

Linear Algebra

Mathematical Empathy between Linear Systems (선형 시스템간의 해석)

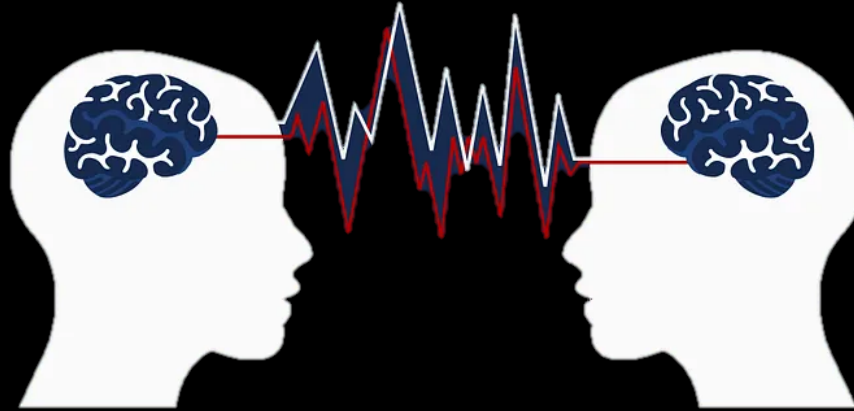
소프트웨어 끈대 강의

노기섭 교수

(kafa46@cju.ac.kr)

Mathematical Empathy

Empathy:



이미지 출처:
<https://cuzegbu.medium.com/introduction-to-empathy-in-ux-d0ae4545aea4>

The ability to understand and share the feelings of another.

상대방 입장에서 경험한 바를 이해하거나 혹은
다른 사람의 입장에서 생각해보는 능력이다

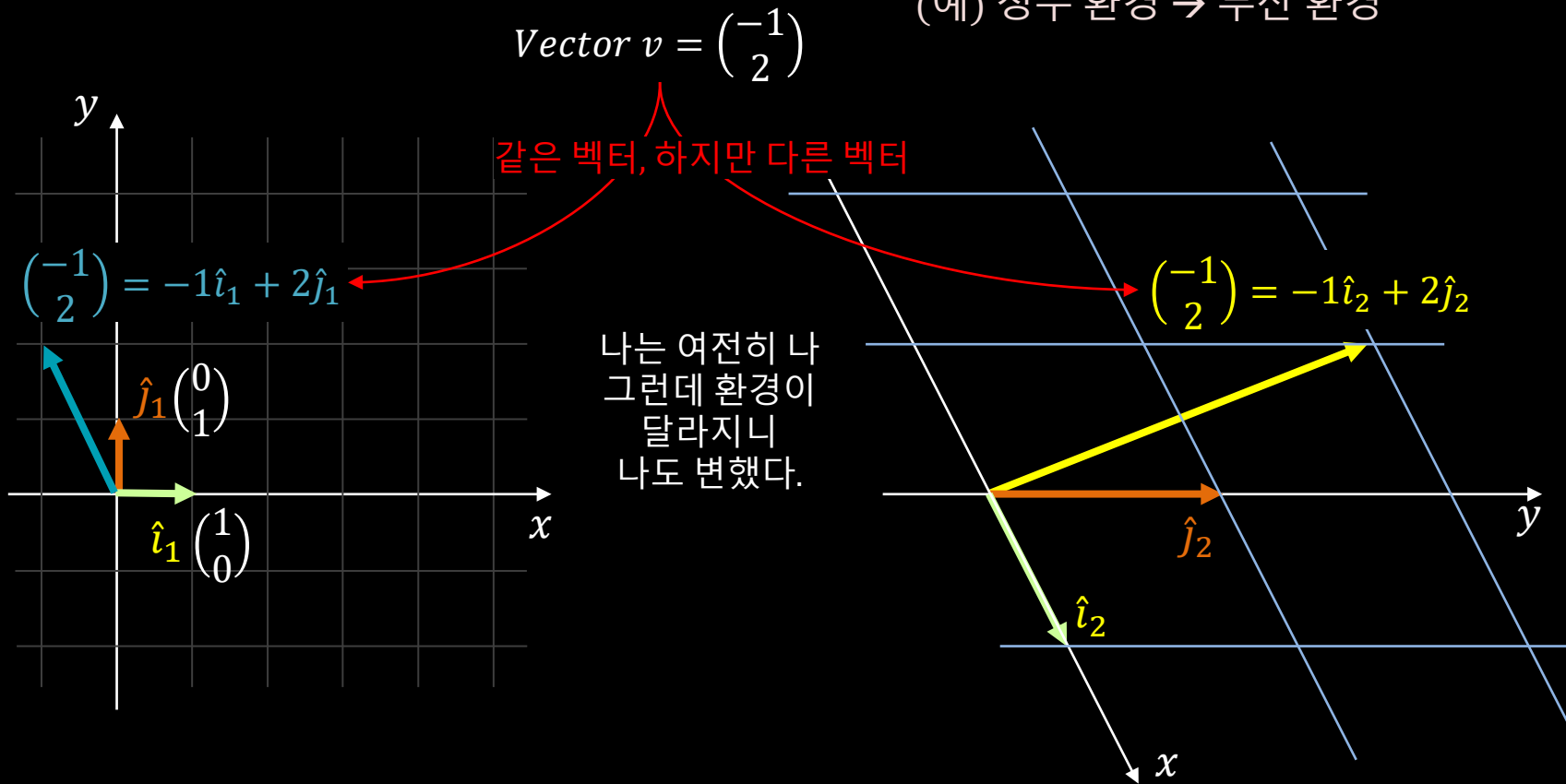
Mathematical Empathy between Linear Systems:

서로 다른 선형 공간에서 표현법을 이해하는 방법
선형 시스템을 이해하는데 매우 중요한 직관!

