



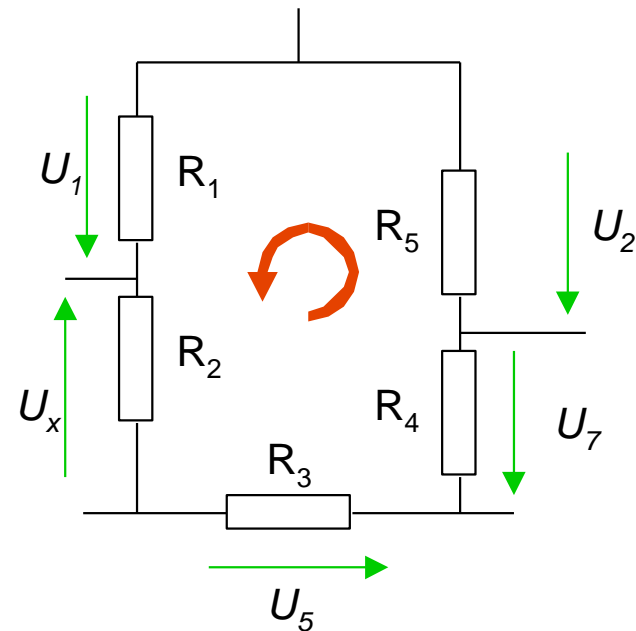
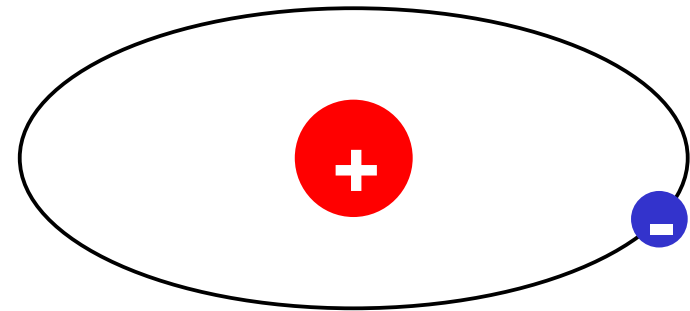
Grundlagen der Elektrotechnik

Inhalt

Teil 1

Grundlagen der Elektrotechnik

- 1 Felder, Spannung und Strom
- 1.1 Das elektrische Feld
- 1.2 Spannung und Strom
- 1.3 Das magnetische Feld
- 2 Stromkreise
- 2.1 Elektrischer Widerstand
- 2.2 Kapazität
- 2.3 Induktivität
- 2.4 Energie und Leistung
- 2.5 Kirchhoffsche Gesetze
- 2.6 Strom- und Spannungsquellen
- 2.7 Widerstandsnetzwerke
- 2.8 Überlagerungssatz
- 2.9 Gemischte Schaltungen



Griechische Buchstaben

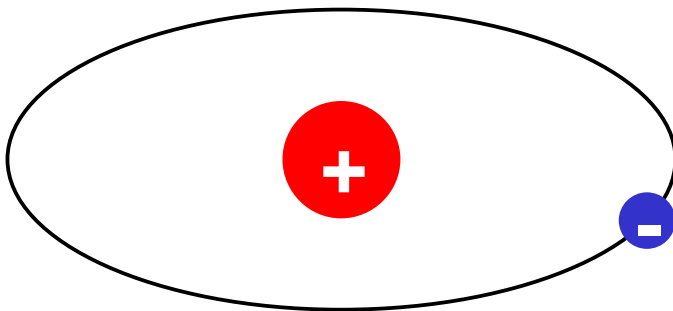
Zeichen	Name
A, α	Alpha
B, β, ϐ	Beta
Γ, γ	Gamma
Δ, δ	Delta
E, ε	Epsilon
Z, ζ	Zeta
H, η	Eta
Θ, θ, ϑ	Theta
I, ι	Iota
K, κ, χ	Kappa
Λ, λ	Lambda
M, μ	My
N, ν	Ny
Ξ, ξ	Xi
Π, π, ϖ	Pi
P, ρ, ϑ	Rho
Σ, σ	Sigma
Φ, φ, ϕ	Phi
Ψ, ψ	Psi
Ω, ω	Omega

Ladung und das elektrische Feld

Die elektrische Ladung

- Quelle für das elektrische Feld sind geladene Teilchen
- Materie besteht zu großem Teil aus geladenen Teilchen
- es gibt positiv und negativ geladene Teilchen

Bohrsches Atommodell:



In jedem Atom umkreisen ein oder mehrere negativ geladene Elektronen auf Bahnen den positiv geladenen Atomkern, Elektronen sind frei bewegliche Ladungsträger

- eine positive und eine negative Ladung ziehen sich an (Kraftwirkung)
- analog zur Planetenbewegung entsteht durch die Elektronenbewegung eine Zentrifugalkraft
- mechanische und elektrische Kräfte kompensieren sich

Die elektrische Ladung

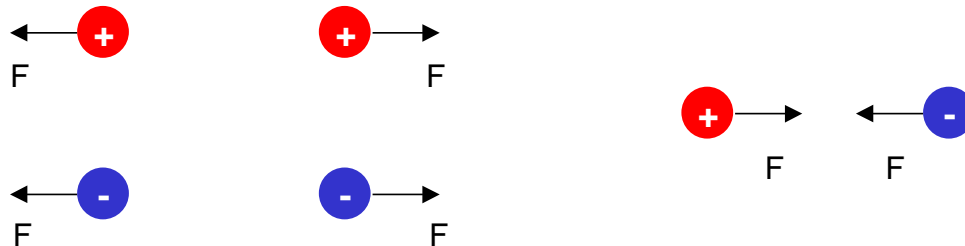
- ein Elektron hat die Ladung: $Q_{elektron} = e = -1,602 \cdot 10^{-19} \text{C}$
- die Ladung eines Atomkerns hängt von der Anzahl der dort vorhandenen Träger der positiven Ladung, den Protonen, ab
- bei Atomkern mit n Protonen ergibt sich eine Ladung von:

$$Q_{atomkern} = n \cdot Q_{proton} = n \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \text{C}$$

- die Gesamtladung in einem Raumvolumen kann sich nur verändern, wenn von außen Ladungen zugeführt oder Ladungen nach außen abgeführt werden (Ladungserhaltung)

Die elektrische Ladung

- im Gegensatz zur Gravitation (Beispiel Planetenbewegung), die nur eine anziehende Wirkung hat, ist die elektrostatische Kraft gerichtet
- d.h. je nach Vorzeichen der Ladungen können sich die Ladungen anziehen oder aber auch abstoßen
- gleichartige Ladung stoßen einander ab und ungleichartige Ladungen ziehen einander an

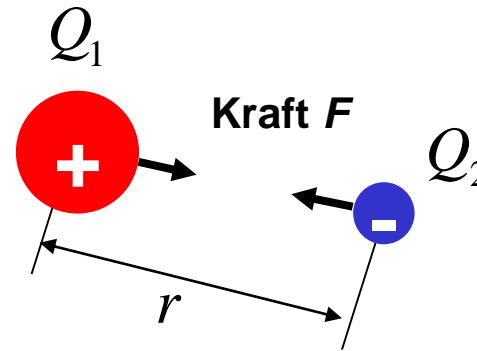


Abstoßung und Anziehung geladener Objekte

Die elektrische Ladung

Das Coulombsche Gesetz

$$F = \frac{Q_1 \cdot Q_2}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot r^2}$$



- beschreibt die Kraft F zwischen zwei geladenen Körpern*) mit den Ladungen Q_1 und Q_2 im Abstand r
- ε_r ist eine materialabhängige (Material um die geladenen Körper) Proportionalitätskonstante
- $\varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ As/Vm}$ = elektrische Feldkonstante
- ε_r für Luft = $1,00058 \approx 1$
- die Einheit für die Ladung ist Coulomb C

*) Wenn nicht anders angegeben, verstehen wir unter geladenen Körpern immer Punktladungen

Das elektrische Feld

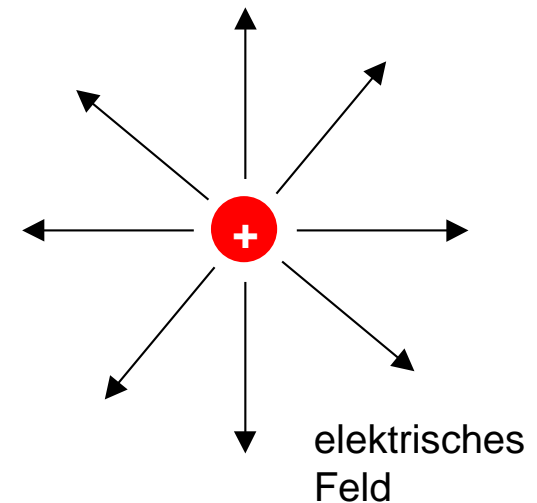
- Kraftwirkung erfolgt ohne Berührung der Ladungen
- d.h. es muss einen Mechanismus geben, bei dem die angezogene oder abgestoßene Ladung von der Existenz einer zweiten Ladung in Kenntnis gesetzt wird
- Mechanismus ist das elektrische Feld
- für das Auftreten eines elektrischen Feldes sind nicht zwingend zwei Ladungen notwendig
- das elektrische Feld besteht auch dann, wenn nur eine Ladung vorhanden ist
- die Wirkung dieses Feldes kann nur dadurch nachgewiesen werden, dass eine zweite Ladung, eine sog. Probeladung q , in dieses Feld eingebracht wird

Das elektrische Feld

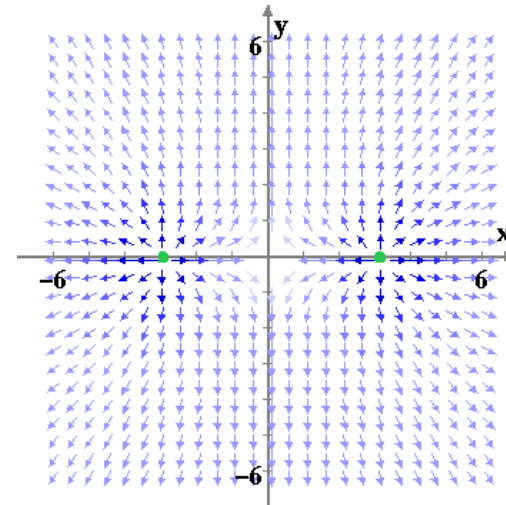
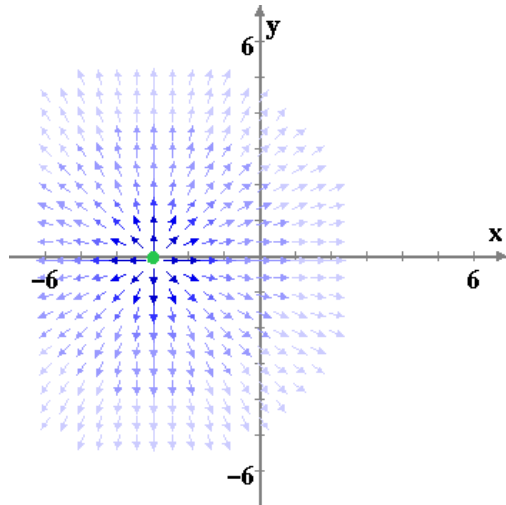
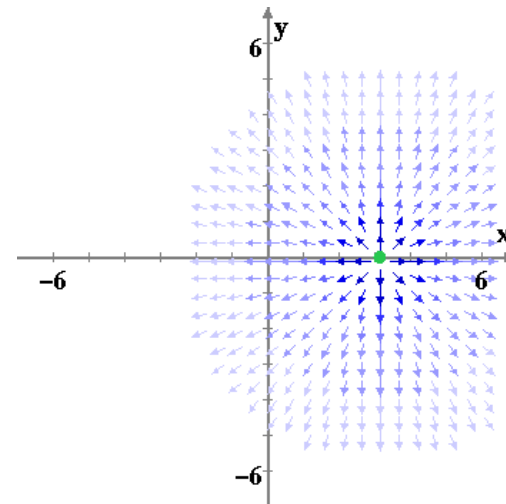
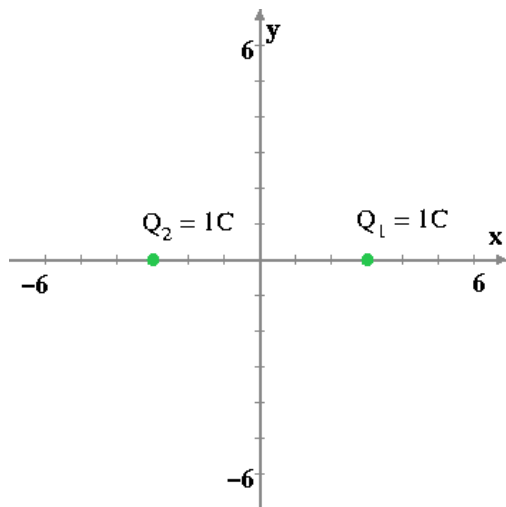
- proportional zur Ladungsmenge einer Probeladung q und der Stärke des elektrischen Feldes E (elektrische Feldstärke) wird auf die Probeladung eine bestimmte Kraft F ausgeübt.
- damit folgt zusammen mit dem Coulombschen Gesetz für die elektrische Feldstärke E in der Umgebung einer punktförmigen Ladung:

$$F = q \cdot E \quad E = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot r^2}$$

