Linear Algebra

Dimensionality (Reduction & Expansion)
(차원 축소 및 확장)

소프트웨어 꼰대 강의

노기섭 교수

(kafa46@cju.ac.kr)

차원 변환

벡터의 차원을 바꿀 수 있나요?

교수님 저는 3차원에 살고 있지만 4차원으로 가고 싶어요 ~~

물론 가능합니다. ^^.   100차원 세상으로 갈 수도 있어요 ㅎ

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{행렬을 사용해도 됨}]{\text{선형변환 함수 } L} y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}_{m \times n}$$

$$(4 \times 3) \cdot (3 \times 1) = (4 \times 1)$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

교수님~

그런데요....

차원은 어떻게

해석하나요?

너무나 헷갈리는 부분

요건 제가 이전 강의에서
설명했던 내용입니다 ^^

우리는 지금까지 입력 벡터 x와
동일한 차원만 생각했습니다.

2차원 벡터 입력 → 2 × 2 행렬

3차원 벡터 입력 → 3 × 3 행렬

⋮ ⋮

행의 개수:

선형변환 출력의 차원(dimension)

→ 기저 벡터의 개수

그런데요...
선형 변환이
Square Matrix가
아니라면?

행의 개수가
새로운 차원???

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

교수님...
요건 4차원
아닌가요?

1^{st} 기저 좌표

2^{nd} 기저 좌표

3^{rd} 기저 좌표

그 부분이 저도 정말로

헷갈렸던 부분입니다. ㅠㅠ

중요한 개념이므로 차근차근 살펴볼까요?

새로운 기저 벡터의 차원은 Matrix에서 Row 개수가 되어야 되잖아요?!!

행렬 연산에 따른 해석

새로운 기저의 값

변환할 기저의 수

선형변환 된 벡터의 차원

$$A_{m \times n} \cdot B_{n \times 1} = C_{m \times 1}$$

새로운 기저의 차원??

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$\dim 2 \rightarrow 2$

새로운 기저의 차원??

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$\dim 3 \rightarrow 3$

변환(이동)된 기저 위치

새로운 기저의 차원??

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$\dim 3 \rightarrow 2$??

기저가 3개인데 2차원?

새로운 기저의 차원??

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

$\dim 3 \rightarrow 4$??

기저가 3개인데 4차원?

선형독립, 차원에 대해 다시한번 복습^^

Recap: Linearly Independent (선형 독립)

참고(이전) 강의: [선형대수]_09. 벡터의 선형결합(Linear Combination) 및 생성
Link: https://youtu.be/HTXay7LuSlY

Vector Subspace

$$S = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$$

모든 벡터를 선형결합 해본다. $k_1v_1 + k_2v_2 + \cdots + k_nv_n = \vec{0}$

만약, $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$ 이면
S는 Linearly Independent (선형 독립)

별표 100개

$$S = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$k_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + k_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix} = 0$$

$$k_1 = k_2 = k_3 = 0$$

만약, $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$ 이외의 다른 해가 있다면
S는 Linearly dependent (선형 종속)

$$S = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$k_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + k_3\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}k_1 + k_3\\k_2 + k_3\end{pmatrix} = 0$$