Recap: 벡터 공간의 변환 - 개념 이해

벡터 공간 변환(공간 변형): 기저 벡터를 바꾼다는 의미

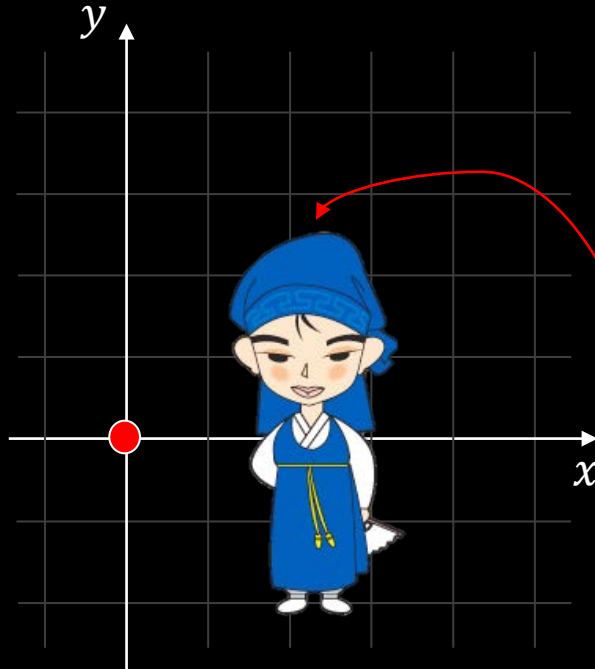
우리가 사는 공간을 바꿔 볼까요?
(예) 청주 환경 → 부산 환경



두 사람이 각각 자신의 선형 시스템을 사용한다면?

성춘향/이몽룡 이미지 출처: <https://thewiki.kr/w/남원시>

춘향이와 몽룡이가 있다고 가정해 봅시다 ^^.



몽룡이의 시스템

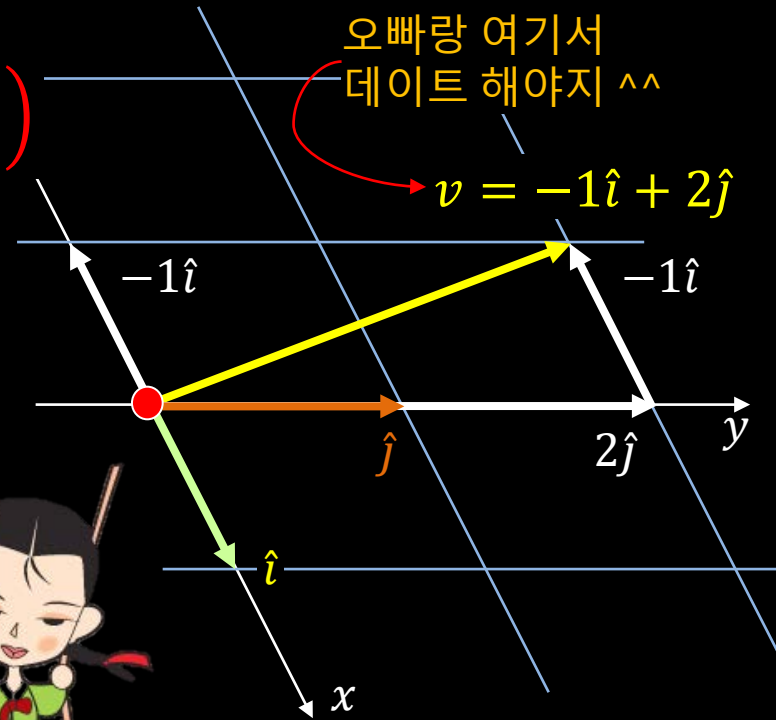
몽룡이는 춘향이 세계를
어떻게 해석할까?

오빠~~ 내가
무슨 생각하는지
알아 ^^?

