

The background of the slide is a vibrant green with a subtle pattern of overlapping hexagons. A white rectangular area is positioned on the right side of the slide, containing the text.

Graflar

GRAFLAR

- **Tanım**

- Yönlendirilmiş ve yönlendirilmemiş graflar
- Ağırlıklı graflar

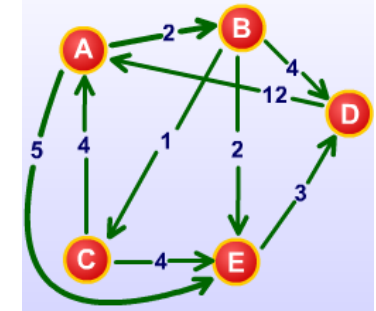
- **Gösterim**

- Komşuluk Matrisi
- Komşuluk Listesi

- **Dolaşma Algoritmaları**

- BFS (Breath First Search)
- DFS (Depth-First Search)

GRAFLAR



- Graf, matematiksel anlamda, **düğüm**lerden ve bu düğümler arasındaki ilişkiyi gösteren **kenarlardan** oluşan bir kümedir. Mantıksal ilişki, düğüm ile düğüm veya düğüm ile kenar arasında kurulur.
- **Bağlantılı listeler ve ağaçlar** grafların özel örneklerindendir.
- Fizik, Kimya gibi temel bilimlerde ve mühendislik uygulamalarında ve tıp biliminde pek çok problemin çözümü ve modellenmesi graflara dayandırılarak yapılmaktadır.

GRAFLAR-Uygulama alanları

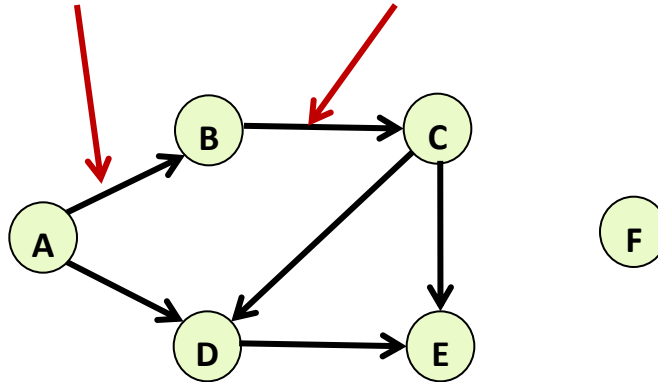
- **Elektronik devreler**
 - Baskı devre kartları (PCB), Entegre devreler
- **Ulaşım ağları**
 - Otoyol ağı, Havayolu ağı
- **Bilgisayar ağları**
 - Lokal alan ağları ,İnternet
- **Veritabanları**
 - Varlık-iliski (Entity-relationship) diyagramı

GRAFLAR

- Bir G grafi D ile gösterilen **düğüm**lerden (node veya vertex) ve K ile gösterilen **kenar**lardan (Edge) oluşur.
- Her kenar iki düğümü birleştirirerek iki bilgi (Düğüm) arasındaki ilişkiyi gösterir ve (u,v) şeklinde ifade edilir. (u,v) iki düğümü göstermektedir.
- Bir graf üzerinde n tane düğüm ve m tane kenar varsa, matematiksel gösterilimi, düğümler ve kenarlar kümesinden elamanların ilişkilendirilmesiyle yapılır:
 - $D=\{d_0, d_1, d_2 \dots d_{n-1}, d_n \}$ Düğümler kümesi
 - $K=\{k_0, k_1, k_2 \dots k_{m-1}, k_m \}$ Kenarlar kümesi
 - $G=(D, K)$ Graf

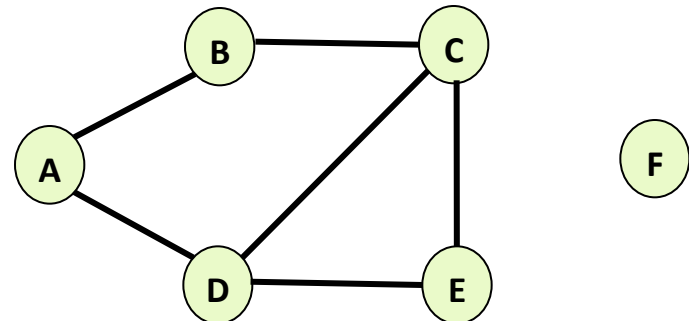
Graflar

- $G = (D, K)$ grafi aşağıda verilmiştir.
- $D = \{A, B, C, D, E, F\}$
- $K = \{(A, B), (A, D), (B, C), (C, D), (C, E), (D, E)\}$



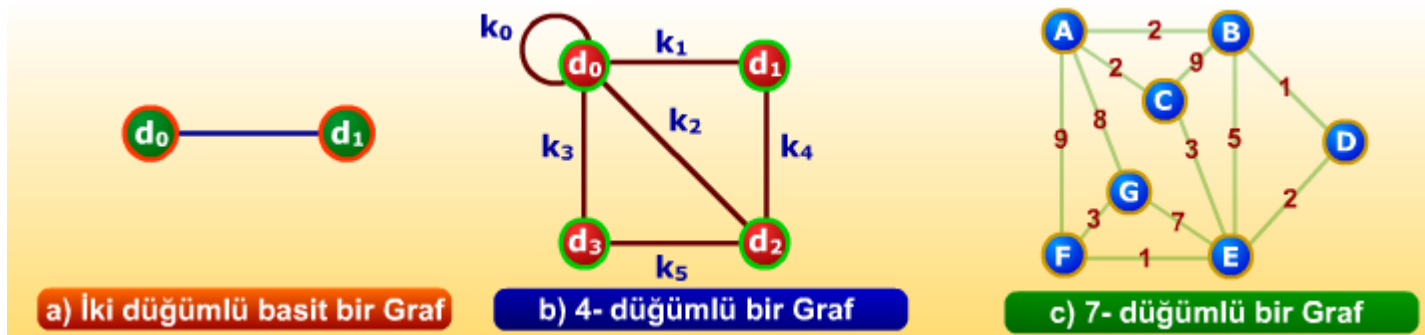
Graflar – Tanımlar

- **Komşu(Adjacent):** Bir G grafi üzerindeki d_i ve d_j adlı iki düğüm, kenarlar kümesinde bulunan bir kenarla ilişkilendiriliyorsa bu iki düğüm birbirine komşu (adjacent, neighbor) düğümlerdir; $k=\{d_i, d_j\}$ şeklinde gösterilir ve k kenarı hem d_i hem de d_j düğümleriyle bitişiktir (incident) denilir.
- Diğer bir deyişle k kenarı d_i ve d_j düğümlerini birbirine bağlar veya d_i ve d_j düğümleri k kenarının uç noktalarıdır denilir.
 - (A, B) komşudur.
 - (B, D) , (C, F) komşu değildir.



Graflar – Tanımlar

- Komşuluk ve Bitişiklik:** Bir G grafi komşuluk ilişkisiyle gösteriliyorsa $G_{dd}=\{(d_i, d_j)...\}$, bitişiklik ilişkisiyle gösteriliyorsa $G_{dk}=\{(d_i, k_j)...\}$ şeklinde yazılır. (G_{dd} : $G_{\text{düğümdüğümlü}}$, G_{dk} : $G_{\text{düğümlükkenar}}$)
- Örneğin, şekil a) 2-düğümlü basit graf $G_{dd}=\{(d_0, d_1)\}$ veya $G_{dk}=\{(d_0, k_0), (d_1, k_0)\}$ şeklinde yazılabilir;
- b) verilen 4-düğümlü basit grafta $G_{dd}=\{(d_0, d_0), (d_0, d_1), (d_0, d_2), (d_0, d_3), (d_1, d_2), (d_2, d_3)\}$ veya $G_{dk}=\{(d_0, k_0), (d_0, k_1), (d_0, k_2), (d_0, k_3), (d_1, k_1), (d_1, k_4), (d_2, k_2), (d_2, k_4), (d_2, k_5), (d_3, k_3), (d_3, k_5)\}$ şeklinde yazılır.



Graflar – Tanımlar

- **Yönlendirilmiş Graf (Directed Graphs):** Bir G grafi üzerindeki kenarlar bağlantının nereden başlayıp nerede sonlandığını belirten yön bilgisine sahip ise yönlü-graf veya yönlendirilmiş graf (directed graf) olarak adlandırılır.
- Yönlü graflar, matematiksel olarak gösterilirken her bir ilişki oval parantezle değil de $\langle \rangle$ karakter çiftiyle gösterilir.
- **Yönlendirilmemiş Graf (Undirected Graphs)**
 - Hiçbir kenarı yönlendirilmemiş graftır.

Graflar – Tanımlar

○ **Yönlendirilmiş Kenar (Directed Edge)**

- Sıralı kenar çiftleri ile ifade edilir.
 - (u, v) ile (v, u) aynı değildir.
- İlk kenar orijin ikinci kenar ise hedef olarak adlandırılır.

○ **Yönlendirilmemiş Kenar (Undirected Edge)**

- Sırasız kenar çiftleri ile ifade edilir.
 - (u, v) ile (v, u) aynı şeyi ifade ederler.

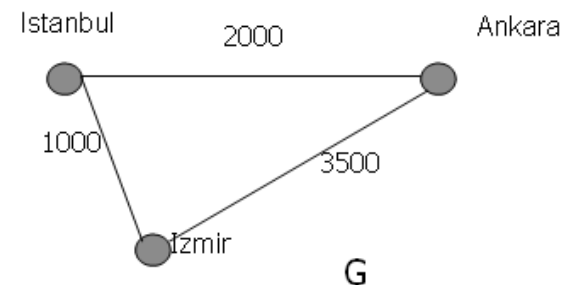
Graflar – Tanımlar

○ Ağırlıklı Graf(Weighted Graphs) :

- Graf kenarları üzerinde ağırlıkları olabilir. Eğer kenarlar üzerinde ağırlıklar varsa bu tür graflara **ağırlıklı/maliyetli graf** denir. Eğer tüm kenarların maliyeti 1 veya birbirine eşitse maliyetli graf olarak adlandırılmaz; yön bilgisi de yoksa basit graf olarak adlandırılır.

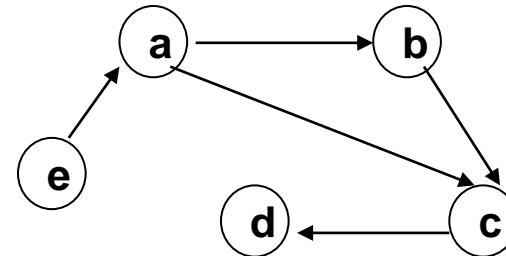
- Ağırlık uygulamadan uygulamaya değişir.

- Şehirler arasındaki uzaklık.
- Routerler arası bant genişliği
 - Router: Yönlendirici



Graflar – Tanımlar

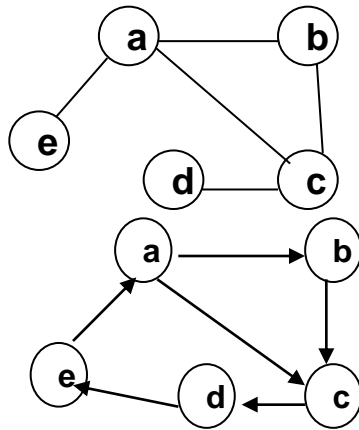
- **Yol (path)** : Bir çizgi kümesinde yol, düğümlerin sırasıdır. Kenar uzunluğu, yolun uzunluğunu verir.
 - $V_1, V_2, V_3, \dots, V_N$ ise yol $N - 1$ dir.
 - Eğer yol kenar içermiyorsa o yolun uzunluğu sıfır'dır.
 - izmir'den Ankara'ya doğrudan veya İstanbul'dan geçerek gidilebilir (İzmir- İstanbul- Ankara).
- **Basit Yol (Simple Path)** : Bir yolda ilk ve son düğümler dışında tekrarlanan düğüm yoksa basit yol diye adlandırılır.
 - **eabcd** basit yol'dur fakat **eabcabcd** veya **abcabca** basit yol değildir.



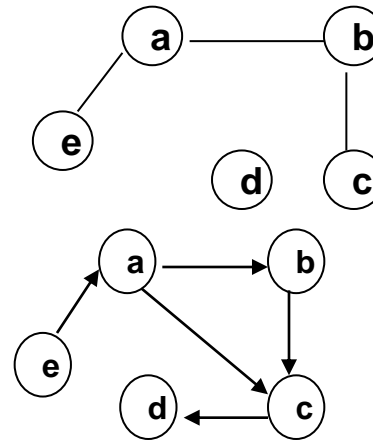
Graflar – Tanımlar

- **Uzunluk :** Bir yol üzerindeki kenarların uzunlukları toplamı o yolun uzunluğudur.
- **Bağlı veya Bağlı olmayan Çizge(Connected Graph):**
- Eğer bir graftaki tüm düğümler arasında en azından bir yol varsa bağlı graftır. Eğer bir grafta herhangi iki düğüm arasında yol bulunmuyorsa bağlı olmayan graftır.