$$k_1 = k_2 = k_3 = 0$$

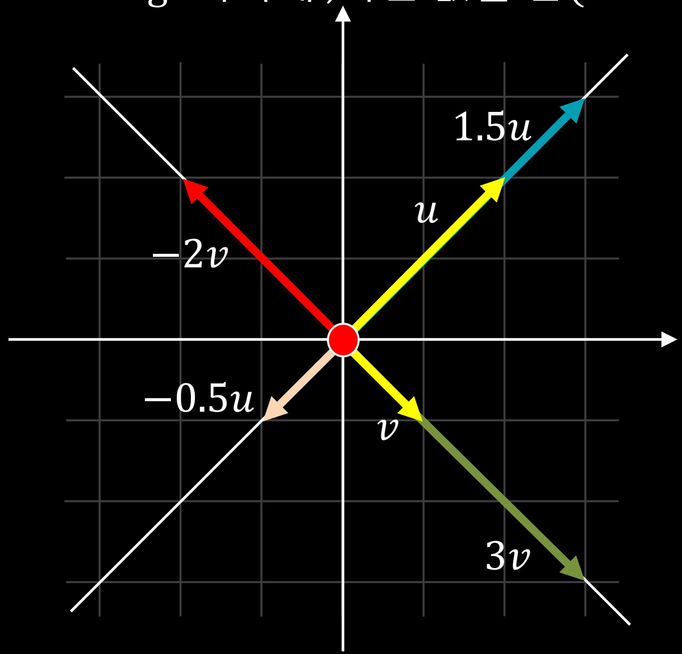
$$k_1 = k_2 = 1, k_3 = -1$$

$$k_1 = k_2 = 2, k_3 = -2$$

$$\vdots$$

Linearly Independent (선형 독립) - 그림으로 이해하기

Scaling: 벡터에 ,어떤 값을 곱(multiplication)한다는 의미 → Scaling



선형결합(linear combination)

1. 벡터를 더한다.
2. 벡터를 더할 때 scaling 할 수 있다.

$$\boxed{k_1 u + k_2 v}$$

일반화

$$\begin{cases} S = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\} \\ k_1 v_1 + k_2 v_2 + \cdots + k_n v_n = \vec{0} \end{cases}$$

선형독립(linearly independent)

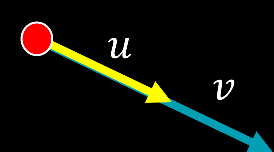
→ 아무리 선형결합을 해봐도 영벡터를 만들 방법이 하나밖에 없는 경우 $\forall i \;\; k_i = 0$

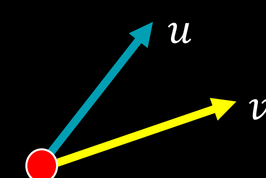
(예) 2차원 평면
→ 평면을 완벽하게 생성할 수 있음

선형종속(linearly dependent)

→ 선형결합을 적절히 해서 영벡터를 만들 방법이 $\forall i \;\; k_i = 0$ 이외에도 존재하는 경우

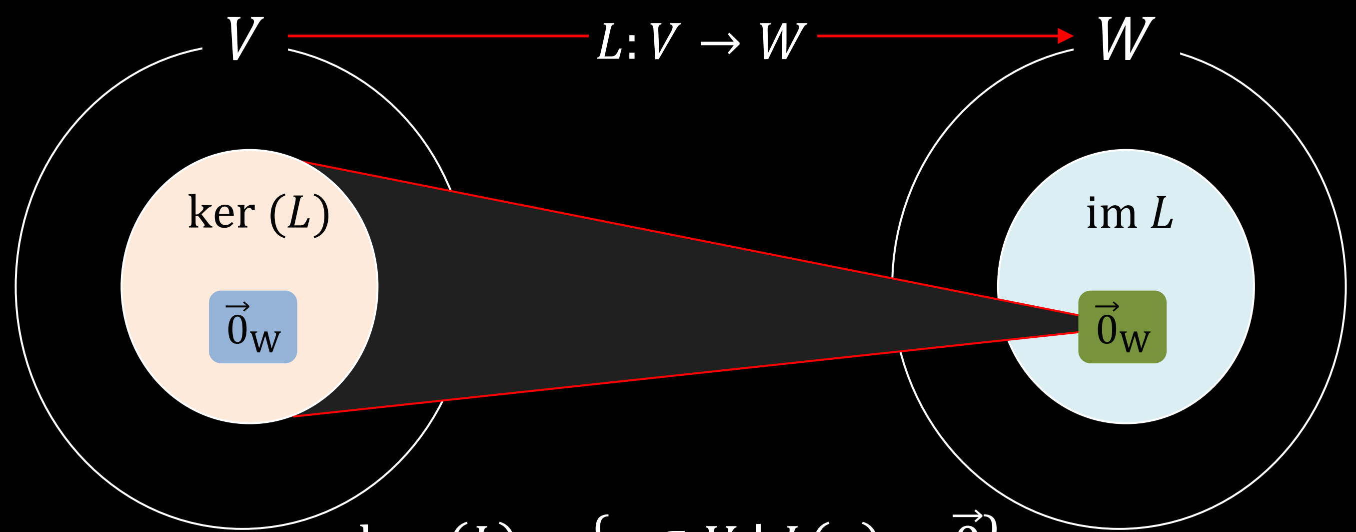
(예) 2차원 평면
→ 직선 공간만 생성할 수 있음





Kernel (Null Space)

