Differentiation

Partial Differentiation - concept & operations
(편미분 개념 및 연산)

소프트웨어 꼰대 강의

노기섭 교수

(kafa46@cju.ac.kr)

Course Overview

Topic	Contents
01. Orientation 오리엔테이션	Course introduction, motivations, final objectives 과정 소개, 동기부여, 최종 목표
02. Learning in deeplearning 딥러닝 학습	How does the deeplearing learns knowledge from data 어떻게 딥러닝은 데이터로부터 지식을 배우는가?
03. Principle of differentiation 미분의 원리	Basics of differentiation (concepts, notation, operations) 미분 기본지식 (개념, 표기, 연산)
04. Partial differentiation 편미분	Concept & operation of partial differenciation 편미분 개념, 연산
05. Gradient descent 경사 하강법	Concept, interpretation and learning in gradient descent 경사하강 알고리즘 개념, 해석 및 학습
06. Chain rule 연쇄법칙	Concept & operation of chain rule 연쇄법칙 개념 및 연산
07. Matrix differentiation 행렬미분	Partial differentiation in linear system 선형시스템에서의 편미분
08. Back propagation 역전파 학습	The mechanism of back propagation 역전파 학습의 작동 방법
09. Gradient vanishing 기울기 소실	Quick overview on activation function, cause root of gradient vanishing and its counter-measure 활성함수 간단 소개, 기울기 소실 근본원인과 대책

Recap: 미분!!! 딥러닝 어디에 사용하는가?

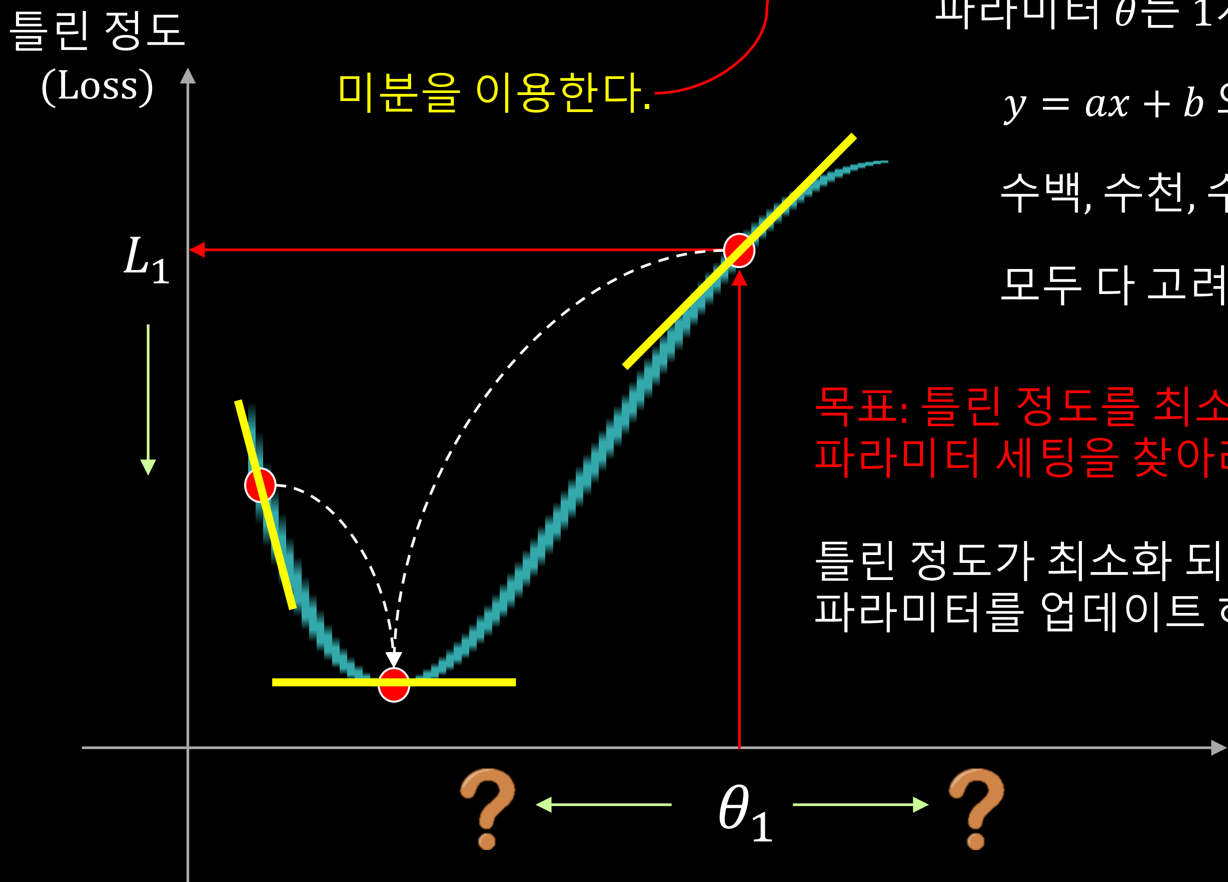
문제점:

파라미터 θ는 1개가 아니다.

$y = ax + b$ 와는 차원이 다르다.

수백, 수천, 수만 개 이상일 수 있다.

모두 다 고려해야 한다.

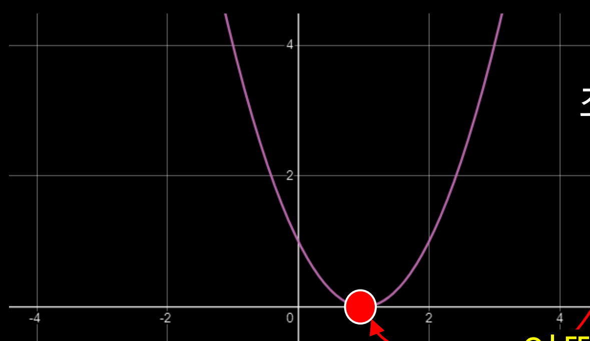
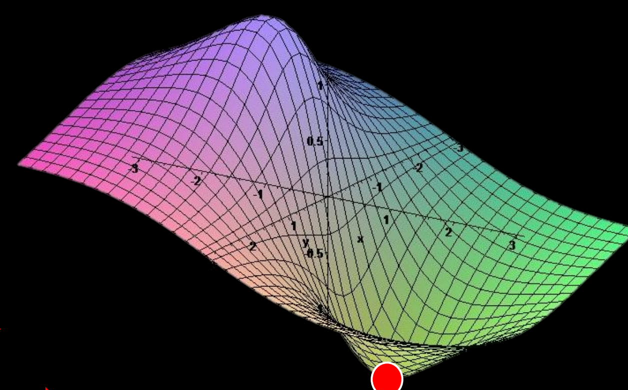


목표: 틀린 정도를 최소화하는
파라미터 세팅을 찾아라!

틀린 정도가 최소화 되도록
파라미터를 업데이트 하는 방법?

어느 방향으로 얼마나 이동해야 하지?

함수 입력에 따른 분류

구분	일변수 함수	다변수 함수
개념	입력 변수가 1개	입력 변수가 2개 이상
예시	$y = f(x) = x^2 - 2x + 1$	$z = f(x, y) = \dfrac{3y}{x^2 + y^2 + 1}$
시각화		

최저점

어떻게
찾아가나???

편미분 등장, 그리고 읽는 방법

$y = f(x)$ 일변수 함수	$z = f(x, y)$ 다변수 함수
$\dfrac{dy}{dx} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$	$\dfrac{\partial f}{\partial x} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h, y) - f(x)}{h}$ 미분 대상이 되는 변수만 고려, 나머지 변수는 상수 취급
dx: "디 x" 라고 읽음 $\dfrac{dy}{dx}$ Derivative with respect to x of y (y 를 x 에 대하여 미분) 또는 y over x (디x분에 디y)	∂x: "파셜(partial) x" 라고 읽음 "라운드(round) x" 라고도 읽음 $\dfrac{\partial y}{\partial x}$ Partial derivative with respect to x of y (y 를 x 에 대하여 편미분)

