Kräfte auf Leiterschleifen im magnetischen Feld, magnetisches Moment

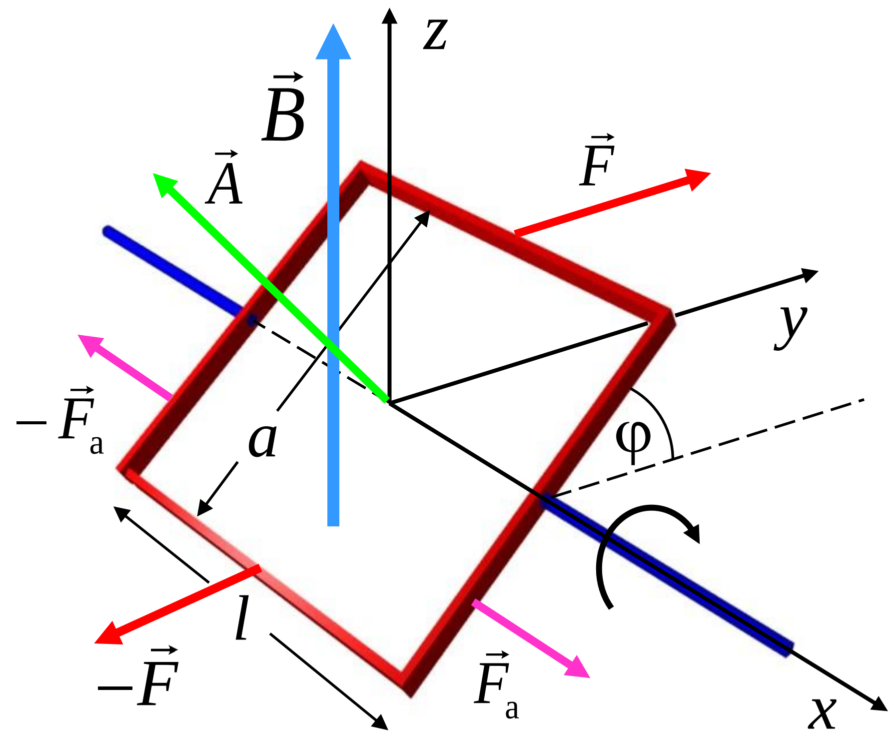
Eine von einem Strom I durchflossene rechteckige Leiterschleife mit den Kantenlängen a und l befindet sich um die x-Achse drehbar im Magnetfeld B. Die parallel zur x-Achse wirkenden Kräfte F_a heben sich gegenseitig auf.

Dagegen erzeugen die Kräfte F auf die Seiten l ein Drehmoment um die x-Achse der Größe

$$\vec{M} = 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \left|\vec{F}\right| \sin\varphi \cdot \vec{e}_x = a \cdot \left|\vec{F}\right| \sin\varphi \cdot \vec{e}_x$$

Für die Kraft auf die Leiterseiten gilt:

$$\vec{F} = I \cdot \vec{l} \times \vec{B} = I \cdot l B_z \cdot \vec{e}_y$$



wegen $\vec{B} = B\vec{e}_z$

Für das Drehmoment folgt dann

$$\vec{M} = I \cdot \underbrace{al}_{=A} \cdot B \cdot \sin\varphi \cdot \vec{e}_x$$

mit A als Fläche der Leiterschleife.

Wir führen den Vektor $\vec{A}$ ein, dessen Absolutbetrag die Fläche beschreibt und dessen Richtung parallel zu Flächennormalen zeigt. Dann gilt in Erweiterung für beliebig geformte Leiterschleifen

$$\vec{M} = I \cdot \vec{A} \times \vec{B}$$

Wir definieren nun ein ***magnetisches Moment m***, also die magnetische Wirkung einer Leiterschleife mit Fläche A, durch die der Strom I fließt:

$$\vec{m} \equiv I \cdot \vec{A}$$

Damit folgt für das ***Drehmoment***

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$$

Das Drehmoment verschwindet für $\vec{m} \parallel \vec{B}$ und daher richtet sich die stromdurchflossene Leiterschleife im Magnetfeld immer so aus, dass ihre Flächennormale parallel zum Magnetfeld steht.

Anwendungen: ***Kompassnadel, Eisenfeilspäne (Visualisierung des B-Feldes)***

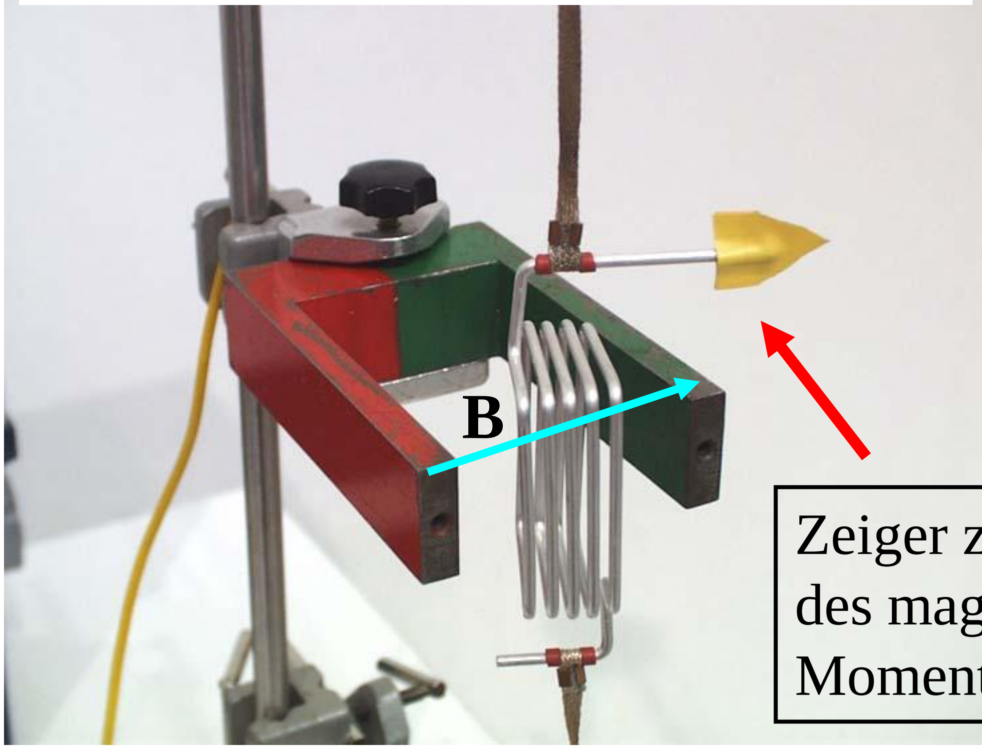
Abhängig von der Orientierung ist die ***potentielle Energie*** eines magnetischen Moments gegeben durch:

$$E_{pot} = -\vec{m} \cdot \vec{B}$$

Die potentielle Energie ist also minimal für $\vec{m} \parallel \vec{B}$ und verschwindet für $\vec{m} \perp \vec{B}$.