'커널' 또는 '영공간' 이라고 부름: 선형변환을 했을 때 영벡터를 만드는 변환



$$\ker(L) = \{v \in V \mid L(v) = \vec{0}\}$$

Linearly dependent (선형종속)일 경우 영벡터($\vec{0}$)
이외에도 커널이 존재한다는 의미

(예시) 3차원 공간 → 3개 기저벡터
1개 벡터가 선형종속이면
평면만 생성할 수 있을 것

2차원 공간을 생성하려면 2개 기저벡터가 선형독립이어야 한다.
3차원 공간을 생성하려면 3개 기저벡터가 선형독립이어야 한다.
⋮ ⋮ ⋮ ⋮
n차원 공간을 생성하려면 n 개 기저벡터가 선형 독립이어야 한다.

커널의 원소는 오직 영벡터만
있어야 한다.
다른 원소가 있다면 차원이 줄어든다.

Dimension Reduction (차원 축소)

2차원에서 3개 이상의 기저벡터가 존재할 수 있는가?

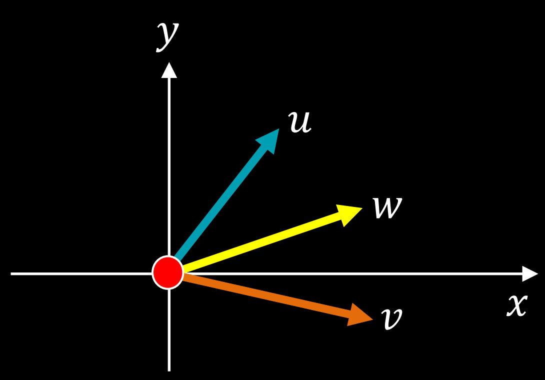
2차원에서 3차원을 표현할 수 있나?

새로운 기저의 차원??

$$\left(\underbrace{\boxed{\begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \end{matrix}} \; \boxed{\begin{matrix} a_{12} \\ a_{22} \end{matrix}} \; \boxed{\begin{matrix} a_{13} \\ a_{23} \end{matrix}}}_{\text{새로운 기저의 위치}}\right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$\dim 3 \rightarrow 2$ 차원 축소??

기저가 3개인데 2차원?



3차원이 되려면 → 기저의 개수가 3개

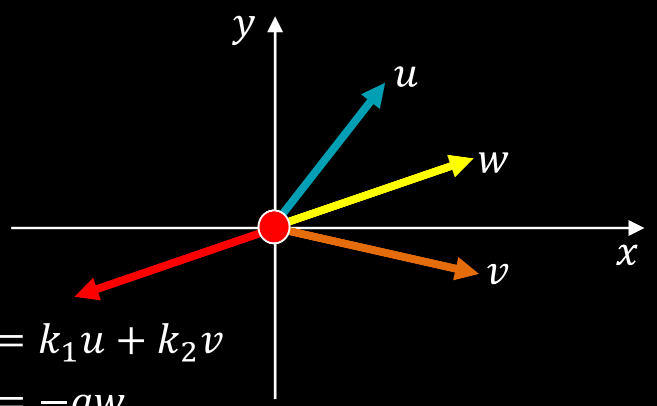
u, v, w가 선형 독립이면 가능

$$k_1 u + k_2 v + k_3 w = \vec{0}$$

$$k_1 = k_2 = k_3 = 0$$

결론부터 말하면... No! It is impossible!!

증명: n차원에서 $n+1$개 이상의 기저벡터를 가질 수 있는가?



$$w' = k_1 u + k_2 v$$
$$= -aw$$

임의의 두 벡터 (u, v)를 잡는다.

u, v가 선형독립이라면,
평면상의 모든 공간을 생성할 수 있다.

u, v가 선형종속이라면,
직선상의 모든 공간을 생성할 수 있다.

w와 방향이 반대인 벡터 w'를 생성한다.

$$k_1 u + k_2 v + aw = 0$$

$$k_1 u + k_2 v + k_3 w = 0$$

$k_3 = -a$로 잡으면 ⇨ $k_3 \neq 0$ 이므로 선형 종속

무수히 많은 k_3가 존재

[수학적 정리]

벡터공간 V가 $\mathcal{B} = \{v_i \mid i = 1, 2, \cdots, n\}$개의 기저벡터로 생성되었다면,

공간 V에서 n개 이상의 벡터를 포함하는 모든 집합은 선형종속이다.

