Fizyka układów złożonych
Perkolacja węzłów

Krzysztof Malarz

Dla zjawiska perkolacji węzłów potrzebujemy grafu (np. sieci regularnej), którego każdy z węzłów jest zajęty z prawdopodobieństwem p bądź „pusty" z prawdopodobienstwem $(1-p)$. Zjawisko to przebadany na sieci kwadratowej z otwarymi (swobodnymi) warunkami brzegowymi.

Będziemy chcieli znaleźć prawdopodobieństwo perkolacji $W(p;L)$ (*wrapping probability*) w zależności od liniowego rozmiaru układu L i prawdopodobieństwa okupacji (wypełnienia, zajętości) pojedynczego węzła p. Prawdopodbieństwo perkolacji W określa prawdopodobieństwo, że przy wypełnienuu pL^2 spośród L^2 dostępnych w układzie węzłów istnieje nieprzerwana ścieżka łącząca lewy brzeg z prawym albo górny z dolnym. Ograniczymy się do badania połączenia góra–dół (bo bardzo łatwo automatycznie wykrywać połączenie góra/dół). Dla małych układów można to zrobić metodą brutalnej siły, dla dużych już nie, bo wypełnienie siatki kwadratowej o boku $L=100$ przy zapełnieniniu jej w połowie można zrobić na $\binom{10^4}{5000} \approx 1.6 \times 10^{3008}$ sposobów (tak, jedynka z ponad trzema tysiącami zer).

Do odpowiedzi na powyższe pytanie potrzebujemy algorytmu identyfikacji zajętych węzłów należących do tego samego klastra.

Posłużymy się (niezręcznie implementowanym) algorytmem Hoshena–Kopelmana. Algorytm pozwala zajętym węzłom przypisać etykiety, w ten stposób, że węzły należące do tego samego klastra mają takie same etykiety a węzły z różnych klastrów mają różne etykiety. Do wyznaczenia $W(p;L)$ generujemy R przykładów sieci i sprawdzamy w ilu $(N(p;L))$ z nich mamy etykiety węzłów z górnej krawędzi w dolnej. Wówczas $W(p;L)=N(p;L)/R$.

Alorytm Hoshena–Kopelmana każe przejść sekwencyjnie przez siatkę i za każdym razem, gdy napotykamy zajęty węzeł (x,y) sprawdzamy czy ma on zajętego sąsiada w $(x-1,y)$ bądź $(x,y-1)$ (uroda algorytmu zasadza się na tym, że pierwszą iterację etykietowania można robić równolegle z wypełnianiem sieci. Będziemy potrzebować drugiej iteracji). Jeśli nie ma, to węzłowi przypisujemy pierwszą jeszcze niewykorzystaną etykietę. Jeśli ma, to węzeł etykietujemy mniejszą spośród już przypisanych zajętym sąsiadom etykietom i (o ile jest to sytuacja, że obaj sąsiedzi są zajęci) zapamiętujemy, że (konsekwentie, wstecz) etykietę wyższą z tych dwóch trzeba zastąpić niższą.

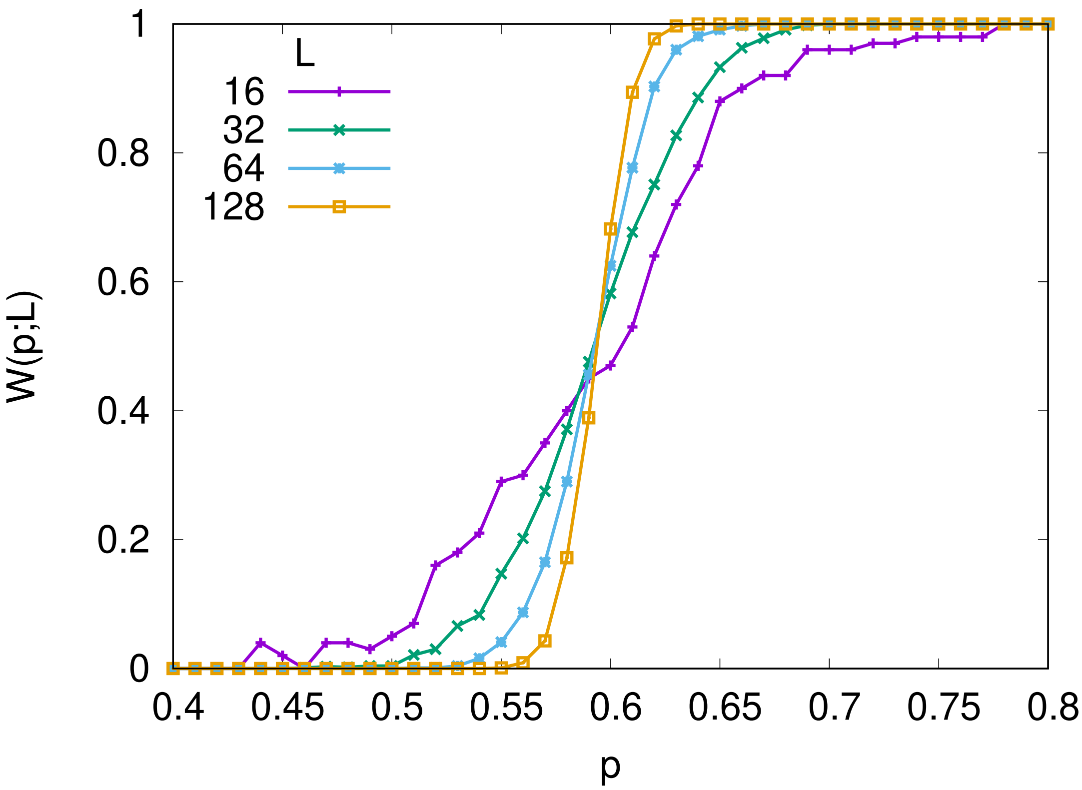
Zadanie 1 (50 pkt.): Wygeneruj siatkę o boku $L=16$ wypełnioną z $p=0{,}4$; 0,6 oraz 0,8. Wypisz siatkę oraz etykiety węzłów przypisanych algorytmem Hoshena–Kopelmana. Odpowiedz czy wygenerowana siatka perkoluje czy nie.