- **A) Bağlı Graf**

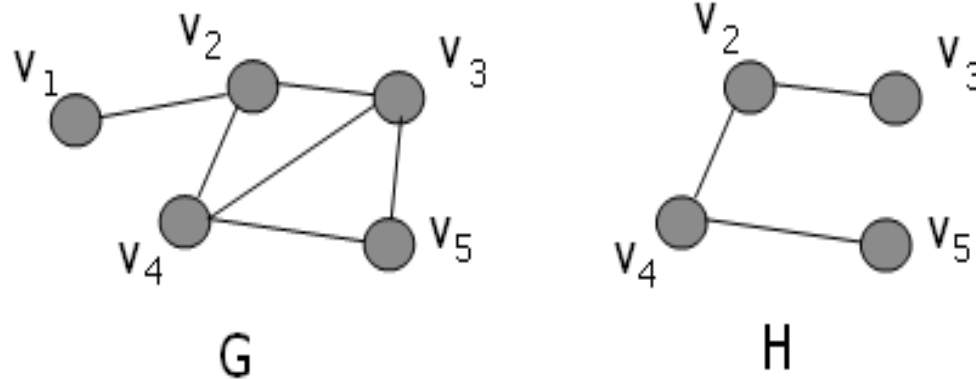


- **B) Bağlı olmayan Graf**



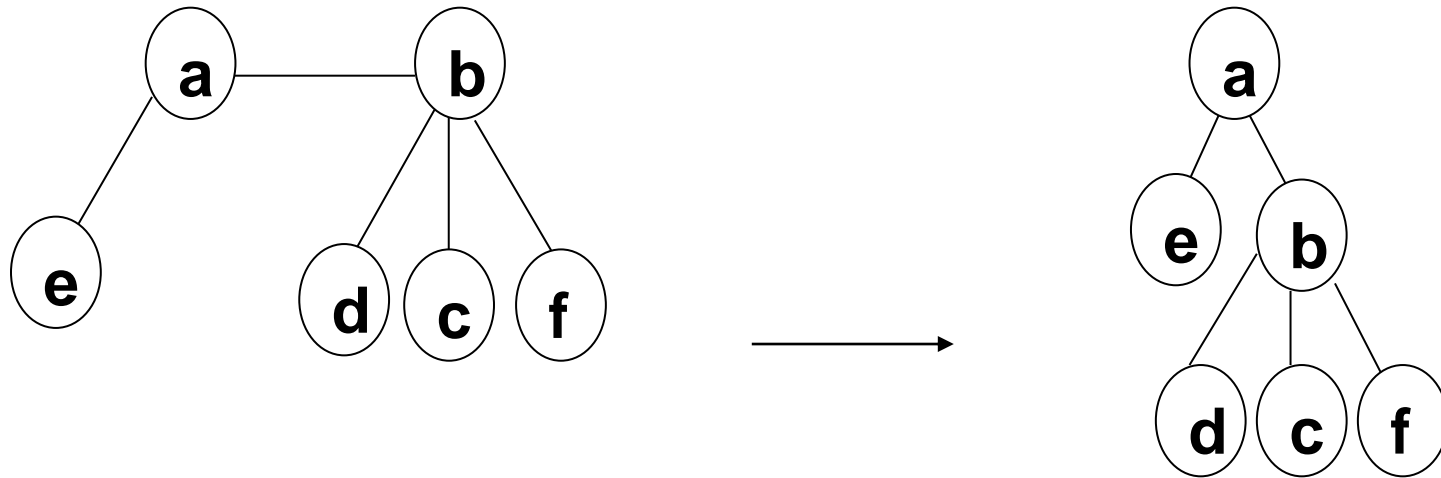
Graflar – Tanımlar

- **Alt Graf (Subgraph)** : H çizgesinin köşe ve kenarları G çizgesinin köşe ve kenarlarının alt kümesi ise; H çizgesi G çizgesinin alt çizgesidir (subgraph).
- $G(V, E)$ şeklinde gösterilen bir grafın, alt grafı $H(U, F)$ ise U alt küme V ve F alt küme E olur.



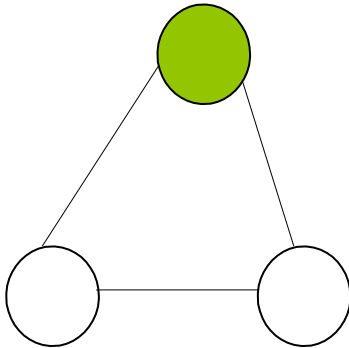
Graflar – Tanımlar

- **Ağaçlar(Trees)** : Ağaçlar özel bir çizgi kümesidir. Eğer direk olmayan bir çizgi kümesi devirli (cycle) değilse ve de bağlıysa (connected) ağaç olarak adlandırılır.

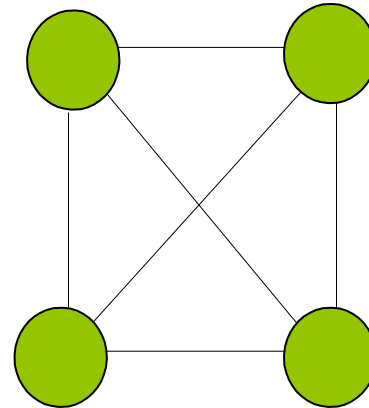


Graflar – Tanımlar

- **Komple Çizge(Complete Graph)** : Eğer bir graftaki her iki node arasında bir kenar varsa komple graftır.



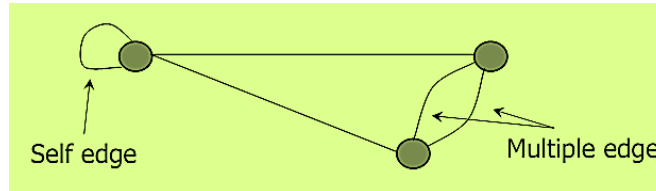
● 3 node ile komple graf



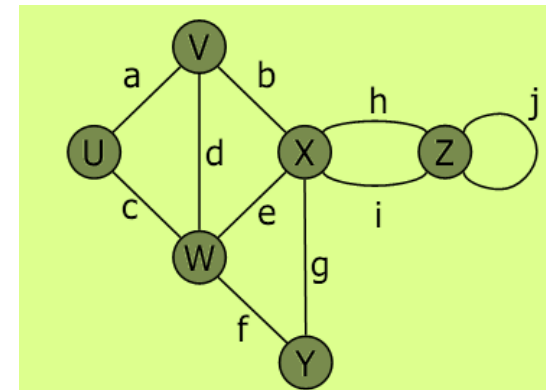
4 node ile komple graf

Graflar – Tanımlar

- Multigraf:** Multigraf iki node arasında birden fazla kenara sahip olan veya bir node'un kendi kendisini gösteren kenara sahip olan graftır.



- Örnek
- a, b ve d kenarları V node'unun kenar bağlantılarıdır.
- X node'unun derecesi 5' tir.
- h ve i çoklu (multiple) kenarlardır.
- j kendi kendisine döngüdür (self loop)



Graflar – Tanımlar

- **Düğüm Derecesi (Node Degree):**
- Düğüme bağlı toplam uç sayısıdır; çevrimli kenarlar aynı düğüme hem çıkış hem de giriş yaptığı için dereceyi iki arttırır.
- Yönlü graflarda, düğüm derecesi **giriş derecesi** (input degree) ve **çıkış derecesi** (output degree) olarak ayrı ayrı belirtilir.

Graflar – Tanımlar

- **Komşuluk Matrisi (Adjacency Matrice):**

Düğümlerden düğümlere olan bağlantıyı gösteren bir kare matrisdir; komşuluk matrisinin elemanları ki değerlerinden oluşur. Komşuluk matrisi G_{dd} 'nin matrisel şekilde gösterilmesinden oluşur. Eğer komşuluk matrisi $G_{dd}=[a_{ij}]$ ise,

- yönlü-maliyetsiz graflar için; $a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{Eğer } (d_i, d_j) \in K \text{ ise} \\ 0, & \text{Diğer durumlarda} \end{cases}$
- olur.

- basit (yönsüz-maliyetsiz) graflar için ise,

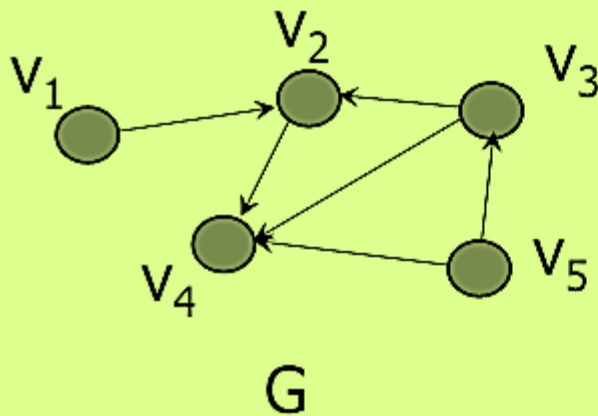
- olur.

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{Eğer } (d_i, d_j) \in K \text{ ise veya } (d_j, d_i) \\ 0, & \text{Diğer durumlarda} \end{cases}$$

Komşuluk Matrisi

- Yönlendirilmiş graf için komşu matrisi

$\text{Matris}[i][j] = 1$ if $(v_i, v_j) \in E$
 0 if $(v_i, v_j) \notin E$



		1	2	3	4	5
		v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
1	v_1	0	1	0	0	0
2	v_2	0	0	0	1	0
3	v_3	0	1	0	1	0
4	v_4	0	0	0	0	0
5	v_5	0	0	1	1	0

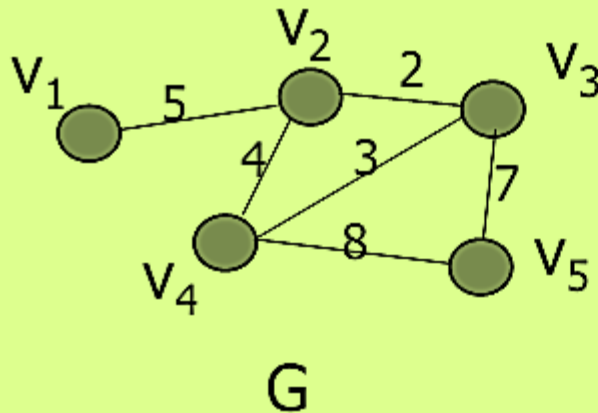
Komşuluk Matrisi

- Ağırlıklandırılmış ancak yönlendirilmemiş graf için komşu matrisi

$$\text{Matris}[i][j] = w(v_i, v_j)$$

∞

if $(v_i, v_j) \in E$ or $(v_j, v_i) \in E$
otherwise



		1	2	3	4	5
		v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
1	v_1	∞	5	∞	∞	∞
2	v_2	5	∞	2	4	∞
3	v_3	∞	2	∞	3	7
4	v_4	∞	4	3	∞	8
5	v_5	∞	∞	7	8	∞

Graflar – Tanımlar

- **Bitişiklik Matrisi (Incidence Matrice):**
- Düğümlerle kenarlar arasındaki bağlantı/bitişiklik ilişkisini gösteren bir matrisdir; matrisin satır sayısı düğüm, sütun sayısı kenar sayısına kadar olur. Bitişiklik matrisi G_{dk} 'nin matrisel şekilde gösterilmesinden oluşur. Eğer bitişiklik matrisi $G_{dk}=[m_{ij}]$ ise, maliyetsiz graflar için,

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{Eğer } (d_i, d_j) \text{ bağlantı var ise} \\ 0, & \text{Diğer durumlarda} \end{cases}$$

- olur.

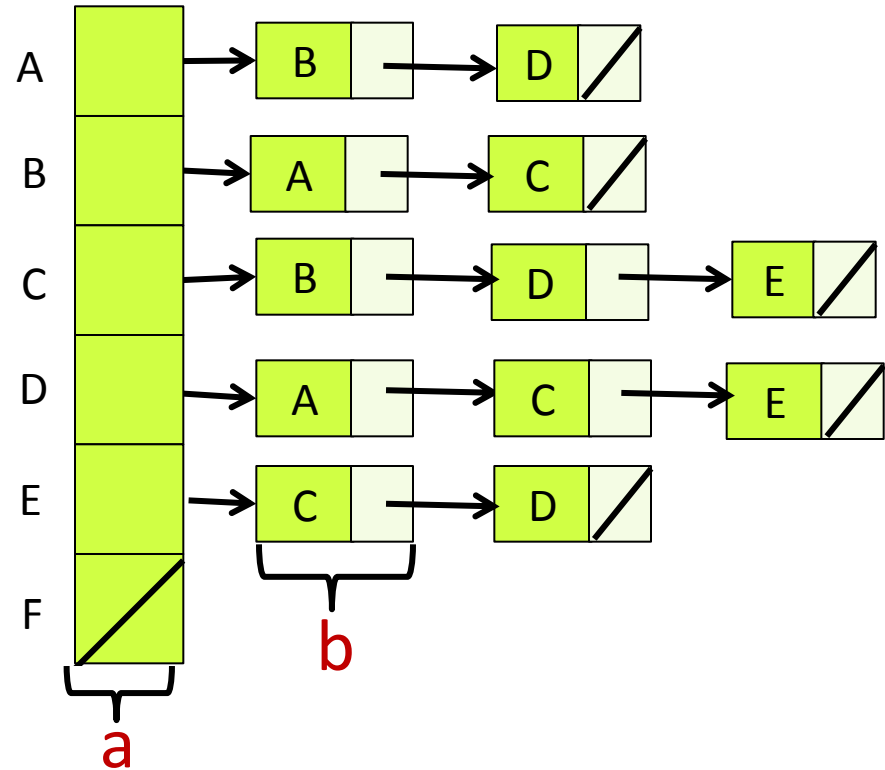
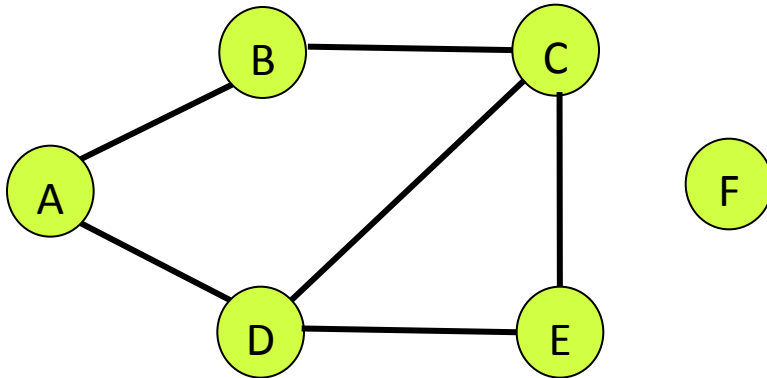
Graflar – Tanımlar

- Örnek: Basit grafin komşuluk ve bitişiklik matrisi çıkarılması
- Aşağıda a)'da verilen grafin komşuluk ve bitişiklik matrislerini ayrı ayrı çıkarınız; hangisi simetriktir? Neden?



- Komşuluk matrisi simetriktir. Yönsüz graflarda, her iki yönde bağlantı sağlanmaktadır.

