
Inhalt der Vorlesung Physik A2 / B2

3. Wärmelehre

Druck und Temperatur: Das ideale Gas

Wärmemenge, spezifische Wärme

Die Hauptsätze der Wärmelehre

4. Elektrizitätslehre, Elektrodynamik

Die Ladung und elektrostatische Felder

- SEMESTERENDE -

Elektrischer Strom

Magnetische Felder und Magnetostatik

Zeitlich veränderliche Felder, Elektrodynamik, Maxwellgleichungen

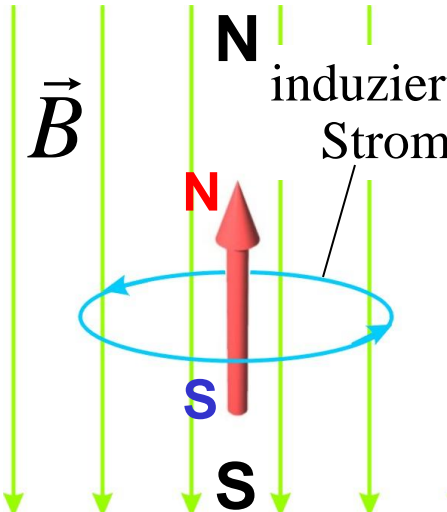
Wechselstromnetzwerke

Elektrodynamik in Materie

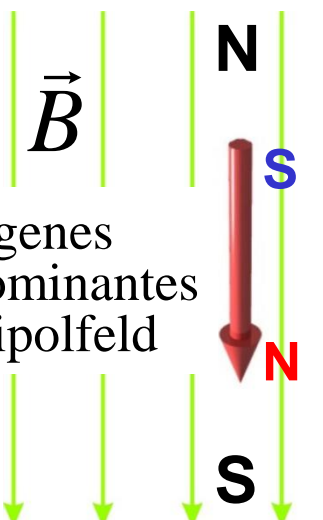
Elektromagnetische Wellen und Strahlung

Relativität der Felder – Relativitätstheorie

Anschauliche Deutung

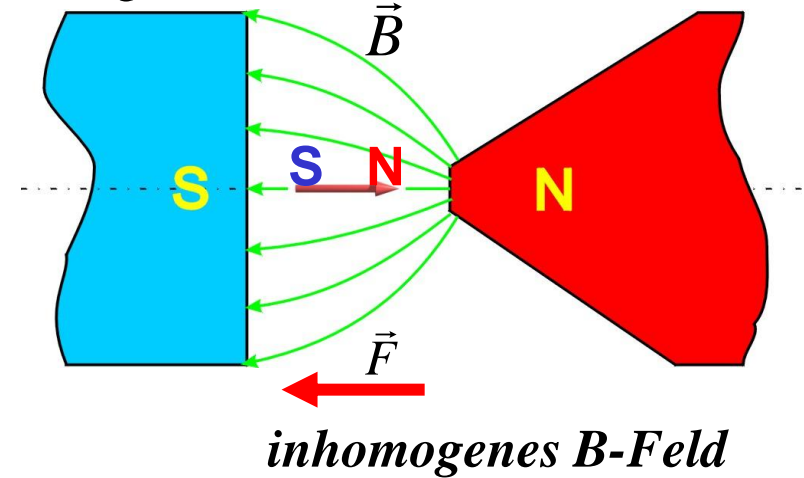


Diamagnet:
Stoff besitzt ohne B-Feld keine atomaren magnetische Dipole. B-Feld erzeugt (induziert) dem Feld entgegengerichtete Dipole

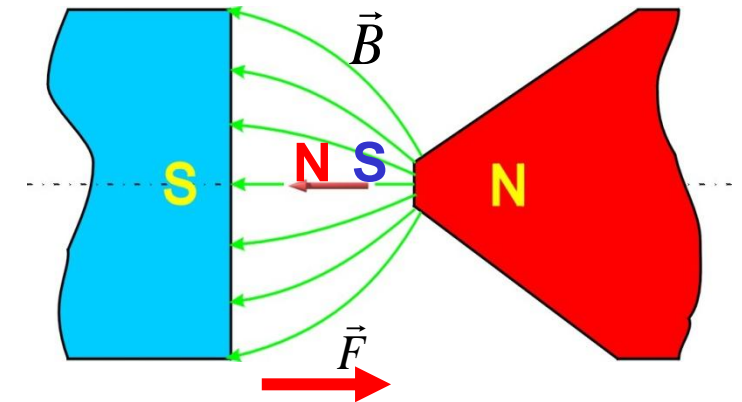


Paramagnet:
Stoff besitzt ohne B-Feld bereits atomare magnetische Dipole, die sich im B-Feld ausrichten.

Diamagnetische Stoffe werden im inhomogenen Feld in den Bereich kleinerer Feldstärke gedrängt

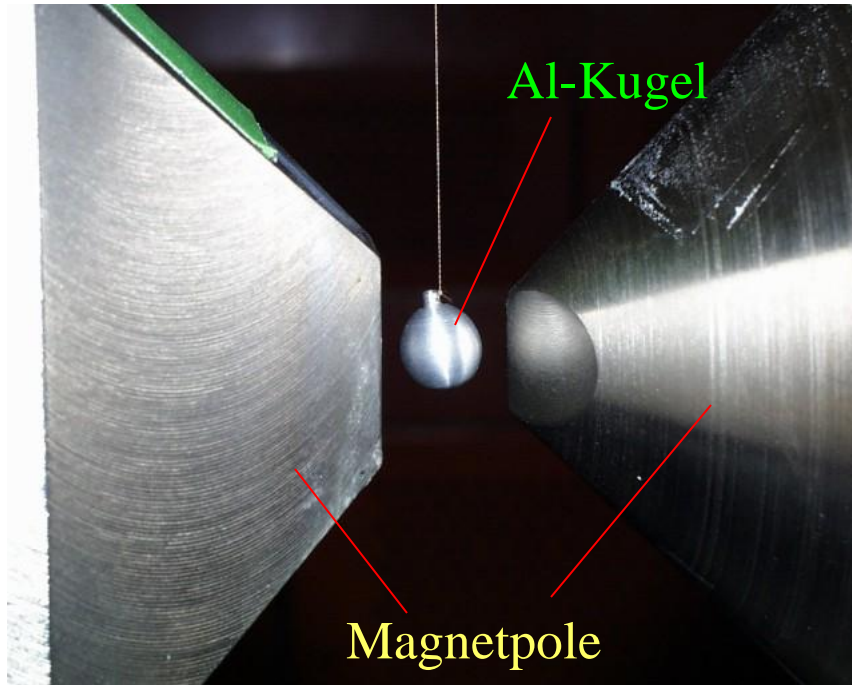


Paramagnetische Stoffe werden in den Bereich höherer Feldstärke gezogen.

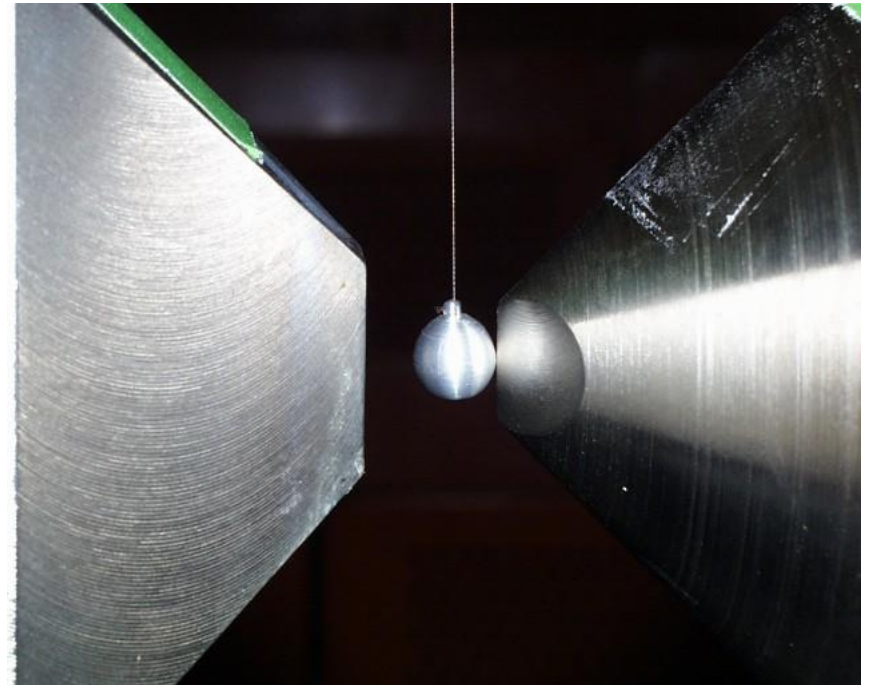


Experiment: **Dia- und Paramagnet im inhomogenen Feld**

Magnetfeld aus. Die paramagnetische Al-Kugel hängt frei am Faden



Magnetfeld ein. Die Kugel wird in den Bereich dichter Feldlinien gezogen.



Bei einem diamagnetischen Stoff (z.B. Glaskugel) wirkt die Kraft in entgegengesetzter Richtung, die Kugel wird aus dem Bereich dichter Feldlinien verdrängt.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1 H Wasserstoff 1,0079 1		3 Li Lithium 6,941 2/1	4 Be Beryllium 9,0122 2/2									5 B Bor 10,811 2/3	6 C Kohlenstoff 12,011 2/4	7 N Stickstoff 14,007 2/5	8 O Sauerstoff 15,999 2/6	9 F Fluor 18,998 2/7	10 Ne Neon 20,180 2/8
11 Na Natrium 22,990 2/8/1	12 Mg Magnesium 24,305 2/8/2											13 Al Aluminium 26,982 2/8/3	14 Si Silicium 28,086 2/8/4	15 P Phosphor 30,974 2/8/5	16 S Schwefel 32,065 2/8/6	17 Cl Chlor 35,453 2/8/7	18 Ar Argon 39,948 2/8/8
19 K Kalium 39,098 2/8/8/1	20 Ca Calcium 40,078 2/8/8/2	21 Sc Scandium 44,956 2/8/9/2	22 Ti Titan 47,867 2/8/10/2	23 V Vanadium 50,942 2/8/11/2	24 Cr Chrom 51,996 2/8/13/1	25 Mn Mangan 54,938 2/8/13/2	26 Fe Eisen 55,845 2/8/14/2	27 Co Cobalt 58,933 2/8/15/2	28 Ni Nickel 58,693 2/8/16/2	29 Cu Kupfer 63,546 2/8/18/1	30 Zn Zink 65,38 2/8/18/2	31 Ga Gallium 69,723 2/8/18/3	32 Ge Germanium 72,64 2/8/18/4	33 As Arsen 74,922 2/8/18/5	34 Se Selen 78,96 2/8/18/6	35 Br Brom 79,904 2/8/18/7	36 Kr Krypton 83,798 2/8/18/8
37 Rb Rubidium 85,468 2/8/18/8/1	38 Sr Strontium 87,62 2/8/18/8/2	39 Y Yttrium 88,906 2/8/18/9/2	40 Zr Zirkonium 91,224 2/8/18/10/2	41 Nb Niob 92,906 2/8/18/12/1	42 Mo Molybdän 95,96 2/8/18/13/1	43 Tc Technetium 98,91 2/8/18/13/2	44 Ru Ruthenium 101,07 2/8/18/15/1	45 Rh Rhodium 102,91 2/8/18/16/1	46 Pd Palladium 106,42 2/8/18/18	47 Ag Silber 107,87 2/8/18/18/1	48 Cd Cadmium 112,41 2/8/18/18/2	49 In Indium 114,82 2/8/18/18/3	50 Sn Zinn 118,71 2/8/18/18/4	51 Sb Antimon 121,76 2/8/18/18/5	52 Te Tellur 127,60 2/8/18/18/6	53 I Iod 126,90 2/8/18/18/7	54 Xe Xenon 131,29 2/8/18/18/8
55 Cs Cäsium 132,91 2/8/18/18/8/1	56 Ba Barium 137,33 2/8/18/18/8/2	57-71 siehe unten	72 Hf Hafnium 178,49 2/8/18/32/10/2	73 Ta Tantal 180,95 2/8/18/32/11/2	74 W Wolfram 183,84 2/8/18/32/12/2	75 Re Rhenium 186,21 2/8/18/32/13/2	76 Os Osmium 190,23 2/8/18/32/14/2	77 Ir Iridium 192,22 2/8/18/32/15/2	78 Pt Platin 195,08 2/8/18/32/17/1	79 Au Gold 196,97 2/8/18/32/18/1	80 Hg Quecksilber 200,59 2/8/18/32/18/2	81 Tl Thallium 204,38 2/8/18/32/18/3	82 Pb Blei 207,2 2/8/18/32/18/4	83 Bi Bismut 208,98 2/8/18/32/18/5	84 Po Polonium 209 2/8/18/32/18/6	85 At Astat (210) 2/8/18/32/18/7	86 Rn Radon (222) 2/8/18/32/18/8
87 Fr Francium (223) 2/8/18/32/18/8/1	88 Ra Radium 226,03 2/8/18/32/18/8/2	89-103 siehe unten	104 Rf Rutherfordium (261) 2/8/18/32/32/10/2	105 Db Dubnium (262) 2/8/18/32/32/11/2	106 Sg Seaborgium (263) 2/8/18/32/32/12/2	107 Bh Bohrium (262) 2/8/18/32/32/13/2	108 Hs Hassium (265) 2/8/18/32/32/14/2	109 Mt Meitnerium (266) 2/8/18/32/32/15/2	110 Ds Darmstadtium (269) 2/8/18/32/32/17/1	111 Rg Röntgenium (272) 2/8/18/32/32/18/1	112 Cn Copernicium (277) 2/8/18/32/32/18/2	113 Uut Ununtrium (287) 2/8/18/32/32/18/3	114 Uuq Ununquadium (289) 2/8/18/32/32/18/4	115 Uup Ununpentium (288) 2/8/18/32/32/18/5	116 Uuh Ununhexium (289) 2/8/18/32/32/18/6	117 Uus Ununseptium (293) 2/8/18/32/32/18/7	118 Uuo Ununoctium (294) 2/8/18/32/32/18/8

