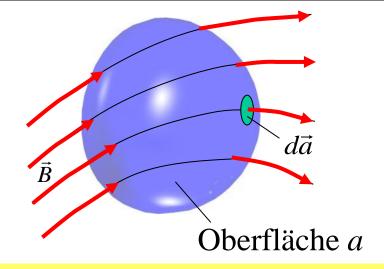
# Magnetische Felder / Magnetostatik

Seit über 2000 Jahren bekannt: Eisenhaltige Materialien ziehen sich an bzw. es findet eine Kraftwirkung statt (Magnetit).

#### Vorstellung wie in der Elektrostatik:

Kraftfeld wird durch Magnetfeld B vermittelt.

**Problem I:** Das Gegenstück zur isolierten elektrischen Probeladung Q, etwa eine magnetische Ladung existiert nicht.

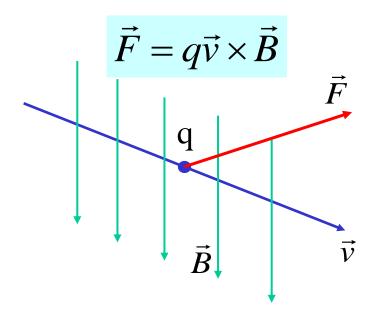


Magnetfelder B haben keine Quellen, sind daher ringförmig geschlossen, damit nicht wirbelfrei.
Was erzeugt also B ????

#### und Problem II

Wie wirken magnetische Kräfte, die das Magnetfeld B als Ursache haben ???

Auf bewegte Ladungen wirkt die Lorentzkraft



Wie kann nun B bestimmt und gemessen werden ?

Lösung I: Wählen bewegte elektrische Probeladung q als Probekörper und messen Lorentzkraft. Wenig praktikabel.

Lösung II: Wählen magnetischen Dipol (etwa Kompassnadel oder Eisenspäne) als Probekörper. Damit gelingt Visualisierung des B-Feldes in Analogie zur Elektrostatik! Erste Untersuchungen durch Oerstedt.

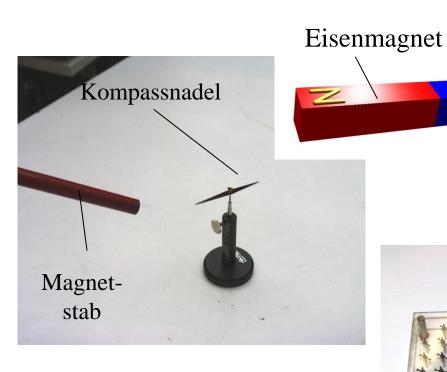
Kompassnadeln oder magnetisierte Eisenspäne (magnetische Dipole) richten sich entlang der B-Feldlinien aus.

#### Erzeugung von Magnetfeldern durch

- magnetisierte Materie (diese Magnetisierung kann durch mikroskopische Stromverteilungen erklärt werden)
- makroskopische elektrische Ströme

Dipol





Zwischen Kompassnadel und Magnetstab wirkt eine Kraft. Das ist ein Nachweis des magnetischen Kraftfeldes

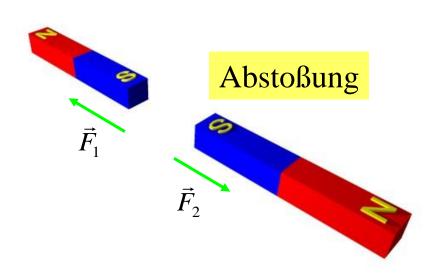


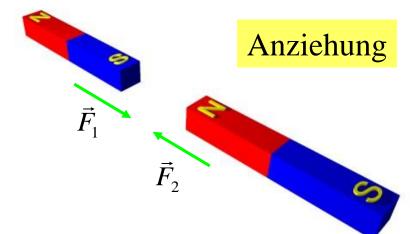
Pol

nadel

Der magnetische Dipol mit seinen zwei Polen ist offensichtlich die kleinste magnetische Einheit. Der magnetische Monopol existiert nicht!

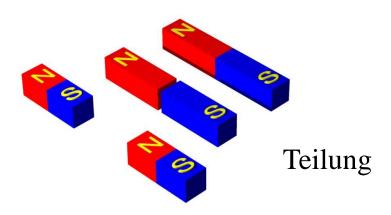
Mit dem Dipol lassen sich ähnlich wie in der Elektrostatik abstoßende und anziehende Effekte erklären.





Die Pole erhalten in Anlehnung an die Erdpole die Namen Nordpol und Südpol

Die Erzeugung eines Monopols durch Magnetteilung gelingt nicht. Dies legt den Schluss nahe, dass die gesamte Materie aus mikroskopischen magnetischen Dipolen aufgebaut ist.



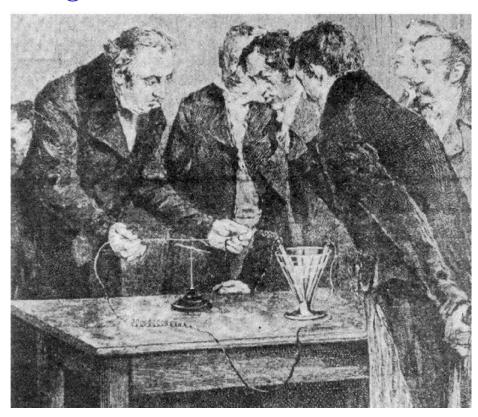
Die magnetisierte Materie wird durch atomare magnetische Dipole gebildet.

