Linear Algebra

Vector Product (벡터의 곱셈)

소프트웨어 꼰대 강의

노기섭 교수

(kafa46@cju.ac.kr)

벡터 곱하기 연산

벡터와 벡터를 곱하는 방법

벡터는 크기와 방향을 가진다

[Note]
이전 강의에서 다루었던 scaling에서의
Scalar Multiplication (스칼라 배)와
혼동하지 마세요 ^^.

곱셈 결과 **크기**만 남는 경우 (scalar) ⇨ Scalar Product (스칼라 곱)

'내적', 'dot product', 'inner product'라고 부르기도 함

곱셈 결과 **벡터**가 남는 경우 (vector) ⇨ Vector Product (벡터 곱)

'~~외적~~', 'cross product', '가위곱'이라고 부르기도 함

곱셈 결과 **텐서**가 남는 경우 (tensor) ⇨ Outer Product (외적)

Scalar Product - Definition

벡터와 벡터를 곱하는 방법

곱셈 결과 크기만 남는 경우

한 벡터의 크기가 다른 벡터에 가해졌을 때 변화되는 크기 (scalar)

표기법

$$u = (u_1, u_2, \cdots, u_n)^T$$

$$v = (v_1, v_2, \cdots, v_n)^T$$

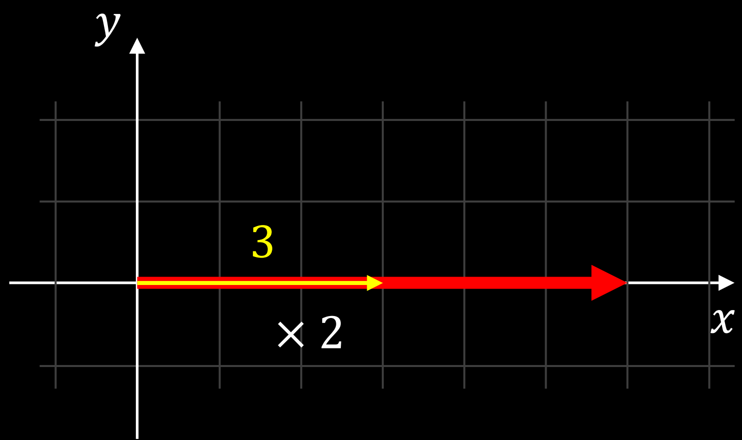
$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$$

직관적 이해 → 다음 슬라이드

Scalar Product - 직관적으로 살펴보기

실수에서 어떤 수를 곱한다는 의미

$3 \quad \times \quad 2 \quad = \quad 6$



u라는 벡터가 있다.

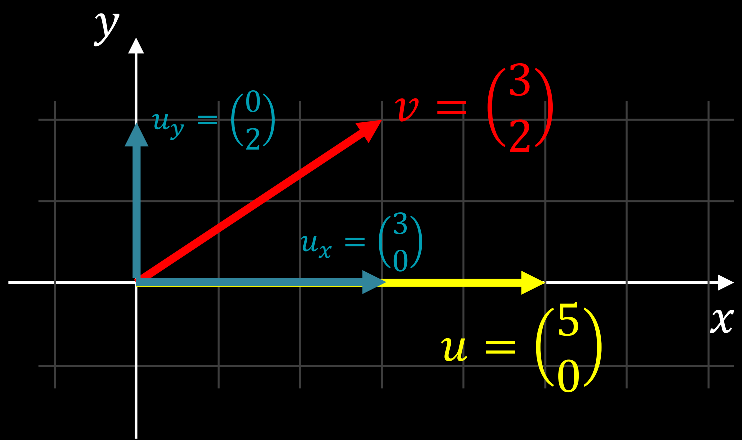
u에 벡터 v의 크기가 곱해졌을때

벡터 u의 크기는 어떻게 바뀌는가?

