metody statystyczne

wykład 5

1 XII 2024

kacper.topolnicki@uj.edu.pl

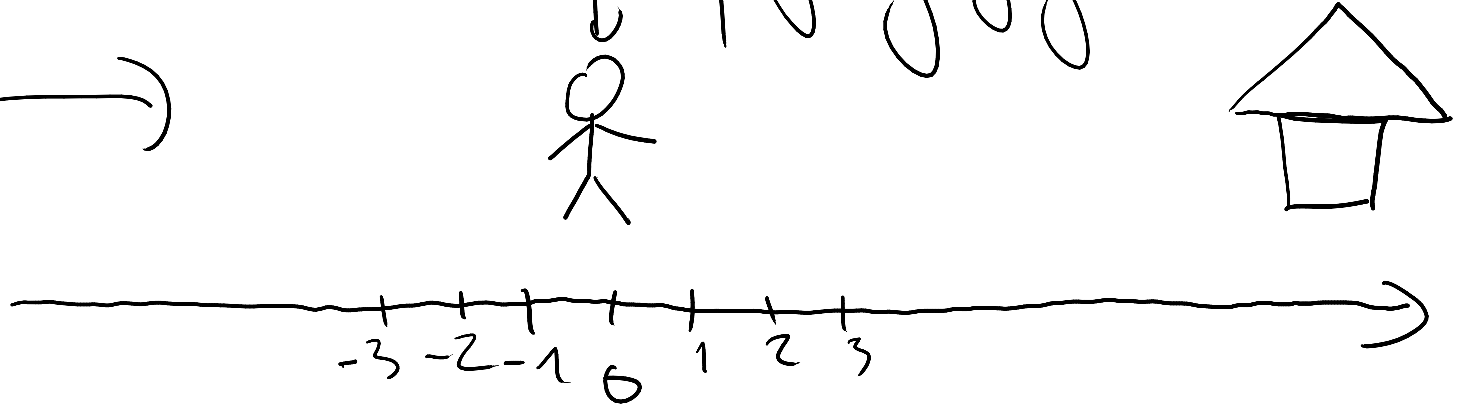
Plan:

- process Bernulli
- process Poissona
- procesy liczące

proces Bernulliego

krok w prawo
z prawdopodobieństwem p

pijany jegomość



położenie

krok w lewo
z prawdopodobieństwem $q=1-p$

n_1 – l. kroków w prawo
(l. sukcesów)

n_2 – l. kroków w lewo

$k = n_1 - n_2$ ← pozycja

$n = n_1 + n_2$

symbol Newtona:

$$\underbrace{\binom{a}{b}} = \frac{a!}{b!\,(a-b)!}$$

na ile sposobów można wybrać podzbiór
b-elementowy ze zbioru a-elementowego

$a = 5$
$b = 3$

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3! \, \underbrace{2 \cdot 1}_{(5-3)!}} = \binom{5}{3}$$

$$S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$$
$$s_i = \pm 1$$
$$S_+ \in S \qquad |S_+| = n_1$$
$$S_- \in S \qquad |S_-| = n_2$$

$$P(\text{pozycja pijaczka} = k) =$$

$$= \binom{n}{n_1} p^{n_1} q^{n_2} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} n_1 = \frac{n+k}{2} \\ n_2 = \frac{n-k}{2} \\ q = 1-p \end{array} \right| = \binom{n}{\frac{n+k}{2}} p^{\frac{n+k}{2}} \cdot (1-p)^{\frac{n-k}{2}} =$$

$$= \frac{n!}{\left(\frac{n+k}{2}\right)! \left(n - \frac{n-k}{2}\right)!} p^{\frac{n+k}{2}} (1-p)^{\frac{n-k}{2}} =$$

$$= \left| p = q = \frac{1}{2} \right| = \frac{n!}{2^n} \left(\frac{n+k}{2}\right)! \left(\frac{n-k}{2}\right)!$$

Błądzenie przypadkowe (jednorodne)

$$s_i = \pm 1$$

$$X_n = X_0 + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} S_i}_{s_1 + s_2 + \dots}$$

X_0 – początkowa pozycja pijaczka

X_n – pozycja pijaczka w chwili k

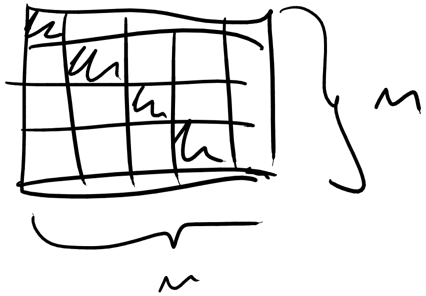
$$E(X_n) = E(X_0) + \sum_{i=1}^{n} E(S_i) = \left| X_0 = 0 \right| =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} E(S_i) = n \cdot E(S) = n(p-q)$$

