

# Linear Algebra

## Introduction to Vectors (History, Definition, Types, Representation, Norm)

소프트웨어 끈대 강의

노기섭 교수

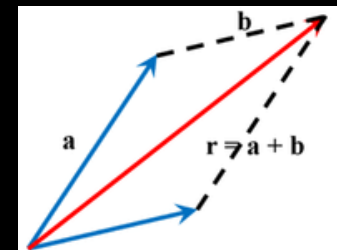
(kafa46@cju.ac.kr)

# History



Simon Stevin (네델란드, 1548~1620)

- 16세기 열강의 등장
- 식민지 쟁탈 경쟁 → 대항해 시대
- 출발/도착지, 배의 위치, 속도, 조류...

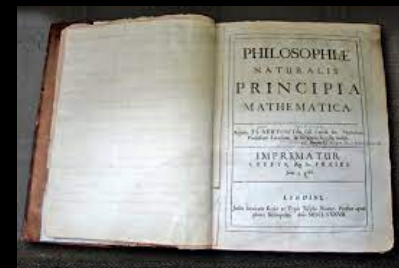


힘의 평행사변형 법칙



Isaac Newton (영국, 1643~1727)

- 수학자, 물리학자, 천문학자
- 만유인력의 법칙, 3가지 운동 법칙
- 근대 수학 집대성 (저서: 프린키피아)

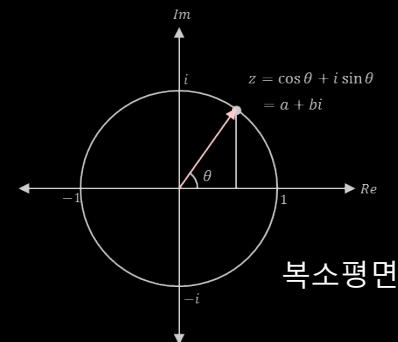


벡터에 대한 명확한 정립



Friedrich Gauss(독일, 1777~1855)

- 수많은 업적(물리, 천문, 기하학,...)
- 복소평면: 복소수  $\mathbb{C}$ 를 실수평면  $\mathbb{R}^2$ 에 표현
- 벡터를 이용한 복소수의 대수적 연산



# Perspectives

## Physics

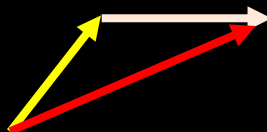
화살표로 표시  
운동, 자기장, 전기장, ...



크기, 방향이 같다면  
모두 같은 벡터  
좌표공간에서 자유롭게  
이동하는 것도 가능

## Mathematics

화살표, 리스트(튜플)  
어떤 형태든  
상호 사용할 수 있게  
(더하기, 곱하기 등)

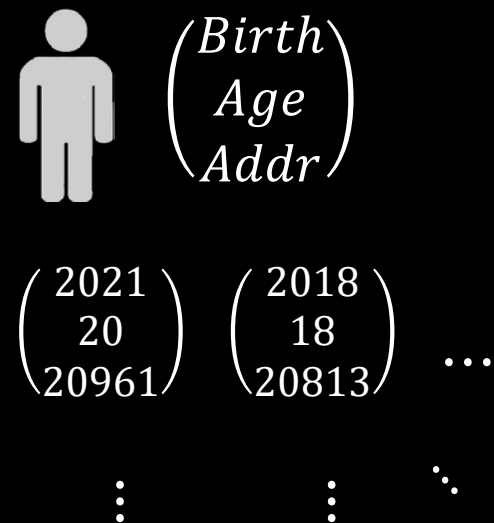


$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix}$$

## Computer Science

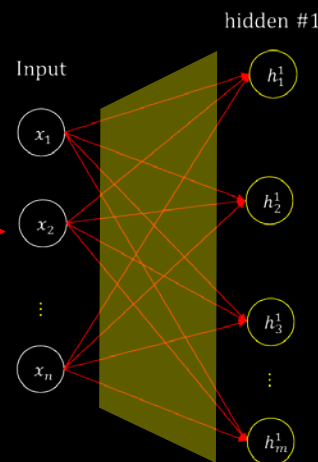
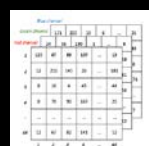
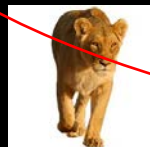
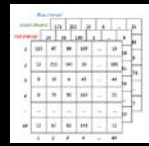
리스트, 튜플로 표시  
Features, Dataset, ...



