# 4. CVIKO — ODR vyšších řádů s konst. koef.

**Homogenní:** $$\boxed{a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0} \quad (H)$$

**Char. rce:** $$\boxed{a_n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0} \quad (1)$$

(i) $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ jsou <u>různé</u> reálné kořeny rce (1).
Potom F.S. (H) je tvaru $y_1 = e^{\lambda_1 x}, y_2 = e^{\lambda_2 x}, \dots, y_n = e^{\lambda_n x}$
a řešení (H) je tvaru $\boxed{y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + c_n e^{\lambda_n x}}$.

(ii) Pokud $\lambda_i$ je reálný $k$-násobný kořen rce (1),
pak <u>jemu</u> příslušný F.S. je
$$\boxed{\begin{aligned} y_1 &= e^{\lambda_i x} \\ y_2 &= x e^{\lambda_i x} \\ &\ \vdots \\ y_k &= x^{k-1} e^{\lambda_i x} \end{aligned}}$$

(iii) Pokud $\lambda_{1,2} = a \pm bj$ jsou <u>jednonásobné</u> komplexní kořeny,
pak jim příslušný F.S. je: $$\boxed{\begin{aligned} y_1 &= e^{ax} \cos bx \\ y_2 &= e^{ax} \sin bx \end{aligned}}$$

(Plyne z Eulerovy formule $\boxed{e^{jx} = \cos x + j \sin x}$)

(iv) Pokud $\lambda_{1,2} = a \pm bj$ jsou <u>$k$-násobné</u> kořeny, pak
$$\boxed{\begin{aligned} y_1 &= e^{ax}\cos bx, \quad y_3 = x e^{ax} \cos bx, \dots, y_{2k-1} = x^{k-1} e^{ax} \cos bx \\ y_2 &= e^{ax}\sin bx, \quad y_4 = x e^{ax} \sin bx, \dots, y_{2k} = x^{k-1} e^{ax} \sin bx \end{aligned}}$$
je jim odpovídající F.S.

---

Obecné řešení rovnice (H) je ve tvaru součtu všech $n$ řešení F.S. (každý násobený konstantou): $\boxed{y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n}$

(Př) (Jd) $y'' - 4y = 0$

$\lambda^2 - 4 = 0;\ \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -2$  F.S.: $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = e^{-2x}$  $\boxed{y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}}$

(je obecné řešení)

---

(1) $y'' + 4y' + 29y = 0;\ y(0) = 0;\ y'(0) = 15$

$\lambda^2 + 4\lambda + 29 = 0;\ \lambda_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 116}}{2} = -2 \pm 5j$

$y = c_1 e^{-2x} \cdot \cos 5x + c_2 e^{-2x} \cdot \sin 5x$

$y(0) = 0$: $0 = c_1 + 0 \Rightarrow \boxed{c_1 = 0}$

$y' = -2c_1 e^{-2x} \cos 5x + c_1 e^{-2x} \cdot 5(-\sin x) + (-2) c_2 \cdot e^{-2x} \sin 5x + c_2 e^{-2x} \cdot 5 \cos 5x$

$y'(0) = 15$: $15 = -2c_1 + 5c_2$

$15 = 5c_2$

$\boxed{c_2 = 3}$

$$\boxed{y = 3e^{-2x} \sin 5x}$$

---

(2) $y''' - 8y = 0$

$\lambda^3 - 8 = 0$

$(\lambda - 2)(\lambda^2 + 2\lambda + 4) = 0$

$(\lambda - 2)(\lambda^2 + 2\lambda + 1 + 3) = 0$

$(\lambda - 2)[(\lambda + 1)^2 + 3] = 0$

$(\lambda - 2)(\lambda + 1 + \sqrt{3} j)(\lambda + 1 - \sqrt{3} j)$

$\lambda_1 = 2;\ \lambda_{2,3} = -1 \pm \sqrt{3} j$

$y_1 = e^{2x}$
$y_2 = e^{-x} \cos(\sqrt{3} x)$
$y_3 = e^{-x} \sin(\sqrt{3} x)$

$$\boxed{y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} \cos(\sqrt{3} x) + c_3 e^{-x} \sin(\sqrt{3} x)}$$

