BMA2 – 6. CVIKO: Derivace funkce komplexní proměnné

$f(z) = f(x+jy) = u(x,y) + j v(x,y)$ má derivaci v bodě z_0
$\overset{\bullet}{\Leftrightarrow}$ je <u>holomorfní</u> v z_0
= má derivaci v nějakém okolí z_0

$\Leftrightarrow$

$u'_x(z_0) = v'_y(z_0)$
$u'_y(z_0) = -v'_x(z_0)$
Platí Cauchy-Riemannovy podmínky, kde $z_0 = (x_0, y_0)$

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0) \in \mathbb{C}$$

(Hodně podobné $\mathbb{R}$, ale silnější.)

Pokud $\exists f'(z)$, pak $\boxed{f'(z) = u'_x(x,y) + j v'_x(x,y) = v'_y(x,y) - j u'_y(x,y)}$ $\boxed{z = x + jy}$

(Př) Zjisti, kde je $f(z)$ holomorfní a urči její derivaci:

a) $f(z) = \frac{1}{z}$ $\quad f(z) = \frac{1}{x+jy} = \frac{x-jy}{x^2+y^2} = \underbrace{\frac{x}{x^2+y^2}}_{u(x,y)} + j \cdot \underbrace{\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)}_{v(x,y)}$

$$u'_x = \frac{x^2+y^2 - x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \boxed{\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}}$$
$$v'_y = -\frac{x^2+y^2 - y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \boxed{\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}}$$
$\Big\}\ u'_x = v'_y \quad \forall z \neq 0$

$(x = 0 \wedge y = 0)$

$$u'_y = \boxed{-x(x^2+y^2)^{-2} \cdot 2y}$$
$$v'_x = \boxed{y(x^2+y^2)^{-2} \cdot 2x}$$
$\Big\}\ u'_y = -v'_x \quad \forall z \neq 0$

$$f'(z) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + j \cdot \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\boxed{f'(z)} \boxed{= \frac{-z^2}{z^4}} \boxed{= -\frac{1}{z^2}} \quad \left((z^{-1})' = -\frac{1}{z^2}\right)$$

(Jak dostaneme $f'(z) = ??$ <u>TRIK</u>:
$z = x + jy$ pro lib. $(x,y) \neq (0,0)$.
Volme <u>$y = 0$</u>, tj. <u>$z = x$</u> $\Leftrightarrow$ $\boxed{x = z \text{ a } y = 0}$
Jiná možnost: $\boxed{x = 0 \text{ a } y = -jz}$)

b) $f(z) = |z| = \underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{u(x,y)} + j \cdot \underbrace{0}_{v(x,y)}$

$u'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $v'_y = 0$ | $u'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $v'_x = 0$ | $u'_x = v'_y \Leftrightarrow$ <u>$x = 0$</u>, $u'_y = -v'_x \Leftrightarrow$ <u>$y = 0$</u>

$[0,0] \notin D(f') \Rightarrow$ $\boxed{\text{Nikde nemá derivaci}}$ (V $\mathbb{R}$ má $f(x) = |x|$ derivaci až na $x = 0$.)

Klasické fce mají klasickou derivaci:
- $(e^z)' = e^z$
- $(z^n)' = nz^{n-1}$
- $(\ln z)' = \frac{1}{z}$ (opatrně, $\ln z$ nemá derivaci na kladné reálné ose.)
- $(\sin z)' = \cos z$
- $(\cos z)' = -\sin z$

$\boxed{\text{Fce typu } |z|, \operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z, \bar{z}, \arg z \text{ nemají v } \mathbb{C} \text{ derivaci!!}}$

(Př) Urči holomorfní funkci $f(z)$, víme-li, že

$\boxed{Re\{f(z)\} = u(x,y) = x^3 - 3xy^2 + 3x^2 - 3y^2 + 1}$ a $\boxed{f(0)=1}$.

Řešení. Ověříme, že $f(z)$ opravdu existuje. Pokud ANO, pak $u(x,y)$ je harmonická, tj.: $\boxed{u''_{xx} + u''_{yy} = 0}$ (ANALOGICKY $v''_{xx} + v''_{yy} = 0$).

$u'_x = 3x^2 - 3y^2 + 6x$ $\quad u''_{xx} = 6x + 6$

$u'_y = -6xy - 6y$ $\Rightarrow$ $u''_{yy} = -6x - 6$ $\Big\}$ $u''_{xx} + u''_{yy} = 0$, a holomorf. $f(z)$ existuje.