$$u \cdot v = \|u\| \|v\| \cos\theta$$

벡터와 벡터를 곱한다는 의미

$$u \cdot v = \begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} = ???$$



1. 벡터 v의 크기? $\|v\| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$

벡터 v의는 방향이 있기 때문에
$\sqrt{13}$ 모두 영향을 주지 않을 것임

벡터 u와 방향이 일치한
크기만큼만 곱해주자!? $u_x = \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$

$\|u_x\| = \sqrt{3^2 + 0^2} = 3$

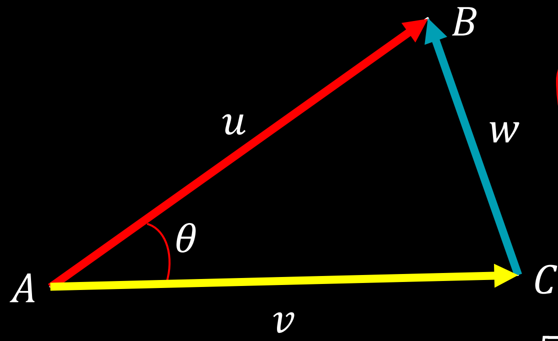
Why ??

$$u \cdot v = \|u\|\,\|v\|\cos\theta$$

Why ???

$$u \cdot v = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n$$

증명 → 제2 코사인 법칙



$$\boxed{\|w\|}^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\boxed{\|u\|\|v\|\cos\theta}$$

$$u = v + w$$

$$\boxed{w = u - v}$$

$$\|u - v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\,u \cdot v$$

$$2u \cdot v = \|u\|^2 + \|v\|^2 - \|u - v\|^2$$

$$2u \cdot v = \sqrt{u_1^2 + \cdots + u_n^2}^{\,2} + \sqrt{v_1^2 + \cdots + v_n^2}^{\,2} - \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + \cdots + (u_n - v_n)^2}^{\,2}$$

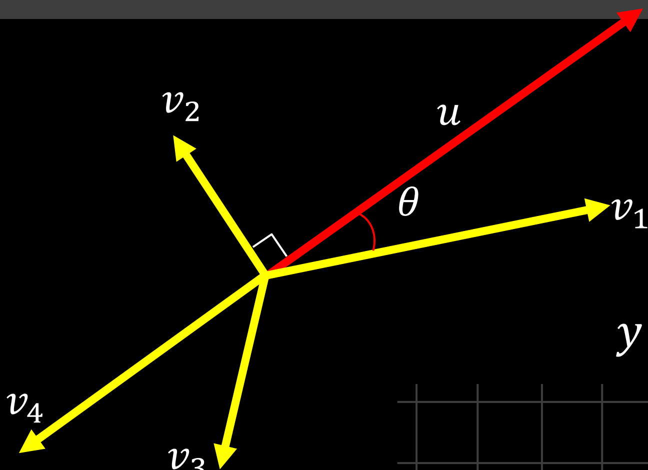
$$2u \cdot v = \cancel{u_1^2} + \cdots + \cancel{u_n^2} + \cancel{v_1^2} + \cdots \cancel{v_n^2} - \left((\cancel{u_1^2} - 2u_1v_1 + \cancel{v_1^2}) + \cdots + (\cancel{u_n^2} + -2u_nv_n + \cancel{v_n^2})\right)$$

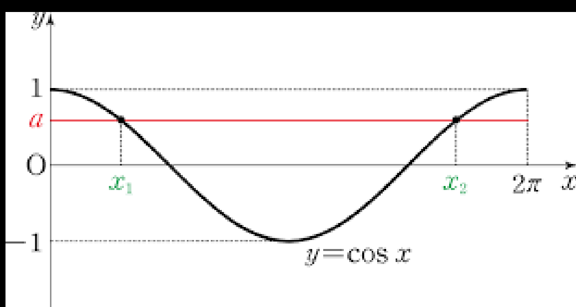
$$\cancel{2}u \cdot v = \cancel{2}u_1v_1 + \cdots + \cancel{2}u_nv_n \quad ⇨ \quad u \cdot v = u_1v_1 + \cdots + u_nv_n$$