Komşuluk Listesi (Dizi Bağlantılı Liste) Gösterimi

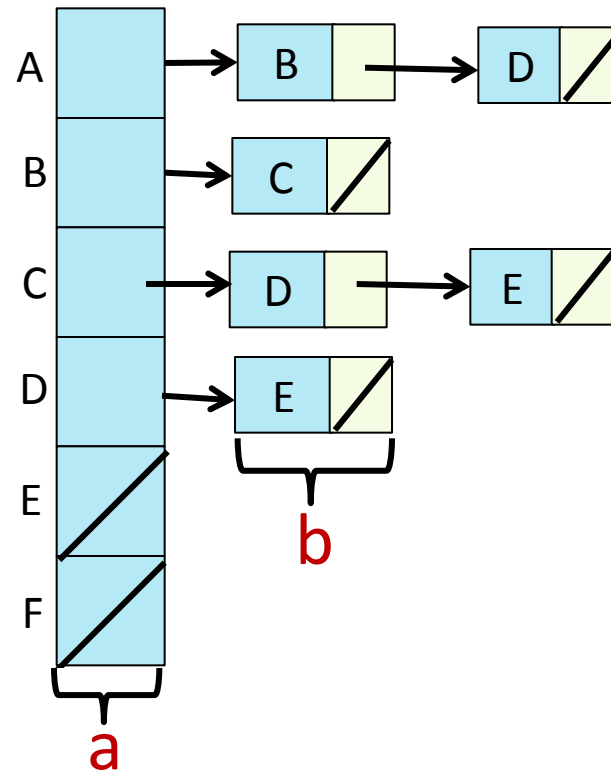
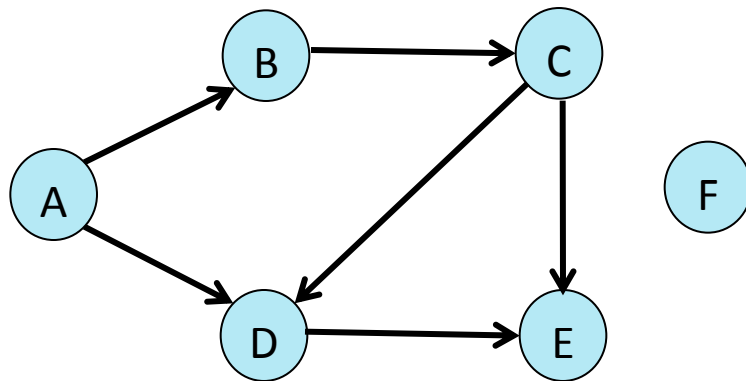


Yer?

$$n \cdot a + 2 \cdot k \cdot b = O(n + 2k)$$

Komşuluk Listesi Gösterimi

● Komşuluk Listesi (Yönlendirilmiş Graflar)

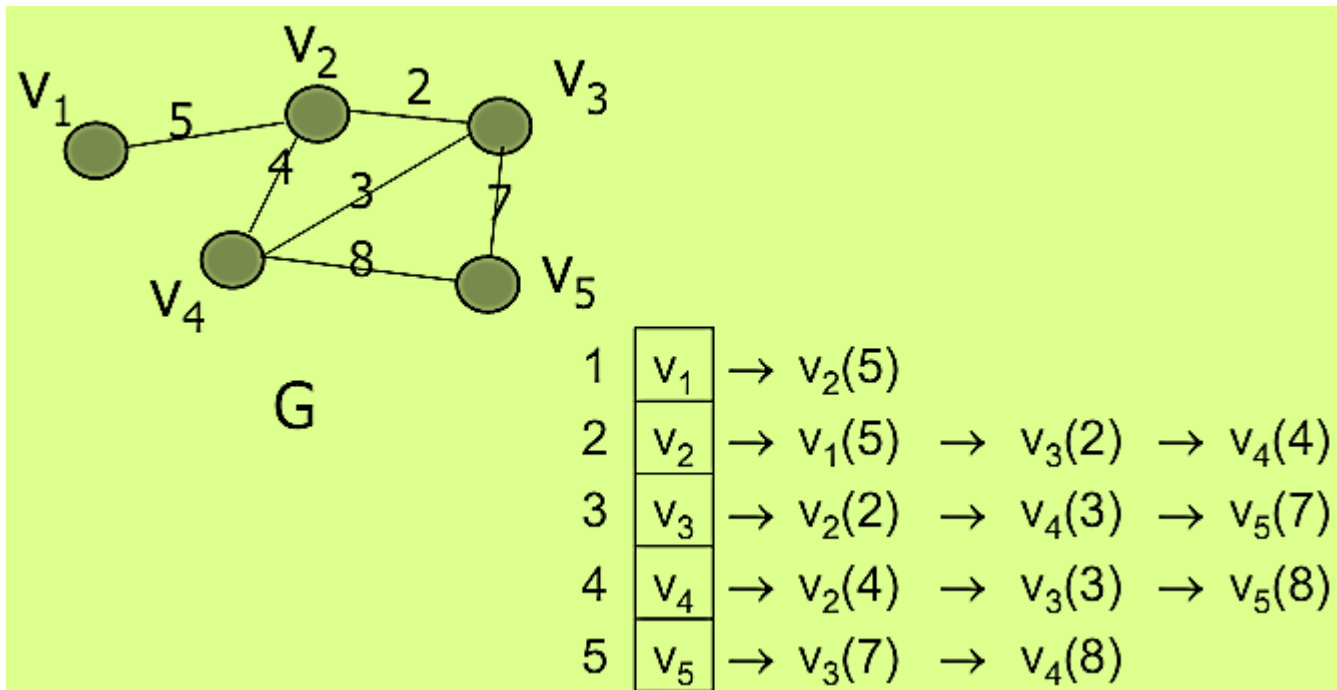


Yer?

$$n*a + k*b = O(n+k)$$

Komşuluk Listesi Gösterimi

- Yönlendirilmiş ve ağırlıklandırılmış graf için komşu listesi



Komşu Matrisi-Komşu Listesi

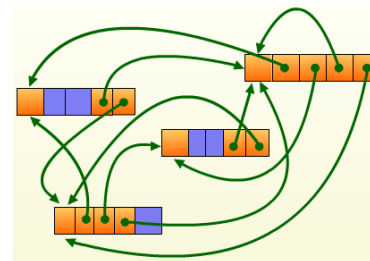
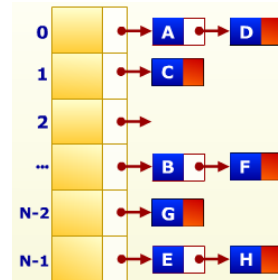
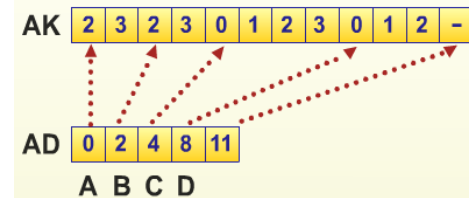
- Avantajları-dezavantajları;
- Komşu matrisi
 - Çok fazla alana ihtiyaç duyar. Daha az hafızaya ihtiyaç duyulması için sparse (seyrek matris) matris tekniklerinin kullanılması gerekir.
 - Herhangi iki node'un komşu olup olmadığına çok kısa sürede karar verilebilir.
- Komşu listesi
 - Bir node'un tüm komşularına hızlı bir şekilde ulaşılır.
 - Daha az alana ihtiyaç duyar.
 - Oluşturulması matrise göre daha zor olabilir.

Not: Sparse matris; $m \times n$ boyutlu matriste değer bulunan hücreleri x boyutlu matriste saklayarak hafızadan yer kazanmak için kullanılan yöntemin adı.

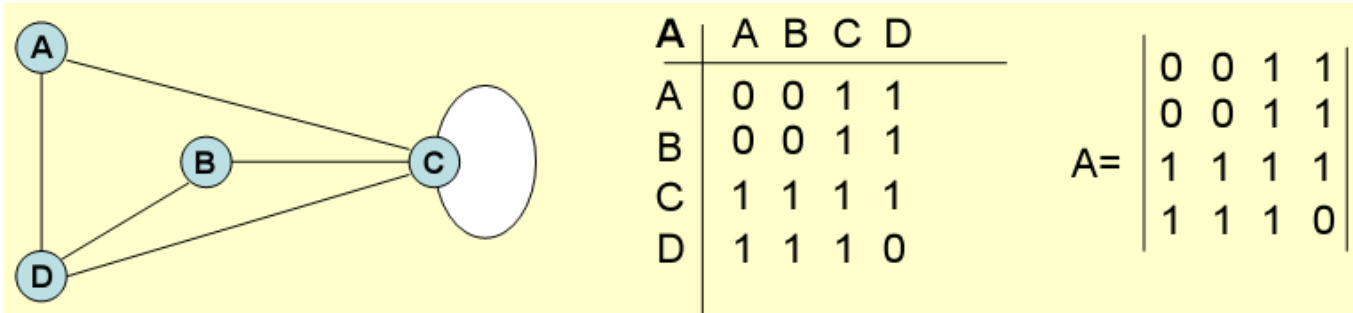
Grafların Bellek Üzerinde Tutulması

- Matris üzerinde
- İki-Dizi Üzerinde
- Dizili Bağlantılı liste ile
- Bağlantılı Liste ile

	A	B	C	D
A	0	0	1	1
B	0	0	1	1
C	1	1	1	1
D	1	1	1	0



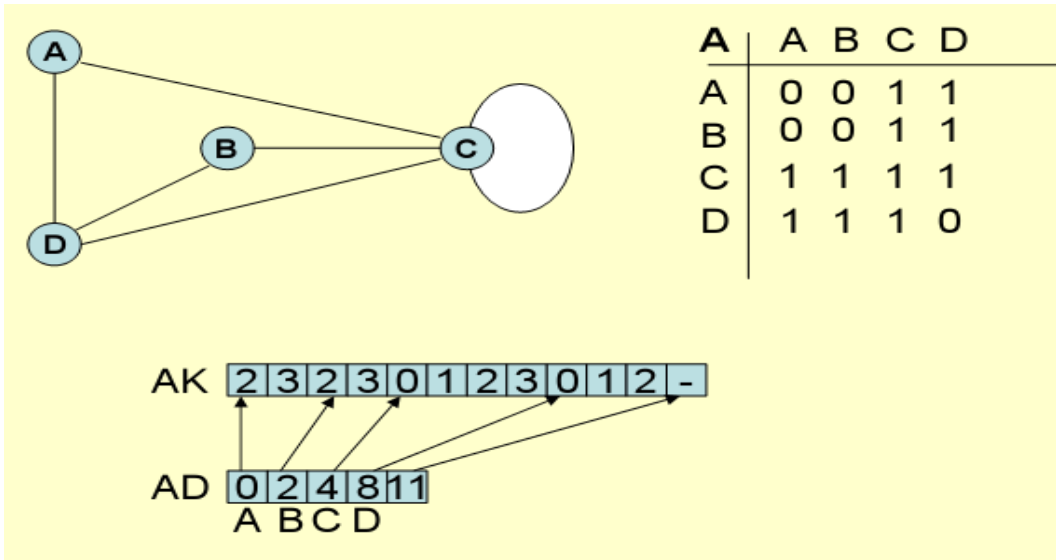
Matris Üzerinde



- `int A[4][4]={0,0,1,1}, {0,0,1,1}, {1,1,1,1}, {1,1,1,0}}`
- `int baglantivarmi (int durum1, int durum2)`
- `{`
- `if(A[durum1][durum2]!=0)`
- `return 0;`
- `else`
- `return 1;`
- `}`

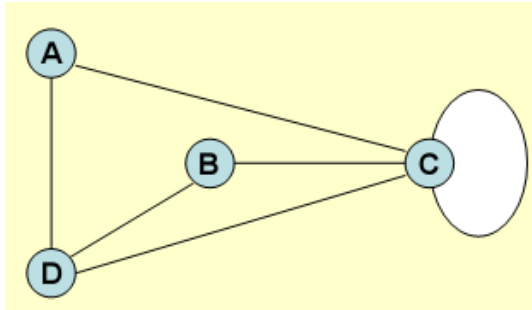
İki-Dizi Üzerinde

- Komşular AK, İndisler AD yi oluşturuyor

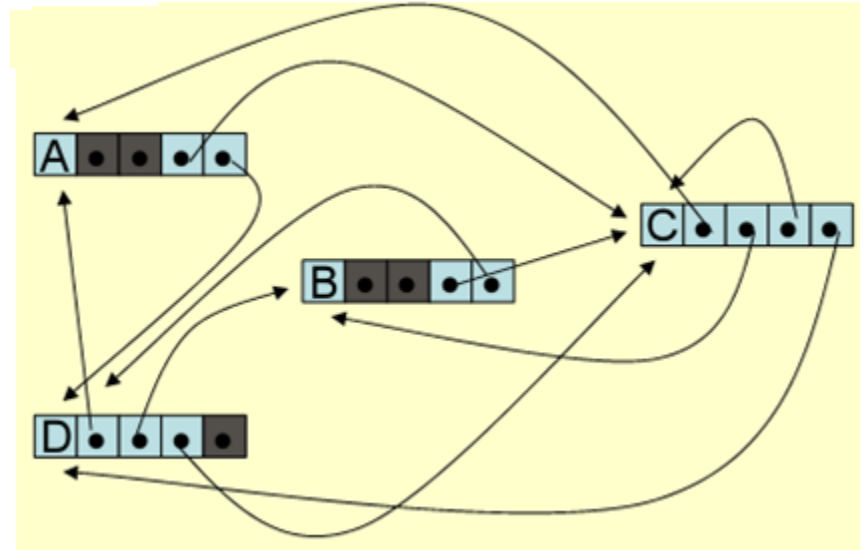


- A=0, B=1, C=2, D=3 numaralanmış
- A, 2 ve 3 komşu başlangıç indisi 0 da 2, indis 1 de 3
- B, 2 ve 3 komşu başlangıç indisi 2 de 2 indis 3 te 3
- C, 0, 1, 2 ve 3 komşu başlangıç indisi 4 de 0, 5 te 1, 6 da 2, 7 de 3
- D, 0, 1 ve 2 ye komşu başlangıç indisi 8 de 0 , 9 da 1, 10 da 2