# 딥러닝에서 벡터가 어디에 있어요???



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Order #	First Name	Last Name	Email	Country	IP address	Total	Item #	Payment	Shipping	Status
2	1	Dalton	Kramer	dalton@email.com	France	211.91.226.108	99	868	Card	Regular	In progress
3	2	Gita	Tetterton	gita@email.com	USA	222.153.179.100	99	537	Card	Regular	Delivered
4	3	Weston	Jurgens	weston@email.com	Spain	203.123.236.1	99	616	Paypal	Regular	Delivered
5	4	Brad	Chupp	brad@email.com	France	202.183.111.122	49	673	Card	Fast	Delivered
6	5	Marybeth	Baumann	marybeth@email.com	Italy	214.132.168.129	199	829	Bank	Regular	In progress
7	6	Allyson	Feder	allyson@email.com	Italy	182.108.190.85	29	40	Card	Regular	In progress
8	7	Lucile	Folks	lucile@email.com	Greece	18.64.161.62	199	548	Paypal	Fast	In progress
9	8	Mickey	Rusk	mickey@email.com	Canada	40.18.115.207	49	53	Paypal	Fast	Delivered
10	9	Clarine	Esslinger	clarine@email.com	Greece	185.134.23.86	49	817	Bank	Regular	Delivered
11	10	Kimberly	Penny	kimberly@email.com	France	34.72.165.11	99	998	Bank	Regular	In progress
12	11	Colleen	Kellough	colleen@email.com	USA	73.51.152.185	49	14	Paypal	Regular	In progress
13	12	Nettie	Edmonds	nettie@email.com	Spain	94.133.138.234	99	670	Card	Fast	Delivered
14	13	Duncan	Rickenbacker	duncan@email.com	France	211.91.226.108	199	869	Card	Regular	Delivered
15	14	Marchelle	Diedrich	marchelle@email.com	Italy	222.153.179.100	29	536	Paypal	Regular	Delivered
16	15	Mariano	Murrell	mariano@email.com	Italy	203.123.236.1	99	477	Card	Fast	Delivered



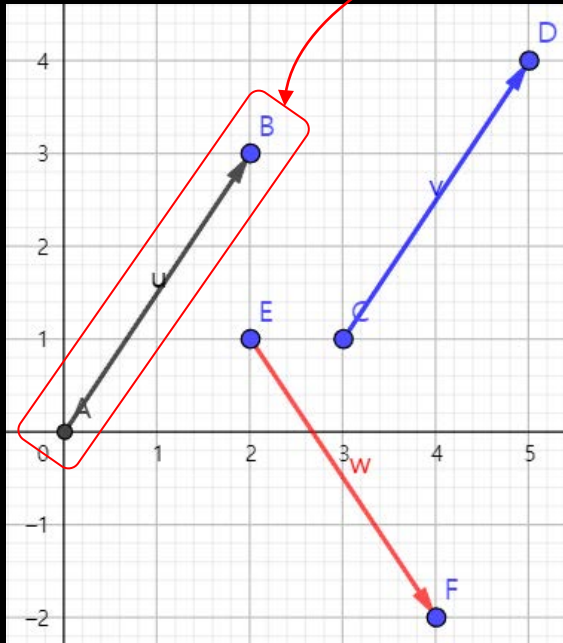
$$h^1 = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{21} & \cdots & w_{n1} \\ w_{12} & w_{22} & \cdots & w_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{1m} & w_{2m} & \cdots & w_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$h^1 = W_1^T X + b_1$$

여러분이 갖고 있는  
딥러닝 네트워크

# 우리가 사용할 벡터

물리적 벡터에서 시점, 종점은 의미 없음  
크기, 방향이 같으면 모두 같은 벡터



딥러닝에서...

