Robótica

Direct and Inverse Kinematics of Serial Manipulators

Pedro Custódio, David Ribeiro, Pedro Fareleira

Instituto Superior Técnico

3 de Maio de 2019

1 Introdução e Motivação

Ao longo deste trabalho, pretende-se aplicar, numa primeira fase, a Cinemática Direta, e, posteriormente, a Cinemática Inversa, a um manipulador com 6 graus de liberdade, tal como se pode ver na figura 1:

Figura 1: Manipulador a estudar.

O objetivo principal da Cinemática Direta consiste em determinar a posição e orientação da ponta do braço (*end-effector*) a partir dos ângulos formados pelos mesmos. Por outro lado, o objetivo da Cinemática Inversa consiste no contrário, ou seja, determinar o valor que esses ângulos têm de ter para se obter uma certa posição e orientação.

Para se chegar a tais valores considera-se que cada grau de liberdade tem um referencial associado e para se obter as relações entre estes recorre-se a matrizes de transformação de coordenadas da forma

$$ {}^{A}_{B}T = \begin{bmatrix} {}^{A}_{B}R & {}^{A}P_{B} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

onde ${}^{A}_{B}R$ representa a rotação dos eixos entre os referenciais e ${}^{A}P_{B}$ a translação feita pela origem, ambos do referencial B para o A.

Assim, como multiplicando todas estas matrizes se consegue obter uma matriz de transformação de coordenadas da origem ao *end-effector*, pode-se determinar a relação entre a posição e orientação da ponta do braço e os ângulos feitos pelos graus de liberdade.

Não se consideraram, no decorrer deste trabalho, quaisquer limitações angulares, isto é, os graus de liberdade do manipulador robótico podem assumir qualquer valor.

2 Cinemática direta

O objetivo na cinemática direta é o de determinar a posição e orientação do *end-effector* em relação à base sabendo os ângulos dos graus de liberdade e as dimensões do braço. Para tal é preciso determinar a matriz de transformação ${}^{0}_{6}T$ de forma a obter a orientação e as coordenadas do referencial 6 (*end-effector*) visto a partir do referencial 0 (base).

Para se obter a matriz de transformação ${}^{0}_{6}T$ pode-se primeiro encontrar as relações entre os vários referenciais do braço e multiplicar todas as matrizes de transformação de forma a obter a pretendida. Para tal recorre-se à convenção de Denavit-Hartenberg, onde as matrizes de transformação entre referenciais são dadas pela matriz (2), para a qual apenas são precisos determinar 4 parâmetros, segundo um conjunto de regras.

$$ {}^{i-1}_{i}T = \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i} & 0 & a_{i-1} \\ s_{\theta_i} * c_{\alpha_{i-1}} & c_{\theta_i} * c_{\alpha_{i-1}} & -s_{\alpha_{i-1}} & -s_{\alpha_{i-1}} * d_i \\ s_{\theta_i} * s_{\alpha_{i-1}} & c_{\theta_i} * s_{\alpha_{i-1}} & c_{\alpha_{i-1}} & c_{\alpha_{i-1}} * d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

A matriz (2) deriva da multiplicação de quatro matrizes de transformação onde apenas é feito um movimento. Duas delas representam uma translação e as restantes duas uma rotação. Assim, para determinar os 4 parâmetros do método, temos que θ_i é dado pelo ângulo formado entre x_{i-1} e x_i em torno de z_i, d_i pela distancia entre x_{i-1} e x_i através de z_i, α_i pelo ângulo entre z_i e z_{i+1} em trono de x_i, e a_i pela distancia de z_i a z_{i+1} através de x_i. Estas medidas tem de ter em conta as seguintes regras:

- z_i é o eixo de rotação da *joint* i;
- x_i tem de ser perpendicular a z_{i-1} e z_i;
- y_i é determinado com base nas direções e sentidos de x_i e z_i (regra da mão direita).

