Metody statystyczne

Ćwiczenia numer 1

Vitalii Urbanevych

vitalii.urbanevych@doctoral.uj.edu.pl

October 23, 2020

Literatura

"Numerical recipes"
W.H. Press, S.A. Teukolsky
W.T. Vetterling, B.P. Flannery
Cambrige University Press

Funkcja gęstości prawdowodobieństwa(FGP)

$f_X(x)$ - FGP, $a \leq x \leq b$

X - zmienna losowa

Prawdopodobieństwo znalezienia x w przedziale $x_0 \leq x \leq x_1$

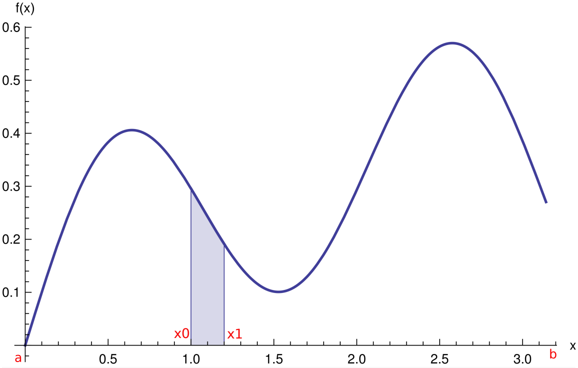
$$P(x_0 \leq x \leq x_1) = \int_{x_0}^{x_1} f_X(x)\,\mathrm{d}x$$

Normalizacja

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f_X(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

Funkcja gęstości prawdowodobieństwa(FGP)

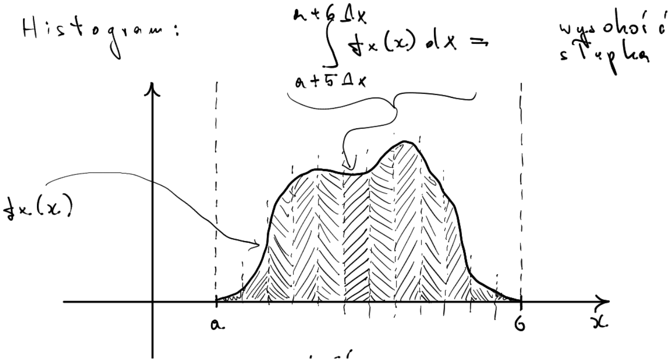
$P(x = x_0)$ nie ma sensu!



Powierzchnia pod linią:

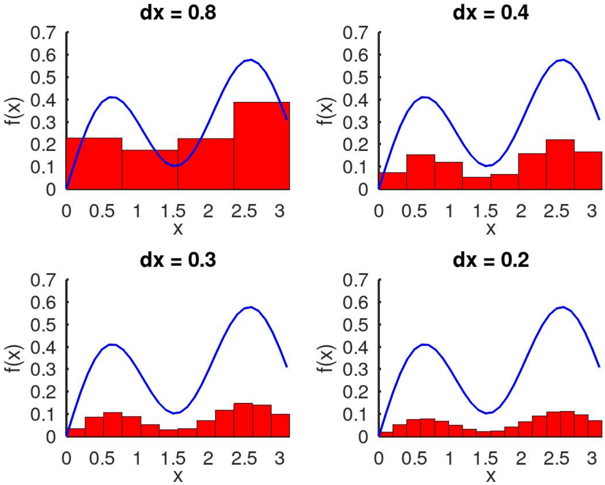
$P(x_0 \leq x \leq x_1) = \int_{x_0}^{x_1} f_X(x)\,\mathrm{d}x$