우리가 사용할 벡터는  
오직 원점(origin)에서  
출발하는 벡터만  
사용합니다!

출발점이  
원점이 아닌  
유일한 경우  
→ 벡터 덧셈할 때

데이터의 의미를  
곰곰히 생각해 보세요 ^^.

사실 Linear Algebra에서는  
거의 모든 경우 벡터는  
원점에서 출발합니다.

# 그림으로 보는 벡터

## 벡터의 표현

- 좌표계 (단위 포함)
- 원점
- 벡터를 표시할 값 (순서쌍)

$$a = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

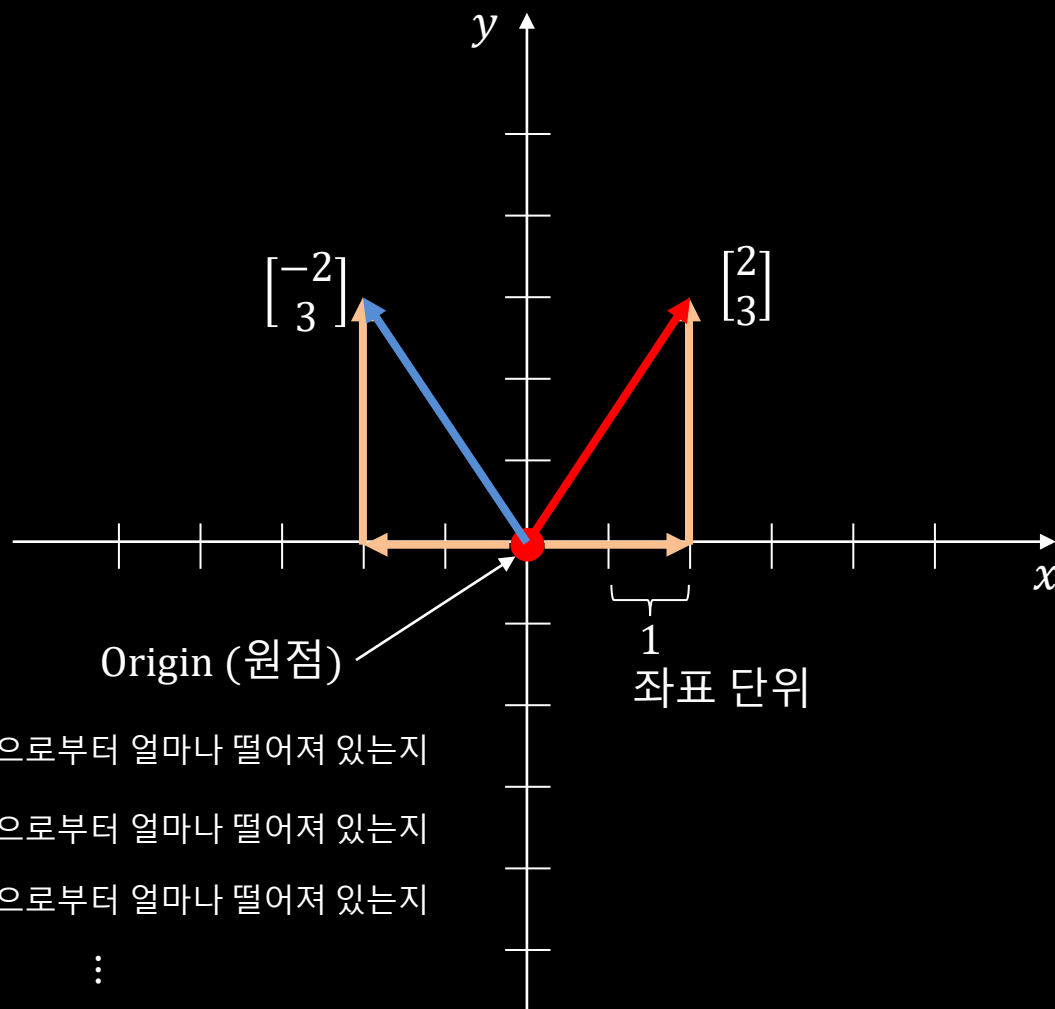
첫번째 축: 원점으로부터 얼마나 떨어져 있는지

두번째 축: 원점으로부터 얼마나 떨어져 있는지

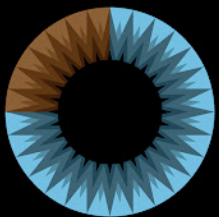
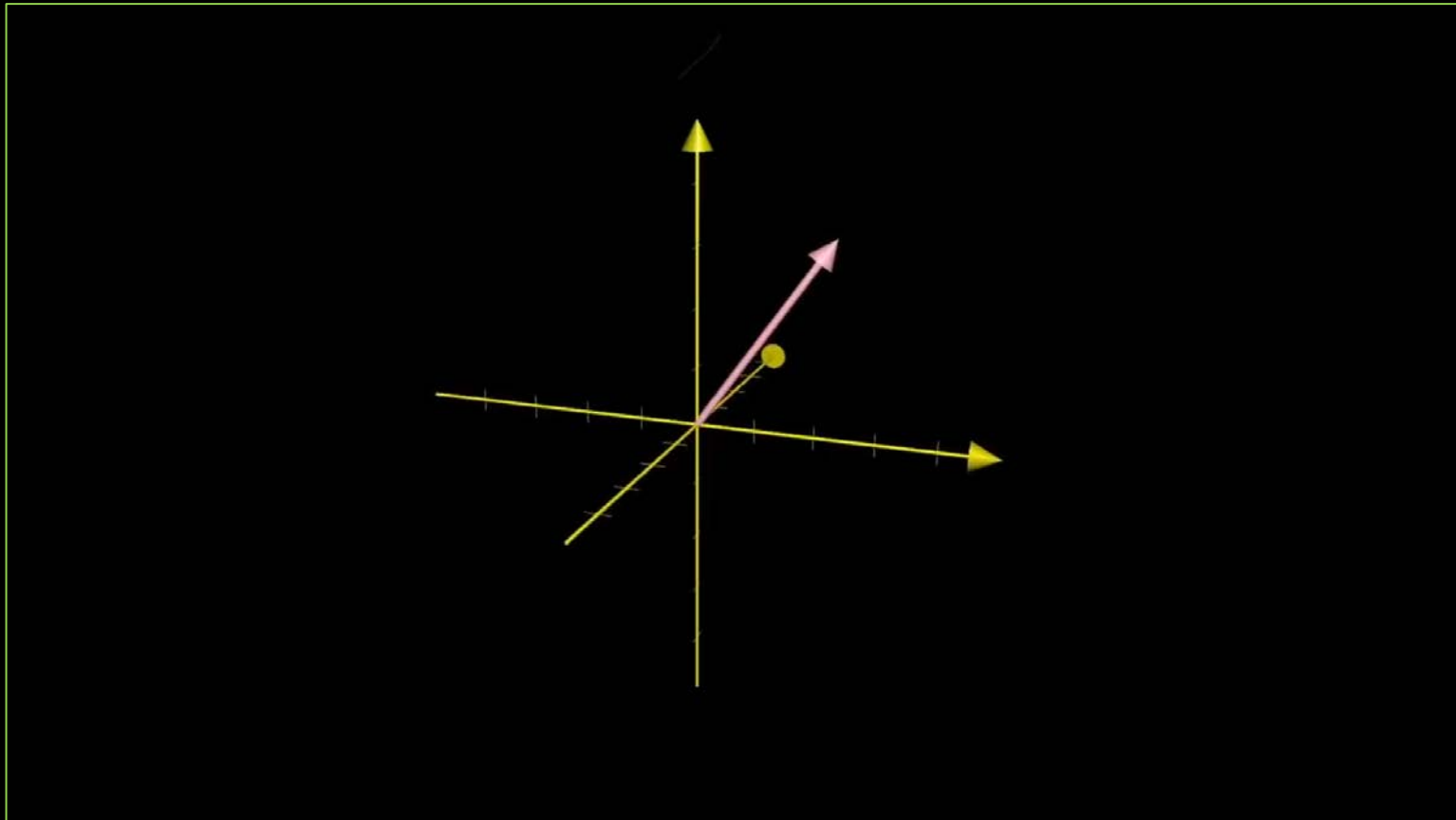
세번째 축: 원점으로부터 얼마나 떨어져 있는지