편미분의 직관적 이해와 표현

편미분:

타겟(변수)이 여러 개인 경우 다른 모든 놈들은 고정하고,

한 놈(하나의 변수)만 변화 시키는 작업

표현 방법 (모두 맞음)

y 는 고정하고, x 만 변화	$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$	또는	$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$	또는	$f'_x(x,y)$	또는	$f_x(x,y)$
x 는 고정하고, y 만 변화	$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$	또는	$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$	또는	$f'_y(x,y)$	또는	$f_y(x,y)$

Example

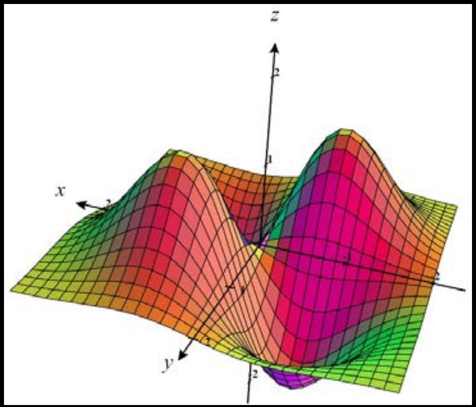
자료출처: https://hyperskill.org/learn/step/13758

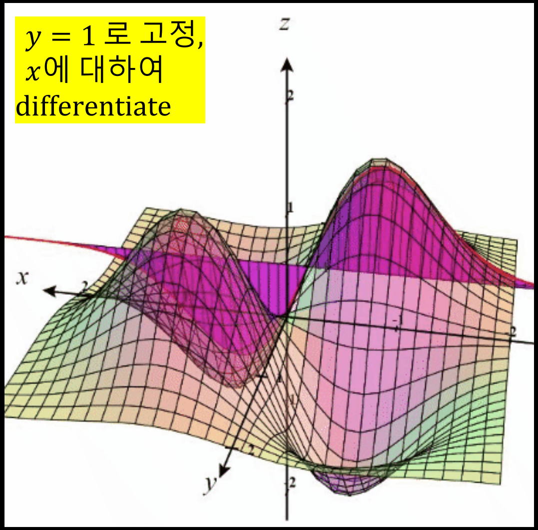
한번 읽어보세요. 제가 강력히 추천하는 블로그입니다 ^^.

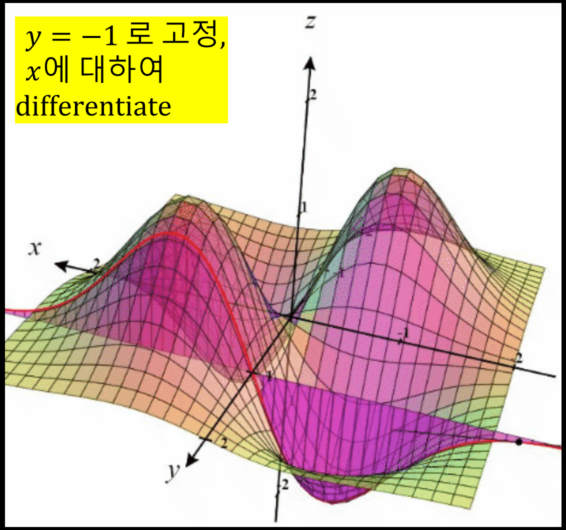
$$f(x,y) = \frac{7xy}{e^{x^2+y^2}}$$

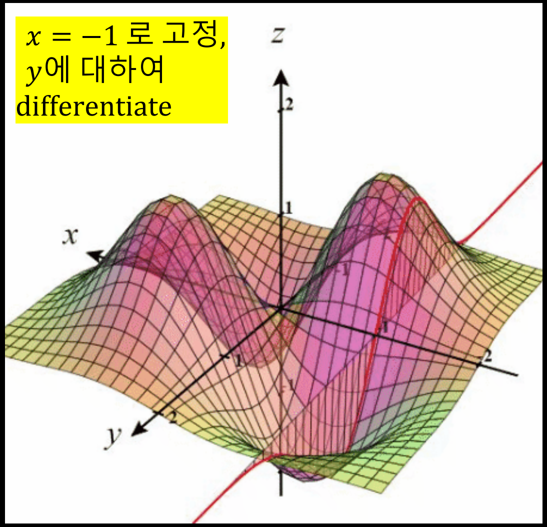
$$,where\ f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

