Linear Algebra

Determinant with Figures
(그림으로 이해하는 행렬식)

소프트웨어 꼰대 강의

노기섭 교수

(kafa46@cju.ac.kr)

Recap: Determinant (행렬식)

이미 이론 강의가 있었습니다.

- 강의제목: 04. Determinant, Inverse Matrix 깊게 이해하기
- 유튜브 링크: https://youtu.be/rfeEx1saFVE

이번 강의는 행렬식을 직관적으로 이해하기 위한 내용입니다 ^^.

Determinant: Square Matrix를 하나의 숫자로 Mapping하는 함수

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{determinant}} \text{실수값}$$

$$f(Square\ Matrix) = x, where\ \ x \in \mathbb{R}$$

Linear Algebra 에서는 요렇게 표현합니다 ^^

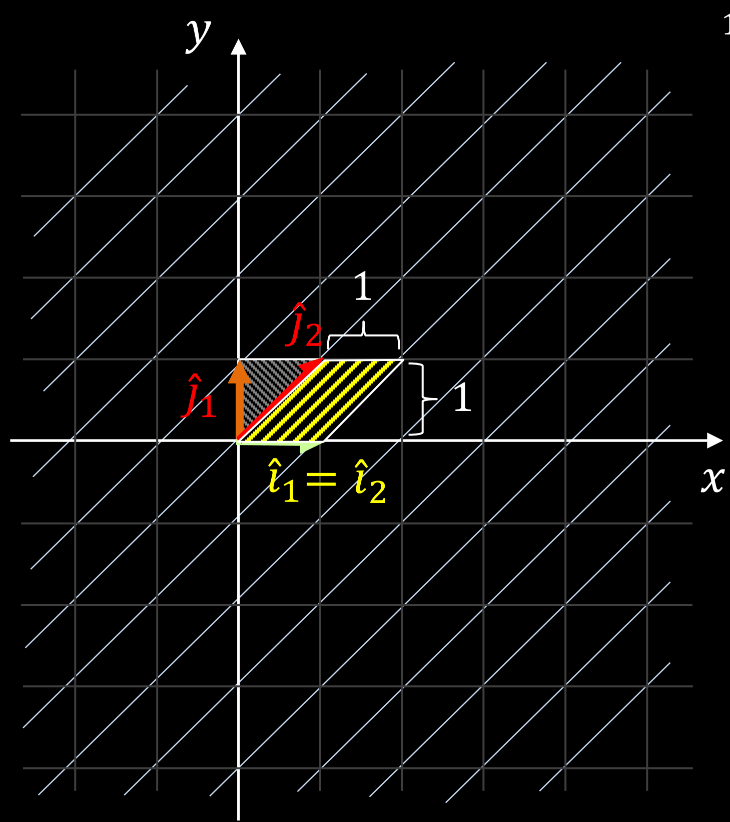
$\det A$ 또는 $|A|$

$$2 \times 2 \text{ 행렬} \rightarrow \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Same Area after Linear Transformation

Determinant: 선형변환 했을 때 어느 비율로 증감하는지 확인



1st 기저 좌표

2nd 기저 좌표

$$\det\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} a_{12} \\ a_{22} \end{matrix}} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\det\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}} \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1$$

$$\hat{\imath}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \hat{j}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