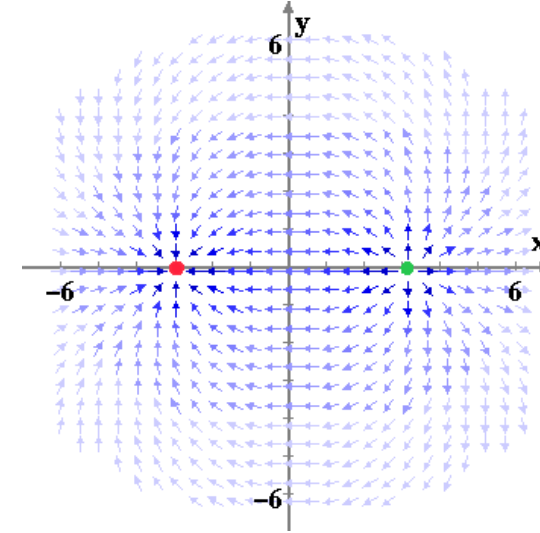
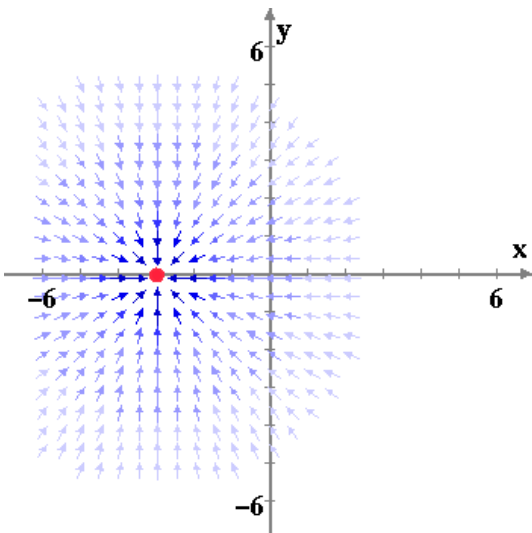
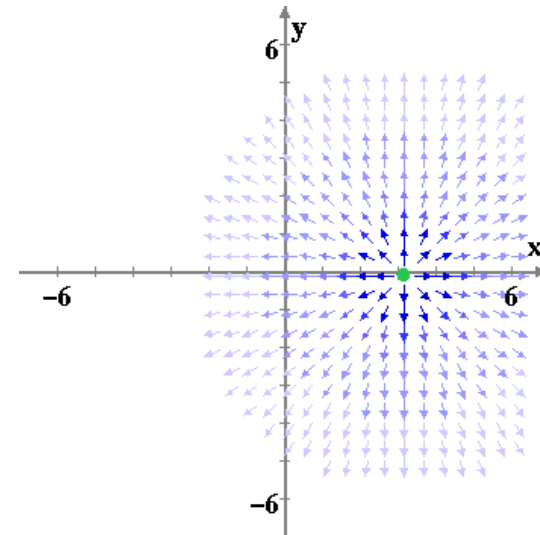
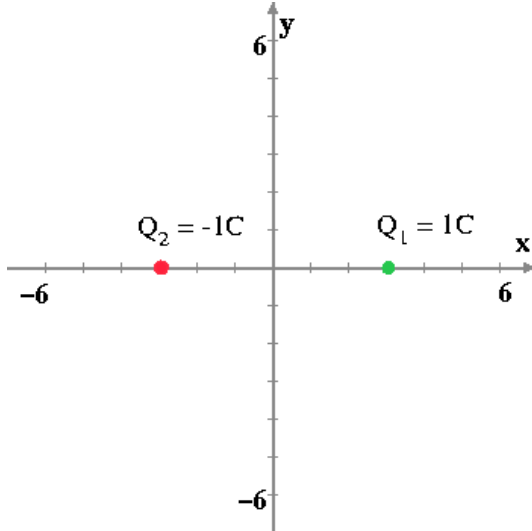
- Q ist die Ladung, die das elektrische Feld erzeugt
- die elektrische Feldstärke hat neben einem Betrag auch eine Richtung, sie ist ein Vektor
- in der grafischen Darstellung wird die elektrische Feldstärke als Pfeil, dessen Länge dem Betrag und dessen Richtung der Richtung des elektrischen Feldes entspricht, repräsentiert
- die dargestellte Richtung ist die Richtung der Kraft, die auf eine positive Probeladung ausgeübt wird



Das elektrische Feld



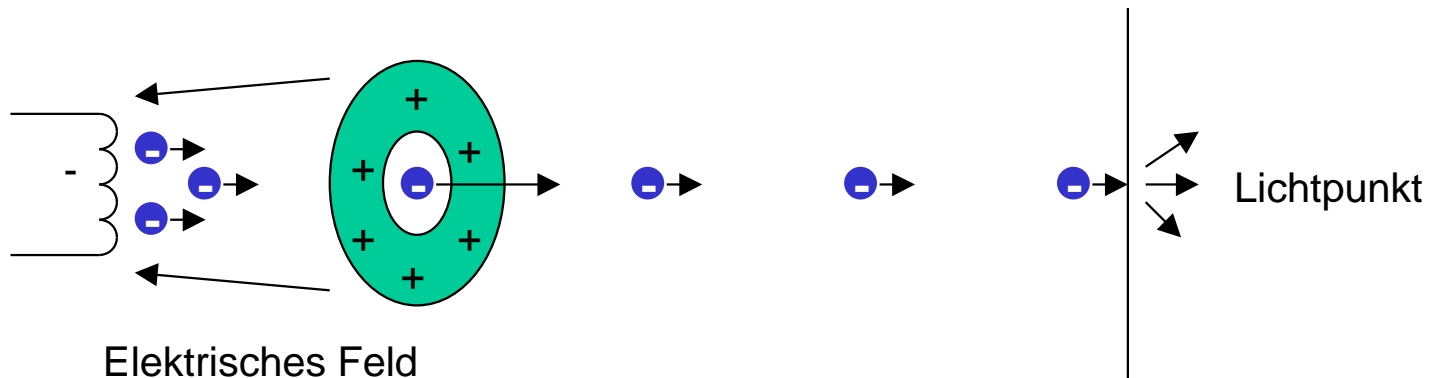
Das elektrische Feld



Das elektrische Feld

Beispiel: Bildröhre

- die Kraftwirkung auf Elektronen durch ein elektrisches Feld wird in Bildröhren (Cathode Ray Tube), wie sie noch in Computermonitoren oder Fernsehempfängern eingesetzt werden, genutzt
- Elektronen, die durch Aufheizung aus einem Metall (Kathode) austreten, werden mit einem elektrischen Feld beschleunigt
- ein Teil der so beschleunigten Elektronen tritt durch die Öffnung der Gegenelektrode und trifft nach Ablenkung auf den Bildschirm, wo ein Lichtpunkt erzeugt wird



Das elektrische Feld

Elektronen und Felder im Metallen

- in vielen Metallen können sich die Elektronen gut bewegen
- Elektronen sind hier als Ladungsträger innerhalb des Molekülverbundes frei beweglich
- aufgrund der abstoßenden Wirkung der einzelnen Elektronen verteilen sich diese bei einem Elektronenüberschuss gleichmäßig auf der Metalloberfläche
- von außen betrachtet ist das komplette Metallstück dann negativ geladen
- werden dem Metall Elektronen entzogen, verbleibt ein Überschuss an ortsfesten positiv geladenen Atomkernen
- die verbleibenden Elektronen verteilen sich entsprechend der Anziehungskräfte ebenfalls gleichmäßig

Das elektrische Feld

Quantelung der Ladung (Elektronen)

- die Gesamtladung kann immer nur ganzzahlige Vielfache der Ladung des Elektrons annehmen, man spricht auch von einer Quantelung
- Verglichen mit den Gesamtladungen, die in der Elektrotechnik in der Regel für die Funktion von Bauteilen relevant sind, sind diese Ladungsquanten aber sehr klein
- meist spielt für technische Anwendungen die Quantelung der Gesamtladung keine Rolle

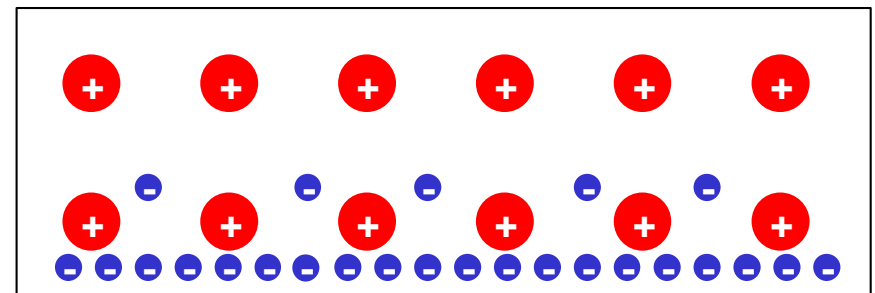
Komplexere Felder

- die Bestimmung des Feldes von komplexeren, nicht punktförmigen Anordnungen erfordert die Superposition der Felder von sämtlichen im Metallverbund existierenden Ladungen
- d.h., bei Annahme einer kontinuierlichen Ladungsverteilung müssen die Feldanteile integriert werden
- diese Vorgehensweise bedeutet die Anwendung anspruchsvollerer mathematischer Methoden (numerische Verfahren, Großrechner)

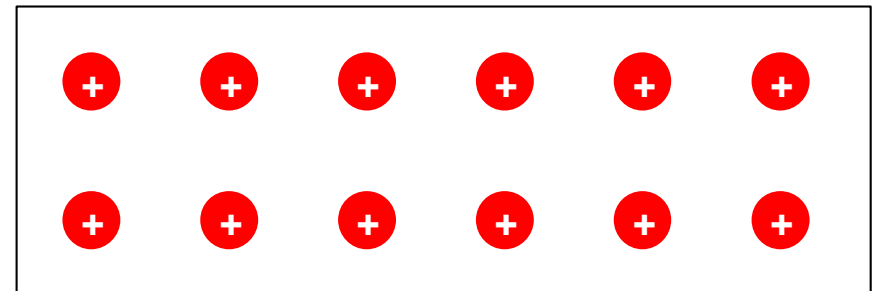
Spannung und Strom

Spannung

- bei zwei entgegengesetzt, also positiv und negativ, geladenen Teilen bildet sich zwischen den Teilen ein elektrisches Feld
- bei Metallteilen kommt es aufgrund der Kraftwirkung des Feldes zu Ladungsverschiebungen in den einzelnen Metallteilen
- Durch das Feld zwischen den geladenen Metallteilen kann eine sogenannte elektrische Spannung definiert werden



negativ geladen



positiv geladen

Spannung

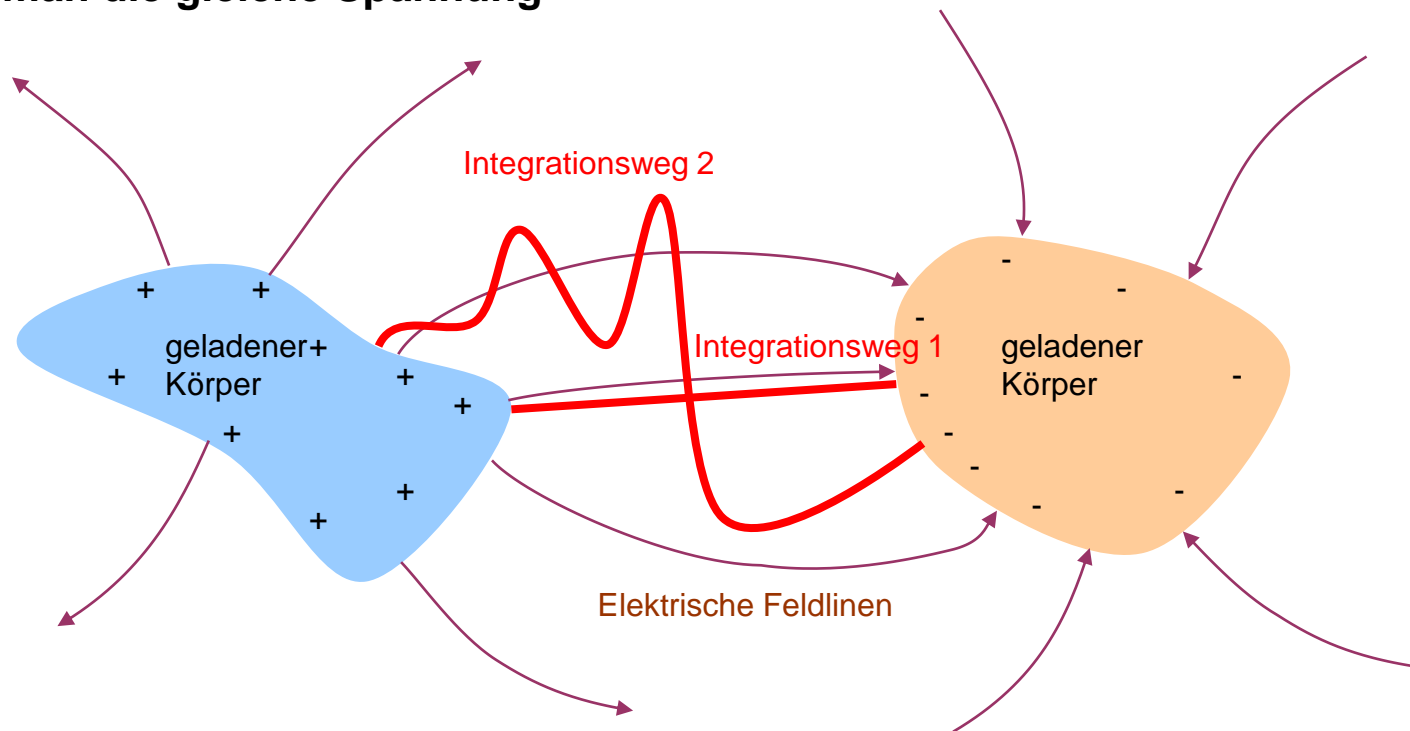
- diese Spannung ist um so größer, je größer das elektrische Feld ist
- wesentlich für die Höhe der elektrischen Spannung ist die Feldverteilung entlang des Weges zwischen den Metallteilen
- die Spannung U ist als das Streckenintegral über der elektrischen Feldstärke definiert:

$$U = \int_0^l E \cdot ds$$

- die Einheit der Spannung U ist das Volt (V)
- aus dem Spannungsintegral lässt sich auch die Einheit für die elektrische Feldstärke E ableiten: V/m

