Linear Algebra

Eigenvector & Eigenvalue
(고유벡터와 고윳값)

소프트웨어 꼰대 강의

노기섭 교수

(kafa46@cju.ac.kr)

Meaning & Characteristics

Eigen

- "아이겐"(독일어: eigen)은 '고유한', '특징적인' 등의 의미로 번역할 수 있다.
- "아이겐" 또는 "아이건" 또는 "아이젠" 이라고 읽음
- 20세기 초에 다비트 힐베르트가 오늘날 쓰이는 용어인 "고유 벡터"와 "고윳값"을 도입

선형변환을 특징짓는 벡터와 값

선형변환함수의 입력

선형변환 함수

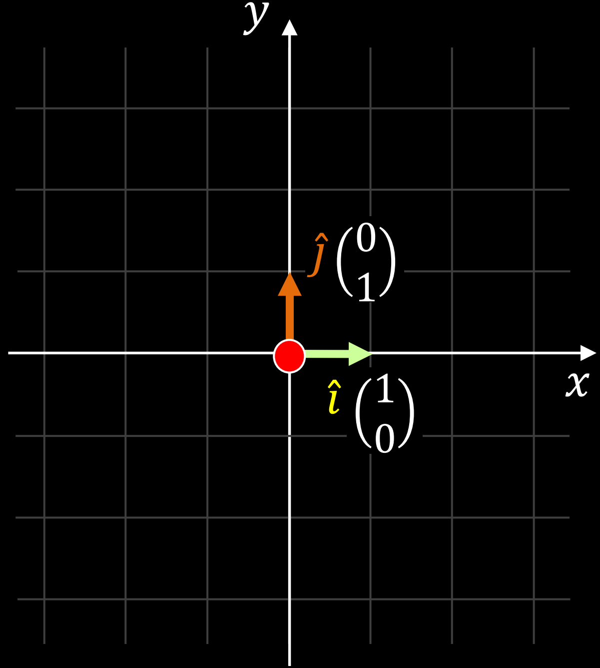
Eigenvalue (고윳값)

$$\boxed{A}\ \boxed{v} = \boxed{\lambda}\ \boxed{v}$$

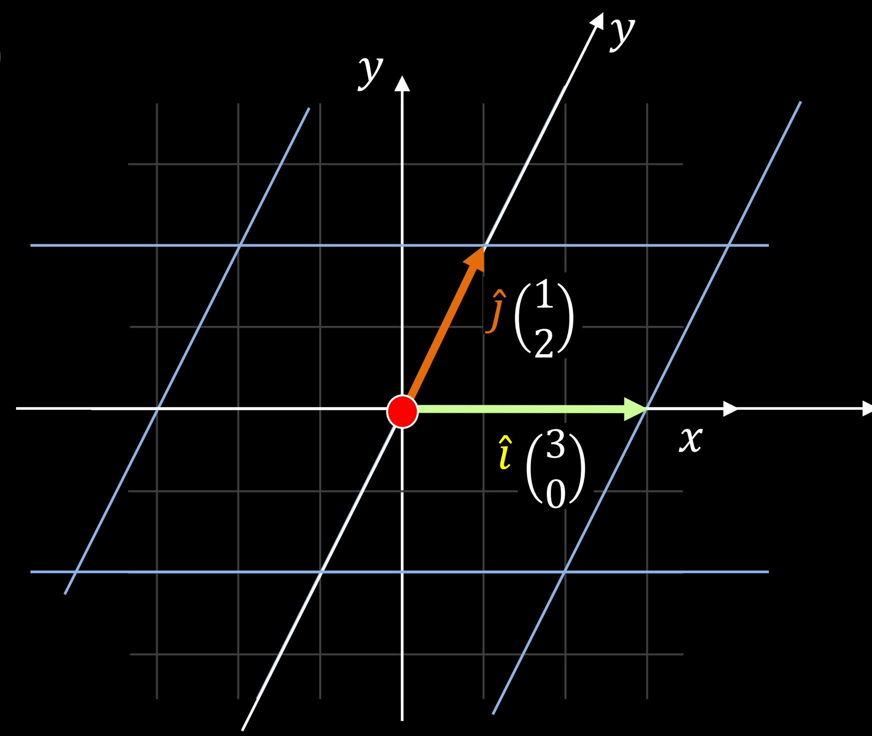
Eigenvector (고유벡터)