Bağlantılı Liste Üzerinde

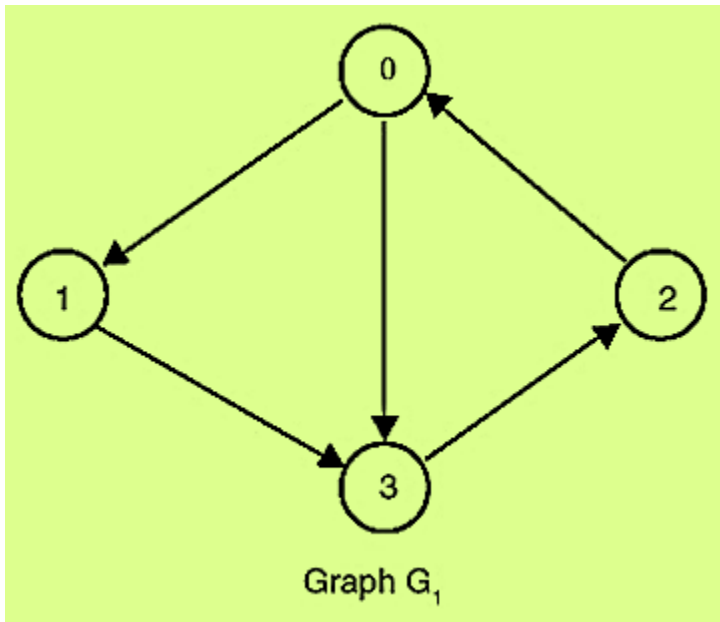


- struct grafDrum{
- verituru dugumadi;
- struct graftdrum *bag[4];
- };



Örnekler

- Indegree (girenler) ve outdegree (çıkanlar) matrisi üzerinde gösterimi



	0	1	2	3
0	0	1	0	1
1	0	0	0	1
2	1	0	0	0
3	0	0	1	0

Graf Üzerinde Dolaşma

- Graf üzerinde dolaşma grafın düğümleri ve kenarları üzerinde istenen bir işi yapacak veya bir problemi çözecek biçimde hareket etmektir.
- Graf üzerinde dolaşma yapan birçok yaklaşım yöntemi vardır; en önemli iki tanesi, kısaca, DFS (Depth First Search) ve BFS (Breadth First Search) olarak adlandırılmıştır ve graf üzerine geliştirilen algoritmaların birçoğu bu yaklaşım yöntemlerine dayanmaktadır denilebilir.

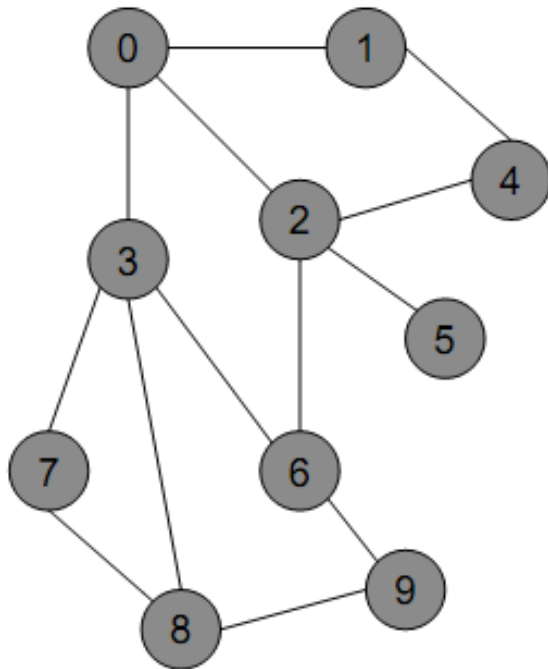
Graf Üzerinde Dolaşma

- **DFS Yöntemi**
- DFS (Depth First Search), graf üzerinde dolaşma yöntemlerinden birisidir; **önce derinlik araması** olarak adlandırılabilir; başlangıç düğümünün bir kenarından başlayıp o kenar üzerinden gidilebilecek en uzak (derin) düğüme kadar sürdürülür.

Graf Üzerinde Dolaşma

- Depth First Arama İşlem Adımları
 - Önce bir başlangıç node'u seçilir ve ziyaret edilir.
 - Seçilen node'un bir komşusu seçilir ve ziyaret edilir.
 - 2.adım ziyaret edecek komşu kalmayıncaya kadar tekrar edilir.
 - Komşu kalmadığında tekrar geri dönülür ve önceki ziyaret edilmiş node'lar için adım 2 ve 3 tekrar edilir.

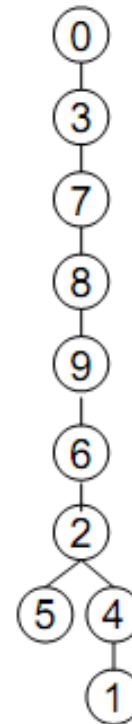
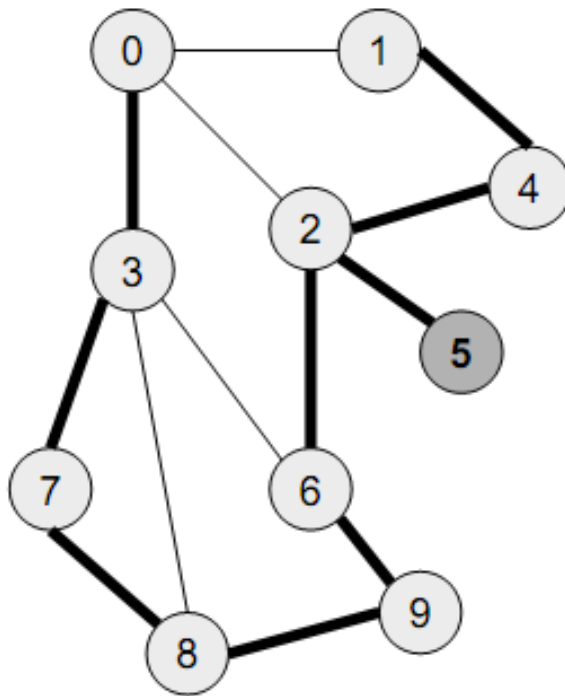
Graf Üzerinde Dolaşma



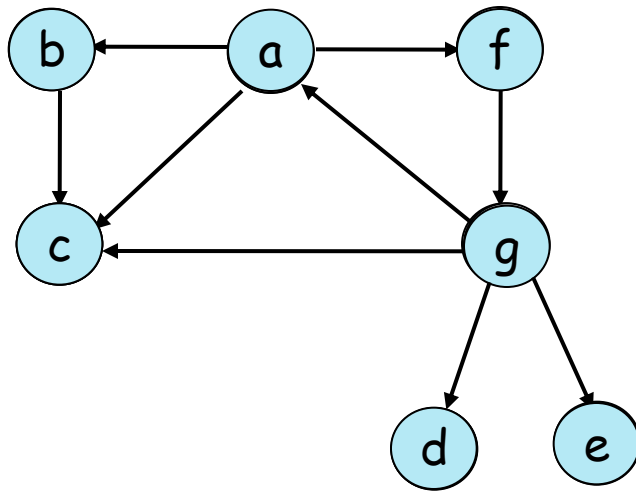
1. `s` node'unu seç
2. `visit s`
// örn. ekrana yaz
3. `for each edge <s, U>`
// `U` komşu node
4. `if U is not visit`
5. `DFS (G, U)`

Graf Üzerinde Dolaşma

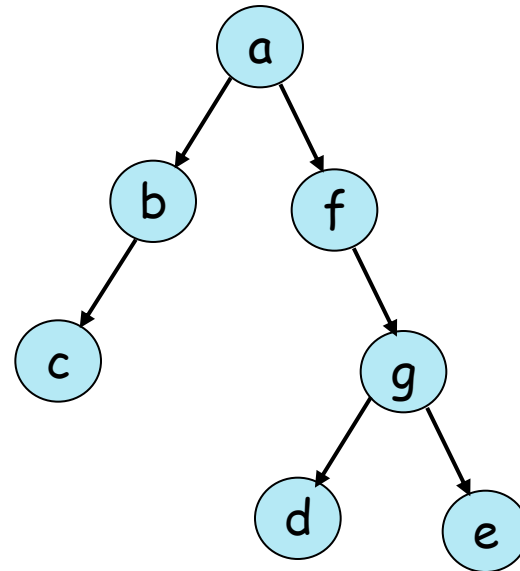
- Depth first arama



DFS – Örnek



DFS(a) ağacı



Graf Üzerinde Dolaşma

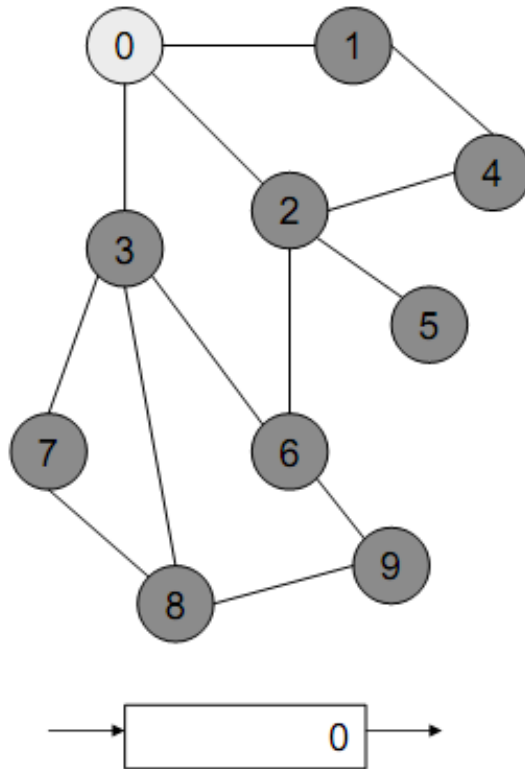
- **BFS Yöntemi :**
- BFS (Breadth First Search), önce genişlik araması olarak adlandırılabilir. Bu yöntemin DFS'den farkı, dolaşmaya, başlangıç düğümünün bir kenarı ayrıtı üzerinden en uzağa gidilmesiyle değil de, başlangıç düğümünden gidilebilecek tüm komşu düğümlere gidilmesiyle başlanır.
- BFS yöntemine göre graf üzerinde dolaşma, graf üzerinde dolaşarak işlem yapan diğer birçok algoritmaya esin kaynağı olmuştur denilebilir. Örneğin, kenar maliyetler yoksa veya eşitse, BFS yöntemi en kısa yol algoritması gibidir; bir düğümden herbir düğüme olan en kısa yolları bulur denilebilir.

Graf Üzerinde Dolaşma

- Breadth First Arama İşlem Adımları
 - Breadth first arama ağaçlardaki level order aramaya benzer.
 - Seçilen node'un tüm komşuları sırayla seçilir ve ziyaret edilir.
 - Her komşu queue içerisine atılır.
 - Komşu kalmadığında Queue içerisindeki ilk node alınır ve
 - 2.adıma gidilir.

Graf Üzerinde Dolaşma

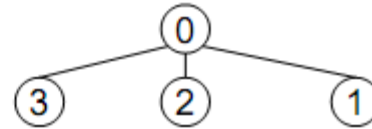
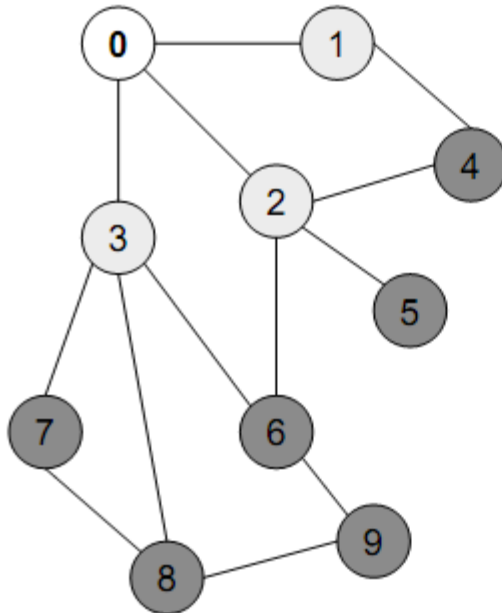
- Breadth first arama



0

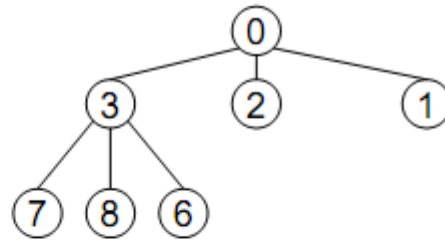
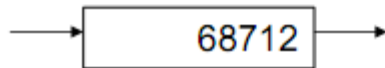
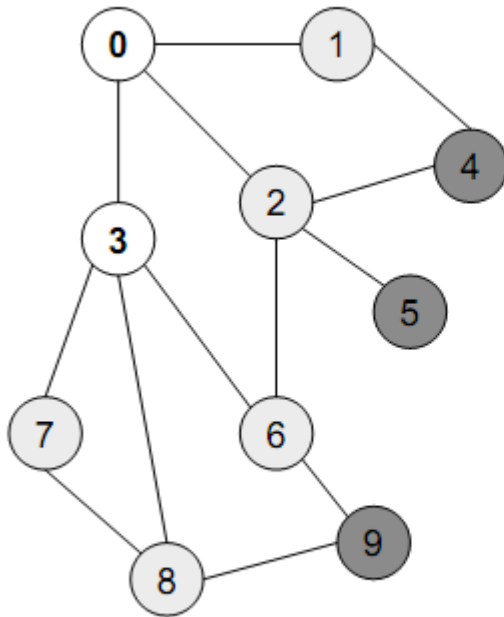
Graf Üzerinde Dolaşma

- Breadth first arama



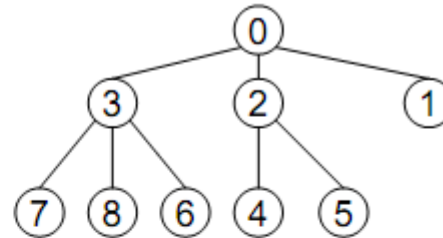
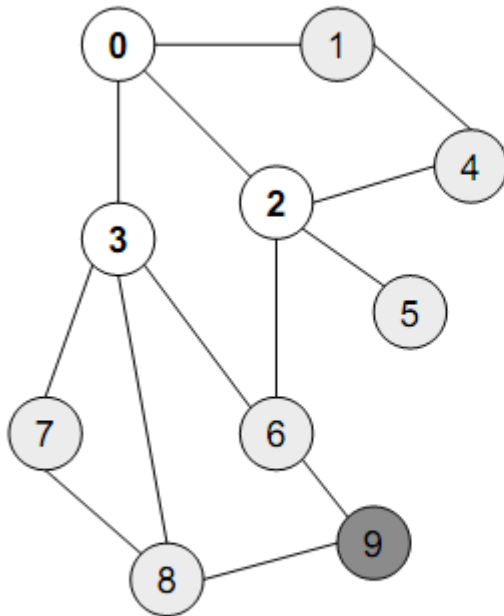
Graf Üzerinde Dolaşma

