1. **(15 баллов)**. Посчитайте (аналитически) LU-разложение матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

с помощью элементарных преобразований Z_k. Объясните, почему в данном случае существование LU-разложения не противоречит теореме о существовании LU-разложения из лекций.

$$Z_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ -7 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to Z_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix}$$

$$Z_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Z_2 Z_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U$$

$$L = Z_1^{-1} \cdot Z_2^{-1} = (Z_2 Z_1)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Теорема Невырожденная A имеет LU разложение $\Leftrightarrow$ A строго регулярная

В нашем случае $\det(A) = 0$, поэтому никакого противоречия нет, поскольку мы явно нашли LU разложение $\Rightarrow$ теоремой пользоваться не можем $\Rightarrow$ противоречия нет

2. **(35 баллов)**. Пусть симметричная положительно определенная матрица $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ задана в следующем виде:

$$A = \begin{bmatrix} a & c^\top \\ c & D \end{bmatrix},$$

где $a \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}^{n-1}$, $D \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$. Исключением Холецкого первой строки назовем следующую операцию:

$$A = \begin{bmatrix} a & c^\top \\ c & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l & 0 \\ \frac{c}{l} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & D - \frac{cc^\top}{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l & \frac{c^\top}{l} \\ 0 & I \end{bmatrix} = L_0 A_1 L_0^\top, \quad l = \sqrt{a}. \tag{1}$$

Применив разложение аналогичное (1) к дополнению по Шуру $D - \frac{cc^\top}{a}$ и т.д., получим разложение Холецкого.

(a) **(9 баллов)**. Докажите, что $D - \frac{cc^\top}{a}$ будет симметричной положительно определенной.

D – симметричная, cc^T – симметричная $\Rightarrow$ $D - \frac{1}{a}cc^T$ – симметрична

Если A положительно определена $\Rightarrow$ A строго регулярна

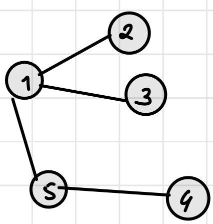
В предыдущем д/з мы показали, что дополнение по Шуру у строго регулярной матрицы тоже строго регулярно. $\delta_k = \frac{\Delta_{k+1}}{\Delta_k} \cdot \delta_{k-1}$ для вычисления k-ого углового минора дополнения по Шуру.

$\delta_1 = \frac{\Delta_2}{\Delta_1} > 0$ $\delta_2 > 0$ и т.д $\Rightarrow$ дополнение по Шуру положительно определено

(b) **(4 баллов).** Для матрицы

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} a & \qquad\qquad c^T \end{array} \\ A = & \left[\begin{array}{c|cccc} 4 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 4 \end{array}\right] \\ & \begin{array}{cc} c & \qquad D \end{array} \end{array} \qquad (2)$$

постройте ее граф $G(A)$.



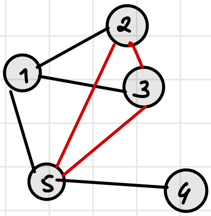
– граф $G(A)$

(c) **(8 баллов).** Нарисуйте на графе $G(A)$ (выделите цветом) возникающие заполнения у дополнения по Шуру $D - \frac{cc^\top}{a}$ и продолжите эту процедуру рекурсивно. Находить конкретные числа не обязательно.

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \frac{cc^T}{a} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D - \frac{cc^T}{a} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} - \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} 2 & \quad 3 & \quad 4 & \quad 5 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 15/4 & -1/2 & 0 & -1/4 \\ -1/2 & 4 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ -1/4 & -1/2 & 3 & 15/4 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \end{array}$$

Получим следующий граф, где красное — это наше заполн



Теперь продолжим рекурсивно

Дополнение по Шуру для дополнения по Шуру:

$$D' = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1/2 & 3 & 15/4 \end{pmatrix} \qquad c' = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ -1/4 \end{pmatrix}$$

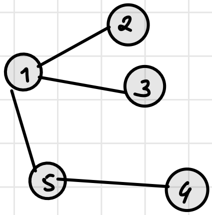
$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1/2 & 3 & 15/4 \end{pmatrix} - \frac{4}{15}\begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 1/8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/8 & 0 & 1/16 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 3 & 4 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} 59/15 & 0 & -8/15 \\ 0 & 1 & 3 \\ -8/15 & 3 & 56/15 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow 3 \\ \leftarrow 4 \\ \leftarrow 5 \end{array}$$

Получим те же заполнения. Дальше останутся они же

(d) **(8 баллов)**. Примените к графу $G(A)$ алгоритм minimal degree ordering (вычислять разложение для матрицы не нужно, этот пункт подразумевает работу только с графом) и соответствующую матрицу $PAP^{\top}$. На сколько сократилось число ребер заполнения при исключении вершин в новом порядке?

