1. **(12 баллов)**. Найдите скелетное разложение вида $C\hat{A}^{-1}R$ матрицы $m \times n$ с элементами:

$$a_{ij} = \frac{i}{j} + \frac{j}{i}.$$

Нумерация индексов начинается с 1.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5/2 & 10/3 & 17/4 & \cdots & \frac{1}{n}+n \\ 5/2 & 2 & 13/6 & 5/2 & & \vdots \\ 10/3 & 13/6 & 2 & 25/12 & & \vdots \\ 17/4 & 5/2 & 25/12 & 2 & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \\ m+\frac{1}{m} & \cdots & & & \cdots & 2 \end{pmatrix}$$

Найдем ранг этой матрицы:

A можно представить как сумму таких матриц:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \end{pmatrix}}_{A} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ \vdots \\ 1/m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \end{pmatrix}}_{B}$$

У матрицы A ранг 1 т.к. она является произведением двух матриц ранга 1.

Для B то же самое. Сумма матриц ранга 1 $\Rightarrow rk(A+B) \le 2$

$rk(A+B) = 2$ т.к. если взять угловой минор 2×2 $\begin{vmatrix} 2 & 5/2 \\ 5/2 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$

$A = C\hat{A}^{-1}R$ В качестве $\hat{A}$ возьмем $\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5/2 \\ 5/2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -8/9 & 10/9 \\ 10/9 & -8/9 \end{pmatrix}$

Тогда C — это r столбцов матрицы A, содержащих $\hat{A}$, а

R — это r строк матрицы A, содержащих $\hat{A}$

Получаем: $R = \begin{pmatrix} 2 & 5/2 & 10/3 & 17/4 & \dots & \frac{1}{n}+n \\ 5/2 & 2 & 13/6 & 5/2 & \dots & \frac{2}{n}+n \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 2 & 5/2 \\ 5/2 & 2 \\ 10/3 & 13/6 \\ 17/4 & 5/2 \\ \vdots & \vdots \\ m+\frac{1}{m} & m+\frac{2}{m} \end{pmatrix}$

$A = C\hat{A}^{-1}R$

2. **(15 баллов)**. Пусть $S, S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^n$, а $S^\perp, S_1^\perp, S_2^\perp$ – их ортогональные дополнения.

(a) Покажите, что $\operatorname{dist}(S_1, S_2) = \operatorname{dist}(S_1^\perp, S_2^\perp)$.

(b) Найдите $\operatorname{dist}(S, S^\perp)$.

а) $\operatorname{dist}(S_1, S_2) = \|P_1 - P_2\|_2$, где P_1 - ортопроектор на S_1

P_2 - ортопроектор на S_2

Если P_1 - ортопроектор на $S_1 \Rightarrow I - P_1$ - ортопроектор на $S_1^\perp$

Хотим показать: $\|P_1 - P_2\|_2 = \|I - P_1 - (I - P_2)\|_2$

$\|P_1 - P_2\|_2 = \|P_2 - P_1\|_2$

Заметим, что $\|P_2 - P_1\|_2 = \|-(P_1 - P_2)\|_2$

По определению: $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_1(A^*A)}$

Пусть $P_2 - P_1 = A \Rightarrow P_1 - P_2 = -A$

Найдем $\|-A\|_2 = \sqrt{\lambda_1((-A)^*(-A))} = \sqrt{\lambda_1(A^*A)} = \|A\|_2$

$\Rightarrow \|P_2 - P_1\|_2 = \|P_1 - P_2\|_2$

б) $\operatorname{dist}(S, S^\perp) = \|P - I + P\|_2 = \|2P - I\|_2 = \sqrt{\lambda_1((2P-I)^*(2P-I))} =$

$= \sqrt{\lambda_1((2P^* - I)(2P-I))} = \sqrt{\lambda_1(2P-I)(2P-I)} = \sqrt{\lambda_1(4P^2 - 2PI - I2P + I^2)} =$

$= \sqrt{\lambda_1(4P^2 - 4P + I^2)} = \sqrt{\lambda_1(4P - 4P + I^2)} = \sqrt{\lambda_1(I)} = 1.$

3. **(15 баллов)**. Пусть $U = [U_r \; U_r^{\perp}] \in \mathbb{C}^{\cancel{n\times n}\; m\times m}$ – матрица левых сингулярных векторов матрицы $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ ранга r. Покажите, что $\ker(A^*) = \operatorname{Im}(U_r^{\perp})$ и запишите ортопроектор на $\ker(A^*)$.