Assim, recorrendo a *joints* auxiliares, chegou-se ao esquema da figura 2, onde os referenciais sem apóstrofo são os associados aos eixos de rotação do braço, e os com apóstrofo são *joints* auxiliares.

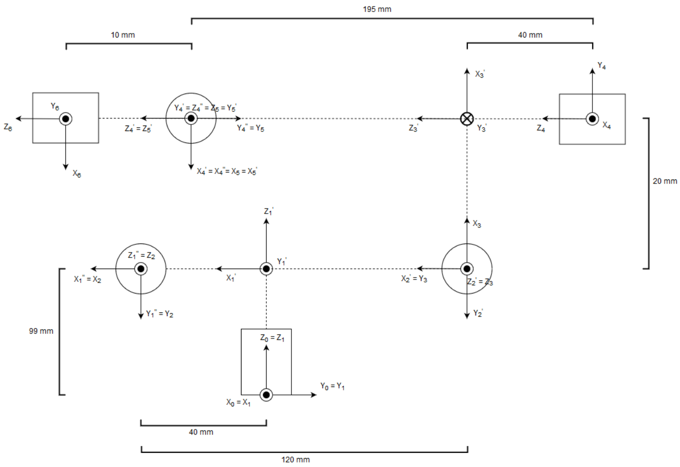

Figura 2: Esquema de referenciais aplicados ao braço em repouso (todos os valor de $\theta_i = 0$)(figura não está à escala, medidas referenciadas).

Com base no esquema desenvolvido tem-se a seguinte tabela de parâmetros:

i	θ	d	a	α
1	θ_1	0	0	0
1'	$-\frac{\pi}{2}$	99	40	$-\frac{\pi}{2}$
1''	0	0	0	0
2	θ_2	0	-120	0
2'	0	0	0	0
3	$-\frac{\pi}{2} - \theta_3$	0	20	$-\frac{\pi}{2}$
3'	0	0	0	0
4	$\theta_4 - \frac{\pi}{2}$	-40	0	0
4'	$-\frac{\pi}{2}$	195	0	$-\frac{\pi}{2}$
4''	0	0	0	0
5	θ_5	0	0	$\frac{\pi}{2}$
5'	0	0	0	0
6	θ_6	10	0	0

Utilizando estes valores na matriz (2) obtém-se as várias matrizes de transformação entre os referenciais, sendo possível obter a matriz de transformação do *end-effector* à base multiplicando-as todas (equação (3)).

$$ {}^0_6T = {}^0_1T \; {}^1_{1'}T \ldots {}^{5'}_6T = \begin{bmatrix} {}^0_6R & {}^0P_6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

Tendo a matriz de transformação ${}^0_6T$ a posição do *end-effector* em relação à origem é dada por ${}^0P_6$. Para determinar a orientação recorre-se a ângulos de *Euler*, com ordem de rotação de eixos $z - y - z$ dada pelos ângulos α, β, γ.

Para esta ordem de rotações sabe-se que a matriz de rotação é dada por:

$$ {}^0_6R = \begin{bmatrix} c_\alpha c_\beta c_\gamma - s_\alpha s_\gamma & -c_\alpha c_\beta s_\gamma - s_\alpha c_\gamma & c_\alpha s_\beta \\ s_\alpha c_\beta c_\gamma + c_\alpha s_\gamma & -s_\alpha c_\beta s_\gamma + c_\alpha c_\gamma & s_\alpha s_\beta \\ -s_\beta c_\gamma & s_\beta s_\gamma & c_\beta \end{bmatrix} \tag{4}$$

Tendo a matriz de rotação dada pela transformação ${}^0_6T$:

$$ {}^0_6R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \tag{5}$$

Tem-se um sistema de equações de onde resulta que:

$$\begin{cases} \gamma = atan2(r_{32}, -r_{31}), & \text{if } s_\beta > 0 \\ \gamma = atan2(-r_{32}, r_{31}), & \text{if } s_\beta < 0 \\ \beta = atan2(\pm\sqrt{r_{13}^2 + r_{23}^2}, r_{33}) & \\ \alpha = atan2(r_{23}, r_{13}), & \text{if } s_\beta > 0 \\ \alpha = atan2(-r_{23}, -r_{13}), & \text{if } s_\beta < 0 \end{cases}$$

