5. CVIKO

KOMPLEXNÍ ANALÝZA

Komplexní čísla

Nutnost řešit rovnice typu $\boxed{x^2+1=0}$

$x = \pm\sqrt{-1}$ $\left\langle \begin{matrix} j \\ -j \end{matrix}\right.$

Komplexní čísla

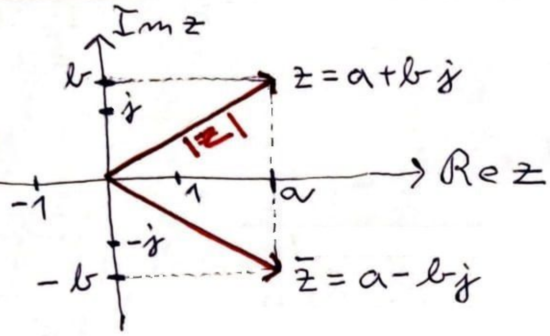
a) algebraický tvar

$\boxed{j=\sqrt{-1}}$

$\boxed{j^2=-1}$

$\boxed{j^3=-j}$

$\boxed{j^4=1}$



$\boxed{z = a+bj}$ (algebr. tvar)

$\bar{z} = a-bj$ komplexně sdružené číslo

$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ velikost čísla z

$|z|^2 = z\cdot\bar{z}$ $\left(a^2+b^2 = (a+bj)(a-bj)\right)$

Př Uprav na algebraický tvar

(i) $\boxed{\dfrac{20-10j}{1-3j} + (2j-1)^2} = \dfrac{20-10j}{1-3j}\cdot\dfrac{1+3j}{1+3j} + (-4)-4j+1 =$

$= \dfrac{20+60j-10j+30}{1+9} - 3-4j = \dfrac{50+50j}{10} - 3-4j = 5+5j-3-4j = \boxed{2+j}$

(ii) $\boxed{j^{1291} - \dfrac{1}{j^{74}} + \left(j|1-j|\right)^6} = j^{1288}\, j^3 - \dfrac{1}{j^{72}\cdot j^2} + (j\sqrt{2})^6 =$

$= 1\,(-j) - \dfrac{1}{1\cdot(-1)} + (-1)\cdot 8 = -j+1-8 = \boxed{-7-j}$

Př $\boxed{\text{DÚ-ČAS}}$ Řešte rovnici $|z| - z = 1+2j$ v $\mathbb{C}$.

$\sqrt{x^2+y^2} - x - jy = 1+2j$

$\underline{\underline{\text{Re } z}}$: $\sqrt{x^2+y^2} - x = 1$

$x^2+y^2 = x^2+2x+1$

$4 = 2x+1$

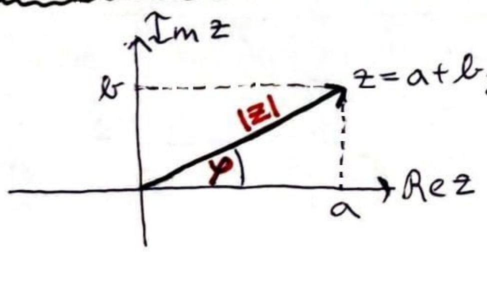
$\boxed{x = 3/2}$

$\underline{\underline{\text{Im } z}}$: $-y = 2 \Rightarrow \boxed{y=-2}$

$\boxed{z = \frac{3}{2} - 2j}$

---

b) goniometrický tvar



$\boxed{z = |z|\cdot(\cos\varphi + j\sin\varphi)}$ (goniometr. tvar)

Výpočet φ z rovnic:

$\boxed{\cos\varphi = \dfrac{a}{|z|}}$ a $\boxed{\sin\varphi = \dfrac{b}{|z|}}$ (Lze i vyčíst z obrázku!)