Spannung

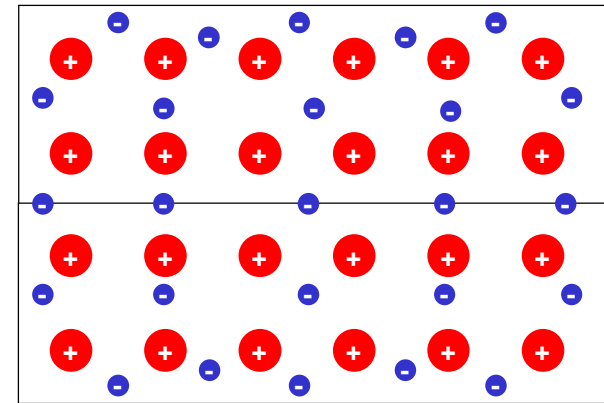
- in elektrostatischen Feldern ist die Spannung unabhängig vom gewählten Integrationsweg
- bei beiden durch die roten Linien dargestellten Integrationswege erhält man die gleiche Spannung



Strom

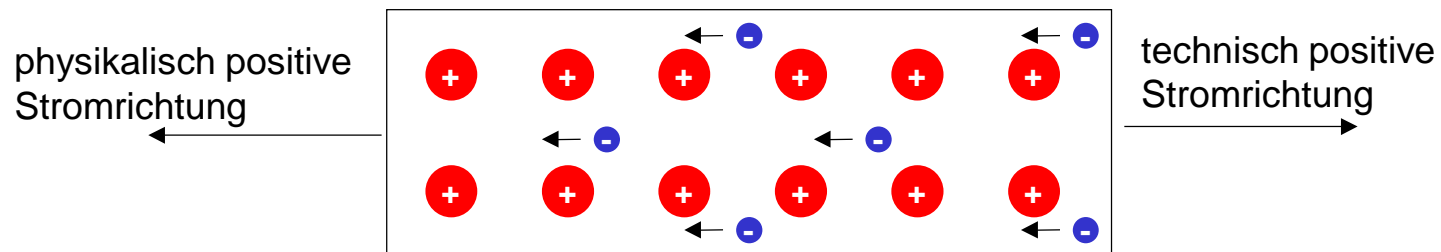
- werden zwei entgegengesetzt geladene Metallteile miteinander verbunden, folgen die beweglichen Elektronen der durch das elektrische Feld auf sie einwirkenden Kraft
- sie bewegen sich zum positiv geladenen Teil
- es fließt ein elektrischer Strom, der die Ladungsunterschiede ausgleicht
- die Verbindung kann direkt oder auch durch ein weiteres Metallteil, wie beispielsweise eine Kupferleitung erfolgen
- die Elektronen können sich nicht unendlich schnell bewegen
- n Elektronen mit der Elementarladung e fließen innerhalb einer Zeitdauer Δt zwischen den beiden Körpern
- der elektrische Strom **I** ist definiert als:

$$I = \frac{n \cdot e}{\Delta t} = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$



Strom

- aufgrund der negativen Ladung der Elektronen würde der Strom gemäß dieser Definition negativ
- Begründung: in der Anfangszeit der Elektrizitätslehre war genaueres Verständnis für den Aufbau der Materie nicht vorhanden, somit willkürliche Wahl der Richtung



Die Einheit des elektrischen Stroms ist Coulomb pro Sekunde (C/s) bzw. gebräuchlicher Ampere (A)

$$[I] = \frac{\text{C}}{\text{s}} = \text{A}$$

Quellen

- ist der Ladungsausgleich abgeschlossen, existiert kein elektrisches Feld und damit keine Spannung mehr
- der Strom ist folglich auch auf Null abgesunken
- für konstanten Stromfluss muss die Spannung erhalten und ständig müssen Ladungsträger verfügbar sein oder, anders gesprochen, ständig nachgeliefert werden
- der Aufbau einer elektrischen Spannung oder der Erhalt einer Spannung bei Stromfluss erfordert die Trennung von Ladungen
- tragen die Elektroden, zwischen denen die Spannung aufgebaut wird, bereits eine Ladung, entsteht ein elektrisches Feld
- um dieses Feld weiter zu vergrößern, müssen Ladungen entgegen der Krafrichtung bewegt werden
- Energie ist erforderlich
- die Energie kann von verschiedenen Prozessen stammen

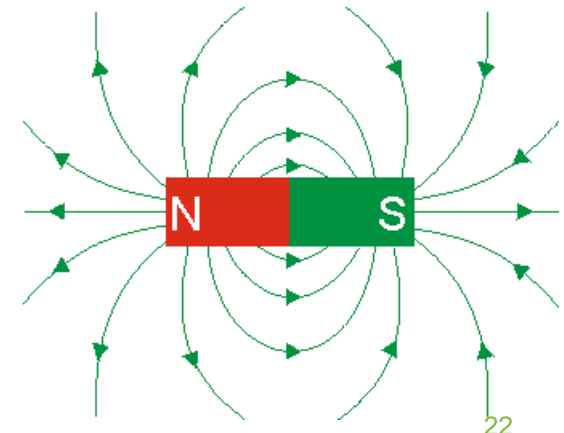
Quellen

Eingesetzte Energie	Ladungstrennungs- mechanismus	Technische Nutzung
Chemische Energie	Eintauchen von leitenden Werkstoffen in flüssige Elektrolyte	Batterien
Chemische Energie	Kaltverbrennung von Wasserstoff und Sauerstoff	Brennstoffzellen
Bewegungsenergie	Ladungsbewegung in magnetischen Feldern	Generatoren
Bewegungsenergie	Ladungsträgerverschiebung durch Verformung keramischer Materialien	Piezo-Anzünder Mikrofon
Licht	Generierung von Ladungsträgerpaaren in Halbleitern	Solarzellen
Wärme	Erwärmen von Kontaktstellen zwischen verschiedenen Metallen	Thermoelement

Das magnetische Feld

Historisches/ Dauermagnete

- magnetische Erscheinungen sind schon seit dem Altertum bekannt
- Thales von Milet (624-546 v. Chr.) beschreibt Erscheinungen, die von „Steinen“ ausgehen, die bei dem Ort Magnesia in Kleinasien gefunden wurden
- in China, wo die magnetischen Eigenschaften des Eisens möglicherweise schon im 2. Jh. v. Chr. bekannt waren, wurde auch die Richtwirkung der Magnetnadel - dort „Südweiser“ genannt - entdeckt (erstmalig im 12. Jh. n. Chr. erwähnt)
- vermutlich durch Araber kam der Magnetkompass im 12./13. Jh. nach Europa.
Seine heutige Form erhielt er im 13. Jh. von italienischen Seefahrern.



Das magnetische Feld

Strom als Ursache für das magnetische Feld

- neben diesen, den sogenannten „Dauermagneten“ zuzuschreibenden Effekten, können auch bewegte elektrische Ladungen ein magnetisches Feld erzeugen

- ruhende elektrische Ladungen erzeugen lediglich ein elektrisches Feld!

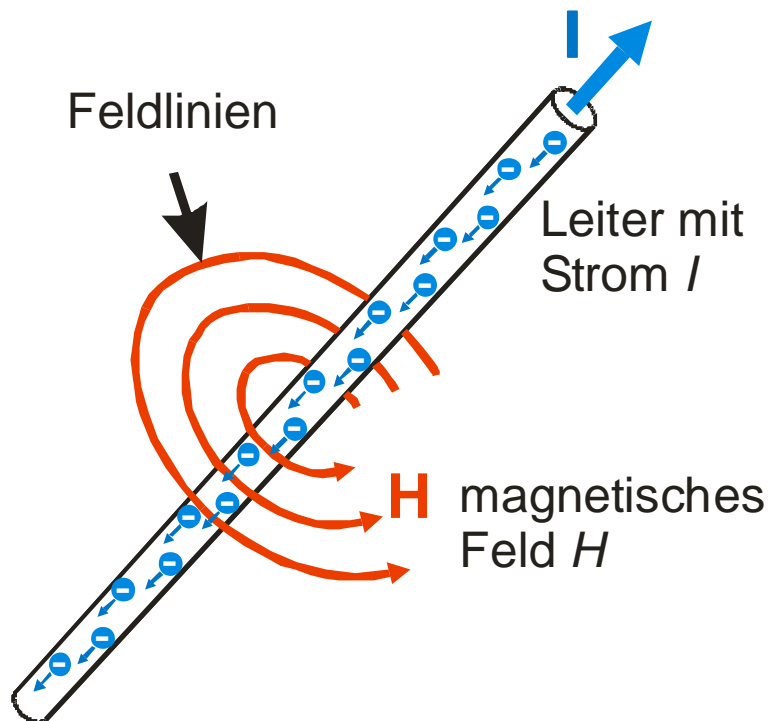
aber

- bewegte elektrische Ladungsträger erzeugen zusätzlich zum elektrischen Feld ein magnetisches Feld
- dieses magnetische Feld vermag wie das elektrische Feld eine magnetische Kraftwirkung auszuüben

Das magnetische Feld

Magnetfeld um einen langen stromführenden Leiter

- bei einem stromdurchflossenen Leiter bildet sich in Form von konzentrischen Kreisen um den Leiter ein magnetisches Feld aus
- die magnetische Feldstärke H ist direkt proportional zu dem Strom I und indirekt proportional zum Abstand r von der Mittellinie des Leiters.



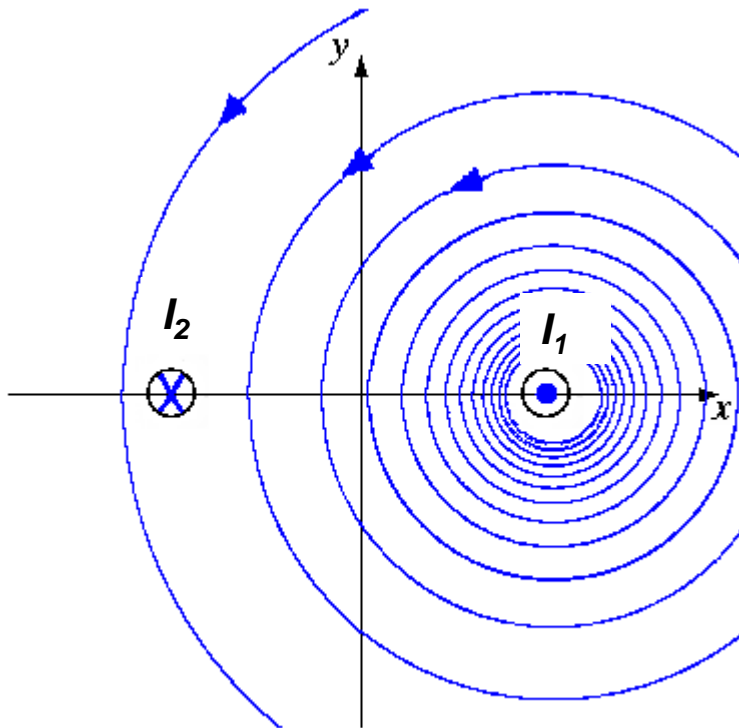
Magnetische Feldstärke:

$$H = \frac{I}{2\pi r}$$

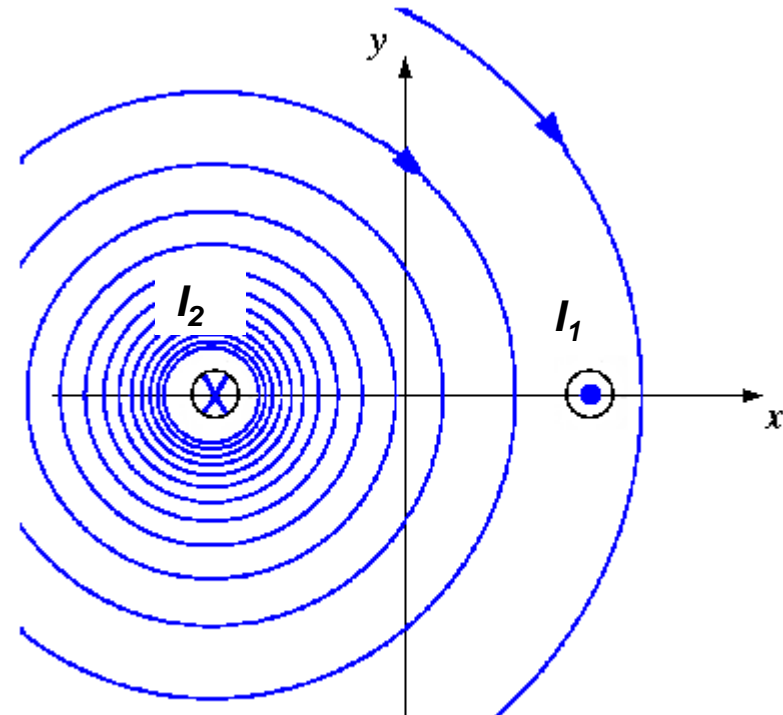
Zusammenhang zwischen
Stromrichtung und Richtung
der Feldlinien über
Rechtsschraubenregel