Se o $s_\beta = 0$ tem-se que:

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = atan2(r_{21}, r_{11}), & \text{if } c_\beta = 1 \\ \alpha - \gamma = atan2(-r_{21}, -r_{11}), & \text{if } c_\beta = -1 \end{cases}$$

Nota final para o facto de, nesta abordagem, θ_3 rodar no sentido contrário ao convencional (pode ser constatado na tabela dos parâmetros a usar para o cálculo das matrizes).

3 Cinemática inversa

O objetivo da cinemática inversa é obter uma combinação de valores para os ângulos dos graus de liberdade, de forma a que o *end-effector* tenha uma certa posição e orientação em relação ao referencial da base.

Para tal, como os valores da posição e orientação do *end-effector* são conhecidos, pode-se determinar a matriz de transformação ${}^0_6T$. A matriz de rotação ${}^0_6R$ é dado pela matriz (4) e pelos ângulos de Euler, e o vetor ${}^AP_B$ pelos valores da posição do *end-effector*. Como se sabe que a matriz ${}^0_6T$ pode ser obtida pela multiplicação das várias matrizes de transformação (equação (3)), as quais dependem dos valores dos ângulos dos graus de liberdade, podia-se igualar as duas matrizes e resolver um sistema de 12 equações a 6 incógnitas, mas este processo implicaria um grande desenvolvimento matemático, o qual seria suscetível a erros. Portanto, para se encontrar o valor dos ângulos, primeiro descobre-se o valor de θ_1, θ_2 e θ_3 com base numa análise geométrica do braço, e por fim utiliza-se um método algébrico para determinar os ângulos restantes θ_4, θ_5 e θ_6.

3.1 Método Geométrico

Sabendo as coordenadas do referencial 5 (ver figura 2) facilmente se encontram as expressões para determinar os valores dos ângulos θ_1, θ_2 e θ_3. Para se obter as coordenadas do referencial 5, sabendo que o eixo z do referencial 6 interseta a origem do referencial 5 em -10, pode-se multiplicar a matriz ${}^0_6T$ pelo vetor $(0, 0, -10, 1)$, obtendo assim a sua posição segundo o referencial da base.

Com base numa perspetiva de topo (figura 3) e sabendo que apenas θ_1 pode influenciar a orientação em torno do eixo z do referencial base, pode-se retirar o valor de θ_1 com base nas coordenadas x e y da origem do referencial 5. Como em repouso (todos os ângulos a zero) a origem do referencial 5 está sobre a parte negativa do eixo do y, tem-se que:

$$\theta_1 = atan2(y_5, x_5) \pm \frac{\pi}{2} \tag{6}$$

Sendo que cada um dos dois resultados possíveis implica valores θ_2 e θ_3 diferentes, e em algumas situações um deles poderá nem sequer ser válido, ou até ambos (distancia pode ser demasiado grande).

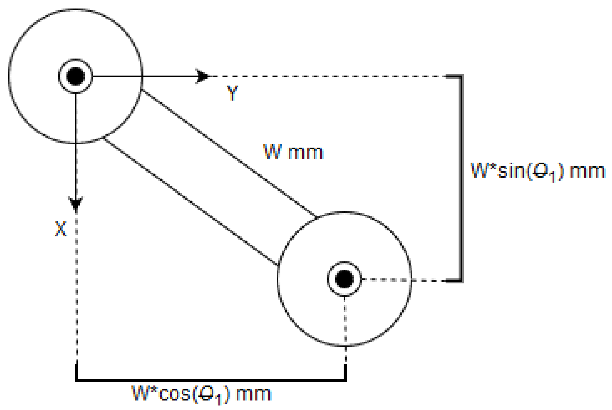

Figura 3: Perspetiva braço visto de cima, considerando o final do braço no referencial 5.