$\ker(A^*) \subseteq \operatorname{Im}(U_r^{\perp})$

$A^* = (V_r \; V_r^{\perp}) \begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^* (U_r \; U_r^{\perp})^*$

Хотим показать, что $\operatorname{Im} U_r^{\perp} \subseteq \ker A^*$

Пусть $x \in \operatorname{Im} U_r^{\perp} \Rightarrow \exists y \in \mathbb{C}^{m-r\times 1} : x = U_r^{\perp} y = (U_r \; U_r^{\perp}) \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow r \\ \leftarrow m-r \end{array}$

если $A^* x = (V_r \; V_r^{\perp}) \begin{pmatrix} \Sigma^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (U_r \; U_r^{\perp})^* x = (V_r \; V_r^{\perp}) \begin{pmatrix} \Sigma^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_r^* \\ (U_r^{\perp})^* \end{pmatrix} (U_r \; U_r^{\perp}) \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$

Мы знаем, что матрица U – ортогональная $UU^* = I \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} U_r^* \\ (U_r^{\perp})^* \end{pmatrix} (U_r \; U_r^{\perp}) = [U_r^* \cdot U_r \;\; (U_r^{\perp})^* U_r^{\perp}] = I \Rightarrow$

$A^* x = (V_r V_r^{\perp}) \begin{pmatrix} \Sigma_r^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = (V_r \; V_r^{\perp}) \cdot (\Sigma_r^* \cdot 0 + 0 \cdot y) = 0$

Получаем: $x \in \ker A^* \Rightarrow \operatorname{Im} U_r^{\perp} \subseteq \ker A^*$ $\quad m\times m \quad m\times 1$

В другую сторону: покажем, что $\ker A^* \subseteq \operatorname{Im} U_r^{\perp}$

Пусть $\underset{n\times m}{A^*} \underset{m\times 1}{x} = 0 \qquad V \Sigma^* U^* x = \underbrace{\underset{n\times n}{(V_r \; V_r^{\perp})} \begin{pmatrix} \Sigma_r^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{n\times m} \underbrace{\overbrace{\begin{pmatrix} U_r^* \\ (U_r^{\perp})^* \end{pmatrix}}^{m\times m} \overbrace{x}^{m\times 1}}_{} = 0$

$\underset{n\times m}{(V_r \Sigma_r^* \; 0)}$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} - m\times 1$

$(V_r \Sigma_r^*) = (v_1 \bar{\sigma}_1 + \ldots + v_r \bar{\sigma}_r)$

Получается: $V\Sigma^* U^* x = v_1\bar{\sigma}_1 x_1 + \dots + v_r\bar{\sigma}_r x_r + \dots + 0 = 0$

$\Rightarrow v_1\bar{\sigma}_1\alpha_1 x_1 + \dots + v_r\bar{\sigma}_r\alpha_r x_r = 0$

Раз $v_1 \dots v_r$ – ортонормированный базис $\Rightarrow \bar{\sigma}_i x_i = 0 \quad \forall i \le r$

Но Σ – это не нулевая матрица $\Rightarrow x_i = 0$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} U_r^* \\ (U_r^\perp)^* \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \alpha_{r+1} \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} u_1^* \\ \vdots \\ u_r^* \\ (u_{r+1}^*)^\perp \\ \vdots \\ (u_m^*)^\perp \end{pmatrix} (x) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \alpha_{r+1} \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}}_{= x'} \Rightarrow$$

Умножим слева (U_r, U_r^*)

