# Datenstrukturen, Algorithmen und Programmierung 2 (DAP2)

# Teile & Herrsche

*Teile & Herrsche (Divide & Conquer)*

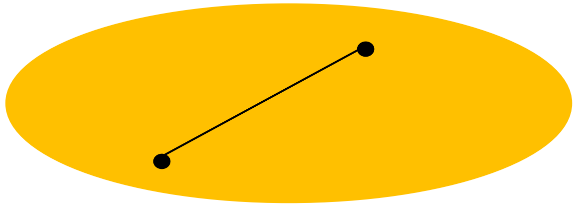
- Teile Eingabe in mehrere Teile auf
- Löse das Problem rekursiv auf den Teilen
- Füge die Teillösungen zu einer Gesamtlösung zusammen

# Teile & Herrsche

## *Definition (konvex)*

- Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^2$ heißt konvex, wenn für alle Punkte $p, q \in M$ gilt, dass jeder Punkte auf der Strecke $pq$ ebenfalls in $M$ ist.
- Formal: Sind $p, q \in M$, dann ist für jedes $\lambda$ mit $0 \leq \lambda \leq 1$ der Punkt $r = \lambda p + (1 - \lambda) \cdot q$ ebenfalls in $M$.

## *Beispiel*

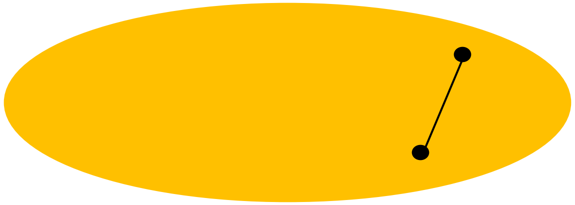


# Teile & Herrsche

## *Definition (konvex)*

- Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^2$ heißt konvex, wenn für alle Punkte $p, q \in M$ gilt, dass jeder Punkte auf der Strecke $pq$ ebenfalls in $M$ ist.
- Formal: Sind $p, q \in M$, dann ist für jedes $\lambda$ mit $0 \leq \lambda \leq 1$ der Punkt $r = \lambda p + (1 - \lambda) \cdot q$ ebenfalls in $M$.

## *Beispiel*



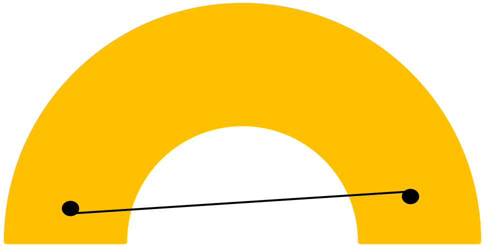
Die Menge ist konvex

# Teile & Herrsche

## *Definition (konvex)*

- Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^2$ heißt konvex, wenn für alle Punkte $p, q \in M$ gilt, dass jeder Punkte auf der Strecke $pq$ ebenfalls in $M$ ist.
- Formal: Sind $p, q \in M$, dann ist für jedes $\lambda$ mit $0 \leq \lambda \leq 1$ der Punkt $r = \lambda p + (1 - \lambda) \cdot q$ ebenfalls in $M$.

## *Beispiel*



Die Menge ist nicht konvex

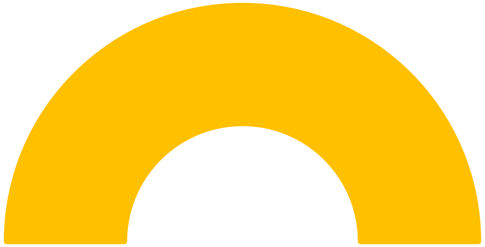
# Teile & Herrsche

## *Definition (konvexe Hülle)*

- Die konvexe Hülle einer Menge $M \subseteq \mathbb{R}^2$ ist der Schnitt aller konvexen Mengen, die $M$ enthalten.

- Intuitiv: Konvexe Hülle ist die kleinste konvexe Menge, die $M$ enthält

## *Beispiel*



# Teile & Herrsche

## *Definition (konvexe Hülle)*

- Die konvexe Hülle einer Menge $M \subseteq \mathbb{R}^2$ ist der Schnitt aller konvexen Mengen, die $M$ enthalten.

- Intuitiv: Konvexe Hülle ist die kleinste konvexe Menge, die $M$ enthält

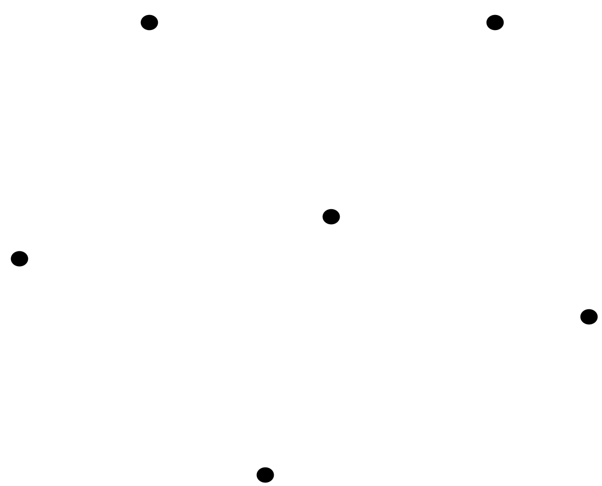
## *Beispiel*

Die konvexe Hülle ist die Vereinigung
Der orangenen und der grünen Menge

# Teile & Herrsche

*Konvexe Hülle einer Punktmenge*

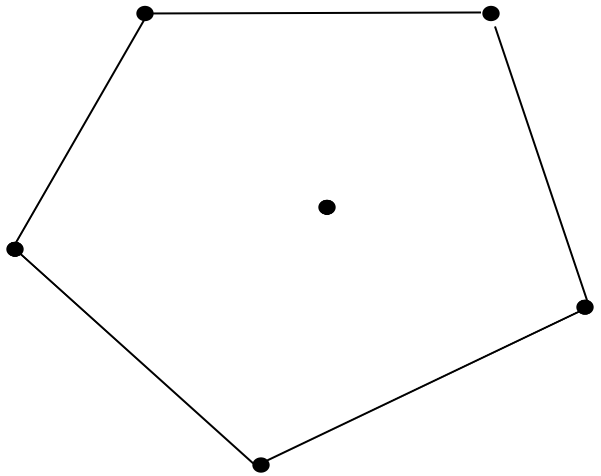
Intuition: Punkte sind Nägel und die Hülle wird durch Gummiband um die Nägel eingeschlossen



# Teile & Herrsche

## *Konvexe Hülle einer Punktmenge*

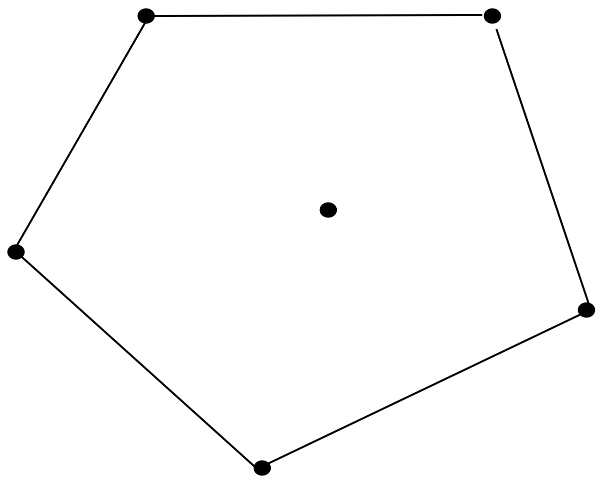
Intuition: Punkte sind Nägel und die Hülle wird durch Gummiband um die Nägel eingeschlossen



# Teile & Herrsche

*Problem: Berechnung der konvexen Hülle einer Punktmenge*

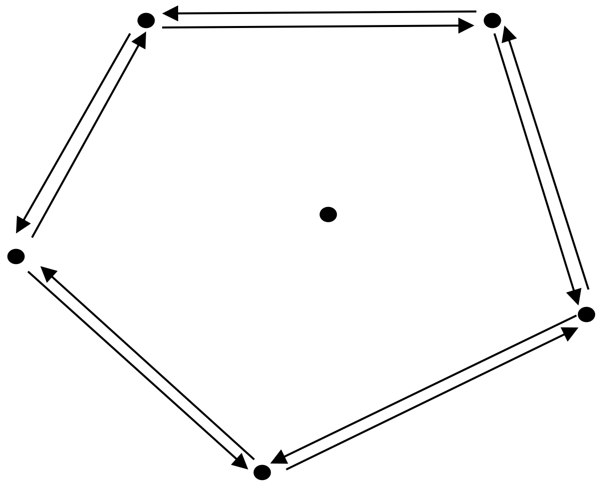
- Eingabe: Menge $P$ von $n$ Punkten in der Ebene $\mathbb{R}^2$
- Ausgabe: Beschreibung der konvexen Hülle der Punktmenge



# Teile & Herrsche

*Darstellung der konvexen Hülle im Rechner*

Wir speichern den Rand der Hülle als doppelt verkettete Liste



# Teile & Herrsche

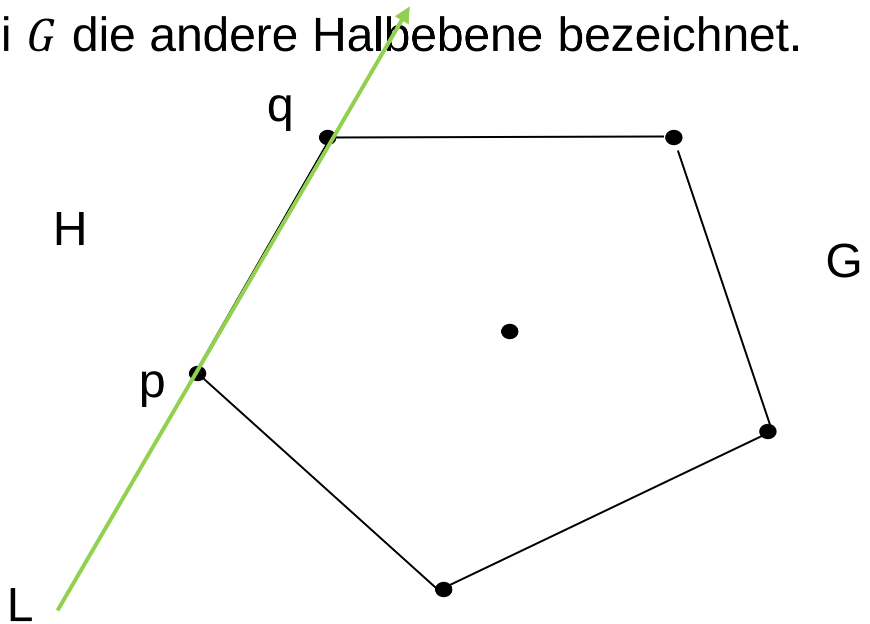
## *Allgemeine Lage*

Zur Vereinfachung nehmen wir an, dass keine 3 Punkte auf einer Linie liegen und dass keine 2 Punkte dieselbe $x$-Koordinate haben.