#### Besser und genauer:

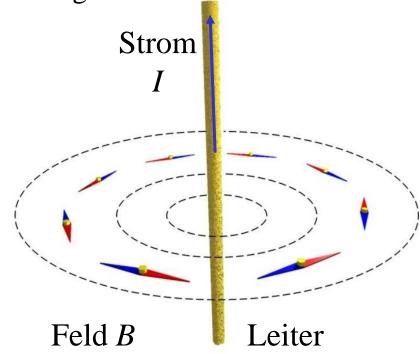
"Ursache der magnetischen Eigenschaften der Materie sind die atomaren magnetischen Dipole"

Oft sagt man auch "magnetisches Moment" statt "magnetischer Dipol"

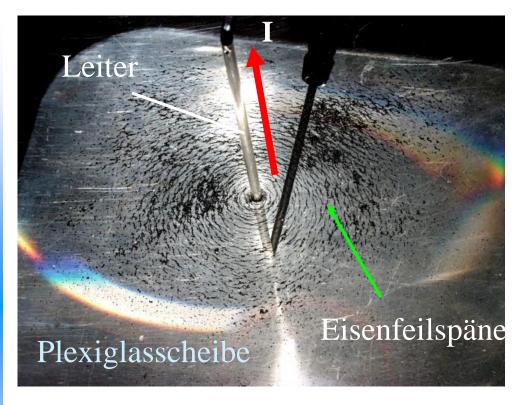
#### • Magnetische Felder von Strömen



Oersted entdeckt 1820 den Zusammenhang von Strom und Magnetfeld. Entwicklung von Batterien/Stromquellen Ein stromdurchflossener Leiter ist von einem kreisförmigen Magnetfeld umgeben.



Es gibt <u>geschlossene</u> Feldlinien, die man z.B. durch Kompassnadeln anzeigen kann.

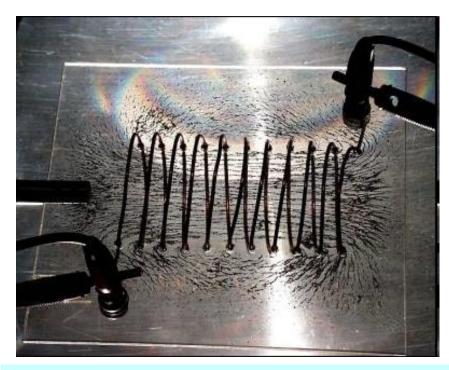


#### **Experiment:**

Feldlinien eines stromdurchflossenen Leiters

#### **Experiment:**

Feldlinien einer stromdurchflossenen Spule und eines Toroiden

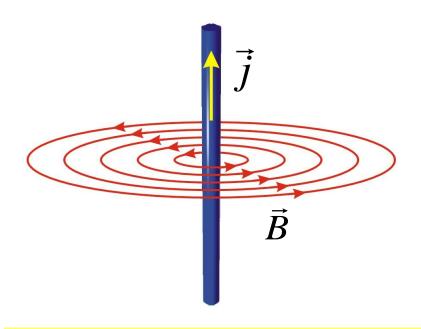


im wesentlichen konstantes und konzentriertes B-Feld in der Spule. Feldlinien schließen sich im Außenraum

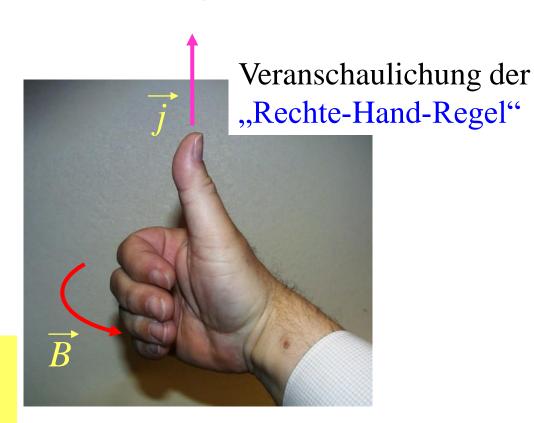


ringförmig geschlossene B-Feldlinien innerhalb des Toroiden

#### Ströme bzw. Stromverteilungen erzeugen Magnetfelder



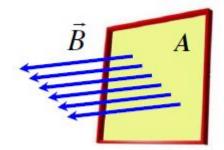
Magnetfelder B haben keine Quellen, sind daher ringförmig geschlossen, damit nicht wirbelfrei.



Einfachster Fall: ein langer gerader Draht, der den Strom I trägt, umgibt sich mit ringförmig geschlossenen Magnetfeldern.

# Maxwell-Gleichungen der Magnetostatik

Analog zum elektrischen Feld können wir auch für magnetische Felder einen magnetischen Fluss durch eine Oberfläche definieren.

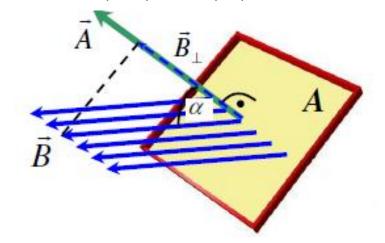


Auch hier bewerten wir wieder die Stärke des Magnetfeldes und die Richtung bezüglich der Oberfläche. Ist das Magnetfeld konstant und ist das Magnetfeld senkrecht zur Oberfläche gerichtet, so gilt für den magnetischen Fluss:

$$\Phi_B = \left| \vec{B} \right| \cdot A = B \cdot A$$

Tritt das Magnetfeld unter einem Winkel α durch die Oberfläche, so folgt:

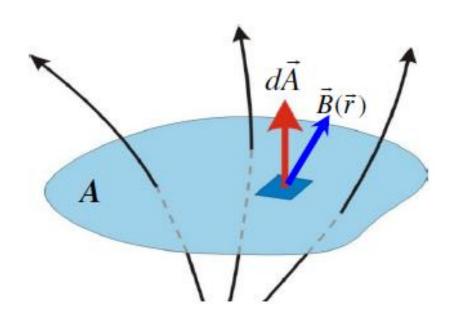
$$\Phi_B = \left| \vec{B}_{\perp} \right| \cdot A = \left| \vec{B} \right| \cdot A \cdot \cos \alpha$$



Diesen Sachverhalt fassen wir wieder im Skalarprodukt zusammen:

$$\Phi_{\scriptscriptstyle B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$$

Für beliebige Oberflächen und Magnetfelder müssen wir über kleine Bereiche der Oberfläche summieren.



