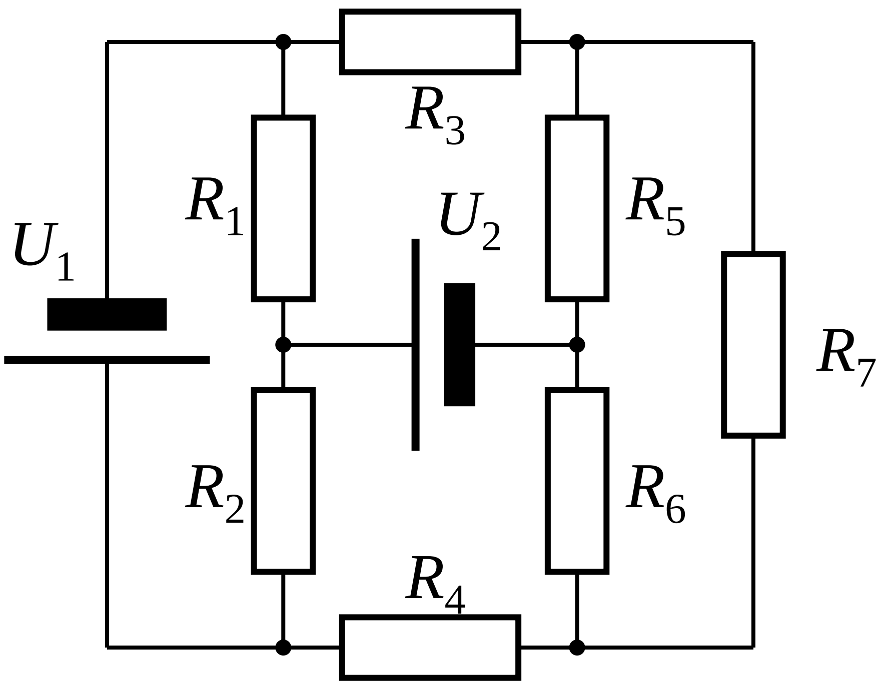
Inhalt der mathematischen Ergänzung zur Physik B2:

- Wiederholung Divergenz, Gauß-Integralsatz
- Rotation, Stokes-Integralsatz, Anwendungen
- Ladungen in elektrischen und magnetischen Feldern
- Die δ-Funktion, Die Kontinuitätsgleichung
- ***Kondensator und Induktivität im Stromkreis***
- Berechnung von Wechselstromnetzwerken
- Zusammenfassung der Maxwell-Gleichungen
- Berechnungen zur Wellenoptik
- Zusammenfassung der klassischen Physik
- Mathematische Wiederholung zu Wellen
- Die Schrödinger-Gleichung
- Die Mathematik des Wasserstoff-Atoms
- Der Aufbau des Periodensystems

Kirchhoffsche Regeln

Bestimmung von Spannungen und Strömen in einem beliebig kompli-zierten ***Netzwerk* ?**

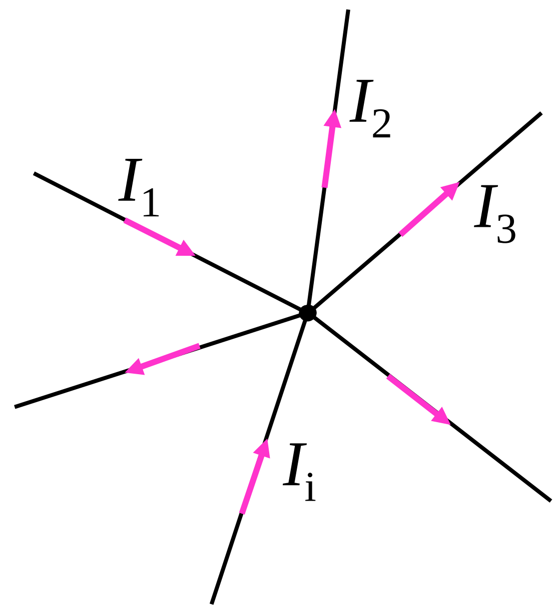
<u>Beispiel:</u>



Zur Lösung derartiger Probleme benutzt man die *„Kirchhoffschen Regeln"*

1. Die Knotenregel

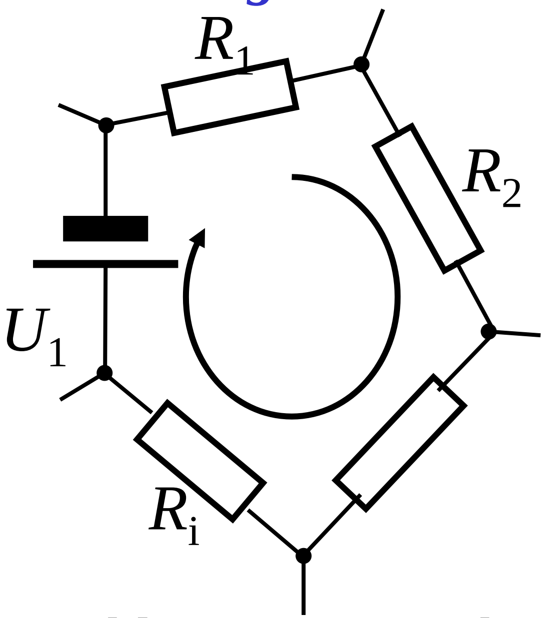
In jedem Knotenpunkt verschwindet die Summe aller Ströme:



$$\sum_{i=1}^{n} I_i = 0$$

Dies ist Folge der Ladungserhaltung. Keine Veränderung der Ladungsträger-dichte mit der Zeit.

2. Die Maschenregel



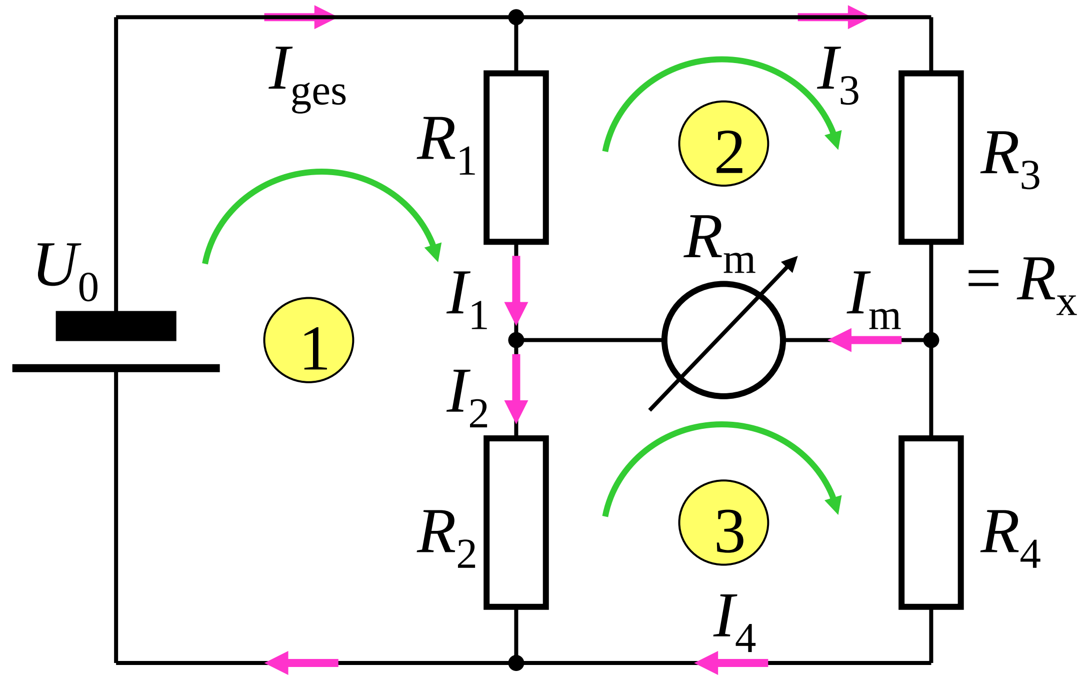
In jeder geschlossenen Masche verschwindet die Summe aller Spannungen

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} U_i = 0}$$

Dies folgt bei Gleichspannungen und nicht zu hohen Frequenzen aus:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \quad \text{oder} \quad rot\vec{E} = 0$$

Beispiel: Wheatstonsche Brücke



$R_3 = R_x$ sei unbekannt.
Variiere Verhältnis R_1/R_2 so, dass $I_m = 0$ wird.
(Kompensations-Methode zur Messung von Widerständen)

