Chapitre 4

Algorithmes de tri

Trier un ensemble d'objets consiste à les ordonner en fonction d'une relation d'ordre définie sur ces objets. Souvent, les objets sont indexés par une clé et la relation d'ordre porte sur cette clé. Par exemple, chaque étudiant inscrit à l'université d'Aix-Marseille reçoit un numéro qui constitue la clé d'accès à son dossier. On trie des objets lorsqu'ils sont nombreux et qu'on doit pouvoir y accéder rapidement : rechercher un élément dans un tableau non trié est une opération de complexité linéaire dans le nombre d'objets, alors que si le tableau est trié, la recherche peut être effectuée en temps logarithmique.

On dit qu'un algorithme de tri est

— *en place*, s'il n'utilise qu'un espace mémoire de taille constante pendant son exécution, (en plus de l'espace servant à stocker les objets à trier)

— *par comparaison*, si le tri s'effectue en comparant les objets entre eux. Lorsque les valeurs prises par ces objets sont peu nombreuses (par exemple, les années de naissance), il peut être plus efficace de comparer chaque objet aux valeurs possibles.

— Un tri est *stable* s'il préserve l'ordre d'apparition des objets en cas d'égalité des clés. Cette propriété est utile par exemple lorsqu'on trie successivement sur plusieurs clés différentes. Si l'on veut ordonner les étudiants par rapport à leur nom puis à leur moyenne générale, on veut que les étudiants qui ont la même moyenne apparaissent dans l'ordre lexicographique de leurs noms.

Dans ce chapitre, nous étudions

— des tris simples, *tri à bulle*, *tri par insertion*, *tri par sélection*, de complexité $O(n^2)$ en moyenne,

— des tris plus sophistiqués, *tris par fusion*, *tri par tas* et *tri rapide*, de

complexité $O(n \log n)$ en moyenne
— et quelques tris particuliers, parfois très efficaces mais pas toujours applicables, *tri par dénombrement* et *tri par base*.

Des travaux pratiques permettront d'étudier expérimentalement et de comparer la complexité de ces algorithmes.

En général les objets à trier sont stockés dans des tableaux, mais ce n'est pas toujours le cas. Lorsque les objets sont stockés dans des listes chainées, on peut soit les recopier au préalable dans un tableau temporaire, soit utiliser un tri adapté comme le tri par fusion.

4.1 Tri par sélection, tri par insertion, tri à bulle.

Le **tri par sélection** consiste simplement à *sélectionner* l'élément le plus petit de la suite à trier, à l'enlever, et à répéter itérativement le processus tant qu'il reste des éléments dans la suite. Au fur et à mesure les éléments enlevés sont stockés dans une pile. Lorsque la suite à trier est stockée dans un tableau on s'arrange pour représenter la pile dans le même tableau que la suite : la pile est représentée au début du tableau, et chaque fois qu'un élément est enlevé de la suite il est remplacé par le premier élément qui apparaît à la suite de la pile, et prends sa place. Lorsque le processus s'arrête la pile contient tous les éléments de la suite triés dans l'ordre croissant. Le tri par sélection est en $\Theta(n^2)$ dans tous les cas.

Algorithme 12: TriParSelection

entrée : $T[1, n]$ est un tableau d'entiers, $n \geq 1$.
résultat : les éléments de T sont ordonnés par ordre croissant.
début
  pour $i \coloneqq 1$ **à** $n - 1$ **faire**
    $j \coloneqq \text{IndMin}(T[i, n])$ # indice du plus petit élément de $T[i, n]$
    permuter $T[i]$ et $T[j]$

Exercice 1 Quel est l'invariant du tri par sélection ? La complexité de l'algorithme dépend-elle des données d'entrée ? Pourquoi la complexité est-elle quadratique dans tous les cas ?

Le **tri par insertion** consiste à *insérer* les éléments de la suite les uns après les autres dans une suite triée initialement vide. Lorsque la suite est stockée dans un tableau la suite triée en construction est stockée au début

du tableau. Lorsque la suite est représentée par une liste chainée on insère les maillons les uns après les autres dans une nouvelle liste initialement vide.

Algorithme 13: TriParInsertion¡

```
entrée : T[1, n] est un tableau d'entiers, n ≥ 1.
résultat : les éléments de T sont ordonnés par ordre croissant.
début
    pour i := 2 à n faire
        j := i # indice de l'élément à insérer dans T[1, i − 1]
        v := T[i] # valeur de l'élément à insérer
        tant que j > 1 et v < T[j − 1] faire
            T[j] := T[j − 1] # j − 1 est une case libre
            j := j − 1 # j est une case libre
        T[j] := v
```

Le tri effectue $n-1$ insertions. A la $i$ème itération, dans le pire des cas, l'algorithme effectue $i-1$ recopies. Le coût du tri est donc

$$\sum_{i=2}^{n}(i-1) = \frac{n(n-1)}{2} = O(n^2).$$

Dans le meilleur des cas le tri par insertion requiert seulement $O(n)$ traitements. C'est le cas lorsque l'élément à insérer reste à sa place, donc quand la suite est déja triée.On peut montrer que le tri par insertion est quadratique en moyenne.