선형변환 함수가
하나의 값으로 표현된다

Recap: 선형변환의 직관적 이해

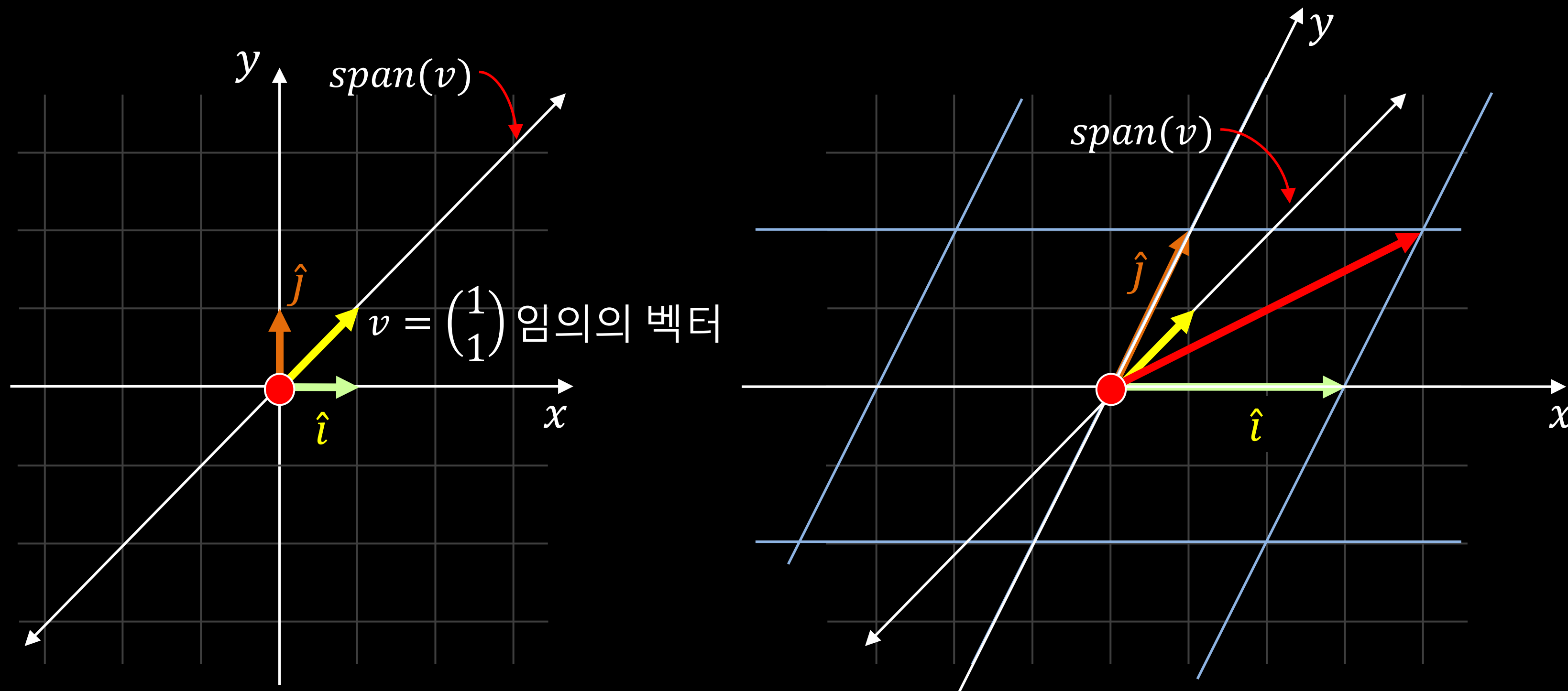


$$\begin{pmatrix}3 & 1\\0 & 2\end{pmatrix}$$



직관적 이해 – 벡터 span에서 벗어나는 일반적인 경우

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$



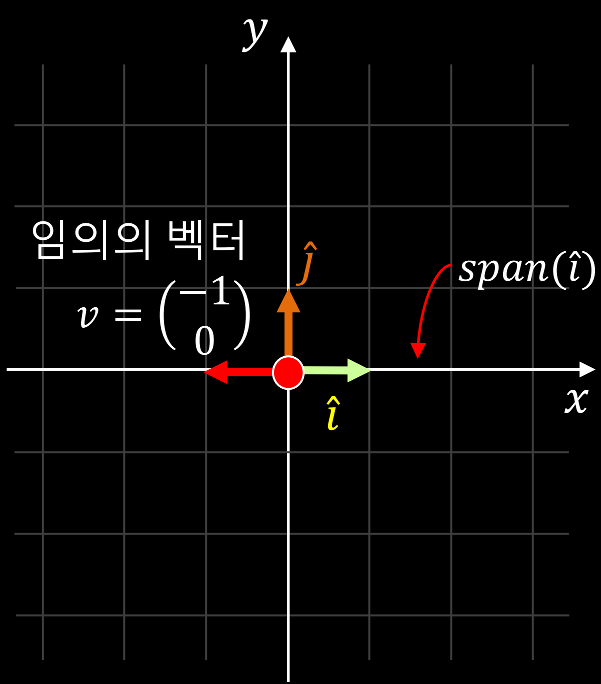
임의의 벡터 v를 선형변환 하면
대부분 자신이 생성한 span에서 벗어나게 된다.

