technische universität
dortmund

LS 2 /
Informatik

Datenstrukturen, Algorithmen und Programmierung 2 (DAP2)

Dynamische Programmierung

Fibonacci-Zahlen

- $F(1) = 1$
- $F(2) = 1$
- $F(n) = F(n-1) + F(n-2)$

Dynamische Programmierung

$\mathrm{Fib}(n)$

1. **if** $n = 1$ **return** 1
2. **if** $n = 2$ **return** 1
3. **return** $\mathrm{Fib}(n-1) + \mathrm{Fib}(n-2)$

Dynamische Programmierung

Lemma 21

Die Laufzeit von $\mathrm{Fib}(n)$ ist $\boldsymbol{\Omega}(1{,}6^n)$.

Beweis

- Wir zeigen, dass die Laufzeit $T(n)$ von $\mathrm{Fib}(n)$ größer als $\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ ist.
- Damit folgt das Lemma wegen $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \geq 1{,}6$.
- Beweis per Induktion über n.
- (I.A.) Für $n = 1$ ist $T(1) \geq 1 \geq \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

  Für $n = 2$ ist $T(2) \geq 1 \geq \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2$

Dynamische Programmierung

Lemma 21

Die Laufzeit von $\mathrm{Fib}(n)$ ist $\boldsymbol{\Omega}(1{,}6^n)$.

Beweis

- (I.V.) Für $m < n$ ist $T(m) \geq \frac{1}{3}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^m$.

- (I.S.) Wir haben $T(n) \geq T(n-1) + T(n-2)$ da der Algorithmus für $n > 2$ $\mathrm{Fib}(n-1)$ und $\mathrm{Fib}(n-2)$ rekursiv aufruft. Nach (I.V.) gilt somit

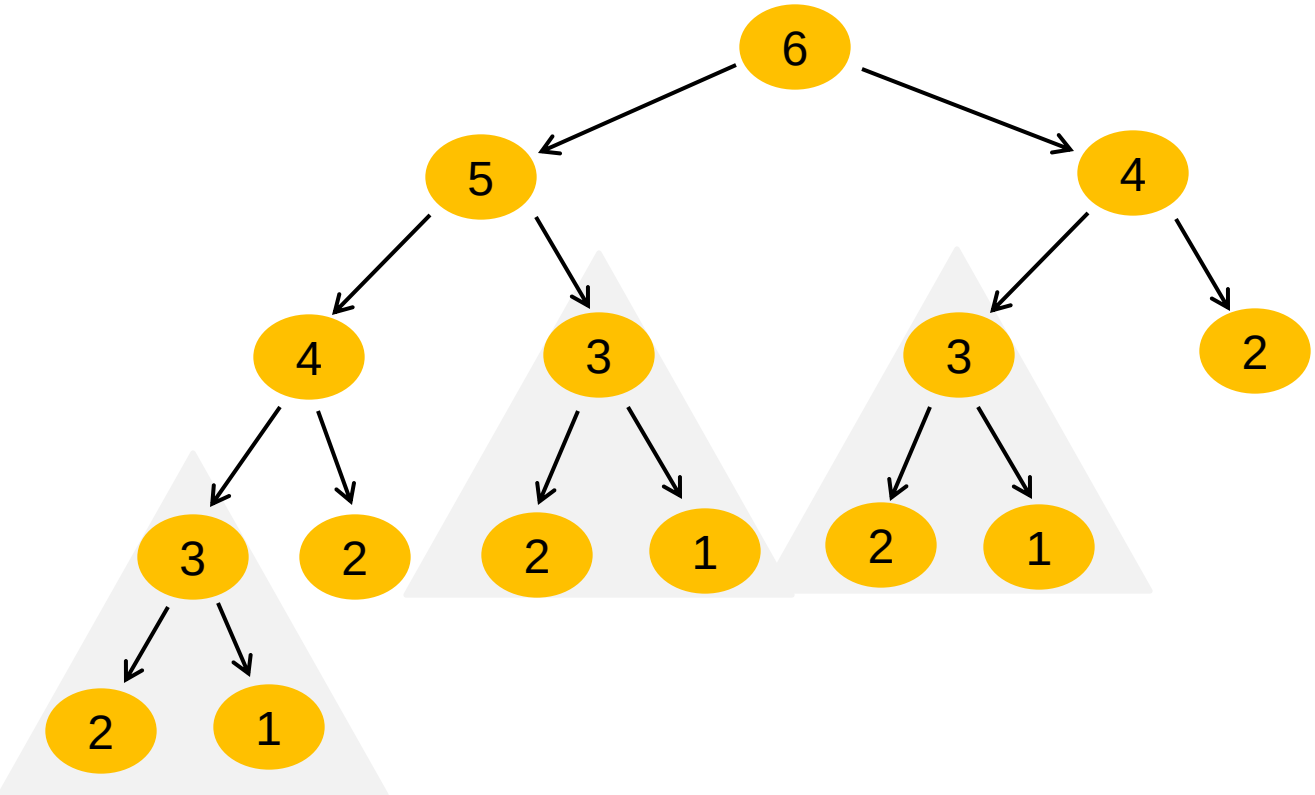
$$T(n) \geq T(n-1) + T(n-2) \geq \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} \cdot \left(1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}$$

