

Metody statystyczne

Kurs dla kierunku
Informatyki stosowanej
Uniwersytet Jagielloński
Kraków, 2020/2021

Literatura

- M. Baron, „Probability and Statistics for computer scientists”, CRC Press, 2014
 - H. Kobayashi, B.L. Mark, W. Turin „Probability, Random Processes, and statistical analysis.” Cambridge University Press, 2012
-

Spis treści

Procesy stochastyczne

- Wprowadzenie
 - Systemy kolejkowe
 - Ukryte łańcuchy Markowa
 - Procesy gałązkowe
-

Przypomnienie pojęć z rachunku prawdopodobieństwa

1. Prawdopodobieństwo

2. Zmienna losowa $\forall s \in S \xrightarrow{X(s)} x \in S_X$

Zmienna losowa dyskretna

Rozkład prawdopodobieństwa
(dyskretnie wartości i ich
prawdopodobieństwa)

Przykład: rzut kostką

$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$P(X=1)=1/6, P(X=2)=1/6, \dots$

Normalizacja: $\sum_k P_X(x_k) = 1$

Związek z prawdopodobieństwem:

$P(X=i)$ dane bezpośrednio

Nieujemność: $\forall_k P_X(x_k) \geq 0$

Zmienna losowa ciągła

Funkcja gęstości prawdopodobieństwa
Przedział wartości zmiennej losowej

Przykład: rozkład normalny

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad x \in R$$

Normalizacja: $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) dt = 1$

$$P(a < X < b) = \int_a^b f_X(t) dt$$

$$f_X(x) \geq 0$$

Przypomnienie pojęć z rachunku prawdopodobieństwa

Dystrybuanta $F_X(x) = P(X \leq x)$

Równoważna rozkładowi prawdopodobieństwa lub funkcji gęstości prawdopodobieństwa.

$$F_X(x_k) = \sum_{j: x_j \leq x_k} P_X(x_j)$$

$$P_X(x_k) = F_X(x_k) - F_X(x_{k-1})$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$$

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$$

$$P(a < X < b) = F_X(b) - F_X(a)$$

Użyteczne narzędzie do generacji liczb pseudolosowych.

Przypomnienie pojęć z rachunku prawdopodobieństwa

Globalny opis rozkładu prawdopodobieństwa

■ wartość oczekiwana

$$E(X) = \sum_k P_X(x_k) x_k$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) x \, dx$$

własności: $E(a) = a$

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

$$Y = g(X): E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) \cdot g(x) \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y) \cdot y \, dy$$

■ wariancja

$$\text{var}(X) \equiv \sigma_X^2 \equiv \sigma^2(X) = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right) = E(X^2) - (E(X))^2$$

własności

$$\text{var}(a) = 0$$

$$\text{var}(aX + b) = a^2 \text{var}(X)$$

$\sigma(X)$ to odchylenie standardowe: $\sigma(X) = \sqrt{\text{var}(X)}$

Przypomnienie pojęć z rachunku prawdopodobieństwa

Globalny opis rozkładu prawdopodobieństwa

- Kwantyle

Kwantylem rzędu p (dla zmiennej losowej X) nazywamy liczbę x_p :

$$F_X(x_p) = p \quad (0 \leq p \leq 1)$$

W szczególności: mediana to kwantyl rzędu $\frac{1}{2}$

kwartyle to kwantyle rzędu $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, oraz $\frac{3}{4}$

- moda – wartość najbardziej prawdopodobna czyli $x: \max\{f_X(x)\}$

Przypomnienie pojęć z rachunku prawdopodobieństwa

Ważne rozkłady dyskretne

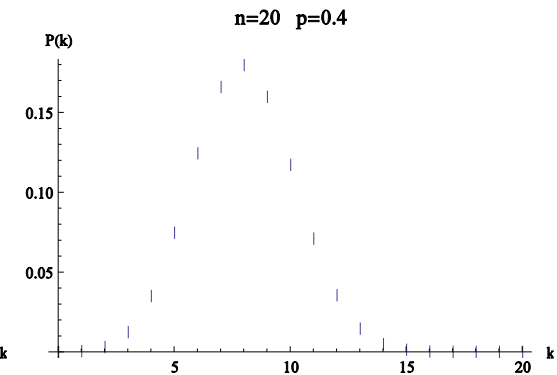
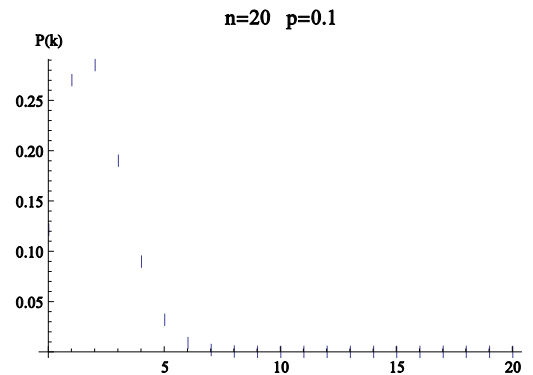
■ Rozkład dwumianowy (związany z próbą Bernoulliego)

$$P_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$k = 0, 1, \dots, n$$

$$E(X) = np$$

$$\text{var}(X) = np(1-p)$$



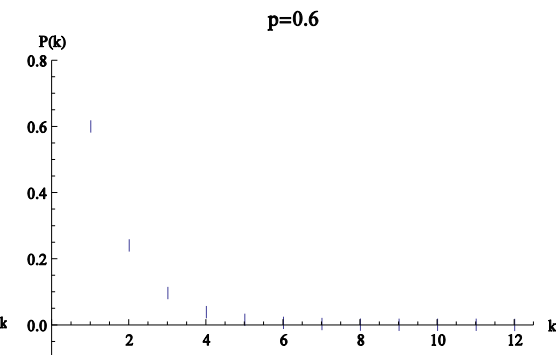
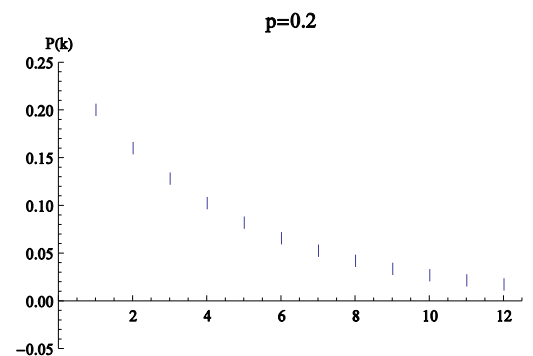
■ Rozkład geometryczny

$$P_X(k) = (1-p)^{k-1} p$$

$$k = 1, 2, \dots, \infty$$

$$E(X) = \frac{1}{p}$$

$$\text{var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$$



Przypomnienie pojęć z rachunku prawdopodobieństwa

Ważne rozkłady dyskretne

■ Rozkład Poissona

$$P_X(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

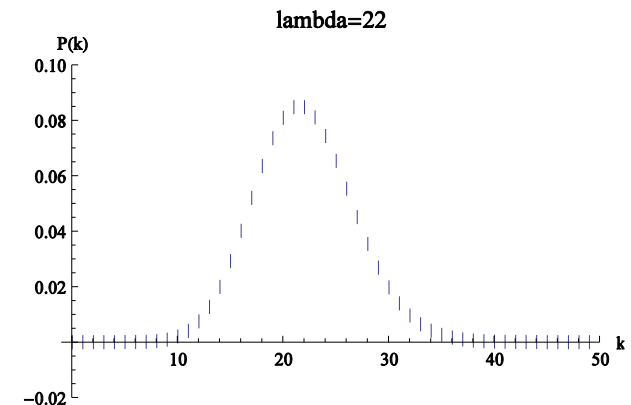
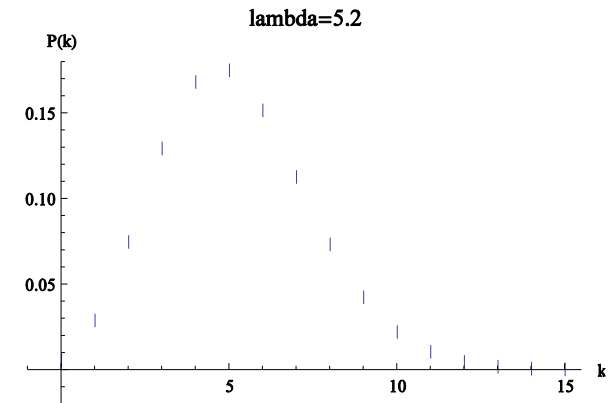
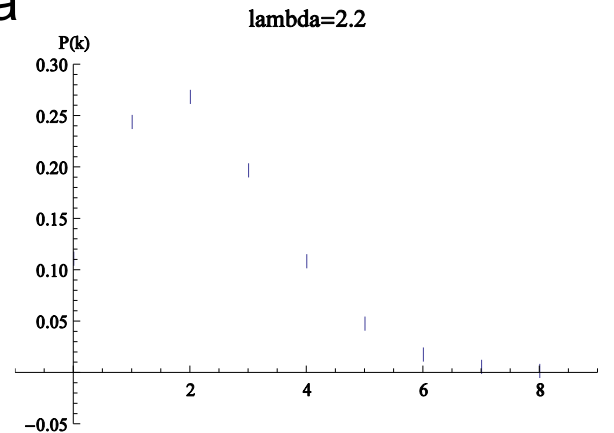
$$k = 0, 1, \dots, n$$

$$\lambda > 0$$

$$E(X) = \lambda$$

$$\text{var}(X) = \lambda$$

- Duża próbka, rzadkie zjawisko
- Zjawisko powtarzające się ze stałą częstością



Przypomnienie pojęć z rachunku prawdopodobieństwa

Ważne rozkłady ciągłe

■ rozkład jednorodny

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a}$$

$$x \in [a, b]$$

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

$$\text{var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

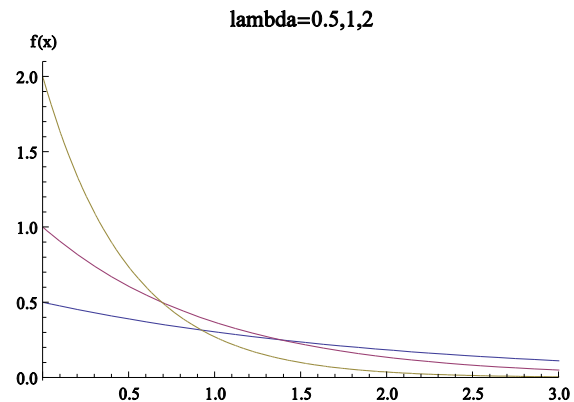
■ Rozkład wykładniczy

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

$$x \in [0, +\infty)$$

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

$$\text{var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$



Przypomnienie pojęć z rachunku prawdopodobieństwa

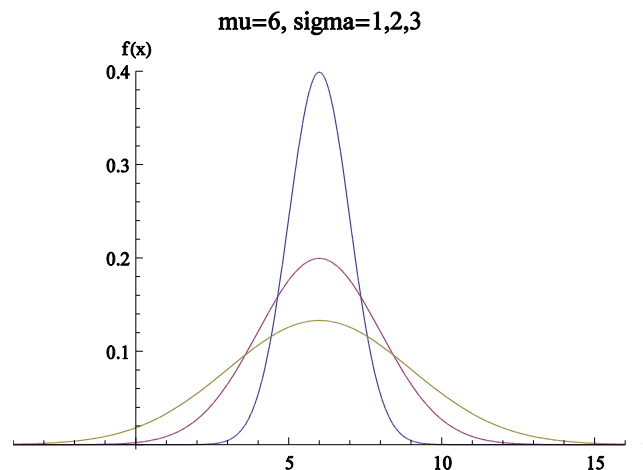
Ważne rozkłady ciągłe

■ rozkład normalny

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad x \in \mathbb{R}$$

$$E(X) = \mu$$

$$\text{var}(X) = \sigma^2$$



- Dla $\mu=0$ i $\sigma=1$ nazywany jest standardowym rozkładem normalnym (standardowym rozkładem Gaussa).
- Standaryzacja: Jeżeli zmienna losowa X ma rozkład $N(\mu, \sigma^2)$ to zmienna losowa $Y=(X-\mu)/\sigma$ ma rozkład $N(0, 1)$
- Reguła 3σ
- Dystrybucja nie wyraża się analitycznie
- Centralne Twierdzenie Graniczne
- Generowanie, np. transformacja Box-Mullera

Przypomnienie pojęć z rachunku prawdopodobieństwa

Wielowymiarowe zmienne losowe

- funkcja gęstości prawdopodobieństwa $f_{X,Y}(x,y)$:

$$\forall x, y \quad f_{X,Y}(x, y) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y) dx dy = 1$$

$$P(x < X \leq x + dx, y < Y \leq y + dy) = f_{X,Y}(x, y) dx dy$$

- Kowariancja $cov(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] =$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))(y - E(Y)) f_{X,Y}(x, y) dx dy$$

Przypomnienie pojęć z rachunku prawdopodobieństwa

- Współczynnik korelacji zmiennych losowych X, Y (unormowana kowariancja) to

$$\rho_{X,Y} \equiv \text{corr}(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{var}(X)\text{var}(Y)}}$$

- własności:

1. Współczynnik korelacji jest bezwymiarowy.

$$2. -1 \leq \rho_{X,Y} \leq 1$$

3. Współczynnik korelacji jest miarą zależności liniowej

$$\rho_{X,Y} = 1 \quad \text{dla} \quad Y = aX + b \quad a > 0$$

$$\rho_{X,Y} = -1 \quad \text{dla} \quad Y = aX + b \quad a < 0$$

4. Jeżeli $\rho_{X,Y} = 0$ to zmienne X i Y nie muszą być niezależne; nazywamy je wtedy nieskorelowanymi.

Przypomnienie pojęć z rachunku prawdopodobieństwa

Estymacja

- punktowa – oszacowanie wartości parametru Θ przez podanie wartości estymatora $T_n(\Theta)$ tego parametru

$$T_n(E(X)) \equiv \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \qquad T_n(\sigma(\bar{X})) \equiv S(\bar{X}) = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2}$$

- przedziałowa – podanie przedziału liczbowego, wewnątrz którego, z założonym prawdopodobieństwem γ , leży prawdziwa wartość parametru Θ .

$$P\left(T_n^L(\theta) \leq \theta \leq T_n^P(\theta)\right) = \gamma$$

$$\text{np. } P\left(\bar{X} - \frac{1}{\sqrt{n}} S(X) t_{\frac{1+\gamma}{2}} \leq E(X) \leq \bar{X} + \frac{1}{\sqrt{n}} S(X) t_{\frac{1+\gamma}{2}}\right) = \gamma$$

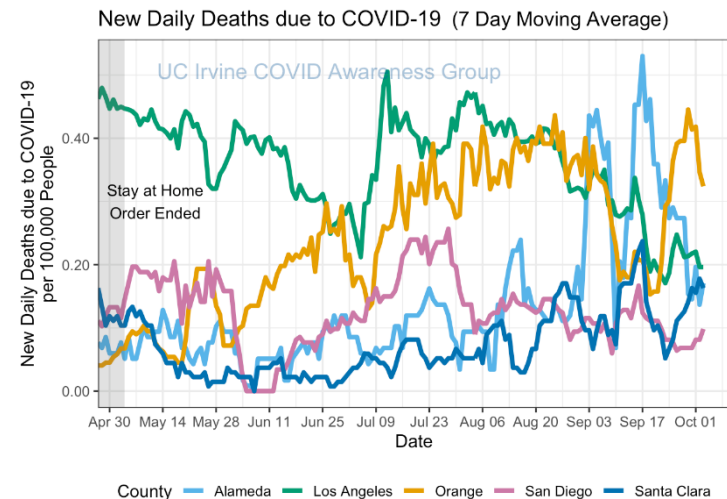
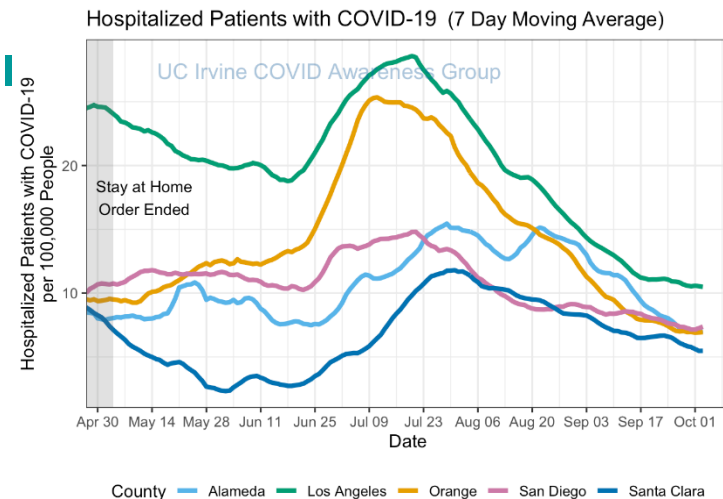
(t_a to kwantyle rozkładu t-Studenta na poziomie a)

Wprowadzenie

Procesy stochastyczne to zmienne losowe ewoluujące i zmieniające się w zależności od dodatkowego parametru, zwykle utożsamianego z czasem.

- Czas może być ciągły $(0, +\infty)$ lub $(-\infty, +\infty)$ lub $(0, T)$ itd.
lub dyskretny $\{0, 1, 2, \dots\}$ lub $\{0, 1, 2, \dots, T\}$ itd.
- Proces oznaczamy $X(t, w)$ lub $X_t(w)$ lub $X(t)$
- Najczęściej interesuje nas:
 - rozkład prawdopodobieństwa w dla ustalonego t
 - zmienność tego rozkładu z czasem
 - zmienność w z czasem, dla pojedynczej realizacji
- Stany procesu w mogą być ciągłe lub dyskretnie \rightarrow mówimy o procesach ciągłych lub dyskretnych

Wprowadzenie



<https://www.stat.uci.edu/covid19/index.html> (Creative Commons Attribution 4.0 International License)

Przykłady:

- Liczba stron w kolejnych wydrukach na drukarce
- Czas wydruku kolejnych wydruków na drukarce
- Liczba polubień w serwisie społecznościowym w funkcji czasu lub w funkcji wpisu
- Temperatura w funkcji czasu
- Liczba pasażerów autobusu MPK

Proces Markowa

- Proces $X(t)$ jest procesem Markowa jeżeli dla każdego czasu $t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_n$

$$\begin{aligned} P(X(t_n) \in A_t \mid X(t_1) \in A_1 \cap X(t_2) \in A_2 \cap \dots \cap X(t_{n-1}) \in A_{t-1}) = \\ = P(X(t_n) \in A_t \mid X(t_{n-1}) \in A_{t-1}) \end{aligned}$$

czyli

- $P(\text{przyszłość} \mid \text{teraźniejszość} \cap \text{przeszłość}) =$
 $= P(\text{przyszłość} \mid \text{teraźniejszość})$

czyli

- Dla przyszłości nie jest istotne po jakiej trajektorii proces doszedł do teraźniejszego stanu. Istotne jest w jakim jest stanie.

Łańcuch Markowa

- Łańcuch Markowa to proces Markowa o dyskretnym czasie i dyskretnych stanach.
- Stany numerujemy $1, 2, 3, \dots, n$ (gdzie n może być nieskończone)
- Kolejne chwile czasu numerujemy $0, 1, 2, 3, \dots, T$ (gdzie T może być nieskończone)
- Czas początkowy przyjmujemy $t=0$
- Oznaczamy $X(t)$, np. $X(t=2)=5$, $X(t=i)=k$ lub równoważnie $X(2)=5$, $X(i)=k$ lub równoważnie $X_2=5$, $X_i=k$
- Własność Markowa

$$P(X_{t+1}=j|X_t=i)=P(X_{t+1}=j|X_t=i, X_{t-1}=k, X_{t-2}=l, \dots, X_0=m)$$

Łańcuch Markowa

- Def: Prawdopodobieństwo przejścia ze stanu i w chwili t do stanu j w chwili $t+1$ (*transition probability*):

$$p_{ij}(t) := P(X_{t+1} = j \mid X_t = i) \equiv p_{i \rightarrow j}(t)$$

- Def: Prawdopodobieństwo przejścia ze stanu i w chwili t do stanu j w chwili $t+h$ (*h-step transition probability*):

$$p_{ij}^{(h)}(t) := P(X_{t+h} = j \mid X_t = i) \equiv p_{i \rightarrow j}^{(h)}(t)$$

- Stan procesu ma podwójne znaczenie: są to wartości jakie przybiera zmienna losowa (np. cena akcji, 0 lub 1, ilość drukowanych stron w danym zadaniu) lub jest to wektor zbudowany z prawdopodobieństw bycia w tych stanach: $P_t(X) \equiv (P(X_t=1), P(X_t=2), P(X_t=3), \dots, P(X_t=n), \dots)$

- Def: Łańcuch Markowa jest jednorodny gdy wszystkie $p_{ij}(t)$ i $p_{ij}^{(h)}(t)$ nie zależą od czasu. Zatem $p_{ij}(t) \rightarrow p_{ij}$

$$p_{ij}^{(h)}(t) \rightarrow p_{ij}^{(h)}$$

Łańcuch Markowa

- Aby w pełni określić proces Markowa musimy znać stan początkowy X_0 (lub prawdopodobieństwa różnych stanów początkowych $P_0(X)$) i prawdopodobieństwa przejść do innych stanów $p_{ij}(t)$
- Bazując na znajomości $P_0(X)$ oraz $p_{ij}(t)$ możemy obliczyć:
 - $p_{ij}^{(h)}(t)$
 - $P_h(X) \equiv (P(X_h = 1), P(X_h = 2), \dots, P(X_h = n))$
 - $\lim_{h \rightarrow \infty} p_{ij}^{(h)}$
 - $\lim_{h \rightarrow \infty} P_h(X)$
- Obliczenia w granicy dużych h odpowiadają prognozie długoterminowej; obliczenie wartości granicznych może być nieraz prostsze niż obliczenie $p_{ij}^{(h)}$ i $P_h(X)$ dla dużych h .

Równanie Chapmanna-Kołmogorowa

$$p_{ij}^{(2)} \equiv P(X_{t+2} = j | X_t = i) = \sum_{k=1}^n P(X_{t+2} = j | X_{t+1} = k) P(X_{t+1} = k | X_t = i) = \sum_k p_{ik} p_{kj}$$

$$p_{ij}^{(2)} \equiv P(X_{t+2} = dX_j | X_t = dX_i) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dX_k P(X_{t+2} = dX_j | X_{t+1} = dX_k) P(X_{t+1} = dX_k | X_t = dX_i)$$

Prawdopodobieństwo
warunkowe

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

■ Dowód

$$p_{ij}^{(2)} \equiv P(X_{t+2} = j | X_t = i) = \sum_k P(X_{t+2} = j \cap X_{t+1} = k | X_t = i) =$$

$$= \sum_k \frac{P(X_{t+2} = j \cap X_{t+1} = k \cap X_t = i)}{P(X_t = i)} =$$

$$= \sum_k \frac{P(X_{t+2} = j | X_{t+1} = k \cap X_t = i) P(X_{t+1} = k \cap X_t = i)}{P(X_t = i)} =$$

$$= \sum_k P(X_{t+2} = j | X_{t+1} = k \cap X_t = i) P(X_{t+1} = k | X_t = i) =$$

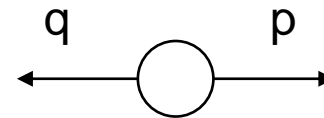
$$= \sum_k P(X_{t+2} = j | X_{t+1} = k) P(X_{t+1} = k | X_t = i) = \sum_k p_{kj} p_{ik} = \sum_k p_{ik} p_{kj}$$

Przykład: Błądzenie przypadkowe

- Związane z próbą Bernoulliego
- Zał: przesuwamy się w lewo z prawdopodobieństwem q , w prawo z prawdopodobieństwem p .
- n_L – liczba kroków w lewo
- n_P – liczba kroków w prawo

$$x_n = n_P - n_L \equiv k$$

$$\begin{cases} n = n_L + n_P \\ k = n_P - n_L \end{cases} \rightarrow \begin{cases} n_P = (n + k) / 2 \\ n_L = (n - k) / 2 \end{cases}$$



- Aby osiągnąć pozycję k musimy mieć n_P sukcesów i n_L porażek

$$P(X_n = k) = \binom{n}{n_P} p^{n_P} q^{n_L} = \binom{n}{\frac{n+k}{2}} p^{\frac{n+k}{2}} (1-p)^{\frac{n-k}{2}}$$

$$p = 0.5: \quad P(X_n = k) = \frac{n!}{2^n} \left(\frac{n+k}{2}! \frac{n-k}{2}! \right)^{-1}$$

Przykład: Błądzenie przypadkowe cd

- Inne ujęcie $X_n = X_0 + \sum_{i=1}^n S_i$

Gdzie X_0 – punkt startowy, $S_i=+1$ (z prawdopodobieństwem p) lub -1 (z prawdopodobieństwem $q=1-p$), $n=1,2,3,\dots$

Zał: $X_0=0$

- wartość oczekiwana S_i oraz S_i^2

$$E[S_i] = \sum_{w=-1,1} w \cdot P(w) = (-1)q + 1p = p - q$$

$$E[S_i^2] = \sum_{w=-1,1} w^2 \cdot P(w) = (-1)^2 q + 1^2 p = q + p = 1$$

- wartość oczekiwana X_n

$$E[X_n] = E\left[\sum_{i=1}^n S_i\right] = \sum_{i=1}^n E[S_i] = nE[S_1] = n(p - q)$$

czyli dla $p=q=0.5$ $E[X_n]=0$ (mimo, że dla n nieparzystego $X_n=0$ nie może być nigdy osiągnięte)