Legende	
Ordnungszahl	Symbol
Name	Wasserstoff
Atomgewicht	1,0079
Elektronenkonfiguration	1
Serie	1

Gruppe

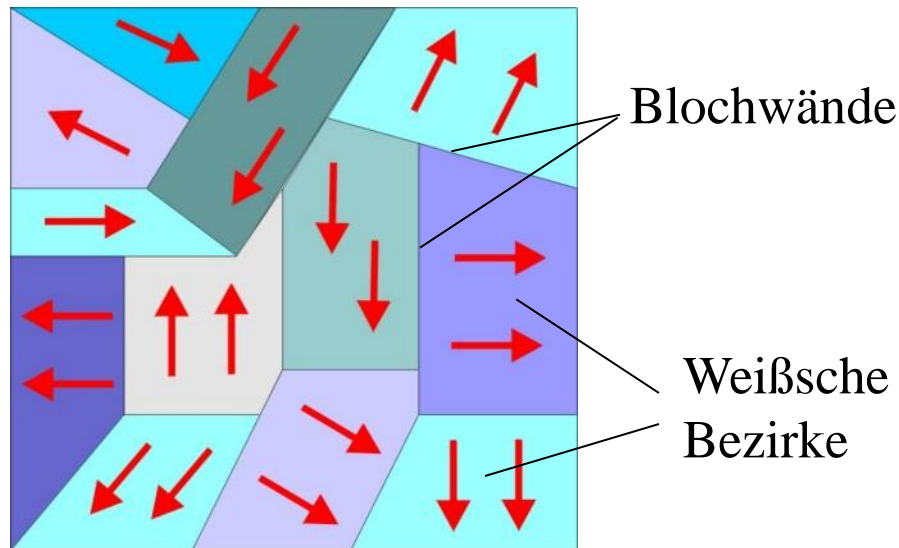
$\mu_r \gg 1$

Ferromagnetische Stoffe

Lanthanoide	57 La Lanthan 138,91 2/8/18/18/9/2	58 Ce Cer 140,12 2/8/18/19/9/2	59 Pr Praseodym 140,91 2/8/18/21/9/2	60 Nd Neodym 144,24 2/8/18/22/9/2	61 Pm Promethium 146,90 2/8/18/23/9/2	62 Sm Samarium 150,36 2/8/18/24/9/2	63 Eu Europium 151,96 2/8/18/25/9/2	64 Gd Gadolinium 157,25 2/8/18/25/9/2	65 Tb Terbium 158,93 2/8/18/27/9/2	66 Dy Dysprosium 162,50 2/8/18/28/9/2	67 Ho Holmium 164,93 2/8/18/29/9/2	68 Er Erbium 167,26 2/8/18/30/9/2	69 Tm Thulium 168,93 2/8/18/31/9/2	70 Yb Ytterbium 173,05 2/8/18/32/9/2	71 Lu Lutetium 174,97 2/8/18/32/9/2
Actinoide	89 Ac Actinium (227) 2/8/18/32/18/9/2	90 Th Thorium 232,04 2/8/18/32/18/10/2	91 Pa Protaktinium 231,04 2/8/18/32/20/9/2	92 U Uran 238,03 2/8/18/32/21/9/2	93 Np Neptunium 237,05 2/8/18/32/22/9/2	94 Pu Plutonium (244,10) 2/8/18/32/24/8/2	95 Am Americium (243,10) 2/8/18/32/25/8/2	96 Cm Curium (247,10) 2/8/18/32/25/10/2	97 Bk Berkelium (247,10) 2/8/18/32/25/10/2	98 Cf Californium (251,10) 2/8/18/32/28/8/2	99 Es Einsteinium (254,10) 2/8/18/32/29/8/2	100 Fm Fermium (257,10) 2/8/18/32/30/8/2	101 Md Mendelevium (258) 2/8/18/32/31/8/2	102 No Nobelium (259) 2/8/18/32/32/8/2	103 Lr Lawrencium (260) 2/8/18/32/32/9/2

Ferromagnetika:

Jedes ferromagnetische Material besteht aus Bereichen mit permanenten magnetischen Dipolen, die man als „*Weißsche Bezirke*“ bezeichnet. Sie sind durch „*Blochsche Wände*“ getrennt.

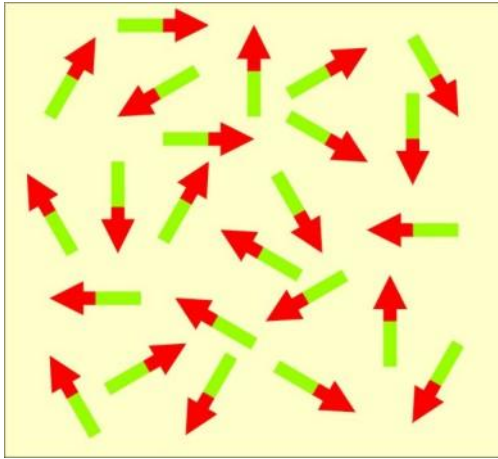


Innerhalb eines Weißschen Bezirks, sind alle atomaren Dipole durch Wechselwirkung miteinander in einer Vorzugsrichtung ausgerichtet. Durch ein äußeres Magnetfeld können die Weißschen Bezirke in eine Vorzugsrichtung polarisiert werden. Das geht solange, bis alle Bezirke in Richtung des erregten Feldes zeigen. Dann ist die „Sättigung“ erreicht.

Hinweis:

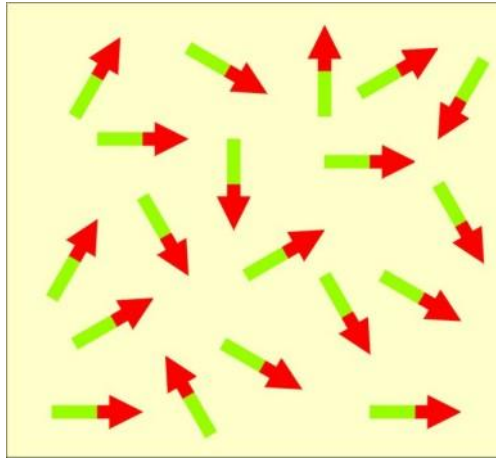
Diese Sättigung wird etwa erreicht bei $B = 1,5 - 2 \text{ T}$

$$B = 0$$



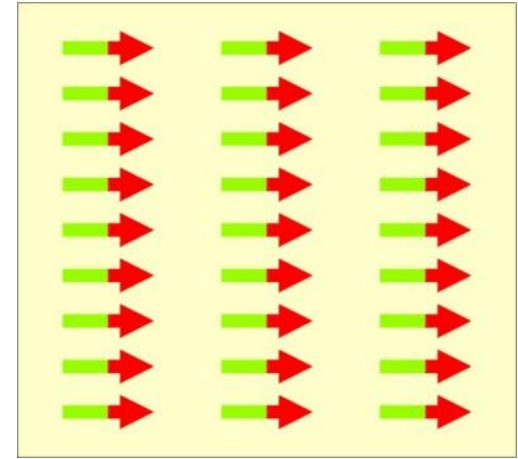
Alle Richtungen der Weißschen Bezirke sind mit gleicher Wahrscheinlichkeit vertreten. Der ferromagnetische Körper hat nach außen kein Magnetfeld.

$$0 < B < B_{\text{Sättigung}}$$



Durch das äußere Magnetfeld werden die Weißschen Bezirke teilweise in Richtung dieses Feldes orientiert und zwar umso stärker, je stärker das Feld ist.

$$B = B_{\text{Sättigung}}$$



Bei extrem starkem Feld sind alle Bezirke ausgerichtet. Damit ist die Sättigung erreicht.

