$\boxed{\text{9.CVIKO}}$ Integrál v $\mathbb{C}$ přes Reziduovou větu

– Zbývá nám naučit se počítat integrály z funkce obsahující více izolovaných singularit ležících uvnitř křivky γ.

Definice (reziduum) Nechť $f(z)$ je holomorfní v nějakém prstencovém okolí bodu z_0 a její rozvoj do Laurentovy řady se středem v bodě z_0 je v tomto okolí

$$\boxed{f(z)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m(z-z_0)^m = \underbrace{\dots+\frac{a_{-3}}{(z-z_0)^3}+\frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2}+\frac{a_{-1}}{z-z_0}}_{\text{hlavní část řady}}+a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\dots \quad (a_m\in\mathbb{C})}$$

Potom koeficient $a_{-1}\in\mathbb{C}$ se nazývá reziduum fce $f(z)$ v bodě z_0 a značí se $\boxed{\operatorname{res}_{z=z_0} f(z)}$.

- Koeficienty a_{-k} $(k\in\mathbb{N})$ jsou často nulové
- Pokud je $f(z)$ spojitá (holomorfní) i v bodě z_0, tak $a_{-k}=0$ pro $\forall k\in\mathbb{N}$ a $\boxed{\operatorname{res}_{z=z_0} f(z)=0}$.

Rozvoj na nejbližším (prstencovém) okolí nás zajímá

Singulární body = **SINGULARITY**
– **Izolované body, kde $f(z)$ není definovaná, ale v jejich okolí je holomorfní**
– body, kde $f(z)$ není spojitá $\Leftrightarrow$ holomorfní:

- odstranitelná singularita $\boxed{z_0\in\mathbb{C}:\ \lim_{z\to z_0} f(z)=a\in\mathbb{C}}$ — Hlavní část Laurentova rozvoje $f(z)$ v okolí z_0 je nulová
- Pól n-tého řádu $\boxed{z_0\in\mathbb{C} \text{ a } f(z)=\frac{g(z)}{(z-z_0)^n}}$; $\left(g(z_0)=a\neq 0,\ \lim_{z\to z_0} f(z)=\infty\right)$ — Hlavní část Laurentova rozvoje $f(z)$ má $\boxed{a_{-n}\neq 0}$ a $\forall k>n$ $\boxed{a_{-k}=0}$
  (Pozor! $\lim_{z\to 0}\frac{a}{z}=\pm\infty=\infty$)
- Podstatná singularita $\boxed{z_0\in\mathbb{C} \text{ a } \lim_{z\to z_0} f(z) \text{ neex.}}$ — Hlavní část Laurentova rozvoje má ∞ mnoho nenulových členů

(Př) Nalezněte singularity a určete jejich typ:

- $f(z)=\dfrac{2z-3}{z^6(z^2+1)^2(z^2-1)^3(z+2j)}$ $\left[\ \underline{z=0} \text{ pól řádu } 6;\ \underline{z=\pm j} \text{ pól řádu } 2;\ \underline{z=\pm 1} \text{ pól řádu } 3;\ \underline{z=-2j} \text{ pól řádu } 1\ \right]$
- $f(z)=\dfrac{\sin(z+1)}{z+1}+\dfrac{e^z-1}{z}$ $\left[\ \lim_{z\to -1} f(z)=2-e^{-1};\ \lim_{z\to 0} f(z)=\sin 1+1;\ \boxed{z=-1}\wedge\boxed{z=0} \text{ jsou odstranitelné}\ \right]$
- $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$ $\left[\ \lim_{z\to 0} e^{\frac{1}{z}} = \begin{cases}\lim_{z\to 0^+} e^{\frac{1}{z}}=e^{\infty}=\infty \\ \lim_{z\to 0^-} e^{\frac{1}{z}}=e^{-\infty}=0\end{cases}\ \text{Neex} \Rightarrow \underline{z=0} \text{ je } \underline{\text{podstatná singularita}}\ \right]$

Výpočet reziduí v singulárních bodech:

- **z_0 je odstranitelná singularita** $\Rightarrow$ $\boxed{\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = 0}$

- **z_0 je podstatná singularita** $\Rightarrow$ Výpočet z definice, tj. určíme koef. a_{-1} z Laurentova rozvoje $f(z)$ a $\boxed{\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = a_{-1}}$ (Nebudeme dělat...)