На каждой итерации будем выбирать вершину с наименьшей степенью, давать ей новый номер, исключать её и продолжать с учётом появившихся заполнений.

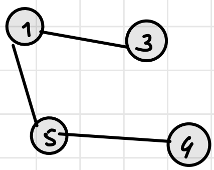
Итерация №1:



Возьмем в качестве вершины с наименьшей степенью вторую вершину. Дадим ей номер 1

У вершины 2 один сосед => заполнений нет

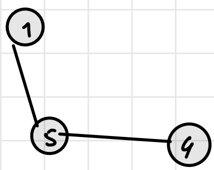
Итерация №2



Возьмем теперь вершину 3, дадим ей номер 2

У вершины 3 один сосед => заполнений нет

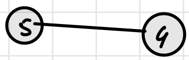
Итерация №3



Возьмем вершину 1 и дадим ей номер 3

У нее нет соседей => заполнений нет

Итерация №4



Дадим вершине 4 номер 4

А вершине 5 номер 5

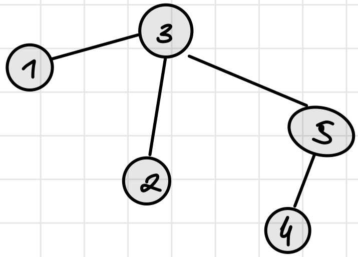
Получилось:

$$(1,2,3,4,5) \Rightarrow (2,3,1,4,5)$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— то, как меняются строки A

$$PAP^T = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$



- новый граф

ребер осталось столько же

(e) **(6 баллов)**. Запишите матрицу A из (2) в CSR формате.

values $= [4, 1, 2, 1, 1, 4, 2, 5, 1, 3, 1, 3, 4]$

rows $= [0, 4, 6, 8, 10, 13]$

cols $= [0, 1, 2, 4, 0, 1, 0, 2, 3, 4, 0, 3, 4]$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ A = & \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \end{array}$$

3. **(25 баллов)**.

(a) Пусть $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – произвольная невырожденная матрица. Пусть рассматривается итерационный процесс вида $x_{k+1} = x_k + \tau_k r_k$, $r_k = b - Ax_k$. Получите оптимальные параметры $\tau_k \in \mathbb{R}$, минимизирующие функционал невязки $J(x) = \|b - Ax\|_2^2$ на каждом шаге итерационного процесса. Убедитесь, что полученное выражение зависит только от A и r_k.

(b) В случае $A = A^\top > 0$ покажите, что для полученного процесса выполняется:

$$\|r_k\|_2 \leq \left(\frac{\mathrm{cond}_2(A) - 1}{\mathrm{cond}_2(A) + 1}\right)^k \|r_0\|_2.$$

a) $x_{k+1} = x_k + \tau_k r_k, \quad r_k = b - Ax_k$

$$r_{k+1} = b - Ax_{k+1} = b - A(x_k + \tau_k r_k) = \underbrace{b - Ax_k}_{r_k} - A\tau_k r_k =$$

$$= r_k - A\tau_k r_k$$

$$\|b - Ax_{k+1}\|_2^2 = \|r_k - A\tau_k r_k\|_2^2 = \langle r_k, r_k\rangle + \tau_k^2 \langle Ar_k, Ar_k\rangle -$$

$$- 2\tau_k \langle r_k, Ar_k\rangle$$

$$\frac{\partial J}{\partial \tau_k} = 2\tau_k <r_k, Ar_k> - 2<r_k, Ar_k> = 0$$

$$\tau_k = \frac{<r_k, Ar_k>}{<Ar_k, Ar_k>}$$

в) $A = A^T > 0$

$$r_{k+1} = b - Ax_{k+1} = \min_{\tau_k} \left(b - A(x_k + \tau_k r_k) \right) \overset{\forall t}{\le} b - Ax_k - tAr_k = (I - tA) r_k$$

$$\Rightarrow \|r_{k+1}\|_2^2 \le \|(I - tA) r_k\|_2^2 \le \|I - tA\|_2^2 \, \|r_k\|_2^2 = \frac{cond(A) - 1}{cond(A) + 1} \|r_k\|_2^2,$$