$$v = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

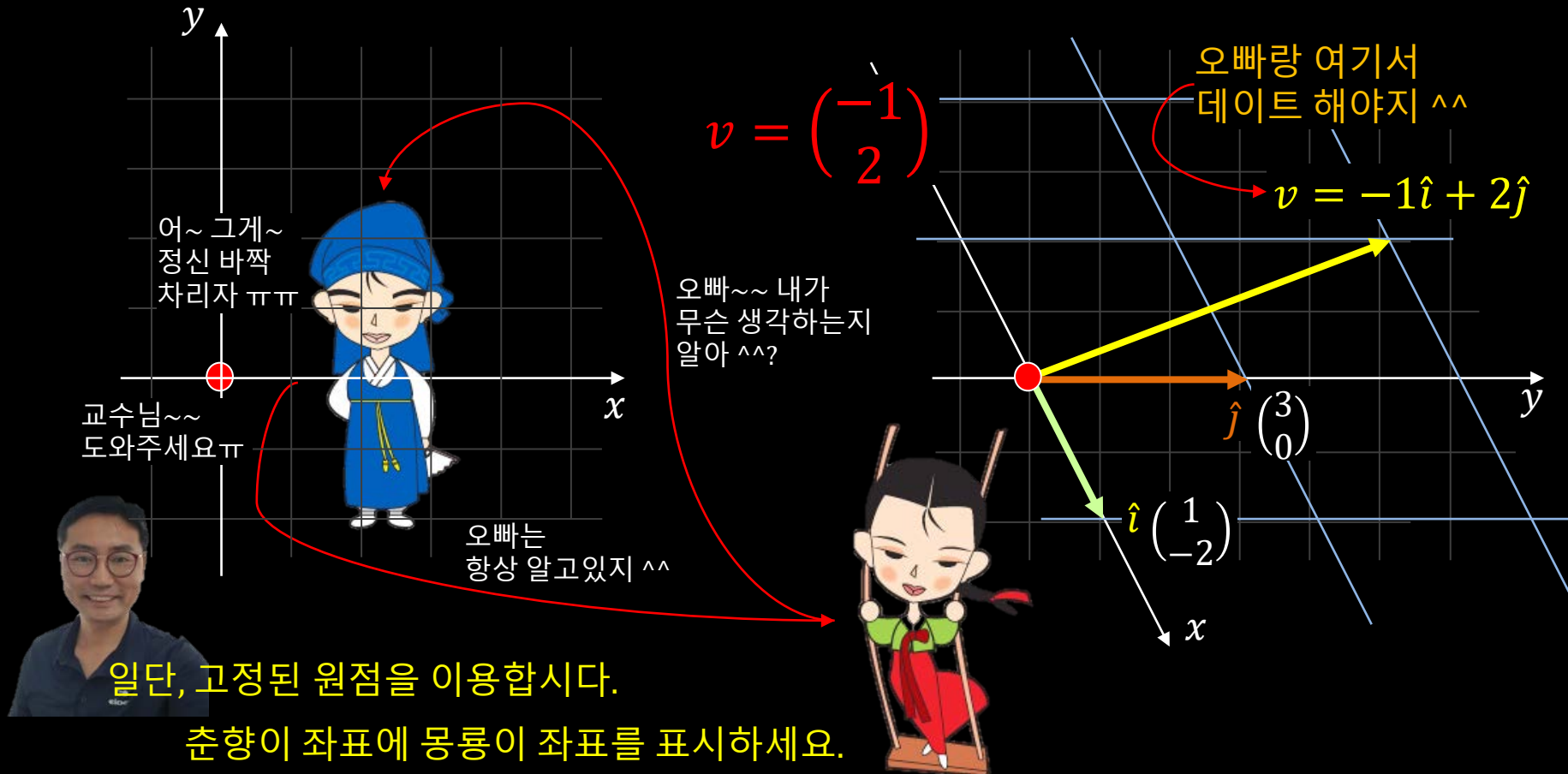


춘향이의 시스템



고정된 원점 (Fixed Origin)을 이용하면 해석 가능하지 않을까요?

두 사람이 각각 자신의 선형 시스템을 사용한다면?



춘향이의 basis vector를 몽룡이 좌표로 해석할 수 있겠죠?

교수님이 이전 강의에서 알려준거 기억 나죠?

교수님! 기억나요^^
선형변환 함수는
Matrix 입니다!!

Matrix를 이용한 상대방 해석 (a.k.a. "Empathy")

아하!

춘향이의 의미는 이런거구나~



New basis vector of \hat{i}

New basis vector of \hat{j}

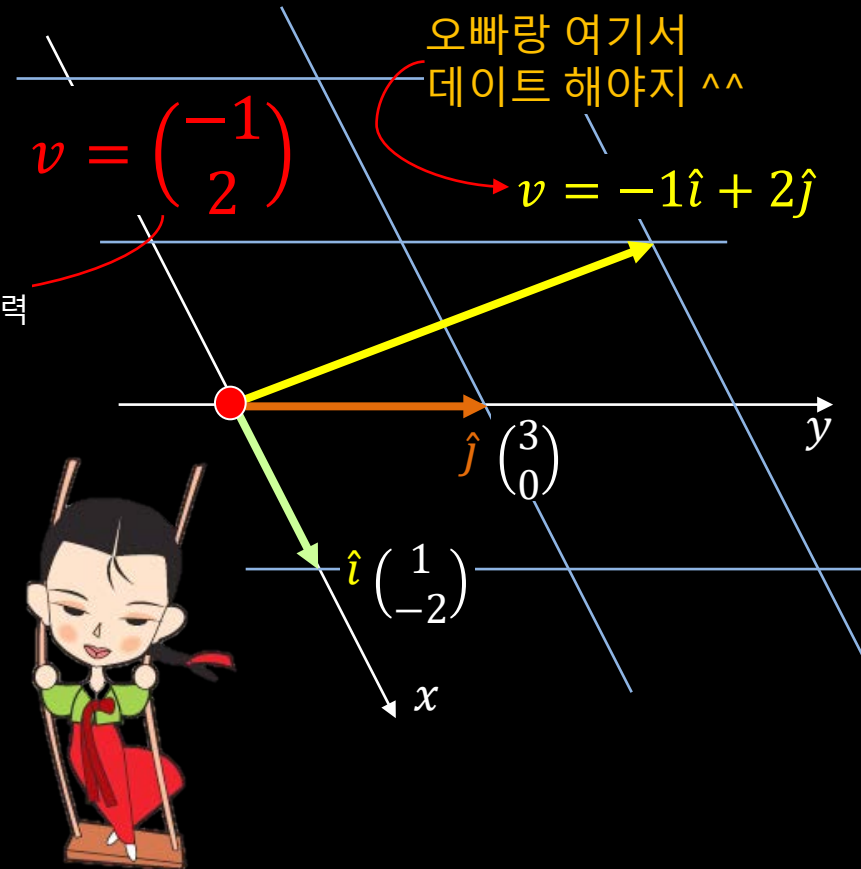
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 \\ -2 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

