założenia

Zakładamy, że A jest macierzą symetryczną o rozmiarze n × n (A∈Matrices[{n , n} , Reals , Symmetric[{1 , 2}]]) oraz, że r1, p1,rk,pk,rkm,pkm są wektorami o rozmiarze n i rzeczywistych współrzędnych ((r1|p1)∈ Vectors[n , Reals]).

```
In[ ]:= $Assumptions = (A ∈ Matrices[{n , n} , Reals , Symmetric[{1 , 2}]]) &&
    ((r1 | p1 | rk | pk | rkm | pkm) ∈ Vectors[n , Reals]);
```

pierwszy krok dowodu, sprawdzenie pojedynczego przypadku

$r1^T\, r1 \overset{\text{można rozpisać}}{\leftrightarrow} \sum_i r1_i\, r1^i \leftrightarrow$

zwężenie współrzędnych 1 oraz 2 tensora r1⊗r1, którego wartość dla współrzędych k, l dana jest przez $r1_k\, r1^l$ (TensorContract [r1⊗r1 , {{1 , 2}}])

$A\, p1 \overset{\text{można rozpisać}}{\leftrightarrow} \sum_k A^i{}_k\, p1^k \leftrightarrow$

zwężenie współrzędnych 2 oraz 3 tensora A⊗p1, którego wartość dla współrzędych l, m , n dana jest przez $A^l{}_m\, p1^n$ (TensorContract [A⊗p1 , {{2 , 3}}])

$p1^T\, A\, p1 \overset{\text{można rozpisać}}{\leftrightarrow} \sum_{i,k} p1_i\, A^i{}_k\, p1^k \leftrightarrow$

zwężenie współrzędnych 1, 2 oraz 3, 4 tensora p1⊗A⊗p1, którego wartość dla współrzędych l, m , n , o dana jest przez $p1_l\, A^m{}_n\, p1^o$ (TensorContract [A⊗p1 , {{2 , 3}}])

```
In[ ]:= α1 = TensorContract[r1⊗r1 , {{1 , 2}}] / TensorContract[p1⊗A⊗p1 , {{1 , 2} , {3 , 4}}];

In[ ]:= r2 = r1 - α1 TensorContract[A⊗p1 , {{2 , 3}}];

In[ ]:= β1 = TensorContract[r2⊗r2 , {{1 , 2}}] / TensorContract[r1⊗r1 , {{1 , 2}}];

In[ ]:= p2 = r2 + β1 p1;
```

Zakładamy dodatkowo, że p1 = r1 i podmieniamy wszędzie r1 za p1 aby uprościć wyrażenia (/.{p1 -> r1}).

```
In[ ]:= (*twierdzenie pomocnicze*)
```

```
In[ ]:= TensorContract[p1⊗A⊗p1, {{1, 2}, {3, 4}}] ==
          TensorContract[p1⊗A⊗r1, {{1, 2}, {3, 4}}] /. {p1 → r1} // TensorReduce // FullSimplify
Out[ ]= True

In[ ]:= (*2a*)

In[ ]:= TensorContract[r2⊗r1, {{1, 2}}] /. {p1 → r1} // TensorReduce
Out[ ]= 0

In[ ]:= (*2b*)

In[ ]:= TensorContract[r2⊗p1, {{1, 2}}] /. {p1 → r1} // TensorReduce
Out[ ]= 0

In[ ]:= (*2c*)

In[ ]:= TensorContract[p2⊗A⊗p1, {{1, 2}, {3, 4}}] /. {p1 → r1} // TensorReduce
Out[ ]= 0
```