Dynamische Programmierung

Warum ist die Laufzeit so schlecht?

- Betrachten wir den Rekursionbaum für Aufruf $\mathrm{Fib}(6)$



Bei der Berechnung von $\mathrm{Fib}(6)$ wird $\mathrm{Fib}(3)$ dreimal aufgerufen!

Es wird also mehrmals dieselbe Rechnung durchgeführt!

Bei großem n passiert dies sehr häufig!

Dynamische Programmierung

Memoisation

Memoisation bezeichnet die Zwischenspeicherung der Ergebnisse von Funktionsaufrufen eines rekursiven Algorithmus.

Dynamische Programmierung

Fib2(n)

1. Initialisiere Feld $F[1..n]$ ➢ Initialisiere Feld für Funktionswerte
2. **for** $i \leftarrow 1$ **to** n **do** ➢ Setze Feldeinträge auf 0
3. $\quad F[i] \leftarrow 0$
4. $F[1] \leftarrow 1$ ➢ Setze $F[1]$ auf korrekten Wert
5. $F[2] \leftarrow 1$ ➢ Setze $F[2]$ auf korrekten Wert
6. **return** FibMemo(n, F)

FibMemo(n, F)

1. **if** $F[n] > 0$ **then return** $F[n]$ ➢ Gib Wert zurück, falls ➢ schon berechnet
2. $F[n] \leftarrow \text{FibMemo}(n-1, F) + \text{FibMemo}(n-2, F)$ ➢ Ansonsten berechne Wert ➢ und speichere Wert ab
3. **return** $F[n]$ ➢ Gib Wert zurück

Dynamische Programmierung

Fib2(n)	Laufzeit:
1. Initialisiere Feld $F[1..n]$	$\mathbf{O}(n)$
2. **for** $i \leftarrow 1$ **to** n **do**	$\mathbf{O}(n)$
3. $F[i] \leftarrow 0$	$\mathbf{O}(n)$
4. $F[1] \leftarrow 1$	$\mathbf{O}(1)$
5. $F[2] \leftarrow 1$	$\mathbf{O}(1)$
6. **return** FibMemo(n, F)	$1 + T(n)$

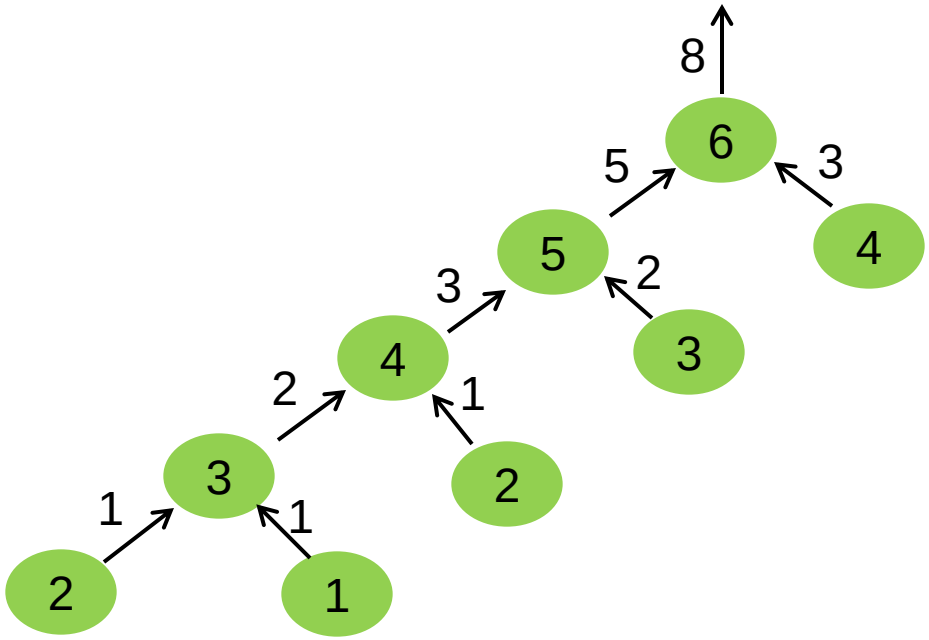
FibMemo(n, F)

