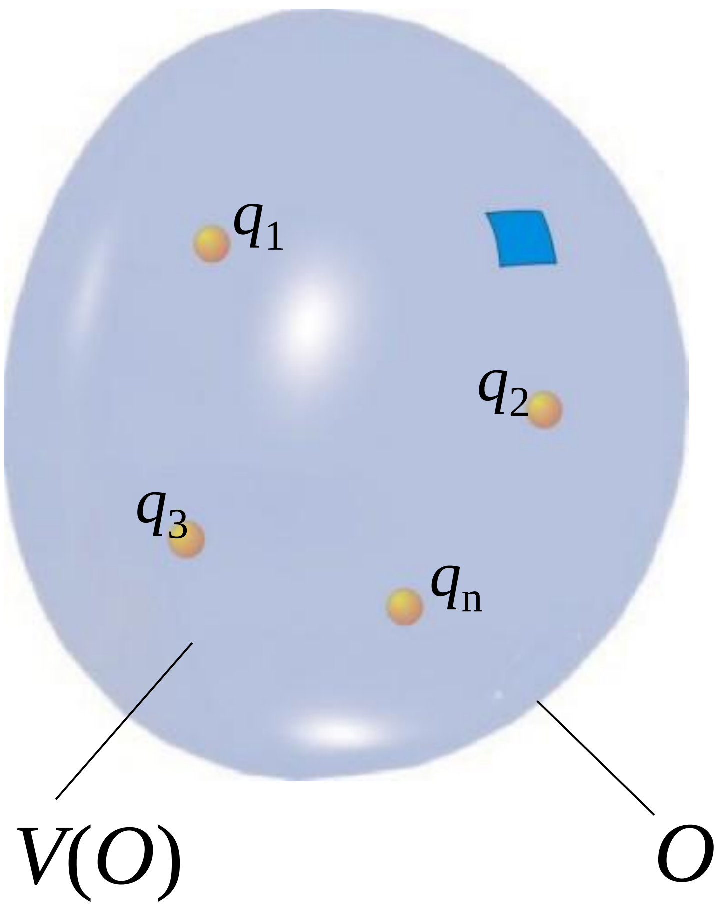
Inhalt der mathematischen Ergänzung zur Physik B2:

- Wiederholung Divergenz, Gauß-Integralsatz
- Rotation, Stokes-Integralsatz, Anwendungen
- Ladungen in elektrischen und magnetischen Feldern
- ***Die δ-Funktion, Die Kontinuitätsgleichung***
- Kondensator und Induktivität im Stromkreis
- Berechnung von Wechselstromnetzwerken
- Zusammenfassung der Maxwell-Gleichungen
- Berechnungen zur Wellenoptik
- Zusammenfassung der klassischen Physik
- Mathematische Wiederholung zu Wellen
- Die Schrödinger-Gleichung
- Die Mathematik des Wasserstoff-Atoms
- Der Aufbau des Periodensystems

Dichte einer Ladungsverteilung



Bei einer kontinuierlichen Ladungsverteilung integriert man über alle Ladungselemente *dq* im von der geschlossenen Oberfläche *O* umschlossenen Volumen:

$$\sum_{i=1}^{n} q_{\mathrm{i}} \quad \Rightarrow \quad \iiint\limits_{V(O)} dq$$

Mit der *Ladungsdichte*

$$\rho(\vec{r}) = \frac{dq(\vec{r})}{dV}$$

folgt:

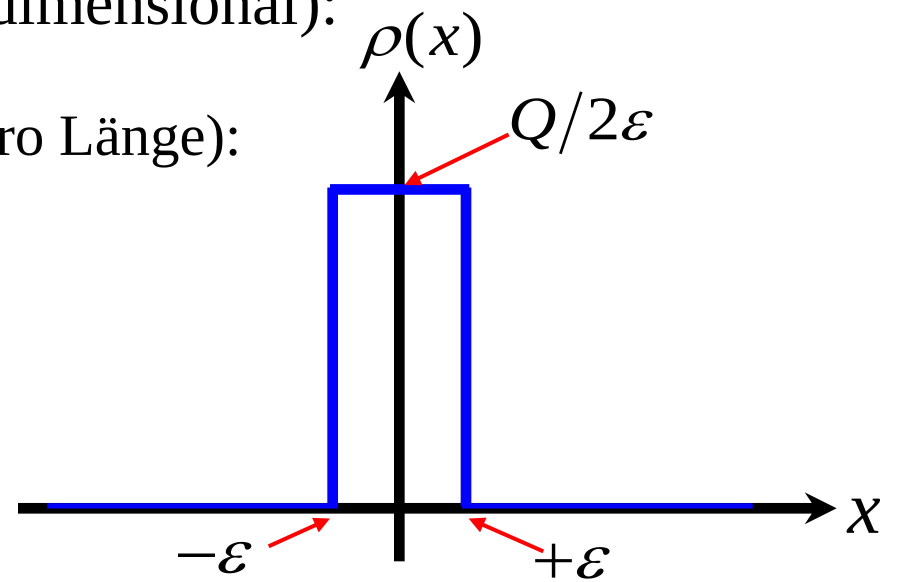
$$\iiint\limits_{V(O)} dq = \iiint\limits_{V(O)} \rho(\vec{r})\, dV$$

Aber was macht man eigentlich bei Punktladungen ??

