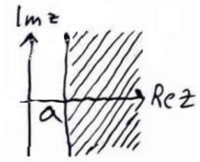
10. CVIKO — Laplaceova integrální transformace

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: $f(t) = 0$, pokud $t < 0$

$f(t)$ je (po částech) spojitá a $\exists\, t_0 \in \mathbb{R}$ a $M, k > 0$:

$|f(t)| \leq M e^{kt} \quad \forall\, t \in \langle t_0, \infty)$



$$\boxed{F(z) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-zt}\, dt \quad (z: \operatorname{Re} z > a)}$$

$F(z)$ je fce komplexní proměnné s $D(f)$:

$\boxed{\mathcal{L}\{f(t)\} = F(z)}$; $\boxed{\mathcal{L}^{-1}\{F(z)\} = f(t)}$ inverzní

(používáme $z \in \mathbb{C}$ místo $p \in \mathbb{C}$) $f(t)$ je <u>předmět</u> nebo <u>vzor</u> L.T. $F(z)$ je <u>obraz</u> L.T.

<u>Linearita</u>: $\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\}$ $(a, b \in \mathbb{R})$

ZÁKL. SLOVNÍK LAPLACEOVY TRANS.

Č	$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(z) = \int_0^\infty f(t) e^{-zt}\, dt$
1.	$c \quad (c \in \mathbb{R})$	$\frac{c}{z}$
2.	$c \cdot e^{at} \quad (a \in \mathbb{R})$	$\frac{c}{z-a}$ (P.Z. 1. typ) Při zpětné!
3.	$t^n \quad (n \in \mathbb{N} \cup \{0\})$	$\frac{n!}{z^{n+1}}$
4a.	$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(z-a)^{n+1}}$
4b.	$\frac{c \cdot t^{n-1} e^{at}}{(n-1)!}$	$\frac{c}{(z-a)^n}$ (P.Z. 2. typ) Při zpětné!
5.	$\cos(\omega t) \quad (\omega \in \mathbb{R})$	$\frac{z}{z^2 + \omega^2}$
6.	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{z^2 + \omega^2}$
7a.	$e^{at} \cos(\omega t)$	$\frac{z-a}{(z-a)^2 + \omega^2}$
8a.	$e^{at} \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(z-a)^2 + \omega^2}$
(7.+8.)b.	$(b \in \mathbb{R})$ $b e^{at} \cos(\omega t) + \frac{ab+c}{\omega} e^{at} \sin(\omega t)$	$\frac{bz + c}{(z-a)^2 + \omega^2}$ (P.Z. 3. typ) Při zpětné!
9.	$f'(t)$	$z \cdot F(z) - f(0)$
10.	$f''(t)$	$z^2 F(z) - z \cdot f(0) - f'(0)$
11.	$f'''(t)$	$z^3 F(z) - z^2 f(0) - z \cdot f'(0) - f''(0)$
12.	$f^{(n)}(t)$	$z^n F(z) - z^{n-1} f(0) - z^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$
13.	$\int_0^t f(u)\, du$	$\frac{F(z)}{z}$
14.	$f(t-a), a \geq 0 \; \left(f(t) = 0,\ t < a\right)$	$e^{-az} \cdot F(z)$

Př Já Dokažte vzorec 1. $\boxed{f(t)=c}$

$$F(z)=\int_0^\infty c\cdot e^{-zt}\,dt = c\cdot\lim_{s\to\infty}\int_0^s e^{-zt}\,dt = c\cdot\lim_{s\to\infty}\left[\frac{e^{-zt}}{-z}\right]_0^s$$

$$= c\cdot\lim_{s\to\infty}\left(\frac{e^{-zs}}{-z}+\frac{e^0}{z}\right) = c\cdot\frac{1}{z} = \boxed{\frac{c}{z}}\ \checkmark\ \text{OK.}$$