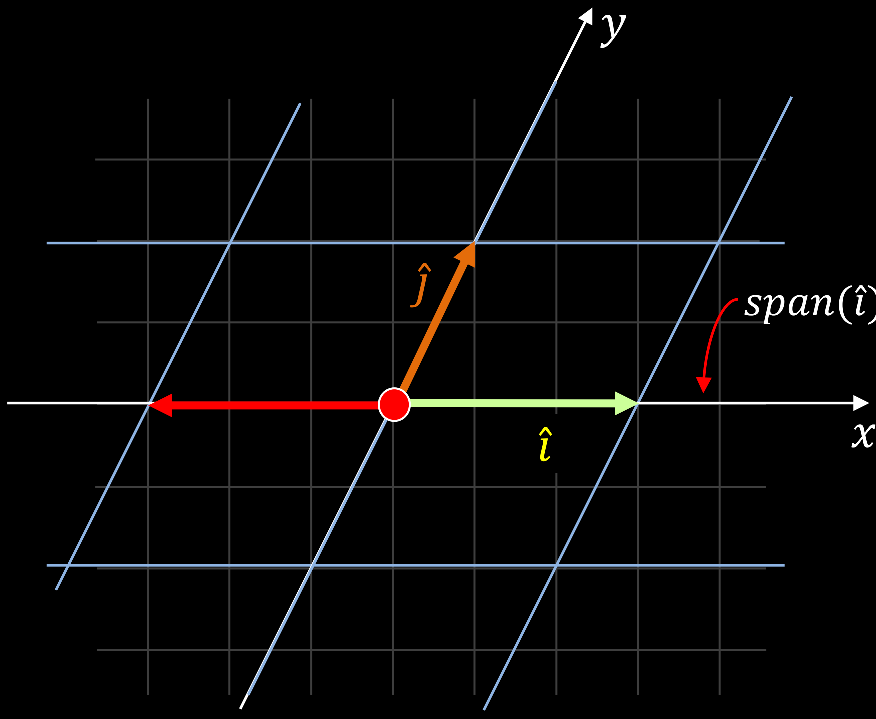
교수님~~~
그렇지 않은 경우도 있나요 ^^?

있습니다 ^^.

직관적 이해 – 벡터 span에서 머무르는 경우 (1/3)