Para determinar θ_2 e θ_3 utiliza-se a perspetiva de perfil do manipulador. Tal como pode ser visto na figura 4 o braço é projetado no plano zOw onde w tem a direção definida pela origem do referencial da base e a projeção da origem do referencial 2 no plano xOy, e o sentido positivo é do referencial da base para o referencial 2.

Nota para que a zona do motor da *joint* 4 é ignorado, de forma a simplificar o esquema, pois não é relevante para a orientação final do braço.

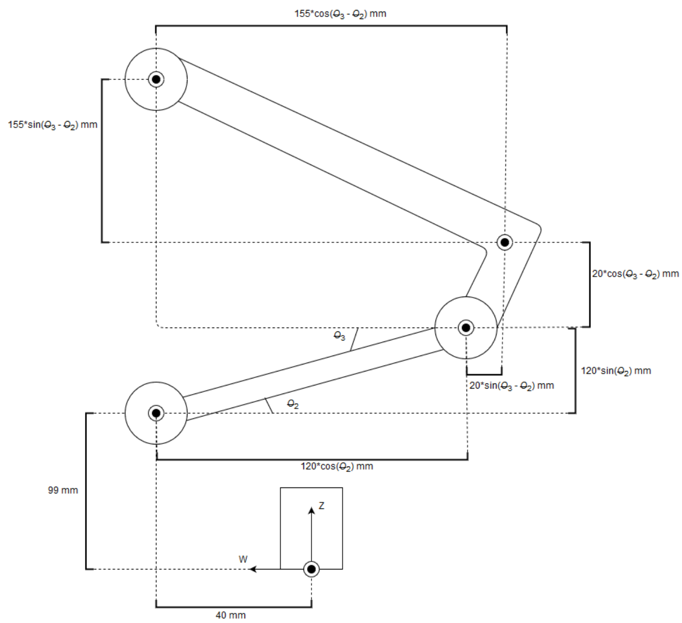

Figura 4: Perspetiva braço visto de perfil, considerando o final do braço no referencial 5.

Assim, tendo as coordenadas da origem do referencial 5 (onde $w = \sqrt{x_5^2 + y_5^2}$) obtém-se dois sistemas de equações, de onde é possível determinar os valores de θ_2 e θ_3.

Caso $\theta_1 = atan2(y_5, x_5) + \frac{\pi}{2}$ tem-se:

$$\begin{cases} 99 + 120 * s_{\theta 2} - 20 * c_{\theta_3 - \theta_2} + 155 * s_{\theta_3 - \theta_2} = z_5 \\ 40 - 120 * c_{\theta 2} + 20 * s_{\theta_3 - \theta_2} + 155 * c_{\theta_3 - \theta_2} = w \end{cases} \tag{7}$$

Caso $\theta_1 = atan2(y_5, x_5) - \frac{\pi}{2}$ tem-se:

$$\begin{cases} 99 + 120 * s_{\theta 2} - 20 * c_{\theta_3 - \theta_2} + 155 * s_{\theta_3 - \theta_2} = z_5 \\ 40 - 120 * c_{\theta 2} + 20 * s_{\theta_3 - \theta_2} + 155 * c_{\theta_3 - \theta_2} = -w \end{cases} \tag{8}$$

Resolvendo o sistema de equações obtém-se as possíveis combinações de θ_1, θ_2 e θ_3 para que o braço tenha o *end-effector* na posição e com a orientação pretendidas.

3.2 Método Algébrico

Após serem obtidos os três primeiros ângulos através do método geométrico, a utilização do método algébrico torna-se uma boa opção para determinar as expressões dos restantes ângulos (θ_4, θ_5, θ_6).