Př Dokažte vzorec 3. pro $\underline{n=1}$, tj. $\boxed{f(t)=t}$

$$F(z)=\int_0^\infty t\,e^{-zt}\,dt = \lim_{s\to\infty}\int_0^s t\,e^{-zt}\,dt = \left|\begin{matrix}\text{p.p. } u=t & u'=1\\ v'=e^{-zt} & v=\frac{e^{-zt}}{-z}\end{matrix}\right| =$$

$$\lim_{s\to\infty}\left[\frac{t\cdot e^{-zt}}{-z}+\int\frac{e^{-zt}}{z}\right]_0^s = \lim_{s\to\infty}\left[-\frac{t}{z e^{zt}}-\frac{1}{z^2e^{zt}}\right]_0^s =$$

$$\left\|\tfrac{0}{0}\right\| \overset{\text{L.P.}}{=} \left\|\tfrac{1}{\infty}\right\| = 0$$

$$\lim_{s\to\infty}\left[-\frac{s}{z\cdot e^{zs}}-\frac{1}{z^2e^{zs}}+\frac{1}{z^2}\right] = 0-0+\frac{1}{z^2} = \boxed{\frac{1}{z^2}}\ \checkmark\ \text{OK.}$$

DÚ Dokažte vzorec 6., tj. $\boxed{f(t)=\sin(\omega t)}$ $\left[\frac{\omega}{z^2+\omega^2}\quad 2\times\text{P.P.}\right]$

Př S využitím slovníku a linearity L.T. najděte obraz funkce $f(t)=(t+1)^3$

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=\mathcal{L}\{t^3+3t^2+3t+1\}=\mathcal{L}\{t^3\}+3\mathcal{L}\{t^2\}+3\mathcal{L}\{t\}+\mathcal{L}\{1\}=$$

$$=\frac{3!}{z^4}+3\cdot\frac{2!}{z^3}+3\cdot\frac{1!}{z^2}+\frac{1}{z} = \boxed{\frac{6}{z^4}+\frac{6}{z^3}+\frac{3}{z^2}+\frac{1}{z}}$$

DÚ Pomocí slovníku L.T. Najděte $\mathcal{L}\{\cos^2 t-\sin^2 t\}$ $\left[F(z)=\frac{z}{z^2+4}\right]$

Zpětná Laplaceova transformace [Racionální RYZE lomené fce]

- F(z) musí být ryze lomená, jinak nemá vzor!! (budeme potřebovat)

$\mathcal{L}^{-1}\{F(z)\}=f(t)$; $\boxed{F(z)=\frac{a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\dots+a_1z+a_0}{b_mz^m+b_{m-1}z^{m-1}+\dots+b_1z+b_0} = \text{Rozklad na P.Z.}\ (m>n!)}$

Dvě možnosti jak najít $f(t)$:

1) Věta o rozkladu komplexní funkce (Heavisideova věta)

$$\boxed{f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F(z)\}=\sum_{k=1}^{m}\operatorname*{res}_{z=z_k}\left[F(z)e^{zt}\right] = \text{Součet } \forall \text{ reziduí singulárních bodů fce } F(z)e^{zt} = \text{Výs. závisí na prom. } t}$$

2) Rozkladem na P.Z. a užití vzorců $\boxed{2., 4b., (7.+8.)b}$

Př Najděte vzor funkce $\boxed{F(z) = \dfrac{1}{z^2(z-4)}}$

a) $z=0$ pól 2. řádu; $z=4$ pól 1. řádu

$$\operatorname*{res}_{z=0} F(z)e^{zt} = \frac{1}{1!}\lim_{z\to 0}\left\{\left(\cancel{z^2}\cdot\frac{e^{zt}}{\cancel{z^2}(z-4)}\right)'\right\} = \lim_{z\to 0}\frac{te^{zt}(z-4)-e^{zt}}{(z-4)^2} = \boxed{\frac{-4t-1}{16}}$$

$$\operatorname*{res}_{z=4} F(z)e^{zt} = \lim_{z\to 4}\left\{\cancel{(z-4)}\cdot\frac{e^{zt}}{z^2\cancel{(z-4)}}\right\} = \boxed{\frac{e^{4t}}{16}}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(z)\} = \frac{1}{16}\left(e^{4t}-4t-1\right)$$

---

b) $$\frac{1}{z^2(z-4)} = \frac{A}{z^2}+\frac{B}{z}+\frac{C}{z-4} \qquad / z^2(z-4)$$

$$1 = A(z-4)+Bz(z-4)+Cz^2$$

$z=0$: $1=-4A \Rightarrow \boxed{A=-\frac{1}{4}}$ $\qquad$ z^2: $0=B+C$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad$ $0 = B+\frac{1}{16}$