Przykład: Błądzenie przypadkowe cd

■ Odchylenie standardowe X_n

$$\begin{aligned} E[X_n^2] &= E\left[\sum_{i=1}^n S_i \sum_{j=1}^n S_j\right] = E\left[\sum_{i=1}^n S_i^2\right] + E\left[\sum_{i \neq j, i=1}^n \sum_{j=1}^n S_i S_j\right] = nE[S_1^2] + (n^2 - n)E[S_i]E[S_j] = \\ &= n \cdot 1 + (n^2 - n)(p - q)(p - q) = n + (n^2 - n)(p - q)^2 = n^2(p - q)^2 + n(1 - (p - q)^2) = \\ &= n^2(p - q)^2 + n((p + q)^2 - (p - q)^2) = n^2(p - q)^2 + n(p^2 + q^2 + 2pq - p^2 - q^2 + 2pq) = \\ &= n^2(p - q)^2 + 4npq \\ \text{var}[X_n] &= E[X_n^2] - (E[X_n])^2 = n^2(p - q)^2 + 4npq - n^2(p - q)^2 = 4npq \\ \sigma[X_n] &= \sqrt{\text{var}[X_n]} = 2\sqrt{npq} \end{aligned}$$

■ Wartość oczekiwany zmiany po m-n krokach ($m > n$)

$$E[X_m - X_n] = E[X_m] - E[X_n] = m(p - q) - n(p - q) = (m - n)(p - q)$$

Przykład: Błądzenie przypadkowe cd

- Funkcja autokorelacji

$$\begin{aligned} E[X_m \cdot X_n] &= E[(X_m - X_n + X_n) \cdot X_n] = E[(X_m - X_n) \cdot X_n] + E[X_n^2] = \\ &= E[(X_m - X_n)] \cdot E[X_n] + E[X_n^2] = (m - n)(p - q) \cdot n(p - q) + n^2(p - q)^2 + 4npq = \\ &= (p - q)^2(mn - n^2 + n^2) + 4npq = (p - q)^2 mn + 4npq \end{aligned}$$

- Funkcja autokowariancji (klasycznie: $\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$)

$$E[X_m \cdot X_n] - E[X_m]E[X_n]$$

- Dla dwóch procesów: funkcja korelacji (cross correlation)

$$E[X_m \cdot Y_n] - E[X_m]E[Y_n]$$

- Znajdują zastosowanie w badaniu istnienia trendów (dla trendów korelacja wolno znika z czasem), sezonowości danych (periodyczność przenosi się na korelację), badaniu zmienności stanów (bardziej zmienny proces prowadzi do bardziej zmiennej korelacji)
- Opisują własności dynamiczne procesu (własności statyczne (chwilowe) opisuje rozkład prawdopodobieństwa)
- Transformata Fouriera funkcji autokorelacji to „spektrum procesu”

Przykład: Współdzielenie urządzenia

Syt:

- Urządzenie może obsłużyć do dwóch użytkowników. Użytkownicy działają niezależnie od siebie.
- Założmy krok czasowy = 1 min.
- Każdy z użytkowników, korzystający z urządzenia, przestaje korzystać z prawdopodobieństwem $p=0.5$ /min;
- Każdy z użytkowników, nie korzystający z urządzenia, zaczyna korzystać z prawdopodobieństwem $r=0.2$ /min;
- Stan urządzenia oznaczmy liczbą użytkowników $X_t=\{0,1,2\}$

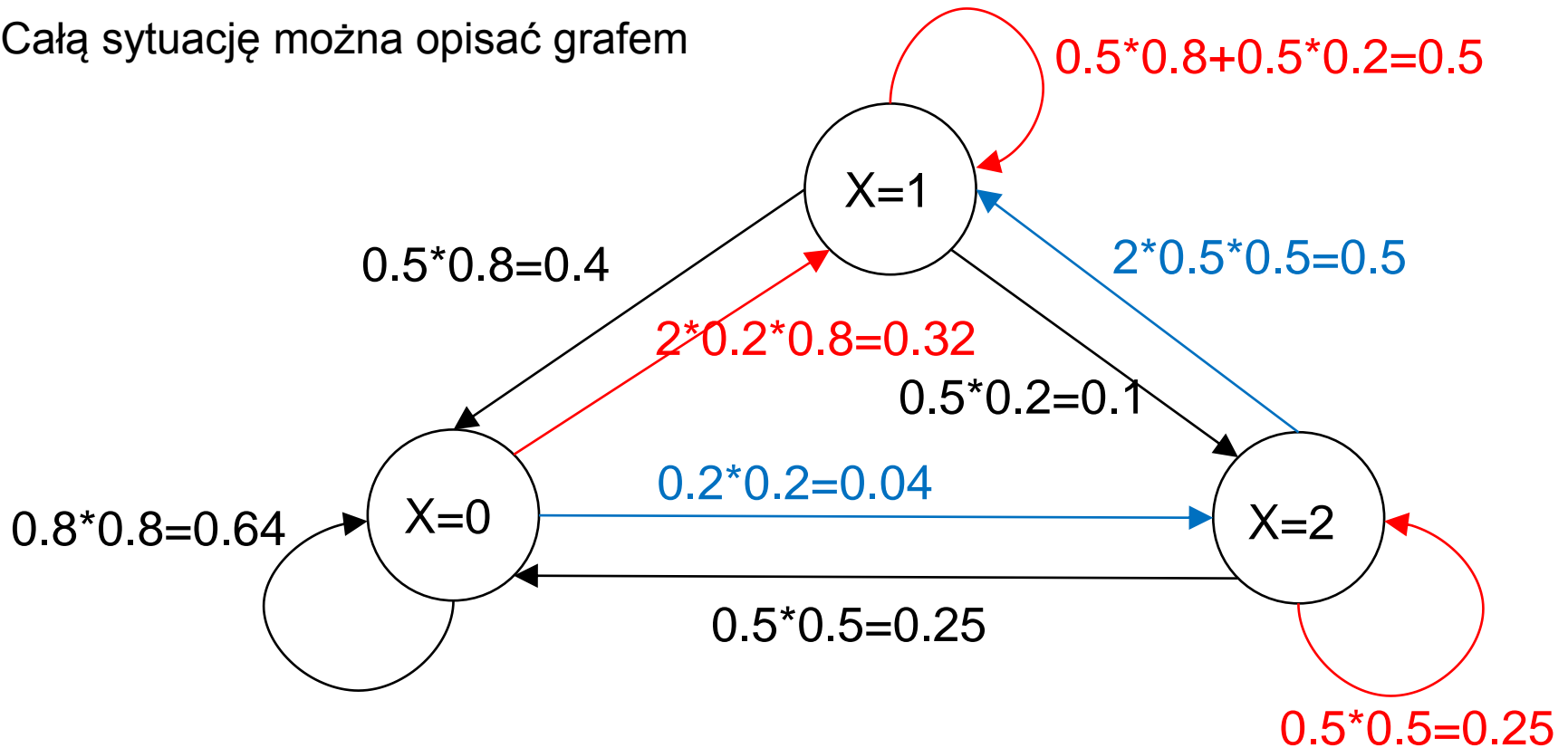
→

- Każdy z użytkowników, korzystający z urządzenia, korzystać nadal z prawdopodobieństwem $1-p=1-0.5=0.5$ /min;
- Każdy z użytkowników, nie korzystający z urządzenia, nadal nie korzysta z prawdopodobieństwem $1-r=1-0.2=0.8$ /min;

Przykład: Współdzielenie urządzenia

- $P(\text{koniec użytkowania}) = p = 0.5 / \text{min}$; $P(\text{pozostanie w użytkowaniu}) = 0.5 / \text{min}$
- $P(\text{start użytkowania}) = r = 0.2 / \text{min}$ $P(\text{pozostanie w nieużytkowaniu}) = 0.8 / \text{min}$

Całą sytuację można opisać grafem



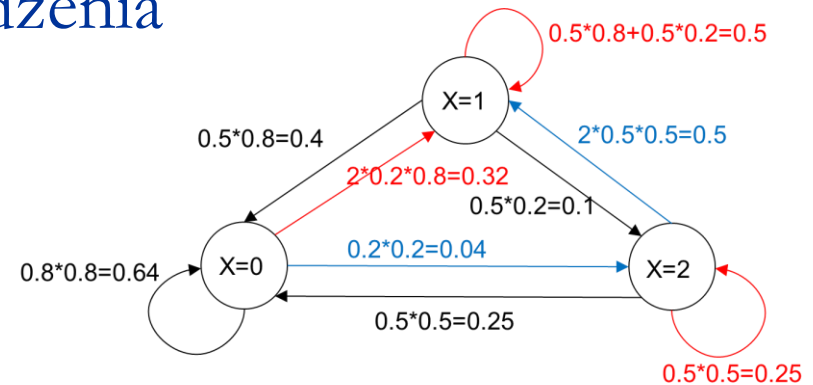
Czynniki „2” pochodzą z rozkładu dwumianowego

Przykład: Współdzielenie urządzenia

Zał: $X_0=0$

- Jaki będzie stan $X(t=1)$?

$$X(t=1) = \begin{cases} 0 & P(X_1 = 0) = 0.64 \equiv p_{0 \rightarrow 0}^{(1)} \\ 1 & P(X_1 = 1) = 0.32 \equiv p_{0 \rightarrow 1}^{(1)} \\ 2 & P(X_1 = 2) = 0.04 \equiv p_{0 \rightarrow 2}^{(1)} \end{cases}$$



- Jaki będzie stan $X(t=2)$?

$$p_{0 \rightarrow 0}^{(2)} = \sum_{i=1}^3 P(X_1 = i | X_0 = 0) P(X_2 = 0 | X_1 = i) = \sum_{i=1}^3 p_{0 \rightarrow i}^{(1)} p_{i \rightarrow 0}^{(1)} = p_{0 \rightarrow 0}^{(1)} p_{0 \rightarrow 0}^{(1)} + p_{0 \rightarrow 1}^{(1)} p_{1 \rightarrow 0}^{(1)} + p_{0 \rightarrow 2}^{(1)} p_{2 \rightarrow 0}^{(1)} =$$

$$= 0.64^2 + 0.32 \cdot 0.4 + 0.04 \cdot 0.25 = 0.4096 + 0.128 + 0.01 = 0.5476$$

- Analogicznie liczymy pozostałe prawdopodobieństwa

- Jaki będzie stan $X(t=3)$?

$$p_{0 \rightarrow 0}^{(3)} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 P(X_1 = i | X_0 = 0) P(X_2 = j | X_1 = i) P(X_3 = 0 | X_2 = j) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 p_{0 \rightarrow i}^{(1)} p_{i \rightarrow j}^{(1)} p_{j \rightarrow 0}^{(1)}$$

$$p_{0 \rightarrow 0}^{(3)} = \sum_{j=1}^3 p_{0 \rightarrow j}^{(2)} p_{j \rightarrow 0}^{(1)}$$

Przykład: Współdzielenie urządzenia

Gdy X_0 jest nieznane

- Jaki będzie stan $X(t=1)$?

$$P(X_1 = k) = \sum_{i=1}^3 P(X_0 = i) \cdot p_{i \rightarrow k}^{(1)}$$

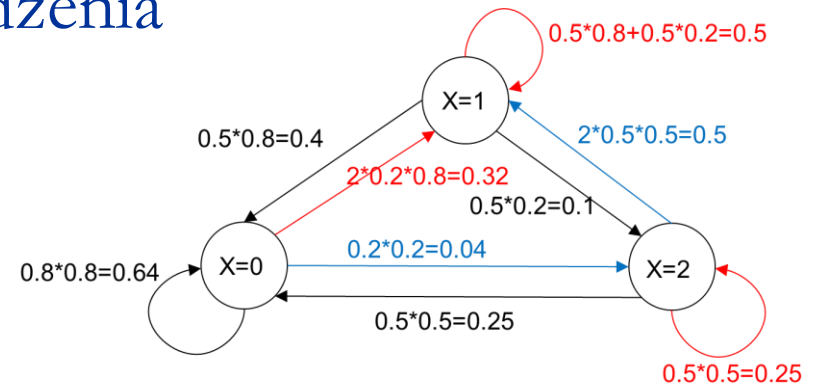
- Jaki będzie stan $X(t)$ dla dowolnego t ?

$$P(X_1 = k) = \sum_{i=1}^3 P(X_0 = i) \cdot p_{i \rightarrow k}^{(1)}$$

$$P(X_2 = k) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 P(X_0 = i) \cdot p_{i \rightarrow j}^{(1)} \cdot p_{j \rightarrow k}^{(1)}$$

$$P(X_3 = k) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{h=1}^3 P(X_0 = i) p_{i \rightarrow j}^{(1)} p_{j \rightarrow h}^{(1)} p_{h \rightarrow k}^{(1)}$$

→ warto przejść na zapis macierzowy



Macierz przejścia

Def: Macierz przejścia

$$P = \begin{pmatrix} p_{0 \rightarrow 0}^{(1)} & p_{0 \rightarrow 1}^{(1)} & \cdots & p_{0 \rightarrow n}^{(1)} \\ p_{1 \rightarrow 0}^{(1)} & p_{1 \rightarrow 1}^{(1)} & \cdots & p_{1 \rightarrow n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n \rightarrow 0}^{(1)} & p_{n \rightarrow 1}^{(1)} & \cdots & p_{n \rightarrow n}^{(1)} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & \cdots & p_{0n} \\ p_{10} & p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n0} & p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

0 ← Przejście ze stanu
1 ←
⋮
n ←

0 1 ... n ← Przejście do stanu

Jest to macierz stochastyczna: suma prawdopodobieństw w wierszach wynosi 1

Def: Stan w chwili t $P_t \equiv (P(X_t = 0), P(X_t = 1), P(X_t = 2), \dots, P(X_t = n))$

Analogicznie macierz przejścia po h krokach

$$P^{(h)} = \begin{pmatrix} p_{00}^{(h)} & p_{01}^{(h)} & \cdots & p_{0n}^{(h)} \\ p_{10}^{(h)} & p_{11}^{(h)} & \cdots & p_{1n}^{(h)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n0}^{(h)} & p_{n1}^{(h)} & \cdots & p_{nn}^{(h)} \end{pmatrix}$$

$P^{(h)}$ też jest macierzą stochastyczną

Macierz przejścia

k -ta składowa stanu procesu w dowolnej chwili h

$$P_h(k) \equiv P(X_h = k) = \sum_{i=0}^n P(X_0 = i) \cdot p_{i \rightarrow k}^{(h)} = (P_0(0), P_0(1), \dots, P_0(n)) \cdot \begin{pmatrix} p_{0 \rightarrow k}^{(h)} \\ p_{1 \rightarrow k}^{(h)} \\ \vdots \\ p_{n \rightarrow k}^{(h)} \end{pmatrix}$$

← Kolumna macierzy przejścia $P^{(h)}$

Przy powyższych definicjach

$$\begin{aligned} P_h &= P_0 P^{(h)} \\ P^{(h)} &= P^h \end{aligned}$$

→

$$\begin{aligned} P_1 &= P_0 P \\ P^{(2)} &= P^2 \end{aligned}$$

Stan (wektor poziomy)

Dla dużych h wielokrotne mnożenie macierzy może nie być praktyczne.

Def: Stan stacjonarny Π

$$\Pi \equiv \lim_{h \rightarrow \infty} P_h$$

$$\Pi_k \equiv \lim_{h \rightarrow \infty} P_h(k)$$

Ponieważ $P_{h+1} = P_h P$ to w granicy $h \rightarrow \infty$ $\Pi = \Pi P$

gdy znamy P jest to układ na n niewiadomych Π_i , $i=1, \dots, n$; ma nieskończenie wiele rozwiązań, ale mamy dodatkowo normalizację $\Pi_0 + \Pi_1 + \Pi_2 + \dots + \Pi_n = 1$

Macierz przejścia

Macierz przejścia też ma granicę

$$\hat{\Pi} \equiv \lim_{h \rightarrow \infty} P^{(h)} = \begin{pmatrix} \Pi_0 & \Pi_1 & \dots & \Pi_n \\ \Pi_0 & \Pi_1 & \dots & \Pi_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Pi_0 & \Pi_1 & \dots & \Pi_n \end{pmatrix}$$

Wszystkie wiersze są takie same i odpowiadają stanom stacjonarnym (końcowym).

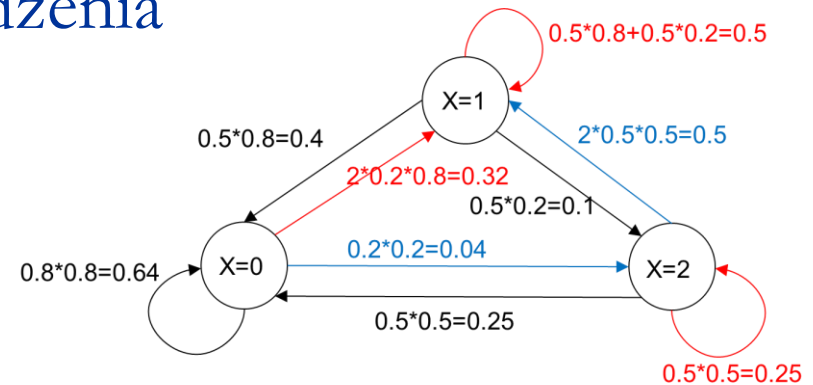
Sprawdzenie:

$$\begin{aligned} \Pi &= P_0 \hat{\Pi} = \begin{pmatrix} P_0 & P_1 & \dots & P_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Pi_0 & \Pi_1 & \dots & \Pi_n \\ \Pi_0 & \Pi_1 & \dots & \Pi_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Pi_0 & \Pi_1 & \dots & \Pi_n \end{pmatrix} = \\ &= ((P_0 \Pi_0 + P_1 \Pi_0 + \dots + P_n \Pi_0), (P_0 \Pi_1 + P_1 \Pi_1 + \dots + P_n \Pi_1), \dots, (P_0 \Pi_n + P_1 \Pi_n + \dots + P_n \Pi_n)) = \\ &= ((P_0 + P_1 + \dots + P_n) \Pi_0, (P_0 + P_1 + \dots + P_n) \Pi_1, \dots, (P_0 + P_1 + \dots + P_n) \Pi_n) = \\ &= (1 \cdot \Pi_0, 1 \cdot \Pi_1, \dots, 1 \cdot \Pi_n) = (\Pi_0, \Pi_1, \dots, \Pi_n) \equiv \Pi \end{aligned}$$

Przykład: Współdzielenie urządzenia

Macierz przejścia w tym przypadku:

$$P = \begin{pmatrix} 0.64 & 0.32 & 0.04 \\ 0.40 & 0.50 & 0.10 \\ 0.25 & 0.50 & 0.25 \end{pmatrix}$$



$$P^{(2)} = P^2 = \begin{pmatrix} 0.64 & 0.32 & 0.04 \\ 0.40 & 0.50 & 0.10 \\ 0.25 & 0.50 & 0.25 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.64 & 0.32 & 0.04 \\ 0.40 & 0.50 & 0.10 \\ 0.25 & 0.50 & 0.25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5476 & 0.3848 & 0.0676 \\ 0.4810 & 0.4280 & 0.0910 \\ 0.4225 & 0.4550 & 0.1225 \end{pmatrix}$$

- Zał: stan początkowy: dwóch użytkowników korzysta z urządzenia

$$\begin{aligned} &\rightarrow P_0 = (0, 0, 1) \\ \text{Wtedy } P_2 &= P_0 P^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.5476 & 0.3848 & 0.0676 \\ 0.4810 & 0.4280 & 0.0910 \\ 0.4225 & 0.4550 & 0.1225 \end{pmatrix} = (0.4225 \quad 0.4550 \quad 0.1225) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Dla } P_0 &= (1/3, 1/3, 1/3) \\ P_2 &= P_0 P^2 = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.5476 & 0.3848 & 0.0676 \\ 0.4810 & 0.4280 & 0.0910 \\ 0.4225 & 0.4550 & 0.1225 \end{pmatrix} = (0.4837 \quad 0.4226 \quad 0.0937) \end{aligned}$$

Przykład: Współdzielenie urządzenia

Stan stacjonarny $\Pi = \Pi P$

$$P = \begin{pmatrix} 0.64 & 0.32 & 0.04 \\ 0.40 & 0.50 & 0.10 \\ 0.25 & 0.50 & 0.25 \end{pmatrix}$$

$$\Pi P = \Pi \rightarrow (\Pi_0 \quad \Pi_1 \quad \Pi_2) \begin{pmatrix} 0.64 & 0.32 & 0.04 \\ 0.40 & 0.50 & 0.10 \\ 0.25 & 0.50 & 0.25 \end{pmatrix} = (\Pi_0 \quad \Pi_1 \quad \Pi_2)$$

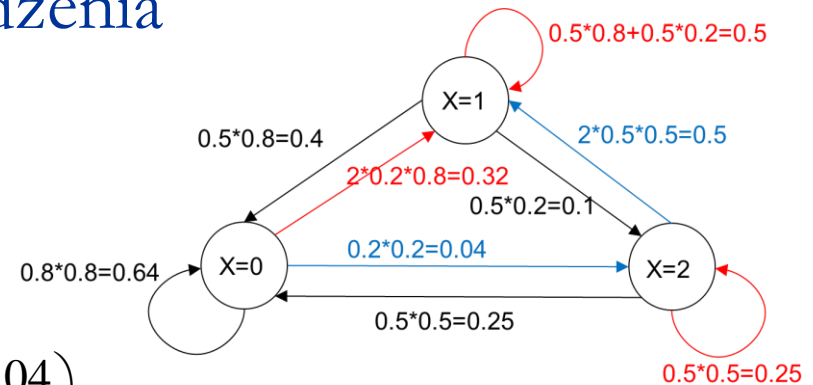
$$\begin{cases} 0.64\Pi_0 + 0.40\Pi_1 + 0.25\Pi_2 = \Pi_0 \\ 0.32\Pi_0 + 0.50\Pi_1 + 0.50\Pi_2 = \Pi_1 \\ 0.04\Pi_0 + 0.10\Pi_1 + 0.25\Pi_2 = \Pi_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \Pi_2 = 1.44\Pi_0 - 1.60\Pi_1 \\ 1.04\Pi_0 - 1.30\Pi_1 = 0 \\ -1.04\Pi_0 + 1.30\Pi_1 = 0 \end{cases} \leftarrow \begin{array}{l} \text{równania} \\ \text{zależne} \end{array}$$

$$\begin{cases} \Pi_2 = 1.44\Pi_0 - 1.60\Pi_1 \\ 1.04\Pi_0 - 1.30\Pi_1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \Pi_2 = 0.16\Pi_0 \\ \Pi_1 = 0.80\Pi_0 \end{cases}$$

■ Dokładamy warunek normalizacji

$$\Pi_0 + \Pi_1 + \Pi_2 = 1 \rightarrow \Pi_0 + 0.80\Pi_0 + 0.16\Pi_0 = 1 \rightarrow 1.96\Pi_0 = 1$$

$$\rightarrow \Pi_0 = 0.5102 \quad \Pi_1 = 0.4082 \quad \Pi_2 = 0.0816 \quad \leftarrow \text{proszę zinterpretować te liczby}$$



Stany stacjonarne

Stany stacjonarne Π spełniają równanie $\Pi P = \Pi$, a wszystkie stany spełniają $P_t P = P_{t+1}$ **czyli w stanie stacjonarnym kolejne przejścia nie zmieniają prawdopodobieństw przebywania w określonych stanach. Sam chwilowy stan może się nadal zmieniać.**

Przykład: układ z dwoma stanami $X = \{0, 1\}$ i macierzą przejścia $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ to prowadzi do

$$P^{(h)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ dla } h \text{ parzystych i } P^{(h)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ dla } h \text{ nieparzystych}$$

czyli $P^{(h)}$ nie ma granicy czyli stan stacjonarny nie istnieje (jest to układ okresowy)

Def.: Łańcuch Markowa jest regularny jeżeli $\exists_h : \forall_{i,j} P_{ij}^{(h)} > 0$

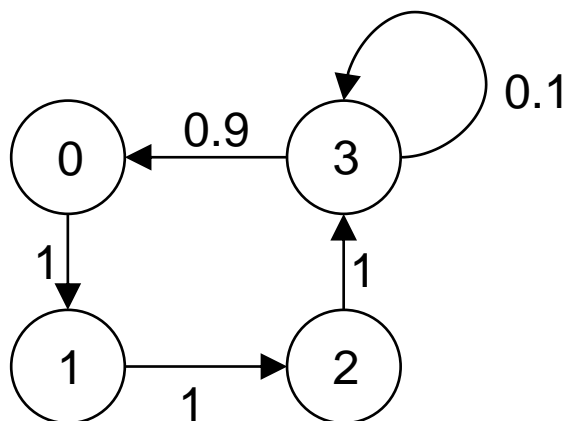
Tw: Każdy regularny łańcuch Markowa ma stan stacjonarny

Stany stacjonarne

Def.: Łańcuch Markowa jest regularny jeżeli

Tw: Każdy regularny łańcuch Markowa ma stan stacjonarny

Przykład 1:



$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.9 & 0 & 0 & 0.1 \end{pmatrix}$$

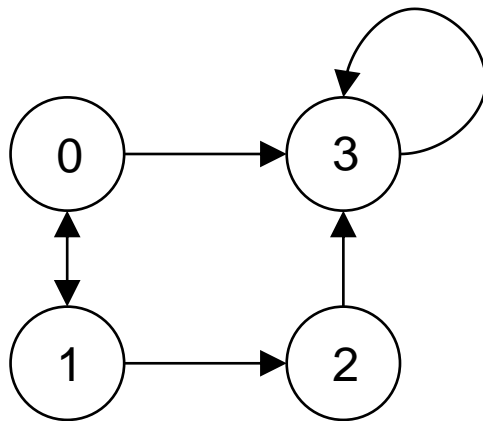
$$\text{Ale } P^{(6)} = \begin{pmatrix} 0.009 & 0.090 & 0.900 & 0.001 \\ 0.001 & 0.009 & 0.090 & 0.900 \\ 0.810 & 0.001 & 0.009 & 0.180 \\ 0.162 & 0.810 & 0.001 & 0.027 \end{pmatrix}$$

czyli ten łańcuch jest regularny.