③ $y'''' - 16y = 0$

$\lambda^4 - 16 = 0$

$(\lambda^2 - 4)(\lambda^2 + 4) = 0$

$(\lambda - 2)(\lambda + 2)(\lambda - 2j)(\lambda + 2j) = 0$

$\lambda_{1,2} = \pm 2$ ; $\lambda_{3,4} = \pm 2j$

F.S.: $y_1 = e^{2x}$
$y_2 = e^{-2x}$
$y_3 = e^{0x}\cos 2x$
$y_4 = e^{0x}\sin 2x$

$$\boxed{y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + c_3 \cos 2x + c_4 \cdot \sin 2x}$$

---

④ $y^{(6)} - 6y^{(5)} + 12y^{(4)} - 8y''' = 0$

$\lambda^6 - 6\lambda^5 + 12\lambda^4 - 8\lambda^3 = 0$

$\lambda^3(\lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8) = \lambda^3(\lambda - 2)^3 = 0$

$\lambda_{1,2,3} = 0$ ; $\lambda_{4,5,6} = 2$ $\Rightarrow$ F.S.: $y_1 = e^{0x} = 1$ $\quad y_4 = e^{2x}$
$y_2 = xe^{0x} = x$ $\quad y_5 = xe^{2x}$
$y_3 = x^2e^{0x} = x^2$ $\quad y_6 = x^2e^{2x}$

$$\boxed{y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 e^{2x} + c_5 x e^{2x} + c_6 x^2 e^{2x}}$$

---

⑤ Urči diferenciální rovnici s konst. koef., která má ve F.S. řešení $\boxed{y_i = x \cdot \cos x}$.

$a = 0$, $b = 1$ ; $x^{k-1} = x^{2-1}$ $\Rightarrow$ $a + bj = j$ a $\boxed{k = 2}$

$\lambda_1 = j$ je 2-násobný kořen $[(\lambda - j)(\lambda + j)]^2 = 0$

$\lambda_2 = -j$ je 2-násobný kořen $(\lambda^2 + 1)^2 = 0$

$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0$

F.S.: $y_1 = e^{0x}\cos 1x$
$y_2 = e^{0x}\sin 1x$
$y_3 = xe^{0x}\cos 1x$
$y_4 = xe^{0x}\sin 1x$

$$\boxed{y'''' + 2y'' + y = 0}$$

DÚ: 1) $y''' - y' = 0$; $y(0) = 3$; $y'(0) = -1$; $y''(0) = 1$ $[y = 2 + e^{-x}]$

2) $y^{(6)} + 3y^{(4)} + 3y'' + y = 0$

$[y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + c_3 x \cos x + c_4 x \sin x + c_5 x^2 \cos x + c_6 x^2 \sin x]$

---

Nehomogenní: $\boxed{a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f(x)}$

Předpokládejme, že fce $f$ je tvaru

$\boxed{f(x) = e^{ax} P_m(x)}$ $\Rightarrow$ $\boxed{Y = e^{ax} x^k Q_m(x)}$

$a \in \mathbb{R}$, $P_m(x)$ je konkr. polynom stupně $m$

$Q_m(x)$ je obecný polynom stupně $m$; $k$ - násobnost kořene $\lambda = a$ v char. fci ($k = 0 \Leftrightarrow a$ není kořen char. fce)

NEBO

$\boxed{f(x) = e^{ax}(M \cos bx + N \sin bx)}$ $\Rightarrow$ $\boxed{Y = e^{ax} x^k (A \cos bx + B \sin bx)}$

$a, b, M, N \in \mathbb{R}$ jsou konkr. konst.

