

Interpolacja

Metody Numeryczne 2024

Wstęp

Celem projektu jest implementacja oraz analiza dwóch metod aproksymacji interpolacyjnej. Do implementacji wykorzystałem język programowania Python wraz z bibliotekami pandas, matplotlib oraz numpy (linalg.solve). Metody omawiane w tym projekcie to:

1. Metoda wykorzystująca wielomian interpolacyjny Lagrange'a
2. Metoda wykorzystująca sklejanie wielomianów trzeciego stopnia

Aproksymacja polega na wyznaczeniu funkcji, która "najlepiej" pasuje do danych punktów, minimalizując pewien błąd. Funkcja aproksymująca nie musi przechodzić dokładnie przez punkty, lecz jedynie je przybliżać.

Interpolacja polega na wyznaczeniu funkcji, która dokładnie pasuje do danych punktów, tzn. przechodzi przez każdy z nich.

Interpolacja Lagrange'a

Jest to interpolacja za pomocą wielomianów, tyle że zamiast rozwiązywania układu równań, jak np. w metodzie Vandermonde, wartości w punktach wyznaczamy korzystając z wzoru interpolacyjnego:

$$L(x) = \sum_{i=1}^n y_i l_i(x)$$

gdzie,

$$l_i(x) = \prod_{0 \leq j \leq n, j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{x - x_1}{x_i - x_1} \dots \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \cdot \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \dots \frac{x - x_n}{x_i - x_n}$$

Uzyskana metodą Lagrange'a funkcja interpolująca $L(x)$ jest taka sama jak funkcja uzyskana metodą Vandermonde.

Metoda sklejania wielomianów trzeciego stopnia

Metoda ta jest metodą lokalną, a nie globalną tak jak np. metoda Lagrange'a. Polega ona na wyznaczaniu wielomianów trzeciego stopnia w przedziałach między sąsiednimi węzłami interpolacji.

- $S_j(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, 1, \dots, n - 1$
- $S_j(x_{j+1}) = f(x_{j+1}), \quad j = 0, 1, \dots, n - 1$
- Dla węzłów wewnętrznych x_j : $S'_{j-1}(x_j) = S'_j(x_j), \quad j = 1, \dots, n - 1$
- Dla węzłów wewnętrznych x_j : $S''_{j-1}(x_j) = S''_j(x_j), \quad j = 1, \dots, n - 1$
- Na krawędziach: $S''_0(x_0) = 0$ i $S''_{n-1}(x_n) = 0$

Według powyższych zasad wyznaczany jest układ równań, którego rozwiązanie wyznacza wartości współczynników wielomianu.

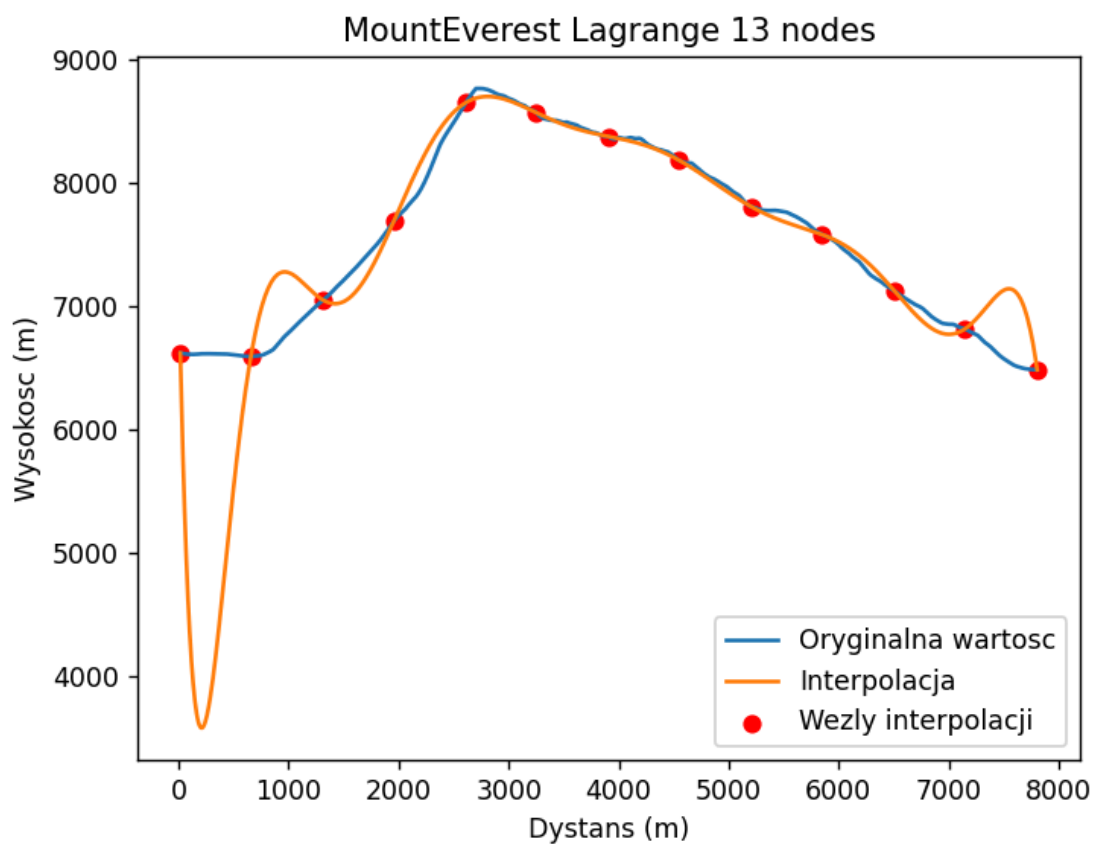
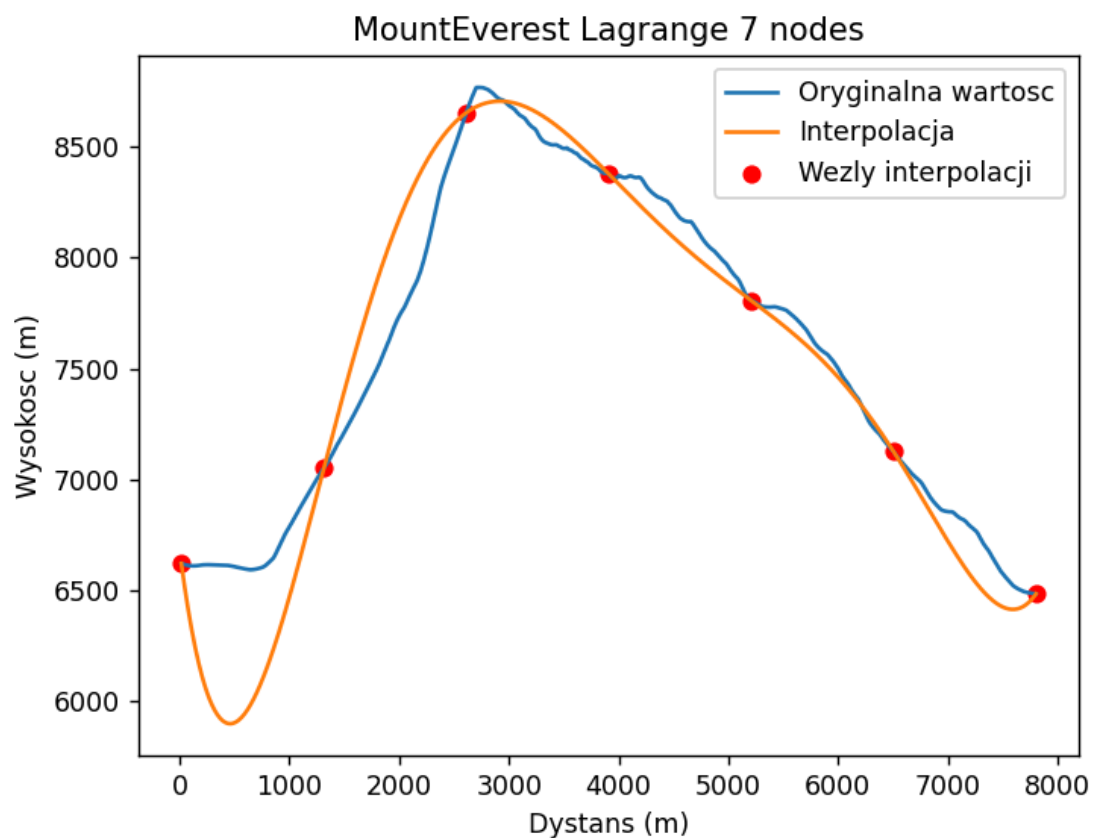
Analizowane profile wysokościowe

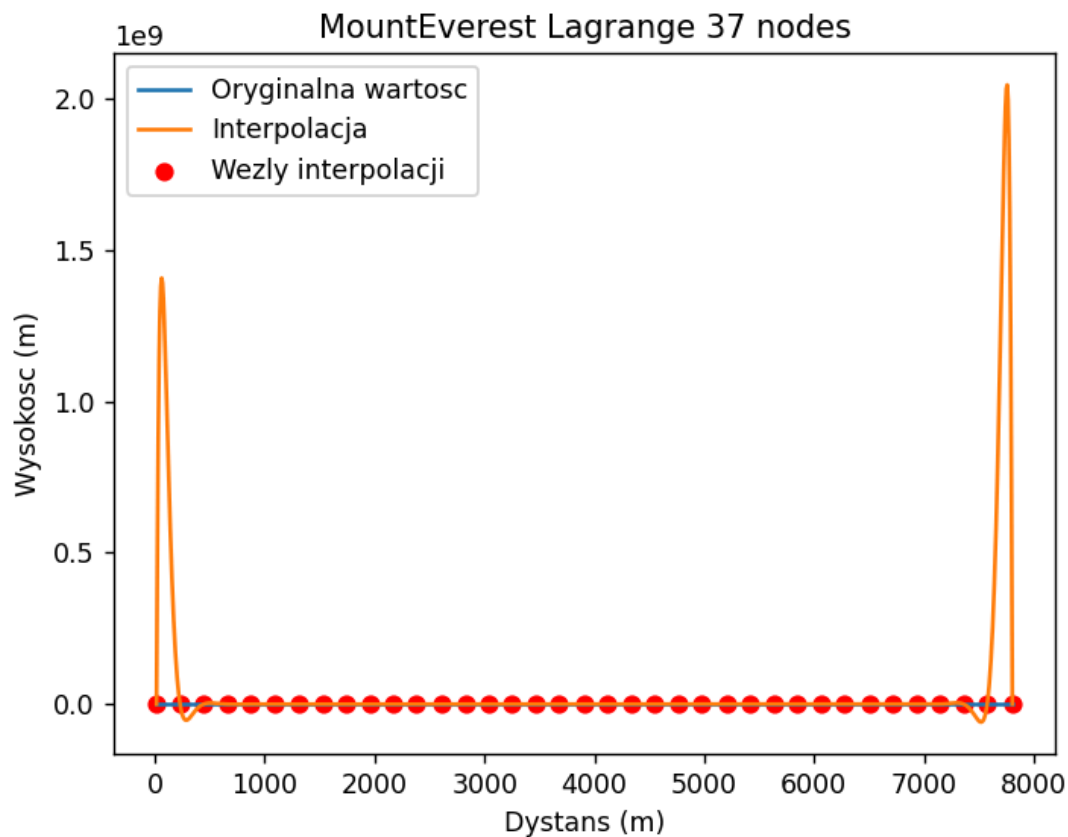
Na potrzeby projektu analizie zostały trzy różne profile wysokościowe.