오빠가 $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ 로
나갈게 ^^

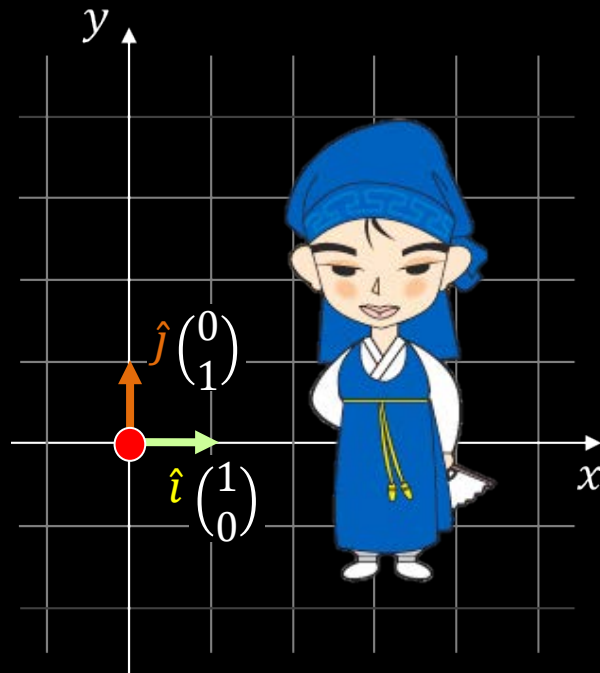
선형변환
함수의 입력



Empathy in Linear Transformation

선형변환(행렬)의
기하학적 의미

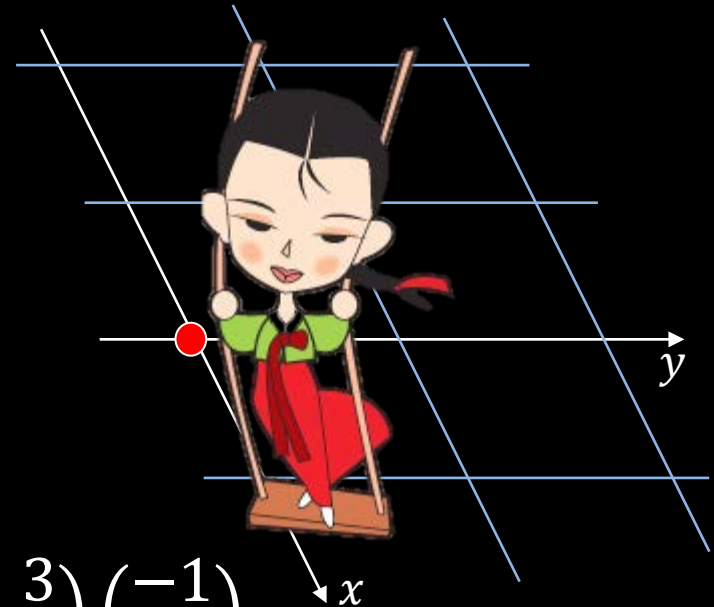
내 공간을
상대방 공간으로
변환하는 함수



New basis of \hat{i}

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

New basis of \hat{j}

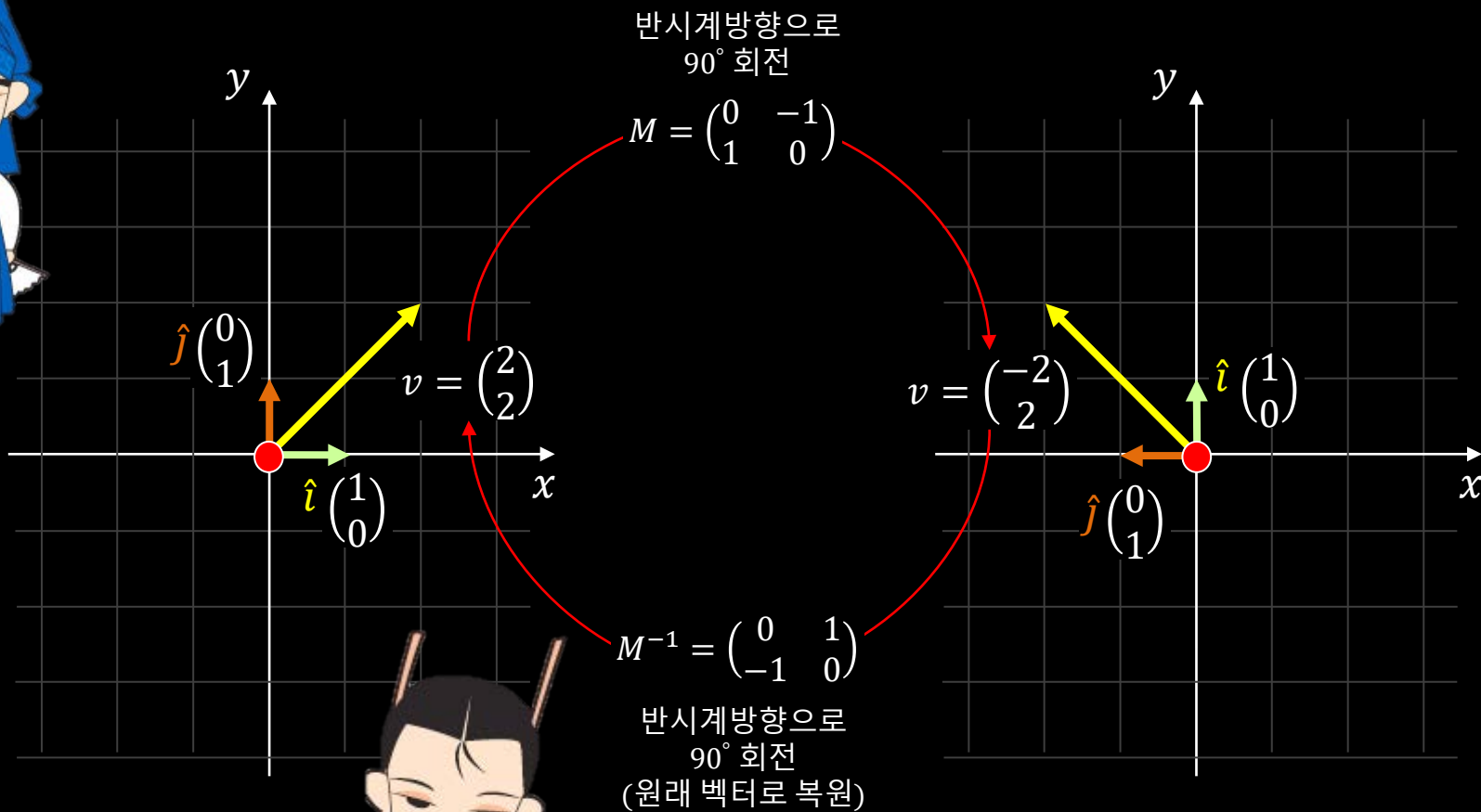