Let $z = f(x,y)$







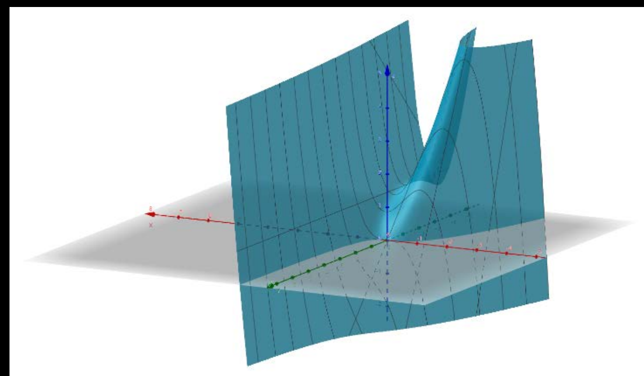


모든 y에 대한 변화는?

모든 x에 대한 변화는?

Toy Examples

Toy #1

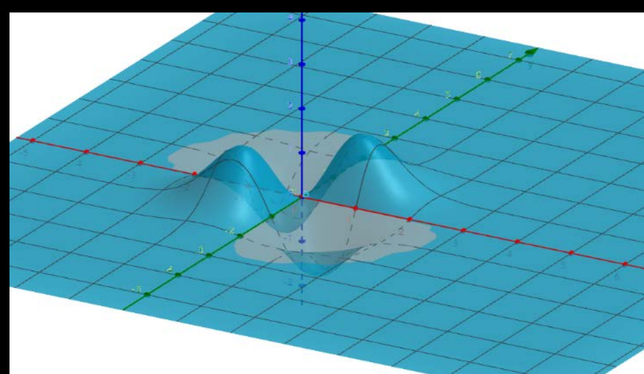


$$z = f(x,y) = x^3 + xy - y$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 3x^2 + y$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x - 1$$

Toy #2



$$z = f(x,y) = \frac{7xy}{e^{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = -\frac{7y(2x^2-1)}{e^{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -\frac{7x(2y^2-1)}{e^{x^2+y^2}}$$

Toy Practices: 손으로 계산 맛보기 (Note: 머리 아프면 건너뛰어도 됨 ^^.)

$$z = f(x,y) = \frac{7xy}{e^{x^2+y^2}} = 7xy \times e^{(x^2+y^2)^{-1}} = 7xy \times e^{(-x^2-y^2)} = 7xy \times e^{-x^2} \times e^{-y^2}$$

$$= \underbrace{\boxed{7ye^{-y^2}x}}_{g(x)} \times \underbrace{\boxed{e^{-x^2}}}_{h(x)} \qquad f'(x) = g'(x)h(x) + g(x)h'(x)$$

경험담:

미분이 복잡하면 수학 잘하는 친구한테 물어봐서 해결함.

하지만 지나고 보니 직접 해보는게 좋았을텐데 라는 후회를 합니다.