Profil wysokościowy Mount Everest

Pierwszy analizowany przeze mnie profil wysokościowy zawiera łagodny, jednostajny wzrost a następnie spadek wysokości. Taka charakterystyka trasy powinna być łatwa do interpolacji ze względu na jej przewidywalny przebieg.

Wyniki dla metody Lagrange'a



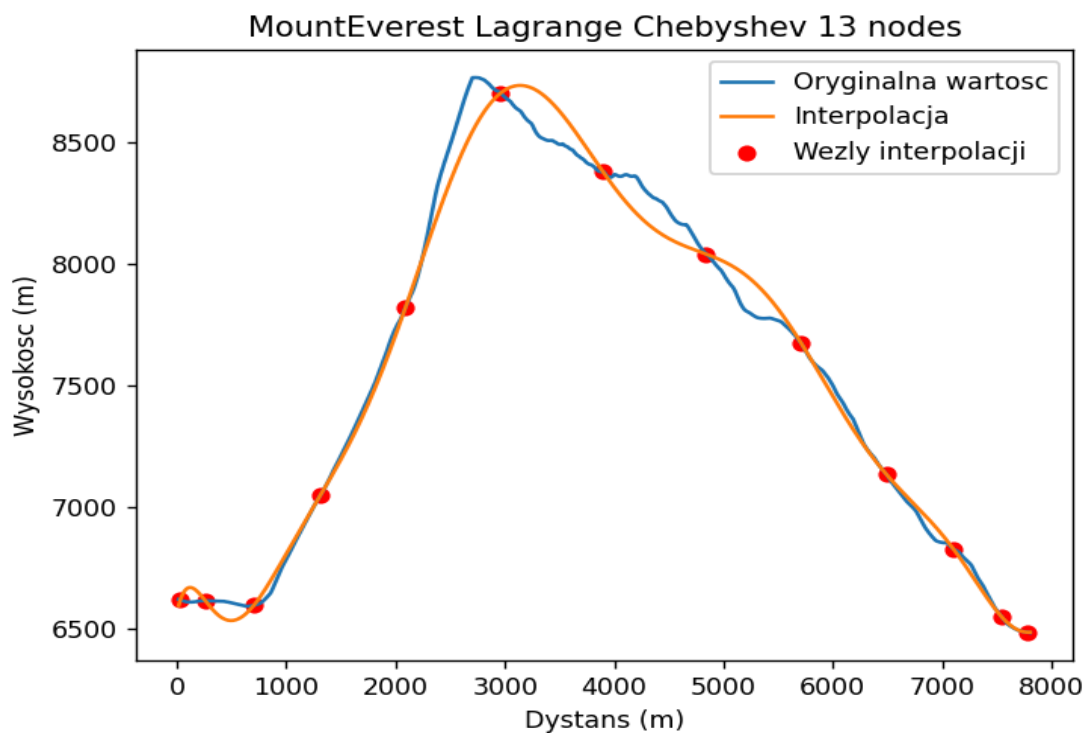
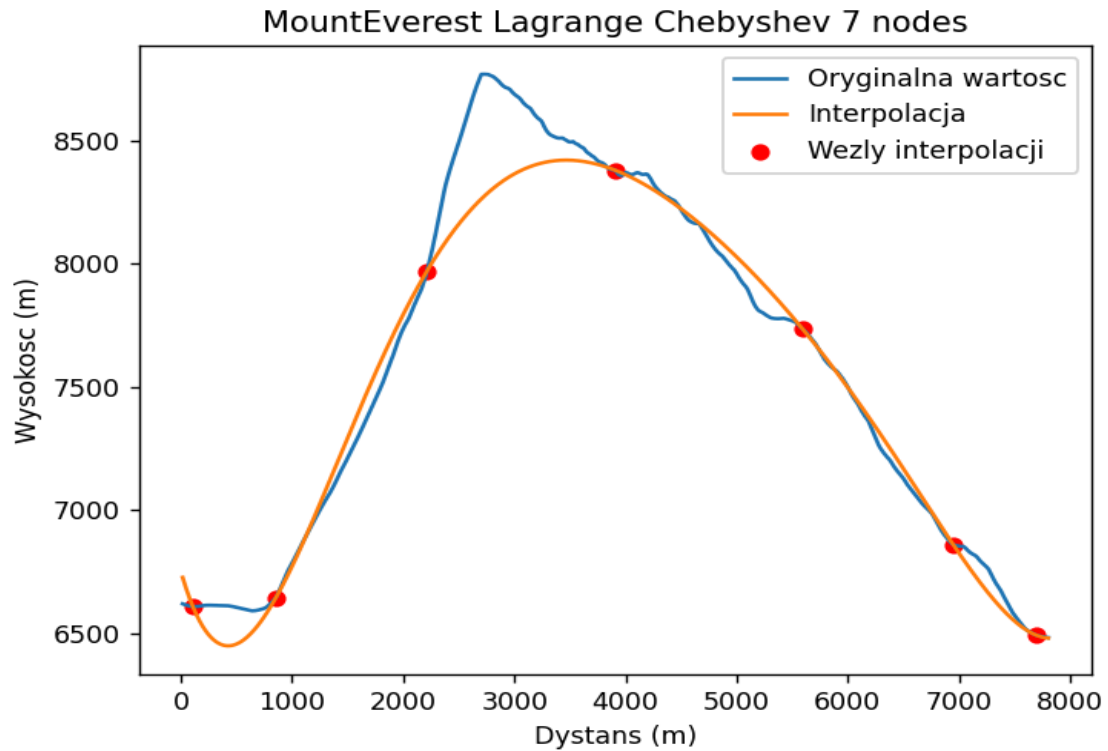


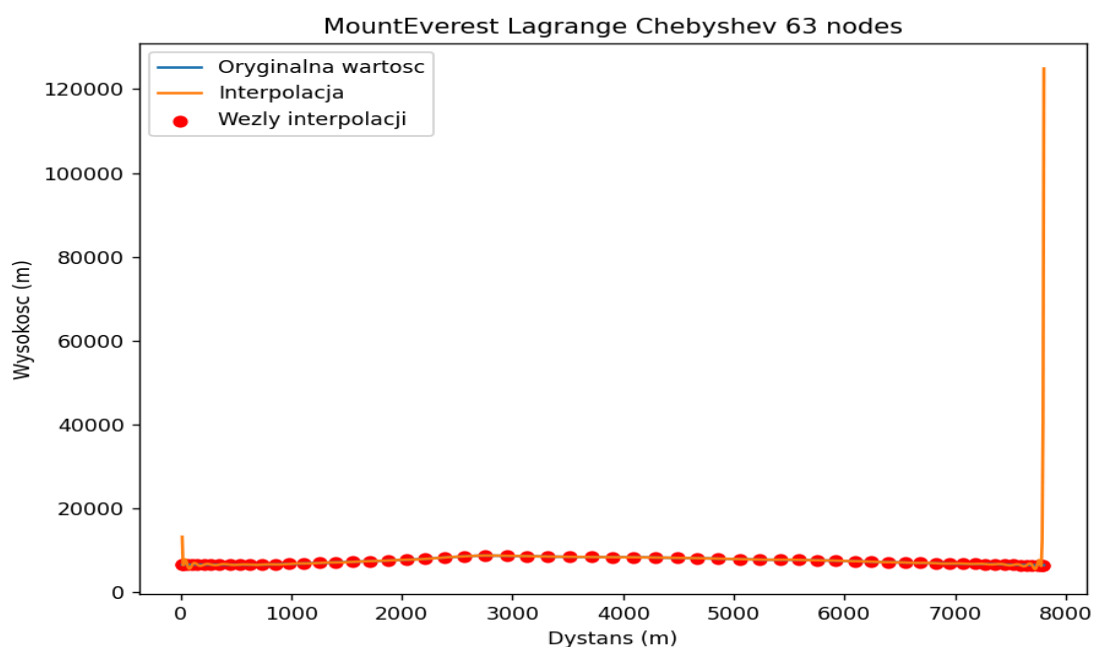
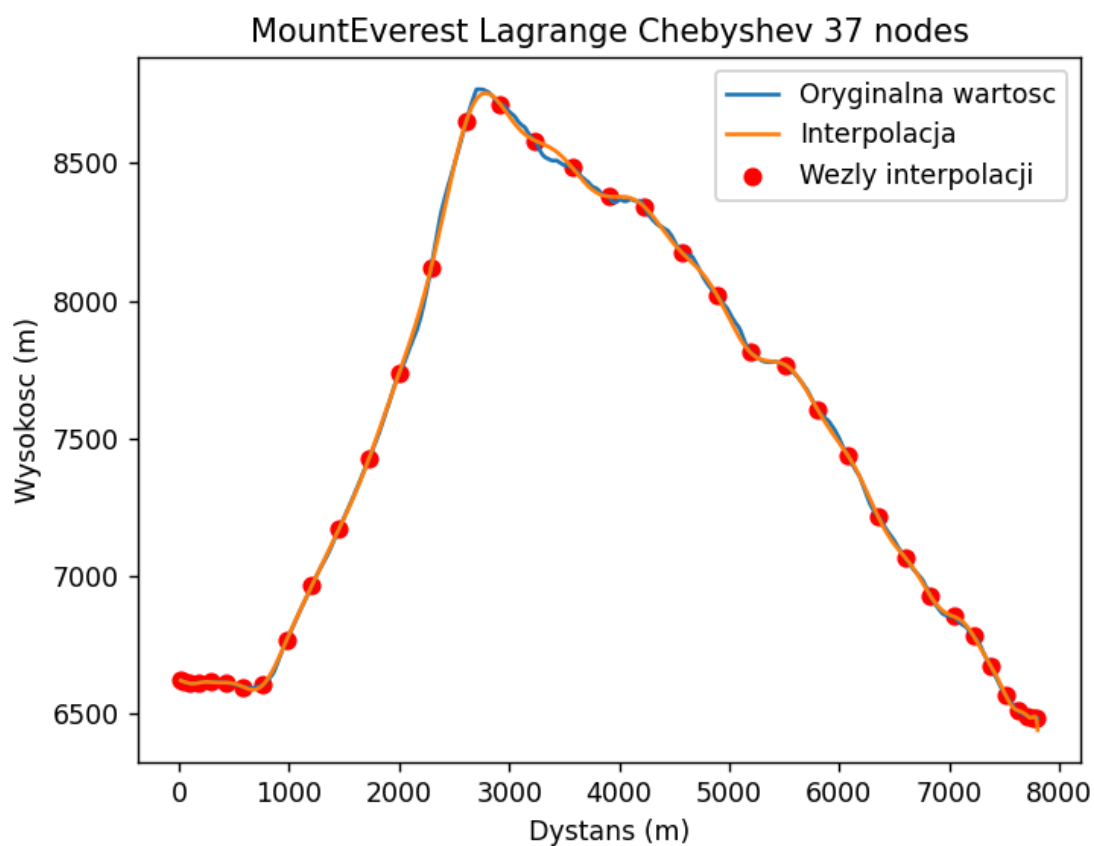
Jak widać na powyższych wykresach, dla 7 węzłów interpolacji funkcja nie jest dobrze dopasowana. Dla 13 węzłów funkcja wydaje się być lepiej dopasowana, jednak na jej krańcach pojawiły się niepokojące odchylenia. Dla 37 węzłów odchylenia na krańcach przedziału są na tyle duże, że cały wykres został przez nie zdominowany.