Masche 1: $-U_0 + R_1 I_1 + R_2 I_2 = 0$ (1)

Masche 2: $I_3 R_3 + I_m R_m - R_1 I_1 = 0$ (2)

Masche 3: $I_4 R_4 - I_2 R_2 - I_m R_m = 0$ (3)

Knoten : $I_{ges} = I_1 + I_3 = I_2 + I_4$ (4)

$I_1 + I_m = I_2$ (5)

$I_3 = I_m + I_4$ (6)

Mit diesen 6 Gleichungen lassen sich die Ströme I_1 ... I_4, I_m und I_{ges} berechnen.
Für $I_m = 0$ gilt dann:

(5) $\Rightarrow$ $I_1 = I_2$

(6) $\Rightarrow$ $I_3 = I_4$

Daraus folgt

(2) $\Rightarrow$ $I_3 R_x - I_1 R_1 = 0$

(3) $\Rightarrow$ $I_3 R_4 - I_1 R_2 = 0$

und weiter

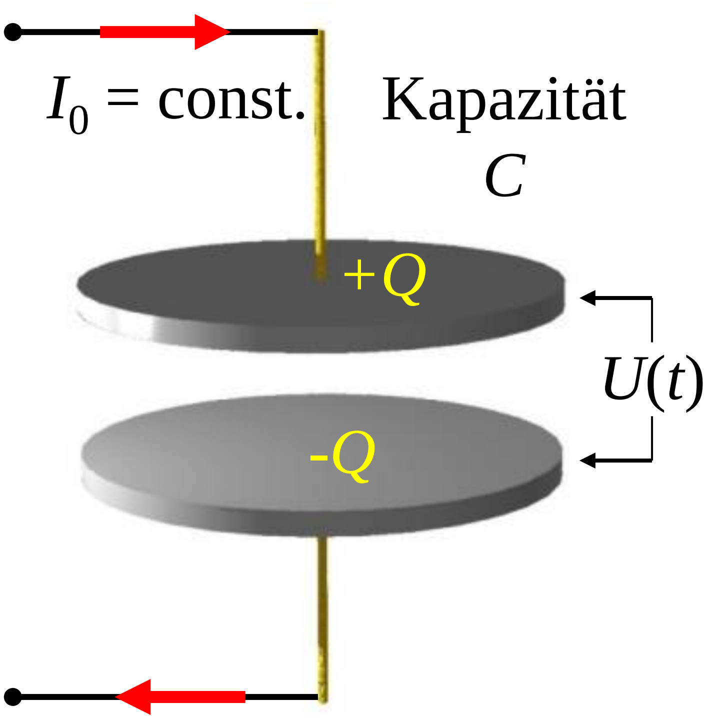
$$\frac{R_x}{R_4} = \frac{R_1}{R_2}$$

Auflösen nach R_x gibt dann

$$\boxed{R_x = R_4 \frac{R_1}{R_2}}$$

Der Widerstand R_4 ist als Kalibrierwiderstand hochgenau bekannt, die Widerstände R_1, R_2 sind oft als Widerstandsdraht ausgeführt, da nur das Verhältnis der Widerstände wichtig ist.

Schaltungen mit Widerständen und Kondensatoren



Der Strom I lädt oder entlädt den Kondensator C. Hier soll zunächst der idealisierte Fall ohne Ohmschen Widerstand R betrachtet werden.

Die Ladung im Kondensator C ist zunächst

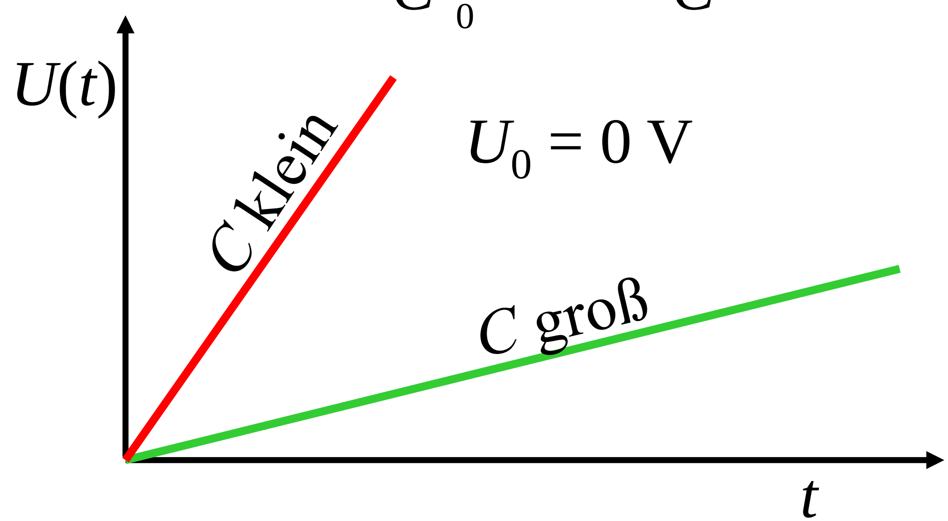
$$Q = CU$$

Dann gilt für den Ladestrom

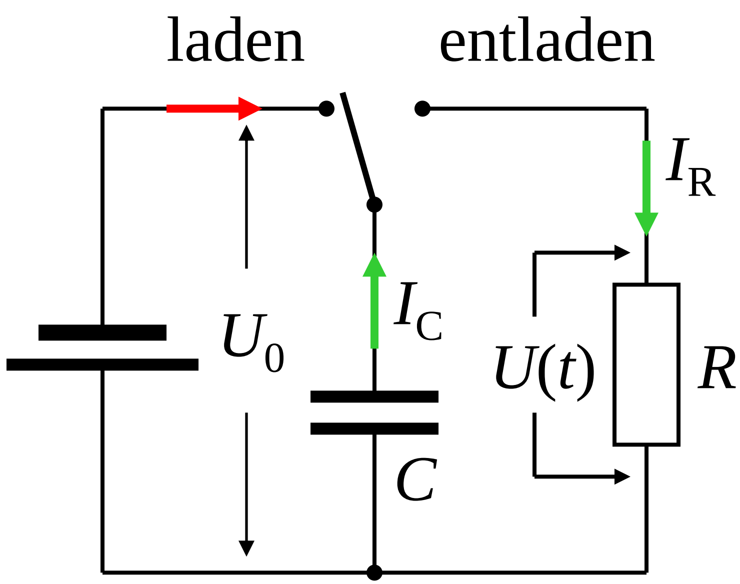
$$I_0 = \frac{dQ}{dt} = C\frac{dU}{dt} = C\dot{U}$$

Die Lösung dieser einfachen DGL lautet

$$U(t) = \frac{1}{C}\int_0^t I_0 dt' = \frac{I_0}{C}t + U_0$$



• *Entladen eines Kondensators*



Zunächst wird der Kondensator über den Schalter mit der Batterie verbunden und lädt sich auf die Spannung U_0 auf. Danach schaltet man auf den Widerstand *R* um, so dass über ihn der Kondensator entladen wird.