Zadanie 2 (30 pkt.): Zautomatyzuj proces odpowiadania na pytanie czy siatka perkoluje czy nie (wyznaczania $N(p)$). Dla $L=16$ wygeneruj po $R=1000$ siatek dla p od 0,4 do 0,8 co 0,01. Sporządź wykres $W(p;L=16)=N(p)/R$.

Zadanie 3 (20 pkt.): Powtórz obliczenia z zadania 2 dla $L=32$. Nałóż je na wykres z poprzedniego zadania (dwie krzywe na jednym rysunku: $W(p;L=16)$ oraz $W(p;L=32)$).

```
# p=  0.40
labels:
  0  0  0  1  0  0  0  0  2  2  2  0  0  0  0  3
  0  4  0  0  5  0  2  2  2  0  0  0  0  0  0  3
  0  4  0  0  0  0  0  0  0  0  7  0  0  0  0  0
  4  4  0  0  0  9  9  0  0  0  0  0  0  0 10 10
  0  4  4  0  0  0  9  9  9  0  0 11  0 10 10 10
  0  0  4  4  4  4  0  0  9  9  0  0  0 10 10  0
  0 13  0  0  0  4  4  0  0  9  0  0 14  0  0 15
  0  0 16  0 17  0  4  0  0  0 14 14 14  0 19  0
 20 20  0 21  0  0  0  0 22  0  0  0  0  0  0  0
  0  0 23  0 22  0 22 22 22 22 22  0 22  0 27  0
  0  0  0  0 22 22 22  0 22 22 22 22 22  0  0  0
  0  0  0  0  0 22 22  0  0  0 22 22 22  0  0  0
 28 28 28  0  0  0  0  0 22 22 22  0  0  0  0 30
  0 28  0 31 31  0 32 32  0 22  0  0  0  0 33  0
 28 28  0  0 31  0  0  0 22 22  0 36 36  0 33  0
  0  0 37  0  0 38  0 22 22 22 22  0 36  0  0 40
-------------------------------------------------
 the largest label in the first row:           3
 the smallest label in the last row:          22
 NO  ############################################

# p=  0.80
labels:
  1  0  2  2  2  2  2  0  2  2  2  0  4  4  4  4
  0  2  2  2  2  2  2  2  2  0  2  0  0  4  4  0
  2  2  0  0  2  2  2  2  0  2  2  2  2  0  4  4
  2  2  2  2  2  2  2  2  2  2  2  2  2  2  0  4
  2  2  2  2  2  2  0  2  2  2  2  2  2  2  2  0
  2  2  2  2  2  2  2  2  2  2  2  0  2  2  0  2
  2  2  0  2  0  2  2  0  2  2  2  2  2  0  2  2
  0  2  2  2  2  2  0  2  2  2  2  2  2  2  0  2
  2  2  2  2  2  2  2  2  2  0  0  2  2  0  2  2
  2  2  2  2  2  2  2  2  2  2  2  2  0  2  2  2
  0  0  2  2  2  2  2  0  2  0  2  2  2  0  2  2
  0  2  2  2  2  2  2  2  2  0  2  0  2  0  2  2
  2  2  2  2  2  2  2  2  2  2  2  0  2  0  2  2
  2  2  2  2  0  0  2  2  2  2  2  2  2  2  2  2
  2  2  2  0  2  2  2  2  2  2  2  2  2  2  2  2
  2  0  0  0  2  0  2  2  2  2  0  2  0  2  2  2
-------------------------------------------------
 the largest label in the first row:           4
 the smallest label in the last row:           2
 YES ############################################
```


L
16
32
64
128
W(p;L)
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
0.4
0.45
0.5
0.55
0.6
0.65
0.7
0.75
0.8
p