马尔可夫链

> Written by Native.S1mple

1.**马尔可夫链**又称为离散时间马尔可夫链，为状态空间中经过一个状态到另一个状态的转换的随机过程。该过程具备“无记忆性”：下一个状态的概率分布只能由当前状态决定，在时间序列中它前面的时间均与之无关，这种特定类型的“无记忆性”称作马尔可夫性质。(与过去状态条件独立)在马尔可夫的每一步，系统根据概率分布，可以从一个状态转移到另一个，也可以保持当前状态。状态的change叫做转移，与不同状态相关的概率⇒转移概率。(随机漫步)
应用：在许多时间序列模型中有广泛应用，如：循环神经网络RNN,隐式马尔可夫模型HMM，PageRank。
一般的状态转移图可用矩阵表示⇒状态转移矩阵
初始状态向量⇒矩阵乘法
2.**马尔可夫链细致平稳条件**
初始向量为单纯型向量，转移矩阵的每一行也是单纯型向量。
(单纯型向量$(x_0, x_1, \ldots\ldots x_n)\sum_{i=0}^{n} x_i = 1)$
细致平衡条件(Detailed Balance Condition):给定一个马尔可夫链，分布π和概率转移矩阵P,若有$\pi_i P_{ij} = \pi_j P_{ji}$(对所有的$ij$)则此马尔可夫链具有一个平稳分布$\pi$(Stationary Distribution).
证明：$\sum_{i=1}^{\infty} \pi(i)P(i,j) = \sum_{i=1}^{\infty} \pi(j)P(i,j) = \pi(j)\sum_{i=1}^{\infty} P(j,i) = \pi(j)$
上式$j \to \infty$,$\pi P = \pi$.
上述为充分条件，不是必要条件。
3.**马尔可夫链收敛性质**
如果一个非周期马氏链具有转移概率矩阵P,且它任意两个状态是联通的，那么

- $$\lim_{n \to +\infty} P^n = \begin{bmatrix} \pi(1) & \pi(2)\ldots\ldots\pi(j)\ldots\ldots \\ \pi(1) & \pi(2)\ldots\ldots\pi(j)\ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pi(1) & \pi(2)\ldots\ldots\pi(j)\ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{bmatrix}$$
- $$\pi(j) = \sum_{i=0}^{\infty} \pi(i)P_{ij}$$
- π是方程$\pi P = \pi$的唯一非负解.其中$\pi = [\pi(1), \pi(2)\ldots\ldots\pi(j)\ldots\ldots]\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1$

π称为马氏链的平稳分布。