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$





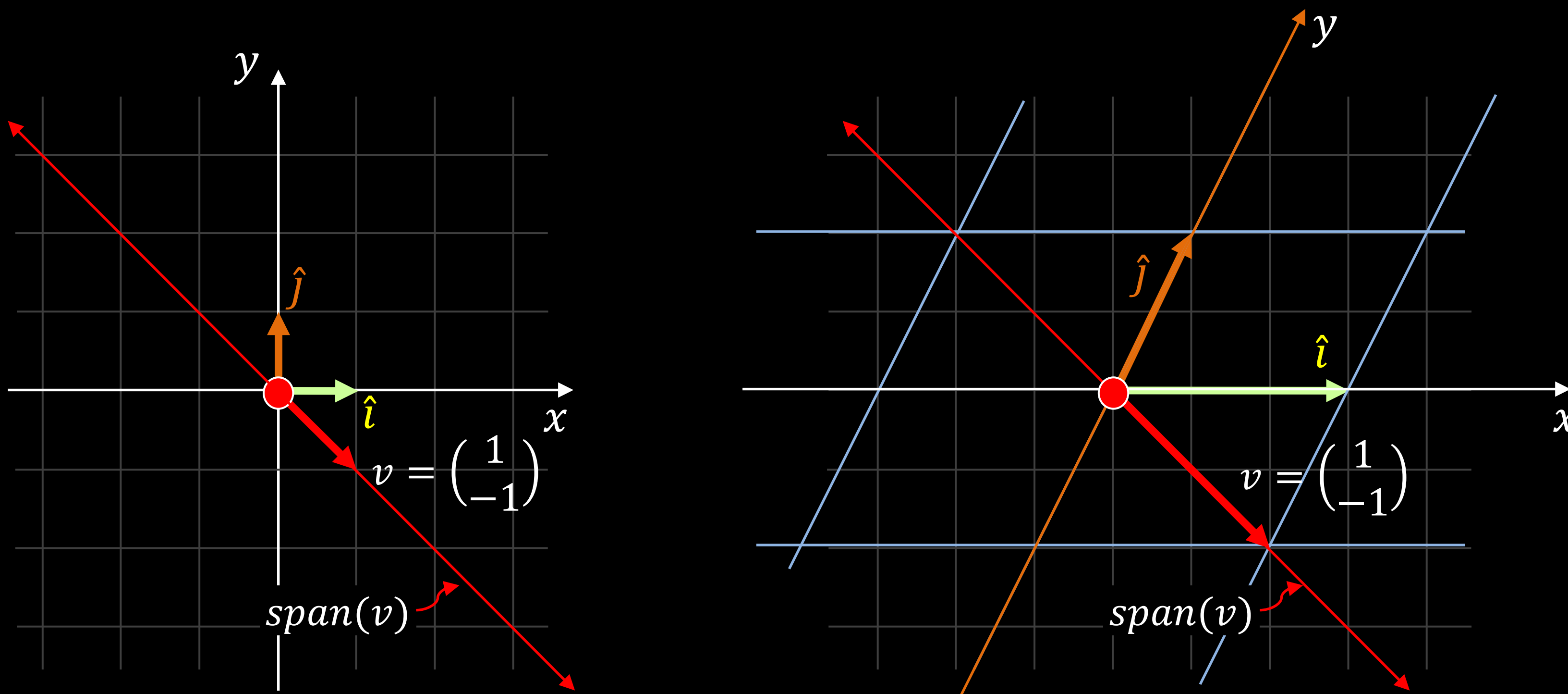
기저벡터 $\hat{\imath}$ 이 생성한 공간에 있는 모든 벡터는
Span에 그대로 머무르고, 크기는 3배가 된다.

교수님~~~
이런 경우는 유일한가요 ^^?

아닙니다 ^^.

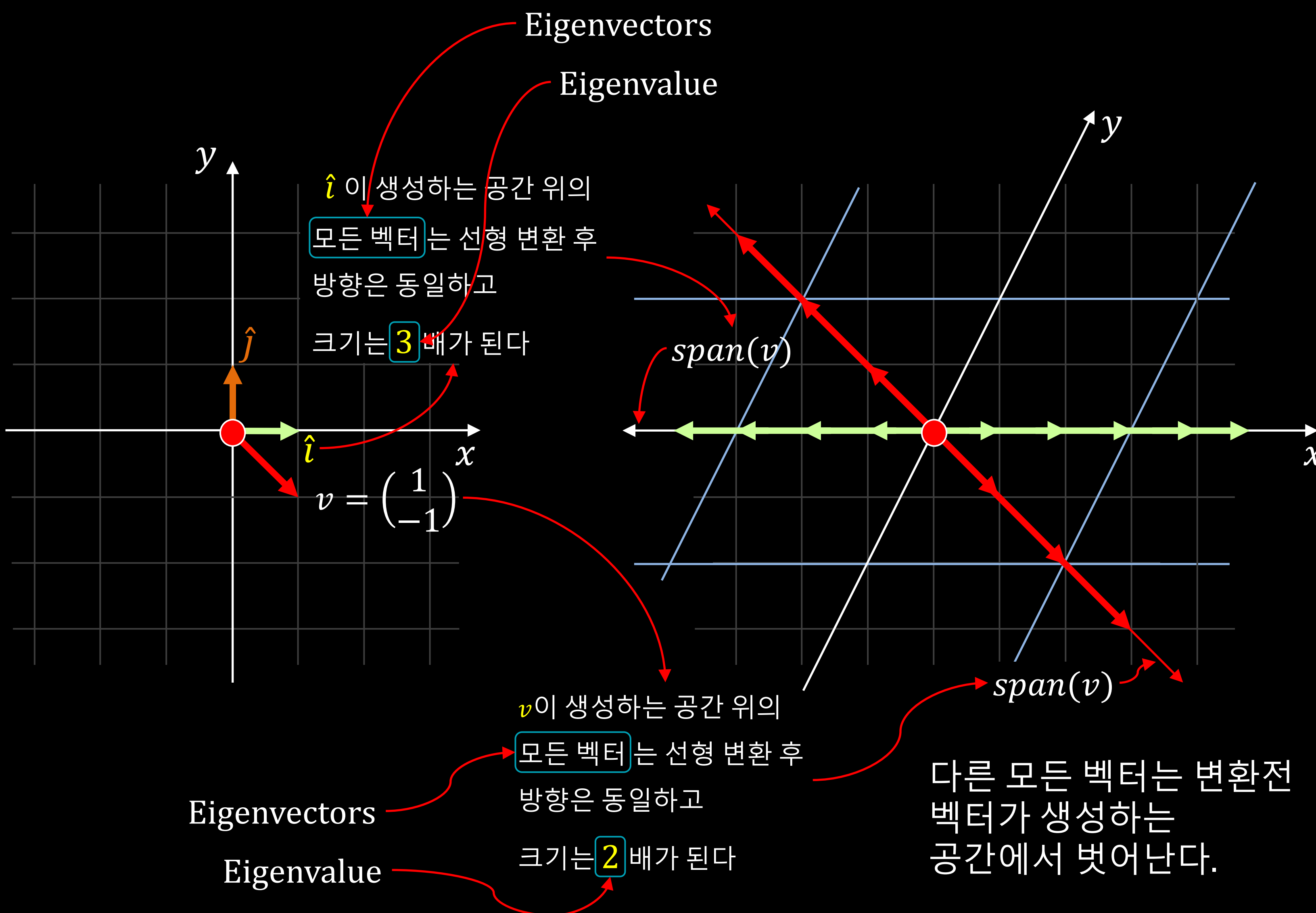
직관적 이해 – 벡터 span에서 머무르는 경우 (2/3)

