نهاية الدوال عند النقطة

اوجد النهاية

① $\lim_{س \to ٢} س + ٣ \Leftarrow ٢ + ٣ = ٥$

② $\lim_{س \to ٢} \frac{س - ٢}{س^٢ - ٤} \Leftarrow \frac{٢ - ٢}{٤ - ٤} = \frac{٠}{٠}$ غير معين

$\lim_{س \to ٢} \frac{\cancel{س - ٢}}{(س + ٢)\cancel{(س - ٢)}} = \frac{١}{٤}$

③ $\lim_{س \to -٢} \frac{س^٣ + ٨}{س + ٢} = \frac{٠}{٠}$ غير معين

$\lim_{س \to -٢} \frac{\cancel{(س + ٢)}(س^٢ - ٢س + ٤)}{\cancel{(س + ٢)}}$

$= (-٢)^٢ - ٢(-٢) + ٤$

$= ٤ + ٤ + ٤ = ١٢$

④ $\lim_{س \to ٤} \frac{\sqrt{س - ٣} - ١}{س - ٤} = \frac{٠}{٠}$ غير معين

$\lim_{س \to ٤} \frac{\sqrt{س - ٣} - ١}{س - ٤} \times \frac{\sqrt{س - ٣} + ١}{\sqrt{س - ٣} + ١}$

$$\lim \frac{\cancel{\text{س} - ٣ - ١}}{(\cancel{\text{س} - ٤})\left(\sqrt{\text{س} - ٣} + ١\right)}$$

$$\lim_{\text{س} \to ٤} \frac{١}{\sqrt{\text{س} - ٣} + ١} = \frac{١}{٢}$$

أوجد :

① $$\lim_{\text{س} \to ٥} \frac{\sqrt{\text{س} - ١} - ٢}{\text{س} - ٥}$$

② $$\lim_{\text{س} \to -} \frac{\text{س} + ١}{\sqrt{\text{س} + ٥} - ٢}$$

تدريب : أوجد

① $\lim_{س \to ١} \frac{س^٢ - ١}{س - ١}$

② $\lim_{س \to ٤} \frac{س^٢ - ١٦}{س - ٤}$

③ $\lim_{س \to -١} \frac{س^٢ - ١}{س^٢ - س - ٢}$

④ $\lim_{س \to ٤} \frac{٤س^٢ - ٦٤}{س^٢ - ٤}$

⑤ $\lim_{س \to ١} \frac{٢س^٢ + س - ٣}{س^٢ + س + ٢}$

⑥ $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٣ - ٢٧}{٢س - ٦}$

⑦ $\lim_{س \to ٣} \frac{\sqrt{س + ١} - ٢}{س^٢ - ٥س + ٦}$

⑧ $\lim_{س \to ٠} \frac{س^٢ + ٢س}{\sqrt{س + ٩} - ٣}$

⑨ $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٣ - ٤س^٢ + س + ٦}{س^٢ - ٤س + ٣}$

⑩ $\lim_{س \to -٢} \frac{٢س^٣ + ٣س^٢ + ٤}{س^٣ + ٨}$

حل التمارين

① ٢

② $\lim_{س \to ٤} \frac{(س + ٤)\cancel{(س - ٤)}}{\cancel{(س - ٤)}} \Leftarrow ٤ + ٤ = ٨$

③ $\frac{٢}{٣}$

٤) $\lim_{س \to ٤} \frac{٤س - س^٢ - ٣٦}{س^٢ - ٤}$ = صفر

٥) $\lim_{س \to ١} \frac{(س+٣)\cancel{(س-١)}}{(س+٢)\cancel{(س-١)}} = \frac{٥}{٣}$

