# metody statystyczne

wykład 6

1 XII 2024

kacper.topolnicki@uj.edu.pl

# Funkcja generująca (w skrócie)

$$G(z, t) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{p_n(t)}_{} z^n$$

$z$ — pewna liczba

$p_n(t)$ — prawdopodobieństwo $n$ sukcesów w czasie $t$

$$\boxed{\frac{d p_n(t)}{dt} = \lambda p_{n-1}(t) - \lambda p_n(t) \quad \ldots}$$

$$\frac{\partial G(z,t)}{\partial t} = \lambda (z-1) G(z,t)$$

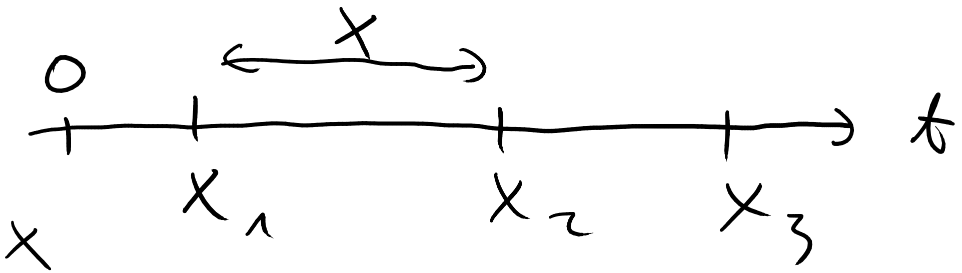
$$\frac{\partial G(z,t)}{\partial t} = \lambda (z-1)\, G(z,t)$$

$$G(z,t) = e^{\lambda (z-1) t} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda n}}_{p_n(t)} z^n$$

"inter arrival time" $T$ $\qquad E[T] \stackrel{?}{=} \frac{1}{\lambda}$

$t = 0$ nie ma zliczeń




$$P(X_1 > x) = p_0(x) = \underbrace{e^{-\lambda x}}$$

$t = X_1$

$$P(\text{brak zliczeń w czasie } (X_1, X_1 + x)) = e^{-\lambda x}$$

$$f(x) = \frac{d}{dx}\left(1 - e^{-\lambda x}\right) = \underbrace{\lambda e^{-\lambda x}}$$

$$E(X) = \int_0^\infty dx\, x\, f(x) = \int_0^\infty dx\, x\, \lambda e^{-\lambda x} = \frac{1}{\lambda}$$

# procesy kolejkowe (Kobayashi ...)

$\boxed{\text{prawo Littlea}}$

"system"

serwer komputerowy

uniwersytetu

"klient"