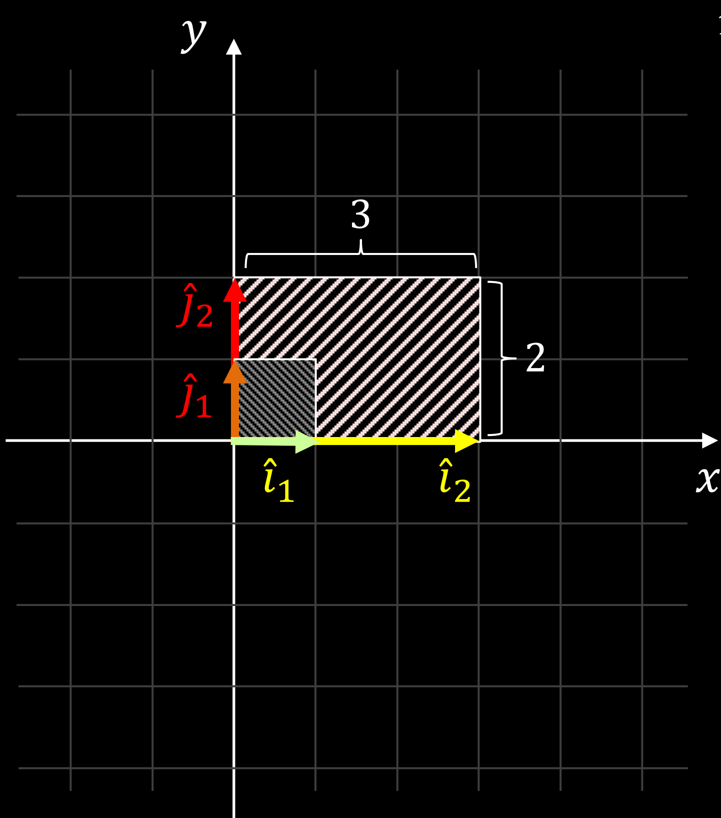
선형변환으로
변동되는
면적 없음

$$\det\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}} \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 - 1 \cdot 0 = 1$$

$$\hat{\imath}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \hat{j}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Increase Area after Linear Transformation (Case #1)

Determinant: 선형변환 했을 때 어느 비율로 증감하는지 확인



1st 기저 좌표   2nd 기저 좌표

$$\det\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} a_{12} \\ a_{22} \end{matrix}} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\det\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}} \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1$$

$$\hat{i}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \hat{j}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

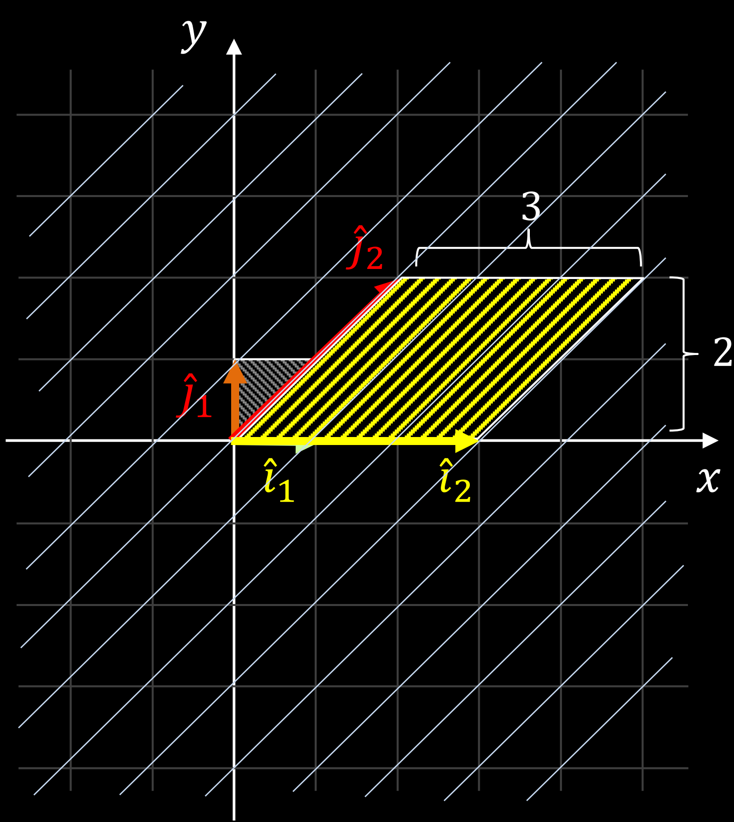
기저 벡터가
선형변환으로
6배 증가

$$\det\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 3 \\ 0 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 2 \end{matrix}} \end{pmatrix} = 3 \cdot 2 - 0 \cdot 0 = 6$$

$$\hat{i}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \hat{j}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Increase Area after Linear Transformation (Case #2)

