

Table des matières

Introduction		2
1	Problématique générale	2
2	Modèle complet	2
3	Décomposition réalisée	3
4	la manière de résoudre ces problèmes	4
5	les techniques d'amélioration mises en œuvre	4
6	les grandes lignes des résultats obtenus (taille des problèmes, temps de calcul)	4
7	Conclusion	4

Introduction

L'article étudié, [CCL11, Benders Decomposition for Large-Scale Uncapacitated Hub Location], présente un algorithme exact qui permet de traiter des instances impliquant jusqu'à 500 noeuds et 250 000 types de marchandises transportées. Pour ce faire, une décomposition de Benders améliorée par divers techniques est utilisée pour en augmenter l'efficacité et la robustesse.

1 Problématique générale

Le problème de localisation traité dans l'article est connu sous l'appellation *Uncapacitated Hub Location Problem with Multiple Assignments* (UHLPMA). Il est NP-difficile donc peu tractable pour des grandes instances. L'idée générale est de transporter dans un réseau des entités/marchandises d'une origine O vers une destination D de manière la plus efficace possible. L'objectif est donc de choisir noeuds, par exemple des aéroports, qui vont devenir des hubs et de déterminer les flux des marchandises dans le réseau de manière à minimiser les coûts fixes et les coûts variables de transport de marchandises en mettant en place des hubs, choisis parmi les noeuds du réseau, et générateurs d'économies d'échelle.

Description du problème UHLPMA Soit un graphe orienté complet G(N,A) constitué de N noeuds représentant des centres d'activité tel que des aéroports et de A arcs. $H \subseteq N$ représente l'ensemble des noeuds potentiellement transformables en hubs 1 . On ne connaît pas à l'avance le nombre de ces hubs, uniquement leurs coûts d'installation. La capacité des hubs et les flux ne sont pas bornés. En outre, le caractère Multiple Assignement fait référence au fait que chaque centre Origine/Destination (O/D) peut alimenter/être alimenté par plusieurs hub. K représentera l'ensemble des marchandises dont les noeuds d'origine et de destination appartiennent à N. W_k désignera la quantité de bien $k \in K$ à transporter d'une origine $o(k) \in N$ vers une destination $o(k) \in N$. Les coûts fixes de transformation d'un noeud $o(k) \in N$ en hub seront notés $o(k) \in N$ vers une destination d'un bien $o(k) \in N$ designés par $o(k) \in N$ vers une destination d'un bien $o(k) \in N$ bien $o(k) \in N$ vers une destination d'un bien

2 Modèle complet

En partant du modèle de Hamacher et al. [WHLNS04, Adapting polyhedral properties from facility to hub location problems (2004)], les auteurs ont défini un ensemble E_k d'arêtes e d'extrémités identiques ou différentes, extrémités qui sont candidates à devenir des hub pour chaque bien k. E_k réduit le choix des hubs potentiels contenu dans H d'où le modèle amélioré suivant qui exploite les propriétés spécifiques des solutions optimales du problème UHLPMA :

$$\min \sum_{i \in H} f_i z_i + \sum_{k \in K} \sum_{e \in E_k} F_{ek} x_{ek}$$

^{1.} L'ensemble des hubs constitue un graphe totalement connecté.

tel que

$$\sum_{e \in E_k} x_{ek} = 1, \quad \forall k \in K \tag{1a}$$

$$\sum_{e \in E_k: i \in e} x_{ek} \le z_i, \quad \forall i \in H, \forall k \in K$$
 (1b)

$$x_{ek} \ge 0, \quad \forall k \in K, \forall e \in E_k$$
 (1c)

$$z_i \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in H \tag{1d}$$

où H est l'ensemble des localisations possibles pour un hub, K est l'ensemble des biens qui doivent être acheminés, f_i est le coût fixe de transformation en hub d'un noeud $i \in H$, z_i est une variable binaire égale à 1 si le noeud i est un hub, et à 0 sinon, F_{ek} est le coût de transport non orienté pour un arc du graphe $e \in H \times H$ et un bien $k \in K$, et x_{ek} est un variable binaire égale à 1 si le bien $k \in K$ transite par l'arc $e \in H \times H$ et à 0 sinon.