$\boxed{\varphi \in \langle 0, 2\pi)}$

$\boxed{\varphi = \arg z}$ jiné značení – tzv. **HLAVNÍ** ARGUMENT ČÍSLA z

$\boxed{\text{Arg } z = \varphi + 2k\pi}$ – **OBECNÝ** ARGUMENT ČÍSLA z

(Př) Převeď komplexní číslo $z = a + bj$ na goniometrický tvar:

a) $\boxed{\text{Já}}$ $z = 3+3j$ $\left[z = 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + j\sin\frac{\pi}{4}\right) \right]$

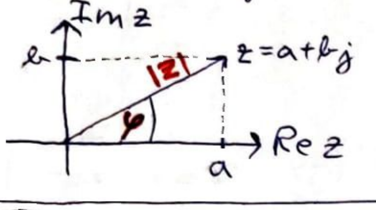
b) $z = 1-\sqrt{3}\,j$ $\left[z = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + j\sin\frac{5\pi}{3}\right);\ \varphi' = 60° \Rightarrow \varphi = 360° - 60° = 300° = \frac{5\pi}{3} \right]$

c) $z = -1$ $\left[z = \cos\pi + j\sin\pi \right]$

d) $\boxed{\text{DÚ}}$ $z = -1-j$ $\left[z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + j\sin\frac{5\pi}{4}\right) \right]$

c) exponenciální tvar

- souvisí s goniometrickým



$\boxed{z = |z| \cdot e^{j\varphi}}$ (exponenciální tvar)

$\boxed{z = |z| \cdot e^{j(\varphi + 2k\pi)}}$

Někdy se dává $\boxed{\varphi + 2k\pi}$ – MY

Eulerova formule – převádí exponenciální na goniometrický tvar

$\boxed{e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi}$

Pro $\varphi = \pi$:

$\boxed{e^{j\pi} + 1 = 0}$

Nejhlubší matem. vztah!!

(Př) Zapište číslo $z = a + bj$ v exponenciálním tvaru:

a) $z = \sqrt{3} + j$ $\left[2e^{\left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right)j} \right]$ b) $z = -j$ $\left[e^{\left(\frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right)j} \right]$ c) $\boxed{\text{DÚ}}$ $z = 1$ $\left[e^{2k\pi j} \right]$

- <u>n-tá mocnina v $\mathbb{C}$</u> $\boxed{z^n = |z|^n \cdot \left[\cos(n\varphi) + j\sin(n\varphi)\right]}$
- <u>n-tá odmocnina v $\mathbb{C}$</u> $x^n - z = 0 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt[n]{(z)_{\mathbb{C}}} = \sqrt[n]{|z|} \cdot \left[\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + j\sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)\right]}$ $k = 0, 1, \dots, n-1$

Mnohoznačná (n-značná) hodnota

(Př) (i) $\underline{(1+j)^{10}} = (\sqrt{2})^{10} \cdot \left(\cos\frac{10\pi}{4} + j\sin\frac{10\pi}{4}\right) = 32\left(\cos\frac{\pi}{2} + j\sin\frac{\pi}{2}\right) = \boxed{32j}$

(ii) $\underline{z^3 - j = 0} \Rightarrow z = \sqrt[3]{(j)_{\mathbb{C}}} = 1 \cdot \left[\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}\right) + j\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}\right)\right]$; $\boxed{k = 0, 1, 2}$

$z_0 = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + j\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$ $\qquad z_1 = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + j\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ $\qquad z_2 = \cos\left(\frac{9\pi}{6}\right) + j\sin\left(\frac{9\pi}{6}\right)$

$\boxed{z_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2}}$ $\qquad \boxed{z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2}}$ $\qquad \boxed{z_2 = -j}$

(iii) $\boxed{\text{DÚ}}$ $\underline{z^4 + 1 = 0}$ $\left[z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2};\ z_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2};\ z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2};\ z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2} \right]$

