I powtórka – zastosowanie macierzy

II macierz – tabelka

$$\underbrace{[a]}_{\text{macierz } a} \xrightarrow{\text{tymczasowo}} \underbrace{\{a\}}_{\text{macierz } a}$$

$a_{ij}$

element $\{a\}$

$i$ – wiersz

$j$ – kolumna

[[ mnożenie macierzy (Dot , a.b)

$$\{A\} . \{B\} = \{C\}$$

$$C_{ij} = \sum_k A_{ik} B_{kj}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot e + b \cdot g & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

wektor kolumnowy $C_{i, \underbrace{j=1}} \Leftrightarrow C_i$

wektor wierszowy $C_{\underbrace{i=1}, j}$

[I] dodawanie macierzy $(a + b)$

$\forall_{ij}$

$$\{A\} + \{B\} = \{C\}$$

$$C_{ij} = A_{ij} + \cancel{A} B_{ij}$$

[I] mnożenie macierzy przez liczbę $(123 * a)$

macie

$$a \cdot \{A\} = \{C\}$$

l. rzeczywist

l. zespolon

...

$$C_{ij} = a \cdot A_{ij}$$

[ reprezentacja liczb zespolonych (zestaw 3)

jednostka urojona $i^2 = -1$

$$\underbrace{z}_{\text{l. zespolona}} = \underbrace{x + i \cdot y}_{\text{l. rzeczywiste}} \longleftrightarrow \{z\} = x \cdot \{A\} + y \cdot \{B\}$$

$$\{A\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \{B\} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$z_1 + z_2 \longleftrightarrow \{z_1\} + \{z_2\}$$

$$z_1 \cdot z_2 \longleftrightarrow \{z_1\} \cdot \{z_2\}$$

$$\overbrace{(z_1 + z_2)(z_3 + z_4)}^{z_1 z_2 + \ldots} \longleftrightarrow (\{z_1\} + \{z_2\}) \cdot (\{z_3\} + \{z_4\}) = \{z_1\} \cdot \{z_3\} + \ldots$$

$$e^{i\phi} = \cos(\phi) + i\sin(\phi)$$

j. unoja

l. mecoja

Solve[ ]

$$\text{MatrixExp}[\phi \cdot \{B\}]$$

$$\text{MatrixExp}[a] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} a^n$$

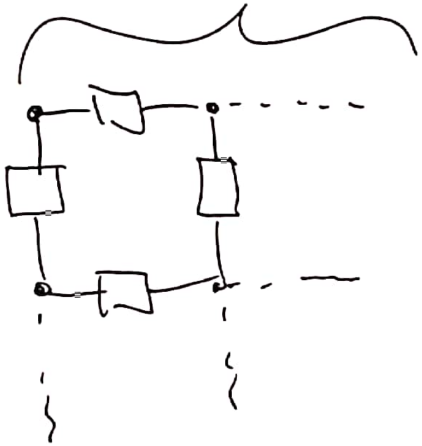
$a^3 = a \cdot a \cdot a \quad a^4 = a \cdot a \cdot a \cdot a$

[[ układy równań liniowych (z estow 5)

$$\begin{cases} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{cases} \longleftrightarrow \cancel{\begin{pmatrix} a & b \\ d & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix}}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}}_{a}\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix}}_{b}$$

N



x = LinearSolve[a, b]

[[ reprezentacja operatorów liniowych

$$f(\alpha \cdot x + \beta \cdot y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

wektor

liczb

zestawu

~~zestawu~~

row

1

N

"N+1"

$$A = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vdots & & & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

a = Table[0, ...]

Do[ ]

L

( zbiór R z ~~zbioru~~ ).

