Calcul parallèle
Topologie des architectures parallèles

Florian Barbarin
Abdelkader Beldjilali
Nicolas Holvoet

24 décembre 2016

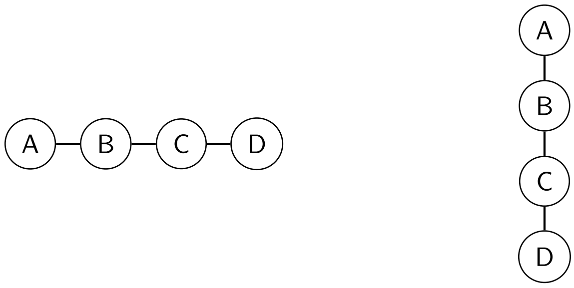
Table des matières

1 Les grilles

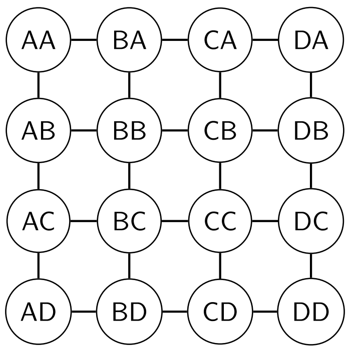
Définition (Grille)**.** Une grille de dimension d possédant N nœuds suivant chaque coordonnée est le produit cartésien de d chaines ($d > 1$) de N sommets. On note cette grille $M(N)^d$ que l'on dira *de coté N*.

Remarque. Si l'on considère le produit cartésien de deux graphes, le graphe résultant est tel que :
— l'ensemble de ses nœuds est le produit cartésien des nœuds des deux premiers graphes ;
— deux de ses nœuds sont voisins s'ils sont composés de nœuds qui étaient voisins dans l'un des deux premiers graphes.

Exemple. Soient deux chaines composées des nœuds appartenant à l'ensemble $E = \{A, B, C, D\}$. Le produit cartésien de ces deux chaines ($d = 2$) de taille $N = Card(E) = 4$:



A pour résultat la grille $M(4)^2$:

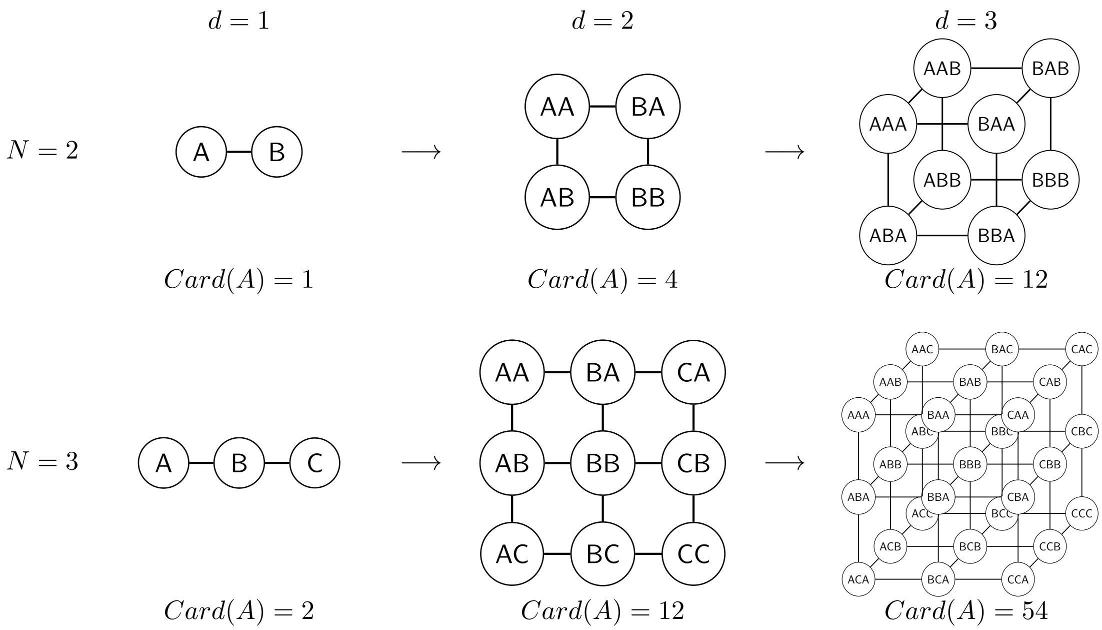


Nombre total de nœuds : Il résulte de la définition ci-dessus que le nombre total de nœuds est égal au cardinal du produit cartésien de l'ensemble des nœuds de départ :

$$Card(S) = Card(\underbrace{E \times E \times ... \times E}_{\text{p fois}}) = \prod_{1}^{p} Card(E) = N^p$$

où S est l'ensemble des noeuds de la grille

Nombre total d'arêtes : Soit A l'ensemble des arêtes de la grille. Voici pour $N = 2$ et $N = 4$ le passage de la dimension 1 aux dimensions supérieures (2 et 3).



On remarque à présent que, pour N fixé, le passage d'une dimension d à une dimension $d+1$ se fait en deux étapes :

- on "copie" N fois la grille de dimension d ;
- on relie, par une arête, les nœuds de la grille 1 avec les nœuds correspondants de la grille 2 puis les nœuds de la grille 2 avec les nœuds correspondants de la grille 3, et ainsi de suite jusqu'à la grille N.

Cette méthode de construction nous donne une relation de récurrence pour le nombre d'arêtes :

$$Card(A)_{d+1} = \underbrace{N \times Card(A)_d}_{\text{On copie } N \text{ fois la grille de dimension } d} + \underbrace{(N-1) \times Card(S)_d}_{\text{On relie les arêtes de chaque grille}}$$

On ne peut aisément déterminer une expression générale de la suite ci-dessus. Or, les exemples précédents nous permettent de déduire une expression du nombre d'arêtes en fonction de d et de N :

$$Card(A)_d = d \times (N-1) \times N^{d-1}$$

Nous pouvons démontrer par récurrence cette expression.

Preuve de la relation.

Initialisation : Pour $d = 1$, on a $Card(A)_1 = 1 \times (N-1) \times N^{1-1} = N-1$ ce qui correspond bien au nombre d'arêtes dans une chaine.

Hypothèse de récurrence : On fait l'hypothèse qu'il existe un rang d tel que $Card(A)_d = d \times (N-1) \times N^{d-1}$. Montrons que cette relation est vraie au rang $d+1$.

Hérédité : Nous avons :

$$\begin{aligned} Card(A)_{d+1} &= N \times Card(A)_d + (N-1) \times N^d \\ &= N \times d \times (N-1) \times N^{d-1} + N^d \times (N-1) \\ &= N^d \times d \times (N-1) + N^d \times (N-1) \\ &= (d+1) \times (N-1) \times N^d \end{aligned}$$

Nous retrouvons bien l'hypothèse de récurrence au rang $d+1$. On en déduit que $\forall d \in \mathbb{N}^*$, on a $Card(A)_d = d \times (N-1) \times N^{d-1}$. $\square$

D'après l'ensemble des éléments qui précèdent, le nombre d'arêtes d'une grille est telle que :

$$\forall d \in \mathbb{N}^*,\ Card(A)_d = d \times (N-1) \times N^{d-1}$$

2 Les arbres et grilles d'arbres

3 Les hypercubes