$\boxed{\text{8. CVIKO}}$ Integrál v $\mathbb{C}$ (přes Cauchyho větu a vzorce)

Cauchyho věta a její zobecnění

Nechť $f(z)$ je holomorfní v jednoduše souvislé oblasti Ω.
Potom pro libovolnou křivku $\gamma \in \Omega$, která má počáteční bod z_1 a koncový bod z_2, platí:

1) $\boxed{\int_\gamma f(z)\,dz = 0}$, pokud je γ uzavřená, tj. $z_1 = z_2$

Cauchyho věta

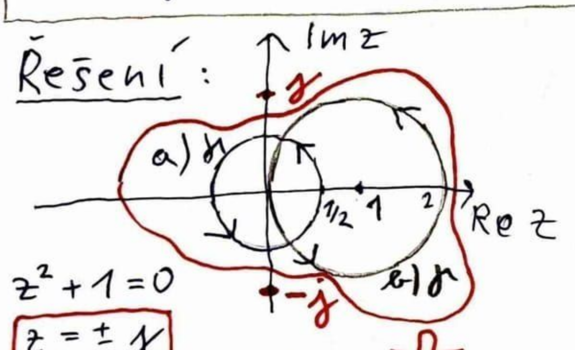
(u γ záleží jen na z_1 a z_2)

2) $\boxed{\int_\gamma f(z)\,dz = F(z_2) - F(z_1)}$; kde $F'(z) = f(z)$, tj. $F(z)$ je jednoznačně určená primitivní fce

zobecnění Cauchyho věty

(Př) $\int_\gamma \left(z^2 + e^z + \frac{1}{z^2+1}\right) dz$; kde a) $\gamma: z(s) = \frac{1}{2} e^{js}$, $s \in \langle 0, 2\pi \rangle$
b) $\gamma: z(s) = 1 + e^{js}$, $s \in \langle 0, 2\pi \rangle$

Řešení:



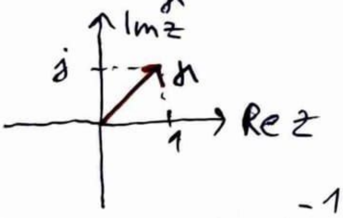
$z^2 + 1 = 0$

$\boxed{z = \pm j}$

$= \underline{\underline{0}}$

V a) i b) není $f(z)$ holomorfní pouze v bodech $z = \pm j$. Lze tedy sestrojit $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ tak, že obě křivky γ jsou v Ω a $\pm j \notin \Omega$. Tedy dle Cauchyho věty vždy $\int_\gamma \left(z^2 + e^z + \frac{1}{z^2+1}\right) dz = \underline{\underline{0}}$

(Př) $\int_\gamma e^{jz}\,dz$; kde γ je lib křivka z bodu $z_1 = 0$ do $z_2 = 1 + j$.



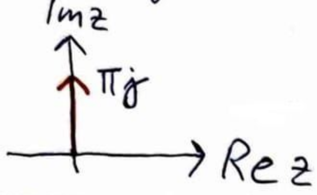
$$= \left[\frac{e^{jz}}{j}\right]_0^{1+j} = \frac{e^{j(1+j)}}{j} - \frac{1}{j} = \frac{e^{-1+j}(-j)}{j\cdot(-j)} - \frac{j}{j^2} =$$

$$= e^{-1}\cdot e^{j\cdot 1}(-j) + j = -e^{-1}(\cos 1 + j\sin 1)\cdot j + j =$$

$$= -\frac{1}{e}(-\sin 1 + j\cos 1) + j = \boxed{\frac{\sin 1}{e} + \left(1 - \frac{\cos 1}{e}\right) j}$$

Elementární fce $\underline{e^z}$, $\underline{\sin z}$, $\underline{\cos z}$, $\underline{z^n}$ jsou holomorfní v $\underline{\mathbb{C}}$ a $\alpha \in \mathbb{C}$ mají primitivní fce $\underline{e^z}$, $\underline{-\cos z}$, $\underline{\sin z}$, $\underline{\frac{z^{n+1}}{n+1}}$. Fce $\ln z$ a z^α jsou holomorfní pro $z \in \mathbb{C} \setminus \{\operatorname{Im} z = 0 \wedge \operatorname{Re} z \geq 0\}$ a určit prim. fce je komplikovanější.

