Quantum Field Theory in Curved Spacetime

三角 矢雲

2025 年 9 月 7 日

1　数学的準備

この章では多様体と微分幾何学の復習をする.

1.1　反変ベクトルと共変ベクトル

まずは, 微分についての定義する.

導関数

ある滑らかな写像 $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を考える. このとき線形写像 $D\varphi|_x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を $v \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$D\varphi|_x(v) := \lim_{t\to 0} \frac{\varphi(x+tv) - \varphi(x)}{t} \tag{1}$$

と定義し, これを導関数と呼ぶ. さらにこれは結合則

$$D(\varphi \circ \psi)|_x = D\varphi|_{\psi(x)} D\psi|_x \tag{2}$$

を満たす.

次に多様体における座標系について定義する.

座標近傍 (チャート) と遷移関数

M を n 次元多様体とし,V を $\mathbb{R}^n$ の開部分集合とする.
M の開部分集合 U と同相写像 $\kappa : U \to V$ の組 (U, κ) を M の座標近傍または, チャートと呼ぶ.
また,2 つのチャート (U, κ) と (U', κ') について $U \cap U' \neq \emptyset$ であるとき, 遷移関数 $\varphi : \kappa(U \cap U') \to \kappa'(U \cap U')$ を次のように定義する.

$$\varphi = \kappa' \circ \kappa^{-1} \tag{3}$$

このとき, 写像 φ は滑らかである.

M 上の幾何学的対象はこのチャートを用いて表現することが可能である. チャートが重なっている部分では様々なチャート表現があり, それらは遷移関数を用いて変換される. 以下に具体例を挙げる.

- 関数 $f : M \to \mathbb{R}$ のチャート表現 $f_\kappa : \kappa(U) \to \mathbb{R}$ は $f_\kappa = f \circ \kappa^{-1}$ と与えられる. この変換則はスカラーであり,

$$f_{\kappa'}(\varphi(x)) = f_\kappa(x) \tag{4}$$

  と変換される.

- M 上のベクトル場 X のチャート表現 $X_\kappa : \kappa(U) \to \mathbb{R}^n$ は反変的な変換則になり,

$$X_{\kappa'}(\varphi(x)) = D\varphi|_x X_\kappa(x) \tag{5}$$

  と変換される.

- M 上の共変ベクトル場 ξ のチャート表現 $\xi_\kappa : \kappa(U) \to (\mathbb{R}^n)^*$ は共変的な変換則となり,

$$\xi_{\kappa'}(\varphi(x))D\varphi|_x = \xi_\kappa(x) \tag{6}$$

  と変換される.

- 重み k の密度 ρ はチャート表現 $\rho_\kappa : \kappa(U) \to \mathbb{R}$ を持ち,

$$\rho_{\kappa'}(\varphi(x))|\det D\varphi|_x|^k = \rho_\kappa(x) \tag{7}$$

  という変換則を持つ.

- $c : \mathbb{R} \to M$ を滑らかな曲線とする. このとき,$C(t)$ での接ベクトル $\dot{c}(t)$ は以下のように表される.

$$\dot{c}(t)_\kappa = D(\kappa \circ c)|_t = \frac{d}{dt}\kappa(c(t)) \tag{8}$$

  また, 連鎖律より, チャート間では, 接ベクトルは反変的に変換される.

$$\dot{c}(t)_{\kappa'} = D(\kappa' \circ c)|_t = D(\varphi \circ \kappa \circ c) = D\varphi|_{\kappa(c(t))}D(\kappa \circ c) = D\varphi|_{\kappa(c(t))}\dot{c}(t)_\kappa \tag{9}$$

  同様に,$f : M \to \mathbb{R}$ がなめらかな関数であるとき, 共変ベクトル場 ∇f は以下のように表される

$$(\nabla f)_\kappa = Df_\kappa \tag{10}$$

これに対しても連鎖率より,

$$(\nabla f)_\kappa = D(f_{\kappa'} \circ \varphi) = Df_{\kappa'} D\varphi = (\nabla f)_{\kappa'} D\varphi \tag{11}$$

共変的に変換されることがわかる.

- 重み 1 の密度は単に「密度」と呼ばれており,$U \cap U'$ を台に持つ密度に対して

$$\int_{\kappa(U)} \rho_\kappa(x) d^n x = \int_{\kappa'(U)} \rho'_\kappa(y) d^n y \tag{12}$$

が成り立つことがわかる. ここから,ρ が U を台に持つならば, 重み付けによって積分を

$$\int_M \rho := \int_{\kappa(U)} \rho_\kappa(x) d^n x \tag{13}$$

と定義できる. このとき, 密度は積分測度を含んでいる.

- X をベクトル場,ξ を共変ベクトル場とする. この時, スカラー関数 $\xi(X)$ が存在し,

$$\xi(X)_\kappa = \xi_\kappa \cdot X_\kappa \tag{14}$$

と表される. ただし,$\cdot$ は行ベクトルと列ベクトルの積を表す.

今までチャート表現について述べてきたが, 今まで述べた例にはさらに整頓された定式化が存在する. 例えば, 点 p におけるベクトルは線形写像 $v : C^\infty(M; \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ によって表現されてライプニッツ則を満たす.

$$v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g) \quad f, g \in C^\infty(M; \mathbb{R}) \tag{15}$$

さらに, 以下のような p を通る曲線の同値類として表現することもできる.

$$c \sim c' \Leftrightarrow D(f \circ c)(0) = D(f \circ c')(0) \tag{16}$$

ただし,$c(0) = c'(0) = p$ である.