$$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

상대방의 표현을
내 공간에서 해석하도록
변환하는 함수

수치적(데이터) 관점에서
선형변환(행렬)의 의미

Recap: 역행렬의 의미

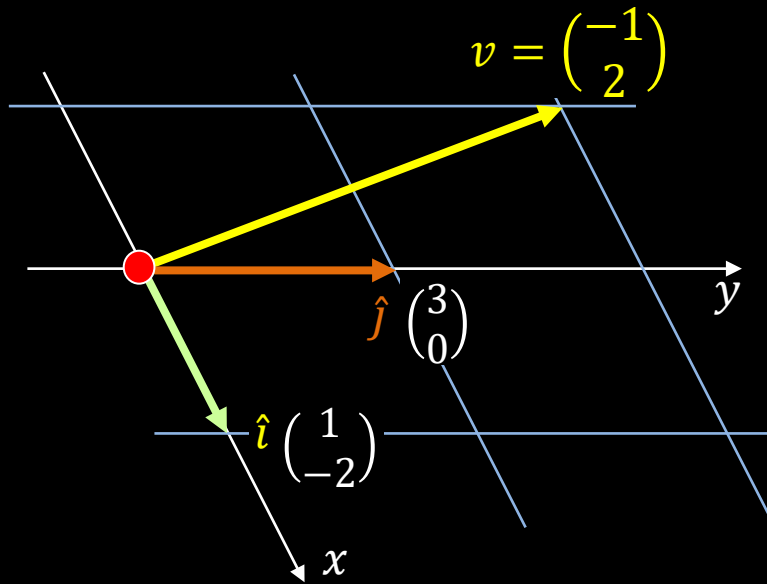


춘향이 벡터를 90° 회전시키려면 어떻게 하면 될까?

춘향이 벡터에 변환 M 을 적용하면 되나?

과연 될까요^^?

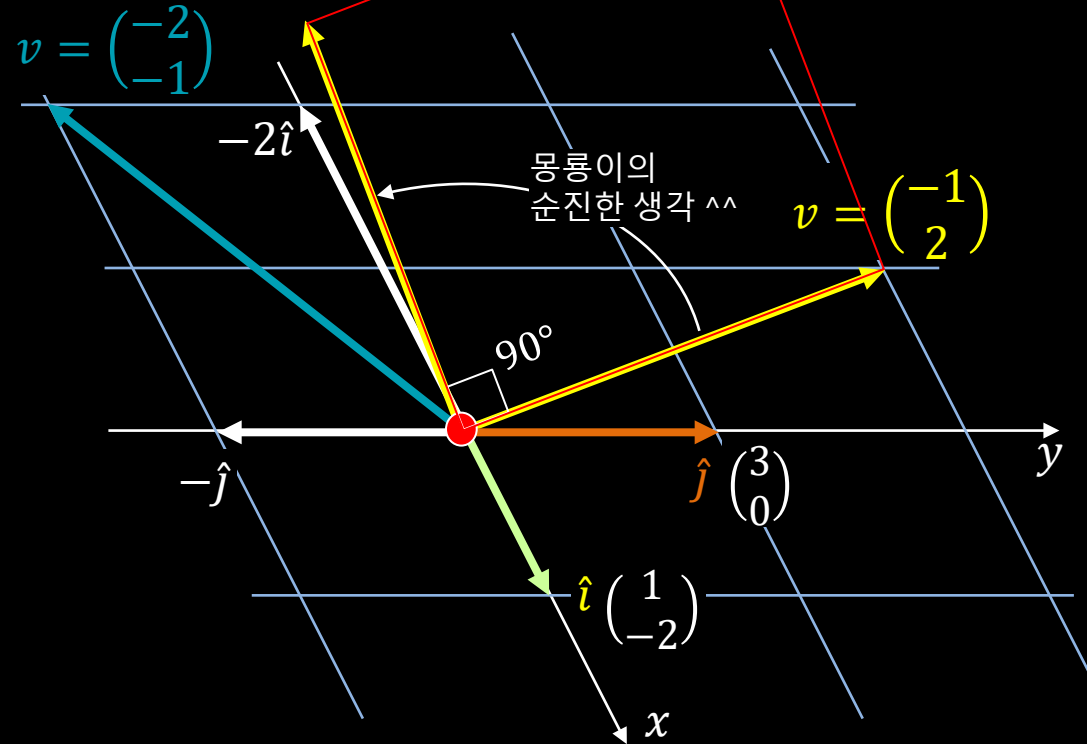
Misunderstanding (without "Empathy")



춘향이 입장에서는
 -90° 회전한 것이 맞다!