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$



벡터 $\hat{v}$ 가 생성한 공간에 있는 모든 벡터는
Span에 그대로 머무르고, 크기는 2배가 된다.

직관적 이해 – 정리하기 (3/3)



Computation of Eigenvectors & Eigenvalues

선형변환함수의 입력

선형변환 함수

Eigenvalue (고윳값)

$$\boxed{A}\ \boxed{v} = \boxed{\lambda}\ \boxed{v}$$

Eigenvector (고유벡터)

선형변환 함수가
하나의 값으로 표현된다

목표: 위 식을 만족하는 v와 λ를 찾아라!

Computation of Eigenvectors & Eigenvalues

$$Av = \lambda v$$

$$A_{n\times n} \qquad I_{n\times n}$$

$$Av - \lambda v = 0$$

$$\lambda I = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \lambda & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & \ddots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{(A - \lambda)}_{\text{matrix - scalar (계산 불가!)}}v = 0$$

$$(A - \lambda I)v = 0$$

Eigenvalue & Determinant

$$\boxed{(A - \lambda I)} \; \boxed{v} = 0$$

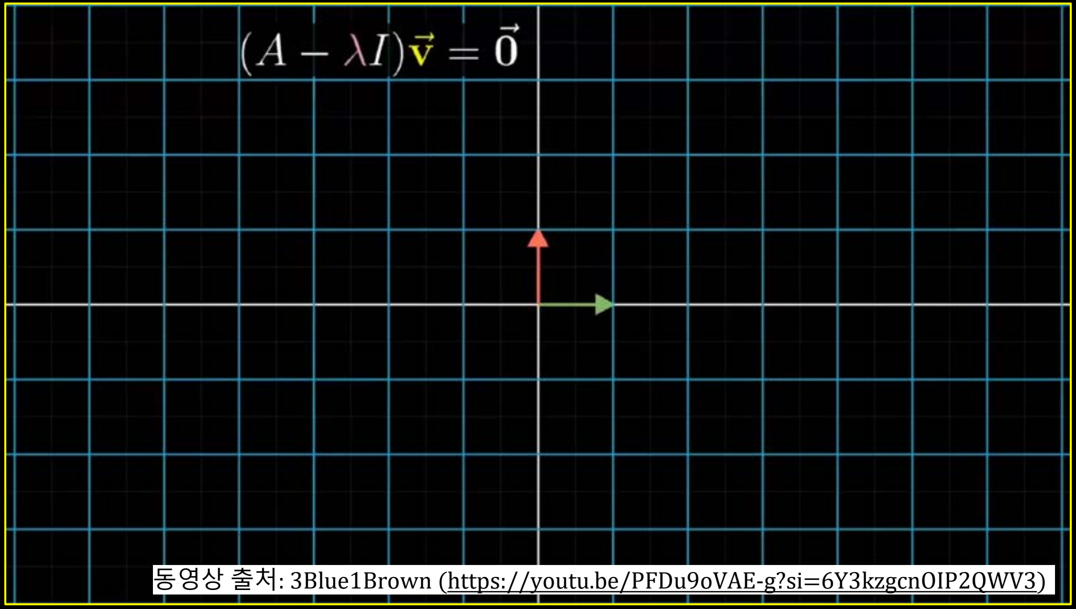
[Note]
영벡터를 eigenvector로 원하는 것은 아님

계산 결과가 영행렬이 되는 λ (*eigenvalue*)를 먼저 찾자!

