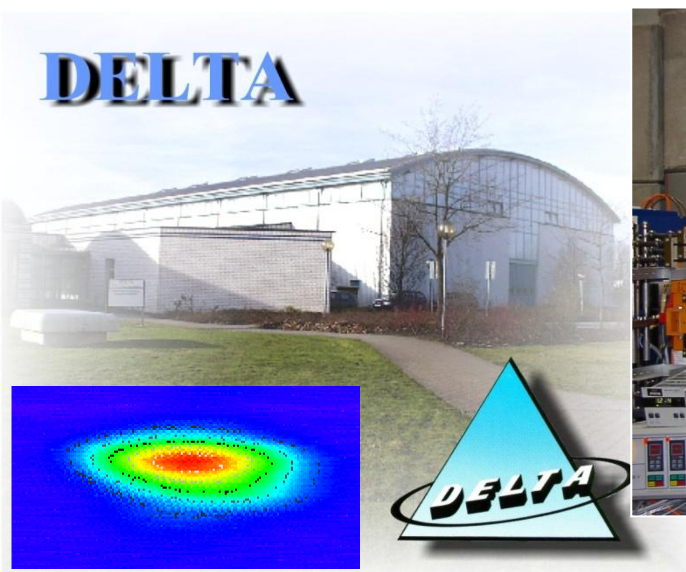
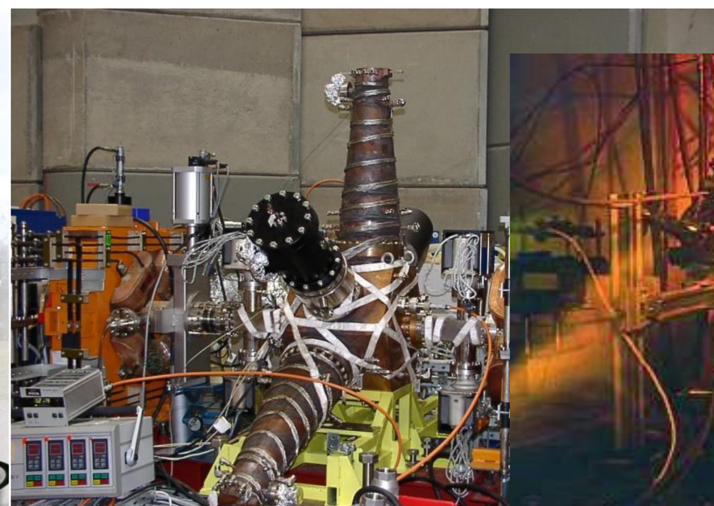
Vorlesung SS 2017

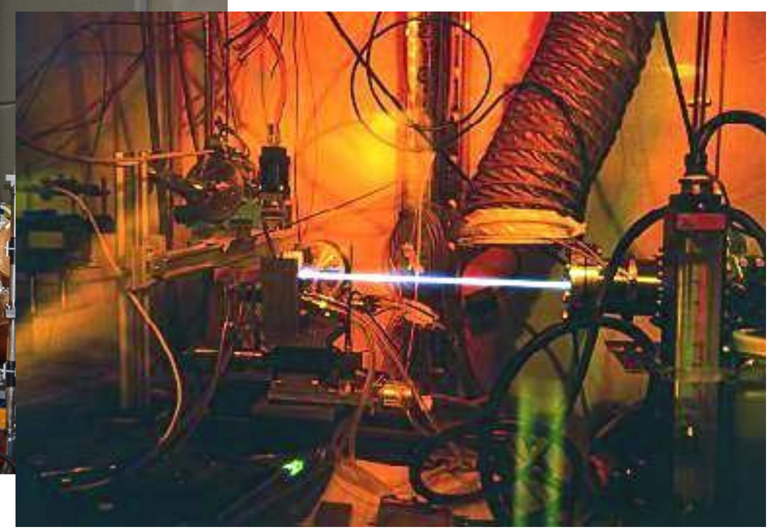
Ergänzung zu Physik B2

Prof. Dr. Thomas Weis
Fakultät Physik und
Dortmunder Zentrum für Synchrotronstrahlung

Donnerstags
10.00 – 10.45 Uhr
HS3 / Chemie







Inhalt der mathematischen Ergänzung zur Physik A2:

- Vektoren und Vektorrechnung
- Differential- und Integralrechnung
- Komplexe Zahlen
- Fehlerrechnung und Fehlerfortpflanzung
- Gradient, Divergenz und Rotation: Differentialrechnung in 3D
- Integralrechnung in 3D – Volumenintegrale
- Berechnung von Trägheitsmomenten
- Einfache Differentialgleichungen
- Wellengleichung und Anwendungen
- Vektorfelder, Fluss eines Vektorfeldes
- Wiederholung Divergenz, Gauß-Integralsatz