Experiment: Drehmoment auf eine Stromschleife (Spule mit N Windungen)

Bei Stromfluss I durch die Spule entsteht ein Drehmoment, das versucht das magnetische Moment in die Richtung des *B*-Feldes zu drehen.



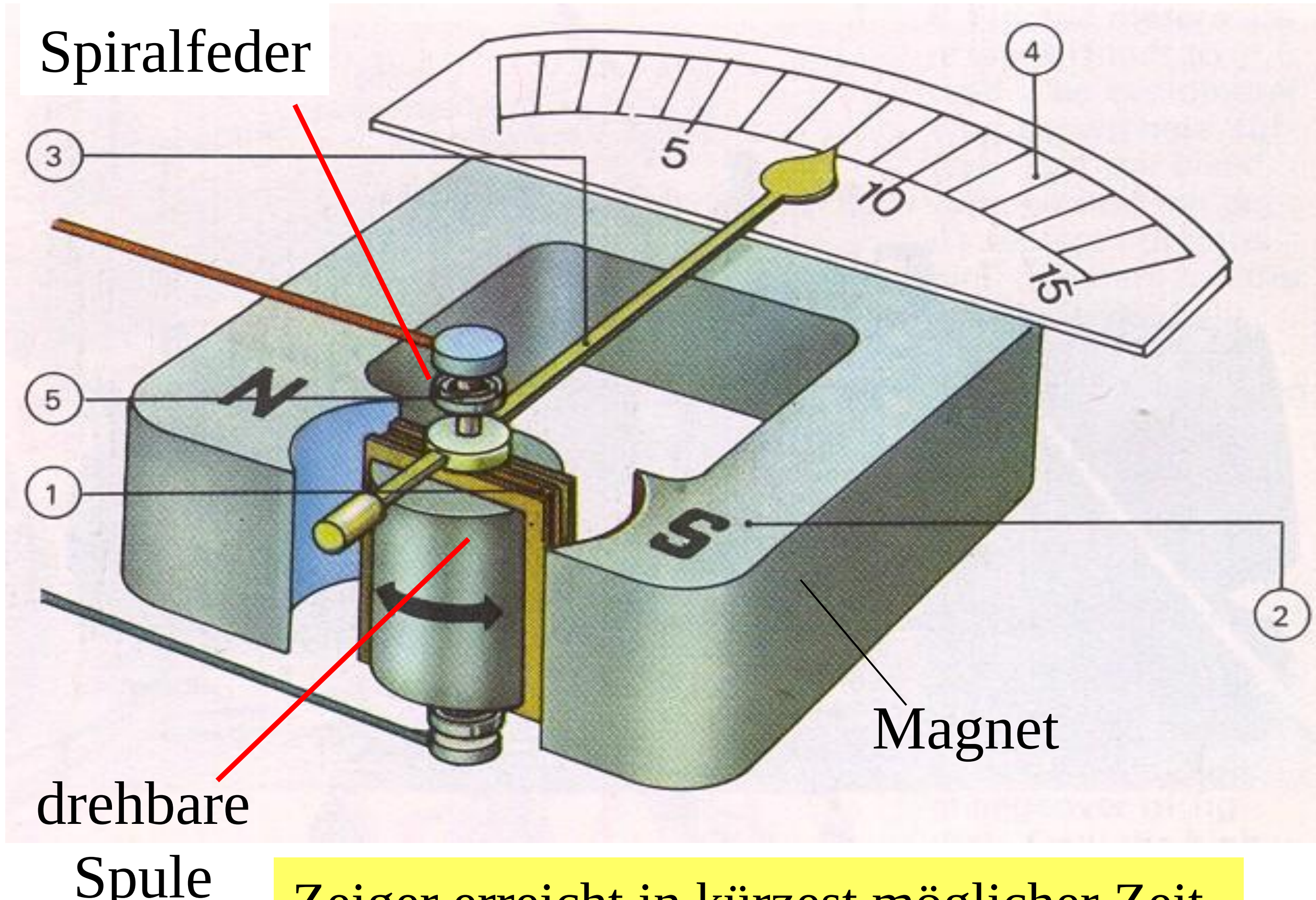
Zeiger zeigt in Richtung des magnetischen Moments *m*

Prinzip eines Drehspulinstruments zur Strom- und Spannungsmessung

Drehmoment ist proportional zum Strom I durch die Spule. Endlage des Zeigers erreicht, wenn Drehmoment der Spule so groß wie Rückstelldrehmoment der Spiralfeder.

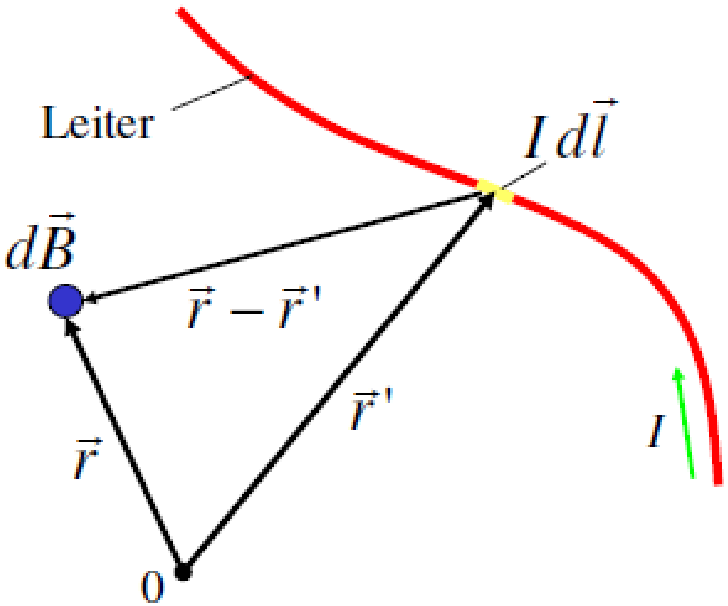
Achtung:

Schwingungssystem mit kritischer Dämpfung (aperiodischer Grenzfall !)