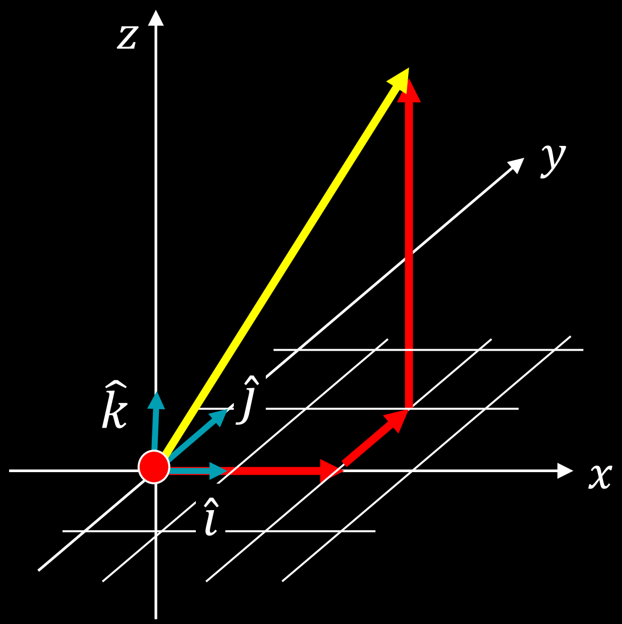
증명은 생략 ^^

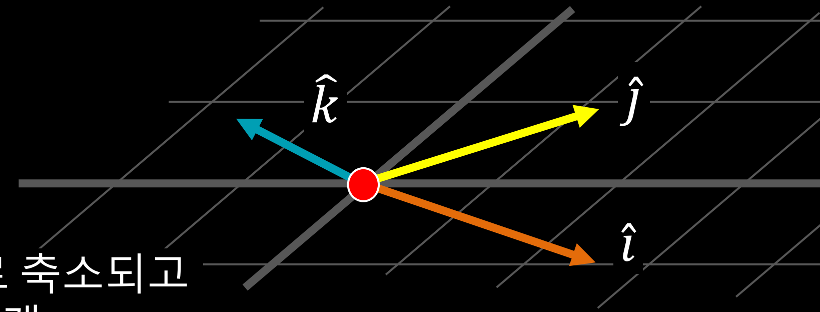
참고1: https://math.byu.edu/~bakker/Math313/M313Lec19.pdf

참고2: https://math.stackexchange.com/questions/3912402/is-it-possible-to-have-more-vectors-than-the-dimension-of-the-vector-space-to-be