[Lze řešit i jako $z^4 + 2z^2 + 1 - 2z^2 = 0 \Leftrightarrow (z^2+1)^2 - (\sqrt{2}z)^2 = (z^2 + 1 - \sqrt{2}z)(z^2 + 1 + \sqrt{2}z) = (z^2 - \sqrt{2}z + 1)(z^2 + \sqrt{2}z + 1)$]

(PŘ) Řešte rovnici v $\mathbb{C}$, řešení vyznačte geometricky:

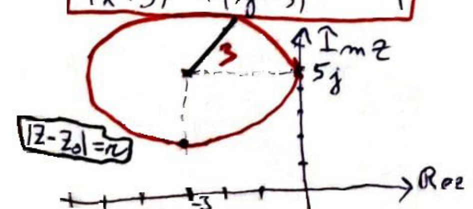
a) $\underline{|z + 3 - 5j| = 3}$

$|x + jy + 3 - 5j| = 3$

$|(x+3) + (y-5)j| = 3$

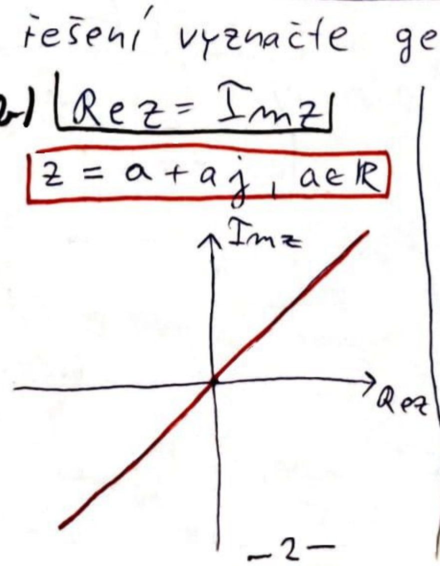
$\sqrt{(x+3)^2 + (y-5)^2} = 3$

$\boxed{(x+3)^2 + (y-5)^2 = 9}$

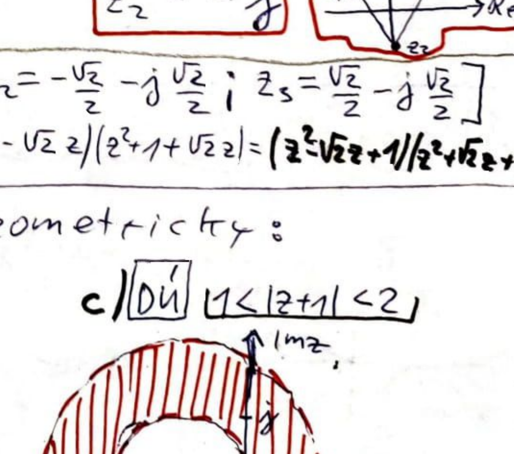


b) $\underline{\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z}$

$\boxed{z = a + aj,\ a \in \mathbb{R}}$



c) $\boxed{\text{DÚ}}$ $\underline{1 < |z+1| < 2}$



d) $\boxed{\text{DÚ}}$ $\underline{|z| = 1 - 2j}$

$\boxed{[NŘ]}$

Funkce komplexní proměnné $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $(f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2)$

Algebraický rozklad fce $f(z)$

$$\boxed{f(z) = f(x+jy)} = \boxed{a+bj}$$

$$\boxed{f(z) = f(x+jy) = \underbrace{u(x,y)}_{\mathrm{Re} f} + j\underbrace{v(x,y)}_{\mathrm{Im} f}} \qquad \boxed{z = x+jy} \quad (x,y \in \mathbb{R})$$

Nejznámější funkce a jejich definice – naznačení rozkladů

- **Exp fce** $[D(f) = \mathbb{C}]$: $\boxed{e^z = e^x(\cos y + j\sin y)}$ (Využijeme Euler. formuli $e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi$)

- **Kosinus** $[D(f) = \mathbb{C}]$: $\boxed{\cos z = \dfrac{e^{jz} + e^{-jz}}{2}}$