Inhalt der mathematischen Ergänzung zur Physik B2:

- Wiederholung Divergenz, Gauß-Integralsatz
- Rotation, Stokes-Integralsatz, Anwendungen
- Ladungen in elektrischen und magnetischen Feldern
- Kondensator und Induktivität im Stromkreis
- Berechnung von Wechselstromnetzwerken
- Zusammenfassung der Maxwell-Gleichungen
- Die Kontinuitätsgleichung
- Berechnungen zur Wellenoptik
- Zusammenfassung der klassischen Physik
- Mathematische Wiederholung zu Wellen
- Die Schrödinger-Gleichung
- Die Mathematik des Wasserstoff-Atoms
- Der Aufbau des Periodensystems

Literatur zu den mathematischen Ergänzungen:

- S. Großmann, Mathematischer Einführungskurs für die Physik, Teubner Studienbücher
- I.N. Bronstein, K.A. Semendjajew, Taschenbuch der Mathematik
- Joos-Richter, Höhere Mathematik für Praktiker
- Rottmann, Mathematische Formelsammlung

Empfohlene Literatur: PHYSIK A2/B2

- Paul. A. Tipler, *Physik*, Spektrum-Verlag
- Douglas C. Giancoli, *Physik*, Pearson-Studium Verlag
- D. Meschede : *Gerthsen Physik*
- M. Alonso, E. J. Finn : *Physik*, Addison-Wesley Publishing Co.
- Bergmann-Schäfer, *Physik 1 & 2*, Verlag Walter de Gruyter
- Halliday, Resnick, Walker: *Physik*, Wiley VCH
- H. Stöcker, *Taschenbuch der Physik*, Verlag Harri Deutsch
- Bronstein - Semendjajew, *Taschenbuch der Mathematik*, Verlag Harri Deutsch
- S. Großmann, *Mathematischer Einführungskurs für die Physik*, Teubner Studienbücher

.... **sowie jedes andere einführende Buch**

.....***übrigens:*** „Ein Buch ist kein Buch“

Inhalt der mathematischen Ergänzung zur Physik B2:

- **Wiederholung Divergenz, Gauß-Integralsatz**
- Rotation, Stokes-Integralsatz, Anwendungen
- Ladungen in elektrischen und magnetischen Feldern
- Kondensator und Induktivität im Stromkreis
- Berechnung von Wechselstromnetzwerken
- Zusammenfassung der Maxwell-Gleichungen
- Die Kontinuitätsgleichung
- Berechnungen zur Wellenoptik
- Zusammenfassung der klassischen Physik
- Mathematische Wiederholung zu Wellen
- Die Schrödinger-Gleichung
- Die Mathematik des Wasserstoff-Atoms
- Der Aufbau des Periodensystems

Wiederholung / Divergenz eines Vektorfeldes

Die ***Divergenz (Quellstärke) eines Vektorfeldes*** ist das formale Skalarprodukt des Nabla-Operators mit dem Vektorfeld. Aus zwei Vektoren entsteht also ein Skalar, der Ausdruck über die ***„Quellen“ des Feldes*** geben.

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F}(\vec{r}) = div\vec{F}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_x(x,y,z) \\ F_y(x,y,z) \\ F_z(x,y,z) \end{pmatrix} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

Beispiel 1:

$$\vec{F}(\vec{r}) = F_0\vec{r} = \begin{pmatrix} F_x(x,y,z) \\ F_y(x,y,z) \\ F_z(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{F}(\vec{r}) = F_0\left(1+1+1\right) = 3F_0$$

Beispiel 2:

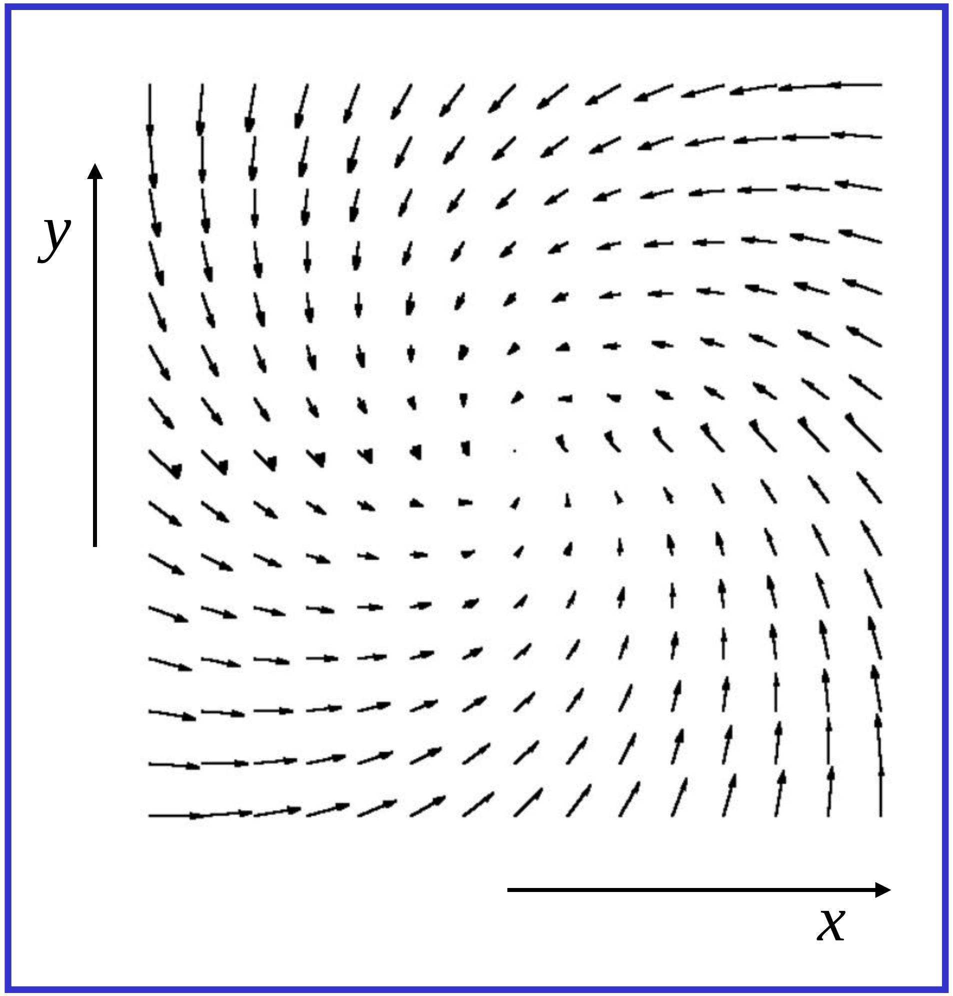
Gegeben sei

$$\vec{F}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} -x-y \\ x-y \\ 0 \end{pmatrix}$$

Für die Divergenz erhalten wir

$$\vec{\nabla}\vec{F}(\vec{r}) = div\vec{F}(\vec{r})$$

$$= \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = -2$$



Dieses Feld hat Senken, Feldlinien enden hier.

Beispiel 3:

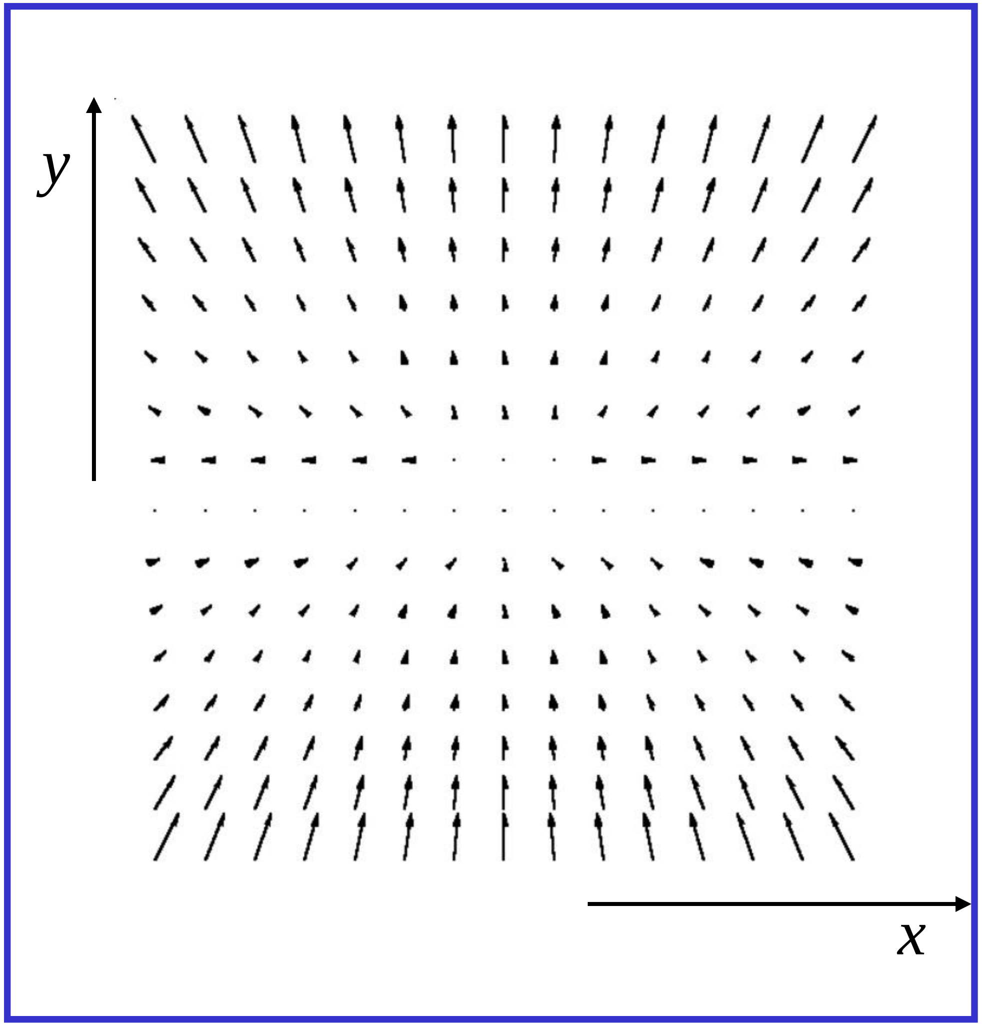
Gegeben sei

$$\vec{F}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} xy \\ 2y^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Für die Divergenz erhalten wir

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

$$= y + 4y + 0 = 5y$$

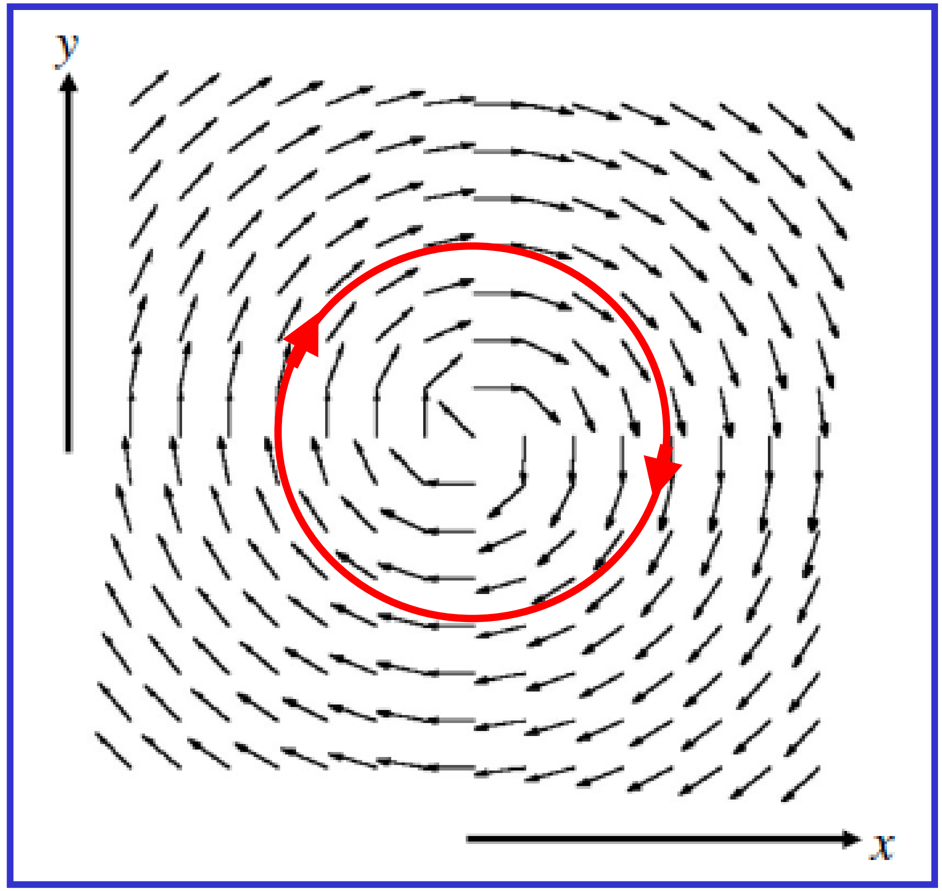


Senken für y < 0, Quellen für y > 0

Beispiel 4:

Gegeben sei unser schon bekanntes ***Wirbelfeld***

$$\vec{F}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \dfrac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$



Für die Divergenz erhalten wir

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F}(\vec{r}) = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

$$= \frac{-xy}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}} + \frac{xy}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}} + 0 = 0$$

Wirbelfelder haben geschlossene Feldlinien, sie haben daher kein Anfang und kein Ende, also keine Quellen und Senken.

Gaußscher Integralsatz der Vektoranalysis

Carl Friedrich Gauß (1777 – 1855)

Der ***Gaußsche Integralsatz*** verknüpft den Fluss eines Vektorfeldes durch eine geschlossene Oberfläche *a* mit einem entsprechenden Integral der Divergenz des Vektorfeldes über das Volumen *V(a)*. Es verknüpft damit lokale Eigenschaften des Vektorfeldes mit integralen Eigenschaften.