하지만 몽룡이가 생각한
 -90° 회전이 아니다! $\pi\pi\pi$



$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

어떻게 하면 몽룡이가 의도한 대로
춘향이 벡터를 옮길 수 있을까요?

Linear Transformation using Mathematical Empathy

Hint: 선형변환을 이용하자!

춘향이의 공간을 몽룡이 공간으로 이동



$$Av = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

몽룡이 공간에서 선형 변환



$$MAv = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

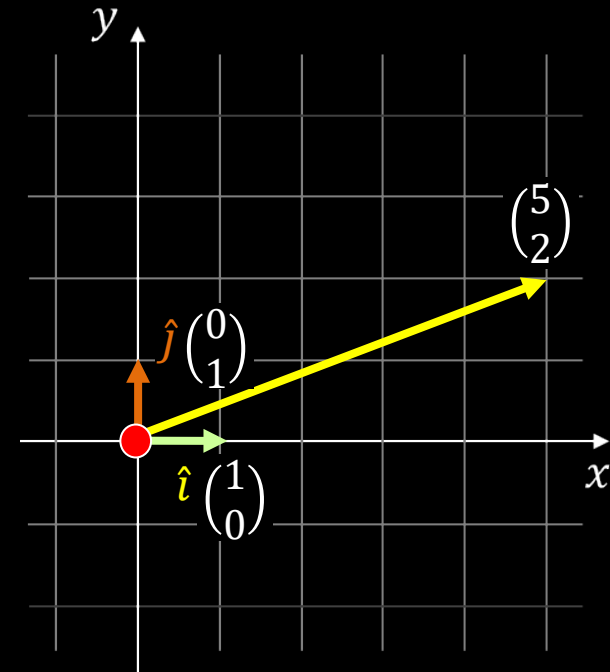
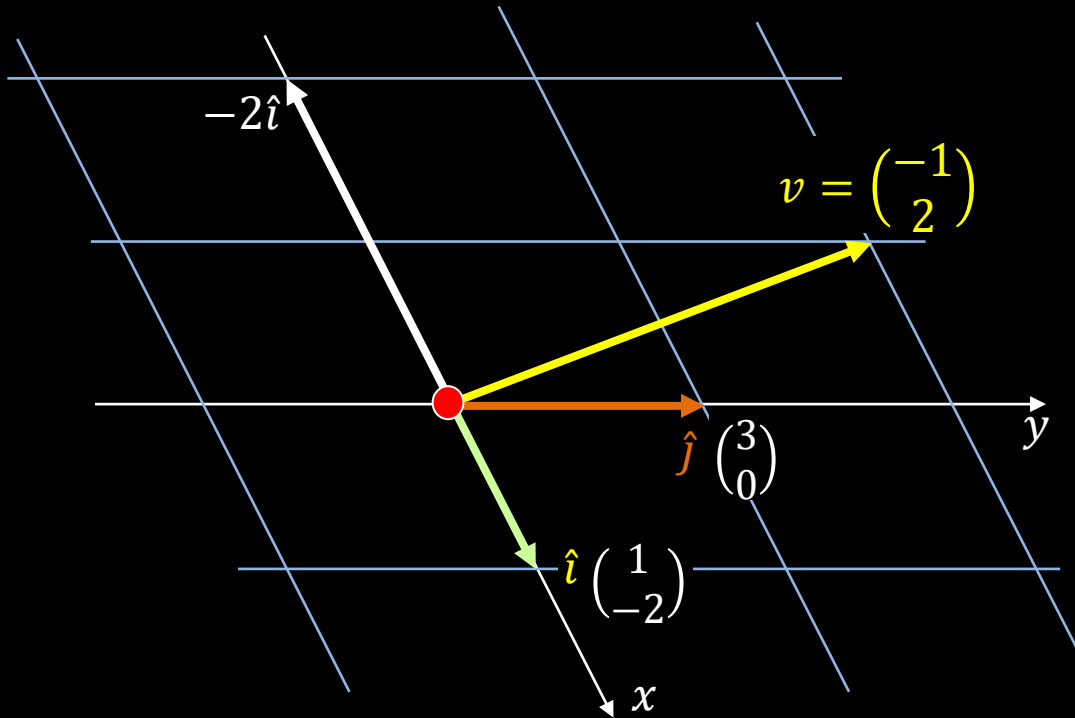
몽룡이 결과를 다시 춘향이 공간으로 이동



$$\begin{aligned} A^{-1}MAv &= \begin{pmatrix} 0 & -0.5 \\ 0.33 & 0.67 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2.5 \\ 0.17 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