Die Ladungsdichte einer Punktladung (eindimensional):

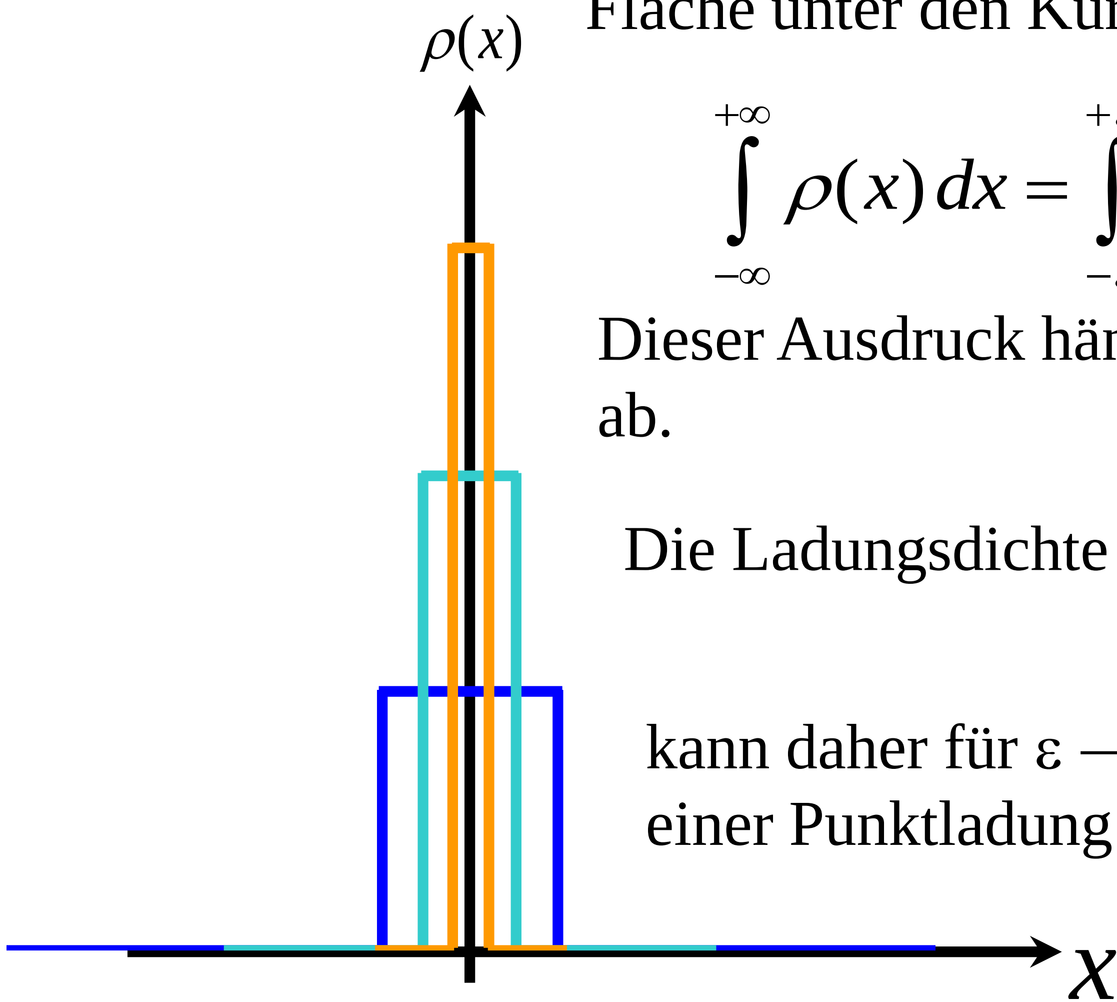
Wir betrachten eine Ladungsdichte (Ladung pro Länge):

$$\rho(x) = \begin{cases} \dfrac{Q}{2\varepsilon} & \text{für } |x| \le \varepsilon \\ 0 & \text{für } |x| > \varepsilon \end{cases}$$



Die Ladung Q ist also im Raumbereich der Länge 2ε konzentriert.
Die gesamte im Raum vorhandene Ladung q_{ges} ergibt sich durch Integration über das Volumen (in einer Dimension ist dies eine Länge):

$$q_{\text{ges}} = \int \rho(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x)\,dx = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{Q}{2\varepsilon}dx = \frac{Q}{2\varepsilon}2\varepsilon = Q$$



Wenn nun ε → 0 betrachtet wird, dann ziehen sich die Kurven immer mehr zusammen, wobei allerdings die Fläche unter den Kurven konstant bleibt, denn es war:

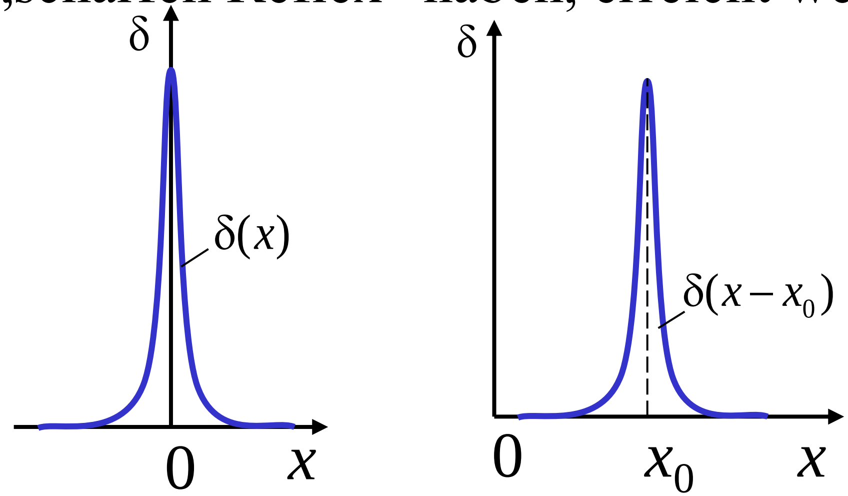
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x)\,dx = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{Q}{2\varepsilon}dx = \frac{Q}{2\varepsilon}2\varepsilon = Q$$

Dieser Ausdruck hängt nicht von der Intervall-Länge ε ab.

Die Ladungsdichte $\rho(x) = \begin{cases} \dfrac{Q}{2\varepsilon} & \text{für } |x| \le \varepsilon \\ 0 & \text{für } |x| > \varepsilon \end{cases}$

kann daher für ε → 0 als Ladungsdichte einer Punktladung interpretiert werden.

Dies kann auch mit kontinuierlichen Funktionen, die an einer Stelle einen „scharfen Reflex“ haben, erreicht werden.



Die ***δ*-Funktion (Delta-Funktion)** ist eine infinitesimale „Nadelfunktion“, die am Argument x_0 „über alle Grenzen wächst“ und außerhalb, d.h. für $x \neq x_0$, verschwindet. Dabei muss aber immer gelten:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)dx = 1$$

Die δ-Funktion kann als „Grenzwert“ von kontinuierlichen, „normalen“ Funktionen aufgefasst werden. Diese Darstellung ist aber nicht eindeutig. Beispielsweise gilt:

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}, \quad \delta(x) = \lim_{L\to\infty} \frac{1}{\pi}\frac{\sin(Lx)}{x}$$

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\varepsilon^2}\right)$$

Für die Integrale über diese Funktionen ergibt sich jeweils:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi}\frac{\sin(Lx)}{x}dx$$

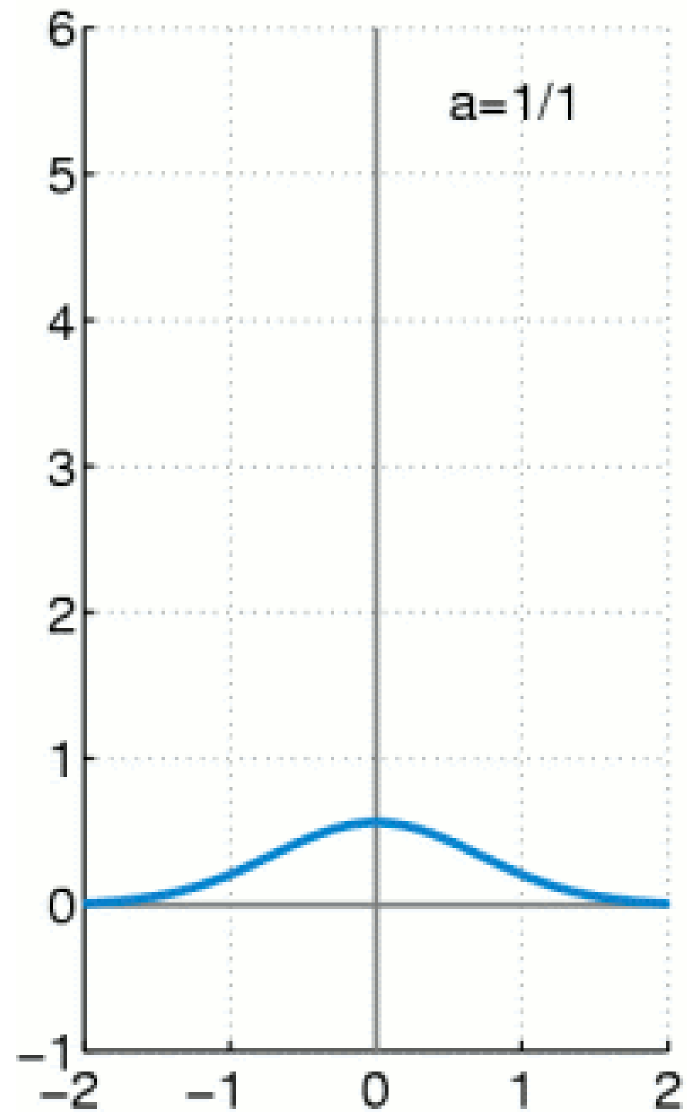
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\varepsilon^2}\right)dx = 1$$

