Linear Algebra

Product between Matrices - Composite Function
(행렬과 행렬을 곱한다는 의미 - 선형 변환의 합성)

소프트웨어 꼰대 강의

노기섭 교수

(kafa46@cju.ac.kr)

Recap: 행렬과 벡터의 만남! - 그 역사적 순간!!!

이미지 출처:
https://namu.wiki/w/%EC%9A%B0%EB%A6%AC%20%EC%83%9D%EC%95%A0%20%EC%B5%9C%EA%B3%A0%EC%9D%98%20%EC%88%9C%EA%B0%84

2개의 사상을 다시 정의한다.

$f: \mathcal{L}(V,W) \rightarrow \mathcal{M}_{m\times n}(F)$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{L}(V,W) \arrow[r, bend left, "f"] & \mathcal{M}_{m\times n}(F) \arrow[l, bend left, "g"] \end{tikzcd}$$

$g: \mathcal{M}_{m\times n}(F) \rightarrow \mathcal{L}(V,W)$

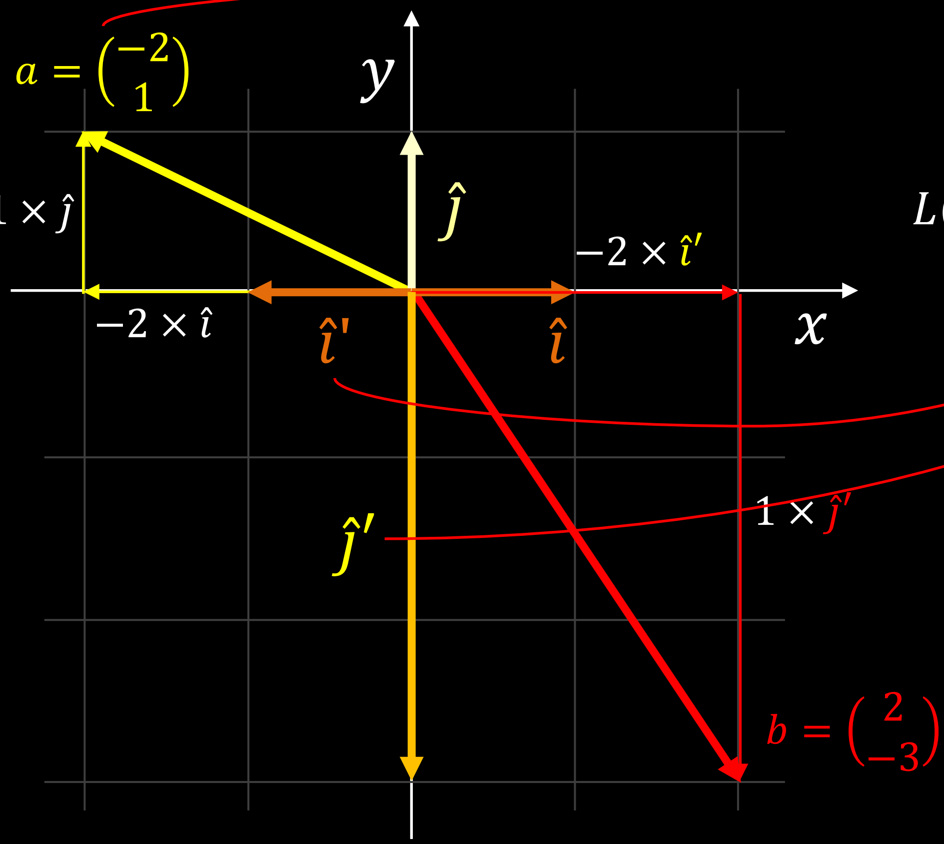
f 와 g 는 동형사상이다!

f 와 g 는 서로 역사상 관계이다!

결론: 선형 사상(변환)과
Matrix는 같다!

더 이상 복잡한 선형사상 ×
그저 행렬만 보면 된다.
벡터의 선형변환은 행렬만 보면 된다.

Recap: Generalization of Linear Transformation



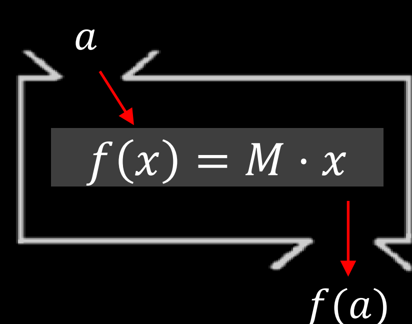
$$L(a) = \left(\boxed{\begin{matrix}-1\\0\end{matrix}}\ \boxed{\begin{matrix}0\\-3\end{matrix}}\right)\left(\boxed{\begin{matrix}-2\\1\end{matrix}}\right) = \begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$$

$$L(a) = \boxed{\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -3\end{pmatrix}}\boxed{\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}}$$

함수의 몸체
하는일(선형변환)

함수의 입력

$$L(x) \Leftrightarrow f(x) = M \cdot x$$



행렬의 열 벡터: 새로운 기저의 좌표

행렬의 열 개수: 선형변환 차원 수

행렬과 벡터의 곱셈

- **행렬 곱셈은 어떻게 하는지 이미 배웠다!**
  - 그런데, 행렬과 행렬의 곱이 진짜로 의미(함수의 의미)하는 것이 무엇일까?