Czy można to zauważyć na grafie ?

Stany stacjonarne

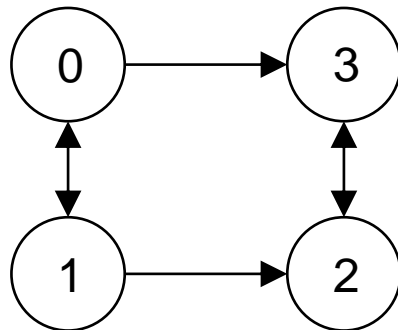
Przykład 2:



Jeżeli istnieje stan i z $p_{ii}=1$ (stan absorbujący) to łańcuch nie może być regularny.

Czy istnieje stan stacjonarny ?

Przykład 3:



strefa absorbująca

Czy łańcuch jest regularny ?

Czy istnieje stan stacjonarny ?

Ogólne metody szukania stanu stacjonarnego - metoda funkcji generującej

Def:

$$P_n = (P_n(X=1), P_n(X=2), \dots)$$

$$P_n^T = \begin{pmatrix} P_n(X=1) \\ P_n(X=2) \\ \dots \end{pmatrix}$$

$$\vec{g}(z) := \sum_{n=0}^{\infty} P_n^T z^n$$

$$\vec{g}(z) = \begin{pmatrix} P_0(X=1) \cdot 1 + P_1(X=1) \cdot z + P_2(X=1) \cdot z^2 + \dots \\ P_0(X=2) \cdot 1 + P_1(X=2) \cdot z + P_2(X=2) \cdot z^2 + \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

$$(\vec{g}(z))^T = \sum_{n=0}^{\infty} P_n z^n$$

$$\begin{aligned} (\vec{g}(z))^T &= (P_0(X=1) \cdot 1 + P_1(X=1) \cdot z + P_2(X=1) \cdot z^2 + \dots, \\ &\quad P_0(X=2) \cdot 1 + P_1(X=2) \cdot z + P_2(X=2) \cdot z^2 + \dots, \dots) \end{aligned}$$

$/ \cdot P$

$$(\vec{g}(z))^T \cdot P = \sum_{n=0}^{\infty} P_n z^n \cdot P$$

$$(\vec{g}(z))^T \cdot P = \sum_{n=0}^{\infty} P_n \cdot P z^n = \sum_{n=0}^{\infty} P_{n+1} z^n = z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} P_{n+1} z^{n+1} = \begin{matrix} m = n+1 \\ n = m-1 \end{matrix} = z^{-1} \sum_{m=1}^{\infty} P_m z^m =$$

$$= -z^{-1} P_0 z^0 + z^{-1} \sum_{m=0}^{\infty} P_m z^m = -z^{-1} P_0 + z^{-1} (\vec{g}(z))^T$$

Ogólne metody szukania stanu stacjonarnego - metoda funkcji generującej

$$(\vec{g}(z))^T \cdot P = -z^{-1}P_0 + z^{-1}(\vec{g}(z))^T$$

$$(\vec{g}(z))^T \cdot P - z^{-1}(\vec{g}(z))^T = -z^{-1}P_0 \quad / \cdot (-z)$$

$$-z(\vec{g}(z))^T \cdot P + (\vec{g}(z))^T = P_0$$

$$(\vec{g}(z))^T \cdot (-zP + 1) = P_0$$

$$(\vec{g}(z))^T \cdot (1 - zP) = P_0 \quad / \cdot (1 - zP)^{-1}$$

$$(\vec{g}(z))^T = P_0 \cdot (1 - zP)^{-1}$$

czyli znając wektor P_0 i macierz P można wyznaczyć $g(z)$

Twierdzenie o wartościach skończonych (final value theorem)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z)(\vec{g}(z))^T$$

(można również wyliczać P_k dla skończonych k , przynajmniej w przybliżeniu)

Przykład - metoda funkcji generującej

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0.25 & 0.25 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

$$(\vec{g}(z))^T = P_0 \cdot (1 - zP)^{-1}$$

$$1 - zP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & z & 0 \\ 0.25z & 0.25z & 0.5z \\ 0 & 0.5z & 0.5z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -z & 0 \\ -0.25z & 1 - 0.25z & -0.5z \\ 0 & -0.5z & 1 - 0.5z \end{pmatrix}$$

Obliczenie $A = (1 - zP)^{-1}$: korzystamy z macierzy sprzężonej $\text{adj}(A)$: $A^{-1} = \frac{\text{adj}(A)}{\det(A)}$

Gdzie $(\text{adj}(A))_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ji}$ a M_{ji} to wyznacznik A z usuniętym j -tym wierszem i i -tą kolumną.

$$\begin{aligned} \det(1 - zP) &= \left(1 - \frac{z}{4}\right) \left(1 - \frac{z}{2}\right) - \frac{z^2}{4} - (-z) \left(\frac{-z}{4} \cdot \left(1 - \frac{z}{2}\right) - 0\right) + 0 = 1 - \frac{z}{4} - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{8} - \frac{z^2}{4} - \frac{z^2}{4} + \frac{z^3}{8} = \\ &= 1 - \frac{3z}{4} - \frac{3z^2}{8} + \frac{z^3}{8} = 1 - z + \frac{z}{4} - \frac{2z^2}{8} - \frac{z^2}{8} + \frac{z^3}{8} = 1 - z + \frac{z}{4}(1 - z) - \frac{z^2}{8}(1 - z) = (1 - z) \left(1 + \frac{z}{4} - \frac{z^2}{8}\right) \end{aligned}$$

Przykład - metoda funkcji generującej

$$(1 - zP)^{-1} = \frac{1}{\det(1 - zP)} \begin{pmatrix} 1 - \frac{3z}{4} - \frac{z^2}{8} & z\left(1 - \frac{z}{2}\right) & \frac{z^2}{2} \\ \frac{z}{4}\left(1 - \frac{z}{2}\right) & 1 - \frac{z}{2} & \frac{z}{2} \\ \frac{z^2}{8} & \frac{z}{2} & 1 - \frac{z}{4} - \frac{z^2}{4} \end{pmatrix}$$
$$(\vec{g}(z))^T = P_0 \cdot (1 - zP)^{-1}$$
$$(\vec{g}(z))^T = (g_1(z), g_2(z), g_3(z))$$
$$P_0 = (P_0(1), P_0(2), P_0(3))$$

Otrzymujemy

$$g_1(z) = \frac{1}{\det(1 - zP)} \left(P_0(1) \left(1 - \frac{3z}{4} - \frac{z^2}{8} \right) + P_0(2) \left(\frac{z}{4} \left(1 - \frac{z}{2} \right) \right) + P_0(3) \frac{z^2}{8} \right)$$

$$g_2(z) = \frac{1}{\det(1 - zP)} \left(P_0(1) \left(z \left(1 - \frac{z}{2} \right) \right) + P_0(2) \left(1 - \frac{z}{2} \right) + P_0(3) \frac{z}{2} \right)$$

$$g_3(z) = \frac{1}{\det(1 - zP)} \left(P_0(1) \frac{z^2}{2} + P_0(2) \frac{z}{2} + P_0(3) \left(1 - \frac{z}{4} - \frac{z^2}{4} \right) \right)$$

Przykład - metoda funkcji generującej

$$g_1(z) = \frac{1}{\det(1 - zP)} \left(P_0(1) \left(1 - \frac{3z}{4} - \frac{z^2}{8} \right) + P_0(2) \left(\frac{z}{4} \left(1 - \frac{z}{2} \right) \right) + P_0(3) \frac{z^2}{8} \right)$$

$$g_2(z) = \frac{1}{\det(1 - zP)} \left(P_0(1) \left(z \left(1 - \frac{z}{2} \right) \right) + P_0(2) \left(1 - \frac{z}{2} \right) + P_0(3) \frac{z}{2} \right)$$

$$g_3(z) = \frac{1}{\det(1 - zP)} \left(P_0(1) \frac{z^2}{2} + P_0(2) \frac{z}{2} + P_0(3) \left(1 - \frac{z}{4} - \frac{z^2}{4} \right) \right)$$

Wybierając $P_0 = (1, 0, 0)$

$$g_1(z) = \frac{1}{\det(1 - zP)} \left(1 \cdot \left(1 - \frac{3z}{4} - \frac{z^2}{8} \right) \right)$$

$$g_2(z) = \frac{1}{\det(1 - zP)} \left(1 \cdot \left(z \left(1 - \frac{z}{2} \right) \right) \right)$$

$$g_3(z) = \frac{1}{\det(1 - zP)} \left(1 \cdot \frac{z^2}{2} \right)$$

$$(\vec{g}(z))^T = P_0 \cdot (1 - zP)^{-1}$$

$$(\vec{g}(z))^T = (g_1(z), g_2(z), g_3(z))$$

$$P_0 = (P_0(1), P_0(2), P_0(3))$$

Przykład - metoda funkcji generującej

Wybierając $P_0=(1,0,0)$

$$P_\infty(1) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1-z}{(1-z)\left(1+\frac{z}{4}-\frac{z^2}{8}\right)} \left(1-\frac{3z}{4}-\frac{z^2}{8}\right) = \frac{1-\frac{3}{4}-\frac{1}{8}}{1+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{9}{8}} = \frac{1}{9}$$

$$P_\infty(2) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1-z}{(1-z)\left(1+\frac{z}{4}-\frac{z^2}{8}\right)} \left(z-\frac{z^2}{2}\right) = \frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{9}{8}} = \frac{4}{9}$$

$$P_\infty(3) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1-z}{(1-z)\left(1+\frac{z}{4}-\frac{z^2}{8}\right)} \left(\frac{z^2}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{9}{8}} = \frac{4}{9}$$

Wybierając $P_0=(0,0.5,0.5)$

$$P_\infty(1) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1-z}{(1-z)\left(1+\frac{z}{4}-\frac{z^2}{8}\right)} \left(0.5\left(\frac{z}{4}\left(1-\frac{z}{2}\right)\right) + 0.5\frac{z^2}{8}\right) = \frac{1}{\frac{9}{8}} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8}\right) = \frac{8}{9} \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{16}\right) = \frac{1}{9}$$

Mnożenie P^∞ też prowadzi do $P_\infty=(1/9,4/9,4/9)$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \lim_{z \rightarrow 1} (1-z) \left(\vec{g}(z) \right)^T$$

Ogólne metody szukania stanu stacjonarnego - metoda rozwinięcia spektralnego

Niech $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ są wartościami własnymi macierzy P do wektorów u_1, u_2, \dots

$$Pu_i = \lambda_i u_i \quad u_i = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots$ są również wartościami własnymi macierzy P do wektorów v_1^T, v_2^T, \dots

$$v_i^T P = \lambda_i v_i^T \quad v_i^T = \begin{pmatrix} & & \end{pmatrix}$$

zał. wszystkie wartości własne są jednokrotne

$$U := \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} u_2 \end{pmatrix} & \dots & \begin{pmatrix} u_n \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad \Lambda := \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad V := \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^T \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} v_2^T \end{pmatrix} \\ \vdots \\ \begin{pmatrix} v_n^T \end{pmatrix} \end{pmatrix} \rightarrow V = U^{-1}$$

mamy $P = U \Lambda U^{-1}$

$$P^2 = U \Lambda U^{-1} U \Lambda U^{-1} = U \Lambda^2 U^{-1}$$

$$P^h = U \Lambda^h U^{-1} = \sum_k \lambda_k^h u_k v_k^T$$

$$P_h = P_0 P^h = \sum_k \lambda_k^h P_0 u_k v_k^T \quad \begin{pmatrix} P_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_k^T \end{pmatrix}$$

Przykład - metoda rozwinięcia spektralnego

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0.25 & 0.25 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Równanie charakterystyczne $\det|P - \lambda \cdot I| = 0 \rightarrow \lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = -0.5 \quad \lambda_3 = 0.25$

Wektory własne

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad u_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 \end{pmatrix} \quad V = U^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} U$$

$$v_1^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix} \quad v_2^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{-2}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix} \quad v_3^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{-2}{9} \end{pmatrix}$$

Przykład - metoda rozwinięcia spektralnego

$$P^h = \sum_k \lambda_k^h u_k v_k^T$$

$$P^h = 1^h \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix} + (-0.5)^h \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{-2}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix} + (0.25)^h \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{-2}{9} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} + (-0.5)^h \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} + (0.25)^h \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 & 4 & -8 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$P_h = \sum_k \lambda_k^h P_0 u_k v_k^T \quad \text{Zał: } P_0 = (1, 0, 0)$$

$$P_h = \frac{1}{9} (1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} + (-0.5)^h \frac{1}{9} (1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} + (0.25)^h \frac{1}{9} (1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 4 & 4 & -8 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} =$$

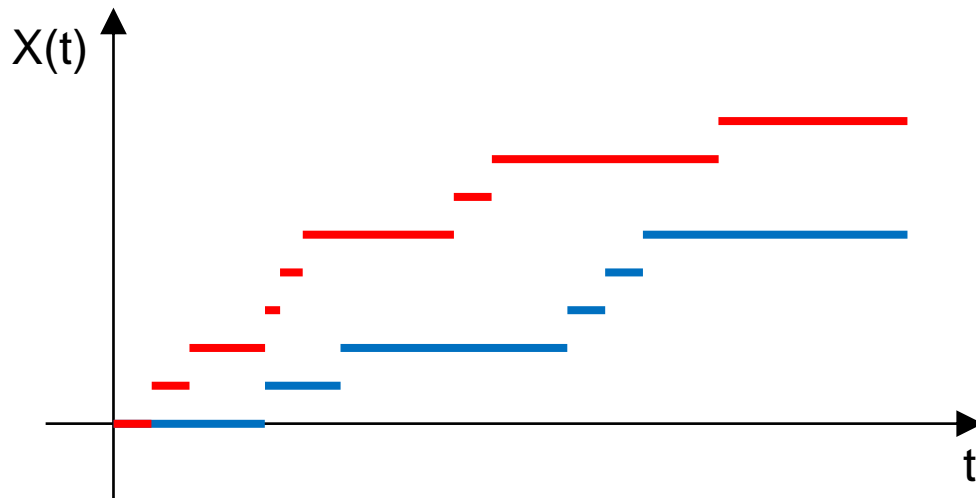
$$= \frac{1}{9} (1 \ 4 \ 4) + (-0.5)^h \frac{1}{9} (4 \ -8 \ 4) + (0.25)^h \frac{1}{9} (4 \ 4 \ -8)$$

$$\lim_{h \rightarrow \infty} P_h = \lim_{h \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{9} (1 \ 4 \ 4) + (-0.5)^h \frac{1}{9} (4 \ -8 \ 4) + (0.25)^h \frac{1}{9} (4 \ 4 \ -8) \right\} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}$$

czyli ten sam stan stacjonarny co poprzednio.

Procesy liczące

Procesy liczące to procesy w których zmienna losowa $X(t)$ jest liczbą zliczonych elementów w czasie t .



→ stany są dyskretne $X(t)=\{0,1,2,3,\dots\}$

→ jest niemalejący

Najważniejsze rodzaje to:

- procesy Bernoulliego z czasem dyskretnym
- procesy Poissona z czasem ciągłym

Procesy liczące Bernoulliego

- Czas dyskretny
- Stany dyskretny
- Prawdopodobieństwo p pojawienia się elementu w danej chwili nie zmienia się z czasem.
- Liczymy sukcesy w n -elementowej próbie Bernoulliego $\rightarrow X(n)$ ma rozkład dwumianowy z prawdopodobieństwem p .
- Ma własność Markowa
- Y – liczba prób pomiędzy sukcesami, ma rozkład geometryczny
- Próby możemy wiązać z czasem
- Zał: jedna próba trwa Δ sekund $\rightarrow t = n \cdot \Delta \rightarrow n = \frac{t}{\Delta}$
- Czyli $X(t)$ ma rozkład dwumianowy z liczbą prób n i prawdopodobieństwem p
 $E(X(t)) = n \cdot p = \frac{t}{\Delta} \cdot p$
- Oczekiwana liczba sukcesów na jednostkę czasu $\lambda = \frac{E(X(t))}{t} = \frac{\frac{t}{\Delta} \cdot p}{t} = \frac{p}{\Delta}$
- $T=Y\Delta$ – czas pomiędzy sukcesami

$$E(T) = E(Y\Delta) = \Delta E(Y) = \Delta \cdot \frac{1}{p} = \frac{1}{\lambda} \quad \text{var}(T) = \text{var}(Y\Delta) = \Delta^2 \text{var}(Y) = \Delta^2 \frac{1-p}{p^2} = \frac{1-p}{\lambda^2}$$

Przykład: Procesy liczące Bernoulliego

Syt: Zadania przychodzą w tempie 2/min $\rightarrow \lambda=2 \text{ min}^{-1}$

- Wybrać Δ tak, aby $p=0,1$

$$\Delta = \frac{p}{\lambda} = \frac{0.1}{2 \text{ min}^{-1}} = 0.05 \text{ min} = 3 \text{ s}$$

- Prawdopodobieństwo więcej niż trzech zadań w ciągu 1 minuty
 $1 \text{ min} = 20\Delta$

$$\begin{aligned} P(X(n) > 3) &= 1 - P(X(n) \leq 3) = 1 - P(X(n) = 0) - P(X(n) = 1) - P(X(n) = 2) - P(X(n) = 3) = \\ &= 1 - \binom{20}{0} p^0 (1-p)^{20} - \binom{20}{1} p^1 (1-p)^{19} - \binom{20}{2} p^2 (1-p)^{18} - \binom{20}{3} p^3 (1-p)^{17} = 1 - 0.867 = 0.133 \end{aligned}$$

- Prawdopodobieństwo więcej niż trzydziestu zadań w ciągu 10 minut
 $10 \text{ min} = 200\Delta$

$$P(X(n) > 30) = 1 - P(X(n) \leq 30) = 1 - P(X(n) = 0) - \dots - P(X(n) = 30) = 0.0067$$

$$P(X(n) > 30) = P(X(n) > 30.5) = P\left(\frac{X(n) - np}{\sqrt{np(1-p)}} > \frac{30.5 - 200 \cdot 0.1}{\sqrt{200 \cdot 0.1 \cdot (1-0.1)}}\right) = P(Z > 2.48) = 1 - P(Z \leq 2.48) = 0.0067$$

Dlaczego widzimy różnicę przy zwiększeniu skali ?

Przykład: Procesy liczące Bernoulliego

- Jaki jest średni czas oczekiwania na pierwsze zdarzenie i jego odchylenie standardowe?

$$E(T) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2 \text{ min}^{-1}} = 0.5 \text{ min} = 30 \text{ s}$$

$$\text{var}(T) = \frac{1-p}{\lambda^2} = \frac{1-0.1}{(2 \text{ min}^{-1})^2} = \frac{0.9}{4} \text{ min}^2 = 0.225 \text{ min}^2 = 0.225 \cdot 60^2 \text{ s}^2 = 810 \text{ s}^2$$

$$\sigma(T) = \sqrt{\text{var}(T)} = \sqrt{810 \text{ s}^2} = 28.46 \text{ s}$$

- Prawdopodobieństwo, że następne zadanie nie przyjdzie w ciągu 30s

$$P(T > 30 \text{ s}) = P(Y \cdot \Delta > 30 \text{ s}) = P(Y \cdot 3 \text{ s} > 30 \text{ s}) = P(Y > 10) =$$

$$= \sum_{k=11}^{\infty} (1-p)^{k-1} p = \frac{p}{1-p} \sum_{k=11}^{\infty} (1-p)^k = \left| \begin{matrix} t = k-10 \\ k = t+10 \end{matrix} \right| = \frac{p}{1-p} \sum_{t=1}^{\infty} (1-p)^{t+10} = \frac{p(1-p)^{10}}{1-p} \sum_{t=1}^{\infty} (1-p)^t =$$

$$= \frac{p(1-p)^{10}}{1-p} (1-p) \frac{1}{1-(1-p)} = \frac{p(1-p)^{10}}{1-p} \cdot \frac{1-p}{p} = (1-p)^{10} = (0.9)^{10} = 0.314$$

Równoważne do wystąpienia zera zdarzeń w ciągu 30 s (=10 Δ)

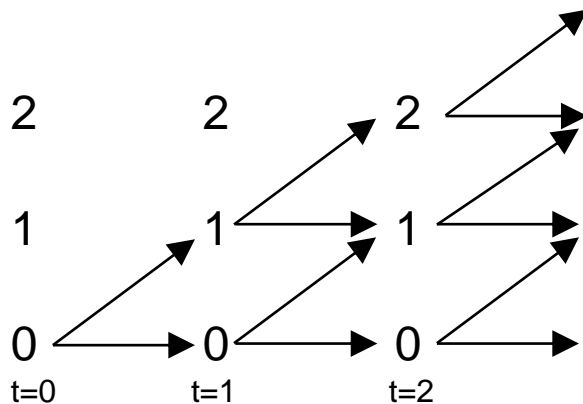
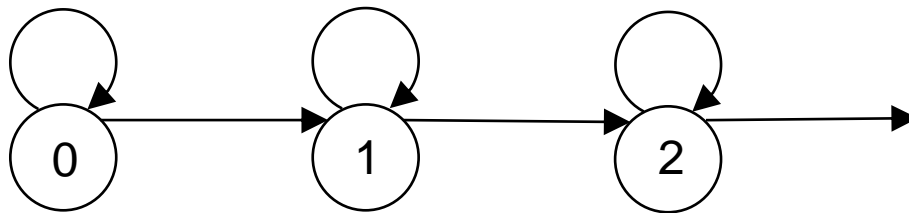
$$P(X(t=10\Delta) = 0) = \binom{10}{0} p^0 (1-p)^{10-0} = 1 \cdot 1 \cdot (0.9)^{10}$$

Poprzedni wykład: Procesy liczące Bernoulliego

Proces liczący

$$\lambda = \frac{E(X(t))}{t} = \frac{p}{\Delta}$$

Proces liczący Bernoulliego z parametrem p : $X(t)$: $Y(t)$



Procesy liczące Bernoulliego

- Macierz przejścia

$$p_{i \rightarrow j} \equiv p_{ij} = \begin{cases} p & \text{dla } j = i + 1 \\ 1 - p & \text{dla } j = i \\ 0 & \text{poza tym} \end{cases}$$

- Macierz przejścia nie zmienia się z czasem \rightarrow jest to jednorodny łańcuch Markowa

- Nie jest regularny, np. $\forall_h : p_{1 \rightarrow 0}^{(h)} = 0$

- Macierz przejścia po h krokach

$$p_{i \rightarrow j}^{(h)} = P(j - i \text{ sukcesów w } h \text{ próbach}) = \begin{cases} \binom{h}{j-i} p^{j-i} (1-p)^{h-j+i} & \text{dla } 0 \leq j - i \leq h \\ 0 & \text{poza tym} \end{cases}$$

- Macierz przejścia

$$P = \begin{pmatrix} 1-p & p & 0 & \dots \\ 0 & 1-p & p & \ddots \\ 0 & 0 & 1-p & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

jest nieskończona

Procesy liczące Bernoulliego

- Łączenie procesów Bernoulliego

X – proces Bernoulliego definiowany przez prawdopodobieństwo p_1

Y – proces Bernoulliego definiowany przez prawdopodobieństwo p_2

Z – proces połączony

$$P(Z = 0) = P(X = 0 \cap Y = 0) = (1 - p_1)(1 - p_2) = 1 - p_1 - p_2 + p_1 \cdot p_2$$

$$P(Z = 1) = P(X = 1 \cup Y = 1) = 1 - P(X = 0 \cap Y = 0) = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2) = p_1 + p_2 - p_1 \cdot p_2$$

Procesy liczące Poissona

- Czas ciągły
- Stany dyskretne
- Otrzymujemy przez granicę $\Delta \rightarrow 0$ z procesu Bernoulliego, przy $\lambda = \text{const}$
- Dwumianowy $(n, p) \rightarrow \text{Poisson } (\lambda t)$

$$n = \frac{t}{\Delta} \rightarrow \infty \text{ dla } \Delta \rightarrow 0$$

$$p = \lambda \Delta \rightarrow 0 \text{ dla } \Delta \rightarrow 0$$

$$E(X(t)) = np = \frac{t}{\Delta} \lambda \Delta = \lambda t$$

- Czas oczekiwania na kolejny sukces (zliczenie)

$$F_T(t) = P(T \leq t) = P(Y\Delta \leq n\Delta) = P(Y \leq n) = 1 - (1 - p)^n = 1 - \left(1 - \left(\frac{\lambda t}{n}\right)\right)^n \rightarrow 1 - e^{-\lambda t} \text{ dla } n \rightarrow \infty$$

czyli T ma rozkład wykładniczy z parametrem λ

(rozkład wykładniczy ma własność braku pamięci – obliczając prawdopodobieństwo przyjscia kolejnego zdarzenia nie musimy wiedzieć ile minęło od poprzedniego zdarzenia).

- T_k – czas k -tego sukcesu ma rozkład $\text{Gamma}(k, \lambda)$

$$f_{T_k}(t) = \frac{1}{\Gamma(k)} \lambda^k t^{k-1} e^{-\lambda t} \quad x \in (0, +\infty)$$

Przykład: Procesy liczące Poissona

Liczba polubień na stronie wzrasta z $\lambda=7 \text{ min}^{-1}$ i jest procesem Poissona.

- Po jakim czasie będziemy mieć 10000 polubień ?

