Linear Algebra

Linear Combination & Span
(선형 결합 및 생성)

소프트웨어 꼰대 강의

노기섭 교수

(kafa46@cju.ac.kr)

Linear Combinations (선형 결합)

■ 정의

Let V be a vector space over the field K.

As usual, we call elements of V vectors and call elements of K scalars.

If $v_1, v_2, \cdots, v_n$ are vectors

and $a_1, a_2, \cdots, a_n$ are scalars,

then the linear combination of those vectors with those scalars as coefficients is

(자료출처: https://en.wikipedia.org/wiki/Linear_combination)

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n$$

[참고사항]

Field (체)

- 덧셈과 곱셈 가능
- 순서쌍에 대하여 결과가 유일하게 존재
- 덧셈/곱셈에 대하여 교환/결합법칙 성립
- 역원, 항등원 존재
- 덧셈에 대한 곱셈의 분배법칙 성립

대표적인 Field

실수 집합 $\mathbb{R}$

복소수 집합 $\mathbb{C}$

Linearly Independent (선형 독립)

Vector Subspace

$$S = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$$

모든 벡터를 선형결합 해본다. $k_1 v_1 + k_2 v_2 + \cdots + k_n v_n = \vec{0}$

만약, $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$ 이면

S는 Linearly Independent (선형 독립)

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$k_1 = k_2 = k_3 = 0$$

만약, $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$ 이외의 다른 해가 있다면

S는 Linearly dependent (선형 종속)

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 + k_3 \\ k_2 + k_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$k_1 = k_2 = k_3 = 0$$

$$k_1 = k_2 = 1, k_3 = -1$$

Basis & Dimension

Basis (기저)

벡터공간 V의 부분집합 B가 Linearly Independent 이고,

B가 V를 생성(span)할 때, 집합 B를 V 의 Basis 라고 한다.

$$B_1 = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$B_2 = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$B_3 = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$B_4 = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\} \cdots$$

$\dim(V) = 2$

$\dim(V) = 3$

$\dim(V) = 4$

Dimension (차원)

Basis (기저) 원소 개수가 차원이다.

표현: $\dim(V)$

Special Types of Basis

Normal basis (정규기저)

기저를 이루는 모든 벡터가

$\forall u \in B,\ \|u\| = 1$

Othogonal basis (직교기저)

기저를 이루는 모든 벡터들이 서로 수직

$\forall u_1, u_2 \in B,\ \langle u_1, u_2 \rangle = 0$

Othogonormal basis (정규직교기저)

Normal basis 이면서 Othogonal basis

실수 n 차원의 정규직교 기저 → '표준 기저'

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(Linear) Span

■ 정의

In mathematics, the linear span of a set S of vectors (from a vector space),

denoted span(S) is defined as the set of all linear combinations of the vectors in S.

(자료출처: https://en.wikipedia.org/wiki/Linear_combination)

$$S = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$$

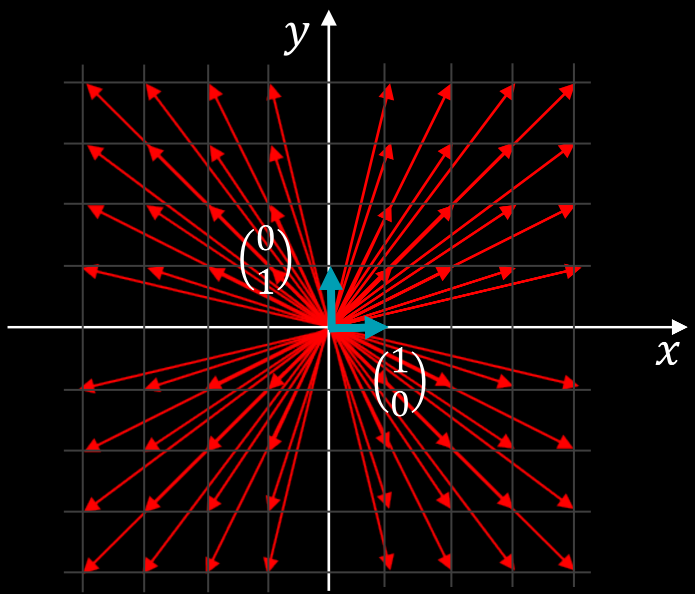
요걸로 만들 수 있는 모든 벡터 집합을 '생성' $span(S)$ 라고 부름

$$span(S) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} k_i v_i \mid k_i \in F, v_i \in S \right\}$$