Histogram

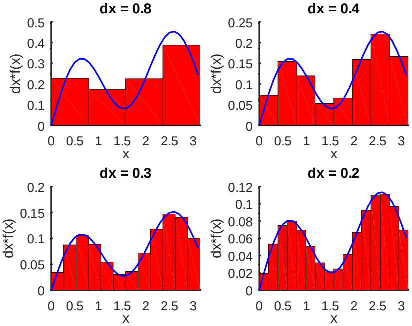


Powierzchnia pod linią = wysokość słupka
Szerokość słupka - Δx

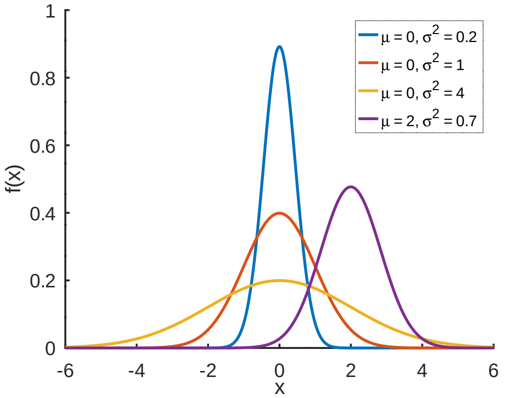
Histogram



Porównując histogram z FGP należy pamiętać o Δx!



Rozkład normalny $N(\mu, \sigma^2)$



$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

μ - wartość średnia;
σ - odchylenia standardowe
(równoważnie: wariancja σ^2)

Box-Muller

x_1, x_2 - losowane z rozkładu jednorodnego na przedziale (0,1)

$$\begin{aligned} y_1 &= \sqrt{-2\ ln(x_1)}cos(2\pi x_2) \\ y_2 &= \sqrt{-2\ ln(x_1)}sin(2\pi x_2) \end{aligned} \Longrightarrow \begin{aligned} x_1 &= exp(-\tfrac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2)) \\ x_2 &= \tfrac{1}{2\pi} atan(\tfrac{y_2}{y_1}) \end{aligned}$$

$$f_Y(y_1, y_2)dy_1 dy_2 = f_X(x_1, x_2) \left| \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(y_1, y_2)} \right| dy_1 dy_2,$$

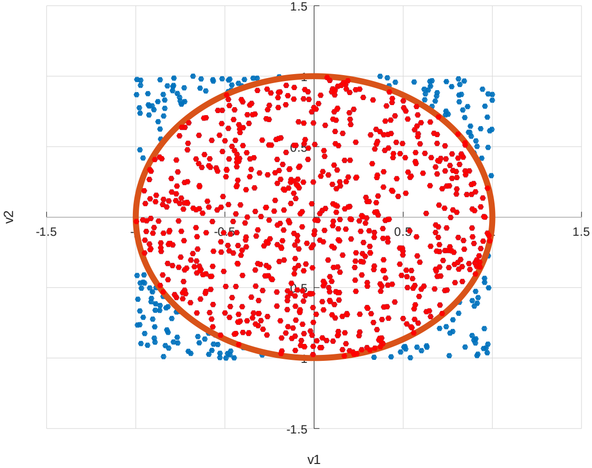
$f_X(x_1, x_2) = 1$ (rozkład jednorodny)

$$\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(y_1, y_2)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} = (-)\frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{y_1^2}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{y_2^2}{2}\right)$$

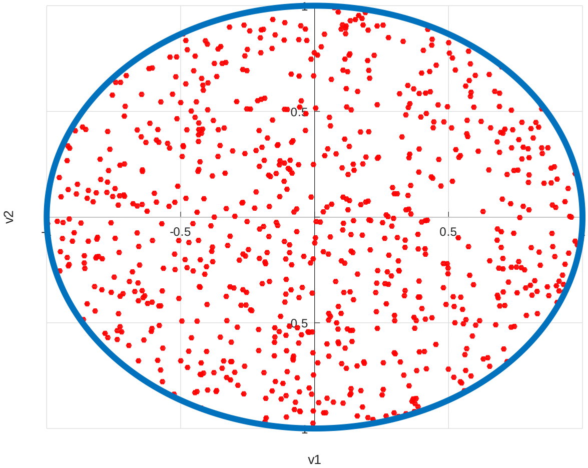
$$f_Y(y_1, y_2)dy_1 dy_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{y_1^2}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{y_2^2}{2}\right) dy_1 dy_2$$

