Optimisation Combinatoire Avancée : Etude de l'article "Benders Decomposition for Large-Scale Uncapacitated Hub Location"

Felix QUINTON - Abdelkader BELDJILALI

Table des matières

Introduction

L'article étudié, [CCL11, *Benders Decomposition for Large-Scale Uncapacitated Hub Location*], présente un algorithme exact qui permet de traiter des instances impliquant jusqu'à 500 noeuds et 250 000 types de marchandises transportées. Pour ce faire, une décomposition de Benders améliorée par divers techniques est utilisée pour en augmenter l'efficacité et la robustesse.

1 Problématique générale

Le problème de localisation traité dans l'article est connu sous l'appellation *Uncapacitated Hub Location Problem with Multiple Assignments* (UHLPMA). Il est NP-difficile donc peu tractable pour des grandes instances. L'idée générale est de transporter dans un réseau des entités/marchandises d'une origine O vers une destination D de manière la plus efficace possible. L'objectif est donc de choisir noeuds, par exemple des aéroports, qui vont devenir des hubs et de déterminer les flux des marchandises dans le réseau de manière à minimiser les coûts fixes et les coûts variables de transport de marchandises en mettant en place des hubs, choisis parmi les noeuds du réseau, et générateurs d'économies d'échelle.

Description du problème UHLPMA Soit un graphe orienté complet G(N,A) constitué de N noeuds représentant des centres d'activité tel que des aéroports et de A arcs. H $\subseteq$ N représente l'ensemble des noeuds potentiellement transformables en hubs [1]. On ne connaît pas à l'avance le nombre de ces hubs, uniquement leurs coûts d'installation. La capacité des hubs et les flux ne sont pas bornés. En outre, le caractère *Multiple Assignement* fait référence au fait que chaque centre Origine/Destination (O/D) peut alimenter/être alimenté par plusieurs hub. K représentera l'ensemble des marchandises dont les noeuds d'origine et de destination appartiennent à N. W_k désignera la quantité de bien k $\in$ K à transporter d'une origine o(k) $\in$ N vers une destination d(k) $\in$ N. Les coûts fixes de transformation d'un noeud i $\in$ H en hub seront notés f_i. Les coûts variables de transport, ou distance entre deux noeuds i et j, seront désignés par d_{ij}. Le coût de transport d'un bien k le long du chemin (o(k),i,j,d(k)) est noté $\hat{F}_{ijk}$. Un chemin entre une origine et une destination ne pourra contenir que 1 ou 2 hubs car ces derniers sont totalement connectés et le coût d_{ij} est supposé vérifier l'inégalité triangulaire.

2 Modèle complet

En partant du modèle de Hamacher et al. [WHLNS04, Adapting polyhedral properties from facility to hub location problems (2004)], les auteurs ont défini un ensemble E_k d'arêtes e d'extrémités identiques ou différentes. Ces extrémités sont candidates à devenir des hub pour chaque bien k. L'amélioration réside dans le fait que E_k réduit le choix des hubs potentiels contenus dans H d'où le problème (P) ci-dessous qui exploite les propriétés spécifiques des solutions optimales du problème UHLPMA. C'est ce problème original (P) que les auteurs résolvent en partitionnant les variables (décomposition de Benders) :

$$\min \sum_{i\in H} f_i z_i + \sum_{k\in K}\sum_{e\in E_k} F_{ek} x_{ek}$$

1. L'ensemble des hubs constitue un graphe totalement connecté.

tel que

$$\sum_{e \in E_k} x_{ek} = 1, \quad \forall k \in K \tag{1a}$$

$$\sum_{e \in E_k : i \in e} x_{ek} \leq z_i, \quad \forall i \in H, \forall k \in K \tag{1b}$$

$$x_{ek} \geq 0, \quad \forall k \in K, \forall e \in E_k \tag{1c}$$

$$z_i \in \{0,1\}, \quad \forall i \in H \tag{1d}$$

où H est l'ensemble des localisations possibles pour un hub, K est l'ensemble des biens qui doivent être acheminés, f_i est le coût fixe de transformation en hub d'un noeud $i \in H$, z_i est une variable binaire égale à 1 si le noeud i est un hub, et à 0 sinon, F_{ek} est le coût de transport non orienté pour un arc du graphe $e \in H \times H$ et un bien $k \in K$, et x_{ek} est un variable binaire égale à 1 si le bien $k \in K$ transite par l'arc $e \in H \times H$ et à 0 sinon.

Le coût de transport non orienté pour un arc $e = (i,j) \in H \times H$ est le minimum du coût de transport dans le sens $i \to j$ et du coût de transport dans le sens $j \to i$, c'est à dire $F_{ek} = \min\{\hat{F}_{ijk}; \hat{F}_{jik}\}$.

3 Décomposition réalisée

Sous-problème primal (SP($\hat{z}$)) : Soit $\hat{z}$ un vecteur binaire quelconque de taille card(H) de composantes $\hat{z}_i$ **fixé**. Le sous-problème primal à optimiser par rapport aux seules variables x_{ek} est :

$$v(\hat{z}) = \min \sum_{e \in E_k} \sum_{k \in K} F_{ek} x_{ek}$$

tel que

$$\sum_{e \in E_k} x_{ek} = 1, \quad \forall k \in K \tag{2a}$$

$$x_{ek} \geq 0, \quad \forall k \in K, \forall e \in E_k \tag{2b}$$

$$\sum_{e \in E_k : i \in e} x_{ek} \leq \hat{z}_i, \quad \forall i \in H, \forall k \in K \tag{2c}$$

Sous-problème dual (SD($\hat{z}$)) :

$$\max \sum_{k \in K} \alpha_k - \sum_{i \in H} \sum_{k \in K} \hat{z}_i u_{ik}$$

tel que

$$\alpha_k - u_{e_1 k} - u_{e_2 k} \leq F_{ek}, \quad \forall k \in K, \forall e \in E, |e| = 2 \tag{3a}$$

$$\alpha_k - u_{e_1 k} \leq F_{ek}, \quad \forall k \in K, \forall e \in E, |e| = 1 \tag{3b}$$

$$u_i k \geq 0, \quad \forall i \in H, \forall k \in K \tag{3c}$$

où $\alpha_k, k \in K$ sont les variables associées aux contraintes 2a et $u_{ik}, i \in H, k \in K$ les variables associées aux contraintes 2c.