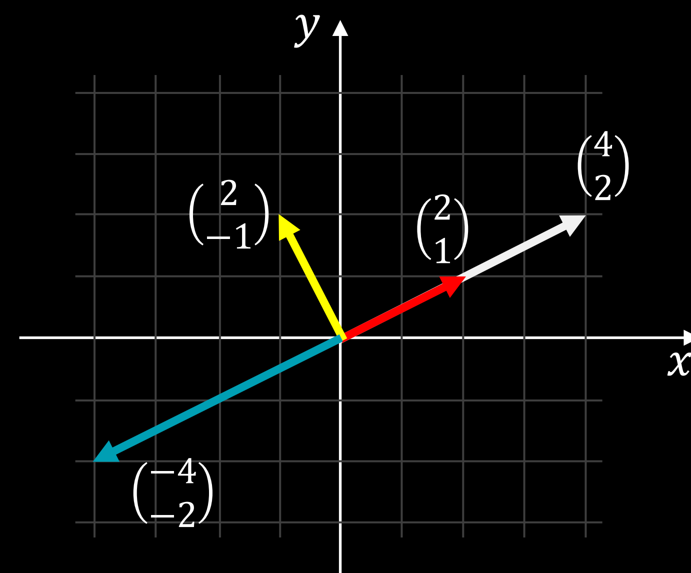
Similarity between Two Vectors

$$u \cdot v = \|u\| \, \|v\| \cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{u \cdot v}{\|u\| \, \|v\|}$$







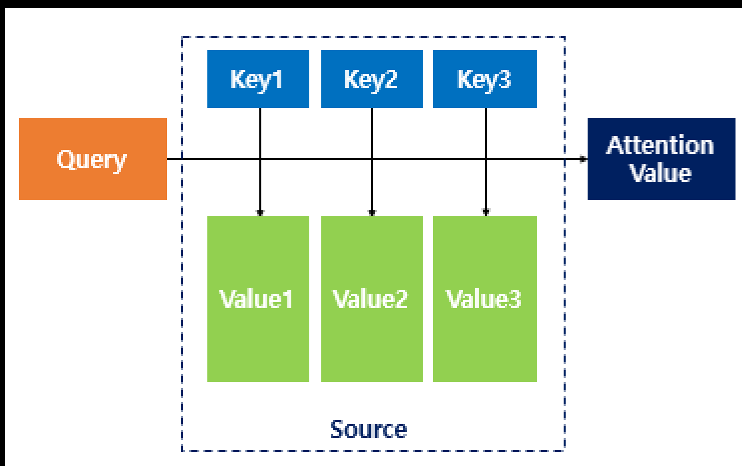
$$\cos\theta = \frac{2 \cdot 4 + 1 \cdot 2}{\sqrt{2^2 + 1^2} \times \sqrt{4^2 + 2^2}} = \frac{10}{\sqrt{5} \times \sqrt{20}} = \frac{10}{\sqrt{100}} = 1$$