Eigenvector (고유벡터)

영행렬이 되기 위해서는 determinant 가 0 (zero)이 되어야 한다.

$$\det(A - \lambda I) = 0$$



동영상 출처: 3Blue1Brown (https://youtu.be/PFDu9oVAE-g?si=6Y3kzgcnOIP2QWV3)

Finding Eigenvalue & Eigenvector using Determinant

Toy Example: simple 2×2 matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \lambda I = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \qquad A - \lambda I = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = (3-\lambda)(2-\lambda) - 1 \times 0 = 0$$

$$(3-\lambda)(2-\lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 3 \ \ or \ \ \lambda = 2$$

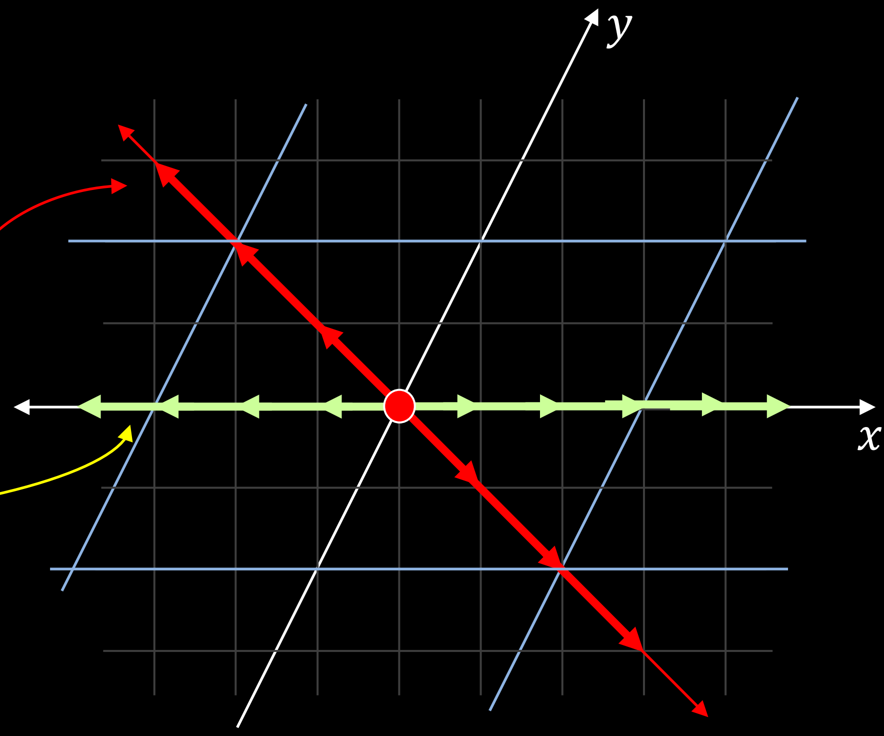
λ (eigenvalue) 활용해 eigenvector를 찾는다.

$\lambda = 3$	$\lambda = 2$
$(A - \lambda I)v = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	$(A - \lambda I)v = \begin{pmatrix} 3-2 & 1 \\ 0 & 2-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 3-3 & 1 \\ 0 & 2-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} -y \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad y = 0$	$\begin{pmatrix} x+y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad y = -x$

Eigenvectors from Eigenvalues

Linear Transformation $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Eigenvalue	Eigenvector
$\lambda = 2$	$y = -x$
$\lambda = 3$	$y = 0$

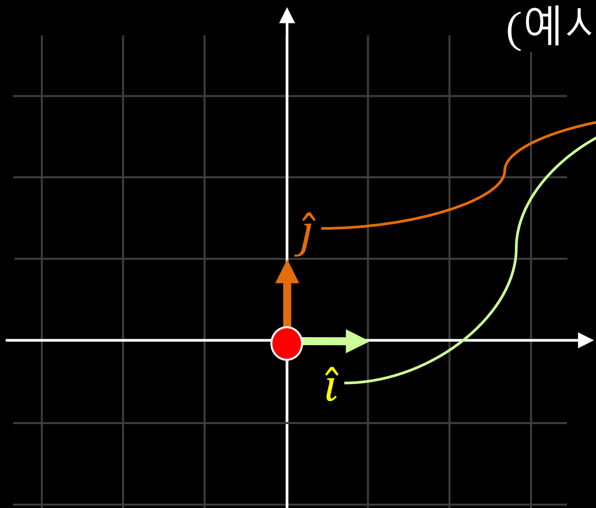


Eigenvalue 없는 경우??