1. způsob nalezení funkce $f(z)$:

Nejprve najdeme fci $v(x,y)$. Využijeme postupně obě C.-R. podmínky:

$u'_x = v'_y = 3x^2 - 3y^2 + 6x$

$v(x,y) = \int (3x^2 - 3y^2 + 6x)\,dy = 3x^2y - y^3 + 6xy + c(x)$

$v'_x = \boxed{6xy + 6y + c'(x) = 6xy + 6y} = -u'_y$

$c'(x) = 0 \Rightarrow c(x) = k \quad (k \in R)$

$f(z) = u(x,y) + j\,v(x,y) = x^3 - 3xy^2 + 3x^2 - 3y^2 + 1 + j(3x^2y - y^3 + 6xy + k)$

$\{ z = x + jy$ pro lib. x,y; volme $y=0$, tj. $z = x \Leftrightarrow \boxed{x = z \text{ a } y = 0} \}$:

$f(z) = z^3 + 3z^2 + 1 + jk$

$f(0) = 1$: $1 = 1 + jk \Rightarrow \boxed{k=0} \Rightarrow \boxed{f(z) = z^3 + 3z^2 + 1}$

2. rychlejší způsob nalezení $f(z)$:

$$f'(z) = u'_x(x,y) + j\,v'_x(x,y) = 3x^2 - 3y^2 + 6x + j\underbrace{(6xy + 6y)}_{-u'_y(x,y) = v'_x}$$

$\{ z = x + jy$ pro lib. x,y; volme $y=0$, tj. $z = x \Leftrightarrow \boxed{x = z \text{ a } y = 0} \}$:

$f'(z) = 3z^2 + 6z \Rightarrow \boxed{f(z)} = \int (3z^2 + 6z)\,dz = z^3 + 3z^2 + c_1 + c_2 j$

$(c_1, c_2 \in R)$

$$\underbrace{Re\{f(z)\}}_{\text{zadání}} = \boxed{\text{Něco} + 1 = \text{Něco} + c_1} = \underbrace{Re\{f(z)\}}_{\text{výsledek}}$$

$c_1 = 1 \Rightarrow \boxed{f(z) = z^3 + 3z^2 + 1 + c_2 j}$

(Př) Najdi funkci $f(z)$, která je holomorfní až na reálnou osu (tj. až na $\mathrm{Im}\, z = y = 0$) a pokud $\boxed{v(x,y) = \mathrm{Im}\{f(z)\} = \ln(x^2+y^2) - x^2 + y^2}$ a $\boxed{f(1) = -j}$

$$\boxed{v'_x = \frac{2x}{x^2+y^2} - 2x} \qquad \left(v''_{xx} = \frac{2(x^2+y^2) - 2x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} - 2 = \frac{2y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} - 2 \right.$$

$$\boxed{v'_y = \frac{2y}{x^2+y^2} + 2y} \qquad \left. v''_{yy} = \frac{2(x^2+y^2) - 2y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} + 2 = \frac{2x^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} + 2 \right)$$

$$\boxed{v''_{xx} + v''_{yy} = 0} \ \checkmark\, \mathrm{OK}$$

Rychlejší způsob: $f'(z) = u'_x + j v'_x = \underbrace{\frac{2y}{x^2+y^2} + 2y}_{v'_y = u'_x} + j\left(\frac{2x}{x^2+y^2} - 2x\right)$

$\boxed{x = z \text{ a } y = 0}$: $f'(z) = j\left(\frac{2z}{z^2} - 2z\right) = j\left(\frac{2}{z} - 2z\right)$ (aby nebyla holomorfní na reálné ose)

$f(z) = \int j\left(\frac{2}{z} - 2z\right)dz = j(2\ln z - z^2) = j[\ln z^2 - z^2] + c_1 + c_2 j$

$\boxed{c_2 = 0}$ protože $\mathrm{Im}\{f(z)\}$ neobsahuje konstantu | $f(1) = -j$, $-j = j(0-1) + c_1$ $\Rightarrow$ $\boxed{c_1 = 0}$

$$\boxed{f(z) = j[\ln z^2 - z^2]}$$

Nebo pomaleji: $v'_y = u'_x = \frac{2y}{x^2+y^2} + 2y$

$\underline{u(x,y)} = \int\left(\frac{2y}{x^2+y^2} + 2y\right)dx = \cancel{2y}\cdot\frac{1}{\cancel{y}}\cdot \mathrm{arctg}\frac{x}{y} + 2xy + c(y)$