Zunächst gilt wegen der Maschenregel

$$U_C + U_R = 0$$

und damit wegen $I_R = I_C = I$

$$\frac{Q}{C} + RI = 0$$

Wir leiten nach der Zeit t ab und erhalten

$$\frac{1}{RC} I + \frac{dI}{dt} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{dI}{I} = -\frac{1}{RC} dt$$

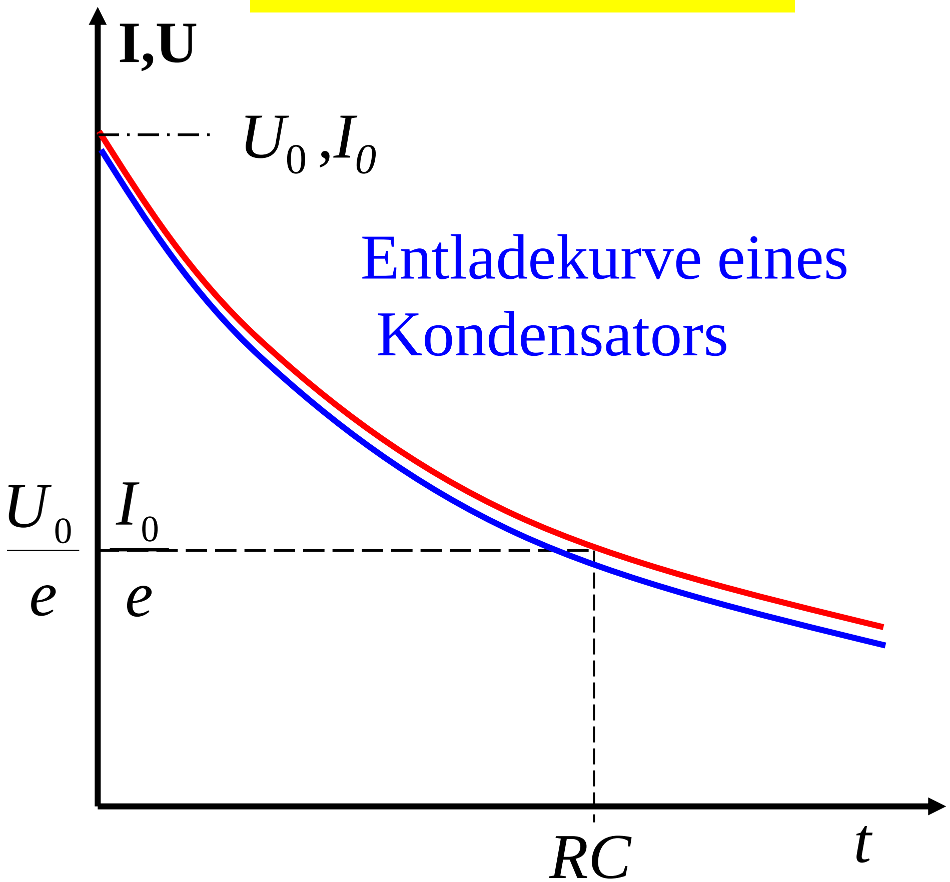
Integration liefert sofort in Einklang mit der Anfangsbedingung (I maximal bei t = 0)

$$I = I_0 \exp\left(-{}^{t}\!/\!_{\tau}\right) = \frac{U_0}{R} \exp\left(-{}^{t}\!/\!_{\tau}\right)$$

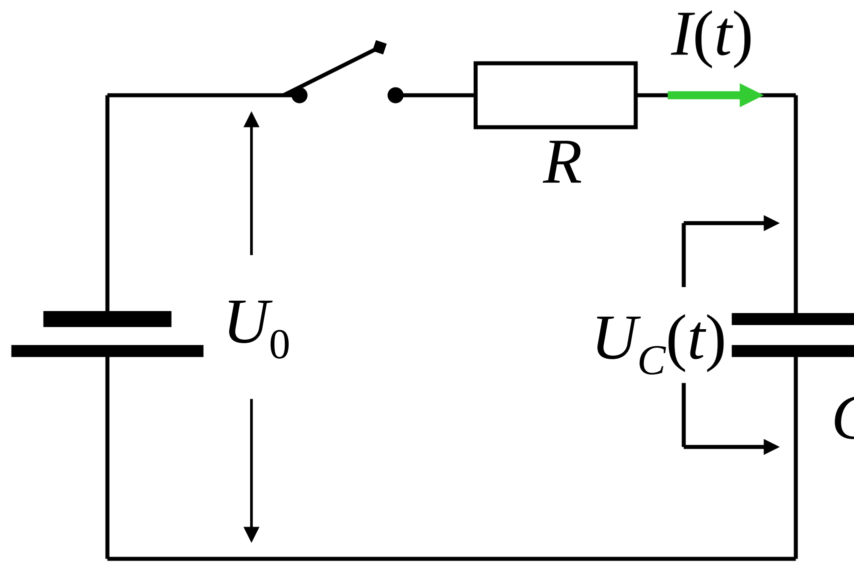
mit $\boldsymbol{\tau = RC}$ als 1/e-Abfallzeit oder allgemeiner Relaxationszeit

Da die Spannung U direkt wegen $U=RI$ mit dem Strom verknüpft ist, gilt

$$U(t) = U_0 \exp\left(-t/\tau\right)$$



• ***Aufladen eines Kondensators***



Zunächst gilt wegen der Maschenregel

$$U_C + U_R = U_0$$

und damit wieder wegen $I_R = I_C = I$

$$\frac{Q}{C} + RI = U_0$$

Wir leiten nach der Zeit t ab und erhalten die bekannte DGL

$$\frac{1}{RC} I + \frac{dI}{dt} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{dI}{I} = -\frac{1}{RC} dt$$

Die Lösung im Einklang mit den Anfangs-bedingungen (I maximal bei t = 0)

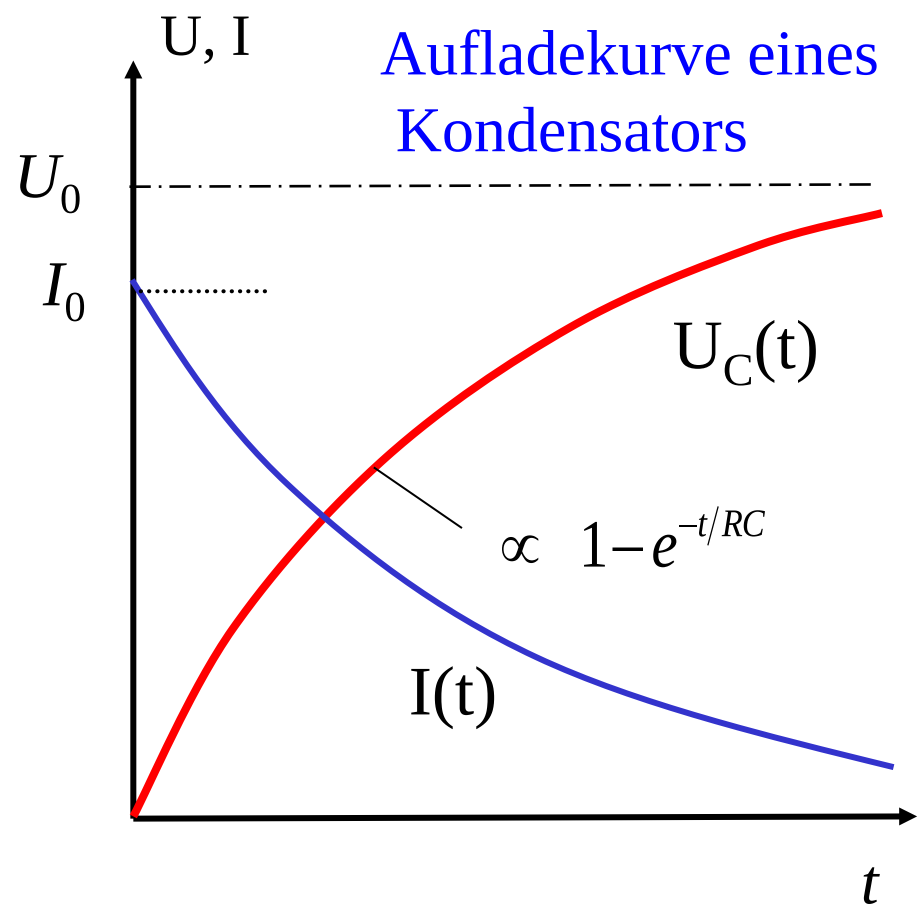
$$I(t) = I_0 \exp\left(-\tfrac{t}{\tau}\right) = \frac{U_0}{R} \exp\left(-\tfrac{t}{\tau}\right)$$

Der Spannung am Kondensator folgt aus

$$U_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t I(t)dt' = \frac{U_0}{RC}\int_0^t \exp\left(-\tfrac{t}{\tau}\right)dt'$$

Die Ausführung des bestimmten In-tegrals führt schließlich auf

$$U_C(t) = U_0\left(1 - \exp\left(-\tfrac{t}{\tau}\right)\right)$$



Der RL-Kreis: Ein- und Ausschalt-verhalten

Wir betrachten einen Stromkreis bestehend aus einer Gleichspannungsquelle U_0, einem Widerstand R und einer Induktivität L.

Achtung: Notation der Elektrotechnik. Spannungsabfälle an R, L, C werden als positiv angenommen!