Das magnetische Feld

Magnetfeld H um einen bzw. zwei stromführenden Leiter



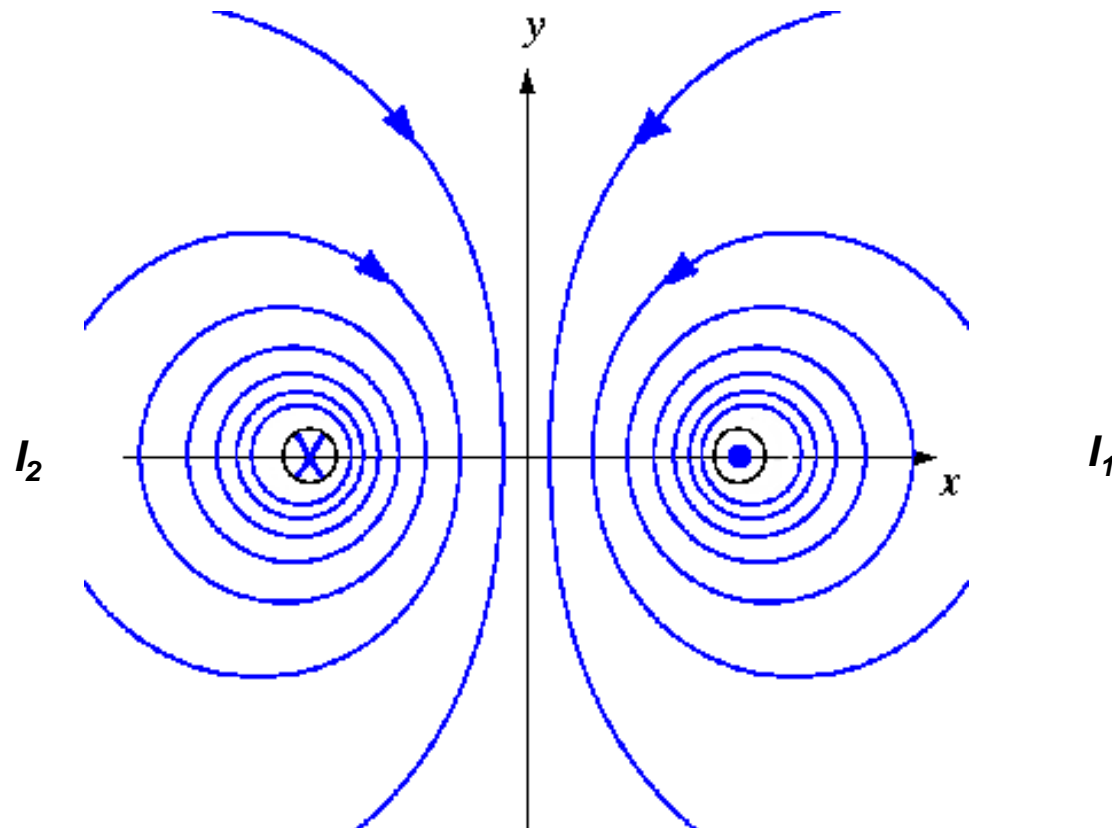
H aufgrund von I_1



H aufgrund von I_2

Das magnetische Feld

Magnetfeld H um einen bzw. zwei stromführende Leiter

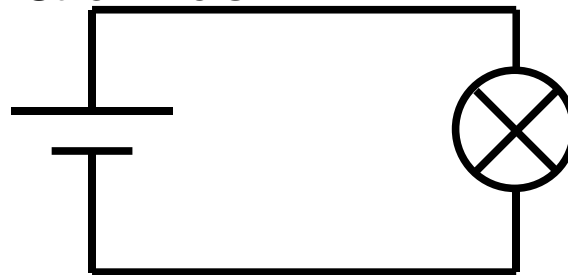


H aufgrund von I_1 und I_2

Stromkreise

Einleitung

- Beispiel für einen Stromkreis:



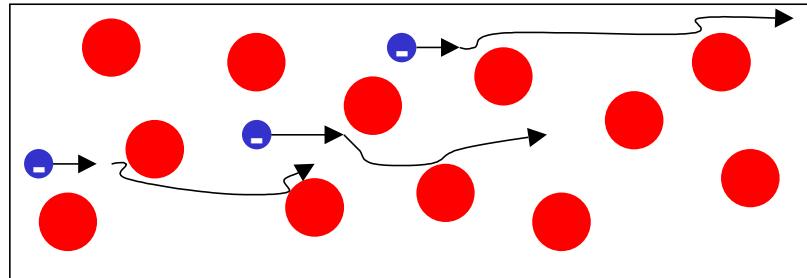
Batterie

Glühlampe

- Kreis bestehend aus Batterie und Glühlampe als angeschlossenem Verbraucher, statischer Zustand
- vorausgesetzt die Batterie ist voll geladen, wird die Glühlampe sehr lange unverändert brennen
- mit den meisten der folgenden Methoden sind nur Schaltungsstrukturen berechenbar, die sich statisch verhalten, d.h. zeitliche Änderungen von Strömen und Spannungen sind vernachlässigbar

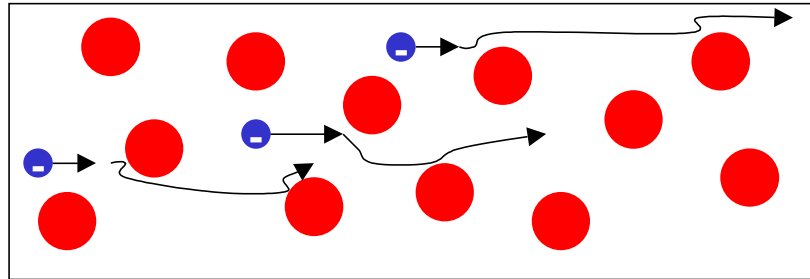
Der elektrische Widerstand

- wird ein Strom durch ein Material geschickt, können die Ladungsträger nicht endlos beschleunigt werden, sie treffen früher oder später auf Atome oder Moleküle des Metallverbands
- ein Teil der Elektronenenergie wird bei dem Stoß als Wärmeenergie an das Metall abgegeben, das Elektron selbst wird abgebremst
- Folge dieser abwechselnden Beschleunigungs- und Stoßprozesse ist eine mittlere Geschwindigkeit oder Driftgeschwindigkeit der Elektronen



Elektronenbewegung in einem Leiter

Der elektrische Widerstand



Elektronenbewegung in einem Leiter

- die Atome des Materials stellen dem Strom- oder Elektronenfluss gewissermaßen einen Widerstand entgegen
- wird eine bestimmte Spannung (Feld) an ein Material angelegt, wird sich je nach Materialeigenschaften ein bestimmter Strom einstellen
- erhöht man die anliegende Spannung (das Feld), erhöht sich in gleichem Maße der Strom
- der Proportionalitätsfaktor zwischen Spannung und Strom ist der elektrische Widerstand **R** . Er wird in der Einheit Ω (Ohm) angegeben

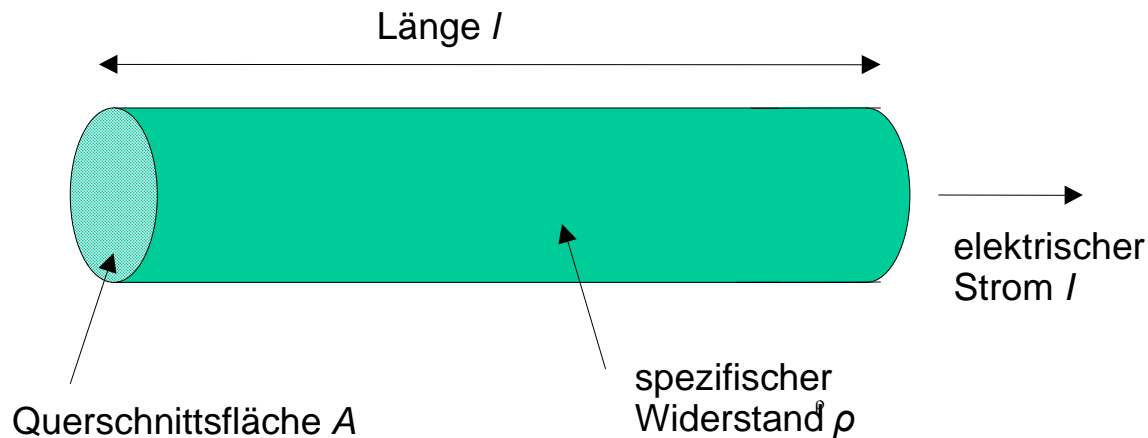
$$U = R \cdot I$$

Ohmsches Gesetz

Der elektrische Widerstand

Der spezifische Widerstand

- betrachtet wird als stromführendes Element ein zylindrischer Draht
- Widerstand hängt von der Drahtgeometrie und dem Drahtmaterial ab



- der Widerstand nimmt zu, wenn die Querschnittsfläche des Drahtes verkleinert wird.
- der Widerstand nimmt zu, wenn der Draht verlängert wird
- für homogene Zylinder (Drähte) ergibt sich für den Widerstand R :
$$R = \rho \cdot \frac{l}{A}$$

Der elektrische Widerstand

Der spezifische Widerstand

- der spezifische Widerstand ρ (Rho) ist eine Materialkonstante
- der Gesamtwiderstand hängt nur von der Geometrie und dem spezifischen Widerstand des Materials ab

Material	Spez. Widerstand ρ in $\Omega \text{ mm}^2/\text{m}$
Aluminium	0,027
Gold	0,022
Eisen	0,1..0,4
Kupfer	0,017
Messing	0,07..0,08
Silber	0,016

Spezifische Widerstände verschiedener Metalle

Der elektrische Widerstand

Beispiel

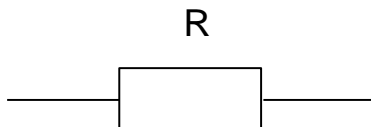
- ein Kupferdraht der Länge 10m mit einer Querschnittsfläche von 1,5mm², wie er üblicherweise in der Haushaltinstallation verwendet wird, hat demnach einen Widerstand von:

$$R = \rho \cdot \frac{l}{A} = 0,017 \cdot \frac{10}{1,5} \Omega = 0,113 \Omega = 113 \text{m}\Omega$$

- gemäß dem Ohmschen Gesetz fällt an diesem Draht bei einem Strom von 10A die folgende Spannung ab:

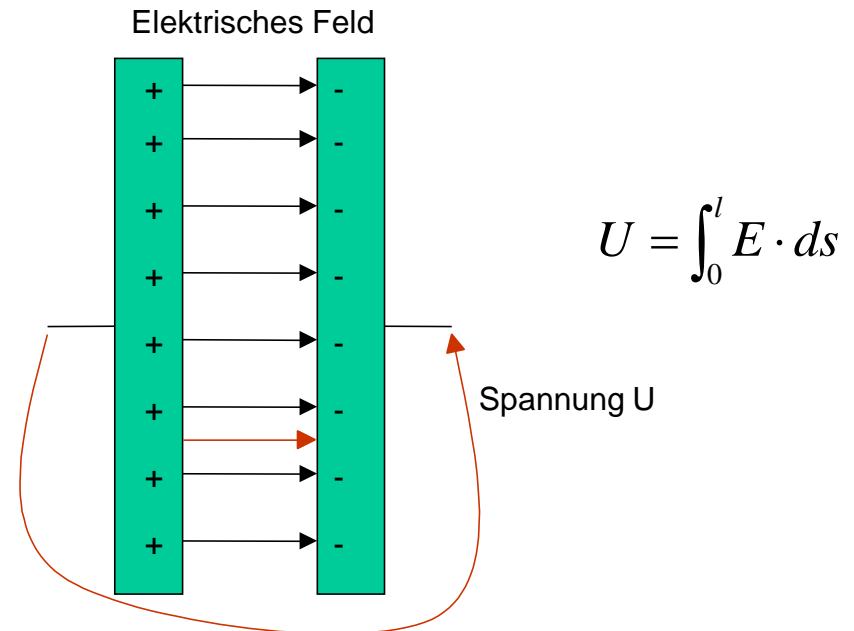
$$U = R \cdot I = 0,113 \Omega \cdot 10 \text{A} = 1,13 \text{V}$$

Symbol für den Ohmschen Widerstand



Die Kapazität

- zwischen zwei Metallkörpern (z.B. Platten) unterschiedlicher Ladung baut sich ein elektrisches Feld auf
- zwischen den Körpern besteht also eine Spannung U
- wenn diese Körper isoliert sind, können die Ladungen nicht abfließen.
→ die Körper bleiben geladen



- da sämtliche **Integrationswege** die gleiche Spannung liefern, kann die anliegende Spannung an jeder beliebigen Stelle auf den Metallkörpern gemessen werden

Die Kapazität

- werden mehr Ladungen aufgebracht, erhöht sich proportional dazu die elektrische Feldstärke und in gleichem Maße die Spannung
- der Proportionalitätsfaktor zwischen der Ladung Q und der Spannung U wird Kapazität C genannt

$$Q = C \cdot U$$

- die Kapazität ist unabhängig von der Spannung oder der Ladung
- sie hängt nur von der Geometrie der Metallkörper, ihrem Abstand zueinander und dem dazwischen liegenden Isolierstoff (auch Dielektrikum genannt) ab
- die Realisierung der Kapazität als elektrisches Bauelement wird Kondensator genannt

Die Kapazität

- für einen Plattenkondensator mit den Plattenflächen A und dem Plattenabstand d gilt (das sogenannte inhomogene elektrische Feld am Rand wird vernachlässigt):

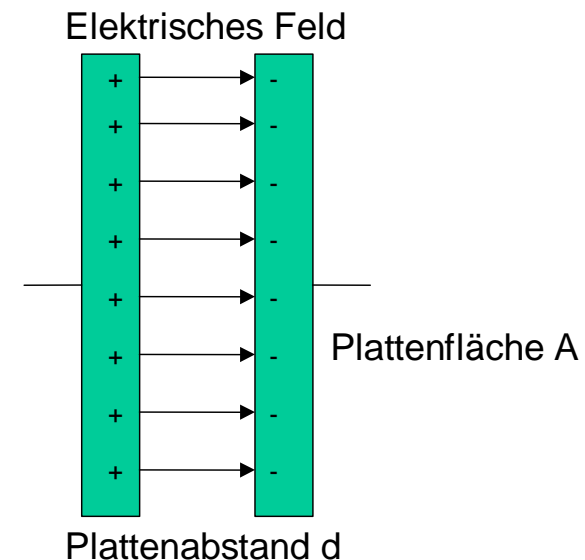
$$C = \varepsilon \cdot \frac{A}{d}$$

- die Einheit der Kapazität C ist F (Farad, 1 F=1 C/V)