Ferromagnetismus

$$\chi_m = f(H) = f(j_{\text{wahr}})$$

$$\mu_r = f(H) = f(j_{\text{wahr}})$$

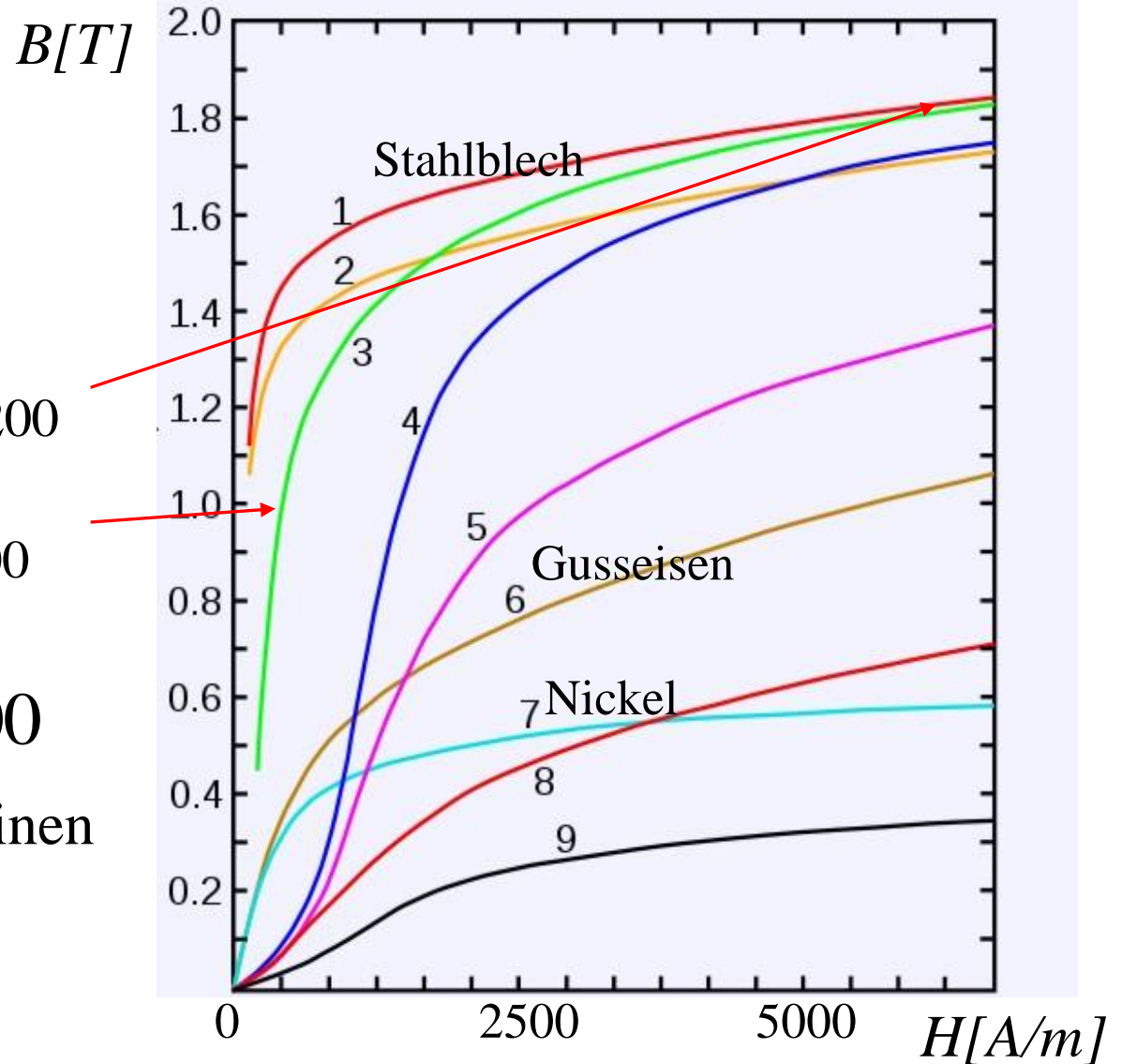
$$\mu = \mu_0 \mu_r$$

$$B = \mu_0 \mu_r H \quad \langle \mu_r \rangle = 200$$

$$\langle \mu_r \rangle = 2000$$

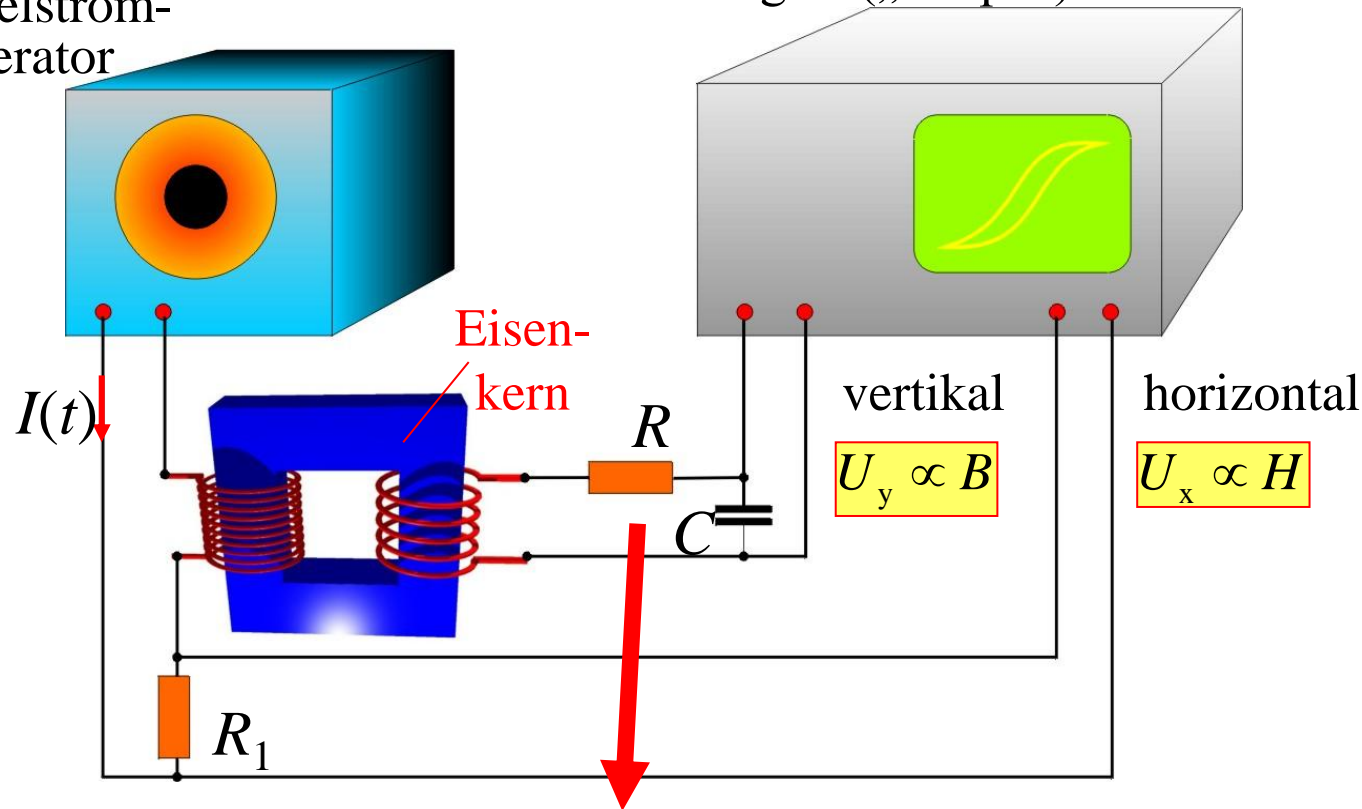
μ_r bis 140.000

μ -Metall bei kleinen Feldern !!!!!



Experiment:**Versuchsaufbau zur Messung der Erregungskurve $B = B(H)$** Wechselstrom-
generator

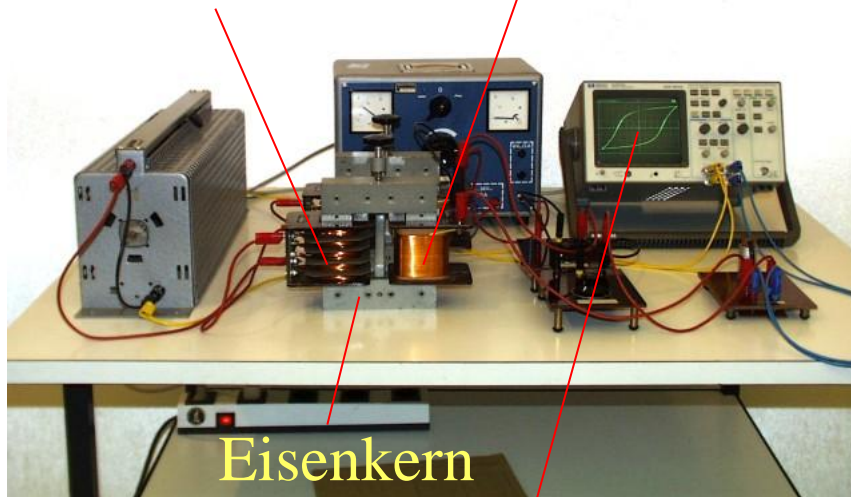
Oszillograf („Scope“)



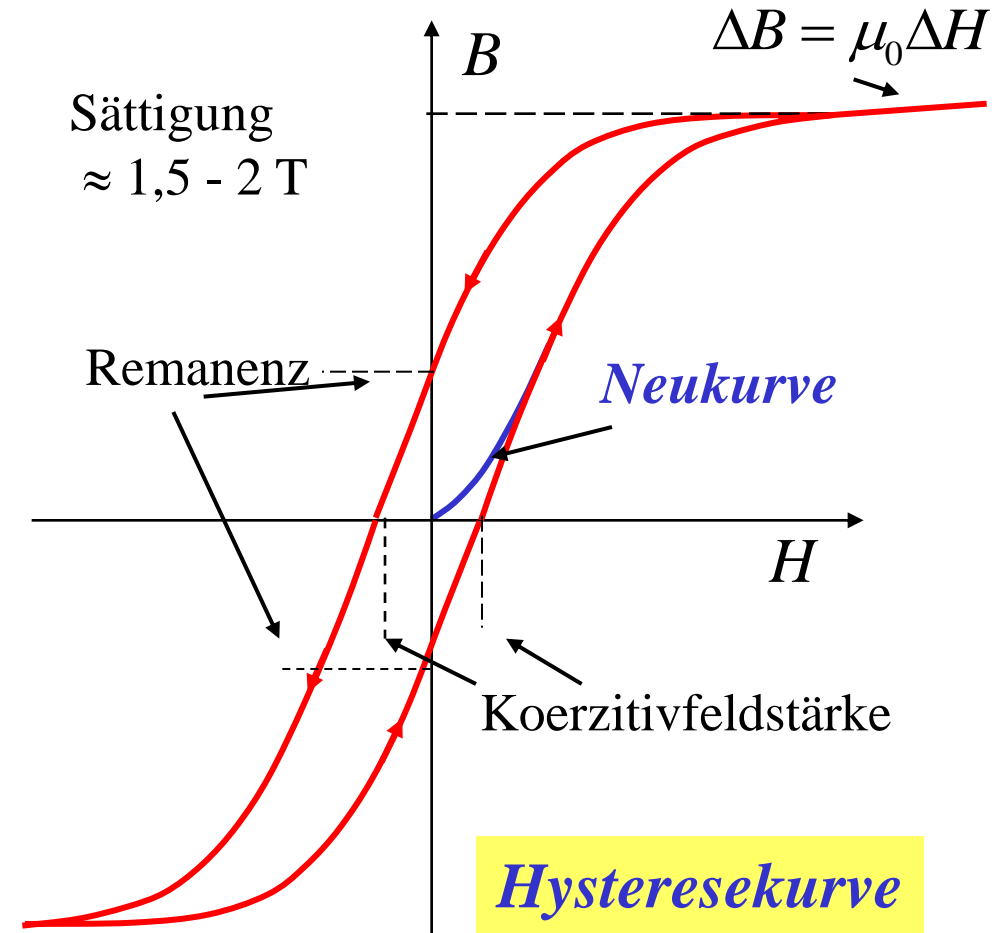
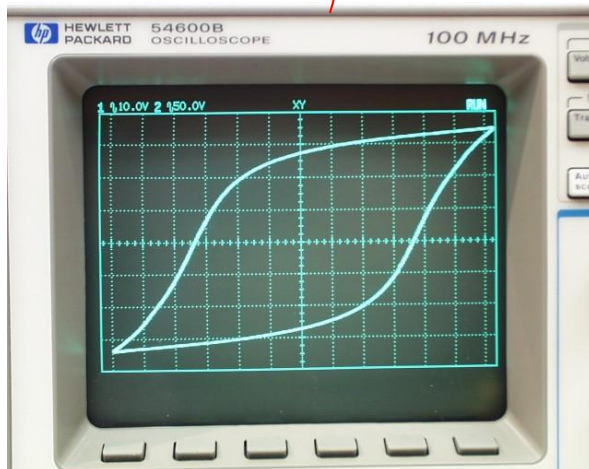
RC-Integrator: Spannung an der Kapazität entspricht $B(t)$ $B(t) = \int \dot{B}(t) dt \sim \int U_{ind} dt$