$\Rightarrow x = U_r^\perp \cdot x' \Rightarrow$

$x \in \langle U_r^\perp \rangle \Rightarrow x \in Im(U_r^\perp)$

Итог: $\ker A^* \subseteq Im(U_r^\perp)$

Получили: $\ker A^* = Im(U_r^\perp)$

Ортопроектор на $\ker A^*$ это то же самое, что ортопроектор $Im(U_r^\perp)$

Если P – это любой ортопроектор на $Im(A) \Rightarrow P$ – это ортопроектор на $Im(U_r)$

(утверждение с лекции) $\Rightarrow I-P$ – это ортопроектор на $Im(U_r^\perp) \Rightarrow$

$\Rightarrow I-P$ – это ортопроектор на $\ker(A^*)$

Итог: $I-P$ – ортопроектор на $\ker(A^*)$

4. **(18 баллов)**. Вычислите $\frac{\partial f}{\partial x}$ для следующих функционалов, где $x \in \mathbb{R}^n$. Считайте все возникающие матрицы и векторы действительными.

(a) $f(x) = \|Ax - b\|_2^2$;

(b) $f(x) = \ln(x^\top x)$, $x \neq 0$.

а) $f(x+h) = \langle A(x+h) - b, A(x+h) - b \rangle = \langle Ax - b + Ah, Ax - b + Ah \rangle =$

$= \langle Ax - b, Ax - b \rangle + 2\langle Ax - b, Ah \rangle + \langle Ah, Ah \rangle =$

$= f(x) + 2\langle Ax - b, Ah \rangle + \langle Ah, Ah \rangle = f(x) + 2(x^T A^T - b^T) Ah + \bar{o}(\|h\|_F) \Rightarrow$

$\Rightarrow df[h] = 2(x^T A^T - b^T) Ah \Rightarrow \frac{df}{dx} = 2A^T(Ax - b)$

б) $f(x) = \ln(x^T x)$, $x \neq 0$

$$\begin{cases} w(x) = x^T x \\ g(x) = \ln y \end{cases} \Rightarrow f(x) = g(w(x)) \Rightarrow df(x)[h] = dg(w(x))[dw(x)[h]]$$

$w(x+h) = (x+h)^T(x+h) = (x^T + h^T)(x+h) = x^T x + x^T h + h^T x + h^T h =$

$= w(x) + h^T x + x^T h + \bar{o}(\|h\|_F)$

$\Rightarrow dw(x)[h] = \underbrace{h^T x}_{\text{транспонируем т.к. это скаляр}} + x^T h = 2x^T h$

$dg[h] = \frac{1}{y} h$

$df(x)[h] = \frac{1}{x^T x} \cdot 2x^T h = \frac{2x^T h}{x^T x} \Rightarrow \frac{df}{dx} = 2\frac{x}{x^T x}$

5. **(20 баллов)**. Пусть $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – симметричная матрица. Пусть $X \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $p < n$. **Указание:** при использовании правил дифференцирования необходимо указывать, на какое конкретно правило вы ссылаетесь.

(a) Найдите дифференциал $f(X) = X^\top AX$.

(b) Найдите дифференциал $g(X) = (X^\top X)^{-1}$. Напомним, что для квадратной обратимой Y справедливо $d(Y^{-1})[H] = -Y^{-1}HY^{-1}$.

(c) Найдите $\frac{\partial w(X)}{\partial X}$, где $w(X) = \mathrm{Tr}(f(X)g(X))$. Считайте, что производная считается в точке X с ортонормированными столбцами.