Exercice 2 (difficile) On considère toutes les permutations de l'ensemble $S_n = \{1, \ldots, n\}$. On veut montrer que le tri par insertion sera quadratique en moyenne sur l'ensemble de ces permutations.

1. Soit T une permutation de S_n et soient $1 \leq i < j \leq n$. On définit $I_{i,j}(T) = 1$ si $T[i] > T[j]$ et $I_{i,j}(T) = 0$ sinon, et $I(T) = \sum_{i<j} I_{i,j}(T)$ (nombre d'inversions dans T). Montrez que $I(T)$ est exactement égal au nombre de fois que l'instruction $T[j] := T[j-1]$ est exécutée par l'algorithme de tri par insertion.
2. On choisit une permutation T de S_n au hasard, toutes les permutations ayant la même probabilité. Soit $i < j$. $I_{i,j}(T)$ est une variable aléatoire. Montrez que son espérance est égale à $\mathbb{E}(I_{i,j}(T)) = 1/2$. Montrez que $\mathbb{E}(I(T)) = n(n-1)/4$.
3. Comparez la complexité en moyenne et la complexité dans le pire des cas. Montrez que la complexité en moyenne est en $\Theta(n^2)$.

Le **tri à bulle** consiste à parcourir le tableau, tant qu'il n'est pas trié, et à permuter les couples d'éléments consécutifs mal ordonnés. On sait que le tableau est trié si lors d'un parcours, aucun couple d'éléments n'a été permuté.

Algorithme 14: TriBulle

entrée : $T[1, n]$ est un tableau d'entiers, $n \geq 1$.
résultat : les éléments de T sont ordonnés par ordre croissant.
début
  $M \coloneqq n - 1$
  tant que *le tableau n'est peut-être pas trié* **faire**
    pour $i := 1$ **à** M **faire**
      si $T[i] > T[i+1]$ **alors**
        permuter $T[i]$ et $T[i+1]$
    $M = M - 1$

Exercice 3 Dans l'algorithme du tri à bulle,

1. montrez qu'après k parcours du tableau (boucle interne), au moins k éléments sont à leur place,
2. déduisez-en que la complexité dans le pire des cas est en $\Theta(n^2)$,
3. montrez qu'après chaque parcours, le plus petit élément du tableau reste à sa place ou recule au plus d'une case,
4. déduisez-en que la complexité moyenne est en $\Theta(n^2)$ (pour tout entier $1 \leq i \leq n$, avec une probabilité $1/n$, l'élément minimal du tableau est situé à l'indice i),
5. montrez que dans le meilleur des cas, l'algorithme est linéaire,
6. montrez que le tri est stable et identifiez précisément la raison de cette propriété.

4.2 Tri par fusion et tri rapide

4.2.1 Tri par fusion (ou par interclassement)

Le tri par fusion (*merge sort* en anglais) implémente une approche de type diviser pour régner très simple : la suite à trier est tout d'abord scindée en deux suites de longueurs égales à un élément près. Ces deux suite sont ensuite triées séparément avant d'être fusionnées (ou interclassées). L'efficacité

de ce tri vient de l'efficacité de la fusion : le principe consiste à parcourir simultanément les deux suites triées dans l'ordre croissant de leur éléments, en extrayant chaque fois l'élément le plus petit. La fusion peut-être effectuée en conservant l'ordre des éléments de même valeur (le tri par fusion est stable)

Le tri par fusion est bien adapté aux listes chainées : pour scinder la liste il suffit de la parcourir en liant les éléments de rangs pairs d'un coté et les éléments de rangs impairs de l'autre. La fusion de deux listes chainées se fait facilement. Inversement, si la suite à trier est stockée dans un tableau il est nécessaire de faire appel à un tableau annexe lors de la fusion, (au moins dans ses implémentations les plus courantes).

