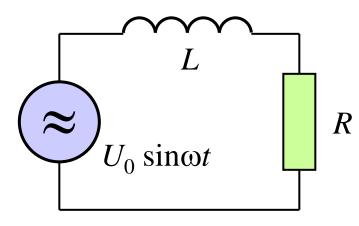
Inhalt der mathematischen Ergänzung zur Physik B2:

- Wiederholung Divergenz, Gauß-Integralsatz
- Rotation, Stokes-Integralsatz, Anwendungen
- Ladungen in elektrischen und magnetischen Feldern
- Die δ-Funktion, Die Kontinuitätsgleichung
- Kondensator und Induktivität im Stromkreis
- Berechnung von Wechselstromnetzwerken
- Zusammenfassung der Maxwell-Gleichungen
- Berechnungen zur Wellenoptik
- Zusammenfassung der klassischen Physik
- Mathematische Wiederholung zu Wellen
- Die Schrödinger-Gleichung
- Die Mathematik des Wasserstoff-Atoms
- Der Aufbau des Periodensystems

Beispiel: *RL*-Kreis



Der Gesamtwiderstand ist

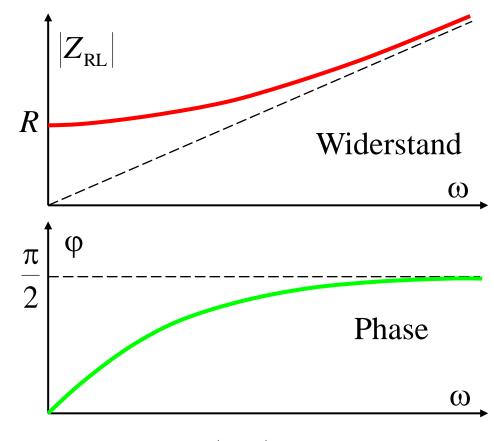
$$\widehat{Z}_{\rm RL} = R + iX_{\rm L} = R + i\omega L$$

Der Betrag des Widerstandes ist

$$|Z_{\rm RL}| = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$$

und die Phase

$$\tan \varphi = \frac{\omega L}{R}$$



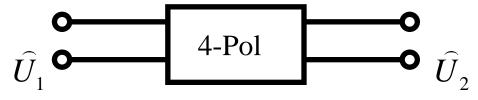
1.)
$$\omega = 0$$
 \Rightarrow $|Z_{RL}| = R$
 $\tan \varphi = 0 \rightarrow \varphi = 0$

2.)
$$\omega \to \infty \implies |Z_{RL}| = \omega L \to \infty$$

 $\tan \varphi \to \infty \to \varphi = +90^{\circ}$

Sieb- und Filterschaltungen

Übertragungsverhalten eines passiven Vierpols



Definieren Übertragungsfunktion

$$g(\omega) \equiv \widehat{U}_2 / \widehat{U}_1$$
 komplexe Funktion

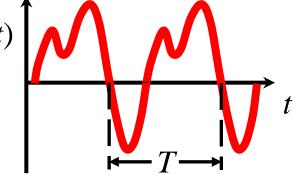
 $|g(\omega)| = Amplituden - Übertragungsfunktion$ $g(\omega)$ beinhaltet aber auch Phasenbeziehung zwischen Eingangs- und Ausgangsspannung.

Die Frequenzinhalte eines Zeitsignals U(t) werden also unterschiedlich übertragen.