٦) $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٣ - ٢٧}{٢س - ٦}$

$\lim \frac{(س^٢ + ٣س + ٩)\cancel{(س-٣)}}{٢\cancel{(س-٣)}}$ $س \to ٣$

$= \frac{٢٧}{٢}$

٧) $\lim_{س \to ٣} \frac{\sqrt{س+١} - ٢}{س^٢ - ٥س + ٦}$

$\lim \frac{\sqrt{س+١} - ٢}{(س-٣)(س-٢)} \times \frac{\sqrt{س+١} + ٢}{\sqrt{س+١} + ٢}$ $س \to ٣$

$= \frac{\cancel{س+١-٤}}{(\sqrt{س+١} + ٢) \times (س-٢)\cancel{(س-٣)}}$

$$\lim (x+2)\,($$

2	-1	2	.
1	-3	2	-3
2	4	.	3

(b)

$$= 21$$

$$\lim \frac{\cancel{(x+b-b)}}{\lim \cancel{x}(x+2)\,(\sqrt{x+b}+4)}$$

$$\lim \frac{\sqrt{x+b}-4}{x(x+2)} \times \frac{\sqrt{x+b}+4}{\sqrt{x+b}+4}$$

$$\lim \frac{\sqrt{x+b}-4}{x^2+2x}$$

(d)

$$= \frac{3}{1}$$

$$= \frac{(x-2)\times(\sqrt{x+1}+2)}{1}$$

إيجاد النهاية (باستخدام النظرية)

① نها $\frac{\text{س}^{\text{ن}} - \text{أ}^{\text{ن}}}{\text{س}^{\text{م}} - \text{أ}^{\text{م}}}$ ، س ← أ ⇐ $\boxed{\frac{\text{ن}}{\text{م}} \times \text{أ}^{\text{ن}-\text{م}}}$

② نها $\frac{(\text{س}+\text{أ})^{\text{ن}} - \text{أ}^{\text{ن}}}{\text{س}}$ ، س ← ٠ ⇐ $\text{ن}\,\text{أ}^{\text{ن}-١}$

أوجد

① نها $\frac{\text{س}^{٥} - ٣٢}{\text{س}^{٢} - ٤}$ ، س ← ٢ = $\frac{٠}{٠}$ نها $\frac{\text{س}^{٥} - ٢^{٥}}{\text{س}^{٢} - ٢^{٢}}$

$= \frac{٥}{٢} \times ٢^{٣} = ٢٠$

② نها $\frac{(\text{س}+٥)^{٤} - ٦٢٥}{\text{س}}$ ، س ← ٠ = $\frac{٠}{٠}$ نها $\frac{(\text{س}+٥)^{٤} - ٥^{٤}}{\text{س}}$

$٤ \times ٥^{٣} = ٥٠٠$

③ نها $\frac{\sqrt[٤]{\text{س}^{٥}} - ٣٢}{\sqrt{\text{س}^{٣}} - ٦٤}$ ، س ← ١٦

④ $\frac{\text{س}^{\frac{٥}{٤}} - ١٦^{\frac{٥}{٤}}}{\text{س}^{\frac{٣}{٢}} - ١٦^{\frac{٣}{٢}}}$

$\frac{\frac{٥}{٤}}{\frac{٣}{٢}} \times ١٦^{\frac{٥}{٤} - \frac{٣}{٢}}$

$= \frac{٥}{١٢}$

حاول أن تحل ٥

(أ) $\lim_{س \to -٥} \frac{س^{٤} - ٦٢٥}{س + ٥} = \frac{٠}{٠}$ ⇐ غير معين

$\lim_{س \to -٥} \frac{س^{٤} - (-٥)^{٤}}{س - (-٥)} = ٤ \times (-٥)^{٣}$

$= -٥٠٠$

(ب) $\lim_{س \to ١٦} \frac{س^{\frac{٧}{٤}} - ١٦^{\frac{٧}{٤}}}{س - ١٦} = ١٤$

(جـ) $\lim_{س \to ٧} \frac{\sqrt[٥]{(س + ٢٥)} - ٢}{س - ٧} = \frac{٠}{٠}$ غير معرف