Algorithme 15: TriParFusion

entrée : $T[m, n]$ est un tableau d'entiers, $m \leq n$.
résultat : les éléments de T sont ordonnés par ordre croissant.
début
  si $m < n$ **alors**
    TriFusion($T[m, \lfloor \frac{m+n}{2} \rfloor]$)
    TriFusion($T[\lfloor \frac{m+n}{2} \rfloor + 1, n]$)
    Interclassement(T[m, n])

La complexité de l'interclassement est $O(n)$ dans tous les cas. La complexité du tri par fusion vérifie donc l'équation récursive suivante :

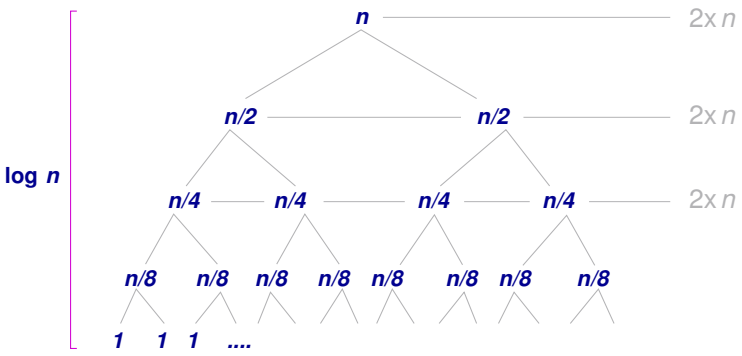
$$T(n) = 2 \times T(n/2) + O(n).$$

On en déduit que le tri par fusion est en $O(n \log n)$.

On le vérifie en cumulant les nombres de comparaisons effectuées à chaque niveau de l'arbre qui représente l'exécution de la fonction (voir figure ci-dessous) : chaque nœud correspond à un appel de la fonction, ses fils correspondent aux deux appels récursifs, et son étiquette indique la longueur de la suite. La hauteur de l'arbre est donc $\log_2 n$ et à chaque niveau le cumul des traitements locaux (scission et fusion) est $O(n)$, d'où on déduit un coût total de $O(n) \times \log_2 n = O(n \log n)$.

Algorithme 16: Interclassement

entrée : $T[m,n]$ est un tableau d'entiers, $m \leq n$, $T[m, \lfloor \frac{m+n}{2} \rfloor]$ et $T[\lfloor \frac{m+n}{2} \rfloor + 1, n]$ sont triés par ordre croissant.
résultat : les éléments de T sont ordonnés par ordre croissant.
début
  $i := m, j := \lfloor \frac{m+n}{2} \rfloor + 1, k := m$
  tant que $i \leq \lfloor \frac{m+n}{2} \rfloor$ *ET* $j \leq n$ **faire**
    si $T[i] \leq T[j]$ **alors**
      $S[k] := T[i], i := i + 1$
    sinon
      $S[k] := T[j], j := j + 1$
    $k := k + 1$
  # un des deux tableaux est vide
  tant que $i \leq \lfloor \frac{m+n}{2} \rfloor$ **faire**
    $S[k] := T[i], i := i + 1, k := k + 1$
    # recopie de la fin du premier tableau ; la fin du second est en place
  pour $i := 1$ *à* $k - 1$ **faire**
    $T[i] := S[i]$ # recopie de S dans T



Exercice 4

1. Qu'est-ce qui, dans l'algorithme d'interclassement, garantit la stabilité du tri fusion ?
2. Écrivez l'algorithme de fusion lorsque les données sont stockées dans une liste chaînée.

4.2.2 Tri rapide

Le *tri rapide* (*quicksort*) est une méthode de type *diviser pour régner* qui consiste, pour trier un tableau T, à le partitionner en deux sous-tableaux T_1 et T_2 contenant respectivement les plus petits et les plus grands éléments de T, puis à appliquer récursivement l'algorithme sur les tableaux T_1 et T_2.

Il existe plusieurs méthodes pour partitionner un tableau. Le principe général consiste à utiliser un élément particulier, le *pivot*, comme valeur de partage.

Dans l'algorithme qui suit, le pivot est le premier élément du tableau. On peut également choisir aléatoirement un élément quelconque du tableau (voir TD).

L'algorithme `partition` prend en entrée un tableau $T[m, n]$ (avec $m \leq n$) et réordonne T de façon à

- mettre en début de tableau les éléments $T[i]$ de $T[m+1, n]$ tels que $T[i] \leq T[m]$,
- mettre en fin de tableau les éléments $T[i]$ de $T[m+1, n]$ tels que $T[i] > T[m]$,
- placer $T[m]$ entre les deux.

Il retourne l'indice de $T[m]$ dans le nouveau tableau : $T[m]$ s'appelle le *pivot*.