Zunächst gilt für ein kleines Flächenelement:

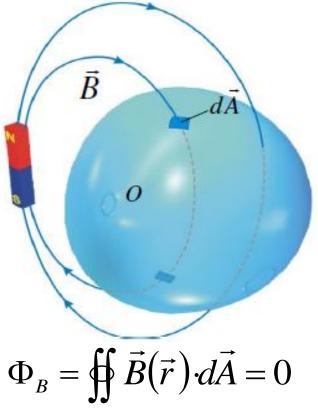
$$d\Phi_B = \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{A}$$

Die Summation führt schließlich im Grenzübergang auf die Integration und es gilt:

$$\Phi_B = \iint_A \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{A}$$

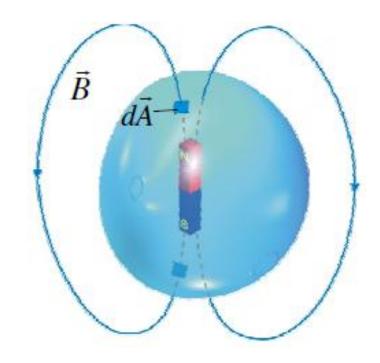
Wie im elektrischen Fall, wollen wir auch hier den Fluss durch geschlossene Oberflächen A betrachten.

Es gibt keine magnetischen Monopole (magnetische Ladungen). Ist die kleinste Einheit, also der magnetische Dipol *außerhalb* des Volumens, so gilt



Ist die kleinste Einheit, also der magnetische Dipol *innerhalb* des Volumens, so gilt auch hier

$$\Phi_B = \iint_A \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{A} = 0$$

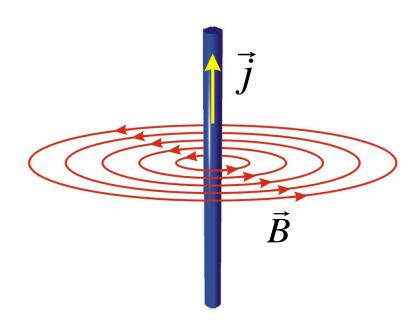


Es gilt also immer:

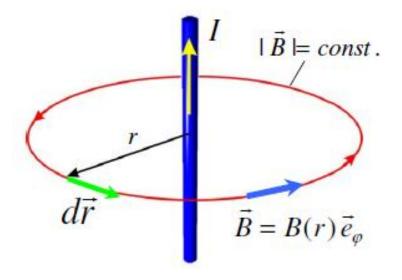
$$\iint\limits_{A} \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{A} = 0$$

- Dies ist eine der Maxwellschen Gleichungen der Magnetostatik in integraler Form
- Bedeutung: Es gibt keine Quellen (bzw. Senken) des magnetischen Feldes. Daher sind die B-Feldlinien immer geschlossen.
- Magnetische Monopole (magnetische Ladungen) existieren nicht. Aber man sucht danach!
- Die Gleichung gilt im übrigen auch für zeitabhängige Felder, also in der Elektrodynamik (siehe später).

#### Zusammenhang zwischen Magnetfeld und Strom / Amperesches Gesetz

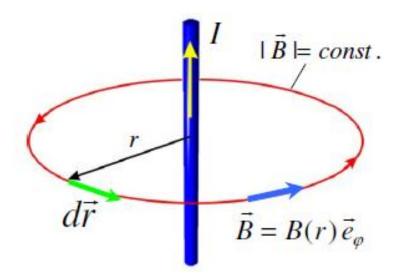


Bei einem langen Draht mit Strom *I* bzw. Stromdichte *j* ist das Magnetfeld *B* auf konzentrischen Kreisen um den Draht ringförmig geschlossen und konstant.



Es gibt nun einen einfachen Zusammenhang zwischen dem Radius des Kreises r und dem entsprechenden Magnetfeld Bund dem Strom I:

$$B(r) \cdot 2\pi r = \mu_0 \cdot I$$



mit der magnetischen Feldkonstante  $\mu_0$ . Das einfache Ergebnis

$$B(r) \cdot 2\pi r = \mu_0 \cdot I$$

lässt sich verallgemeinern, in dem wir die linke Seite als geschlossenes Wegintegral über das Magnetfeld schreiben:

$$\oint \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \mu_0 I$$

Offensichtlich steht die Größe des Wegintegrals in direktem Zusammenhang mit dem Strom *I*, der durch die Fläche, die der geschlossene Weg aufspannt, hindurchtritt.

Dieser sehr einfache Zusammenhang lässt sich weiter verallgemeinern.

Er gilt nämlich für jedes geschlossene Wegintegral über die Magnetfeld-

$$\oint_C \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \mu_0 I$$

I umfasst.

stärke, solange der Weg C den Strom

## Das Amperesche-Gesetz

$$\oint_{C(A)} \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \mu_0 I = \iint_{A(C)} \mu_0 \vec{j}(\vec{r}) d\vec{A}$$

 $\mu_0$  heißt magnetische Feldkonstante (magnetische Permeabilität des Vakuums)

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am}$$

- Dies ist eine weitere Maxwellgleichung der Magnetostatik.
- Verknüpfung von stationären Strom bzw. Stromverteilungen mit dem statischen Magnetfeld.
- Statische Magnetfelder werden durch Ströme erzeugt. Dies gilt auch für magnetisierte Materie (etwa Permanentmagnete). In der Materie müssen daher mikroskopische Ströme auf atomarer Skala fließen (mikroskopische Amperesche Kreisströme, siehe unten).
- Das Wegintegral entlang kann über jeden Weg *C*, der den Strom *I* umschließt, berechnet werden. Der Gesamtstrom *I* ergibt sich als Flächenintegral über die Stromdichte *j*.
- Grundlage der Berechnung von Magnetfelder (siehe unten).