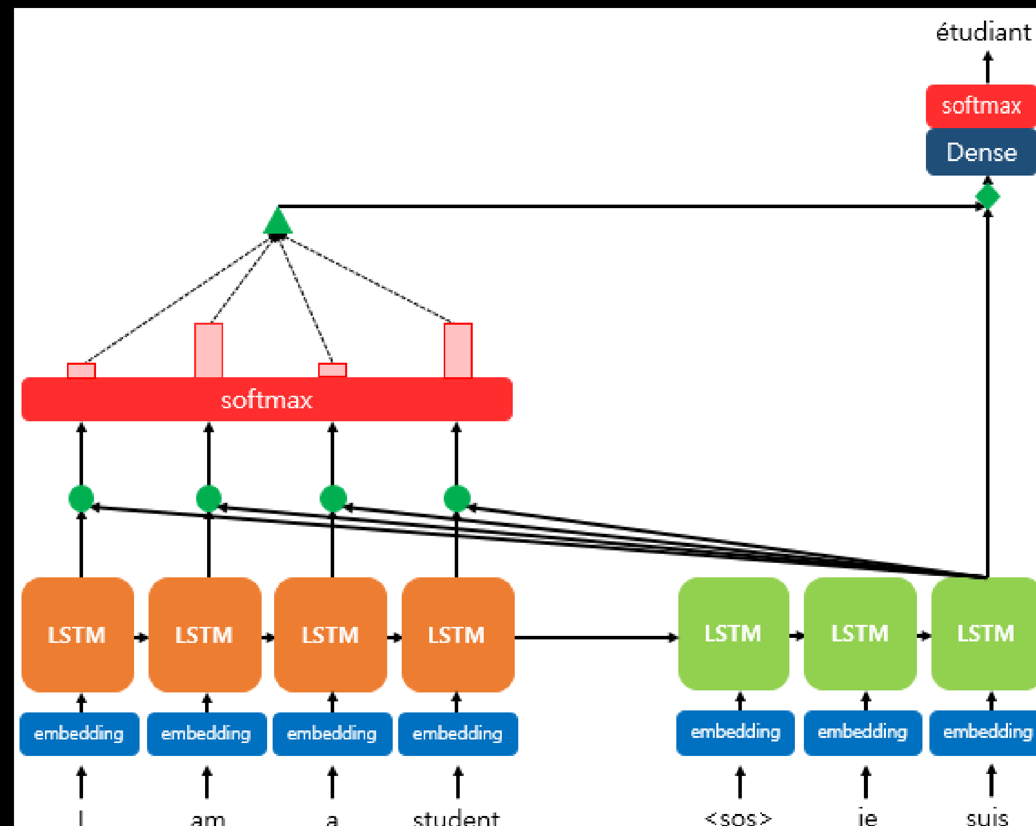
$$\cos\theta = \frac{2 \cdot -1 + 1 \cdot 2}{\sqrt{2^2 + 1^2} \times \sqrt{(-1)^2 + 2^2}} = \frac{0}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{0}{\sqrt{25}} = 0$$

$$\cos\theta = \frac{2 \cdot -4 + 1 \cdot -2}{\sqrt{2^2 + 1^2} \times \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2}} = \frac{-10}{\sqrt{5} \times \sqrt{20}} = \frac{-10}{\sqrt{100}} = -1$$

Scalar Product? 딥러닝 어디에 쓰나요?