Takie odchylenia występujące na krańcach funkcji jest efektem Rungego. Ten problem pojawia się, kiedy do interpolacji równoodległych punktów wykorzystuje się wielomiany wysokiego stopnia.

Istnieje jednak sposób na częściowe rozwiązanie problemu związanego z efektem Rungego. Jak wspomniałem wyżej, efekt Rungego występuje, gdy węzły są od siebie równo-odległe. Można temu zaradzić stosując węzły Czebyszewa drugiego rodzaju, które generowane są na obwodzie półkola i po rzutowaniu ich na oś liczbową tworzą punkty, które nie są równo-odległe.

Wyniki dla metody Lagrange'a z węzłami Czebyszewa

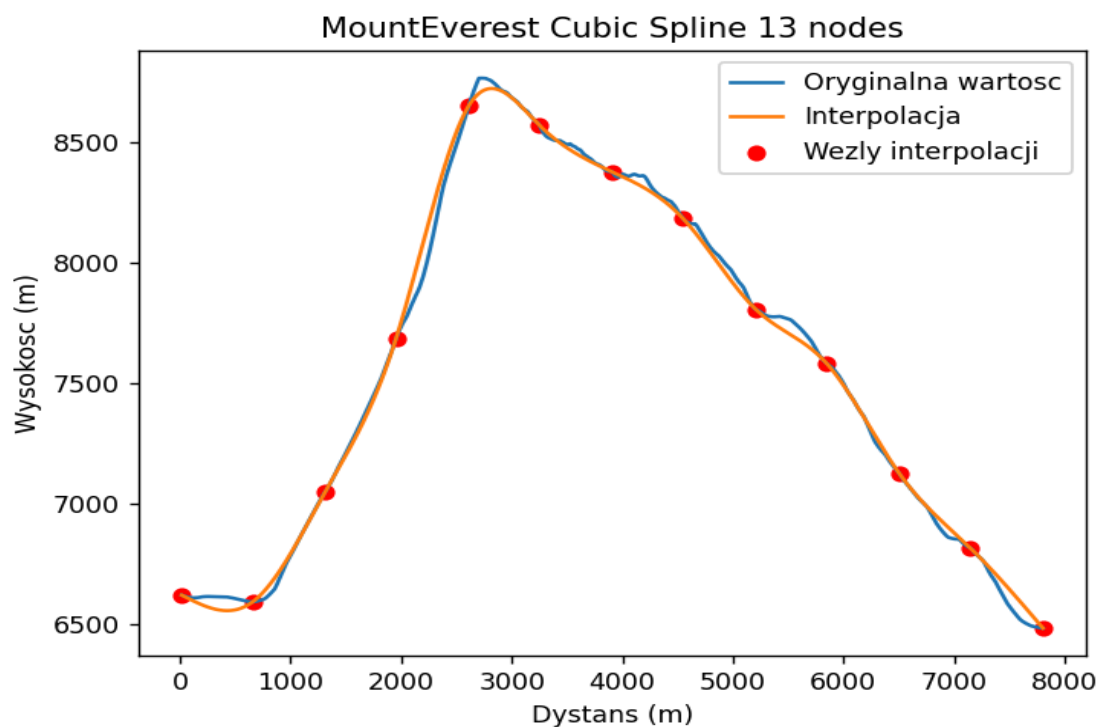
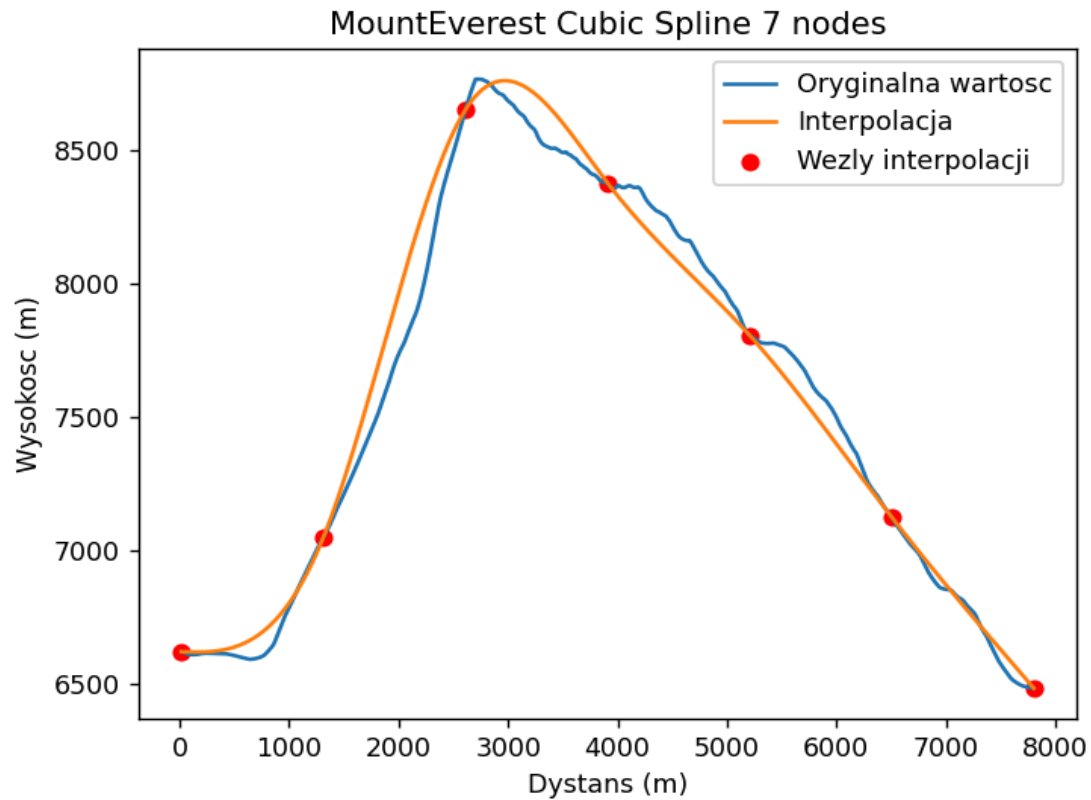