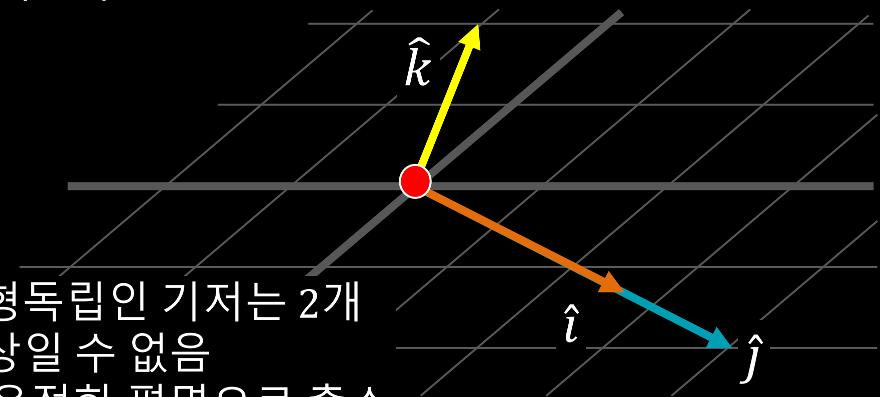
차원 축소: 기하학적 이해

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

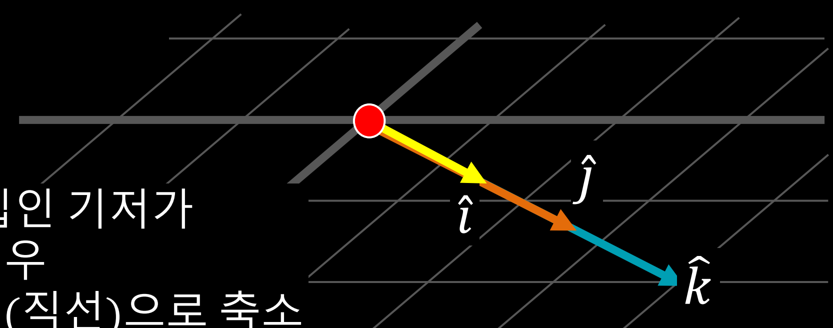




평면으로 축소되고
기저가 3개



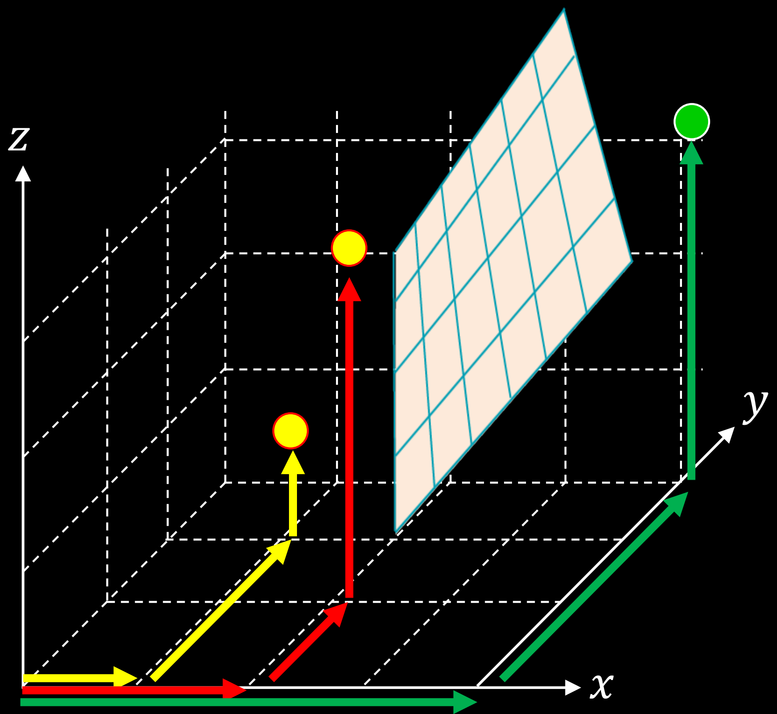
선형독립인 기저는 2개
이상일 수 없음
→ 온전한 평면으로 축소

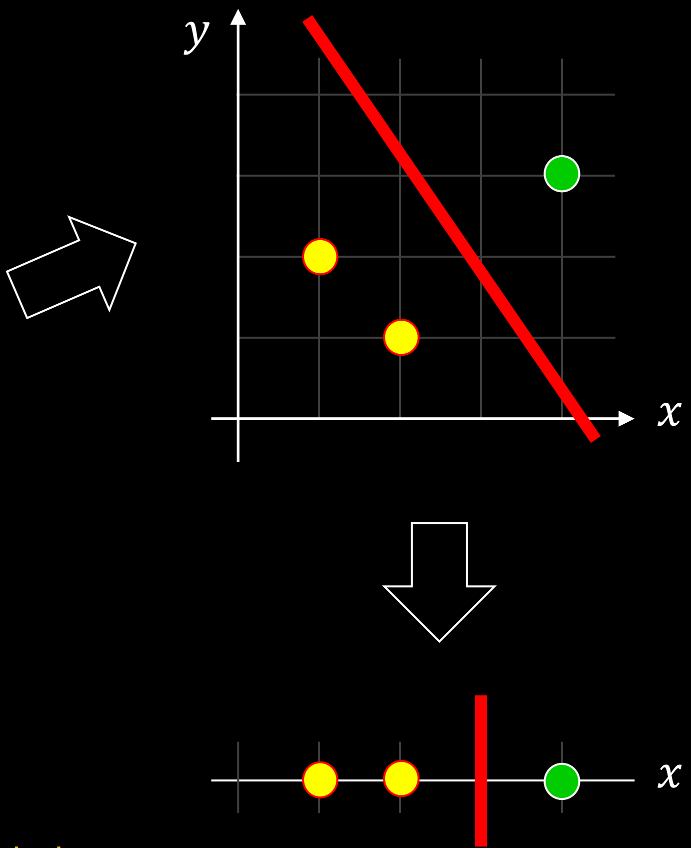


선형독립인 기저가
1개일 경우
→ 1차원(직선)으로 축소

왜 차원 축소가 필요할까?

Curse of Dimensionality (차원의 저주)





노란 원 ( )과 녹색 원( )을 구분하는 방법

큰 차원에서는 고려해야 할 경우의 수가 많다.

낮은 차원에서는 고려해야 할 경우의 수가 적다

Dimension Expansion (차원 확장)

차원 확장: 3차원에서 존재하는 2차원

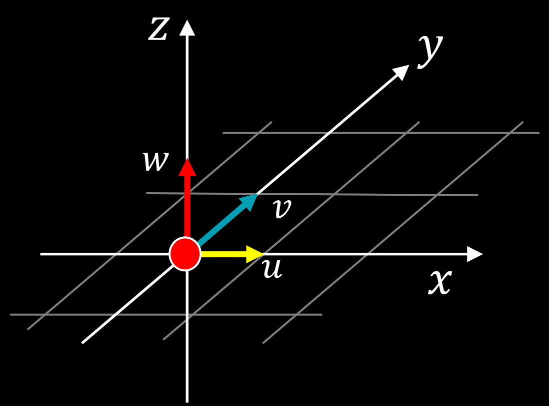
2차원을 3차원으로 확장하여 표현할 수 있나?

새로운 기저의 차원??