행의 개수:
선형변환 출력의 차원
(the number of basis vectors)

함수의 입력

선형변환 수행(함수 몸체)

$$L(a) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2+12 \\ 0+6+15 \\ 2+4+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 21 \\ 12 \end{pmatrix}$$

1st 기저 좌표

2nd 기저 좌표

3rd 기저 좌표

선형변환 결과(벡터)

합성함수 (고딩 수학 복습)

일반화 하면

$$\left.\begin{aligned} y &= 2x + 1 \\ z &= 3y + 2 \end{aligned}\right\}$$

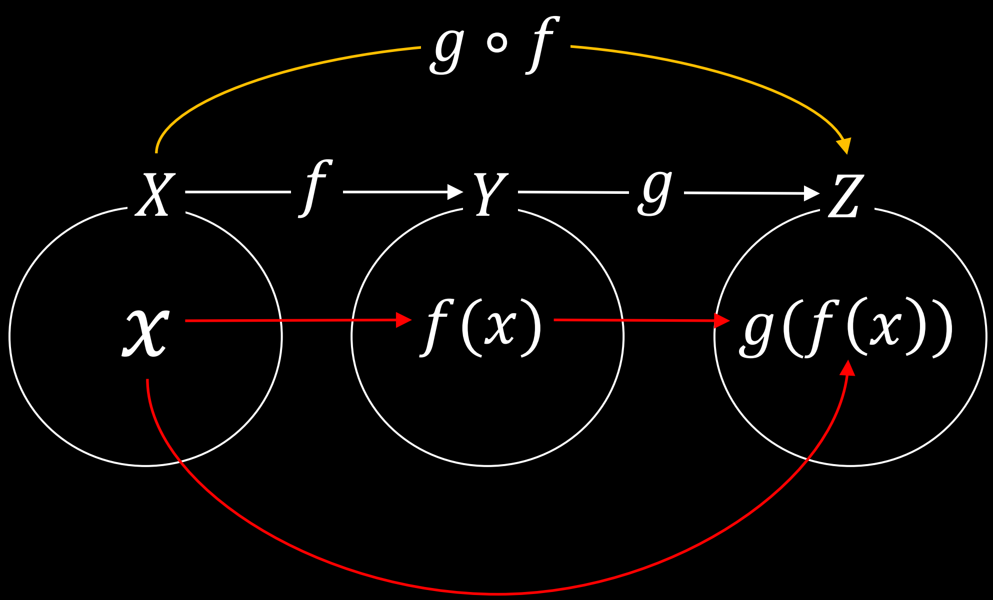
고딩때 요런거
어떻게 계산 하셨나요?

$$z = 3(2x + 1) + 2$$

$$= 6x + 3 + 2 = 6x + 5$$

$$y = f(x)$$

$$z = g(y) = g(f(x))$$



선형변환(행렬):
입력 벡터를 다른 공간으로
이동시켜주는 함수라고
생각하면 쉽다!

행렬과 행렬을 곱는 의미:
입력 벡터를 다른 공간으로
이동하고, 다시한번 이동하는 것!
즉, '선형변환'의 합성함수이다.

선형 변환의 합성

2차 선형변환 (Shearing)

1차 선형변환(Permutation)

g

f

입력 값

$$L(u) = \boxed{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}} \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} \boxed{\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}}$$

$$L(u) = \boxed{g \circ f} = g(f(u))$$

$$\begin{pmatrix} 0+1 & 2+0 \\ 0+2 & 1+0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$L(u) = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

실습 해보기^^... ➔ http://acin.cju.ac.kr/Deeplearning/ViewMain/

선형변환 합성의 순서(Ordering)?

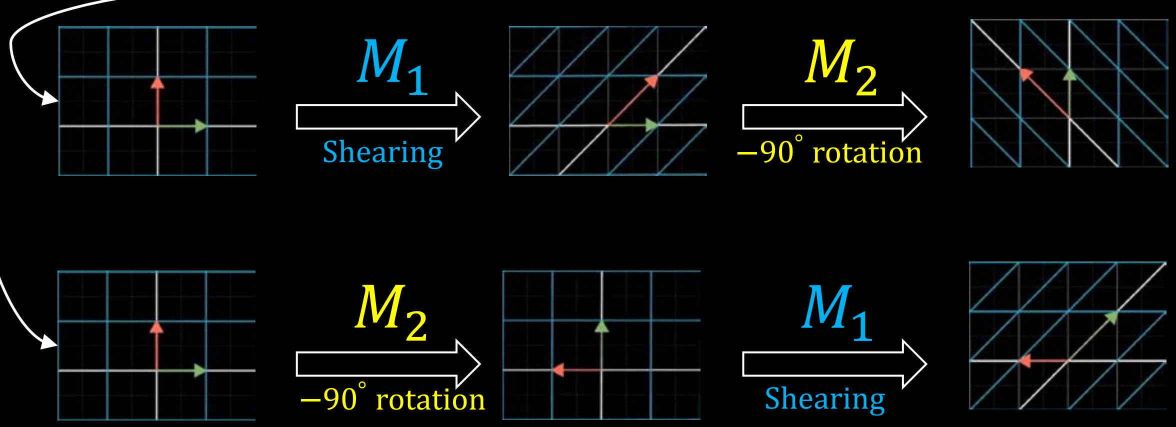
2차 선형변환 (Shearing) 1차 선형변환(-90° 회전)