# Teile & Herrsche

## *Beobachtung*

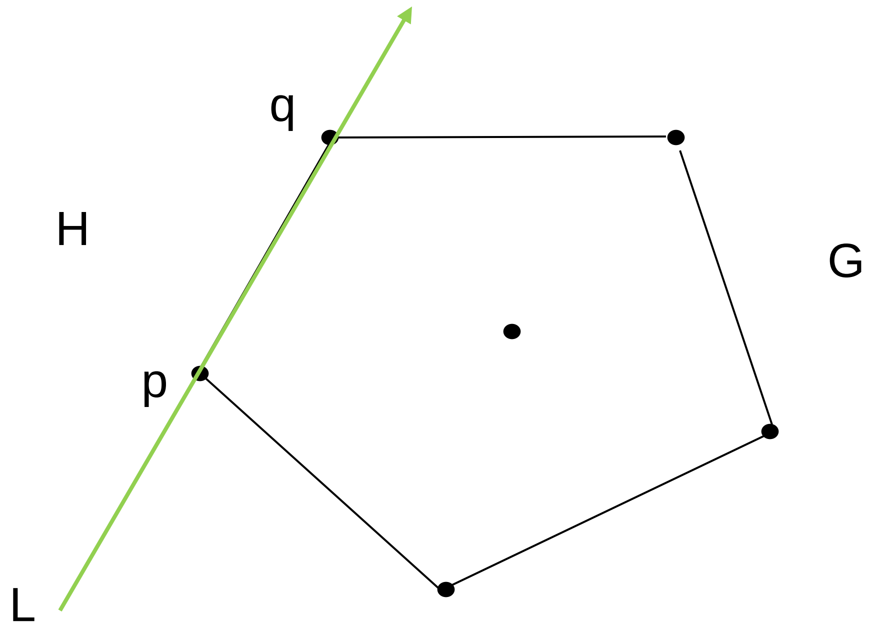
Sei P eine Punktmenge in der Ebene. Eine Strecke $pq$ mit $p, q \in P$ liegt auf dem Rand der konvexen Hülle, genau dann wenn die gerichtete Linie $L$ durch $p$ und $q$ die Ebene in die (offenen) Halbebenen $H$ und $G$ partitioniert, so dass eine Halbebene $H$ von $L$ keinen Punkt aus $P$ enthält und $G \cup L$ alle Punkte aus $P$ enthält, wobei $G$ die andere Halbebene bezeichnet.



# Teile & Herrsche

## *Beobachtung*

Für jede Strecke $pq$ auf der konvexen Hülle ist entweder für die gerichtete Gerade durch $p$ und $q$ oder durch $q$ und $p$ (also andersrum gerichtet) der Halbraum $H$ auf der linken Seite der Geraden leer und $G \cup L$ enthält alle Punkte.



# Teile & Herrsche

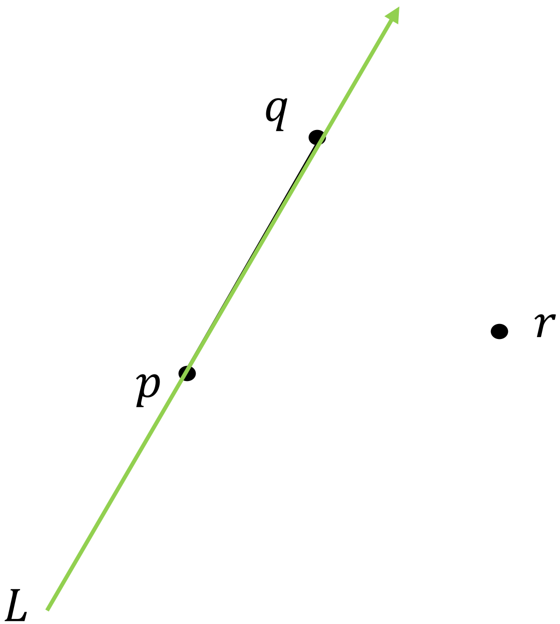
SimpleConvexHull($P$)

1. **for each** $(p, q) \in P \times P, p \neq q$ **do**
2. valid $\leftarrow$ true
3. **for all** $r \in P - \{p, q\}$ **do**
4. **if** $r$ liegt links von der gerichteten Linie durch $p$ und $q$ **then** valid $\leftarrow$ false
5. **if** valid $=$ true **then** füge die gerichtete Kante $pq$ zu $E$ hinzu
6. Aus der Menge $E$ konstruiere eine doppelt verkettete Liste der Eckknoten der konvexen Hülle

# Teile & Herrsche

## *Geometrische Primitive*

- Grundlegende geometrische Funktionen, die von einer konstanten Anzahl von Objekten abhängen, können in konstanter Zeit berechnet werden
- Z.B.: Liegt $r$ links von der gerichteten Linie durch $p$ und $q$



# Teile & Herrsche

## *Schritt 6 des Algorithmus*

- Entferne eine beliebige Kante $pq$ aus $E$
- Wähle $q$ als ersten Knoten der Liste
- Es muss eine gerichtete Kante geben, die von $q$ ausgeht
- Diese führt zum nächsten Knoten $r$
- Füge $r$ in die Liste als Nachfolger von $q$ ein
- Auf diese Weise können wir Schritt für Schritt den Rand der Hülle als (doppelt verkettete) Liste konstruieren

# Teile & Herrsche

SimpleConvexHull($P$)

1. **for each** $(p, q) \in P \times P, p \neq q$ **do**
2. valid $\leftarrow$ true
3. **for all** $r \in P - \{p, q\}$ **do**
4. **if** $r$ liegt links von der gerichteten Linie durch $p$ und $q$ **then** valid $\leftarrow$ false
5. **if** valid $=$ true **then** füge die gerichtete Kante $pq$ zu $E$ hinzu
6. Aus der Menge $E$ konstruiere eine doppelt verkettete Liste der Eckknoten der konvexen Hülle

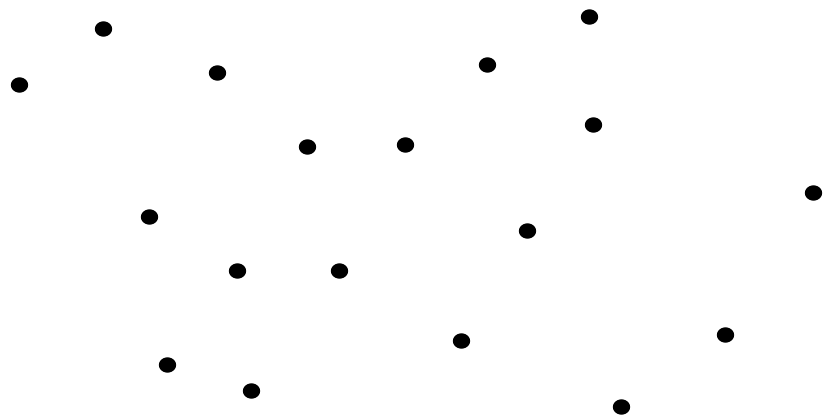
## *Laufzeit des Algorithmus*

$\mathbf{O}(n^3)$

# Teile & Herrsche

## *Grundidee*

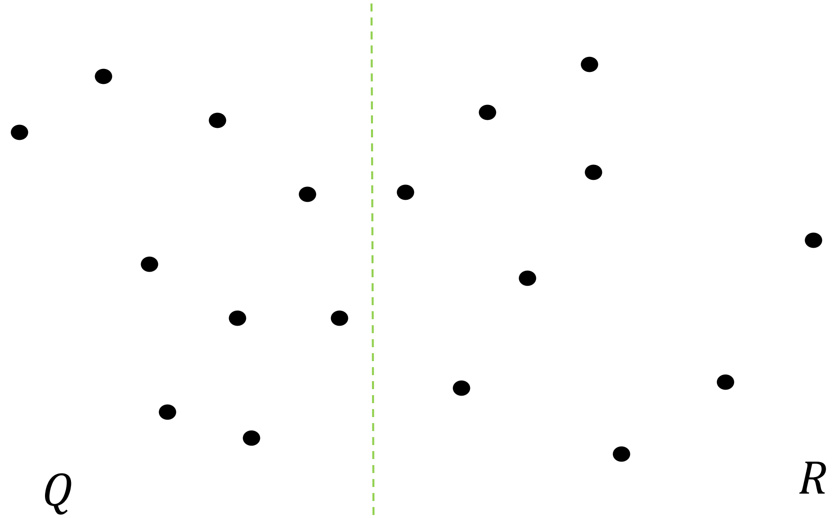
- Sortiere Punkte nach $x$-Koordinate
- Teile in zwei Hälften $Q$ und $R$
- Berechne Hüllen der linken und rechten Punktmenge rekursiv
- Setze die Hüllen zusammen



# Teile & Herrsche

## *Grundidee*

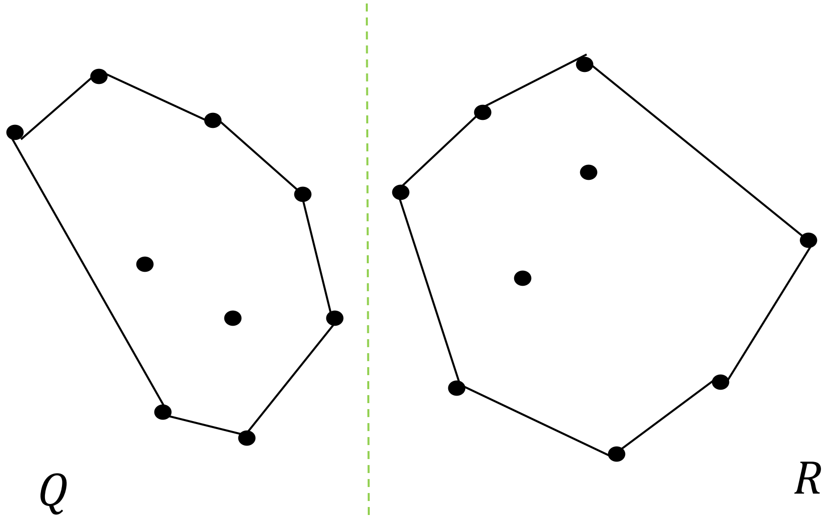
- Sortiere Punkte nach $x$-Koordinate
- Teile in zwei Hälften $Q$ und $R$
- Berechne Hüllen der linken und rechten Punktmenge rekursiv
- Setze die Hüllen zusammen



# Teile & Herrsche

## *Grundidee*

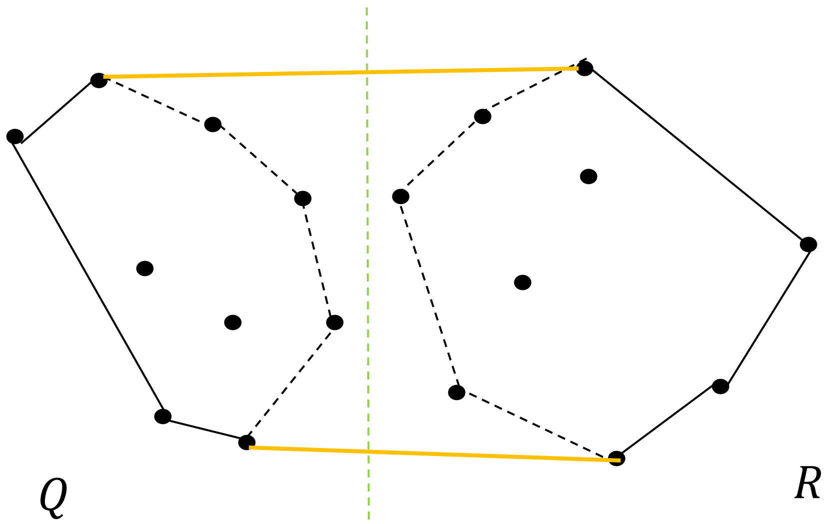
- Sortiere Punkte nach $x$-Koordinate
- Teile in zwei Hälften $Q$ und $R$
- Berechne Hüllen der linken und rechten Punktmenge rekursiv
- Setze die Hüllen zusammen



# Teile & Herrsche

## *Grundidee*

- Sortiere Punkte nach $x$-Koordinate
- Teile in zwei Hälften $Q$ und $R$
- Berechne Hüllen der linken und rechten Punktmenge rekursiv
- Setze die Hüllen zusammen



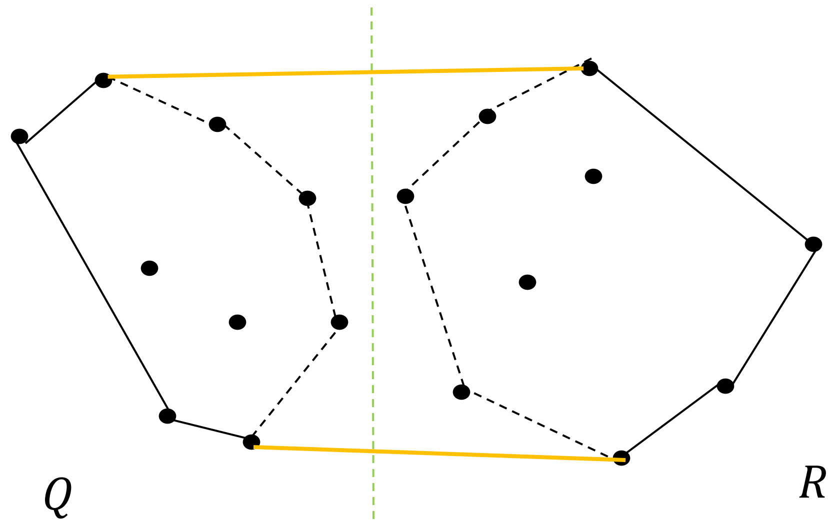
# Teile & Herrsche

## *Grundidee*

- Sortiere Punkte nach $x$-Koordi
- Teile in zwei Hälften $Q$ und $R$
- Berechne Hüllen der linken un
- Setze die Hüllen zusammen

Wie verbindet man die beiden Hüllen?