$$\left(\underbrace{\boxed{\begin{matrix}a_{11}\\a_{21}\\a_{31}\end{matrix}}\ \boxed{\begin{matrix}a_{12}\\a_{22}\\a_{32}\end{matrix}}}_{\text{새로운 기저의 위치}}\right)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$$

$\dim 2 \rightarrow 3$ 차원 팽창??

기저가 2개인데 3차원?



3차원이 되려면 → 기저의 개수가 3개

u, v, w가 선형 독립이면 가능

$$k_1u + k_2v + k_3w = \vec{0}$$

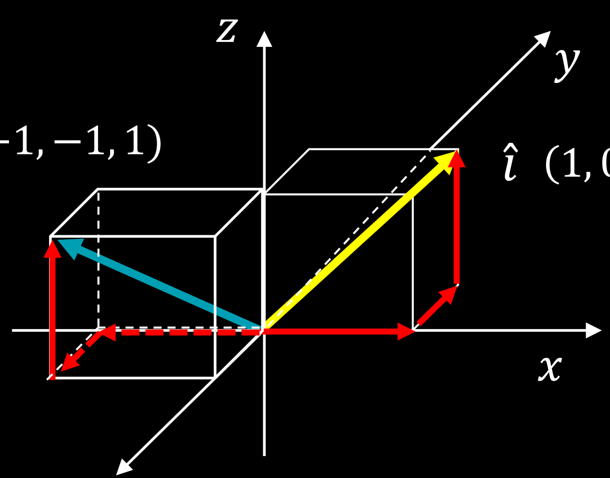
$$k_1 = k_2 = k_3 = 0$$

결론부터 말하면...

원하는 차원으로 확장은 얼마든지 가능!!!

하지만 기저의 수가 확장된 차원보다 작으므로
확장된 공간에서 낮은 차원으로 공간을 생성

k차원을 n차원으로 확장한다는 의미 (where, $k < n$)



3차원에서 2개의
벡터가 선형독립이라면
3차원에서 2차원 공간을 생성

$$k_1 u + k_2 v = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} k_1 - k_2 \\ k_1 - k_2 \\ k_1 + k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

