1. **(15 баллов)**. Вложите блочно-теплицеву матрицу с теплицевыми блоками

$$\begin{array}{c} T_0 \to \\ T_1 \to \end{array}\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{c} \leftarrow T_{-1} \\ \leftarrow T_0 \end{array}$$

в $B \in \mathbb{R}^{9\times 9}$ – блочный циркулянт с циркулянтными блоками и найдите собственное разложение B.

Мы знаем, что теплицеву матрицу можно вложить в циркулянт размера $(2n-1)\times(2n-1)$ или больше. Т.к. у нас блоки 2×2 $\Rightarrow$ можно вложить в циркулянт размера 3×3. Будем вкладывать каждый блок по отдельности в циркулянт

Если Теплицева матрица выглядит так: $\begin{pmatrix} t_0 & t_{-1} \\ t_1 & t_0 \end{pmatrix}$, то циркулянт выглядит:

$$\begin{pmatrix} t_0 & t_{-1} & t_1 \\ t_1 & t_0 & t_{-1} \\ t_{-1} & t_1 & t_0 \end{pmatrix}$$

$$T_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \to C_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to C_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Получаем $\begin{pmatrix} C_0 & C_1 \\ C_{-1} & C_0 \end{pmatrix}$ – это можно рассмотреть, как теплицеву матрицу 2×2 и вложить в циркулянт 3×3

$$B = \begin{pmatrix} C_0 & C_{-1} & C_1 \\ C_1 & C_0 & C_{-1} \\ C_{-1} & C_1 & C_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{9\times 9}$$

Теперь найдем собственное разложение B:

$$B = (F_3 \otimes F_3)^{-1} \operatorname{diag}\left((F_3 \otimes F_3)\, b \right) (F_3 \otimes F_3),$$ где b – первый столбец B

$$(F_3 \otimes F_3)\, b = F b = \begin{pmatrix} F_3 & F_3 & F_3 \\ F_3 & w_3 F_3 & w_3^2 F_3 \\ F_3 & w_3^2 F_3 & w_3^4 F_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = F^{(2)} + F^{(4)} + F^{(9)}$$

$$F^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ w_3 \\ w_3^2 \\ 1 \\ w_3 \\ w_3^2 \\ 1 \\ w_3 \\ w_3^2 \end{pmatrix} \qquad F^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ w_3 \\ w_3 \\ w_3 \\ w_3^2 \\ w_3^2 \\ w_3^2 \end{pmatrix} \qquad F^{(9)} = \begin{pmatrix} 1 \\ w_3^2 \\ w_3 \\ w_3^2 \\ w_3 \\ 1 \\ w_3 \\ 1 \\ w_3^2 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{diag}((F_3 \otimes F_3) b) = \operatorname{diag}(3,\ 1 + w_3 + w_3^2,\ 1 + w_3 + w_3^2,\ 1 + w_3 + w_3^2,\ 3w_3,\ 1 + w_3 + w_3^2,$$
$$1 + w_3 + w_3^2,\ 1 + w_3 + w_3^2,\ 3w_3^2)$$ – собственные значения B

$$F_3^{-1} = \frac{1}{n} F_3^* = \frac{1}{n} \overline{F_3}$$

$$\overline{w_3} = w_3^{-1}$$

$$F_3^{-1} = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & w_3^{-1} & w_3^{-2} \\ 1 & w_3^{-2} & w_3^{-4} \end{pmatrix}$$

$$(F_3 \otimes F_3)^{-1} = F_3^{-1} \otimes F_3^{-1} = \frac{1}{n^2} \begin{pmatrix} \overline{F_3} & \overline{F_3} & \overline{F_3} \\ \overline{F_3} & w_3^{-1} \overline{F_3} & w_3^{-2} \overline{F_3} \\ \overline{F_3} & w_3^{-2} \overline{F_3} & w_3^{-4} \overline{F_3} \end{pmatrix}$$ – собственные векторы B, записанные в столбцы

2. **(15 баллов).** Сколько уровней алгоритма Штрассена надо сделать, чтобы число операций с плавающей точкой в нем стало в 10 раза меньше (асимптотически), чем для наивного умножения? Считайте, что рассматриваются достаточно большие действительные квадратные матрицы порядка 2^q, $q \in \mathbb{N}$.