$z=4$: $1=16C \Rightarrow \boxed{C=\frac{1}{16}}$ $\qquad$ $\boxed{B=-\frac{1}{16}}$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{z^2(z-4)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-\frac{1}{4}}{z^2}+\frac{-\frac{1}{16}}{z}+\frac{\frac{1}{16}}{z-4}\right\} = \underbrace{-\frac{\frac{1}{4}t\cdot 1}{1!}}_{4b.\ (\text{PRO } a=0,\ n=2)} - \underbrace{\frac{1}{16}}_{1.} + \underbrace{\frac{1}{16}e^{4t}}_{2.}$$

$$= \frac{1}{16}\left(e^{4t}-4t-1\right)$$

Př-DÚ-čas Libovolným VHODNÝM způsobem najděte vzor $f(t)$ fce $F(z)$
[Pokud ve jmenovateli komplex. kořeny, tak lepší Parc. zlom.]

ANO

1. $F(z) = \dfrac{2z}{z^2+4z+7} \Rightarrow f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2z}{(z+2)^2+3}\right\} = \underbrace{2e^{-2t}\cos(\sqrt{3}t)-\frac{4}{\sqrt{3}}e^{-2t}\sin(\sqrt{3}t)}_{(7.+8.)b}$

DÚ

2. $F(z) = \dfrac{z^2+z+1}{(z-2)(z-5)(z+4)}$ $\qquad \left[f(t) = -\frac{7}{18}e^{2t}+\frac{31}{27}e^{5t}+\frac{13}{54}e^{-4t}\right]$

3. $F(z) = \dfrac{z^2+1}{(z+1)^2(z-1)}$ $\qquad \left[f(t) = \frac{1}{2}e^{t}+\frac{1}{2}e^{-t}-te^{-t}\right]$

Aplikace Laplaceovy transformace – Řešení ODR

Př - Já $y'' - 18y' + 72y = -36\, t\, e^{6t}$; $y(0)=0$, $y'(0)=1$

$$z^2 Y(z) - z\cdot 0 - 1 - 18\left(z\cdot Y(z) - 0\right) + 72\cdot Y(z) = -36\cdot\frac{1}{(z-6)^2}$$

$$Y(z)\left[z^2 - 18z + 72\right] = 1 - \frac{36}{(z-6)^2}$$

$$Y(z)\left[(z-6)(z-12)\right] = \frac{z^2 - 12z \cancel{+36} \cancel{-36}}{(z-6)^2}$$

$$Y(z) = \frac{z(z-12)}{(z-6)^3(z-12)} = \frac{z}{(z-6)^3}$$ [a teď inverze!] $\left(\begin{matrix} z_0 = 6 \text{ je} \\ \text{pól řádu } 3\end{matrix}\right)$

a) $$y(t) = \operatorname*{res}_{z=6}\left[Y(z)e^{zt}\right] = \frac{1}{2!}\lim_{z\to 6}\left\{\left[\cancel{(z-6)^3}\cdot\frac{z}{\cancel{(z-6)^3}}\cdot e^{zt}\right]''\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{z\to 6}\left\{\left(1e^{zt} + z\,t\,e^{zt}\right)'\right\} = \frac{1}{2}\lim_{z\to 6}\left\{te^{zt} + te^{zt} + zte^{zt}t\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left(te^{6t} + te^{6t} + 6t^2e^{6t}\right) = te^{6t} + 3t^2e^{6t}$$

$$y(t) = (3t^2 + t)e^{6t}$$

---

b) $$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{z}{(z-6)^3}\right\} \underset{\text{TRIK}}{\overset{\text{P.Z.}}{=}} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(z-6)+6}{(z-6)^3}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(z-6)^2} + \frac{6}{(z-6)^3}\right\}$$

$$= \frac{t\,e^{6t}}{1!} + \frac{6t^2e^{6t}}{2!} = 3t^2e^{6t} + te^{6t} =$$

$$= \boxed{(3t^2 + t)e^{6t}}$$

$$\boxed{y(t) = (3t^2 + t)e^{6t}}$$

(– Při zpětné Laplaceově transformaci využíváme opět buď větu o rozkladu nebo zákl. vzorce po rozkladu na P.Z.)