Attention Mechanism: Seq2Seq, Transformer, BERT, GPT, …





이 외에도 수많은
딥러닝 아키텍처에서
쉽게 볼 수 있어요^^

Cross Product

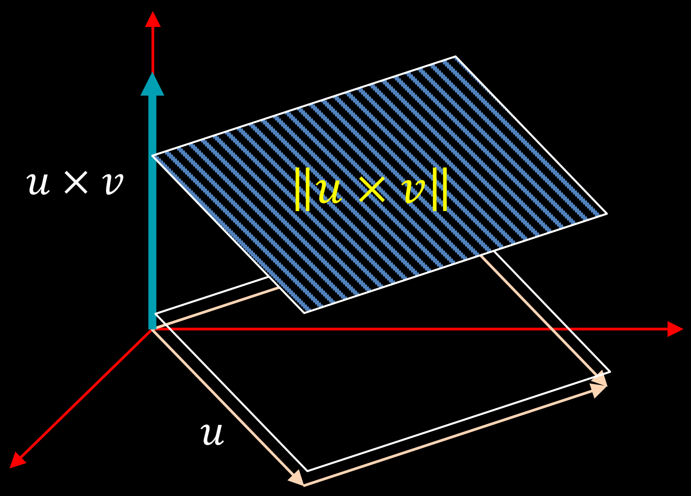
벡터와 벡터를 곱하는 방법

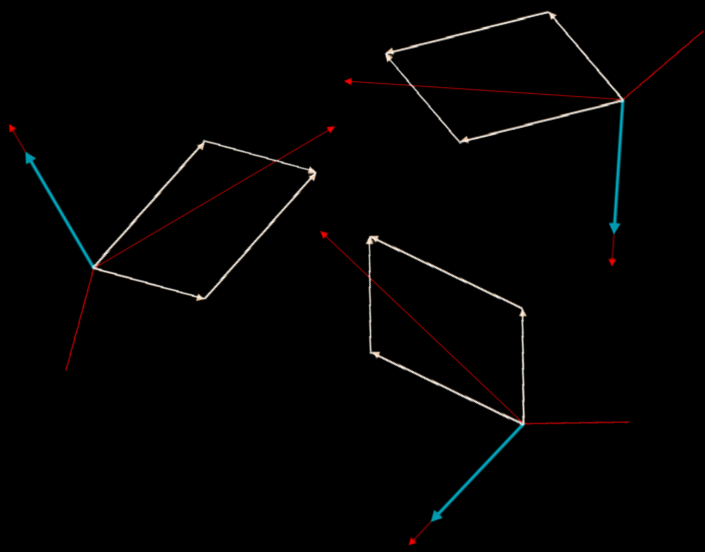
곱셈 결과 크기와 방향이 모두 남는 경우(vector)

수학자들은 어떻게 정의 했을까?

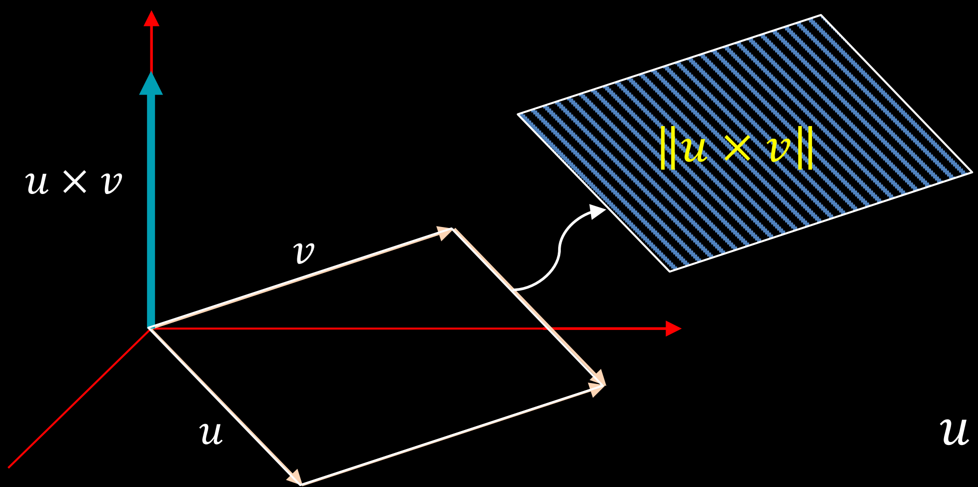
새로운 벡터의 방향: 두 벡터가 생성하는 평행사변형에 수직

새로운 벡터의 크기: 두 벡터가 생성하는 평행사변형 면적



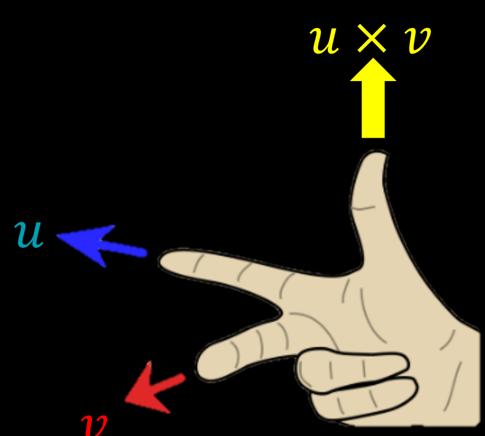


Example of Cross Product



Cross Product는 딥러닝에서
거의 사용하지 않습니다. ^^
하지만, 다양한 벡터 연산 과정을
이해하는데 도움이 됩니다 ^^

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \qquad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$



Right Hand Rule

$$u \times v = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Cross Product

벡터와 벡터를 곱하는 방법

곱셈 결과 텐서(tensor)가 남는 경우 ⇨ Outer Product (외적)

Tensor 는 할 이야기가 많아서

별도로 다룰 예정입니다 ~~

수고하셨습니다 ..^ ^..