$$\left(\text{Př} \quad \operatorname*{res}_{z=0} \left(e^{\frac{1}{z}}\right) = \operatorname*{res}_{z=0} \left(1 + \frac{\frac{1}{z}}{1!} + \frac{\frac{1}{z^2}}{2!} + \dots + \frac{\frac{1}{z^n}}{n!}\right) = \underline{\underline{1}} \quad (\text{koef. } a_{-1} \text{ u } \tfrac{1}{z}) \right)$$

- **z_0 je pól n-tého řádu**

a) $n=1$ (pól 1. řádu): $\boxed{\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} \left\{ (z-z_0) \cdot f(z) \right\}}$ nebo

: $\boxed{\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}}$; kde $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ a $\varphi(z_0) \neq 0$ a $\psi(z_0) = 0$

b) $n>1$ (pól řádu n): $\boxed{\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \cdot \lim_{z \to z_0} \left\{ \left[(z-z_0)^n \cdot f(z) \right]^{(n-1)} \right\}}$

Př Vypočtěte rezidua fce $f(z)$ v singulárních bodech:

$\boxed{\text{a) } f(z) = \frac{1}{z(1-z^2)}}$ $\qquad z = 0, 1, -1$ jsou póly řádu 1.

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \lim_{z \to 0} \left\{ \cancel{z} \cdot \frac{1}{\cancel{z}(1-z^2)} \right\} = \underline{\underline{1}}$$

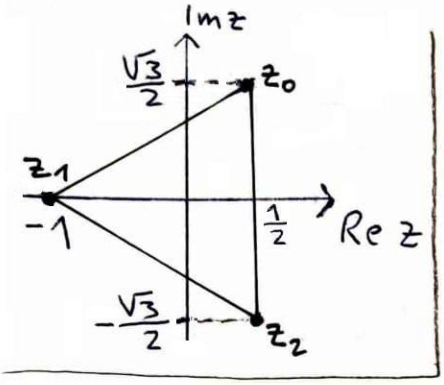
$$\operatorname*{res}_{z=1} f(z) = \lim_{z \to 1} \left\{ \cancel{(z-1)} \cdot \frac{1}{-z\cancel{(z-1)}(z+1)} \right\} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$$

$$\operatorname*{res}_{z=-1} f(z) = \lim_{z \to -1} \left\{ \cancel{(z+1)} \cdot \frac{1}{-z(z-1)\cancel{(z+1)}} \right\} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$$

$\boxed{b)\ f(z) = \dfrac{1}{1+z^3}}$ $\quad z^3 = -1$, $\quad z = \sqrt[3]{(-1)_{\mathbb{C}}}$

$$\boxed{\sqrt[n]{(z)_{\mathbb{C}}} = \sqrt[n]{|z|}\left[\cos\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right) + j\sin\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)\right]}$$

Vzorec (φ je úhel z a $k = 0, 1, \dots, n-1$)

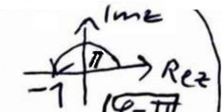


$$\boxed{z_0} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + j\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \boxed{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j}$$

$$\boxed{z_1} = \cos\left(\frac{\pi+2\pi}{3}\right) + j\sin\left(\frac{\pi+2\pi}{3}\right) = \boxed{-1}$$

$$\boxed{z_2} = \cos\left(\frac{\pi+4\pi}{3}\right) + j\sin\left(\frac{\pi+4\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + j\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \boxed{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j}$$

(φ:



$\boxed{\varphi = \pi}$, $|z| = |-1| = 1$)

$\boxed{z_1, z_2, z_3 \text{ jsou póly } 1.ř.}$

($\boxed{\text{Nebo vzorec } A^3 + B^3 = (A+B)(A^2 - AB + B^2)}$:

$$z^3 + 1 = (z+1)(z^2 - z + 1) = (z+1)\left[\overset{A^2}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2} \overset{+\ B^2}{+ \frac{3}{4}}\right] \overset{=}{=} (z+1)\left[\overset{(A\ -\ Bj)}{\left(z - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j\right)} \overset{\cdot\ (A\ +\ Bj)}{\left(z - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j\right)}\right]$$

$\boxed{z = -1}$; $\boxed{z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j}$; $\boxed{z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j}$)