Beispiel

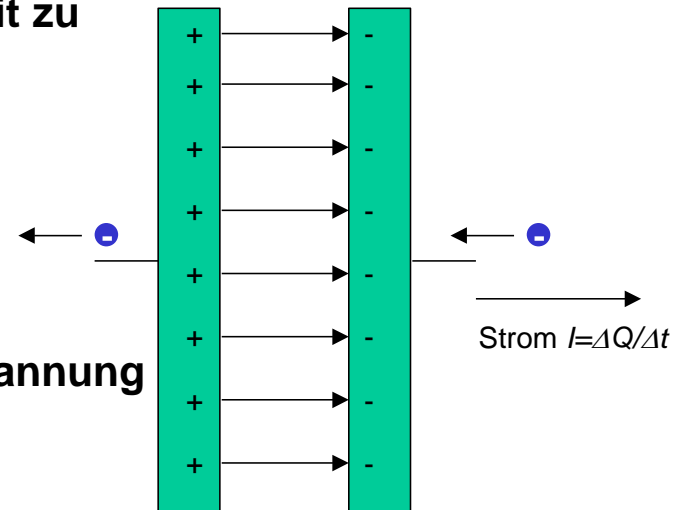
- ein Plattenkondensator mit einer Plattenfläche von $A=4\text{cm}^2$, dem Abstand von $d=1\text{mm}$ und Luft als Dielektrikum (ε ist eine Materialkonstante und beträgt für Luft: $8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$) hat also die Kapazität:

$$\begin{aligned} C &= \varepsilon \cdot \frac{A}{d} = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}} \cdot \frac{4\text{cm}^2}{1\text{mm}} = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}} \cdot \frac{0,0004\text{m}^2}{0,001\text{m}} \\ &= 3,54 \cdot 10^{-12} \text{F} = 3,54\text{pF} \end{aligned}$$



Die Kapazität

- zur Aufladung des Kondensators müssen Ladungen zugeführt werden
- erfolgt die Aufladung mit einem konstanten Strom, so nimmt die Anzahl der Ladungen auf den Platten proportional zur Zeit zu



- nach $Q = C \cdot U$ ist die Ladung proportional zur Spannung
- Spannung steigt proportional zur Zeit an

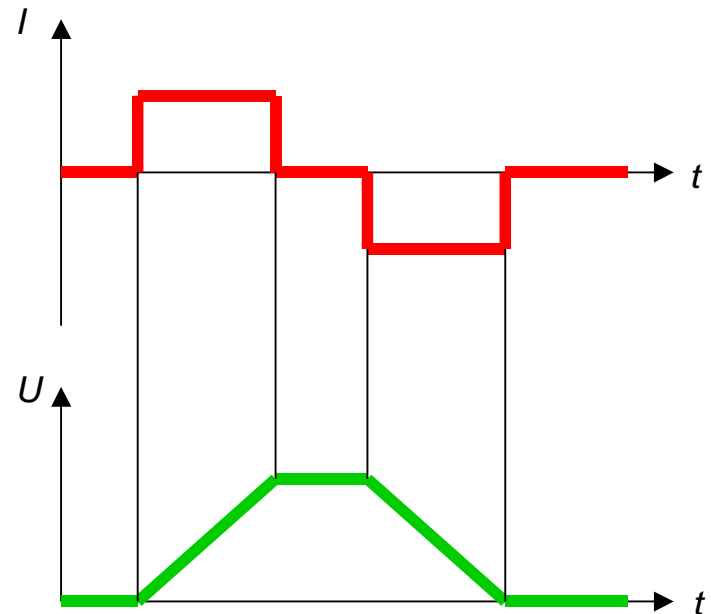
- Verhalten entspricht mathematisch einer Integration:

$$U(t) = \frac{1}{C} \cdot Q(t) = \frac{1}{C} \cdot \left(Q_0 + \int_{t_0}^t I(t') \cdot dt' \right)$$

Die Kapazität

- Q_0 ist die Ladung, die der Kondensator zum Startzeitpunkt t_0 hat
- t ist der Zeitpunkt, für den die Spannung ermittelt werden soll
- der Verlauf der sich am Kondensator (zu Beginn nicht geladen, d.h. $Q_0=0$) einstellenden Spannung bei einem sprunghaftigen Strom ist in folgendem Diagramm dargestellt:

$$U(t) = \frac{1}{C} \cdot Q(t) = \frac{1}{C} \cdot \left(Q_0 + \int_{t_0}^t I(t') \cdot dt' \right)$$

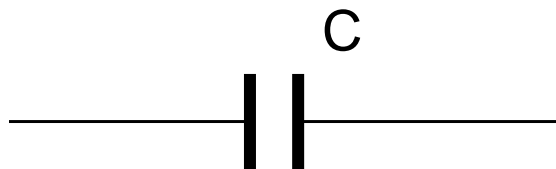


Die Kapazität

- umgekehrt ergibt sich der Strom aus der Spannung durch Differenzieren nach der Zeit:

$$\frac{dU(t)}{dt} = \frac{1}{C} \cdot \frac{dQ(t)}{dt} \quad \rightarrow \quad I(t) = C \cdot \frac{dU(t)}{dt}$$

Schaltungssymbol für den Kondensator



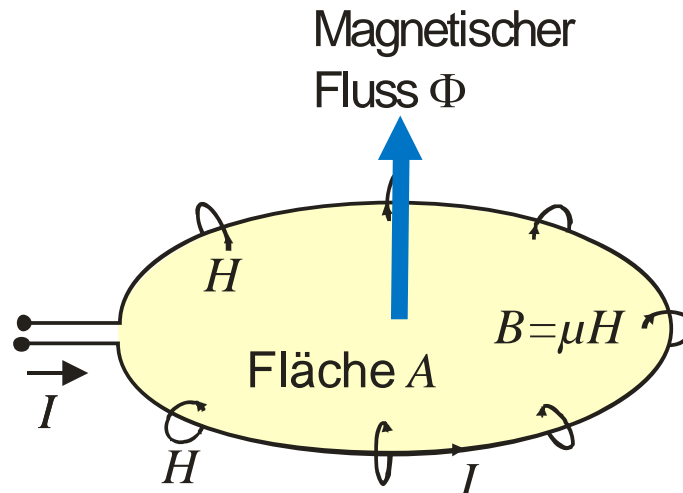
Die Induktivität

Abgrenzung Induktivität - Kapazität

- Induktivität speichert magnetische Energie
- Kondensator speichert elektrische Energie
- Induktivitäten sind Bauelementen wie Spulen, Drosseln oder auch einfache Leitungen (alle Strukturen, die einen Strom führen können)

Was macht eine Induktivität?

- ein fließender Strom erzeugt ein magnetisches Feld



um den stromführenden Leiter herum bildet sich ein magnetisches Feld aus

Die Induktivität

- in der Fläche A , welche die Schleife umschließt, ist die magnetische Feldstärke H immer gleichgerichtet

Die magnetische Induktion B

- in den meisten Medien wie auch in der Luft kann die magnetische Feldstärke H direkt durch eine weitere physikalische Größe, die magnetische Induktion B , ausgedrückt werden. Es gilt:

$$B = \mu \cdot H$$

- die magnetische Induktion ist also direkt proportional zur magnetischen Feldstärke
- μ bezeichnet die magnetische Permeabilität und ist eine Materialkonstante, für Luft gilt: $\mu = \mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ Vs} / \text{Am}$

Die Induktivität

Der magnetische Fluss Φ

- integriert man die magnetische Induktion B über der Fläche A erhält man den magnetischen Fluss Φ (Φ):

$$\phi = \iint_A B dA \quad \text{in Luft gilt:} \quad \phi = \mu_0 \iint_A H dA$$

- da das magnetische Feld H bzw. die magnetische Induktion B direkt proportional zum Strom sind, muss auch der magnetische Fluss dieser Proportionalität folgen
- für diese Proportionalität hat man die physikalische Größe der Induktivität L eingeführt

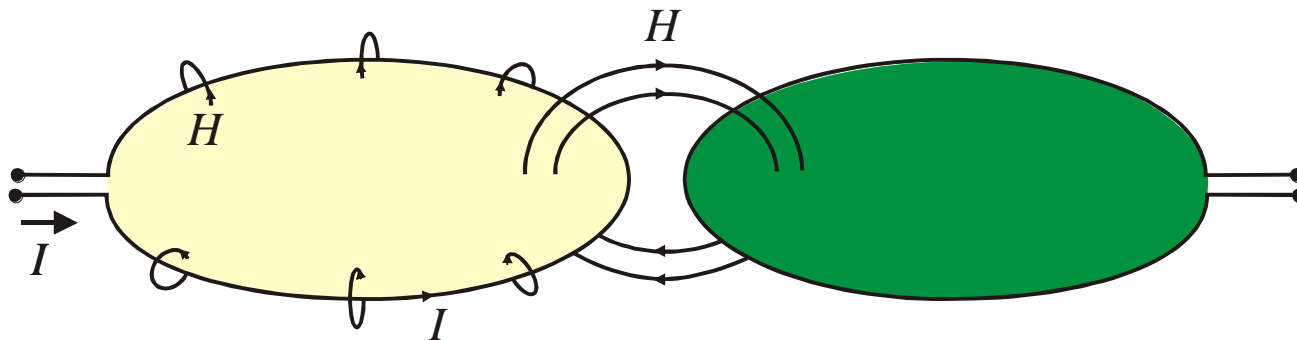
$$\phi = L \cdot I$$

- die Induktivität L ist wie die Kapazität nur von der Geometrie und den verwendeten Materialien abhängig
- die Induktivität gibt die Fähigkeit einer Konfiguration an, einen magnetischen Fluss zu erzeugen

Die Induktivität

Beispiel Transformator

- der magnetische Fluss bzw. die Induktivität sind beispielsweise bei einem Transformator von Bedeutung
- ein Transformator kann eine sich verändernde Spannung herauf- oder herabsetzen
- ein Transformator besteht vereinfacht aus zwei gekoppelten Schleifen
- die Feldlinien, die aufgrund des Stroms in der linken Stromschleife entstehen, durchdringen die rechte Schleife, es entsteht eine Verkopplung
- aus einer sich zeitlich verändernden Verkopplung kann in der grünen Schleife eine Spannung erzeugt (induziert) werden



die magnetischen Flüsse der beiden Schleifen sind miteinander verkopelt

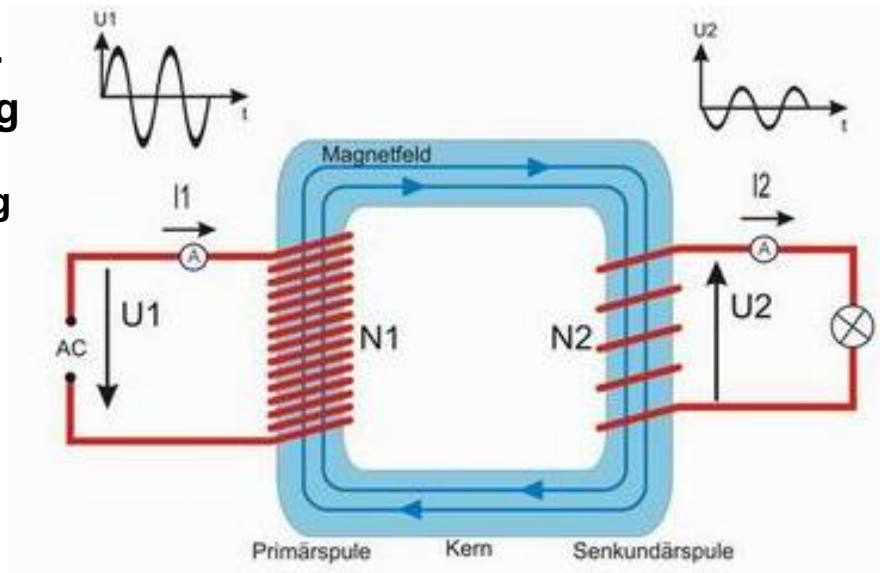
Die Induktivität

Realisierung: Transformator

- durch Verwendung von Spulen mit vielen Windungen anstatt einer Schleife (nur eine Windung) kann die wirksame Koppelfläche vergrößert werden
- Ferrit-Materialien im Transformator Kern, vergrößern die magnetische Permeabilität, die Verkopplung erhöht sich deutlich, kleinere Bauformen sind möglich

Wechselspannung

(Spannung verändert sich mit der Zeit)



Wechselspannung

(Spannung verändert sich mit der Zeit)

Transformator

Energie und Leistung

Energie

- wird eine Ladung Q von einem Punkt a zu einem Punkte b in einem bestehenden elektrischen Feld E entgegen der auf die Ladung wirkenden Kraft F bewegt, muss die Energie W aufgebracht werden:

$$W = \int_a^b F \cdot ds = Q \cdot \int_a^b E \cdot ds = Q \cdot U$$

- die Einheit für die Energie ist J (Joule).
- bei Kernforschungsexperimenten in der Physik werden oft einzelne Elektronen betrachtet, diese tragen die Elementarladung e , hier hat sich die Einheit eV (Elektronenvolt) für die Energie etabliert

Leistung

- die Leistung P ist die Ableitung der Energie nach der Zeit:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{dQ}{dt} \cdot U = I \cdot U$$

Energie und Leistung

Leistung

- die Leistung hat die Einheit W (Watt, 1 W=1 J/s)
- wenn durch einen Widerstand R beim Anlegen einer Spannung U der Strom I fließt, nimmt der Widerstand an seinen Klemmen die folgende elektrische Leistung auf:

$$P = I \cdot U = I^2 \cdot R = \frac{U^2}{R}$$

- die Leistung wird vom Widerstand wegen der Stoßprozesse bei der Ladungsträgerbewegung in Wärme umgewandelt und an die Umgebung abgegeben
- ein Widerstand stellt also physikalisch einen Wandler dar, der elektrische Leistung in Wärmeleistung umsetzt
- die im Haushalt verwendeten elektrischen Heizsysteme, wie Heizdecken oder der Heizteil eines Haarföns sind typische Vertreter dieser Widerstände
- auch andere Bauelemente können als Widerstand betrachtet werden, wenn diese ebenfalls elektrische Leistung in andere Leistungsformen umwandeln (Glühlampe, Aufgabe: die Wandlung elektrischer Leistung in Lichtleistung/ Wärme als Nebenprodukt)