zlecenie

student

$\overline{L}$ ← średnia l. klientów w systemie

$\lambda$ ← l. nowych klientów / jednostce czasu

$\overline{W}$ ← średni okres czasu, który klient spędza w systemie

$$\overline{L} = \lambda \overline{W}$$

$$\overline{L} = \lambda \overline{W}$$

$w_j \leftarrow$ czas spędzony w systemie przez klienta $j$

$A(t) \leftarrow$ liczba nowych pojawień w czasie $(0, t]$

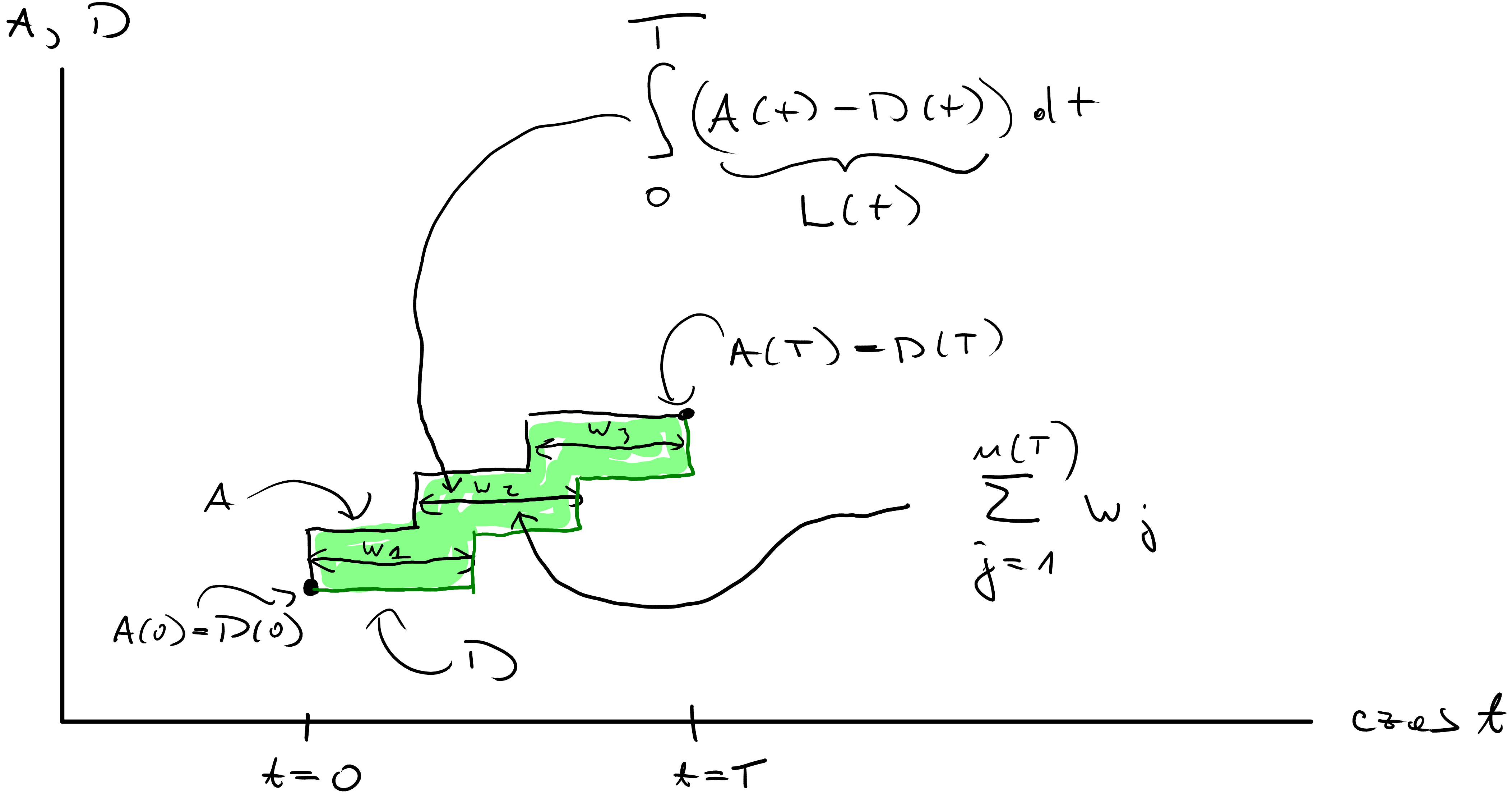
$D(t) \leftarrow$ liczba opuszczeń systemu w czasie $(0, t]$

$$A(0) = D(0)$$
$$A(T) = D(T)$$

$$n(T) = A(T) - A(0)$$

l. nowych klientów w czasie $(0, T]$

$$\lambda(T) = \frac{n(T)}{T}$$


A, D
$\int_0^T \underbrace{(A(t) - D(t))}_{L(t)}\,dt$
A(T) = D(T)
A
$w_1$
$w_2$
$w_3$
$\sum_{j=1}^{n(T)} w_j$
A(0) = D(0)
D
t = 0
t = T
czas t

$$\int_0^T \underbrace{L(t)}_{A(t)-D(t)}\,dt = \sum_{j=1}^{n(T)} w_j$$

$$\bar{L}(T) = \frac{\int_0^T L(t)\,dt}{T} = \frac{\sum_{j=1}^{n(T)} w_j}{T} = \underbrace{\frac{n(T)}{T}}_{=\lambda} \cdot \underbrace{\frac{\sum_{j=1}^{n(T)} w_j}{n(T)}}_{=\bar{w}}$$

$$\Big\downarrow\, t \to \infty$$

$$\boxed{\bar{L} = \lambda \cdot \bar{w}}$$

# notacja Kendalla

rodzaj obsługi klienta
np. PQ

sposób obsługi klientów

pojemność kolejki

A / S / M / C / N / D

liczba źródeł klientów

liczba serwerów

zadania przychodzące

A:

M — czasy pojawień klientów
 - rozkład od wykł.

G — przypadek ogólny

D — deterministyczny

...

S:

M — ...

G — ...

D — ...

