

Fizyka układów złożonych

Sieci losowe

Małgorzata Krawczyk

Wszystkie zadania proszę wykonać dla $N = 100$, $\alpha = 4$ i 10 oraz 100 powtórzeń.

Zadanie 1 (10p) Generujemy graf losowy z prawdopodobieństwem krawędzi $p = \alpha/N$.

Sieci losowe, nazywane często sieciami Erdősa-Rényi'ego, składają się z N węzłów, gdzie każda ich para połączona jest z prawdopodobieństwem p . Konstrukcja grafu przebiega wg schematu:

- startujemy od N izolowanych węzłów
- pomiędzy każdą parą wierzchołków wstawiamy wiązanie z prawdopodobieństwem p

Każdy wygenerowany w ten sposób graf, nawet dla takich samych wartości parametrów N i p , będzie nieco inny - różny będzie schemat rozłożenia wiązań oraz inna będzie ich liczba.

Zadanie 2 (10p) Wyznaczamy i porównujemy z wartością oczekiwaną średnią liczbę wiązań

$$\langle L \rangle = p \frac{N(N-1)}{2}$$

Zadanie 3 (10p) Wyznaczamy i porównujemy z wartością oczekiwaną średni stopień wierzchołka

$$\langle k \rangle = \frac{2 \langle L \rangle}{N} = p(N-1)$$

Zadanie 4 (25p) Wyznaczamy i porównujemy z wartością oczekiwaną rozkład stopni wierzchołków (wykres)

$$p_k = \binom{N-1}{k} p^k (1-p)^{N-1-k}.$$

W przypadku sieci rzadkich, tj. gdy $\langle k \rangle \ll N$ rozkład stopni można przybliżyć rozkładem Poissona:

$$p_k = e^{-\langle k \rangle} \frac{\langle k \rangle^k}{k!}$$

Oba powyższe rozkłady charakteryzują się:

- występowaniem pików w okolicy $\langle k \rangle$,
- szerokość rozkładu jest zależna od p czy też $\langle k \rangle$ - im graf jest gęstszy tym rozkład jest szerszy, czyli większe są różnice stopni.

Zadanie 5 (25p) Wyznaczamy i porównujemy z wartością oczekiwaną średnią odległość między wierzchołkami (własność *małego świata*)

$$\langle d \rangle \approx \frac{\ln N}{\ln \langle k \rangle}$$

Generalnie oczekiwana liczba węzłów w odległości nie większej niż d od węzła startowego wynosi:

$$N(d) = \frac{\langle k \rangle^{d+1} - 1}{\langle k \rangle - 1}$$

Do wyznaczenia odległości pomiędzy wierzchołkami grafu można skorzystać z *Algorytmu Floyda-Warshalla*:

```

A(N × N) macierz połączeń
d(N × N) macierz odległości
for i ← 1 to N do
  for j ← 1 to N do
    if i == j then
      dij ← 0
    else
      if Aij then
        dij ← Aij
      else
        dij ← ∞
      end if
    end if
  end for
end for
for k ← 1 to N do
  for i ← 1 to N do
    for j ← 1 to N do
      dij ← min(dij, dik + dkj)
    end for
  end for
end for
return d

```

Zadanie 6 (20p) Wyznaczamy i porównujemy z wartością oczekiwaną średnią liczbę trójkątów

$$EX = \binom{N}{3} p^3$$