Linear Algebra

Matrix Operation
(Determinant & Inverse Matrix)

소프트웨어 꼰대 강의

노기섭 교수

(kafa46@cju.ac.kr)

Recap: System of Linear Equations

■ **행렬이 발명된 이유**

- 연립일차방정식을 풀기 위해 발명

■ **연립일차방정식을 행렬로 표현하는 방법**

$$\left.\begin{aligned} x + 2y &= 20 \\ x + y &= 12 \end{aligned}\right\}$$

'첨가행렬' 이라고 부릅니다.

표현 방법		풀이 방법
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 20 \\ 1 & 1 & 12 \end{pmatrix}$	⇨	$\boxed{\text{가우스-조던 소거법}}$ 지난 강의에서 완료!
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 12 \end{pmatrix}$	⇨	$\boxed{\text{역행렬 이용 (Inverse Matrix)}}$ 이번 강의 주제

'상수행렬' 이라고 부릅니다.

'계수행렬' 이라고 부릅니다.

Types of Matrix Operation

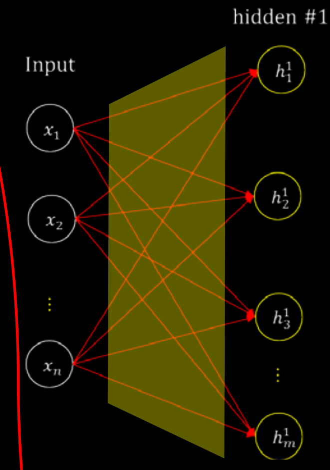
■ **이번 강의에서 최종적으로 알고 싶은 것**

- 행렬에 어떤 행렬을 곱한다는 의미....

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 12 \end{pmatrix}$$

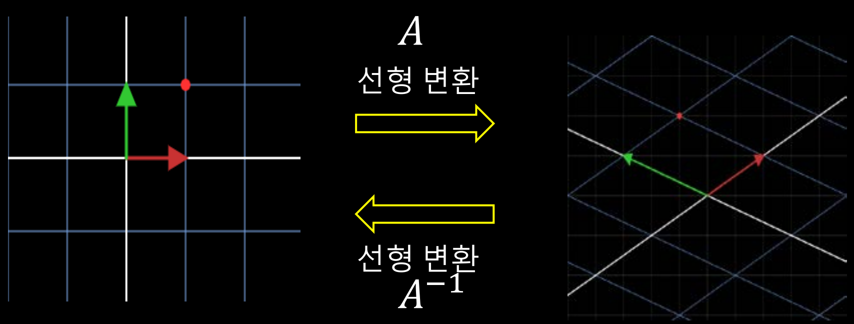
- 어떤 행렬에 역행렬을 곱한다는 의미

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 12 \end{pmatrix}$$



$$h^1 = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{21} & \cdots & w_{n1} \\ w_{12} & w_{22} & \cdots & w_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{1m} & w_{2m} & \cdots & w_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$h^1 = W_1^T X + b_1$$



현재까지 정확한 의미를
이해하기 어렵습니다 ㅠㅠ

우선, 계산 방법부터 확인하자!

- 역행렬을 이용한 Linear Equation 풀기
- Determinant
- Inverse Matrix

Inverse Matrix on System of Linear Equations

연립일차방정식 $AX = B$ 에서

A 의 역행렬 A^{-1}가 존재한다면,

$X = A^{-1}B$ 이다.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}^{-1}} \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

역행렬 A^{-1} 이 존재??

어떻게 확인하나요?

행렬식(determinant)을 이용해 확인합니다 ^^

YES

유일한 해가 존재한다.

NO

해가 없거나, 무수히 많다.

Determinant - Definition & Notation

- **Determinant**
  - 한국어로 '행렬식' 이라고 부름
  - Square Matrix를 하나의 숫자로 맵핑하는 함수

사실 행렬식은 더욱 많은
의미를 가지고 있습니다.
차근차근 배워갈 겁니다 ^^

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{determinant}} \text{실수값}$$

$$f(Square\ Matrix) = \mathbb{R}$$

Linear Algebra 에서는 요렇게 표현합니다 ^^

$$\det A \quad \text{또는} \quad |A|$$

Determinant - Operations

걱정하지 마세요...
계산은 컴퓨터가 합니다.
개념만 이해해 주세요 ^^

Determinant 구하기

$0 \times 0 \rightarrow \det(A) = 0$

$1 \times 1 \rightarrow \det(a) = a$ ← 하나의 값만 있는 경우

$2 \times 2 \rightarrow \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

M_{ij} 원래 행렬에서 i 행과 j 열을 제외한 행렬

$$3 \times 3 \rightarrow \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}\boxed{M_{11}} - a_{12}\boxed{M_{12}} + a_{13}\boxed{M_{13}}$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$4 \times 4 \rightarrow \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} - a_{14}M_{14}$$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

Computing the Inverse Matrix

'Cofactor (여인수)' 라고 부름

원래 행렬에서

i 행과 j 열을 제외한 행렬

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots \\ C_{12} & C_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \text{ where } \; C_{ij} = (-1)^{i+j} \times M_{ij}$$

$AX = I$

'Adjoint Matrix' 라고 부름

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{nn} \end{pmatrix} \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} \det A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det A & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \det A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = I$$

역행렬은 교환법칙도 성립 ^^ $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

Toy Example

Inverse Matrix를 이용해 Linear System 풀기

간단 예제

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\boxed{ad - bc}} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

영영사전 9

결정인자

determinant

1. 명사 formal a thing that controls or influences what happens

2. 명사 formal often + of

역행렬이 존재한다는 의미: $ad - bc \neq 0$

$$AX = B \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

양변의 우측에 A^{-1}을 곱한다.

$$A^{-1}AX = A^{-1}B \qquad \frac{1}{1 \cdot -3 - 2 \cdot 1}\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{1 \cdot -3 - 2 \cdot 1}\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

수식을 정리하면 답이 나온다.

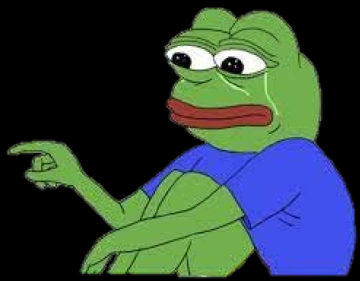
$$IX = A^{-1}B \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}B \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -18 - 2 \\ -6 + 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -20 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x = 4, y = 1$$

이걸 다 알아야 하나요?

- **헐....**
  - 교수님!!! 너무 복잡해요 ㅠ
  - 이걸 다 알고 있어야 하나요?
    - 넵!!
  - 하지만 손으로 직접 계산할 일은 없습니다. ㅎ
    - 손으로 계산하기 쉽도록 해주는 크래머 공식이라는 것도 있습니다.
    - 우리는 파이썬 numpy 패키지를 사용하면 됩니다.



하지만 작동 원리는

반드시 이해해야 합니다!!!

```
import numpy as np

matrix = np.array([[2, 5], [1, 3]]) # 2x2 행렬 생성
matrix_det = np.linalg.det(matrix)  # determinant 계산
print(matrix_det)                   # 결과 출력
>>> 1.0

matrix_inverse = np.linalg.inv(matrix) # inverse matrix(역행렬) 계산
print(matrix_inverse)
>>> [[ 3. -5.]
     [-1.  2.]]
```

수고하셨습니다 ..^^..