Zeiger erreicht in kürzest möglicher Zeit den Endausschlag!

Das Gesetz von Biot-Savart

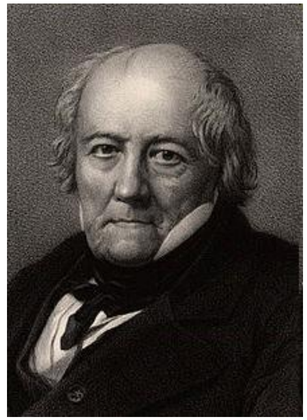


Da das elektrostatische Feld durch Ladungen erzeugt wird, konnten wir durch Überlagerung (Superposition) von Punktladungen das E-Feld für jede beliebige Ladungsverteilung berechnen. Ursache des Magnetfeldes sind aber die Ströme *I*.

Wir betrachten daher ein vom Strom *I* durchflossenes Leiterelement der Länge $d\vec{l}$ am Ort $\vec{r}\,'$ als Ursache für das Magnetfeld $d\vec{B}$ am Ort $\vec{r}$.

Nach ***Biot-Savart*** gilt nun folgender Zusammenhang:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\,\frac{d\vec{l}\times\left(\vec{r}-\vec{r}\,'\right)}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|^3}$$

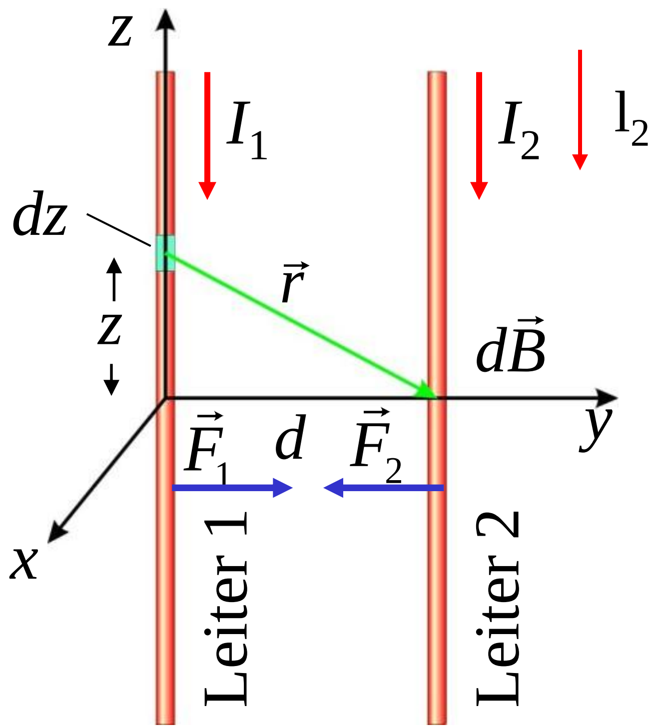


Jean Baptiste Biot 1774 - 1862

Für Spezialisten: Man erkannt den formalen Zusammenhang zu:

$$d\vec{E} = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\left(\vec{r}-\vec{r}\,'\right)}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|^3}$$

Kräfte zwischen stromdurchflossenen Leitern



Die Leiter seien unendlich lang.
Wir berechnen zunächst die Kraft auf Leiter 2 im Magnetfeld des Leiters 1.

Diese ist gegeben durch:

$$\vec{F}_2 = I_2 \vec{l}_2 \times \vec{B}_1 = -I_2 l_2 \vec{e}_z \times \vec{B}_1$$

Das Magnetfeld des Leiters 1 (langer Draht) im Abstand d als

$$\vec{B}_1 = \mu_0 \frac{I_1}{2\pi d} \vec{e}_x$$

Damit folgt:

$$\vec{F}_2 = -\frac{\mu_0 I_1 I_2 \cdot l_2}{2\pi d} \vec{e}_z \times \vec{e}_x$$

$$= -\frac{\mu_0 I_1 I_2 \cdot l_2}{2\pi d} \vec{e}_y$$

und wegen actio = reactio

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

Pro Leitereinheitslänge üben also die Leiter eine Kraft von

$$\frac{dF}{dz} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1 I_2}{d}$$

aufeinander aus.

Hieraus resultiert im SI-System die Anbindung der Einheiten des Stromes und des Magnetfeldes an die Einheit der Kraft.

Beispiel:

$$I_1 = I_2 = 1A, \quad d = 1m, \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\, {}^{Vs}\!/_{Am}$$

$$\frac{dF}{dz} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1 \cdot 1}{2\pi \cdot 1}\frac{N}{m} = 2 \cdot 10^{-7}\frac{N}{m}$$

Definition der Stromstärke:

„Werden zwei parallele, unendlich lange Leiter im Abstand von *d = 1m* von je *1 A* gleichnamig durchflossen, so üben sie eine anziehende Kraft von $2 \cdot 10^{-7}$ N pro m Länge aufeinander aus".

Damit liegt auch die Größe und Einheit von μ_0 fest.

$$\mu_0 = 2\pi \frac{d}{I_1 I_2} \cdot \frac{dF}{dz} = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Nm}{mA^2}$$

Wegen *1 Nm = 1 J = 1 VAs* folgt

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am}$$

Permeabilität des Vakuums (magnetische Feldkonstante)

Ältere Definition der Stromstärke:

„Wenn ein Strom von 1 A eine Sekunde lang fließt (also eine Ladung von 1 As), so wird 1,118 mg Silber aus einer wässrigen Lösung ausgeschieden“

Im Vorgriff auf die Elektrodynamik:

Es folgt mit *c* als Vakuumlicht-geschwindigkeit:

$$\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$$

und mit *c* fest gegeben durch

$$c = 2{,}99792458 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$$

folgt

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2} = \frac{1}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot c^2} \frac{Am}{Vs}$$

$$= 8{,}854188 \cdot 10^{-12} \frac{Am}{Vs} \frac{s^2}{m^2}$$

also

$$\varepsilon_0 = 8{,}854188 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm}$$

