Projekt 5: Całkowanie metodą warstwową.

Kacper Połuszejko, 412183

Wstęp

Oszacowano wartości trzech poniższych całek za pomocą metody MC:

$$C_1 = \int_{-3}^{3} (1 + \tanh(x))\, dx = 6$$

$$C_2 = \int_{0}^{10} \frac{1}{1 + x^2} dx = \arctan(10) - \arctan(0)$$

$$C_3 = \int_{0}^{1} \cos^{10}(\pi x) dx = 0.24609375$$

każdą za pomocą trzech metod: 1) metody podstawowej, 2) metody systematycznej, 3) metody warstwowej.

1 Metodyka

1.1 Metoda podstawowa

Dla całki postaci

$$C = \int_{a}^{b} g(x) dx$$

identyfikujemy fgp jako $f(x) = \text{const}$, z warunku normalizacji dostajemy

$$\int_{a}^{b} f(x) dx = \text{const} \int_{a}^{b} 1 dx = \text{const}(b - a) = 1 \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{b - a}$$

Modyfikujemy całkę

$$C = \int_{a}^{b} \frac{g(x)}{f(x)} f(x) dx = \int_{a}^{b} [(b - a) g(x)] f(x)$$

a jej wartość przybliżamy średnią z próby

$$C \approx \bar{g} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (b - a) \cdot g(x_i), \quad x_i \sim U(a, b)$$

gdzie losowanie z rozkładu jednostajnego w zakresie $[a, b]$, wykonujemy stosując prostą transformację $x_i = a + (b - a) \cdot U_i, \quad U_i \sim U(0, 1)$. $U(0, 1)$ to generator liczb pseudolosowych o rozkładzie jednostajnym w przedziale $(0, 1)$. Liczymy jeszcze drugi moment

$$\overline{g^2} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[(b-a)\cdot g(x_i)]^2, \quad x_i \sim U(a,b)$$

i wariancję średniej

$$\sigma^2_{\bar{g}} = \frac{\overline{g^2} - \bar{g}^2}{N}$$

1.2 Metoda systematyczna

Najpierw dokonujemy podziału obszaru całkowania na M podobszarów. Załóżmy, że mają identyczną szerokość $\Delta x = (b-a)/M$. Wówczas lewą (x_m) i prawą (x_{m+1}) granicę przedziału wyznaczają

$$x_m = a + \Delta x \cdot (m-1), \quad m = 1,2,\ldots,M$$

$$x_{m+1} = x_m + \Delta x$$

W metodzie losowania systematycznego (warstwowego nieoptymalnego) określamy prawdopodobieństwo wylosowania zmiennej z danego podprzedziału p_m

$$p_m = \int_{x_m}^{x_{m+1}} f(x)dx$$

co dla **równomiernego podziału i jednorodnego rozkładu fgp** daje $p_m = 1/M$. Dla każdego podprzedziału m-tego określamy liczbę losowań

$$N_m = p_m \cdot N$$

obliczamy $n = 1$ i 2 moment oraz wariancję

$$\overline{g^n}_m = \frac{1}{N_m}\sum_{i=1}^{N_m}[(b-a)\cdot g(x_{im})]^n, \quad x_{im} \sim U(x_m, x_{m+1})$$

$$\sigma^2_m = \overline{g^2}_m - (\overline{g}_m)^2$$

Teraz możemy oszacować wartość całki C jako średnią i wariancję średniej

$$C \approx \bar{g} = \sum_{m=1}^{M} p_m \cdot \bar{g}_m$$

$$\sigma^2_{\bar{g}} = \sum_{m=1}^{M} \frac{p_m^2}{N_m} \cdot \sigma^2_m$$

1.3 Metoda warstwowa

W metodzie tej postępujemy identycznie jak dla losowania systematycznego poza jednym wyjątkiem, liczbę losowań N_m w każdym podprzedziale określamy według wzoru

$$N_m = \frac{p_m\hat{\sigma}_m}{\sum_{j=1}^{M} p_j\hat{\sigma}_j} \cdot N$$

gdzie: $\hat{\sigma}_j$ to prognozowane/szacowane wartości odchylenia standardowego, które obliczamy metodą systematyczną dla małej wartości N (np. $N = 10^2, 10^3$) — bo dokładnych wartości nie znamy. Oczywiście w trakcie wykonywania właściwych obliczeń (metoda warstwowa) na bieżąco wyznaczamy „dokładniejsze” wartości σ_m i ich ostatecznie używamy do liczenia wariancji średniej.

2 Wyniki

1. Zaimplementowano podstawową metodę Monte Carlo do całkowania w celu oszacowania wartości całki C_1. Dla kolejnych wartości $N = 10^k$, gdzie $k = 2, 3, 4, 5$, obliczono wartość całki, odchylenie standardowe średniej $\sigma_{\bar{g}}$ oraz względny błąd $R = \frac{\sigma_{\bar{g}}}{\bar{g}} \cdot 100\%$. Przedział $[a, b]$ podzielono na $M = 10$ równych podprzedziałów. Dla każdego N określono liczbę losowań przypadających na każdy z podprzedziałów i stworzono odpowiednie histogramy. Wyniki zestawiono w tabeli.

2. Zaimplementowano metodę losowania systematycznego i powtórzono obliczenia wykonane w punkcie 1.

3. Zaimplementowano metodę losowania warstwowego i ponownie wykonano obliczenia z punktu 1. Dodatkowo, oszacowano wartość $\hat{\sigma}_m$ przy użyciu metody systematycznej, wykonując 100 losowań (dla metody warstwowej przy $N = 10^2$) oraz 1000 losowań (dla metody systematycznej przy $N > 10^3$).