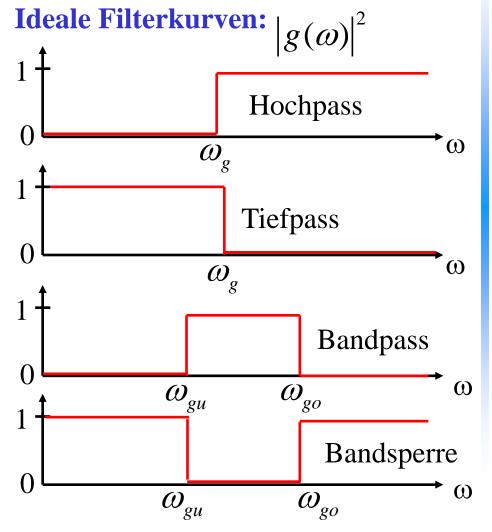
aus der Ergänzung Physik A2:

Eine periodisches Zeitsignal U(t) (Periodendauer T) kann durch eine unendliche Summe von Zeitsignalen jeweils einer Frequenz beliebig gut approximiert werden (diskretes Frequenz-Spektrum).

Für nichtperiodische Zeitfunktionen geht die Summe in ein Integral über. Das Frequenzspektrum ist dann kontinuierlich.



Die Frequenzinhalte der Zeitfunktion können durch Filterschaltungen unterschiedlich übertragen werden.



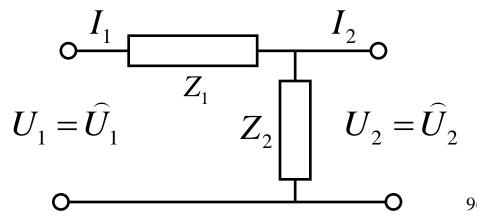
Definition der Grenzfrequenzen:

$$\left|g(\omega)\right|^2_{\omega=\omega_g}=\frac{1}{2}$$

Absenkung der übertragenen Leistung (Quadrat der Amplitude) auf 50%!

Umsetzung in der Praxis:

Grundlage der Realisierung ist der Spannungsteiler mit komplexen Widerständen, allgemein



96

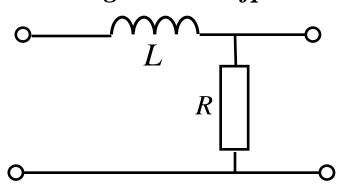
für das unbelastete Netzwerk ($I_2 = 0$) gilt

$$U_2 = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} U_1 \rightarrow g(\omega) = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

Beispiele:

Tiefpass

Realisierung 1: RL-Tiefpass

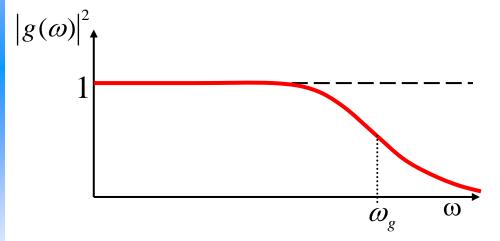


$$g(\omega) = \frac{R}{R + i\omega L} = \frac{1 - i\frac{\omega L}{R}}{1 + \left(\frac{\omega L}{R}\right)^2}$$

Für das Quadrat gilt dann:

$$\left|g(\omega)\right|^2 = \frac{1}{1 + \frac{\omega^2 L^2}{R^2}} = \frac{1}{1 + \frac{\omega^2}{\omega_g^2}}$$

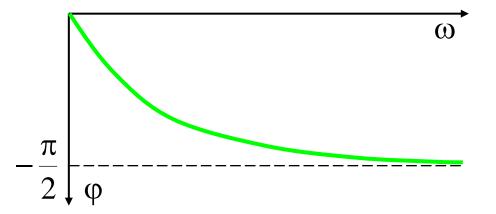
mit
$$\omega_g = R/L$$



keine Stufenfunktion, sondern die Amplitudenübertragungsfunktion ändert sich nur langsam mit ω.