r. falowe

amplituda fali

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad u = u(t, x)$$

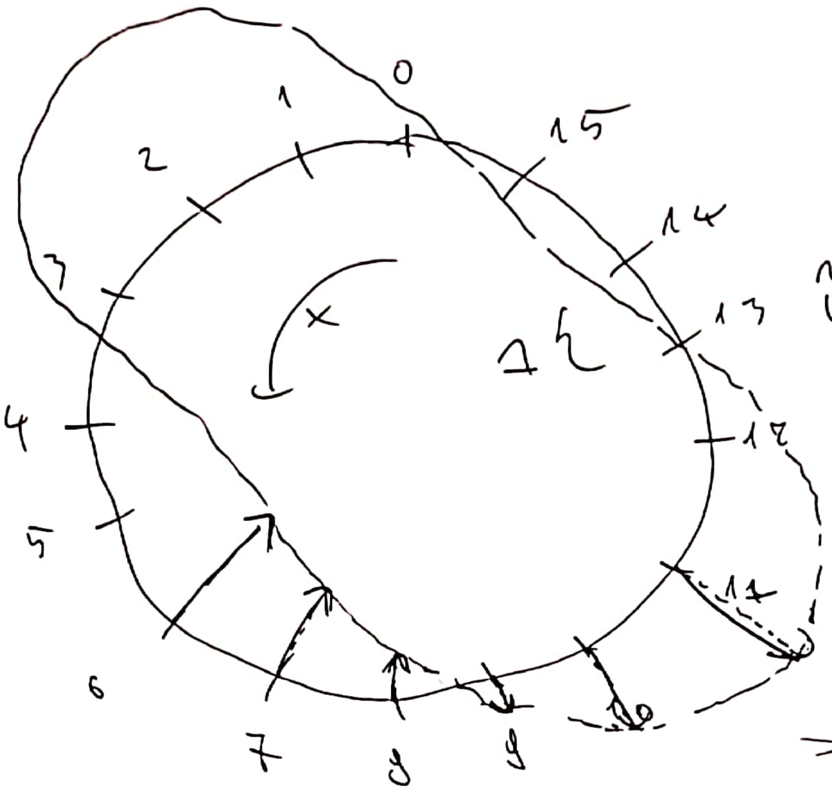
lub

czas

położenie

prędkość rozchodzenia się fali

$$\ddot{u} = c^2 x'' \xleftrightarrow{\text{lub}} \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial t^2}}_{\text{operator}} u = c^2 \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial x^2}}_{\text{operator}} u''$$




$$\tilde{u} = \begin{pmatrix} u(t, 0\cdot\Delta) \\ u(t, 1\cdot\Delta) \\ u(t, 2\cdot\Delta) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$\to u(t, \underbrace{11\cdot\Delta}_{x})$$

$$\underbrace{\overbrace{\frac{\partial^2}{\partial x^2}}^{\text{operator}} \, u}_{\text{zwrecen funk}} \approx A \cdot \tilde{u}$$

ListPlot

Eigensystem[A]

[ nowe zastosowanie — analiza wymiarowa

$$[g] = \left[10\ \frac{m}{s^2}\right] = \frac{L}{T^2} = L^1\ T^{-2}$$

$\uparrow$

przyspieszenie ziemskie

$L$ — odległość $\qquad$ $M$ — masa

$T$ — wymiar czasu $\qquad$ $\Theta$ — temperatura ...

$$[p] = \left[1 \frac{N}{m^2}\right] = \left[1 \frac{\frac{\cancel{m}}{s^2} kg \cdot \cancel{m}}{\cancel{m}^2}\right] =$$

$$= \left[1 \cdot \frac{kg}{s^2}\right] = \frac{M}{T^2} = M \cdot T^{-2}$$

ciśnienie

W jaki sposób możemy łączyć ze sobą tego typu wielkości?

- mnożenie?

$$[p \cdot g] = \frac{L}{T^2}\,\frac{M}{T^2} = \frac{LM}{T^4} = LMT^{-4}$$

- dodawanie?

m + kg

$$[p + g] = \frac{L}{T^2} + \frac{M}{T^2} = \frac{1}{T^2}(L + M)$$

$s^2$

? ? ? ?

$$[2p] = [p + p] = \frac{M}{T^2} = MT^{-2}$$ – ok

$$[2g] = [g + g] = \frac{L}{T^2} = LT^{-2}$$ – ok

- podnoszenie do potęgi

$$[p^2] = \frac{M^2}{T^4} = M^2 T^{-4}$$

[[ tłumaczymy te operacje do przestrzeni wektorowej

$$T^{w_1} M^{w_2} L^{w_3} \Theta^{w_4} \dots \longleftrightarrow \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

– podnoszenie do potęgi

$$\left(T^{w_1} M^{w_2} L^{w_3} \Theta^{w_4} \ldots\right)^p =$$

$$= T^{w_1 p} M^{w_2 p} L^{w_3 p} \Theta^{w_4 p} \ldots \longleftrightarrow \begin{pmatrix} w_1 p \\ w_2 p \\ w_3 p \\ w_4 p \\ \vdots \end{pmatrix} =$$

$$= p \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

- mnożenie dwóch wielkości fizycznych

$$\left(T^{w_1} M^{w_2} L^{w_3} \Theta^{w_4} \ldots\right)\left(T^{q_1} M^{q_2} L^{q_3} \Theta^{q_4}\right) =$$

$$= T^{w_1+q_1} M^{w_2+q_2} L^{w_3+q_3} \Theta^{w_4+q_4} \ldots \longleftrightarrow$$

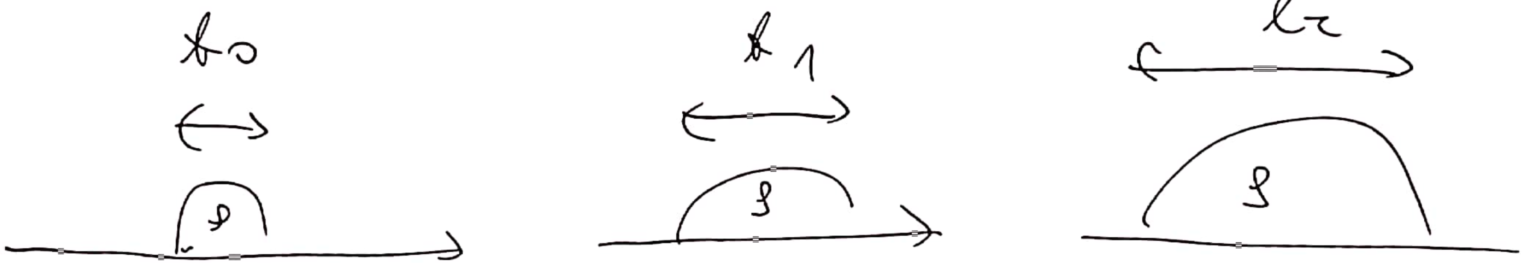
$$\longleftrightarrow \begin{pmatrix} w_1+q_1 \\ w_2+q_2 \\ w_3+q_3 \\ w_4+q_4 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ \vdots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