- ***Einschaltverhalten:***

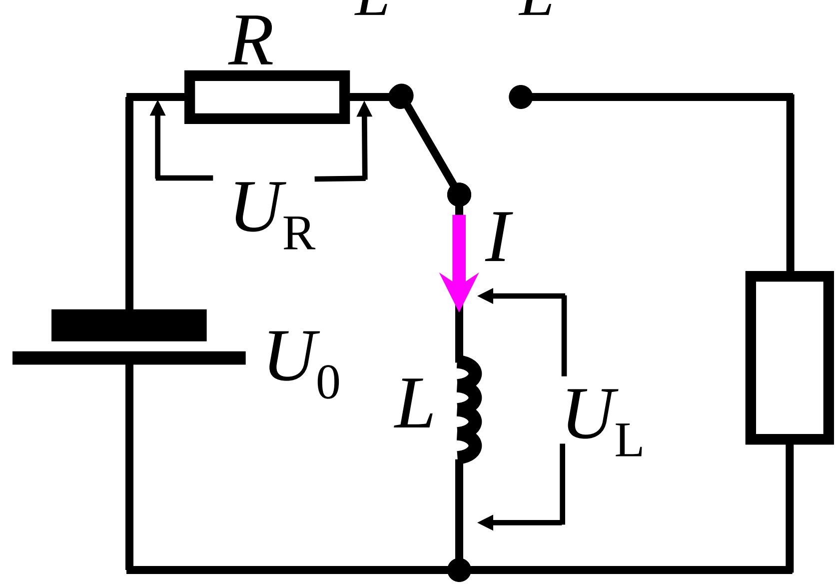
Die Summe der Spannungsabfälle addieren sich zur Betriebsspannung:

$$U_R + U_L = U_0$$

$$U_R = RI \qquad U_L = L\frac{dI}{dt}$$

$$\Rightarrow RI + L\dot{I} = U_0$$

$$\Rightarrow \dot{I} + \frac{R}{L}I = \frac{U_0}{L}$$



Dies ist eine ***lineare, inhomogene DGL 1. Ordnung*** mit konstanten Koeffizienten.

Die Lösung einer solchen DGL hatten wir bisher noch nicht behandelt.

Einschub: *Lösen der inhomogenen linearen Differentialgleichung*

$$R\,I + L\dot{I} = U_0$$

Die Lösung besteht darin, dass man die ***allgemeine Lösung der homogenen DGL***, die wir ja schon behandelt haben und ***eine spezielle Lösung der inhomogenen DGL*** kombiniert, also:

homogene DGL: $R\,I + L\dot{I} = 0$

$$\rightarrow \dot{I} + \frac{R}{L} I = 0$$

Die Lösung der homogenen Gleichung lautet dann: $I_\mathrm{h}(t) = A\exp\left(-\frac{R}{L}t\right)$

A ist die Integrationskonstante (Anfangsbedingung)

Eine spezielle Lösung $I_s(t)$ ergibt sich aus der Bedingung:

$$\lim_{t\to\infty} I_s(t) = \frac{U_0}{R} = I_0$$

Für die Gesamtlösung folgt dann:

$$I(t) = I_s(t) + I_h(t)$$

$$I(t) = \frac{U_0}{R} + A\exp\left(-\frac{R}{L}t\right)$$

Die Konstante A ist mit der Anfangsbedingung $I(t) = 0$ für $t = 0$ festgelegt:

$$I(t=0) = \frac{U_0}{R} + A = 0$$

$$\Rightarrow A = -\frac{U_0}{R}$$

Damit ergibt sich das gesuchte Einschaltverhalten des Stromes in einem Stromkreis mit einer Induktivität:

$$\boxed{I(t) = \frac{U_0}{R}\left[1-\exp\left(-\frac{R}{L}t\right)\right]}$$

$$\boxed{I(t) = I_0\left[1-\exp\left(-t/\tau\right)\right]}$$

Der Endstrom stellt sich also erst nach Maßgabe der Systemzeit $\tau = L/R$ ein.

Beispiel: L = 1 mH und R = 1 kΩ

$$\tau = \frac{10^{-3}\,\mathrm{H}}{1000\,\Omega} = 10^{-6}\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{A\,V/A}} = 1\,\mu\mathrm{s}$$

Die durch die Selbstinduktivität der Spule induzierte Spannung U_L erhält man über

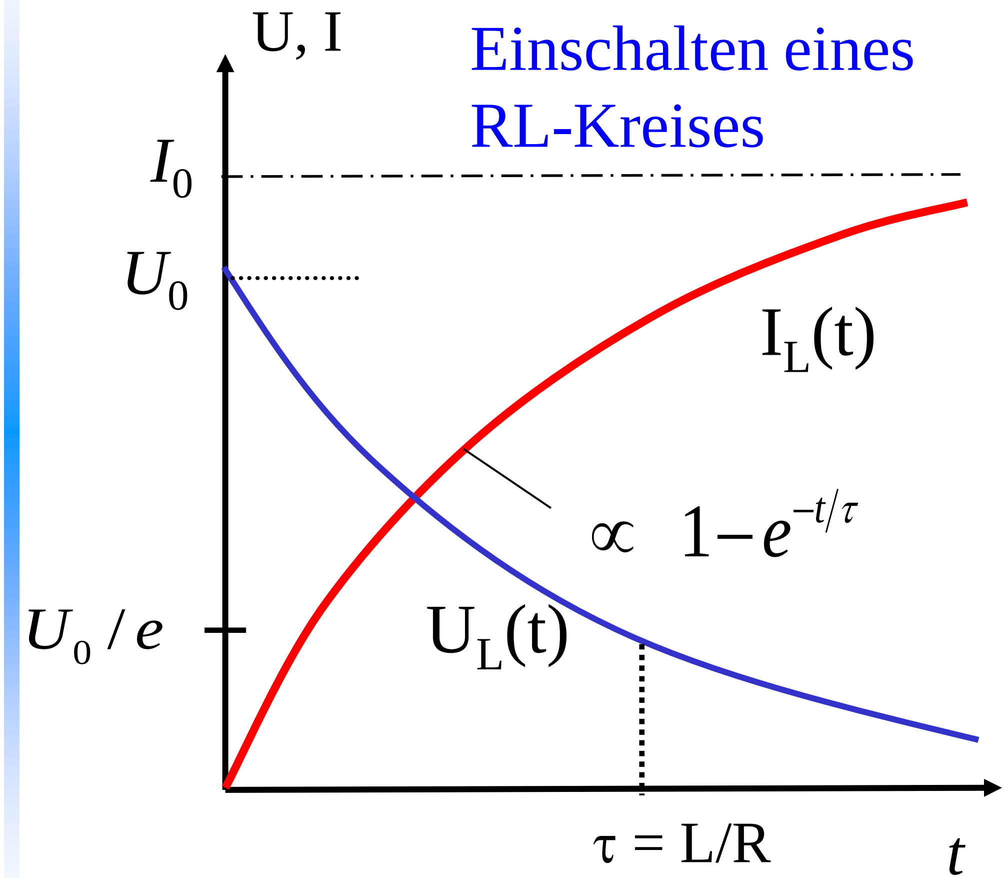
$$U_L = L\dot{I}$$

$$I(t) = I_0\left[1-\exp\left(-{t}/{\tau}\right)\right]$$

$$\rightarrow U_L = L\frac{1}{\tau}I_0\exp\left(-{t}/{\tau}\right)$$

und schließlich

$$U_L(t) = U_0\exp\left(-{t}/{\tau}\right)$$



Beim Einschalten fällt also die gesamte Betriebsspannung U_0 an der Spule ab. Der Stromfluss wird zunächst gehemmt und kommt nur langsam in Gang.

