Linear Algebra

Vector Transformation with Matrix (행렬을 이용한 벡터의 선형 변환)

소프트웨어 꼰대 강의

노기섭 교수

(kafa46@cju.ac.kr)

Recap: Linear Transformation (Mapping)

Linear Transformation (Mapping)

- Definition
  - Linear combination (선형 결합)을 보존하는 벡터 사이의 함수
  - 선형 변환(Linear Transformation), 선형 사상(Linear Mapping), 선형 연산자(Linear Operator) 등으로 부르기도 함

- 다음 두 조건을 만족시키면 선형 변환이다. (다시 말해, "선형성을 유지하는 변환이다")

Mapping $L: V \rightarrow W$

Linearity (선형성)

1) $L(u+v) = L(u) + L(v), where \;\; u, v \in Vector\ Space$

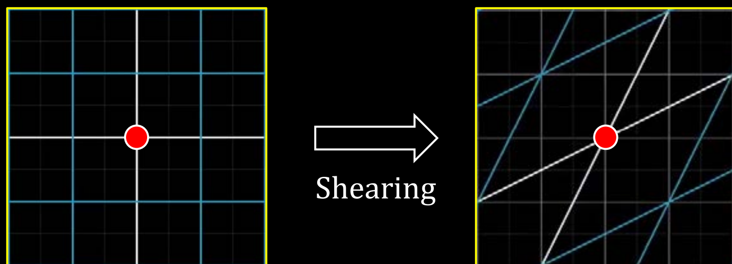
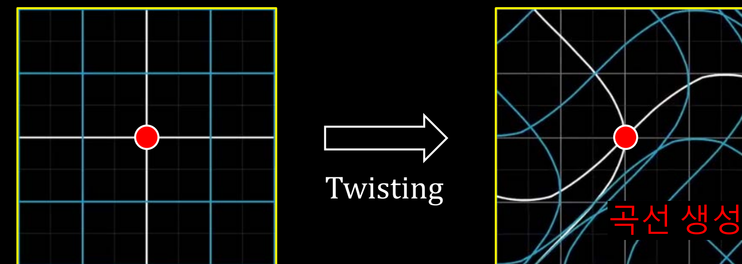
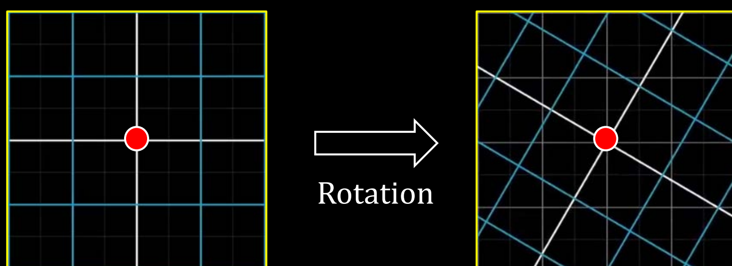
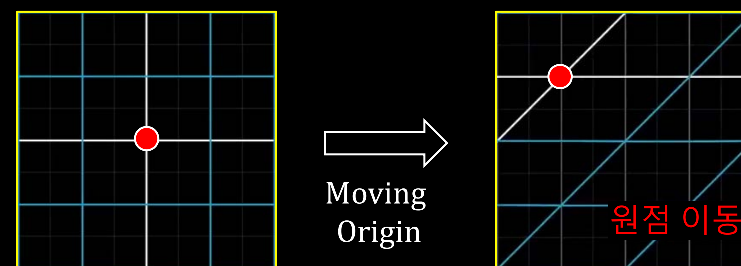
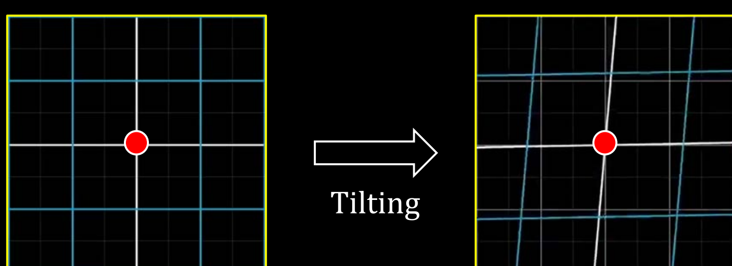
Additivity (가산성) → 공간의 모든 좌표가 평행 (곡선이 없다)

(두 벡터를 더한 다음 변환 == 각각의 벡터를 변환 후 더함)

2) $L(kv) = kL(v), where \;\; k \in Field, v \in Vector\ Space$

Homogeneity (동차성) → evenly spaced, 동일한 간격 유지

직관적으로 이해하는 Linearity (선형성)

Linear Transformation	Non-linear Transformation
 Shearing	 Twisting
 Rotation	 Moving Origin
 Tilting	 Not evenly Spaced

Recap: 행렬과 벡터의 만남! - 그 역사적 순간!!!