Dielektrizitätskonstante des Vakuums (elektrische Feldkonstante)

Elektrostatik und Magnetostatik auf einer Seite

Maxwell-Gleichungen für den statischen Fall

$$\partial / \partial t = 0$$

$$rot\vec{E}(\vec{r}) = 0$$

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

Das elektrostatische E-Feld ist wirbelfrei,

besitzt also ein elektrostatisches Potential φ,

$$\vec{E}(\vec{r}) = -grad\,\varphi(\vec{r})$$

muss daher Quellen haben

$$div\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$$

$$\oiint_{a(V)} \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_{V(a)} \rho(\vec{r})dV$$

$$div\vec{B}(\vec{r}) = 0$$

$$\oiint_{a(V)} \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0$$

Das statische B-Feld hat keine Quellen;

ein Potential existiert nicht.
Das B-Feld ist daher ein Wirbelfeld

Die Wirbelstärke folgt aus:

$$rot\vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{j}(\vec{r})$$

$$\oint_{C(a)} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I = \mu_0 \oiint_{a(C)} \vec{j}(\vec{r}) \cdot d\vec{a}$$

Inhalt der Vorlesung Physik A2 / B2

3. Wärmelehre

Druck und Temperatur: Das ideale Gas
Wärmemenge, spezifische Wärme
Die Hauptsätze der Wärmelehre

4. Elektrizitätslehre, Elektrodynamik

Die Ladung und elektrostatische Felder
- SEMESTERENDE -
Elektrischer Strom
Magnetische Felder und Magnetostatik
Zeitlich veränderliche Felder, Elektrodynamik
Wechselstromnetzwerke
Die Maxwellschen Gleichungen
Elektromagnetische Wellen und Strahlung
Relativität der Felder – Relativitätstheorie

Zeitlich veränderliche Felder / Elektrodynamik

$$\partial / \partial t \neq 0$$

elektrisches Feld E:

$$div\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$$

$$\oiint_{a(V)} \vec{E}d\vec{a} = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_{V(a)} \rho(\vec{r})dV$$

$$rot\vec{E}(\vec{r}) = 0 \quad \boxed{+?????}$$

$$\oint_S \vec{E}d\vec{s} = 0 \quad \boxed{+?????}$$

Es gibt ein elektrisches Wirbel-feld. Ursache ist ***die magnetische Induktion***

magnetisches Feld B:

$$div\vec{B}(\vec{r}) = 0$$

$$\oiint_{a(V)} \vec{B}d\vec{a} = 0$$

$$rot\vec{B}(\vec{r}) = \mu_0\vec{j}(\vec{r}) \quad \boxed{+?????}$$

$$\oint_{S(a)} \vec{B}d\vec{s} = \mu_0 I = \mu_0 \iint_{a(S)} \vec{j}(\vec{r})d\vec{a} \quad \boxed{+??????}$$

Es gibt eine weitere Ursache für Magnetfelder : ***der elektrische Verschiebungsstrom***

Zur Erinnerung:

Magneto- und elektrostatische Erscheinungen bisher unabhängig voneinander.

Potentialdifferenz, Spannung:

$$U = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} d\vec{r}$$

elektrischer Fluß:

$$\Phi_{\mathrm{el}} = \iint_a \vec{E} d\vec{a}$$

Gaußsches Gesetz:

$$\Phi_{\mathrm{el}} = \oiint_a \vec{E} d\vec{a} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Elektrischer Strom:

$$I = \frac{1}{\mu_0} \oint_S \vec{B} d\vec{r}$$

magnetischer Fluß:

$$\Phi_{\mathrm{m}} = \iint_a \vec{B} d\vec{a} = 0$$

Im statischen Fall gelten also folgende Zuordnungen

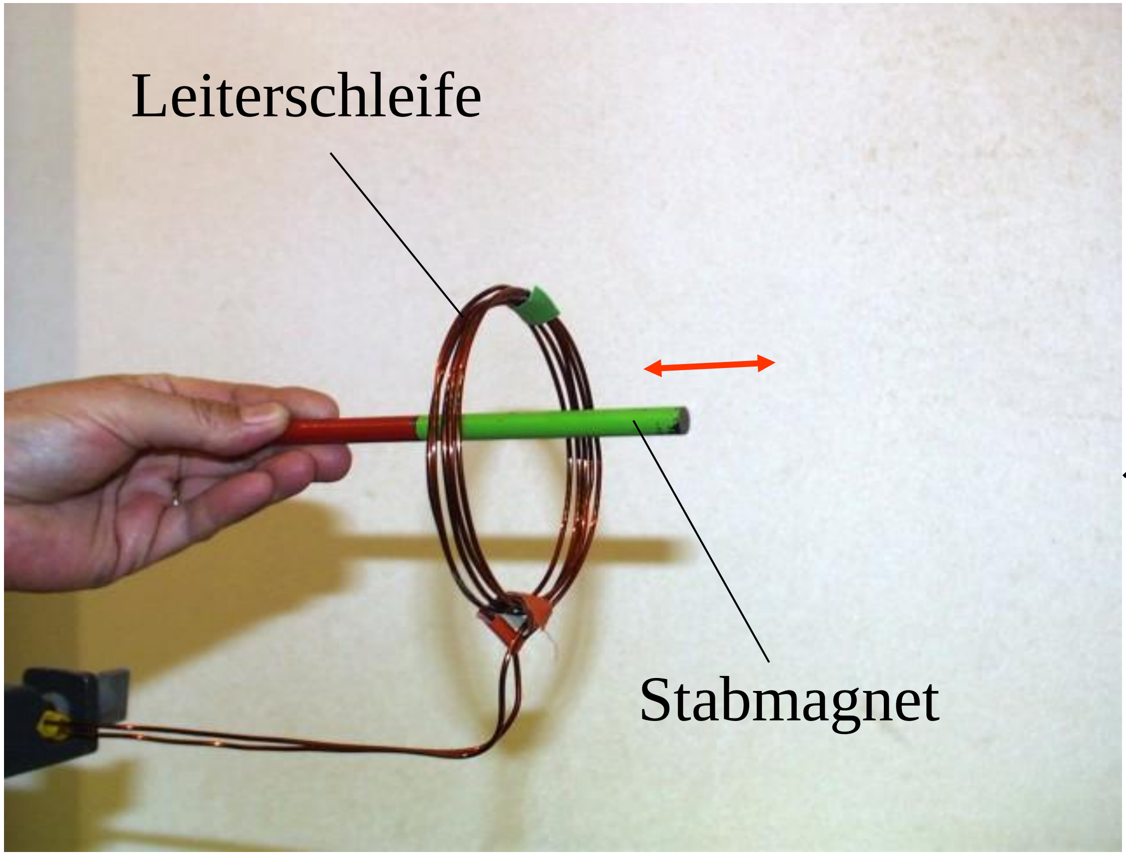
$$\begin{array}{ccc} U & \longleftrightarrow & \vec{E},\ \Phi_{\mathrm{el}} \\ & \partial/\partial t = 0 & \\ I & \longleftrightarrow & \vec{B},\ \Phi_{\mathrm{m}} \end{array}$$