$\lim_{س \to ٧} \frac{(س + ٢٥)^{\frac{١}{٥}} - ٢}{س - ٧}$

$\lim_{س + ٢٥ \to ٣٢} \frac{(س + ٢٥)^{\frac{١}{٥}} - ٣٢^{\frac{١}{٥}}}{(س + ٢٥) - ٣٢} = \frac{١}{٥} \times (٣٢)^{\frac{١}{٥} - ١}$

$= \frac{١}{٨٠}$

حل تمرين (٣-٢)

(٩) $\lim_{س \to -١} \frac{س^{٣} - ١}{س + ١} = \frac{٠}{٠}$ غير معرف

$\lim \frac{(س - ١)(س^{٢} + س + ١)}{س + ١}$

(١١) $\lim \frac{س^{\frac{١}{٢}} - ١}{س - ١٦}$

(١٣) $\lim_{س \to ٣} \frac{س^{٥} - ٣^{٥}}{س^{٢} - ٣^{٢}} = \frac{٥}{٢} \times (٣)^{٢} = ١٥$

(١٤)

نهاية دالة عند اللانهاية

$$\boxed{\lim_{س \to \infty} \frac{أ}{س^{ن}} = \text{صفر}}$$

أوجد ① $\lim_{س \to \infty} \frac{٤س^{٣} - ٥س^{٢} + ٧}{٢ - ٣س - ٢س^{٣}}$

② $\lim_{س \to \infty} (٤س - س^{٣} + ٥)$

③ $\lim_{س \to \infty} \frac{٢س^{٣} - ٣}{٣س^{٢} + ١}$

ملاحظة: نقسم بالأكبر أس في المقام

① $\lim_{س \to \infty} \frac{\frac{٤س^{٣}}{س^{٣}} - \frac{٥س^{٢}}{س^{٣}} + \frac{٧}{س^{٣}}}{\frac{٢}{س^{٣}} - \frac{٣س}{س^{٣}} - \frac{٢س^{٣}}{س^{٣}}}$

$\lim_{س \to \infty} \frac{٤ - \frac{٥}{س} + \frac{٧}{س^{٣}}}{\frac{٢}{س^{٣}} - \frac{٣}{س^{٢}} - ٢}$

$$= \frac{٤}{-٢} = -٢$$

(٢) $\lim_{س \to \infty} \left(\frac{٤س^{٢}}{س^{٢}} - \frac{س^{٣}}{س^{٣}} + \frac{٥}{س^{٣}} \right) \div س^{٣}$

$$\lim_{س \to \infty} \frac{٤}{س} - ١ + \frac{٥}{س^{٣}}$$

$$= -١$$

طريقة

$$\lim_{س \to \infty} \left(٤س - س^{٣} + ٥ \right)$$

$$\lim_{س \to \infty} س^{٣} \left(\frac{٤}{س^{٢}} - ١ + \frac{٥}{س^{٣}} \right)$$

$$= \infty \left(٠ - ١ + ٠ \right)$$

$$= \infty \times -١ = -\infty$$

(٣) $\lim_{س \to \infty} \frac{٢س^{٣} - ٣}{٣س^{٢} + ١}$

$$\lim_{س \to \infty} \frac{\frac{٢س^{٣}}{س^{٢}} - \frac{٣}{س^{٢}}}{\frac{٣س^{٢}}{س^{٢}} + \frac{١}{س^{٢}}}$$

$$\frac{٢س - ٠}{٣ + ٠} = \frac{٢ \times \infty}{٣} = \infty$$

(٤) $\lim_{س \to \infty} \frac{س - ٣}{\sqrt{٤س^٢ + ٥٢}}$

$$\lim_{س \to \infty} \frac{\frac{س}{س} - \frac{٣}{س}}{\sqrt{\frac{٤س^٢}{س^٢} + \frac{٥٢}{س^٢}}}$$