$u'_y = 2\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right) + 2x + c'(y)$ $\rightarrow$ $c'(y) = 0 \Rightarrow \boxed{c(y) = k_1}$

$u'_y = \boxed{-\frac{2x}{x^2+y^2} + 2x + c'(y) = -\frac{2x}{x^2+y^2} + 2x} = \underline{-v'_x}$

$f(z) = 2\,\mathrm{arctg}\frac{x}{y} + 2xy + k_1 + j[\ln(x^2+y^2) - x^2 + y^2]$

Nelze $y = 0$

$\{z = x + jy$ pro lib x,y; volme $\underline{x=0}$; tj. $\underline{z = jy} \Leftrightarrow \boxed{x = 0 \text{ a } y = -zj}\}$:

$f(z) = k_1 + j[\ln(-z^2) - z^2]$ (úprava, tato $f(z)$ není holo pro $\mathrm{Re}\, z = x = 0$)

$= k_1 + j[\ln(-1) + \ln z^2 - z^2] = \underbrace{k_1 + j\cdot j\pi}_{k \in \mathbb{R}} + j[\ln z^2 - z^2]$

$$\boxed{f(z) = k + j[\ln z^2 - z^2]}$$

Př Najdi holomorfní funkci $f(z)$, $\boxed{f(0)=5}$, je-li $\boxed{\operatorname{Im}\{f(z)\} = v(x,y) = 6xy + 3xy^2 - x^3}$.

$$v'_x = 6y + 3y^2 - 3x^2 \qquad \left(v''_{xx} = -6x \right.$$
$$v'_y = 6x + 6xy \qquad \left. v''_{yy} = 6x \right) \Leftrightarrow \boxed{v''_{xx} + v''_{yy} = 0} \quad \text{OK}\checkmark$$

$$v'_y = u'_x = 6x + 6xy$$

$$u(x,y) = \int (6x + 6xy)\,dx = 3x^2 + 3x^2y + c(y)$$

$$u'_y = \boxed{3x^2 + c'(y) = -(6y + 3y^2 - 3x^2)} = -v'_x$$

$$c'(y) = -6y - 3y^2 \Rightarrow c(y) = \int (-6y - 3y^2)\,dy$$

$$c(y) = -3y^2 - y^3 + k$$

$$f(z) = 3x^2 + 3x^2y - 3y^2 - y^3 + k + j(6xy + 3xy^2 - x^3)$$

$\left\{ z = x + jy \text{ pro lib } x,y \text{; volme } y=0 \text{, tj. } z = x \Leftarrow \boxed{\begin{matrix} x=z \\ y=0 \end{matrix}} \right\}$:

$$f(z) = 3z^2 + k - jz^3 \;;\; f(0)=5:\; 5 = k,\; \boxed{k=5} \Rightarrow \boxed{f(z) = 3z^2 + 5 - jz^3}$$

(Rychlejší: $f'(z) = 6x + 6xy + j(6y + 3y^2 - 3x^2)$; $\boxed{\begin{matrix} x=z \\ y=0 \end{matrix}} \Rightarrow$

$f'(z) = 6z + j(-3z^2) \Rightarrow f(z) = \int 6z + j(-3z^2)\,dz$

$\boxed{f(z) = 3z^2 - jz^3 + c_1} + c_2 y$)

Im f(z) nemá konst. $c_2 = 0$

Př Urči holomorfní fci $f(z)$, $f(0) = j$, je-li $\boxed{\operatorname{Re}\{f(z)\} = u(x,y) = x^2 - 2xy}$

$$u'_x = 2x - 2y \qquad \left(u''_{xx} = 2 \right.$$
$$u'_y = -2x \qquad \left. u''_{yy} = 0 \right) \Rightarrow u''_{xx} + u''_{yy} = 2 \neq 0$$

$f(z)$ holomorfní NEEXISTUJE

DÚ • $u(x,y) = \operatorname{Re}\{f(z)\} = 2xy + e^{2x}\cos 2y$,

$[\,f(z) = e^{2z} + j(-z^2 + k);\; k \in R\,]$

• $v(x,y) = \operatorname{Im}\{f(z)\} = 9x^3y - 9xy^3 + 5x$, a $f(0) = 6$,

$[\,f(z) = \frac{9}{4}z^4 + 5jz + 6\,]$