- **Sinus** $[D(f) = \mathbb{C}]$: $\boxed{\sin z = \dfrac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j}}$

- **Logaritmus** $[D(f) = \mathbb{C} \setminus \{0\}]$: $\boxed{\mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + j(\mathrm{Arg}\, z) = \ln|z| + j(\varphi + 2k\pi)}$

  $\ln|z|$ klasic. reálný log. φ je úhel proměnné z $\boxed{\varphi \in \langle 0, 2\pi)}$ Mnohoznačná fce s periodou

- **Hlavní větev logaritmu** $[D(f) = \mathbb{C} \setminus \{0\}]$: $\boxed{\ln z = \ln|z| + j\arg z = \ln|z| + j\varphi}$

  $\ln|z|$ klasický reálný log. $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$ je úhel proměnné z. Jednoznačná funkce

- **Zobecněná mocnina** $[D(f) = \mathbb{C} \setminus \{0\}]$ $\boxed{z^\alpha = e^{\alpha \mathrm{Ln}\, z}}$; $z \in \mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{C}$

Př Rozlož následující funkce na algebraický tvar:

a) $f(z) = z^2 + z + 1 = (x+jy)^2 + x + jy + 1 = \boxed{\underbrace{x^2 - y^2 + x + 1}_{\mathrm{Re} f} + j\underbrace{(2xy + y)}_{\mathrm{Im} f}}$

b) $f(z) = 2\cos z = e^{jz} + e^{-jz} = e^{j(x+jy)} + e^{-j(x+jy)} =$

$= e^{-y} \cdot e^{jx} + e^{y} \cdot e^{-jx} = e^{-y}(\cos x + j\sin x) + e^{y}(\cos(-x) + j\sin(-x))$

$= \boxed{\underbrace{(e^{y} + e^{-y})\cos x}_{\mathrm{Re} f} + j\underbrace{(e^{-y} - e^{y})\sin x}_{\mathrm{Im} f}}$

c) **DÚ** $f(z) = e^{z^2} = e^{(x+jy)^2} = e^{x^2 + 2xyj - y^2} = e^{x^2 - y^2} \cdot e^{j2xy} =$

$= e^{x^2 - y^2}[\cos(2xy) + j\sin(2xy)] =$

$= \boxed{\underbrace{e^{x^2 - y^2} \cdot \cos(2xy)}_{\mathrm{Re} f} + j\underbrace{e^{x^2 - y^2} \cdot \sin(2xy)}_{\mathrm{Im} f}}$

Př Spočítej a zapiš v algebraickém tvaru:

- $e^{1+j\pi} = e^1 \cdot e^{j\pi} = e(\cos\pi + j\sin\pi) = e(-1+0) = \boxed{-e}$
- $\mathrm{Ln}(-1) = \ln|-1| + j(\pi + 2k\pi) = \boxed{j\pi(2k+1);\ k\in\mathbb{Z}}$
- $\mathrm{Ln}\left(\frac{1+j}{\sqrt{2}}\right) = \ln\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} + j\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right) = \boxed{j\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right);\ k\in\mathbb{Z}}$
- $\ln\left(2e^{j\frac{\pi}{7}}\right) = \ln 2 + \ln\left(e^{j\frac{\pi}{7}}\right) = \boxed{\ln 2 + j\frac{\pi}{7}}$
- $\cos(j) = \frac{e^{jj}+e^{-jj}}{2} = \frac{e+\frac{1}{e}}{2} = \boxed{\frac{e^2+1}{2e}}$
- $\ln(j) = \ln 1 + j\frac{\pi}{2} = \boxed{j\frac{\pi}{2}}$
- $j^j = e^{j\cdot\mathrm{Ln}(j)} = e^{j[\overset{0}{\ln 1} + j(\frac{\pi}{2}+2k\pi)]} = \boxed{e^{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}}$
- $j^\pi = e^{\pi\cdot\mathrm{Ln}(j)} = e^{\pi\cdot[j(\frac{\pi}{2}+2k\pi)]} = \boxed{\cos\left(\frac{\pi^2}{2}+2k\pi^2\right)+j\sin\left(\frac{\pi^2}{2}+2k\pi^2\right);\ k\in\mathbb{Z}}$
- $2^j = \left(e^{\ln 2}\right)^j = e^{j\ln 2} = \boxed{\cos(\ln 2)+j\sin(\ln 2)}$ ŠLO KLASICKY PŘES Reálný logaritmus