$$\frac{١ - ٠}{\sqrt{٤ + ٠}} = \frac{١}{٢}$$

حل تمرين (٣ - ٣) ص ١٠٧

(١) ١ (٢) -٢ (٣) -٧

(٤) ∞ (٥) ٢ (٦) ∞

(٧) ∞ (٨) ٣ (٩) ٣

(١٠) صفر (١١) ٣ (١٢) ١

(١٣) صفر (١٤) ∞

(١٥) نهـا $\dfrac{\frac{1}{س} + \cancel{\frac{1}{س^2}}}{\frac{4}{س} - \frac{1}{س^2}}$ $\dfrac{0 + 1}{4 - 0}$

$= \frac{1}{2}$

تدريب

(١) نهـا $(5س^{-2} + 7س^{-3} - 3س^{-1} + 7)$ $س \leftarrow \infty$

(٢) نهـا $\dfrac{(3س + 2)(7س^2 + 3)}{7س^3 - 5س + 3}$ $س \leftarrow \infty$

(٣) نهـا $\dfrac{(3س^2 + 1)(2س^3 - 3)(3س + 1)}{2س^7 - 5س^2 + 3}$ $س \leftarrow \infty$

(٤) نهـا $\dfrac{\sqrt[3]{8س^3 - 5س + 1}}{3س - 2}$ $س \leftarrow \infty$

⑤ $\lim\limits_{س \to \infty} \dfrac{\sqrt{١٦ س^{٢} + ٦}}{\sqrt[٣]{س^{٣} + ٣س + ١}}$

نهايات الدوال المثلثية

① $\lim\limits_{س \to ٠} \dfrac{جا أس}{ب س} \Leftarrow \dfrac{أ}{ب}$

② $\lim\limits_{س \to ٠} \dfrac{ظا أس}{ب س} \Leftarrow \dfrac{أ}{ب}$

③ $\lim\limits_{س \to ٠} \dfrac{١ - جتا س}{س} \Leftarrow$ صفر

أوجد ① $\lim\limits_{س \to ٠} \dfrac{جا ٥س}{٤ س} \Leftarrow \dfrac{٥}{٤}$

② $\lim\limits_{س \to ٠} \dfrac{ظا ٤س^{٢}}{٢ س^{٢}} \Leftarrow ٢$

③ $\lim\limits_{س \to ٠} ٥ س \, قتا ٢س \Leftarrow$

④ $\lim\limits_{س \to ٠} \dfrac{جا^{٢} ٤س}{٥ س^{٢}} \Leftarrow \lim \dfrac{(جا ٤س)^{٢}}{٥ س^{٢}}$

$$\frac{\text{جا } ١٦\text{ س}^{٢}}{٥\text{ س}^{٢}} = \frac{١٦}{٥}$$

(٣) $$\text{نها}_{\text{س} \to ٠} \frac{٥\text{ س}}{١} \times \frac{١}{\text{جا } ٢\text{ س}}$$

$$\text{نها}_{\text{س} \to ٠} \frac{٥\text{ س}}{\text{جا } ٢\text{ س}} = \frac{٥}{٢}$$

اوجد:

(١) $$\text{نها}_{\text{س} \to ٢} \frac{٢\text{ س}^{٢} - ٤\text{ س}}{\text{س} - ٢}$$

(٢) $$\text{نها}_{\text{س} \to ١} \frac{٢\text{ س}^{٢} + \text{س} - ٣}{\text{س}^{٢} + \text{س} - ٢}$$

(٣) $$\text{نها}_{\text{س} \to ٣} \frac{\text{س}^{٣} - ٤\text{ س}^{٢} + \text{س} + ٦}{\text{س}^{٢} - ٤\text{ س} + ٣}$$