T_{10000} ma rozkład Gamma (10000,7)

$$E(T_k) = \frac{k}{\lambda} = \frac{10000}{7 \text{ min}^{-1}} = 23\text{h } 48\text{ min } 34\text{ s}$$

$$\sigma(T_k) = \frac{\sqrt{k}}{\lambda} = \frac{100}{7 \text{ min}^{-1}} = 14\text{ min } 17\text{ s}$$

- Jakie jest prawdopodobieństwo, że uzbieramy 10000 polubień w czasie 24h (=1440 min) ?

$$P(T_k \leq 1440) = P\left(\frac{T_k - 1428.6}{14.3} \leq \frac{1440 - 1428.6}{14.3}\right) = P(Z \leq 0.8) = 0.79$$

Procesy liczące Poissona

■ Inne wyprowadzenie Poissona

$$P(X_{t+\Delta} - X_t = 1) = \lambda\Delta + O(\Delta)$$

$$P(X_{t+\Delta} - X_t > 1) = O(\Delta)$$

$$P(X_{t+\Delta} - X_t = 0) = 1 - (\lambda\Delta + O(\Delta))$$

→

$$P(X_{t+\Delta} = n) = P(X_t = n)(1 - \lambda\Delta + O(\Delta)) + P(X_t = n-1)(\lambda\Delta + O(\Delta)) + O(\Delta)$$

$$P(X_{t+\Delta} = 0) = P(X_t = 0)(1 - \lambda\Delta + O(\Delta)) + O(\Delta)$$

→

$$\begin{cases} \frac{dP(X_t=n)}{dt} = -\lambda P(X_t=n) + \lambda P(X_t=n-1) \\ \frac{dP(X_t=0)}{dt} = -\lambda P(X_t=0) \end{cases}$$

$\xrightarrow{X_0=0}$

$$P(X_t = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

Procesy liczące Poissona

- Łączenie procesów Poissona

X_1 – proces Poissona definiowany przez częstotliwość λ_1

X_2 – proces Poissona definiowany przez częstotliwość λ_2

...

X_N – proces Poissona definiowany przez częstotliwość λ_N

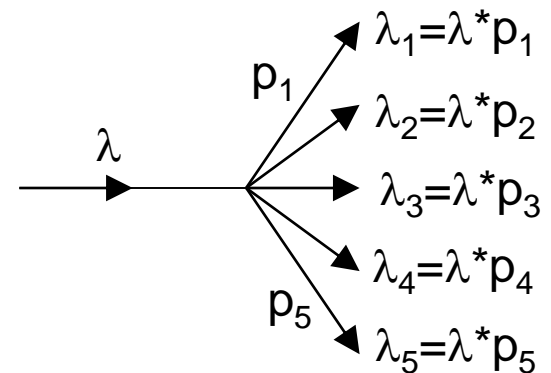
→ $X = X_1 + X_2 + \dots + X_N$ będzie procesem Poissona z $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_N$

- Dekompozycja procesu Poissona o częstotliwości λ

Zał: K wyjściowych procesów,

Dla każdego nowego sygnału wybieramy proces wyjściowy z prawdopodobieństwem p_k

Będzie to proces Poissona o częstotliwości $\lambda_k = \lambda * p_k$



Przykład: Procesy liczące Poissona

Syt: Zadania przychodzą w tempie 2/min $\rightarrow \lambda=2 \text{ min}^{-1}$

- Prawdopodobieństwo więcej niż trzech zadań w ciągu 1 minuty

$$P(X(t=1) > 3) = 1 - \underbrace{P(X(t=1) \leq 3)}_{\text{kwantyl Poissona } \lambda'=\lambda t=2 \cdot 1=2} = 1 - 0.8571 = 0.143$$

- Prawdopodobieństwo więcej niż trzydziestu zadań w ciągu 10 minut

$$P(X(t=10) > 30) = 1 - \underbrace{P(X(t=10) \leq 30)}_{\text{kwantyl Poissona } \lambda'=\lambda t=2 \cdot 10=20} = 1 - 0.987 = 0.013$$

- Jaki jest średni czas oczekiwania na pierwsze zdarzenie i jego odchylenie standardowe?

$$E(T) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2} \text{ min} = 30\text{s} \quad \text{var}(T) = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{4} \text{ min}^2 = 900\text{s}^2 \quad \sigma(T) = \sqrt{900\text{s}^2} = 30\text{s}$$

- Prawdopodobieństwo, że następne zadanie nie przyjdzie w ciągu 30s

$$P(T > 30\text{s}) = 1 - \underbrace{F_T(t=30\text{s})}_{\text{kwantyl wykład. } \lambda'=\lambda t=2 \cdot 0.5=1} = 1 - 1 + e^{-\lambda'} = e^{-1} = 0.368$$

Proszę porównać te wyniki z analogicznymi dla procesu Bernoulliego.

Przykład: Niecierpliwi autostopowicze

Wstęp:

Syt: dane są dwa procesy Poissona, o częstościach λ_1 oraz λ_2

Jakie jest prawdopodobieństwo, że w pierwszym procesie będzie co najmniej n zdarzeń za nim w drugim procesie pojawi się m zdarzeń ?

Odp:

Rozważmy proces łączony.

W $n+m-1$ elementowej próbie Bernoulliego musi pojawić się n lub więcej sukcesów, osiąganych z prawdopodobieństwem $\lambda_1/(\lambda_1+\lambda_2)$

$$P = \sum_{k=n}^{n+m-1} \binom{n+m-1}{k} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^k \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^{n+m-1-k}$$

Przykład: Niecierpliwi autostopowicze

Przykład: autostopowicze A i B stoją w kolejce, rezygnując z niej z częstościami odpowiednio λ_A i λ_B . Samochody zabierają autostopowiczów z częstością λ_C , po jednej osobie.

Początkowo A stoi w kolejce przed B.

Jakie jest prawdopodobieństwo, że A odjedzie ?

Jakie jest prawdopodobieństwo, że B odjedzie ?

Ozn:

zdarzenie A – autostopowicz A zrezygnował z kolejki

zdarzenie B – autostopowicz B zrezygnował z kolejki

Zdarzenie C – przyjechał samochód

■ Jakie jest prawdopodobieństwo, że A odjedzie ?

A pojedzie jeśli zajdzie zdarzenie C przed zdarzeniem A; zdarzenie B bez wpływu.

$$P = \sum_{k=n}^{n+m-1} \binom{n+m-1}{k} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^k \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^{n+m-1-k}$$

$n=1, m=1, n+m-1=1 \rightarrow k=\{1\} \rightarrow$

$$P(A \text{ odjedzie}) = \sum_{k=1}^1 \binom{1}{k} \left(\frac{\lambda_C}{\lambda_C + \lambda_A} \right)^k \left(\frac{\lambda_A}{\lambda_C + \lambda_A} \right)^{1-k} = \binom{1}{1} \left(\frac{\lambda_C}{\lambda_C + \lambda_A} \right)^1 \left(\frac{\lambda_A}{\lambda_C + \lambda_A} \right)^{1-1} = \frac{\lambda_C}{\lambda_A + \lambda_C}$$

Przykład: Niecierpliwi autostopowicze

- Jakie jest prawdopodobieństwo, że B odjedzie ?

Zdarzenie K – co najmniej 2C przed B np. CCB, CCCB, ...

Zdarzenie L – co najmniej 1A przed B lub C

Zdarzenie M – co najmniej 1C przed B np. CB, CCB, CCCB, ... czyli K zawiera się w M

$$P = \sum_{k=n}^{n+m-1} \binom{n+m-1}{k} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^k \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^{n+m-1-k}$$

$$B \text{ odjedzie} = K \cup (L \cap M)$$

$$\begin{aligned} P(B \text{ odjedzie}) &= P(K \cup (L \cap M)) = P(K) + P(L \cap M) - P(K \cap L \cap M) = \\ &= P(K) + P(L \cap M) - P(L \cap (K \cap M)) = P(K) + P(L \cap M) - P(L \cap K) \end{aligned}$$

$$P(K) : n = 2, m = 1, n + m - 1 = 2 \rightarrow k = \{2\}$$

$$P(K) = \sum_{k=2}^2 \binom{2}{k} \left(\frac{\lambda_C}{\lambda_C + \lambda_B} \right)^k \left(\frac{\lambda_B}{\lambda_C + \lambda_B} \right)^{2-k} = \binom{2}{2} \left(\frac{\lambda_C}{\lambda_C + \lambda_B} \right)^2 \left(\frac{\lambda_B}{\lambda_C + \lambda_B} \right)^{2-2} = \left(\frac{\lambda_C}{\lambda_B + \lambda_C} \right)^2$$

$$P(L \cap M) = P(L) \cdot P(M)$$

$$P(L) : \underbrace{n=1, m=1, n+m-1=1}_{\lambda_A \quad \lambda_B + \lambda_C} \rightarrow k = \{1\} \rightarrow P(L) = \frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B + \lambda_C}$$

$$P(M) : \underbrace{n=1, m=1, n+m-1=1}_{\lambda_C \quad \lambda_B} \rightarrow k = \{1\} \rightarrow P(M) = \frac{\lambda_C}{\lambda_B + \lambda_C}$$

Przykład: Niecierpliwi autostopowicze

$$P(L \cap M) = \frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B + \lambda_C} \cdot \frac{\lambda_C}{\lambda_B + \lambda_C}$$

$$P(L \cap K) = P(L) \cdot P(K) = \frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B + \lambda_C} \cdot \left(\frac{\lambda_C}{\lambda_B + \lambda_C} \right)^2$$

Łącznie

$$\begin{aligned} P(B \text{ odjedzie}) &= \left(\frac{\lambda_C}{\lambda_B + \lambda_C} \right)^2 + \frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B + \lambda_C} \cdot \frac{\lambda_C}{\lambda_B + \lambda_C} - \frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B + \lambda_C} \cdot \left(\frac{\lambda_C}{\lambda_B + \lambda_C} \right)^2 = \\ &= \frac{\lambda_C^2 \lambda_A + \lambda_C^2 \lambda_B + \lambda_C^3 + \lambda_A \lambda_C \lambda_B + \lambda_C^2 \lambda_A - \lambda_C^2 \lambda_A}{(\lambda_B + \lambda_C)^2 (\lambda_A + \lambda_B + \lambda_C)} = \frac{\lambda_A \lambda_C (\lambda_C + \lambda_B) + \lambda_C^2 (\lambda_B + \lambda_C)}{(\lambda_B + \lambda_C)^2 (\lambda_A + \lambda_B + \lambda_C)} = \\ &= \frac{\lambda_A \lambda_C + \lambda_C^2}{(\lambda_B + \lambda_C)(\lambda_A + \lambda_B + \lambda_C)} = \frac{\lambda_C (\lambda_A + \lambda_C)}{(\lambda_B + \lambda_C)(\lambda_A + \lambda_B + \lambda_C)} \end{aligned}$$

Symulacje numeryczne procesów liczących

Możliwe pytania:

- czas osiągnięcia wybranego stanu
- czas przebywania w danym stanie
- czas przebywania w danej grupie stanów
- porównywanie dwóch procesów (lub realizacji)
- rozkład prawdopodobieństwa stanów w określonej chwili t

Procesy z czasem dyskretnym:

Zakładamy p – prawdopodobieństwo przyścia nowego zdarzenia.

Idziemy co krok czasowy Δ , w każdym sprawdzamy (losujemy) czy napłynęło zdarzenie. Jeśli tak to zmieniamy stan procesu. Trzeba rozsądnie dobrać Δ !

Procesy z czasem ciągłym:

Zakładamy λ – częstotliwość przychodzenia nowych zdarzeń.

Symulację opieramy o losowanie czasów przyścia kolejnych zdarzeń (rozkład wykładniczy). Znając numer zdarzenia i czas przyścia zdarzenia można wyliczyć estymatory wszystkich charakterystyk.

Niech zmienna losowa u ma rozkład jednorodny na $(0,1)$. Wtedy $Y = -\ln(u)/\lambda$ ma rozkład wykładniczy o parametrze λ . (z metody odwracania dystrybucyjności).

Systemy kolejkowe

Systemy kolejkowe

System kolejkowy to zespół obiektów złożony z jednego lub więcej punktów obsługi (serwerów), przeznaczonych do wykonania określonych zadań, strumieni napływających zadań (klientów) i kolejek tych zadań czekających na wykonanie.

Przykłady:

- procesor wykonujący zadania
- serwer obsługujący klientów w sieci
- drukarka
- bramki na autostradzie
- windy w bloku
- kontrola lotów na lotnisku
- działanie lotniska (obsługa pasażerów i samolotów) – proces wieloetapowy, złożony
- komunikacja miejska
- telewizja
- zarządzanie projektami (inżynieria oprogramowania)

Systemy kolejkowe

System kolejkowy to zespół obiektów złożony z jednego lub więcej punktów obsługi (serwerów), przeznaczonych do wykonania określonych zadań, strumieni napływających zadań (klientów) i kolejek tych zadań czekających na wykonanie.

Z reguły można wyróżnić etapy:

- przyjscie zdarzenia
- oczekiwanie w kolejce
- skierowanie do wykonania
- wykonanie (obsługa)
- usunięcie z systemu

Systemy kolejkowe

- **przyjście zdarzenia**

Napływ zdarzeń łączymy z procesem liczącym $A(t)$, w którym zliczamy zadania, które napłynęły do chwili t .

→ stacjonarny system kolejkowy: parametry $A(t)$ nie zmieniają się z czasem

Tempo przybywania zadań (arrival rate)

$$\lambda_A \equiv \frac{E(A(t))}{t}$$

Czyli λ_A to oczekiwana liczba nadchodzących zadań na jednostkę czasu.

Oczekiwany czas pomiędzy przychodzeniem kolejnych zadań

$$\mu_A = \frac{1}{\lambda_A}$$

Systemy kolejkowe

- **oczekiwanie w kolejce i skierowanie do wykonania**

Możliwe różne schematy:

FIFO (first in – first out) = FCFS (first come – first serve)

LIFO (last in – first out) - stos

Jeśli wiele serwerów jest wolnych możemy je losować lub wybierać według jakieś reguły (np. najszybszy serwer, najmniej dotychczas używany)

Jeśli wszystkie są zajęte → zadanie trafia do kolejki

Kolejka: może mieć bufor ograniczający liczbę czekających zadań, jeśli jest pełny to zadanie nie wchodzi do kolejki i znika z systemu.

Można tworzyć kolejki priorytetowe

Można nakładać różne ograniczenia, np. przerwy w pracy serwerów, rezygnacja zadań z oczekiwania na wykonanie (gdy przewidywany czas czekania lub czas już spędzony w kolejce jest długi)

→ trudno badać analitycznie, łatwiej symulować metodami Monte Carlo.

Systemy kolejkowe

- **wykonanie i usunięcie z systemu**

Średni czas obsługi μ_s

→ średnie tempo obsługi (service rate) $\lambda_s = \frac{1}{\mu_s}$

Różne serwery mogą mieć różne szybkości, możliwości (np. dostępną pamięć), co może wpływać na rozdzielanie zadań

Usuwanie z systemu może być połączone np. z zapisem danych (wyników) na dysk, wykonywanych przez dodatkowy wyspecjalizowany serwer.

Systemy kolejkowe

Używane oznaczenia

- Wydajność (obciążenie)
$$r = \frac{\lambda_A}{\lambda_S} = \frac{\mu_S}{\mu_A}$$
- $X_S(t)$ – liczba zadań obsługiwanych w chwili t (S – service)
- $X_W(t)$ – liczba zadań czekających w kolejce w chwili t (W – waiting)
- **$X(t)=X_S(t)+X_W(t)$ – całkowita liczba zadań w systemie w chwili t**
- S_k – czas obsługi k -tego zadania
- W_k – czas spędzony w kolejce przez k -te zadanie
- $R_k=S_k+W_k$ – całkowity czas spędzony w systemie przez k -te zadanie (R - response)

Stacjonarny system kolejkowy:

rozkłady prawdopodobieństwa S_k , W_k , R_k są niezależne od k

$X(t)$ nazywamy procesem kolejkowym.

Nie jest proces liczący – zadania pojawiają się i znikają – mówimy o procesie narodzin i śmierci (birth-death process).

Systemy kolejkowe – prawo Little’a

Prawo Little’a 1954/1961 (Cobham / Little)

$$E(X) = \lambda_A \cdot E(R)$$

Dotyczy także osobno czasów oczekiwania i czasów obsługi:

$$E(X_W) = \lambda_A \cdot E(W)$$

$$E(X_S) = \lambda_A \cdot E(S) = \lambda_A \cdot \mu_S = \lambda_A \cdot \frac{1}{\lambda_S} = r \quad \text{czyli wydajność } r \text{ to oczekiwana liczba zadań}$$

będących w obsłudze w pewnej chwili czasu

Dowód (podręcznik M.Baron)

Przykład:

Wchodzimy do banku o 10:00, jest tam już 8 klientów. Po jakim czasie wyjdziemy z banku?

Mierzymy za ile minut przyjdzie następny klient (np. 4 min).

Przyjmujemy $E(X)=8$ oraz $\mu_A=4$ min i stąd

$$E(X) = \lambda_A \cdot E(R)$$

$$E(R) = \frac{E(X)}{\lambda_A} = E(X) \cdot \mu_A = 8 \cdot 4 \text{ min} = 24 \text{ min}$$

Założyliśmy, że bank ma sprawny system kolejkowy (nie tworzą się zatory) i zoptymalizowany (nie ma za dużo punktów obsługi)

System kolejkowy Bernoulliego z pojedynczym serwerem

- Dyskretny czas
- Jeden serwer
- Nieskończona pojemność kolejki
- Przyjście zadania w kolejnym okienku czasowym (OC) zachodzi z prawdopodobieństwem p_A (i oczywiście brak zadania z $1-p_A$)
- Prawdopodobieństwo zakończenia zadania, które jest wykonywane wynosi p_S w każdym kolejnym OC
- Czasy przybycia i obsługi (wykonania) są niezależne
- Różne zadania przychodzą do systemu w sposób od siebie niezależny (jak w próbie Bernoulliego)
- p_A oraz p_S nie zmieniają się z czasem \rightarrow jednorodne łańcuchy Markowa

Z procesów Bernoulliego:

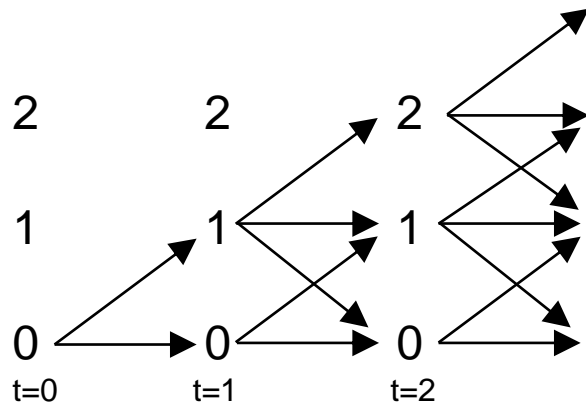
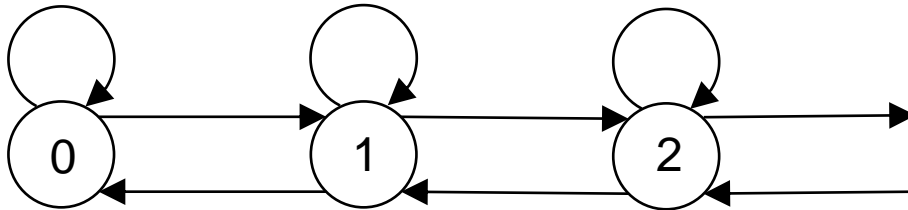
- Liczba OC pomiędzy zdarzeniami ma rozkład geometryczny z p_A
- Liczba OC potrzebnych do wykonania zadania ma rozkład geometryczny z p_S
- Obsługa każdego zadania trwa co najmniej jedno OC

$$p_A = \lambda_A \cdot \Delta$$

$$p_S = \lambda_S \cdot \Delta$$

System kolejkowy Bernoulliego z pojedynczym serwerem

Stany procesu kolejkowego opisujemy liczbą zadań w systemie



Proces kolejkowy Bernoulliego z pojedynczym serwerem jest nieregularnym łańcuchem Markowa – zawsze będą zera w macierzy przejścia bo przejście $0 \rightarrow (n+1)$ jest niemożliwe w n krokach. Można pokazać, że dla $\lambda_S > \lambda_A$ istnieje stan stacjonarny.

System kolejkowy Bernoulliego z pojedynczym serwerem

Macierz przejścia

$$p_{00} = P(\text{brak nowych zadań}) = 1 - p_A$$

$$p_{01} = P(\text{jedno nowe zadanie}) = p_A$$

$$p_{i,i-1} = P(\text{brak nowego zadania, jedno wykonano}) = (1 - p_A)p_S$$

$$\begin{aligned} p_{i,i} &= P(\text{brak nowego zadania, nic nie wykonano}) + P(\text{jedno nowe zadanie, jedno wykonano}) = \\ &= (1 - p_A)(1 - p_S) + p_A p_S \end{aligned}$$

$$p_{i,i+1} = P(\text{jedno nowe zadanie, nic nie wykonano}) = p_A(1 - p_S)$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 - p_A & p_A & 0 & 0 & 0 & \dots \\ (1 - p_A)p_S & (1 - p_A)(1 - p_S) + p_A p_S & p_A(1 - p_S) & 0 & 0 & \dots \\ 0 & (1 - p_A)p_S & (1 - p_A)(1 - p_S) + p_A p_S & p_A(1 - p_S) & 0 & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Przykład

Syt: Drukarka

→ jeden serwer, jedno zadanie obsługiwane, pozostałe stoją w kolejce.

Zał: średnio przybywa 20 zadań/h, drukowanie trwa średnio 40s. W pewnej chwili trwa drukowanie zadania, a jedno zadanie stoi w kolejce.

- Jakie jest prawdopodobieństwo, że drukarka będzie wolna za 2 min?
- Jakiej kolejki oczekujemy za 2 min?

$$\rightarrow \lambda_A = 20/60 = 1/3 \text{ min}^{-1}, \quad \mu_S = 40\text{s} = 2/3 \text{ min} \rightarrow \lambda_S = 1/\mu_S = 3/2 \text{ min}^{-1}$$

$$\text{Zał: } \Delta = 20\text{s} = 1/3 \text{ min.}$$

$$p_A = \lambda_A \cdot \Delta = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

$$p_S = \lambda_S \cdot \Delta = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

$$p_{00} = 1 - p_A = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

$$p_{01} = p_A = \frac{1}{9}$$

dla $i \geq 1$:

$$p_{i,i-1} = (1 - p_A) p_S = \left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{9}$$

$$p_{i,i} = (1 - p_A)(1 - p_S) + p_A p_S = \left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$p_{i,i+1} = p_A(1 - p_S) = \frac{1}{9} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{18}$$

$$\rightarrow P = \begin{pmatrix} \frac{8}{9} & \frac{1}{9} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{4}{9} & \frac{1}{2} & \frac{1}{18} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{4}{9} & \frac{1}{2} & \frac{1}{18} & 0 & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}_{\infty \times \infty}$$

Jaki jest stan początkowy ?

Przykład

Stan początkowy: $P_0 = (0, 0, 1, 0, 0, \dots)_{\infty}$

Jeżeli interesuje nas co się dzieje za 2 min ($=6\Delta$) to liczbę stanów możemy ograniczyć do $3+6=9 \rightarrow P_0 = (0, 0, 1, 0, 0, \dots)_9$

$$\rightarrow P = \begin{pmatrix} \frac{8}{9} & \frac{1}{9} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{4}{9} & \frac{1}{2} & \frac{1}{18} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{4}{9} & \frac{1}{2} & \frac{1}{18} & 0 & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}_{9 \times 9}$$

$$\rightarrow P_6 = P_0 P^6 = (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \begin{pmatrix} \frac{8}{9} & \frac{1}{9} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4}{9} & \frac{1}{2} & \frac{1}{18} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{9} & \frac{1}{2} & \frac{1}{18} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{9} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^6 =$$

$$= (0.644, 0.250, 0.080, 0.022, 0.004, \approx 0, \approx 0, \approx 0, \approx 0)$$

■ Jakie jest prawdopodobieństwo, że drukarka będzie wolna za 2 min ?

$$P_6(0) = 0.644$$

Przykład

$$P_6 = (0.644, 0.250, 0.080, 0.022, 0.004, \approx 0, \approx 0, \approx 0, \approx 0)$$

- Jakiej kolejki oczekujemy za 2 min?

$$X_W = X - X_S$$

$$E(X_W) = E(X) - E(X_S)$$

$$E(X) = \sum_{k=0}^8 P_6(X = k) \cdot k = 0 \cdot 0.644 + 1 \cdot 0.250 + \dots + 8 \cdot 0 = 0.494$$

Drukarka drukuje gdy ma 1 lub więcej zadań:

$$P(\text{drukuj}) = 1 - P_6(X=0) = 1 - 0.644 = 0.356$$

$$E(X_S) = \sum_{k=0}^1 P_6(\text{stan drukarki}) \cdot k = 0.644 \cdot 0 + 0.356 \cdot 1 = 0.356$$

$$E(X_W) = E(X) - E(X_S) = 0.494 - 0.356 = 0.138$$

Jak wybór Δ wpływa na wyniki ?

$$\Delta = 6s = 0.1 \text{ min} \rightarrow T=20, N=21$$

$$P_{20}^{\Delta=6s} = (0.609, 0.239, \dots)$$

$$\Delta = 1s = 0.016(6) \text{ min} \rightarrow T=120, N=121$$

$$P_{120}^{\Delta=1s} = (0.599, 0.235, \dots)$$

$$\Delta = 0.5s = 0.0083(3) \text{ min} \rightarrow T=240, N=241$$

$$P_{240}^{\Delta=0.5s} = (0.598, 0.234, \dots)$$

$$\Delta = 0.1s = 0.0016(6) \text{ min} \rightarrow T=1200, N=1201$$

$$P_{1200}^{\Delta=0.1s} = (0.5975, 0.2341, 0.1142, 0.0413, 0.0157, \dots)$$

Przykład: System kolejkowy Bernoulliego z pojedynczym serwerem i ograniczoną pojemnością - telefon

Telefon pozwala równocześnie na jedno połączenie i przetrzymuje drugie na linii.
Pozostałe osoby nie są łączone.