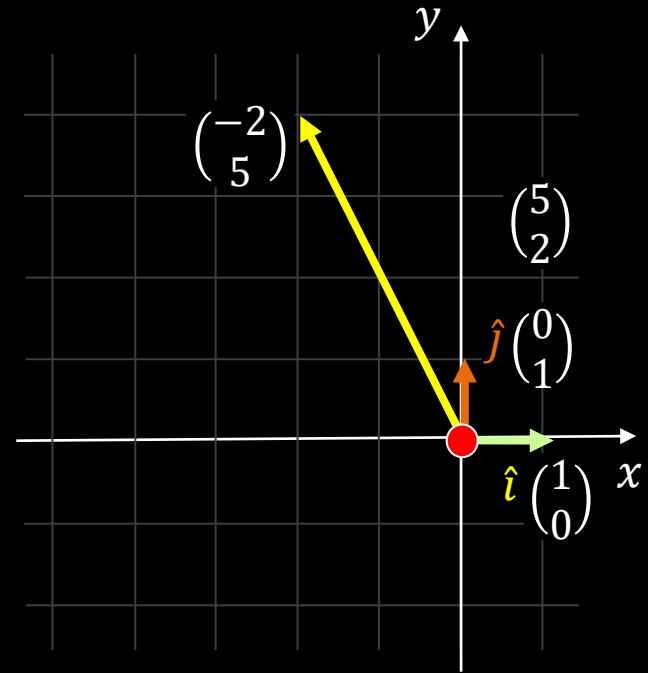
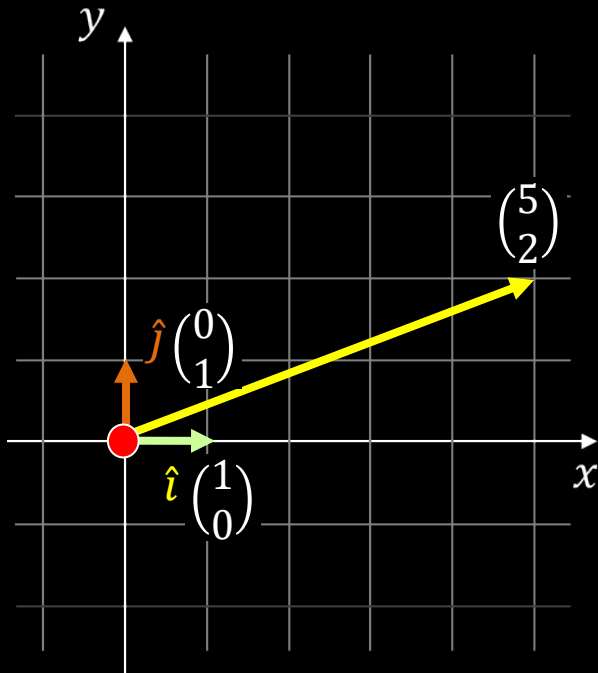
준항이의 공간을 몽롱이 공간으로 이동 (Av)

$$Av = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$



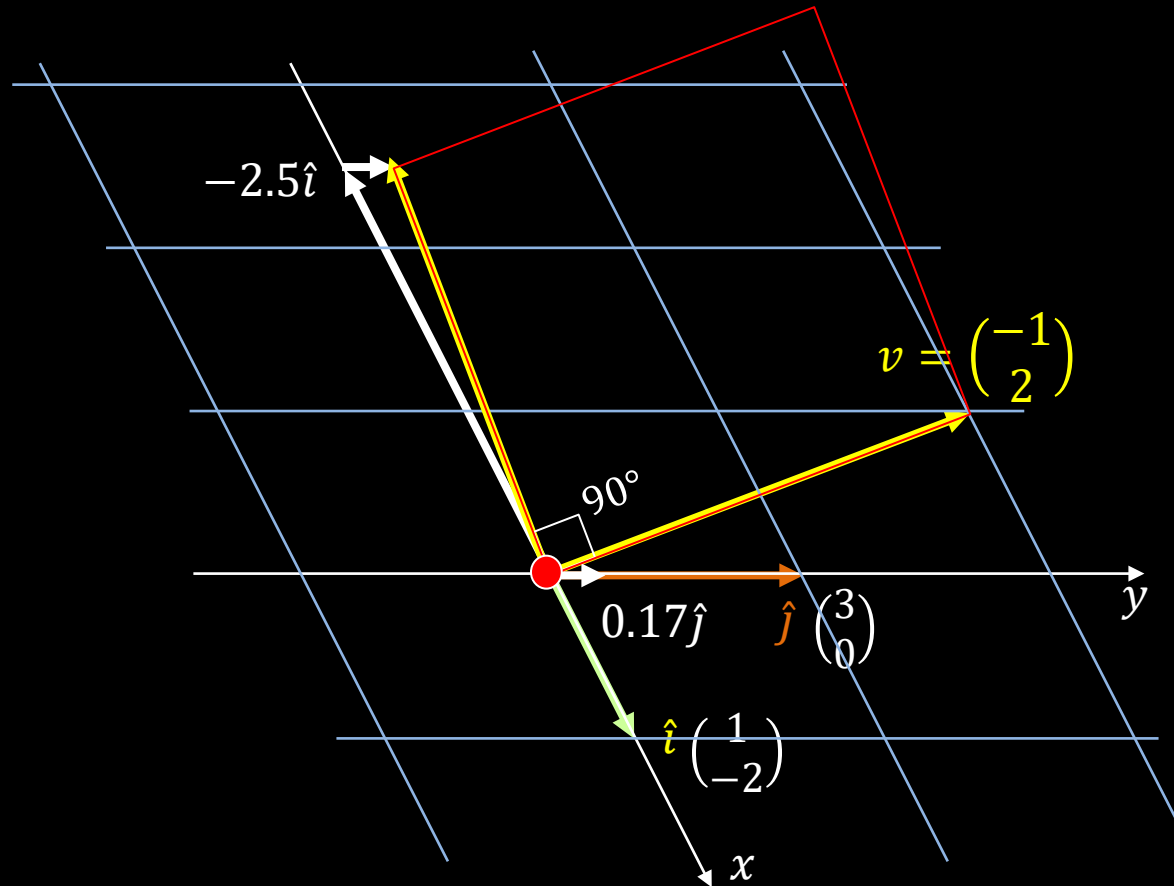
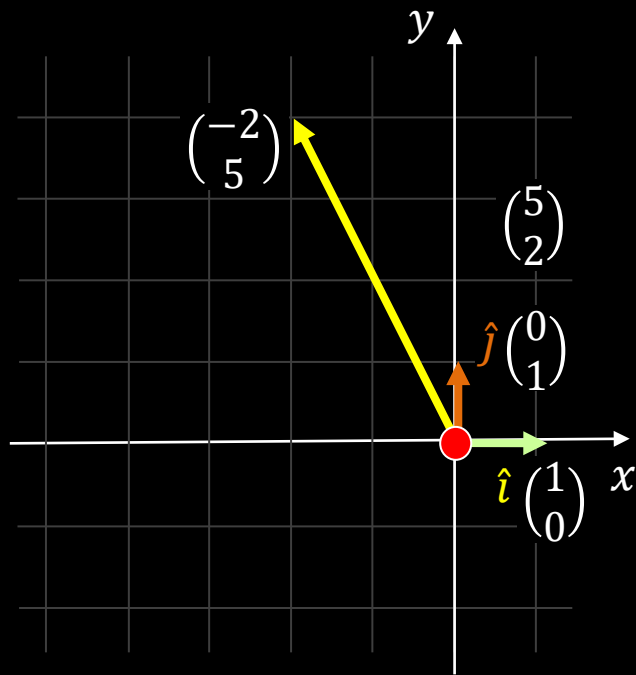
몽룡이 공간에서 선형 변환 (MAv)