# M / M / 1

pr. Poisson

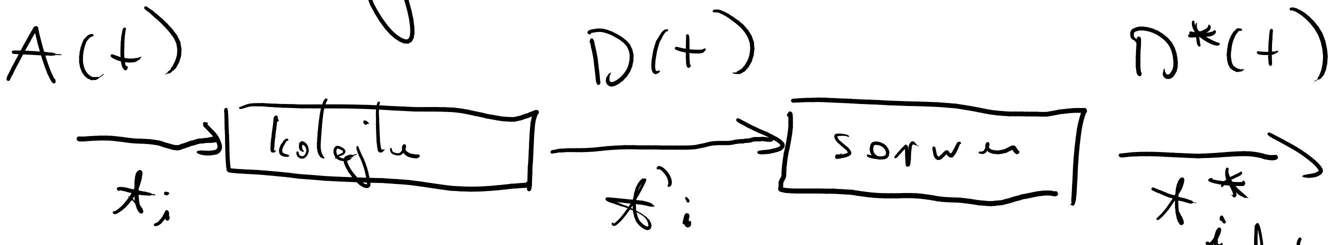
pojedynczy serwer

pr. Poisson

- klienci napływają w tempie $\lambda$

  czasy pomiędzy klientami $\sim \lambda e^{-\lambda t}$

- czas obsługi klienta $\sim \mu e^{-\mu t}$




BD $\rightarrow A(t) - D^*(t)$ — l. klientów w systemie

nie BD $\rightarrow A(t) - D(t)$ — liczba klientów w kolejce

# procesy Birth-Death (BD)

losowy proces $N(t) = A(t) - D(t)$

motywujemy procesem BD:

$$p_{nm}(h) = P(N(t+h) = n \mid N(t) = m)$$

Intuicyjnie

$$p_{nm}(h) = \begin{cases} \lambda_m h & \text{gdy } n = m+1 \\ \mu_m h & \text{gdy } n = m-1 \\ 1 - (\lambda_m + \mu_m) h & \text{gdy } n = m \\ 0 & \text{pozostałe.} \end{cases}$$

$\lambda_n \leftarrow$ birth rate

$\mu_n \leftarrow$ death rate

$\left.\begin{array}{l}\lambda_n = \lambda \\ \mu_n = \mu\end{array}\right\}$ proces jednorodny

$$p_n(t) \longrightarrow p_n(\underbrace{t+h}_{\text{nieduży czas}})$$

$$p_n(t+h) = p_n(t)(1-\lambda_n h - \mu_n h) + p_{n-1}(t)(\lambda_{n-1} h) + p_{n+1}(t)(\mu_{n+1} h)$$

$$
\begin{cases}
\dfrac{d p_0(t)}{dt} = -\lambda_0 p_0(t) + \mu_1 p_1(t) \\[2ex]
\dfrac{d p_n(t)}{dt} = -(\lambda_n + \mu_n) p_n(t) + \lambda_{n-1} p_{n-1}(t) + \mu_{n+1} p_{n+1}(t)
\end{cases}
$$

$$
\underbrace{(p_0, p_1, p_2, \dots)
\begin{pmatrix}
-\lambda_0 & \lambda_0 & & & \\
\mu_1 & -\lambda_1-\mu_1 & \lambda_1 & & \\
 & \mu_2 & -\lambda_2-\mu_2 & \lambda_2 & \\
 & & \mu_3 & -\lambda_3-\mu_3 & \ddots \\
 & & & \ddots & \ddots
\end{pmatrix}}_{\text{Po pomnożeniu macierzy [illegible]}}
$$

$$P \xrightarrow{t\to\infty} \Pi \quad : \quad \underbrace{\lim_{t\to\infty} \frac{d\,p_n(t)}{dt} = 0}$$

$$\begin{cases} \mu_1 \Pi_1 - \lambda_0 \Pi_0 = 0 \\ \mu_{n+1} \Pi_{n+1} - \lambda_n \Pi_n = \\ \qquad = \mu_n \Pi_n - \lambda_{n-1} \Pi_{n-1} \end{cases}$$

$$\mu_n \Pi_n = \lambda_{n-1} \Pi_{n-1} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

$$\begin{tikzcd}
\pi_0 \arrow[r, bend left, "\lambda_0"] & \pi_1 \arrow[l, bend left, "\mu_1"] \arrow[r, bend left, "\lambda_1"] & \pi_2 \arrow[l, bend left, "\mu_2"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

$$\begin{cases}
\pi_n = \dfrac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} \pi_{n-1} \\[2ex]
\pi_n = \pi_0 \displaystyle\prod_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}
\end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \pi_n = 1 \longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \pi_0 \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} = 1$$

$$\pi_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}} = \frac{1}{G}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} = G$$

M/M/1

$$\lambda_n = \lambda$$

$$\mu_n = \lambda$$

$$\rho$$

$$G = \sum_{n=0}^{\infty} \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda}{\mu} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$$

$$\frac{\lambda}{\mu} > 1 \quad \rho > 1 \qquad \frac{\lambda}{\mu} < 1, \rho < 1$$

$G \in$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

WN

$$\overline{N} = E\left(A(t) - D^*(t)\right) = \frac{\rho}{1-\rho}$$

$$\sigma^2\left(A(t) - D^*(t)\right) = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$$

$$\overline{L} = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

$$\sigma^2(L) = \frac{\rho^2(1+\rho+\rho^2)}{(1-\rho)}$$

Kobayashi

w literaturze na stronie

$M/M/n$ $\quad$ $M/G/n$

$M/M/\infty$ $\quad$ $M/G/\infty$

# ukryte łańcuchy Markowa
# [illegible]