→ $C=2$

Zał: średnio 10 rozmów na godzinę, jedna trwa średnio 4 min, $\Delta=1$ min.

$$\lambda_A = \frac{10}{1h} = \frac{10}{60\text{min}} = \frac{1}{6} \text{ min}^{-1} \rightarrow p_A = \lambda_A \cdot \Delta = \frac{1}{6} \text{ min}^{-1} \cdot 1 \text{ min} = \frac{1}{6}$$

$$\lambda_S = \frac{1}{4\text{min}} = \frac{1}{4} \text{ min}^{-1} \rightarrow p_S = \lambda_S \cdot \Delta = \frac{1}{4} \text{ min}^{-1} \cdot 1 \text{ min} = \frac{1}{4}$$

Niech stan X oznacza liczbę połączeń w systemie $X=\{0,1,2\}$

$$P = \begin{pmatrix} 1-p_A & p_A & 0 \\ (1-p_A)p_S & (1-p_A)(1-p_S) + p_A p_S & p_A(1-p_S) \\ 0 & (1-p_A)p_S & 1-(1-p_A)p_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{5}{24} & \frac{2}{3} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{5}{24} & \frac{19}{24} \end{pmatrix}$$

Przykład: System kolejkowy Bernoulliego z pojedynczym serwerem i ograniczoną pojemnością - telefon

Stan stacjonarny $\Pi = \Pi P$

$$(\Pi_0 \quad \Pi_1 \quad \Pi_2) = (\Pi_0 \quad \Pi_1 \quad \Pi_2) \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{5}{24} & \frac{2}{3} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{5}{24} & \frac{19}{24} \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \Pi_0 = \frac{5}{6} \Pi_0 + \frac{5}{24} \Pi_1 \\ \Pi_1 = \frac{1}{6} \Pi_0 + \frac{2}{3} \Pi_1 + \frac{5}{24} \Pi_2 \\ \Pi_2 = \frac{1}{8} \Pi_1 + \frac{19}{24} \Pi_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{5}{24} \Pi_1 = \frac{1}{6} \Pi_0 \\ \frac{1}{3} \Pi_1 = \frac{1}{6} \Pi_0 + \frac{5}{24} \Pi_2 \\ \frac{3}{24} \Pi_1 = \frac{5}{24} \Pi_2 \end{cases} \quad (\text{układ nadokreślony})$$

Korzystając z warunku normalizacji $\Pi_0 + \Pi_1 + \Pi_2 = 1$:

$$\Pi_0 + \Pi_1 + \Pi_2 = 1$$

$$\frac{30}{24} \Pi_1 + \Pi_1 + \frac{3}{5} \Pi_1 = 1$$

$$\frac{5}{4} \Pi_1 + \Pi_1 + \frac{3}{5} \Pi_1 = 1$$

$$\frac{25+20+12}{20} \Pi_1 = 1 \rightarrow \Pi_1 = \frac{20}{57} = 0.351 \rightarrow \begin{cases} \Pi_0 = \frac{25}{57} = 0.439 \\ \Pi_2 = \frac{12}{57} = 0.210 \end{cases}$$

czyli stan stacjonarny $\Pi = (0.439, 0.351, 0.210)$

System kolejkowy z czasem ciągłym

Notacja Kendalla: **A/S/n/C/N/D**

A – opisuje proces przychodzenia zadań

M – czasy przyjścia pomiędzy zadaniami są wykładnicze
(memoryless, Markov)

G – dowolne (general)

D – deterministyczny (niełosowy) (deterministic, degenerated)

inne (M^X , MMPP – klastry,...)

S – opisuje proces obsługi zadań

wartości jak wyżej

n – liczba serwerów

C – pojemność systemu (pomijana gdy $C=\infty$)

czasami podaje się tylko pojemność kolejki

N – liczba źródeł (pomijana gdy $N=\infty$)

D – rodzaj obsługi (queue discipline) (pomijana gdy FIFO)

PS - współdzielenie procesora (processor sharing)

PQ – istnieje kolejka priorytetowa (priority queue)

SIRO – losowo (service in random order)

System kolejkowy M/M/1

- system kolejkowy z pojedynczym serwerem,
- Pojemność jest ∞
- napływ zadań dany przez rozkład wykładniczy z parametrem λ_A
(proces liczący Poissona)
- obsługa zadań dana przez rozkład wykładniczy z parametrem λ_S
- proces napływu zadań i proces obsługi są od siebie niezależne

Prawdopodobieństw przejść szukamy jako granicy systemu Bernoulliego dla małych Δ
(zaniedbujemy wyrazu rzędu Δ^2 i wyższe)

$$p_{0,0} = 1 - p_A = 1 - \lambda_A \Delta$$

$$p_{0,1} = p_A = \lambda_A \Delta$$

$$p_{i,i-1} = (1 - p_A) p_S = (1 - \lambda_A \Delta) \lambda_S \Delta = \lambda_S \Delta - \lambda_A \lambda_S \Delta^2 \approx \lambda_S \Delta$$

$$p_{i,i} = (1 - p_A)(1 - p_S) + p_A p_S = (1 - \lambda_A \Delta)(1 - \lambda_S \Delta) + \lambda_A \lambda_S \Delta^2 \approx 1 - \lambda_A \Delta - \lambda_S \Delta$$

$$p_{i,i+1} = p_A (1 - p_S) = \lambda_A \Delta (1 - \lambda_S \Delta) = \lambda_A \Delta - \lambda_A \lambda_S \Delta^2 \approx \lambda_A \Delta$$

System kolejkowy M/M/1

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} 1 - \lambda_A \Delta & \lambda_A \Delta & 0 & 0 & \dots \\ \lambda_S \Delta & 1 - \lambda_A \Delta - \lambda_S \Delta & \lambda_A \Delta & 0 & \dots \\ 0 & \lambda_S \Delta & 1 - \lambda_A \Delta - \lambda_S \Delta & \lambda_A \Delta & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Czy to jest macierz przejścia ?

System kolejkowy M/M/1 – stan stacjonarny

$$\begin{cases} \Pi P = \Pi \\ \sum_i \Pi_i = 1 \end{cases} \rightarrow (\Pi_0 \quad \Pi_1 \quad \dots) \tilde{P} = (\Pi_0 \quad \Pi_1 \quad \dots) \begin{pmatrix} 1 - \lambda_A \Delta & \lambda_A \Delta & 0 & 0 & \dots \\ \lambda_S \Delta & 1 - \lambda_A \Delta - \lambda_S \Delta & \lambda_A \Delta & 0 & \dots \\ 0 & \lambda_S \Delta & 1 - \lambda_A \Delta - \lambda_S \Delta & \lambda_A \Delta & \ddots \\ \vdots & & & & \ddots \end{pmatrix} = (\Pi_0 \quad \Pi_1 \quad \dots)$$

Obliczamy dla pierwszej składowej

$$\Pi_0 (1 - \lambda_A \Delta) + \Pi_1 \lambda_S \Delta = \Pi_0$$

$$\Pi_0 - \Pi_0 \lambda_A \Delta + \Pi_1 \lambda_S \Delta = \Pi_0$$

$$\Pi_1 \lambda_S \Delta = \Pi_0 \lambda_A \Delta \quad / : \Delta$$

$$\Pi_1 \lambda_S = \Pi_0 \lambda_A \quad / : \lambda_S$$

$$\Pi_1 = \Pi_0 \frac{\lambda_A}{\lambda_S} = r \Pi_0$$

Obliczamy dla drugiej składowej

$$\Pi_0 \lambda_A \Delta + \Pi_1 (1 - \lambda_A \Delta - \lambda_S \Delta) + \Pi_2 \lambda_S \Delta = \Pi_1$$

$$\Pi_0 \lambda_A - \Pi_1 \lambda_A - \Pi_1 \lambda_S + \Pi_2 \lambda_S = 0$$

$$-\Pi_1 \lambda_A + \Pi_2 \lambda_S = 0$$

$$\Pi_2 = \Pi_1 \frac{\lambda_A}{\lambda_S} = r \Pi_1$$

→ dla kolejnych składowych:

$$\Pi_{i-2} \lambda_A \Delta + \Pi_{i-1} (1 - \lambda_A \Delta - \lambda_S \Delta) + \Pi_i \lambda_S \Delta = \Pi_{i-1}$$

$$\Pi_{i-2} \lambda_A - \Pi_{i-1} \lambda_A - \Pi_{i-1} \lambda_S + \Pi_i \lambda_S = 0$$

$$-\Pi_{i-1} \lambda_A + \Pi_i \lambda_S = 0$$

$$\Pi_i = \Pi_{i-1} \frac{\lambda_A}{\lambda_S} = r \Pi_{i-1}$$

System kolejkowy M/M/1 – stan stacjonarny

Zatem dla $i > 0$:

$$\Pi_i = r\Pi_{i-1}$$

$$\Pi_i = r\Pi_{i-1} = r^2\Pi_{i-2} = \dots = r^i\Pi_0$$

Normalizacja: $\sum_{i=0}^{\infty} \Pi_i = 1$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \Pi_i = \sum_{i=0}^{\infty} r^i \Pi_0 = \Pi_0 \sum_{i=0}^{\infty} r^i = \dots \text{dla } |r| < 1 \dots = \Pi_0 \frac{1}{1-r}$$

$$\Pi_0 \frac{1}{1-r} = 1 \rightarrow \Pi_0 = 1-r$$

$$\Pi_1 = r\Pi_0 = r(1-r)$$

$$\Pi_2 = r\Pi_1 = r^2(1-r)$$

\vdots

$$\Pi_n = r\Pi_{n-1} = r^n(1-r)$$

$$\rightarrow P(\text{serwer nie ma zadań}) = \Pi_0 = 1-r$$

$$\rightarrow P(\text{serwer pracuje}) = 1 - \Pi_0 = 1 - (1-r) = r$$

(obciążenie)

System kolejkowy M/M/1 – stan stacjonarny

- $X(t)$ w stanie stacjonarnym ma przesunięty rozkład geometryczny
- $Y=X+1$ ma zwykły rozkład geometryczny z parametrem $p=1-r$

Spr:

$$P(Y = y) = P(X + 1 = y) = P(X = y - 1) \equiv \Pi_{y-1} = r^{y-1} (1-r) \stackrel{p \equiv 1-r}{=} (1-p)^{y-1} p$$

- Oczekiwana liczba zadań w systemie

$$E(X) = E(Y - 1) = E(Y) - 1 = \frac{1}{p} - 1 = \frac{1}{1-r} - 1 = \frac{1-(1-r)}{1-r} = \frac{r}{1-r}$$

$$\text{var}(X) = \text{var}(Y - 1) = \text{var}(Y) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{1-(1-r)}{(1-r)^2} = \frac{r}{(1-r)^2} \quad \rightarrow \quad \sigma(X) = \sqrt{\frac{r}{(1-r)^2}} = \frac{\sqrt{r}}{1-r}$$

- Oczekiwana liczba obsługiwanych zadań

$$X_S = \{0, 1\} \quad P(X_S = 0) = \Pi_0 = 1-r \quad P(X_S = 1) = \Pi_1 + \Pi_2 + \dots = 1 - \Pi_0 = 1 - (1-r) = r$$

$$E(X_S) = 0 \cdot (1-r) + 1 \cdot r = r$$

- Oczekiwana liczba zadań w kolejce

$$E(X_W) = E(X - X_S) = E(X) - E(X_S) = \frac{r}{1-r} - r = \frac{r-r(1-r)}{1-r} = \frac{r^2}{1-r}$$

System kolejkowy M/M/1 – stan stacjonarny

- Oczekiwany czas obsługi $E(S)=1/\lambda_S$
- Oczekiwany czas spędzony w kolejce

Zał: nowe zadanie zastaje X zadań w systemie

$$W = S_1 + S_2 + \dots + S_X$$

$$E(W) = E(S_1 + S_2 + \dots + S_X) = E(S) \cdot E(X) = \mu_S \frac{r}{1-r} = \frac{1}{\lambda_S} \cdot \frac{r}{1-r} = \frac{r}{\lambda_S(1-r)}$$

- Oczekiwany czas spędzony w systemie

$$E(R) = E(W + S) = E(W) + E(S) = \frac{r}{\lambda_S(1-r)} + \mu_S = \frac{r}{\lambda_S(1-r)} + \frac{1}{\lambda_S} = \frac{r+(1-r)}{\lambda_S(1-r)} = \frac{1}{\lambda_S(1-r)}$$

Nie zależy od dyscypliny wykonywania

- Prawo Little'a

$$\lambda_A \cdot E(R) = E(X) \rightarrow \lambda_A \cdot \frac{1}{\lambda_S(1-r)} = \frac{r}{1-r}$$

$$\lambda_A \cdot E(W) = E(X_W) \rightarrow \lambda_A \cdot \frac{r}{\lambda_S(1-r)} = \frac{r^2}{1-r}$$

$$\lambda_A \cdot E(S) = E(X_S) \rightarrow \lambda_A \cdot \mu_S = \lambda_A \cdot \frac{1}{\lambda_S} = r$$

System kolejkowy M/M/1 – stan stacjonarny

■ Rozkład czasu oczekiwania

Zał: nowe zadanie zastaje X zadań w systemie

Reguła PASTA (Poisson arrivals see time averages)

$$P(X = i) = \Pi_i$$

$$P(W = 0) = P(X = 0) = \Pi_0 = 1 - r$$

$$P(W > t) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(W > t | X = i) \cdot P(X = i) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(W > t | X = i) \cdot \Pi_i = \sum_{i=1}^{+\infty} P(\tau_i > t) \cdot \Pi_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{+\infty} P(\tau_i > t) \cdot (1 - r)r^i = \dots$$

$$P(\tau_i > t) = P(A(t) \leq i - 1)$$

gdzie $A(t)$ – liczba zadań jakie wykonano do czasu t .

$A(t)$ jest procesem liczący Poissona z parametrem $\lambda_s t$.

$$\rightarrow P(A(t) \leq i - 1) = \sum_{j=0}^{i-1} \frac{(\lambda_s t)^j}{j!} e^{-\lambda_s t}$$

$$\dots = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{i-1} \frac{(\lambda_s t)^j}{j!} e^{-\lambda_s t} (1 - r)r^i = r \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{i-1} \frac{(\lambda_s t)^j}{j!} e^{-\lambda_s t} (1 - r)r^{i-1} r^{j-j} = r \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{i-1} \frac{(\lambda_s t r)^j}{j!} e^{-\lambda_s t} (1 - r)r^{i-(j+1)} = \dots$$

τ_i – czas potrzebny na wykonanie wszystkich i zadań, liczonych od momentu przyścia nowego zadania

System kolejkowy M/M/1 – stan stacjonarny

Zachodzi
$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{i-1} A_{ij} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=j+1}^{\infty} A_{ij}$$

Dow:
$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{i-1} A_{ij} = A_{10} + A_{20} + A_{21} + A_{30} + A_{31} + A_{32} + \dots$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=j+1}^{\infty} A_{ij} = A_{10} + A_{20} + A_{30} + \dots + A_{21} + A_{31} + A_{41} + \dots + A_{32} + \dots$$

□

$$\dots = r \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{i-1} \frac{(\lambda_s tr)^j}{j!} e^{-\lambda_s t} (1-r) r^{i-(j+1)} = r \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=j+1}^{\infty} \frac{(\lambda_s tr)^j}{j!} e^{-\lambda_s t} (1-r) r^{i-(j+1)} =$$

$$= r \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda_s tr)^j}{j!} e^{-\lambda_s t} (1-r) r^{-(j+1)} \sum_{i=j+1}^{\infty} r^i = r \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda_s tr)^j}{j!} e^{-\lambda_s t} (1-r) r^{-(j+1)} \frac{r^{j+1}}{1-r} =$$

$$= r \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda_s tr)^j}{j!} e^{-\lambda_s t} = r e^{-\lambda_s t} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda_s tr)^j}{j!} = r e^{-\lambda_s t} e^{\lambda_s tr} = r e^{-\lambda_s t(1-r)}$$

czyli $P(W > t) = r e^{-\lambda_s t(1-r)}$

To prawdopodobieństwo jest miarą jakości obsługi (za duże \rightarrow niezadowolony użytkownik może zrezygnować z usługi).

System kolejkowy M/M/1 – przykład

Syt: Do pewnego pojedynczego serwera przychodzi 5 zadań/min. Ich obsługa zajmuje średnio 10s/zadanie, po czym zadanie opuszcza system. Pojemność systemu jest nieskończona.

$$\rightarrow M/M/1; \quad \lambda_A = 5 \text{ min}^{-1}; \quad \mu_S = 10\text{s} = 1/6 \text{ min.}$$

$$r = \frac{\lambda_A}{\lambda_S} = \lambda_A \cdot \mu_S = 5 \text{ min}^{-1} \cdot \frac{1}{6} \text{ min} = \frac{5}{6}$$

$$E(X) = \frac{r}{1-r} = \frac{\frac{5}{6}}{1-\frac{5}{6}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{1}{6}} = 5$$

$$E(X_W) = \frac{r^2}{1-r} = \frac{\frac{25}{36}}{\frac{1}{6}} = \frac{25}{36} \cdot \frac{6}{1} = \frac{25}{6} = 4.17$$

$$E(X_S) = E(X) - E(X_W) = r = \frac{5}{6} = 0.83$$

$$E(W) = \frac{\mu_S r}{1-r} = \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}}{\frac{1}{6}} = \frac{5}{6} \text{ min} = 50\text{s}$$

$$E(R) = \frac{\mu_S r}{1-r} = E(W) + \mu_S = 50\text{s} + 10\text{s} = 60\text{s}$$

System kolejkowy M/M/1 – przykład

Syt: Zwiększamy liczbę przychodzących zadań o 10%, czyli do 5.5 zadań/min.

→ M/M/1 $\mu_S = 10\text{s} = 1/6 \text{ min.}$

$$\lambda_A = 5 \text{ min}^{-1}$$

$$r = \frac{\lambda_A}{\lambda_S} = \lambda_A \cdot \mu_S = 5 \text{ min}^{-1} \cdot \frac{1}{6} \text{ min} = \frac{5}{6}$$

$$E(X) = \frac{r}{1-r} = \frac{\frac{5}{6}}{1-\frac{5}{6}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{1}{6}} = 5$$

$$E(X_W) = \frac{r^2}{1-r} = \frac{\frac{25}{36}}{\frac{1}{6}} = \frac{25}{36} \cdot \frac{6}{1} = \frac{25}{6} = 4.17$$

$$E(X_S) = E(X) - E(X_W) = r = \frac{5}{6} = 0.83$$

$$E(W) = \frac{\mu_S r}{1-r} = \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}}{\frac{1}{6}} = \frac{5}{6} \text{ min} = 50\text{s}$$

$$E(R) = \frac{\mu_S}{1-r} = E(W) + \mu_S = 50\text{s} + 10\text{s} = 60\text{s}$$

$$\lambda_A = 5.5 \text{ min}^{-1} = 11/2 \text{ min}^{-1}$$

$$r = \frac{\lambda_A}{\lambda_S} = \lambda_A \cdot \mu_S = \frac{11}{2} \text{ min}^{-1} \cdot \frac{1}{6} \text{ min} = \frac{11}{12} \approx 0.93$$

$$E(X) = \frac{r}{1-r} = \frac{\frac{11}{12}}{1-\frac{11}{12}} = \frac{\frac{11}{12}}{\frac{1}{12}} = 11$$

$$E(X_W) = \frac{r^2}{1-r} = \frac{\frac{121}{144}}{\frac{1}{12}} = \frac{121}{12} = 10.08$$

$$E(X_S) = E(X) - E(X_W) = r = 0.93$$

$$E(W) = \frac{\mu_S r}{1-r} = \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{11}{12}}{\frac{1}{12}} = \frac{11}{6} \text{ min} = 110\text{s}$$

$$E(R) = \frac{\mu_S}{1-r} = E(W) + \mu_S = 110\text{s} + 10\text{s} = 120\text{s}$$

Systemy kolejkowe z wieloma serwerami

- nowe zadanie czeka w kolejce gdy wszystkie serwery są zajęte
 - gdy są wolne serwery – różne metody wyboru serwera (losowo, najmniej obciążone poprzednio, najszybsze, ...)
 - serwerów może być nieskończenie wiele (w teorii)
 - aby system był wydajny potrzeba $r < k$ (a nie $r < 1$ jak dla jednego serwera)
-

System kolejkowy Bernoulliego z k serwerami

- Dyskretny czas
- k serwerów
- Nieskończona pojemność kolejki
- Przyjście zadania w kolejnym okienku czasowym (OC) zachodzi z prawdopodobieństwem p_A (i oczywiście brak zadania z $1-p_A$)
- Prawdopodobieństwo zakończenia zadania, które jest wykonywane na jednym serwerze wynosi p_S w każdym kolejnym OC
- Czasy przybycia i obsługi (wykonania) na wszystkich serwerach są niezależne
- Różne zadania przychodzą do systemu w sposób od siebie niezależny (jak w próbie Bernoulliego)
- p_A oraz p_S nie zmieniają się z czasem \rightarrow jednorodne łańcuchy Markowa

Z procesów Bernoulliego (jak poprzednio)

- Liczba OC pomiędzy zdarzeniami ma rozkład geometryczny z p_A
- Liczba OC potrzebnych do wykonania każdego zadania ma rozkład geometryczny z p_S
- Obsługa każdego zadania trwa co najmniej jedno OC

$$p_A = \lambda_A \cdot \Delta$$

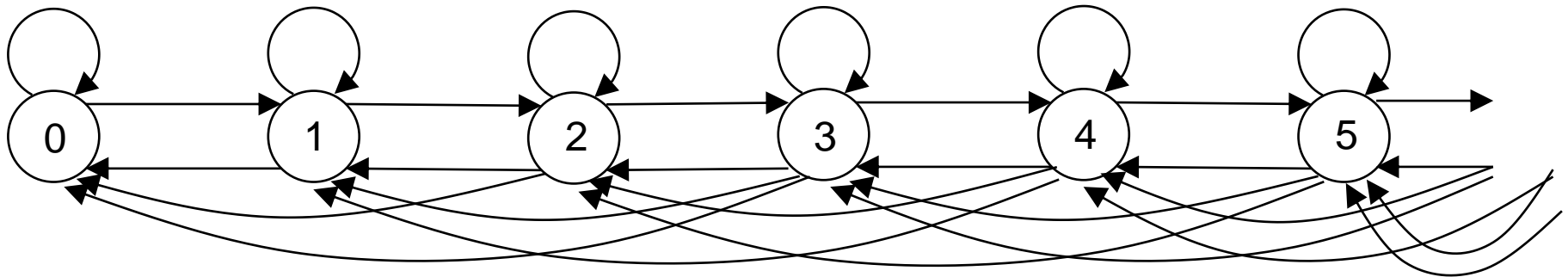
$$p_S = \lambda_S \cdot \Delta$$

System kolejkowy Bernoulliego z k serwerami

W systemie k serwerów:

- W jednym OC może zakończyć się od 0 do k (przy pełnym obciążeniu) zadań.
- Liczba serwerów kończąca zadania w jednym OC dana jest rozkładem dwumianowym z p_s oraz liczbą prób równą liczbie aktualnie wykonywanych zadań.