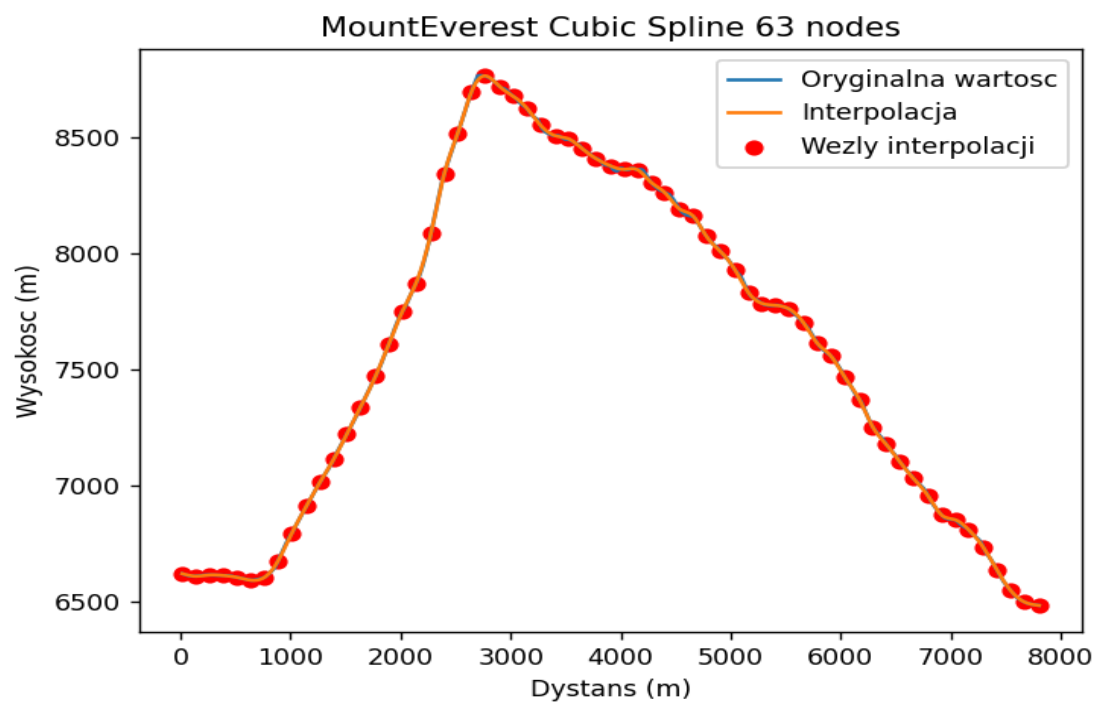
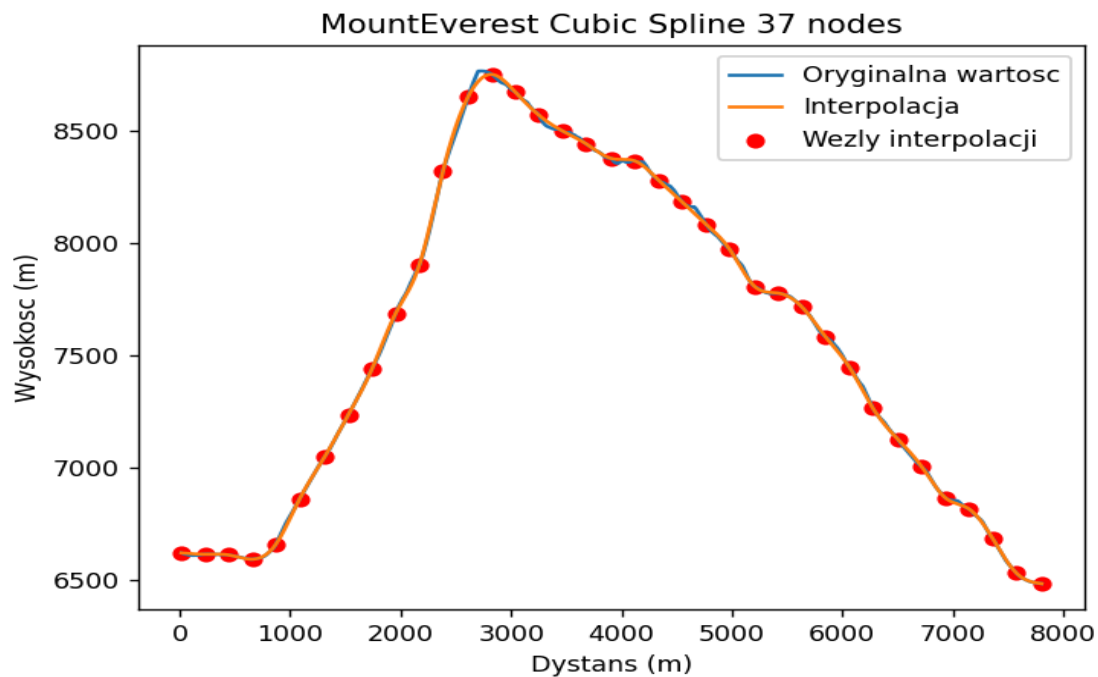


Jak widać, korzystając z węzłów Czebyszewa drugiego rodzaju, możemy liczbę węzłów interpolacyjnych, co prowadzi do dokładniejszej interpolacji. Jednakże pomimo zastosowania innego sposobu generowania węzłów nie udało się nam

uchronić od efektu Rungego. Minusem tej metody jest to, że większość wygenerowanych węzłów znajduje się na krańcach przedziału funkcji, co skutkuje utratą dokładności w środkowej części funkcji.

Wyniki dla metody sklejanego wielomianów trzeciego stopnia



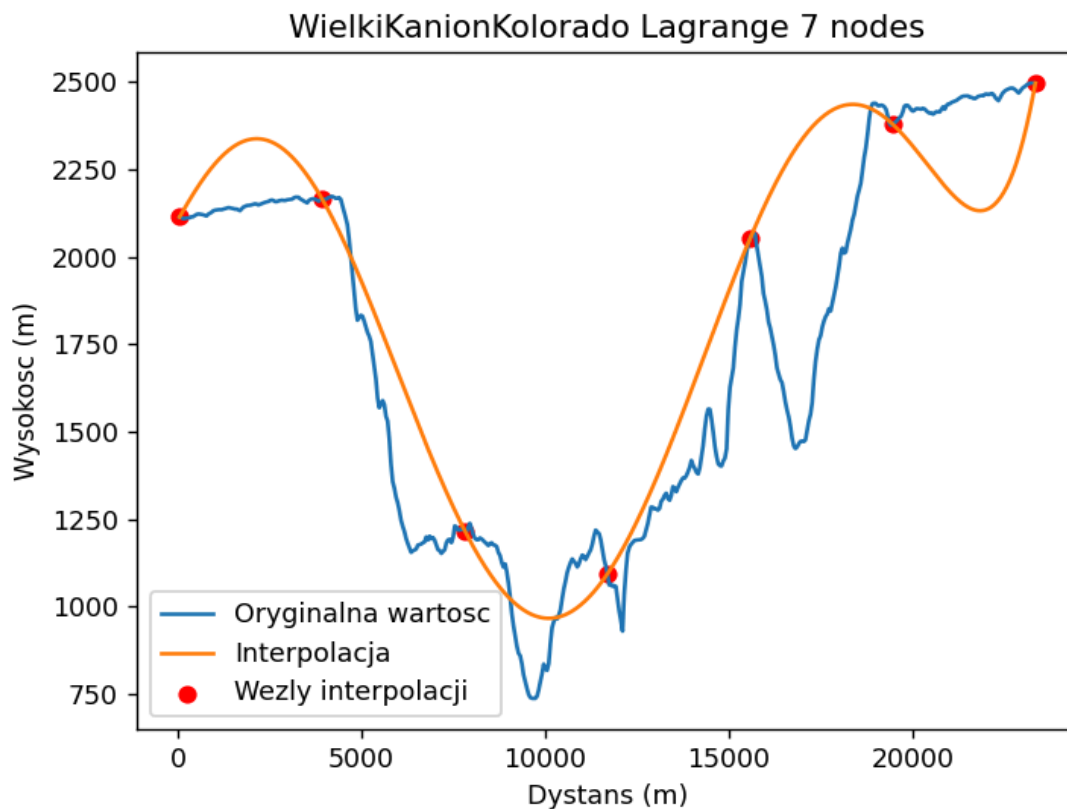


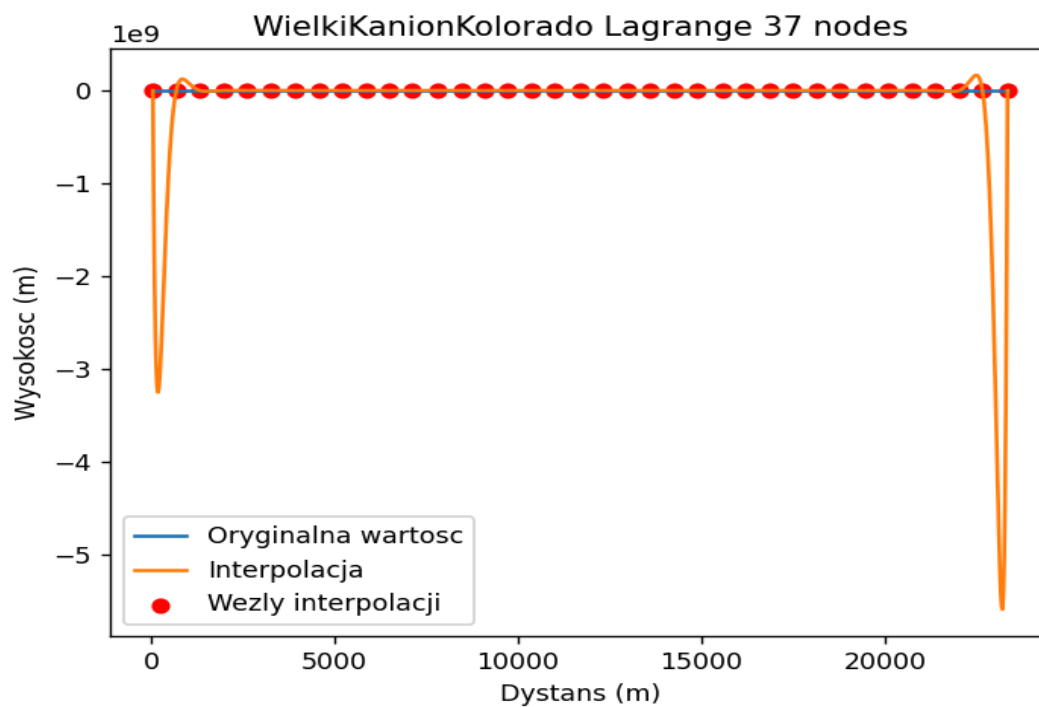
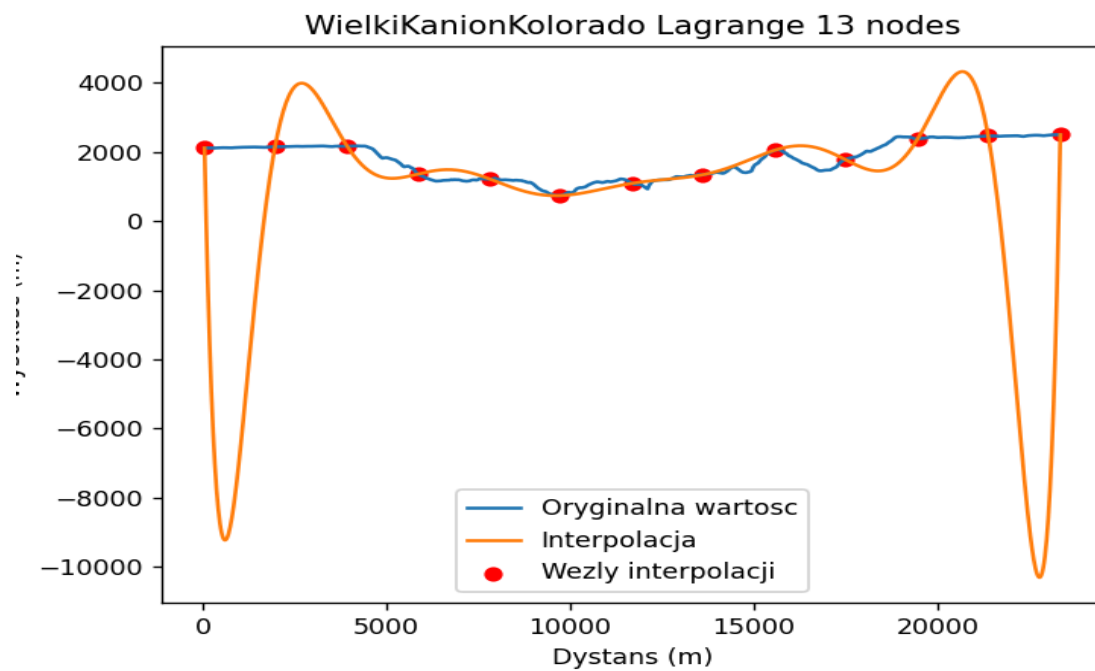
Jak widać metoda sklejania wielomianów trzeciego stopnia daje bardzo dobre rezultaty. Dla większej ilości węzłów interpolacja wygląda prawie identycznie jak oryginalna funkcja. Zaletą tej metody jest odporność na efekt Rungego. Wynika to z tego, że metoda ta ma charakter lokalny, a nie globalny (tak jak metoda Lagrange'a). Dodatkowo wartości interpolowane są niskim stopniem wielomianu.

