta_{\alpha,\beta}$

$$\mu^{(2)} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \left(\pi R_\alpha^2 \theta_{\alpha,\beta}(x_i,y_i)\right)^2 = \pi R_\alpha^2 \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \pi R_\alpha^2 \theta_{\alpha,\beta}(x_i,y_i)\right) = \pi R_\alpha^2 \mu^{(1)} \tag{7}$$

Mając pierwszy i drugi moment możemy policzyć wariację wartości średniej

$$\sigma_{S_{\alpha,\beta}}^2 = \frac{\mu^{(2)} - \left(\mu^{(1)}\right)^2}{N} \tag{8}$$

i odchylenie standardowe wartości średniej

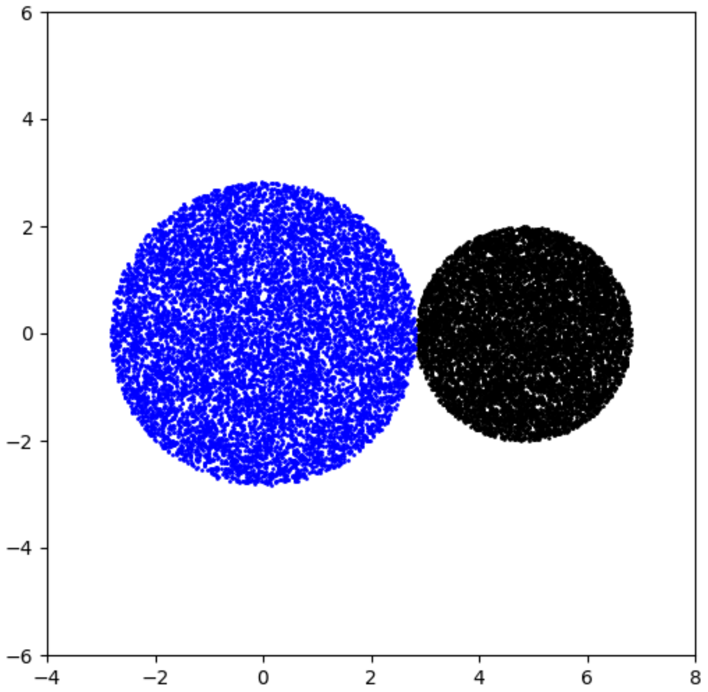
$$\sigma_{S_{\alpha,\beta}} = \sqrt{\frac{\mu^{(2)} - \left(\mu^{(1)}\right)^2}{N}} \tag{9}$$

# 2 Wyniki

W obliczeniach przyjęto parametry:
$R_A = 2, R_B = \sqrt{2}R_A, \vec{r_A} = [x_a, 0], \vec{r_B} = [0, 0]$.

## 2.1 Test generatora

Przeprowadzono test generatora przyjmując parametry $x_a = R_a + R_b$ oraz $N = 10^4$.




**Rys. 1:** Rozkład jednorodny w kole $K_A$ oraz $K_B$.

Jak widać na powyższym rysunku, wyniki zgadzają się z przewidywaniami, generatory działają więc poprawnie.

## 2.2 Pole powierzchni części wspólnej

Na podstawie wzorów (6) oraz (9) obliczono średnią oraz jej odchylenie standardowe dla czterech przypadków ($N = 10^6$):

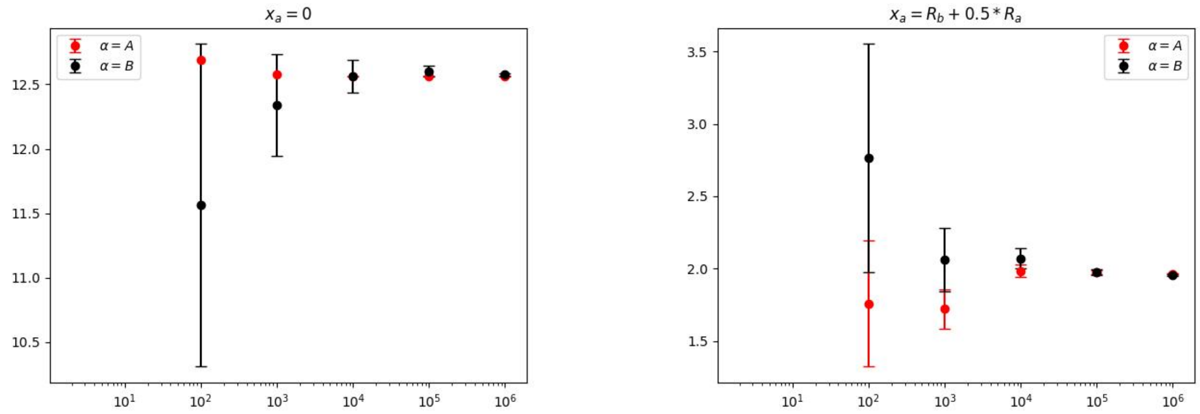
a) $\alpha = A,\ x_A = R_B + 0.5 \cdot R_A$

b) $\alpha = A,\ x_A = 0$

c) $\alpha = B,\ x_A = R_B + 0.5 \cdot R_A$

d) $\alpha = B,\ x_A = 0$

Otrzymane wyniki:




**Rys. 2:** Wspołna powierzchnia dla całkowitego (po lewej) i częściowego nakładanie się kół (po prawej).

Jak widać na powyższych wykresach, średnia z N wartości funkcji podcałkowej zbiega się do pewnej wartości, natomiast odchylenie standardowe maleje. Jest to zgodne z przewidywaniami oraz prawem wielkich liczb. Warto zauważyć, że dla $x_a = 0, \alpha = A$ odchylenie standardowe jest bliskie zeru. Jest to spowodowane faktem, że dla tak przyjętego $x_a$ koło $K_A$ całkowicie zawiera się w $K_B$. Wykonując więc całkowanie Monte Carlo na podstawie rozkładu jednorodnego w $K_A$ każdy losowany punkt zawiera się w obu kołach i funkcja (5) jest zawsze równa jeden.