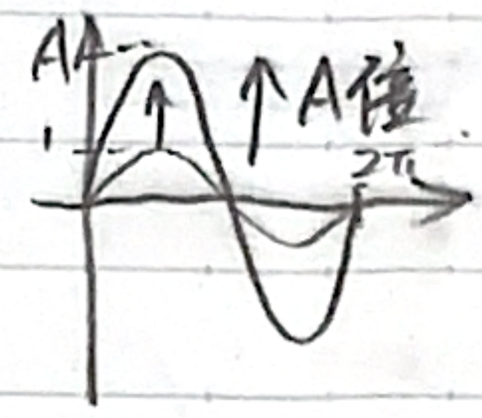
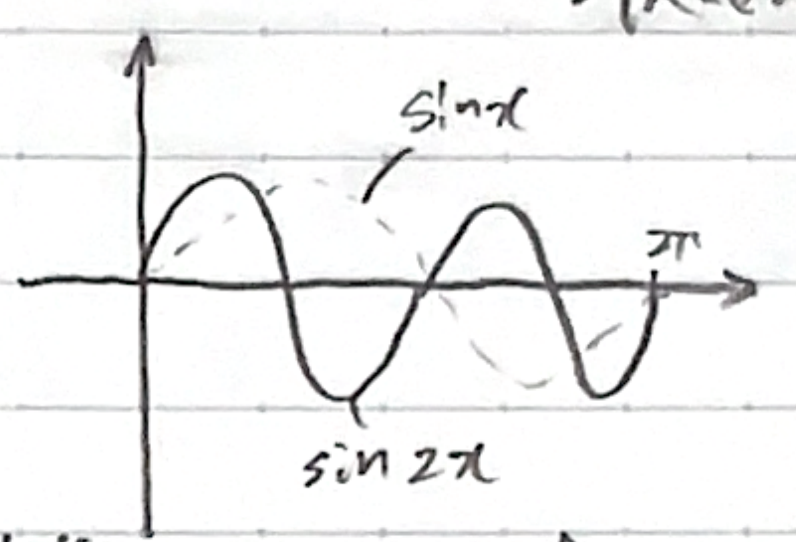
力学波動　カコ問　2024年度

問1、(1) $y_1(x,t) = A\sin(kx - \omega t) = A\sin k\left(x - \frac{\omega}{k}t\right)$

・$y = A\sin x$
└振幅



・$y = \sin kx$
└波数



$\sin x$ は 2π の間に1波
↓
$\sin kx$ は 2π の間に k コの波

・$y = \sin(x - vt)$
└速さ

x と引き算できる ⇒ vt は位置の関数
vt =(位置) ⇒ v は速さ

2π に k コ
⇕
$\frac{2\pi}{k}$ が1コの長さ

(2)
$$\frac{\partial y_1}{\partial x} = Ak\cos(kx - \omega t)$$
$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} = -Ak^2\sin(kx - \omega t)$$

$$\{g(f(x))\}' = f'(x)\,g'(f(x))$$
$$(\sin f(x))' = f'(x)\cos f(x)$$

(3)
$$\frac{\partial y_1}{\partial t} = -A\omega\cos(kx - \omega t)$$
$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} = -A\omega^2\sin(kx - \omega t)$$

(4) 波動方程式 →
⇓
$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} = \frac{\omega^2}{k^2}\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2}$$

(5)
$$y_1 + y_2 = A\sin(kx - \omega t) + A\sin(kx + \omega t)$$
$$= A\sin kx\cos\omega t - A\cos kx\sin\omega t + A\sin kx\cos\omega t + A\cos kx\sin\omega t$$
$$= 2A\sin kx\cos\omega t$$