- Dla $k=3$



System kolejkowy Bernoulliego z k serwerami

- Macierz przejścia $p_{i,j} = P(X(t + \Delta) = j \mid X(t) = i)$

Zał: pojemność jest nieskończona

Zał: w systemie jest i zadań \rightarrow liczba zajętych serwerów $n = \min\{i, k\}$

Dla $i \leq k$ wszystkie zadania są wykonywane \rightarrow liczba kończących się zadań ma rozkład dwumianowy $B(i, p_S)$

Dla $i > k$ tylko k zadań jest wykonywanych \rightarrow liczba kończących się zadań ma rozkład dwumianowy $B(k, p_S)$

$$p_{0,0} = P(\text{brak nowych zadań}) = 1 - p_A$$

$$p_{0,1} = P(\text{jedno nowe zadanie}) = p_A$$

$$p_{i,i+1} = P(\text{jedno nowe zadanie, nic nie wykonano}) = p_A \binom{n}{0} p_S^0 (1 - p_S)^{n-0} = p_A (1 - p_S)^n$$

$$\begin{aligned} p_{i,i} &= P(\text{brak nowego zadania, nic nie wykonano}) + P(\text{jedno nowe zadanie, jedno wykonano}) = \\ &= (1 - p_A)(1 - p_S)^n + p_A \binom{n}{1} p_S^1 (1 - p_S)^{n-1} = (1 - p_A)(1 - p_S)^n + p_A n p_S (1 - p_S)^{n-1} \end{aligned}$$

System kolejkowy Bernoulliego z k serwerami

liczba zajętych serwerów $n = \min\{i, k\}$

$$\begin{aligned} p_{i,i-1} &= P(\text{jedno nowe zadanie, dwa wykonano}) + P(\text{brak nowego zadania, jedno wykonano}) = \\ &= p_A \binom{n}{2} p_S^2 (1 - p_S)^{n-2} + (1 - p_A) \binom{n}{1} p_S^1 (1 - p_S)^{n-1} = p_A \binom{n}{2} p_S^2 (1 - p_S)^{n-2} + (1 - p_A) n p_S (1 - p_S)^{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{i,i-2} &= P(\text{jedno nowe zadanie, trzy wykonano}) + P(\text{brak nowego zadania, dwa wykonano}) = \\ &= p_A \binom{n}{3} p_S^3 (1 - p_S)^{n-3} + (1 - p_A) \binom{n}{2} p_S^2 (1 - p_S)^{n-2} \end{aligned}$$

\vdots

$$\begin{aligned} p_{i,i-(n-1)} &= P(\text{jedno nowe zadanie, } n \text{ wykonano}) + P(\text{brak nowego zadania, } n-1 \text{ wykonano}) = \\ &= p_A \binom{n}{n} p_S^n (1 - p_S)^{n-n} + (1 - p_A) \binom{n}{n-1} p_S^{n-1} (1 - p_S)^{n-(n-1)} = p_A p_S^n + (1 - p_A) n p_S^{n-1} (1 - p_S) \end{aligned}$$

$$p_{i,i-n} = P(\text{brak nowego zadania, } n \text{ wykonano}) = (1 - p_A) \binom{n}{n} p_S^n (1 - p_S)^{n-n} = (1 - p_A) p_S^n$$

System kolejkowy Bernoulliego z k serwerami

W układzie ze skończoną pojemnością C element $p_{C,C+1}$ nie istnieje, zaś

$$\begin{aligned} p_{C,C} &= P(\text{brak nowego zadania, nic nie wykonano}) + \\ &+ P(\text{jedno nowe zadanie, jedno wykonano}) + \\ &+ P(\text{jedno nowe zadanie, nic nie wykonano}) = \\ &= (1 - p_A)(1 - p_S)^n + p_A \binom{n}{1} p_S^1 (1 - p_S)^{n-1} + p_A \binom{n}{0} p_S^0 (1 - p_S)^{n-0} = \\ &= (1 - p_A)(1 - p_S)^n + p_A n p_S (1 - p_S)^{n-1} + p_A (1 - p_S)^n = (1 - p_S)^n + p_A n p_S (1 - p_S)^{n-1} \end{aligned}$$

System kolejkowy Bernoulliego z k serwerami - przykład

Syt: Dwa stanowiska obsługi w call center (=dwa serwery), dwie dalsze rozmowy mogą czekać w kolejce, dalsze są odrzucane. Klienci dzwonią średnio co 5 minut, rozmowa trwa średnio 8 minut. Zakładamy $\Delta=1$ min.

$$\rightarrow k=2 \quad C=4 \quad \mu_A=5 \text{ min} \left(\rightarrow \lambda_A=0.2 \text{ min}^{-1} \right) \quad \mu_S=8 \text{ min} \left(\rightarrow \lambda_S=0.125 \text{ min}^{-1} \right)$$

$$\rightarrow p_A = \lambda_A \cdot \Delta = 0.2 \text{ min}^{-1} \cdot 1 \text{ min} = 0.2$$

$$p_S = \lambda_S \cdot \Delta = 0.125 \text{ min}^{-1} \cdot 1 \text{ min} = 0.125$$

$$P = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.725 & 0.175 & 0 & 0 \\ 0.0125 & 0.1781 & 0.6562 & 0.1532 & 0 \\ 0 & 0.0125 & 0.1781 & 0.6562 & 0.1532 \\ 0 & 0 & 0.0125 & 0.1781 & 0.8094 \end{pmatrix}$$

Stan stacjonarny:

$$\rightarrow \Pi = (\underbrace{0.1527}_{\Pi_0} \quad \underbrace{0.2753}_{\Pi_1} \quad \underbrace{0.2407}_{\Pi_2} \quad \underbrace{0.1837}_{\Pi_3} \quad \underbrace{0.1476}_{\Pi_4})$$

System kolejkowy Bernoulliego z k serwerami - przykład

Syt: Dwa stanowiska obsługi w call center (=dwa serwery), dwie dalsze rozmowy mogą czekać w kolejce, dalsze są odrzucane. Klienci dzwonią średnio co 5 minut, rozmowa trwa średnio 8 minut. Zakładamy $\Delta=1$ min.

$$\text{Stan stacjonarny: } \Pi = (\underbrace{0.1527}_{\Pi_0} \quad \underbrace{0.2753}_{\Pi_1} \quad \underbrace{0.2407}_{\Pi_2} \quad \underbrace{0.1837}_{\Pi_3} \quad \underbrace{0.1476}_{\Pi_4})$$

→ Nowy klient zostanie odrzucony z prawdopodobieństwem $P(X=C)=\Pi_4=0.1476$
(równoważnie: taki ułamek nowych klientów zostanie odrzuconych)

→ Obciążenie pracowników:

Każdy z pracowników na pewno pracuje gdy w systemie jest 2,3 lub 4 klientów oraz z $P=0.5$ gdy w systemie jest jeden klient.

$$\text{Obciążenie pracownika} = \Pi_2 + \Pi_3 + \Pi_4 + 0.5\Pi_1 = 0.70965 \approx 71\%$$

(dokładniej: tyle czasu pracownik rozmawia z klientami)

System kolejkowy M/M/k

- system kolejkowy z k serwerami,
- pojemność jest ∞
- napływ zadań dany przez rozkład wykładniczy z parametrem λ_A
- obsługa zadań dana przez rozkład wykładniczy z parametrem λ_S
- proces napływu zadań i proces obsługi są od siebie niezależne

Prawdopodobieństw przejść szukamy jako granicy systemu Bernoulliego dla małych Δ (zaniedbujemy wyrazu rzędu Δ^2 i wyższe)

$$p_{0,0} = 1 - p_A = 1 - \lambda_A \Delta$$

$$p_{0,1} = p_A = \lambda_A \Delta$$

$$p_{i,i+1} = p_A (1 - p_S)^n = \lambda_A \Delta (1 - \lambda_S \Delta)^n \approx \lambda_A \Delta$$

$$p_{i,i} = (1 - p_A)(1 - p_S)^n + p_A n p_S (1 - p_S)^{n-1} = (1 - \lambda_A \Delta)(1 - \lambda_S \Delta)^n + \lambda_A \Delta n \lambda_S \Delta (1 - \lambda_S \Delta)^{n-1} \approx$$

$$\approx (1 - \lambda_A \Delta)(1 - \lambda_S \Delta)^n = (1 - \lambda_A \Delta) \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} 1^i (-\lambda_S \Delta)^{n-i} \approx (1 - \lambda_A \Delta) \sum_{i=n-1}^n \binom{n}{i} 1^i (-\lambda_S \Delta)^{n-i} \approx$$

$$\approx (1 - \lambda_A \Delta) \left(\binom{n}{n-1} (-\lambda_S \Delta)^{n-(n-1)} + \binom{n}{n} (-\lambda_S \Delta)^{n-n} \right) = (1 - \lambda_A \Delta) (-n \lambda_S \Delta + 1) \approx 1 - \lambda_A \Delta - n \lambda_S \Delta$$

System kolejkowy M/M/k

$$p_{i,i-1} = p_A \binom{n}{2} p_S^2 (1-p_S)^{n-2} + (1-p_A) n p_S (1-p_S)^{n-1} \approx n \lambda_S \Delta$$

$$p_{i,i-2} = p_A \binom{n}{3} p_S^3 (1-p_S)^{n-3} + (1-p_A) \binom{n}{2} p_S^2 (1-p_S)^{n-2} \approx 0$$

⋮

$$p_{i,i-n} = (1-p_A) p_S^n \approx 0$$

Macierz przejścia (dla Δ) dla k=3

$$p_A = \lambda_A \cdot \Delta$$

$$p_S = \lambda_S \cdot \Delta$$

$X \quad n$

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} 1-p_A & p_A & 0 & 0 & 0 & \dots \\ p_S & 1-p_A-p_S & p_A & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 2p_S & 1-p_A-2p_S & p_A & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 3p_S & 1-p_A-3p_S & p_A & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 3p_S & 1-p_A-3p_S & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \\ 4 & 3 \\ 5 & 3 \end{matrix}$$

System kolejkowy M/M/k – stan stacjonarny

Przykładowa
macierz dla k=3

$$\begin{cases} \Pi P = \Pi \\ \sum_i \Pi_i = 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow (\Pi_0 \quad \Pi_1 \quad \dots) \tilde{P} = (\Pi_0 \quad \Pi_1 \quad \dots) \begin{pmatrix} 1-p_A & p_A & 0 & 0 & 0 & \dots \\ p_S & 1-p_A-p_S & p_A & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 2p_S & 1-p_A-2p_S & p_A & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 3p_S & 1-p_A-3p_S & p_A & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 3p_S & 1-p_A-3p_S & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = (\Pi_0 \quad \Pi_1 \quad \dots)$$

Obliczamy dla pierwszej składowej

$$\Pi_0 (1 - \lambda_A \Delta) + \Pi_1 \lambda_S \Delta = \Pi_0$$

$$\Pi_0 - \Pi_0 \lambda_A \Delta + \Pi_1 \lambda_S \Delta = \Pi_0$$

$$\Pi_1 \lambda_S \Delta = \Pi_0 \lambda_A \Delta \quad / : \Delta$$

$$\Pi_1 \lambda_S = \Pi_0 \lambda_A \quad / : \lambda_S$$

$$\Pi_1 = \Pi_0 \frac{\lambda_A}{\lambda_S} = r \Pi_0$$

Obliczamy dla drugiej składowej

$$\Pi_0 \lambda_A \Delta + \Pi_1 (1 - \lambda_A \Delta - \lambda_S \Delta) + \Pi_2 2 \lambda_S \Delta = \Pi_1$$

$$\Pi_0 \lambda_A - \Pi_1 \lambda_A - \Pi_1 \lambda_S + \Pi_2 2 \lambda_S = 0$$

$$-\Pi_1 \lambda_A + \Pi_2 2 \lambda_S = 0$$

$$\Pi_2 = \Pi_1 \frac{\lambda_A}{2 \lambda_S} = \frac{1}{2} r \Pi_1 = \frac{1}{2} r^2 \Pi_0$$

System kolejkowy M/M/k – stan stacjonarny

Przykładowa
macierz dla k=3

$$\begin{cases} \Pi P = \Pi \\ \sum_i \Pi_i = 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow (\Pi_0 \quad \Pi_1 \quad \dots) \tilde{P} = (\Pi_0 \quad \Pi_1 \quad \dots) \begin{pmatrix} 1-p_A & p_A & 0 & 0 & 0 & \dots \\ p_S & 1-p_A-p_S & p_A & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 2p_S & 1-p_A-2p_S & p_A & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 3p_S & 1-p_A-3p_S & p_A & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 3p_S & 1-p_A-3p_S & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = (\Pi_0 \quad \Pi_1 \quad \dots)$$

Obliczamy dla trzeciej składowej

$$\Pi_1 \lambda_A \Delta + \Pi_2 (1 - \lambda_A \Delta - 2\lambda_S \Delta) + \Pi_3 3\lambda_S \Delta = \Pi_2$$

$$\Pi_1 \lambda_A - \Pi_2 \lambda_A - \Pi_2 2\lambda_S + \Pi_3 3\lambda_S = 0$$

$$-\Pi_2 \lambda_A + \Pi_3 3\lambda_S = 0$$

$$\Pi_3 = \Pi_2 \frac{\lambda_A}{3\lambda_S} = \frac{1}{3} r \Pi_2 = \frac{1}{3} r \frac{1}{2} r \Pi_1 =$$

$$= \frac{1}{2 \cdot 3} r^2 \Pi_1 = \frac{1}{2 \cdot 3} r^3 \Pi_0$$

dla kolejnych składowych

(aż do k-tej)

$$\Pi_{i-2} \lambda_A \Delta + \Pi_{i-1} (1 - \lambda_A \Delta - (i-1)\lambda_S \Delta) + \Pi_i i\lambda_S \Delta = \Pi_{i-1}$$

$$\Pi_{i-2} \lambda_A - \Pi_{i-1} \lambda_A - \Pi_{i-1} (i-1)\lambda_S + \Pi_i i\lambda_S = 0$$

$$-\Pi_{i-1} \lambda_A + \Pi_i i\lambda_S = 0$$

$$\Pi_i = \Pi_{i-1} \frac{\lambda_A}{i\lambda_S} = \frac{1}{i} r \Pi_{i-1}$$

$$\Pi_i = \frac{1}{i} r \Pi_{i-1} = \frac{1}{i(i-1)} r^2 \Pi_{i-2} = \dots = \frac{1}{i!} r^i \Pi_0$$

w szczególności dla k-tej składowej

$$\Pi_k = \frac{1}{k!} r^k \Pi_0$$

System kolejkowy M/M/k – stan stacjonarny

Przykładowa
macierz dla k=3

$$\begin{cases} \Pi P = \Pi \\ \sum_i \Pi_i = 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow (\Pi_0 \ \Pi_1 \ \dots) \tilde{P} = (\Pi_0 \ \Pi_1 \ \dots) \begin{pmatrix} 1-p_A & p_A & 0 & 0 & 0 & \dots \\ p_S & 1-p_A-p_S & p_A & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 2p_S & 1-p_A-2p_S & p_A & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 3p_S & 1-p_A-3p_S & p_A & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 3p_S & 1-p_A-3p_S & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = (\Pi_0 \ \Pi_1 \ \dots)$$

Obliczamy dla k+1 składowej

Przykład dla k=3

(dla 4-tej składowej)

$$\Pi_2 \lambda_A \Delta + \Pi_3 (1 - \lambda_A \Delta - 3 \lambda_S \Delta) + \Pi_4 3 \lambda_S \Delta = \Pi_3$$

$$\Pi_2 \lambda_A - \Pi_3 \lambda_A - \Pi_3 3 \lambda_S + \Pi_4 3 \lambda_S = 0$$

$$-\Pi_3 \lambda_A + \Pi_4 3 \lambda_S = 0$$

$$\Pi_4 = \Pi_3 \frac{\lambda_A}{3 \lambda_S} = \frac{r}{3} \Pi_3 = \frac{r}{3} \cdot \frac{r^3}{3!} \Pi_0$$

→ dla piątej składowej (przy k=3)

$$\Pi_3 \lambda_A \Delta + \Pi_4 (1 - \lambda_A \Delta - 3 \lambda_S \Delta) + \Pi_5 3 \lambda_S \Delta = \Pi_4$$

$$\Pi_3 \lambda_A - \Pi_4 \lambda_A - \Pi_4 3 \lambda_S + \Pi_5 3 \lambda_S = 0$$

$$-\Pi_4 \lambda_A + \Pi_5 3 \lambda_S = 0$$

$$\Pi_5 = \Pi_4 \frac{\lambda_A}{3 \lambda_S} = \frac{r}{3} \Pi_4 = \left(\frac{r}{3}\right)^2 \cdot \frac{r^3}{3!} \Pi_0$$

System kolejkowy M/M/k – stan stacjonarny

Przykładowa
macierz dla k=3

$$\begin{cases} \Pi P = \Pi \\ \sum_i \Pi_i = 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow (\Pi_0 \quad \Pi_1 \quad \dots) \tilde{P} = (\Pi_0 \quad \Pi_1 \quad \dots) \begin{pmatrix} 1-p_A & p_A & 0 & 0 & 0 & \dots \\ p_S & 1-p_A-p_S & p_A & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 2p_S & 1-p_A-2p_S & p_A & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 3p_S & 1-p_A-3p_S & p_A & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 3p_S & 1-p_A-3p_S & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = (\Pi_0 \quad \Pi_1 \quad \dots)$$

Dla dowolnego k

Obliczamy dla k+1 składowej

$$\Pi_{k-1} \lambda_A \Delta + \Pi_k (1 - \lambda_A \Delta - k \lambda_S \Delta) + \Pi_{k+1} k \lambda_S \Delta = \Pi_k$$

$$\Pi_{k-1} \lambda_A - \Pi_k \lambda_A - \Pi_k k \lambda_S + \Pi_{k+1} k \lambda_S = 0$$

$$-\Pi_k \lambda_A + \Pi_{k+1} k \lambda_S = 0$$

$$\Pi_{k+1} = \Pi_k \frac{\lambda_A}{k \lambda_S} = \frac{1}{k} r \Pi_k = \frac{r}{k} \Pi_k = \frac{r}{k} \cdot \frac{1}{k!} r^k \Pi_0$$

→ dla kolejnych składowych

$$\Pi_{k+2} = \frac{r}{k} \Pi_{k+1} = \frac{r}{k} \cdot \frac{r}{k} \cdot \frac{1}{k!} r^k \Pi_0 = \left(\frac{r}{k}\right)^2 \cdot \frac{r^k}{k!} \Pi_0$$

⋮

$$\Pi_{k+j} = \frac{r}{k} \Pi_{k+j-1} = \left(\frac{r}{k}\right)^j \cdot \frac{r^k}{k!} \Pi_0$$

⋮

System kolejkowy M/M/k – stan stacjonarny

Normalizacja $\sum_i \Pi_i = 1$

$$\sum_i \Pi_i = \Pi_0 + \Pi_1 + \dots + \Pi_{k-1} + \Pi_k + \Pi_{k+1} + \Pi_{k+2} + \dots =$$

$$= \Pi_0 + \Pi_0 r + \frac{1}{2} \Pi_0 r^2 + \frac{1}{6} \Pi_0 r^3 + \dots + \frac{1}{(k-1)!} \Pi_0 r^{k-1} + \frac{1}{k!} \Pi_0 r^k + \frac{r}{k} \frac{1}{k!} r^k \Pi_0 + \left(\frac{r}{k}\right)^2 \frac{1}{k!} r^k \Pi_0 + \dots =$$

$$= \Pi_0 \left(1 + r + \frac{1}{2} r^2 + \frac{1}{6} r^3 + \dots + \frac{1}{(k-1)!} r^{k-1} + \frac{1}{k!} r^k + \frac{r}{k} \frac{1}{k!} r^k + \left(\frac{r}{k}\right)^2 \frac{1}{k!} r^k + \dots \right) =$$

$$= \Pi_0 \left(\sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{r^i}{i!} \right) + \frac{1}{k!} r^k \left(1 + \frac{r}{k} + \left(\frac{r}{k}\right)^2 + \dots \right) \right) = \Pi_0 \left(\sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{r^i}{i!} \right) + \frac{1}{k!} r^k \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{r}{k} \right)^i}_{\text{ciąg geom.}} \right) \quad \text{dla } r < k$$

$$= \Pi_0 \left(\sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{r^i}{i!} \right) + \frac{1}{k!} r^k \frac{1}{1 - \frac{r}{k}} \right)$$

$$\rightarrow \Pi_0 \left(\sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{r^i}{i!} \right) + \frac{1}{k!} r^k \frac{1}{1 - \frac{r}{k}} \right) = 1 \rightarrow \Pi_0 = \left(\sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{r^i}{i!} \right) + \frac{1}{k!} r^k \frac{1}{1 - \frac{r}{k}} \right)^{-1}$$

System kolejkowy M/M/k – stan stacjonarny

Łącznie

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{dla } i = 0: \quad \Pi_i = \left(\sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{r^i}{i!} \right) + \frac{1}{k!} r^k \frac{1}{1-\frac{r}{k}} \right)^{-1} \equiv (\alpha + \beta)^{-1} \\ \text{dla } i \leq k: \quad \Pi_i = \frac{1}{i!} r^i \Pi_0 \\ \text{dla } i > k: \quad \Pi_i = \left(\frac{r}{k} \right)^{i-k} \frac{1}{k!} r^k \Pi_0 = r^i \left(\frac{1}{k} \right)^{i-k} \frac{1}{k!} \Pi_0 = \frac{r^i}{k!} k^k \left(\frac{1}{k} \right)^i \Pi_0 = \frac{1}{k!} \left(\frac{r}{k} \right)^i k^k \Pi_0 \equiv \frac{1}{k!} \rho^i k^k \Pi_0 \end{array} \right.$$

Przykład: (jak dla M/M/1) ale M/M/3

Syt: Zwiększamy liczbę przychodzących zadań do 10 zadań/min, $\mu_S = 10\text{s} = 1/6$ min.

$\rightarrow \lambda_A = 10\text{min}^{-1}$, $\lambda_S = \mu_S^{-1} = 6\text{ min}^{-1} \rightarrow r = 10/6 = 1.67$ ($r < 3$ OK)

■ Jaki procent wiadomości nie będzie stał w kolejce?

$$P(W = 0) = P(X < 3) = \Pi_0 + \Pi_1 + \Pi_2 = 0.17 + 0.29 + 0.24 = 0.70$$

System kolejkowy M/M/k – stan stacjonarny

$$\rho = \frac{r}{k} \quad \alpha = \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{r^i}{i!} \right) \quad \beta = \frac{1}{k!} r^k \frac{1}{1-\frac{r}{k}}$$

- Z wyrażen na M/M/k znajdziemy współrzędną Π_0

Dla k=1

$$\rho = r \quad \alpha = \sum_{i=0}^0 \frac{r^i}{i!} = \frac{r^0}{0!} = 1 \quad \beta = \frac{1}{k!} r^k \frac{1}{1-\frac{r}{k}} = \frac{1}{1!} r^1 \frac{1}{1-\frac{r}{1}} = \frac{r}{1-r} \rightarrow \Pi_0 = \frac{1}{\alpha + \beta} = \frac{1}{1 + \frac{r}{1-r}} = 1 - r$$

Dla k=2

$$\rho = \frac{r}{2} \quad \alpha = \sum_{i=0}^1 \frac{r^i}{i!} = \frac{r^0}{0!} + \frac{r^1}{1!} = 1 + r = 1 + 2\rho \quad \beta = \frac{1}{k!} r^k \frac{1}{1-\frac{r}{k}} = \frac{1}{2!} r^2 \frac{1}{1-\frac{r}{2}} = \frac{r^2}{2(1-\rho)} = \frac{4\rho^2}{2(1-\rho)} = \frac{2\rho^2}{1-\rho}$$

$$\rightarrow \Pi_0 = \frac{1}{\alpha + \beta} = \frac{1}{1 + 2\rho + \frac{2\rho^2}{1-\rho}} = \frac{1-\rho}{1-\rho + 2\rho - 2\rho^2 + 2\rho^2} = \frac{1-\rho}{1+\rho}$$

- Prawdopodobieństwo, że nowe zadanie musi czekać w kolejce

$$P(W \neq 0) = P(X \geq k) = \sum_{i=k}^{\infty} \Pi_i = \sum_{i=k}^{\infty} \frac{1}{k!} \rho^i k^k \Pi_0 = \frac{1}{k!} k^k \Pi_0 \sum_{i=k}^{\infty} \rho^i = \frac{1}{k!} k^k \Pi_0 \frac{\rho^k}{1-\rho} = \frac{(k\rho)^k}{k!(1-\rho)} \Pi_0$$

Dla k=1

$$P(W \neq 0) = \frac{(k\rho)^k}{k!(1-\rho)} \Pi_0 = \frac{(1r)^1}{1!(1-r)} (1-r) = r$$

Dla k=2

$$P(W \neq 0) = \frac{(k\rho)^k}{k!(1-\rho)} \Pi_0 = \frac{(2\rho)^2}{2!(1-\rho)} \cdot \frac{1-\rho}{1+\rho} = \frac{2\rho^2}{1+\rho}$$

System kolejkowy M/M/k – stan stacjonarny

$$\rho = \frac{r}{k} \quad \Pi_0^{(k=1)} = 1 - r \quad \Pi_0^{(k=2)} = \frac{1 - \rho}{1 + \rho}$$

- Średnia liczba zadań czekających w kolejce

$$\begin{aligned} E(X_W) &= \sum_{i=k}^{\infty} (i-k) \Pi_i = \sum_{i=k}^{\infty} (i-k) \frac{1}{k!} \rho^i k^k \Pi_0 = \sum_{i=k}^{\infty} (i-k) \frac{1}{k!} \rho^i k^k \Pi_0 \cdot \underbrace{\rho^k \rho^{-k} \frac{1-\rho}{1-\rho}}_{1 \cdot 1} = \\ &= \underbrace{\frac{k^k \rho^k}{k!(1-\rho)}}_{P(W \neq 0)} \Pi_0 \sum_{i=k}^{\infty} (i-k) \rho^{i-k} (1-\rho) = P(W \neq 0)(1-\rho) \sum_{i=k}^{\infty} (i-k) \rho^{i-k} = \left| \begin{array}{l} \text{podstawiam} \\ j \equiv i-k \end{array} \right| = \\ &= P(W \neq 0)(1-\rho) \sum_{j=0}^{\infty} j \rho^j = P(W \neq 0)(1-\rho) \frac{\rho}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho}{1-\rho} P(W \neq 0) \end{aligned}$$

Dla k=1

$$E(X_W) = \frac{\rho}{1-\rho} P(W \neq 0) = \frac{r}{1-r} r = \frac{r^2}{1-r}$$

Dla k=2

$$E(X_W) = \frac{\rho}{1-\rho} P(W \neq 0) = \frac{\rho}{1-\rho} \cdot \frac{2\rho^2}{1+\rho} = \frac{2\rho^3}{1-\rho^2} = \frac{2\left(\frac{r}{2}\right)^3}{1-\left(\frac{r}{2}\right)^2} = \frac{\frac{r^3}{4}}{\frac{4-r^2}{4}} = \frac{r^3}{4-r^2}$$

System kolejkowy M/M/k – stan stacjonarny

$$\rho = \frac{r}{k} \rightarrow \rho k = r = \frac{\lambda_A}{\lambda_S} \rightarrow \lambda_A = \rho k \lambda_S$$

- Średni czas spędzony w kolejce (korzystamy z prawa Little'a)

$$\begin{aligned} E(W) &= \frac{1}{\lambda_A} E(X_W) = \frac{1}{\lambda_A} \cdot \frac{\rho}{1-\rho} P(W \neq 0) = \frac{1}{\rho k \lambda_S} \cdot \frac{\rho}{1-\rho} P(W \neq 0) = \frac{1}{k \lambda_S (1-\rho)} P(W \neq 0) = \\ &= \frac{1}{k \lambda_S - k \lambda_S \rho} P(W \neq 0) = \frac{1}{k \lambda_S - \lambda_A} P(W \neq 0) \end{aligned}$$

Dla $k=1$

$$E(W) = \frac{1}{k \lambda_S - \lambda_A} P(W \neq 0) = \frac{1}{\lambda_S - \lambda_A} r = \frac{\lambda_A}{\lambda_S (\lambda_S - \lambda_A)}$$

Dla $k=2$

$$E(W) = \frac{1}{k \lambda_S - \lambda_A} P(W \neq 0) = \frac{1}{2 \lambda_S - \lambda_A} \frac{2 \rho^2}{1+\rho} = \frac{1}{2 \lambda_S - 2 \rho \lambda_S} \frac{2 \rho^2}{1+\rho} = \frac{1}{2 \lambda_S (1-\rho)} \frac{2 \rho^2}{1+\rho} = \frac{\rho^2}{\lambda_S (1-\rho^2)}$$

- Średni całkowity czas spędzony w systemie

$$E(R) = E(W) + E(S) = \frac{1}{k \lambda_S (1-\rho)} P(W \neq 0) + \frac{1}{\lambda_S} = \frac{1}{\lambda_S} \left(\frac{1}{k(1-\rho)} P(W \neq 0) + 1 \right)$$

Dla $k=1$

$$E(R) = \frac{1}{\lambda_S} \left(\frac{1}{k(1-\rho)} P(W \neq 0) + 1 \right) = \frac{1}{\lambda_S} \left(\frac{1}{1(1-r)} r + 1 \right) = \frac{1}{\lambda_S} \cdot \frac{r+1-r}{1-r} = \frac{1}{\lambda_S} \cdot \frac{1}{1-r}$$

Dla $k=2$

$$E(R) = \frac{1}{\lambda_S} \left(\frac{1}{k(1-\rho)} P(W \neq 0) + 1 \right) = \frac{1}{\lambda_S} \left(\frac{1}{2(1-\rho)} \cdot \frac{2 \rho^2}{1+\rho} + 1 \right)$$

System kolejkowy M/M/k – stan stacjonarny

$$\rho = \frac{r}{k} \rightarrow \rho k = r = \frac{\lambda_A}{\lambda_S} \rightarrow \lambda_A = \rho k \lambda_S$$

- Średnia liczba zadań w systemie (korzystamy z prawa Little'a)

$$E(X) = \lambda_A E(R) = \frac{\lambda_A}{\lambda_S} \left(\frac{1}{k(1-\rho)} P(W \neq 0) + 1 \right) = k\rho \left(\frac{1}{k(1-\rho)} P(W \neq 0) + \frac{k}{k} \right) = \frac{\rho}{1-\rho} P(W \neq 0) + k\rho$$

Dla $k=1$

$$E(X) = \frac{\rho}{1-\rho} P(W \neq 0) + k\rho = \frac{r}{1-r} \cdot r + r = \frac{r^2 + r - r^2}{1-r} = \frac{r}{1-r}$$

Dla $k=2$

$$E(X) = \frac{\rho}{1-\rho} P(W \neq 0) + k\rho = \frac{\rho}{1-\rho} \cdot \frac{2\rho^2}{1+\rho} + 2\rho = \frac{2\rho^3 + 2\rho(1-\rho^2)}{1-\rho^2} = \frac{2\rho}{1-\rho^2}$$

- Rozkład czasu oczekiwania w kolejce

Zał: nowe zadanie zastaje X zadań w systemie

Dla $X > k$ system wygląda jak M/M/1 z λ_A oraz $k\lambda_S \rightarrow r \rightarrow \frac{\lambda_A}{k\lambda_S} = \frac{r}{k} = \rho$

W' – czas oczekiwania w takim systemie M/M/1

X' – liczba zadań w takim systemie M/M/1

$$P(W = 0) = 1 - P(W \neq 0)$$

$$\begin{aligned} P(W > t) &= P(W > t \mid X \geq k) \cdot P(X \geq k) = P(W > t \mid X \geq k) \cdot P(W \neq 0) = \\ &= P(W' > t \mid X' \geq 1) \cdot P(W \neq 0) = \rho e^{-k\lambda_S t(1-\rho)} \cdot P(W \neq 0) \end{aligned}$$

System kolejkowy M/M/k – przykład

Syt: Mamy do wyboru zakup jednej szybkiej drukarki ($2\lambda_S$) lub dwóch wolniejszych (λ_S).

