Linear Algebra

Rank in Matrix
(행렬에서의 Rank)

소프트웨어 꼰대 강의

노기섭 교수

(kafa46@cju.ac.kr)

Rank in Matrix

Rank (한국말로 '계수' → 혼동을 주는 경우가 있어 '랭크'라고 부르는 경우가 많습니다.)

직관적 이해: 선형변환의 출력 값의 차원(Basis 개수)

정사각행렬: 현재 차원과 동일한 차원으로 변환

$$A = \boxed{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \left.\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right\}$$

선형변환 출력의 차원 (3차원)

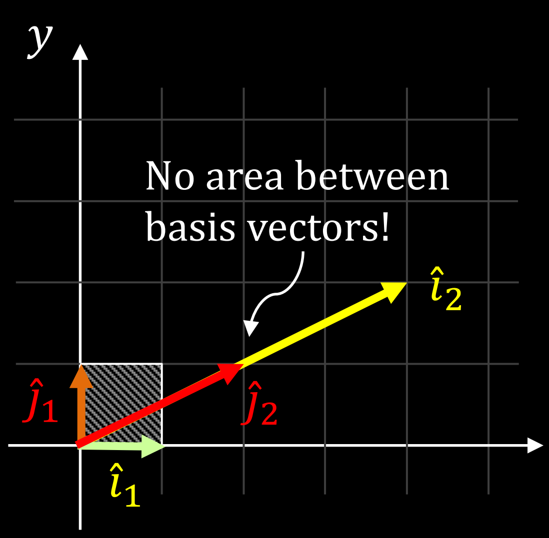
선형변환 행렬(함수)의 열(기저) 개수 3개

Matrix Rank 구하는 것이 너무 간단하다구요?

너무 간단한 것 아닌가요?

⇨ 행렬의 행 개수(열벡터의 원소 개수)만 세면 되는 거잖아요?

Determinant 값이 Zero 일 경우 차원이 축소됩니다.



$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix}} \end{pmatrix} = 0$$

$$\hat{\imath}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \hat{\jmath}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2차원 좌표에서 행렬변환을 위해 주어진

행렬의 determinant 값이 0 이라면

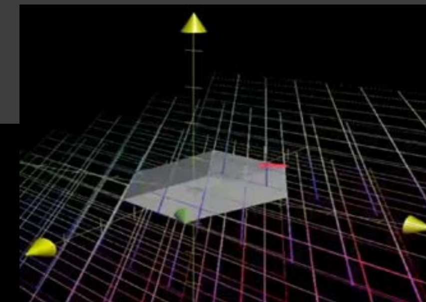
모든 출력 벡터는 하나의 직선 위에 생깁니다.

직선은 1차원 입니다

→ 2차원 출력으로 예상했지만 1차원이 되었습니다.

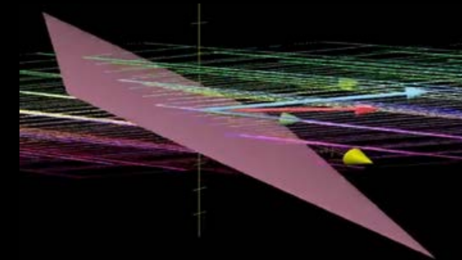
모든 값이 0이 될 경우 0차원(scalar)이 될 수도 있습니다.

Determinant with Non-zero & Zero

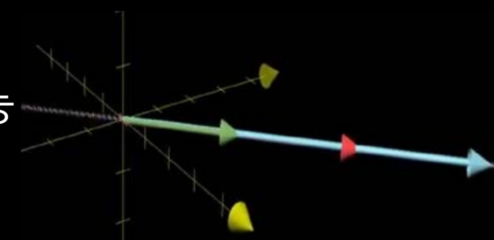


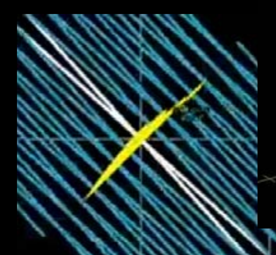
3차원 (3 × 3) 행렬은 더 복잡할 수 있습니다.

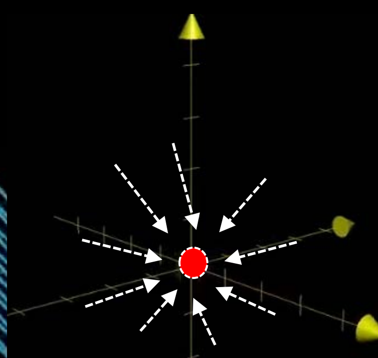
Determinant ≠ 0 → 출력 Dimension은 당연히 3차 ^^



Determinant = 0
- → 출력 차원은 2차원(평면) 축소 가능
- → 출력 차원은 1차원(직선)도 역시 가능
- → 출력 차원은 0차원(scalar)도 역시 가능







Rank in Matrix

정사각행렬: 현재 차원과 동일한 차원으로 변환

$$A = \boxed{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

선형변환 출력의 차원 (3차원)

선형변환 행렬(함수)의 열(기저) 개수 3개

교수님~~ 정사각행렬이 아닌 경우는 어떤가요?

행렬의 열벡터들로 생성된(span) 공간의 차원

벡터 부분공간 $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ 내의 모든 가능한 선형결합으로 이루어진 부분벡터 공간

$$A = \left(\boxed{\begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \end{matrix}} \; \boxed{\begin{matrix} a_{12} \\ a_{22} \end{matrix}} \; \boxed{\begin{matrix} a_{13} \\ a_{23} \end{matrix}} \right)$$

$$v_1 \quad v_2 \quad v_3$$

$$span(S) = \left\{ \sum_{i=1}^{3} k_i v_i \,\middle|\, k_i \in F, v_i \in S \right\}$$

⇨ 이 부분공간의 기저 개수(차원)

교수님~~ 좀 더 일반화 해서 알려주세요^^

Definition: Rank

정말 헷갈리는군.... 뭔가 깔끔한 용어로 정의한게 있을것 같은데...?

$$A = \begin{pmatrix} \overbrace{a_{11} \quad \cdots \quad a_{1n}}^{\text{새로운 기저의 위치}} \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ a_{m1} \quad \cdots \quad a_{mn} \end{pmatrix}\left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\end{matrix}}\right\} \text{새로운 기저의 차원??}$$

3×3

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

변환후에도 동일
(정사각행렬)

3×2

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

차원 확장
(행 $>$ 열)

2×3

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

차원 축소
(행 $<$ 열)

Rank: The rank of a matrix A is the dimension of the vector space generated (or spanned) by its columns. This corresponds to the maximal number of linearly independent columns of A. This, in turn, is identical to the dimension of the vector space spanned by its rows.

(자료출처: https://en.wikipedia.org/wiki/Rank_(linear_algebra))

Column space (열공간): 선형독립인 column vector로 이루어진 공간

Row space (행공간): 선형독립인 row vector로 이루어진 공간

Matrix A 가 생성하는 공간은 동일할 것임 → dim (column space) = dim (row space)

행렬을 통한 선형변환 이후 생성하는 열(또는 행)공간의 기저 개수 (차원, dimension)

참고자료: https://blog.naver.com/sw4r/221416614473

수고하셨습니다 ..^ ^..