Metody Statystyczne

wykład 23 I 2021

kacper.topolnicki@uj.edu.pl

procesy kolejkowe (Kobayashi, ...)

prawo Littlea

„system”

serwer komputerów

uniwersytetu

„klient”

zadanie

studenci

niech

$\bar{L}$ — średnia l. studentów (klientów)

λ — l. nowych studentów (klientów) w roku (innej jednostce czasu)

$\bar{W}$ — średnia liczba lat, które student (klient) spędza na uniwersytecie (w systemie) prawo Littlea:

$$\underbrace{\overline{L} = \lambda \overline{W}}_{\text{bardzo ogólne}}$$

dowód:

niech W_j — czas spędzony w systemie przez klienta j, $j = 1, 2, 3, \ldots$

$A(t)$ — l. pojawień nowych klientów w $(0, t]$

$D(t)$ — l. opuszczeń systemu w czasie $(0, t]$

założenie:

$$A(0) = D(0)$$
$$A(T) = D(T)$$

definiujemy: $\stackrel{\Delta}{=}$

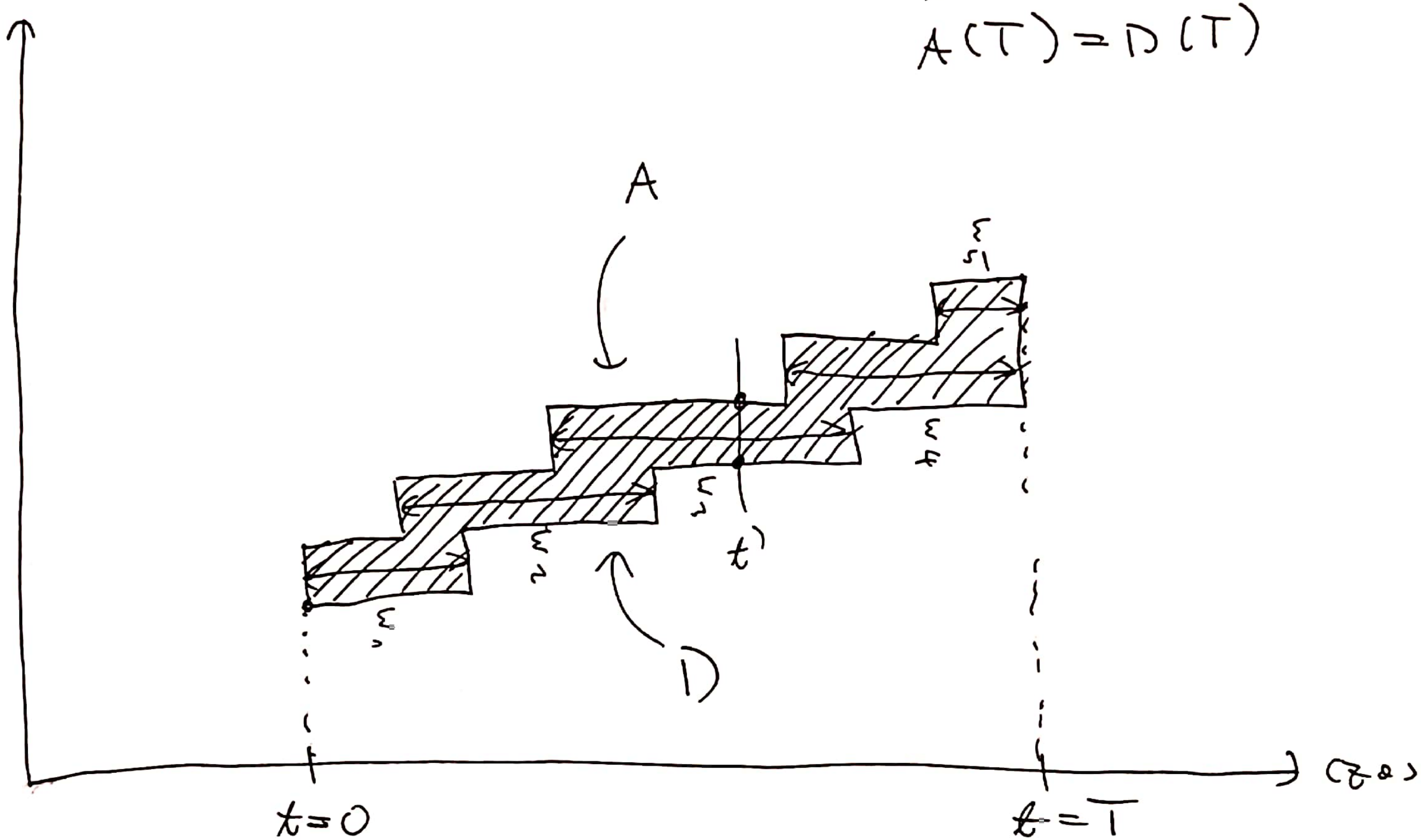
$$\underbrace{n(T) := A(T) - A(0)}_{\text{całkowita l. nowych klientów w } (0,T]}$$

$$\underbrace{\lambda(T) := \frac{n(T)}{T}}_{\text{średnie tempo przybywania nowych klientów } (0,T]}$$

