M-H采样(Metropolis-Hastings)

> Written by KaelThas_Infi

M-H采样解决了MCMC接受率过低的问题，回到MCMC采样的细致平稳条件:

$$\pi(i)Q(i,j)\alpha(i,j) = \pi(j)Q(j,i)\alpha(j,i)$$

效率低的原因是$\alpha(i,j)$太小，比如0.1，而$\alpha(j,i)$为0.2

$$\Rightarrow \pi(i)Q(i,j) * 0.1 = \pi(j)Q(j,i) * 0.2$$

这时我们可以看到，如果两边同时扩大5倍，接受率提高到了0.5.

$$\Rightarrow \pi(i)Q(i,j) * 0.5 = \pi(j)Q(j,i) * 1.0$$

这样我们的接受率可以做出如下改进，即:

$$\alpha(i,j) = min\{\frac{\pi(j)Q(j,i)}{\pi(i)Q(i,j)}, 1\}$$

通过这个微小的改造，我们就得到了可以在实际应用中使用的**M-H采样算法**:
$1)$输入Q，平稳分布$\pi(x)$，设定状态阈值n_1，需要样本个数n_2
$2)$从任意简单概率分布采样得到初始状态值x_0
$3) for \quad t=0 \quad to \quad n_1+n_2-1$
  $a)$从条件概率分布$Q(x|x_t)$中采样得到样本x_*
  $b)$从均匀分布采样u~$uniform[0,1]$
  $c)$如果$u < \alpha(x_t, x_*) = min\{\frac{\pi(j)Q(j,i)}{\pi(i)Q(i,j)}, 1\}$则接受转移$x_t \rightarrow x_*$即$x_{t+1} = x_*$
  $d)$否则不接受转移$x_{t+1} = x_t$
样本集$(x_{n_1}, x_{n_1+1}, \ldots\ldots x_{n_1+n_2-1})$即我们需要的平稳分布对应的样本集。
若我们选择的Q是对称的，可以进一步简化:

$$\alpha(i,j) = min\{\frac{\pi(j)}{\pi(i)}, 1\}$$

M-H采样问题:

$1)$当数据特征非常多时，由于$\frac{\pi(j)Q(j,i)}{\pi(i)Q(i,j)}$高维计算时算法效率低，同时$\alpha(i,j)$低于1，容易被拒绝，计算损失大。
$2)$由于特征维度大，很多时候我们甚至很难求出目标的各特征维度联合分布，但是可以方便求出各个特征之间的条件概率分布，可以尝试通过条件概率分布来方便采样。
$3)Proposal$函数Q(将分布推广到连续概率密度)与$\pi(x)$越相近且越容易采样越好，但是已知$\pi(x)$的情况下该函数不一定容易找到。