2개의 사상을 다시 정의한다.

$$f: \mathcal{L}(V, W) \rightarrow \mathcal{M}_{m\times n}(F)$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{L}(V, W) \arrow[rr, bend left, "f"] & & \mathcal{M}_{m\times n}(F) \arrow[ll, bend left, "g"] \end{tikzcd}$$

$$g: \mathcal{M}_{m\times n}(F) \rightarrow \mathcal{L}(V, W)$$

f 와 g 는 동형사상이다!

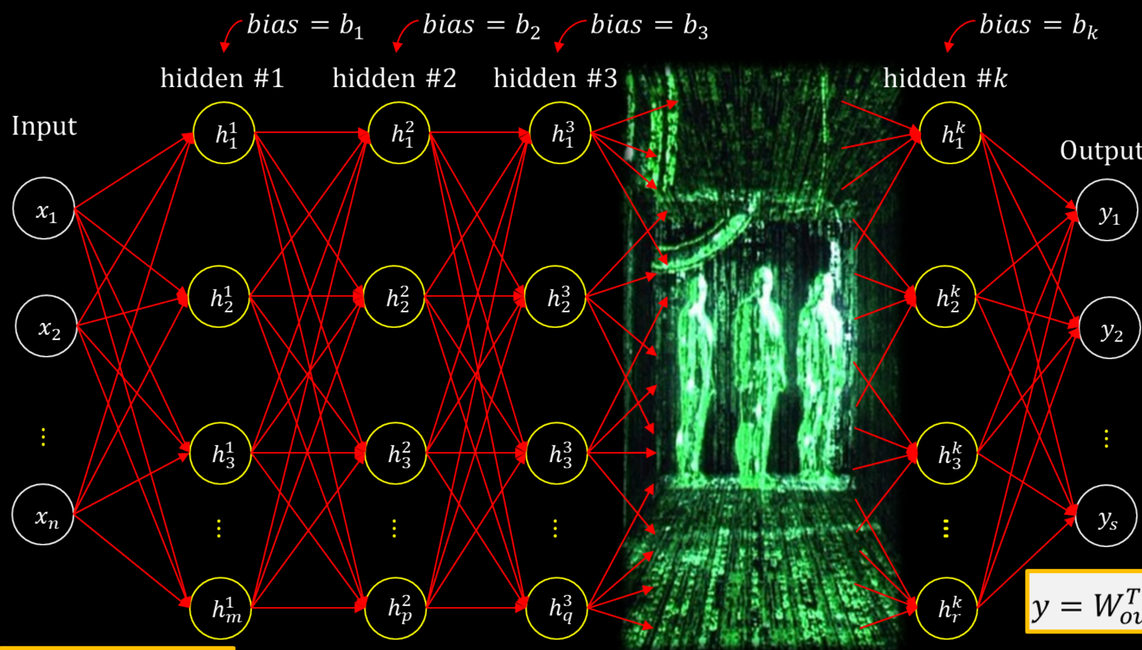
f 와 g 는 서로 역사상 관계이다!

결론: 선형 사상(변환)과 Matrix는 같다!

더 이상 복잡한 선형사상 ×
그저 행렬만 보면 된다.
벡터의 선형변환은 행렬만 보면 된다.

증명: 겁나게 복잡함 → 생략 ^^
(우리는 그냥 받아들이는 걸로…)

행렬과 벡터의 곱셈 - 딥러닝에서 그 진정한 의미는?