Př $y''' - 3y' + 2y = 8te^{-t}$; $y(0) = y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$

$$z^3Y(z) - z^2\cdot 0 - z\cdot 0 - 1 - 3\left(z\cdot Y(z) - 0\right) + 2Y(z) = 8\cdot\frac{1}{(z+1)^2}$$

$$Y(z)\left[z^3 - 3z + 2\right] = 1 + \frac{8}{(z+1)^2}$$

H.S.	1	0	-3	2
1	1	1	-2	0
1	1	2	0	

$$Y(z)(z-1)^2(z+2) = \frac{z^2+2z+1+8}{(z+1)^2}$$

$$\boxed{Y(z) = \frac{z^2+2z+9}{(z+1)^2(z-1)^2(z+2)}}$$

$\boxed{z=\pm 1}$ póly řádu 2

$\boxed{z=-2}$ pól řádu 1

a) $$\operatorname*{res}_{z=-1}\left(Y(z)e^{zt}\right) = \frac{1}{1!}\lim_{z\to -1}\left\{\left[\cancel{(z+1)^2}\cdot\frac{(z^2+2z+9)\cdot e^{zt}}{\cancel{(z+1)^2}\cdot(z-1)^2\cdot(z+2)}\right]'\right\} =$$

Takto ne!

$$= \lim_{z\to -1}\frac{\left[\overbrace{(2z+2)}^{0}e^{zt} + (z^2+2z+9)\cdot t\cdot e^{zt}\right]\cdot(z-1)^2\cdot(z+2) - (z^2+2z+9)e^{zt}\cdot\left[2(z-1)(z+2)+(z-1)^2\right]}{\left[(z-1)^2(z+2)\right]^2}$$

$$= \frac{8te^{-t}\cdot 4 - 8e^{-t}\overbrace{(-4+4)}^{0}}{4^2} = \frac{32te^{-t}}{16} = \boxed{2te^{-t}}$$

$$\operatorname*{res}_{z=1}\left(Y(z)e^{zt}\right) = \frac{1}{1!}\lim_{z\to 1}\left\{\left[\cancel{(z-1)^2}\cdot\frac{(z^2+2z+9)\cdot e^{zt}}{(z+1)^2\cancel{(z-1)^2}(z+2)}\right]'\right\} =$$

$$= \lim_{z\to 1}\frac{\left[(2z+2)e^{zt} + (z^2+2z+9)\cdot te^{zt}\right]\cdot(z+1)^2(z+2) - (z^2+2z+9)\cdot e^{zt}\cdot\left[2(z+1)\cdot(z+2)+(z+1)^2\right]}{\left[(z+1)^2\cdot(z+2)\right]^2}$$

$$= \frac{\left[4e^t + 12te^t\right]\cdot(12) - 12e^t(12+4)}{12^2} = \frac{\cancel{48e^t} + 144te^t - 144e^t - \cancel{48e^t}}{144}$$

$$= \boxed{te^t - e^t}$$

$$\operatorname*{res}_{z=-2}\left(Y(z)e^{zt}\right) = \lim_{z\to -2}\left\{\cancel{(z+2)}\cdot\frac{(z^2+2z+9)\cdot e^{zt}}{(z+1)^2(z-1)^2\cdot\cancel{(z+2)}}\right\} = \frac{9e^{-2t}}{9} = \boxed{e^{-2t}}$$

$$\boxed{y(t) = 2te^{-t} + te^t - e^t + e^{-2t}}$$

ANO

b) **RYCHLEJŠÍ**

$$\frac{z^2+2z+9}{(z+1)^2(z-1)^2(z+2)} = \frac{A}{(z+1)^2}+\frac{B}{z+1}+\frac{C}{(z-1)^2}+\frac{D}{z-1}+\frac{E}{z+2} \quad /\cdot \text{jmen.}$$

$$z^2+2z+9 = A(z-1)^2(z+2)+B(z+1)(z-1)^2(z+2)+C(z+1)^2(z+2)+D(z-1)(z+1)^2(z+2)+E(z-1)^2(z+1)^2$$