Profil B. Wielki Kanion Kolorado

Drugi wybrany przeze mnie profil wysokościowy ma wiele stromych wzniesień oraz spadków. Jednakże te strome fragmenty występują rzadko. Jest to trasa zupełnie odmienna od poprzedniej, która cechowała się łagodnym, jednostajnym wzniesieniem i następującym po nim spadkiem.

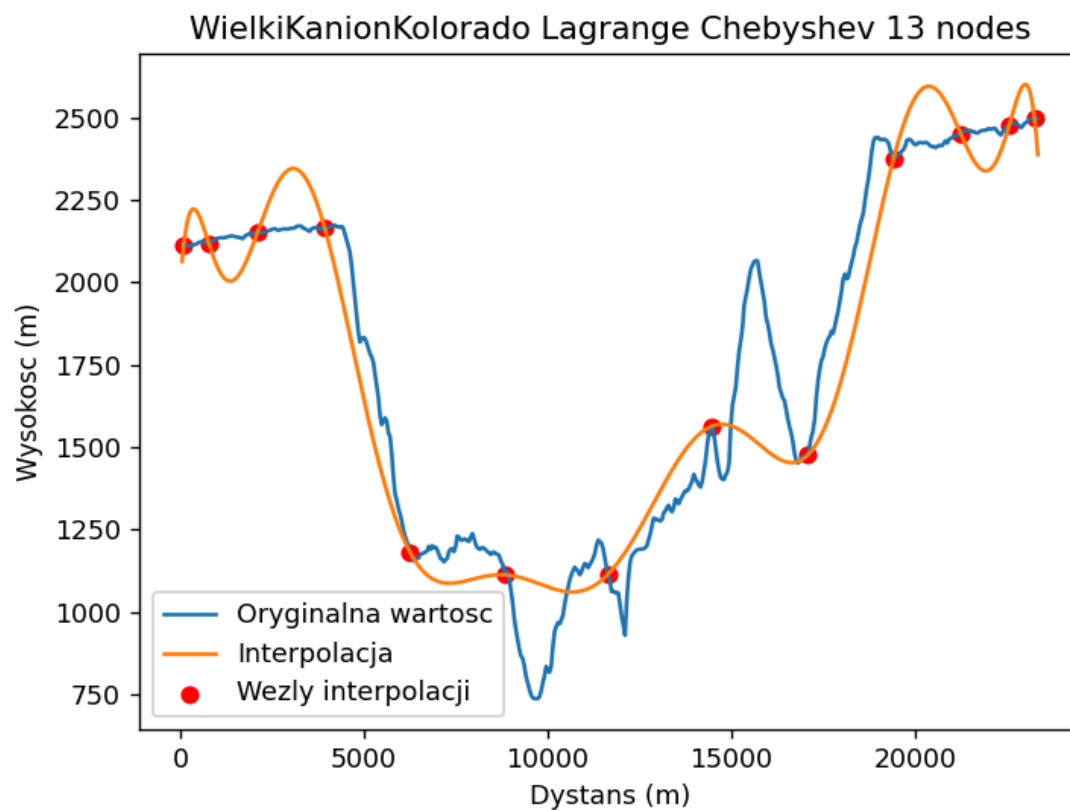
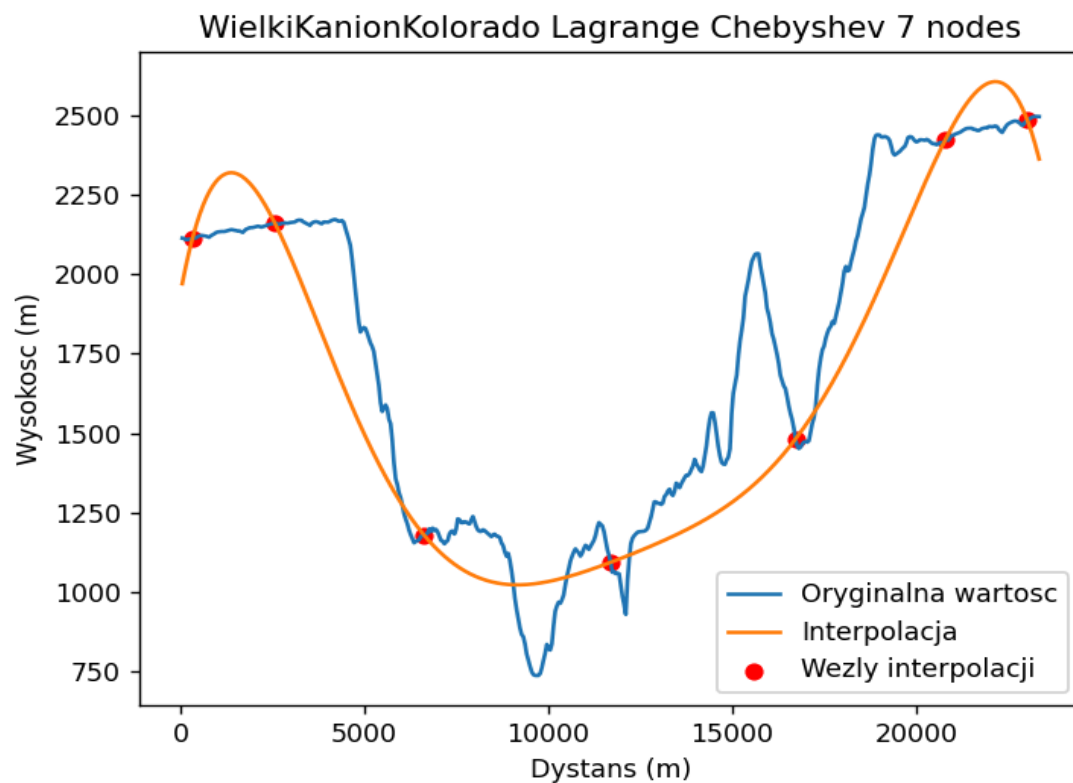
Wyniki dla metody Lagrange'a