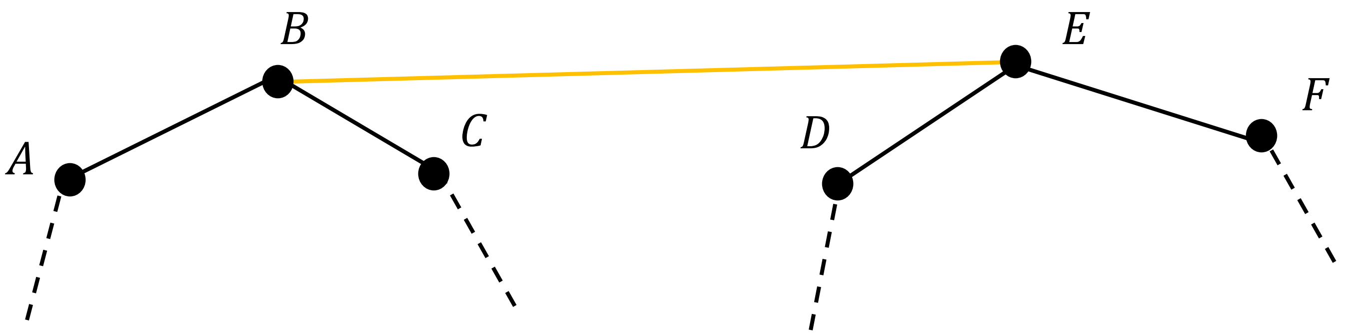
A) Man verbindet die obersten und untersten Punkte
B) Man hält den obersten Punkt der linken Hülle fest und sucht entlang der rechten Hülle bis man den anderen Endpunkt gefunden hat
C) Beides funktioniert
D) Keines von beiden funktioniert



# Teile & Herrsche

*Notwendige Eigenschaften der oberen fehlenden Strecke*

- Sortierung im Uhrzeigersinn um $B$ ist $A, E, C$
- Sortierung im Uhrzeigersinn um $E$ ist $D, B, F$
- Winkel $ABE$ ist größer als 180 Grad
- Winkel $BEF$ ist größer als 180 Grad
- Winkel im Uhrzeigersinn



# Teile & Herrsche

## *Notwendige Eigenschaften der oberen fehlenden Strecke*

- Sortierung im Uhrzeigersinn um $B$ ist $A, E, C$

## *Beweis*

- Die einzige andere Sortierung ist $A, C, E$
- Dann liegen $A$ und $C$ auf unterschiedlichen Seiten der Linie durch $B$ und $E$
- Somit kann $BE$ nicht zum Rand der konvexen Hülle gehören

# Teile & Herrsche

*Notwendige Eigenschaften der oberen fehlenden Strecke*

- Sortierung im Uhrzeigersinn um $B$ ist $A, E, C$
- Sortierung im Uhrzeigersinn um $E$ ist $D, B, F$

*Beweis*

Analog

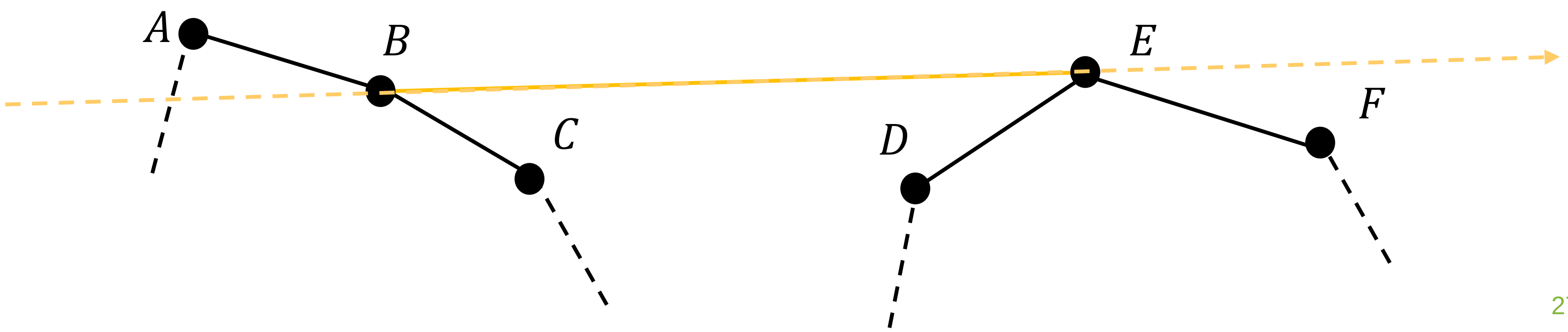
# Teile & Herrsche

## *Notwendige Eigenschaften der oberen fehlenden Strecke*

- Winkel $ABE$ ist größer als 180 Grad

## *Beweis*

- Ist der Winkel nicht größer als 180 Grad, so ist er aufgrund der allgemeinen Lage kleiner als 180 Grad
- Dann liegt $A$ aber links der gerichteten Linie durch $B$ und $E$ und somit liegt $BE$ nicht auf dem Rand der konvexen Hülle



# Teile & Herrsche

*Notwendige Eigenschaften der oberen fehlenden Strecke*

- Winkel $ABE$ ist größer als 180 Grad
- Winkel $BEF$ ist größer als 180 Grad

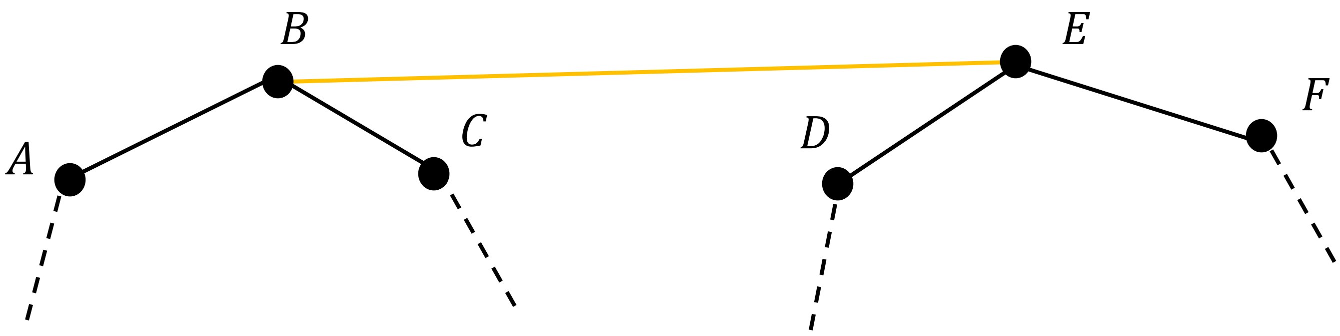
*Beweis*

Analog

# Teile & Herrsche

## *Hinreichende Eigenschaften der oberen fehlenden Strecke*

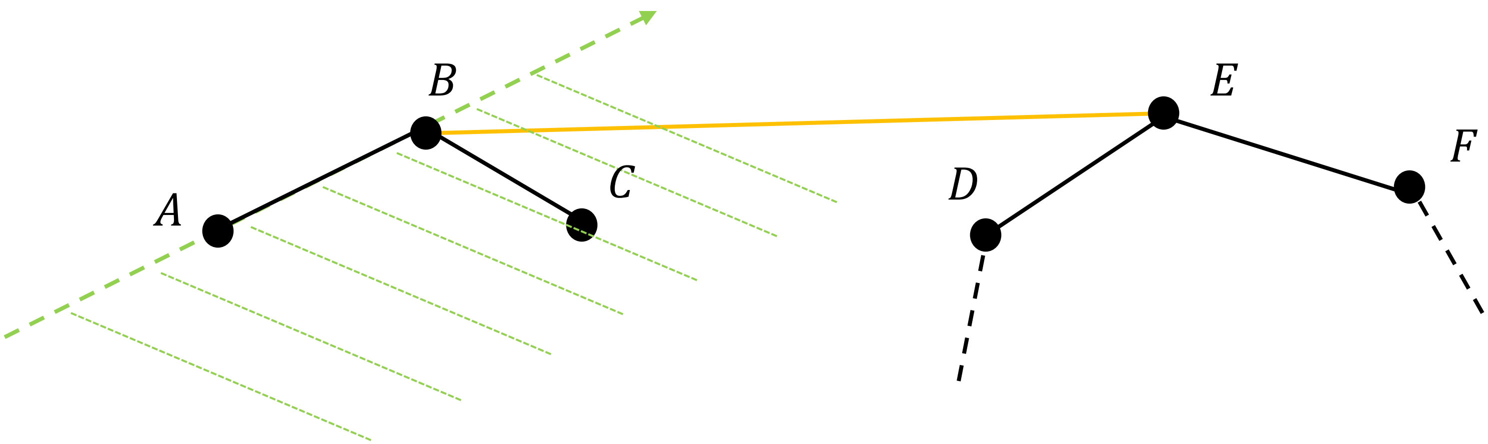
- Sortierung im Uhrzeigersinn um $B$ ist $A, E, C$
- Sortierung im Uhrzeigersinn um $E$ ist $D, B, F$
- Winkel $ABE$ ist größer als 180 Grad
- Winkel $BEF$ ist größer als 180 Grad



# Teile & Herrsche

## *Beweis*

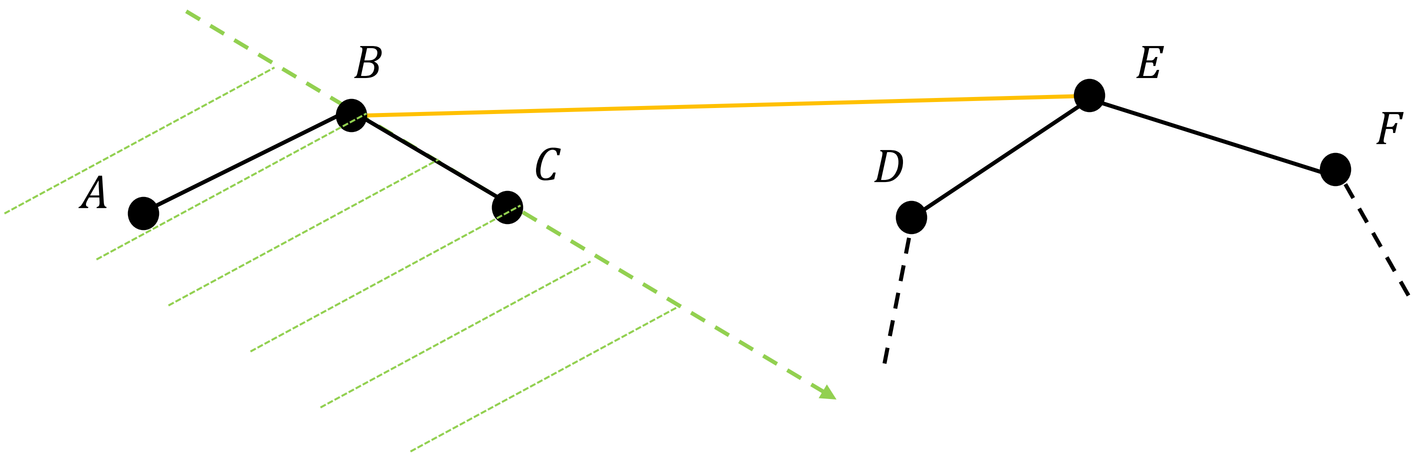
- Da $AB$ auf dem Rand der konvexen Hülle von $Q$ liegt, liegen alle Punkte von $Q$ rechts der Linie durch $A$ und $B$.