- Szybka drukarka \rightarrow M/M/1

$$E(R)^{(M/M/1)} = \frac{1}{\lambda_S(1-r)} \rightarrow E(R)^{(M/M/1)} = \frac{1}{2\lambda_S(1-\frac{\lambda_A}{2\lambda_S})}$$

- Dwie wolne drukarki \rightarrow M/M/2

$$\rho = \frac{r}{2} = \frac{\lambda_A}{2\lambda_S}$$

$$E(R)^{(M/M/2)} = \frac{1}{\lambda_S(1-\rho^2)} = \frac{1}{\lambda_S(1-\rho)(1+\rho)} = \frac{1}{\lambda_S(1-\frac{\lambda_A}{2\lambda_S})(1+\frac{\lambda_A}{2\lambda_S})} \cdot \frac{2}{2} = E(R)^{(M/M/1)} \cdot \frac{2}{1+\frac{\lambda_A}{2\lambda_S}} = E(R)^{(M/M/1)} \cdot \frac{4\lambda_S}{2\lambda_S+\lambda_A}$$

- Porównując

$$E(R)^{(M/M/1)} > E(R)^{(M/M/2)}$$

$$E(R)^{(M/M/1)} > E(R)^{(M/M/1)} \cdot \frac{4\lambda_S}{2\lambda_S+\lambda_A}$$

$$1 > \frac{4\lambda_S}{2\lambda_S+\lambda_A}$$

$$2\lambda_S + \lambda_A > 4\lambda_S$$

$$\lambda_A > 2\lambda_S$$

System kolejkowy M/M/ ∞

∞ wiele serwerów \rightarrow nie ma kolejki $\rightarrow X_W=0, X=X_S, W=0, R=S$

$n=\min\{i,k\} \rightarrow n=i$

Macierz przejścia (w Δ)

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} 1-p_A & p_A & 0 & 0 & 0 & \dots \\ p_S & 1-p_A-p_S & p_A & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 2p_S & 1-p_A-2p_S & p_A & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 3p_S & 1-p_A-3p_S & p_A & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 4p_S & 1-p_A-4p_S & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Wykorzystamy wyrażenia z M/M/k i zbadamy granicę $k \rightarrow \infty$

$$\begin{cases} \text{dla } i=0: & \lim_{k \rightarrow \infty} \Pi_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{r^i}{i!} \right) + \frac{1}{k!} r^k \frac{1}{1-\frac{r}{k}} \right)^{-1} = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{r^i}{i!} \right) + 0 \right)^{-1} = (e^r)^{-1} = e^{-r} \\ \text{dla } i>0: & \lim_{k \rightarrow \infty} \Pi_i = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{i!} r^i \Pi_0 = \frac{1}{i!} r^i \lim_{k \rightarrow \infty} \Pi_0 = \frac{1}{i!} r^i e^{-r} \end{cases}$$

a to jest rozkład Poissona o parametrze $r=\lambda_A/\lambda_S$

$\rightarrow E(X)=r \quad \text{var}(X)=r$

System kolejkowy M/M/∞ - przykład

Duży serwer obsługujący wszystkich chętnych klientów

→ równoważny ∞ wielu serwerom. Zał: $\mu_A=3$ min, $\mu_S=60$ min

$$\rightarrow \lambda_A = \frac{1}{3} \text{ min}^{-1} \quad \lambda_S = \frac{1}{60} \text{ min}^{-1} \quad \rightarrow \quad r = \frac{\lambda_A}{\lambda_S} = \frac{1}{3} \cdot \frac{60}{1} = 20$$

$$\rightarrow \Pi_0 = e^{-20} = 2.06 \cdot 10^{-9} \approx 0$$

czyli w system praktycznie nigdy nie jest pusty.

Zwykle w systemie jest $E(X)=r=20$ użytkowników $\sigma(X) = \sqrt{r} = \sqrt{20} \approx 4.47$

Dla tak dużego r rozkład Poissona można (po uciągnięciu) przybliżyć rozkładem normalnym → korzystając z reguły 3σ :

Przez 99.7% czasu na serwerze jest od $20-3\sigma=6.58$ do $20+3\sigma=33.42$ użytkowników.

Inne systemy kolejowe

System kolejkowy M/G/1

Niech σ_S to odchylenie standardowe czasu obsługi

$$E(X) = r + \frac{r^2 + \lambda_A^2 \sigma_S^2}{2(1-r)} \quad \text{wzór Pollaczka-Chinczyna}$$

$$E(R) = \frac{\lambda_A(\sigma_S^2 + \mu_S^2)}{2(1-r)} + \frac{1}{\lambda_S}$$

Spr: Dla rozkładu wykładniczego $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ $\text{var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

Zatem

$$E(X) = r + \frac{r^2 + \lambda_A^2 \sigma_S^2}{2(1-r)} \rightarrow E(X) = r + \frac{r^2 + \lambda_A^2 \frac{1}{\lambda_S^2}}{2(1-r)} = r + \frac{r^2 + r^2}{2(1-r)} = \frac{2r - 2r^2 + 2r^2}{2(1-r)} = \frac{r}{1-r} \equiv E(X)^{M/M/1}$$

$$\begin{aligned} E(R) &= \frac{\lambda_A(\sigma_S^2 + \mu_S^2)}{2(1-r)} + \frac{1}{\lambda_S} \rightarrow E(R) = \frac{\lambda_A\left(\frac{1}{\lambda_S^2} + \mu_S^2\right)}{2(1-r)} + \frac{1}{\lambda_S} = \frac{\lambda_A(\mu_S^2 + \mu_S^2)}{2(1-r)} + \frac{1}{\lambda_S} = \frac{2\lambda_A}{\lambda_S^2 2(1-r)} + \frac{1}{\lambda_S} = \frac{\lambda_A + \lambda_S(1-r)}{\lambda_S^2(1-r)} = \\ &= \frac{\lambda_A + \lambda_S - \lambda_S r}{\lambda_S^2(1-r)} = \frac{\lambda_A + \lambda_S - \lambda_A}{\lambda_S^2(1-r)} = \frac{1}{\lambda_S(1-r)} \equiv E(R)^{M/M/1} \end{aligned}$$

System kolejkowy M/D/1

Ustalmy stały czas obsługi μ_s

→ wtedy odchylenie standardowe czasu obsługi $\sigma_s = 0$

$$E(X) = r + \frac{r^2 + \lambda_A^2 \sigma_s^2}{2(1-r)} \rightarrow E(X)^{M/D/1} = r + \frac{r^2 + \lambda_A^2 \cdot 0}{2(1-r)} = r + \frac{r^2}{2(1-r)}$$

$$E(R) = \frac{\lambda_A(\sigma_s^2 + \mu_s^2)}{2(1-r)} + \frac{1}{\lambda_s} \rightarrow E(R)^{M/D/1} = \frac{\lambda_A(0 + \mu_s^2)}{2(1-r)} + \frac{1}{\lambda_s} = \frac{\lambda_A \mu_s^2}{2(1-r)} + \frac{1}{\lambda_s} = \frac{r}{2\lambda_s(1-r)} + \frac{1}{\lambda_s}$$

$$E(X_w)^{M/D/1} = \frac{r^2}{2(1-r)} \quad (\text{K.L.Murunaganantha Prasud et al. DOI:10.9790/5728-11121315})$$

$$E(W)^{M/D/1} = \frac{r}{2\lambda_s(1-r)}$$

Porównując z wynikami dla systemu M/M/1

$$E(X)^{M/M/1} = \frac{r}{1-r} \quad E(R)^{M/M/1} = \frac{\mu_s}{1-r} = \frac{1}{\lambda_s(1-r)} \quad E(X_w)^{M/M/1} = \frac{r^2}{1-r} \quad E(W)^{M/M/1} = \frac{\mu_s r}{1-r} = \frac{r}{\lambda_s(1-r)}$$

	M/M/1 $\lambda_A = 5 \text{ min}^{-1}$ $\mu_s = 10 \text{ s}$	M/D/1 $\lambda_A = 5 \text{ min}^{-1}$ $\mu_s = 10 \text{ s}$	M/M/1 $\lambda_A = 5.5 \text{ min}^{-1}$ $\mu_s = 10 \text{ s}$	M/D/1 $\lambda_A = 5.5 \text{ min}^{-1}$ $\mu_s = 10 \text{ s}$
E(X)	5	35/12	11	5.96
E(X _w)	50/12	25/12	10.08	5.04
E(W)	5/6 min	5/12	110 s	55 s
E(R)	1 min	7/12	120 s	65 s

System kolejkowy M/M/1-PS (współdzielenie procesora)

- Wprowadzamy OC, każde zadanie dostaje podczas OC $1/n$ czasu, gdzie n to aktualna liczba zadań w systemie. Czyli $\lambda_S \rightarrow \lambda_S/n$
- Zadania wchodzą od razu do wykonania, co przypomina M/M/ ∞ (tylko zadania wykonują się dłużej)

■ Ale:

Prawdopodobieństwo ukończenia pojedynczego zadania w OC: λ_S/n

Prawdopodobieństwo ukończenia jakiegokolwiek zadania w OC: $n \cdot \lambda_S/n = \lambda_S$

→ globalnie system możemy opisać parametrami λ_A i λ_S (jak M/M/1)

$$E(X)^{M/M/1-PS} = \frac{r}{1-r} \quad E(R)^{M/M/1-PS} = \frac{1}{\lambda_S(1-r)} \quad \Pi_n^{M/M/1-PS} = (1-r)r^n$$

- dla systemów z dużą wariancją czasów wykonywania współdzielenie procesora jest korzystne (daje mniejsze $E(R)$), jednak gdy wariancja czasów wykonania jest mała stan system M/M/1 może być lepszy.

System kolejkowy M/M/1-PS - przykład

- Czas spędzany w systemie przez zadanie jest proporcjonalny do wymagań zadania
- R_k – czas przebywania w systemie zadania k , zał: jest proporcjonalny do jego wymagań (np. długości pliku) l_k

$$R_k \sim l_k \equiv c \cdot l_k \rightarrow E(R_k) = E(c \cdot l_k) = cE(l_k) = c\mu_S = \frac{c}{\lambda_S}$$

ale

$$E(R_k) = E(R) = \frac{1}{\lambda_S(1-r)} \rightarrow c = \frac{1}{1-r}$$

- Przekaznik, działający w systemie typu PS, obsługuje max. $2.5 \cdot 10^9$ b/s, średnia długość pakietów to 1250 B = 10 000 b. $\lambda_A = 200\,000$ pakiet/s
 $\rightarrow \lambda_S = 2.5 \cdot 10^9 \text{ b/s} / 10\,000 \text{ b} = 250\,000 \text{ pakiet/s}$
 $\rightarrow r = 200\,000 \text{ pakiet/s} / 250\,000 \text{ pakiet/s} = 0.8$

Średnie opóźnienie średniego pakietu (z prawa Little'a) $\rightarrow E(X) = \frac{r}{1-r} = \frac{0.8}{1-0.8} = 4$

$$E(R) = \frac{1}{\lambda_A} E(X) = \frac{4}{200\,000} \text{ s} = 20 \mu\text{s}$$

Średnie opóźnienie pakietu o długości 10000 B (8 razy większego niż średnia)

$$R_0 = \frac{10000 \cdot 8 [b]}{2500\,000\,000 [b/s]} = 32 \mu\text{s} \rightarrow E(R | l_k) = \frac{1}{\lambda_S(1-r)} = \frac{\mu_S}{1-r} = \frac{32 [\mu\text{s}]}{1-0.8} = 160 \mu\text{s}$$

\rightarrow opóźnienie 8 razy większe niż przeciętnie

System kolejkowy M/G/∞

Dla ∞ wielu serwerów sposób obsługi jest nieistotny, liczy się tylko średni czas obsługi

→ stan stacjonarny jak w M/M/∞ i dany rozkładem Poissona

Inne

- nieskończona liczba źródeł

Modele Erlanga – klient rezygnuje gdy serwery są zajęte (model Erlanga A ze stratami zgłoszeń) M/G/k/k (lub M/G/k/0), model Erlanga B – część klientów próbuje ponownie,

- Modele z dużymi fluktuacjami zgłoszeń i potencjalnie dużymi stratami
- S źródeł

Model Engseta M/G/k/k/S (lub M/G/k/0/S) – w telekomunikacji połączenie z jednego źródła wyłącza kolejne źródło

$$\text{dla } 0 \leq i \leq k: \quad \Pi_i = \frac{\binom{S}{i} r^i}{\sum_{j=0}^k \binom{S}{j} r^j}$$

Procesy stochastyczne a Page Rank

Sieć www jako proces stochastyczny: każda strona to stan, chodząc pomiędzy stronami zmieniamy stan.

Zał: wybór każdego z linków jest równoprawdopodobny

$$P_{i,j} = \begin{cases} \frac{1}{n_i} & \text{gdy strona } i \text{ linkuje do strony } j; \quad n_i - \text{liczba linków na stronie } i \\ 0 & \text{gdy strona } i \text{ nie linkuje do strony } j \text{ lub } i = j \end{cases}$$

Stan stacjonarny:

$$(\Pi_1 \quad \Pi_2 \quad \Pi_3 \quad \dots) \begin{pmatrix} 0 & p_{1,2} & p_{1,3} & \dots \\ p_{2,1} & 0 & p_{2,3} & \dots \\ p_{3,1} & p_{3,2} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = (\Pi_1 \quad \Pi_2 \quad \Pi_3 \quad \dots)$$

$$\begin{cases} \Pi_2 p_{2,1} + \Pi_3 p_{3,1} + \dots = \Pi_1 \\ \Pi_1 p_{1,2} + \Pi_3 p_{3,2} + \dots = \Pi_2 \\ \text{itd} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \Pi_1 = \sum_{j_1} \Pi_{j_1} p_{j_1,1} = \sum_{j_1} \Pi_{j_1} \frac{1}{n_{j_1}} \\ \Pi_2 = \sum_{j_2} \Pi_{j_2} p_{j_2,2} = \sum_{j_2} \Pi_{j_2} \frac{1}{n_{j_2}} \\ \text{itd} \end{cases}$$

Sumy po stronach linkujących do strony 1, strony 2, itd

Procesy stochastyczne a Page Rank

Dygresja: Jak zdefiniować ważność strony ?

Próba 1: Ważność strony k to liczba linków do niej prowadzących: x_k
... ale chcemy aby ważne strony znaczyły więcej

Próba 2: x_k to suma x_i gdy strona i linkuje do k
... ale mamy linków

Próba 3: umniejszamy znaczenie stron z dużą ilością linków: $x_k = \sum_i \frac{x_i}{n_i}$ ← suma po stronach linkujących do strony k

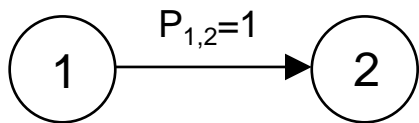
Powyższa definicja odpowiada wynikowi dla stanu stacjonarnego.

Zatem ważność strony możemy obliczać jak odpowiedni stan stacjonarny.

Procesy stochastyczne a Page Rank

Czy istnieje stan stacjonarny macierzy przejścia opisującej Internet?

Przykład:



$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

zał: $P_0 = (1, 0)$

$$P_1 = P_0 P = (1 \ 0) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (0 \ 1)$$

$$P_2 = P_1 P = (0 \ 1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (0 \ 0)$$

$$P_3 = P_2 P = (0 \ 0) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (0 \ 0)$$

czyli $\Pi = (0, 0)$ – co jest złe ?

Procesy stochastyczne a Page Rank

Zmieniamy macierz przejścia: $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(czynniki $1/N$ wyraża losowy wybór strony)

$$P_1 = P_0 P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = P_1 P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$P_3 = P_2 P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

$$P_4 = P_3 P = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{5}{8} \end{pmatrix}$$

\vdots

$$P_\infty = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$\text{Spr: } \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Procesy stochastyczne a Page Rank

Prawdziwy Internet opiszemy $P = \alpha P_{rzeczywiste, norm} + (1 - \alpha) \frac{1}{N} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots \\ 1 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$

- normalizacja prowadzi do macierzy stochastycznej mającej stan stacjonarny
- dla $\alpha=1$ P opisuje rzeczywisty Internet
- dla $\alpha=0$ wszystkie strony równoważne $p_{i,j}=1/N$

L.Page i S.Brin: $\alpha=0.85$ (Page Rank)

- Szukanie stanu stacjonarnego to szukanie wektora własnego do wartości własnej $\lambda_1=1$, ... ale duży rozmiar macierzy
- Dla $N=80 \cdot 10^6$ potrzeba około 50 iteracji
Zbieżność zależy od λ_2 : $\lambda_2=0.3$ kilka iteracji, $\lambda_2=0.7$ kilkanaście iteracji
- Prawdziwe λ_2 jest (bardzo) bliskie 1 \rightarrow potrzeba dużo iteracji
- Dla rzeczywistego Internetu przy $N=25 \cdot 10^9$ potrzeba było blisko 100 iteracji (kilka dni obliczeń) \rightarrow podział sieci na części, metody numeryczne (macierz rzadka, macierz jedynek).

Obecnie prawdopodobieństwa przejść szacowane są na podstawie gromadzonych danych. Algorytm (zastrzeżony) uwzględnia również inne czynniki.

Ukryte modele Markowa (Markov Hidden Models)

Ukryte łańcuchy Markowa

Do tej pory znaliśmy macierz przejścia i na jej podstawie wyznaczaliśmy charakterystyki procesu. Znaliśmy także możliwe stany i obserwowaliśmy, które występują.

Teraz nie obserwujemy stanów bezpośrednio, ale ich funkcje losowe.

Zastosowania:

- rozpoznawanie mowy gestów
- odszumianie sygnału (tel. komórkowa)
- szukanie sekwencji zasad odsiewając mutacje

Możliwe pytania:

- z jakiego stanu pochodzą obserwowane wyniki (cała realizacja, lub dla danego czasu)
- z jakim prawdopodobieństwem wyniki pochodzą z konkretnego modelu
- jak z obserwacji estymować parametry modelu (np. prawdopodobieństwa przejść)

Ukryte łańcuchy Markowa

Zał: Nie obserwujemy stanu X_t ale jego funkcję losową $Y=Y(X_t)$ (zał: o skończonym zbiorze wartości).

→ mamy drugi proces Y_t : Y_0, Y_1, Y_2, \dots

X_t nazywamy stanem ukrytym, X – procesem ukrytym

Y_t nazywamy stanem obserwowanym, Y - procesem obserwowanym

Zał: X_t jest procesem Markowa oraz Y_t jest funkcją losową tylko X_t , X_{t-1} i Y_{t-1} ;
wtedy proces podwójny $A_t=(X_t, Y_t)$ jest też procesem Markowa (zależą od A_{t-1})

Def: $A_t=(X_t, Y_t)$ jest częściowo obserwowanym procesem (modelem, łańcuchem (czas i stany dyskretne)) jeżeli prawdopodobieństwo przejścia nie zależy od Y_{t-1} czyli

$$P(A_t | A_{t-1}) = P(A_t | X_{t-1}) \quad \equiv \quad P(X_t, Y_t | X_{t-1}, Y_{t-1}) = P(X_t, Y_t | X_{t-1})$$

Dalej zakładamy

$$P(X_t, Y_t | X_{t-1}) = P(X_t | X_{t-1}) \cdot P(Y_t | X_t)$$

czyli zwykle przejścia w procesie ukrytym X , a następnie X przechodzi w obserwowany Y .
(np. sygnał X z szumem E daje w wyniku sygnał Y)

Notacja „parametry modelu”

Prawdopodobieństwo stanu początkowego $X_0=i$ oraz obserwacji $Y_0=k$

$$\alpha_0(i, k) := P(X_0 = i, Y_0 = k)$$

Element macierzy przejścia dla procesu X : $X_{t-1}=i \rightarrow X_t=j$ przy obserwacji $Y_t=k$

$$C(i; j, k) := P(X_t = j, Y_t = k \mid X_{t-1} = i)$$

Wektor zbudowany ze prawdopodobieństw stanów początkowych X_0 i obserwacji $Y_0=k$

$$\vec{\alpha}_0(k) := (\alpha_0(0, k), \alpha_0(1, k), \alpha_0(2, k), \dots)$$

Macierz przejścia $\hat{C}(k)$ w stanach X (z $X_{t-1}=i$ do $X_t=j$) przy ustalonej obserwacji $Y_t=k$

$$\left[\hat{C}(k) \right]_{i \rightarrow j} := C(i; j, k)$$

Zatem mamy:

$$\sum_k \vec{\alpha}_0(k) = P_0 \quad \text{stan początkowy procesu } X$$

$$\sum_k \hat{C}(k) = P \quad \text{macierz przejścia w procesie } X$$

$$\vec{\theta} := (\vec{\alpha}_0(k), \hat{C}(k)) - \text{parametry modelu}$$

Notacja „parametry modelu” - przykład

Zał: X_t – stany ukryte (binarne: 0 lub 1)

E_t – szum (przekłamanie) (binarne)

Y_t – stany obserwowane (binarne)

Zał: błędy ($E_t=1$) pojawiają się z prawdopodobieństwem ε

$$X_t \oplus E_t = Y_t \quad P(Y_t)$$

$$1 \oplus 0 = 1 \quad 1 - \varepsilon$$

$$1 \oplus 1 = 0 \quad \varepsilon$$

$$0 \oplus 0 = 0 \quad 1 - \varepsilon$$

$$0 \oplus 1 = 1 \quad \varepsilon$$

wtedy np.

$$C(0;1,0) = p_{0 \rightarrow 1} \cdot \varepsilon$$

$$C(0;1,1) = p_{0 \rightarrow 1} \cdot (1 - \varepsilon)$$

$$\sum_{k=\{0,1\}} C(0;1,k) = p_{0 \rightarrow 1} \cdot \varepsilon + p_{0 \rightarrow 1} \cdot (1 - \varepsilon) = p_{0 \rightarrow 1}$$

Znając $p_{i \rightarrow j}$, ε , P_0 (parametry modelu) znamy macierze $\hat{C}(k)$ i mamy pełną informację o modelu.