indukcja

```
In[ ]:= αk = TensorContract[rk⊗rk, {{1, 2}}] / TensorContract[pk⊗A⊗pk, {{1, 2}, {3, 4}}];

In[ ]:= rkp = rk - αk TensorContract[A⊗pk, {{2, 3}}];

In[ ]:= βk = TensorContract[rkp⊗rkp, {{1, 2}}] / TensorContract[rk⊗rk, {{1, 2}}];

In[ ]:= pkp = rkp + βk pk;

In[ ]:= αkm = TensorContract[rkm⊗rkm, {{1, 2}}] / TensorContract[pkm⊗A⊗pkm, {{1, 2}, {3, 4}}];

In[ ]:= subrk = {rk → rkm - αkm TensorContract[A⊗pkm, {{2, 3}}]};

In[ ]:= βkm = TensorContract[rk⊗rk, {{1, 2}}] / TensorContract[rkm⊗rkm, {{1, 2}}];

In[ ]:= subpk = {pk → rk + βkm pkm};

In[ ]:= (*twierdzenie pomocnicze*)

In[ ]:= (*z założenia indukcyjnego TensorContract[A⊗pk⊗pk,{{1,3},{2,4}}]==
          TensorContract[A⊗pk⊗rk,{{1,3},{2,4}}]*)
```

```
In[ ]:= TensorContract[pkp⊗A⊗pkp , {{1 , 2}, {3 , 4}}] ==
          TensorContract[pkp⊗A⊗rkp , {{1 , 2}, {3 , 4}}] // TensorReduce // FullSimplify
```

$$\frac{1}{\text{TensorContract}[A\otimes pk\otimes pk, \{\{1,3\},\{2,4\}\}]}(\text{TensorContract}[A\otimes pk\otimes pk, \{\{1,3\},\{2,4\}\}]-\text{TensorContract}[A\otimes pk\otimes rk, \{\{1,3\},\{2,4\}\}])\left(\text{TensorContract}[A\otimes pk\otimes pk, \{\{1,3\},\{2,4\}\}]^2-2\,\text{TensorContract}[A\otimes pk\otimes pk, \{\{1,3\},\{2,4\}\}]\times \text{TensorContract}[A\otimes pk\otimes rk, \{\{1,3\},\{2,4\}\}]+\text{TensorContract}[rk\otimes rk, \{\{1,2\}\}]\times \text{TensorContract}[A\otimes A\otimes pk\otimes pk, \{\{1,3\},\{2,5\},\{4,6\}\}]\right)==0$$

```
In[ ]:= (*2a*)

In[ ]:= (*zgadza się jeżeli skorzystamy z pomocniczego twierdzenia*)

In[ ]:= TensorContract[rkp⊗rk , {{1 , 2}}] // TensorReduce
```

$$\text{TensorContract}[rk\otimes rk, \{\{1,2\}\}]-\frac{\text{TensorContract}[rk\otimes rk, \{\{1,2\}\}]\times \text{TensorContract}[A\otimes pk\otimes rk, \{\{1,3\},\{2,4\}\}]}{\text{TensorContract}[A\otimes pk\otimes pk, \{\{1,3\},\{2,4\}\}]}$$

```
In[ ]:= (*2b*)

In[ ]:= (*zgadza się jeżeli skorzystamy z założenia indukcyjnego*)

In[ ]:= TensorContract[rkp⊗pk , {{1 , 2}}] // TensorReduce

Out[ ]= TensorContract[pk⊗rk, {{1, 2}}] - TensorContract[rk⊗rk, {{1, 2}}]

In[ ]:= TensorContract[rkp⊗pk , {{1 , 2}}] /. subpk // TensorReduce // FullSimplify
```

$$\frac{\text{TensorContract}[pkm\otimes rk, \{\{1,2\}\}]\times \text{TensorContract}[rk\otimes rk, \{\{1,2\}\}]}{\text{TensorContract}[rkm\otimes rkm, \{\{1,2\}\}]}$$

```
In[ ]:= (*2c*)

In[ ]:= (*zgadza się jeżeli skorzystamy z pomocniczego twierdzenia*)

In[ ]:= TensorContract[pkp⊗A⊗pk , {{1 , 2}, {3 , 4}}] // TensorReduce

Out[ ]= TensorContract[A⊗pk⊗pk, {{1, 3}, {2, 4}}] - TensorContract[A⊗pk⊗rk, {{1, 3}, {2, 4}}]
```