# Teile & Herrsche

*Beweis*

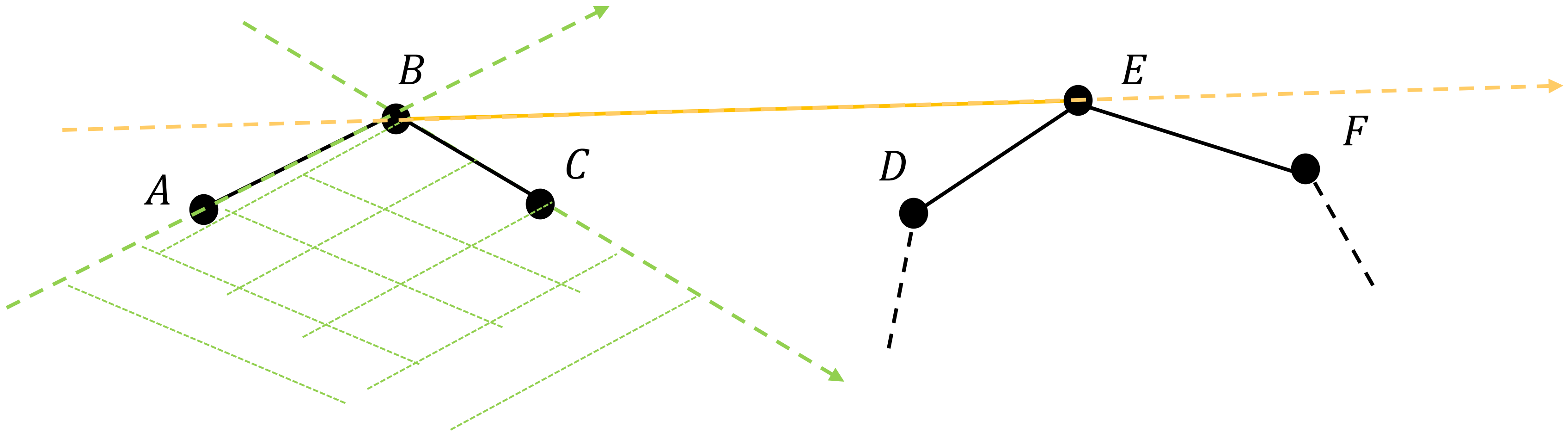
- Da $AB$ auf dem Rand der konvexen Hülle von $Q$ liegt, liegen alle Punkte von $Q$ rechts der Linie durch $A$ und $B$. Gleiches gilt für die Punkte $B$ und $C$.



# Teile & Herrsche

## *Beweis*

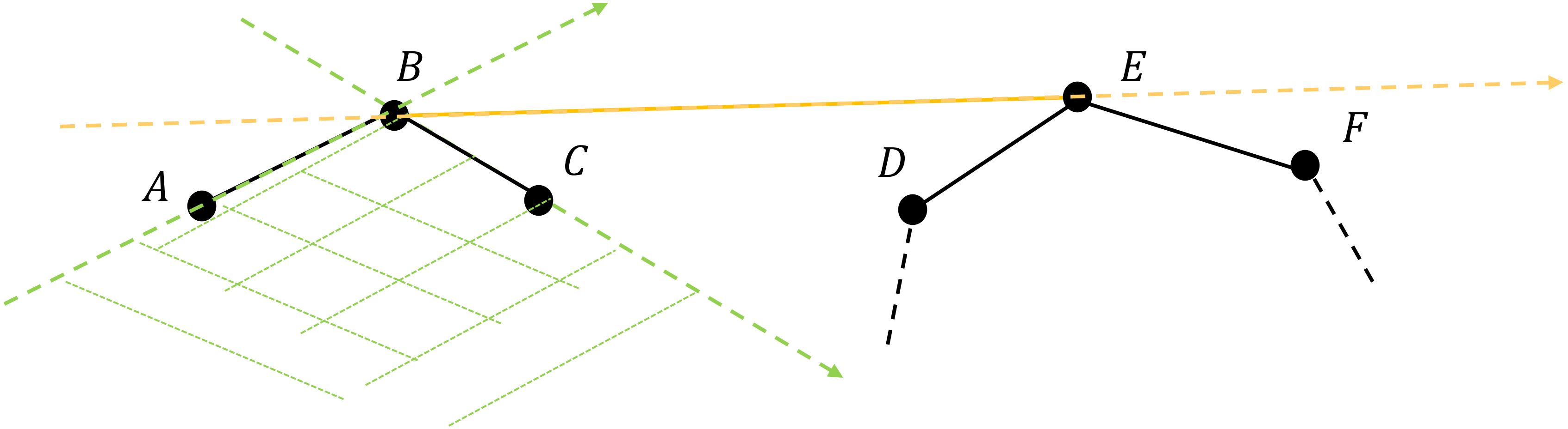
- Da $AB$ auf dem Rand der konvexen Hülle von $Q$ liegt, liegen alle Punkte von $Q$ rechts der Linie durch $A$ und $B$. Gleiches gilt für die Punkte $B$ und $C$.
- Damit liegen alle Punkte aus $Q$ rechts der gerichteten Linie durch $B$ und $E$



# Teile & Herrsche

*Beweis*

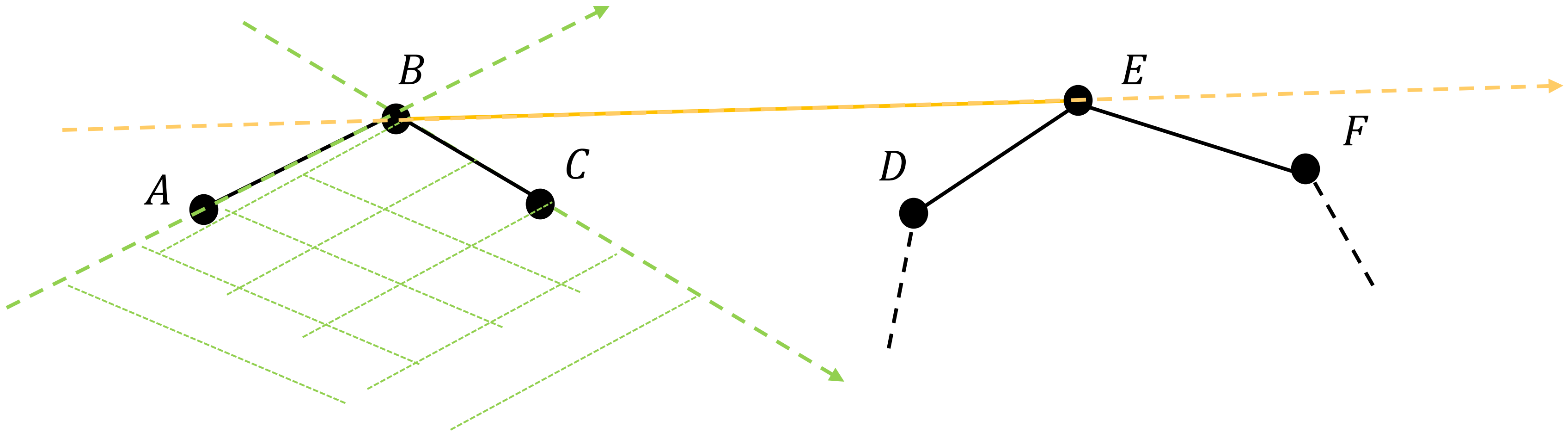
- Da $AB$ auf dem Rand der konvexen Hülle von $Q$ liegt, liegen alle Punkte von $Q$ rechts der Linie durch $A$ und $B$. Gleiches gilt für die Punkte $B$ und $C$.
- Damit liegen alle Punkte aus $Q$ rechts der gerichteten Linie durch $B$ und $E$
- Analog zeigt man für $R$, dass alle Punkte rechts der Linie durch $B$ und $E$ liegen



# Teile & Herrsche

*Beweis*

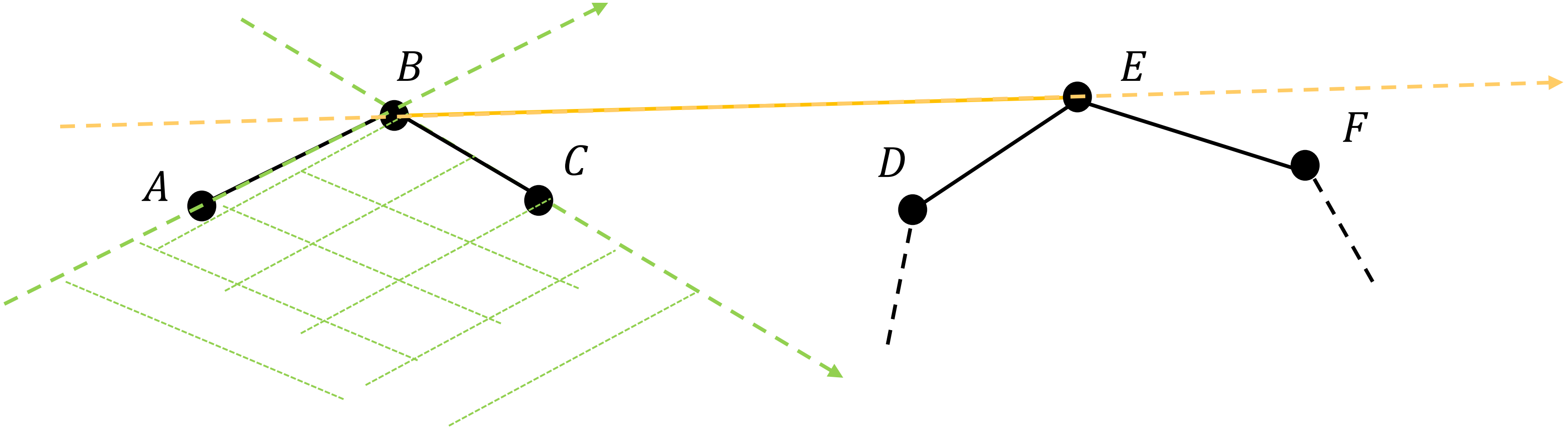
- Da $AB$ auf dem Rand der konvexen Hülle von $Q$ liegt, liegen alle Punkte von $Q$ rechts der Linie durch $A$ und $B$. Gleiches gilt für die Punkte $B$ und $C$.
- Damit liegen alle Punkte aus $Q$ rechts der gerichteten Linie durch $B$ und $E$
- Analog zeigt man für $R$, dass alle Punkte rechts der Linie durch $B$ und $E$ liegen
- Damit liegt $BE$ auf dem Rand der konvexen Hülle



# Teile & Herrsche

*Beweis*

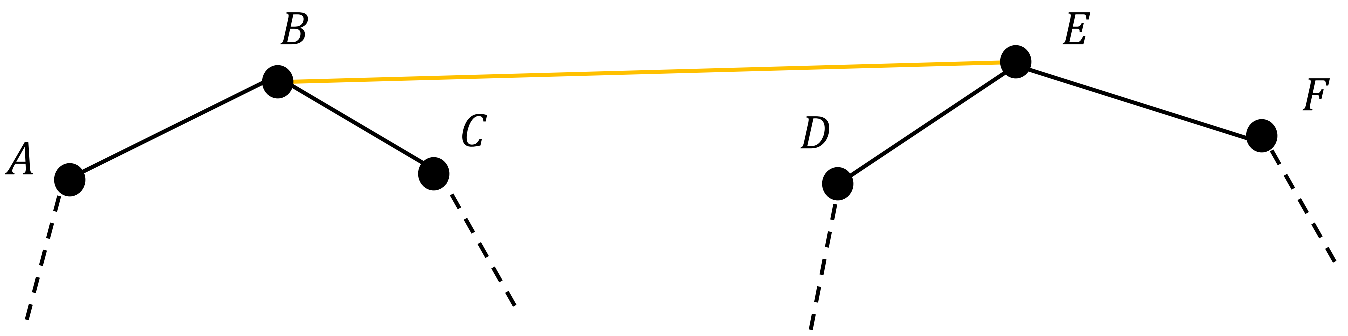
- Da $AB$ auf dem Rand der konvexen Hülle von $Q$ liegt, liegen alle Punkte von $Q$ rechts der Linie durch $A$ und $B$. Gleiches gilt für die Punkte $B$ und $C$.
- Damit liegen alle Punkte aus $Q$ rechts der gerichteten Linie durch $B$ und $E$
- Analog zeigt man für $R$, dass alle Punkte rechts der Linie durch $B$ und $E$ liegen
- Damit liegt $BE$ auf dem Rand der konvexen Hülle