Energie und Leistung

Leistung – Beispiel: Glühlampe als Widerstand

- sind z.B. auf einer Glühlampe die Angaben 21W / 12V aufgedruckt, so kann der Strom zu

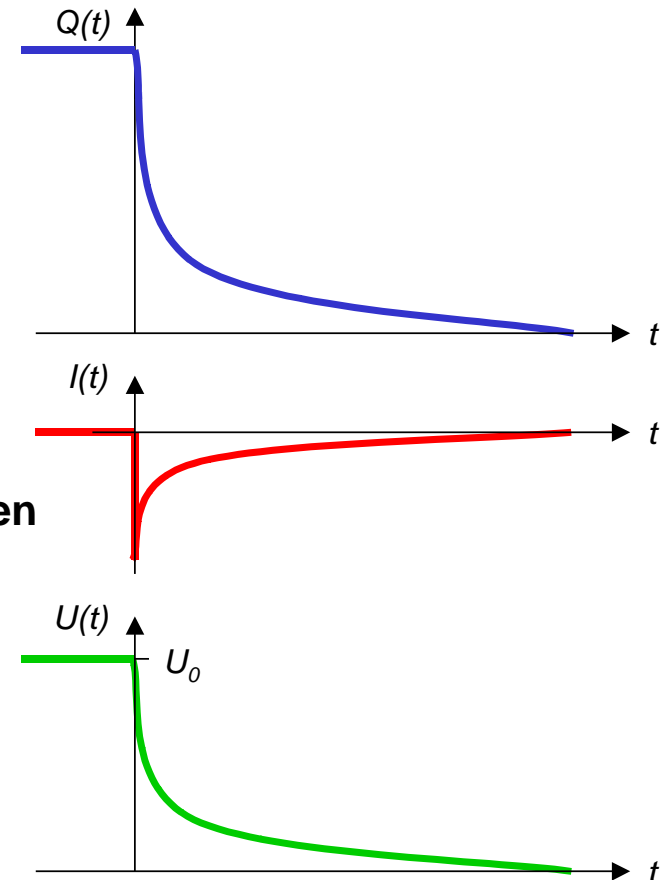
$$I = \frac{P}{U} = \frac{21\text{W}}{12\text{V}} = 1,75\text{A}$$

- bestimmt werden. Der Widerstand der Heizwendel im heißen Zustand errechnet sich zu

$$R = \frac{U^2}{P} = \frac{(12\text{V})^2}{21\text{W}} = 6,86\Omega$$

Leistung am Kondensator

- der Kondensator kann bekanntlich Ladungen speichern, kann auch Energie gespeichert werden?
- es wird zunächst davon ausgegangen, dass ein Kondensator mit einer bestimmten Ladung Q_0 aufgeladen sei
- dies führt dazu, dass eine Spannung U_0 am Kondensator anliegt
- wird eine leitende Verbindung zwischen den Kondensatorplatten hergestellt, fließen Ladungen von der einen zur anderen Platte
- es fließt ein negativer Strom, der Kondensator wird entladen
- die Ladung jeder einzelnen Platte reduziert sich und mit ihr die Spannung am Kondensator
- Vorgang hält so lange an, bis die Platten des Kondensators vollständig entladen sind, Spannung verschwindet



Energie und Leistung

Im Kondensator gespeicherte Energie

- die Energie, die beim Entladevorgang aus dem Kondensator entnommen werden kann und der leitenden Verbindung (Widerstand) pro entnommener Ladungsmenge ΔQ zugeführt wird, ist:

$$\Delta W = \Delta Q \cdot U$$

Die Entnahme der Ladungsmenge ΔQ geht mit einem Abbau der Spannung um ΔU einher, der Ladungsabbau kann also auch über den Spannungsabbau ausgedrückt werden:

$$\Delta Q = C \cdot \Delta U \quad \text{da:} \quad Q = C \cdot U$$

- eingesetzt und nach bilden des Grenzübergangs für infinitesimal kleine Ladungseinheiten dQ bzw. Spannungseinheiten dU ergibt sich

$$dW = C \cdot U \cdot dU$$

- diese Gleichung kann durch Integrieren auf beiden Seiten gelöst werden

Energie und Leistung

Leistung am Kondensator

- Integrieren auf beiden Seiten:

$$\begin{aligned} W &= \int_{U_0}^0 C \cdot U \cdot dU = C \cdot \int_{U_0}^0 U \cdot dU = C \cdot \left[\frac{1}{2} U^2 \right]_{U_0}^0 \\ &= C \cdot \left(0 - \frac{1}{2} U_0^2 \right) = -\frac{1}{2} C \cdot U_0^2 \end{aligned}$$

- das negative Vorzeichen kennzeichnet die Entnahme von Energie
- ein auf die Spannung U_0 aufgeladener Kondensator speichert demnach die elektrische Energie:

$$W = \frac{1}{2} C \cdot U_0^2$$

Energie und Leistung

Leistung am Kondensator - Beispiel

- Berechnung der Überbrückungszeit mit einem Gold-Cap (spezieller Kondensator mit sehr hoher Kapazität)
- Gold-Cap mit der Kapazität 2 F soll bei bestehender Stromversorgung über das Netz auf eine Spannung von $U_1=5\text{ V}$ aufgeladen sein
- anschließend wird er mit einem Strom von $10\text{ }\mu\text{A}$ durch Speicherchips entladen (Stromausfall) Speicher verliert seine Information, wenn die Spannung $2,8\text{ V}$ unterschreitet
- welche Energie wird am Anfang im Kondensator gespeichert?

$$W = \frac{1}{2} C \cdot U_0^2 = \frac{1}{2} \cdot 2\text{F} \cdot (5\text{V})^2 = 25\text{J}$$

- Wie lange kann die Stromversorgung unterbrochen bleiben, ehe Information verloren geht?
- konstante Stromentnahme führt zu einer linearen Spannungsabnahme

$$I = C \cdot \frac{dU}{dt} = C \cdot \frac{\Delta U}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = C \cdot \frac{\Delta U}{I} = 2\text{F} \cdot \frac{5\text{V} - 2,8\text{V}}{10\mu\text{A}} = 440000\text{s} = 122,22\text{h}$$

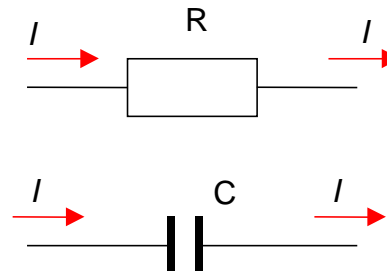
Kirchhoffsche Gesetze

1. Gesetz - Knotensatz

Die Summe der Ströme, die in eine elektrische Schaltung (Knoten) hineinfließen, ist zu jedem Zeitpunkt gleich der Summe der Ströme, die aus der Schaltung herausfließen

- Satz hat allgemeine Bedeutung (Klemmen von Bauelementen, wie Widerstand, Kondensator oder Quellen als auch für komplexere Zusammenschaltungen von Bauelementen)
- Satz sagt er aus, dass der in eine Klemme hineinfließende Strom gleich dem aus der anderen Klemme herausfließenden Strom sein muss
- der Strom kann nicht in einem Bauelement oder allgemeiner einem Knoten verschwinden!
- in einer Gleichung lässt sich der Knotensatz folgendermaßen formulieren, für jeden Knoten gilt:

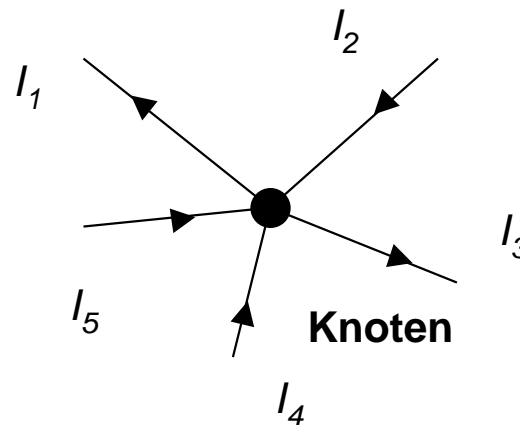
$$\sum_{i=1}^N I_i = 0$$



Kirchhoffsche Gesetze

1. Gesetz - Knotensatz

- werden mehrere Bauelemente in einem Punkt miteinander verbunden, so bildet dieser Verbindungspunkt einen Knoten (d.h. alles, was in diesen Knoten hineinfließt, muss auch herausfließen)
- für die dargestellte Verbindung gilt also:



$$\sum_{i=1}^N I_i = 0 \quad \longrightarrow \quad -I_1 + I_2 - I_3 + I_4 + I_5 = 0$$

- die Richtung der Pfeile kann willkürlich gewählt werden, die Gleichung muss sich aber an der Pfeilrichtung orientieren

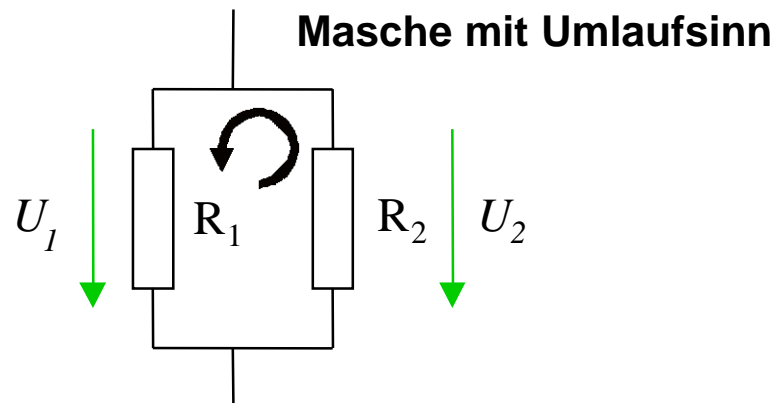
Kirchhoffsche Gesetze

2. Gesetz - Maschensatz

Die Summe der Spannungen in einer Masche einer elektrischen Schaltung ist zu jedem Zeitpunkt 0

- eine Masche ist dabei eine geschlossene Kette von Bauelementen innerhalb einer Schaltung. Für jede Masche gilt:

$$\sum_{i=1}^N U_i = 0$$



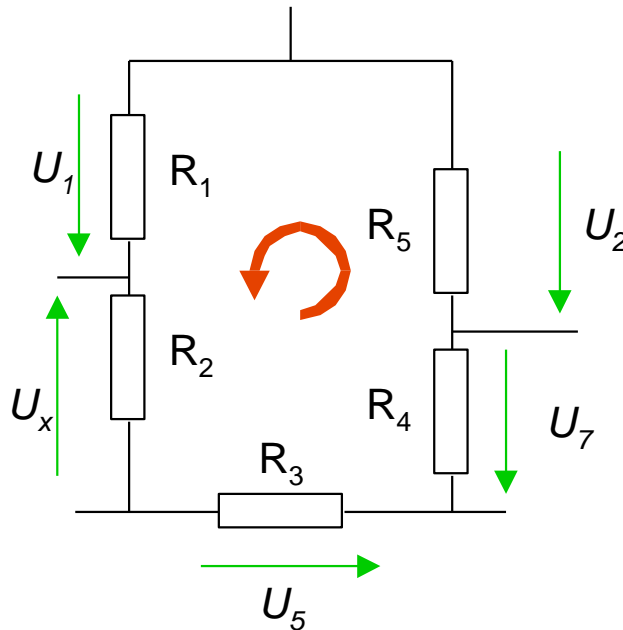
$$\sum_{i=1}^N U_i = 0 \rightarrow U_1 - U_2 = 0 \Rightarrow U_1 = U_2$$

- die Richtung des Pfeils für den Umlaufsinn kann willkürlich gewählt werden, die Gleichung muss sich aber an der Pfeilrichtung orientieren

Kirchhoffsche Gesetze

2. Gesetz - Maschensatz

- Beispiel für komplexere Masche
- an den einzelnen Verbindungspunkten können weitere Bauelemente angeschlossen sein, die aber die Maschengleichung nicht beeinflussen



**Masche mit Pfeil für
gewählten Umlaufsinn**

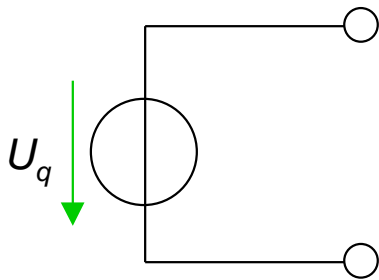
- Maschengleichung:

$$U_1 - U_x + U_5 - U_7 - U_3 = 0$$

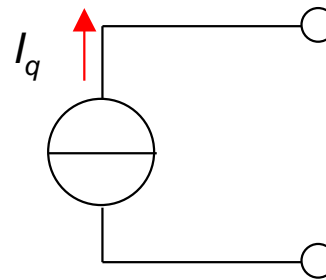
Strom- und Spannungsquellen

Ideale Quellen

- es werden zwei Arten von Quellen unterschieden:
 - **Spannungsquelle:** stellt eine eingeprägte Spannung an ihren Klemmen zur Verfügung, der Strom durch die Quelle hängt von der angeschlossenen Last ab
 - **Stromquelle:** stellt einen eingepprägten Strom an den Klemmen zur Verfügung, die Spannung an den Klemmen hängt von der angeschlossenen Last ab