Experiment: *Hysteresekurve*

Erregungsspule Meßspule



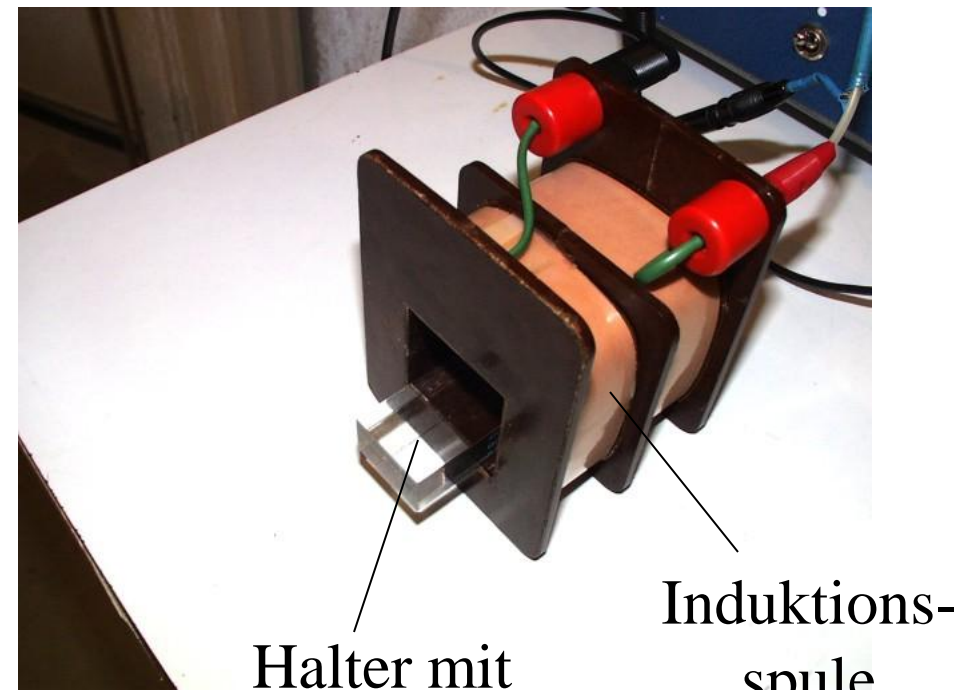
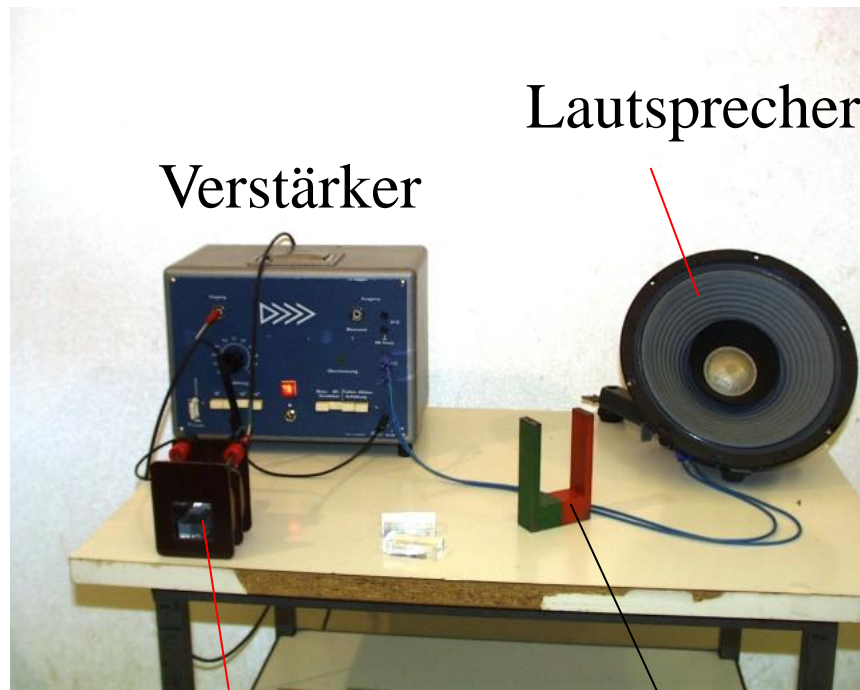
Eisenkern



Bei Eisen ist der Zusammenhang von Feldstärke H und Flußdichte B stark nichtlinear und zeigt eine **Hysteresis**.

Experiment: Der Barkhausen-Effekt

Ursache für das Hystereseverhalten ist das verzögerte Umklappen der Weißschen Bezirke, die wie kleine Dipolmagnete wirken. Das Umklappen kann man akustisch hörbar machen (Barkhausen-Effekt).

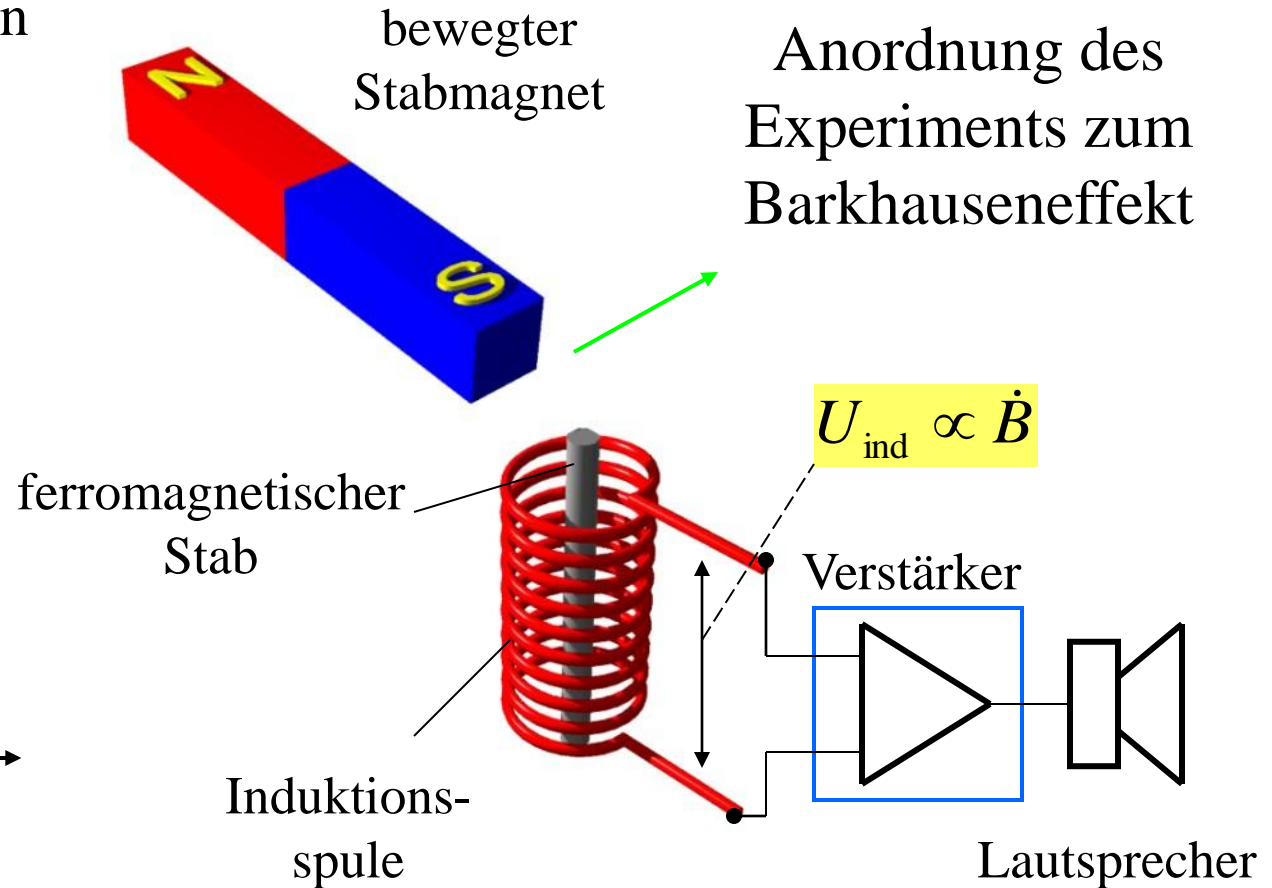
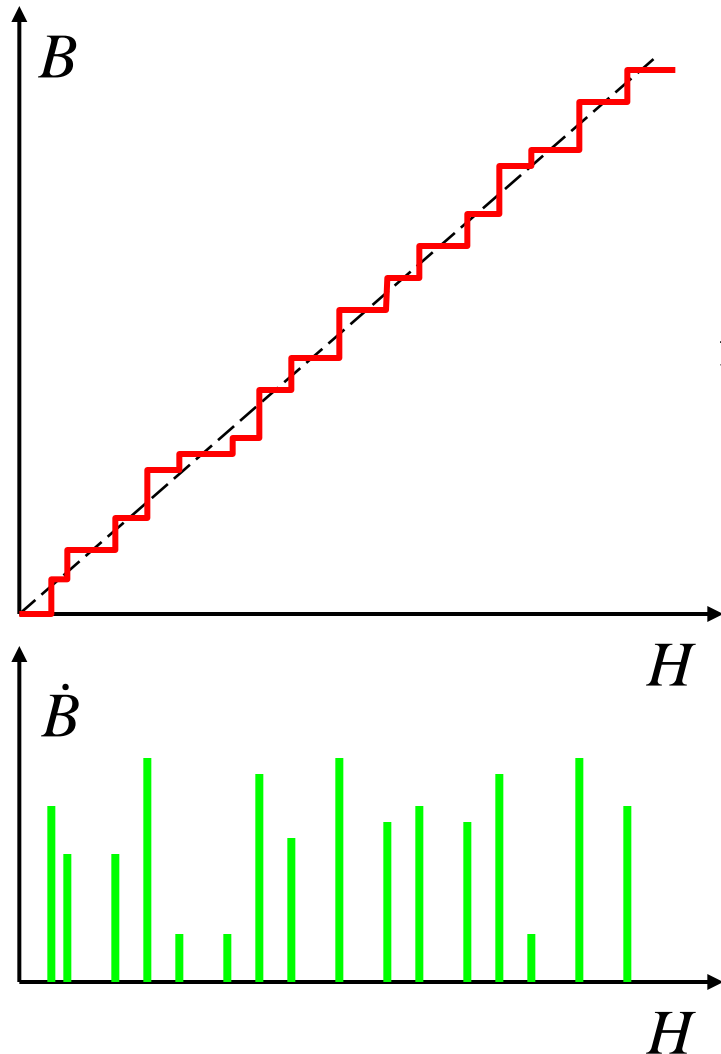


Induktionsspule

Magnet

Halter mit
EisendrahtInduktions-
spule

Das Umklappen der Weißschen Bezirke erfolgt sprunghaft:



Beim Umklappen gibt es kleine Sprünge in der Feldstärke, die in der Spule Spannungspulse induzieren.

Übersicht über die Maxwellgleichungen in Materie

Integrale Form



Differentielle Form

$$(1) \quad \oiint_{A(V)} \vec{D} \cdot d\vec{A} = \iiint_{V(A)} \rho dV = Q$$

$$\Leftrightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \text{div} \vec{D} = \rho$$

$$(2) \quad \oiint_{A(V)} \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \text{div} \vec{B} = 0$$

$$(3) \quad \oint_{S(A)} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_{A(S)} \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

$$\Leftrightarrow \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$(4) \quad \oint_{S(A)} \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint_{A(S)} \left(\vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} \right) \cdot d\vec{A} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{D}$$

Dazu kommen die **Materialgleichungen**:

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad \vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$$

Q, ρ, j sind die wahren Ladungen und Ströme

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E} \quad \vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$$

Bemerkungen zu den Feldern H , B und D , E

- Die Felder E und B sind über die Kräfte auf Ladungen definiert.
- Die Felder H und D dienen der Berechnung von Feldern auch komplizierter Materialverteilungen
- In homogener und isotroper Materie gelten die einfachen Materialgleichungen

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$$

- An Grenzflächen verhalten sich jedoch die Felder H und B sowie D und E vollständig unterschiedlich. Man unterscheidet dabei die Feldkomponenten parallel und senkrecht zur Grenzfläche zweier Materialien.
- Wer hier mehr wissen will, schaue in die dann etwas anspruchsvollere Literatur.