# Teile & Herrsche

*Notwendige und Hinreichende Eigenschaften der oberen fehlenden Strecke*

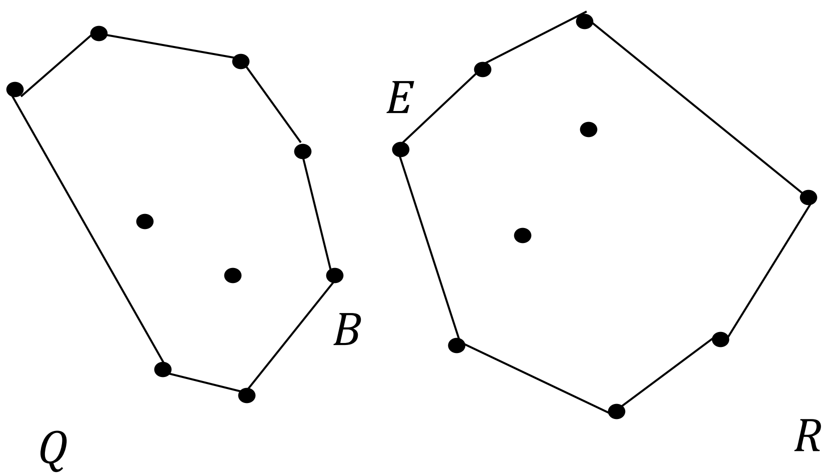
- Sortierung im Uhrzeigersinn um $B$ ist $A, E, C$
- Sortierung im Uhrzeigersinn um $E$ ist $D, B, F$
- Winkel $ABE$ ist größer als 180 Grad
- Winkel $BEF$ ist größer als 180 Grad



# Teile & Herrsche

## *Suchen der oberen Strecke*

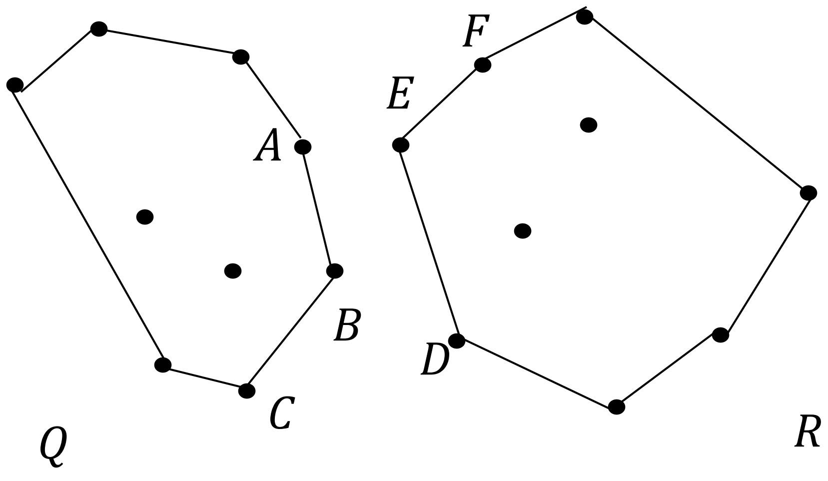
- Sei $B$ der rechteste Knoten von $Q$ und $E$ der linkeste Knoten von $R$



# Teile & Herrsche

## *Suchen der oberen Strecke*

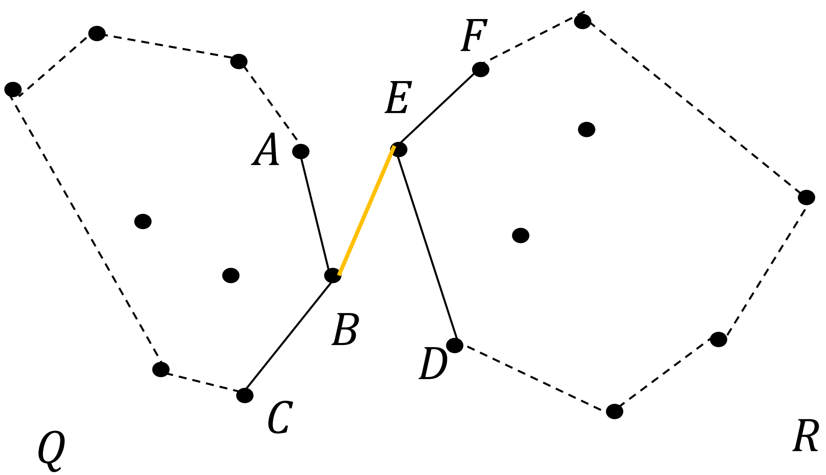
- Sei $B$ der rechteste Knoten von $Q$ und $E$ der linkeste Knoten von $R$
- Sei $A$ der Vorgänger und $C$ der Nachfolger von $B$ im Uhrzeigersinn
- Sei $D$ der Vorgänger und $F$ der Nachfolger von $E$ im Uhrzeigersinn



# Teile & Herrsche

## *Suchen der oberen Strecke*

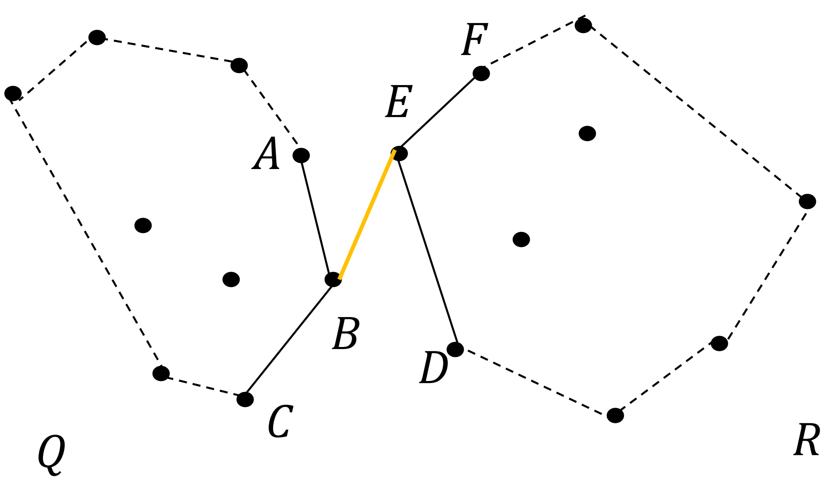
- Sei $B$ der rechteste Knoten von $Q$ und $E$ der linkeste Knoten von $R$
- Sei $A$ der Vorgänger und $C$ der Nachfolger von $B$ im Uhrzeigersinn
- Sei $D$ der Vorgänger und $F$ der Nachfolger von $E$ im Uhrzeigersinn



# Teile & Herrsche

## *Suchen der oberen Strecke*

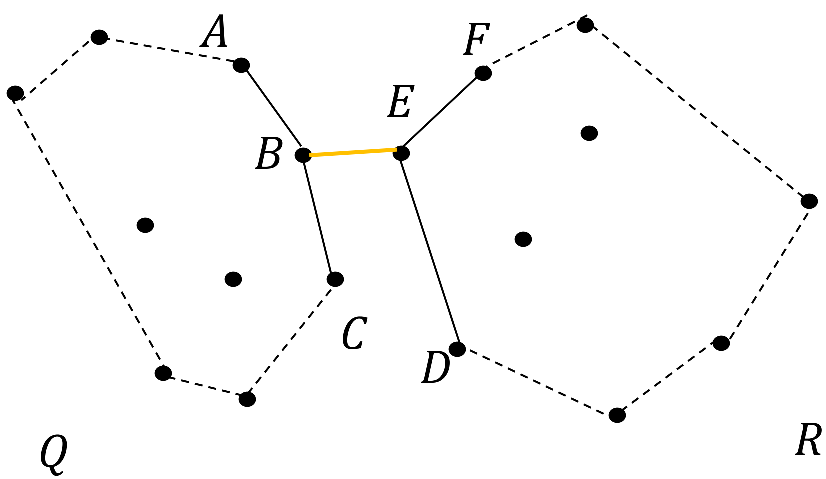
- Beobachtung: Sortierung um $B$ ist $A, E, C$ und Sortierung um $E$ ist $D, B, F$
- Wenn Winkel $ABE \; < 180$ Grad, dann setze $B = A$ und definiere $A$ als den Vorgänger von $B$ und $C$ als den Nachfolger



# Teile & Herrsche

## *Suchen der oberen Strecke*

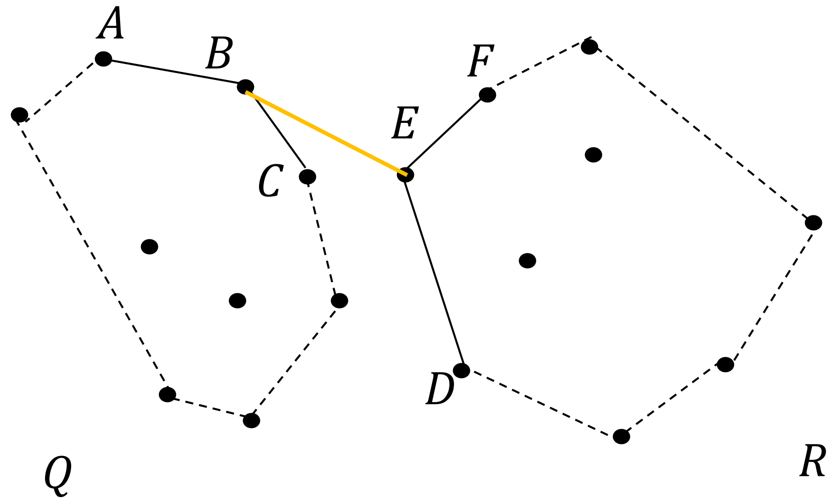
- Beobachtung: Sortierung um $B$ ist $A, E, C$ und Sortierung um $E$ ist $D, B, F$
- Wenn Winkel $ABE\ < 180$ Grad, dann setze $B = A$ und definiere $A$ als den Vorgänger von $B$ und $C$ als den Nachfolger



# Teile & Herrsche

## *Suchen der oberen Strecke*

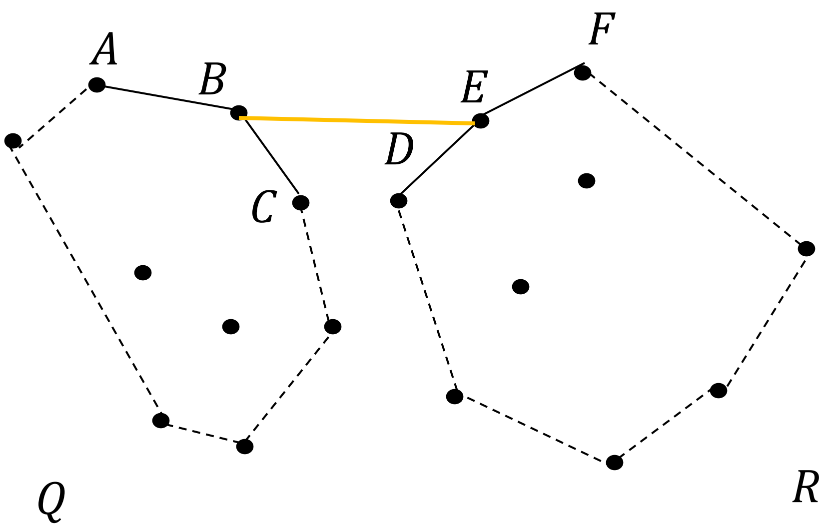
- Beobachtung: Sortierung um $B$ ist $A, E, C$ und Sortierung um $E$ ist $D, B, F$
- Wenn Winkel $ABE$ $< 180$ Grad, dann setze $B = A$ und definiere $A$ als den Vorgänger von $B$ und $C$ als den Nachfolger



