Converting Floating Point

How to Convert Float form Decimal to Binary

소프트웨어 꼰대 강의

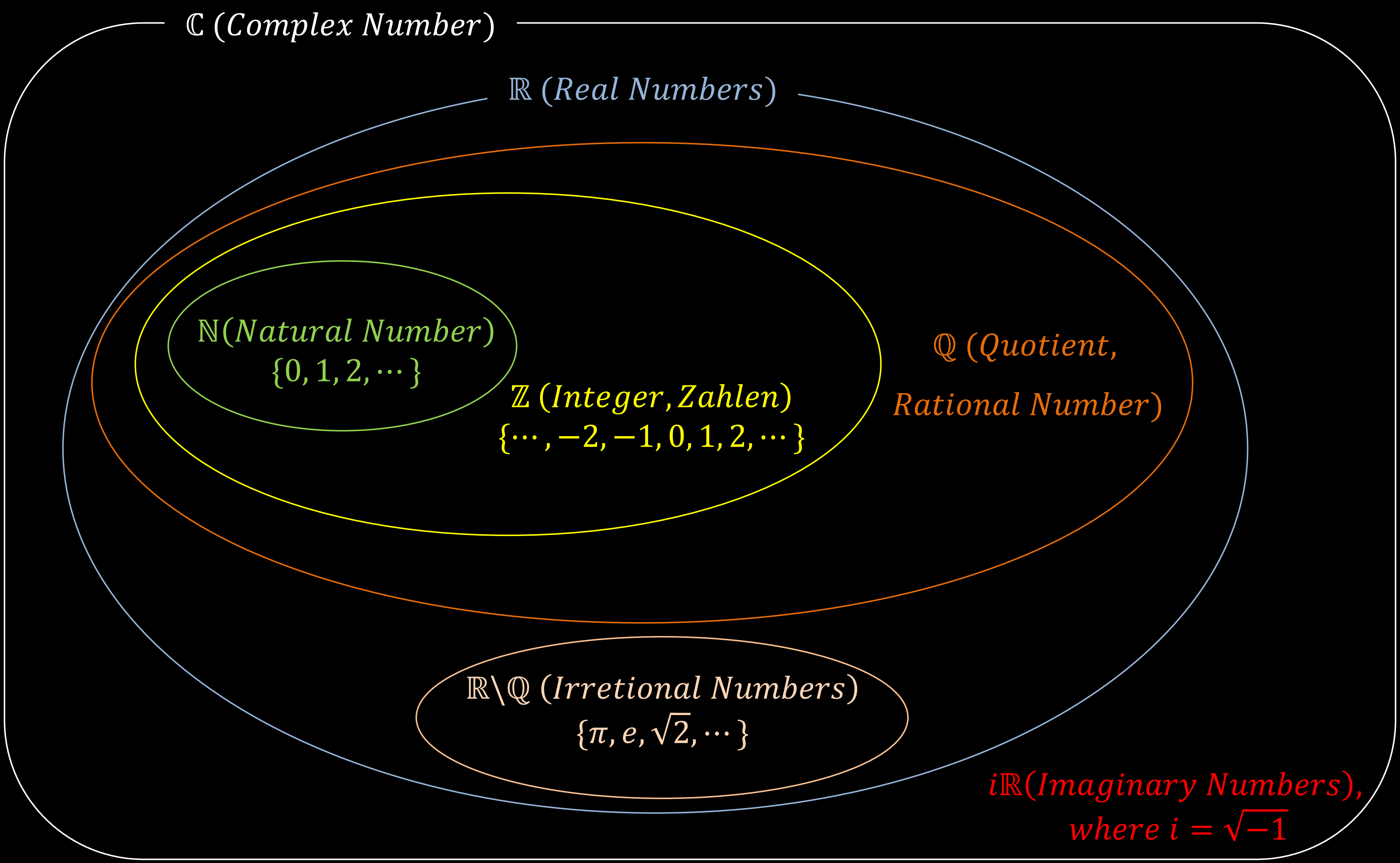
노기섭 교수

(kafa46@gmail.com)

Course Overview

Topic	Contents
01. Orientation 오리엔테이션	Course introduction, motivations, final objectives 과정 소개, 동기부여, 최종 목표
02. Converting floating point 실수 변환	How to convert float from decimal to binary 어떻게 십진수를 이진수로 변환하는가?
03. Fixed-point Representation 고정 소수점 방식	How to represent float in fixed representation 어떻게 고정 소수점 방식으로 실수를 표현하는가?
04. Floating-point Representation 부동 소수점 방식	How to represent float in floating representation 어떻게 부동 소수점 방식으로 실수를 표현하는가?
05. Handling Negative Numbers 음수 처리	Complement, Radix, n-ary System, etc. 보수, 기수, 진법 등

Number System



Real Numbers (실수)

$\mathbb{R}\ (Real\ Numbers)$

$$= \{x_i \mid -1, 0, 0.7, \sqrt{3}, \pi, e, \cdots\}$$

모든 실수 ➔ 정수부와 실수부로 표현할 수 있다!