$\boxed{f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}}$

$$\operatorname*{res}_{z=-1} f(z) = \left[\frac{1}{(1+z^3)'}\right]_{z=-1} = \left[\frac{1}{(3z^2)}\right]_{z=-1} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

$$\operatorname*{res}_{z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}j} f(z) = \left[\frac{1}{(1+z^3)'}\right]_{z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}j} = \frac{1}{3\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}j\right)^2} = \dots = \boxed{-\frac{1}{6}\left(1+\sqrt{3}j\right)}$$

$$\operatorname*{res}_{z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}j} f(z) = \left[\frac{1}{(1+z^3)'}\right]_{z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}j} = \frac{1}{3\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}j\right)^2} = \dots = \boxed{-\frac{1}{6}\left(1-\sqrt{3}j\right)}$$

Kontrola: Nechť $z_1, z_2, \dots, z_m \in \mathbb{C}$ je konečný počet **všech** singularit funkce $f(z)$. Potom

$$\sum_{k=1}^{m} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z) = -\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = \begin{cases} \dfrac{a_1}{b_1} & \text{pokud } \boxed{f(z) = P(z) + \dfrac{a_1 z^{m-1} + a_2 z^{m-2} + \dots + a_m}{b_1 z^m + b_2 z^{m-1} + \dots + b_{m+1}}} \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

($P(z)$ je polynom lib. stupně; $a_1, \dots, a_m$, $b_1, \dots, b_{m+1} \in \mathbb{C}$ a $a_1 \neq 0$, $b_1 \neq 0$)

$\boxed{c)\ f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)^2}}$ $\quad$ $\underline{z=1}$ pól 1. řádu; $\underline{z=2}$ pól 2. řádu

$$\operatorname*{res}_{z=1} f(z) = \lim_{z\to 1}\left\{\cancel{(z-1)} \cdot \frac{1}{\cancel{(z-1)}(z-2)^2}\right\} = \underline{\underline{1}}$$

$$\operatorname*{res}_{z=2} f(z) = \frac{1}{1!}\lim_{z\to 2}\left\{\left[\cancel{(z-2)^2} \cdot \frac{1}{(z-1)\cancel{(z-2)^2}}\right]'\right\} = \lim_{z\to 2}\left\{-\frac{1}{(z-1)^2}\right\} = \underline{\underline{-1}}$$

$$\boxed{d)\ f(z)=\frac{1}{(z^2+1)^3}}=\frac{1}{(z-j)^3(z+j)^3}\qquad \underline{z=j}\ \text{pól 3. řádu}\qquad \underline{z=-j}\ \text{pól 3. řádu}$$

$$\boxed{\operatorname*{res}_{z=j} f(z)}=\frac{1}{2!}\lim_{z\to j}\left\{\left[\cancel{(z-j)^3}\cdot\frac{1}{\cancel{(z-j)^3}(z+j)^3}\right]''\right\}=\frac{1}{2}\lim_{z\to j}\left\{\left[\frac{-3}{(z+j)^4}\right]'\right\}$$

$$=\frac{1}{\cancel{2}}\lim_{z\to j}\left\{\frac{\cancel{12}^{\,6}}{(z+j)^5}\right\}=\frac{6}{(2j)^5}=\frac{6\cdot(-j)}{32j\cdot(-j)}=\boxed{-\frac{3}{16}j}$$

$$\boxed{\operatorname*{res}_{z=-j} f(z)}=\frac{1}{2!}\lim_{z\to -j}\left\{\left[\cancel{(z+j)^3}\cdot\frac{1}{(z-j)^3\cancel{(z+j)^3}}\right]''\right\}=\frac{1}{2}\lim_{z\to -j}\left\{\left[\frac{-3}{(z-j)^4}\right]'\right\}$$

$$=\frac{1}{\cancel{2}}\lim_{z\to -j}\left\{\frac{\cancel{12}^{\,6}}{(z-j)^5}\right\}=\frac{6}{(-2j)^5}=\frac{6(j)}{-32j(j)}=\boxed{\frac{3}{16}j}$$

$$\boxed{e)\ f(z)=\frac{1}{e^z-1}};\ \underline{z=2k\pi j}$$ jsou póly **1. řádu**, (⇒ **Lze** použít derivaci jmenov.)