• *Ausschaltverhalten:*

Wir setzen an:

$$U_R + U_L = 0$$

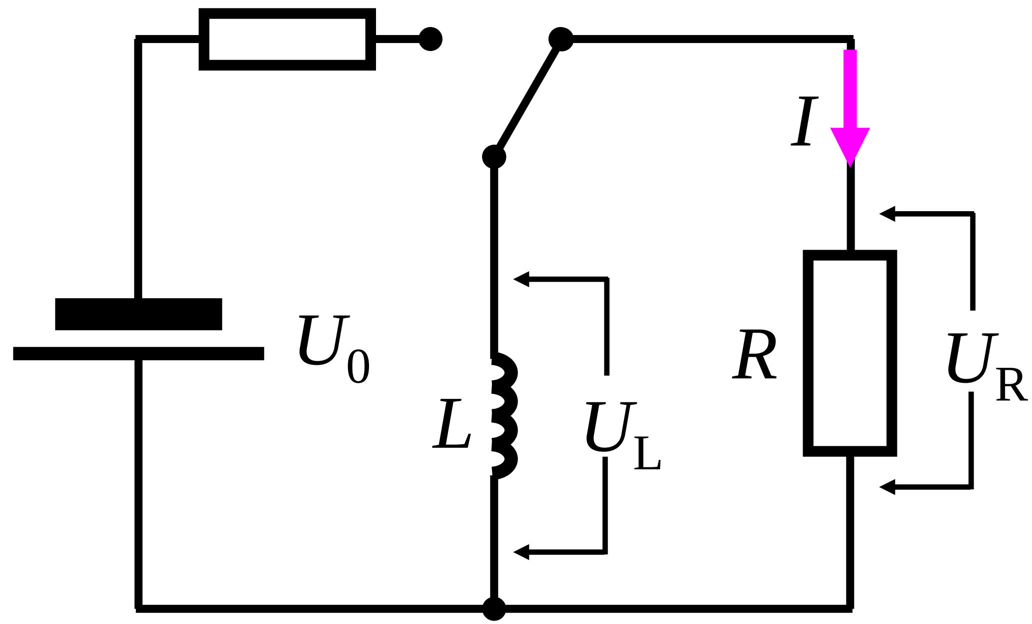
$$U_R = R\,I \qquad U_L = L\frac{dI}{dt}$$

$$\Rightarrow \dot{I} + \frac{R}{L} I = 0$$

Dies ist eine lineare, homogene DGL 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Als Anfangsbedingung soll jetzt speziell $I(0) = I_0$ gewählt werden.

Als Lösung ergibt sich sofort:

$$I(t) = I_0 \exp\left(-\frac{R}{L}t\right)$$



Der Strom klingt mit der Zeitkonstanten $\tau = L/R$ ab.

$$I(t) = I_0 \exp\left(-{}^{t}\!/\!_{\tau}\right)$$

Durch Ableiten nach der Zeit erhalten wir die Spannung an der Spule

$$U_L = L\dot{I}$$

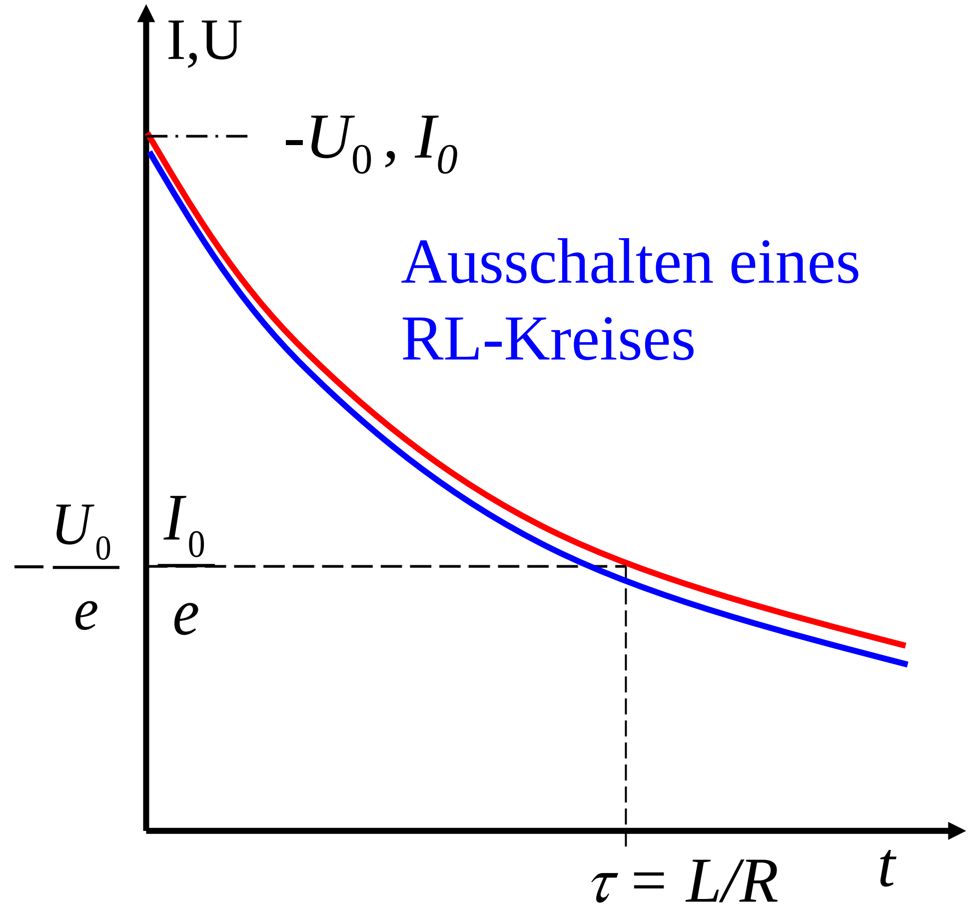
$$\rightarrow U_L = -L\frac{1}{\tau} I_0 \exp\left(-{}^{t}\!/_{\tau}\right)$$

und schließlich

$$U_L(t) = -U_0 \exp\left(-{}^{t}\!/_{\tau}\right)$$

Auch hier zeigt die Spule zunächst aufgrund der Selbstinduktion die volle Spannung U_0.

Ähnlich wie bei der Kapazität muss bei der Spule das magnetische Feld und damit die Energie, die darin gespeichert ist, erst abgebaut werden. Dies benötigt Zeit.



Inhalt der mathematischen Ergänzung zur Physik B2:

- Wiederholung Divergenz, Gauß-Integralsatz
- Rotation, Stokes-Integralsatz, Anwendungen
- Ladungen in elektrischen und magnetischen Feldern
- Die δ-Funktion, Die Kontinuitätsgleichung
- Kondensator und Induktivität im Stromkreis
- ***Berechnung von Wechselstromnetzwerken***
- Zusammenfassung der Maxwell-Gleichungen
- Berechnungen zur Wellenoptik
- Zusammenfassung der klassischen Physik
- Mathematische Wiederholung zu Wellen
- Die Schrödinger-Gleichung
- Die Mathematik des Wasserstoff-Atoms
- Der Aufbau des Periodensystems

Wechselstromnetzwerke, Impedanzen

Darstellung von Wechselgrößen

Wechselspannungen und Wechselströme haben die Form

$$U(t) = U_0 \cos(\omega t + \psi),$$
$$I(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

Dabei sind ψ und φ Startphasen bezüglich $t = 0$. $\omega = 2\pi f$ ist die Kreisfrequenz der Wechselgröße, f seine Frequenz. Wir wollen jedoch in komplexen Größen rechnen, z.B. für die Spannung *U(t)*

$$U(t) = \mathrm{Re}\,\hat{U}(t) = \mathrm{Re}(U_0 \exp\left(i\left(\omega t + \psi\right)\right)) =$$
$$= U_0 \cos\left(\omega t + \psi\right)$$

und in gleicher Weise für *I(t)*.

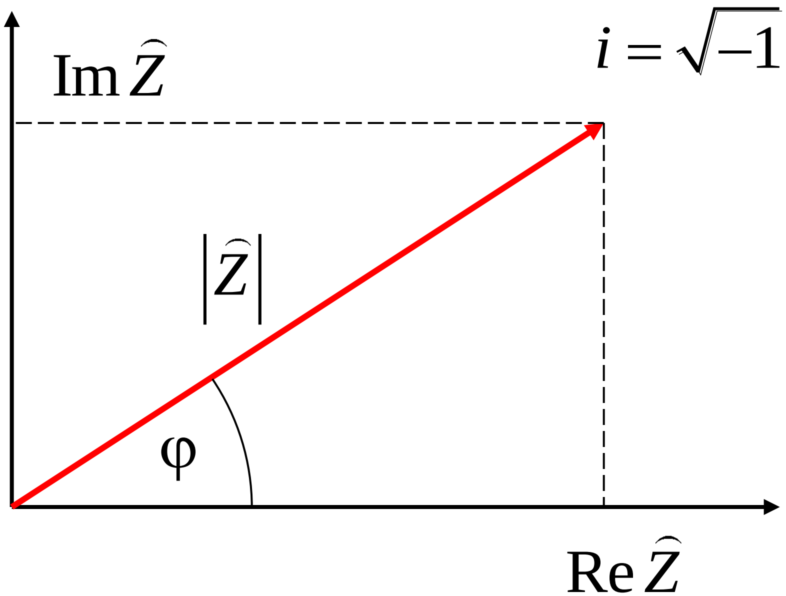
Der Quotient der komplexen Größen für Spannung und Strom definiert dann einen komplexen Widerstand

$$\hat{Z} = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} = \text{Impedanz}$$

Die Impedanz enthält neben der Information über die Amplitudenverhältnisse von U und I auch Informationen über eine zeitliche Phasenverschiebung zwischen U und I.