$A, B \in \mathbb{R}$ jsou obec. konst. $k$ - násobnost kořene $\lambda = a + bj$ v char. fci. ($k = 0 \Leftrightarrow a + bj$ není kořen)

$\boxed{y = \underbrace{y_h}_{\text{homogenní}} + \underbrace{Y}_{\text{partikulární}}}$

---

Obecně $f(x) = e^{ax}[P_m(x) \cos bx + Q_n(x) \sin bx]$ dává

$$\boxed{Y = e^{ax} x^k \left[ R_{\max\{m,n\}}(x) \cos bx + S_{\max\{m,n\}}(x) \sin bx \right]}$$

kde $P, Q$ jsou konkrétní polynomy; $R, S$ obecné polynomy a $k$ je násobnost kořene $\lambda = a + bj$ v char. fci. (Pokud $k = 0$, pak $\lambda = a + bj$ není kořen char. fce)

(Př) Já $\boxed{y'' + y = x^2}$

**a) homogenní**

$\lambda^2 + 1 = 0$

$\boxed{\lambda_{1,2} = \pm j}$

F. S.: $y_1 = e^{0x} \cos 1x$

$y_2 = e^{0x} \sin 1x$

$\boxed{y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x}$

**b) partikulární**

Pravá strana je tvaru $\boxed{x^2 = e^{0x} \cdot x^2}$, kde $\boxed{a = 0}$ <u>není</u> kořen char. rce!!

Odtud $\boxed{Y = e^{0x} \cdot x^0 \cdot (Ax^2 + Bx + C)}$,

$\boxed{Y = Ax^2 + Bx + C}$

$Y' = 2Ax + B$

$\boxed{Y'' = 2A}$.

Dosaď $Y$ a $Y''$ do zadání: $2A + Ax^2 + Bx + C = x^2$

$\underline{x^2}$: $\boxed{A = 1}$

$\underline{x^1}$: $\boxed{B = 0}$

$\underline{x^0}$: $2A + C = 0 \Rightarrow \boxed{C = -2}$

$\boxed{Y = x^2 - 2}$

$y = y_h + Y$

$\boxed{y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x^2 - 2}$

---

(1) $\boxed{y'' - 3y' + 2y = x e^x}$

**a) homogenní**

$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$

$(\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$

$\boxed{\lambda_1 = 1}$, $\boxed{\lambda_2 = 2}$

$\boxed{y_h = C_1 e^x + C_2 e^{2x}}$

**b) Partikulární**

$\boxed{f(x) = e^{1x} \cdot x}$; $\boxed{a = 1}$ je kořenem (1-násobným) char. rce, odtud $\boxed{Y = e^{1x} \cdot x^1 \cdot (Ax + B)}$,

$\boxed{Y = e^x (Ax^2 + Bx)}$

$Y' = e^x (Ax^2 + Bx) + e^x (2Ax + B)$

$\boxed{Y' = e^x (Ax^2 + (2A + B)x + B)}$

$Y'' = e^x (Ax^2 + (2A + B)x + B) + e^x (2Ax + 2A + B)$

$\boxed{Y'' = e^x (Ax^2 + (4A + B)x + 2A + 2B)}$

Dosadíme do zadání:

$\cancel{e^x}(Ax^2 + (4A + B)x + 2A + 2B) - 3\cancel{e^x}(Ax^2 + (2A + B)x + B) + 2\cancel{e^x}(Ax^2 + Bx) = x\cancel{e^x}$

$\underline{x^2}$: $A + (-3A) + 2A = 0$

$\boxed{0 = 0}$ (Nic Nedalo)

$\underline{x^1}$: $4A + B - 6A - 3B + 2B = 1$

$-2A = 1 \Rightarrow \boxed{A = -\frac{1}{2}}$

$\underline{x^0}$: $2A - B = 0$

$-1 - B = 0$

$\boxed{B = -1}$

$\boxed{y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + e^x \left(-\frac{1}{2}x^2 - x\right)}$