⋮

⋮



# 3차원 공간 - 3차원 벡터



3Blue1Brown

강력히! 강력히!  
추천합니다 ^^.

동영상 출처:

[https://youtu.be/fNk\\_zzaMoSs?list=PLZHQObOWTQDPD3MizzM2xVFitgF8hE\\_ab&t=245](https://youtu.be/fNk_zzaMoSs?list=PLZHQObOWTQDPD3MizzM2xVFitgF8hE_ab&t=245)

# 벡터의 표현

벡터의 표현

$$\vec{a} =$$

세로로 쓰는 것이 원칙!  
(‘열벡터’라고 부름)

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

벡터의 차원: 원소의 개수

3개의 원소 → 3차원 벡터

화살표를 사용하기 귀찮을 경우  
굵은(Bold) 글자로 표현하기도 합니다.

$$\vec{a} = \mathbf{a}$$

어떤 경우 화살표도 안쓰고,  
굵은 표시도 안하는  
경우도 있습니다 ^^.

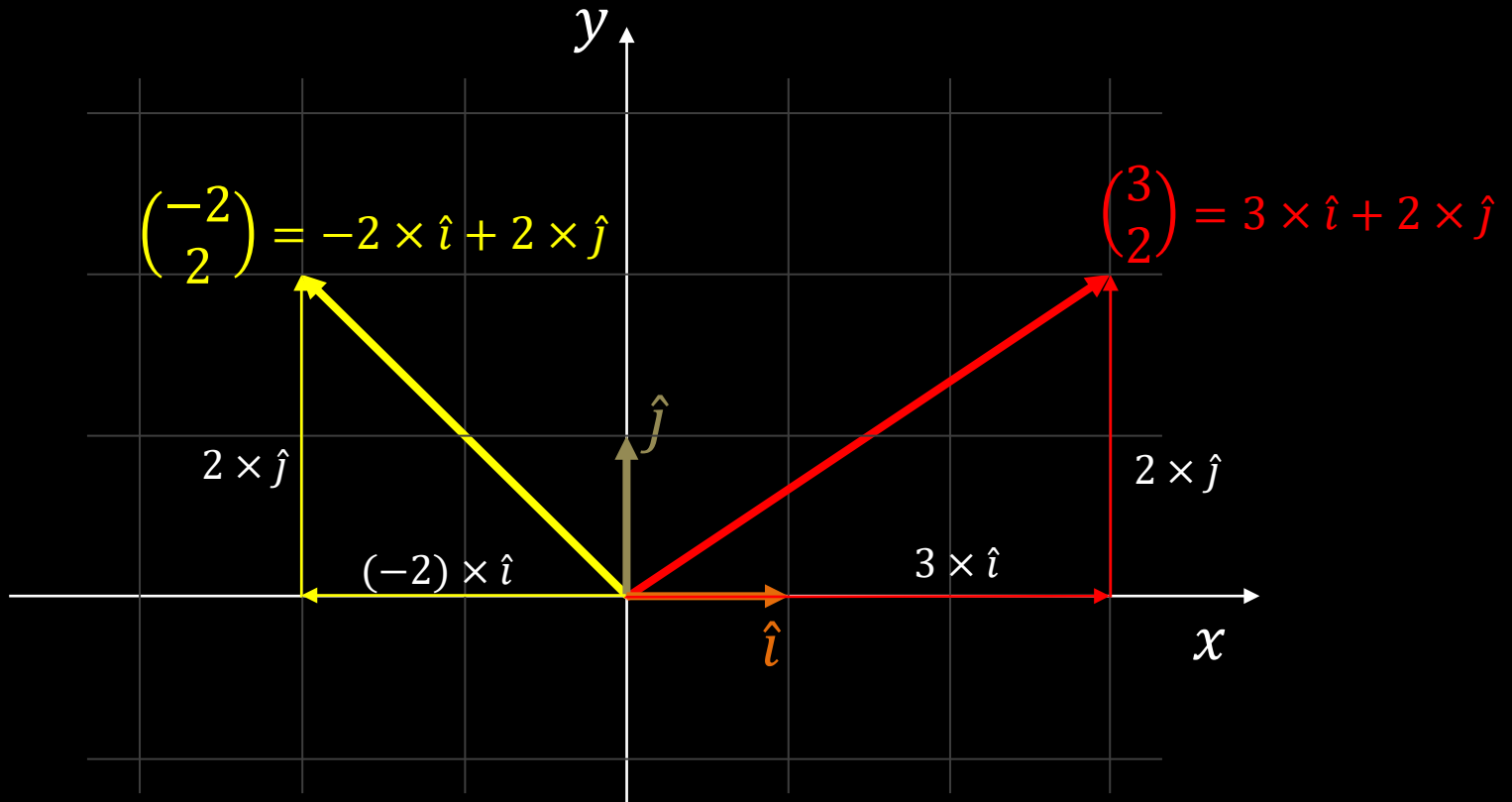
저도 그냥 소문자로  
표현하는 경우가 많아요 ^^.  
알아서 들으세요 ~