Der komplexe Widerstand bzw. die Impedanz hat einen Real- und Imaginärteil

$$\hat{Z} = R + iX = \left|\hat{Z}\right|\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)$$
$$= \left|\hat{Z}\right|\exp\left(i\varphi\right)$$



Damit kann man das ohmsche Gesetz in der verallgemeinerten Form schreiben

$$\hat{U}(t) = \hat{Z}\cdot\hat{I}(t)$$
$$\Rightarrow \hat{U}(t) = \left|\hat{Z}\right|\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)\cdot\hat{I}(t)$$

und weiter gilt

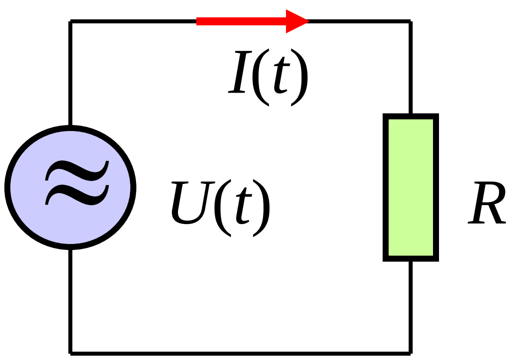
$$\left|\hat{Z}\right| = \sqrt{\operatorname{Re}(\hat{Z})^2 + \operatorname{Im}(\hat{Z})^2}$$
$$= \sqrt{R^2 + X^2}$$

und für die Phasenverschiebung φ zwischen Strom und Spannung

$$\tan\varphi = \frac{\operatorname{Im}(\hat{Z})}{\operatorname{Re}(\hat{Z})} = \frac{X}{R}$$

Impedanzen

• Ohmscher Widerstand R



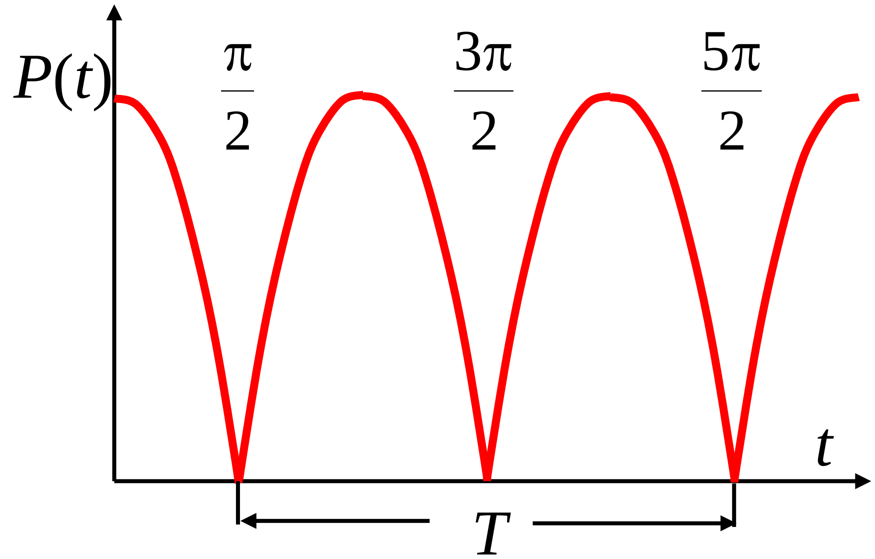
Offenbar sind hier *U(t)* und *I(t)* zeitlich in Phase

$$\widehat{Z}_R = \frac{U_0}{I_0} = R \quad \text{(reelle Größe)}$$

Damit wird auch die elektrische Leistung P reell

$$P(t) = U(t)I(t) = \frac{U_0^2}{R}\cos^2(\omega t + \varphi)$$

für $\varphi = 0$ stellt sich P(t) wie folgt dar

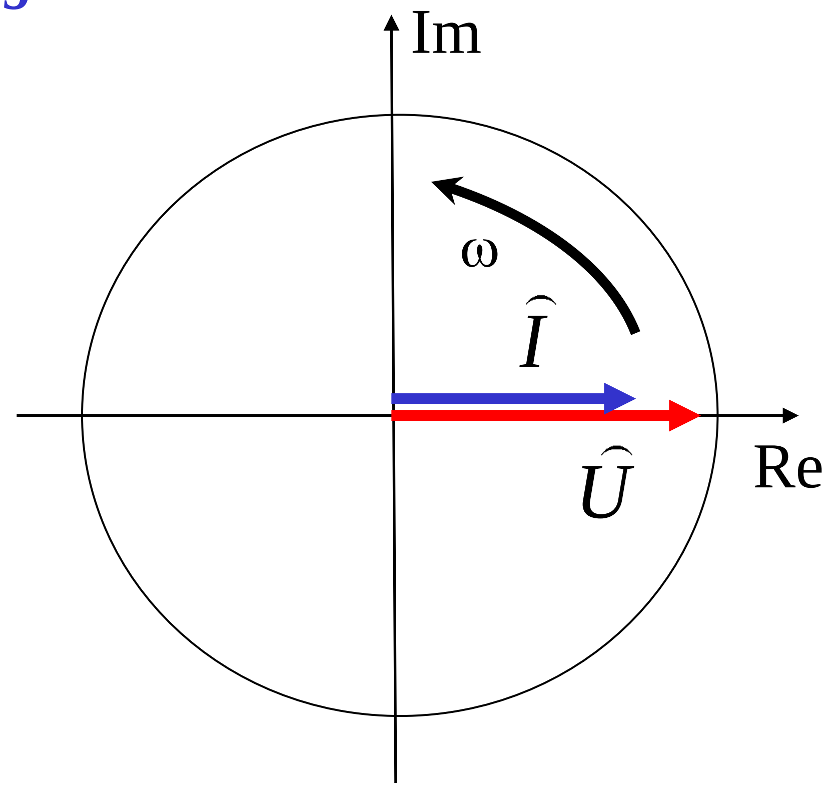


Die Leistung schwankt über die Periodendauer T. Der zeitliche Mittelwert ergibt sich wie folgt

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)dt = \frac{U_0^2}{TR}\int_0^T \cos^2 \omega t dt$$

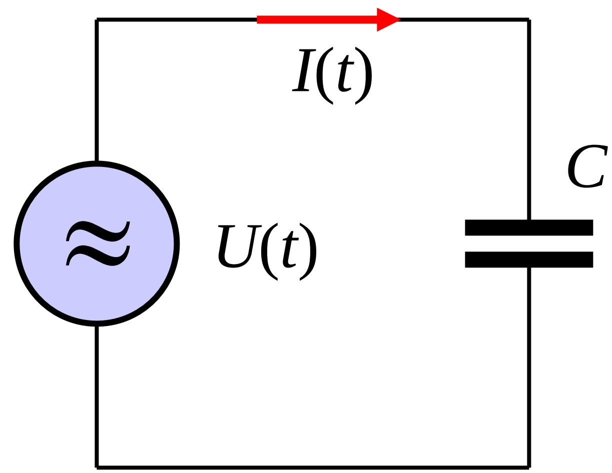
$$= \frac{4U_0^2}{TR}\int_0^{T/4} \cos^2 \omega t dt = \frac{1}{2}U_0 I_0 = U_{eff} I_{eff}$$

komplexe Darstellung im Zeiger-diagramm:



Beide Zeiger rotieren mit Kreis- oder Winkelfrequenz ω. Strom und Spannung sind in Phase !