Ideale Spannungsquelle



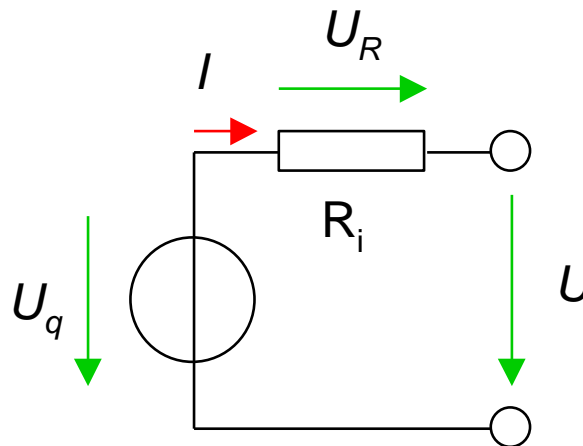
Ideale Stromquelle

Symbole der idealen Quellen

Strom- und Spannungsquellen

Reale Spannungsquelle

- bei einer realen Spannungsquelle ist die an den Klemmen zur Verfügung gestellte Spannung nicht unabhängig von der angeschlossenen Last und damit vom entnommenen Strom
- die Spannung sinkt, wenn die Stromentnahme erhöht wird
- das Verhalten kann durch folgendes Ersatznetzwerk nachgebildet werden



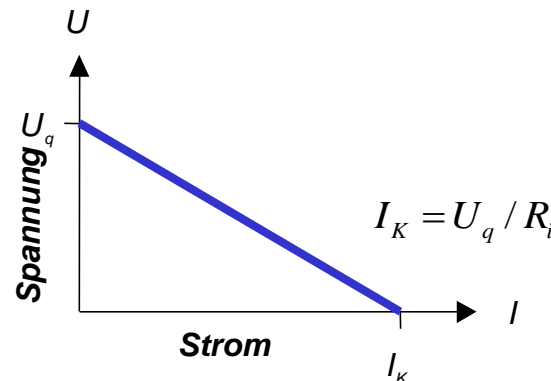
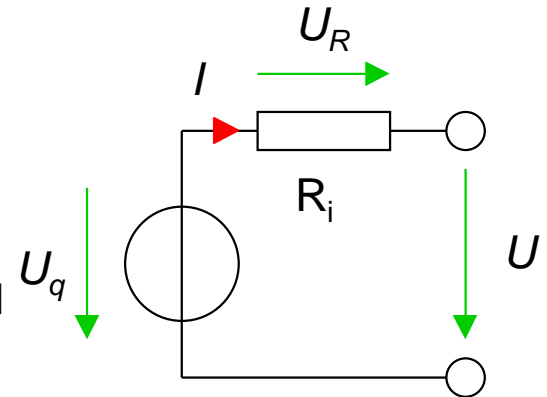
reale Spannungsquelle mit Innenwiderstand R_i

Strom- und Spannungsquellen

Reale Spannungsquelle

- an dem Innenwiderstand R_i fällt eine Spannung ab
- Spannung ist (Ohmsches Gesetz) dem Strom I proportional
- an den Klemmen tritt Quellenspannung U_q vermindert um den Spannungsabfall am Widerstand auf
- Berechnung durch Anwenden des Maschensatzes:

$$U_q - U - U_R = U_q - U - R_i \cdot I = 0 \Rightarrow U = U_q - R_i \cdot I$$



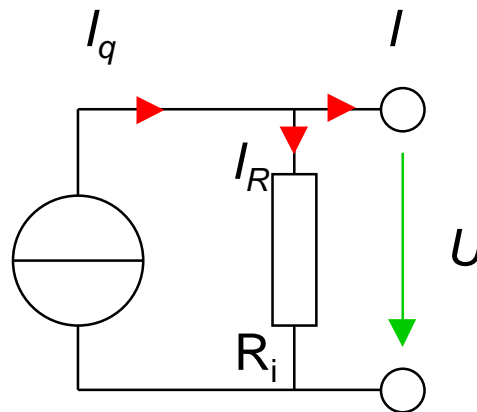
U_q : Leerlaufspannung
 I_K : Kurzschlussstrom

Kennlinie der realen Spannungsquelle

Strom- und Spannungsquellen

Reale Stromquelle

- bei einer realen Stromquelle ist der an den Klemmen zur Verfügung gestellte Strom nicht unabhängig von der angeschlossenen Last und damit von der Spannung
- die Strom sinkt, wenn die Spannung erhöht wird
- das Verhalten kann durch folgendes Ersatznetzwerk nachgebildet werden



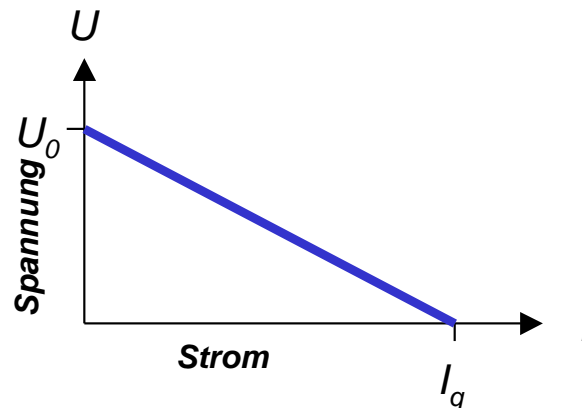
reale Stromquelle mit Innenwiderstand R_i

Reale Stromquelle

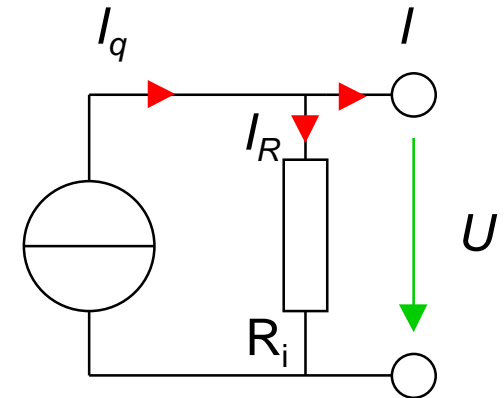
- durch den Innenwiderstand R_i fließt ein Strom
- Strom ist der Spannung U proportional
- an den Klemmen tritt Quellenstrom I_q vermindert um den Strom durch den Widerstand auf
- Berechnung durch Anwenden des Knotensatzes:

$$I_q = I_R + I = \frac{U}{R_i} + I \Rightarrow I = I_q - \frac{U}{R_i}$$

- ist der Strom an den Klemmen null, liegt die Leerlaufspannung $U_0 = R_i \cdot I_q$ an:



Kennlinie der realen Stromquelle



I_q : Kurzschlussstrom
 U_0 : Leerlaufspannung

Strom- und Spannungsquellen

Vergleich Spannungs- und Stromquelle

- ein Vergleich der realen Stromquelle mit der realen Spannungsquelle zeigt eine Dualität der beiden Quellentypen

	Reale Spannungsquelle	Reale Stromquelle
Innenwiderstand	R_i	R_i
Leerlaufspannung	U_q	$R_i \cdot I_q$
Kurzschlussstrom	U_q / R_i	I_q

- eine reale Spannungsquelle kann also durch Gleichsetzen der Zeilen in der Tabelle in eine reale Stromquelle umgewandelt werden und umgekehrt

Strom- und Spannungsquellen

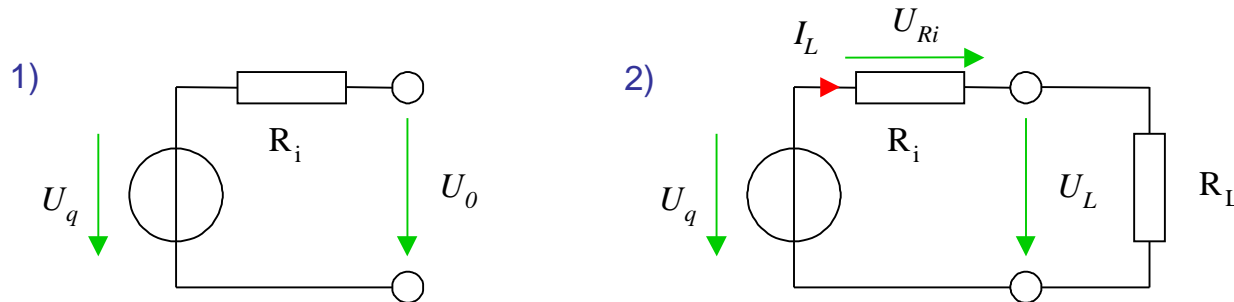
Bestimmung der Innenwiderstände von Spannungs- oder Stromquelle

- **die Daten des Ersatznetzwerkes können aus Messungen gewonnen werden**
- **zwei der drei Größen Leerlaufspannung, Kurzschlussstrom und Innenwiderstand müssen bestimmt werden**
- **Leerlaufspannung kann unproblematisch durch Messung ohne Last bestimmt werden**
- **der Strom ist gleich Null, es fällt keine Spannung am Innenwiderstand ab**
- **direkt kann der Kurzschlussstrom meist nicht gemessen werden, dieser kann sehr hoch sein (Gefährdung für die Quelle und das Messgerät)**
- **Lösung: indirekte Messung**

Strom- und Spannungsquellen

Bestimmung der Innenwiderstände

- an die Klemmen wird eine bekannte Last angeschlossen (Schaltung 2), deren Widerstand in etwa dem Innenwiderstand entsprechen sollte (unter diesen Voraussetzungen ist die Genauigkeit am höchsten), mit angeschlossener Last wird die Spannung gemessen (U_L)



- der Strom durch den Innenwiderstand R_i und den Lastwiderstand R_L kann mit dem Ohmschen Gesetz bestimmt werden:

$$I_L = \frac{U_L}{R_L}$$

- damit beträgt der Spannungsabfall am Innenwiderstand:

$$U_{Ri} = I_L \cdot R_i = U_L \cdot \frac{R_i}{R_L}$$

Strom- und Spannungsquellen

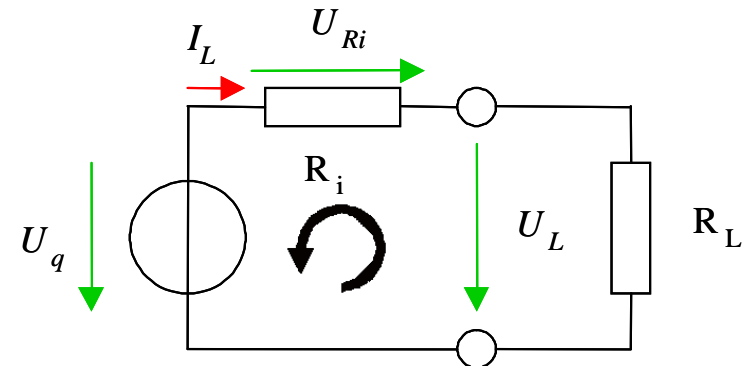
Bestimmung der Innenwiderstände

- aus dem Maschensatz ergibt sich:

$$U_q - U_L - U_{Ri} = U_q - U_L - U_L \cdot \frac{R_i}{R_L} = 0$$

- daraus bestimmt sich der Innenwiderstand zu:

$$R_i = R_L \cdot \left(\frac{U_q - U_L}{U_L} \right)$$

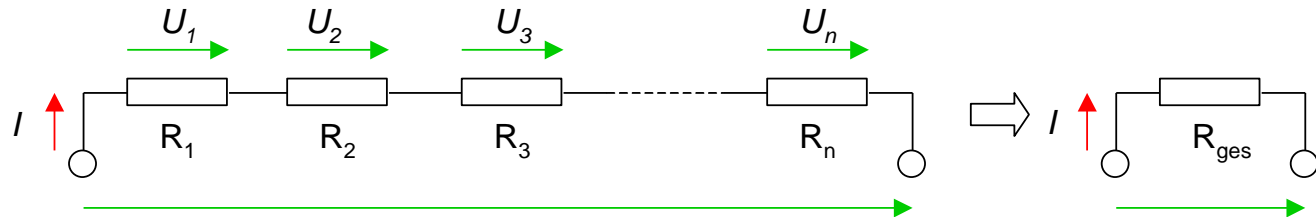


Widerstandsnetzwerke

- eine Schaltung besteht oft aus mehreren Widerständen, die in bestimmter Weise miteinander verschaltet sind
- oft interessiert aber nur der Gesamtwiderstand, der insgesamt zwischen zwei bestimmten Knoten der Schaltung besteht
- Ziel einer Netzwerkberechnung ist es in diesem Fall, den Gesamtwiderstand zu bestimmen
- es kann zwischen den beiden grundlegenden Verschaltungstypen:
 - Serienschaltung
 - und
 - Parallelschaltung
- unterschieden werden

Serienschaltung

- bei der Serienschaltung ist der Strom durch alle Widerstände identisch; Voraussetzung dafür ist natürlich, dass an den einzelnen Verbindungspunkten/ Knoten zwischen den Widerständen keine weiteren Bauelemente angeschlossen sind



- nach dem Maschensatz gilt: U

$$\sum_{i=1}^n U_i - U = 0 \Rightarrow U = \sum_{i=1}^n U_i$$

- mit dem Ohmschen Gesetz lässt sich schreiben:

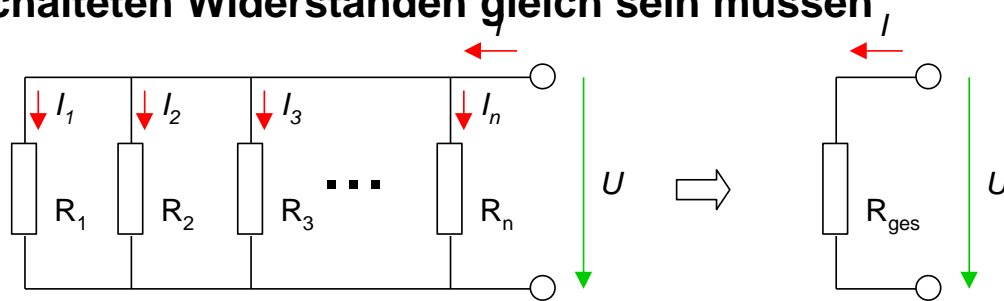
$$U = \sum_{i=1}^n (R_i \cdot I) = \left(\sum_{i=1}^n R_i \right) \cdot I = R_{ges} \cdot I$$