Założenie:

$A(0) = D(0)$

$A(T) = D(T)$



pole powierzchni można interpretować na dwa sposoby

$$\int_0^1 L(t)\,dt$$

$$\underbrace{A(t) - D(t)}_{\text{liczba studentów w systemie}}$$

$$\sum_{j=1}^{n(T)} W_j$$

$$\overline{L}(T) = \frac{\frac{\int_0^T L(t)\,dt}{T}}{} = \frac{\sum_{j=1}^{n(T)} v_j}{T} =$$

$$= \frac{\frac{n(T)}{T} \quad \frac{\sum_{j=1}^{n(T)} W_j}{n(t)}}{}$$

$$\frac{\int_0^T L(t)\,dt}{T} = \frac{n(t)}{T} \quad \frac{\sum_{j=1}^{n(t)} v_j}{n(T)}$$

$$\downarrow T \to \infty$$

$$\overline{L} = A \quad \overline{W}$$

systemy kolejkowe - notacja Kendala

A / S / n / C / N / D

A - przychodzące zdarzenia

M - czasy przyjścia klientów mają rozkład wykładniczy

G - general

D - deterministyczny

...

S — sposób obsługi klientów

M — ...

G — ...

D — ...

... (service in random order)

m — liczba serwerów

C — pojemność systemu (pojemność kolejki)

N — liczba źródeł klientów (zgłoszeń)

D — rozkład obsługi klienta (zgłoszenia)

PS (processor share), PQ (priority queue), SIRO

M/M/1

- 1 — pojedynczy serwer.
- M — pr. Poisson
- M — ~~czasy nadejść~~ pr. Poisson

- klienci nadchodzą w tempie λ

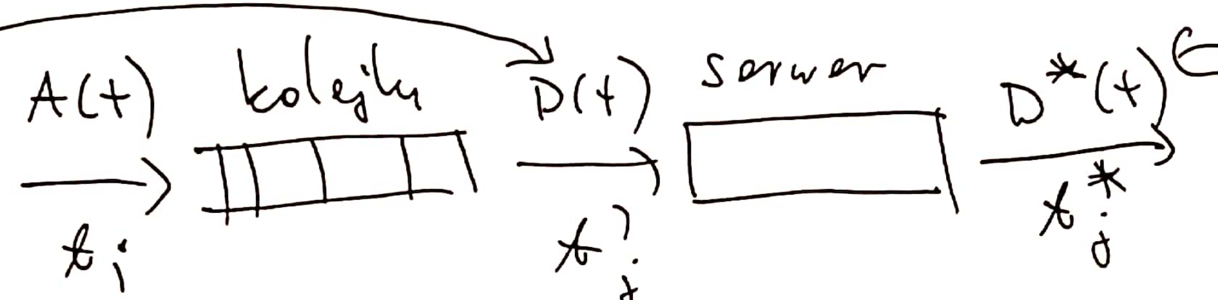
$j = 1, 2, 3, \ldots$

czasy pomiędzy klientami są losowane z rozkładu wykładniczego $\lambda e^{-\lambda t}$

- czasy obsługi S_j są losowane z rozkładu wykładniczego $\mu e^{-\mu t}$

μ – tempo obsługi

$E[S_j] = \mu^{-1}$



liczba nowych zadań ~~do~~ do czasu t

liczba zadań wpuszczonych na serwer do czasu t

liczba skończonych zadań do czasu t

t_j – czas pojawienia się j; t_j' – czas uruchomienia j

t_j^* – czas skończenia j

l. zadań (klientów) w systemie jest procesem liczącym:

$$W(t) = A(t) - D^*(t)$$

L. zadań w kolejce

BD

$$L(t) = A(t) - D(t)$$

nie jest BD

Birth Death (BD) process:

losowy proces $N(t)$

$$N(t) = A(t) - D(t)$$

nazywamy BD gdy:

$$P_{mn}(h) = P[N(t+h)=n \mid N(t)=m]$$

„mały odcinek czasu

ma postać:

$$P_{mn}(h) = \begin{cases} \lambda_m h + \ldots & \text{gdy } n = m+1 \\ \mu_m h + \ldots & \text{gdy } n = m-1 \\ 1-(\lambda_m+\mu_m)h + \ldots & \text{gdy } n = m \\ 0 + \ldots & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