$p - q \to 0$

$$E(X_n^2) \overset{X_0 = 0}{=} E\left(\left(\sum_{i=1}^{n} S_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} S_i\right)\right) = E\left(\left(\sum_{i=1}^{n} S_i^2\right) + \left(\sum_{\substack{i,j \\ i\neq j}} S_i S_j\right)\right) =$$

$$= E\Big(\underbrace{\sum_{i=1}^{n} \underbrace{S_i^2}_{+1}}_{\underbrace{n\cdot(+1)}_{n}}\Big) + E\Big(\underbrace{\sum_{\substack{i,j \\ i\neq j}} S_i S_j}_{\sum_{\substack{i,j \\ i\neq j}} \underbrace{E(S_i S_j)}_{E(S_i)E(S_j)}}\Big) = n + (n^2 - n)(p-q)^2$$



$$\mathrm{var}(X_n) = E(X_n^2) - E(X_n)^2 = 4 \cdot n \cdot p \cdot q = 4 \cdot n \cdot p \cdot (1-p)$$

$$R_{XX}(\underbrace{m}_{\text{dyskretny czas}}, n)$$

$$\underbrace{E(X_m \cdot X_n)}_{\text{funkcja autokorelacji}} = E((X_m \underbrace{- X_n + X_n}_{0}) X_n) =$$

$$= E((X_m - X_n) X_n + X_n^2) =$$

$$= E(\underbrace{(X_m - X_n)}_{\text{niezależne}} \underbrace{X_n}_{\text{zmienne losowe}}) + E(X_n^2) =$$

$$= E(X_m - X_n) E(X_n) + E(X_n^2) =$$

$$= \begin{cases} (p-q)^2 mn + 4mpq & m < n \\ (p-q)^2 mn + 4 \underbrace{\min(m,n)}_{\text{najmniejszy element z } m,n} pq \end{cases}$$

autocovariance function:

$$K_{xx}(m,n) = R_{xx}(m,n) - E(X_m)E(X_n)$$

współczynnik auto-korelacji:

$$\rho_{xx}(m,n) = \frac{K_{xx}(m,n)}{\sigma(X_m)\,\sigma(X_n)}$$

procesy liczące

$$\overset{\text{czas}}{\downarrow}$$

- proces gdzie zmienne losowe $N(t)$ oznacza "liczba zliczeń" w czasie t

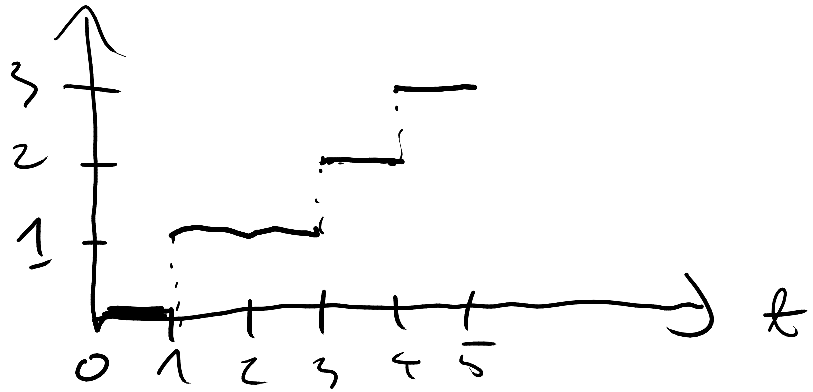
$$N(t) \in \{0, 1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{Z}^{+}$$

~~#~~ # rzut monetą

H ← reszka sukces

T ← orzeł

$t =$	0	1	2	3	4	5	...
	T	H	T	H	H	T	
$N(t) =$	0	1	1	2	3	3	



p

n_1 - liczba sukcesów H

n_2 - liczba sukcesów T

$q = 1 - p$

$n = n_1 + n_2$

$(k = n_1 - n_2)$

$P(\text{liczba } H = n_1) =$

$$= \binom{n}{n_1} p^{n_1} q^{n_2}$$

$P(\text{liczba } H = N(h)) =$

$$= \binom{n}{N(h)} p^{N(h)} (1-p)^{h - N(h)}$$

1 rzut monetą co Δ sekund

↳ 0

$$t = n \cdot \Delta \qquad n = \frac{t}{\Delta}$$

↳ liczba prób

$$E\left(N\left(\underbrace{\tfrac{t}{\Delta}}_{n}\right)\right) = \sum_{i=0}^{n} \underbrace{\binom{n}{i} p^{i} (1-p)^{n-i}}_{\text{prawdop. } i \text{ H}} i = np = \frac{t}{\Delta} \cdot p$$