Gegeben sei folgendes Vektorfeld

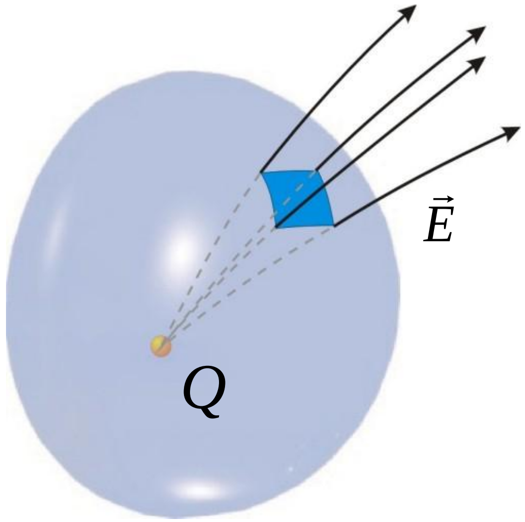
$$\vec{A}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} A_x(x,y,z) \\ A_y(x,y,z) \\ A_z(x,y,z) \end{pmatrix}$$

dann gilt (ausführlicher in den Mathematik-Vorlesungen)

$$\oiint_a \vec{A}(\vec{r})\,d\vec{a} = \iiint_{V(a)} \vec{\nabla} \cdot \vec{A}\,dV = \iiint_{V(a)} div\vec{A}\,dV$$

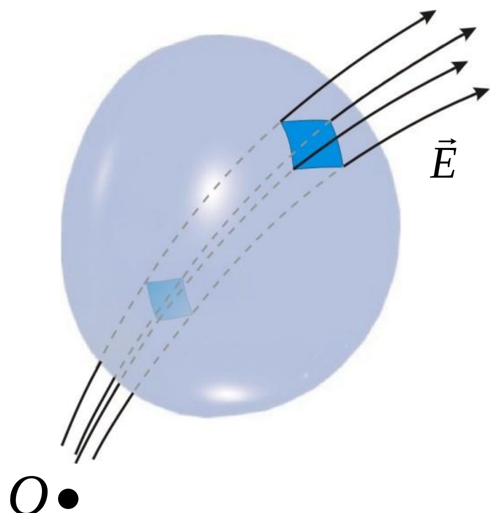
noch mal im Bild am ***Beispiel der Elektrostatik*** (elektrische Felder von Ladungen):

$$\oiint_a \vec{E}\cdot d\vec{a} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

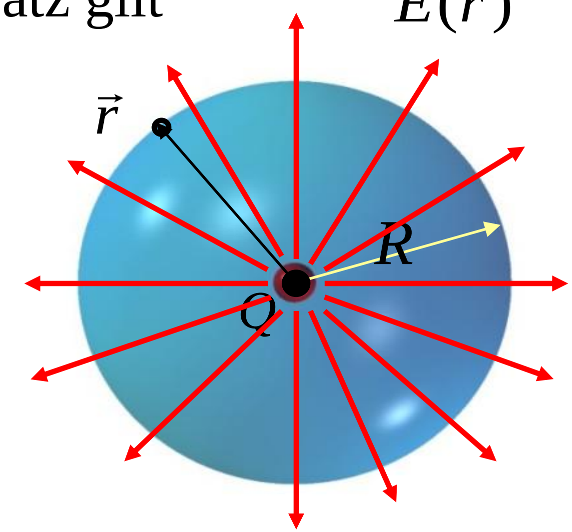


bzw.:

$$\oiint_a \vec{E}\cdot d\vec{a} = 0$$



Wir betrachten eine einzelne, jetzt allerdings räumlich ausgedehnte Ladung Q in der Mitte einer Kugel mit Radius R und wollen zeigen, dass der Gauß-Integralsatz gilt



Die Ladung Q selbst sei homogen und über ein Kugelvolumen mit Radius R_Q verteilt.