λ_n – birth rate

μ_n – death rate

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_n = \lambda \\ \mu_n = \mu\end{array}\right\} \text{procesem jednorodnym}$$

$$(\lambda_n = \lambda \quad \mu_n = 0)$$

startujemy z

$$p_n(t) = P[N(t) = n]$$

chcemy policzyć

$$\underline{p_n(t+h)}$$

rozważamy 4 scenariusze niezależne

1) $N(t) = n$ oraz brak n. oraz s. w $(t, t+h)$

2) $N(t) = n-1$ oraz 1. narodziny w $(t, t+h]$

3) $N(t) = n+1$ oraz 1. śmierć w $(t, t+h]$

4) $\underline{N(t) \notin \{n-1, n, n+1\}}$

$$p_n(t+h) = p_n(t)\cdot(1-\lambda_n h-\mu_n h)+$$
$$+\, p_{n-1}(t)(\lambda_{n-1} h)+$$
$$+\, p_{n+1}(t)(\mu_{n+1}\cdot h)+\ldots$$

$$\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{p_n(t+h)-p_n(t)}{h}}_{\text{definicja pochodnej}} = \ldots$$

(19)

$$(*)\begin{cases} \dfrac{d\,p_0(t)}{dt} = -\lambda_0\, p_0(t) + \mu_1\, p_1(t) \\ \dfrac{d\,p_n(t)}{dt} = -(\lambda_n + \mu_n)\, p_n(t) + \\ \quad + \lambda_{n-1}\, p_{n-1}(t) + \mu_{n+1}\, p_{n+1}(t) + \ldots \end{cases}$$

$n = 1, 2, 3, \ldots$

jeżeli:

$$\vec{p}(t) = \begin{pmatrix} p_0(t) \\ p_1(t) \\ p_2(t) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

t_0 :

$$\boxed{p^T(t) = (0 \; 0 \; \pi_2, 0 0 0)}$$

$$\frac{d\, p^T(t)}{d\, t} = p^T(t)\, Q$$

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & \cdots & & & \\ \mu_1 & -\lambda_1-\mu_1 & \lambda_1 & \cdots & & \\ \vdots & \mu_2 & -\lambda_2-\mu_2 & \lambda_2 & \cdots & \\ & \vdots & \mu_3 & -\lambda_3-\mu_3 & \lambda_3 & \cdots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Takie równanie różniczkowe ciężko rozwiązać, zadowolimy się:

$$\pi_n = \lim_{t \to \infty} p_n(t)$$

stan równowagi

startujemy z (*), zakładam

$$\lim_{t \to \infty} \frac{d p_n(t)}{dt} = 0$$

, bierzemy $\overbrace{\text{granicę}}^{p \to \pi}$ $t \to \infty$

$$\begin{cases} \mu_1 \pi_1 - \lambda_0 \pi_0 = 0 \\ \mu_{n+1} \pi_{n+1} - \lambda_n \pi_n = \\ \qquad = \mu_n \pi_n - \lambda_{n-1} \pi_{n-1} \end{cases}$$

$$\underbrace{\mu_n \pi_n}_{\substack{\text{przejście } n \to n-1 \\ \text{śmierć}}} = \underbrace{\lambda_{n-1} \pi_{n-1}}_{\substack{\text{przejście } n-1 \to n \\ \text{narodziny}}} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\begin{tikzcd} \pi_0 \arrow[r, bend left, "\lambda_0"] & \pi_1 \arrow[l, bend left, "\mu_1"] \arrow[r, bend left, "\lambda_1"] & \pi_2 \arrow[l, bend left, "\mu_2"] & \cdots \end{tikzcd}$$

$$\pi_n = \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} \pi_{n-1} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\pi_n = \pi_0 \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \pi_n = 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \pi_0 \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} = 1$$

$$\pi_0 = \frac{1}{\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}}_{G}} = \frac{1}{G}$$

wracamy do procesów kolejkowych M/M/1

$$Q_{M/M/1} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & \cdots & & \\ \mu & -\lambda-\mu & \lambda & \cdots & \\ & \mu & -\lambda-\mu & \lambda & \cdots \\ & & \mu & -\lambda-\mu & \cdots \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

$N(t) = A(t) - D^*(t)$

$$\boxed{\Pi^T Q_{MM1} = (0\ 0\ 0\ 0\ \ldots)}$$

$$G = \sum_{n=0}^{\infty} \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda_i}{\mu_i} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$$

$$\frac{\lambda}{\mu} = \rho$$

$\rho < 1$

$$G = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n = \frac{1}{1-\rho}$$

$$\pi_0 = 1 - \rho$$

$$\pi_n = (1-\rho)\rho^n$$

$\rho > 1$

$$E[N(t)] = \overline{N} = \frac{\rho}{1-\rho}$$

$$\sigma^2_N = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$$

$$\overline{L} = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

$$\sigma_L^2 = \frac{\rho^2(1+\rho-\rho^2)}{(1-\rho)^2}$$

czas oczekiwania

prawo Little'a +)

$\Downarrow$

$$\overline{W} = \frac{\rho^2}{\cancel{\lambda}(1-\rho)} = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}$$

$$\overline{N} = \lambda \overline{T} \Rightarrow \overline{T} = \frac{\overline{W}}{\lambda} = \frac{1}{\mu(1-\rho)}$$

M/M/m   M/G/m

M/M/∞   M/G/∞

Kobayashi ...

PASTA

Π_n

ukhyte Toniudy Markow

page nouk