4. Obliczenia z punktów 1–3 powtórzono dla całek C_2 oraz C_3.

5. Wyniki przedstawiono w formie tabel. Dodatkowo zamieszczono przykładowe histogramy rozkładu liczby losowań.

Tabela 1 Oszacowane wartości całek C_1, C_2, C_3 oraz ich odchylenia standardowe średniej i błędy względne.

C_1

Metoda podstawowa			
N	$\bar{g}$	$\sigma_{\bar{g}}$	R [%]
10^2	5.776	0.481	8.341
10^3	6.206	0.153	0.024
10^4	5.980	0.0490	0.821
10^5	6.013	0.0155	0.259
Metoda systematyczna			
10^2	6.109	0.0398	0.650
10^3	5.985	0.0154	0.258
10^4	6.002	0.0049	0.081
10^5	6.001	0.00151	0.026
Metoda warstwowa			
10^2	6.030	0.0367	0.608
10^3	6.003	0.0108	0.180
10^4	5.996	0.0034	0.057
10^5	6.0002	0.0011	0.018

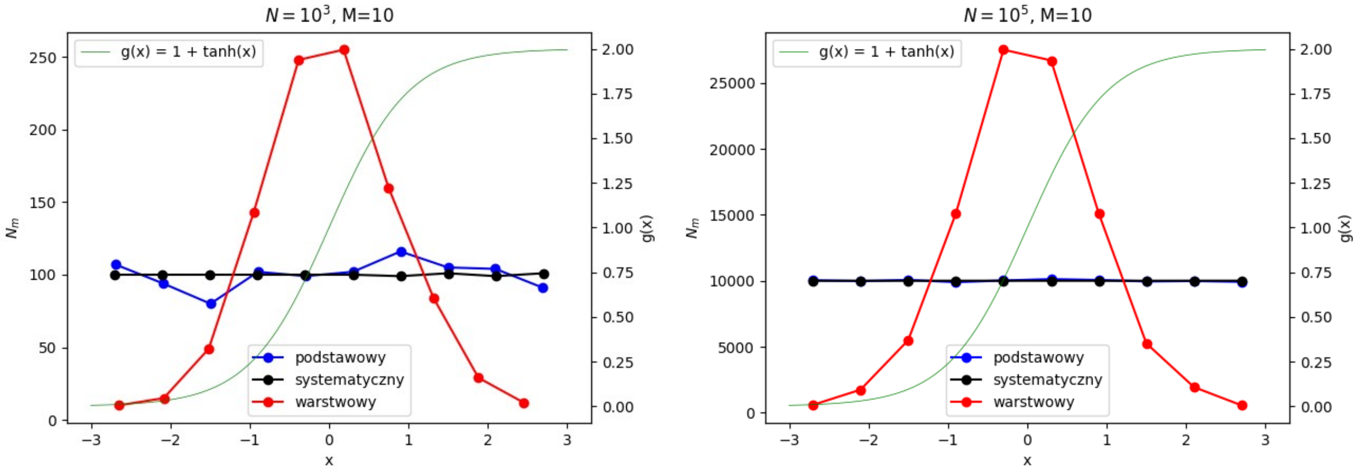
C_2

Metoda podstawowa			
N	$\bar{g}$	$\sigma_{\bar{g}}$	R [%]
10^2	1.076	0.193	17.969
10^3	1.499	0.0751	5.011
10^4	1.481	0.0241	1.619
10^5	1.478	0.0075	0.511
Metoda systematyczna			
10^2	1.525	0.0568	3.725
10^3	1.470	0.0179	1.216
10^4	1.471	0.0058	0.396
10^5	1.468	0.0019	0.127
Metoda warstwowa			
10^2	1.462	0.0260	1.780
10^3	1.546	0.0551	3.566
10^4	1.486	0.0240	1.613
10^5	1.467	0.0067	0.456

C_3

Metoda podstawowa			
N	$\bar{g}$	$\sigma_{\bar{g}}$	R [%]
10^2	0.316	0.0372	11.793
10^3	0.229	0.0105	4.564
10^4	0.246	0.0034	1.381
10^5	0.247	0.0011	0.435
Metoda systematyczna			
10^2	0.253	0.0072	2.845
10^3	0.247	0.0028	1.137
10^4	0.246	0.0008	0.344
10^5	0.246	0.0003	0.114
Metoda warstwowa			
10^2	0.243	0.0144	5.911
10^3	0.228	0.0087	3.803
10^4	0.244	0.0029	1.194
10^5	0.247	0.0009	0.344

Na podstawie powyższej tabeli można stwierdzić, że metoda podstawowa radzi sobie zdecydowanie najgorzej dla każdej z szacowanych całek. Metoda warstwowa daje najlepsze wyniki dla całki C_1, natomiast metoda systematyczna dla całek C_2 i C_3.



Rys. 1: Histogramy rozkładu ilości losowań dla całki C_1. Po lewej dla $N = 10^3$, po prawej dla $N = 10^5$.

Jak widać na powyższych wykresach, w metodzie systematycznej rozkład ilości losowań jest jednorodny, co jest oczywiste, jako że liczba losowań w każdym z podprzedziałów jest identyczna, co wynika ze wzorów. W przypadku metody podstawowej wykonano N losowań za pomocą rozkładu jednorodnego na całym przedziale, dlatego widocznie są drobne różnice w każdym z podprzedziałów (dla $N = 10^5$, są już jednak znacznie mniejsze). Natomiast w przypadku metody warstwowej liczba losowań rośnie dla podprzedziałów, w których funkcja $g(x)$ najbardziej się zmienia. Dzięki temu generuje też ona najdokładniejsze wyniki, co widać w **Tabeli 1**.