여기서 잠깐!

진법에 대해 먼저 알아야 합니다.

10진법 (Decimal System)

2진법 (Binary System)

16진법 (Hexadecimal System)

⋮

n진법 (Base-n System)

10진법 (Decimal System) vs. 2진법 (Binary System)

$4 \quad 2 \quad 3$

$10^2 \quad 10^1 \quad 10^0$

우리가 사용할 수 있는 숫자가 0, 1, 2, ⋯ , 9 밖에 없는 상황

자릿수가 의미하는 것은? (10진법 사용)

다시 쓰면?

$$4 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 3 \times 10^0 = 423$$

$1 \quad 0 \quad 1$

$2^2 \quad 2^1 \quad 2^0$

우리가 사용할 수 있는 숫자가 0, 1 밖에 없는 상황

자릿수가 의미하는 것은? (2진법 사용)

다시 쓰면?

$$1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 5$$

5진법 (Decimal System) vs. 8진법 (Binary System)

$4 \quad 2 \quad 3$

$5^2 \quad 5^1 \quad 5^0$

우리가 사용할 수 있는 숫자가 0, 1, 2, 3, 4 밖에 없는 상황

자릿수가 의미하는 것은? (5진법 사용)

다시 쓰면?

$$4 \times 5^2 + 2 \times 5^1 + 3 \times 5^0$$
$$= 4 \cdot 25 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 1 = 113$$

$4 \quad 2 \quad 3$

$8^2 \quad 8^1 \quad 8^0$

우리가 사용할 수 있는 숫자가 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 밖에 없는 상황

자릿수가 의미하는 것은? (8진법 사용)

다시 쓰면?

$$4 \times 8^2 + 2 \times 8^1 + 3 \times 8^0$$
$$= 4 \cdot 64 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 1 = 273$$

16진법 (Hexadecimal System)

$$\begin{array}{ccc} 4 & A & F \\ 16^2 & 16^1 & 16^0 \end{array}$$

우리가 사용할 수 있는 숫자가
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F 밖에 없는 상황

(16진법 사용)

자릿수가 의미하는 것은?

다시 쓰면?

$$\begin{aligned} & 4 \times 16^2 + A \times 16^1 + F \times 16^0 \\ &= 4 \cdot 256 + A \cdot 16 + F \cdot 1 \\ &= 4 \cdot 256 + 10 \cdot 16 + 15 \cdot 1 \\ &= 1{,}024 + 160 + 15 \\ &= 1{,}199 \end{aligned}$$

진법 변환 (10진수 → 10진수)

10진수 → 10진수 표현하기?

$$10 \,\big|\; 1 \quad 3$$

나머지

1 .... 3 (3×10^0)

(1×10^1)

$$1 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$$

$$= 10 + 3$$

$$= 13$$

10진 정수부 진법 변환 (10진수 → 2진수)

10진수 → 2진수 표현하기?

$2 \,|\, 13$

$2 \,|\, 6$ → 1 (1×2^0)

$2 \,|\, 3$ → 0 (0×2^1)

1 → 1 (1×2^2)

(1×2^3)

나머지

$$1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$
$$= 1 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1$$
$$= 13$$

실수의 소수부 표현 (Fractional Representation of Real Numbers)

우리가 사용할 수 있는 숫자가 0, 1, 2, ⋯ , 9 밖에 없는 상황
(10진법 사용)

$$0\;.\;7\;\;5$$

자릿수가 의미하는 것은?