если взять $t = \arg\min \|I - tA\|_2$

$$\Downarrow$$

$t = \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_n}$, где λ_i - это собственные значения A

Точно так же $\|r_k\|_2^2 \le \frac{cond(A) - 1}{cond(A) + 1} \|r_{k-1}\|_2^2$

Рекурсивно получаем: $\|r_{k+1}\|_2^2 \le \left(\frac{cond(A) - 1}{cond(A) + 1} \right)^k \cdot \|r_0\|_2^2$

4. **(25 баллов)**. Покажите, что для достижения точности $\frac{\|e_k\|_2}{\|e_0\|_2} \le \varepsilon$ для заданного $0 < \varepsilon < 1$ в методе Чебышева необходимо сделать не больше

$$N(\varepsilon) = 1 + \frac{\sqrt{\text{cond}_2(A)}}{2} \ln(2\varepsilon^{-1})$$

итераций (при достаточно большом $\text{cond}_2(A)$).

На лекции было доказано $\|e_k\|_2 \le 2 \left(\frac{\sqrt{cond_2(A)} - 1}{\sqrt{cond_2(A)} + 1} \right)^k \|e_0\|_2$

$\Rightarrow$ Хотим показать, что $2 \left(\frac{\sqrt{cond_2(A)} - 1}{\sqrt{cond_2(A)} + 1} \right)^k \le \varepsilon$

$$e^{k\ln\left(\frac{\sqrt{\operatorname{cond}_2(A)}-1}{\sqrt{\operatorname{cond}_2(A)}+1}\right)} \le e^{\ln\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}$$

$$k\ln\left(\frac{\sqrt{\operatorname{cond}_2(A)}-1}{\sqrt{\operatorname{cond}_2(A)}+1}\right) \le \ln\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \Rightarrow k \le \ln\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(\ln\left(\frac{\sqrt{\operatorname{cond}_2(A)}-1}{\sqrt{\operatorname{cond}_2(A)}+1}\right)\right)^{-1} \overset{*}{=}$$

$$= \left(-\ln(2\varepsilon^{-1})\right)\left(-\frac{1}{2}\left(\sqrt{\operatorname{cond}_2(A)}-1\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\operatorname{cond}_2(A)}-1\right)\ln(2\varepsilon^{-1}) =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\operatorname{cond}_2(A)}\ln(2\varepsilon^{-1}) - \underbrace{\frac{1}{2}\ln(2\varepsilon^{-1})}_{\le 1} \le \frac{1}{2}\sqrt{\operatorname{cond}_2(A)}\ln(2\varepsilon^{-1})+1$$

эквивалентность

$$(*):\ \ln\left(\frac{\sqrt{\operatorname{cond}_2(A)}-1}{\sqrt{\operatorname{cond}_2(A)}+1}\right) = -\ln\left(1+\frac{2}{\sqrt{\operatorname{cond}_2(A)}-1}\right) \approx \frac{-2}{\sqrt{\operatorname{cond}_2(A)}-1}$$

$$\Downarrow$$
$$0$$

1. **(50 б. балла)**. Пусть $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ обладает строгим строчным диагональным преобладанием. Докажите, что для такой матрицы LU-разложение существует, и для коэффициента роста $\rho = \|U\|_C/\|A\|_C$, где $A = LU$, справедливо $\rho \le 2$.

Представим A как сумму диагональной матрицы D и матрицы C, в которой все элементы A, по диагонали заменены на 0. : $A = C + D$

Тогда $A = D(I + D^{-1}C)$. Заметим, что D будет невырожденной, поскольку раз у нас есть строгое строчное преобладание $\Rightarrow a_{ii} > 0\ \forall i$

$(D^{-1}C)_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \Rightarrow \|D^{-1}C\|_\infty < 1 \Rightarrow$ ряд Неймана для $D^{-1}C$ сходится и $(I - D^{-1}C)$ - обратима

Итак, A у нас тоже невырождена, как произведение невырожденных матриц

(Если $A = BC \Rightarrow \det(A) = \det(B)\det(C)$)

Можно заметить, что все ведущие подматрицы A обладают свойством строгого строчного диагонального преобладания. Значит приведенное выше доказательство справедливо и для них $\Rightarrow$ все такие подматрицы невырожденные $\Rightarrow$

A – строго регулярна $\Rightarrow$ по теореме $\exists\, LU$ разложение.