(٤) $$\text{نها}_{\text{س} \to ٥} \frac{\sqrt{\text{س} - ١} - ٢}{\text{س} - ٥}$$

٥) $\lim_{س \to ٣} \frac{س^{٤} - ٨١}{س - ٣}$

٦) $\lim_{س \to -٢} \frac{س^{٥} + ٣٢}{س + ٢}$

٧) $\lim_{س \to \infty} \frac{٧س^{٣} - ٥س + ٦}{٢س + س^{٢}}$

٨) $\lim_{س \to \infty} \frac{(٣س + ٢)(٧س^{٢} + ٣)}{٧س^{٣} - ٥س + ٣}$

٩) $\lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt[٣]{٨س^{٣} - ٥س + ١}}{٣س - ١}$

١٠) $\lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt{١٦س^{٢} + ٦}}{\sqrt[٣]{س^{٣} + ٣س + ١}}$

١١) $\lim_{س \to ٠} \frac{جا^{٢} ٥س}{٣س^{٢}}$

(١٢) $\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{جا}\,٥\text{س}^{٢}\ \text{جتا}\,\text{س}^{٢}}{٣\text{س}^{٢}}$

(١٣) $\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{جا}\,٣\text{س}}{\text{ظا}\,٨\text{س}}$

(١٤) $\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{س}\ \text{ظا}\,٤\text{س}}{٥\text{س}^{٢} - \text{جا}^{٢}\,٣\text{س}}$

(١٥) $\lim_{\text{س} \to ٠} ٢\text{س}\ \text{قتا}\,٥\text{س}$

بحث وجود الدالة عند النقطة

س١ : ابحث وجود نهاية الدالة عند س = ٠

$$د(س) = \begin{cases} \dfrac{س^2 + 2س}{س} & س < 0 \\ \dfrac{س + ظا 2س}{3س - جا 2س} & س > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{س \to 0^+} \frac{س + ظا 2س}{3س - جا 2س} \Leftarrow \lim_{س \to 0^+} \frac{\frac{ظا 2س}{س} + \frac{س}{س}}{\frac{3س}{س} - \frac{جا 2س}{س}}$$

$$= \frac{1 + 2}{3 - 2} \Leftarrow 3$$

$$\lim_{س \to 0^-} \frac{س^2 + 2س}{س} \Leftarrow \lim_{س \to 0^-} \frac{س(س + 2)}{س} \Leftarrow 2$$

$$د(0^+) \neq د(0^-)$$

∴ النهاية غير موجودة

س١: اذا كان

$$د(س) = \begin{cases} س^2 & س \geq 2 \\ 8 - 2س & س < 2 \end{cases}$$

ابحث وجود نهاية د(س) عندما س ← 2

س٢: اذا كان د(س) = |س − 5|

ابحث وجود نهاية د(س) عندما س ← 5

س٣: اذا كان $د(س) = \frac{|س - 1|}{س - 1}$

ابحث وجود نهاية د(س) عندما س ← 1

س٤: اذا كان

$$د(س) = \begin{cases} \frac{5س + ظا 2س}{6س + جا س} & س > 0 \\ جتا 3س & س < 0 \end{cases}$$