V případě $a^{c+dj} = a^c\cdot[\cos(d\cdot\ln a)+j\sin(d\ln a)]$ $a>0$ Uvažujeme jen jednu hodnotu

V případě $(a+bj)^k = \begin{cases}(a+bj)^k & (k>0)\\ \frac{1}{(a+bj)^{-k}} & (k<0)\end{cases}$ $k\in\mathbb{Z}$ Vyjde jednoznačná hodnota

- $(1+\sqrt{3}j)^{1+j} = e^{(1+j)\mathrm{Ln}(1+\sqrt{3}j)} = e^{(1+j)[\ln 2 + j(\frac{\pi}{3}+2k\pi)]} =$

DÚ!

$= e^{\ln 2 - (\frac{\pi}{3}+2k\pi) + j(\ln 2 + \frac{\pi}{3}+2k\pi)} =$

$= 2\cdot e^{-(\frac{\pi}{3}+2k\pi)}\cdot\left[\cos\left(\ln 2+\frac{\pi}{3}\right)+j\sin\left(\ln 2+\frac{\pi}{3}\right)\right] =$

$= \boxed{2e^{-(\frac{\pi}{3}+2k\pi)}\cdot\cos\left(\ln 2+\frac{\pi}{3}\right) + j\cdot 2e^{-(\frac{\pi}{3}+2k\pi)}\cdot\sin\left(\ln 2+\frac{\pi}{3}\right);\ k\in\mathbb{Z}}$

Př Řešte rovnici $\boxed{\sin z = -3j}$ v komplexním oboru.

$\frac{e^{jz}-e^{-jz}}{2j} = -3j \quad /2j$

$e^{jz}-e^{-jz} = 6$ $\boxed{e^{jz}=w\ (w\in\mathbb{C})}$

$w - \frac{1}{w} = 6$

$w^2 - 6w - 1 = 0$

$w_{1,2} = \frac{6\pm\sqrt{40}}{2} \begin{cases} 3+\sqrt{10}\\ 3-\sqrt{10}\end{cases}$

a) $e^{jz} = \sqrt{10}+3$

$e^{jz} = e^{\mathrm{Ln}(\sqrt{10}+3)}$

$jz = \mathrm{Ln}(\sqrt{10}+3)$

$jz = \ln(\sqrt{10}+3) + j(0+2k\pi)$

$z_1 = 2k\pi - j\ln(\sqrt{10}+3)$

$z_1 = 2k\pi + j\ln\left(\frac{1}{\sqrt{10}+3}\right)$

$\boxed{z_1 = 2k\pi + j\ln(\sqrt{10}-3)}$ $(k\in\mathbb{Z})$

b) $e^{jz} = -\sqrt{10}+3$

$e^{jz} = e^{\mathrm{Ln}(-\sqrt{10}+3)}$

$jz = \mathrm{Ln}(-\sqrt{10}+3)$

$jz = \ln(\sqrt{10}-3) + j(\pi+2k\pi)$

$z_2 = (2k+1)\pi - j\ln(\sqrt{10}-3)$

$z_2 = (2k+1)\pi + j\ln\left(\frac{1}{\sqrt{10}-3}\right)$

$\boxed{z_2 = (2k+1)\pi + j\ln(\sqrt{10}+3)}$ $(k\in\mathbb{Z})$