- Breadth first arama



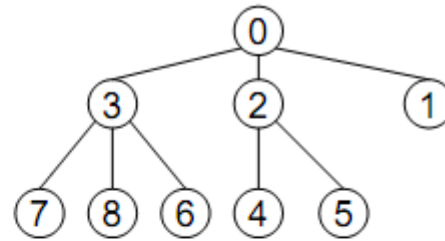
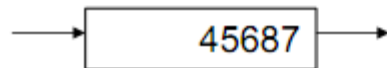
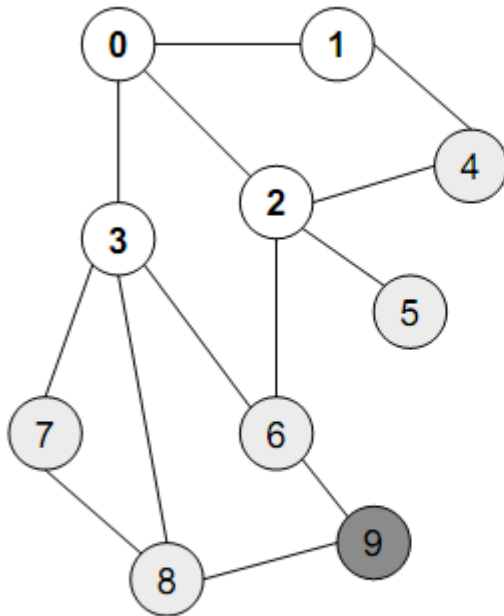
Graf Üzerinde Dolaşma

- Breadth first arama



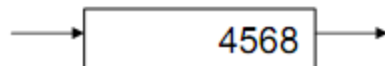
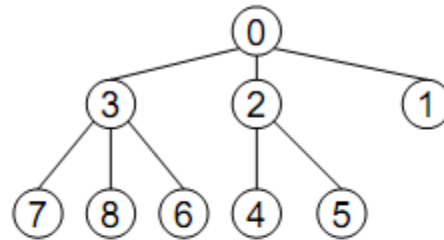
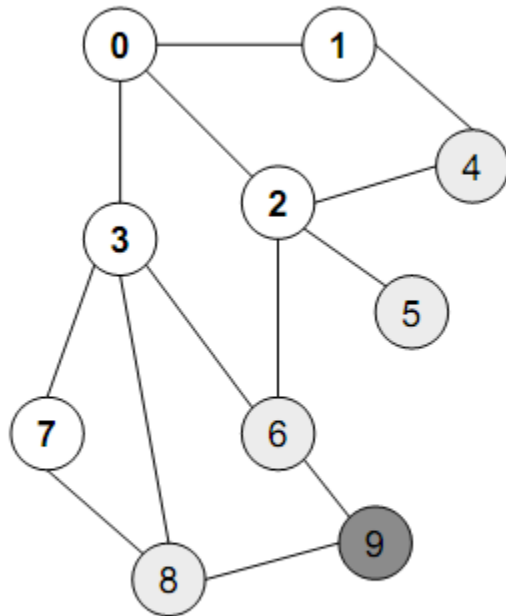
Graf Üzerinde Dolaşma

- Breadth first arama



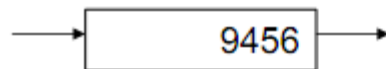
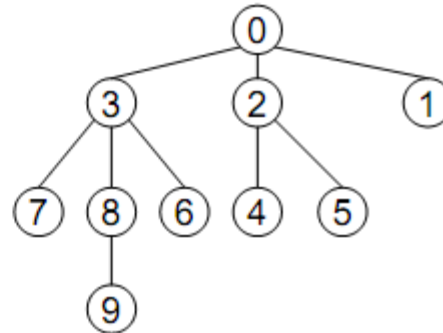
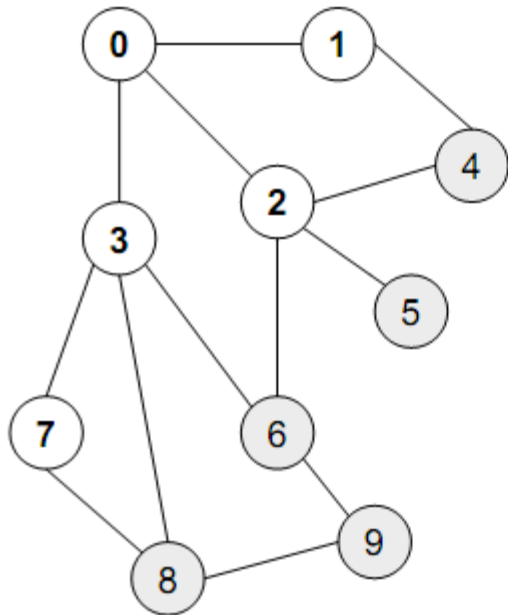
Graf Üzerinde Dolaşma

- Breadth first arama



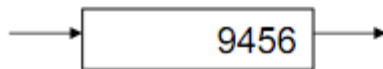
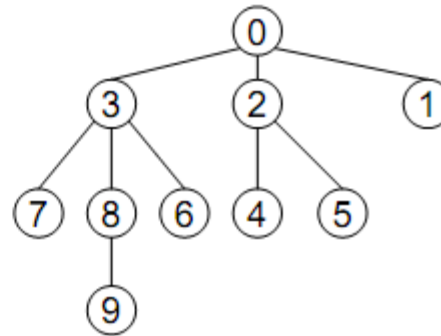
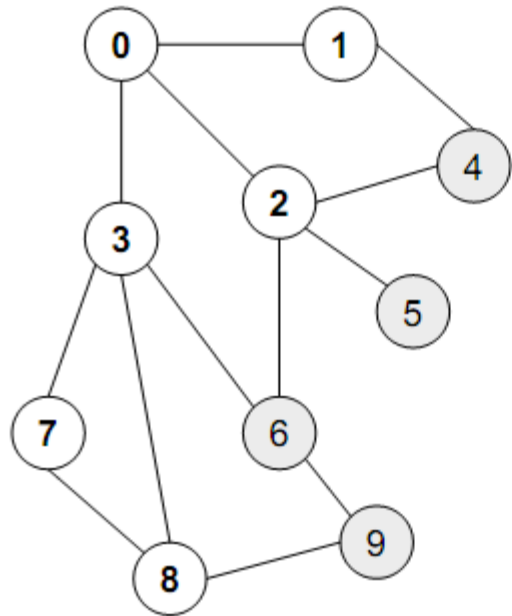
Graf Üzerinde Dolaşma

- Breadth first arama



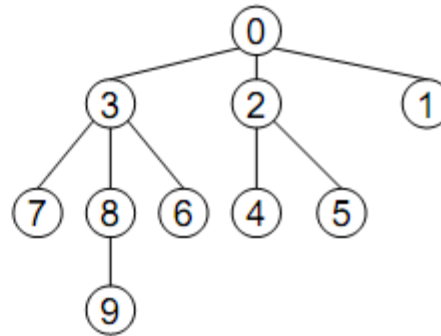
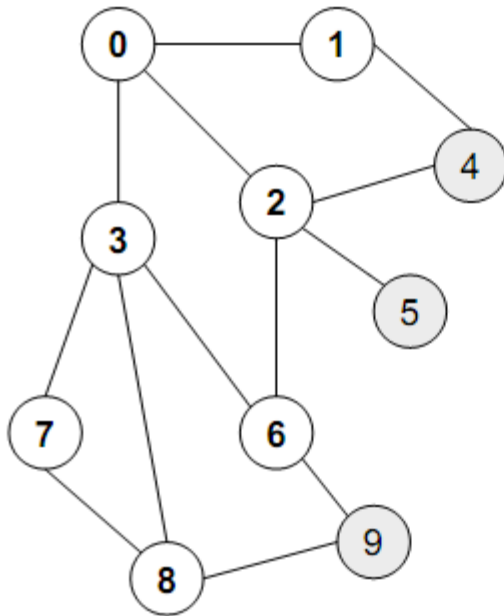
Graf Üzerinde Dolaşma

- Breadth first arama



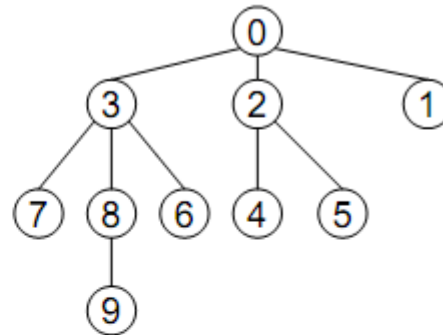
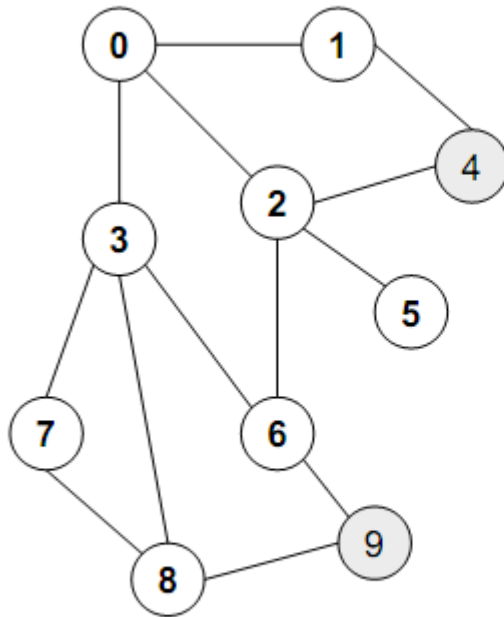
Graf Üzerinde Dolaşma

- Breadth first arama



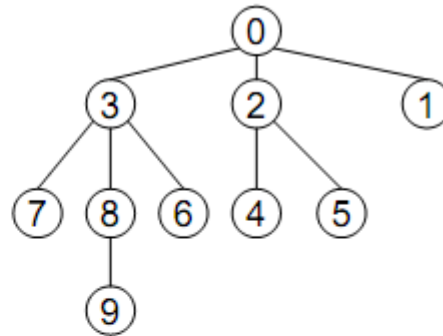
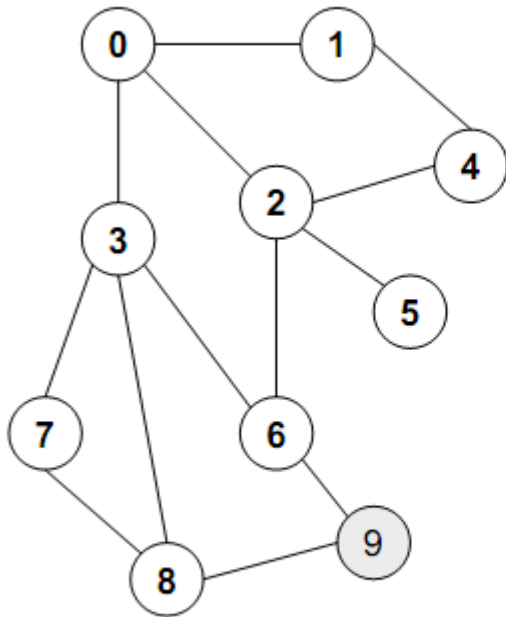
Graf Üzerinde Dolaşma

- Breadth first arama



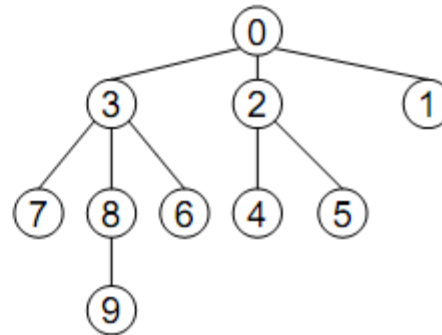
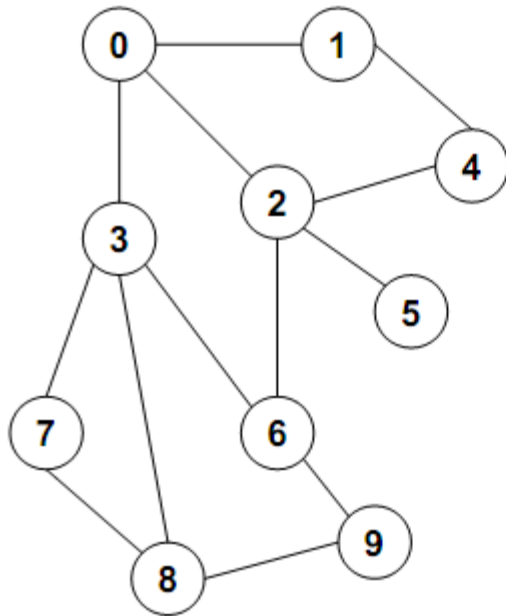
Graf Üzerinde Dolaşma