(Př) $\int_\gamma \sin(jz)\,dz$; γ je lib. křivka z $\underline{0}$ do $\underline{\pi j}$.



$$= \left[-\frac{\cos(jz)}{j}\right]_0^{\pi j} = -\frac{1}{j}\left[\cos(-\pi)-\cos(0)\right] = j(-1-1) = \underline{\underline{-2j}}$$

(Př) $\int_\gamma z^2 e^{jz^3}\,dz$; γ je lib. křivka z bodu $\underline{0}$ do bodu $\underline{1+j}$.

$$= \left|\begin{array}{l} jz^3 = u \text{ (subst.)} \\ 3jz^2\,dz = du \\ z^2\,dz = \frac{du}{3j} \end{array}\right| = \int_\alpha^\beta \frac{e^u\,du}{3j} = \left[\frac{e^u}{3j}\right]_\alpha^\beta = \left[\frac{e^{jz^3}}{3j}\right]_0^{1+j} =$$

$$\{j(1+j)^3 = -2(1+j)\}$$

$$= \frac{e^{j(1+j)^3}}{3j} - \frac{1}{3j} = \underline{\underline{\frac{1}{3j}\left(e^{-2(1+j)}-1\right)}} = \cdots = \underline{-\frac{\sin 2}{3e^2} + \left(\frac{1}{3}-\frac{\cos 2}{3e^2}\right)j}$$

(Př-DÚ) $\int_\gamma z\cos(\pi jz)\,dz$; γ je lib. křivka z $\underline{-j}$ do $\underline{j}$.

$$= \left|\begin{array}{ll} u = z & u' = 1 \\ v' = \cos(\pi jz) & v = \frac{\sin(\pi jz)}{\pi j} \end{array}\right| = \left[z\cdot\frac{\sin(\pi jz)}{\pi j} - \int\frac{\sin(\pi jz)}{\pi j}\right]_{-j}^{j} =$$

$$= \left[z\cdot\frac{\sin(\pi jz)}{\pi j} + \frac{\cos(\pi jz)}{\pi^2 j^2}\right]_{-j}^{j} = \left(j\frac{\sin(-\pi)}{\pi j} + \frac{\cos(-\pi)}{-\pi^2}\right) - \left(-j\frac{\sin\pi}{\pi j} + \frac{\cos\pi}{-\pi^2}\right)$$

$$= \pi^2 - \pi^2 = \underline{\underline{0}}$$

Jak integrovat funkce, které jsou všude spojité (holomorfní) kromě $\underline{\text{jednoho}}$ izolovaného bodu (singularity) ležícího mimo γ??

Např.: $\int_\gamma \frac{1}{z-j}\,dz$ nebo $\int_\gamma \frac{1}{(z-j)^m}\,dz$, $\underline{m>1}$?

a) $\underline{\gamma \text{ není uzavřená}}$, pak $\boxed{\int_\gamma \frac{dz}{z-j} = \left[\mathrm{Ln}(z-j)\right]_\alpha^\beta}$ nebo $\boxed{\int_\gamma (z-j)^{-m}\,dz = \left[\frac{(z-j)^{-m+1}}{-m+1}\right]_\alpha^\beta}$