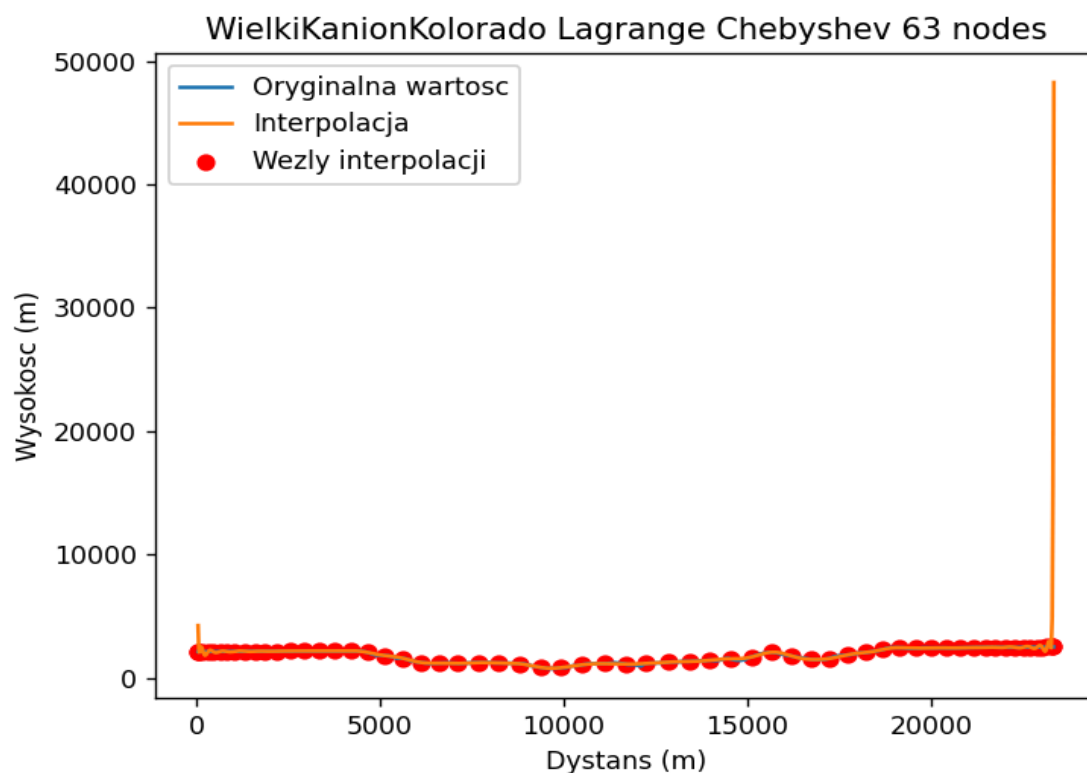
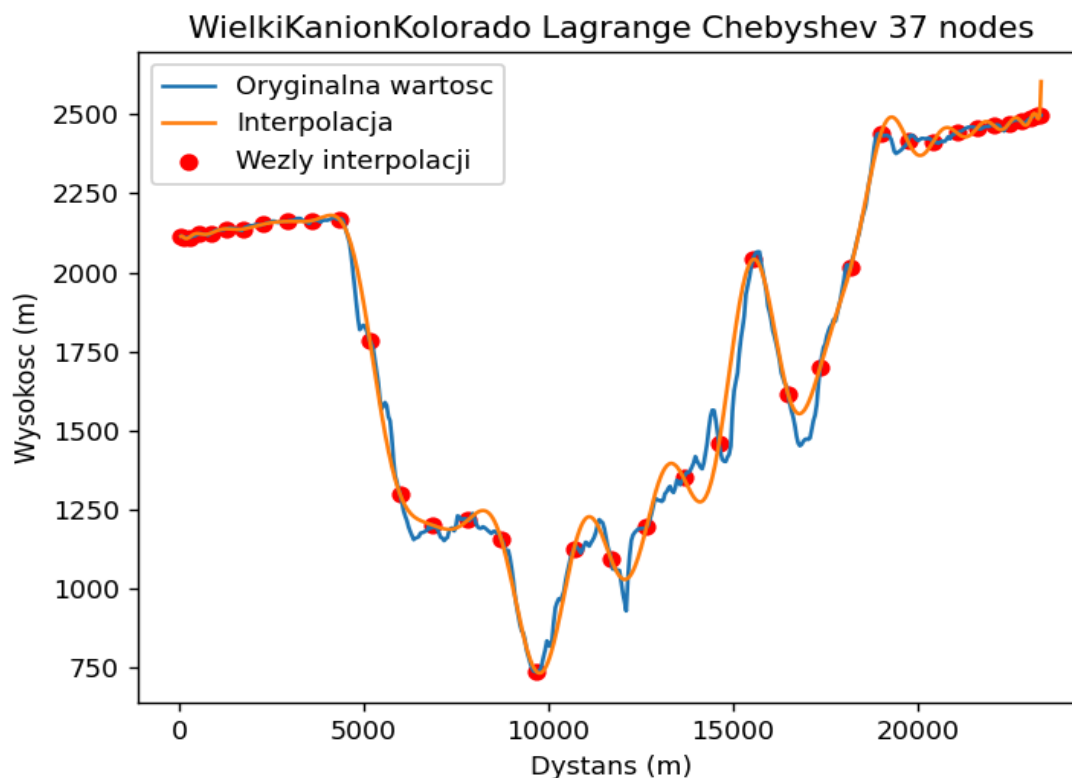




Jak widać metoda Lagrange'a nie sprawdziła się. Rezultat uzyskany dla 7 węzłów jest daleki od poprawnego, a dla większej ilości węzłów efekt Rungego dominuje wykres.

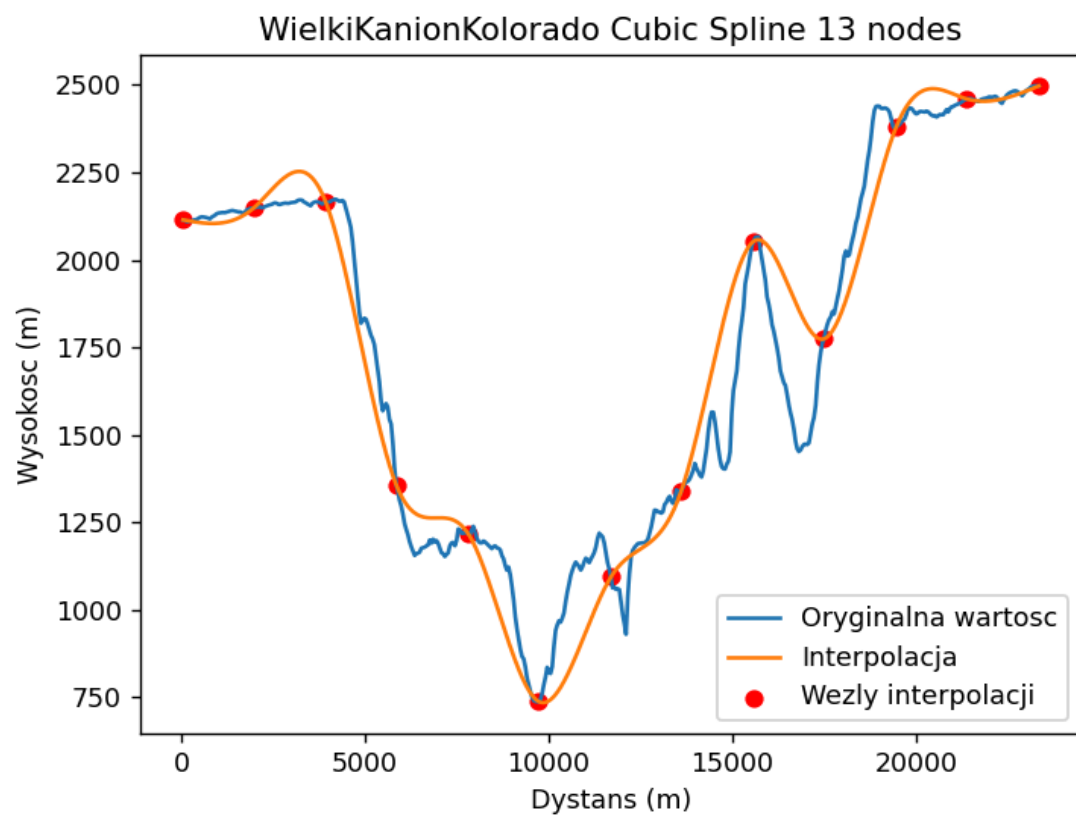
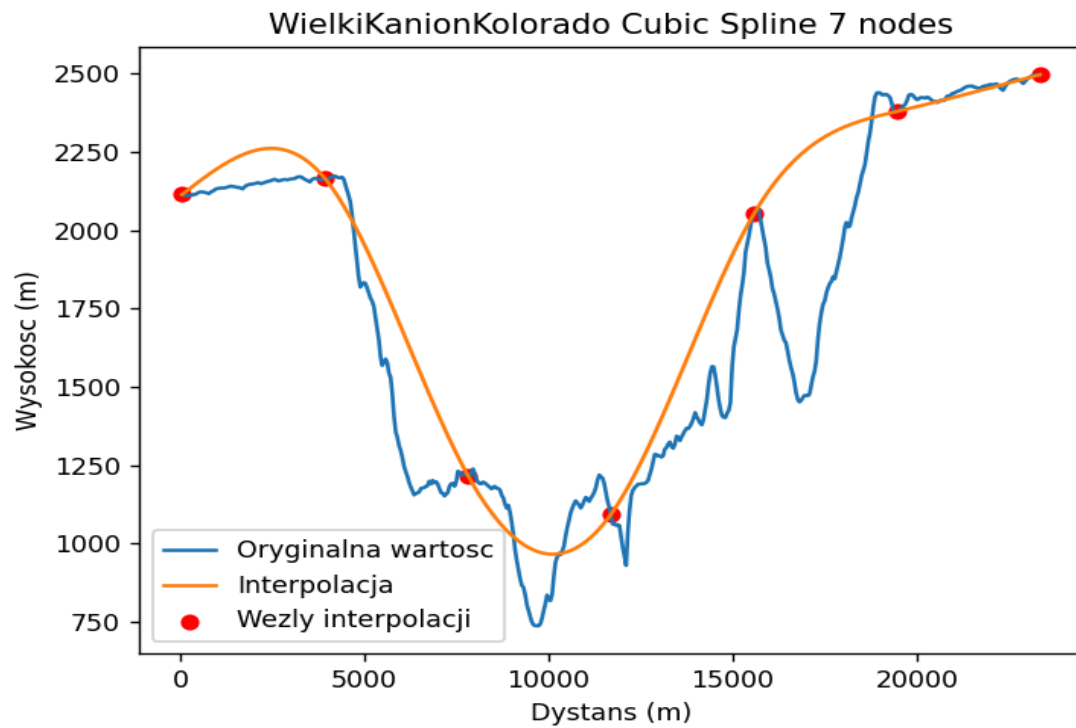
Wyniki dla metody Lagrange'a z węzłami Czebyszewa