Die im elektrischen und magnetischen Feld gespeicherte Energie

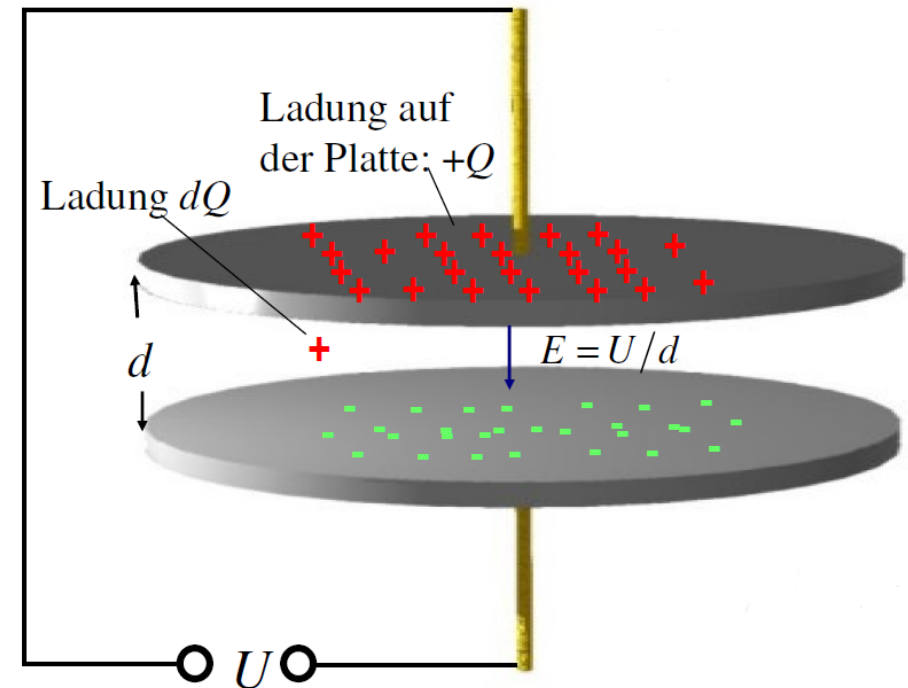
Wir betrachten einen Plattenkondensator mit Kapazität C , auf der sich die Ladung Q befindet und die Spannung U anliegt.

$$Q = CU$$

Wir verschieben nun die Ladung dQ von der negativen Platte auf die positive Platte. Die dazu aufzuwendende Arbeit dW beträgt:

$$\begin{aligned} dW &= \int_d \vec{F} \cdot d\vec{r} = dQ \int_d \vec{E} \cdot d\vec{r} \\ &= dQ \frac{U}{d} d = U dQ = \frac{Q dQ}{C} \end{aligned}$$

Die gesamte aufzuwendende Arbeit W , um den Kondensator auf die Spannung



U aufzuladen folgt aus der Integration

$$W = \int_0^{Q_0} \frac{Q}{C} dQ = \frac{1}{2C} Q_0^2 = \frac{1}{2} CU^2$$

Die im Kondensator mit der Spannung U gespeicherte Energie W_e beträgt daher

$$W_e = \frac{1}{2} C U^2$$

Wir wollen U durch E ersetzen und erhalten im Fall des Plattenkondensators

$$\begin{aligned} W_e &= \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} \left(\varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{A}{d} \right) (Ed)^2 \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_r E^2 (Ad) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_r E^2 V \end{aligned}$$

mit dem Volumen des Kondensators V .

Die **Energiedichte des elektrischen**

Feldes folgt dann sofort zu

$$w_e = \frac{W_e}{V} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_r E^2$$

Es überrascht nicht, dass dieses Ergebnis allgemein gilt

$$w_e = \frac{dW_e}{dV} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_r E^2$$

Das kann auch mit dem Feld der dielektrischen Verschiebungsdichte D geschrieben werden

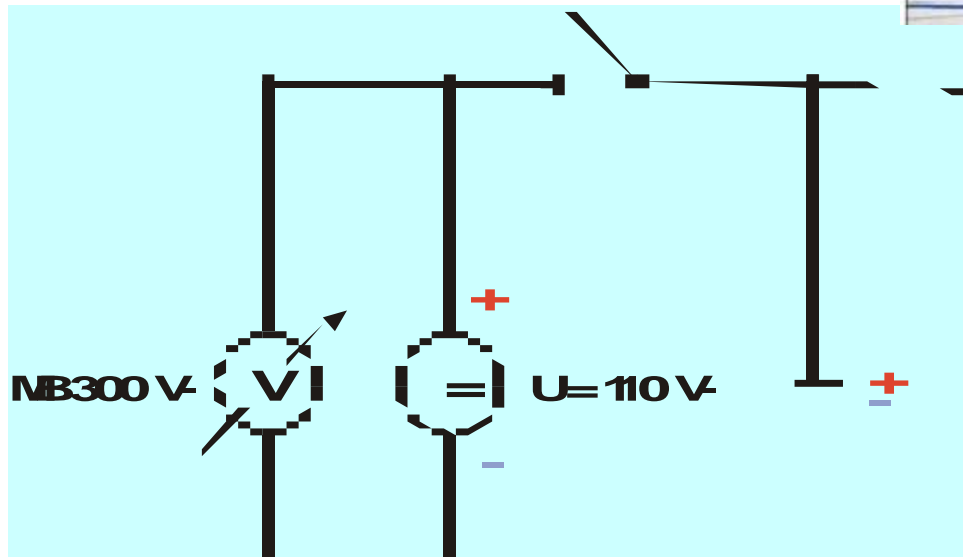
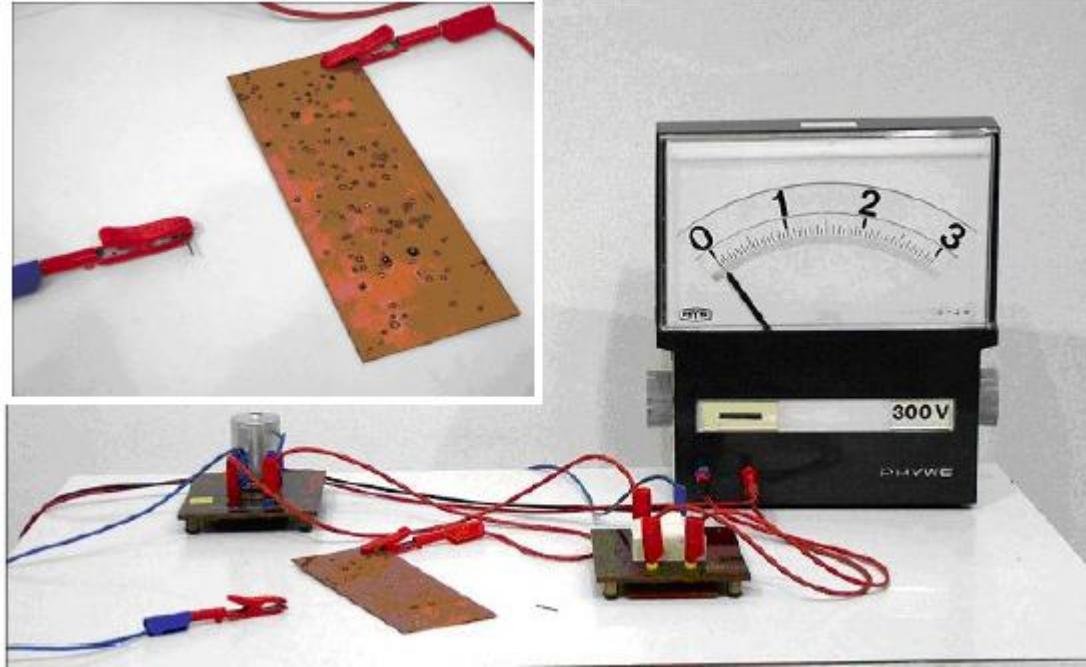
$$w_e = \frac{dW_e}{dV} = \frac{1}{2} DE$$

Experiment: *Gespeicherte Energie im Kondensator*

$$W = \frac{1}{2} CU^2 =$$

$$= \frac{1}{2} 2,5 \cdot 10^{-3} F \cdot 1,21 \cdot 10^4 V^2$$

$$= 15,1 J \quad Q = CU = 0,275 As$$



Auch im magnetischen Feld wird Energie gespeichert. Wir betrachten eine Spule mit N Windungen und dem Magnetfeld

$$B = \mu_r \mu_0 \frac{NI}{l}$$

Ändert sich B , so wird eine Spannung U induziert

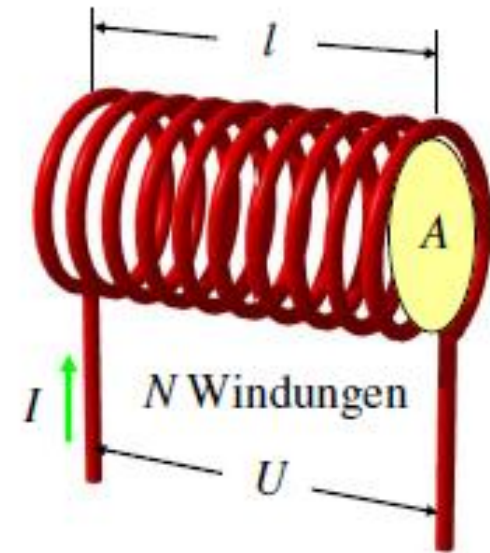
$$U = -L \frac{dI}{dt}$$

mit L als Selbstinduktivität der Spule

$$L = \mu_0 \mu_r \frac{N^2 A}{l}$$

Die von der Spannungsquelle geforderte Leistung ist gegeben durch

$$P = U \cdot I = L \frac{dI}{dt} I$$



Diese Leistung P bewirkt eine Änderung der magnetischen Feldenergie in der Spule, also

$$P = L \frac{dI}{dt} I = \frac{dW_m}{dt}$$

und weiter $dW_m = LI dI$

Wir integrieren wieder und erhalten die in der Spule gespeicherte Feldenergie

$$W_m = \int_0^I LI' dI' = \frac{1}{2} LI^2$$

Die magnetische Feldenergie einer Spule beträgt daher

$$W_m = \frac{1}{2} LI^2$$

Auch hier können wir wieder über das Volumen der Spule die Dichte der magnetischen Feldenergie berechnen und erhalten

$$\begin{aligned} W_m &= \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \mu_0 \mu_r \frac{N^2 A}{l} I^2 \\ &= \frac{1}{2 \mu_0 \mu_r} \left((\mu_0 \mu_r)^2 \right) \frac{N^2 I^2}{l^2} Al \\ &= \frac{1}{2 \mu_0 \mu_r} \left(\mu_0 \mu_r \frac{NI}{l} \right)^2 V = \frac{1}{2 \mu_0 \mu_r} B^2 V \end{aligned}$$

und weiter

$$w_m = \frac{W_m}{V} = \frac{1}{2 \mu_0 \mu_r} B^2$$

Auch dies gilt wieder allgemein und wir erhalten für die *magnetische Energiedichte*