$$\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$$

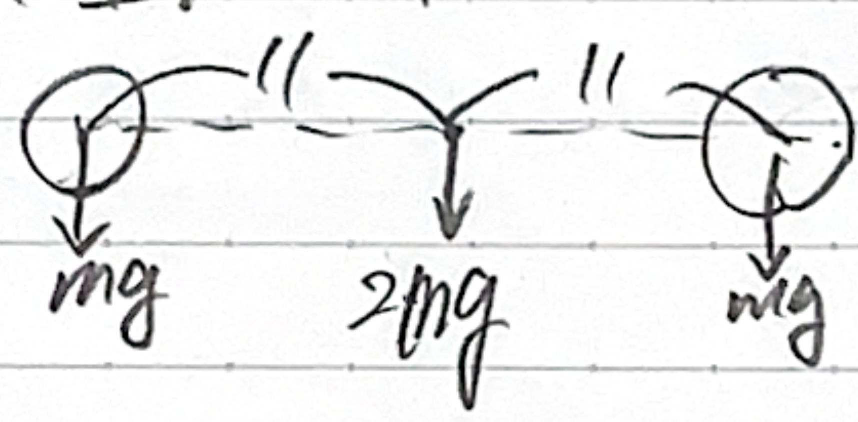
問2. (1) 《角運動量 $L = r \times p = m r \times v$》

$$l_1 = m\begin{pmatrix} vt\\0\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}v\\0\\0\end{pmatrix} = m\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$l_2 = m\begin{pmatrix}0\\vt+l\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\v\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

方向同じだから
つくる平行四辺形
の大きさ 0 と考えられる

(2) 質量が等しいことより



$$R = \frac{1}{2}(l_1 + l_2) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}vt\\vt+l\\0\end{pmatrix}$$

(3) $L_G = 2m R \times \frac{d}{dt}R$

$$= 2m\frac{1}{2}\begin{pmatrix}vt\\vt+l\\0\end{pmatrix}\times\frac{1}{2}\begin{pmatrix}v\\v\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}m\begin{pmatrix}0\\0\\v^2t-(v^2t+vl)\end{pmatrix} = \frac{1}{2}m\begin{pmatrix}0\\0\\-vl\end{pmatrix}$$

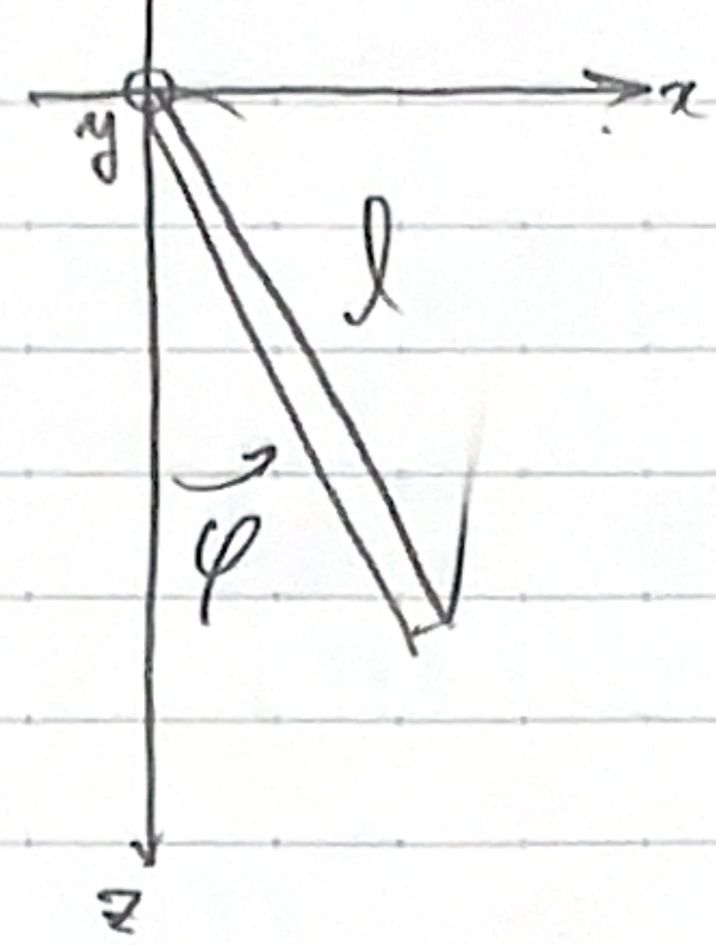
(4) $l_1' = m(r_1 - R)\times\frac{d}{dt}(r_1-R)$