protože $e^{2k\pi j}=\underbrace{\cos(2k\pi)}_{1}+j\underbrace{\sin(2k\pi)}_{0}=1$

$$\boxed{\operatorname*{res}_{z=2k\pi j} f(z)}=\left[\frac{1}{(e^z-1)'}\right]_{z=2k\pi j}=\left[\frac{1}{e^z}\right]_{z=2k\pi j}=\frac{1}{e^{2k\pi j}}=\frac{1}{1}=\boxed{1}$$

$$\boxed{f)\ f(z)=\frac{\sin z}{z(z-\frac{\pi}{2})^2}}$$

$\underline{z=0}$; $\lim\limits_{z\to 0}\frac{\sin z}{z(z-\frac{\pi}{2})^2}\left\|\frac{0}{0}\right\|\overset{L.P.}{=}\lim\limits_{z\to 0}\frac{\cos z}{(z-\frac{\pi}{2})^2+2z(z-\frac{\pi}{2})}=\frac{1}{\frac{\pi^2}{4}}=\frac{4}{\pi^2}\in\mathbb{C}\neq\infty$

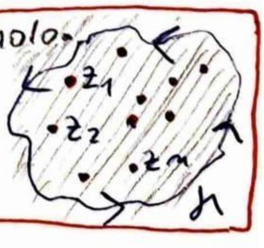
$\underline{z=\frac{\pi}{2}}$ je pól 2. řádu

$$\boxed{\operatorname*{res}_{z=0} f(z)=0}$$ [z=0 je odstranitelná singularita; **Lze počítat i jako pól 1. řádu**]

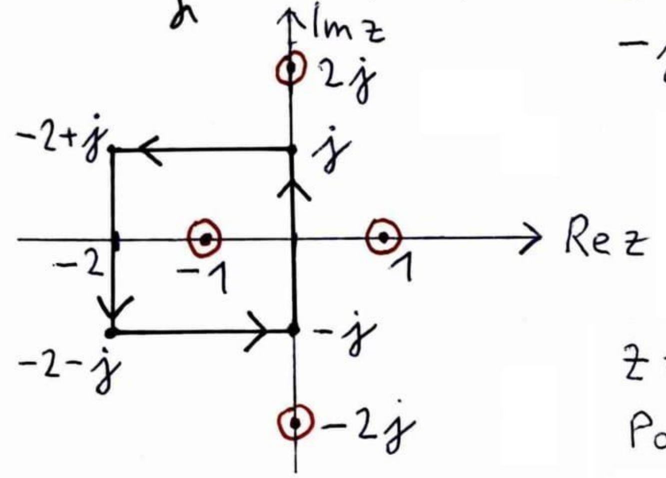
$$\boxed{\operatorname*{res}_{z=\frac{\pi}{2}} f(z)}=\frac{1}{1!}\lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\left\{\left[\cancel{(z-\tfrac{\pi}{2})^2}\cdot\frac{\sin z}{z\cancel{(z-\frac{\pi}{2})^2}}\right]'\right\}=\lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\left\{\frac{z\cos z-\sin z}{z^2}\right\}=\boxed{-\frac{4}{\pi^2}}$$

Reziduová věta Nechť $f(z)$ je holomorfní uvnitř a na jednoduše uzavřené (kladně orientované) křivce γ s výjimkou konečného počtu singularit $z_1, z_2, \dots, z_n$ ležících uvnitř křivky γ. Potom

$$\oint_\gamma f(z)\,dz=2\pi j\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{res}_{z=z_k} f(z)=2\pi j\cdot\left(\begin{array}{c}\text{součet } \forall \text{ reziduí}\\ \text{singularit ležících}\\ \text{uvnitř křivky } \gamma\end{array}\right)$$



Př 1 $\displaystyle\int_\gamma \frac{z^2+1}{(z^2-1)(z^2+4)}\,dz$; γ je lomená (kladně orientovaná) čára s vrcholy čtverce v bodech $-j$; j; $-2+j$; $-2-j$



$$\left(\begin{array}{l} z^2-1=0 \Rightarrow \underline{z=\pm 1} \\ z^2+4=0 \Rightarrow \underline{z=\pm 2j} \end{array}\right)$$

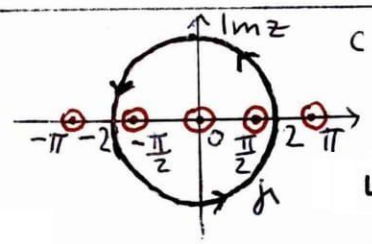
$z=\pm 1$ a $z=\pm 2j$ jsou póly 1.ř.