$y = W_{out}^T\ h^k$

$h^1 = W_1^T\ X + b_1$

$h^2 = W_2^T\ h^1 + b_2$

$h^3 = W_3^T\ h^2 + b_3$

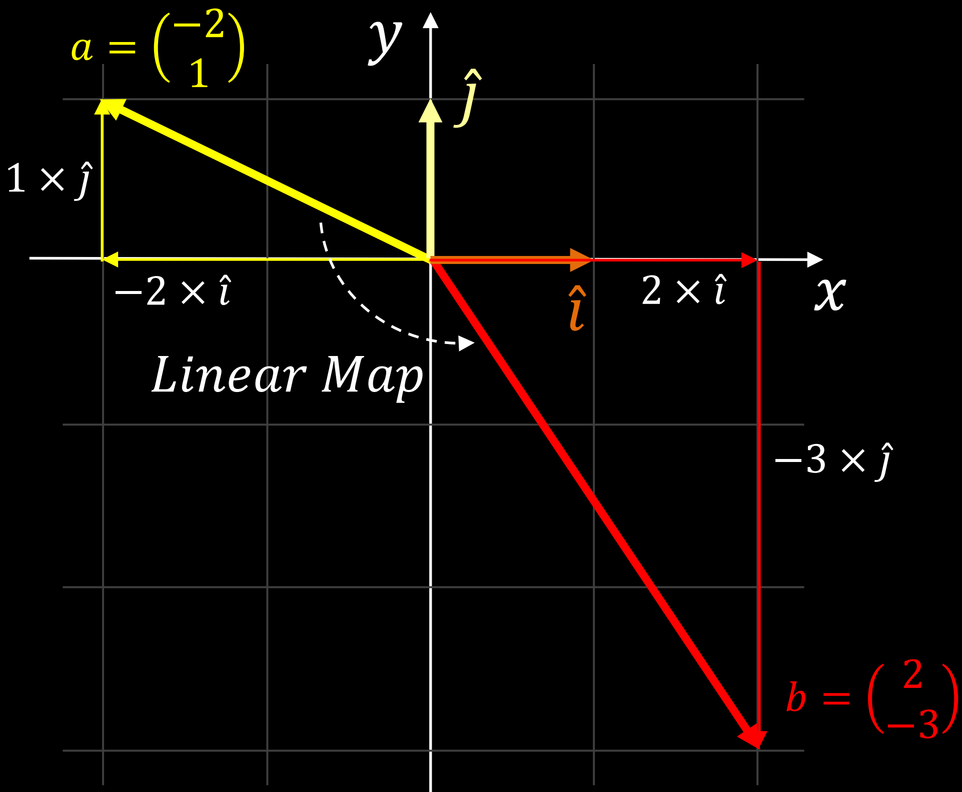
$h^k = W_k^T\ h^{k-1} + b_k$

벡터에 행렬을 곱한다는 의미가 도대체 무엇일까요?

$W \cdot X$ 

$A \cdot X$ 

Basis (기저)를 이용한 벡터의 표현



$\hat{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \hat{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

기저 벡터를 이용하면
모든 벡터를 표현할 수 있다.

$$a = -2 \times \hat{i} + 1 \times \hat{j}$$
$$= -2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$b = 2 \times \hat{i} + (-3) \times \hat{j}$$
$$= 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-3)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

a 를 b로 옮기는 선형변환?

$$Mapping\ \ L\colon\ a \rightarrow b$$

여기요! 교수님~~

이전 강의에서....

선형 사상(변환)과 Matrix는 같다고 했으니,

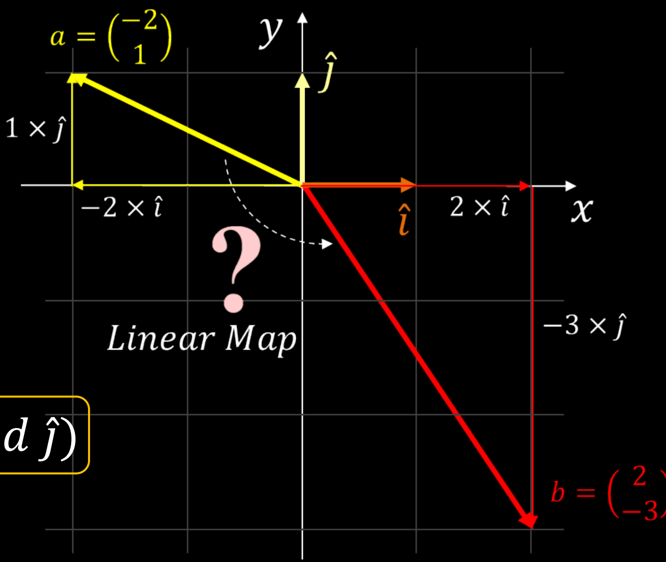
벡터와 행렬의 곱으로 표현하면 되는 것 아닌가요

Linear Transformation using Basis (기저 변환을 통한 선형변환)

$\hat{\imath} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\hat{\jmath} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $a = -2 \times \hat{\imath} + 1 \times \hat{\jmath}$

a 를 b로 옮기는 선형변환?

$Mapping\ \ L\!: a \rightarrow b$



$$L(a) = -2 \times \boxed{(Transformed\ \hat{\imath})} + 1 \times \boxed{(Transformed\ \hat{\jmath})}$$

$$L(a) = -2 \times (-1 \times \ \hat{\imath}) + 1 \times (-3 \times \hat{\jmath})$$

$$L(a) = -2 \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \times \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