# Die Maxwell-Gleichungen der Magnetostatik

differentiell (lokal)

Integralsätze der Vektoranalysis

integral

$$rot\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{j}(\vec{r})$$

Stokes

$$\oint_{C(A)} \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \mu_0 I = \iint_{A(C)} \mu_o \vec{j}(\vec{r}) d\vec{A}$$

$$\oint_{C(A)} \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \iint_{A(C)} rot \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{A}$$

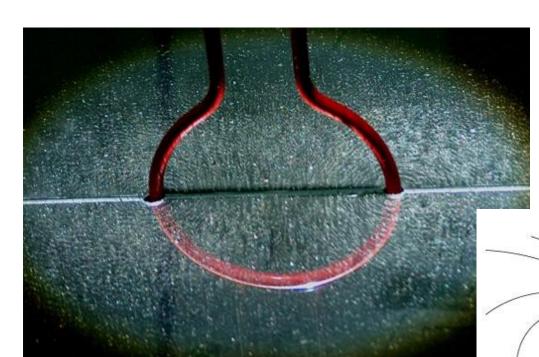
$$div\vec{B}(\vec{r}) = 0$$

$$\oint_{A(V)} \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{A} = 0$$

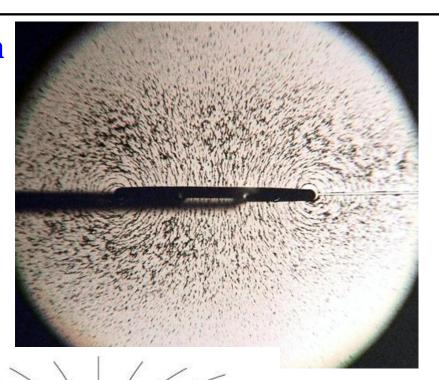
$$\iint_{A(V)} \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{A} = \iiint_{V(A)} div \vec{B}(\vec{r}) \cdot dV$$

## Magnetisches Feld von Kreisströmen

Makroskopisches magnetisches Feld einer Stromschleife



**Experiment:** Anordnung von Eisenfeilspänen im Magnetfeld einer Stromschleife



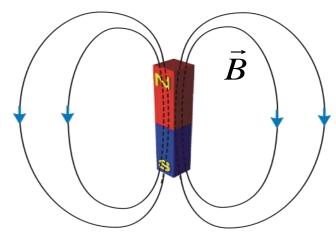
Makroskopisches magnetisches Feld der Erde

87

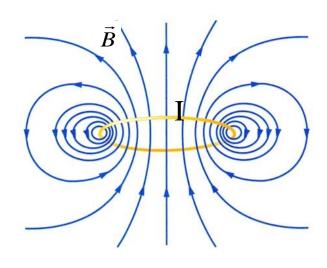
#### Elementare (atomare) magnetische Dipole (Momente)

=

magnetischer Dipol von elementaren (atomaren) Kreisströmen





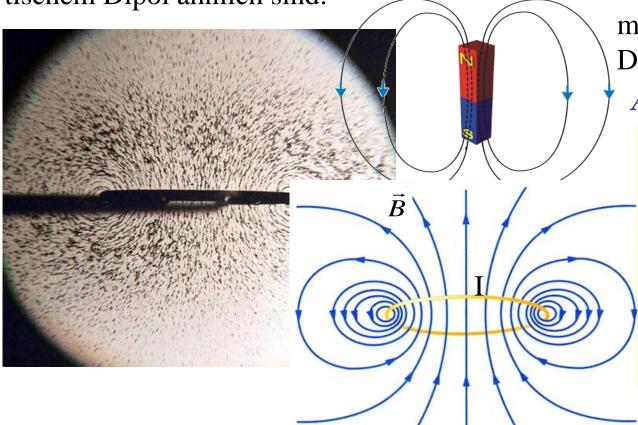


Elementares magnetisches Dipolfeld der Materie

Elementares magnetisches Dipolfeld eines Kreisstroms

#### Kurzer Ausflug in die Physik des Mikrokosmos:

Hatten schon gesehen, dass die Magnetfeldverteilungen von Stromschleife und magnetischem Dipol ähnlich sind:

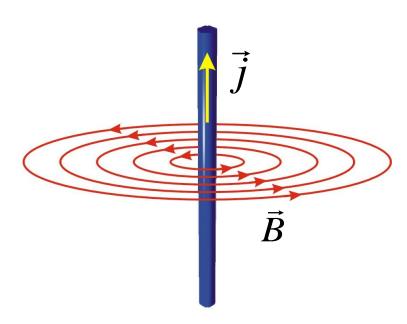


Dies legt den vorläufigen Schluss nahe, dass die magnetischen Dipole der atomaren Bestandteile der Materie hervorgerufen werden durch mikroskopische Kreisströme. Diese heißen

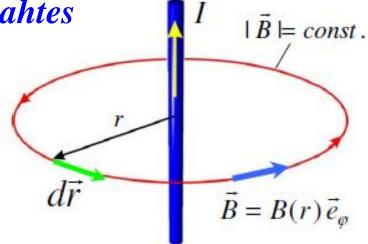
## Amperesche Kreisströme

Die magnetischen Eigenschaften der Materie werden so zurückgeführt auf mikroskopische Stromverteilungen in den atomaren Bestandteilen der Materie!!

