207844358
עדי דת
2.4.22

אינפי 2 מ' - תרגיל בית 1

1. נתונות שתי פונקציות אשר מוגדרות לכל $x\in\mathbb{R}$:

$$f(x)=\begin{cases}2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\cos\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}\frac{\sin(x)}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

לאחת מהן קיימת פונקציה קדומה ולאחרת לא. מצאו פונקציה קדומה לאחת, והוכיחו שלאחרת אין, מדוע ההסבר שלאחרת אין אינו תקף לגבי זו שיש לה?

לפי הידע שלנו על כלל הגזירה למכפלה וכלל השרשרת ניתן לראות כי $F(x)=x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$. כאשר $x\neq 0$ אז מתקיים כי $F'(x)=f(x)$. נראה כי גם כאשר $x=0$ אז מתקיים:

$$F'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0=f(0)$$

כנדרש, לכן מתקיים כי $F'(x)=f(x)$ לכל $x\in\mathbb{R}$.

גבול של פונקציה חסומה ופונקציה השואפת לאפס שואף לאפס.

לפונקציה $g(x)$ אין פונקציה קדומה כי ידוע שלפונקציה נגזרת בסביבת נקודה מתקיים ט' לגזירה יכולה להיות נקודות אי רציפות רק מסוג עיקרי (מסקנה מדרבו ומשפט נוסף). מתקיים כי $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$

ולכן קיימת נקודת אי רציפות שלא מסוג עיקרי, לכן לא יתכן כי קיימת $G(x)$ כך ש- $G'(x)=g(x)$.

מכיוון שלפונקציה $f(x)$ יש נקודות אי רציפות מסוג עיקרית אז הטענה שלנו לא חלה עליה.

2. נתונה פונקציה $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$

א. הראו ש-

$$f(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

מה הווה "פירוק" של $f(x)$ כאשר מדובר על פונקציה זוגית ואי זוגית?
הראו בנוסף שפירוק זה הוא יחיד. לומר, בהינתן "פירוק" $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$
כך ש- $f_1(x)$ זוגית ו- $f_2(x)$ אי-זוגית, בהכרח

$f_1(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}$ ו- $f_2(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$

ב. הראו שאם f אי-זוגית, אז כל פונקציה קדומה שלה (אם יש כאלה) היא זוגית ב- $(-1,1)$

ג. הראו שאם f זוגית, ואם ידוע שקיימת לה פונקציה קדומה, אז יש בדיוק פונקציה קדומה אחת שהיא אי-זוגית. מה ניתן לומר על שאר הפונקציות הקדומות של f?

א) תחילה נראה כי $f_1(x)$ זוגית וכי $f_2(x)$ אי זוגית.

$$f_1(-x)=\frac{f(-x)+f(x)}{2}=\frac{f(x)+f(-x)}{2}=f_1(x)$$

$$f_2(-x)=\frac{f(-x)-f(x)}{2}=\frac{-f(x)+f(-x)}{2}=-f_2(x)$$

כעת נראה כי f_1,f_2 אלה הפונקציות היחידות העונות לדרישות.
נניח $f(x)=g_1(x)+g_2(x)$
כאשר g_1 זוגית ו- g_2 אי זוגית

$$f_1(x)+f_2(x)=f(x)=g_1(x)+g_2(x)\Rightarrow f_1(x)-g_1(x)=g_2(x)-f_2(x)$$

מכיוון שפונקציה זוגית בחיסור עם זוגית מניב פונקציה זוגית וכי פונקציה אי זוגית בחיסור עם פונקציה אי זוגית מניב פונקציה אי זוגית אז קיבלנו ששני צדדי המשוואה הינם זוגיים ואי זוגיים, הפונקציה היחידה

המקומות את זה היו אפס, כלומר:

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x)-g_1(x)=0 \\ g_2(x)-f_2(x)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f_1(x)=g_1(x) \\ f_2(x)=g_2(x) \end{array}$$

ב) בהנחה כי ל- $f(x)$ אכן קיימת פונקציה קדומה, נסמנה $F(x)$ כאשר $F(x)=F_1(x)+F_2(x)$ בהמשך לסעיף ⓒ. (כלומר $F_1(x)$ זוגית ו- $F_2(x)$ אי זוגית)

שתי הפונקציות $F_1(x), F_2(x)$ חייבות להיות גזירות גם הן בקטע $(-1,1)$ כך שמתקיים מחוק גזירה כי:

$$f(x)=F'(x)=F_1'(x)+F_2'(x)$$

ידוע כי נגזרת של פונקציה אי זוגית היא זוגית והפוך גם כן, לכן $F_1'(x)$ אי זוגית ו- $F_2'(x)$ זוגית. לפי היחידות שהוכחנו בסעיף ⓒ אלו בדיוק אותן שתי פונקציות.