Le coût de transport non orienté pour un arc $e=(i,j)\in H\times H$ est le minimum du coût de transport dans le sens $i\to j$ et du coût de transport dans le sens $j\to i$, c'est à dire $F_{ek}=\min\{\hat{F}_{ijk};\hat{F}_{jik}\}$.

3 Décomposition réalisée

Sous-problème primal (SP(\hat{z})): Soit \hat{z} un vecteur binaire quelconque de taille card(H) de composantes \hat{z}_i fixé. Le sous-problème primal à optimiser par rapport aux seules variables x_{ek} est :

$$\min \sum_{e \in E_k} \sum_{k \in K} F_{ek} x_{ek}$$

tel que

$$\sum_{e \in E_k} x_{ek} = 1, \quad \forall k \in K \tag{2a}$$

$$x_{ek} \ge 0, \quad \forall k \in K, \forall e \in E_k$$
 (2b)

$$\sum_{e \in E, \ i \in e} x_{ek} \le \hat{z}_i, \quad \forall i \in H, \forall k \in K$$
 (2c)

Sous-problème dual $(SD(\hat{z}))$:

$$\max \sum_{k \in K} \alpha_k - \sum_{i \in H} \sum_{k \in K} \hat{z}_i u_{ik}$$

tel que

$$\alpha_k - u_{e_1k} - u_{e_2k} \le F_{ek}, \quad \forall k \in K, \forall e \in E, |e| = 2$$
(3a)

$$\alpha_k - u_{e_1k} \le F_{ek}, \quad \forall k \in K, \forall e \in E, |e| = 1$$
 (3b)

$$u_i k \ge 0, \quad \forall i \in H, \forall k \in K$$
 (3c)

où $\alpha_k, k \in K$ sont les variables associées aux contraintes 2a et $u_{ik}, i \in H, k \in K$ les variables associées aux contraintes 2c.

Soit D l'ensembles des solutions admissibles de SD et soit P_D l'ensemble des points extrêmes de D. On remarque que D n'est pas modifié si on modifie \hat{z} et puisque $F_{ek} \geq 0$ pour tout $e \in E_k$ and $k \in K$, le vecteur nul est toujours solution du sous-problème dual. En conséquence, par dualité forte, soit le sous-problème primal a une solution et est borné, soit il n'a pas de solution.

Comme pour tout vecteur binaire z tel que $\sum_{i \in H} z_i \ge 1$, les sous-problèmes primal et dual possèdent une solution et sont bornés, la fonction objectif duale s'écrit :

$$\max_{(\alpha, u) \in P_D} \sum_{k \in K} \alpha_k - \sum_{i \in H} \sum_{k \in K} \hat{z}_i u_{ik}$$

Problème maître (PM) : En introduisant la variable supplémentaire η représentant le coût global de transport, les auteurs aboutissent à un problème mixte avec card(H) variables binaires z_i et une variable continue η :

$$\min \sum_{i \in H} f_i z_i + \eta$$

tel que

$$\eta \ge \sum_{k \in K} \alpha_k - \sum_{i \in H} \sum_{k \in K} z_i u_{ik}, \quad \forall (\alpha, u) \in P_D$$
(4a)

$$\sum_{i \in H} z_i \ge 1 \tag{4b}$$

$$z_i \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in H \tag{4c}$$

Cette reformulation de Benders contient un nombre exponentiel de contraintes. Les auteurs ont donc résolu itérativement le problème maître réduit (PMR) contenant un faible nombre de contraintes (4a) associées aux points extrêmes dans P_D . Les contraintes sont ajoutées au fur et à mesure en résolvant les sous-problèmes duaux jusqu'à atteindre une solution optimale du problème original.

4 la manière de résoudre ces problèmes

Résolution de sous-problème :

- 5 les techniques d'amélioration mises en œuvre
- 6 les grandes lignes des résultats obtenus (taille des problèmes, temps de calcul)
- 7 Conclusion

Bibliographie

- [CCL11] Ivan Contreras, Jean-François Cordeau, and Gilbert Laporte. Benders decomposition for large-scale uncapacitated hub location. *Operations Research*, 59(6):1477–1490, 2011.
- [WHLNS04] Horst W. Hamacher, Martine Labbé, Stefan Nickel, and Tim Sonneborn. Adapting polyhedral properties from facility to hub location problems. 145:104–116, 12:2004.