a) $f(X) = X^TAX$

$$f(x+dx) - f(x) = (x+dx)^T A (x+dx) - X^TAX = (X^T + dx^T) A (x+dx) -$$

$$- X^TAX = (X^TA + dx^TA)(x+dx) - X^TAX = X^TAX + dx^TAx + dX^TAdx -$$

$$- X^TAX + X^TAdx = dx^T(Ax + Adx) - X^TAdx$$

$$df(x)[dx] = \boxed{dx^TAx + x^TAdx} + \bar{o}(\|dx\|^2)$$

то что искали

б) $g(X) = (x^TX)^{-1}$

$d((x^Tx)^{-1})[dx] = $ // правило дифференцирования композиции ф-ций // $=$

$= d((x^Tx)^{-1})[d(x^Tx)] = $ // то что написано в условии // $=$

$= -(X^TX)^{-1} d(X^TX)(x^TX)^{-1} = $ // $d(X^TX)$ по правилу произв // $=$

$= -(X^TX)^{-1}(dX^TX + X^Tdx)(x^TX)^{-1} = -(x^Tx)^{-1}(x^Tdx + x^Tdx)(x^Tx)^{-1} =$

$= -(x^Tx)^{-1}(2x^Tdx)(x^Tx)^{-1}$

c) $w(X) = \mathrm{Tr}(f(X)\,g(X))$

$dw(X) = d\,tr(f(x)\,g(x)) = tr(d(f(x)\,g(x))) = $ // правило диф-ния произведен // $=$

$$= tr\left(df(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot d(g(x))\right) = tr(df(x)\, g(x)) + tr(f(x)\, dg(x)) =$$

$$= \left(g(x) = (x^Tx)^{-1} \Rightarrow g(x) = I\right) = tr(df(x)) + tr(f(x)\, dg(x)) =$$

$$= tr(dx^TAx + x^TAdx) + tr\left(x^TAx \cdot \left(-\underbrace{(x^Tx)}_{=I}{}^{-1}(2x^Tdx)\underbrace{(x^Tx)}_{=I}{}^{-1}\right)\right) =$$

$$= tr(dx^TAx + x^TAdx) - tr\left(x^TAx \cdot \underbrace{(x^Tx)}_{=I}{}^{-1}(2x^Tdx)\underbrace{(x^Tx)}_{I}{}^{-1}\right) =$$

$$= tr(dx^TAx + x^TAdx) - tr(x^TAx\; 2x^Tdx) = tr(dx^TAx + x^TAdx - \underbrace{x^TAx \cdot 2x^T\, dx}_{2x^TAxx^Tdx})$$

Итог: $$\frac{\partial w(x)}{\partial x} = tr(dx^TAx + x^TAdx - 2x^TAxx^Tdx) = \boxed{2\, tr\left(x^TA(I - xx^T)dx\right)}$$

6. **(20 баллов)**. Пусть $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – симметричная положительно определенная матрица.

(a) Найдите матрицу M, такую что

$$\text{vec}(AX + XA) = M\,\text{vec}(X)$$

и укажите ее размер.

(b) Пусть $A = S\Lambda S^{-1}$ – собственное разложение A. Выразите собственные векторы и собственные значения матрицы M через S и Λ. **Подсказка:** вам поможет тождество $I = SS^{-1}$ и правила Кронекерова произведения.

(c) Покажите, что решение $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ матричного уравнения

$$AX + XA = B,$$

существует и единственно для любой $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

$$\text{vec}(AB) = (I_n \otimes A)\,\text{vec}\, B = (B^T \otimes I_k)\,\text{vec}(A)$$

$$\text{vec}(AX) = (I_n \otimes A)\,\text{vec}\, X$$

Проверим, что $\text{vec}(AX) = (I_n \otimes A)\,\text{vec}\, X$

$$I_n \otimes A = \begin{pmatrix} A & & & \\ & A & & \\ & & \ddots & \\ & & & A \end{pmatrix}$$

$$I_m \otimes A \cdot \mathrm{vec}X = \begin{pmatrix} A & & \\ & \ddots & \\ & & A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X^{(1)} \\ X^{(2)} \\ \vdots \\ X^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AX^{(1)} \\ \vdots \\ AX^{(n)} \end{pmatrix} = \mathrm{vec}(AX)$$