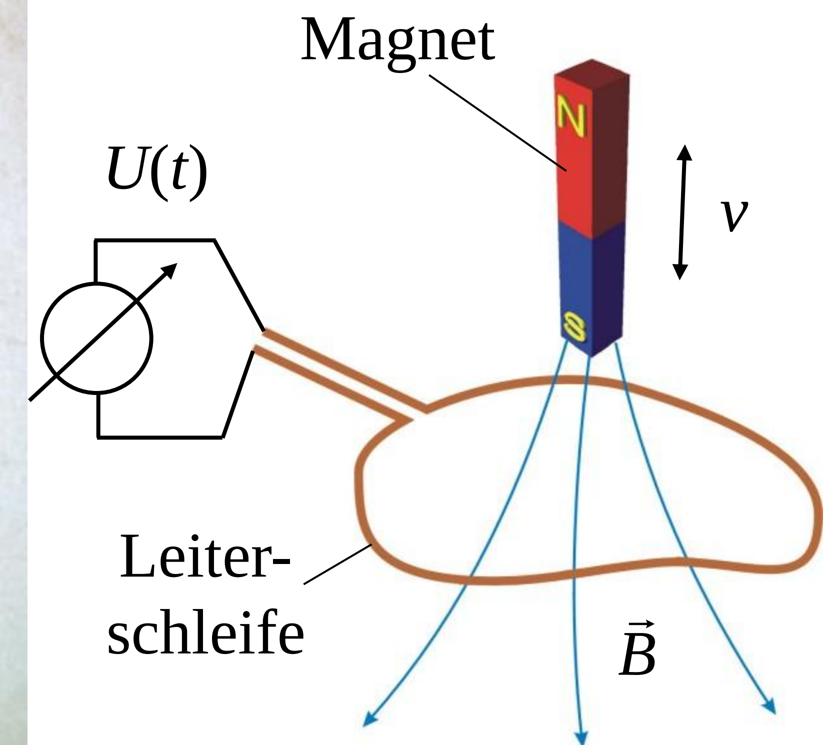
Bei zeitabhängigen Feldern kommen weitere Zuordnungen hinzu

$$\begin{array}{ccc} U & \longleftrightarrow & \vec{E},\ \Phi_{\mathrm{el}} \\ & \partial/\partial t \neq 0 & \\ I & \longleftrightarrow & \vec{B},\ \Phi_{\mathrm{m}} \end{array}$$

Experiment: ***Leiterschleife im zeitabhängigen B-Feld***

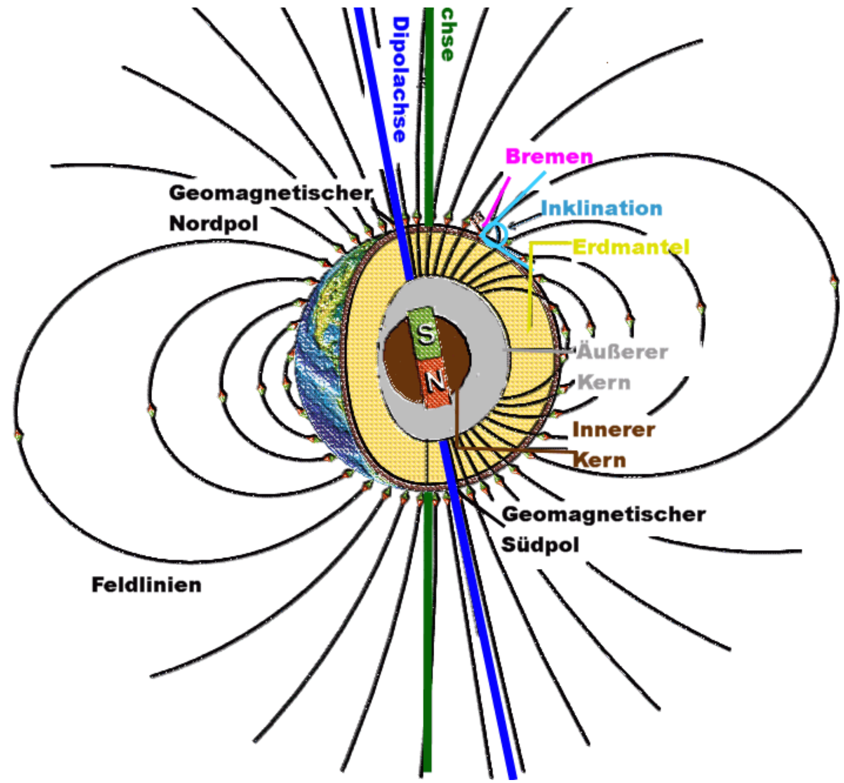
Beobachtung: Ein ***zeitlich sich ändernder magnetischer Fluss*** durch eine Leiterschleife ***induziert*** eine ***Induktionsspannung*** $U_{ind} = U(t)$





Experiment: *Drehung einer Spule im Erdmagnetfeld*

Beobachtung: Ein ***zeitlich sich ändernder magnetischer Fluss*** durch eine Leiterschleife ***induziert*** eine ***Induktionsspannung*** $U_{ind} = U(t)$



B-Feld der Erde an Oberfläche:

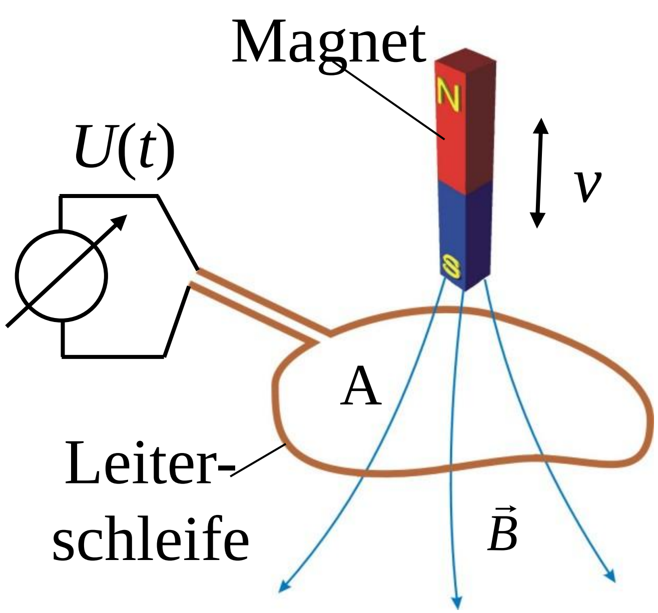
$$B_{Erde} \approx 2-3 \cdot 10^{-5} T = 0,2-0,3\ G\ (Gauss)$$

keine SI-Einheit, aber gebräuchlich:

$$1\ G\ (Gauss) = 10^{-4} T$$

Induktion

Ändert man das Magnetfeld B, das eine Leiterschleife durchsetzt, zeitlich, so wird in der Leiterschleife ein elektrisches Feld E und damit eine Spannung U(t) ***(elektromotorische Kraft EMK)*** induziert.



Fläche der Leiterschleife = A

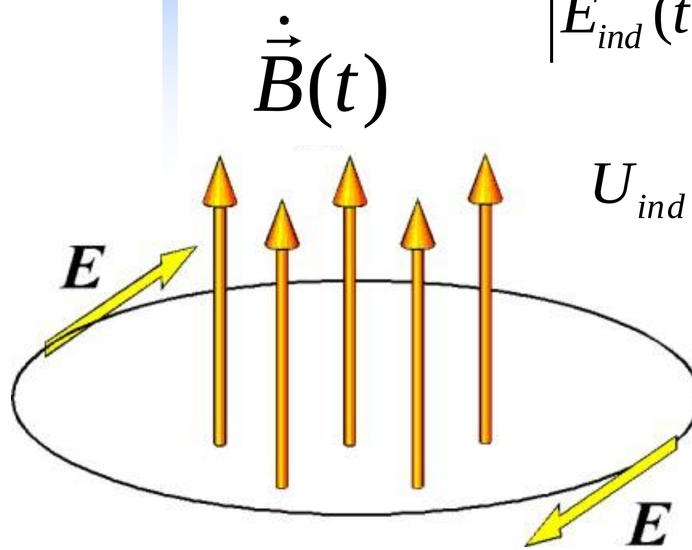
Diesen 1831 von M.Faraday entdeckten Effekt nennt man „Induktion".

Die Experimente zeigen:

$$U_{ind}(t) \propto A\frac{dB}{dt}$$

In einer kreisförmigen Leiterschleife wird somit ein elektrisches Feld E induziert, das ***nicht wirbelfrei*** ist und für das gilt

$$\left|\vec{E}_{ind}(t)\right| \propto \frac{d}{dt}\left|\vec{B}(t)\right|$$



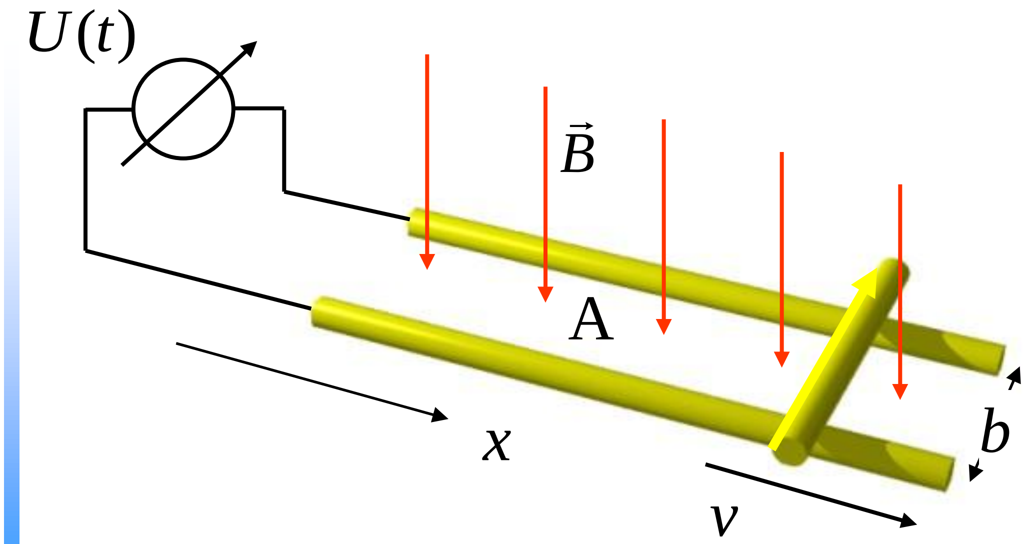
$$U_{ind}(t) = \oint_{Schleife} \vec{E}_{ind}(t)d\vec{s}$$

Ein zeitlich sich änderndes Magnetfeld umgibt sich mit einem ringförmig geschlossenen elektrischen Feld. Es gibt also *E*-Felder, deren Ursache nicht die Ladungen sind:

Bevor wir endgültig eine Schlussfolgerung ziehen, wollen wir zunächst jedoch andere Erscheinungen betrachten, die wir als Folge der Lorentzkraft ansehen können.

Induktion als Folge der Lorentzkraft:

Ein Teil einer Leiterschleife bewege sich im konstanten Magnetfeld *B*.