$$w_m = \frac{dW_m}{dV} = \frac{1}{2 \mu_0 \mu_r} B^2$$

Wegen

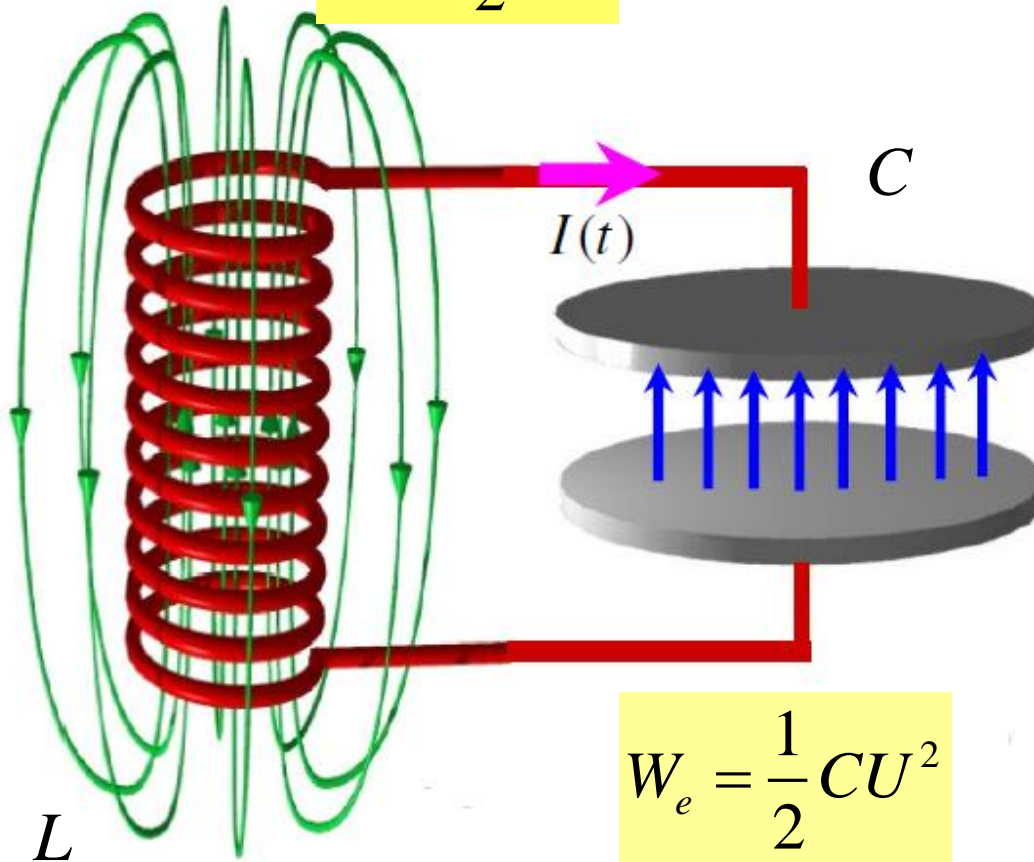
$$B = \mu_0 \mu_r H$$

gilt auch

$$w_m = \frac{dW_m}{dV} = \frac{1}{2} HB$$

Bemerkungen zum LCR-Schwingkreis:

$$W_m = \frac{1}{2} LI^2$$



$$W_e = \frac{1}{2} CU^2$$

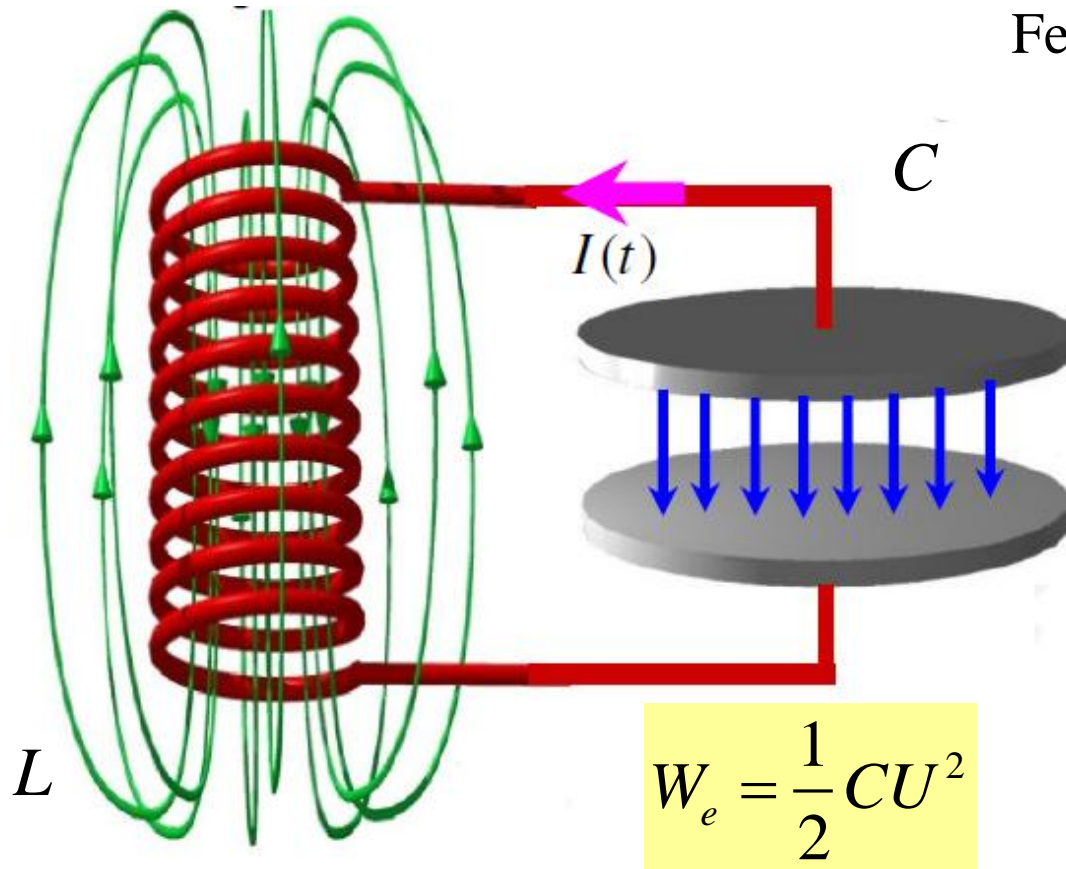
Für $R = 0$ haben wir keine Dämpfung im System und bei der Schwingung wird periodisch magnetische Feldenergie in elektrische Feldenergie umgewandelt.

Zu jeden Zeitpunkt t gilt:

$$\frac{dW_e}{dt} = - \frac{dW_m}{dt}$$

Der Ladestrom I lädt die Kapazität C auf. Magnetische Feldenergie wird abgebaut und elektrische Feldenergie entsprechend aufgebaut.

$$W_m = \frac{1}{2} LI^2$$



$$W_e = \frac{1}{2} CU^2$$

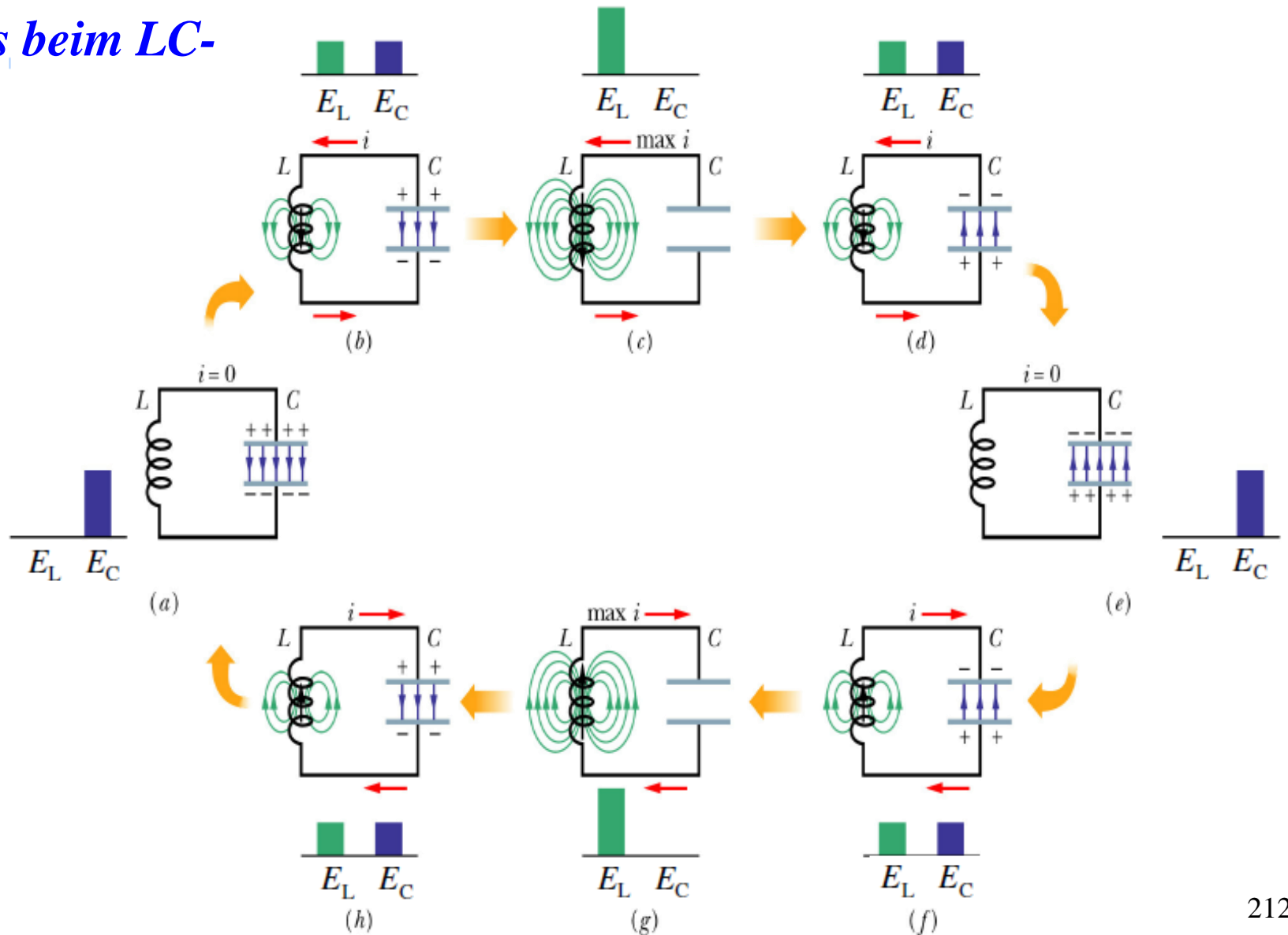
Eine halbe Schwingungsperiode später wird der Kondensator C entladen. Elektrische Feldenergie wird abgebaut und magnetische Feldenergie entsprechend aufgebaut.