# Beispiel 1: Magnetfeld eines langen Drahtes



Wir benutzen das Amperesche Gesetz und die spezielle Symmetriebedingung: konstantes Magnetfeld auf einem Kreis im Abstand r vom Draht und erhalten sofort:



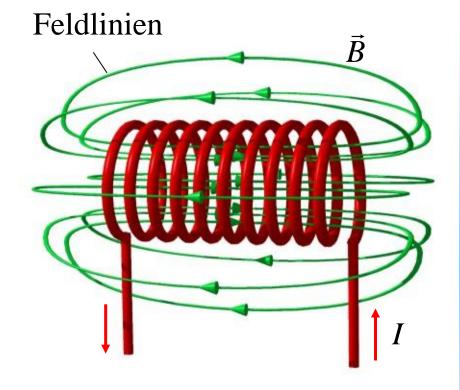
$$\oint_C \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \mu_0 I = B \cdot 2\pi r$$

und schließlich:

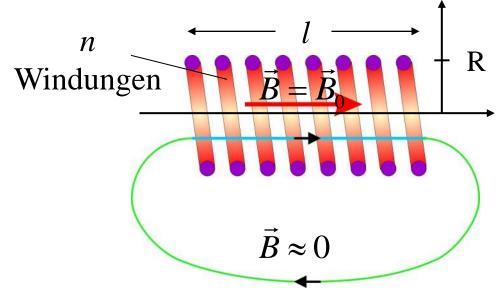
$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Das ringförmige Magnetfeld B nimmt also mit 1/r nach außen ab.

# B-Feld einer langen Spule



Man kann das Magnetfeld deutlich verstärken, wenn man den Leiter spiralförmig zu einer Spule aufwickelt.



Näherungsweise nimmt man daher an:

1. Feld in der Spule:  $\vec{B} = \vec{B}_0 = \text{const.}$ 

2. Feld außerhalb:  $\vec{B} \approx 0$ 

Wir wählen als Integrationsweg die grüne Linie (entlang einer Magnetfeldlinie) Über das Amperesche Gesetz erhält man dann Amperewindungen

$$\oint_C \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{s} = \mu_0 \underline{n} I /$$

also bei einer Spulenlänge l

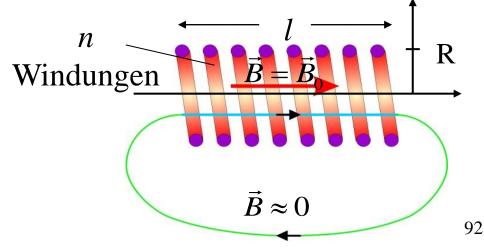
$$B_0 \cdot l = \mu_0 nI$$

und damit das B-Feld innerhalb der Spule

$$B_0 = \mu_0 \frac{nI}{l}$$

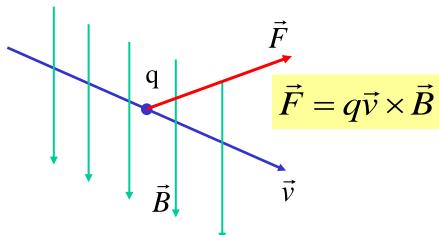
Für lange Spulen (l >> R) und großes n/l, also dichtgepackte Windungen ist die Gleichung relativ genau.



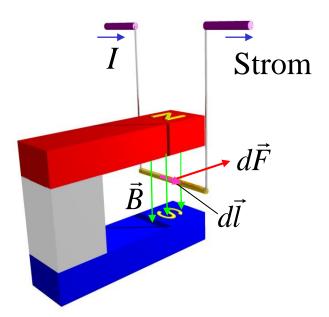


# Kräfte auf stromdurchflossene Leiter im Magnetfeld

Auf bewegte Ladungen wirkt die Lorentzkraft



Auf einen Strom durchflossenen Leiter der Länge l wirkt im Magnetfeld eine Kraft F. Die Kraft auf den Leiter resultiert aus der Summe der Kräfte auf die beteiligten bewegten Ladungsträger mit Teilchendichte n, die den Strom tragen.



Im Leiterstück der Länge dl mit Querschnitt A befindet sich die Ladungsmenge  $dQ = n \cdot q \cdot A \cdot dl$ 

Die Gesamtkraft  $dF_L$  auf das Leiterstück ist dann gegeben durch  $(\vec{v} \parallel d\vec{l})$ 

$$\begin{split} d\vec{F}_L &= dQ \cdot \vec{v} \times \vec{B} = nqAdl \cdot \vec{v} \times \vec{B} = \\ j \cdot A \cdot d\vec{l} \times \vec{B} &= I \cdot d\vec{l} \times \vec{B} \end{split}$$

wegen

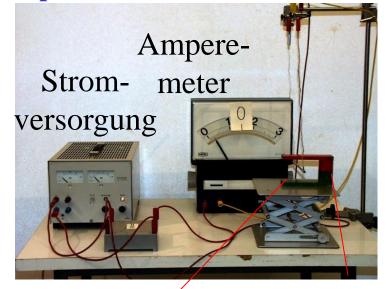
$$j = n \cdot q \cdot v$$

Somit folgt

$$d\vec{F}_L = I \cdot d\vec{l} \times \vec{B}$$

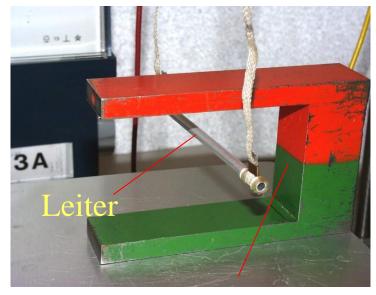
als Kraft auf einen Strom durchflossenen Leiter der Länge *dl*.