Determinant: 선형변환 했을 때 어느 비율로 증감하는지 확인



$$\det\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}1\\0\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}0\\1\end{matrix}} \end{pmatrix} = 1\cdot 1 - 0\cdot 0 = 1$$

$\hat{\imath}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $\hat{\jmath}_1 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

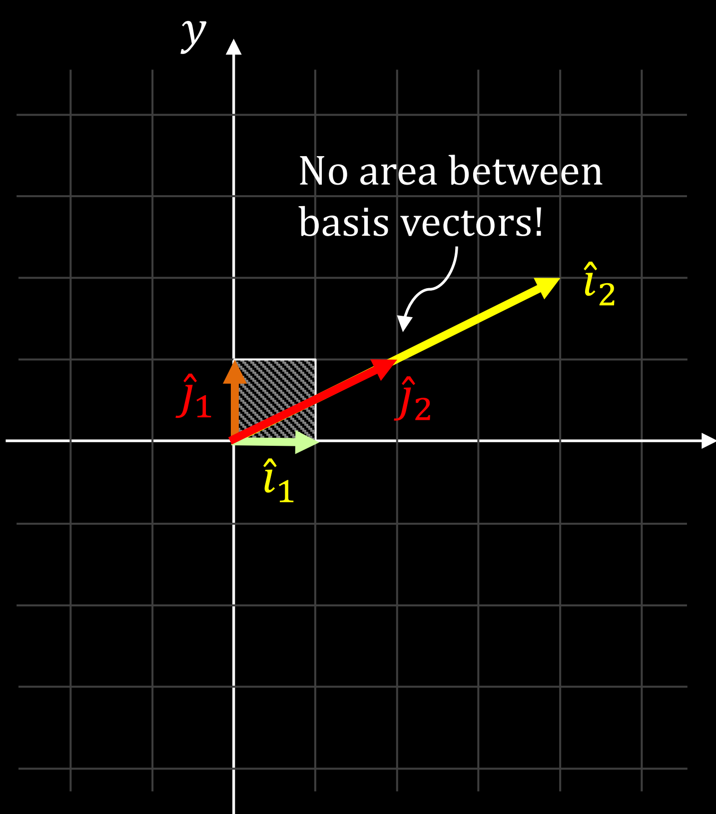
기저 벡터가
선형변환으로
6배 증가

$$\det\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}3\\0\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}2\\2\end{matrix}} \end{pmatrix} = 3\cdot 2 - 2\cdot 0 = 6$$

$\hat{\imath}_2 = \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$ $\hat{\jmath}_2 = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$

Determinant is Zero!

Determinant: 선형변환 했을 때 어느 비율로 증감하는지 확인



$$\det\left(\boxed{\begin{matrix}1\\0\end{matrix}}\;\boxed{\begin{matrix}0\\1\end{matrix}}\right) = 1\cdot 1 - 0\cdot 0 = 1$$

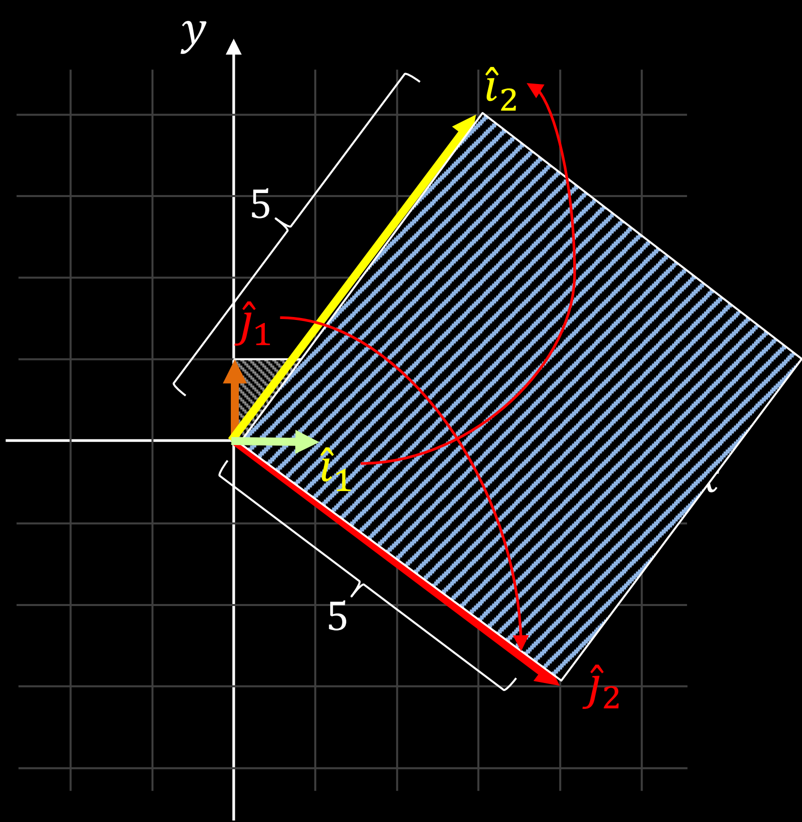
$$\hat{\imath}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad \hat{\jmath}_1 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