- Breadth first arama

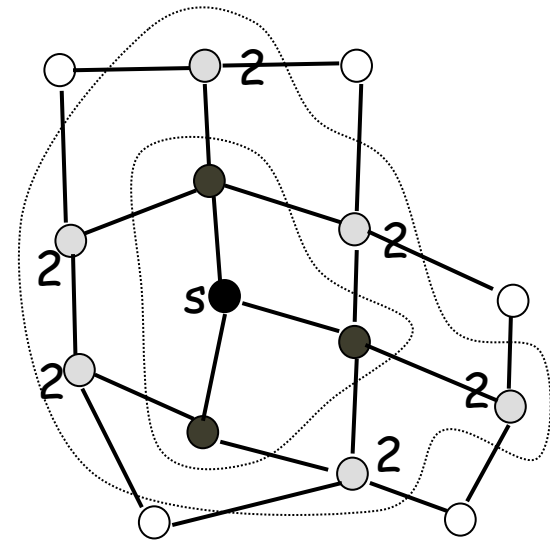
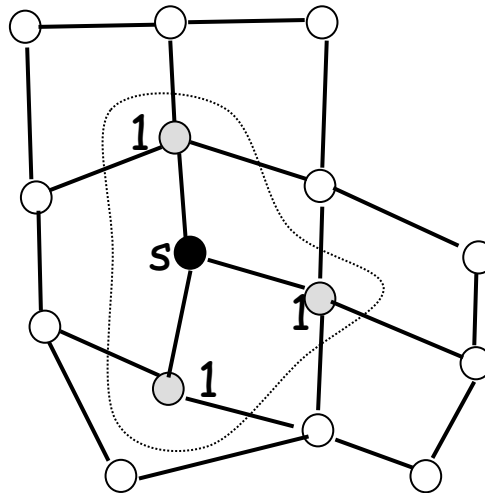
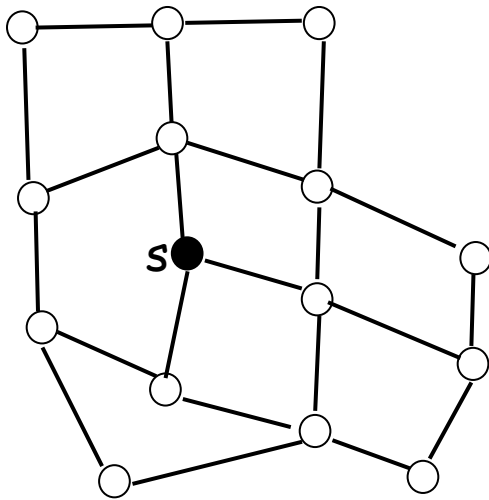


Graf Üzerinde Dolaşma

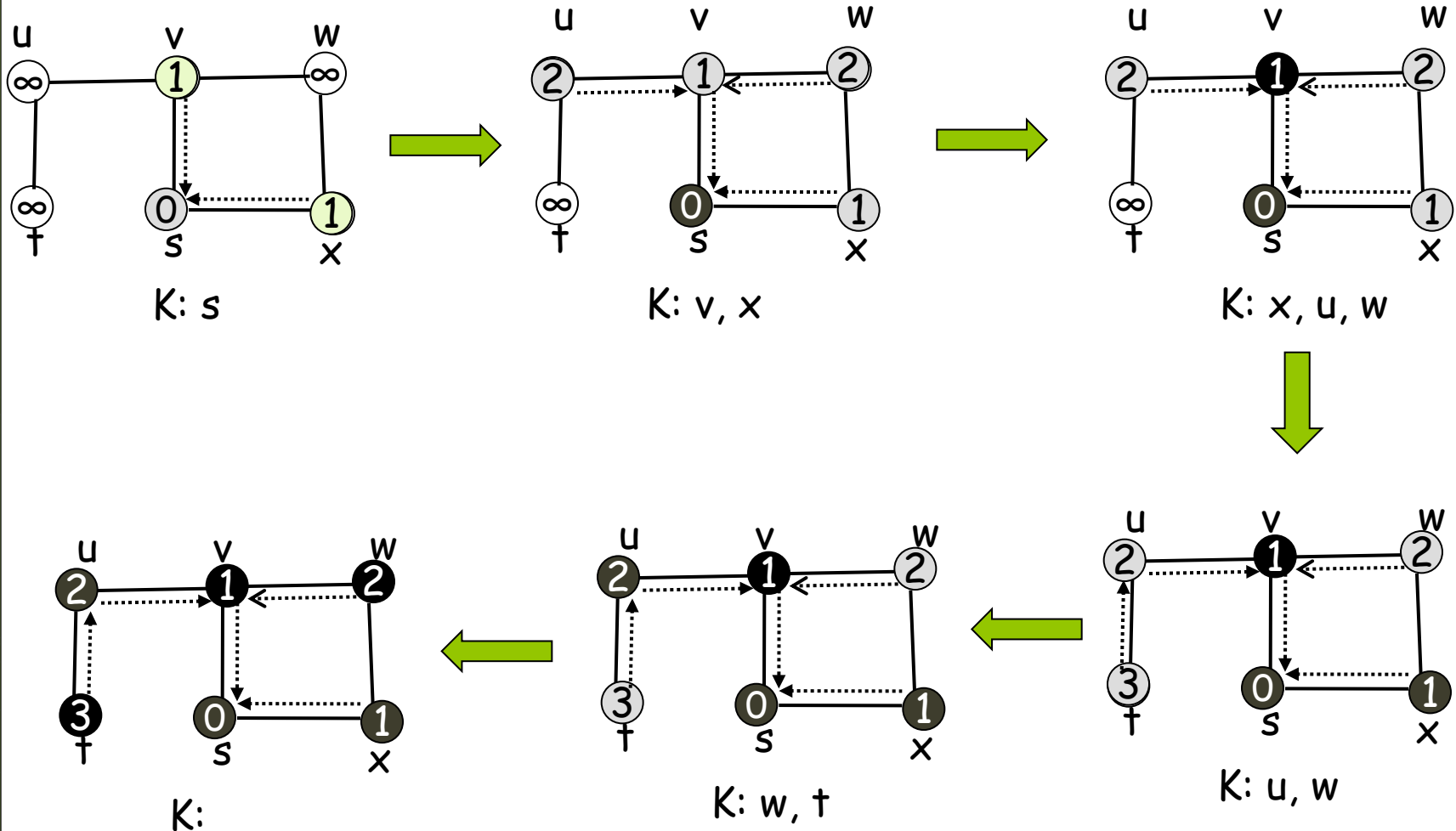
- Breadth first arama



BFS-Örnek



BFS – Örnek



Graf Renklendirme

- Graf renklendirme, graf üzerinde birbirine komşu olan düğümlere farklı renk atama işlemidir; amaç, en az sayıda renk kullanılarak tüm düğümlere komşularından farklı birer renk vermektir. Renklendirmede kullanılan toplam renk sayısı kromatik (chromatik) sayı olarak adlandırılır.
- Uygulamada, graf renklendirmenin kullanılacağı alanların başında, ilk akla gelen, harita üzerindeki bölgelerin renklendirilmesi olmasına karşın, graf renklendirme bilgisayar biliminde ve günlük yaşamdaki birçok problemin çözümüne ciddi bir yaklaşımdır.

Graf Renklendirme

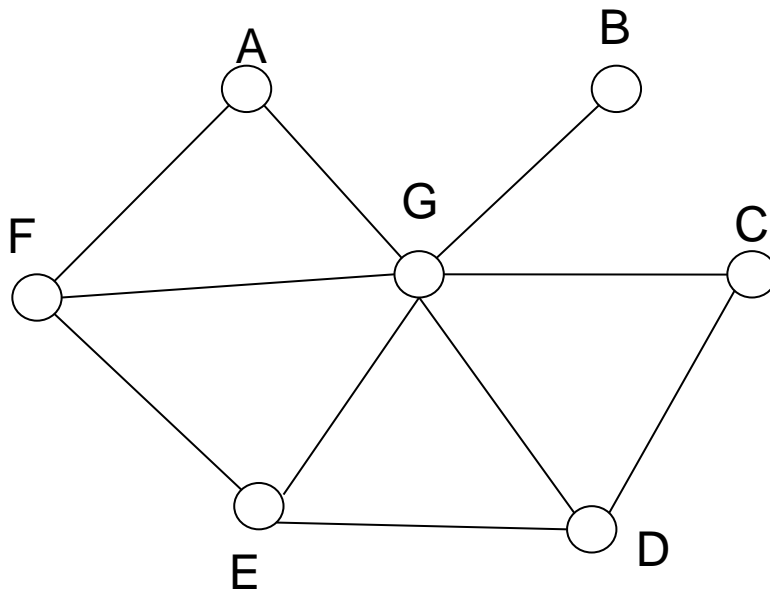
- Uygulama Alanları;
 - Harita renklendirme,
 - İşlemcilerin işlem sırasını belirleme,
 - Ders ve sınav programı ayarlama
 - Hava alanlarında iniş ve kalkış sırasını belirleme vs.

Graf Renklendirme

- Graf renklendirmede kullanılan algoritmaların başında Welch ve Powel algoritmasıdır.
- **Welch ve Powel Algoritması:**
 - Döğümler derecelerine göre büyükten küçüğe doğru sıralanır.
 - İlk renk birinci sıradaki döğüme atanır ve daha sonra aynı renk bitişik olamayacak şekilde diğör döğümlere verilir.
 - Bir sonraki renge geçilir ve aynı işlem döğümlerin tamamı renklendirilinceye kadar devam ettirilir.

Graf Renklendirme

- Örnek: a) En az renk kullanılarak düğümleri renklendiriniz. Kromatik sayı kaç olur?



Düğüm

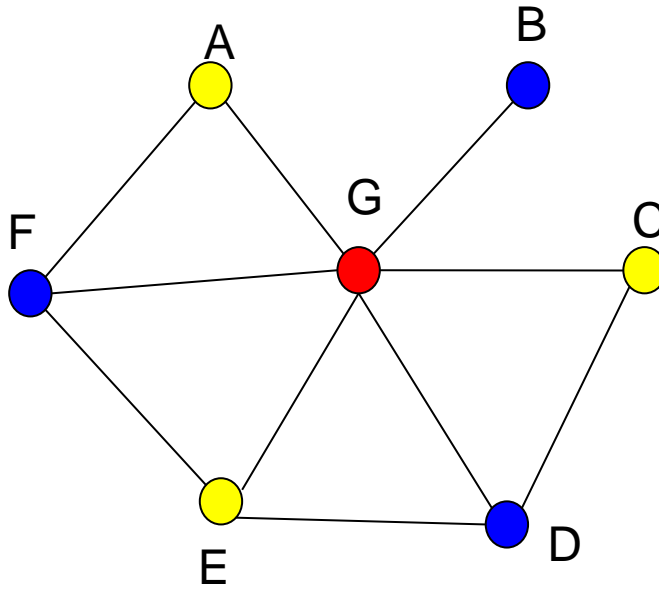
G
D
E
F
C
A
B

Derece

6
3
3
3
2
2
1

Graf Renklendirme

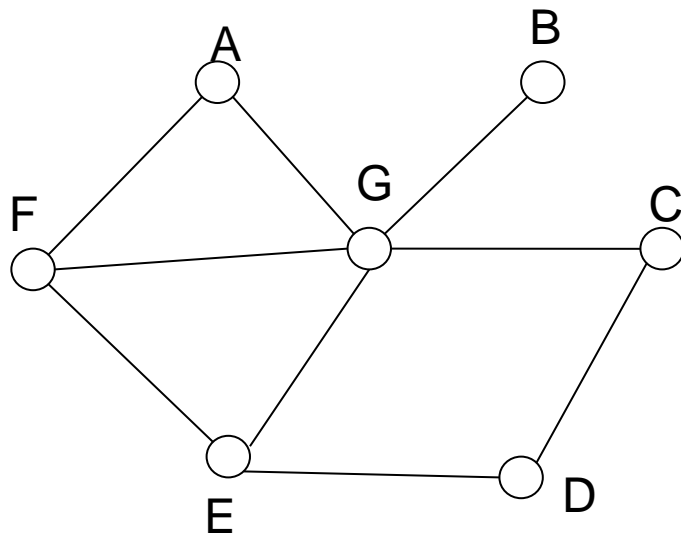
- Örnek: a) En az renk kullanılarak düğümleri renklendiriniz. Kromatik sayı kaç olur?



Düğüm	Derece
G	6
D	3
E	3
F	3
C	2
A	2
B	1
Kırmızı: G	
Mavi: D,F,B	
Sarı: E,A, C	
Kromatik Sayı:3	

Graf Renklendirme

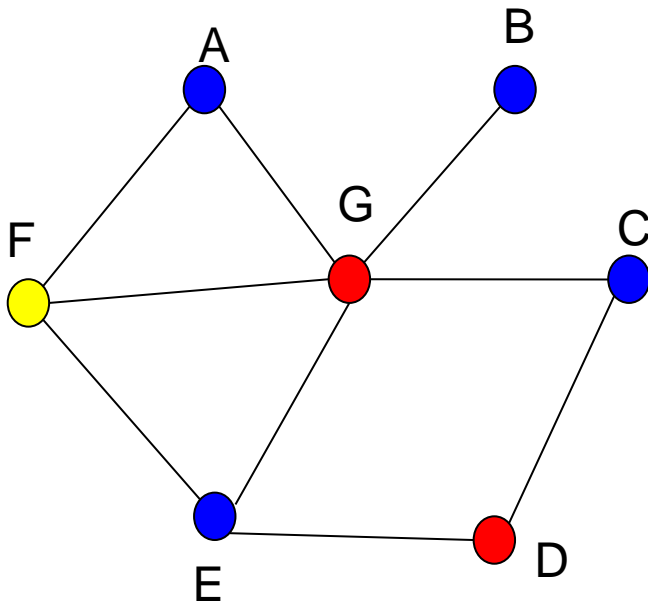
- b) G ile D arasındaki bağlantı kalkarsa yeni durum ne olur.



Düğüm	Derece
G	5
E	3
F	3
D	2
C	2
A	2
B	1

Graf Renklendirme

- b) G ile D arasındaki bağlantı kalkarsa yeni durum ne olur.