• *Impedanz eines Kondensators C*



Es gilt $$\hat U(t) = \hat Q(t)/C$$

und weiter $$\dot{\hat U}(t) = \frac{1}{C}\hat I(t)$$

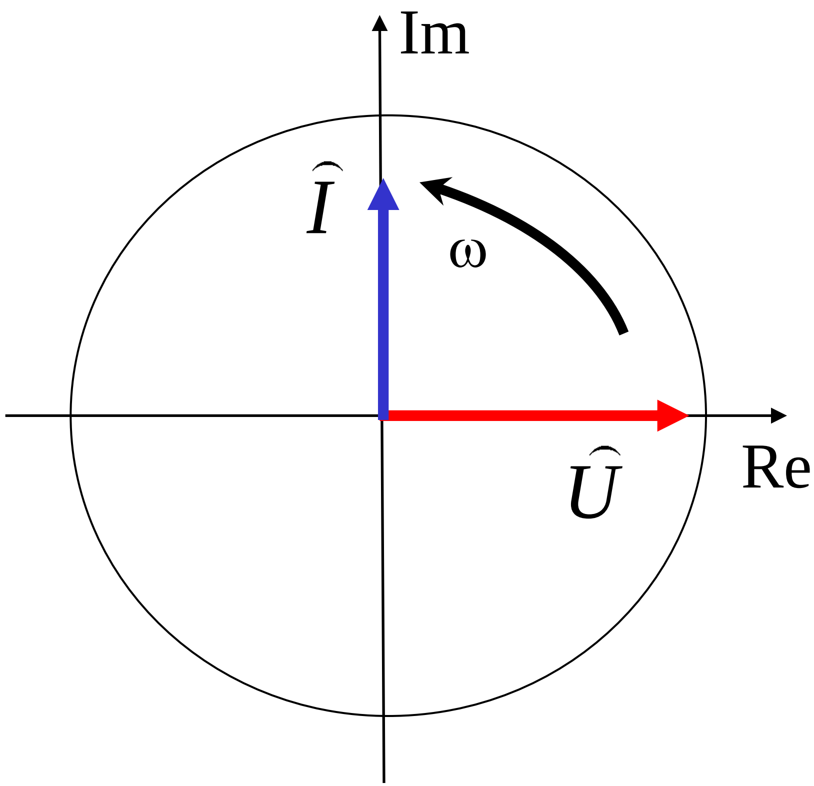
Mit $$\hat U = U_0 \exp\left(i\omega t\right)$$

folgt sofort

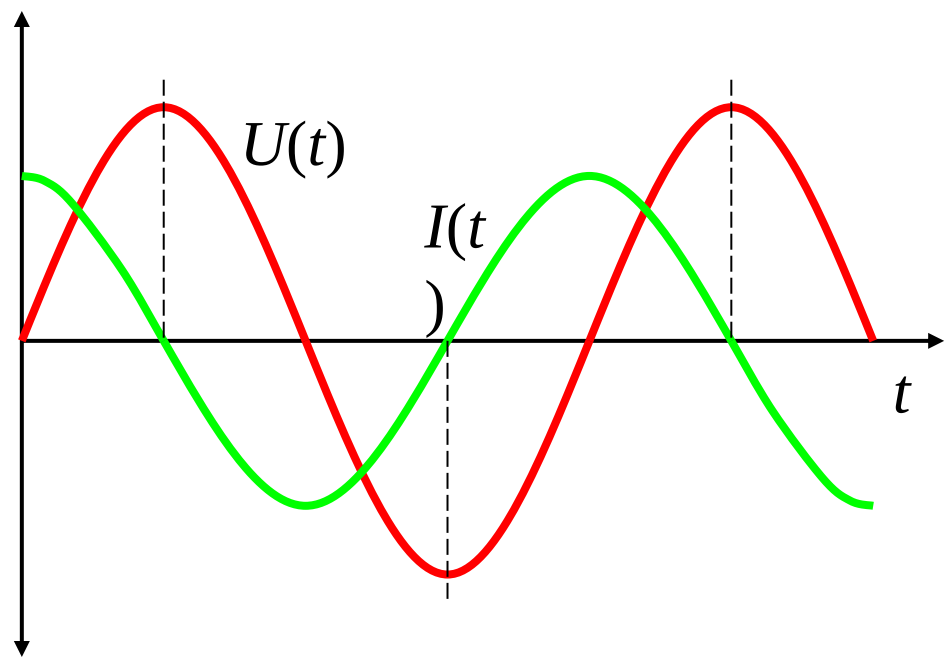
$$\hat I = C\frac{d}{dt}\hat U = i\omega C\cdot\hat U$$

und für die Impedanz eines Kondensators damit

$$\hat{Z}_C = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} = \frac{1}{i\omega C} = -\frac{i}{\omega C}$$



Die Impedanz ist also imaginär. Man bezeichnet sie auch als kapazitiven Blindwiderstand. Beim Kondensator läuft der Strom der Spannung um 90° voraus.



Die mittlere Leistung am Kondensator ist gegeben durch

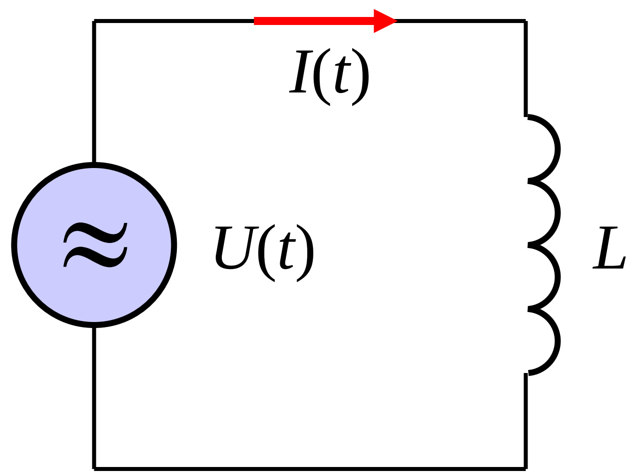
$$\langle P\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T U(t)I(t)dt$$

$$= \frac{U_0^2\omega C}{T}\underbrace{\int_0^T \cos\omega t \sin\omega t dt}_{=0} = 0$$

Am Kondensator wird also im Mittel keine elektrische Leistung umgesetzt. Ein idealer Kondensator wird im Gegensatz zum ohmschen Widerstand nicht erwärmt. Bei der Aufladung des Kondensators (Feldenergie) wird elektrische Arbeit vom Netzteil verrichtet. Bei der Entladung wird diese an das Netzteil zurückgeführt.