Beispiel: ***Gauß-Verteilung***

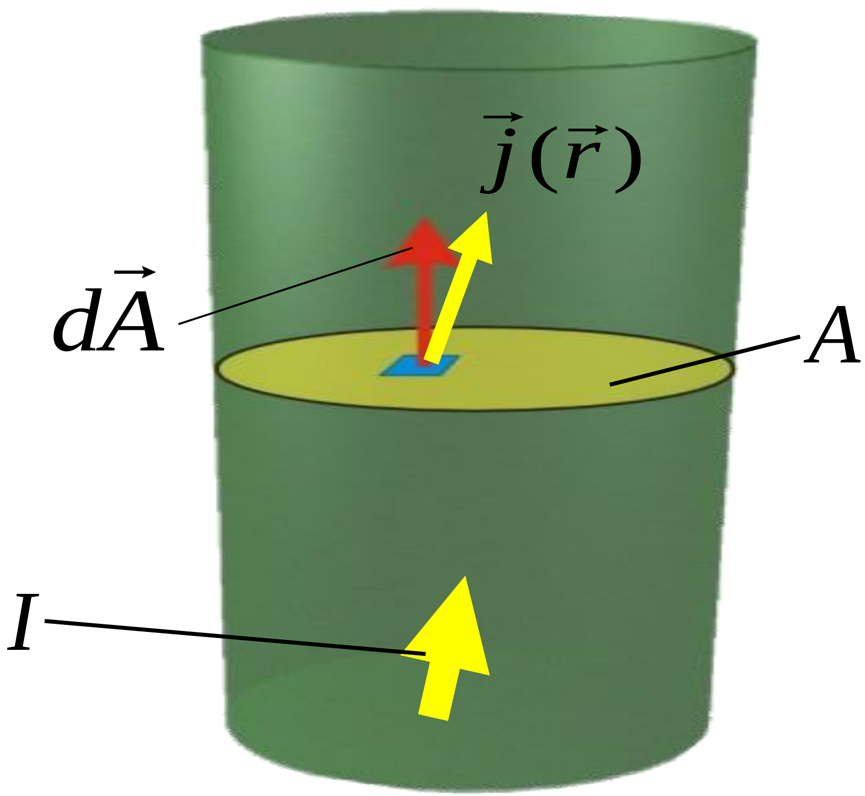
$$\delta_a(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} e^{-x^2/2a}$$

für a $\longrightarrow$ 0 wird die Funktion immer schmaler und höher, der Flächeninhalt bleibt jedoch immer unverändert Eins.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_a(x)dx = 1$$



Dichte einer Stromverteilung



Der Strom dI, der durch eine Fläche dA fließt ist gegeben durch:

$$dI = \vec{j} \cdot d\vec{A}$$

Dieser Zusammenhang definiert den Vektor der Stromdichte. Dabei ist der Vektor des Flächenelementes wie vorher beim elektrischen oder magnetischen Fluss definiert.

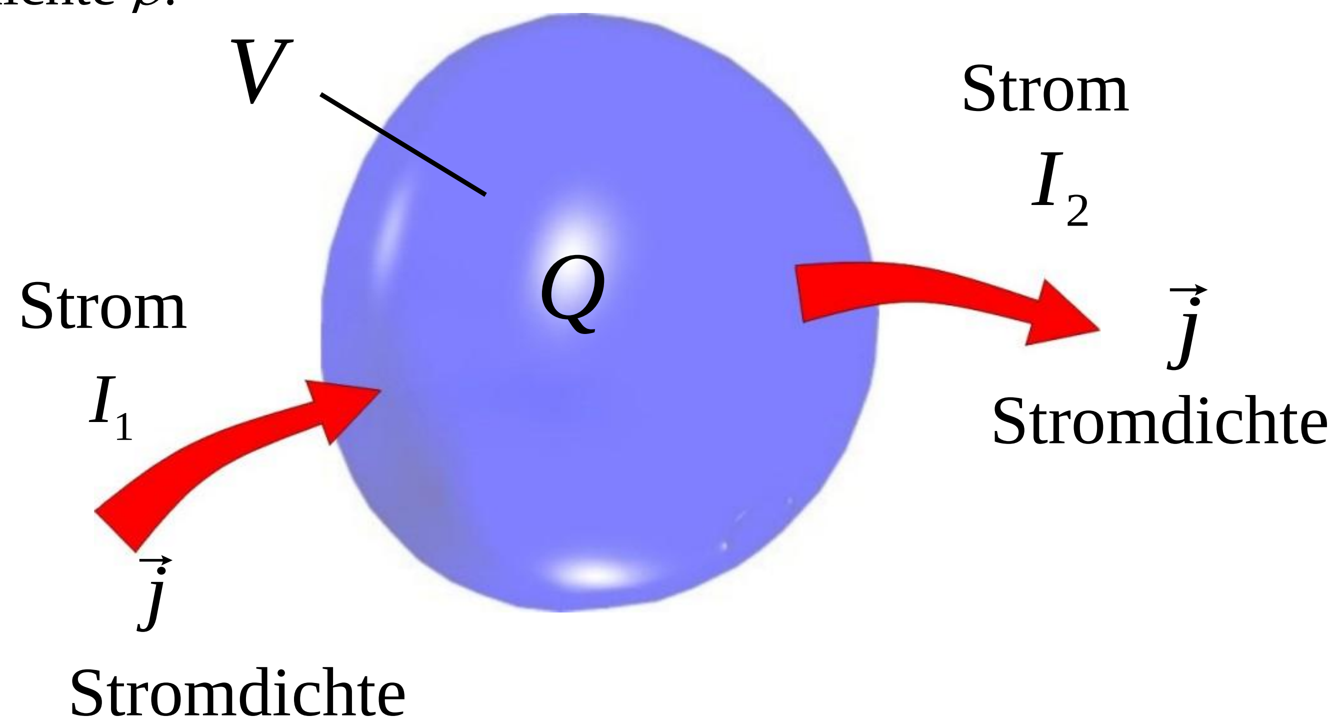
Der Gesamtstrom I, der durch eine Fläche A fließt, lässt sich mit der Stromdichte dann folgendermaßen ausdrücken:

$$I = \iint_A \vec{j} \cdot d\vec{A}$$

Wenn der Strom überall konstant ist und senkrecht durch die Fläche A fließt, dann gilt einfach: $j = I/A$