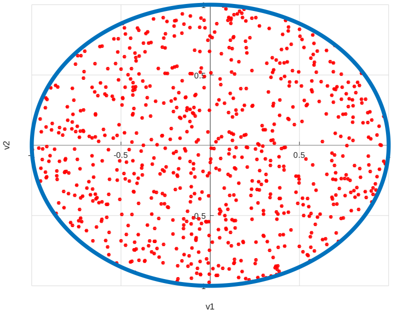
- rozkład normalny dla dwoch niezależnych zmiennych łosowych

v_1, v_2 z rozkładu jednorodnego (-1,1) są najpierw łosowane w okręgu:



chcemy wziąć tylko tę, które są w środku:





Nowe zmienne łosowe:

$R^2 = v_1^2 + v_2^2$ rozkład jednorodny (0,1)

$\theta = arctan(\frac{v_1}{v_2})$ rozkład jednorodny (0,2π)

Sprawdzenie

$$\tau = R^2$$

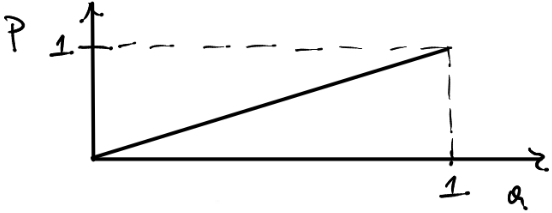
jakie jest prawdopodobieństwo $0 \leq \tau \leq a$?

$$P(0 \leq \tau \leq a) = \frac{\pi a}{\pi 1^2} = a$$

$$F_\tau(a) = P(0 \leq \tau \leq a) = a$$

$$f_\tau(a) = \frac{dF_\tau(a)}{da} = 1$$

- rozkład jednorodny



Polarna metoda

$$\begin{aligned} y_1 &= \sqrt{-2\ ln(x_1)}cos(2\pi x_2) \\ y_2 &= \sqrt{-2\ ln(x_1)}sin(2\pi x_2) \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} y_1 &= \sqrt{-2\ ln(R^2)}\,\overbrace{cos(\theta)}^{v_1/R} \\ y_2 &= \sqrt{-2\ ln(R^2)}\,\underbrace{sin(\theta)}_{v_2/R} \end{aligned} \quad \Rightarrow$$

y_1, y_2 - rozkład normalny

$$\boxed{\begin{aligned} y_1 &= \sqrt{-2\ ln(R^2)}\frac{v_1}{R} \\ y_2 &= \sqrt{-2\ ln(R^2)}\frac{v_2}{R} \end{aligned}}$$

Zmiana zmiennych łosowych

$$y = y(x)$$

x - stara zmienna łosowa;
y - nowa zmienna łosowa;

FGP:

$$|f_X(x)dx| = |f_Y(y)dy|$$

$$f_Y(y) = f_x(x)\left|\frac{dx}{dy}\right|$$

Założymy, że X - z rozkładu jednostajnego:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & x < 0 \text{ or } x > 1 \end{cases} \quad (1)$$

$$f_Y(y) = \left| \frac{dx}{dy} \right|$$

Chcemy dobrać taką $y(x)$, żeby y - była zmianna łosowa z zadanej FGP $f_Y(y)$

Wystarczy rozwiązać:

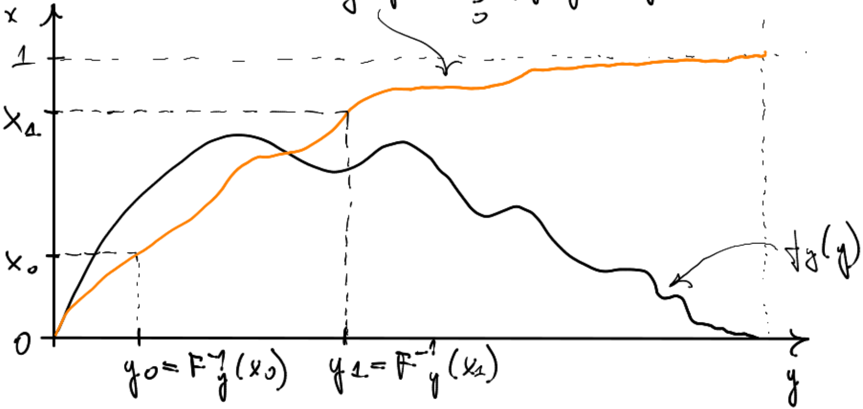
$$\frac{dx}{dy} = f_Y(y), \qquad f_Y(y) \text{ - znana funkcja}$$