$$L(u) = \underbrace{\overbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}^{g}}_{M_1} \underbrace{\overbrace{\begin{pmatrix} \cos\pi/2 & -\sin\pi/2 \\ \sin\pi/2 & \cos\pi/2 \end{pmatrix}}^{f}}_{M_2} \overbrace{\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}}^{\text{입력 값}}$$

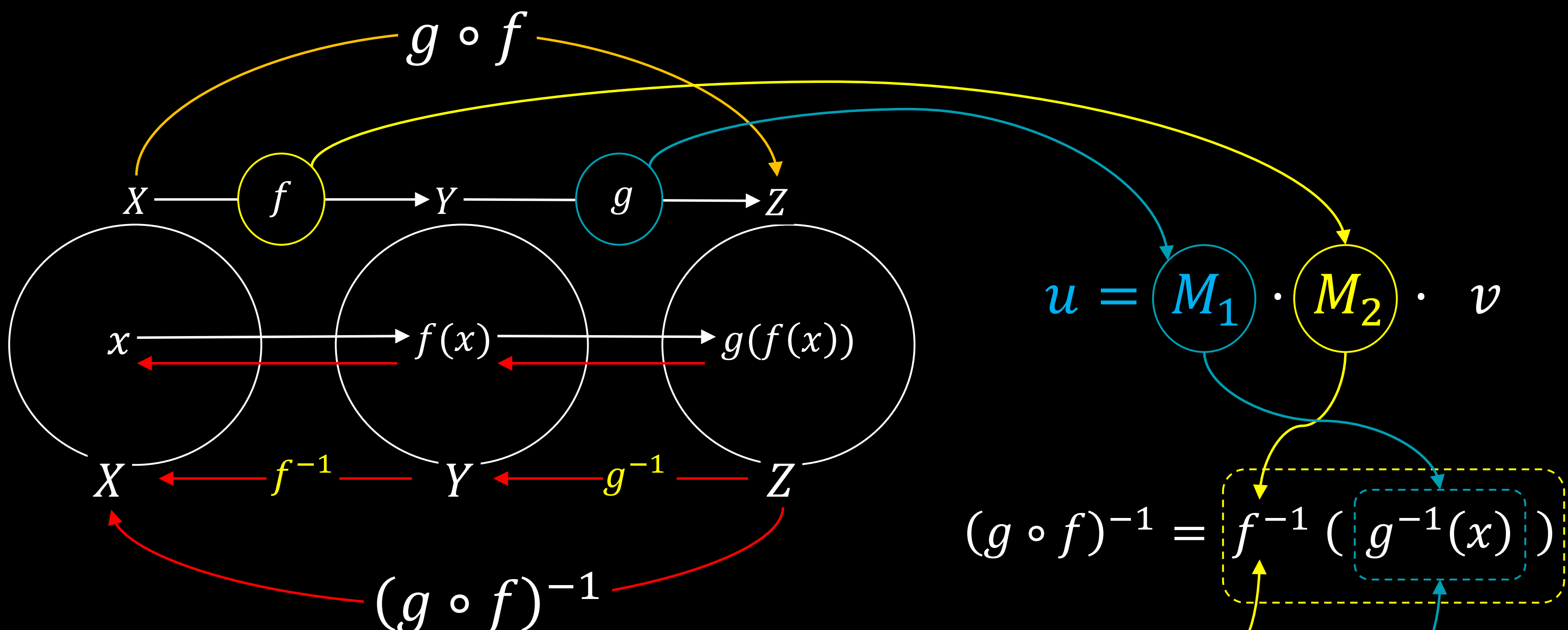
Matrix Composition (합성)은

순서가 바뀌면 결과도 달라진다!!!

$$M_1 \cdot M_2 \cdot u \;\; \overset{???}{=} \;\; M_2 \cdot M_1 \cdot u$$



합성 행렬의 역함수(역행렬)는 어떻게 구할까?



$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1}(g^{-1}(x))$$

$$v = M_2^{-1} \cdot M_1^{-1} \cdot u$$

따라서 ^^, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

수고하셨습니다 ..^ ^..