Optimisation Combinatoire Avancée : Etude de l'article "Benders Decomposition for Large-Scale Uncapacitated Hub Location"

Felix QUINTON - Abdelkader BELDJILALI

Table des matières

Introduction

L'article étudié, [CCL11, *Benders Decomposition for Large-Scale Uncapacitated Hub Location*], présente un algorithme exact qui permet de traiter des instances impliquant jusqu'à 500 noeuds et 250 000 types de marchandises transportées. Pour ce faire, une décomposition de Benders améliorée par divers techniques est utilisée pour en augmenter l'efficacité et la robustesse.

1 Problématique générale

Le problème de localisation traité dans l'article est connu sous l'appellation *Uncapacitated Hub Location Problem with Multiple Assignments* (UHLPMA). Il est NP-difficile donc peu tractable pour des grandes instances. L'idée générale est de transporter dans un réseau des entités/marchandises d'une origine O vers une destination D de manière la plus efficace possible.

Description du problème UHLPMA Soient un graphe orienté G(N,A) constitué de N noeuds représentant des centres d'activité tel que des aéroports et de A arcs et H ⊆ N un sous-ensemble[1] de candidats destinés potentiellement à devenir des Hubs. On ne connaît pas à l'avance le nombre de ces hubs, uniquement leurs coûts d'installation. La capacité des hubs et les flux ne sont pas bornés. En outre, le caractère *Multiple Assignement* fait référence au fait que chaque centre Origine/Destination (O/D) peut alimenter/être alimenté par plusieurs hub. K représentera l'ensemble des marchandises dont les noeuds d'origine et de destination appartiennent à N. W_k désignera la quantité de marchandise k ∈ K à transporter d'une origine o(k) ∈ N vers une destination d(k) ∈ N. Les coûts fixes de transformation d'un aéroport i ∈ H en hub seront notés f_i. Les coûts variables de transport, ou distance entre deux noeuds i et j, seront désignés par d_{ij}. L'objectif est de choisir les aéroports qui vont devenir des hubs et de déterminer les flux des marchandises dans le réseau de manière à minimiser les coûts fixes et les coûts variables de transport de marchandises en mettant en place des hubs, choisis parmi les noeuds du réseau, et générateurs d'économies d'échelle.

2 Modèle complet

En partant du modèle de Hamacher et al. [WHLNS04, Adapting polyhedral properties from facility to hub location problems (2004)] et en utilisant les propriétés des solutions optimales, les auteurs ont proposé le modèle UHLPMA suivant :

$$\min \sum_{i \in H} f_i z_i + \sum_{k \in K} \sum_{e \in E_k} F_{ek} x_{ek}$$

tel que

$$\sum_{e \in E_k} x_{ek} = 1, \quad \forall k \in K \tag{1a}$$

$$\sum_{e \in E_k : i \in e} x_{ek} \leq z_i, \quad \forall i \in H, \forall k \in K \tag{1b}$$

$$x_{ek} \geq 0, \quad \forall k \in K, \forall e \in E_k \tag{1c}$$

$$z_i \in \{0,1\}, \quad \forall i \in H \tag{1d}$$

où H est l'ensemble des localisations possible pour un entrepôt, K est l'ensemble des biens qui doivent être acheminés, f_i est le coût fixe de l'installation de l'entrepôt $i \in H$, z_i est une variable binaire égale à 1 si un entrepôt est situé en i, et à 0 sinon, F_{ek} est le coût de transport non orienté

1. L'ensemble de hubs H forme un graphe complet.

pour un arc du graphe $e \in H \times H$ et un bien $k \in K$, et x_{ek} est un variable binaire égale à 1 si le bien $k \in K$ transite par l'arc $e \in H \times H$ et à 0 sinon.

Le coût de transport non orienté pour un arc $e = (i,j) \in H \times H$ est le minimum du coût de transport dans le sens $i \to j$ et du coût de transport dans le sens $j \to i$, c'est à dire $F_{ek} = \min\{F_{ijk}; F_{jik}\}$

3 Décomposition réalisée

Problème primal :

$$\min \sum_{e \in E_k} \sum_{k \in K} F_{ek} x_{ek}$$

tel que

$$\sum_{e \in E_k} x_{ek} = 1, \quad \forall k \in K \tag{2a}$$

$$x_{ek} \geq 0, \quad \forall k \in K, \forall e \in E_k \tag{2b}$$

$$\sum_{e \in E_k : i \in e} x_{ek} \leq \hat{z}_i, \quad \forall i \in H, \forall k \in K \tag{2c}$$

$$\tag{2d}$$

où $\hat{z}$ est un vecteur fixé dans l'ensemble des vecteurs binaires associés aux variables z_i.

Problème dual :

$$\max \sum_{k \in K} \alpha_k - \sum_{i \in H} \sum_{k \in K} \hat{z}_i u_{ik}$$

tel que

$$\alpha_k - u_{e_1 k} - u_{e_2 k} \leq F_{ek}, \quad \forall k \in K, \forall e \in E, |e| = 2 \tag{3a}$$

$$\alpha_k - u_{e_1 k} \leq F_{ek}, \quad \forall k \in K, \forall e \in E, |e| = 1 \tag{3b}$$

$$u_i k \geq 0, \quad \forall i \in H, \forall k \in K \tag{3c}$$

où $\alpha_k, k \in K$ sont les variables associées aux contraintes 2b et $u_{ik}, i \in H, k \in K$ les variables associées aux contraintes 2c

Problème maître :

$$\min \sum_{i \in H} f_i z_i + \eta$$

tel que

$$\eta \geq \sum_{k \in K} \alpha_k - \sum_{i \in H} \sum_{k \in K} z_i u_{ik}, \quad \forall (\alpha, u) \in P_D \tag{4a}$$

$$\sum_{i \in H} z_i \geq 1 \tag{4b}$$

$$z_i \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in H \tag{4c}$$

4 la manière de résoudre ces problèmes

5 les techniques d'amélioration mises en œuvre

6 les grandes lignes des résultats obtenus (taille des problèmes, temps de calcul)

7 Conclusion

Bibliographie

[CCL11] Ivan Contreras, Jean-François Cordeau, and Gilbert Laporte. Benders decomposition for large-scale uncapacitated hub location. *Operations Research*, 59(6) :1477–1490, 2011.

[WHLNS04] Horst W. Hamacher, Martine Labbé, Stefan Nickel, and Tim Sonneborn. Adapting polyhedral properties from facility to hub location problems. 145 :104–116, 12 2004.