Algorithme 17: partition

```
entrée : T[m, n] est un tableau d'entiers.
sortie : l'indice du pivot dans le tableau réarrangé
début
    pivot := T[m]
    i := m + 1 # indice où insérer le premier élément ≤ T[m]
    pour j := m + 1 à n faire
        # j est l'indice de l'élément courant
        si T[j] ≤ pivot alors
            permuter T[i] et T[j]
            i := i + 1
    permuter T[m] et T[i − 1]
    retourner i − 1
```

Le `QuickSort` consiste à partitionner un tableau $T[m, n]$ autour du pivot $T[m]$ puis à trier récursivement chacune des deux parties $T[m, IndPivot-1]$ et $T[IndPivot+1, n]$ à l'aide du `QuickSort`.

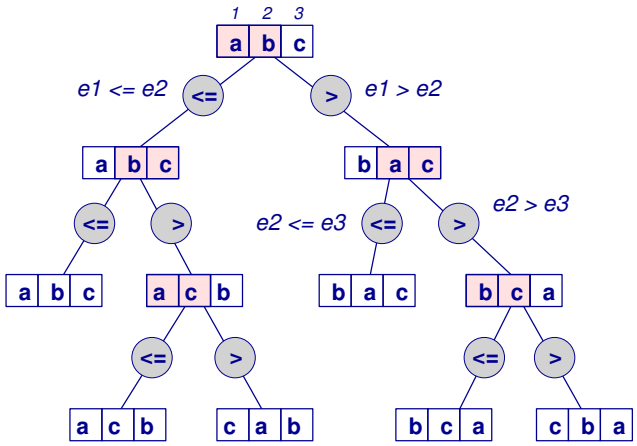
Algorithme 18: QuickSort

entrée : $T[m, n]$ est un tableau d'entiers.
sortie : T est trié par ordre croissant
début
  si $m < n$ **alors**
    IndPivot = partition($T[m, n]$)
    QuickSort(T[m, IndPivot − 1])
    QuickSort(T[IndPivot + 1, n])

On peut montrer que la complexité du tri rapide est $O(n \log n)$ en moyenne, mais aussi $O(n^2)$ dans le pire des cas (voir une étude de la complexité en TD). En pratique, c'est l'algorithme le plus utilisé et très souvent, le plus rapide.

4.3 Complexité optimale d'un algorithme de tri par comparaison

L'*arbre de décision* d'un tri par comparaison représente le comportement du tri dans toutes les configurations possibles. Les configurations correspondent à toutes les permutations des objets à trier, en supposant qu'ils soient tous comparables et de clés différentes. S'il y a n objets à trier, il y a donc $n!$ configurations possibles. On retrouve toutes ces configurations sur les feuilles de l'arbre, puisque deux permutations initiales distinctes ne peuvent pas produire le même comportement du tri : en effet, dans ce cas le tri n'aurait pas fait son travail sur un des deux ordonnancements. Chaque nœud de l'arbre correspond à une comparaison entre deux éléments et a deux fils, correspondants aux deux ordres possibles entre ces deux éléments.



Sur la figure ci-dessus nous avons représenté l'arbre de décision du tri par insertion sur une suite de trois éléments. A la racine de l'arbre le tri compare tout d'abord les deux premiers éléments de la suite a et b, afin d'insérer l'élément b dans la suite triée constituée uniquement de l'élément a. Suivant leur ordre les deux éléments sont permutés (fils droit) ou laissés en place (fils gauche). Au niveau suivant l'algorithme compare les éléments de rang 2 et de rang 3 afin d'insérer l'élément de rang 3 dans la suite triée constituée des 2 premiers éléments, et ainsi de suite. Les branches de l'arbre de décision du tri par insertion n'ont pas toutes la même longueur du fait que dans certains cas l'insertion d'un élément est moins coûteuse, en particulier quand l'élément est déjà à sa place.

Les feuilles de l'arbre représentent toutes les permutations du tableau en entrée. Puisque le nombre de permutations de n éléments est $n!$, l'arbre de décision d'un tri a donc $n!$ feuilles. On peut montrer facilement, par récurrence sur h, que le nombre de feuilles n_f d'un arbre binaire de hauteur h, vérifie $n_f \leq 2^h$. On en déduit que la hauteur h de l'arbre de décision vérifie

$$h \geq \log(n!)$$

or, d'après la formule de Stirling [1]

$$\log(n!) \sim \log\sqrt{2\pi n} + \log\left(\frac{n}{e}\right)^n = \Theta(n\log\, n)$$