Man kann sich auch die Phasendrehung des Ausgangssignals gegenüber dem Eingangssignal anschauen:

$$\tan \varphi = \frac{\operatorname{Im} g(\omega)}{\operatorname{Re} g(\omega)} = -\frac{\omega L}{R}$$

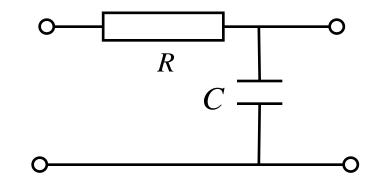


Grenzwerte

$$\omega = 0 \Rightarrow \varphi = 0$$

$$\omega \to \infty \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2}$$

Realisierung 2: RC-Tiefpass



$$g(\omega) = \frac{-i/\omega C}{R - i/\omega C} = \frac{1 - i\omega RC}{1 + \omega^2 R^2 C^2}$$

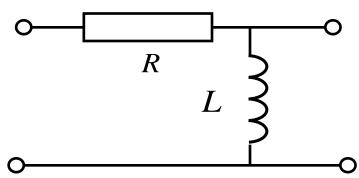
Für das Quadrat gilt dann wieder:

$$|g(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \omega^2 R^2 C^2} = \frac{1}{1 + \frac{\omega^2}{\omega_g^2}}$$
mit $\omega_g = \frac{1}{RC}$ $1 + \frac{\omega^2}{\omega_g^2}$

Die Filter- und Phasenkurve ist identisch zu der des RL-Tiefpasses⁹⁸

Hochpass

Realisierung 1: RL-Hochpass

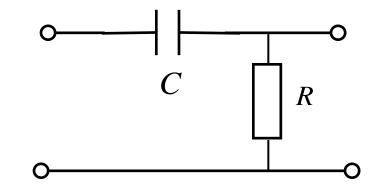


$$g(\omega) = \frac{i\omega L}{R + i\omega L} = \frac{1 + i\frac{\omega L}{R}}{1 + \left(\frac{\omega L}{R}\right)^{2}}$$

$$\left|g(\omega)\right|^2 = \frac{1}{1 + \frac{R^2}{\omega^2 L^2}} = \frac{1}{1 + \frac{\omega_g^2}{\omega^2}}$$

mit
$$\omega_g = R/L$$

Realisierung 2: RC-Hochpass



$$g(\omega) = \frac{R}{R - i/\omega C} = \frac{1 + i\frac{1}{\omega RC}}{1 + \left(\frac{1}{\omega RC}\right)^2}$$

$$|g(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{\omega^2 R^2 C^2}} = \frac{1}{1 + \frac{\omega_g^2}{\omega^2}}$$

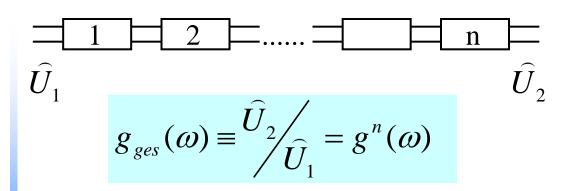
$$\min \omega_g = \frac{1}{RC}$$

Auch hier sind beide Realisierungsmöglichkeiten identisch.

Die Amplitudenübertragungsfunktion nimmt jetzt in der Umgebung der Grenzfrequenz zu hohen Frequenzen hin zu (Hochpass).

Die hier vorgestellten Filter sind einstufig und deshalb sehr unscharf in ihrem Filterverhalten (Trennschärfe sehr schlecht!).

Durch Hintereinanderschalten der Filter kann die Trennschärfe deutlich gesteigert werden.



Diese mehrstufigen Filter können weiter optimiert werden und sind sehr trennscharf.



Inhalt der mathematischen Ergänzung zur Physik B2:

- Wiederholung Divergenz, Gauß-Integralsatz
- Rotation, Stokes-Integralsatz, Anwendungen
- Ladungen in elektrischen und magnetischen Feldern
- Die δ-Funktion, Die Kontinuitätsgleichung
- Kondensator und Induktivität im Stromkreis
- Berechnung von Wechselstromnetzwerken
- Zusammenfassung der Maxwell-Gleichungen
- Berechnungen zur Wellenoptik
- Zusammenfassung der klassischen Physik
- Mathematische Wiederholung zu Wellen
- Die Schrödinger-Gleichung
- Die Mathematik des Wasserstoff-Atoms
- Der Aufbau des Periodensystems