$$= m\begin{pmatrix} vt - \frac{vt}{2}\\ -\frac{vt+l}{2}\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}v-\frac{v}{2}\\ -\frac{v}{2}\\0\end{pmatrix} = m\begin{pmatrix}0\\0\\ -\frac{v^2t}{2}+\frac{v^2t}{4}+\frac{v^2t+vl}{2}-\frac{v^2t+vl}{4}\end{pmatrix}$$

$$= m\begin{pmatrix}0\\0\\\frac{vl}{4}\end{pmatrix}$$

No. 3
Date

問3.



(a) 「一様な棒」なので中心が重心.

$R=(x,y,z)=\frac{l}{2}(\sin\varphi,\ 0,\ \cos\varphi)$.

(b) 《 モーメント = $r\times F$ 》

$$R\times Mg=\frac{l}{2}\begin{pmatrix}\sin\varphi\\0\\\cos\varphi\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\0\\Mg\end{pmatrix}=\frac{l}{2}\begin{pmatrix}0\\-Mg\sin\varphi\\0\end{pmatrix}$$

別に求める必要はない

∴ $-\frac{1}{2}Mgl\sin\varphi$ //

(c) 条件より, $I\frac{d^2\varphi}{dt^2}=-\frac{1}{2}Mgl\sin\varphi$

ここで、振幅が小さいとき、$\sin\varphi=\varphi$ と近似でき、

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2}=-\frac{1}{2}Mgl\varphi$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}=-\frac{1}{2I}Mgl\varphi$$

この式は単振動の式 $\ddot{x}=-\omega^2x$ と同形であり、角速度 ω に関し

$\omega=\sqrt{\frac{Mgl}{2I}}$ となる.

∴(周期) $=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{2I}{Mgl}}$ //

《 $\frac{d}{dt}\sin\varphi=\cos\varphi$、$\varphi\ll1$ のとき $\cos\varphi=1$.

∴ 0付近における $\sin\varphi$ の傾きは1 ⇒ 傾き1の1次関数 $\sin\varphi=\varphi$. 》

(d) エネルギー保存則より

$\frac{1}{2}I\left|\frac{d\varphi}{dt}\right|^2+$(重心の位置エネルギー) $=$ const. ---①

《 $\sum_i\frac{1}{2}m_iv_i^2\to\int_0^l\frac{1}{2}\frac{M}{l}(r\omega)^2dr$　　$\frac{1}{2}Mgl(1-\cos\varphi)$

$\frac{M}{l}dr\,(r\omega)^2$　$=\frac{M\omega^2}{2l}\cdot\left[\frac{1}{3}r^3\right]_0^l=\frac{1}{2}\underbrace{\frac{Ml^2}{3}}_{=I}\omega^2$. 》

$\varphi=0$ のとき $l\left|\frac{d\varphi}{dt}\right|=v_0$ より、 ⟵ ∵ $r\omega=v$

① $=\frac{1}{2}I\cdot v_0^2\cdot\frac{1}{l^2}+0=\frac{I}{2}\left(\frac{v_0}{l}\right)^2$

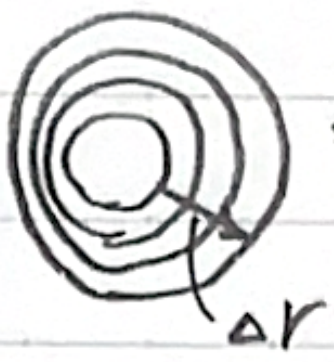
∴ これを整理し、$\left|\frac{d\varphi}{dt}\right|=\sqrt{\left(\frac{v_0}{l}\right)^2-\frac{Mgl}{I}(1-\cos\varphi}$

問4. (ア)

の面積に関して、$\Delta r \ll r$ のとき、

内側の丸枠が Δr 個あると考えれば……

$\therefore S = 2\pi r \Delta r$



⇒ 線の長さの和が面積と同値.