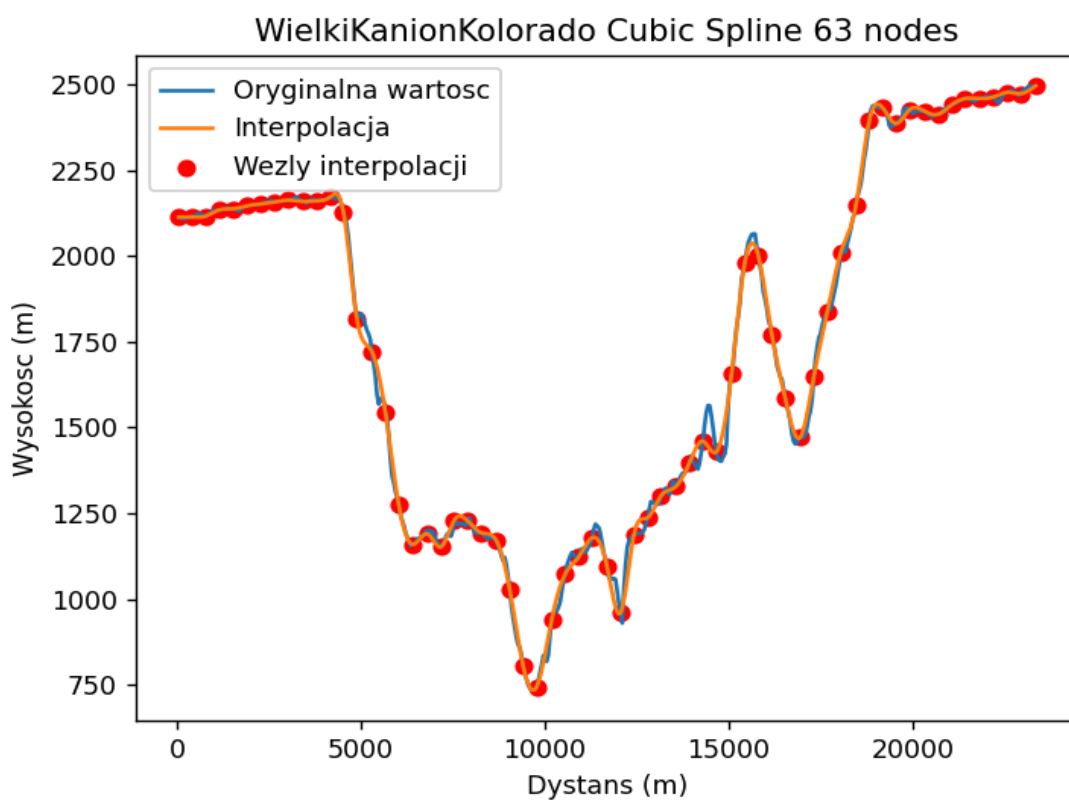
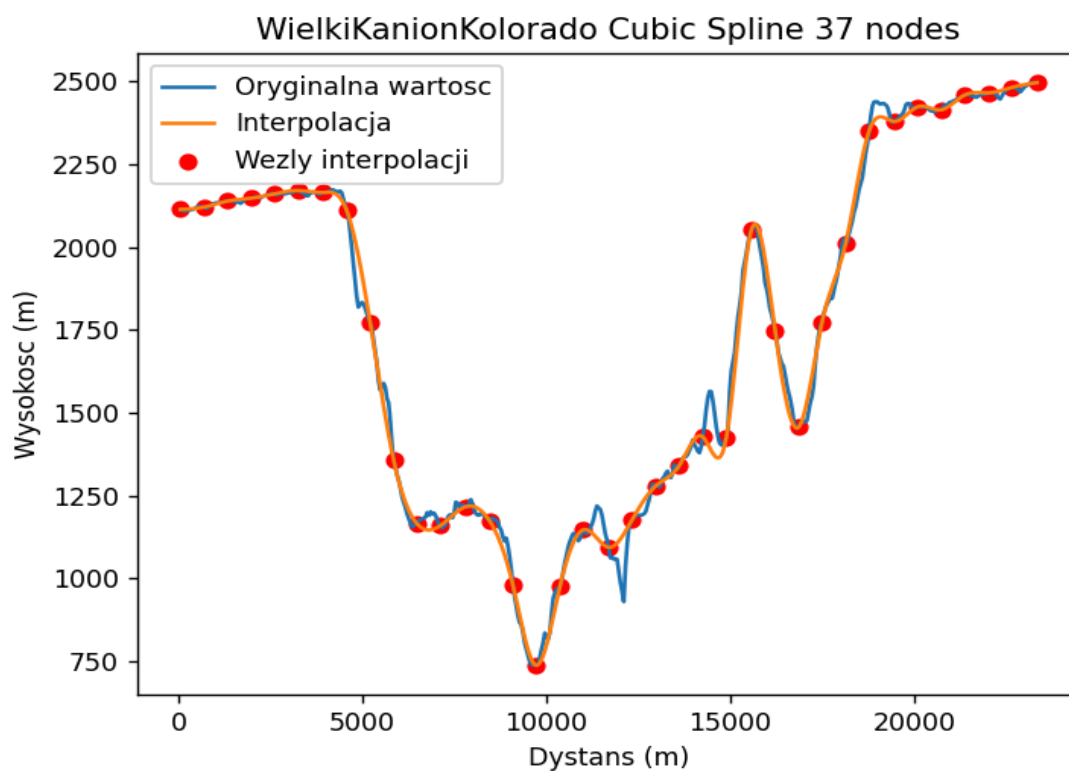




W tym przykładzie można zauważyć w jaki sposób rozmieszczone są węzły. Na wykresie przedstawiającym rozwiązanie dla 37 węzłów, widać zgrupowanie węzłów na krańcach przedziału funkcji, co skutkuje pogorszeniem interpolacji w środkowym przedziale. Oczywiście nie udało się uchronić od efektu Rungego.

Wyniki dla metody sklejania wielomianów trzeciego stopnia



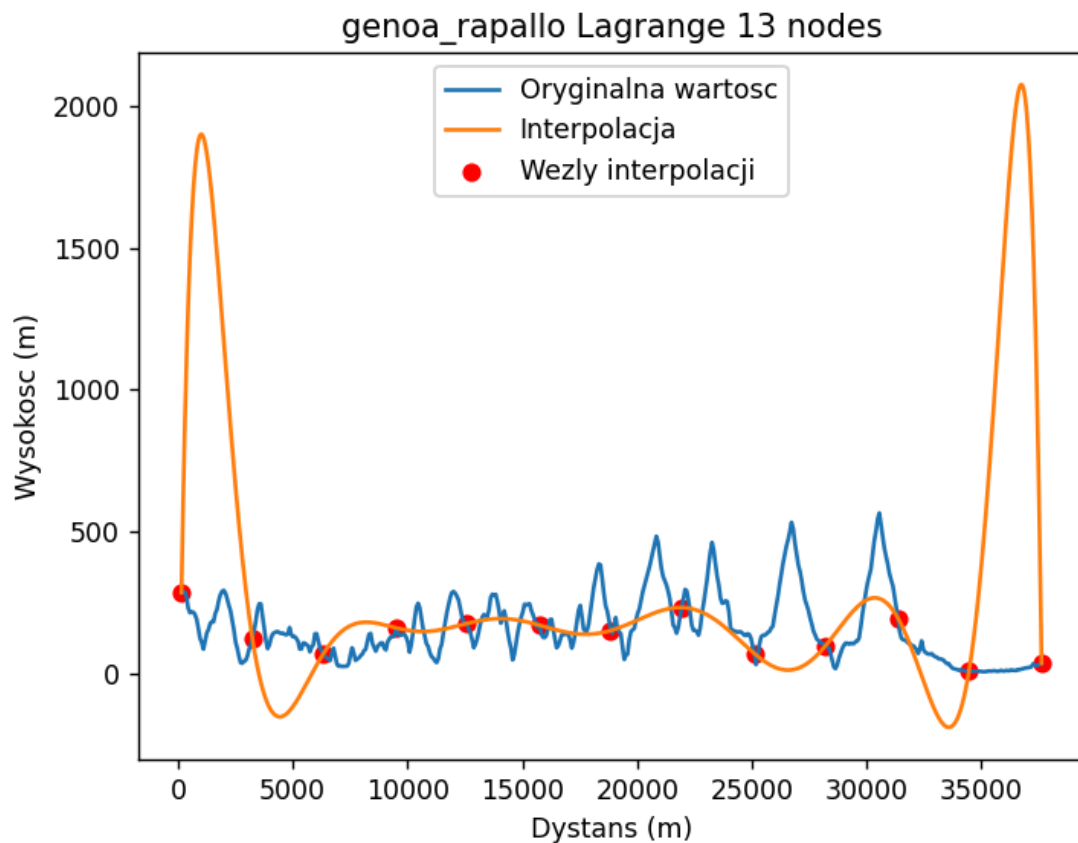


Jak widać metoda sklejania wielomianów trzeciego stopnia znowu przyniosła najlepsze rezultaty.