Dieses Verhalten ist vollkommen analog zum mechanischen Oszillator, bei dem potentielle und kinetische Energie ineinander umgewandelt werden

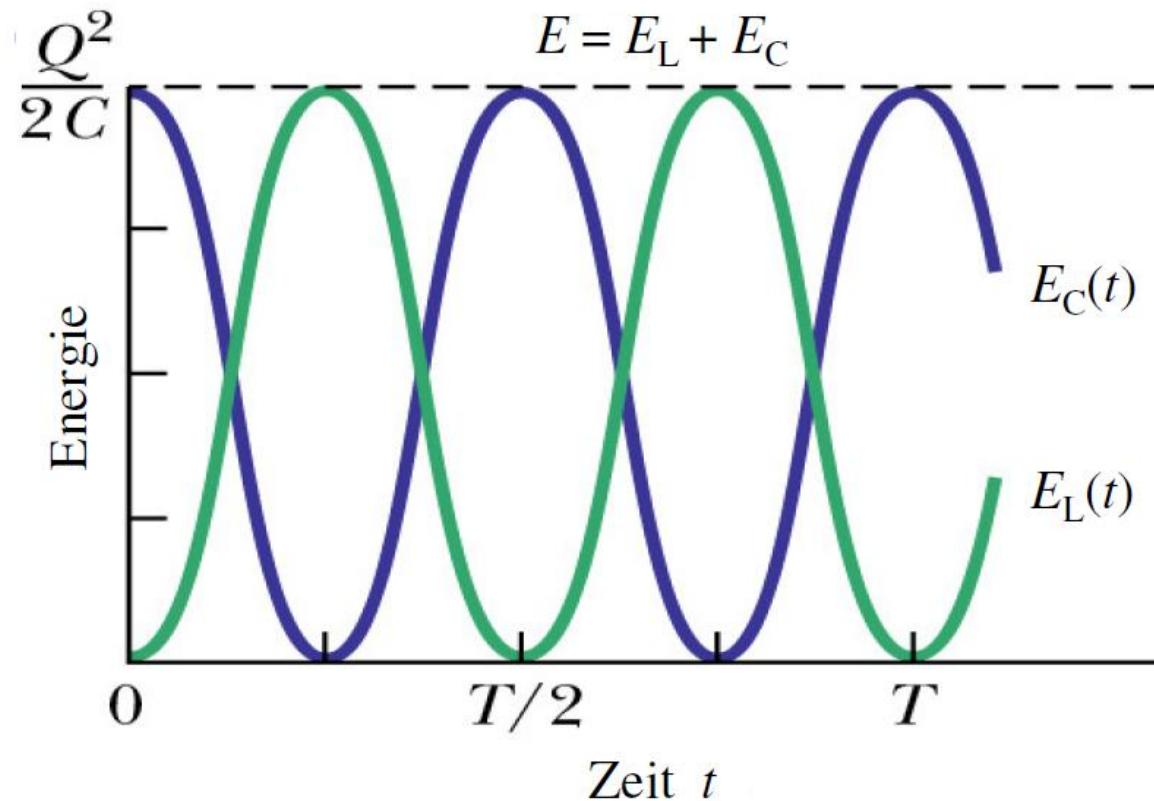
$$\frac{dE_{pot}}{dt} = - \frac{dE_{kin}}{dt}$$

Reibung bzw. der ohmsche Widerstand R entnehmen dem System Energie.

Energiefluss beim LC-Kreis



Magnetische E_L und elektrische Energie E_C sind beim Schwingkreis gleich groß und wandeln sich periodisch ineinander um. Ohne Dämpfung ist die Summe der Energien eine Erhaltungsgröße, d.h. bleibt konstant.



→ **Übungsaufgabe**

Inhalt der Vorlesung Physik A2 / B2

3. Wärmelehre

Druck und Temperatur: Das ideale Gas

Wärmemenge, spezifische Wärme

Die Hauptsätze der Wärmelehre

4. Elektrizitätslehre, Elektrodynamik

Die Ladung und elektrostatische Felder

- SEMESTERENDE -

Elektrischer Strom

Magnetische Felder und Magnetostatik

Zeitlich veränderliche Felder, Elektrodynamik

Wechselstromnetzwerke

Elektrodynamik in Materie

Elektromagnetische Wellen und Strahlung

Relativität der Felder – Relativitätstheorie

Gott sprach



$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

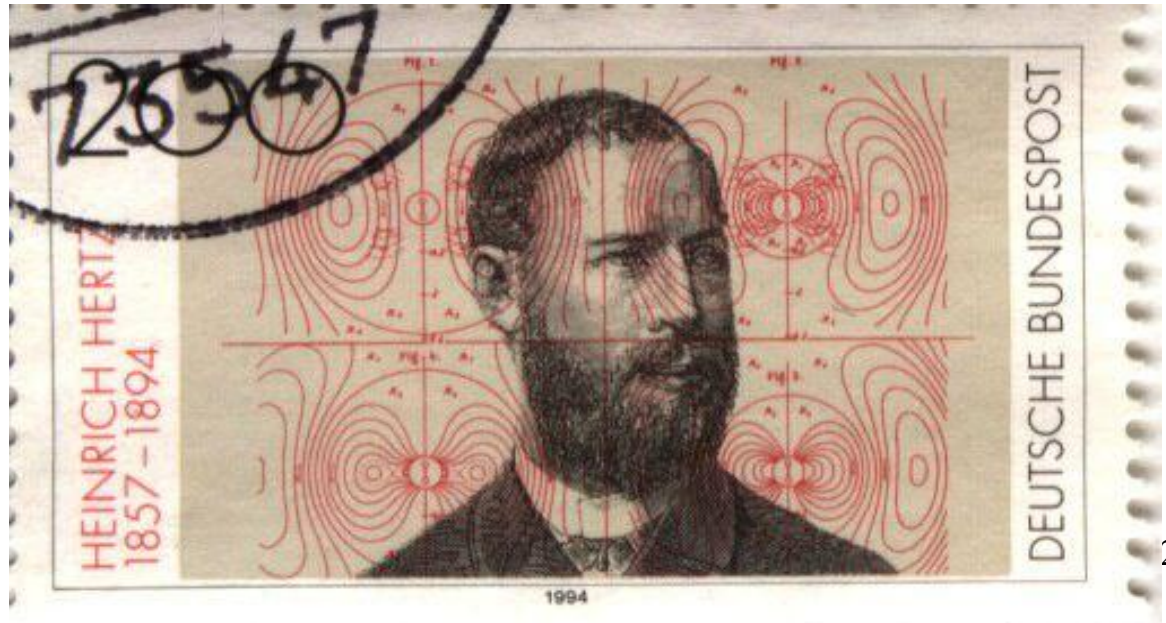
... und es wurde Licht !

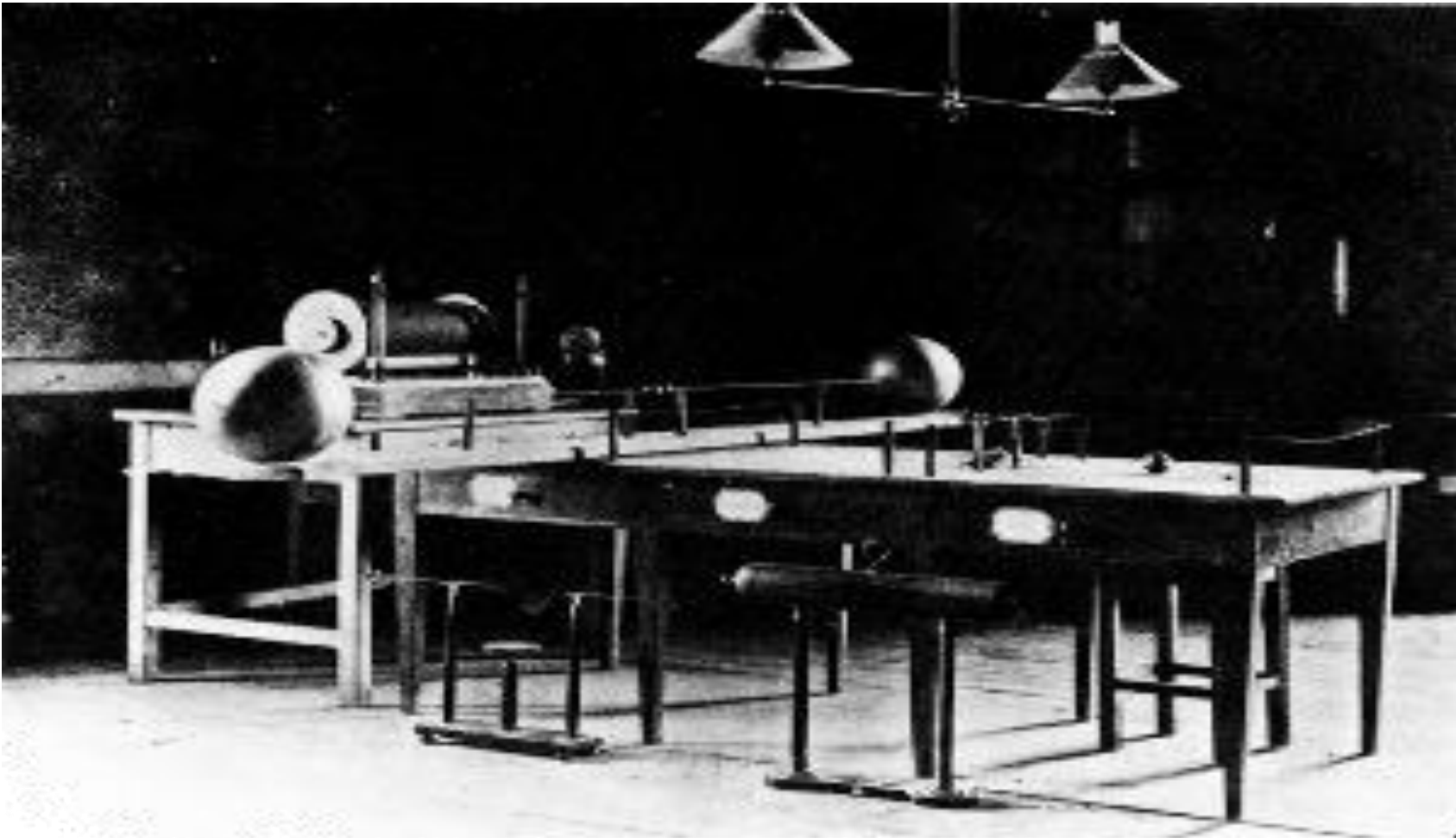


Die Universität Fridericiana zu Karlsruhe

Heinrich Rudolf Hertz (1857-1894)

Nachweis der elektromagnetischen Wellen
in den Jahren 1885-
1889 an der Universität
in Karlsruhe.





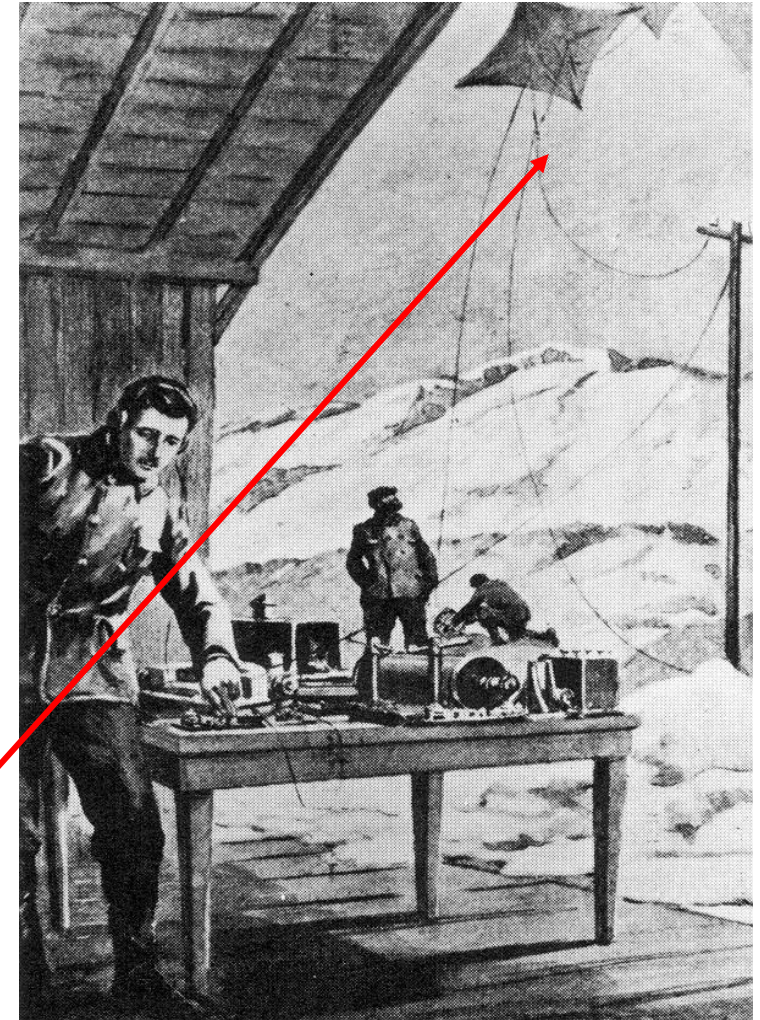
Dieses Bild zeigt den Hertz'schen UKW-Sender. Es handelt sich dabei um ein Originalphoto von Heinrich Hertz.