$\because 2\pi r \simeq 2\pi(r+\Delta r)$

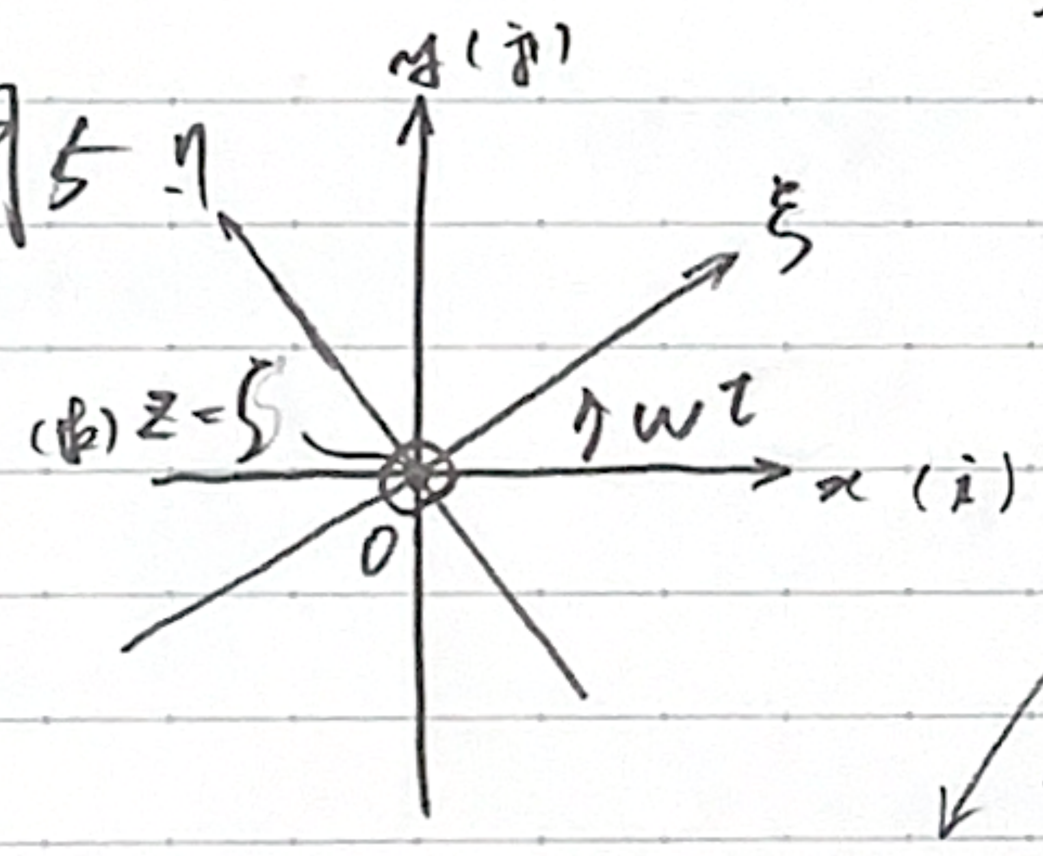
慣性モーメント: $I = \int_V \rho r^2 dV = \int_r r^2 dm$