$z=1$: $12 = 12C \Rightarrow \boxed{C=1}$

$z=-1$: $8 = 4A \Rightarrow \boxed{A=2}$

$z=-2$: $9 = 9E \Rightarrow \boxed{E=1}$

z^4 : $0 = B+D+E$

z^0 : $9 = 2A+2B+2C-2D+E$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} B+D=-1 \\ 9=4+2B+2-2D+1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} B+D=-1 \\ B-D=1 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{D=-1},\ 2B=0,\ \boxed{B=0}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(z+1)^2}+\frac{1}{(z-1)^2}-\frac{1}{(z-1)}+\frac{1}{(z+2)}\right\}$$

$$= \boxed{2te^{-t}+te^{t}-e^{t}+e^{-2t}}$$

Řešení vždy vyjde $\boxed{y(t) = 2te^{-t}+te^{t}-e^{t}+e^{-2t}}$

Př. $y'+2y+5\int_0^t y(s)\,ds = 2;\ y(0)=1$ (integro-diferenc. rce)

$$z\cdot Y(z) - 1 + 2Y(z) + \frac{5\cdot Y(z)}{z} = \frac{2}{z} \quad /\cdot z$$

$$z^2Y(z) - z + 2zY(z) + 5\cdot Y(z) = 2$$

$$Y(z)\left[z^2+2z+5\right] = z+2 \Rightarrow \boxed{Y(z) = \frac{z+2}{z^2+2z+5}}$$

($z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ $\Rightarrow$ lépe přes **P.Z.**)

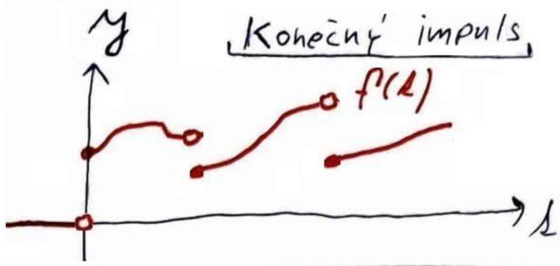
$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{z+2}{(z+1)^2+2^2}\right\} \overset{(7.+8.)b}{=\!=} e^{-t}\cos 2t + \frac{-1+2}{2}e^{-t}\sin 2t$$

$$\boxed{y(t) = e^{-t}\cos 2t + \frac{1}{2}e^{-t}\sin 2t}$$

(Přes věta o rozkladu je to komplikované!!)

Konečné a Diracovy impulsy

Nezkouší se - Nedělat - Není čas



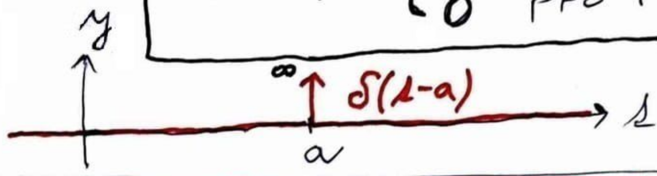
Konečný impuls - skoková, po částech spojitá funkce $f(t)$ splňující $f(t)=0$ pro $t<0$.

Diracův impuls - funkce $\delta(t-a)$

- NEKONEČNÝ impuls

všude nulová jen v bodě $\boxed{a\in\mathbb{R}^+}$ má hodnotu ∞.

$$\boxed{\delta(t-a)=\begin{cases}\infty & \text{pro } t=a\\ 0 & \text{pro } t\neq a\end{cases}}$$



Platí : $\boxed{\int_0^\infty \delta(t-a)=1}$;

$$\boxed{\begin{aligned}\mathcal{L}\{\delta(t-a)\}&=e^{-az}\\ \mathcal{L}\{\delta'(t-a)\}&=z\,e^{-az}\\ \mathcal{L}\{\delta^{(n)}(t-a)\}&=z^n e^{-az}\end{aligned}}$$

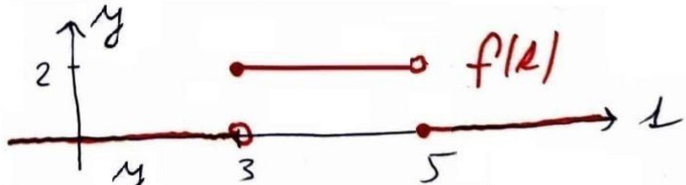
Hledání Laplaceových obrazů konečných impulsů : Při řešení diferenciálních rovnic v elektrotechnice se často vyskytují skokové funkce ve tvaru konečných impulsů. Nutnost znát Laplaceovu trans.

