metody statystyczne

wykład 4

17 XI 2024

kacper.topolnicki@uj.edu.pl

- procesy stochastyczne z powtórką
- łańcuchy Markova:
  - rozkłady
  - stany stacjonarne
- Bernulli

$X \in$ zm. losowe

$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

zb. zd. el.

$X\left(\boxed{\cdot\,\cdot}\right) = 2$

$X(\omega) \longrightarrow \underbrace{X(t, \omega)}_{\text{proces stochastyczny}}$

$\omega \in \Omega$

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & & X(t,\omega) \arrow[dll, "\text{ustalony czas}"'] \arrow[drr, "\text{ustalone } \omega"] & & \\
 & X_t(\omega) \arrow[dl, "\text{dyskretne } \omega"'] \arrow[dr, "\text{ciągłe } \omega"] & & & & X_\omega(t) \\
\text{proces o stanach dyskretnych} \arrow[d] \arrow[dr] & & \text{proces o stanach ciągłych} \arrow[d] \arrow[dr] & & & \\
\boxed{\text{dys. czas}} & \text{ciągły czas} & \text{dys. czas} & \text{ciągły czas} & &
\end{tikzcd}
$$

jaki rodzaj procesu?

- użycie procesora
- mierzymy temperaturę co godzinę

proces Markova

$$P\big(X(t_N) = A_N \mid X(t_1) = A_1 \wedge X(t_2) = A_2 \wedge \ldots \wedge X(t_{N-1}) = A_{N-1}\big) =$$

$$t_1 < t_2 < t_3 < \ldots < t_N$$

$$= P\big(X(t_N) = A_N \mid X(t_{N-1}) = A_{N-1}\big)$$

$$P(\text{przyszłości} \mid \text{teraźniejszości} \wedge \text{przeszłości}) =$$

$$= P(\text{przyszłości} \mid \text{teraźniejszości})$$

czym to
jest proces
Markowa?

- trajektoria balistyczna pocisku
- trajektorie pyłku z bardzo krótką pamięcią

Łańcuch Markowa:

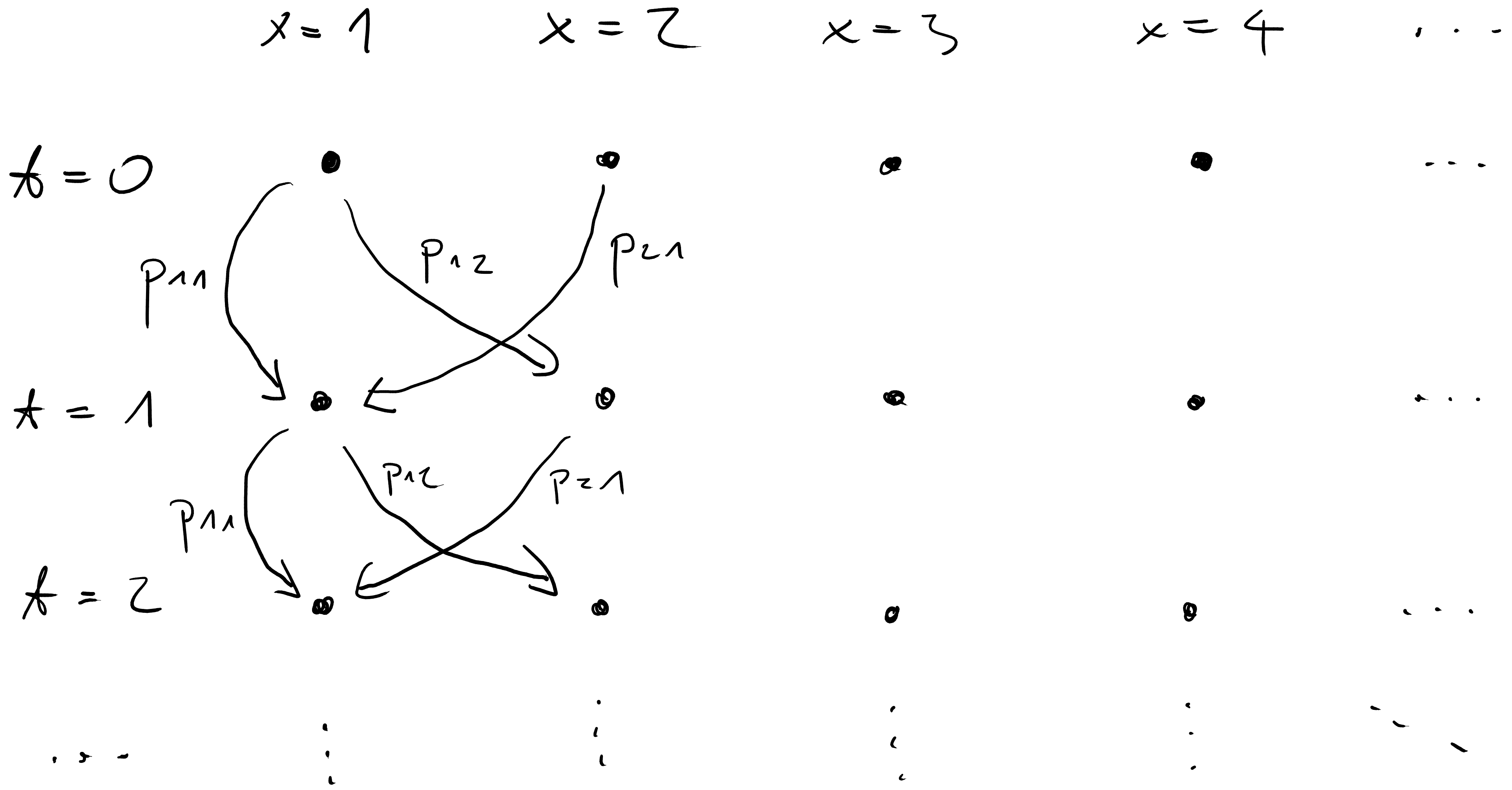
- dyskretny czas $t = 0, 1, 2, \ldots$
- dyskretne stany $x = 0, 1, 2, \ldots$