Die Lorentzkraft wirkt auf die mit *v* bewegten Ladungsträger und führt zur Ladungstrennung (ähnlich Hall-Effekt). Es entsteht ein ***elektromotorisches Feld E*** senkrecht zu B und v. Im statischen Gleichgewicht gilt dann

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} = q\vec{E}_{ind}$$

$$\Rightarrow \vec{E}_{ind} = \vec{v} \times \vec{B} = \frac{d}{dt}\vec{x} \times \vec{B}$$

Die induzierte Spannung folgt dann zu

$$U_{ind}(t) = -\int \vec{E}_{ind} d\vec{s} = -E_{ind} \cdot b$$

Einsetzen von E liefert

$$U_{ind}(t) = -B \cdot b \cdot \frac{dx}{dt} = -B \cdot \frac{dA}{dt}$$

Hier ist *dA/dt* die zeitliche Änderung der Fläche der Leiterschleife. Die Spannung $U_{ind}(t)$ ist also proportional zur Änderung der Fläche A der Leiterschleife.

$$U(t) = -B \cdot \frac{dA}{dt}$$

Zur Verallgemeinerung definieren wir den ***magnetischen Fluß Φ*** durch eine Fläche

analog zum elektrischen Fluss

$$\Phi_m(t) = \Phi(t) = \iint_{A(t)} \vec{B}(t) d\vec{A}$$

Wir fassen die experimentellen Ergebnisse:

$$U_{ind}(t) \propto A \frac{dB}{dt}$$

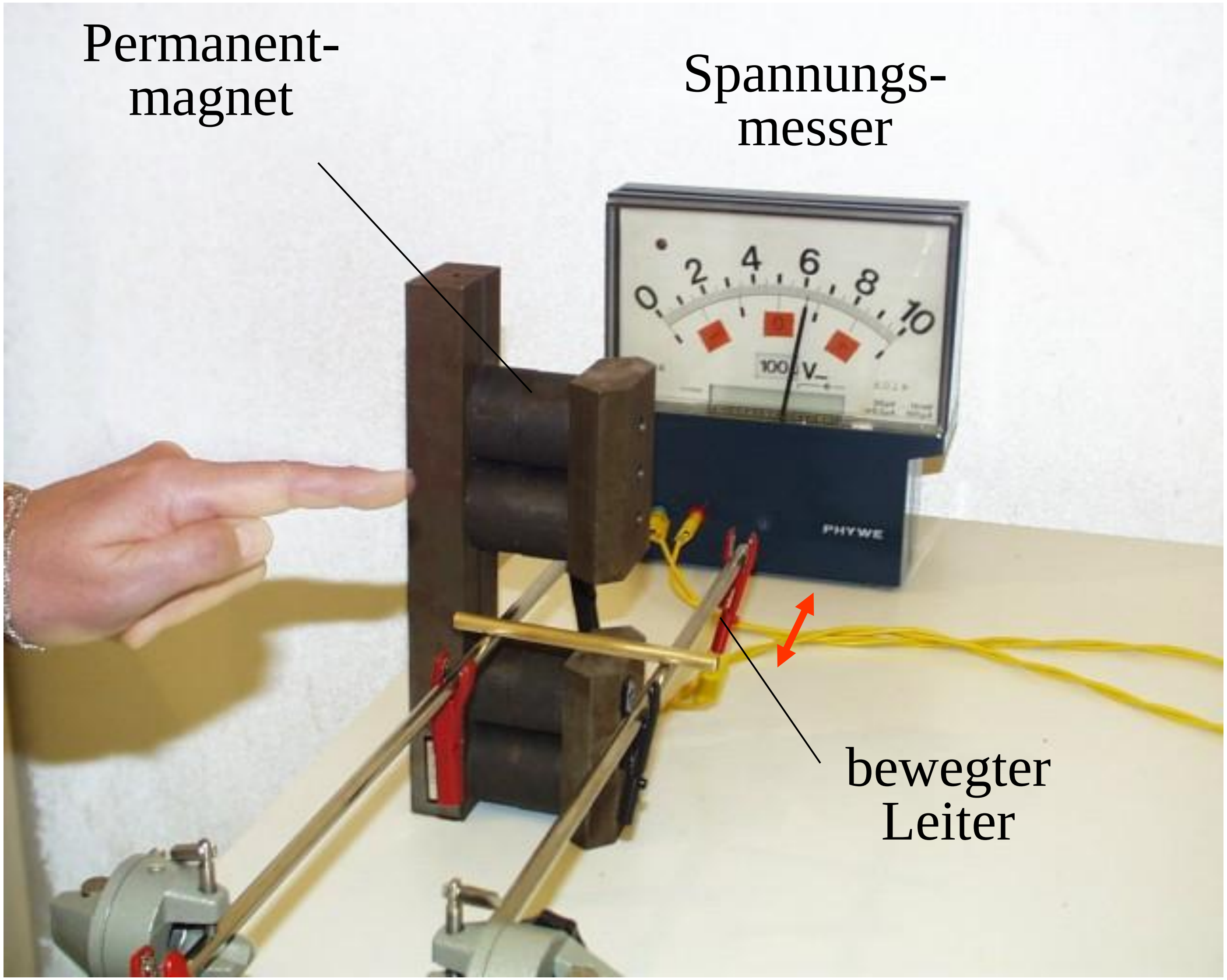
$$U_{ind}(t) = -B \cdot \frac{dA}{dt}$$

$$\Downarrow$$

Faradaysches Induktionsgesetz

$$U_{ind}(t) = -\frac{d}{dt}\Phi(t) = -\frac{d}{dt}\iint_{A(t)} \vec{B}(t) d\vec{A}$$