# Teile & Herrsche

## *Suchen der oberen Strecke*

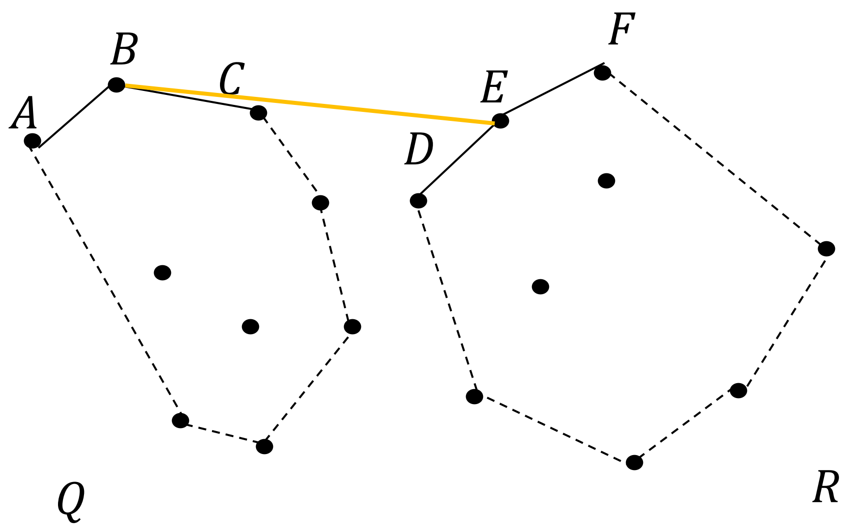
- Beobachtung: Sortierung um $B$ ist $A, E, C$ und Sortierung um $E$ ist $D, B, F$
- Wenn Winkel $BEF\ < 180$ Grad, dann setze $E = F$ und definiere $D$ als den Vorgänger von $E$ und $F$ als den Nachfolger



# Teile & Herrsche

## *Suchen der oberen Strecke*

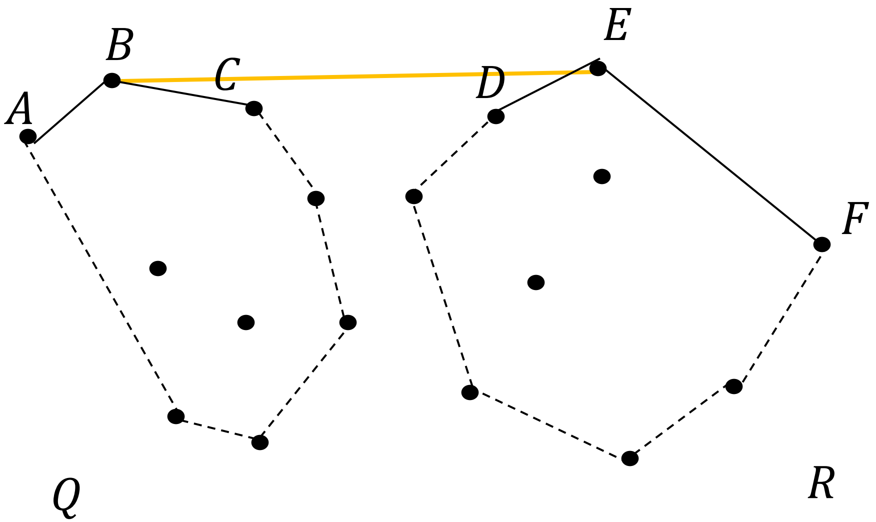
- Beobachtung: Sortierung um $B$ ist $A, E, C$ und Sortierung um $E$ ist $D, B, F$
- Wenn Winkel $ABE < 180$ Grad, dann setze $B = A$ und definiere $A$ als den Vorgänger von $B$ und $C$ als den Nachfolger



# Teile & Herrsche

## *Suchen der oberen Strecke*

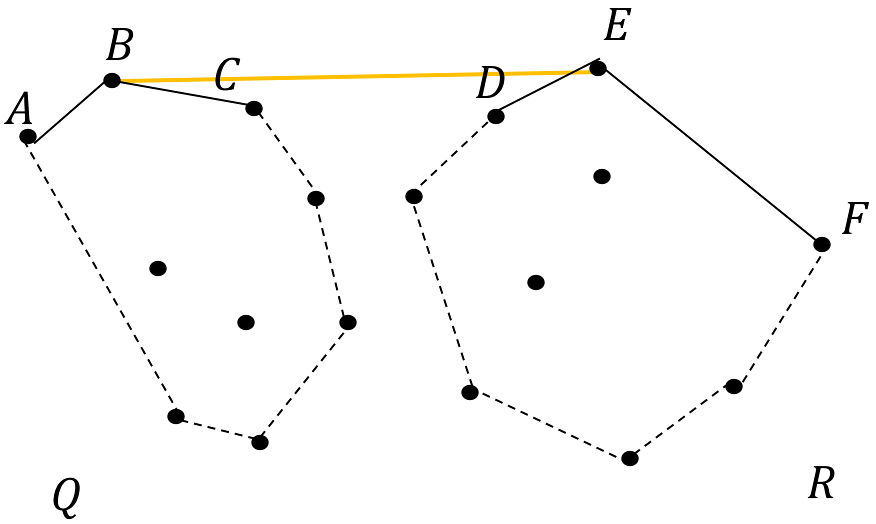
- Beobachtung: Sortierung um $B$ ist $A, E, C$ und Sortierung um $E$ ist $D, B, F$
- Wenn Winkel $BEF < 180$ Grad, dann setze $E = F$ und definiere $D$ als den Vorgänger von $E$ und $F$ als den Nachfolger



# Teile & Herrsche

## *Suchen der oberen Strecke*

- Beobachtung: Sortierung um $B$ ist $A, E, C$ und Sortierung um $E$ ist $D, B, F$
- Beide Winkel > 180 Grad ⇒ hinreichende Bedingung erfüllt



# Teile & Herrsche

## *Suchen der oberen Strecke*

1. Sei $B$ rechtester Punkt von $Q$; $A$ Vorgänger von $B$; $C$ Nachfolger von $B$ im Uhrzeigersinn
2. Sei $E$ linkester Punkt von $R$; $D$ Vorgänger von $E$; $F$ Nachfolger von $E$ im Uhrzeigersinn
3. **while** hinreichende Bedingung nicht erfüllt **do**
4.     **if** Winkel $ABE < 180$ **then**
5.         $B \leftarrow A$; $A \leftarrow$ Vorgänger von $B$; $C \leftarrow$ Nachfolger von $B$
6.     **if** Winkel $BEF < 180$ **then**
7.         $E \leftarrow F$; $D \leftarrow$ Vorgänger von $E$; $F \leftarrow$ Nachfolger von $E$
8. **return** $BE$

# Teile & Herrsche

## *Suchen der oberen Strecke*

1. Sei $B$ rechtester Punkt von $Q$; $A$ Vorgänger von $B$; $C$ Nachfolger von $B$ im Uhrzeigersinn
2. Sei $E$ linkester Punkt von $R$; $D$ Vorgänger von $E$; $F$ Nachfolger von $E$ im Uhrzeigersinn
3. **while** hinreichende Bedingung nicht erfüllt **do**
4.     **if** Winkel $ABE < 180$ **then**
5.         $B \leftarrow A$; $A \leftarrow$ Vorgänger von $B$; $C \leftarrow$ Nachfolger von $B$
6.     **if** Winkel $BEF < 180$ **then**
7.         $E \leftarrow F$; $D \leftarrow$ Vorgänger von $E$; $F \leftarrow$ Nachfolger von $E$
8. **return** $BE$

## *Laufzeit*

- $\mathbf{O}(n)$, da maximal jeder Knoten in der **while**-Schleife einmal $B$ sein kann

# Teile & Herrsche

## *Lemma 12*

- Die Suche der oberen Strecke hält folgende Invariante aufrecht:
- Sortierung im Uhrzeigersinn um $B$ ist $A, E, C$
- Sortierung im Uhrzeigersinn um $E$ ist $D, B, F$

## *Beweis*

Zu Beginn der **while**-Schleife ist $B$ rechtester Knoten von $Q$. Da $E$ rechts von $B$ liegt, bleibt nur die Sortierung $A, E, C$ um $B$. Analog für $E$.

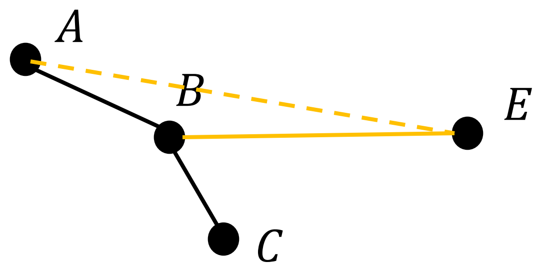
# Teile & Herrsche

## *Lemma 12*

- Die Suche der oberen Strecke hält folgende Invariante aufrecht:
- Sortierung im Uhrzeigersinn um $B$ ist $A, E, C$
- Sortierung im Uhrzeigersinn um $E$ ist $D, B, F$

## *Beweis*

Ist während des Verlaufes der **while**-Schleife der Winkel $ABE$ < 180 Grad, so bleibt die Sortierung auf der linken Seite nach dem Umbenennen der Knoten erhalten, da der Winkel $ABE$ < 180 Grad ist



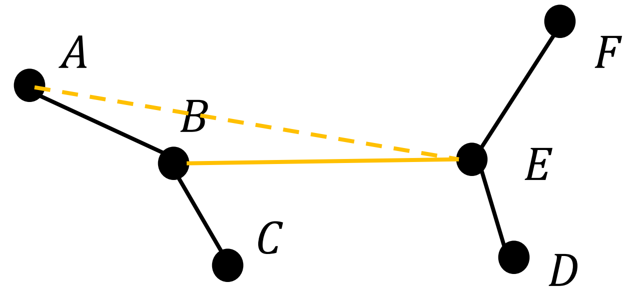
# Teile & Herrsche

## *Lemma 12*

- Die Suche der oberen Strecke hält folgende Invariante aufrecht:
- Sortierung im Uhrzeigersinn um $B$ ist $A, E, C$
- Sortierung im Uhrzeigersinn um $E$ ist $D, B, F$

## *Beweis*

Auf der rechten Seite bleibt die Sortierung ebenfalls erhalten. Wäre dies nicht der Fall, so müsste $F$ zwischen den Strahlen von $E$ durch $A$ und $B$ liegen. Dann ist $F$ links von $E$. Dies kann aber nur passieren, wenn $E$ bereits der rechteste Knoten der rechten Hülle ist.



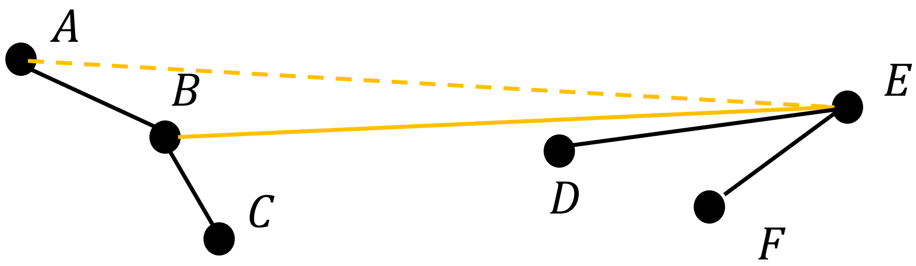
# Teile & Herrsche

## *Lemma 12*

- Die Suche der oberen Strecke hält folgende Invariante aufrecht:
- Sortierung im Uhrzeigersinn um $B$ ist $A, E, C$
- Sortierung im Uhrzeigersinn um $E$ ist $D, B, F$

## *Beweis*

Dies kann aber nur passieren, wenn $E$ bereits der rechteste Knoten der rechten Hülle ist. Dann liegt $EF$ unterhalb von $ED$ (aufgrund der konvexen Hülle Eigenschaften), $ED$ unterhalb von $EB$ (Invariante) und $EB$ unterhalb von $EA$ (da der Winkel $EBA$ kleiner als 180 Grad war).