$$P(X(t+1) = j \mid X(t) = k) =$$

$$= P(X(t+1) = j \mid X(0) = a \wedge X(1) = b \wedge X(2) = c \wedge \ldots \wedge X(t) = k)$$

jednorodny łańcuch Markowa:

$$P(X(t+1) = j \mid X(t) = k) = p_{ij}$$



x = 1
x = 2
x = 3
x = 4
...
t = 0
t = 1
t = 2
...
p11
p12
p21
p11
p12
p21

wektor stanu : $\left(P(X=1),\ P(X=2),\ P(X=3),\ \ldots \right)$

w danej chwili t

macierz przejść : $$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdots \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{pmatrix}$$

$$\overbrace{\left(P_t(X=1),\ P_t(X=2),\ P_t(X=3), \dots\right)}^{\text{w czasie } t} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdots \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} =$$

$$= \Big(\underbrace{P_t(X=1)\cdot p_{11} + P_t(X=2)\cdot p_{21} + P_t(X=3)\cdot p_{31} + \dots}_{P_{t+1}(X=1)},\ \overbrace{P_t(X=1)\cdot p_{12} + P_t(X=2)\, p_{22} + P_t(X=3)\cdot p_{32} + \dots}^{P_{t+1}(X=2)},\ P_t(X=1)\, p_{13} + P_t(X=2)\, p_{23} + P_t(X=3)\, p_{33} + \dots \Big)$$

$$\underbrace{p_{ij}(\overset{t_1}{\overset{\shortparallel}{t}}, \overset{t_3}{\overset{\shortparallel}{t+2}})}_{p_{ij}^{(2)}} = \sum_k \underbrace{p_{ik}(t, t+1)}_{p_{ik}} \underbrace{p_{kj}(t+1, t+2)}_{p_{kj}}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$p_{ij}(t_1, t_3) = P(X(t_3) = j \mid X(t_1) = i) =$$

$$= \sum_k P\big(X(t_3) = j \cap X(t_2) = k \mid X(t_1) = i\big) =$$

$$= \sum_k \frac{P(X(t_3) = j \cap X(t_2) = k \cap X(t_1) = i)}{P(X(t_1) = i)} =$$

$$= \sum_k \frac{P(X(t_3)=j \mid X(t_2)=k \wedge X(t_1)=i) \cdot P(X(t_2)=k \wedge X(t_1)=i)}{P(X(t_1)=i)} =$$