Проверим теперь, что

$$\mathrm{vec}(XA) = (A^T \otimes I_n)\,\mathrm{vec}(X)$$

$$A^T \otimes I_n = \begin{pmatrix} a_{11}I & \dots & a_{n1}I \\ a_{12}I & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n}I & & a_{nn}I \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}I & \dots & a_{n1}I \\ \vdots & & \\ a_{1n}I & \dots & a_{nn}I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^{(1)} \\ \vdots \\ X^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}IX^{(1)} + \dots + a_{n1}IX^{(n)} \\ \vdots \\ a_{1n}IX^{(1)} + \dots + a_{nn}IX^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}X^{(1)} + \dots + a_{n1}X^{(n)} \\ \vdots \\ a_{1n}X^{(1)} + \dots + a_{nn}X^{(n)} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} X^{(1)} & \dots & X^{(n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} XA^{(1)} \\ \vdots \\ XA^{(n)} \end{pmatrix} = \mathrm{vec}(X, A)$$

Очевидно, что $\mathrm{vec}(AX + XA) = \mathrm{vec}(AX) + \mathrm{vec}(XA)$ т.к. это явная операция.

$$\mathrm{vec}(AX + XA) = \mathrm{vec}(AX) + \mathrm{vec}(XA) = \left((I_n \otimes A) + (A^T \otimes I_n)\right) \mathrm{vec}(X) =$$

$$= \left(\underbrace{(I \otimes A) + (A \otimes I)}_{M \in \mathbb{R}^{n^2 \times n^2}}\right) \mathrm{vec}(X)$$

б) $M = (I \otimes A) + (A^T \otimes I) = I \otimes A + A \otimes I$

т.к $I = SS^{-1}$

$$M = SS^{-1} \otimes A + A \otimes SS^{-1} = SS^{-1} \otimes S\lambda S^{-1} + S\lambda S^{-1} \otimes SS^{-1} = (S \otimes S)\cdot(S^{-1} \otimes \lambda S^{-1}) +$$

$$+ (S \otimes S)(\lambda S^{-1} \otimes S^{-1}) = (S \otimes S)\left((S^{-1} \otimes \lambda S^{-1}) + (\lambda S^{-1} \otimes S^{-1})\right) =$$

$$= (S \otimes S)\left((I \otimes \lambda)(S^{-1} \otimes S^{-1}) + (\lambda \otimes I)(S^{-1} \otimes S^{-1})\right) = (S \otimes S)\left((I \otimes \lambda) + (\lambda \otimes I)\right)(S^{-1} \otimes S^{-1})$$

Собственные вектора:

$$(S \otimes S)^{(ik)} = \begin{pmatrix} s_{11} S & \dots & s_{1n} S \\ \vdots & & \\ s_{n1} S & \dots & s_{nn} S \end{pmatrix}^{(ik)} = \begin{pmatrix} s_{1 i_k} S^{(i)} \\ \vdots \\ s_{n i_k} S^{(i)} \end{pmatrix}$$

Собственные значения:

$$I \otimes \lambda + \lambda \otimes I = \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{11} \end{pmatrix} & & & \\ & \begin{pmatrix} \lambda_{22} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{22} \end{pmatrix} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \begin{pmatrix} \lambda_{nn} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{nn} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda + \begin{pmatrix} \lambda_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{11} \end{pmatrix} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda + \begin{pmatrix} \lambda_{nn} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{nn} \end{pmatrix} \end{pmatrix}^{(ik)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \lambda_{ij} + \lambda_{ik} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

c) $AX + XA = B$

$$\mathrm{Vec}\,(AX + XA) = \mathrm{Vec}\,B = M\,\mathrm{Vec}\,X$$

$\Rightarrow$ Хотим доказать, что $\det M \neq 0 \Rightarrow$ СЛУ имеет единственное решение

$\det M = (\lambda_{ij} + \lambda_{ik})^n \cdot \ldots \cdot (\lambda_{mn} + \lambda_{kp})^n \neq 0$ т.к. A — невырожд. и положит. опр $\Rightarrow \lambda_{ij} > 0 \ \forall i, j$

$\det M$ — сумма чисел $> 0 \Rightarrow \det M \neq 0$