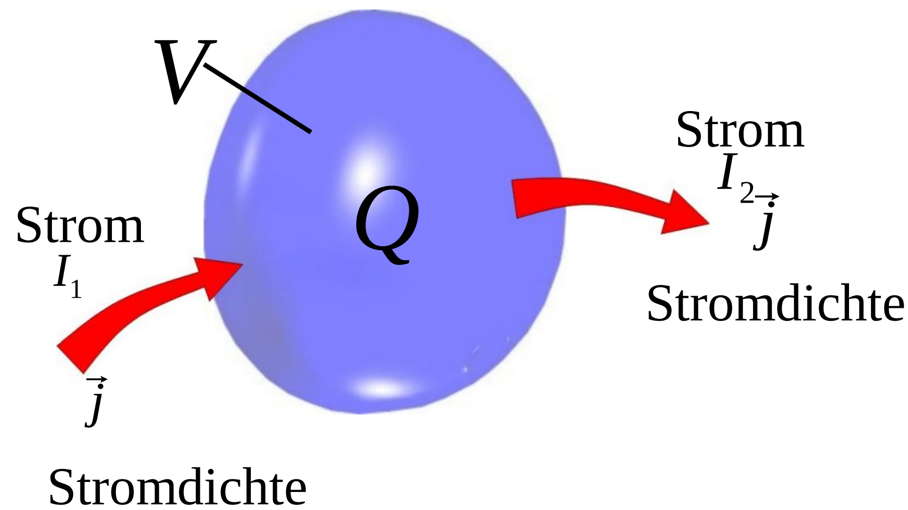
Ladung in einem abgeschlossenen Volumen

Wir betrachten ein abgeschlossenes Volumen *V*, in dem sich eine Ladungsmenge *Q* befindet. Solange keine Ladungen durch die Oberfläche treten (= Ströme) bleibt die Ladungsmenge konstant. Eine Strom I durch die Oberfläche (Ladungstransport in Volumen hinein, bzw. heraus ändert die Ladungsmenge *Q* und damit natürlich auch Ladungsdichte ρ.



Die Ladung im Volumen ist:

$$Q = \iiint_V \rho \, dV$$



In das Volumen *V* hinein bzw. heraus fließt der Netto-Strom:

$$I_g = \sum_i I_i = \iint_A \vec{j} \cdot d\vec{A}$$

Der Nettostrom führt zu einer zeitlichen Veränderung der Ladung Q im Volumen V

$$I = -\frac{\partial Q}{\partial t}$$

Man beachte das Vorzeichen: Ein aus dem Volumen kommender Strom wird positiv gezählt.

Einsetzen der Ausdrücke für *Q* und *I* ergibt sofort:

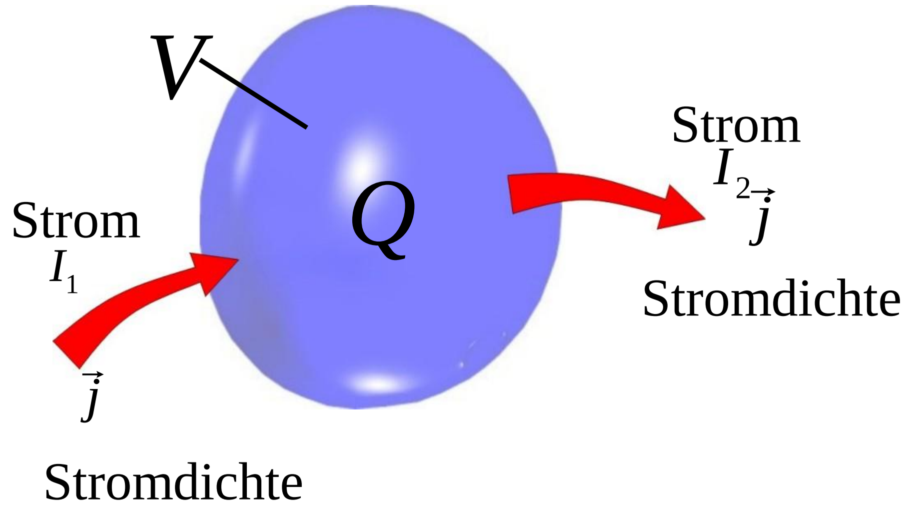
$$\iint_A \vec{j} \cdot d\vec{A} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\iiint_V \rho(\vec{r}, t) dV \right) = 0$$

Übrigens ist:

$$\boxed{\vec{j} = \rho \vec{v}}$$

Wegen des Gaußschen Satzes gilt:

$$\iint_A \vec{j} \cdot d\vec{A} = \iiint_{V(A)} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{j} \right) dV$$