# Teile & Herrsche

*Lemma 12*

- Die Suche der oberen Strecke hält folgende Invariante aufrecht:
- Sortierung im Uhrzeigersinn um $B$ ist $A, E, C$
- Sortierung im Uhrzeigersinn um $E$ ist $D, B, F$

*Beweis*

Der Fall Winkel $BEF$ < 180 Grad ist symmetrisch. Somit bleibt die Invariante erhalten.

# Teile & Herrsche

*Lemma 13*

Die Suche nach der oberen und unteren Kante ist korrekt und benötigt $\mathbf{O}(n)$ Zeit.

*Beweis*

- Die Suche nach der oberen und der unteren Kante ist symmetrisch. Die Laufzeit ist $\mathbf{O}(n)$ wie bereits gezeigt. Es bleibt die Korrektheit zu zeigen.

# Teile & Herrsche

## *Lemma 13*

Die Suche nach der oberen und unteren Kante ist korrekt und benötigt $\mathbf{O}(n)$ Zeit.

## *Beweis*

- Die Suche nach der oberen und der unteren Kante ist symmetrisch. Die Laufzeit ist $\mathbf{O}(n)$ wie bereits gezeigt. Es bleibt die Korrektheit zu zeigen.
- Nach Lemma 12 hält der Algorithmus die lokale Sortierung als Invariante aufrecht. Terminiert die Schleife, so sind die Winkel $ABE$ und $BEF$ beide $> 180$ Grad und somit ist die hinreichende Bedingung erfüllt. Damit ist die zurückgegebene Kante die gesuchte Kante der konvexen Hülle.

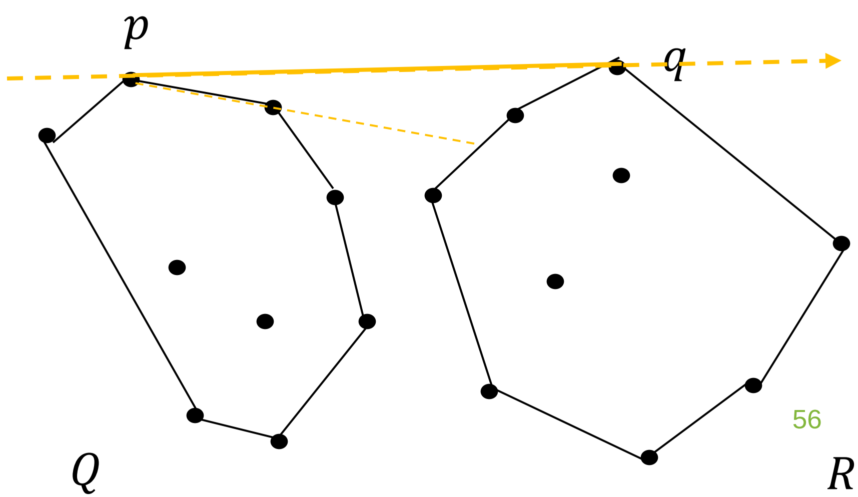
# Teile & Herrsche

## *Lemma 13*

Die Suche nach der oberen und unteren Kante ist korrekt und benötigt $\mathbf{O}(n)$ Zeit.

## *Beweis*

- Es bleibt zu zeigen, dass die Schleife terminiert. Sei dazu $pq$ die obere fehlende Kante der konvexen Hülle.



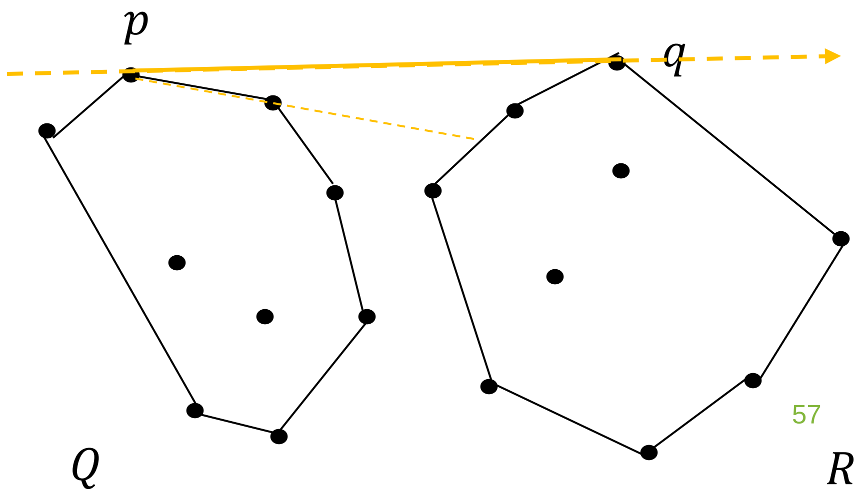
# Teile & Herrsche

## *Lemma 13*

Die Suche nach der oberen und unteren Kante ist korrekt und benötigt $\mathbf{O}(n)$ Zeit.

## *Beweis*

- Es bleibt zu zeigen, dass die Schleife terminiert. Sei dazu $pq$ die obere fehlende Kante der konvexen Hülle.
- Sei o.b.d.A. $p$ der erste Knoten von $p$ und $q$, der vom Algorithmus untersucht wird (d.h. $B$ wird auf $p$ gesetzt).



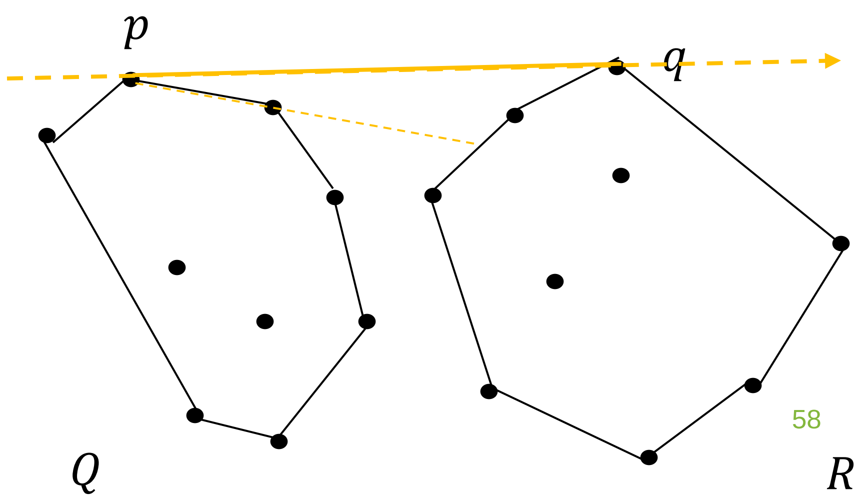
# Teile & Herrsche

## *Lemma 13*

Die Suche nach der oberen und unteren Kante ist korrekt und benötigt $\mathbf{O}(n)$ Zeit.

## *Beweis*

- Es bleibt zu zeigen, dass die Schleife terminiert. Sei dazu $pq$ die obere fehlende Kante der konvexen Hülle.
- Sei o.b.d.A. $p$ der erste Knoten von $p$ und $q$, der vom Algorithmus untersucht wird (d.h. $B$ wird auf $p$ gesetzt).
- Dann ist für jeden Knoten $E$ aus $R$, der die Invariante erfüllt, der Winkel $ABE$ größer 180 Grad, da alle Knoten aus $R$ rechts der gerichteten Geraden durch $p$ und $q$ liegen



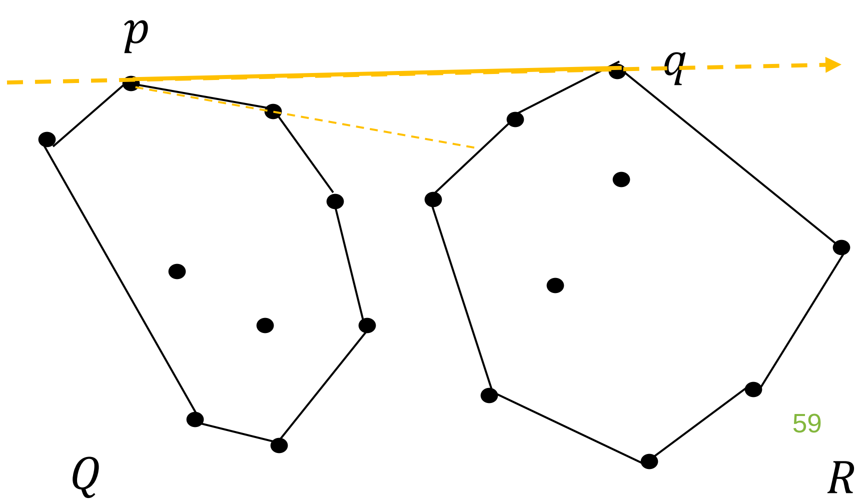
# Teile & Herrsche

## *Lemma 13*

Die Suche nach der oberen und unteren Kante ist korrekt und benötigt $\mathbf{O}(n)$ Zeit.

## *Beweis*

- Es bleibt zu zeigen, dass die Schleife terminiert. Sei dazu $pq$ die obere fehlende Kante der konvexen Hülle.
- Sei o.b.d.A. $p$ der erste Knoten von $p$ und $q$, der vom Algorithmus untersucht wird (d.h. $B$ wird auf $p$ gesetzt).
- Dann ist für jeden Knoten $E$ aus $R$, der die Invariante erfüllt, der Winkel $ABE$ größer 180 Grad, da alle Knoten aus $R$ rechts der gerichteten Geraden durch $p$ und $q$ liegen



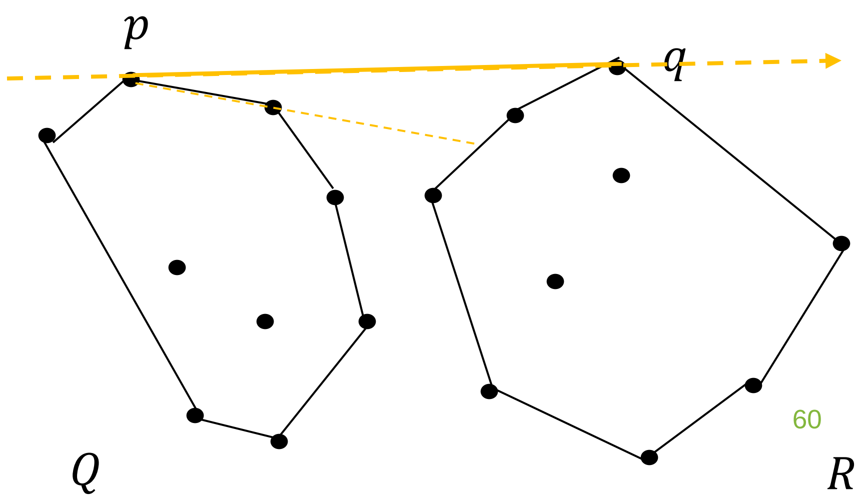
# Teile & Herrsche

## *Lemma 13*

Die Suche nach der oberen und unteren Kante ist korrekt und benötigt $\mathbf{O}(n)$ Zeit.

## *Beweis*

- Damit bleiben die Knoten $A, B, C$ unverändert, bis der Algorithmus auch $q$ gefunden hat und die Schleife terminiert.