$$\int_0^x \mathrm{d}v = \int_{-\infty}^{y(x)} f_Y(u)\,\mathrm{d}u \quad \rightarrow \quad x = F_Y(y)$$

$$\boxed{y = y(x) = F_Y^{-1}(x)} \text{ - Szukana funkcja}$$

Interpretacja geometryczna:

$$F_y(y) = \int_0^y f_y(y)\,dy$$



Problem ruiny gracza

Gracz A	początkowy kapitał a ($a \in \mathbb{Z}$)
Gracz B	początkowy kapitał b ($b \in \mathbb{Z}$)

$$z = a + b$$

A wygrywa 1	prawdopodobieństo p
B wygrywa 1	prawdopodobieństo $q = 1 - p$

Q_i - zdarzenie ruiny A przy kapitale początkowym i

M - zdarzenie wygrana w pierwszej kolejce

$$P(Q_i) = P(Q_i|M)P(M) + P(Q_i|\bar{M})P(\bar{M})$$

$$r_i \equiv P(Q_i)$$

$$P(Q_i|M) = P(Q_{i+1}) = r_{i+1}$$

$$P(Q_i|\bar{M}) = P(Q_{i-1}) = r_{i-1}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} r_i = r_{i+1}p + r_{i-1}q \\ r_0 = 1; \qquad r_z = 0 \end{array}}$$

$$r_i = r_{i+1}p + r_{i-1}q$$

$$r_i(\overbrace{p+q}^{1}) = r_{i+1}p + r_{i-1}q$$

$$q(r_i - r_{i-1}) = p(r_{i+1} - r_i)$$

$$\frac{q}{p} = \frac{p(r_{i+1} - r_i)}{r_i - r_{i-1}}$$

$$\Delta_i \equiv r_i - r_{i-1}$$

$$\Delta_{i+1} = \Delta_i \frac{q}{p}$$

Δ_i - ciąg geometryczny

Ciąg geometryczny

$$\Delta_{i+1} = \Delta_i \frac{q}{p}$$

Suma n czlonków

$$\sum_{n=1}^{n} \Delta_i = S_n = \Delta_1 \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^n}{1 - \frac{q}{p}}$$

$$S_n = \underbrace{\Delta_1}_{r_1 - r_0} + \underbrace{\Delta_2}_{r_2 - r_1} + \underbrace{\Delta_3}_{r_3 - r_2} + \ldots + \underbrace{\Delta_n}_{r_n - r_{n-1}} = r_n - r_0 = r_n - 1$$

$$\begin{cases} S_n = \Delta_1 \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^n}{1-\frac{q}{p}} = r_n - 1 \\ S_z = \Delta_1 \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^z}{1-\frac{q}{p}} = r_z - 1 = -1 \end{cases}$$

$$-(r_n - 1) = \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^n}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^z}$$

$p \neq q \neq 0.5$

$$\boxed{r_n = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^n - \left(\frac{q}{p}\right)^z}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^z}}$$

$$p = q = 0.5 \qquad \rightarrow \qquad \frac{q}{p} = 1$$

$$r_n = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^n - \left(\frac{q}{p}\right)^z}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^z} = \frac{1^n - 1^z}{1 - 1^z} = \frac{0}{0} \tag{2}$$

Reguła de l'Hospitala

Jeżeli $\lim_{x \to a} f(x) \to 0$ i $\lim_{x \to a} g(x) \to 0$ oraz istnieją (skończone) pochodne $f'(a)$ i $g'(a)$, przy czym $g'(a) \neq 0$, to

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$x \equiv \frac{q}{p} \to 1$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^n - x^z}{1 - x^z} = \lim_{x\to 1} \frac{(x^n - x^z)'}{(1 - x^z)'} = \lim_{x\to 1} \frac{nx^{n-1} - zx^{z-1}}{-zx^{z-1}} = \frac{n - z}{-z} = 1 - \frac{n}{z}$$

p=q=0.5

$$\boxed{r_n = 1 - \frac{n}{z}}$$

Jakie prawdopodobieństwo, że gra się zakończy (ktoś przegra)?