1. **if** $F[n] > 0$ **then return** $F[n]$
2. $F[n] \leftarrow \text{FibMemo}(n-1, F) + \text{FibMemo}(n-2, F)$
3. **return** $F[n]$

Dynamische Programmierung

Beispiel

$\text{FibMemo}(6, F)$



i:	1	2	3	4	5	6
$F[i]$:	1	1	2	3	5	8

Dynamische Programmierung

FibMemo(n, F)

1. **if** $F[n] > 0$ **then return** $F[n]$
2. $F[n] \leftarrow \text{FibMemo}(n-1, F) + \text{FibMemo}(n-2, F)$
3. **return** $F[n]$

Welche Laufzeit hat FibMemo?

A) $\mathbf{O}(\log n)$
B) $\mathbf{O}(n)$
C) $\mathbf{O}(n \log n)$
D) $\mathbf{O}(2^n)$

Dynamische Programmierung

$\mathrm{FibMemo}(n, F)$

1. **if** $F[n] > 0$ **then return** $F[n]$
2. $F[n] \leftarrow \mathrm{FibMemo}(n-1, F) + \mathrm{FibMemo}(n-2, F)$
3. **return** $F[n]$

Laufzeit

- Jeder Aufruf $\mathrm{FibMemo}(m, F)$ generiert höchstens einmal die rekursiven Aufrufe $\mathrm{FibMemo}(m-1, F)$ und $\mathrm{FibMemo}(m-2, F)$
- Also wird für jedes $m < n$ die Funktion $\mathrm{FibMemo}(m, F)$ höchstens zweimal aufgerufen
- Ohne die Laufzeit für die rekursiven Aufrufe benötigt $\mathrm{FibMemo}$ $\mathbf{O}(1)$ Zeit
- Wir zählen jeden Aufruf mit Parameter $1..n$. Daher müssen wir den Aufwand für die rekursiven Aufrufe nicht berücksichtigen. Damit ergibt sich eine Laufzeit von $T(n) = \mathbf{O}(n)$

Dynamische Programmierung

Beobachtung

- Die Funktionswerte werden bottom-up berechnet

*Grundidee der **dynamischen Programmierung***

- Berechne die Funktionswerte iterativ und bottom-up

FibDynamischeProgrammierung(n)

1. Initialisiere Feld $F[1..n]$
2. $F[1] \leftarrow 1$
3. $F[2] \leftarrow 1$
4. **for** $i \leftarrow 3$ **to** n **do**
5. $\quad F[i] \leftarrow F[i-1] + F[i-2]$
6. **return** $F[n]$

} Laufzeit $\mathbf{O}(n)$

Dynamische Programmierung

Dynamische Programmierung

- Formuliere Problem rekursiv
- Löse die Rekursion „bottom-up“ durch schrittweises Ausfüllen einer Tabelle der möglichen Lösungen

Wann ist dynamische Programmierung effizient?

- Die Anzahl unterschiedlicher Funktionsaufrufe (Größe der Tabelle) ist klein
- Bei einer „normalen Ausführung“ des rekursiven Algorithmus ist mit vielen Mehrfachausführungen zu rechnen

Dynamische Programmierung

Analyse der dynamischen Programmierung

- Korrektheit: Für uns wird es genügen, eine Korrektheit der rekursiven Problemformulierung zu zeigen
  (für einen vollständigen formalen Korrektheitsbeweis wäre auch noch die korrekte Umsetzung des Auffüllens der Tabelle mittels Invarianten zu zeigen. Dies ist aber normalerweise offensichtlich)
- Laufzeit: Die Laufzeitanalyse ist meist recht einfach, da der Algorithmus typischerweise aus geschachtelten **for**-Schleifen besteht