$$\vec{b} = (1 \quad 2 \quad 3)^T$$

Computer Science에서는 그냥 가로로 쓰기도 합니다.  
(‘행벡터’라고 부름)



# Basis Vectors - 맛보기



*Basis Vector:  $\hat{i}, \hat{j}$*

만약 기저 벡터를 다르게 선택하면  
어떻게 될까???

# 벡터의 종류

**Zero vector** (영벡터): 벡터의 모든 성분이 0인 벡터,  $\vec{0}$  또는  $0$  으로 표현

**Unit vector** (단위 벡터): Norm이 1인 벡터

어떤 벡터를 단위 벡터로 만들기 (정규화, Normalization)

$$\text{Normalization of } \mathbf{v} \Rightarrow \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$$

**Standard unit vector** (표준 단위 벡터): 하나의 원소의 크기가 1이고 나머지는 0인 벡터

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)^T$$

$$\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)^T$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{e}_n = (0, 0, 0, \dots, 1)^T$$

임의의 벡터  $\mathbf{v}$ 는 표준단위벡터로 표현할 수 있다!

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)^T$$

$$= (v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + \dots + v_n \mathbf{e}_n)^T$$

# 벡터의 크기? Norm?

## ■ Definition

In mathematics, a norm is a function from a real or complex vector space to the non-negative real numbers that behaves in certain ways like the distance from the origin. (source: [online wiki](#))

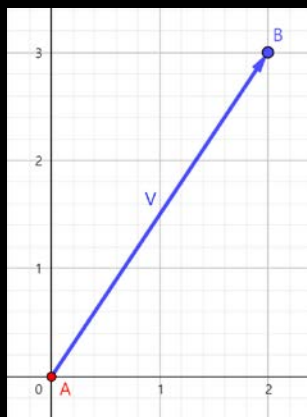
한글로 '노름' 으로 읽음 ([정보통신기술용어해설집](#))

## ■ 벡터의 Norm

- 정의

$$\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}, \quad \text{where } v = (v_1, v_2, \dots, v_n)^T$$

- Toy example



$$v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\|v\| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

2차원 실수 공간에서는 원점으로부터의 거리와 동일

하지만  $n$ 차원일 경우 ...

거리 개념이 모호해진다...

Norm 이라는 용어를 사용하자!





수고하셨습니다 ..^^..