- der Gesamtwiderstand, bzw. Widerstand des Ersatznetzwerkes entspricht also der Summe aller in Serie geschalteter Widerstände

$$R_{ges} = \sum_{i=1}^n R_i$$

Parallelschaltung

- bei der Parallelschaltung kann man sich durch sukzessive Anwendung des Maschensatzes deutlich machen, dass die Spannungen an sämtlichen parallel geschalteten Widerständen gleich sein müssen



- an dem oberen Verbindungsknoten sind alle Widerstände angeschlossen, so dass hierfür der Knotensatz anwendbar ist:

$$I = \sum_{i=1}^n I_i$$

- die Anwendung des Ohmschen Gesetzes liefert:

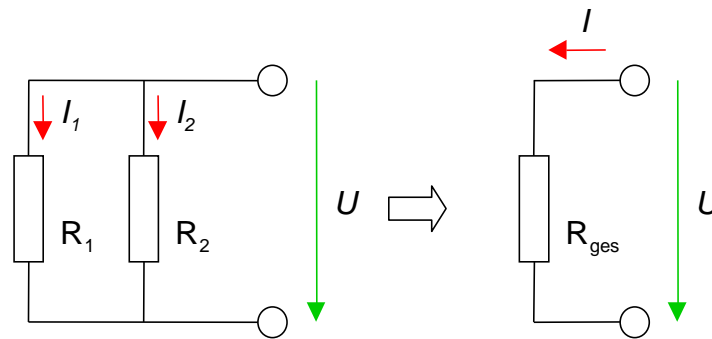
$$I = \sum_{i=1}^n \left(\frac{U}{R_i} \right) = \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i} \right) \cdot U = \frac{1}{R_{ges}} \cdot U$$

- für den Gesamtwiderstand folgt:

$$\frac{1}{R_{ges}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i} \Rightarrow R_{ges} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}}$$

Widerstandsnetzwerke

■ Sonderfall – zwei parallel geschaltete Widerstände

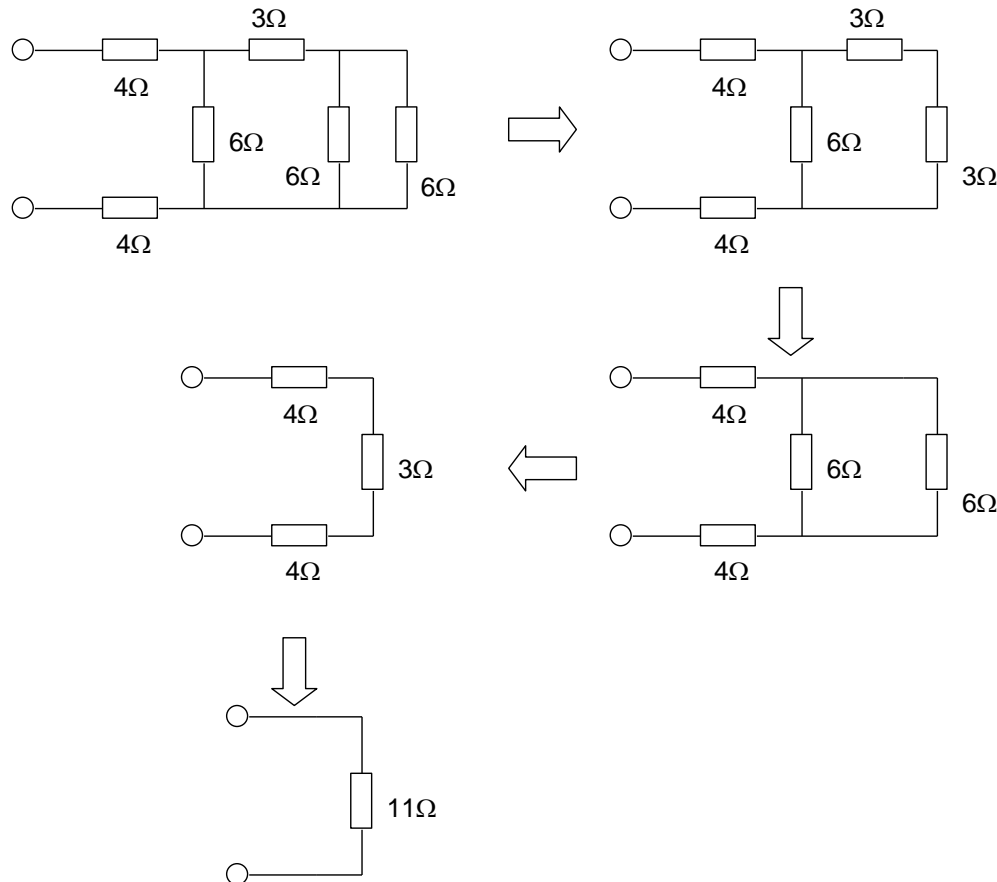


$$\frac{1}{R_{ges}} = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{R_i} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_2 + R_1}{R_1 \cdot R_2}$$

$$R_{ges} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

Komplexere Widerstandsnetzwerke

- durch sukzessive Anwendung der Substitution einer Serien- oder Parallelschaltung durch einen Ersatzwiderstand lassen sich auch sehr komplexe Netzwerke reduzieren
- Beispiel:



Widerstandsnetzwerke

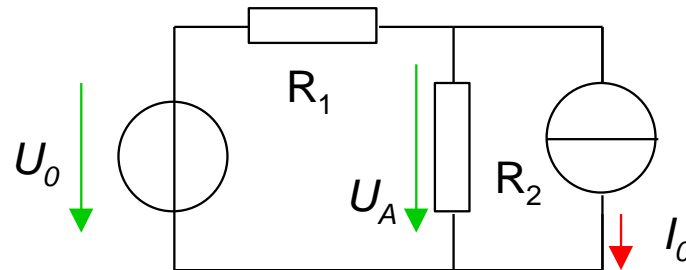
Überlagerungssatz

- **der Überlagerungssatz beschreibt die schaltungstechnische Umsetzung des allgemein gültigen Superpositionsprinzips der Physik**
- **nach dem Superpositionsprinzip kann in linearen Systemen (Ursache und Wirkung stehen in einem linearen Zusammenhang) die Wirkung einer Ursache unabhängig von allen anderen Ursachen und Wirkungen berechnet werden**
- **die Gesamtwirkung kann durch Summieren der Einzelwirkungen bestimmt werden**
- **in der Schaltungstechnik sind Strom- und Spannungsquellen die Ursachen, die Wirkungen sind Ströme oder Spannungen an bestimmten Punkten einer Schaltung**

Widerstandsnetzwerke

Überlagerungssatz - Anwendungsbeispiel

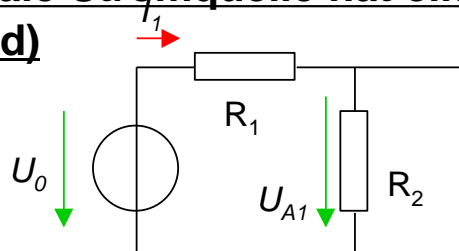
- Schaltungsbeispiel für die Anwendung des Überlagerungssatzes:



- Schaltung enthält eine Spannungsquelle U_0 und eine Stromquelle I_0
- Wirkungen auf die zu bestimmende Spannung U_A können nacheinander untersucht werden

1. Betrachtung der Wirkung der Spannungsquelle

- Deaktivierung der „Ursache Stromquelle“ durch Entfernen aus dem Stromkreis (ideale Stromquelle hat einen unendlich hohen Innenwiderstand)



Überlagerungssatz - Anwendungsbeispiel

- der Strom I_1 fließt durch die Spannungsquelle und beide Widerstände, der Maschensatz liefert:

$$U_0 = R_1 \cdot I_1 + R_2 \cdot I_1 \Rightarrow I_1 = \frac{U_0}{R_1 + R_2}$$

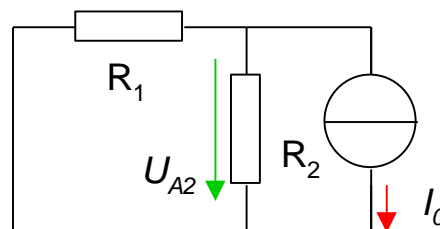
- die gesuchte Teilwirkung U_{A1} auf die zu bestimmende Spannung U_A ist damit:

$$U_{A1} = R_2 \cdot I_1 = U_0 \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

- die Quellspannung U_0 wird also durch einen Faktor, der nur von den Widerstandswerten abhängig ist, geteilt; eine solche Schaltung wird in der Elektrotechnik Spannungsteiler genannt.

2. Betrachtung der Wirkung der Spannungsquelle:

- da die ideale Spannungsquelle einen Innenwiderstand von null Ohm hat, wird sie durch einen Kurzschluss ersetzt



Widerstandsnetzwerke

Überlagerungssatz - Anwendungsbeispiel

- R_1 und R_2 sind in der verbleibenden Schaltung parallel geschaltet und lassen sich zu einem Ersatzwiderstand zusammenfassen, für die Spannung U_{A2} folgt dann:

$$U_{A2} = -R_{\text{ersatz}} \cdot I_0 = -\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \cdot I_0$$

- die gesamte Ausgangsspannung der ursprünglichen Schaltung lässt sich nun durch Addition (Superposition) der Einzelwirkungen gewinnen:

$$U_A = U_{A1} + U_{A2} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot U_0 - \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \cdot I_0 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot (U_0 - R_1 \cdot I_0)$$

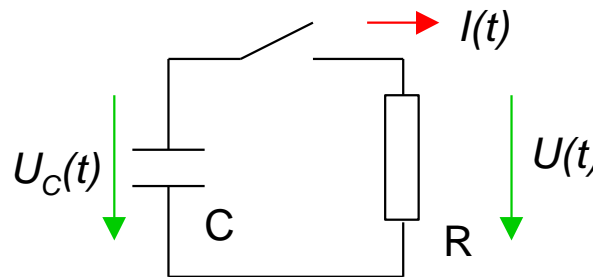
- das Prinzip der Überlagerung lässt sich in linearen Schaltungen bei beliebig vielen Strom- und Spannungsquellen anwenden
- eine weitere Möglichkeit zur Lösung wäre die Umwandlung der Strom- in eine Spannungsquelle bzw. die Umwandlung der Spannungs- in eine Stromquelle

Widerstandsnetzwerke

Gemischte zeitabhängige Schaltungen

- die bisher abgeleitete Sätze gelten nicht nur für Widerstände, sondern auch für andere Bauelemente
- anstelle des Ohmschen Gesetzes ist entsprechend die für das Bauelement maßgebende Charakteristik einzusetzen
- es entstehen bei manchen Bauelementen sogenannte lineare Differentialgleichungen

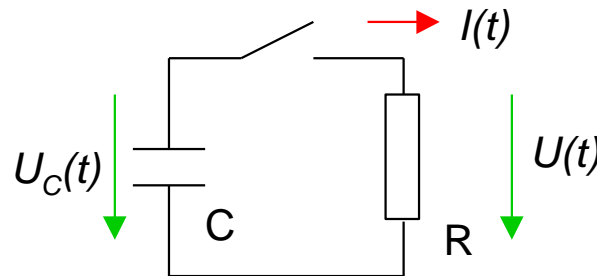
Beispiel:



- der Kondensator kann Ladungen speichern und diese wieder abgeben
- die Aufnahme und Abgabe von Ladungen ist zeitabhängig

Widerstandsnetzwerke

Gemischte zeitabhängige Schaltungen



- der Kondensator soll bei geöffnetem Schalter zunächst auf eine Spannung U_0 aufgeladen sein
- im Zeitpunkt $t=0$ werde der Schalter geschlossen, wodurch ein Strom durch den Widerstand R fließt
- es interessiert der zeitliche Verlauf der Spannung $U(t)$
- nach dem Knotensatz fließt bei geschlossenem Schalter durch den Kondensator und den Widerstand derselbe Strom $I(t)$
- der Maschensatz besagt, dass bei geschlossenem Schalter die Spannung am Kondensator und am Widerstand gleich sind

$$U_C(t) = U(t)$$

Widerstandsnetzwerke

Gemischte zeitabhängige Schaltungen

- also gilt für die Knotengleichung:

$$\frac{U(t)}{R} = -C \cdot \frac{dU(t)}{dt} \Leftrightarrow R \cdot C \cdot \frac{dU(t)}{dt} + U(t) = 0$$

- das negative Vorzeichen entsteht dadurch, dass der Strom durch den Kondensator entgegen der Spannung gerichtet ist
- es handelt sich um eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung, die durch einen Exponentialansatz (weiteres Standardverfahren zur Lösung von Differentialgleichungen) gelöst werden kann:

$$U(t) = A \cdot e^{\lambda \cdot t}$$

Gemischte zeitabhängige Schaltungen

- die im Ansatz enthaltenen Konstanten A und λ müssen durch Einsetzen und Berücksichtigung der Randbedingungen bestimmt werden; durch Einsetzen folgt:

$$R \cdot C \cdot A \cdot \lambda \cdot e^{\lambda \cdot t} + A \cdot e^{\lambda \cdot t} = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{R \cdot C}$$

- A wird durch den Anfangswert (Kondensator zum Zeitpunkt $t = 0$ auf U_0 aufgeladen) ermittelt:

$$U(0) = A \cdot 1 = U_0 \Rightarrow A = U_0$$

- somit lautet die Lösung für $t \geq 0$:

$$U(t) = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}}$$

- die Spannung am Widerstand springt also unmittelbar nach Schließen des Schalters auf U_0 um dann exponentiell auf Null abzufallen, für $t \geq 0$ entspricht der Verlauf auch der Spannung am Kondensator, eine solche Funktion wird daher auch Entladekurve genannt