Hauptschwierigkeit bei der Algorithmenentwicklung

- Finden der Rekursion

Dynamische Programmierung

Aufgabe

Entwickeln Sie jeweils einen Algorithmus für die Maximumssuche in einem Feld A

(a) nach dem Teile-und-Herrsche-Prinzip

(b) als gierigen Algorithmus

(c) mit Hilfe von dynamischer Programmierung

Dynamische Programmierung

Ein Spielzeugbeispiel

- Maximum von n Zahlen
- Eingabe: Array A der Größe n
- Ausgabe: Wert des Maximums der Zahlen in A

Ziel

- Dynamische Programmierung anhand dieses Beispiels durchspielen
- Natürlich keine Laufzeitverbesserung

Dynamische Programmierung

Entwicklung der Rekursionsgleichung

- Eingabe besteht aus n Elementen
- Idee: Ordne die Elemente von 1 bis n (das Eingabefeld A gibt z.B. eine solche Ordnung)
- Drücke optimale Lösung für die ersten i Elemente als Funktion der optimalen Lösung ersten $i-1$ Elemente aus

Beispiel

- Sei $\mathrm{Max}(i) = \max\limits_{1 \le j \le i}\{A[j]\}$

- Dann gilt $\mathrm{Max}(1) = A[1]$ (Rekursionsabbruch)
- $$\mathrm{Max}(i) = \max\{\mathrm{Max}(i-1), A[i]\}$$

Dynamische Programmierung

MaxDynamic(A)

1. $n \leftarrow \text{length}[A]$
2. Initialisiere Feld $\text{Max}[1..n]$
3. $\text{Max}[1] \leftarrow A[1]$
4. **for** $i \leftarrow 2$ **to** n **do**
5. $\quad \text{Max}[i] \leftarrow \max\{\text{Max}[i-1], A[i]\}$
6. **return** $\text{Max}[n]$

Wie kann man nur aus $\text{Max}[1..n]$ *den Index eines größten Elements von* A *herausfinden?*

- Sei j der größte Wert für den gilt $\text{Max}[j] > \text{Max}[j-1]$ (mit der Konvention $\text{Max}[0] = -\infty$)
- Dann ist j der gesuchte Index
- Beweis → Übung

Dynamische Programmierung

Was lernen wir aus der Maximumsberechnung?

- Wenn wir es mit Mengen zu tun haben, können wir eine Ordnung der Elemente einführen und die Rekursion durch Zurückführen der optimalen Lösung für i Elemente auf die Lösung für $i - 1$ Elemente erhalten
- Benötigt wird dabei eine Beschreibung der optimalen Lösung für $i - 1$ Elemente (hier nur der Wert der Lösung)
- Die Lösung selbst (der Index des Maximums) kann nachher aus der Tabelle rekonstruiert werden

Dynamische Programmierung

Problem: Partition

- Eingabe: Menge M mit n natürlichen Zahlen
- Ausgabe: Ja, gdw. man M in zwei Mengen L und R partitionieren kann, so dass $\sum_{x \in L} x = \sum_{x \in R} x$ gilt; nein sonst

Beispiel

- 4, 7, 9, 10, 13, 23
- 4 + 7 + 9 + 13 = 33
- 10 + 23 = 33
- Ausgabe: Ja

Dynamische Programmierung

Beobachtung

- Sei M eine Menge mit n natürlichen Zahlen.
  M kann genau dann in zwei Mengen L, R mit $\sum_{x \in L} x = \sum_{x \in R} x$ partitioniert werden, wenn es eine Teilmenge L von M gibt mit $\sum_{x \in L} x = W/2$, wobei $W = \sum_{x \in M} x$ die Summe aller Zahlen aus M ist.

Neue Frage

- Gibt es $L \subseteq M$ mit $\sum_{x \in L} x = W/2$?

- Gibt es $L \subseteq M$ mit $\sum_{x \in L} x = U$ für ein vorgegebenes U?

Dynamische Programmierung

Fragestellung

Gibt es $L \subseteq M$ mit $\sum_{x \in L} x = U$ für ein vorgegebenes U?

Beobachtungen

- Entscheidungsproblem (Antwort ist ja oder nein)
- Einfache Rekursion nicht möglich
  (die Lösung für $i - 1$ Elemente sagt i.a. nichts über die Lösung für i Elemente aus)
- Benötige daher alle Lösungen für $i - 1$ Elemente!