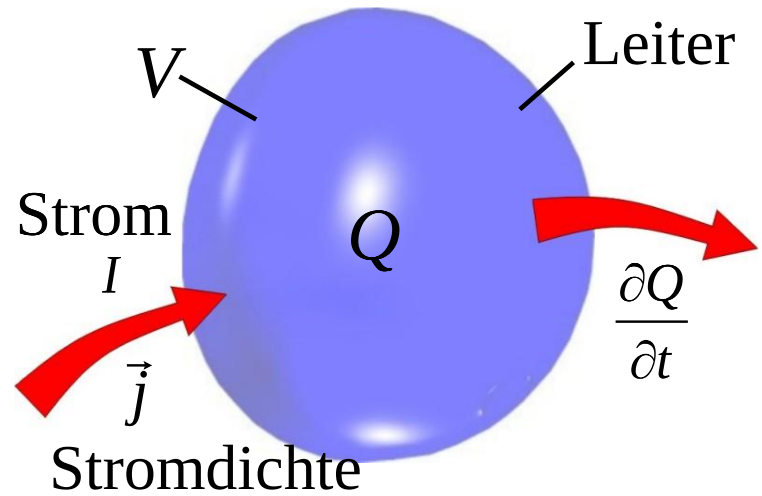
Dies in die letzte Gleichung eingesetzt ergibt:

$$\iiint_V \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r},t) \right) dV + \iiint_V \frac{\partial \rho(\vec{r},t)}{\partial t} dV = 0$$

Da dies für beliebige Volumina V gilt, kann die Gleichung nur erfüllt werden, wenn bereits die Integranden übereinstimmen, also folgt:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r},t) + \frac{\partial \rho(\vec{r},t)}{\partial t} = 0$$

Es ergibt sich also der folgende Zusammenhang zwischen der Strom- und der Ladungsdichte:



$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{j}(\vec{r},t)+\frac{\partial\rho(\vec{r},t)}{\partial t}=0}$$

<u>Bemerkungen:</u>

- Dies ist die so genannte ***Kontinuitätsgleichung***.
- Die obige Gleichung bedeutet anschaulich, dass jede räumliche Veränderung des Stromflusses von einer zeitlichen Veränderung der Ladungsdichte begleitet wird. Dies ist das Prinzip der Ladungserhaltung ausgedrückt durch die Strom- und Ladungsdichte.
- Im Fall stationärer Ströme, d.h. im Fall der Magnetostatik, gilt: $\vec{\nabla}\cdot\vec{j}(\vec{r})=0$
- Die Quellstärke der Stromdichte ist also durch die zeitliche Änderung der Ladungsdichte gegeben:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{j}(\vec{r},t)=div\vec{j}=-\frac{\partial\rho(\vec{r},t)}{\partial t}$$

Kontinuitätsgleichung und Maxwell-Gleichungen

Die 4. Maxwellsche Gleichung lautet:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Wir berechnen auf beiden Seiten die Divergenz und erhalten:

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{B} \right) = \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

Für 2 beliebige Vektoren gilt immer: $\vec{a} \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b} \right) = 0$

weil der aus dem Kreuzprodukt resultierende Vektor $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ senkrecht auf dem Vektor $\vec{a}$ steht.

Übertragen gilt das auch für die Vektoroperation „Nabla“, also $\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{B} \right) = 0$

Damit folgt sofort:

$$0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\varepsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \right)$$

$$0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}\right)$$

Wegen der ersten Maxwell-Gleichung

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow \varepsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho$$

folgt für die rechte Seite der obigen Gleichung:

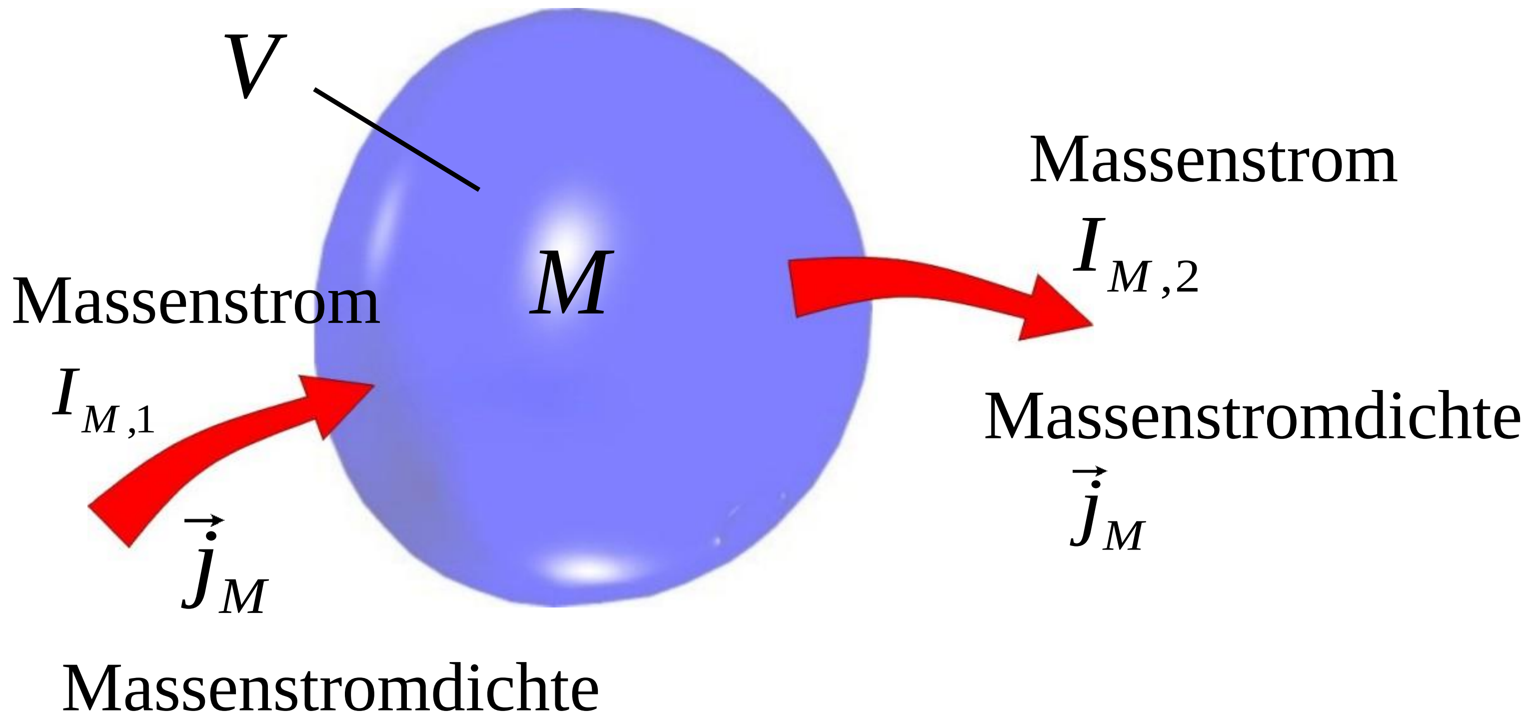
$$0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad \longrightarrow \quad \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r},t) + \frac{\partial \rho(\vec{r},t)}{\partial t} = 0}$$