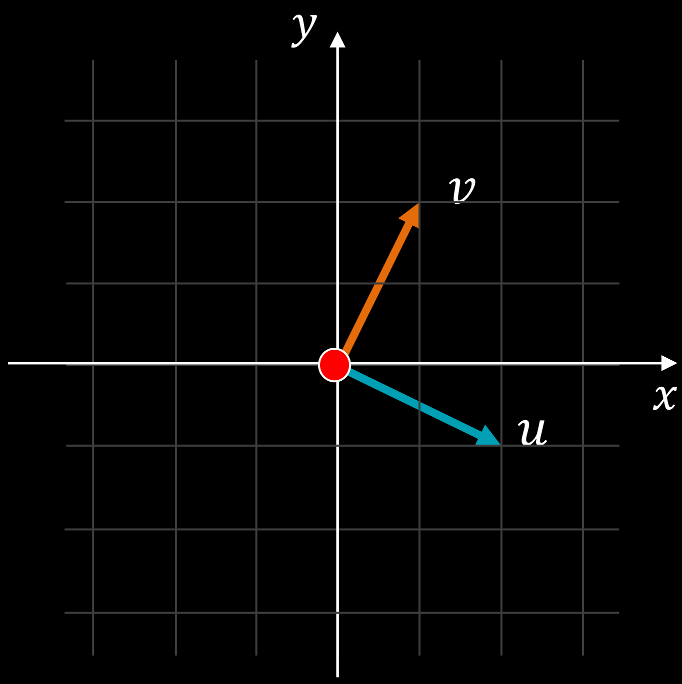
$$\left.\begin{aligned} k_1 &= k_2 \\ k_1 &= -k_2 \end{aligned}\right\} k_1 = k_2 = 0 \rightarrow \text{선형독립}$$

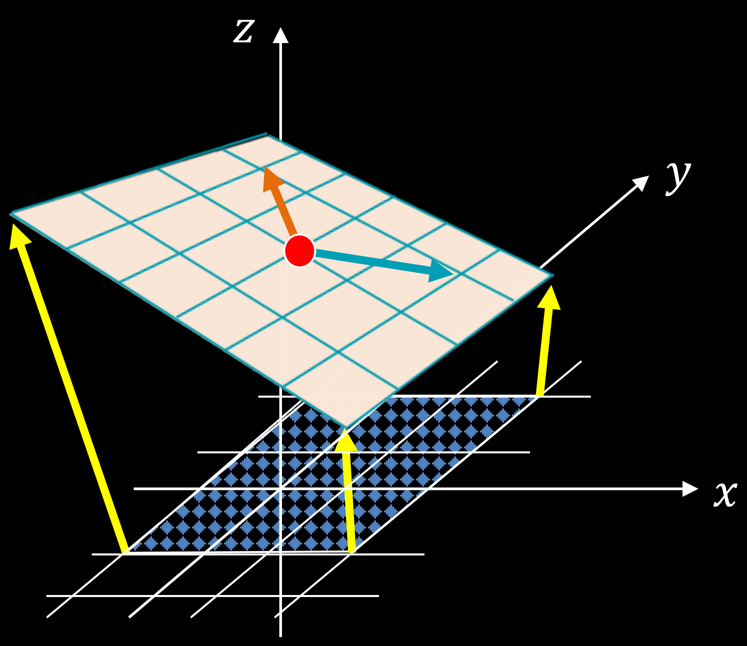
하지만 기저가 2개이므로
3차원을 생성할 수는 없음

n차원에서 k개의
벡터가 선형독립이라면
n 차원 안에서 k 차원 공간을 생성

참고자료:
https://math.stackexchange.com/questions/3990893/can-two-3-dimensional-vectors-spans-a-mathbbr2