Dynamische Programmierung

Allgemeinere Frage

- Welche Zahlen lassen sich als Summe einer Teilmenge von M darstellen?
- Ausgabe: Feld $E[0 \ldots W]$ mit $E[j] = 1$, gdw. man j als Summe einer Teilmenge von M darstellen kann
- W ist die Summe aller Zahlen aus M

Dynamische Programmierung

Idee

- Vorgehen wie bei Max: Berechne Lösung für die ersten i Elemente
- Neu: Lösung ist nicht eine Zahl, sondern ein Feld $\rightarrow$ 2D Lösung

Dynamische Programmierung

Gesuchte Lösungen

- Sei $E(i,j) = 1$, wenn man die Zahl j als Summe einer Teilmenge der ersten i Zahlen aus M darstellen kann
- Sei $E(i,j) = 0$, sonst
- Zeile i von E entspricht einer Lösung für die Zahlen aus $M[1..i]$

Hinweis

- $E(..)$ bezeichnet eine Lösung eines Entscheidungsproblems
- $E[..]$ bezeichnet die vom Algorithmus berechnete Lösung (beide sollten natürlich gleich sein)

Dynamische Programmierung

Beispiel

- $M = \{13, 7, 10, 15\}$
- $E(1,20) = 0$, da man 20 nicht als Summe einer Teilmenge der ersten Zahl aus M darstellen kann
- $E(2,20) = 1$, da man $20 = 13 + 7$ als Summe einer Teilmenge der ersten beiden Zahlen aus M darstellen kann

Dynamische Programmierung

Rekursion (Struktur der Lösungen des Entscheidungsproblems)

- $E(i,j) = 1$, wenn $E(i-1,j) = 1$ oder ($j \geq M[i]$ und $E(i-1, j-M[i]) = 1$)
- $E(i,j) = 0$, sonst

Rekursionsabbruch

- $E(0,0) = 1$
  (Man kann die Null als Summe über die leere Menge darstellen)
- $E(0,j) = 0$ für $j > 0$
  (Man kann keine Zahl ungleich 0 als Summe über die leere Menge darstellen)

Dynamische Programmierung

PartitionDynamicProg(M)

1. $W \leftarrow 0$
2. **for** $i \leftarrow 1$ **to** length$[M]$ **do**
3. $\quad W \leftarrow W + M[i]$
4. **if** W ist ungerade **then return** 0
5. Initialisiere Feld $E[0..\text{length}[M]][0..W]$
6. **for** $i \leftarrow 0$ **to** length$[M]$ **do**
7. $\quad$ **for** $j \leftarrow 0$ **to** $W/2$ **do**
8. $\quad\quad$ **if** $j = 0$ **then** $E[i,j] \leftarrow 1$
9. $\quad\quad$ **else if** $i = 0$ **then** $E[i,j] \leftarrow 0$
10. $\quad\quad\quad$ **else if** $E[i-1,j] = 1$ **or** $\big(M[i] \leq j$ und $E\big[i-1, j-M[i]\big] = 1\big)$ **then** $E[i,j] \leftarrow 1$
11. $\quad\quad\quad\quad$ **else** $E[i,j] \leftarrow 0$
12. **return** $E[\text{length}[M], W/2]$

- Berechnen von W und
- Initialisierung von E
- Berechnung von E

Dynamische Programmierung

Beispiel: $M = \{1, 4, 3, 5, 7\}$

$M[1] = 1$

i \ j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2											
3											
4											
5											

Dynamische Programmierung

Beispiel: $M = \{1, 4, 3, 5, 7\}$

$M[2] = 4$

i \ j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0
3											
4											
5											

Dynamische Programmierung

Beispiel: $M = \{1, 4, 3, 5, 7\}$

$M[3] = 3$

i \ j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0
3	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0
4											
5											

Dynamische Programmierung

Beispiel: $M = \{1, 4, 3, 5, 7\}$

$M[4] = 5$

i \ j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0
3	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0
4	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
5											

Dynamische Programmierung

Beispiel: $M = \{1, 4, 3, 5, 7\}$

$M[5] = 7$

i \ j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0
3	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0
4	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
5	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1

Dynamische Programmierung

Lemma 22

Algorithmus $\mathrm{PartitionDynamicProg}$ ist korrekt.