[[ przykład

$$[\text{gęstości}] = \frac{\overset{kg}{M}}{\underset{m^3}{L^3}} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} T^0 \\ M^1 \\ L^{-3} \end{matrix}$$

$$[\text{promień jądra } \overset{\text{atomowego}}{\cancel{\text{atomu}}}] - L \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} T^0 \\ M^0 \\ L^1 \end{matrix}$$

$$[\text{czas}] = T \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} T^1 \\ M^0 \\ L^0 \end{matrix}$$



$$[\text{energia cinetica}] = \frac{L^2 M}{T^2} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} T^{-2} \\ M^{1} \\ L^{2} \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{W} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \dots$$

$$\dots = a \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + d \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\{w\}\cdot\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} T^{0} \\ M^{0} \\ L^{0} \end{array}$$

$$\Updownarrow$$

$$1$$

$$\text{NullSpace}[w] \rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

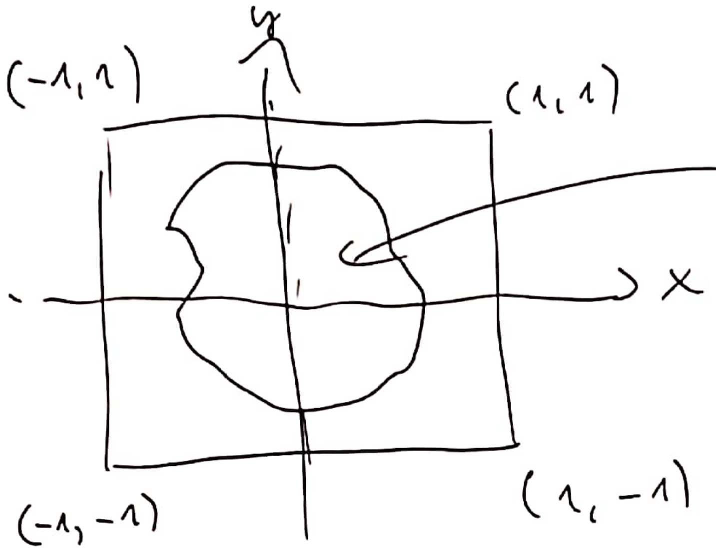
$$f\Big(\underbrace{\text{gęstość}^{-1}}_{\rho}\cdot\underbrace{\text{promień}^{-5}}_{r}\cdot\underbrace{\text{czas}^{2}}_{t}\cdot\underbrace{\text{energia}^{1}}_{E}\Big) = 0$$

$$f\left(\frac{t^2 E}{\rho\, r^5}\right) = 0$$

$$f(C_i) = 0$$

miejsce zera $f$

$$\frac{t^2 E}{\rho\, r^5} = C \qquad E = \frac{\rho\, r^5}{t^2}\, C$$

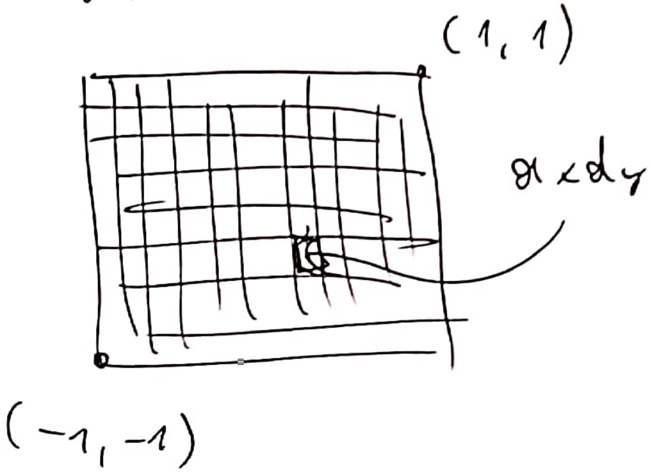



$$\underbrace{g[x, y]}_{\text{gęstość}} \quad \left[\frac{kg}{m^2}\right]$$

$$\begin{cases} g[x, y] = 1 & \text{jeżeli } (x, y) \in \text{figury} \\ g[x, y] = 0 & \text{jeżeli } (x, y) \notin \text{figury} \end{cases}$$

$$m = \int_{-1}^{-1} dx \int_{-1}^{1} dy \; g(x,y)$$

(x, y)




NIntegrate[ ]

$$\vec{r}_{cm} = \left( \int_{-1}^{1} dx \int_{-1}^{1} dy \; \rho(x,y) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \Big/ m$$

$$\left( \sum_i m_i \vec{r}_i \Big/ \sum_i m_i \right) = r_{cm}$$


NIntegrate[ ]