$$P(A \wedge B) = P(A \mid B)\, P(B)$$

$$= \sum_k P(X(t_3)=j \mid X(t_2)=k \wedge X(t_1)=i) \cdot P(X(t_2)=k \mid X(t_1)=i) =$$

$$= \sum_k P(X(t_3)=j \mid X(t_2)=k) \cdot P(X(t_2)=k \mid X(t_1)=i) =$$

$$= \sum_k p_{ik}(t_1, t_2) \cdot p_{kj}(t_2, t_3)$$

stan stacjonarny

$$\pi = (\underbrace{\pi(1)}_{P(X=1)}, \underbrace{\pi(2)}_{P(x=2)}, \underbrace{\pi(3)}_{P(x=3)}, \dots)$$

$$\underbrace{\pi \cdot P}_{t} = \underbrace{\pi}_{t+1}$$

wektor własny

$$A\vec{x} = \lambda \vec{x}$$

$$x A = \lambda \cdot x$$

$x = \pi$ $\quad$ $\lambda = 1$

Kiedy istnieje stan stacjonarny?

$$P^{(n)} = \left(P^{(1)}\right)^n = \underbrace{P^{(1)} \cdot P^{(1)} \cdot P^{(1)} \cdot \ldots}_{n}$$

$$P^{(n)} \xrightarrow{n \to \infty} \begin{pmatrix} \pi(1) & \pi(2) & \pi(3) & \cdots \\ \pi(1) & \pi(2) & \pi(3) & \cdots \\ \pi(1) & \pi(2) & \pi(3) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

<u>nie zawsze</u>

$$(p_1, p_2, p_3 \ldots) \begin{pmatrix} \pi(1) & \pi(2) & \pi(3) & \cdots \\ \pi(1) & \pi(2) & \pi(3) & \cdots \\ \pi(1) & \pi(2) & \pi(3) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \cdot \pi(1) + p_2 \cdot \pi(1) + p_3 \pi(1) + \ldots \\ p_1 \pi(2) + p_2 \pi(2) + p_3 \pi(2) + \ldots \\ p_1 \pi(3) + p_2 \pi(3) + p_3 \pi(3) + \ldots \\ \ldots \end{pmatrix} =$$

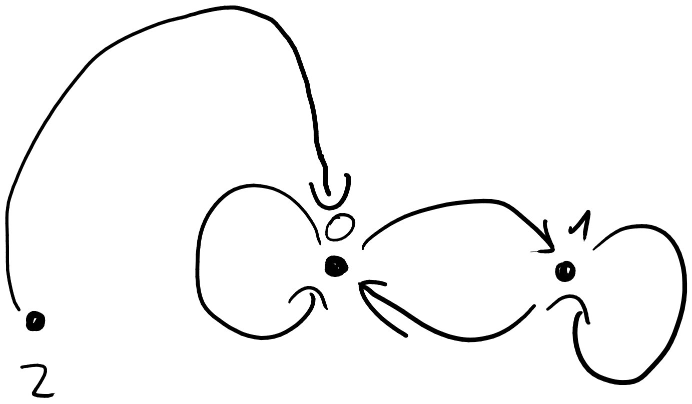
$$= \left(\pi(1) \cdot \underbrace{(p_1 + p_2 + p_3 + \dots)}_{1}, \pi(2) \underbrace{(p_1 + p_2 + p_3 + \dots)}_{1}, \pi(3) \underbrace{(p_1 + p_2 + p_3 + \dots)}_{1}, \dots \right) =$$

$$= \left(\pi(1), \pi(2), \pi(3), \dots \right)$$

rodzaje stanów (wartości zmiennych losowych)

- stan i jest dostępny ze stanu j jeżeli

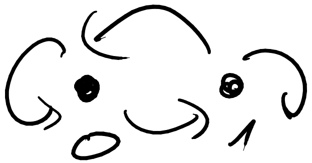
$$P_{ij}^{(n)} > 0 \quad \text{dla pewnego } n$$