교수님~~
Eigenvalue가 없을 수도 있나요?

그럴 수도 있고, 아닐 수도 있습니다. ^^

(예시)반시계 방향으로 회전 변환하는 경우



$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

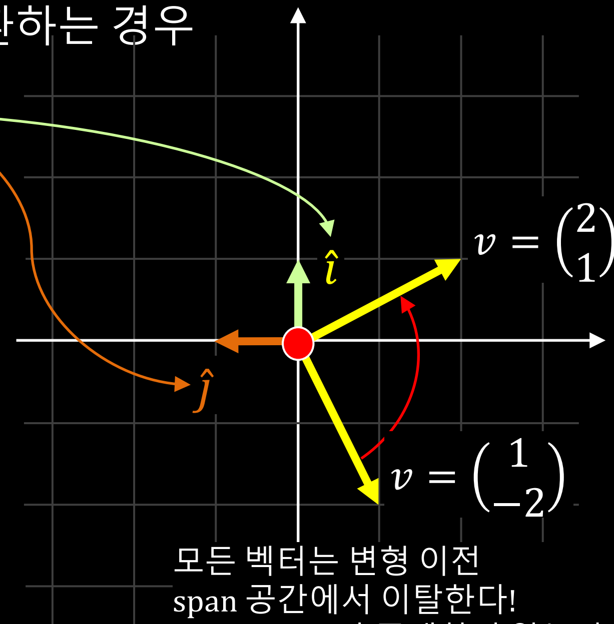
$$\det(A - \lambda I)$$

$$\det\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right)$$

$$\det\left(\begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}\right)$$

$$= (-\lambda) \times (-\lambda) - (-1) \times 1$$
$$= \lambda^2 + 1 = 0$$

$$\lambda = +i \quad \text{or} \quad \lambda = -i$$

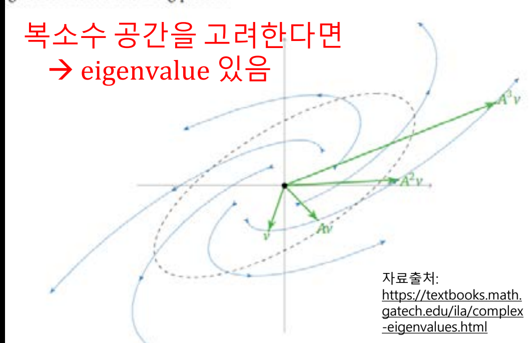


모든 벡터는 변형 이전
span 공간에서 이탈한다!
(Eigenvalue가 존재하지 않는다)

실수 공간만 고려한다면
→ Eigenvalue 없음

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \sqrt{3}+1 & -2 \\ 1 & \sqrt{3}-1 \end{pmatrix} \qquad \lambda = \frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{2}} \qquad |\lambda| = \sqrt{2} > 1$$

gives rise to the following picture:

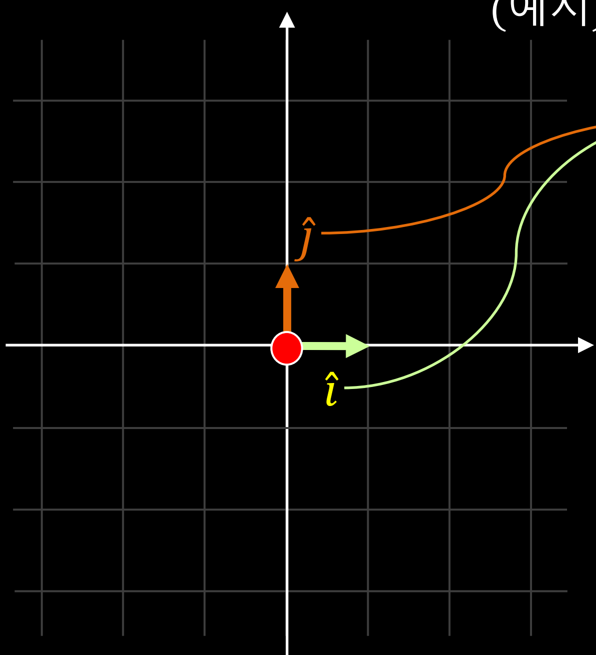


선형 공간 자체가 Eigenvalue 인 경우??