10^{-1} 10^{-2}

다시 쓰면?

$$7 \times 10^{-1} + 5 \times 10^{-2}$$

$$= 7 \times 0.1 + 5 \times 0.01$$

$$= 0.7 + 0.05 = 0.75$$

$$\begin{array}{r} 0.7\;5 \\ \times\; 10 \\ \hline \boxed{7}.5\;0 \\ 0.5\;0 \\ \times\; 10 \\ \hline \boxed{5}.0\;0 \\ 0.0\;0 \end{array}$$

0 되면 종료

$$0\;.\;7\;\;5$$

10진 소수부 진법 변환 (10진수 → 2진수)

$$0\ .\ 7\ \ 5$$

10^{-1} $\quad$ 10^{-2}

$$\begin{array}{r} 0.75 \\ \times\ 2 \\ \hline \boxed{1}.50 \\ 0.50 \\ \times\ 2 \\ \hline \boxed{1}.00 \\ 0.00 \end{array}$$

0 되면 종료

$$0.11$$

$$1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2}$$

$$= 1 \times 0.5 + 1 \times 0.25$$

$$= 0.5 + 0.25 = 0.75$$

Unlimited Fractional Representation

Step-by-step: 0.12 → 2진수

단계	Number × 2	Integer Part	Fractional part (input for next step)
1	0.12 × 2 = 0.24	0	0.24
2	0.24 × 2 = 0.48	0	0.48
3	0.48 × 2 = 0.96	0	0.96
4	0.96 × 2 = 1.92	1	0.92
5	0.92 × 2 = 1.84	1	0.84
6	0.84 × 2 = 1.68	1	0.68
7	0.68 × 2 = 1.36	1	0.36
⋮	Infinite Process	⋮	⋮

무한히 계속된다!

(안 끝남 ㅠㅠ)

0 . 0 0 0 1 1 1 1 ……

Finite vs. Infinite Binary Fraction

유한한 이진 소수(finite binary fraction)

분모가 2^n 꼴의 유리수 집합 ($\mathbb{Q}$)

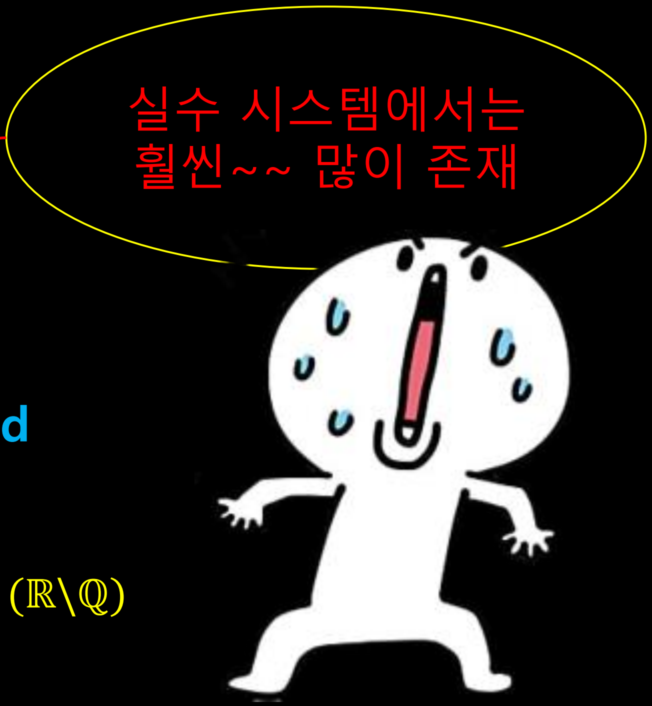
$$Examples: \frac{1}{2}, \quad \frac{3}{8}, \quad \frac{7}{16}, \quad \cdots$$

무한한 이진 소수(Infinite binary fraction)

A number that **cannot be exactly expressed with a finite number of binary digits**.

분모가 2^n 꼴이 아닌 모든 유리수 ($\mathbb{Q}$) + 무리수 집합 ($\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$)

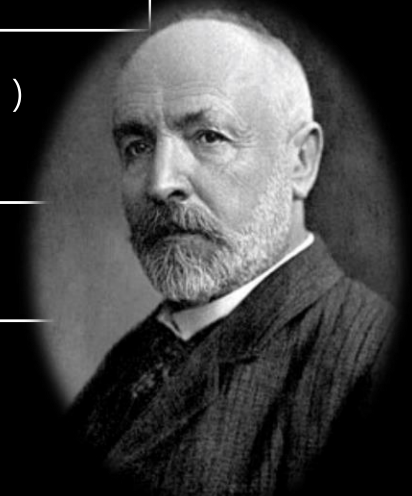
$$\frac{1}{3} = 0.010101\ldots_{2} \qquad \frac{1}{5} = 0.00110011\ldots_{2}$$



유리수가 많을까? 무리수가 많을까?