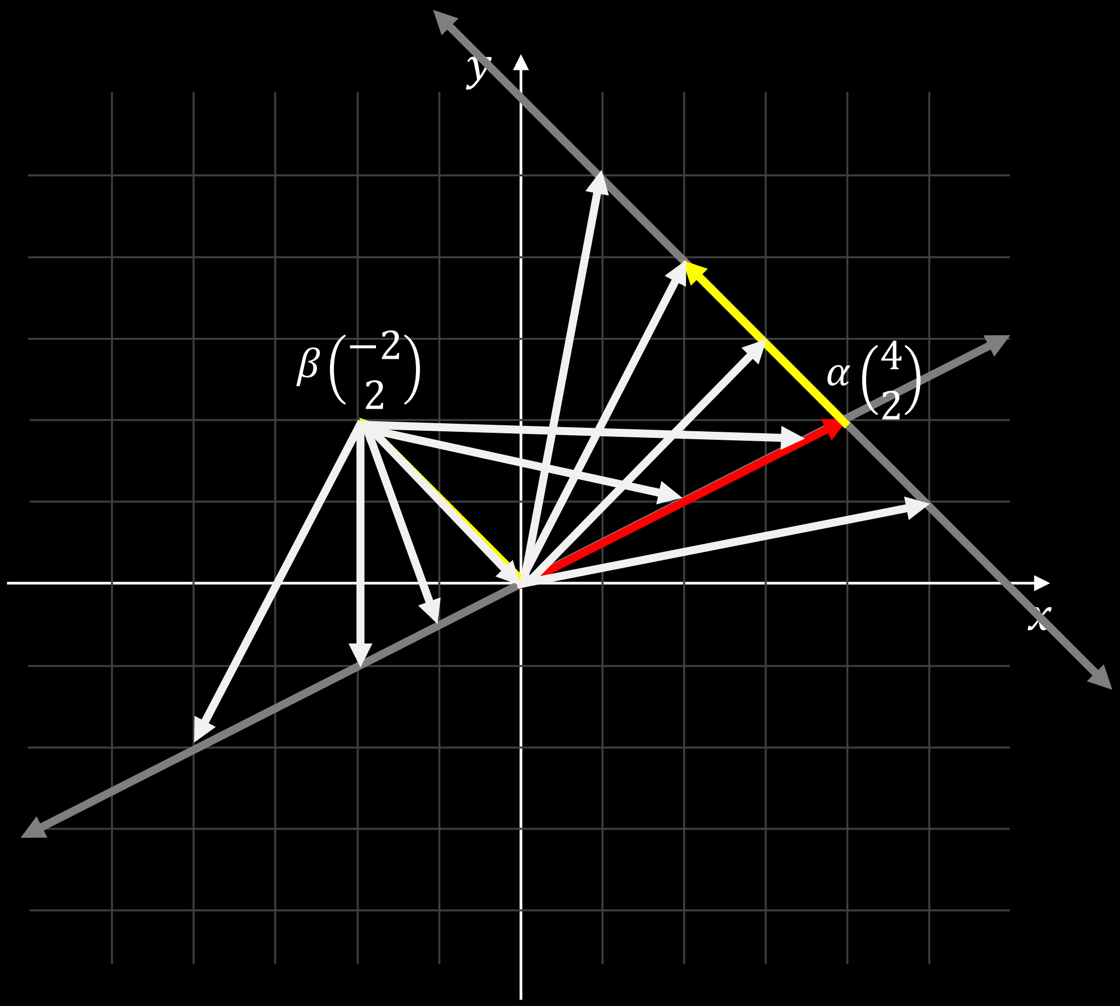
$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \qquad F = \mathbb{R}$$

$$k_1 \in \mathbb{R} \qquad k_2 \in \mathbb{R}$$

$$span(S) = \left\{ k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} \right\}$$



Span의 또 다른 예제



벡터의 덧셈과

스칼라배를 이용해

평면상의 모든 점을

표현할 수 있다.

3차원으로 확장하면,

벡터의 덧셈과

스칼라배를 이용해

공간을 생성할 수 있다.

⋮

수고하셨습니다 ..^^..