Stichworte: Blind- oder Scheinleistung

- ***Impedanz einer Induktivität L***



Für die Summe aller Teilspannungen gilt zunächst

$$U(t) - L\frac{dI(t)}{dt} = 0$$

und damit komplex

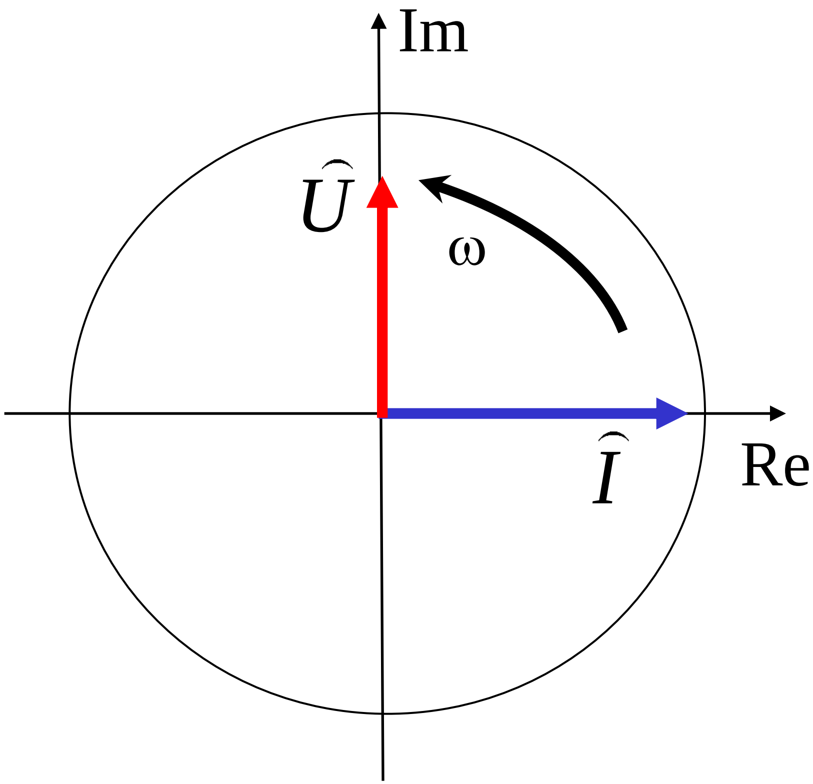
$$\widehat{U} = L\dot{\widehat{I}}$$

Mit $\widehat{I} = I_0 \exp(i\omega t)$

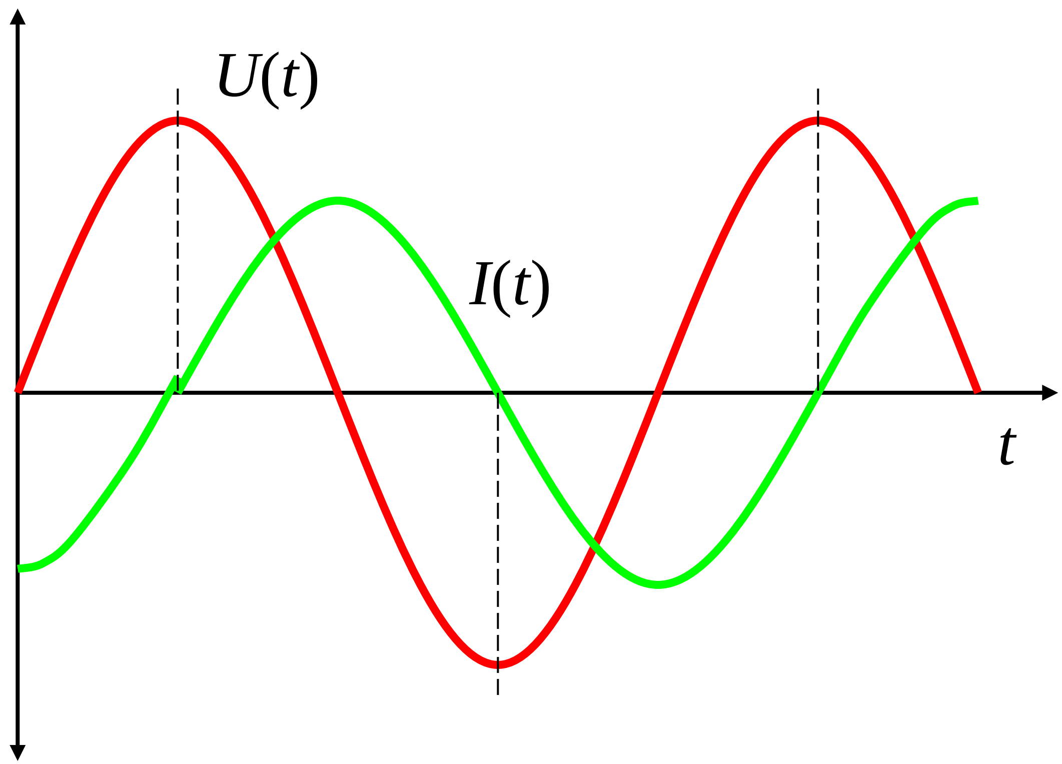
folgt dann $\widehat{U} = L\dot{\widehat{I}} = i\omega L\widehat{I}$

und weiter

$$\boxed{\widehat{Z}_L = \frac{\widehat{U}}{\widehat{I}} = i\omega L}$$



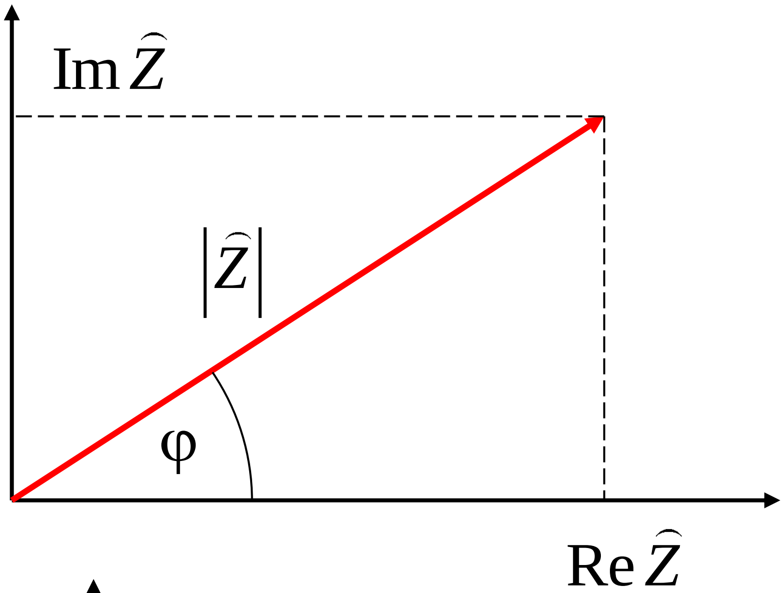
Bei der Spule läuft der Strom der Spannung um 90° nach.

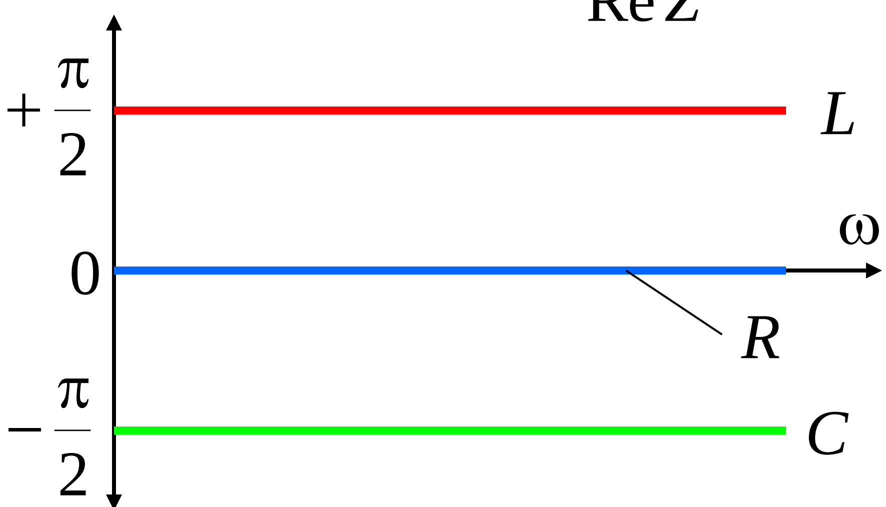


Wegen der 90° Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung gilt auch hier

$$\langle P \rangle = 0$$

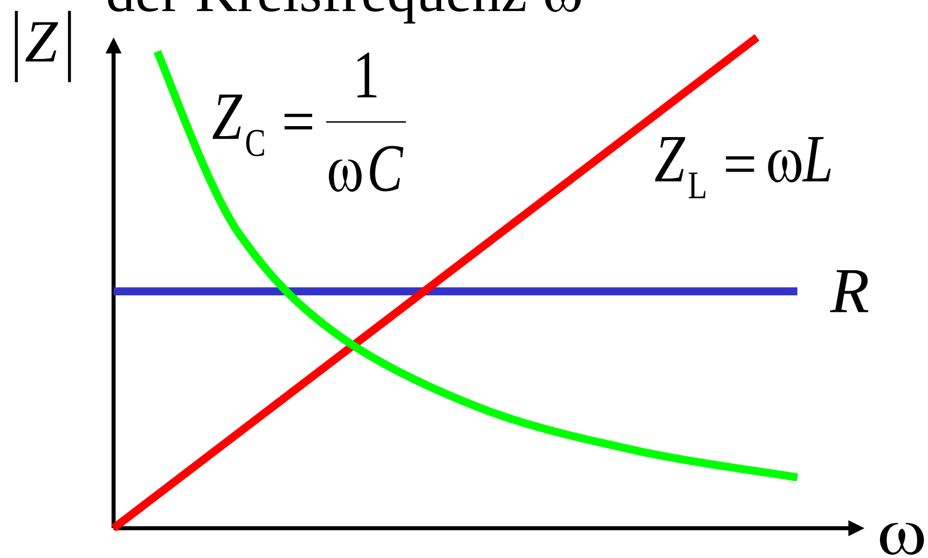
Zusammenfassung:





Phase als Funktion der Frequenz

Betrag der Impedanz als Funktion der Kreisfrequenz ω



Mit den drei Schaltelementen R, L, C lassen sich im Prinzip alle beliebig komplexen Schaltungen aufbauen. Jede Schaltung läßt sich mit diesen 3 Elementen andererseits auch simulieren.