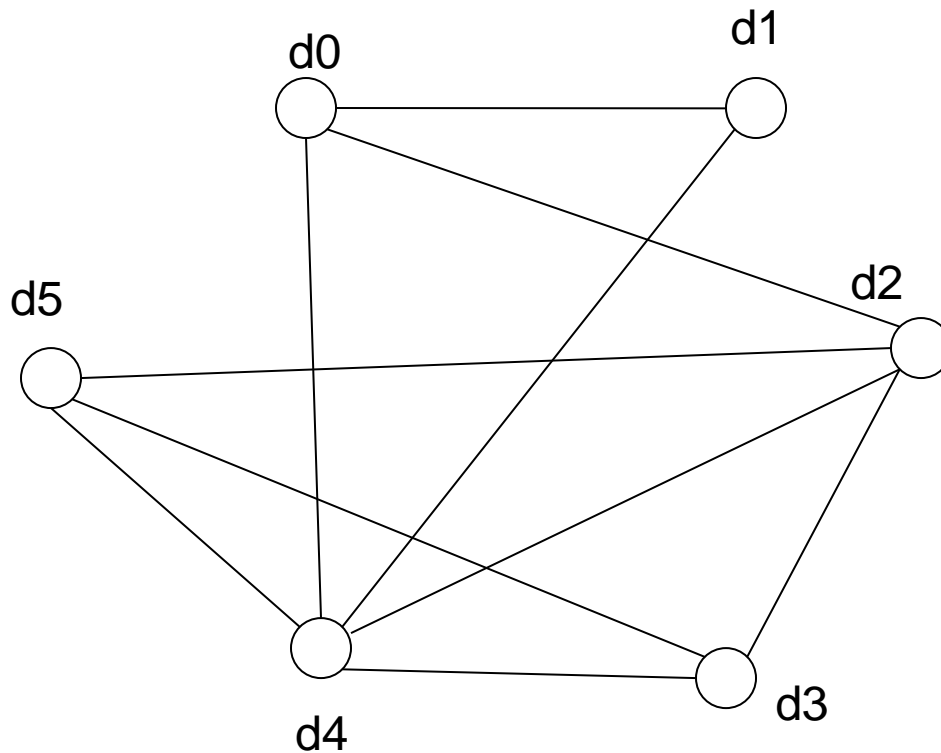
Düğüm	Derece
G	5
E	3
F	3
D	2
C	2
A	2
B	1

Kırmızı: G,D
 Mavi: E,C,B,A
 Sarı: F

Graf Renklendirme

- Örnek: Farklı sınıflardaki öğrencilerin sınavlarını hazırlarken öğrencilerin gireceği sınavların çakışmasını engellemek için en az kaç farklı oturum yapılmalıdır
 - Öğrenci1: d0,d1,d4
 - Öğrenci2: d0,d2,d4
 - Öğrenci3: d2,d3,d5
 - Öğrenci4: d3,d4,d5

Graf Renklendirme



Düğüm

d4

d2

d0

d3

d5

d1

Derece

5

4

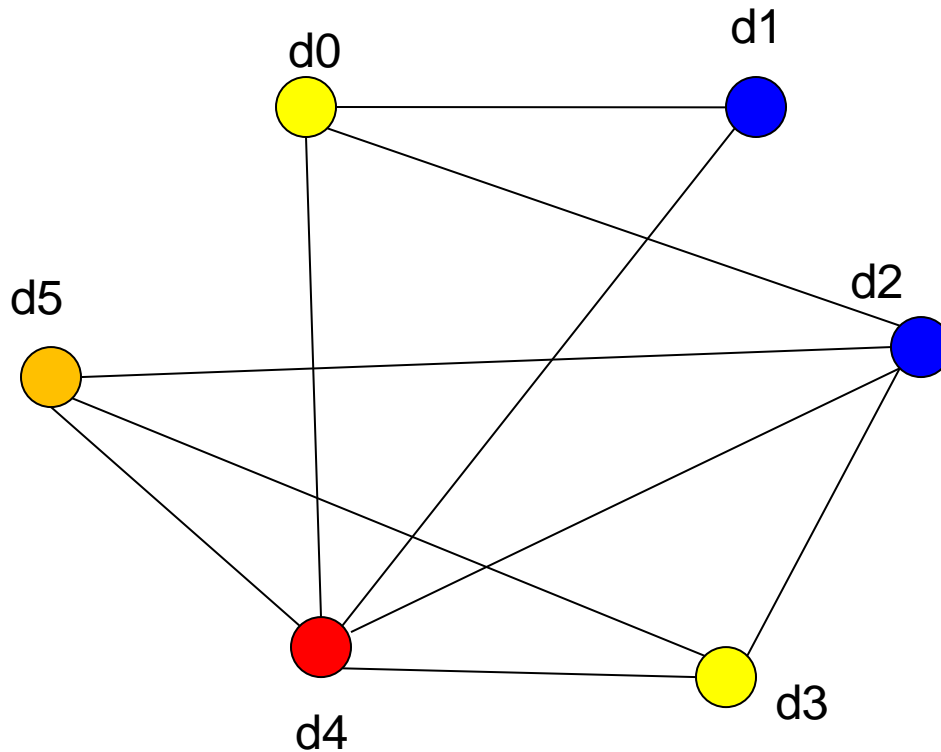
3

3

3

2

Graf Renklendirme



Düğüm	Derece
d4	5
d2	4
d0	3
d3	3
d5	3
d1	2

Kırmızı: d4
 Mavi: d1,d2
 Sarı: d0,d3
 Turuncu: d5



En Küçük Yol Ağacı (Minimum Spanning Tree)

En Kısa Yol Problemi

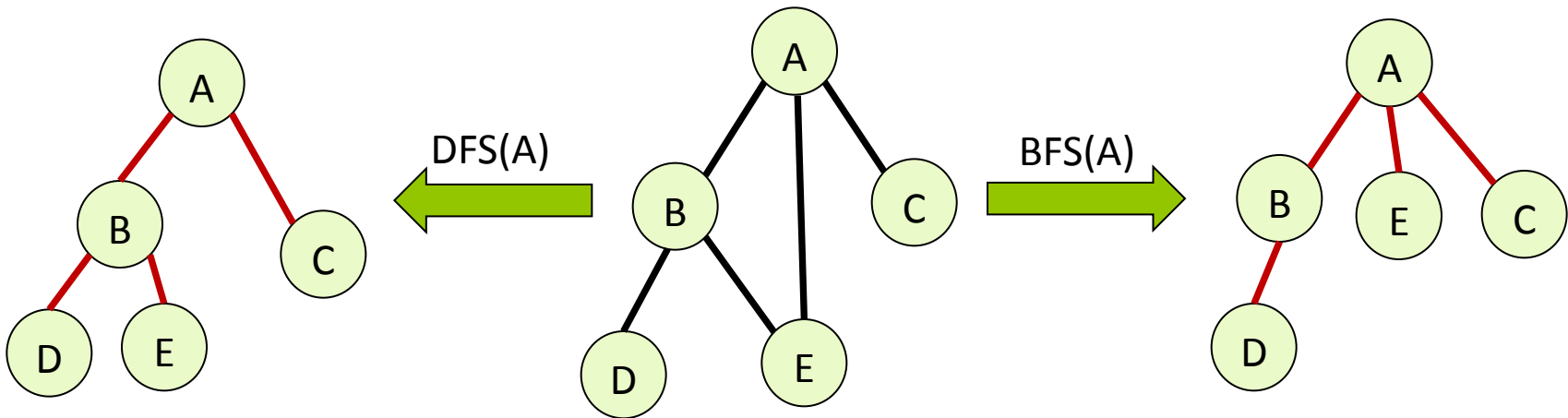
- $G = (D, K)$ grafi verilsin ve s başlangıç düğümünden V düğümüne giden en az maliyetli yol bulma.
- Farklı varyasyonlar mevcut
 - Ağırlıklı ve ağırlıksız graflar
 - Sadece pozitif ağırlık veya negatif ağırlığın da olması.

En Küçük Yol Ağacı (Minimum Spanning Tree)

- Yol ağacı, bir graf üzerinde tüm düğümleri kapsayan ağaç şeklinde bir yoldur.
 - Ağaç özelliği olduğu için kapalı çevrim(çember) içermez.
- Bir graf üzerinde birden çok yol ağacı olabilir. **En az maliyetli olan en küçük yol ağacı (minimum spanning tree)** olarak adlandırılır.

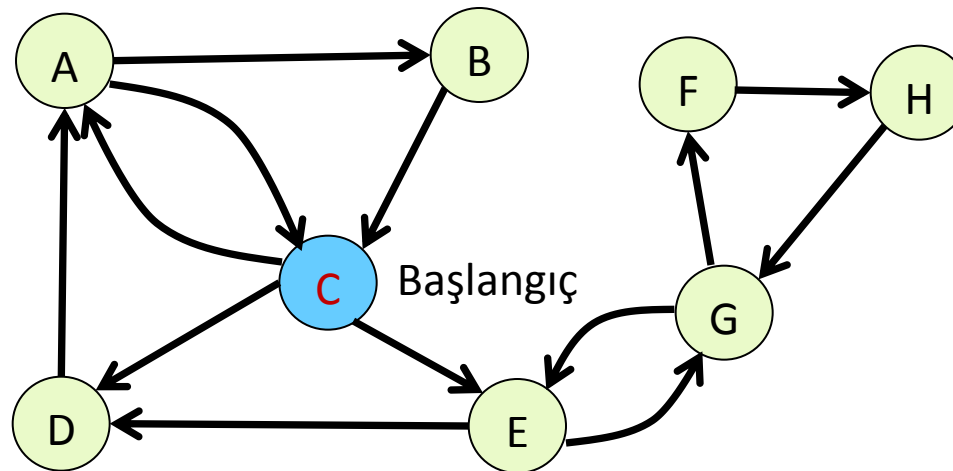
MST Hesaplama – Ağırlıksız Graf

- Graf ağırlıksızsa veya tüm kenarların ağırlıkları eşit ise MST nasıl bulunur?
 - BSF veya DSF çalıştırın oluşan ağaç MST'dir



Ağırlıksız En Kısa Yol Problemi

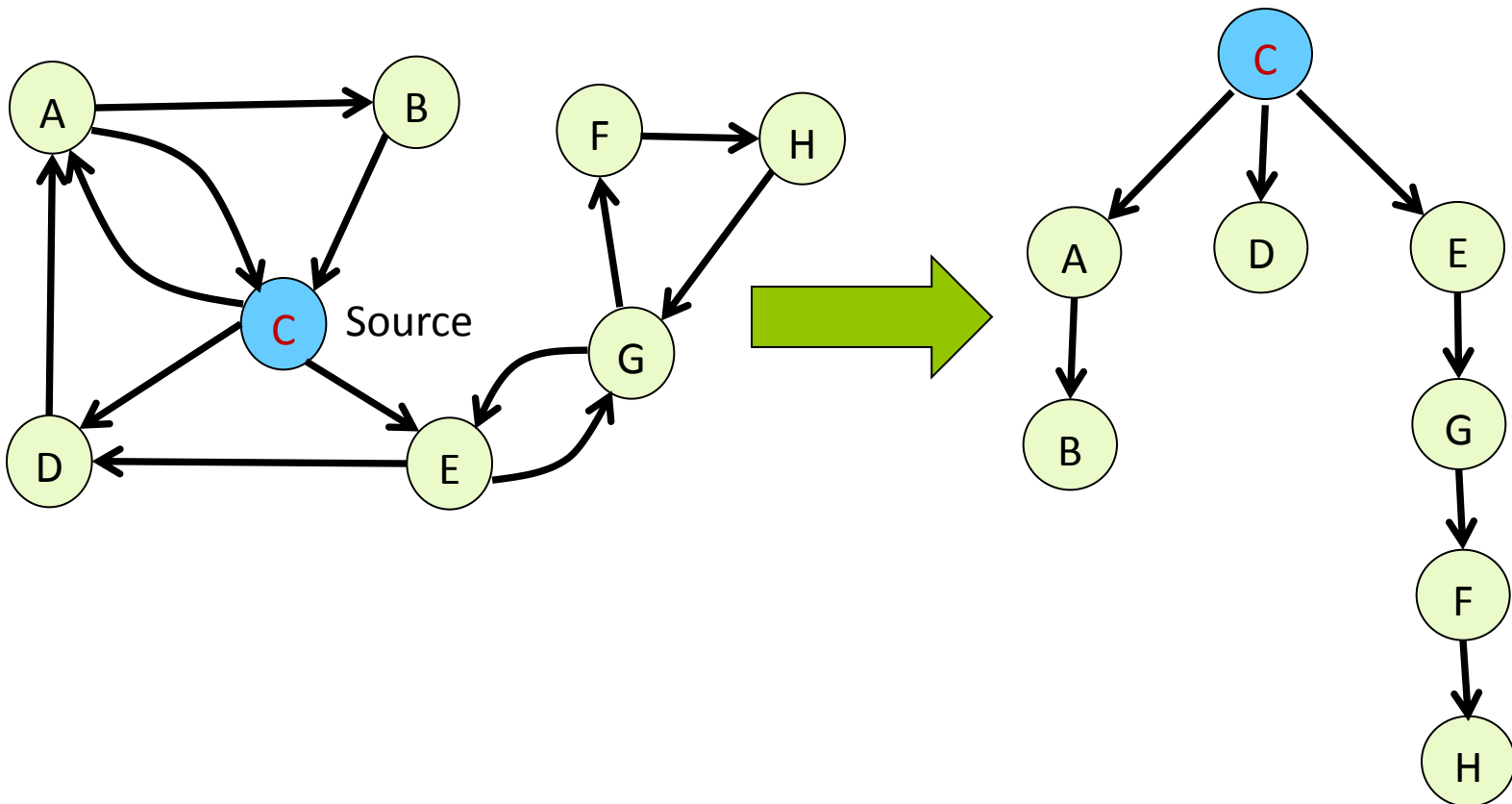
- Problem: $G = (D, K)$ **ağırlıksız** grafında **s** başlangıç düğümü veriliyor ve s'den diğer düğümlere giden **en kısa yol** nasıl bulunur.



- C'den diğer düğümlere giden en kısa yolu bulun?

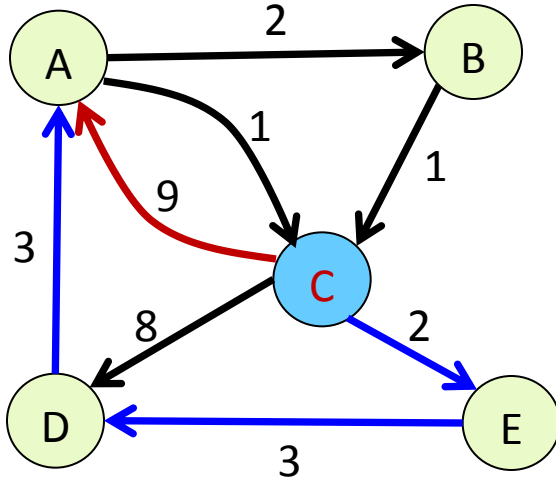
BFS Tabanlı Çözüm

- S'den başla BFS algoritmasını uygula



Ağırlıklı Graflarda En Kısa Yol Problemi

- BFS algoritması bu graf içinde çalışır mı?
- Hayır!