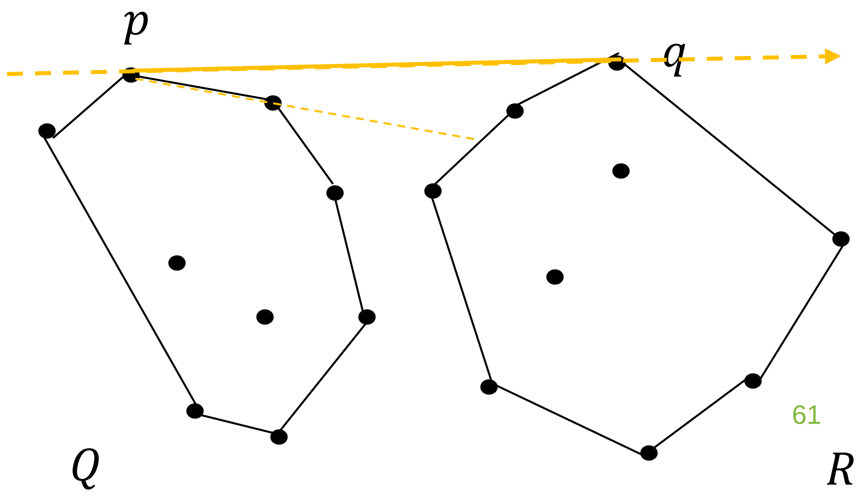
# Teile & Herrsche

## *Lemma 13*

Die Suche nach der oberen und unteren Kante ist korrekt und benötigt $\mathbf{O}(n)$ Zeit.

## *Beweis*

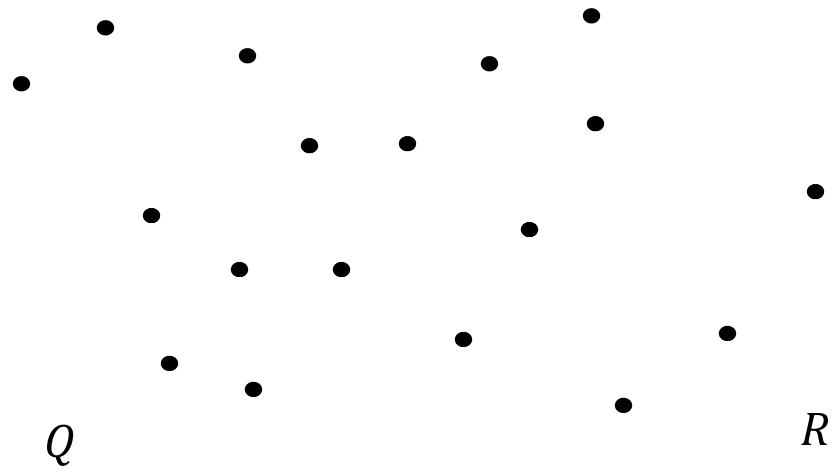
- Damit bleiben die Knoten $A, B, C$ unverändert, bis der Algorithmus auch $q$ gefunden hat und die Schleife terminiert.



# Teile & Herrsche

## *Der konvexe Hülle Algorithmus*

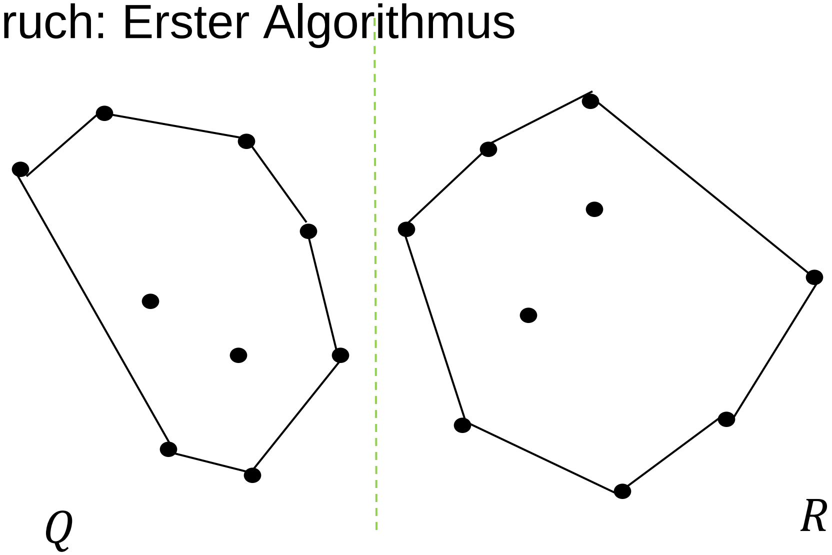
- Teile Punktmenge die Mengen $Q$ und $R$ der $n/2$ Punkte mit den kleinsten bzw. größten $x$-Koordinaten auf
- Löse das Problem rekursiv
- Berechne die obere und untere fehlende Strecke
- Lösche die dazwischenliegenden Punkte
- Rekursionsabbruch: Erster Algorithmus



# Teile & Herrsche

## *Der konvexe Hülle Algorithmus*

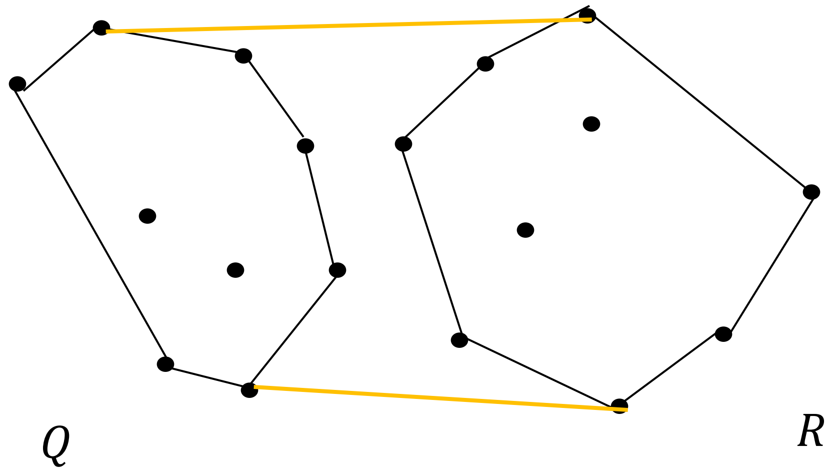
- Teile Punktmenge die Mengen $Q$ und $R$ der $n/2$ Punkte mit den kleinsten bzw. größten $x$-Koordinaten auf
- Löse das Problem rekursiv
- Berechne die obere und untere fehlende Strecke
- Lösche die dazwischenliegenden Punkte
- Rekursionsabbruch: Erster Algorithmus



# Teile & Herrsche

## *Der konvexe Hülle Algorithmus*

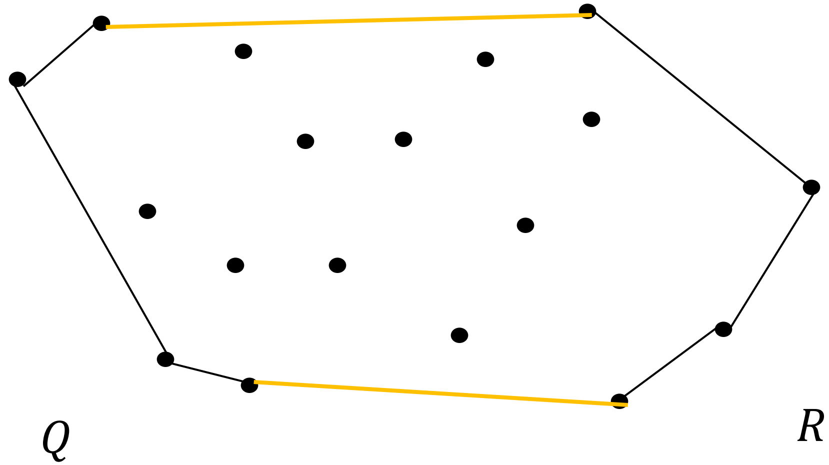
- Teile Punktmenge die Mengen $Q$ und $R$ der $n/2$ Punkte mit den kleinsten bzw. größten $x$-Koordinaten auf
- Löse das Problem rekursiv
- Berechne die obere und untere fehlende Strecke
- Lösche die dazwischenliegenden Punkte
- Rekursionsabbruch: Erster Algorithmus



# Teile & Herrsche

## *Der konvexe Hülle Algorithmus*

- Teile Punktmenge die Mengen $Q$ und $R$ der $n/2$ Punkte mit den kleinsten bzw. größten $x$-Koordinaten auf
- Löse das Problem rekursiv
- Berechne die obere und untere fehlende Strecke
- Lösche die dazwischenliegenden Punkte
- Rekursionsabbruch: Erster Algorithmus



# Teile & Herrsche

## *Satz 14*

Die konvexe Hülle einer Punktmenge kann in $\mathbf{O}(n \log n)$ Zeit mit dem Teile & Herrsche Verfahren berechnet werden.

## *Beweis*

- Das Entfernen der überflüssigen Kanten geht in $\mathbf{O}(n)$ Zeit.

# Teile & Herrsche

## *Satz 14*

Die konvexe Hülle einer Punktmenge kann in $\mathbf{O}(n \log n)$ Zeit mit dem Teile & Herrsche Verfahren berechnet werden.

## *Beweis*

- Das Entfernen der überflüssigen Kanten geht in $\mathbf{O}(n)$ Zeit.
- Es genügt, zu Beginn des Algorithmus die Punkte einmal nach $x$-Koordinate zu sortieren. Dies benötigt $\mathbf{O}(n \log n)$ Zeit.

# Teile & Herrsche

## *Satz 14*

Die konvexe Hülle einer Punktmenge kann in $\mathbf{O}(n \log n)$ Zeit mit dem Teile & Herrsche Verfahren berechnet werden.

## *Beweis*

- Das Entfernen der überflüssigen Kanten geht in $\mathbf{O}(n)$ Zeit.
- Es genügt, zu Beginn des Algorithmus die Punkte einmal nach $x$-Koordinate zu sortieren. Dies benötigt $\mathbf{O}(n \log n)$ Zeit.
- Nach der Sortierung ergibt sich als Laufzeit:
- $T(n) = 2T(n/2) + cn$ und $T(4) = c$

# Teile & Herrsche

*Satz 14*

Die konvexe Hülle einer Punktmenge kann in $\mathbf{O}(n \log n)$ Zeit mit dem Teile & Herrsche Verfahren berechnet werden.

*Beweis*

- Das Entfernen der überflüssigen Kanten geht in $\mathbf{O}(n)$ Zeit.
- Es genügt, zu Beginn des Algorithmus die Punkte einmal nach $x$-Koordinate zu sortieren. Dies benötigt $\mathbf{O}(n \log n)$ Zeit.
- Nach der Sortierung ergibt sich als Laufzeit:
- $T(n) = 2T(n/2) + cn$ und $T(4) = c$
- Wie beim Mergesort ergibt dies Laufzeit $\mathbf{O}(n \log n)$

# Teile & Herrsche

## *Satz 14*

Die konvexe Hülle einer Punktmenge kann in $\mathbf{O}(n \log n)$ Zeit mit dem Teile & Herrsche Verfahren berechnet werden.

## *Beweis*

- Das Entfernen der überflüssigen Kanten geht in $\mathbf{O}(n)$ Zeit.
- Es genügt, zu Beginn des Algorithmus die Punkte einmal nach $x$-Koordinate zu sortieren. Dies benötigt $\mathbf{O}(n \log n)$ Zeit.
- Nach der Sortierung ergibt sich als Laufzeit:
- $T(n) = 2T(n/2) + cn$ und $T(4) = c$
- Wie beim Mergesort ergibt dies Laufzeit $\mathbf{O}(n \log n)$
- Also ist die gesamte Laufzeit $\mathbf{O}(n \log n)$

# Teile & Herrsche

## *Satz 14*

Die konvexe Hülle einer Punktmenge kann in $\mathbf{O}(n \log n)$ Zeit mit dem Teile & Herrsche Verfahren berechnet werden.

## *Beweis*

- Das Entfernen der überflüssigen Kanten geht in $\mathbf{O}(n)$ Zeit.
- Es genügt, zu Beginn des Algorithmus die Punkte einmal nach $x$-Koordinate zu sortieren. Dies benötigt $\mathbf{O}(n \log n)$ Zeit.
- Nach der Sortierung ergibt sich als Laufzeit:
- $T(n) = 2T(n/2) + cn$ und $T(4) = c$
- Wie beim Mergesort ergibt dies Laufzeit $\mathbf{O}(n \log n)$
- Also ist die gesamte Laufzeit $\mathbf{O}(n \log n)$