교수님~~
Eigenvalue가 엄청 많을 수도 있나요?

네 가능합니다 ^^.

(예시) 방향은 유지하고 크기만 변경



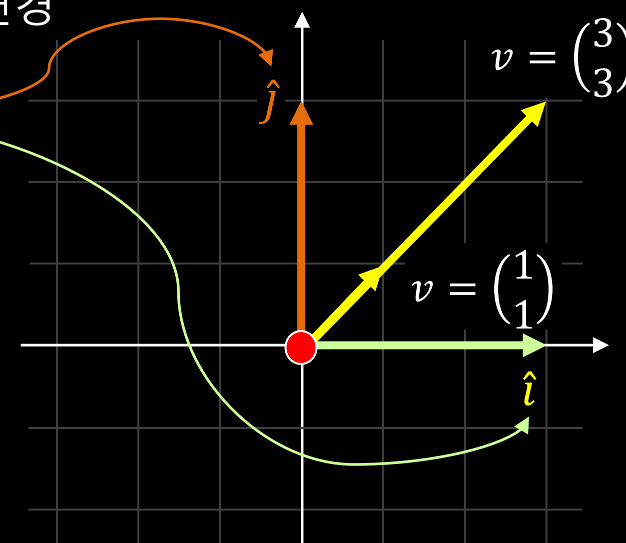
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I)$$

$$\det\left(\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right)$$

$$\det\left(\begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}\right)$$

$$= (3-\lambda)^2 - 0 \times 0$$



모든 벡터는 변형 이전
span 공간에서 크기만 3배 커진다!
(공간 자체가 Eigenvector의 집합니다.)

$\lambda = 3$ $\quad$ $$(A - \lambda I)v = \begin{pmatrix} 3-3 & 0 \\ 0 & 3-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} 0 \times x = 0 \\ 0 \times y = 0 \end{matrix}\right\}$$ x와 y는 어떤 값이라도 성립!

Diagonal Matrix 를 통해 살펴보는 Eigenvectors

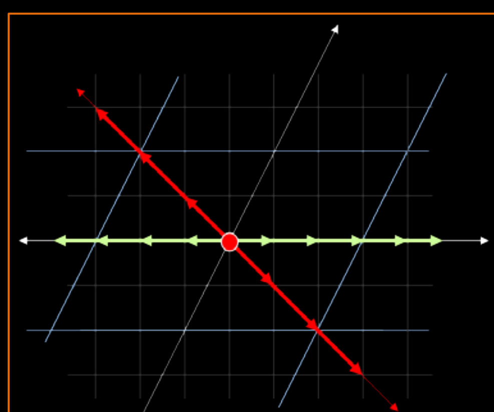
Diagonal matrix 의 모든
diagonal entry는 eigenvalues

Diagonal matrix 의 모든
열벡터는 eigenvectors

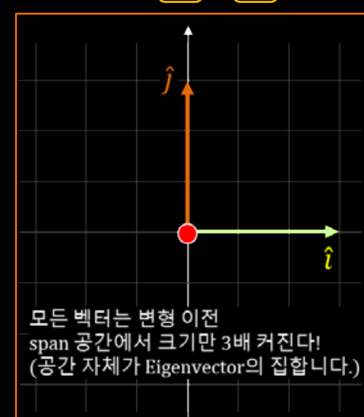
$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{ii} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

새로운 기저벡터가
주대각 성분이 0 이 아니고,
다른 모든 성분이 0 이라면,
해당 벡터는 Eigenvector이다.

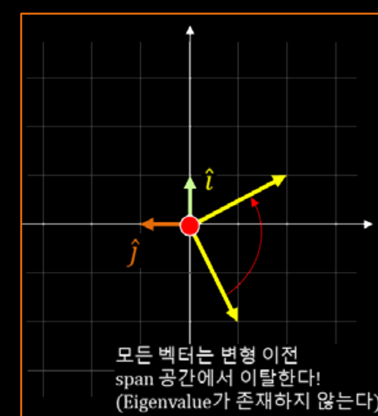
$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 3 \\ 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \end{pmatrix}$$



$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 3 \\ 0 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 3 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$



$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$



수고하셨습니다 ..^^..