Profil C. Genoa Rapallo

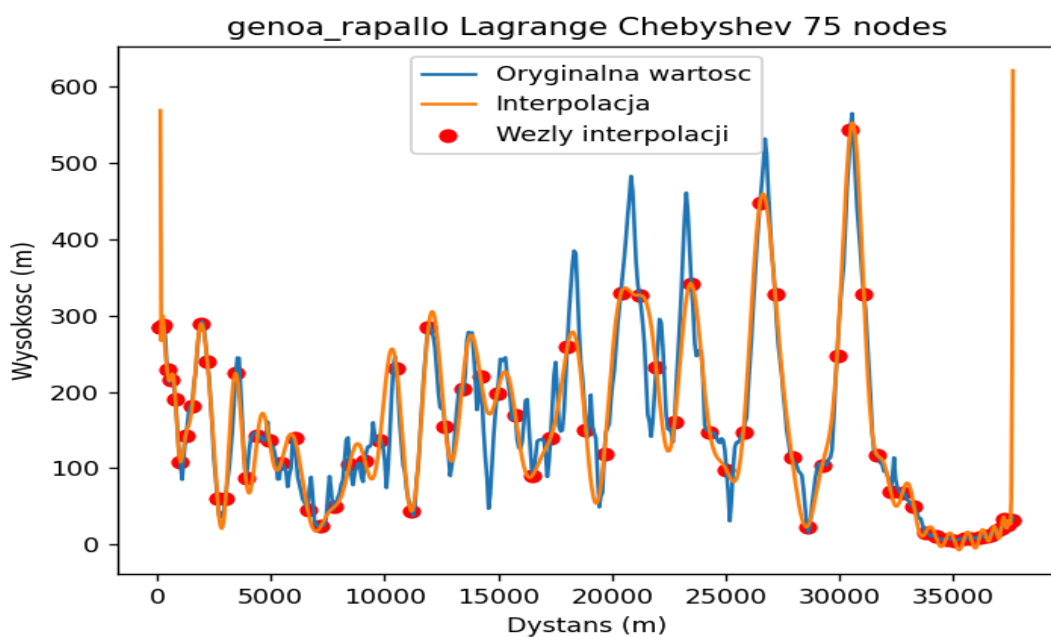
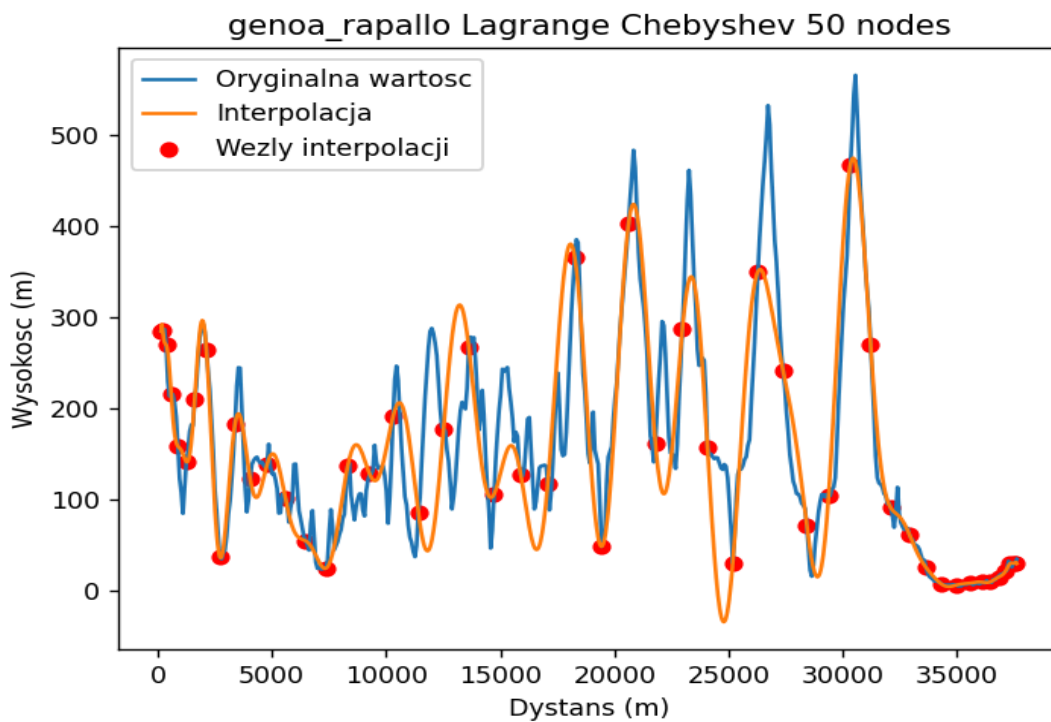
Trzeci profil wysokościowy przedstawia trasę, która jest bardzo dynamiczna oraz ciężka do przewidzenia. Składa się ona z wielu stromych wzniesień oraz spadków. Trasa ta powinna być ciężka do interpolacji.

Metoda Lagrange'a



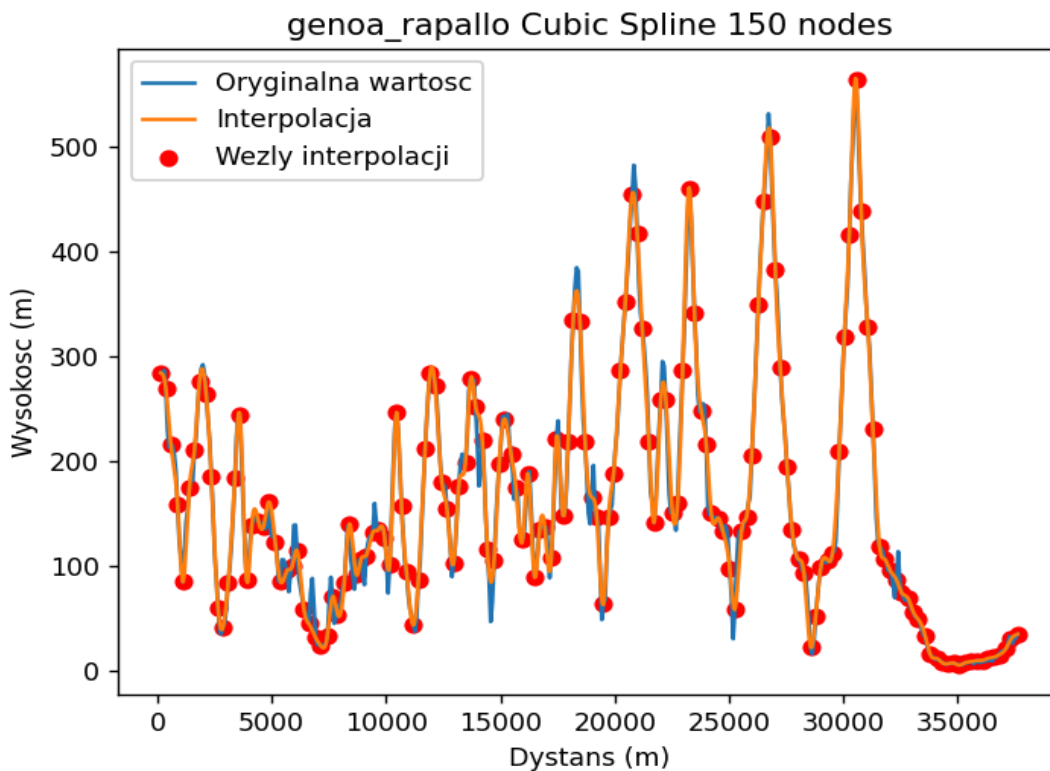
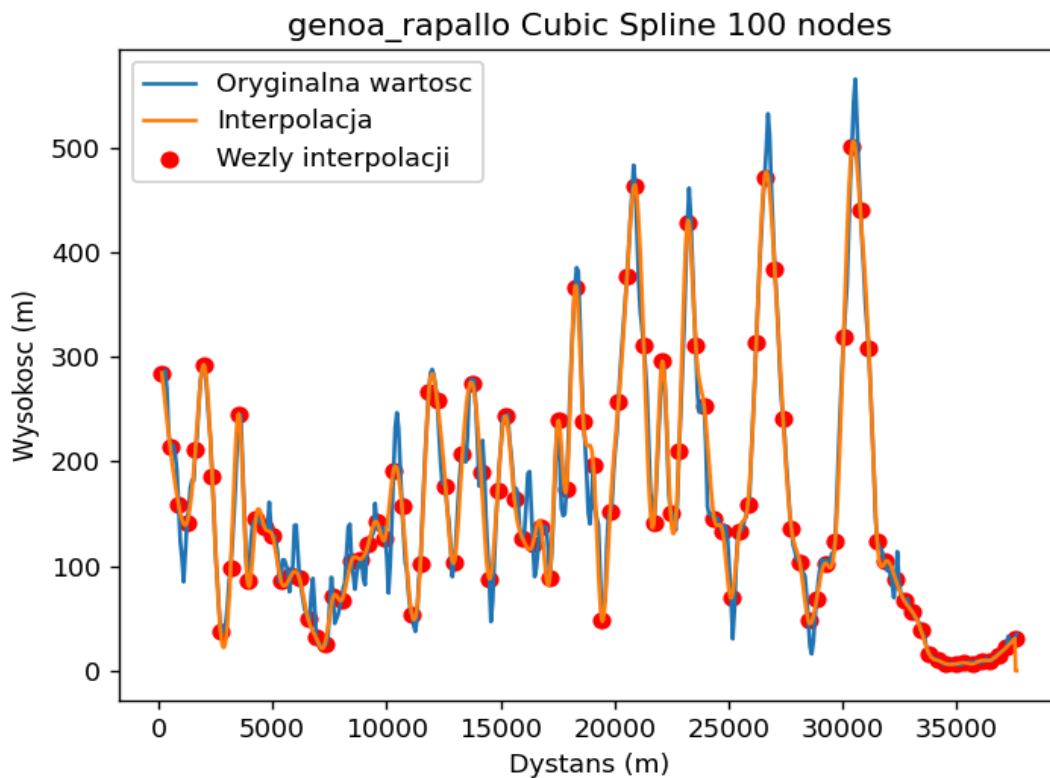
Jak widać, dla 13 węzłów występuje efekt Rungego, a wartości funkcji są nie dokładnie wyznaczone. Dalsza analiza tej metody nie ma sensu.

Metoda Lagrange'a z węzłami Czebyszewa



Ze względu na trudność trasy pozwoliłem sobie pominąć analizę dla mniejszej ilości węzłów. Łatwo zauważyć, że stosując metodę Lagrange'a z węzłami Czebyszewa drugiego rodzaju nie udało nam się uzyskać zadowalających wyników. Dla 50 węzłów wyniki nie były wystarczająco dokładne, a dla 75 węzłów dopadł nas efekt Rungego.

Metoda sklejania wielomianów trzeciego stopnia



Jak widać, metoda sklejania wielomianów trzeciego stopnia jest w stanie dopasować się do bardzo trudnych i nieprzewidywalnych funkcji.

Wnioski

Podsumowując, zarówno metoda Lagrange'a, jak i metoda sklejanie wielomianów trzeciego stopnia mogą być przydatnymi narzędziami podczas rozwiązywania zagadnień związanych z interpolacją. Metoda Lagrange'a cechuje się prostotą implementacji, jednak jej wadą jest podatność na efekt Rungego. Problem ten częściowo rozwiązuje generowanie węzłów Czebyszewa drugiego rodzaju, jednakże to również niesie ze sobą problemy, takie jak gromadzenie się węzłów na krańcach przedziału funkcji, co skutkuje obniżeniem dokładności interpolacji w środkowym przedziale funkcji. Metoda sklejanie wielomianów trzeciego stopnia jest trudniejsza w implementacji, jednakże ma ona znaczną przewagę nad metoda Lagrange'a. Ponieważ metoda ta ma charakter lokalny, co oznacza, że jest odporna na efekt Rungego (wartości wyznaczane są wielomianami niskiego stopnia). Dokładność tej metody wzrasta wraz z liczbą węzłów interpolacji. Nie powinniśmy łączyć tej metody z węzłami Czebyszewa, ponieważ mogłoby to spowodować pogorszenie jakości interpolacji w środkowym przedziale funkcji.