Dies ist wieder die Kontinuitätsgleichung, die die Ladungserhaltung eines abgeschlossenen Systems widerspiegelt. Damit ist gezeigt, dass die Ladungserhaltung bereits in den Maxwell-Gleichungen enthalten ist.

weiteres Beispiel für die Anwendung der Kontinuitätsgleichung:

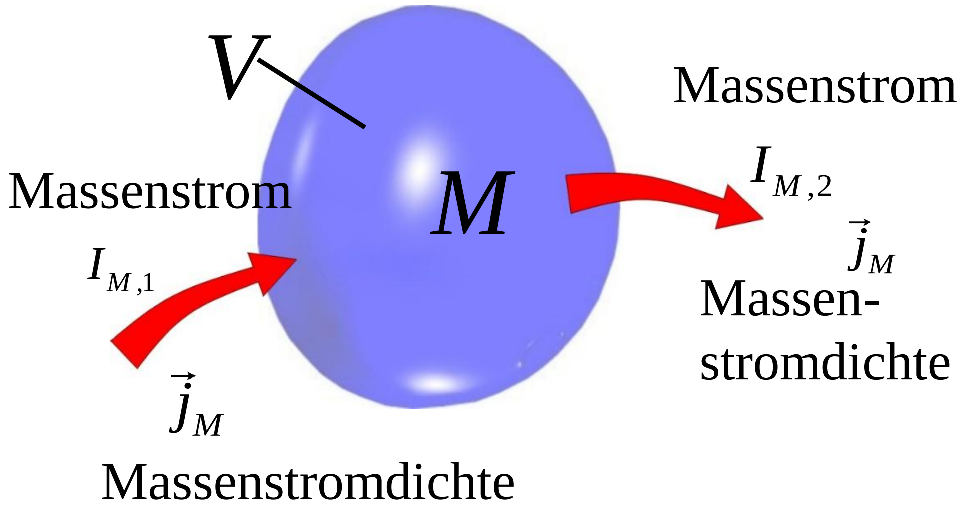
Dynamik von Flüssigkeiten und Gasen:

Hier ändert sich die Masse M innerhalb eines festen Volumens nur, wenn der Netto-Massenstrom durch die Oberfläche verschieden von Null ist. Mit der Änderung der Masse M ist natürlich eine Änderung Massendichte ρ_M verbunden.



Die Masse im Volumen ist:

$$M = \iiint_V \rho_M \, dV$$



In das Volumen V hinein bzw. heraus fließt der Netto-Massenstrom:

$$I_{M,g} = \sum_i I_{M,i} = \iint_A \vec{j}_M \cdot d\vec{A}$$

Der Netto-Massenstrom führt zu einer zeitlichen Veränderung der Masse M im Volumen V

$$I_M = -\frac{\partial M}{\partial t}$$

Man beachte das Vorzeichen: Ein aus dem Volumen kommender Strom wird positiv gezählt.