"arrival rate"

$$\lambda = \frac{E(N(\frac{t}{\Delta}))}{t} \quad E\left(N\left(\frac{t}{\Delta}\right)\right) = \frac{t}{\Delta} p = t \cdot \frac{p}{\Delta} = \lambda$$

T – czas pomiędzy sukcesami (H), "interarrival rate"

One
$\downarrow$

$$\text{T} \quad \underbrace{\text{H} \quad \text{H}}_{1} \quad \underbrace{\text{T} \quad \text{T} \quad \text{T}}_{2} \quad \text{H}$$

$T =$

$E(T) = ?$

$$E(T) = E(j \cdot \Delta)$$

$\Delta \to 0$

T – czas

j – liczba kroków pomiędzy sukcesami

$j = 1$

p

T H T T $\boxed{\text{H H}}$ T ...

0 1 2 3 4 5 6 ...

$$P(j=1) = p$$

$j = 2$

$q \quad p$

T H T $\boxed{\text{H T H}}$ H ...

0 1 2 3 4 5 6 ...

$$P(j=2) = q \cdot p = q^{2-1} \cdot p$$

$$P(\text{liczba kroków pomiędzy sukcesami} = j) = q^{j-1} p = q^{j-1}(1-q)$$

$$E(\text{liczba kroków pomiędzy sukcesem}) = \sum_{j=1}^{\infty} j \cdot P(j) =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} j\, q^{j-1}(1-q) = (1-q)\sum_{j=1}^{\infty} j\, q^{j-1} =$$

$$= (1-q)\sum_{j=1}^{\infty} \frac{d}{dq} q^{j} = (1-q)\frac{d}{dq}\sum_{j=1}^{\infty} q^{j} =$$

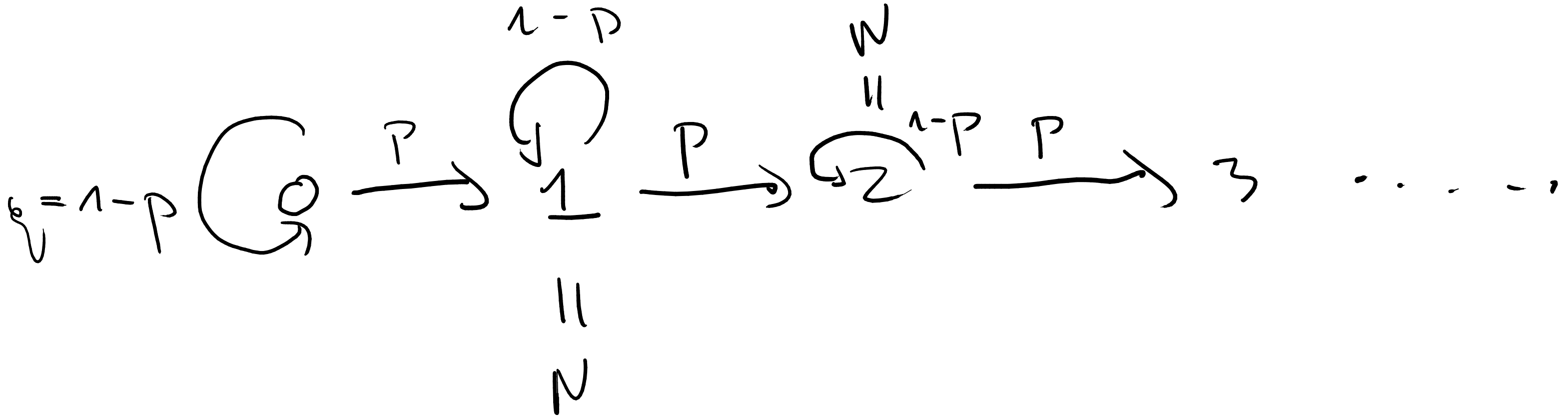
$$= (1-q)\frac{d}{dq}\frac{1}{1-q} = (1-q)(1-q)^{-2}\cdot(-1)\cdot(-1) =$$

$$= (1-q)(1-q)^{-2} = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{p}$$

$$\sigma^2(T) = \Delta^2 \, \frac{1-p}{p^2} = \frac{1-p}{\lambda^2}$$

$\delta\Delta$

$$\lambda = \frac{p}{\Delta}$$



$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[loop left, "q=1-p"] \arrow[r, "p"] & 1 \arrow[loop above, "1-p"] \arrow[r, "p"] & 2 \arrow[loop above, "1-p"] \arrow[r, "p"] & 3 \quad \cdots \end{tikzcd}$$