② $\boxed{3y'' - 2y' = 10\cos 2x}$

a) homogenní

$3\lambda^2 - 2\lambda = 0$

$\lambda(3\lambda - 2) = 0$

$\boxed{\lambda_1 = 0}$, $\boxed{\lambda_2 = \frac{2}{3}}$

$$\boxed{y_h = c_1 + c_2 e^{\frac{2}{3}x}}$$

b) partikulární

$\boxed{f(x) = e^{0x}(10\cos 2x + 0\cdot\sin 2x)}$; zároveň

$\underbrace{a + bj}$ $= 0 + 2j = \underbrace{2j}$ není kořen char. rce!

Odtud $\boxed{Y = e^{0x}x^0(A\cos 2x + B\sin 2x)}$

$$\boxed{Y = A\cos 2x + B\sin 2x}$$

$$\boxed{Y' = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x}$$

$$\boxed{Y'' = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x}$$

dosadíme do zadání:

$$-12A\cos 2x - 12B\sin 2x + 4A\sin 2x - 4B\cos 2x = 10\cos 2x$$

$\cos 2x$ : $-12A - 4B = 10$

$\sin 2x$ : $-12B + 4A = 0$

$\Longleftrightarrow$ $\boxed{\begin{aligned} 12A + 4B &= -10 \\ -12A + 36B &= 0 \end{aligned}}$

$40B = -10$ $\quad$ $-12A = +9$

$\boxed{B = -\frac{1}{4}}$ $\quad$ $\boxed{A = -\frac{3}{4}}$

$$\boxed{Y = -\frac{3}{4}\cos 2x - \frac{1}{4}\sin 2x}$$

$$\boxed{y = c_1 + c_2 e^{\frac{2}{3}x} - \frac{3}{4}\cos 2x - \frac{1}{4}\sin 2x}$$

---

③ Najděte homogenní řešení a vhodný tvar partikulárního řešení daných D.R. (koeficienty u $Y$ nepočítejte !!)

a) $\boxed{y'' - 4y' + 4y = x^3 e^{2x}}$

a) homogenní $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$

$(\lambda - 2)^2 = 0$

$\lambda_{1,2} = 2$

$$\boxed{y_h = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}}$$

b) partik.

$f(x) = e^{2x}\cdot x^3$ a zároveň $\boxed{a = 2}$

je 2-násobným kořenem char. rce!

Odtud

$$\boxed{Y = e^{2x}\cdot x^2\cdot(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)}$$

Celkem

$$\boxed{y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + e^{2x}\cdot x^2(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)}$$

b) $\boxed{y'' - 2y' + y = e^{-2x}\left[(2x^2+x-1)\cos(5x) - (3x-1)\sin(5x)\right]}$

a) homogenní

$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$

$(\lambda - 1)^2 = 0$

$\boxed{\lambda_{1,2} = 1}$

$\boxed{y_h = c_1 e^x + c_2 x e^x}$

b) partikulární

$\boxed{f(x) = e^{-2x}\left[(2x^2+x-1)\cos(5x) - (3x-1)\sin(5x)\right]}$

zároveň $\boxed{a+bj} = \boxed{-2+5j}$ není kořen char. rce!!

Jelikož $st\{P_n(x)\} = 2$ a $st\{Q_m(x)\} = 1$,

tedy jsou stupně max 2, tak polynomy

$R(x)$ a $S(x)$ budou stupně 2.