Einsetzen der Ausdrücke für M und I_M ergibt sofort:

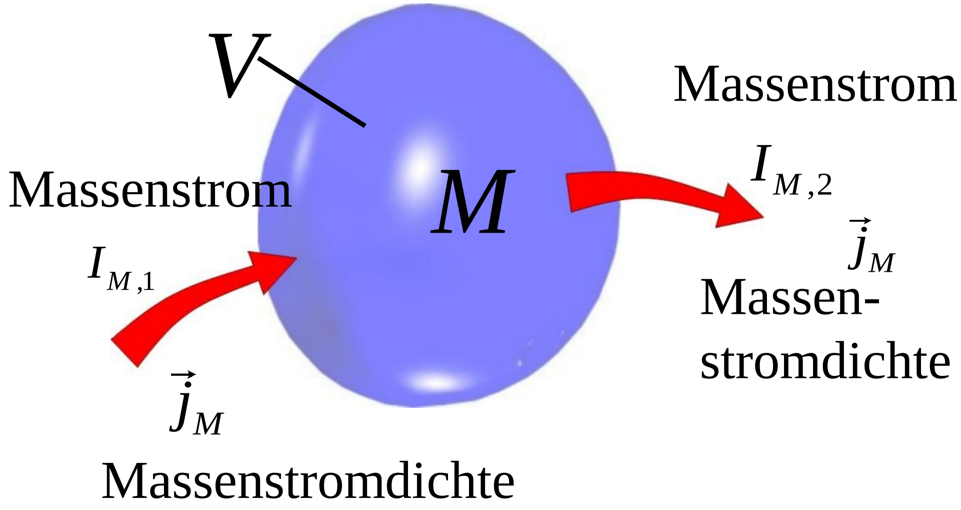
$$\iint_A \vec{j}_M \cdot d\vec{A} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\iiint_V \rho_M(\vec{r},t)\, dV \right) = 0$$

Übrigens ist auch hier:

$$\boxed{\vec{j}_M = \rho_M \vec{v}}$$

In völliger Analogie gilt dann auch hier:

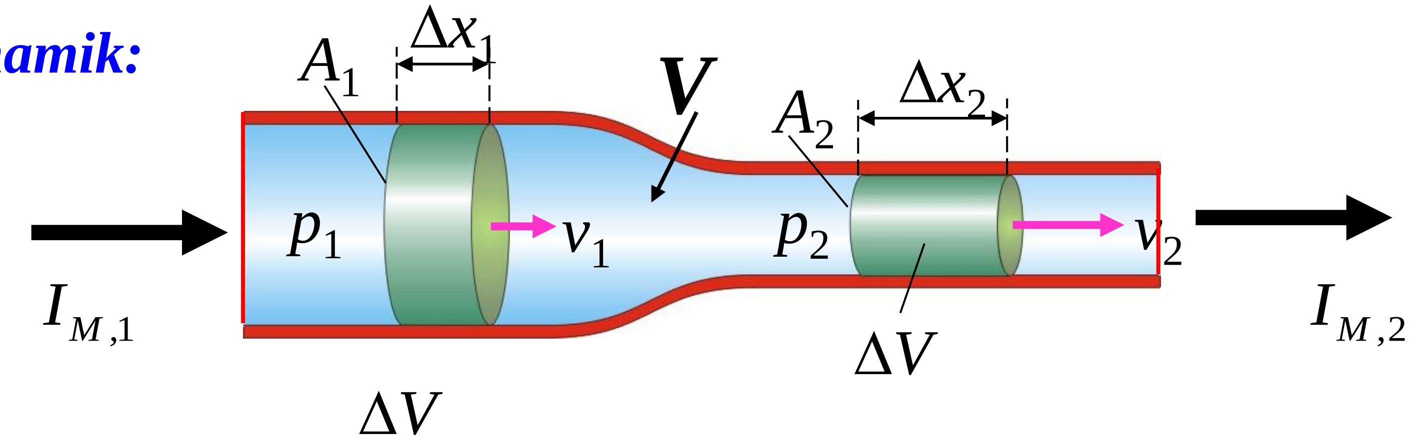
$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{j}_M(\vec{r},t)+\frac{\partial\rho_M(\vec{r},t)}{\partial t}=0}$$



Bemerkungen:

- Dieser Zusammenhang ist eine andere Variante der ***Kontinuitätsgleichung***.
- Die obige Gleichung bedeutet anschaulich, dass jede räumliche Veränderung des Massenstromflusses von einer zeitlichen Veränderung der Massendichte begleitet wird. Dies ist das Prinzip der ***Massenerhaltung*** ausgedrückt durch die Strom- und Ladungsdichte.
- Im Fall stationärer Massenströme, gilt: $\vec{\nabla}\cdot\vec{j}_M(\vec{r})=0$
- Die Quellstärke der Massenstromdichte ist also durch die zeitliche Änderung der Massendichte gegeben: $\vec{\nabla}\cdot\vec{j}_M(\vec{r},t)=div\vec{j}_M=-\frac{\partial\rho_M(\vec{r},t)}{\partial t}$

Hydrodynamik:



Fluss einer inkompressiblen Flüssigkeit durch ein Rohr mit verändertem Querschnitt *A*. Hier kann sich also die Massendichte zeitlich nicht ändern, es gilt daher

$$\iint_A \vec{j}_M \cdot d\vec{A} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\iiint_V \rho_M(\vec{r},t)dV\right) = 0$$

$$\rightarrow \iint_A \vec{j}_M \cdot d\vec{A} = I_{M,g} = 0$$

bzw. $\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_M(\vec{r}) = 0$

Es gibt keinen Nettomassenstrom bezüglich eines vorgegebenen Volumens V

$$I_{M,1} + I_{M,2} = 0$$

Bei reibungsloser Flüssigkeit ist dann die Fließgeschwindigkeit über den Querschnitt konstant und es gilt $A_1 v_1 = -A_2 v_2$