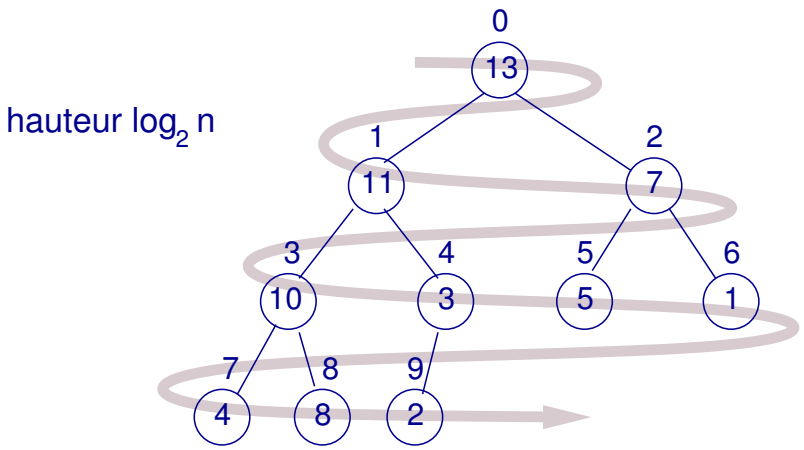
1. sans utiliser la formule de Stirling, on peut remarquer que $(\frac{n}{2})^{\frac{n}{2}} \leq n! \leq n^n$, ce qui conduit directement à $\log(n!) = \Theta(n \log n)$.

et donc la hauteur minimale de l'arbre est en $\Omega(n\log\ n)$.

Comme la hauteur de l'arbre est aussi la longueur de sa plus longue branche, on en conclut qu'aucun tri **par comparaison** ne peut avoir une complexité dans le pire des cas inférieure à $O(n \times \log\ n)$.

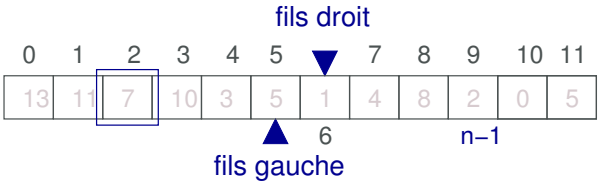
4.4 Tri par tas.

Un *tas* (*heap* en anglais) est un arbre binaire étiqueté presque complet : tous ses niveaux sont remplis sauf peut-être le dernier, qui est rempli à partir de la gauche jusqu'à un certain nœud. Cette disposition entraîne que l'arbre est forcément presque complètement équilibré (i.e. toutes ses branches ont la même longueur à un élément près), et les plus longues branches sont à gauche. La hauteur d'un tas contenant n éléments, i.e. son nombre de niveaux, est donc $\lfloor \log_2\ n \rfloor + 1$ (le nombre de fois que l'on peut diviser n par 2 avant d'obtenir 1).



Habituellement les tas sont représentés dans des tableaux. Les valeurs du tas sont stockées dans les premières cases du tableau. Si le tas est composé de n éléments, ces derniers apparaissent donc aux indices 0, 1,..., $n-1$. La racine du tas figure dans la case d'indice 0. La disposition des éléments du tas dans le tableau correspond à un parcours de l'arbre par niveau, en partant de la racine et de gauche à droite. Le fils gauche du nœud qui figure à l'indice i, s'il existe, se trouve à l'indice $\text{FilsG}(i) = 2 \times i + 1$, et son fils

droit, s'il existe, se trouve à l'indice FilsD(i) $= 2 \times i + 2$. Inversement, le père du nœud d'indice i non nul se trouve à l'indice $\lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor$.



Si le dernier nœud du tas se trouve à la position $n-1$, son père se trouve à la position $\lfloor \frac{n}{2} - 1 \rfloor$. C'est le dernier nœud qui a au moins un fils. Les feuilles de l'arbre se trouvent donc entre la position $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ et la position $n-1$ dans le tableau puisqu'il n'y a pas de feuilles avant le dernier père.

On définit ensuite une propriété sur les tas : chaque nœud est dans une relation d'ordre fixée avec ses fils.

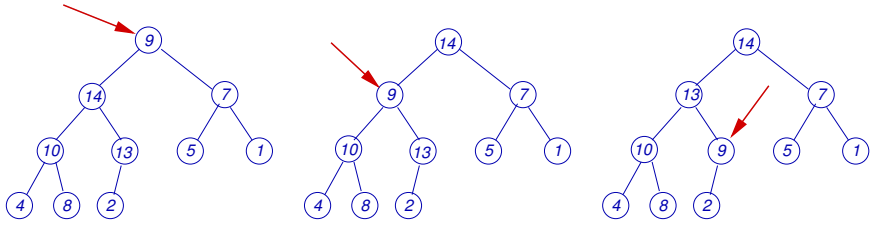
Un tas possède la propriété *max-heap* (resp. *min-heap*) si tout nœud porte une valeur supérieure ou égale (resp. inférieure ou égale) à celle de ses fils : $T[\texttt{pere}(i)] \geq T[i]$ (resp. $T[\texttt{pere}(i)] \leq T[i]$). Un *tax-max* (resp. *tas-min*) est un tas qui vérifie la propriété *max-heap* (resp. *min-heap*).