차원 확장: 기하학적 이해



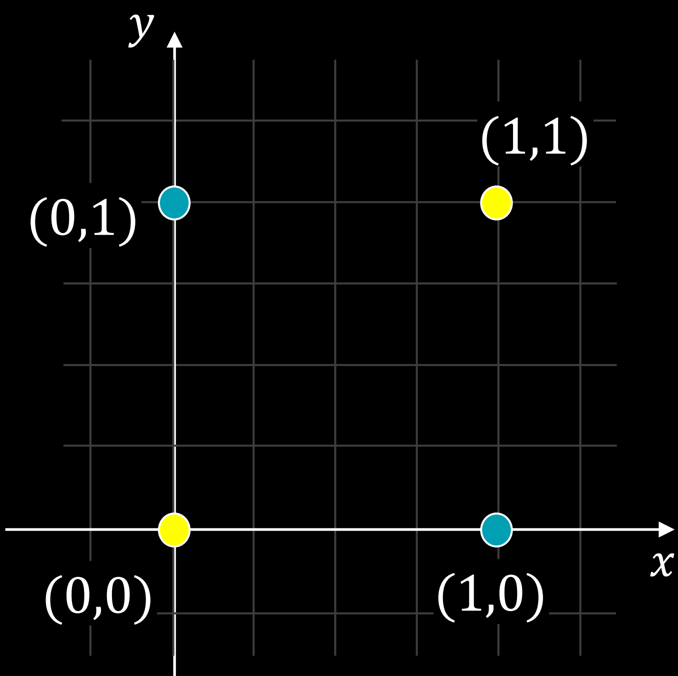


차원 확장

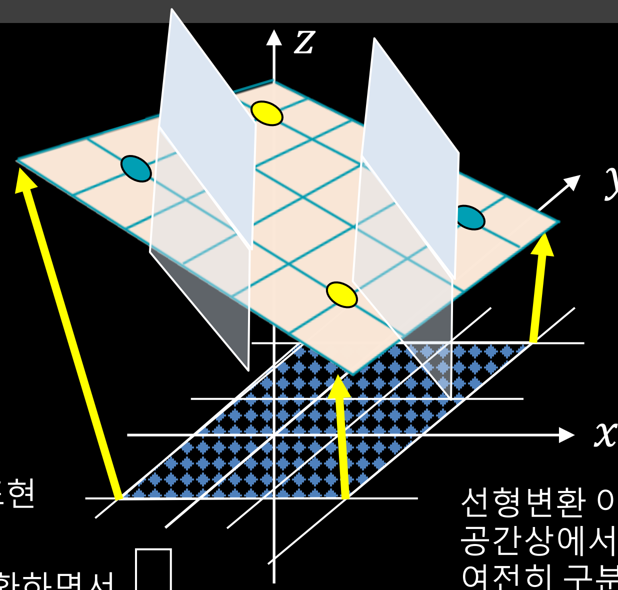
2차원 공간 → 3차원 공간

확장된 차원에서도
여전히 이전 차원으로 표현

차원확장: 왜 이런게 필요할까?



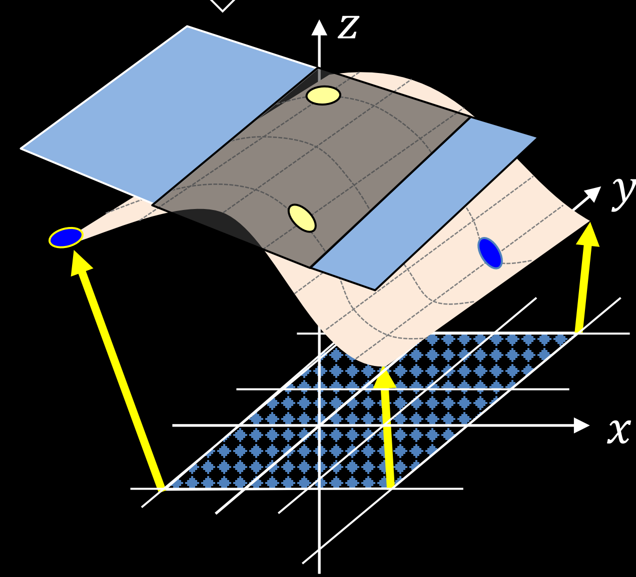
2차원 3차원
(차원확장)



3차원 공간이지만,
여전히 2차원으로 표현

선형변환 이후 여전히 평면,
공간상에서 1개의 평면으로
여전히 구분할 수 없다!

만약 선형변환하면서
비선형을 적용할 수
있다면?



1개의 평면으로
구분할 수 있다!

XOR 문제

입력이 같으면 → 0(노랑) 출력
입력이 다르면 → 1(파랑) 출력

1개의 직선으로 출력을 구분할 수 있는가?

딥러닝 1차 10년간 암흑기를 초래한 문제
(Minsky, Parpert에 의해 제기된 문제)

수고하셨습니다 ..^ ^..