Наивное умножение: $Naive(2^q) = 2^{3q+1} + O(2^{2q})$ - операций, где 2^{3q} умножений и $2^{3q} - 2^{2q}$ сложений

Через рекуррентное соотношение для алгоритма Штрассена:

$M(n) = 7M(\frac{n}{2})$ - умножений

$A(n) = 7A(\frac{n}{2}) + 18(\frac{n}{2})^2$ - сложений

Тогда нужно посчитать число операций для N уровней алгоритма Штрассена и для оставшихся вычислений наивным способом.

$$M(2^q) = 7M(2^{q-1}) = 7^2 M(2^{q-2}) = 7^3 M(2^{q-3}) = \ldots = 7^N M(2^{q-N}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7^N \cdot 2^{3(q-N)}$$

$$A(2^q) = 7A(2^{q-1}) + 18 \cdot 2^{q-2} = \ldots = 7(7A(2^{q-2}) + 18 \cdot 2^{2q-4}) + 18 \cdot 2^{2q-2} =$$

$$= 7^N A(2^{q-N}) + 18 \sum_{k=1}^{N} 7^{k-1} \cdot 2^{2(q-k)} = 7^N (2^{3(q-N)} - 2^{2(q-N)}) +$$

$$+ 18 \sum_{k=1}^{N} 7^{k-1} \cdot 2^{2(q-k)} \overset{*}{=} 7^N 2^{3(q-N)} - 7^N 2^{2(q-N)} - 6 \cdot 2^{q} + 6 \cdot 7^N 2^{2(q-N)} =$$

$$= 7^N 2^{3(q-N)} - 7^N \cdot 2^{2(q-N)} - 6 \cdot 2^{2q} = 7^N 2^{3(q-N)} + O(2^{2q})$$

$$(*) \quad \sum_{k=1}^{N} 7^{k-1} \cdot 2^{2(q-k)} = 2^{2q} \sum_{k=1}^{N} 7^{k-1} \cdot 2^{-2k} = 2^{2q-2} \left(-\frac{4}{3}\right)\left(1 - \left(\frac{7}{4}\right)^N\right) =$$

$$= -\frac{1}{3} \cdot 2^{2q} + \frac{1}{3} \cdot 7^N \cdot 2^{2(q-N)}$$

Получим: $7^N 2^{3(q-N)+1} + O(2^{2q}) = \text{Shtrassen}$

$$\frac{\text{Shtrassen}}{\text{Naive}} \leq \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{7^N 2^{3(q-N)+1}}{2^{3q+1}} = 7^N \cdot 2^{-3N} \leq \frac{1}{10} \Rightarrow \left(\frac{7}{8}\right)^N \leq \frac{1}{10}$$

$\Rightarrow N \simeq 18$

Итог: $N = 18$

4. **(15 баллов)**. Пусть $f(x) = Ax$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – невырожденная матрица, $x \in \mathbb{R}^n$. Докажите, что

$$\sup_{x\neq 0} \operatorname{cond}(f, x) = \operatorname{cond}(A).$$

Здесь в определениях чисел обусловленности используется вторая матричная и векторная нормы.

$$\operatorname{cond}(f, x) = \frac{\|df(x)\|}{\|f(x)\|} \cdot \|x\|$$

$df(x) = A$

$\operatorname{cond}_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2$

$$\|A^{-1}\|_2 = \|\Sigma^{-1}\|_2 = \frac{1}{\sigma_n}$$

$$\sup_{x\neq 0} \operatorname{cond}(f,x) = \sup_{x\neq 0} \frac{\|A\|_2 \|x\|_2}{\|Ax\|_2} = \sup_{x \neq 0} \frac{\sigma_1 \|x\|_2}{\|Ax\|_2} = \sigma_1 \sup_{x\neq 0} \frac{\|x\|_2}{\|\Sigma V^T x\|_2} =$$

$= \sigma_1 \|A^{-1}\|$

Хотим найти x: $\dfrac{\|x\|_2}{\|\Sigma V^T x\|_2} = \dfrac{1}{\sigma_n}$

$x = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$, где v_i — ортонорм. базис матрицы V

$\Sigma V^T x = (\sigma_1 \langle v_1, x\rangle, \sigma_2 \langle v_2, x\rangle, \dots, \sigma_n \langle v_n, x\rangle)^T$

$$\|\Sigma V^T x\|_2^2 = (\sigma_1 \alpha_1)^2 + \ldots + (\sigma_n \alpha_n)^2$$

$$\|x\|_2^2 = \alpha_1^2 + \ldots + \alpha_n^2$$

$$\frac{\alpha_1^2 + \ldots + \alpha_n^2}{\sigma_1^2 \alpha_1^2 + \ldots \sigma_n^2 \alpha_n^2} = \frac{1}{\sigma_n^2}$$

$$\sigma_n^2 \alpha_1^2 + \ldots + \sigma_n^2 \alpha_n^2 = \sigma_1^2 \alpha_1^2 + \ldots + \alpha_n^2 \sigma_n^2$$

$$\Downarrow$$

$$(\sigma_1^2 - \sigma_n^2)\alpha_1^2 + \ldots + (\sigma_{n-1}^2 - \sigma_n^2)\alpha_{n-1}^2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \ldots = \alpha_{n-1} = 0$$ если $\sigma_1 \neq \sigma_n \ldots$