Para a utilização do método algébrico tem de se recorrer às inversas das matrizes transformação. Conhecendo a estrutura de uma matriz transformação e sabendo que ${}^B_AT = ({}^A_BT)^{-1}$, para calcular a inversa de uma transformação do mesmo tipo de (1) basta utilizar a seguinte expressão:

$$({}^{A}_{B}T)^{-1} = \begin{bmatrix} {}^{A}_{B}R^{T} & -{}^{A}_{B}R^{T\,A}P_{B} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{9}$$

Através da equação,

$$({}^{3}_{4}T)^{-1} \times {}^{3}_{6} T = {}^{4}_{6} T \tag{10}$$

E, depois de calculadas as matrizes dos dois lados da equação, igualam-se os dois elementos que produzem uma expressão mais simples, obtendo θ_5:

$$\theta_5 = \pm arccos({}^{3}_{6}T_{2,3}) \tag{11}$$

Pegando na equação 10 e andando um passo para trás, obtém-se uma expressão que permite calcular θ_4:

$$({}^{2}_{3}T)^{-1} \times {}^{2}_{6} T = {}^{3}_{6} T \tag{12}$$

No entanto, esta igualdade de matrizes não permite obter diretamente uma expressão que dependa apenas de θ_4.

$$\begin{cases} c_{\theta_4} * s_{\theta_5} = & {}^{2}_{6}T_{1,3} * s3 + {}^{2}_{6} T_{2,3} * c3 \\ s_{\theta_4} * s_{\theta_5} = & {}^{2}_{6}T_{3,3} \end{cases} \tag{13}$$

Para resolver isto, pode dividir-se dois elementos das matrizes de forma a eliminar θ_5 da expressão (igualdades do sistema de equações (13)). Neste caso, faz-se isto com os elementos (1,3) e (2,3) das matrizes e obtém-se a expressão para θ_4. Apesar da expressão não depender diretamente de θ_5, conhecer o seu valor continua a ser fundamental, pois, tendo em conta que a expressão se baseia no cálculo de um arco-tangente, o valor final do ângulo vai depender do quadrante em que se encontra. Assim tem-se que θ_4 é dado por:

$$\begin{cases} \theta_4 = atan2({}^{2}_{6}T_{3,3},\ {}^{2}_{6}T_{1,3}s3 + {}^{2}_{6} T_{2,3}c3), & \text{if } s_{\theta_5} = 1 \\ \theta_4 = atan2(-{}^{2}_{6}T_{3,3},\ -{}^{2}_{6}T_{1,3}s3 - {}^{2}_{6} T_{2,3}c3), & \text{if } s_{\theta_5} = -1 \end{cases} \tag{14}$$

Por fim, a determinação de θ_6 advém da manipulação da equação:

$$({}^{4}_{5}T)^{-1} \times {}^{4}_{6} T = {}^{5}_{6} T \tag{15}$$

Após igualar o quociente entre os elementos (1,3) e (2,3) das duas matrizes obtém-se uma expressão para θ_6.

$$\theta_6 = atan2({}^{5}_{6}T_{3,1},\ {}^{5}_{6}T_{3,2}) \tag{16}$$

Ficam assim determinadas as expressões para os 6 ângulos que definem as diferentes hipóteses de posição do braço para uma orientação e um ponto dados.

4 Singularidades

4.1 Breve Explicação

Uma singularidade é definida como uma configuração do manipulador em que este perde um ou mais graus de liberdade. Perder um grau de liberdade significa que uma *joint* deixa de provocar efeito na posição e orientação do *end-effector*. Também se pode perder um grau de liberdade se uma combinação de várias *joints* deixar de provocar efeito na mesma posição e orientação do *end-effector*. Neste trabalho, um exemplo prático da perda de um grau de liberdade consiste em ter $\theta_5 = 0$, caso em que θ_4 e θ_6 se encontram alinhados, e, portanto, pode dizer-se que um deles deixa de ter efeito na posição e orientação do *end-effector*. Note-se que, nesta situação, rodar θ_4 ou rodar θ_6 consiste em fazer exatamente o mesmo movimento, logo rodando um deles é sempre possível compensar essa rotação com o movimento do outro. Daí perder-se um grau de liberdade. Ainda nesta situação, têm-se infinitas combinações de θ_4 e θ_6 para uma só posição e orientação do *end-effector*.