**Experiment:** Kraft auf Leiter im Magnetfeld



Leiterschaukel

Magnet



Magnet

Der stromdurchflossene Leiter wird je nach Stromrichtung in den Magneten hineingezogen oder herausgedrängt

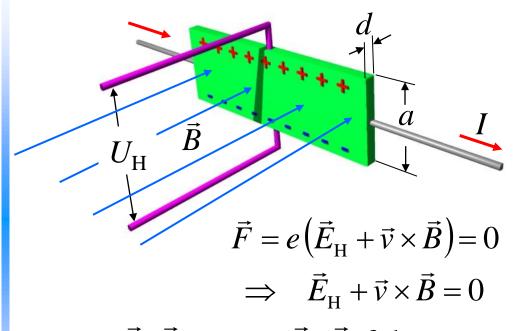
#### Messung von Magnetfeldern / Der Halleffekt

Wollen die Lorentzkraft auf bewegte Ladungsträger nutzen, um die Magnetfeldstärke B zu messen:

## Standard-Messprinzip (Hall-Sonde)

Durch einen flachen Leiter der Breite a und der Dicke d fließe der Strom I. Wirkt das Magnetfeld B senkrecht zur Stromwirkung, werden die bewegten Ladungen im Leiter senkrecht zum Feld und senkrecht zur Richtung des Stroms verschoben Dadurch entsteht über die Breite des Leiters durch Ladungsansammlung eine Potentialdifferenz  $U_{\rm H}$ . Im Gleichgewichtszustand herrscht ein Kräftegleichgewicht zwischen

elektrischer und magnetischer Kraft auf die Ladungsträger



Da  $\vec{v} \perp \vec{B}$ ,  $\vec{E} \perp \vec{v}$  und  $\vec{E} \perp \vec{B}$  folgt

$$q|E_H| = q|v||B|$$

und damit für den Absolutbetrag der Hallspannung

$$U_H = E_H \cdot a = a \cdot v \cdot B$$

Ersetzt man noch die Geschwindigkeit v durch den Strom I über

$$I = j \cdot ad = q \cdot n \cdot v \cdot ad$$

so folgt schließlich

$$U_H = A_H \frac{I \cdot B}{d} \simeq B$$

Die Größe

$$A_{H} = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{nq}$$

heißt Hallkonstante. Sie ist demnach besonders groß, wenn die Ladungsdichte  $\rho$  klein ist (wegen dann bei konstantem Strom I hoher Geschwindigkeit v). Dies ist speziell bei Halbleitern der Fall.

Vor allem aus kleinen Halbleiterstreifen gefertigte Sonden werden häufig zur Magnetfeldmessung verwendet: "Hallsonden"

# Hinweis zur Einheit des magnetischen Feldes B:

Die Einheit ist an die der mechanischen Größen über die Einheit der Kraft (N) und die elektrischen Größen über die Einheiten von Strom (A) und Spannung (U) angeschlossen. Dies gelingt über die magnetische Feldkonstante:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am}$$

Die Einheit von B ist das Tesla (T):

$$1 T = 1 \frac{Vs}{m^2}$$

# Magnetische Kräfte auf ein geladenes Teilchen

Im elektrischen Feld wirkt auf eine Ladung immer eine Kraft, dagegen ist im Magnetfeld

$$\vec{F}_{\text{mag}} = 0$$
 wenn  $\vec{v}_{\text{Ladung}} = 0$ 

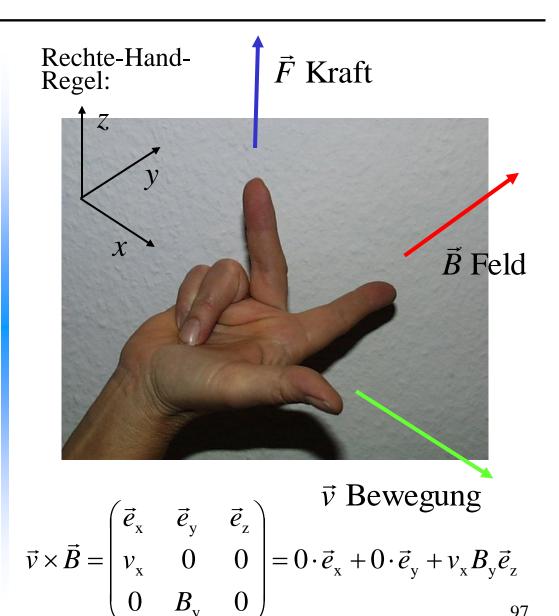
Wenn sich die Ladung bewegt, d.h.  $\vec{v} \neq 0$ , dann ergibt sich eine Kraft

$$ec{F}_{
m mag} \perp ec{v} \; {
m und} \; ec{F}_{
m mag} \; \perp \; ec{B}$$

Das Experiment zeigt folgendes Kraftgesetz ("Lorentzkraft")

$$\vec{F}_{\text{mag}} = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

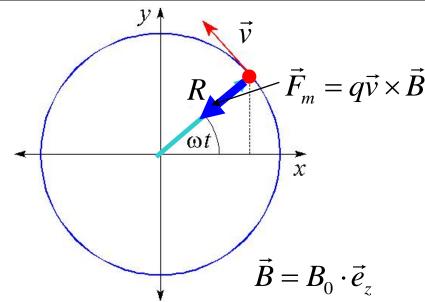
 $\vec{B}$  ist die magnetische Feldstärke, genauer: die magnetische Induktion



# Bewegung geladener Teilchen im Magnetfeld

Im Magnetfeld gilt die wichtige Eigenschaft:  $|\vec{v}(t)| = \text{const.}$ 

d.h. die Ladung wird zwar abgelenkt, ändert dabei aber nicht den Betrag der Geschwindigkeit. Damit bleibt auch der Betrag des Impulses *p* und die kinetische Energie  $E_{kin}$  unverändert! Das liegt natürlich an dem Umstand, dass die Lorentzkraft immer senkrecht auf der Geschwindigkeit des Teilchens steht. Typisch für solche Kraftverhältnisse ist die Kreisbewegung. Wir erinnern uns:



Das Magnetfeld zeigt hier in z-Richtung. Die Lorentzkraft entspricht also der Zentripetalkraft bei der Kreisbewegung und es gilt:

und 
$$R = \frac{\vec{F}_{Zentripetal}}{qB} = \frac{m \cdot v}{qB} = \frac{p}{qB}$$
 sowie