$\ldots \sigma_{n-1} \neq \sigma_n$, в противном случае $\dfrac{\alpha_1^2 + \ldots + \alpha_n^2}{\sigma_1^2 \alpha_1^2 + \ldots \sigma_n^2 \alpha_n^2} = \dfrac{1}{\sigma_n^2}$

Получаем: $\dfrac{\|x\|_2}{\|Ax\|_2} = \dfrac{|\alpha_n|}{\sigma_n |\alpha_n|} = \dfrac{1}{\sigma_n}$, где $x = \alpha_n v_n$

5. **(20 баллов)**. С помощью матричной экспоненты найдите, при каком начальном условии y_0 решение системы дифференциальных уравнений $y(t)$:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = Ay, \\ y(0) = y_0, \end{cases} \quad \text{с матрицей} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

будет удовлетворять $y(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$. **Замечание:** В этой задаче может пригодиться разложение в ряд Тейлора гиперболических функций.

$y(t) = e^{At} y_0$ – решение этой системы

$$y(1) = e^{A} y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A^0 = I, \quad A^1 = A, \quad A^2 = I$$

$$e^{At} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!} = I + At + A^2 \frac{t^2}{2} + A^3 \frac{t^3}{3!} + \ldots = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & t \\ 0 & t & 0 \\ t & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t^2/2 & 0 & 0 \\ 0 & t^2/2 & 0 \\ 0 & 0 & t^2/2 \end{pmatrix} +$$

$$+ \ldots = \begin{pmatrix} 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4} + \ldots & 0 & t + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \ldots \\ 0 & 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \ldots & 0 \\ t + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \ldots & 0 & 1 + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \ldots \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} ch(t) & 0 & sh(t) \\ 0 & e^t & 0 \\ sh(t) & 0 & ch(t) \end{pmatrix}$$

$$y(1) = e^A y_0 = \begin{pmatrix} ch1 & 0 & sh1 \\ 0 & e & 0 \\ sh1 & 0 & ch1 \end{pmatrix} y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Итог:
$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{ch1}{ch_1^2 - sh_1^2} = -ch1 \\ y_2 = 0 \\ y_3 = \dfrac{-sh1}{ch^2 1 - sh^2 1} = sh1 \end{cases}$$

6. **(20 баллов)**. Пусть у $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $n > 1$, все ведущие подматрицы невырождены. Покажите, что матрица $D - \frac{1}{a} bc^\top$ (см. обозначения в лекции 13) также удовлетворяет этому свойству.

$$A = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} a & c^T \\ b & D \end{pmatrix} & \begin{matrix} n \\ n-1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} n & \quad n-1 \end{matrix} & \end{array} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{a} b & I_{n-1} \end{pmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{pmatrix} a & c^T \\ 0 & D - \frac{1}{a} bc^T \end{pmatrix}}_{C}$$

$$\det(A) = \det B \cdot \det C = \det B \cdot a \det(D - \tfrac{1}{a} bc^T) = a \det(\overbrace{D - \tfrac{1}{a} bc^T}^{K}) \neq 0$$

$\Rightarrow$ K — полного ранга

$K = D - \frac{1}{a} bc^T$ $\quad \delta_i$ — i-ый угловой минор K

$$K_{11} = a_{22} - \frac{1}{a_{11}} \cdot a_{21} a_{12} = \frac{\Delta_2}{\Delta_1} \neq 0 = \delta_1$$

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{K_{11}} & I_{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_{11} & c_2^T \\ 0 & K_2 \end{pmatrix}$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \frac{1}{\delta_1} b_2 & & I_{n-2} \\ 0 & & & \end{pmatrix} \Rightarrow A = B_1 B_2 \underbrace{\begin{pmatrix} a & \boxed{c'} & \\ 0 & k_{11} & c_2^T \\ \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & K_2 \end{pmatrix}}_{T}$$

B_1 и B_2 - верхние унитреуг.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots \\ a_{31} & a_{32} & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \dots & \end{pmatrix}$$

c^T, b, D

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots \\ 0 & a_{22} - \frac{1}{a_{11}} a_{21} a_{12} & a_{23} - \frac{1}{a_{11}} a_{21} a_{13} & \\ 0 & a_{32} - \frac{1}{a_{11}} a_{31} a_{12} & a_{33} - \frac{1}{a_{11}} a_{31} a_{13} & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

c, c_2^T, b_2, D_2

$\Delta_2 = K_{11} a_1 = \delta_1 \Delta_1$

$\Delta_3 = (K_2)_{11} \cdot K_{11} a_{11} = (K_2)_{11} \cdot \Delta_3$ т.к. сохраняются угловые миноры и det D_2 3x3 верхний левый - произв. элементов на диагонали.