Le plus grand élément d'un tas-max T est $T[0]$; son plus petit élément est sur une feuille.

Pour le tri par tas on utilise des tas-max. Les opérations et les techniques présentées dans ce chapitre s'appliquent de la même façon à des tas basés sur l'ordre inverse. Les opérations essentielles sur les tas sont :

— la construction du tas,
— l'extraction du maximum,
— l'ajout d'une nouvelle valeur,
— la modification de la valeur d'un nœud.

L'opération *Entasser* est une opération de base sur les tas. Elle est utilisée notamment pour la construction des tas ou encore pour l'extraction de la valeur maximale. Elle consiste à reconstruire le tas lorsque seule la racine viole (éventuellement) la propriété de supériorité entre un nœud et ses fils, en faisant descendre dans l'arbre l'élément fautif par des échanges successifs.



Fonction Entasser(i,T,n)

entrée : T est un tas ; le fils gauche et le fils droit du noeud d'indice i vérifient la propriété *Max-heap* ; ce n'est pas forcément le cas du noeud d'indice i.

sortie : La propriété *max-heap* est vérifiée par le noeud d'indice i.

début

$iMax \leftarrow i$

si (FilsG(i) $< n$) ET (T[FilsG(i)] $> T[iMax]$) **alors**

  $iMax :=$ FilsG(i)

si (FilsD(i) $< n$) ET (T[FilsD(i)] $> T[iMax]$) **alors**

  $iMax :=$ FilsD(i)

si ($iMax \neq i$) **alors**

  Echanger $T[i]$ et $T[iMax]$

  Entasser($iMax$,T,n)

— la condition (FilsG(i) $< n$) signifie que le fils gauche du nøeud i existe ;

— si le nœud i est une feuille ou si $T[i]$ est supérieure aux valeurs portées par ses fils, l'algorithme ne fait rien ;

— si le nœud i a des fils qui portent des valeurs supérieures à $T[i]$, la fonction échange cette valeur avec la plus grande des valeurs de ses fils et effectue un appel récursif sur le fils qui porte la valeur $T[i]$.

La fonction **Entasser** a un coût en $O(\log_2 n)$ puisque, dans le pire des cas, il faudra parcourir une branche entièrement.

Extraction de la valeur maximale. La valeur maximale d'un tas qui vérifie la propriété *Max-heap* est à la racine de l'arbre. Pour un tas de taille n stocké dans le tableau T c'est la valeur $T[0]$ si n est non nul. L'extraction de la valeur maximale consiste à recopier en $T[0]$ la dernière valeur du tas

$T[n-1]$, à décrémenter la taille du tas, puis à appliquer l'opération *Entasser* à la racine du tas, afin que la nouvelle valeur de la racine prenne sa place.

Fonction ExtraireLeMax(T, n)

entrée : T est un tableau, n est la taille du tas stocké dans T.
sortie : Retourne la valeur maximale et met à jour le tas.
début
  $max := T[0]$
  $T[0] := T[n-1]$
  Entasser$(0, T, n-1)$
  retourner $\langle max, T, n-1 \rangle$
fin

Exercice 5 Écrivez les algorithmes

1. **InsertVal**(T, n, v) qui insère une valeur v dans un tasmax T de n éléments (on suppose que l'on peut accéder à $T[n]$)
2. **SupprimeNoeud**(T, n, i) qui supprime le nœud i dans le tasmax T de n éléments.

Dans les deux cas, le tas résultant et un tasmax.

Principe général du tri par tas. Supposons que l'on ait à trier une suite de n valeurs stockée dans un tableau T. On commence par construire un tas dans T avec les valeurs de la suite. Ensuite, tant que le tas n'est pas vide on répète l'extraction de la valeur maximale du tas. Chaque fois, la valeur extraite est stockée dans le tableau immédiatement après les valeurs du tas. Lorsque le processus se termine on a donc la suite des valeurs triée dans le tableau T.

Construction du tas.

Les valeurs de la suite à trier sont stockées dans le tableau T. La procédure consiste à parcourir les noeuds qui ont des fils et à leur appliquer l'opération *Entasser*, en commençant par les noeuds qui sont à la plus grande profondeur dans l'arbre. Il suffit donc de parcourir les noeuds dans l'ordre décroissant des indices et en partant du dernier noeud qui a des fils, le noeud d'indice $\lfloor (n/2) \rfloor - 1$. L'ordre dans lequel les noeuds sont traités garantit que les sous-arbres sont des tas.