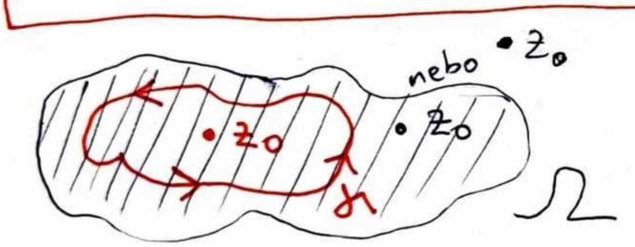
b) $\underline{\gamma \text{ je uzavřená}}$, pak lze použít tzv. $\boxed{\text{Cauchyho vzorce.}}$

Cauchyho vzorce

Nechť $f(z)$ je holomorfní v jednoduše souvislé oblasti Ω a $z_0 \in \mathbb{C}$. Potom pro libovolnou jednoduše uzavřenou kladně orientovanou křivku $\gamma \in \Omega$ platí:

$$\boxed{1)\ \int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \begin{cases} 2\pi j \cdot f(z_0), & \text{pokud } z_0 \in \operatorname{int}\gamma \\ 0, & \text{pokud } z_0 \notin \operatorname{int}\gamma \end{cases}}$$

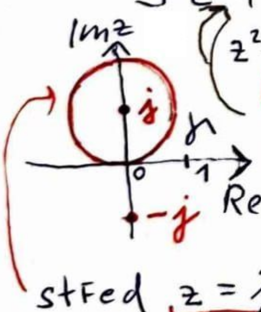
$$\boxed{2)\ \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{m+1}}\,dz = \begin{cases} \dfrac{2\pi j}{m!} f^{(m)}(z_0), & \text{pokud } z_0 \in \operatorname{int}\gamma \\ 0, & \text{pokud } z_0 \notin \operatorname{int}\gamma \end{cases}}$$



(Pokud neznáme Cauchyho vzorce, tak nevadí. Lze použít Reziduovou větu (viz později).)

(Př) $\int_\gamma \frac{1}{z^2+1}\,dz$; kde γ je kružnice, $\gamma: |z-j| = 1$

$\left(z^2+1 = (z+j)(z-j) = 0\right)$ $\boxed{z = \pm j}$ $\boxed{z_0 = j \in \operatorname{int}\gamma}$



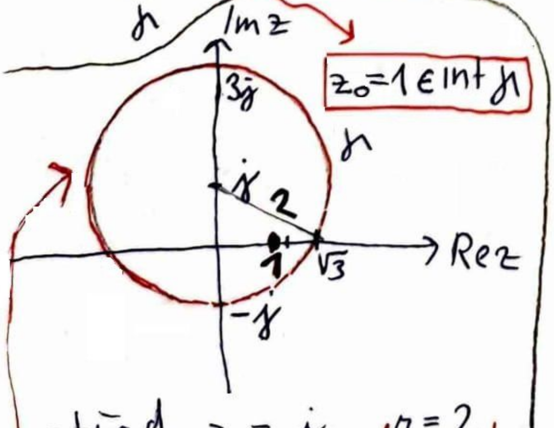
střed $z = j$, $r = 1$

$$= \int_\gamma \frac{1}{(z-j)(z+j)}\,dz = \int_\gamma \frac{\overbrace{\frac{1}{z+j}}^{f(z)}}{z-j}\,dz$$

$$= 2\pi j \cdot \frac{1}{j+j} = \frac{2\pi j}{2j} = \underline{\underline{\pi}}$$

(Př) $\int_\gamma \frac{e^z}{(z-1)^5}$; kde γ je kružnice, $\gamma: |z-j| = 2$.

$\boxed{z_0 = 1 \in \operatorname{int}\gamma}$



střed $z = j$, $r = 2$

$$= \int_\gamma \frac{e^z}{(z-1)^{4+1}}\,dz = \left[\frac{2\pi j}{4!}\left(e^z\right)''''\right]_{z=1} \quad \text{(4. der.)}$$

$$= \left[\frac{2\pi j}{24} e^z\right]_{z=1} = \frac{\pi j}{12} e^1 = \underline{\underline{\frac{\pi e}{12} j}}$$