기저 벡터가
동일 직선상으로
선형변환
면적이 Zero 됨

$$\det\left(\boxed{\begin{matrix}4\\2\end{matrix}}\;\boxed{\begin{matrix}2\\1\end{matrix}}\right) = 4\cdot 1 - 2\cdot 2 = 0$$

$$\hat{\imath}_2 = \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} \quad \hat{\jmath}_2 = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

Negative Determinant - Switching Orientation



$$\det\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}1\\0\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}0\\1\end{matrix}} \end{pmatrix} = 1\cdot 1 - 0\cdot 0 = 1$$

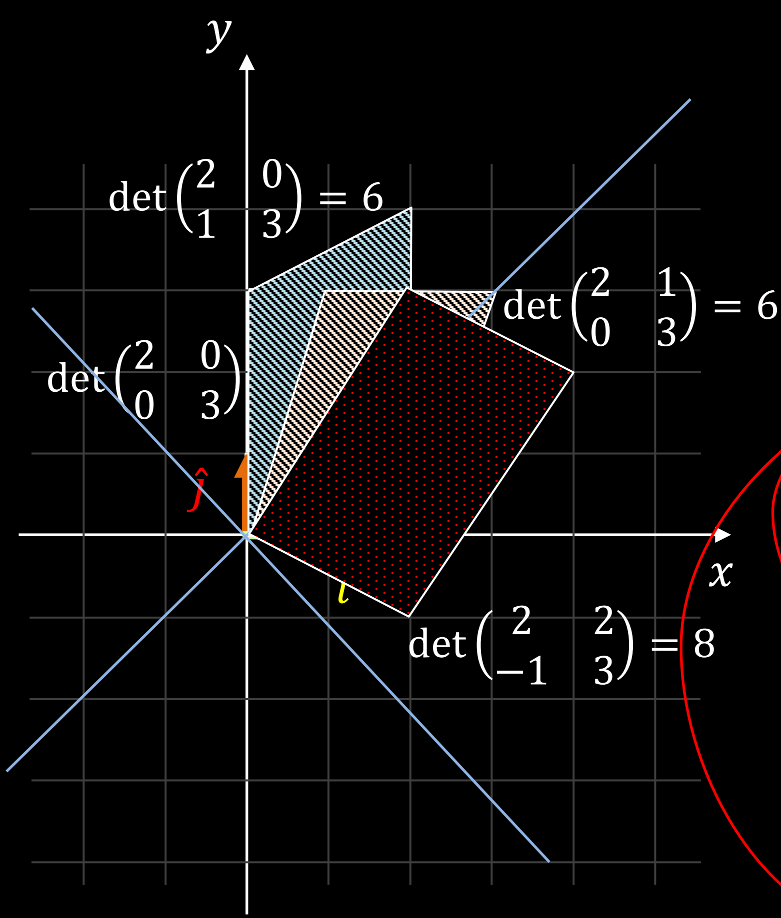
$$\hat{\imath}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad \hat{\jmath}_1 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

기저 벡터의
순서가 뒤바뀜
→ 면적이 음수

$$\det\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}3\\4\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}4\\-3\end{matrix}} \end{pmatrix} = 3\cdot(-3) - 4\cdot 4 = -25$$

$$\hat{\imath}_2 = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} \quad \hat{\jmath}_2 = \begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$$

Determinant 위치 값 의미



$\hat{\imath}$ 방향으로 얼마나 커지는가?