Věta. Nechť $f(t)$ má v bodě t_0 skok k. Potom $\boxed{f'(t_0)=f'_+(t_0)+k\,\delta(t-t_0)}$.

Postup : konečný impuls derivujeme až do nulové funkce, s výjimkou Diracových impulsů. Potom provedeme L.T.

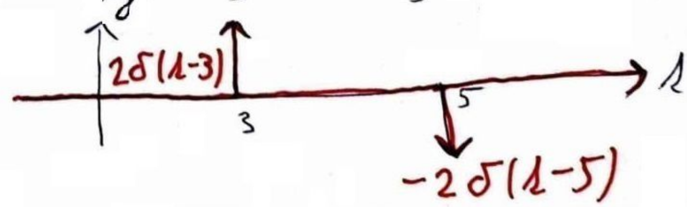
(Př) Určete Laplaceovy obrazy následujících funkcí :

a) $f(t)=\begin{cases}2 & \text{pro } t\in\langle 3;5)\\ 0 & \text{pro } t\notin\langle 3;5)\end{cases}$



$f'(t)=2\,\delta(t-3)-2\,\delta(t-5)\ /\mathcal{L}$

($f'(t)$ je všude nulová kromě $t=3$ a $t=5$)



$z\cdot F(z)=2e^{-3z}-2e^{-5z}$

$$\boxed{F(z)=\frac{1}{z}\left(2e^{-3z}-2e^{-5z}\right)}$$

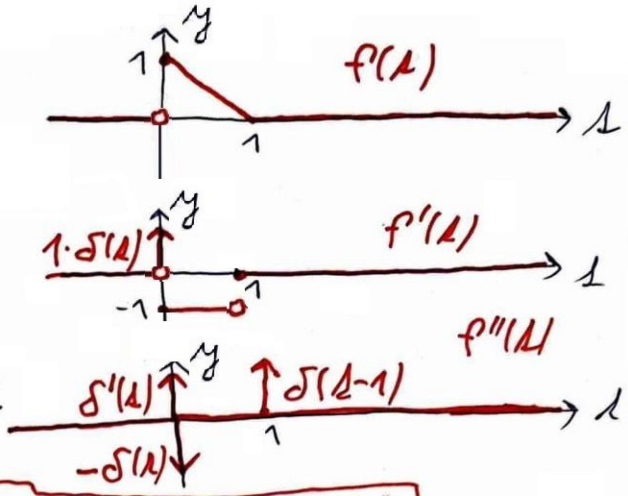
($\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}=\boxed{z^n F(z)}$

Poč. podm. jsou zahrnuty v Diracových impulsech.)

b) $f(t)=\begin{cases}1-t & \text{pro } t\in\langle 0,1)\\ 0 & \text{pro } t\notin\langle 0,1)\end{cases}$

$f'(t)=\begin{cases}-1 & \text{pro } t\in\langle 0,1)\\ 0 & \text{pro } t\notin\langle 0,1)\end{cases}$

$f''(t)=\left\{\delta'(t)-\delta(t)+\delta(t-1)\right\} \;/\mathcal{L}$



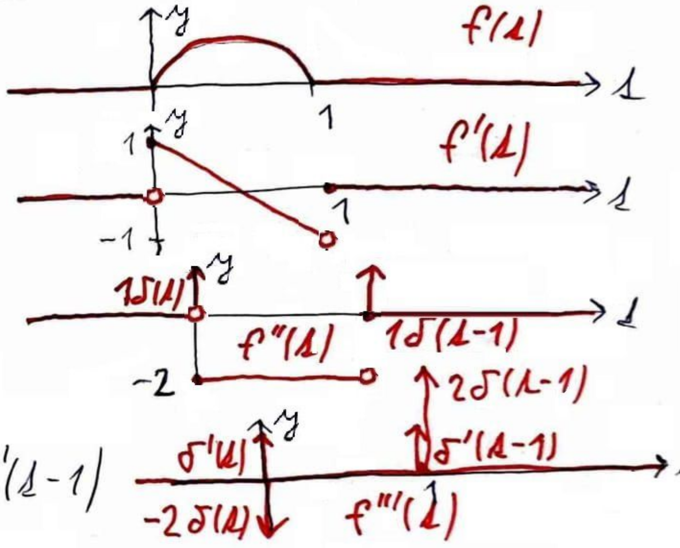
$\boxed{z^2F(z)=z-1+e^{-z}} \implies \boxed{F(z)=\frac{1}{z^2}\left(z-1+e^{-z}\right)}$