Pouze $\underline{z=-1 \in \operatorname{int}\gamma}$

$$\operatorname*{res}_{z=-1} f(z) = \lim_{z\to -1}\left\{\cancel{(z+1)}\cdot\frac{z^2+1}{(z-1)\cancel{(z+1)}(z^2+4)}\right\} = \frac{2}{-2\cdot 5} = \underline{\underline{-\frac{1}{5}}}$$

$$\int_\gamma \frac{z^2+1}{(z^2-1)(z^2+4)}\,dz = 2\pi j\left(-\frac{1}{5}\right) = \boxed{-\frac{2}{5}\pi j}$$

Př 2 $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z\cos z}\,dz$; $\gamma: z(t)=2e^{jt}$, $t\in\langle 0,2\pi\rangle$



$\cos z = 0$

$\underline{z=\frac{\pi}{2}+k\pi}$

$\underline{z=\pm\frac{\pi}{2}\in\operatorname{int}\gamma}$

$\underline{z=0}$ Póly 1.ř.

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \lim_{z\to 0}\left\{\cancel{z}\cdot\frac{1}{\cancel{z}\cos z}\right\} = \underline{\underline{1}}$$

$$\operatorname*{res}_{z=-\frac{\pi}{2}} f(z) = \left[\frac{\frac{1}{z}}{(\cos z)'}\right]_{z=-\frac{\pi}{2}} = \left[\frac{\frac{1}{z}}{-\sin z}\right]_{z=-\frac{\pi}{2}} = \frac{\frac{1}{-\frac{\pi}{2}}}{1} = \underline{\underline{-\frac{2}{\pi}}}$$

$$\operatorname*{res}_{z=\frac{\pi}{2}} f(z) = \left[\frac{\frac{1}{z}}{(\cos z)'}\right]_{z=\frac{\pi}{2}} = \left[\frac{\frac{1}{z}}{-\sin z}\right]_{z=\frac{\pi}{2}} = \frac{\frac{1}{\frac{\pi}{2}}}{-1} = \underline{\underline{-\frac{2}{\pi}}}$$

$$\int_\gamma \frac{1}{z\cdot\cos z}\,dz = 2\pi j\left(1-\frac{2}{\pi}-\frac{2}{\pi}\right) = 2\cancel{\pi}j\left(\frac{\pi-4}{\cancel{\pi}}\right) = \boxed{(2\pi-8)j}$$

Př 3 − DÚ − klasicky spočítat $\displaystyle\int_\gamma \frac{6\cdot z^2-z-1}{1\cdot z^3-z}\,dz$; $\gamma: z(t)=3e^{jt}$, $t\in\langle 0,2\pi\rangle$

$$= 2\pi j\sum\begin{pmatrix}\text{Všechna}\\ \text{rezidua}\\ \text{v } \mathbb{C}\end{pmatrix} =$$

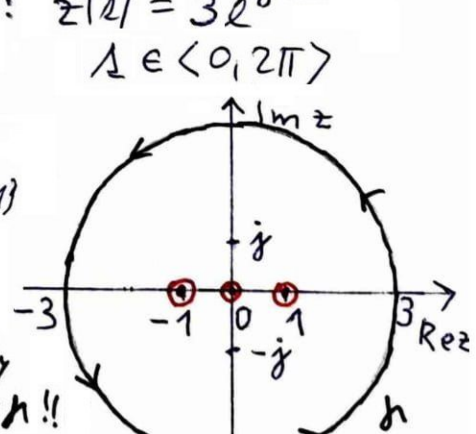
$$= 2\pi j\cdot\left(-\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)\right) =$$

$$= 2\pi j\cdot\left(\frac{6}{1}\right) = \boxed{12\pi j}$$

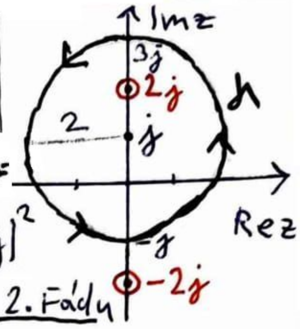
$$0 = z^3-z = z(z^2-1) = z(z-1)(z+1)$$

$$\left.\begin{array}{l} z=0 \\ z=\pm 1\end{array}\right\}\ \text{Póly 1. řádu}$$

Všechny singularity leží uvnitř křivky γ!!