$\hat{\jmath}$ 방향으로 얼마나 커지는가?

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

b 와 c 가 모두 0일 경우

$\hat{\imath}$ 방향, $\hat{\jmath}$ 방향 모두 기울어짐 없음

b 또는 c 가 0일 경우

$b = 0$ 이면 $\hat{\imath}$ 에서 기울어 지는 정도

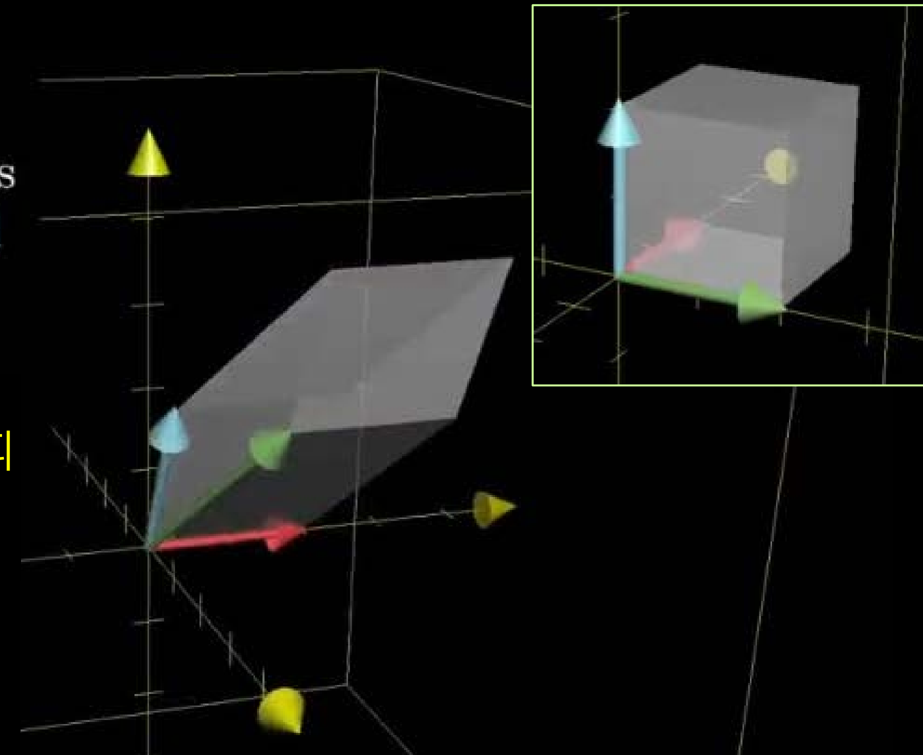
$c = 0$ 이면 $\hat{\jmath}$ 에서 기울어 지는 정도

$b \neq 0$ 그리고 $c \neq 0$ 일 경우

대각 방향으로 늘어나거나 줄어드는 정도

3차원에서 Determinant?

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.5 \\ 0.5 & 1.0 & 0.0 \\ 1.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}\right) = \text{Volume of this parallelepiped}$$



선형변환 이후 생성된
기저 벡터들 생성하는 부피

교수님~~~

3차원 Determinant가

Zero 인 경우는 뭔 상황인가요?

면적/부피가 0이라는 것은
점 또는 직선이 되었다는 것

3차원이 2차원이 되거나,
원점으로 없어지거나... ^^

교수님~~~

그럼 4차원은 어떻게 되나요?

5차원, 6차원은 어떻게 되나요?

생각해 보세요^^
뇌가 즐거워지는
시간 ~~~

수고하셨습니다 ..^ ^..