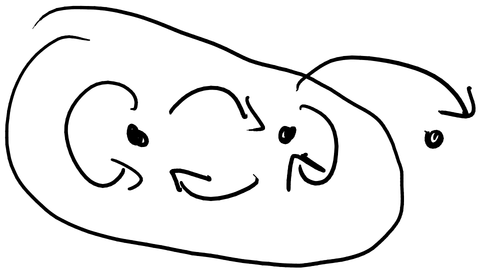


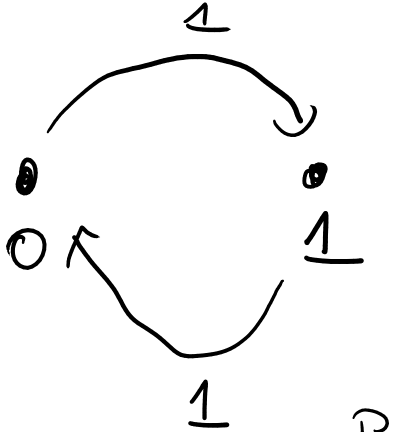
- stany i oraz j się komunikują gdy i dostępny z j oraz j dostępny z i

- dwa stany w tej samej klasie komunikacji jeżeli się komunikują

- Łańcuch Markova jest nieredukowalny jeżeli wszystkie stany się komunikują







$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccc} & P^{(2)} & & & \\ & \shortparallel & & & \\ (P^{(1)})^1 & (P^{(1)})^2 & P^{(3)} & P^{(4)} & \ldots \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \ldots \end{array}$$

$$p_{11} = \quad 0 \qquad 1 \qquad 0 \qquad 1$$

periodyczność stanu i

$$d_i = \gcd\{n > 0 : p_{ii}^{(n)} > 0\}$$

$$d_1 = \gcd\{2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots\} = 2$$

Tw. stan stacjonarny nie-redukowalnego łańcucha Markowa ma dodatnie prawdopodobieństwa

szkic dowodu:

$$\pi = (\underbrace{\pi(1), \pi(2), \ldots}_{\text{stan stacjonarny}})$$

$P(x=1)$, $P(x=2)$

nieredukowalności

$$P(x_0 = a) = \pi(a) > 0$$

czas

$$n > 0 : \quad P(X_n = b \mid X_0 = a) > 0$$

$$\pi(b) = P(X_n = b) \geq P(X_n = b \wedge X_0 = a) =$$

$$\vee$$

$$b$$

$$= \underbrace{P(X_0 = a)}_{\pi(a) > 0} \cdot \underbrace{P(X_n = b \mid X_0 = a)}_{\vee \; 0}$$

Tw. nie-redukowalny łańcuch Markowa ma co najwyżej jeden stan stacjonarny

szkic dowodu.

$$\pi_1 P^{(1)} = \pi_1 \qquad \pi_2 P^{(1)} = \pi_2$$

$$\alpha = a\pi_1 \qquad \beta = b\pi_2$$

$$\alpha P^{(1)} = a\pi_1 P^{(1)} = a\left(\pi_1 P^{(1)}\right) = a\pi_1 = \alpha$$

dobieramy a, b:

$$\left.\begin{aligned} \alpha - \beta &\geq 0 \\ \alpha(i) &= \beta(i) \end{aligned}\right\} \qquad \alpha_i = \beta_i$$

$$\eta = \alpha - \beta \qquad \eta_i = 0$$

$$\eta P^{(1)} = \left(a \cdot \pi_1 - b\, \pi_2 \right) P^{(1)} = a \pi_1 P^{(1)} - b\, \pi_2 P^{(1)} =$$
$$= a \pi_1 - b\, \pi_2 = \eta$$

$$\eta_i - \eta^{(i)} = 0 = \sum_{j \neq i} \eta_j P^{(n)}_{j\,i} = \sum_{j \neq i} \eta_j P^{(1)}_{j\,i}$$

istnieje : $n^{(i)}$: $P^{(n^{(i)})}_{j\,i} > 0$

$$0 = \sum_{j \neq i} \eta_j P^{(n^{(i)})}_{j\,i}$$

$\eta_j = 0 \leadsto$ $\alpha = \beta$

$\pi_1 = \pi_2$

sposoby znalezienia stanów stacjonarnych:

- rozwiązać równania własne
- przeprowadzić bezpośredni eksperyment
- funkcje generujące