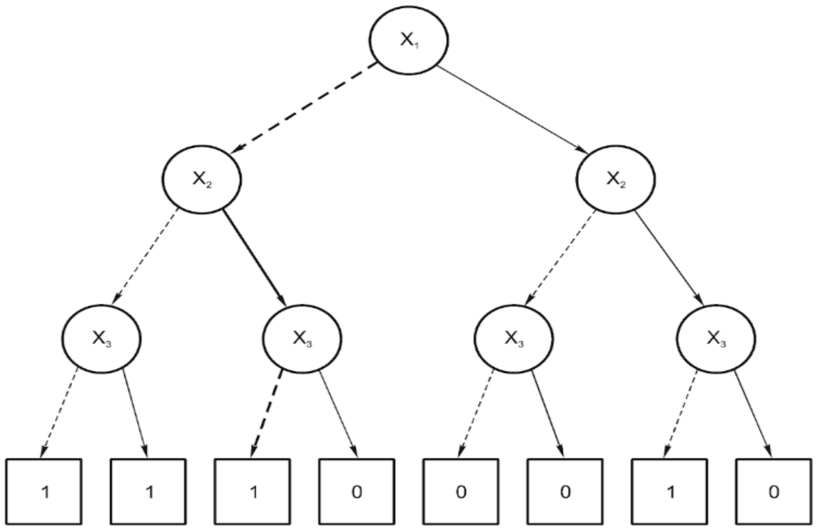
1. Бинарные решающие деревья.

Бинарное решающее дерево булевой функции — это представление функции в виде ориентированного дерева с одной корневой вершиной. Корень и другие внутренние вершины этого дерева помечены переменными функции, а листья (терминальные вершины) – значениями 0 или 1.

$x_1x_2x_3$	$f(x_1, x_2, x_3)$
000	1
001	1
010	1
011	0
100	0
101	0
110	1
111	0



2. Бинарные решающие диаграммы.

Бинарная решающая диаграмма (Binary Decision Diagram) – это новая форма представления булевых функций в виде ориентированного графа. Можно считать, что BDD получается из бинарного решающего дерева выбрасыванием всех избыточных подструктур (изоморфных подграфов). BDD представляет булеву функцию в виде минимального направленного ациклического графа (решающей диаграммы).

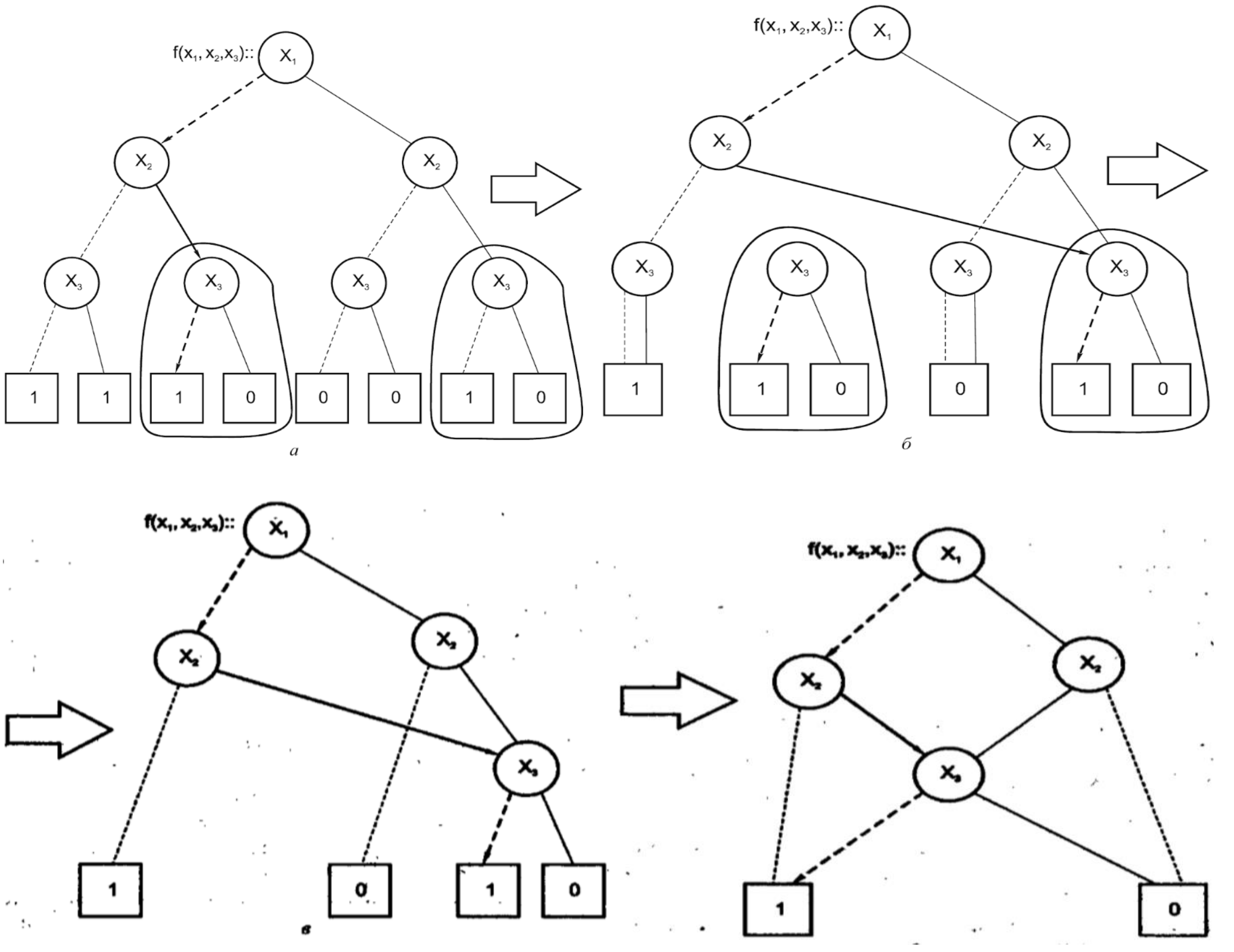
BDD – это двоичный направленный граф без избыточностей, т.е. редуцированный ациклический орграф в котором отсутствуют повторения в структуре, с одной коренной вершиной и в общем случае двумя листьями, помеченными 0 и 1. Корневая и промежуточные вершины помечены переменными, из каждой из них выходят ровно два ребра, соответствующие значениям 0 и 1 переменной, помечающей вершину.