לפי הנתון מתקיים כי $f(x)$ אי זוגית לכן חייב להתקיים כי $F_2'(x)=0$, כלומר $F_2(x)$ קבועה. $F_2(x)$ הינה אי זוגית ולכן הקבוע חייב להיות אפס ואז מתקיים:

$$F(x)=F_1(x)+0=F_1(x)$$

לכן הרצוי כי $F(x)$ הינה זוגית כנדרש.

ג) נסמן את $F(x)$ כפונקציה הקדומה של $f(x)$ אשר נתון כי קיימת. מכיוון ש- $f(x)$ נתונה כזוגית אז עבור $F(x)=F_1(x)+F_2(x)$ מתקיים כי $F_1(x)$ הינה פונקציה קבועה, כלומר מתקיים $F(x)=C+F_2(x)$ (אשר נתונה כזוגית).

מכיוון ש- $F_2(x)$ נבדלת מפונקציה $F(x)$ בקבוע C כלשהו אז מתקיים כי היא פונקציה קדומה של $f(x)$ (והיא גם אי זוגית). כל שאר הפונקציות הקדומות של $f(x)$ שוות לפונקציה $F_2(x)$ פלוס קבוע כלשהו השונה מאפס, לכן לכן אין פונקציות אי זוגיות.

3. תהא $f(x)$ רציפה בקטע $[a,b]$. נתון שקיימת לה פונקציה קדומה $F(x)$ שאינה מונוטונית. הוכיחו שקיימת לפחות נקודה אחת $c\in(a,b)$ כך ש- $f(c)=0$.

נניח בשלילה כי לא קיימת נקודה c כך ש- $f(c)=0$ ונגיע לסתירה.

אם $f(x)$ משנה סימן בקטע, נקבל לפי משפט ערך הביניים כי קיימת נקודה c כך ש- $f(c)=0$, בסתירה.

לכן נניח כי $f(x)$ משמרת את הסימן שלה לאורך כל הקטע, בה"כ, חיובית. נתון כי $F(x)$ היא הפונקציה הקדומה של $f(x)$, כלומר $F'(x)=f(x)>0 \Rightarrow F(x)$ היא מונוטונית עולה ממש, בסתירה לנתון.

4. פתחו נוסחת נסיגה עבור $I_n=\int x^n e^x dx$

השתמשו בה כדי לפתוח

$$\int p(x)e^x dx = \left(\sum_{i=0}^{\deg(p)} (-1)^i p^{(i)}(x)\right)e^x + C = \left(p(x) - p'(x) + p''(x) \dots\right)e^x + C$$

נציב ערכים ל-n ונאפיין את נוסחת הנסיגה בהתאם:

$n=0 \quad \int x^0 e^x dx = \int e^x dx = e^x + C$

$n=1 \quad \int x^1 e^x dx = xe^x - \int e^x = xe^x - e^x + C$

$u=x \quad u'=1$
$v'=e^x \quad v=e^x$

$n=2 \quad \int x^2 e^x dx = x^2e^x - 2\int xe^x = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C$

$u=x^2 \quad u'=2x$
$v'=e^x \quad v=e^x$

$n=3 \quad \int x^3 e^x dx = x^3e^x - 3\int x^2e^x = x^3e^x - 3x^2e^x + 6xe^x - 6e^x + C$

צורת הנוסחה המתקבלת:

$$\left(x^n - nx^{n-1} + (n\cdot(n-1))x^{n-2} - n(n-1)(n-2)x^{n-3} + \dots + (-1)^n n!\right)e^x + c$$

כאשר אנו בוחנים את $\int p(x)e^x dx$ ($p(x)$ פולינום)

לפי הנוסחה שמצאנו.

לפי הכללים לפונקציות אינטגרליות ניתן להפריד את המרכיבים של הפולינום $p(x)$ ולמצוא את האינטגרלים שלהם ואז לסכום אותם יחד (כמו כן, במידה ומקדם האיבר הנתון שונה מ-1, ניתן להוציאו מחוץ לאינטגרל לפי הכללים לפי לינאריות אינטגרלים). לפיכך נקבל כי כתלות בדרגת האיבר בפולינום $p(x)$ אכן מתקיים

$$\int p(x)e^x dx = \left(p(x) - p'(x) + p''(x) + \dots\right)e^x + C$$

כנדרש.