항목	설명
유리수 집합 $\mathbb{Q}$	분수 형태로 표현 가능 (예: $\frac{1}{2}, -\frac{7}{3}, 5.0, \cdots$) 가산 무한 집합 (countably infinite)
무리수 집합 $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$	분수로 표현 불가능한 실수 (예: $\sqrt{2}, \pi, e, \cdots$) 비가산 무한 집합 (uncountably infinite)
실수 집합 $\mathbb{R}$	유리수 + 무리수 포함

비가산 무한집합의 원소가 가산 무한 집합의 원소보다 많다.



German-Russian
(1845~1918)

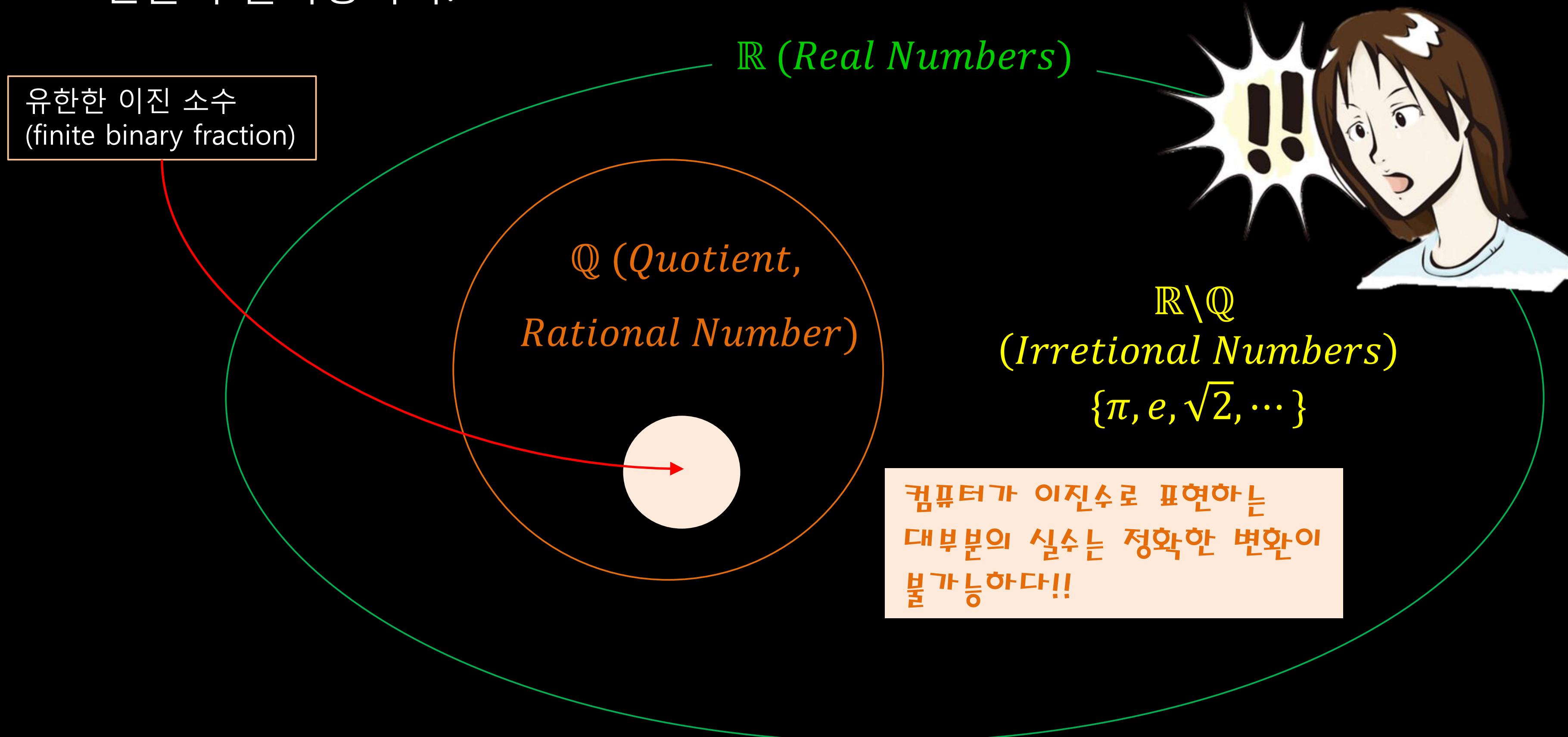
증명: Cantor's Diagonal Argument

https://en.wikipedia.org/wiki/Cantor%27s_diagonal_argument

십진 소수부를 이진 변환하는 특성

이처럼 10진수의 세계에서 2진수의 세계로 소수점을 변환하는 것은 많은 경우 정확한 변환이 불가능하다.

정확한 유한 표현이 불가능하다



수고하셨습니다 ..^ ^..