Podem ter-se dois tipos de singularidades:

1. Singularidades na posição;
2. Singularidades na orientação.

Por forma a determinar as singularidades na posição e na orientação, é indispensável calcular a matriz Jacobiana $J(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6)$, que efetua o mapeamento entre espaços de velocidades, tal como aparece representado em (17).

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ w_x \\ w_y \\ w_z \end{bmatrix} = J(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6) \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4 \\ \dot{\theta}_5 \\ \dot{\theta}_6 \end{bmatrix} \tag{17}$$

A matriz Jacobiana $J(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6)$, irá naturalmente, e, de acordo com (17), poder subdividir-se em duas matrizes:

$$J(\theta_1, \cdots, \theta_6) = \begin{bmatrix} J_p(\theta_1, \cdots, \theta_6) \\ J_o(\theta_1, \cdots, \theta_6) \end{bmatrix} \tag{18}$$

Em (18), J_p representa a parte da matriz Jacobiana relativa à velocidade linear e J_o representa a parte da Jacobiana relativa à velocidade angular.

Neste trabalho, as matrizes J_p e J_o são determinadas com base nas fórmulas da propagação das velocidades linear (19) e angular (20), respectivamente.

$${}^{i+1}v_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R \cdot {}^{i}v_i + {}^{i+1}_{i}R \cdot ({}^{i}w_i \times {}^{i}P_{i+1}) \tag{19}$$

$${}^{i+1}w_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R \cdot {}^{i}w_i + \dot{\theta}_{i+1} \cdot {}^{i+1}Z_{i+1} \tag{20}$$

Nas equações (19) e (20), i representa o número do referencial. Uma vez determinadas as matrizes Jacobianas, as singularidades de posição encontram-se igualando o determinante de sub-matrizes de J_p, de tamanho 3×3, a zero.

4.2 Determinação das Singularidades

Procedeu-se à determinação das singularidades, mediante cálculo matricial, no entanto, os resultados obtidos não foram os pretendidos, uma vez que as expressões obtidas eram demasiado complexas, não permitindo a interpretação dos resultados. É fornecido com este relatório um código MATLAB, *Sing.m*, com esta tentativa de determinação matricial.

Em contrapartida, aquando da realização deste trabalho pode perceber-se que existiriam algumas singularidades, entre as quais se encontram:

1. **Orientação de θ_4 e de θ_6 concordantes:** Tal como já se referiu, quando θ_4 e θ_6 se encontram alinhados, ou seja, quando $\theta_5 = 0$, irá ter-se um caso de singularidade, uma vez que para qualquer ângulo de θ_4 existe sempre um ângulo θ_6 que o compensa. Logo, nestes casos, em que $\theta_5 = 0$, vão existir infinitas soluções na Cinemática Inversa;

2. **Coordenadas x e y do referencial 4 iguais a zero e eixos Z dos referenciais 1 e 4 alinhados:** Nesta situação, o referencial 4 encontra-se exatamente por cima do referencial 1, referencial correspondente à *joint* θ_1, e os eixos Z destes referenciais encontram-se segundo a mesma direção. Novamente, também para este tipo de situações existirão infinitas soluções na Cinemática Inversa;

3. **Coordenadas x e y do referencial 5 iguais a zero e eixos Z dos referenciais 1 e 5 alinhados:** Esta situação corresponde a ter θ_1 e θ_6 alinhados. À semelhança da situação 1, existirá sempre um ângulo θ_1 que compense o ângulo θ_6, logo voltam a ter-se infinitas soluções na Cinemática Inversa.

Para além destas singularidades, encontraram-se outras situações em que não é possível obter o valor esperado de 8 soluções. Por exemplo, no caso em que se pretende determinar os ângulos na Cinemática Inversa para um ponto muito afastado do manipulador, podem não se ter as 8 soluções. Tal acontece pois, para algumas combinações de ângulos o manipulador pode conseguir alcançar esse ponto afastado, no entanto, para outras combinações de ângulos pode já não conseguir alcançar esse mesmo ponto.