Model BSC (binary symmetric channel) –
popętnienie błędu nie
zależy od wartości X_t

Inny spotykany model:
Model Gilberta-Elliota –
błędy pojawiają się
seriami

Przypadek znanych parametrów modelu

- Prawdopodobieństwo pojawienia się określonej sekwencji $\vec{Y} = (Y_0, Y_1, \dots, Y_T)$ przy ustalonych parametrach $\vec{\theta} := (\vec{\alpha}_0, \vec{C})$:

$$P(Y_0, Y_1, \dots, Y_T \mid \vec{\theta})$$

a to jest funkcja największej wiarygodności $L_{\vec{Y}}(\vec{\theta}) \equiv P(\vec{Y} \mid \vec{\theta})$

- Funkcję tę obliczymy jako

$$L_{\vec{Y}}(\vec{\theta}) = \sum_{X_0, X_1, \dots, X_T} \alpha_0(X_0, Y_0) \cdot C(X_0; X_1, Y_1) \cdot C(X_1; X_2, Y_2) \cdot \dots \cdot C(X_{T-1}; X_T, Y_T)$$

- wyrażenie pod sumą to prawdopodobieństwo konkretnej realizacji procesu X przy obserwowanych stanach procesu Y

$$\alpha_0(i, k) = P(X_0 = i, Y_0 = k)$$

$$C(i; j, k) = P(X_t = j, Y_t = k \mid X_{t-1} = i)$$

- sumujemy po wszystkich możliwych wartościach nieobserwowanych stanów X_t

- Obliczanie numeryczne $L_{\vec{Y}}(\vec{\theta})$ wprost z powyższej definicji jest bardzo czasochłonne (T sumowań iloczynów T+1 liczb)

→ istnieją algorytmy przyspieszające takie obliczenia

Algorytm rekursji do przodu

- Algorytm rekursji do przodu (forward recursion algorithm) :

$$\vec{\alpha}_0(k) := (\alpha_0(0, k), \alpha_0(1, k), \alpha_0(2, k), \dots)_M$$

$$\left[\hat{C}(k) \right]_{i \rightarrow j} := C(i; j, k) \quad \left[\hat{C}(Y_t) \right]_{M \times M}$$

- wtedy

$$L_{\bar{Y}}(\vec{\theta}) = \vec{\alpha}_0(Y_0) \left(\prod_{t=1}^T \hat{C}(Y_t) \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$L_{\bar{Y}}(\vec{\theta}) = \left[\left[\left[\vec{\alpha}_0(Y_0) \hat{C}(Y_1) \right] \hat{C}(Y_2) \right] \dots \hat{C}(Y_T) \right] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

- Obliczanie numeryczne wymaga T mnożeń wektora M-elementowego przez macierz MxM

Algorytm rekursji do przodu

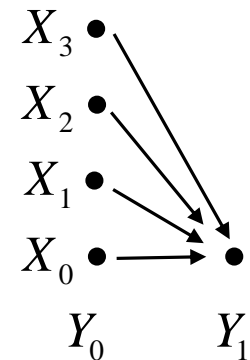
- gdzie tu zysk ?

Ozn: $X_1 \equiv (X_{t=0} = 1)$ $Y_0 \equiv (Y_{t=0} = Y_0)$

$$\vec{\alpha}_0(Y_0) = (P(X_0, Y_0), P(X_1, Y_0), P(X_2, Y_0), \dots, P(X_{M-1}, Y_0))$$

$$\hat{C}(Y_1) = \begin{pmatrix} P_{(X_0, Y_0 \rightarrow X_0, Y_1)} & P_{(X_0, Y_0 \rightarrow X_1, Y_1)} & \dots \\ P_{(X_1, Y_0 \rightarrow X_0, Y_1)} & P_{(X_1, Y_0 \rightarrow X_1, Y_1)} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad \leftarrow Y_0 \text{ nie jest potrzebne w definicji, a jest dodane tylko dla jasności}$$

$$\begin{aligned} \vec{\alpha}_0(Y_0) \hat{C}(Y_1) &= (P(X_0, Y_0) P_{(X_0, Y_0 \rightarrow X_0, Y_1)} + P(X_1, Y_0) P_{(X_1, Y_0 \rightarrow X_0, Y_1)} + \dots, \\ &P(X_0, Y_0) P_{(X_0, Y_0 \rightarrow X_1, Y_1)} + P(X_1, Y_0) P_{(X_1, Y_0 \rightarrow X_1, Y_1)} + \dots, \dots) = \\ &= (P(X_0, Y_1), P(X_1, Y_1), \dots) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \vec{\alpha}_0(Y_0) \hat{C}(Y_1) \hat{C}(Y_2) &= (P(X_0, Y_1), P(X_1, Y_1), \dots) \hat{C}(Y_2) = \\ &= (P(X_0, Y_1) P_{(X_0, Y_1 \rightarrow X_0, Y_2)} + P(X_1, Y_1) P_{(X_1, Y_1 \rightarrow X_0, Y_2)} + \dots, \end{aligned}$$

$$P(X_0, Y_1) P_{(X_0, Y_1 \rightarrow X_1, Y_2)} + P(X_1, Y_1) P_{(X_1, Y_1 \rightarrow X_1, Y_2)} + \dots, \dots) = (P(X_0, Y_2), P(X_1, Y_2), \dots)$$

czyli nie powtarzamy sumowania dla ścieżek, które różnią się np. jednym stanem pośrednim

Algorytm rekursji do tyłu

- Algorytm rekursji do tyłu (backward recursion algorithm) :

$$L_{\vec{y}}(\vec{\theta}) = \vec{\alpha}_0(Y_0) \left[\hat{C}(Y_1) \dots \left[\hat{C}(Y_{T-1}) \left[\hat{C}(Y_T) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \right] \right]$$

ale musimy znać kompletny wektor stanów obserwowanych

- Można połączyć oba algorytmy → forward-backward recursion algorithm
zanim napłyną kompletne dane możemy wystartować algorytm do przodu

Szukanie parametrów modelu

- Mając $L_{\vec{y}}(\vec{\theta})$ szukamy dla jakich $\vec{\theta}$ osiąga ona maksimum i tak możemy znaleźć estymatory parametrów modelu. Zwykle jest to złożony problem numeryczny (szukanie maksimum funkcji w wielowymiarowej przestrzeni parametrów). Jest to zwykła metoda największej wiarygodności.

Estymacja sekwencji stanów ukrytych

Syt: znamy parametry $\vec{\theta}$ oraz obserwacje $\vec{Y} = (Y_0, Y_1, \dots, Y_T)$

Szukamy $\vec{X} = (X_0, X_1, \dots, X_T)$

- Nie ma optymalnego estymatora stanów ukrytych
- Często używany jest estymator MAP (maximum a posteriori probability) :

$$\vec{X}^* \equiv \arg \max_{\vec{X}} \pi(\vec{X} | \vec{Y}) \quad \text{gdzie} \quad \pi(\vec{X} | \vec{Y}) = \frac{P(\vec{X}, \vec{Y})}{P(\vec{Y})}$$

$$\rightarrow \vec{X}^* = \arg \max_{\vec{X}} P(\vec{X}, \vec{Y})$$

czyli estymatorem jest sekwencja stanów $\vec{X}^* = (X_0^*, X_1^*, \dots, X_T^*)$ dająca największe prawdopodobieństwo **ciągu** obserwacji $\vec{Y} = (Y_0, Y_1, \dots, Y_T)$

- Obliczanie \vec{X}^*

$$\text{Def: } \tilde{\alpha}_t(j, \vec{y}_0^t) \equiv \max_{x_0^{t-1}} P[X_0^{t-1} = x_0^{t-1}, X_t = j, \vec{Y}_0^t = \vec{y}_0^t] = \dots$$

$$(y_0, y_1, \dots, y_t) \overset{\parallel}{\underset{(x_0, x_1, \dots, x_t)}{=}} (Y_0, Y_1, \dots, Y_t)$$

$$\dots \equiv \max P(X_0 = x_0, Y_0 = y_0, X_1 = x_1, Y_1 = y_1, \dots, X_{t-1} = x_{t-1}, Y_{t-1} = y_{t-1}, X_t = j, Y_t = y_t)$$

(dla $1 \leq t \leq T$)

Estymacja sekwencji stanów ukrytych

Takie $\tilde{\alpha}_t(j, \vec{y}_0^t) \equiv \max P[X_0^{t-1} = x_0^{t-1}, X_t = j, \vec{Y}_0^t = \vec{y}_0^t]$

spełnia zależność rekurencyjną

$$\tilde{\alpha}_0(i, y_0) \equiv \alpha_0(i, y_0) \equiv P[X_0 = i, Y_0 = y_0] \quad (\text{dla } t = 0)$$

$$\tilde{\alpha}_t(j, \vec{y}_0^t) = \max_i \{ \tilde{\alpha}_{t-1}(i, \vec{y}_0^{t-1}) \cdot C(i; j, y_t) \} \quad \text{dla } 1 \leq t \leq T$$

Jest to właśnie sekwencja maksymalizująca prawdopodobieństwo (czyli szukane X^*) dla ścieżki kończącej się w $X_t=j$ przy obserwowanych stanach y_0, \dots, y_t .

Każdorazowo maksimum szukamy wśród M ścieżek ($j=0, 1, \dots, M-1$) spośród których wybieramy tę z największą $\tilde{\alpha}_t(j, \vec{y}_0^t)$.

Różnica z szukaniem funkcji największej wiarygodności leży w tym, że tam liczyliśmy sumę po ścieżkach, a tutaj wybieramy ścieżkę dającą największe prawdopodobieństwo.

Można też, korzystając z $\max_x \log f(x) = \log \max_x f(x)$ szukać

$$\alpha_t(j, y_0^t) \equiv \log \tilde{\alpha}_t(j, y_0^t)$$

$$\alpha_t(j, y_0^t) = \max_i \{ \alpha_{t-1}(i, y_0^{t-1}) + d(i; j, y_t) \}$$

$$d(i; j, y_t) \equiv \log C(i; j, y_t) \equiv \log P[X_t = j, Y_t = y_t \mid X_{t-1} = i]$$

$$\alpha_0(j, y_0) = \log(\alpha_0(j, y_0))$$

$$d(i; j, y_0) = 0$$

Algorytm Viterbiego

$$\alpha_t(j, y_0^t) \equiv \log \tilde{\alpha}_t(j, y_0^t)$$

$$\alpha_t(j, y_0^t) = \max_i \{ \alpha_{t-1}(i, y_0^{t-1}) + d(i; j, y_t) \}$$

$$d(i; j, y_t) \equiv \log C(i; j, y_t) \equiv \log P[X_t = j, Y_t = y_t \mid X_{t-1} = i]$$

- 1) Oblicz lub załóż $\alpha_0(j, y_0) = \log(\alpha_0(j, y_0))$ lub, jeśli znamy stan początkowy

$$\alpha_0(j, y_0) = \begin{cases} \log(1) = 0 & j = x_0 \\ \log(0) = -\infty & j \neq x_0 \end{cases} \quad (\text{zamiast } \infty \text{ podstawiamy dużą liczbę ujemną})$$

- 2) Oblicz rekurencyjnie

$$\alpha_t(j, y_0^t) = \max_i \{ \alpha_{t-1}(i, y_0^{t-1}) + d(i; j, y_t) \}$$

dla każdego j zapamiętaj z którego stanu $X_{t-1} (=i)$ pochodzi maksimum. Będzie to nasz potencjalny estymator

$$X_{t-1}^*(j) = \arg \max_i [\alpha_{t-1}(i, y_{t-1}) + d(i; j, y_t)]$$

- 3) Postępuj tak aż do znalezienia $X_T^*(j)$
4) Wybierz j dające maksymalne $X_T^*(j)$ i przyjmij je za końcowy estymator X_T^*
5) Rekurencyjnie cofaj się, za kolejne estymatory przyjmując zapamiętane $\arg \max$

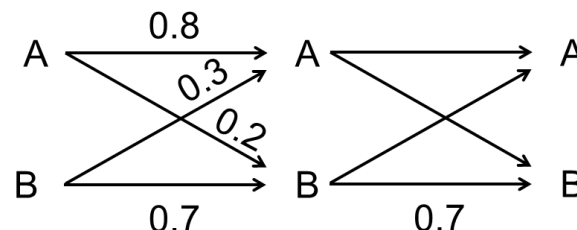
Tak znaleziona ścieżka maksymalizuje również $P(\vec{Y} \mid \vec{X})$

Algorytm Viterbiego – przykład (bez logarytmowania)

Proces o dwóch stanach ukrytych {A,B}, dwóch stanach jawnych {a,b} i macierzy błędów E prowadzącej ze stanów ukrytych do jawnych

$$P = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{matrix} A \\ B \end{matrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{matrix} a \\ b \end{matrix}$$



Założmy nieznany (ukryty) stan początkowy, czyli wektor stanu przyjmiemy jako $P_0^{\{A,B\}} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

■ Obserwujemy: $\begin{matrix} t=0 & t=1 & t=2 \\ a & a & b \end{matrix}$

Obliczamy:

$$\alpha_0(A, a) \equiv P(X_0 = A, Y_0 = a) = P_0^{\{A,B\}}(A)P(a | A) = \frac{1}{2} \cdot 0.8 = \frac{8}{20}$$

$$\alpha_0(B, a) = P(X_0 = B, Y_0 = a) = P_0^{\{A,B\}}(B)P(a | B) = \frac{1}{2} \cdot 0.3 = \frac{3}{20}$$

$$\alpha_1(A, a) = \max_i [\alpha_0(i, a) \cdot C(i; A, a)] = \max[\alpha_0(A, a) \cdot C(A; A, a), \alpha_0(B, a) \cdot C(B; A, a)] =$$

$$= \max[\alpha_0(A, a) \cdot P_{AA} \cdot E_{Aa}, \alpha_0(B, a) \cdot P_{BA} \cdot E_{Aa}] = \max[\frac{8}{20} \cdot \frac{8}{10} \cdot \frac{8}{10}, \frac{3}{20} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{8}{10}] = \frac{8^3}{2000} \rightarrow X_1^*(A) = A$$

bo to jest
argmax

Algorytm Viterbiego – przykład (bez logarytmowania)

Proces o dwóch stanach ukrytych {A,B}, dwóch stanach jawnych {a,b} i macierzy błędów E prowadzącej ze stanów ukrytych do jawnych

$$P = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} \quad E = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{matrix} A \\ B \end{matrix}$$

t=0 t=1 t=2

$$P_0^{\{A,B\}} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\alpha_0(A, a) = \frac{8}{20}$$

$$\alpha_0(B, a) = \frac{3}{20}$$

$$\alpha_1(A, a) = \frac{8^3}{2000} \quad X_1^*(A) = A$$

Obserwujemy: a a b

$$\alpha_1(B, a) = \max_i [\alpha_0(i, a) \cdot C(i; B, a)] = \max[\alpha_0(A, a) \cdot C(A; B, a), \alpha_0(B, a) \cdot C(B; B, a)] =$$

$$= \max[\alpha_0(A, a) \cdot P_{AB} \cdot E_{Ba}, \alpha_0(B, a) \cdot P_{BB} \cdot E_{BA}] = \max\left[\frac{8}{20} \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{3}{10}, \frac{3}{20} \cdot \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{10}\right] =$$

$$= \max\left[\frac{48}{2000}, \frac{63}{2000}\right] = \frac{63}{2000} \rightarrow X_1^*(B) = B$$

$$\alpha_2(A, b) = \max[\alpha_1(A, a) \cdot C(A; A, b), \alpha_1(B, a) \cdot C(B; A, b)] =$$

$$= \max[\alpha_1(A, a) \cdot P_{AA} \cdot E_{Ab}, \alpha_1(B, a) \cdot P_{BA} \cdot E_{Ab}] = \max\left[\frac{8^3}{2000} \cdot \frac{8}{10} \cdot \frac{2}{10}, \frac{63}{2000} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{10}\right] =$$

$$= \frac{8^3}{2000} \cdot \frac{8}{10} \cdot \frac{2}{10} = \frac{8^4}{10^5} = \frac{4096}{10^5} \rightarrow X_2^*(A) = A$$

Algorytm Viterbiego –przykład (bez logarytmowania)

Proces o dwóch stanach ukrytych {A,B}, dwóch stanach jawnych {a,b} i macierzy błędów E prowadzącej ze stanów ukrytych do jawnych

$$P = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} \quad \begin{matrix} t=0 \\ t=1 \\ t=2 \end{matrix}$$

Obserwujemy: a a b

$$E = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{matrix} a \\ b \end{matrix}$$

$$P_0^{\{A,B\}} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\alpha_0(A, a) = \frac{8}{20}$$

$$\alpha_0(B, a) = \frac{3}{20}$$

$$\alpha_1(A, a) = \frac{8^3}{2000} \quad X_1^*(A) = A$$

$$\alpha_1(B, a) = \frac{63}{2000} \quad X_1^*(B) = B$$

$$\alpha_2(A, b) = \frac{4096}{10^5} \quad X_2^*(A) = A$$

$$\alpha_2(B, b) = \max[\alpha_1(A, a) \cdot C(A; B, b), \alpha_1(B, a) \cdot C(B; B, b)] =$$

$$= \max\left[\frac{8^3}{2000} \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{7}{10}, \frac{63}{2000} \cdot \frac{7}{10} \cdot \frac{7}{10}\right] = \max\left[\frac{7168}{2 \cdot 10^5}, \frac{3087}{2 \cdot 10^5}\right] = \frac{7168}{2 \cdot 10^5} = \frac{3584}{2 \cdot 10^5} \rightarrow X_2^*(B) = A$$

- Odtwarzamy końcowe estymatory stanów ukrytych:

Ponieważ

$$\alpha_2(A, b) = \frac{4096}{10^5} > \frac{3584}{10^5} = \alpha_2(B, b) \quad \text{przyjmujemy} \quad X_2^* = A$$

$$X_1^* = X_2^*(A) = A$$

$$X_0^* = X_1^*(A) = A$$

Zatem estymowana sekwencja to {A,A,A} (przy obserwacji {a,a,b}).

Algorytm Viterbiego –przykład (bez logarytmowania)

Dokładamy nową obserwację dla $t=3$: $Y_3=b$

$$P = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} \quad E = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \quad P_0^{\{A,B\}} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\alpha_0(A, a) = \frac{8}{20}$$

$$\alpha_0(B, a) = \frac{3}{20}$$

Obserwujemy: $\begin{matrix} t=0 & t=1 & t=2 & t=3 \\ a & a & b & b \end{matrix}$

$$\alpha_1(A, a) = \frac{8^3}{2000} \quad X_1^*(A) = A$$

$$\alpha_1(B, a) = \frac{6^3}{2000} \quad X_1^*(B) = B$$

$$\alpha_2(A, b) = \frac{4096}{10^5} \quad X_2^*(A) = A$$

$$\alpha_2(B, b) = \frac{3584}{2 \cdot 10^5} \quad X_2^*(B) = A$$

$$\alpha_3(A, b) = \max[\alpha_2(A, b) \cdot C(A; A, b), \alpha_2(B, b) \cdot C(B; A, b)] = \\ = \max\left[\frac{4096}{10^5} \cdot \frac{8}{10} \cdot \frac{2}{10}, \frac{3584}{10^5} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{10}\right] = \frac{4096 \cdot 16}{10^7} = \frac{65536}{10^7} \rightarrow X_3^*(A) = A$$

$$\alpha_3(B, b) = \max[\alpha_2(A, b) \cdot C(A; B, b), \alpha_2(B, b) \cdot C(B; B, b)] = \\ = \max\left[\frac{4096}{10^5} \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{7}{10}, \frac{3584}{10^5} \cdot \frac{7}{10} \cdot \frac{7}{10}\right] = \max\left[\frac{57344}{10^7}, \frac{175616}{10^7}\right] = \frac{175616}{10^7} \rightarrow X_3^*(B) = B$$

- Odtwarzamy końcowe estymatory stanów ukrytych:

Ponieważ

$$\alpha_3(A, b) = \frac{65536}{10^7} < \frac{175616}{10^7} = \alpha_3(B, b) \text{ przyjmujemy}$$

$$X_3^* = B \rightarrow X_2^* = B \rightarrow X_1^* = A \rightarrow X_0^* = A$$

Zatem estymowana sekwencja to $\{A, A, B, B\}$ (przy obserwacji $\{a, a, b, b\}$).

Algorytm Viterbiego –przykład (bez logarytmowania)

Dokładamy nową obserwację dla $t=4$: $Y_4=a$

$$P = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} \quad E = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \quad P_0^{\{A,B\}} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$t=0$ $t=1$ $t=2$ $t=3$ $t=4$
 Obserwujemy: a a b b a

$$\alpha_4(A, a) = \max[\alpha_3(A, b) \cdot C(A; A, a), \alpha_3(B, b) \cdot C(B; A, a)] =$$

$$= \max\left[\frac{65536}{10^7} \cdot \frac{8}{10} \cdot \frac{8}{10}, \frac{175616}{10^7} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{8}{10}\right] = \max\left[\frac{4194304}{10^9}, \frac{4214784}{10^9}\right] = \frac{4214784}{10^9}$$

$$\rightarrow X_4^*(A) = B$$

$$\alpha_4(B, a) = \max[\alpha_3(A, b) \cdot C(A; B, a), \alpha_3(B, b) \cdot C(B; B, a)] =$$

$$= \max\left[\frac{65536}{10^7} \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{3}{10}, \frac{175616}{10^7} \cdot \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{10}\right] = \max\left[\frac{393216}{10^9}, \frac{3687936}{10^9}\right] = \frac{3687936}{10^9}$$

$$\rightarrow X_4^*(B) = B$$

■ Odtwarzamy końcowe estymatory stanów ukrytych:

Ponieważ $\alpha_4(A, a) = \frac{4214784}{10^9} > \frac{3687936}{10^9} = \alpha_4(B, a)$ przyjmujemy

$$X_4^* = A \rightarrow X_3^* = B \rightarrow X_2^* = B \rightarrow X_1^* = A \rightarrow X_0^* = A$$

Zatem estymowana sekwencja to $\{A, A, B, B, A\}$ (przy obserwacji $\{a, a, b, b, a\}$).

$$\alpha_0(A, a) = \frac{8}{20}$$

$$\alpha_0(B, a) = \frac{3}{20}$$

$$\alpha_1(A, a) = \frac{8^3}{2000} \quad X_1^*(A) = A$$

$$\alpha_1(B, a) = \frac{63}{2000} \quad X_1^*(B) = B$$

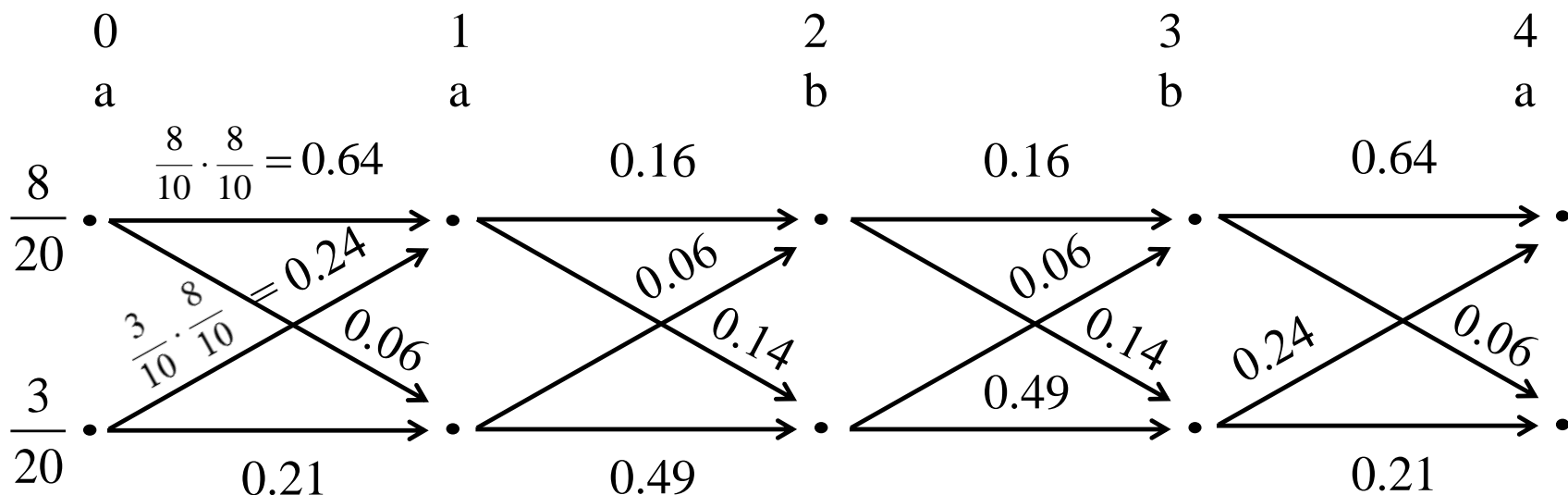
$$\alpha_2(A, b) = \frac{4096}{10^5} \quad X_2^*(A) = A$$

$$\alpha_2(B, b) = \frac{3584}{2 \cdot 10^5} \quad X_2^*(B) = A$$

$$\alpha_3(A, b) = \frac{65536}{10^7} \quad X_3^*(A) = A$$

$$\alpha_3(B, b) = \frac{175616}{10^7} \quad X_3^*(B) = B$$

Algorytm Viterbiego – przykład (bez logarytmowania)



Sprawdzamy pojedyncze ścieżki:

- wynik algorytmu $=0.4$

$$P(A A B B A) = \frac{8}{20} \cdot 0.64 \cdot 0.14 \cdot 0.49 \cdot 0.24 = \frac{4214784}{10^9} \approx 0.00421$$
- początkowa sekwencja AAA

$$P(A A A B A) = 0.4 \cdot 0.64 \cdot 0.16 \cdot 0.14 \cdot 0.24 = \frac{1376256}{10^9} \approx 0.00138$$
- największe prawdopodobieństwa z każdego węzła

$$P(A A A A A) = 0.4 \cdot 0.64 \cdot 0.16 \cdot 0.16 \cdot 0.64 = \frac{4194304}{10^9} \approx 0.00419$$