$$g'(x) = 7ye^{-y^2}$$

$$h(x) = e^{\overbrace{\boxed{-x^2}}^{k(x)}} \qquad f(x) = g \circ h(x) = g(h(x))$$

$$= e^{k(x)}$$

$$h'(x) = \left(e^{k(x)}\right) \cdot k'(x) \quad f'(x) = g'\left(h(x)\right) \cdot h'(x)$$

$$h'(x) = e^{-x^2} \cdot (-2x) = -2x\ e^{-x^2}$$

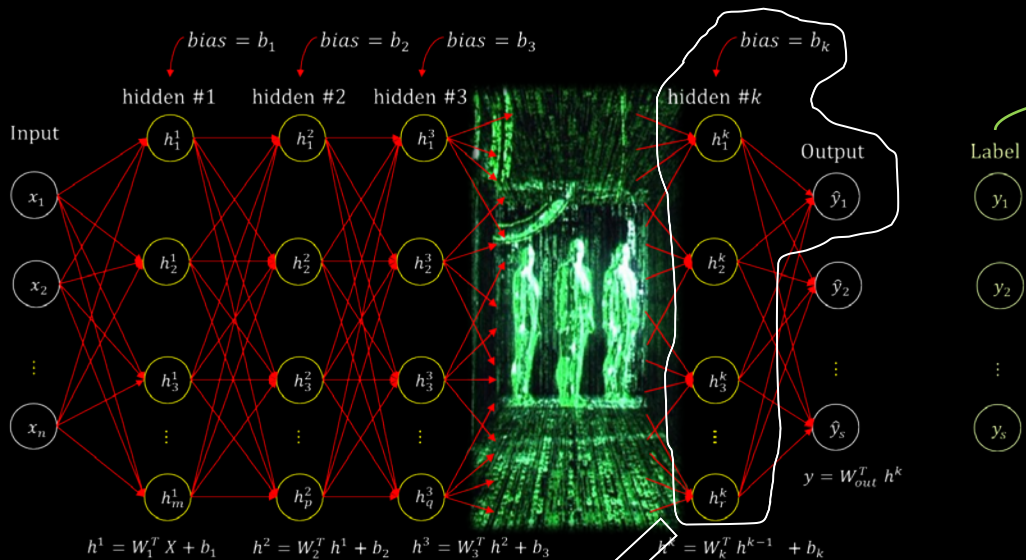
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 7ye^{-y^2}e^{-x^2} + 7ye^{-y^2}xe^{-x^2}(-2x)$$

$$= 7ye^{-y^2}e^{-x^2} - 2x^2 7ye^{-y^2}e^{-x^2}$$

$$= \frac{7y - 2x^2 7y}{e^{x^2+y^2}}$$

$$= -\frac{7y(2x^2-1)}{e^{x^2+y^2}}$$

변수가 겁나게 많은 경우



Loss:
How much
DL is wrong

$$L(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \boxed{(\hat{y}_i - y_i)^2}$$

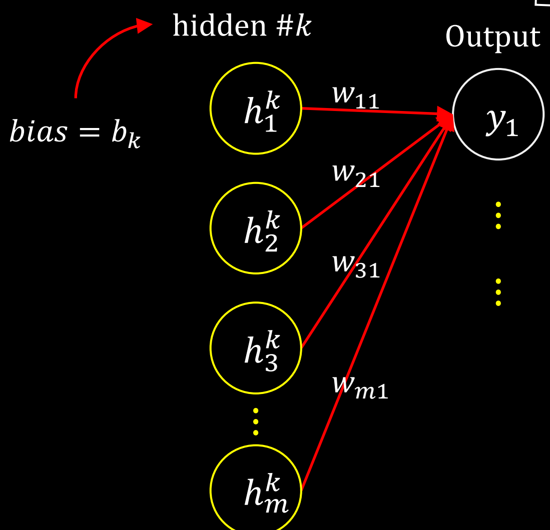
w_{11}에 대하여 미분

w_{21}에 대하여 미분

⋮

w_{m1}에 대하여 미분

$\hat{y}_1$에 대입



$$y_1 = \boxed{w_{11}h_1^k + w_{21}h_2^k + \cdots + w_{m1}h_m^k + b_k}$$

$$= (w_{11} \quad w_{12} \quad \cdots \quad w_{m1}) \begin{pmatrix} h_1^k \\ h_2^k \\ \vdots \\ h_m^k \end{pmatrix} + b_k$$

수고하셨습니다 ..^^..