Рассмотрим алгоритм Гаусса. После k шагов матрица C превратится в

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & & & & & \\ & \ddots & & & * & \\ 0 & & c_{kk} & & & \\ \vdots & & 0 & \ddots & & \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ \vdots & & 0 & & & \\ \vdots & & c_{mk} & & c_{mm} & \\ \vdots & & * & & & \ddots \\ 0 & & * & \dots & * & c_{nn} \end{pmatrix}$$

Чтобы обнулить c_{mk}, вычитаем из строки m строку k, умноженную на $\frac{c_{mk}}{c_{kk}}$

$$\hat{c}_{mj} = c_{mj} - c_{mj}\frac{c_{mk}}{c_{kk}} \quad \forall j = k \dots n \quad \text{и} \quad \hat{c}_{mk} = 0$$

Теперь посчитаем сумму в строке m:

$$\sum_{j=k+1}^{n} |\hat{c}_{mj}| = \sum_{j=k+1}^{n} \left| c_{mj} - c_{kj}\frac{c_{mk}}{c_{kk}} \right| \le \sum_{j=k+1}^{n} |c_{mj}| + \left|\frac{c_{mk}}{c_{kk}}\right| \underbrace{\sum_{j=k+1}^{n} |c_{kj}|}_{<|c_{kk}|} <$$

$$< \sum_{j=k+1}^{n} |c_{mj}| + \frac{|c_{mk}|}{|c_{kk}|}|c_{kk}| = \sum_{j=k}^{n} |c_{mj}|$$

Получили, что $\sum\limits_{j=k}^{n} |\hat{c}_{mj}| < \sum\limits_{j=k}^{n} |c_{mj}| \Rightarrow$ сумма модулей в каждой строке уменьшается.

$$|\hat{c}_{mm}| = \left| c_{mm} - \frac{c_{km} c_{mk}}{c_{kk}} \right| \geq \left| |c_{mm}| - \underbrace{\frac{|c_{km}|}{|c_{kk}|}}_{\leq 1} \underbrace{|c_{mk}|}_{\leq |c_{mm}|} \right|$$

$$\sum_{\substack{j=k+1\\ j\neq m}}^{n} |\hat{c}_{mj}| = \sum_{\substack{j=k+1\\ j\neq m}}^{n} \left| c_{mj} - c_{kj} \frac{c_{mk}}{c_{kk}} \right| \leq \sum_{\substack{j=k+1\\ j\neq m}}^{n} |c_{mj}| + \frac{|c_{mk}|}{|c_{kk}|} \sum_{\substack{j=k+1\\ j\neq m}}^{n} |c_{kj}| \leq$$

$$\leq \left(\sum_{j=k\neq m}^{n} |c_{mj}| - |c_{mk}| \right) + \frac{|c_{mk}|}{|c_{kk}|} \left(\sum_{j=k+1}^{n} |c_{kj}| - |c_{km}| \right) < |c_{mm}| - |c_{mk}| +$$

$$+ \frac{|c_{mk}|}{|c_{kk}|} \left(|c_{kk}| - |c_{km}| \right) = |c_{mm}| - |c_{mk}| + \frac{|c_{mk}|}{|c_{kk}|} \left(|c_{kk}| - |c_{km}| \right) =$$

$$= |c_{mm}| - \frac{|c_{mk}||c_{km}|}{|c_{kk}|} \leq |\hat{c}_{mm}|$$

Получили, что после любого шага в алгоритме Гаусса сохраняется строгое диагональное преобладание в строках матрицы.

Значит, матрица U тоже обладает таким преобладанием.

$$\forall\, k, i, j \quad |u_{ii}| \leq \sum_{k=1}^{n} |u_{ik}| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}| = |a_{ii}| + \underbrace{\sum_{k\neq i}^{n} |a_{ik}|}_{< |a_{ii}|} < 2|a_{ii}|$$

$$\Rightarrow \|U\|_c = \max_{ij} |u_{ij}| = |u_{km}| \leq 2|a_{kk}| \leq$$

$$\leq 2 \max_{ij} |a_{ij}| = 2\|A\|_c \Rightarrow \frac{\|U\|_c}{\|A\|_c} \leq 2$$