3. Алгоритм построения бинарной решающей диаграммы по бинарному решающему дереву.

Преобразование двоичного решающего дерева в BDD называется алгоритмом редукции (Reduce). Главная задача алгоритма редукции – устранить избыточность в графическом представлении алгоритма вычисления булевой функции. Этот алгоритм основан лишь на двух операциях:

- C1: *Правило слияния* – объединить (слить) любые изоморфные подграфы (как частный случай, следует объединить терминальные вершины, помеченные одинаковыми значениями);
- C2: *Правило удаления* – удалить из графа любую вершину, у которой оба непосредственных преемника изоморфны.

Повторное применение операций слияния и удаления в любом порядке к двоичному решающему дереву булевой функции или к любому полученному из него графу до тех пор, пока все избыточности не будут устранены (т.е. ни C1, ни C2 не могут быть далее применены), приводит к редуцированному представлению функции, которое и называется бинарной решающей диаграммой.



4. Редуцированные упорядоченные бинарные решающие диаграммы.

Ключевым требованием к BDD является требование упорядоченности редуцированной бинарной решающей диаграммы. В редуцированной упорядоченной бинарной решающей диаграмме (Reduced Ordered Binary Decision Diagram, ROBDD) последовательность пометок переменных функции на всех путях должна идти в любом, но одном и том же глобальном порядке, и на одном пути переменные не могут повторяться. Следующая BDD не является упорядоченной – на разных путях от корневой вершины к заключительной вершине переменные встречаются в разом порядке.

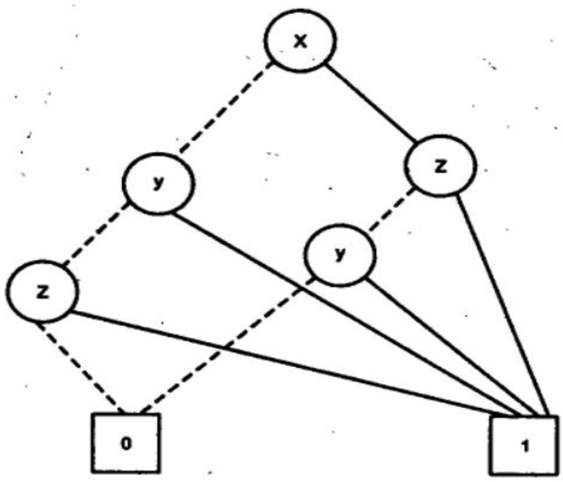


Рис. 9.4. BDD, но не ROBDD

5. Рекурсивные определения CTL-формул.