Experiment: *Induktion durch bewegten Leiter*



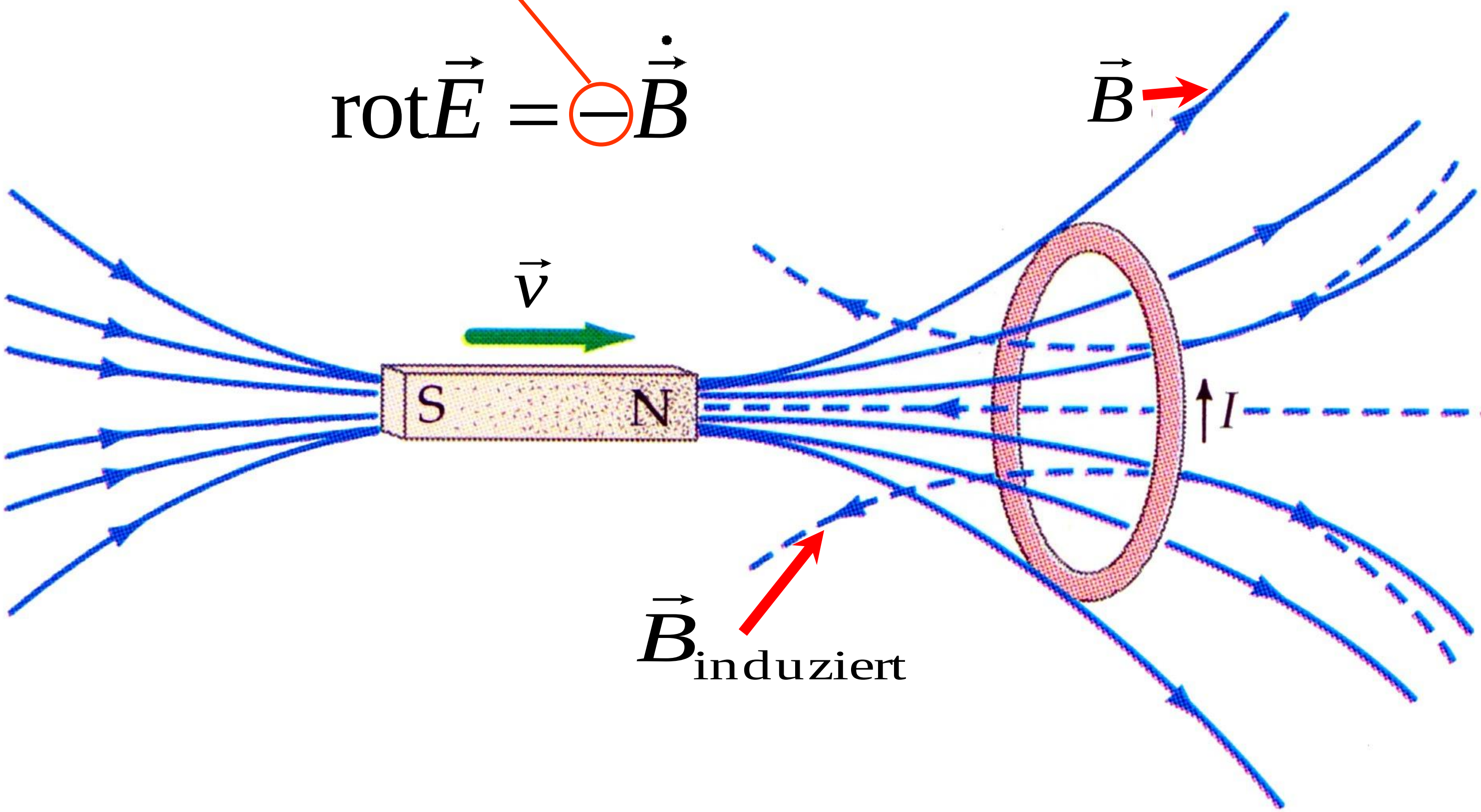
Wird der Leiter im Bereich des Magnet-feldes bewegt, entsteht eine Spannung.

Linearmotor:
Legt man eine externe Betriebsspannung an, so fließt ein Strom I in der Leiterschleife. Die Lorentzkraft wirkt dann auf die Ladungs-träger und somit wirkt in Summe eine Kraft auf den beweglichen Leiter in Längsrich-tung !

Lenzsche Regel (1834)

„Das durch den induzierten Strom I hervorgerufene Magnetfeld ist dem ursächlichen Magnetfeld, also der Ursache der Induktion, entgegengerichtet“

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\dot{\vec{B}}$$

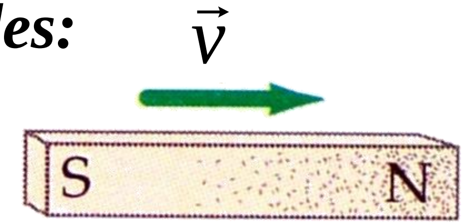


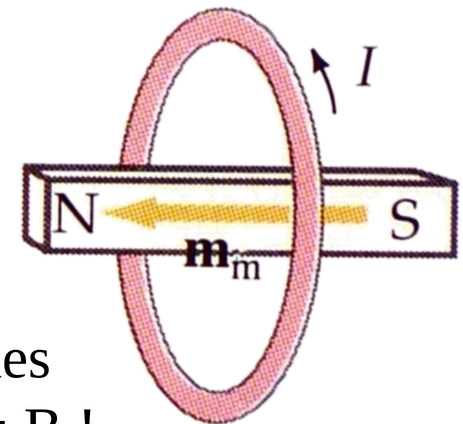
Heinrich Friedrich Emil Lenz (1804-1865)

Erklärung:

Energiesatz muss gelten !

Experimentell findet man folgendes:



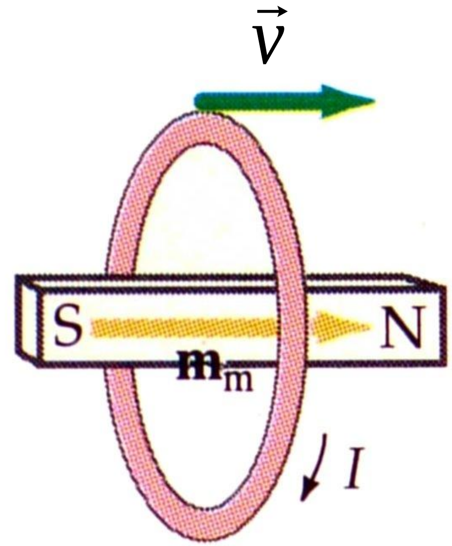


(i) Wenn ein Magnet auf eine Leiterschleife zu bewegt wird, dann wird die Leiterschleife durch das induzierte Magnetfeld abgestoßen.

m_m = induziertes magnetisches Moment antiparallel zu B !

(ii) Wenn hingegen die Leiterschleife vom Magneten weg bewegt wird, dann entsteht ein anziehendes induziertes Magnetfeld.

m_m parallel zu B !



Formulierung:

Dies lässt sich allgemein zusammenfassen in der *Lenzschen Regel* (1834):

„Der Induktionsstrom wirkt immer seiner Ursache entgegen !“

Experiment: *Thomsonscher Ring*

Nach Einschalten des Stromes und damit des Magnetfeldes wird der Aluminiumring nach oben geschleudert (Lenzsche Regel). Bei unterbrochenem Ring unterbleibt dies (kein induzierter Ringstrom).

Achtung: Betrieb mit Wechsel-spannung, das B-Feld ändert mit 50 Hz seine Richtung!