ωを用いた運動エネルギーで m にあたるやつ $\Longrightarrow E = \frac{1}{2} I \omega^2$

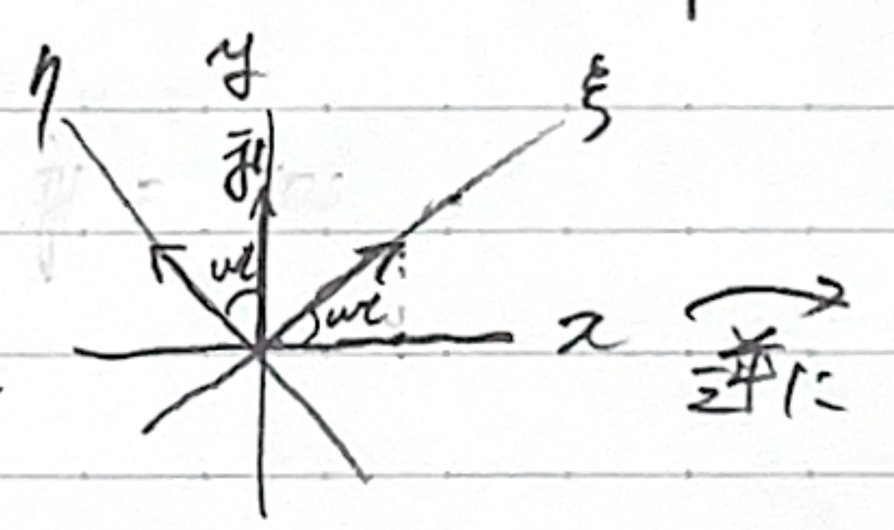
$$I = \int_0^a r^2 \cdot \underbrace{\sigma \underbrace{2\pi r \cdot dr}_{S}}_{dm} = \int_0^a 2\pi\sigma r^3 dr \quad (ア).$$

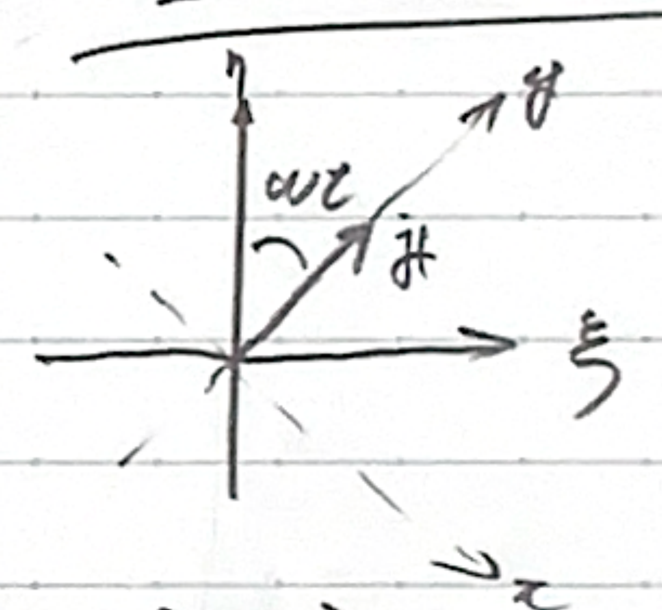
(イ) $I = 2\pi\sigma \int_0^a r^3 dr = 2\pi\sigma \cdot \frac{1}{4} a^4 = \frac{1}{2}\pi\sigma a^4$ (イ)

問5



(1)





$\mathbf{j} = \mathbf{e}_\xi \sin(\omega t) + \mathbf{e}_\eta \cos(\omega t)$

(2) $\mathbf{e}_\eta = -\mathbf{i} \sin(\omega t) + \mathbf{j} \cos(\omega t)$.

(3) $\frac{d}{dt} \mathbf{e}_\xi = \frac{d}{dt}\left(\mathbf{i}\cos(\omega t) + \mathbf{j}\sin(\omega t)\right)$

$= -\mathbf{i}\,\omega \sin\omega t + \mathbf{j}\,\omega \cos(\omega t)$.

(5) $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$

(4) (I)より $\mathbf{r} = \xi \mathbf{e}_\xi + \eta \mathbf{e}_\eta \Rightarrow \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\xi}{dt}\mathbf{e}_\xi + \xi \frac{d\mathbf{e}_\xi}{dt} + \frac{d\eta}{dt}\mathbf{e}_\eta + \eta \frac{d\mathbf{e}_\eta}{dt}$

$= \mathbf{v}' + \xi \frac{d\mathbf{e}_\xi}{dt} + \eta \frac{d\mathbf{e}_\eta}{dt}$

(6, 7) 省略　(8) も省略.

遠心力: $m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$, コリオリ $m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$