- $\mathbf{AF}\varphi = \varphi \vee \mathbf{AX}\ \mathbf{AF}\varphi$

  на всех путях из текущего состояния формула φ когда-нибудь выполнится — это то же самое, что или φ выполняется в текущем состоянии, или же формула $\mathbf{AF}\varphi$ выполняется во всех следующих состояниях;

- $\mathbf{EF}\varphi = \varphi \vee \mathbf{EX}\,\mathbf{EF}\varphi$

  на каком-нибудь пути из текущего состояния когда-нибудь выполнится формула φ — это то же самое, что или φ выполняется в текущем состоянии, или существует такой путь, что формула $\mathbf{EF}\varphi$ выполнится в следующем его состоянии;

- $\mathbf{AG}\varphi = \varphi \wedge \mathbf{AX}\,\mathbf{AG}\varphi$

  во всех состояниях на всех путях из текущего состояния выполняется формула φ — это то же самое, что φ выполняется в текущем состоянии, и во всех следующих состояниях всех путей, начинающихся в текущем состоянии, выполняется формула $\mathbf{AG}\varphi$;

- $\mathbf{EG}\varphi = \varphi \wedge \mathbf{EX}\,\mathbf{EG}\varphi$

  существует путь из текущего состояния, во всех состояниях которого φ выполняется — это то же самое, что φ выполняется в текущем состоянии и из этого состояния существует такой путь, в следующем состоянии которого формула $\mathbf{EG}\varphi$ выполняется;

- $\mathbf{A}(\varphi_1 \mathbf{U} \varphi_2) = \varphi_2 \vee (\varphi_1 \wedge \mathbf{AX}\ \mathbf{A}(\varphi_1 \mathbf{U} \varphi_2))$

  на всех путях из текущего состояния когда-нибудь выполнится φ_2, а до этого во всех состояниях выполняется φ_1 — это то же самое, что или φ_2 выполняется в текущем состоянии, или же в текущем состоянии выполняется φ_1, а во всех следующих состояниях всех путей, идущих из текущего состояния, выполняется формула $\mathbf{A}(\varphi_1 \mathbf{U} \varphi_2)$;

- $\mathbf{E}(\varphi_1 \mathbf{U} \varphi_2) = \varphi_2 \vee (\varphi_1 \wedge \mathbf{EX}\ \mathbf{E}(\varphi_1 \mathbf{U} \varphi_2))$

  из текущего состояния существует путь, на котором когда-нибудь выполнится φ_2, а до этого во всех состояниях этого пути выполняется φ_1 — это то же самое, что или φ_2 выполняется в текущем состоянии, или же в текущем состоянии выполняется φ_1 и из него существует путь, в следующем состоянии которого формула $\mathbf{E}(\varphi_1 \mathbf{U} \varphi_2)$ выполняется.

6. Алгоритмы построения характеристических функций CTL-формул.

Синтаксис CTL:

$$\varphi ::= p \mid \neg\varphi \mid \varphi_1 \vee \varphi_2 \mid \mathbf{EX}\varphi \mid \mathbf{AX}\varphi \mid \mathbf{EF}\varphi \mid \mathbf{AF}\varphi \mid \mathbf{E}(\varphi_1 \mathbf{U} \varphi_2) \mid \mathbf{A}(\varphi_1 \mathbf{U} \varphi_2) \mid \mathbf{EG}\varphi \mid \mathbf{AG}\varphi$$

Рассмотрим, как для каждой CTL-формулы φ можно построить характеристическую функцию χ_{Q_φ} того множества состояний Q_φ структуры Крипке, на котором φ истинно. Рассмотрим их по порядку.

Формула p. p — это атомарный предикат. Для каждого атомарного предиката p функция χ_{Q_p}, задающая множество состояний, в которых p истинен, определяется при постановке задачи.

Формула $\neg\varphi$. Операция отрицания выполняется над булевой характеристической функцией χ_{Q_φ}, задающей то множество состояний структуры Крипке, на котором выполняется формула φ. Эта операция над BDD выполняется элементарно.

Формула $\varphi_1 \vee \varphi_2$. Для построения характеристической функции $\chi_{Q_{\varphi_1 \vee \varphi_2}}$ операция дизъюнкции выполняется над характеристическими булевыми функциями $\chi_{Q_{\varphi_1}}$ и $\chi_{Q_{\varphi_2}}$.

Формулы $\mathbf{EX}\varphi$, $\mathbf{AX}\varphi$. Поскольку $\mathbf{AX}\varphi = \neg\mathbf{EX}\neg\varphi$, то можно рассмотреть только формулу $\mathbf{EX}\varphi$. Смысл формулы $\mathbf{EX}\varphi$ такой: из данного состояния структуры Крипке существует переход в состояние, в котором выполняется формула φ. Пусть характеристическая булева функция множества состояний Q_φ структуры Крипке, на которых выполняется формула φ, уже дана. Для того чтобы построить характеристическую функцию множества тех состояний $Q_{\mathbf{EX}\varphi}$, на которых выполняется формула $\mathbf{EX}\varphi$, используем операцию "Обратный образ" над булевыми функциями, представляющими ограничение отношения R структуры Крипке на подмножестве Q_φ (рис. 10.4).