Fonction ConstruireUnTas(T, n)

entrée : T est un tableau, n est un entier.
sortie : Structure les n premiers éléments de T sous forme de tas.
début
  pour $i := \lfloor n/2 - 1 \rfloor$ **à** 0 **faire**
    Entasser(i, T, n)
  finpour
  retourner T
fin

Invariant : tous les nœuds de T d'indice $> i$ vérifient la propriété *max-heap*.

Complexité de la construction. De façon évidente la complexité est au plus $O(n \log n)$. En effet la hauteur du tas est $\log n$ et on effectue $n/2$ fois l'opération Entasser. En fait le coût de la construction est $O(n)$. En effet, la fonction effectue un grand nombre d'entassements sur des arbres de petites hauteur (pour les noeuds les plus profonds), et très peu d'entassements sur la hauteur du tas.

Soit h la hauteur du tas construit T. Il a 1 noeud de hauteur h, au plus 2 noeuds de hauteur $h-1$, ..., et au plus 2^{h-1} noeuds de hauteur 1. Soit K une constante telle que la complexité de `Entasser(i, T, n)` soit $\leq Kh_i$, où h_i est la hauteur du sous-arbre de racine i. La complexité $C(n)$ de l'algorithme `ConstruitTas` vérifie donc :

$$C(n) \leq K(h+2(h-1)+4(h-2)+\cdots+2^{h-1}) \leq K2^h(\frac{h}{2^h}+\frac{h-1}{2^{h-1}}+\cdots+\frac{1}{2}).$$

La série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2^k}$ converge vers 2. En effet,

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-1+1}{2^k} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-1}{2^{k-1}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{S}{2} + 1.$$

Comme $2^h \leq n$, on en déduit que $C(n) \leq 2Kn$. L'algorithme `ConstruitTasMax` est linéaire dans le pire des cas. Cette complexité est atteinte si T est strictement croissant.

Exercice 6 Construisez un tas à partir de $T = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]$.

Exercice 7 Si l'on utilise l'algorithme `InsertVal` pour construire un tas-max de n éléments, quel est la complexité de l'algorithme ?

Tri par tas.

On construit un tas. On utilise le fait que le premier élément du tas est le plus grand : autant de fois qu'il y a d'éléments, on extrait le premier du tas et on reconstruit le tas avec les éléments restants. Enlever le premier élément consiste simplement à l'échanger avec le dernier du tas et à décrémenter la taille du tas. On rétablit la propriété de tas en appliquant l'opération *Entasser* sur ce premier élément.

```
Fonction TriParTas(T, n)
    entrée : T est un tableau de n éléments.
    sortie : Trie le tableau T par ordre croissant.
    début
        ConstruireUnTas(T, n)
        pour i := n − 1 à 1 faire
            Echanger(T, 0, i)
            Entasser(0, T, i)
        retourner T
```

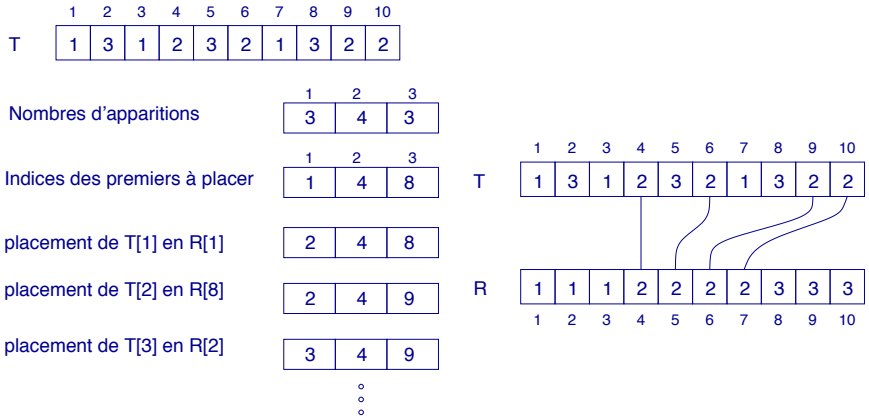
La construction du tas coûte $O(n)$. On effectue ensuite n fois un échange et l'opération Entasser sur un tas de hauteur au plus $\log n$. La complexité du tri par tas est donc $O(n \log n)$.