Př 4 $\displaystyle\int_{\kappa} \frac{e^z}{(z^2+4)^2}\,dz$; $\kappa: z(s) = j + 2e^{js}$, $s \in \langle 0, 2\pi \rangle$



Pouze $z=2j$ je uvnitř

$(z^2+4)^2 = (z-2j)^2(z+2j)^2$

$\underline{z=\pm 2j}$ jsou póly $\underline{2.\text{řádu}}$

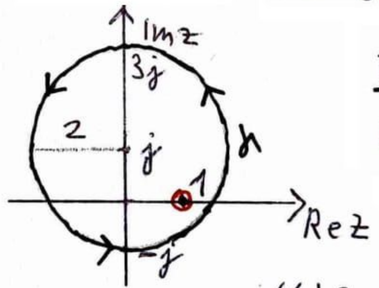
$$\operatorname*{res}_{z=2j} f(z) = \frac{1}{1!}\lim_{z\to 2j}\left\{\left[\cancel{(z-2j)^2}\frac{e^z}{\cancel{(z-2j)^2}(z+2j)^2}\right]'\right\}$$

$$= \lim_{z\to 2j}\left\{\frac{e^z(z+2j)^2 - e^z\cdot 2(z+2j)}{(z+2j)^4}\right\} = \frac{e^{2j}[16j^2-8j]}{256j^4} =$$

$$= \frac{e^{2j}(-16-8j)}{256} = \underline{\frac{-e^{2j}(2+j)}{32}}$$

$$\int_{\kappa}\frac{e^z}{(z^2+4)^2}\,dz = 2\pi j\cdot\left(\frac{-e^{2j}(2+j)}{32}\right) = \frac{\pi e^{2j}(-2j-j^2)}{16} = \boxed{\frac{e^{2j}(1-2j)\pi}{16}}$$

Př 5 DÚ $\displaystyle\int_{\kappa}\frac{e^z}{(z-1)^5}\,dz$; kde κ je kladně orientovaná kružnice $|z-j|=2$

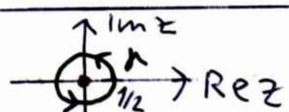


$\underline{z=1}$ je pól $\underline{5.\text{řádu}}$ (ležící v int κ)

$$\operatorname*{res}_{z=1} f(z) = \frac{1}{4!}\lim_{z\to 1}\left\{\left[\cancel{(z-1)^5}\frac{e^z}{\cancel{(z-1)^5}}\right]^{(4)}\right\} = \frac{1}{24}\left[e^z\right]_{z=1} = \underline{\underline{\frac{e}{24}}}$$

$$\int_{\kappa}\frac{e^z}{(z-1)^5}\,dz = 2\pi j\cdot\frac{e}{24} = \boxed{\frac{\pi e}{12}\cdot j}$$

Př 6 DÚ $\displaystyle\int_{\kappa}\frac{\sin^2 z}{z^3}\,dz$; $\kappa: |z| = \frac{1}{2}$



$\underline{z=0}$ je pól $\underline{1.\text{řádu}}$

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \lim_{z\to 0}\left\{\cancel{(z-0)}\frac{\sin^2 z}{z^{\cancel{3}\,2}}\right\} = \lim_{z\to 0}\frac{\sin^2 z}{z^2}\left\|\frac{0}{0}\right\| = \lim_{z\to 0}\frac{2\sin z\cos z}{2z}$$

$$= \lim_{z\to 0}\frac{\sin 2z}{2z}\left\|\frac{0}{0}\right\| = \lim_{z\to 0}\frac{\cancel{2}\cos 2z}{\cancel{2}} = \underline{\underline{1}}$$

(lze počítat i jako pól 3. řádu...)

$$\int_{\kappa}\frac{\sin^2 z}{z^3}\,dz = 2\pi j\cdot 1 = \boxed{2\pi j}$$