$1 = N \qquad N = 2$

$$\left(p_0, p_1, p_2, p_3, \dots \right)$$

$p_0 \updownarrow N = 0 \qquad p_1 \downarrow N = 1$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1-p & p & & 0 \\ & 1-p & p & \\ & & 1-p & p \\ & 0 & & 1-p & p \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}}_{P}$$

$$
\left(P_{ij}\right)^{h} = \begin{cases} \binom{h}{j-i} p^{\,j-i} q^{\,h-j+i} & 0 \le j-i \le h \\[2em] 0 & \text{per tutti gli altri} \end{cases}
$$

proces Poissona

proces liczący Bernoulliego

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[loop above, "1-p"] \arrow[r, "p"] & 1 \arrow[loop above, "1-p"] \arrow[r, "p"] & 2 \arrow[loop above, "1-p"] \arrow[r, "p"] & 3 \arrow[loop above, "1-p"] \arrow[r] & \dots \end{tikzcd}$$

p : prawdopodobieństwo sukcesu w czasie Δ

$q = 1-p$: — ... Δ

$\Delta \to 0$

dla "małego" czasu h

arrival rate

$\lambda \cdot h$ sukces w h

$1 - \lambda h$ porażka w h

Procesem Poissona

proces Poissona jest granicznym przypadkiem procesu Bernulliego ← proces liczący :

a) $N(0) = 0$

b) $$p_{mn}(h) = \begin{cases} 1 - \lambda h & \text{gdy } m = n \\ \lambda h & \text{gdy } n = m+1 \\ 0 & \text{pozostałe przypadki} \end{cases}$$

h — mały czas

c) $t > s$

$N(t) - N(s)$ $\qquad$ $N(s)$

niezależne zmienne losowe

$P(\text{liczba sukcesów po czasie } t = \underbrace{N(t)}_{n}) = p_n(t)$

$$p_n(t+h) = p_n(t)\, p_{nn}(h) + p_{n-1}(t)\, p_{n-1\,n}(h) =$$

$$= p_n(t)(1-\lambda h) + p_{n-1}(t)\lambda h$$

$n=0$

$$p_0(t+h) = p_0(t)(1-\lambda h)$$

$$p_0(t+h) - p_0(t) = (1-\lambda h)p_0(t) - p_0(t) \quad // /h$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{p_0(t+h)-p_0(t)}{h} = -\lambda p_0(t) \quad \Bigg| \quad \frac{d\,p_0(t)}{dt} = -\lambda p_0(t)$$

$$\boxed{\frac{d\,p_0(t)}{dt} = -\lambda\, p_0(t)}$$

$n \neq 0$

$$p_n(t+h) = p_n(t)(1-\lambda h) + p_{n-1}(t)\cdot \lambda h$$

$$p_n(t+h) - p_n(t) = p_n(t)(-\lambda h) + p_{n-1}(t)(\lambda h)$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{p_n(t+h) - p_n(t)}{h} = \lambda \quad p_{n-1}(t) - \lambda\, p_n(t)$$

$$\boxed{\frac{d\,p_n(t)}{dt} = \lambda\, p_{n-1}(t) - \lambda\, p_n(t)}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d p_0(t)}{dt} &= -\lambda p_0(t) \\ \frac{d p_n(t)}{dt} &= \lambda p_{n-1}(t) - \lambda p_n(t) \\ N(0) = 0 \;&\Rightarrow\; p_n(0) = \delta_{n0} \end{aligned}}$$

$$p_0(t) = C_0 e^{-\lambda t} \qquad p_0(0) = \overbrace{\delta_{\underset{0}{\underset{\shortparallel}{n}}0}}^{1} = C_0 \qquad C_0 = 1$$

$$\boxed{p_0(t) = e^{-\lambda t}}$$

$n = 1$

$$\frac{d p_1(t)}{dt} = \lambda \underbrace{p_0(t)}_{e^{-\lambda t}} - \lambda p_1(t)$$

$$\frac{d p_1(t)}{dt} = \lambda e^{-\lambda t} - \lambda p_1(t)$$

$$p_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t} + C_1 e^{-\lambda t}$$

$$p_1(0) = \delta_{10} = 0 = C_1 \underbrace{e^{-\lambda 0}}_{1} \qquad C_1 = 0$$

$$p_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$$

$$p_0(t) = e^{-\lambda t}$$

$$p_1(t) = \lambda t \, e^{-\lambda t}$$

$$p_2(t) = \frac{(\lambda t)^2}{2!} e^{-\lambda t}$$

$$\ldots$$

$$p_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$$