Auch den Fluss durch die Kugeloberfläche (Kugel mit Radius R) kennen wir schon:

$$\oiint_a \vec{E}\cdot d\vec{a} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Wie sehen die Felder aus?

außerhalb der Ladungskugel:

$$r \geq R_Q$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\vec{e}_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^3}\vec{r}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow E(r) \propto \frac{1}{r^2}$$

innerhalb der Ladungskugel:

$$r \leq R_Q$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R_Q^3}\vec{r}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R_Q^3}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow E(r) \propto r$$

Wollen jetzt die Divergenz des elektrischen Feldes berechnen:

$$div\vec{E}(\vec{r}) = ?$$

innerhalb der Ladungskugel:

partielle Ableitung nach x:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_Q^3}\frac{\partial}{\partial x}x$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_Q^3}$$

$$\rightarrow div\vec{E} = \vec{\nabla}\cdot\vec{E}$$

$$= \frac{\partial E_\mathrm{x}}{\partial x} + \frac{\partial E_\mathrm{y}}{\partial y} + \frac{\partial E_\mathrm{z}}{\partial z} = \frac{3Q}{4\pi\varepsilon_0 R_Q^3}$$

Da die Ladung Q homogen verteilt ist, ist die Ladungsdichte ρ konstant mit

$$Q = \rho\cdot\frac{4}{3}\pi R_Q^3$$

Daraus folgt die einfache Beziehung:

$$r \le R_Q$$

$$div\vec{E} = \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

außerhalb der Ladungskugel:

partielle Ableitung nach x:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial x}x\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2} - \frac{3}{2}x\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-5/2}\cdot 2x\right)$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r^3} - 3\frac{1}{r^5}x^2\right)$$

$$\rightarrow div\vec{E} = \frac{\partial E_\mathrm{x}}{\partial x} + \frac{\partial E_\mathrm{y}}{\partial y} + \frac{\partial E_\mathrm{z}}{\partial z}$$

$$div\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r^3} - 3\frac{1}{r^5}x^2 + \frac{1}{r^3} - 3\frac{1}{r^5}y^2 + \frac{1}{r^3} - 3\frac{1}{r^5}z^2\right)$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^5}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^5}r^2\right) = 0$$

Wir fassen zusammen:

$$r \le R_Q \rightarrow div\vec{E} = \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$r \ge R_Q \rightarrow div\vec{E} = \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0$$

In Worten: Nur dort, wo die Ladungsdichte ρ nicht verschwindet, haben wir Quellen des elektrischen Feldes.

Zurück zum Gauss-Integralsatz. Da wir die Divergenz kennen, können wir wie folgt rechnen:

$$\oint\!\!\oint_a \vec{A}(\vec{r})d\vec{a} = \iiint_{V(a)} \vec{\nabla}\cdot\vec{A}dV = \iiint_{V(a)} div\vec{A}dV$$

unser Beispiel

$$\oint\!\!\oint_{\substack{Kugel-\\oberfläche}} \vec{E}(\vec{r})d\vec{a} = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \iiint_{\substack{Kugel\\R}} \vec{\nabla}\cdot\vec{E}dV =$$

$$= \iiint_{\substack{Kugel\\R}} div\vec{E}dV$$

$divE$ ist aber außerhalb R_Q null, so dass wir wie folgt das Integral berechnen können:

$$\iiint_{\substack{Kugel\\R}} div\vec{E}dV = \iiint_{\substack{Kugel\\R_Q}} \frac{\rho}{\varepsilon_0}dV = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\frac{4\pi}{3}R_Q^3$$

$$= \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Was zu zeigen war ! q.e.d.

Das kann natürlich auch allgemein gezeigt bzw. bewiesen werden:

$$\oiint_a \vec{E}(\vec{r})d\vec{a} = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \iiint_{V(a)} \vec{\nabla}\cdot\vec{E}dV = \iiint_{V(a)} div\vec{E}dV$$

Nun ist aber:

$$\frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_{V(a)} \rho(\vec{r})dV$$

und damit folgt:

$$\iiint_{V(a)} \vec{\nabla}\cdot\vec{E}dV = \iiint_{V(a)} div\vec{E}(\vec{r})dV = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_{V(a)} \rho(\vec{r})dV$$

Da dies für jedes beliebige Integrationsvolumen gilt, folgt der allgemeine Zusammenhang

$$div\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$$

den wir schon im Spezialfall erhalten haben.

$$div\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$$

Dies ist eine von zwei lokalen ***Maxwellgleichung der Elektrostatik***

Diese Aussage gilt lokal an jedem Ort. Dies ist eine sehr mächtige Aussage!

Die Divergenz (Quellstärke) des elektrostatischen Feldes ist also an jedem Ort durch die dort vorhandene Ladungsdichte ρ gegeben.

übrigens: die andere lautet:

$$rot\vec{E}(\vec{r}) = 0$$

$$\oiint_a \vec{E}(\vec{r})d\vec{a} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Dies ist die dazu gehörige integrale ***Maxwellgleichung der Elektrostatik***

Diese Aussage gibt natürlich nur ein integrales Bild des Sachverhalts und deshalb weit weniger mächtig!

Grundlage konkreter Berechnungen sind daher immer die differentiellen Gleichungen. Man löst sie mit Integrationsmethoden (Randbedingungen !!) oder numerisch.