$$MAv = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{몽룡이 공간에서 90도 회전}$$

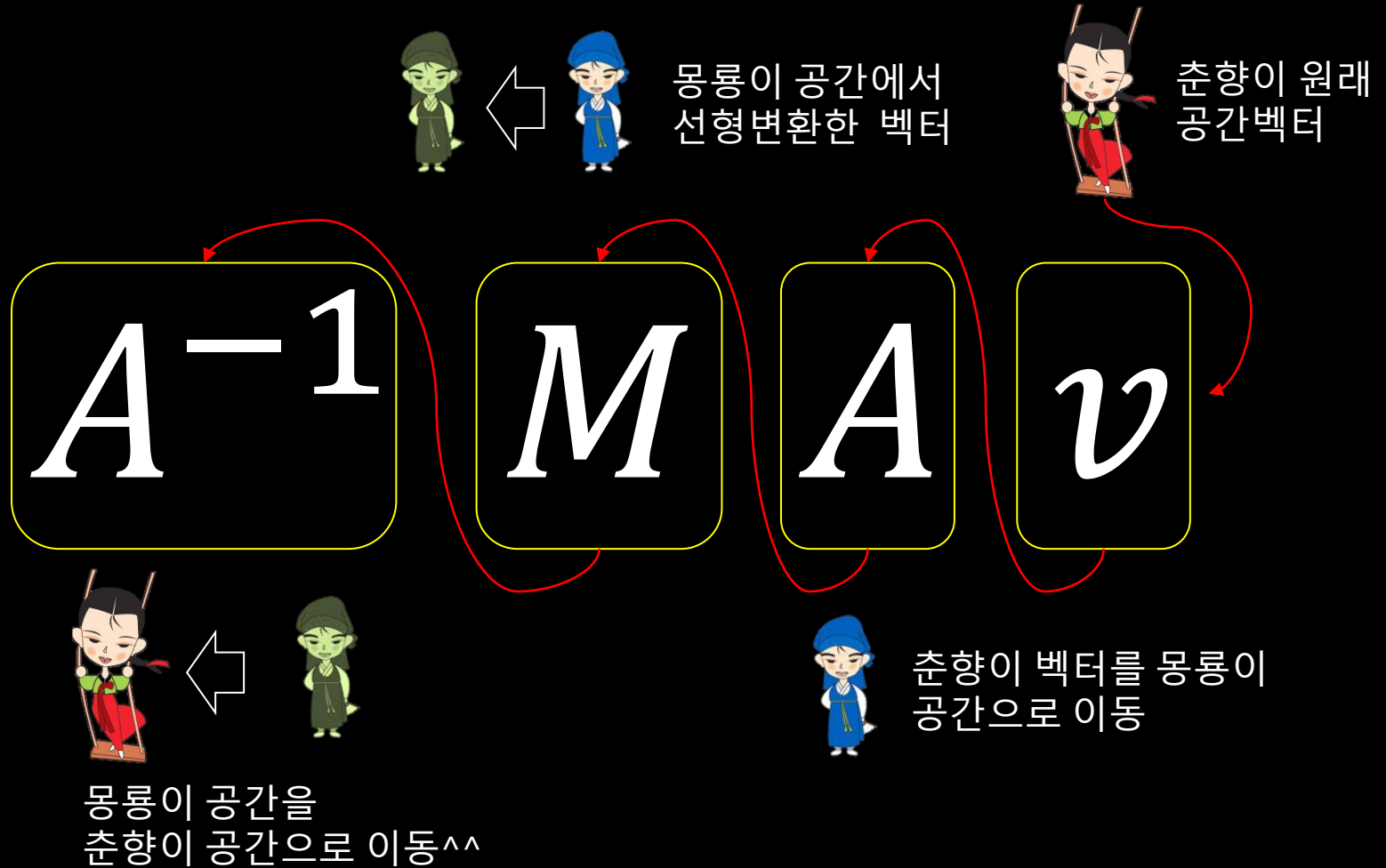


몽룡이 결과를 다시 춘향이 공간으로 이동 ($A^{-1}MAv$)

$$A^{-1}MAv = \begin{pmatrix} 0 & -0.5 \\ 0.33 & 0.67 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.5 \\ 0.17 \end{pmatrix}$$



상대방의 공간을 내가 생각하는 방식으로 변환하는 방법???





수고하셨습니다 ..^^..