Beweis

- $\mathrm{PartitionDynamicProg}$ berechnet zunächst die Summe W der Elemente aus M. Ist diese ungerade, so kann es keine Partition in zwei gleich große Teilmengen geben.
- Ansonsten berechnet der Algorithmus die Funktion E, mit
- $E[0,0] = 1$
- $E[0,j] = 0$ für alle $j > 0$
- $E[i,j] = 1$, gdw. $E[i-1,j] = 1$ oder ($j \geq M[i]$ und $E[i-1, j-M[i]] = 1$)
- Der Algorithmus gibt 1 zurück, gdw. $E[\mathrm{length}[M], W/2] = 1$.

Dynamische Programmierung

Lemma 22

Algorithmus $\mathrm{PartitionDynamicProg}$ ist korrekt.

Beweis

- Wir zeigen per Induktion über i:
- $E[i,j] = 1$, gdw. man j als Summe einer Teilmenge von $M[1..i]$ darstellen kann
- (I.A.) Für $i = 0, j = 0$ kann man j als Summe der leeren Teilmenge darstellen
  Für $i = 0, j > 0$, kann man j nicht als Summe einer Teilmenge der leeren Menge darstellen
- (I.V.) Für alle $k < i$ und alle j wird $E[k,j]$ korrekt berechnet
- (I.S.) Z.z. $E[i,j] = 1$, gdw. man j als Summe einer Teilmenge von $M[1..i]$ darstellen kann.

Dynamische Programmierung

Lemma 22

Algorithmus $\mathrm{PartitionDynamicProg}$ ist korrekt.

Beweis

- (I.S.) Z.z. $E[i,j] = 1$, gdw. man j als Summe einer Teilmenge von $M[1..i]$ darstellen kann.
- „⇐“ Kann man j als Summe einer Teilmenge von $M[1..i]$ darstellen, so kann man j entweder als Teilmenge von $M[1..i-1]$ darstellen oder als $M[i]$ vereinigt mit einer Teilmenge von $M[1..i-1]$. Im ersten Fall folgt aus (I.V.), dass $E[i-1,j] = 1$ ist und somit auch $E[i,j] = 1$. Im zweiten Fall muss die Teilmenge von $M[1..i-1]$ Summe $j - M[i]$ haben. Nach (I.V.) ist dann aber $E[i-1, j-M[i]] = 1$ und somit $E[i,j] = 1$.
- „⇒“ Ist $E[i,j] = 1$, so war entweder $E[i-1,j] = 1$ oder $E[i-1, j-M[i]] = 1$. Nach (I.V.) kann man entweder j oder $j - M[i]$ als Teilmenge von $M[1..i-1]$ darstellen. Somit kann man j als Teilmenge von $M[1..i]$ darstellen.

Dynamische Programmierung

Lemma 22

Algorithmus $\mathrm{PartitionDynamicProg}$ ist korrekt.

Beweis

Somit gilt $E[\mathrm{length}[M], W/2\,] = 1$ gdw. man $W/2$ als Summe einer Teilmenge von $M[1..\mathrm{length}[M]]$ darstellen kann.

Dynamische Programmierung

Laufzeitanalyse

Die Laufzeit wird durch die zwei geschachtelten **for**-Schleifen dominiert und ist höchstens $\mathbf{O}(1) \cdot n \cdot W$.

Erweiterung der $\boldsymbol{O}$-Notation auf zwei Variablen

$\mathbf{O}\big(f(n,m)\big) = \{g(n,m) | \exists n_0, m_0, c > 0,$ so dass für alle $n \geq n_0, m \geq m_0$ gilt, dass $g(n,m) \leq c \cdot f(n,m)\}$

Bemerkung

Diese Definition kann in konstruierten Fällen zu nicht gewünschten Aussagen führen! (z.B. wenn $g(1,m) = m^2$ ist und $g(n,m) = m$ für $n > 1$)

Dynamische Programmierung

Satz 23

Sei M eine Menge von n natürlichen Zahlen und W die Summe der Zahlen aus M. Algorithmus $\mathrm{PartitionDynamicProg}$ löst Partition in Zeit $\mathbf{O}(nW)$.

Beweis

- Die Korrektheit des Algorithmus folgt aus Lemma 22.
- Die Laufzeit ist offensichtlich $\mathbf{O}(nW)$.

Dynamische Programmierung

Bemerkung

- Partition ist ein NP-vollständiges Problem
- Damit gibt es wahrscheinlich keinen polynomiellen Algorithmus für Partition

Warum ist unser Algorithmus nicht polynomiell?

- Die Laufzeit hängt von W ab
- Sind die Zahlen aus M exponentiell groß, so ist die Laufzeit ebenfalls exponentiell