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{q}{m}B$$
 Zyklotronfrequenz

# Helmholtz-Spulen

**Experiment:** 

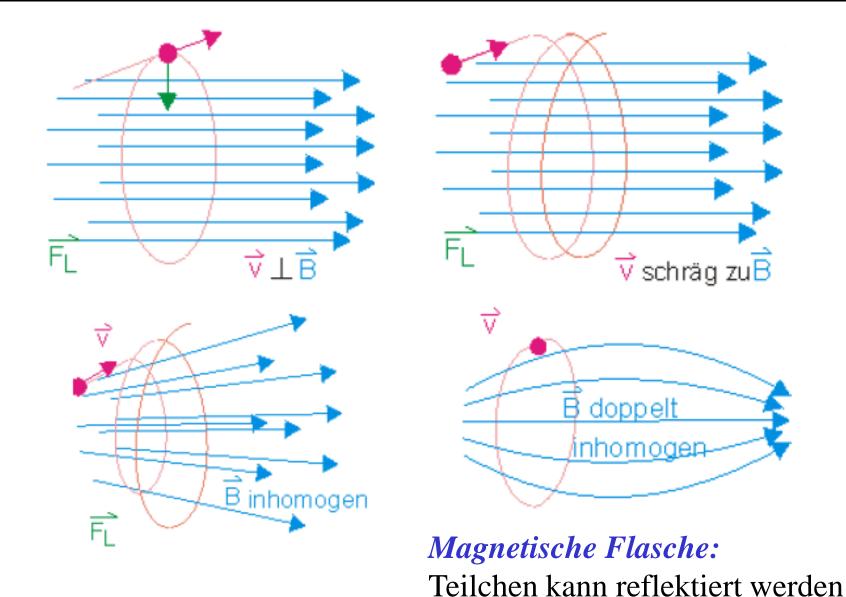
Fadenstrahlrohr

Kreisbahn

Elektronenkanone

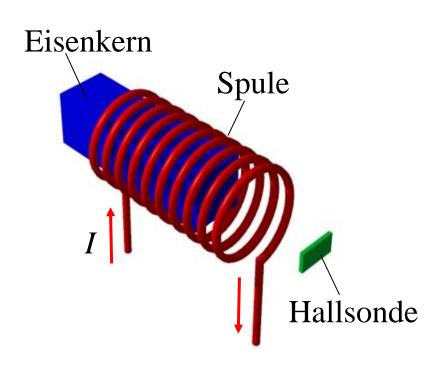
B-Feld steht senkrecht auf den Kreisflächen der Spulen.

Die Geschwindigkeit v der Elektronen ist nach oben gerichtet.

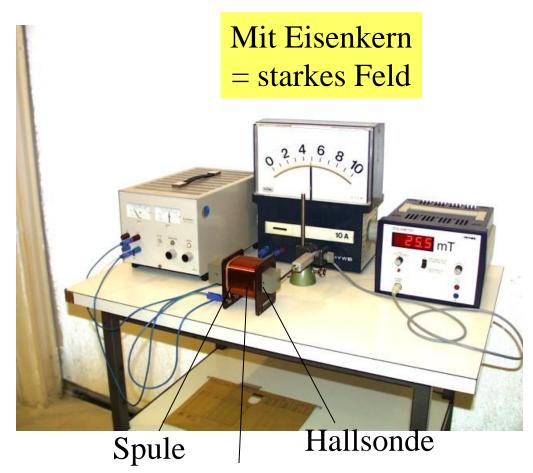


100

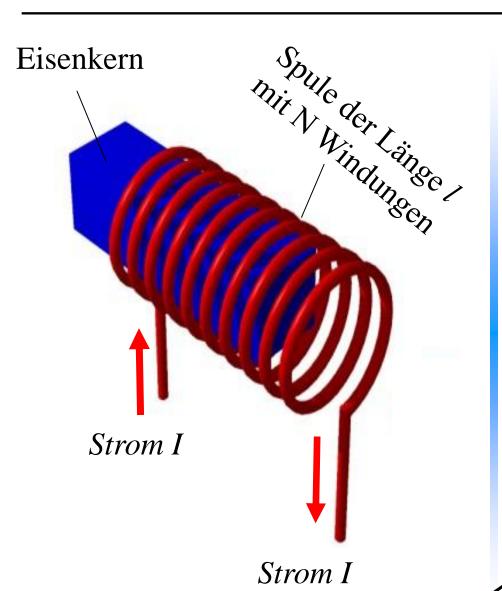
#### **Experiment:** B-Feld einer Spule ohne und mit Eisenkern



Durch Einbringen von Materie kann das Magnetfeld bei gleichem Spulenstrom signifikant erhöht werden.



Eisenkern



Effekte sind üblicherweise sehr klein

ohne Eisen 
$$B = \mu_0 \frac{N \cdot I}{l}$$

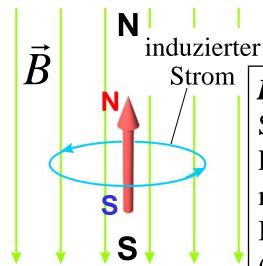
mit Eisen  $B = \mu_0 \cdot \mu_r \frac{N \cdot I}{l}$ 

 $\mu_r$  ist dabei die relative Permeabilität  $\chi_m$  heißt magnetische Suszeptibilität

$$\mu_r = \chi_m + 1$$

Material	$\chi_{\rm m} \cdot 10^6$	$\mu_{ m r}$
$H_2O$	-9	0.999991
Cu	-7.4	0.999993
Bi	-153	0.999847
Al	21.2	1.000021
<b>✓</b> Pt	264	1.000264
O <sub>2</sub> (flüssig)	3620	1.003620