ابحث وجود نهاية د(س) عندما س ← 0

س٥: اذا كان

$$\begin{cases} 2س + 3 & س < 5 \\ 4س + م & س \geq 5 \end{cases}$$

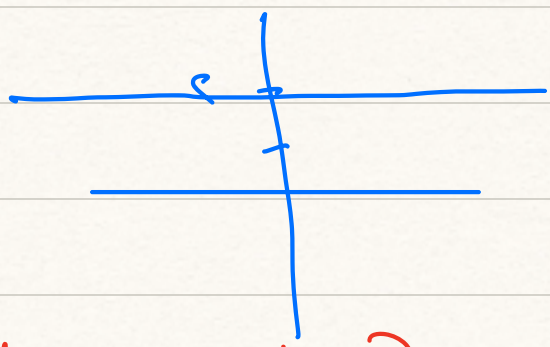
اوجد قيمة م التي تجعل الدالة لها نهاية

اتصال

مراجعة رسم كثيرات الحدود

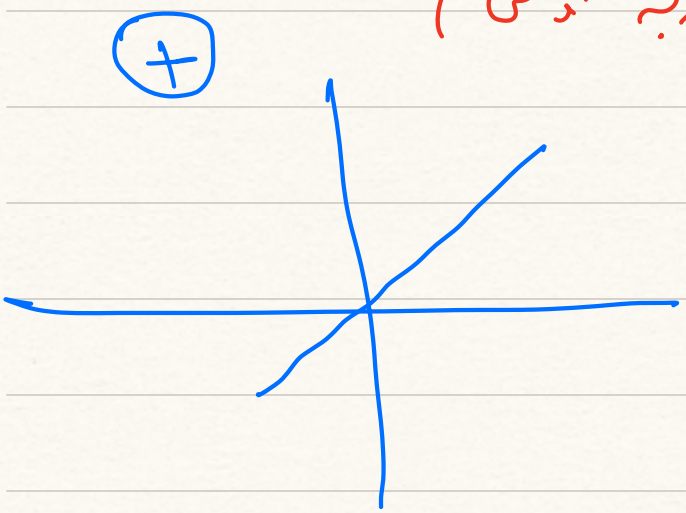
$ص = د(س)$

① دالة ثابتة $د(س) = ٢$

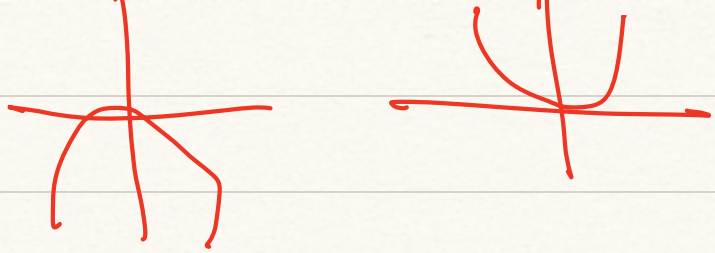


② دالة خطية (دالة درجة أولى)