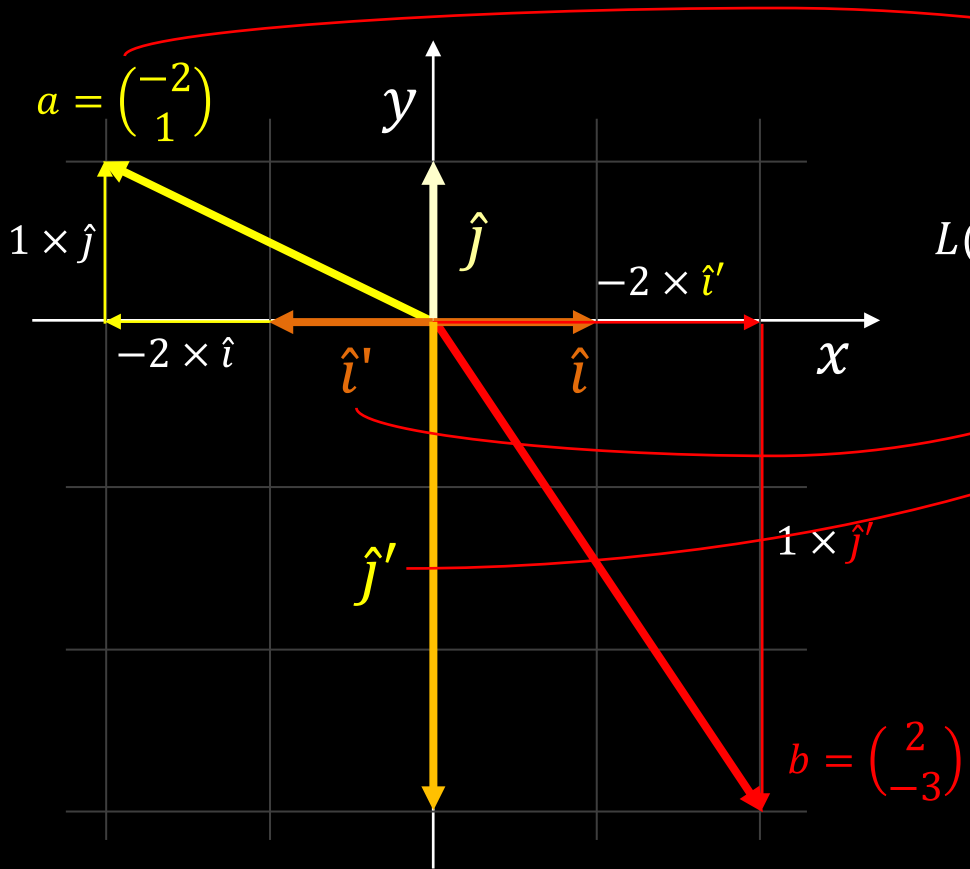
거의 다 왔습니다.
그림을 통해 직접
확인해 볼까요?

$$L(a) = \left(\boxed{\begin{matrix} -1 \\ 0 \end{matrix}} \ \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 3 \end{matrix}} \right) \left(\boxed{\begin{matrix} -2 \\ 1 \end{matrix}} \right)$$

선형변환 L의 입력 (a)

새로운 기저: $\hat{\imath}'$ 새로운 기저: $\hat{\jmath}'$

Generalization of Linear Transformation (선형변환의 일반화)



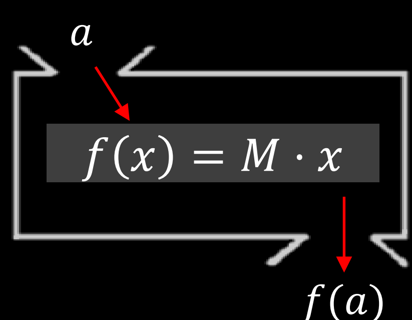
$$L(a) = \left(\boxed{\begin{matrix} -1 \\ 0 \end{matrix}} \ \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 3 \end{matrix}} \right) \left(\boxed{\begin{matrix} -2 \\ 1 \end{matrix}} \right) = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$L(a) = \boxed{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}} \boxed{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

함수의 몸체
하는일(선형변환)

함수의 입력

$$L(x) \Leftrightarrow f(x) = M \cdot x$$



행렬의 열 벡터: 새로운 기저의 좌표

행렬의 열 개수: 선형변환 차원 수

다양한 선형변환 맛보기

실습 페이지: http://acin.cju.ac.kr/Deeplearning/ViewMain/

선형변환 함수

Shearing (전단변환)

고정된 방향으로 각 포인트를 그 방향과
평행한 라인에서 부호가 있는 거리에
비례하는 양만큼 이동시키는 선형변환 함수

$$L(a) = \boxed{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Rotating (회전변환)

임의의 벡터를 원점을 중심으로 회전시키는
선형변환 함수

$$L(a) = \boxed{\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} \\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Permutation (치환변환)

행과 열을 맞바꾸는 선형변환 함수

$$L(a) = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Projection (사영변환)

차원을 축소하여 (예: 2차원 → 1차원)
설정한 축으로 프로젝션(projection)하는 함수

$$L(a) = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

수고하셨습니다 ..^ ^..