#### Anschauliche Deutung



N

eigenes

dominantes

Dipolfeld

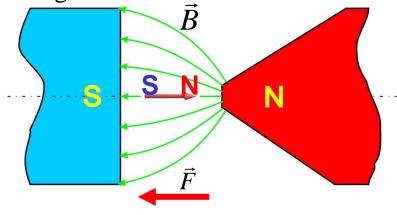
#### Diamagnet:

Stoff besitzt ohne B-Feld keine atomaren magnetische Dipole.
B-Feld erzeugt (induziert) dem Feld entgegengerichtete Dipole

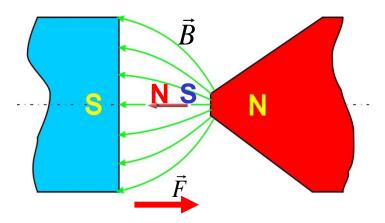
#### Paramagnet:

Stoff besitzt ohne B-Feld bereits atomare magnetische Dipole, die sich im B-Feld ausrichten.

**Diamagnetische Stoffe** werden im inhomogenen Feld in den Bereich kleinerer Feldstärke gedrängt

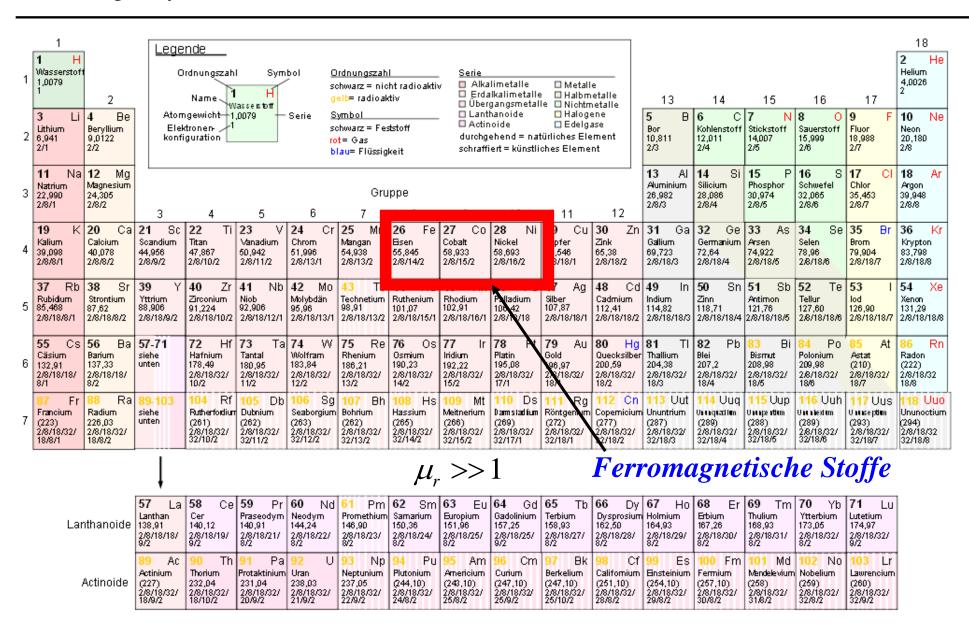


inhomogenes B-Feld



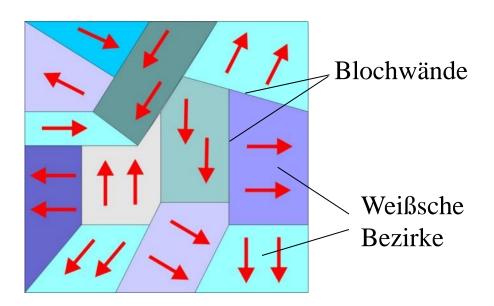
Paramagnetische Stoffe werden in den Bereich höherer Feldstärke gezogen.

103



# Ferromagnetika:

Jedes ferromagnetische Material besteht aus Bereichen mit permanenten magnetischen Dipolen, die man als "Weißsche Bezirke" bezeichnet. Sie sind durch "Blochsche Wände" getrennt.

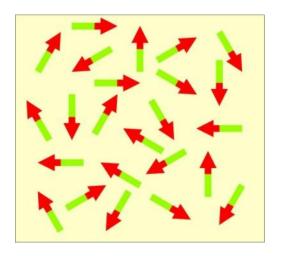


Innerhalb eines Weißschen Bezirks, sind alle atomaren Dipole durch Wechselwirkung miteinander in einer Vorzugsrichtung ausgerichtet. Durch ein äußeres Magnetfeld können die Weißschen Bezirke in eine Vorzugsrichtung polarisiert werden. Das geht solange, bis alle Bezirke in Richtung des erregten Feldes zeigen. Dann ist die "Sättigung" erreicht.

#### Hinweis:

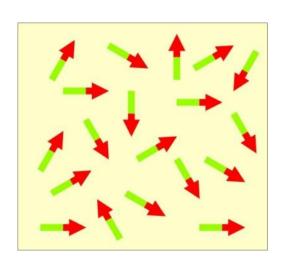
Diese Sättigung wird etwa erreicht bei B = 1.5 - 2 T

$$B = 0$$



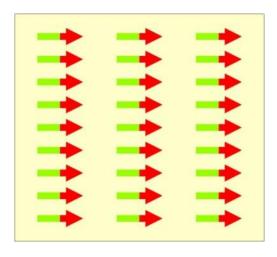
Alle Richtungen der Weißschen Bezirke sind mit gleicher Wahrscheinlichkeit vertreten. Der ferromagnetische Körper hat nach außen kein Magnetfeld.

$$0 < B < B_{S\"{attigung}}$$



Durch das äußere Magnetfeld werden die Weißschen Bezirke teilweise in Richtung dieses Feldes orientiert und zwar umso stärker, je stärker das Feld ist.

$$B=B_{\it S\"{attigung}}$$



Bei extrem starkem Feld sind alle Bezirke ausgerichtet. Damit ist die Sättigung erreicht.