Soit D l'ensembles des solutions admissibles de SD et soit P_D l'ensemble des points extrêmes de D. On remarque que D n'est pas modifié si on modifie $\hat{z}$ et puisque $F_{ek} \geq 0$ pour tout $e \in E_k$ and $k \in K$, le vecteur nul est toujours solution du sous-problème dual. En conséquence, par dualité forte, soit le sous-problème primal a une solution et est borné, soit il n'a pas de solution.

Comme pour tout vecteur binaire z tel que $\sum_{i\in H} z_i \geq 1$, les sous-problèmes primal et dual possèdent une solution et sont bornés, la fonction objectif duale s'écrit :

$$\max_{(\alpha,u)\in P_D} \sum_{k\in K} \alpha_k - \sum_{i\in H}\sum_{k\in K} \hat{z}_i u_{ik}$$

De plus, les coupes de faisabilité associées au rayons extrêmes de l'ensemble D ne sont pas nécessaires du fait de la contrainte $\sum_{i\in H} z_i \geq 1$.

Problème maître de Benders (PM) : En introduisant la variable supplémentaire η représentant le coût global de transport, les auteurs aboutissent à un problème mixte avec card(H) variables binaires z_i et une variable continue η. Ce :

$$\min \sum_{i\in H} f_i z_i + \eta$$

tel que

$$\eta \geq \sum_{k\in K} \alpha_k - \sum_{i\in H}\sum_{k\in K} z_i u_{ik}, \quad \forall(\alpha,u)\in P_D \tag{4a}$$

$$\sum_{i\in H} z_i \geq 1 \tag{4b}$$

$$z_i \in \{0,1\}, \quad \forall i\in H \tag{4c}$$

Les contraintes (4a) représentent les coupes d'optimalité.

4 Résolution des problèmes

Résolution du problème (P) : La reformulation de Benders précédente contient un nombre exponentiel de contraintes. Les auteurs ont donc résolu itérativement le problème maître réduit (PMR) contenant un faible nombre de contraintes (4a) associées aux points extrêmes dans P_D. Les contraintes sont ajoutées au fur et à mesure en résolvant les sous-problèmes duaux jusqu'à atteindre une solution optimale du problème original (P) comme indiqué dans le pseudo-code figure 1.

- ub désigne une borne supérieure,
- t : Entier caractérise les itérations successives,
- P_D^t : Ensemble des points extrême à l'itération t,
- $MP(P_D^t)$: Problème Maître relaxé (PMR) en remplaçant P_D par P_D^t,
- $v(MP(P_D^t)$: Valeur optimale du (PMR) à l'itération t,
- z^t : Vecteur optimal à l'itération t,
- $DS(z^t)$: Sous-problème dual (SD) pour z^t,
- $v(DS(z^t))$: Valeur optimale du sous-problème (SD).

Algorithm 1: Benders decomposition

$ub \leftarrow \infty$, $t \leftarrow 0$
$P_D^t \leftarrow 0$
$terminate \leftarrow$ **false**
while ($terminate =$ **false**) **do**
  Solve MP(P_D^t) to obtain z^t
  if ($v(MP(P_D^t)) = ub$) **then**
    $terminate \leftarrow$ **true**
  else
    Solve DS(z^t) to obtain $(\alpha, u) \in P_D$
    $P_D^{t+1} \leftarrow P_D^t \cup \{(\alpha, u)\}$
    if ($v(DS(z^t)) + \sum_{i \in H} f_i \hat{z}_i < ub$) **then**
      $ub \leftarrow v(DS(z^t)) + \sum_{i \in H} f_i \hat{z}_i$
    end if
  end if
  $t \leftarrow t + 1$
end while

FIGURE 1 – Calcul de la solution optimale du problème (P) si elle existe.

Résolution de sous-problème Dual : L'algorithme précédent nécessite la résolution des sous-problèmes duaux $DS(z^t)$. Les auteurs utilisent une méthode qui exploite la structure du sous-problème primal en l'occurence sa *décomposabilité* en card(K) sous-problèmes PS_k^t plutôt qu'une résolution directe du dual à l'aide d'un solveur. Les solutions du dual (α^t, u^t) sont déduites du théorème complémentaire en théorie de la dualité. Ainsi à partir d'une solution optimale x^t du primal PS_k^t, les auteurs en déduisent un ensemble noté DO^t de solutions optimales du dual DS^t.

5 les techniques d'amélioration mises en œuvre

6 les grandes lignes des résultats obtenus (taille des problèmes, temps de calcul)

7 Conclusion

Bibliographie

[CCL11] Ivan Contreras, Jean-François Cordeau, and Gilbert Laporte. Benders decomposition for large-scale uncapacitated hub location. *Operations Research*, 59(6) :1477–1490, 2011.

[WHLNS04] Horst W. Hamacher, Martine Labbé, Stefan Nickel, and Tim Sonneborn. Adapting polyhedral properties from facility to hub location problems. 145 :104–116, 12 2004.