$K_2 = D_2 - \frac{1}{K_{11}} b_2 c_2^T$

$(K_2)_{11} = K_{22} - \frac{1}{K_{11}} K_{21} K_{12} = \frac{1}{K_{11}} \delta_2 = \frac{\delta_2}{\delta_1} \Rightarrow \delta_2 \neq 0$

Аналогично продолжая получим на i-ом шаге:

$(K_i)_{11} = \frac{\delta_i}{\delta_{i-1}}$

$\Delta_{i+1} = (K_i)_{11} \cdot (K_{i-1})_{11} \cdot \ldots \cdot K_{11} a_{11} = (K_i)_{11} \Delta_i$

$\Rightarrow \delta_i = (K_i)_{11} \delta_{i-1} = \frac{\Delta_{i+1}}{\Delta_i} \cdot \delta_{i-1} \neq 0$ и K - строго регулярная

3. **(15 баллов).** Проверьте наличие прямой и обратной устойчивости алгоритма $y = x - 2(u^\top x)u$ вычисления $y = H(u)x$, где $u, x \in \mathbb{R}^n$, $\|u\|_2 = 1$, $H(u)$ – матрица Хаусхолдера.

$$y = x - 2(u^T x)u$$

$$y = H(u)x$$

Проверим прямую устойчивость:

$$\|y - \tilde{y}\| = \|x - 2\left(\sum_{i=1}^{n} u_i x_i\right)\cdot u - (1+\varepsilon)\left(x - 2\left(\sum_{i=1}^{n} u_i x_i (1+\varepsilon)^{n+2-i}\right)u(1+\varepsilon)^{n+1}\right)\|$$

$$= \|x(1-1+\varepsilon) - 2\left(\sum_{i=1}^{n} u_i x_i\right)u + 2\left(\sum_{i=1}^{n} u_i x_i\right)u + 2\left(\sum_{i=1}^{n} u_i x_i (1+\varepsilon)^{n+2-i}\right)u(1+\varepsilon)^{n+2}\|$$

$$= \|\varepsilon x - 2\left(\sum_{i=1}^{n} u_i x_i - \sum_{i=1}^{n} u_i x_i (1+\varepsilon)^{2n+4-i}\right)u\| = \|\varepsilon x - 2\left(\sum_{i=1}^{n} u_i x_i \left(1 - (1+\varepsilon)^{2n+4-i}\right)\right)u\| \leq$$

$$\leq \|\varepsilon x\| + 2\sum_{i=1}^{n} |u_i||x_i| \cdot |\varepsilon(2n+4-i) + O(\varepsilon_m^2)| \cdot \|u\| \leq \varepsilon_m \|x\| + (2n+4)\varepsilon_m \cdot$$

$$\cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |u_i||x_i|\right)\|u\| + \bar{o}(\varepsilon_m^2)$$

$$\frac{\|y - \tilde{y}\|}{\|y\|} \leq \varepsilon_m \frac{\|x\| + (2n+4)|u|^T|x|\,\|u\|}{\|x - 2(u^T x)u\|} + \bar{o}(\varepsilon_m^2) = O(\varepsilon_m)$$

$\Downarrow$

прямая устойчивость есть.

обратная устойчивость: $\exists \tilde{x}: \tilde{f}(x) = f(\tilde{x})$ $\quad \dfrac{\|\tilde{x} - x\|}{\|x\|} = O(\varepsilon_m)$

$$fl(x - 2(u^T x)u) = (1+\varepsilon)\left(x - 2\sum_{i=1}^{n} u_i x_i (1+\varepsilon)^{n+2-i}\right)u(1+\varepsilon)^{n+1}\Big) \ominus$$

Мы хотим найти такие $\tilde{x}$ и $\tilde{u}$, что то, что написано сверху равно $\tilde{x} - 2(\tilde{u}^T\tilde{x})\tilde{u}$

$$\ominus\ (1+\varepsilon)x - (1+\varepsilon)2\left(\sum_{i=1}^{n} u_i x_i (1+\varepsilon)^{n+2-i}\right)u(1+\varepsilon)^{n+1} = \tilde{x} - 2\left(\sum_{i=1}^{n} \tilde{x}_i u_i (1+\varepsilon)^{n+2-i}\right)\cdot$$

$\cdot u(1+\varepsilon)^{n+1}$ – невозможно возмутить правильно вектор u $\Rightarrow$ нет обратной устойчивости