

Taller Integrador de Modelamiento y Computo Cientifico

En el libro *Looking at History Through Mathematics*, Rashevsky propone un modelo matematico para analizar la dinamica de produccion de inconformistas en una sociedad. Supongase que una sociedad tiene una poblacion total $x(t)$ individuos en el tiempo t , medido en anos, y que $x_i(t)$ representa el numero de individuos inconformistas en ese mismo instante. Se asume que todos los inconformistas que se aparean entre si producen descendencia inconformista, mientras que una proporcion fija r del resto de la descendencia tambien resulta inconformista. Sean b y d las tasas constantes de nacimiento y muerte de la sociedad, respectivamente. Si el apareamiento ocurre de forma aleatoria, el modelo se describe mediante el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias: $dx/dt = (b-d)x$, $dx_i/dt = (b-d)x_i + rb(x - x_i)$. Se define la proporcion de inconformistas como $p(t) = x_i(t)/x(t)$. El objetivo de este taller es realizar un estudio completo del modelo, tanto desde el punto de vista matematico como numerico y computacional, incluyendo una comparacion de eficiencia entre distintos lenguajes de programacion. Primero, demuestre rigurosamente que $p(t)$ satisface una ecuacion diferencial independiente del tamano total de la poblacion, usando la regla del cociente y sustituyendo el sistema original. Justifique cada paso algebraico e interprete el resultado obtenido, explicando por que no depende explicitamente de la tasa de mortalidad d . Identifique el equilibrio y discuta su significado social y estabilidad. Segundo, resuelva la ecuacion diferencial mediante separacion de variables, obtenga la solucion analitica explicita y evaluela para $p(0)=0.01$, $b=0.02$, $d=0.015$ y $r=0.1$ en el intervalo t en $[0,50]$. Calcule el valor exacto de $p(50)$ y analice el comportamiento cuando t tiende a infinito. Tercero, aproxime la solucion en el intervalo $[0,50]$ con paso $h=1$ usando los metodos de Euler explicito, Taylor de orden 2 y el metodo implicito del trapecio. Deduzca claramente cada formula iterativa. Para Taylor 2 calcule la segunda derivada necesaria y para el trapecio deduzca la expresion que permita despejar p_{n+1} . Para cada metodo implemente el algoritmo, genere tabla de valores, grafique la solucion junto con la solucion exacta, calcule el valor aproximado en $t=50$, determine el error absoluto y analice precision y comportamiento numerico. Finalmente, implemente los tres metodos en Python, C++ y Fortran. Ejecute un numero elevado de iteraciones (por ejemplo 10^7 pasos) para medir tiempos de ejecucion usando herramientas estandar de cada lenguaje. Construya una tabla comparativa de tiempos y analice cual lenguaje resulta mas eficiente, si el costo depende del metodo o del lenguaje, y que diferencias estructurales explican los resultados. El entregable debe incluir desarrollo matematico completo, implementaciones en los tres lenguajes, graficas comparativas, tablas de tiempos y un informe tecnico de maximo cinco paginas con analisis matematico y computacional.