$\boxed{Y = e^{-2x}\left[(Ax^2+Bx+C)\cos 5x + (Dx^2+Ex+F)\sin 5x\right]}$

c) $\boxed{y'' + 4y' + 8y = e^{-2x}(x^2+1)\cos 2x}$

a) homogenní

$\lambda^2 + 4\lambda + 8 = 0$

$\lambda_{1,2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16-32}}{2}$

$\boxed{\lambda_{1,2} = -2 \pm 2j}$

$\boxed{y_h = c_1 e^{-2x}\cos 2x + c_2 e^{-2x}\sin 2x}$

b) partikulární

$f(x) = e^{-2x}\left[(x^2+1)\cos 2x + 0\cdot\sin 2x\right]$. Zároveň

$\boxed{a+bj} = \boxed{-2+2j}$ je 1-násob. kořen char. rce!!

(Jelikož $st\{P_n(x)\} = 2$ a $st\{Q_m(x)\} = 0$), polynomy

$P_n(x)$ a $Q_m(x)$ jsou stupně max 2

a $R(x)$ a $S(x)$ budou stupně 2.

$\boxed{Y = e^{-2x}\cdot x^1\cdot\left[(Ax^2+Bx+C)\cos 2x + (Dx^2+Ex+F)\sin 2x\right]}$

Dú - čas $\boxed{y'' - 4y = 10e^{3x}}$

a) homogenní

$\lambda^2 - 4 = 0$

$(\lambda - 2)(\lambda + 2) = 0$

$\boxed{\lambda_1 = 2}$, $\boxed{\lambda_2 = -2}$

$\boxed{y_h = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}}$

b) partikulární

$f(x) = e^{3x}\cdot 10$, zároveň $\boxed{a=3}$ není kořen char. rce.

Odtud $\boxed{Y = Ae^{3x}}$; $\boxed{Y' = 3Ae^{3x}}$; $\boxed{Y'' = 9Ae^{3x}}$

Dosadíme:

$9A\cancel{e^{3x}} - 4A\cancel{e^{3x}} = 10\cancel{e^{3x}}$

$5A = 10$

$\boxed{A = 2}$

$\boxed{Y = 2e^{3x}}$

$\boxed{y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + 2e^{3x}}$

DÚ – čas

$$\boxed{y'' + y = 8\sin x\,;\quad y(0) = 1 \quad a \quad y'(0) = 3}$$

a) homogenní

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm 1j$$

$$\boxed{y_h = c_1\cos x + c_2 \sin x}$$

b) partikulární

$f(x) = e^{0x}(0\cdot\cos 1x + 8\sin 1x)$ a zároveň

$a + bj = 0 + 1j = +1j$ je kořen char. rce. (1-násobný)

Odtud

$$\boxed{Y = e^{0x}\cdot x^1\cdot(A\cos x + B\sin x)}$$

$$\boxed{Y = x(A\cos x + B\sin x)}$$

$$\boxed{Y' = (A\cos x + B\sin x) + x(-A\sin x + B\cos x)}$$

$$Y'' = -A\sin x + B\cos x - A\sin x + B\cos x + x(-A\cos x - B\sin x)$$

$$\boxed{Y'' = -2A\sin x + 2B\cos x + x(-A\cos x - B\sin x)}$$

Dosaď do zadání

$$-2A\sin x + 2B\cos x - \cancel{Ax\cos x} - \cancel{Bx\sin x} + \cancel{Ax\cos x} + \cancel{Bx\sin x} = 8\sin x$$

$x\sin x$ : $0 = 0$ (nic nedá)

$x\cos x$ : $0 = 0$ (nic nedá)

$\sin x$ : $-2A = 8$

$$\boxed{A = -4}$$

$\cos x$ : $2B = 0$

$$\boxed{B = 0}$$

$$\boxed{Y = -4x\cos x}$$

$$\boxed{y = c_1\cos x + c_2\sin x - 4x\cos x}$$

$$y' = -c_1\sin x + c_2\cos x - 4\cos x + 4x\sin x$$

Poč. podmín.

$1 = c_1 \Rightarrow \boxed{c_1 = 1}$

$3 = c_2 - 4 \Rightarrow \boxed{c_2 = 7}$

$$\Rightarrow \boxed{y = \cos x + 7\sin x - 4x\cos x}$$