r_a^A - prawdopodobieństwo,
że gracz A przegra (def. wyżej)

$$r_b^B \to \begin{matrix} q \to p \\ p \to q \end{matrix}$$

p=q=0.5

$$r_a^A + r_b^B = \left(1 - \frac{a}{a+b}\right) + \left(1 - \frac{b}{a+b}\right) = \frac{b+a}{a+b} = 1$$

Jakie prawdopodobieństwo, że gra się zakończy (ktoś przegra)?

p≠q≠0.5

$$r_b^B = \frac{\left(\frac{p}{q}\right)^b - \left(\frac{p}{q}\right)^z}{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^z} = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^{-b} - \left(\frac{q}{p}\right)^{-z}}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{-z}} = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^{z-b} - 1}{\left(\frac{q}{p}\right)^z - 1} = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^a}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^z}$$

$$r_a^A + r_b^B = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^a - \left(\frac{q}{p}\right)^z}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^z} + \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^a}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^z} = 1$$

Gra się zawsze zakończy

Problem:

A ma ∞ kapital, **B** ma **b**

$P(A_{\text{wygrywa}})$ - ?

p=q=0.5

$$P(A_{\text{wygrywa}}) = P(B_{\text{bankrutuje}}) = \lim_{a\to\infty} r_b^B = \lim_{a\to\infty} \frac{a}{a+b} = 1$$

p≠q≠0.5

$$P(A_{\text{wygrywa}}) = \lim_{a\to\infty} r_b^B = \lim_{a\to\infty} \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^a}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}} = \begin{cases} 1; & q < p \\ \left(\frac{p}{q}\right)^b; & q > p \end{cases}$$

Problem A1

- Implementacja generatoru liczb łosowych z rozkładu normalnego $N(\mu, \sigma^2)$ metodą Polarną
  $\mu = 0$ - wartość oczekiwania;
  $\sigma^2 = 1$ - wariacja;
- Narysowanie histogramu i porównianie ze wzorem analitycznym

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

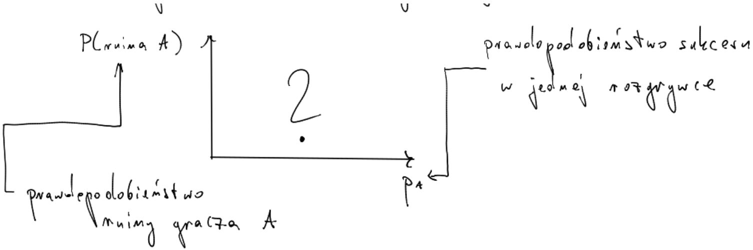
- Obliczyć eksperymentalne znaczenia dla wartości średniej oraz wariancji

Problem A2

- Implementacja generatoru liczb łosowych z rozkładu Cauchy'ego $C(y_0, \gamma)$, metodem odwrócomej dystrybuanty
FGP:
$$f(y) = \frac{1}{\pi\gamma\left[1 + \left(\frac{y-y_0}{\gamma}\right)^2\right]}, \qquad y \in (-\infty, \infty)$$
- Narysowanie histogramu i porównianie ze wzorem analitycznym dla różnych y_0 ta γ
- Obliczyć eksperymentalne znaczenia dla wartości średniej oraz wariancji

Problem B

- Ruina gracza dla 2 graczy A,B



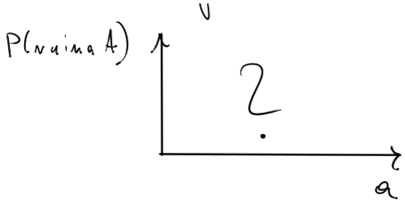
  Kapitały początkowe A,B:

  a = 50; b=50

- Porównanie z wynikiem analitycznym dla różnych a,b

Problem C

- Ruina gracza dla 2 graczy A,B

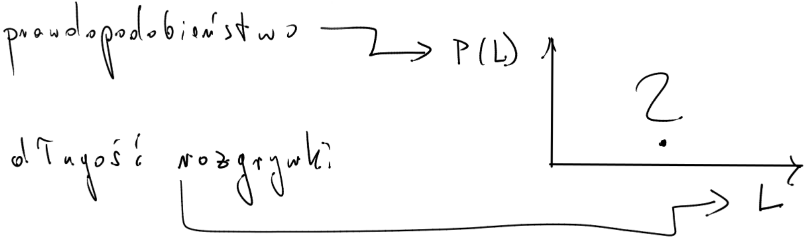


$$a+b=100;$$
$$p_A = \frac{1}{2}$$

- Porównanie wyniku z teorią

Problem D

- Liczba rozgrywek do ukończenia gry - **L**

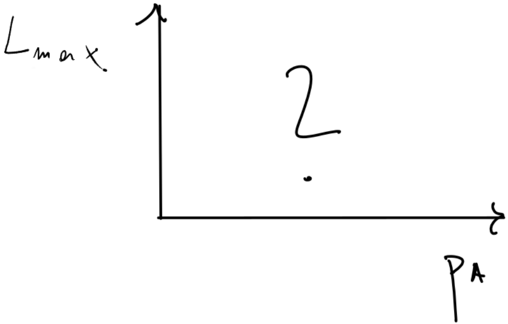


$$p_A = \frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{4}{5}; \qquad a = b = 50; \qquad \text{całkowita liczba gier} = 20000$$

- Wyliczyć średnią długość rozgrywki

Problem E (Nie obowiązkowe)

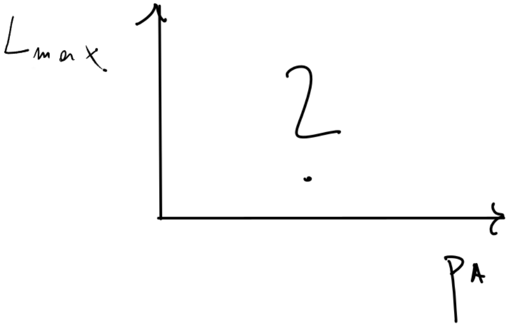
- Rozkład maksymalną długości rozgrywek przy 1000 rozgrywkach - L_{max}



p_A - prawdopodobieństwo wygrania kolejki przez A

Problem E (Nie obowiązkowe)

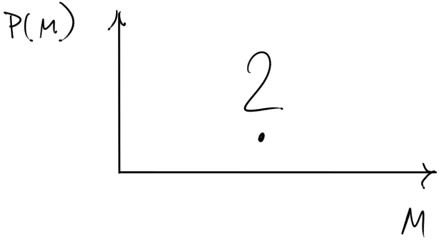
- Rozkład maksymalną długości rozgrywek przy 1000 rozgrywkach - L_{max}



p_A - prawdopodobieństwo wygrania kolejki przez A

Problem F (Nie obowiązkowe)

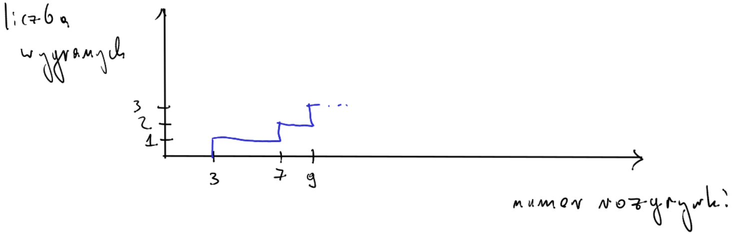
Prawdopodobieństwo że gracz **A** ma kapitał **M** po **n** rozgrywkach



$$n = 2,\ 10,20,\ldots 100;$$
$$a{=}b{=}50;$$
$$p_A = \frac{1}{2}, \frac{1}{5}$$

Problem G

- Trajektoria liczby wygranych dla 1 z 2 graczy



dla kilku gier(do 10)
dla różnych wartościej p_A: $\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{4}{5}$

- Trajektoria kapitału dla 1 z 2 graczy

Problem H (Nie obowiązkowe)

- B, C, D, G dla kilku graczy
  (w G teraz trajektorie dla wszystkich graczy)

  różne kombinacje p_i(prawdopodobieństwo wygrania gracza "i" w kolejce)