

# Taller Integrador de Modelamiento y Computo Cientifico

En el libro Looking at History Through Mathematics, Rashevsky propone un modelo matematico para analizar la dinamica de produccion de inconformistas en una sociedad. Supongase que una sociedad tiene una poblacion total  $x(t)$  individuos en el tiempo  $t$ , medido en anos, y que  $x_i(t)$  representa el numero de individuos inconformistas en ese mismo instante. Se asume que todos los inconformistas que se aparean entre si producen descendencia inconformista, mientras que una proporcion fija  $r$  del resto de la descendencia tambien resulta inconformista. Sean  $b$  y  $d$  las tasas constantes de nacimiento y muerte de la sociedad, respectivamente. Si el apareamiento ocurre de forma aleatoria, el modelo se describe mediante el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:  $dx/dt = (b-d)x$ ,  $dx_i/dt = (b-d)x_i + rb(x - x_i)$ . Se define la proporcion de inconformistas como  $p(t) = x_i(t)/x(t)$ . El objetivo de este taller es realizar un estudio completo del modelo, tanto desde el punto de vista matematico como numerico y computacional, incluyendo una comparacion de eficiencia entre distintos lenguajes de programacion.

Primero, demuestre rigurosamente que  $p(t)$  satisface una ecuacion diferencial independiente del tamano total de la poblacion, usando la regla del cociente y sustituyendo el sistema original. Justifique cada paso algebraico e interprete el resultado obtenido, explicando por que no depende explicitamente de la tasa de mortalidad  $d$ . Identifique el equilibrio y discuta su significado social y estabilidad.

Segundo, resuelva la ecuacion diferencial mediante separacion de variables, obtenga la solucion analitica explicita y evaluela para  $p(0)=0.01$ ,  $b=0.02$ ,  $d=0.015$  y  $r=0.1$  en el intervalo  $t$  en  $[0,50]$ . Calcule el valor exacto de  $p(50)$  y analice el comportamiento cuando  $t$  tiende a infinito. Tercero, aproxime la solucion en el intervalo  $[0,50]$  con paso  $h=1$  usando los metodos de Euler explicito, Taylor de orden 2 y el metodo implicito del trapecio. Deduzca claramente cada formula iterativa. Para Taylor 2 calcule la segunda derivada necesaria y para el trapecio deduzca la expresion que permita despejar  $p_{n+1}$ . Para cada metodo implemente el algoritmo, genere tabla de valores, grafique la solucion junto con la solucion exacta, calcule el valor aproximado en  $t=50$ , determine el error absoluto y analice precision y comportamiento numerico. Finalmente, implemente los tres metodos en Python, C++ y Fortran. Ejecute un numero elevado de iteraciones (por ejemplo  $10^7$  pasos) para medir tiempos de ejecucion usando herramientas estandar de cada lenguaje. Construya una tabla comparativa de tiempos y analice cual lenguaje resulta mas eficiente, si el costo depende del metodo o del lenguaje, y que diferencias estructurales explican los resultados. El entregable debe incluir desarrollo matematico completo, implementaciones en los tres lenguajes, graficas comparativas, tablas de tiempos y un informe tecnico de maximo cinco paginas con analisis matematico y computacional.