übrigens: die andere lautet:

$$\oint_C \vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{s} = 0$$

Inhalt der mathematischen Ergänzung zur Physik B2:

- Wiederholung Divergenz, Gauß-Integralsatz
- **Rotation, Stokes-Integralsatz, Anwendungen**
- Ladungen in elektrischen und magnetischen Feldern
- Kondensator und Induktivität im Stromkreis
- Berechnung von Wechselstromnetzwerken
- Zusammenfassung der Maxwell-Gleichungen
- Die Kontinuitätsgleichung
- Berechnungen zur Wellenoptik
- Zusammenfassung der klassischen Physik
- Mathematische Wiederholung zu Wellen
- Die Schrödinger-Gleichung
- Die Mathematik des Wasserstoff-Atoms
- Der Aufbau des Periodensystems

Rotation eines Vektorfeldes

Da sowohl ein Vektorfeld $\vec{F}(\vec{r})$, als auch der Nabla-Operator Vektoren sind, entsteht durch die Verknüpfung über das formale Vektorprodukt ein neuer Vektor, der ***Vektor der Rotation (Wirbelstärke)*** von $\vec{F}(\vec{r})$.

$$\vec{\nabla}\times\vec{F}(\vec{r}) = rot\vec{F}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_x(x,y,z) \\ F_y(x,y,z) \\ F_z(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

Beispiel 1: einfaches Beispiel einer Zentralkraft

$$\vec{F}(\vec{r}) = F_0 \cdot \vec{r}$$

$$\vec{F}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} F_0 \cdot x \\ F_0 \cdot y \\ F_0 \cdot z \end{pmatrix} \rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{F}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

Beispiel 2:

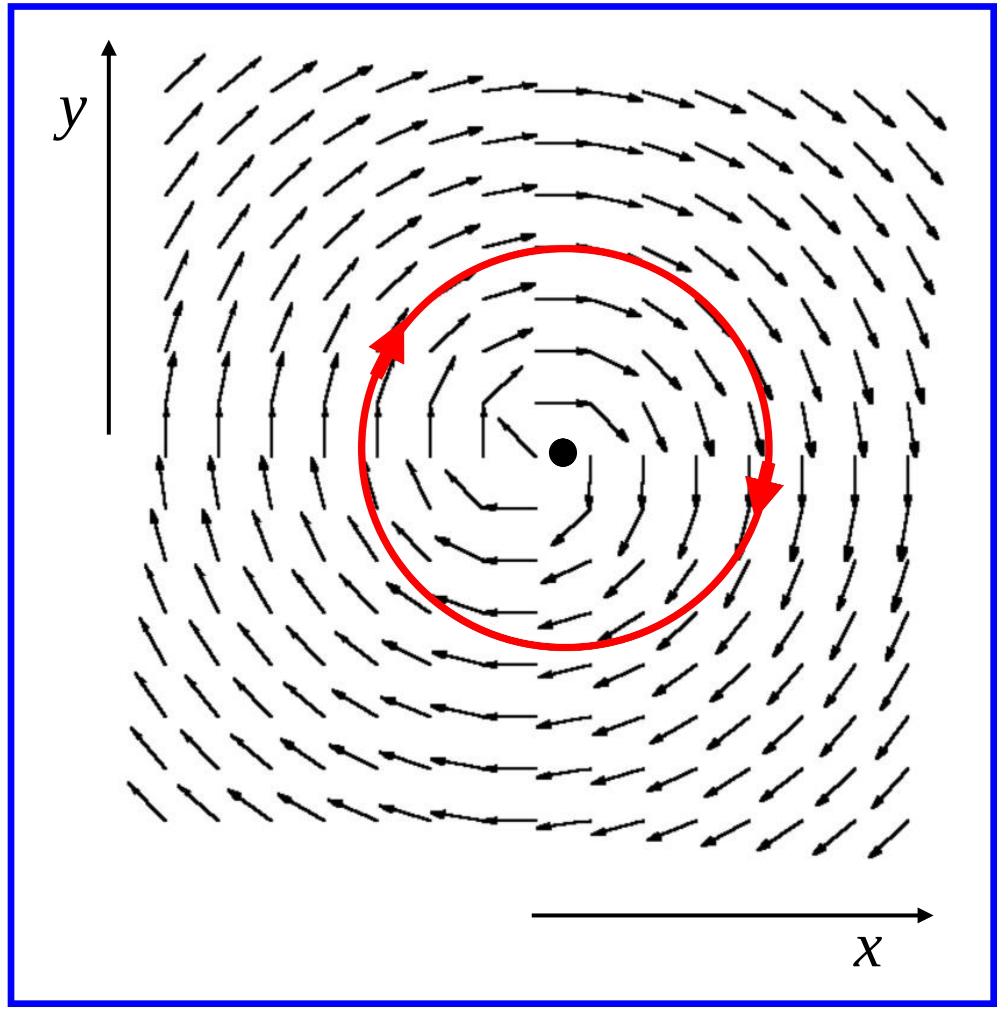
$$F_z = 0$$

$$F_x \neq f(z)$$

$$F_y \neq f(z)$$

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \dfrac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{pmatrix} \cancel{\dfrac{\partial F_z}{\partial y}} - \cancel{\dfrac{\partial F_y}{\partial z}} \\ \cancel{\dfrac{\partial F_x}{\partial z}} - \cancel{\dfrac{\partial F_z}{\partial x}} \\ \dfrac{\partial F_y}{\partial x} - \dfrac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{\partial F_y}{\partial x} - \dfrac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$



Wirbelfeld $\vec{F}(x, y, z)$

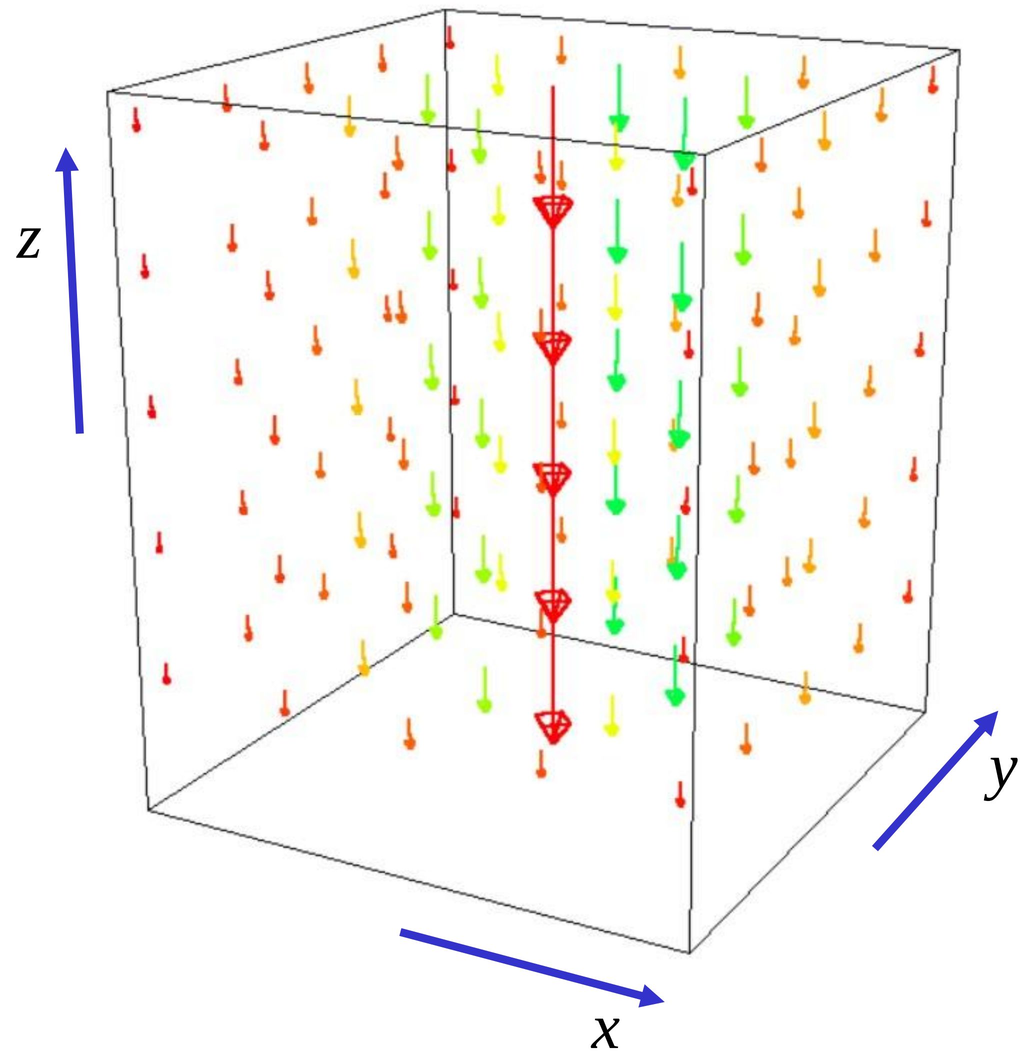
Wir müssen also nur zwei partielle Ableitungen berechnet werden:

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} = -\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x^2}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y^2}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}$$

Damit erhält man nach Zusammenfassung der Terme die Rotation des Vektorfeldes:

$$\vec{\nabla}\times\vec{F}(\vec{r}) = rot\vec{F}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix}$$



Vektorfeld $\vec{\nabla}\times\vec{F}(\vec{r})$