5 Resultados Experimentais

Depois de desenvolvidas funções em *MATLAB* que executem os processos atrás referidos, é necessário testa-las utilizando conjuntos de dados relevantes.

Na cinemática direta, depois de ser testada a posição de repouso (todos os ângulos a zero), os restantes conjuntos de dados utilizados para testar o programa foram escolhidos de forma a compreender a influência que cada ângulo tem na posição e orientação finais do braço. Inicialmente testou-se o impacto de θ_2 e θ_3 na posição e orientação. E, em seguida, mantendo os mesmos valores em θ_2 e θ_3, colocou-se um valor de 90º em θ_6 com o intuito de manter a posição e observar uma alteração na orientação. Foram feitos mais testes com intuito de observar o efeito das movimentações de θ_1, θ_4 e θ_5 nas orientações e posições.
Todos estes resultados podem ser observados na tabela 1.

Ângulos	Posição	Orientação
$\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6$	x, y, z	α, β, γ
0,0,0,0,0,0	0, -85, 119,	90, -90, -180
0,45,-45,0,0,0	0, 24.85, 18.85	0, -180, 90
0,45,-45,0,0,90	0, 24.85, 18.85	0, -180, 180
0,90,90,0,0,90	0, -205, 239	90, -90, -90
0,90,90,-180,90,90	0, -195, 249	0, 0, 180
90,0,0,-90,0,0	85, 0, 119	-180, -90, 90

Tabela 1: Resultados experimentais da cinemática direta

Na cinemática inversa foram feitos testes de forma a perceber como poderiam variar o numero de combinações possíveis de ângulos e sob que condicionantes.

No primeiro teste considerou-se o braço esticado quase ao máximo com o *end-effector* virado para cima, tendo-se obtido um total de 4 combinações. Com o reduzir da distancia, a certa altura obtiveram-se 8 combinações. Esta diferença no numero de soluções deve-se à incapacidade do braço atingir um certo ponto para uma das soluções de θ_1 (80 mm de diferença na posição da *joint* 2). Aumentando a distancia deixa de se obter soluções, pois fica demasiado distante para o braço conseguir lá chegar com a orientação pretendida. Alterando o valor da orientação, torna-se possível o braço chegar um pouco mais longe, tendo obtido um numero infinito de soluções (o script apenas apresenta quatro, das quais duas são iguais, pois estáse perante uma singularidade), pois tendo $\theta_5 = 0$, θ_4 e θ_6 tem o mesmo efeito na posição e orientação final do *end-effector*. Todos estes resultados podem ser observados na tabela 2.

Pos	Orien	N	Ângulos
x,y,z	α, β, γ		$\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6$
0,-315,109	0,-180,90	4	0,180,180,180,-90,180
			0,180,180,0,90,0
			0,172,165,180,-84,-180
			0,172,165,0,84,0
0,-230,109	0,-180,90	8	0,119,79,180,-50,-180
			0,119,79,0,50,0
			0,-131,-94,180,-127,180
			0,-131,-94,0,127,0
			-180,-9,149,0,-112,-180
			-180,-9,149,180,112,0
			-180,17,-164,0,-92,-180
			-180,17,-164,180,92,0
0,-320,109	0,-180,90	0	-
0,-325,119	90,-90,-180	inf	0,180,180,0,0,0
			0,180,180,0,0,0
			0,172,165,0,-6,0
			0,172,165,180,6,-180
0,-85,119	90,-90,-180	inf	0,0,0,0,0,0
			0,0,0,0,0,0
			0,-59,-15,180,-45,-180
			0,-59,-15,0,45,0
			-180,-73,40,0,-67,-180
			-180,-73,40,180,67,0
			-180,92,-55,-180,-32,0
			-180,92,-55,0,32,180

Tabela 2: Resultados experimentais da cinemática inversa

6 Conclusões

Na realização deste trabalho foi possível abordar os vários passos para a construção da cinemática direta, como o desenho dos referenciais associados a cada *joint*, composição e determinação, a partir da convenção de Denavit-Hartenberg, de matrizes de transformação de referenciais de coordenadas, e posterior obtenção de posições e rotações associadas à transformação.