4.5 Tri par dénombrement, tri par base.

4.5.1 Tri par dénombrement

Le tri par dénombrement (*counting sort*) est un tri sans comparaisons qui est stable, c'est-à-dire qu'il respecte l'ordre d'apparition des éléments dont les clés sont égales. Le tri par dénombrement commence par recenser les éléments pour chaque valeur possible des clés. Ce comptage préliminaire permet de connaître, pour chaque clé c, la position finale du premier élément de clé c qui apparaît dans la suite à trier. Sur l'exemple ci-dessous on a recensé dans le tableau T, 3 éléments avec la clé 1, 4 éléments avec la clé 2 et 3 éléments avec la clé 3. On en déduit que le premier élément avec la clé 1 devra être placé à la position 1, le premier élément avec la clé 2 devra être placé à la position 4, et le premier élément avec la clé 3 devra être placé à la position 8. Il suffit ensuite de parcourir une deuxième fois les éléments à trier et de les placer au fur et à mesure dans un tableau annexe (le tableau R de la figure), en n'oubliant pas, chaque fois qu'un élément de clé c est

placé, d'incrémenter la position de l'objet suivant de clé c. De cette façon les éléments qui ont la même clés apparaissent nécessairement dans l'ordre de leur apparition dans le tableau initial.



La suite des objets à trier est parcourue deux fois, et la table Nb contenant le nombre d'occurrences de chaque clé est parcourue une fois pour l'initialiser. La complexité finale est donc $O(n+k)$ si les clés des éléments à trier sont comprises entre 0 et k. Le tri par dénombrement est dit *linéaire* (modulo le fait que k doit être comparable à n).

Exercice 8 [CLRS] Décrivez un algorithme de complexité $O(n+k)$ qui prend en entrée un tableau T comprenant n entiers compris entre 0 et k et qui pré-traite T de manière à pouvoir répondre à n'importe quelle requête du type *Combien le tableau T a t-il d'éléments dans l'intervalle* $[a, b]$? en temps $O(1)$.

4.5.2 Tri par base.

Le tri par dénombrement n'est pas applicable lorsque les valeurs que peuvent prendre les clés sont très nombreuses. Le principe du tri par base (*radix sort*) consiste, dans ce type de cas, à fractionner les clés, et à effectuer un tri par dénombrement successivement sur chacun des fragments des clés.

Fonction TriParDenombrements(T, n)

entrée : T est un tableau de n éléments.
sortie : R contient les éléments de T triés par ordre croissant.
début
  /* Initialisations */
  pour $i := 1$ **à** k **faire**
    $Nb[i] := 0$
  /* Calcul des nombres d'apparitions */
  pour $i := 1$ **à** n **faire**
    $Nb[T[i]] := Nb[T[i]] + 1$
  /* Calcul des indices du premier */
  $Nb[k] := n - Nb[k] + 1$
  /* Élément de chaque catégorie */
  pour $i := k - 1$ **à** 1 **faire**
    $Nb[i] := Nb[i + 1] - Nb[i]$
  /* Recopie des éléments originaux du tableau T dans R */
  pour $i := 1$ **à** n **faire**
    $R[Nb[T[i]]] := T[i]$
    $Nb[T[i]] := Nb[T[i]] + 1$
  retourner R

Si on considère les fragments dans le bon ordre (i.e. en commençant par les fragments de poids le plus faible), après la dernière passe, l'ordre des éléments respecte l'ordre lexicographique des fragments, et donc la suite est triée.

Considérons l'exemple suivant dans lequel les clés sont des nombres entiers à au plus trois chiffres. Le fractionnement consiste simplement à prendre chacun des chiffres de l'écriture décimale des clés. La colonne de gauche contient la suite des valeurs à trier, la colonne suivante contient ces mêmes valeurs après les avoir triées par rapport au chiffre des unités, ... Dans la dernière colonne les valeurs sont effectivement triées. Du fait que le tri par dénombrement est stable, si des valeurs ont le même chiffre des centaines, alors elles apparaîtront dans l'ordre croissant de leurs chiffres des dizaines, et si certaines ont le même chiffre des dizaines alors elles apparaîtront dans l'ordre croissant des chiffres des unités.

536	592	427	167
893	462	536	197
427	893	853	427
167	853	462	462
853	536	167	536
592	427	592	592
197	167	893	853
462	197	197	893

Supposons que l'on ait n valeurs dont les clés sont fractionnées en c fragments avec k valeurs possibles pour chaque fragment. Le coût du tri par base est alors $O(c \times n + c \times k)$ puisqu'on va effectuer c tris par dénombrement sur n éléments avec des clés qui auront k valeurs possibles.

Si $k = O(n)$ on peut dire que le tri par base est linéaire. Dans la pratique, sur des entiers codés sur 4 octets que l'on fragmente en 4, le tri par base est aussi rapide que le *Quick Sort*.

Exercice 9 [CLRS] Montrez comment trier n entiers compris entre 0 et $n^2 - 1$ en temps $O(n)$.