- C den A'ya en kısa yol:
 - C->A (uzunluk: 1, maliyet: 9)
 - BFS ile hesaplandı
- C den A'ya en az maliyetli yol:
 - C->E->D->A (uzunluk: 3, maliyet: 8)
 - Peki nasıl hesaplayacağız?

Algoritmalar

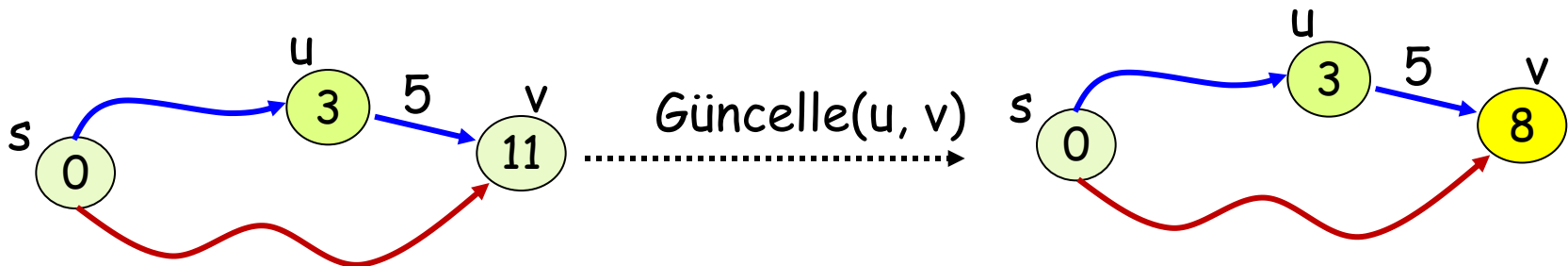
- En küçük yol ağacını belirlemek için birçok algoritma geliştirilmiştir.
 - **Kruskal'ın Algoritması:** Daha az maliyetli kenarları tek tek değerlendirerek yol ağacını bulmaya çalışır. Ara işlemler birden çok ağaç oluşturabilir.
 - **Prim'in Algoritması:** En az maliyetli kenardan başlayıp onun uçlarından en az maliyetle genişleyecek kenarın seçilmesine dayanır. Bir tane ağaç oluşur.
 - **Sollin'in Algoritması:** Doğrudan paralel programlamaya yatkındır. Aynı anda birden çok ağaçla başlanır ve ilerleyen adımlarda ağaçlar birleşerek tek bir yol ağacına dönüşür.
 - **Dijkstra Algoritması:**
 - Ağırlıklı ve yönlü graflar için geliştirilmiştir.
 - Graf üzerindeki kenarların ağırlıkları 0 veya sıfırdan büyük sayılar olmalıdır.
 - Negatif ağırlıklar için çalışmaz.
 - **Bellman ve Ford Algoritması:**
 - Negatif ağırlıklı graflar için geliştirilmiştir.
 - **Floyd Algoritması**

Dijkstra Algoritması

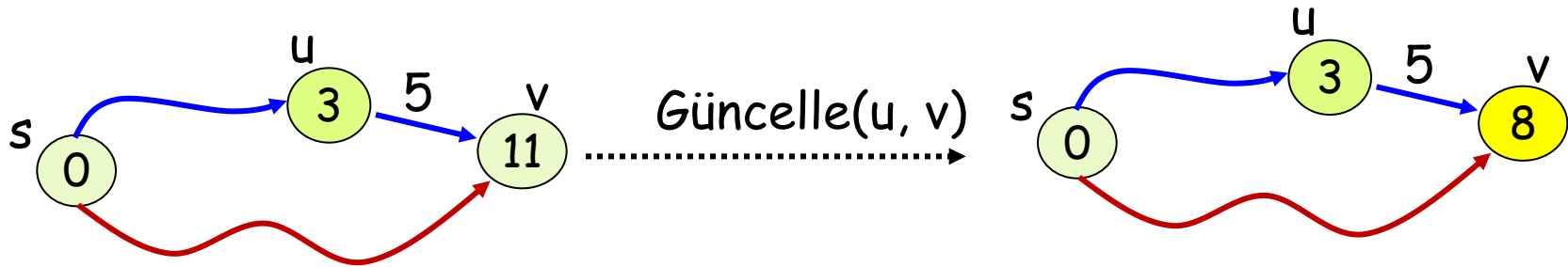
- Başlangıç olarak sadece başlangıç düğümünün en kısa yolu bilinir. (0 dır.)
- Tüm düğümlerin maliyeti bilinene kadar devam et.
 1. O anki bilinen düğümler içerisinde en iyi düğümü seç. (en az maliyetli düğümü seç, daha sonra bu düğümü bilinen düğümler kümesine ekle)
 2. Seçilen düğümün komşularının maliyetlerini güncelle.

Güncelleme

- Adım-1 de seçilen düğüm **u** olsun.
- u düğümünün komşularının maliyetini güncelleme işlemi aşağıdaki şekilde yapılır.
 - s'den v'ye gitmek için iki yol vardır.
 - Kırmızı yol izlenebilir. Maliyet 11.
 - veya mavi yol izlenebilir. Önce s'den u'ya 3 maliyeti ile gidilir. Daha sonra (u, v) kenarı üzerinden 8 maliyetle v'ye ulaşılır.



Güncelleme - Kaba Kod

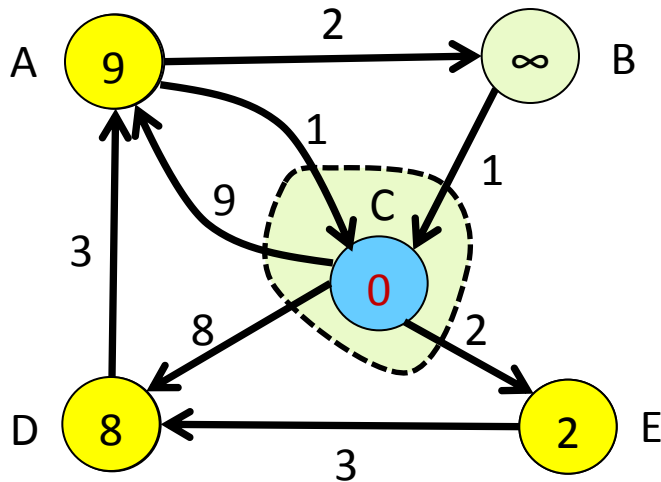


```
Guncelle(u, v){
```

```
    if (maliet[u] + w(u, v) < maliet[v]){           // U üzerinden yol daha kısa ise
        maliet[v] = maliet[u] + w(u, v);           // Evet! Güncelle
        pred[v] = u;                               // u'dan geldiğimizi kaydet.
    }
```

```
}
```

Dijkstra'nın Algoritması



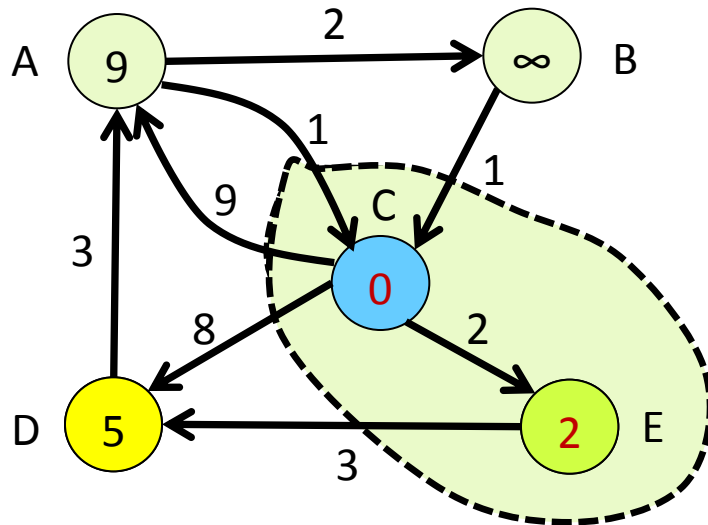
1. O anki en iyi düğümü seç – **C**
2. Bilinen düğümler kümesine ekle
3. Seçilen düğümün tüm komşularının maliyetini güncelle.

Komşu A: $0 + 9 < \infty \rightarrow \text{maliyet}(A) = 9$

Komşu D: $0 + 8 < \infty \rightarrow \text{maliyet}(D) = 8$

Komşu E: $0 + 2 < \infty \rightarrow \text{maliyet}(E) = 2$

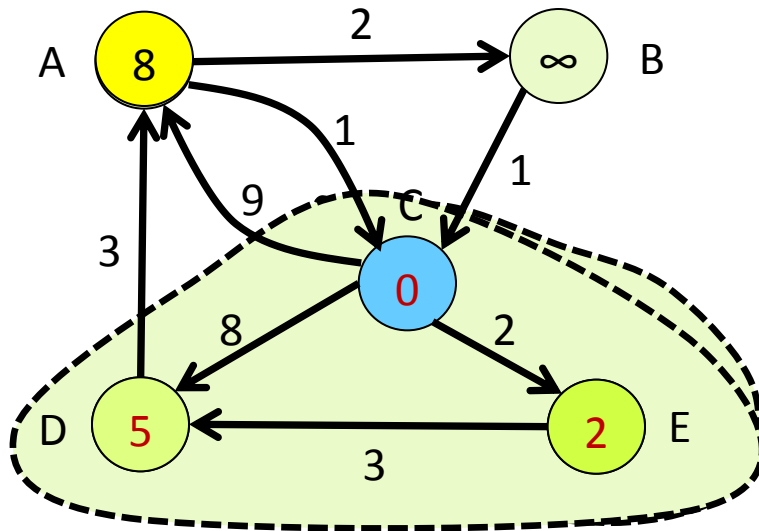
Dijkstra'nın Algoritması



1. O anki en iyi düğümü seç – **E**
2. Bilinen düğümler kümesine ekle
3. Seçilen düğümün tüm komşularının maliyetini güncelle.

Komşu D: $2 + 3 = 5 < 8 \rightarrow \text{maliyet}(D) = 5$

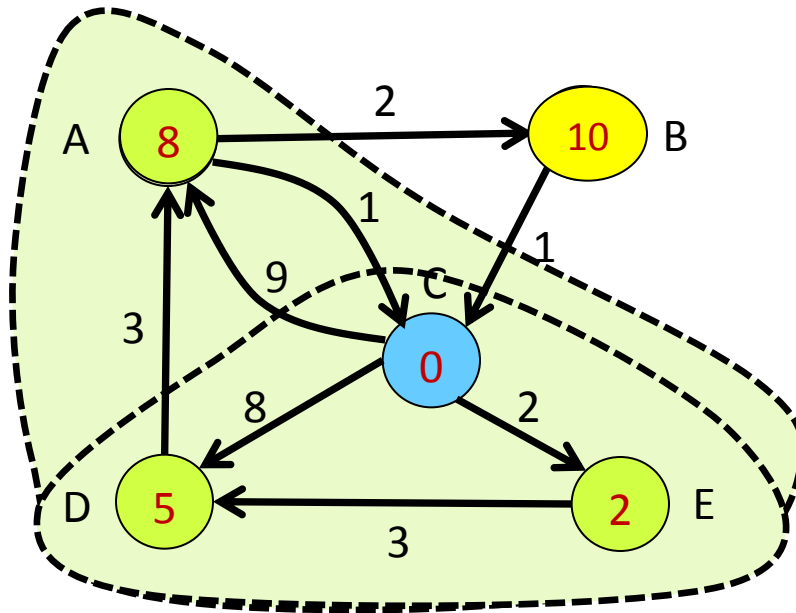
Dijkstra'nın Algoritması



1. O anki en iyi düğümü seç – **D**
2. Bilinen düğümler kümesine ekle
3. Seçilen düğümün tüm komşularının maliyetini güncelle.

Komşu A: $5 + 3 = 8 < 9 \rightarrow \text{maliyet}(A) = 8$

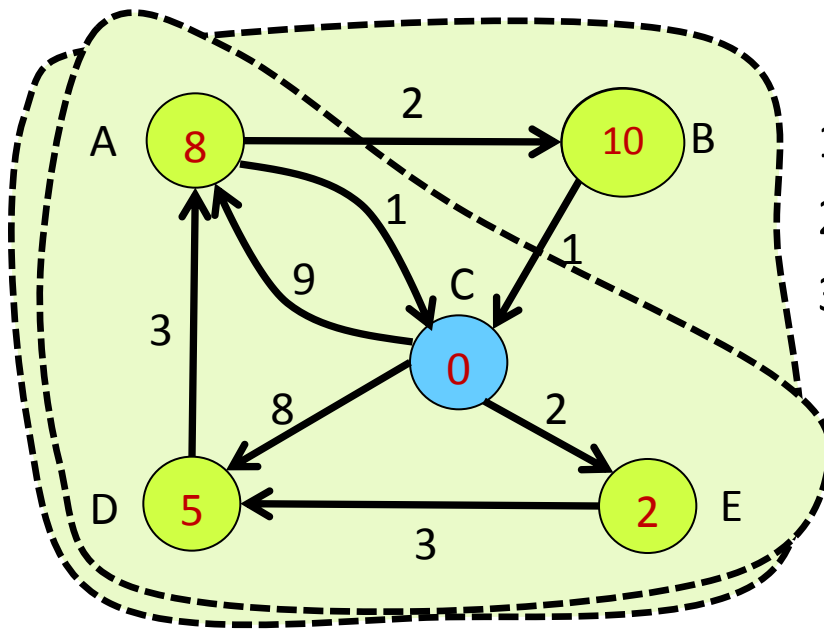
Dijkstra'nın Algoritması



1. O anki en iyi düğümü seç – **A**
2. Bilinen düğümler kümesine ekle
3. Seçilen düğümün tüm komşularının maliyetini güncelle.

Komşu B: $8 + 2 = 10 < \infty \rightarrow \text{maliyet}(B) = 10$

Dijkstra'nın Algoritması



1. O anki en iyi düğümü seç – **B**
2. Bilinen düğümler kümesine ekle
3. Seçilen düğümün tüm komşularının maliyetini güncelle.