Com o desenvolvimento da cinemática inversa foi possível utilizar o método geométrico para obter relações entre ângulos das *joints* e medidas conhecidas, apenas por inspeção e análise da estrutura física do manipulador. Para além disso foi possível utilizar o método algébrico para complementar o geométrico, determinando as expressões dos últimos 3 graus de liberdade, utilizando uma abordagem puramente matemática, baseada na manipulação de matrizes de transformação e de expressões algébricas. Em ambos os métodos foi possível notar a multiplicidade de possíveis soluções, sendo que o numero de possíveis soluções pode variar com a orientação e a posição pretendidas, bem como se poderá haver referencias com eixos de rotação coincidentes.

7 Referências Bibliográficas

[1] Mark W. Spong, Seth Hutchinson, M. Vidyasagar (1st ed), Robot Modeling and Control, John Wiley Sons, Inc.

[2] Silva Sequeira, Joao Slides das aulas teoricas

8 Manual de funcionamento dos Scripts

8.1 DK_lab1 - cinemática direta

O script tem no inicio uma secção onde podem ser inseridos os valores dos ângulos das *joints*, tal como pode ser vista na figura seguinte:

```
%% Values to set
angulos = [0 0 0 0 0 0]; % em graus
```

No vetor "ângulos" devem ser colocados os valores, em graus, dos ângulos das *joints*, pela ordem θ_1, θ_2, θ_3, θ_4, θ_5, θ_6. O resultado é imprimido na consola do *MATLAB*, tal como pode ser visto na figura abaixo, onde o valor dos ângulos vem em graus (ângulos de *Euler* com a ordem de rotação *z-y-z*), e as coordenadas do ponto em milímetros.

```
>> DK_lab1
Cordenadas do ponto: 0, -85, 119
Angulos de Euler: 90, -90, -180
```

8.2 IK_lab1 - cinemática inversa

O script tem no inicio uma secção onde podem ser inseridos os valores das coordenadas (em milímetros) e da orientação (ângulos de *Euler* com a ordem de rotação *z-y-z*, em graus) do *end-effector*, tal como pode ser vista na figura seguinte:

```
%% Values to set
Ponto = [0 -85 119]; % em milimetros
angulos = [90 -90 -180]; % em graus
N = 0; % numero de casas decimais
```

Nota para o facto de se poder escolher o numero de casas decimais com que o resultado vai ser apresentado utilizando a variável "N". O resultado é imprimido na consola do *MATLAB*, tal como pode ser visto na figura abaixo, onde o valor dos ângulos vem em graus, e aprecem pela ordem θ_1, θ_2, θ_3, θ_4, θ_5, θ_6.

```
>> IK_lab1
Combinação de angulos 1 do ponto:  0,   0,   0,   0,   0,   0
Combinação de angulos 2 do ponto:  0,   0,   0,   0,   0,   0
Combinação de angulos 3 do ponto:  0,  -59,  -15,  180,  -45,  -180
Combinação de angulos 4 do ponto:  0,  -59,  -15,  0,  45,  0
Combinação de angulos 5 do ponto:  -180,  -73,  40,  0,  -67,  -180
Combinação de angulos 6 do ponto:  -180,  -73,  40,  180,  67,  0
Combinação de angulos 7 do ponto:  -180,  92,  -55,  -180,  -32,  0
Combinação de angulos 8 do ponto:  -180,  92,  -55,  0,  32,  180
```

Caso não sejam apresentadas combinações significa que não há solução para os valores introduzidos. Caso apareçam combinações repetidas há uma singularidade (situação presente na figura acima), e há na verdade infinitas soluções.