---

c) $f(t)=\begin{cases}t-t^2 & \text{pro } t\in\langle 0,1)\\ 0 & \text{pro } t\notin\langle 0,1)\end{cases}$

$f'(t)=\begin{cases}1-2t & \text{pro } t\in\langle 0,1)\\ 0 & \text{pro } t\notin\langle 0,1)\end{cases}$

$f''(t)=\begin{cases}-2 & \text{pro } t\in\langle 0,1)\\ 0 & \text{pro } t\notin\langle 0,1)\end{cases}$



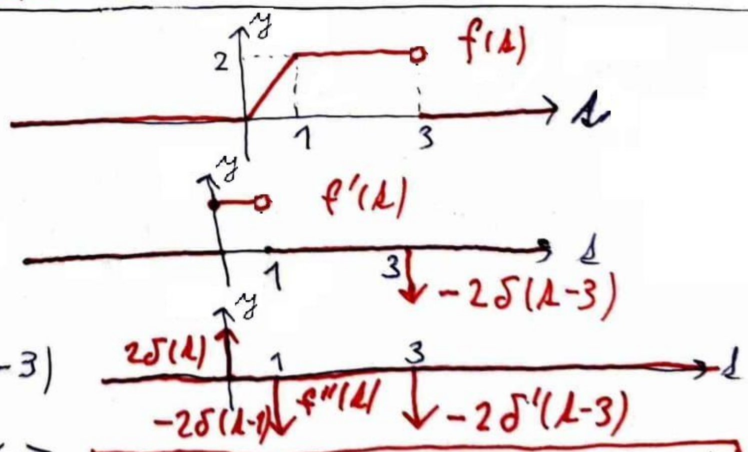
$f'''(t)=\delta'(t)-2\delta(t)+2\delta(t-1)+\delta'(t-1)$

$\boxed{F(z)=\frac{1}{z^3}\left(z-2+2e^{-z}+ze^{-z}\right)}$

---

d) $f(t)=\begin{cases}2t & \text{pro } t\in\langle 0,1)\\ 2 & \text{pro } t\in\langle 1,3)\\ 0 & \text{jinde}\end{cases}$

$f'(t)=\begin{cases}2 & \text{pro } t\in\langle 0,1)\\ 0 & \text{pro } t\notin\langle 0,1)\end{cases}$



$f''(t)=2\delta(t)-2\delta(t-1)-2\delta'(t-3)$

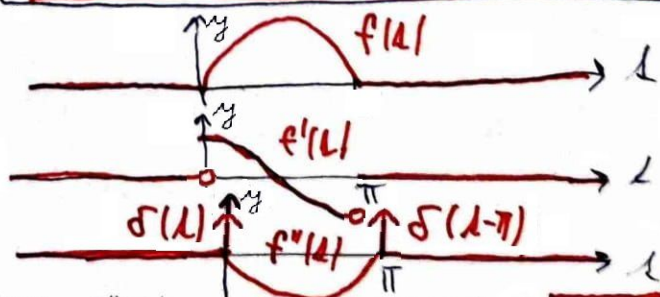
$\boxed{z^2F(z)=2-2e^{-z}-2ze^{-3z}} \iff \boxed{F(z)=\frac{1}{z^2}\left(2-2e^{-z}-2ze^{-3z}\right)}$

---

e) $f(t)=\begin{cases}\sin t & t\in\langle 0,\pi)\\ 0 & t\notin\langle 0,\pi)\end{cases}$

$f'(t)=\begin{cases}\cos t & t\in\langle 0,\pi)\\ 0 & t\notin\langle 0,\pi)\end{cases}$

$f''(t)=\begin{cases}-\sin t & t\in\langle 0,\pi)\\ 0 & t\notin\langle 0,\pi)\end{cases}$



$f(t)+f''(t)=\delta(t)+\delta(t-\pi) \iff \boxed{F(z)=\frac{1+e^{-\pi z}}{z^2+1}}$

$\boxed{F(z)+z^2F(z)=1+e^{-\pi z}}$