Erste Funkverbindung zwischen Cornwall (England) und Neufundland (G. Marconi 1901)



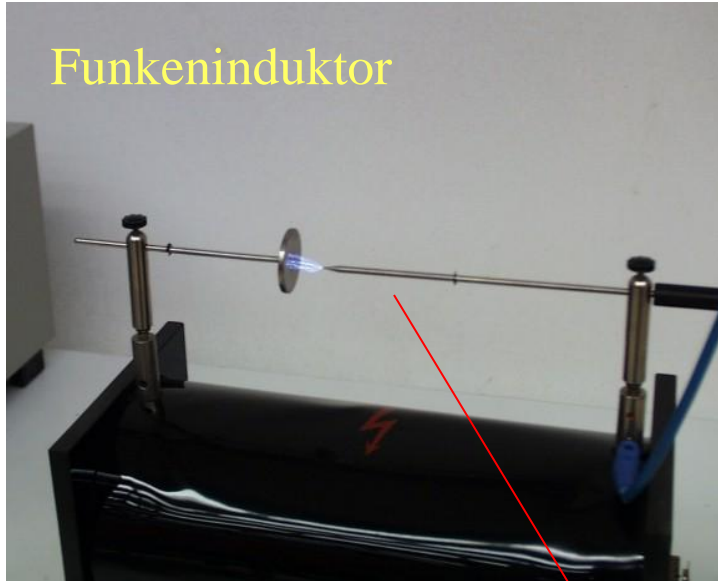
Morse Code: ● ● ● = „S“ (success)

*Sendeantenne an 4 Masten von 61 m
Empfangsantenne 122 m am Drachen*

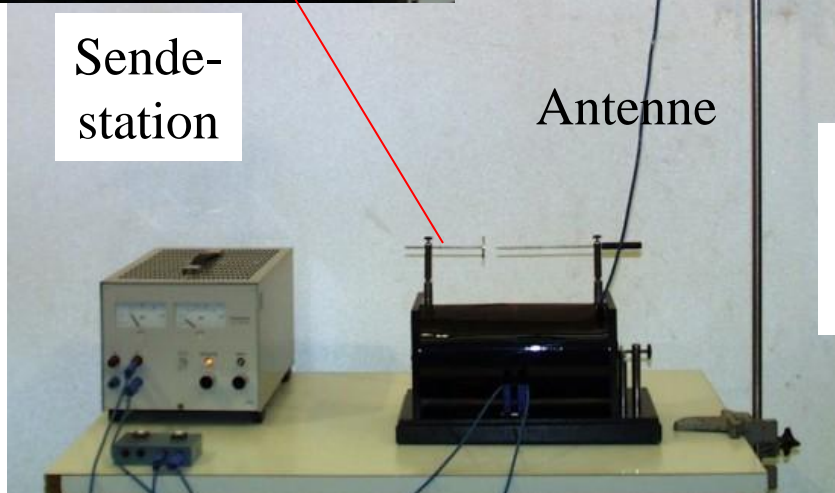


Experiment: *Erzeugung von EM-Wellen durch Funkeninduktor*

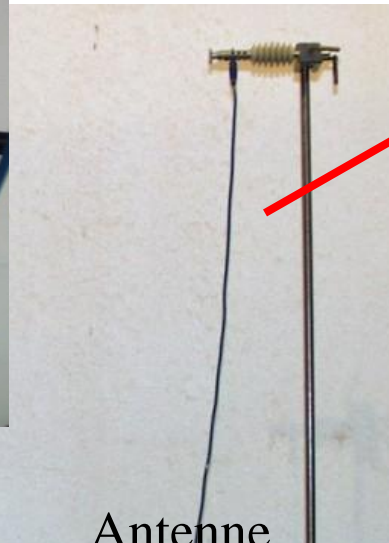
Funkeninduktor



Sendestation



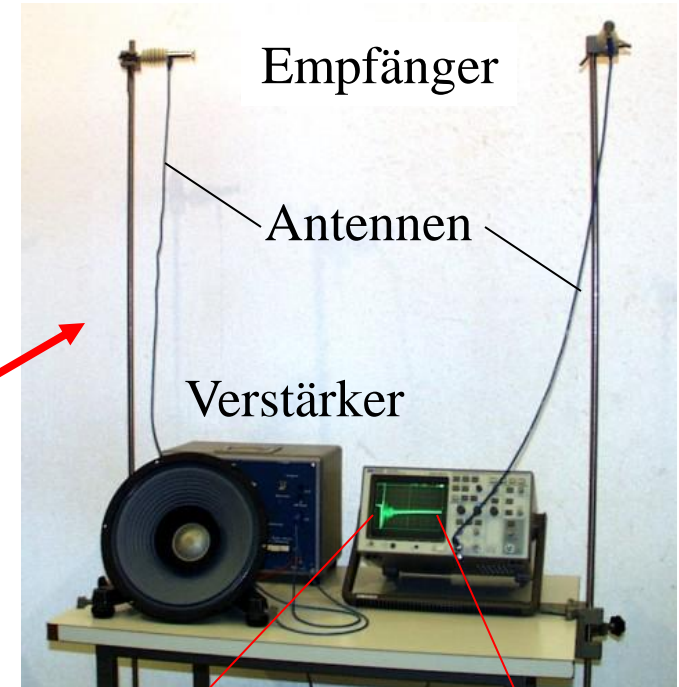
Antenne



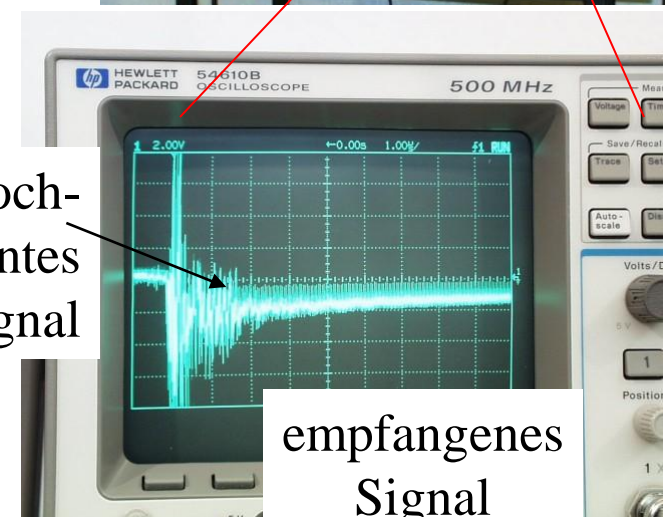
Empfänger

Antennen

Verstärker



hochfrequent
Signal



Elektromagnetische Wellen / Strahlung

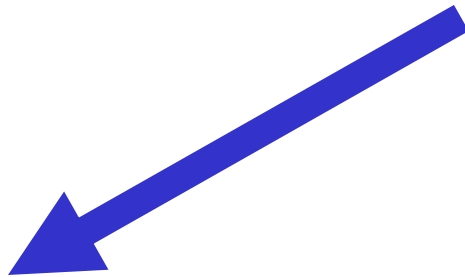
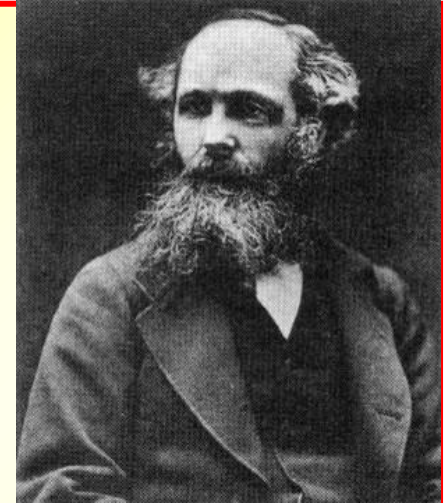
Die Maxwellschen Gleichungen (1864)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$



Existenz elektromagnetischer
Wellen mit Ausbreitungs-
geschwindigkeit c im Vakuum

$$c = 299.792.458 \text{ ms}^{-1}$$

heute exakt festgelegt !!



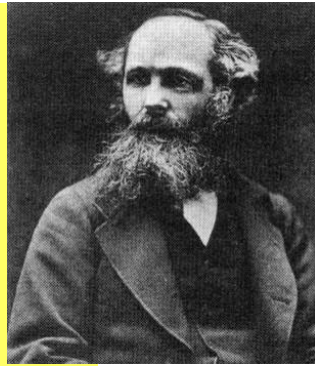
Herleitung der Wellengleichung aus den Maxwellgleichungen

$$(1) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$(2) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$(3) \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$(4) \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$



J.C. Maxwell
1864

Aus diesen Gleichungen folgt direkt eine Wellengleichung. Dies wollen wir zeigen, indem wir die Betrachtungen auf den materiefreien Raum (Vakuum) beschränken.

Hier gibt es weder Ladungen noch Ströme und es gilt

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = 0 \quad \rho(\vec{r}, t) = 0$$

Wir beginnen mit der 4. Maxwellgleichung und leiten einmal nach der Zeit ab. Aus

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

folgt

$$\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t^2}$$

Wir benutzen nun Gleichung 3, um die zeitliche Ableitung des Magnetfeldes zu ersetzen und erhalten

$$-\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t)) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} \quad 222$$

Es handelt sich hier um eine partielle DGL 2. Ordnung mit räumlichen und zeitlichen Ableitungen, die nur noch die elektrische Feldstärke enthält.

Das doppelte Vektorprodukt lässt sich ersetzen durch

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \Delta \vec{E}$$

Hinweis: für Vektoren allgemein gilt:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} (\vec{a} \cdot \vec{b})$$

Nun gilt im Vakuum aber

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$$

und wir erhalten

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\Delta \vec{E}$$

Wir setzen ein in

$$-\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

und erhalten

$$\Delta \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

und damit schließlich

$$\Delta \vec{E}(\vec{r}, t) - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = 0$$

mit dem Laplace- oder Delta-Operator

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Es verwundert nicht, dass wir eine analoge DGL für das Magnetfeld erhalten. Wir starten mit der 3. Maxwellgleichung und setzen in deren zeitliche Ableitung die 4. Gleichung ein, also

$$\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

und weiter mit

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

folgt

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}, t)) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t^2}$$

Wir ersetzen wieder das doppelte Kreuzprodukt und unter Berücksichtigung von

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

folgt:

$$\Delta \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

und schließlich

$$\Delta \vec{B}(\vec{r}, t) - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = 0$$

Beide DGL in E und B sind dreidimensionale Wellengleichungen, wie wir sie aus der Mechanik kennen. Elektrische und magnetische Felder sind daher im Vakuum ausbreitungsfähig.

 ***Elektromagnetische Wellen***

Wellengleichungen elektromagnetischer Wellen

$$\Delta \vec{E}(\vec{r}, t) - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = 0$$

$$\Delta \vec{B}(\vec{r}, t) - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = 0$$

- Die elektromagnetischen Wellen sind Lösungen der 3-dim. Wellengleichungen für die Felder E und B
- Jede der DGL ist eine Vektorgleichung, die in drei skalare Wellengleichungen für jede der Raumkomponenten zerfällt.
- Über die Maxwellgleichungen sind die E- und B-Felder miteinander verbunden. Eine elektromagnetische Welle besitzt daher gleichermaßen E- und B-Felder.
- Die Phasengeschwindigkeit ist die Lichtgeschwindigkeit c und es gilt:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$