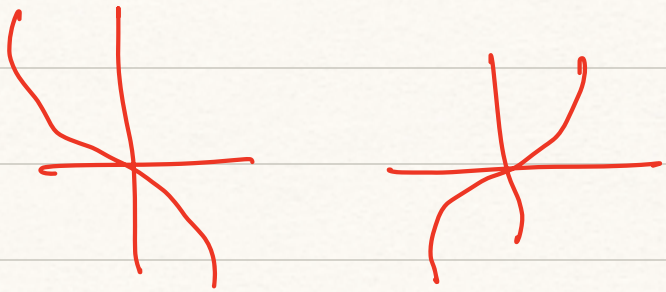
$د(س) = س + ٢$



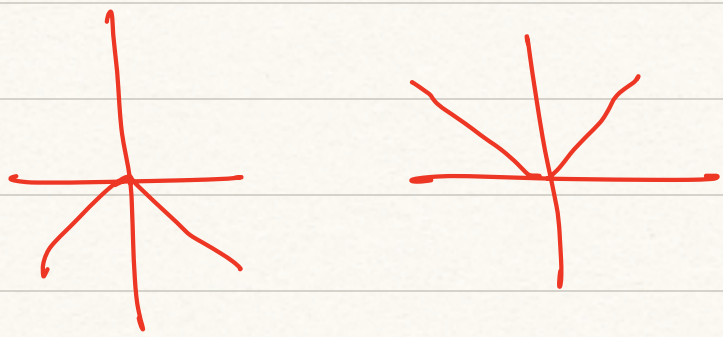
③ دالة تربيعية $د(س) = س^٢ + ٢س + ١$



④ دالة تكعيبية



⑤ دالة المقياس |س|



$$د(س) = \begin{cases} 1 & س \geq 1 \\ -1 & س < 1 \end{cases}$$

ابحث اتصال الدالة

$$د(س) = \begin{cases} س^2 + 2 & س < 1 \\ 3س & س > 1 \end{cases}$$

عند $س = 1$

$د^+(1) = 3(1) = 3$

$د^-(1) = (1)^2 + 2 = 3$

$د^+(1) = د^-(1)$

∴ دالة متصلة عند $س = 1$

س: ابحث اتصال الدالة

$$د(س) = \begin{cases} \dfrac{س^2 - 25}{س^2 - 3س - 10} & س > 5 \\ 0 & س = 5 \\ \dfrac{3س - 5}{7} & س < 5 \end{cases}$$

$$د(5^+) = \frac{(5)^2 - 25}{(5)^2 - 3(5) - 10} = \frac{0}{0}$$

$$\frac{\cancel{(س-5)}(س+5)}{(س+2)\cancel{(س-5)}} = \frac{10}{7}$$

$س \leftarrow 5$

$$د(5^+) = \frac{10}{7}$$

$$د(5^-) = \frac{3(5) - 5}{7} = \frac{10}{7}$$

$$د(5^+) = د(5^-) \neq د(5)$$

∴ دالة غير متصلة عند $س = 5$

اعادة تعريف الدالة

س١ : أعد تعريف ان أمكن عندما $\boxed{س = ١}$

أ) $د(س) = \dfrac{س^٢ + ٢س - ٣}{س - ١}$

ب) $د(س) = \begin{cases} س^٣ + ٢س & س > ١ \\ ٥س - ١ & س < ١ \end{cases}$

أ) $\lim\limits_{س \to ١} \dfrac{س^٢ + ٢س - ٣}{س - ١}$ = غير معرف

$\lim\limits_{س \to ١} \dfrac{\cancel{(س - ١)}(س + ٣)}{\cancel{(س - ١)}}$ $١ + ٣ = ٤$

$د(س) = \begin{cases} \dfrac{س^٢ + ٢س - ٣}{س - ١} & س \neq ١ \\ ٤ & س = ١ \end{cases}$

ب) $د^+(١) = (١)^٣ + ٢(١) = ٣$

$د(أ) = ٥(١) - ١ = ٤$

∴ لا يحقق أداة التعريف

تدريب

س١: ابحث وجود النهاية

① $د(س) = \begin{cases} \dfrac{(س+٣)^٢ - ٩}{س} & س < ٠ \\ س + ٦ & س > ٠ \end{cases}$

② $د(س) = \begin{cases} \dfrac{جا ٣س}{س} & س < ٠ \\ جتا ٣س & س > ٠ \end{cases}$

③ إذا كانت $د(س) = \begin{cases} \dfrac{أ س^٢ + ٢س - ٥}{س - ١} & س < ١ \\ ٣س + ٥ & س > ١ \end{cases}$

لها نهاية عند س = ١ أوجد قيمة أ

س٢: إذا كانت

$د(س) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{س + ٩} - ٣}{س} & س \neq ٠ \\ أ & س = ٠ \end{cases}$

أوجد قيمة م التي تجعل د متصلة عند س = ٠

س٣: اوجد قيمة م، ك اذا كان

$$د(س) = \begin{cases} س^2 + 3م & س < 2 \\ 5س + ك & س > 2 \end{cases}$$

$$\lim_{س \to 2} د(س) = 7$$ هيئة

س٤: احد تعريف الدالة ان امكن

$$د(س) = \begin{cases} 4س - 1 & س < 1 \\ س^2 + 2 & س > 1 \end{cases}$$

لكي تكون متصلة عند س = 1

س٥: احد التعريف إن أمكن

$$د(س) = \begin{cases} س^3 + 2س & س > 1 \\ 5س - 1 & س < 1 \end{cases}$$

عند س = 1