Übersicht über die Maxwellgleichungen im Vakuum inklusive der offiziellen Nummerierung

Integrale Form



Differentielle Form

(1)
$$\oint_{A(V)} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_{V(A)} \rho \, dV$$

$$\iff \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

(2)
$$\iint_{A(V)} \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

$$\iff \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = div\vec{B} = 0$$

(3)
$$\oint_{S(A)} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_{A(S)} \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

$$\Leftrightarrow \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$(4) \qquad \oint_{S(A)} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \iint_{A(S)} \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} \right) \cdot d\vec{A} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = rot \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} \right)$$

Machen Sie sich klar, dass die gesamte Elektrodynamik (-statik) enthalten ist!

Zusammenfassung der Maxwellgleichungen:

Die 1. Maxwellsche Gleichung

$$\iint\limits_{A(V)} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint\limits_{V(A)} \rho(\vec{r}) dV$$



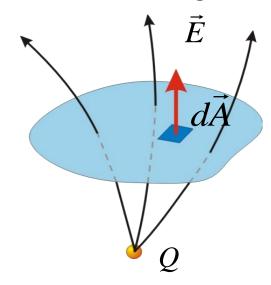
Carl Friedrich Gauß 1777 - 1855



James Clerk Maxwell 1831 - 1879

- *Kurzversion:* Die elektrischen Ladungen sind die Quellen und Senken des elektrostatischen Feldes, Diese E-Feldlinien haben einen Anfang und ein Ende, können daher nicht wirbelförmig sein.
- *In Worten:* Der elektrische Fluss durch eine beliebig geformte geschlossene Oberfläche A, ist durch die umschlossene Ladung Q bestimmt, unabhängig vom Ort der Ladungen innerhalb des so definierten Volumens V(A).
- Ist die Ladung bzw. die Ladungsverteilung bekannt, so können das elektrostatische Feld berechnet werden.
- Die 1. Maxwellgleichung ist auch unter dem Namen Gaußscher Satz der Elektrostatik bekannt.

Zur Erinnerung:



Elektrischer Fluss durch eine nicht notwendigerweise geschlossene Fläche A

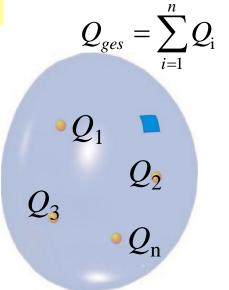
$$\Phi_E = \iint_A \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

Elektrischer Fluss durch eine geschlossene Fläche A (Oberfläche des Volumens V)

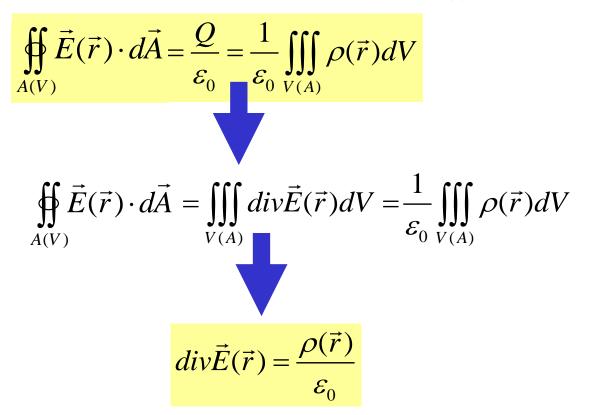
$$\Phi_E = \iint_{A(V)} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{ges}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_{V(A)} \rho(\vec{r}) dV$$

nur in diesem Fall ist der Fluss mit der im Volumen enthaltenen Ladung Q direkt verknüpft:

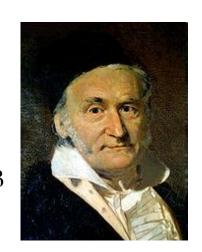
Bei "verschmierter" Ladung muss die Gesamtladung Q aus dem Volumenintegral über die Ladungsdichte ρ ermittelt werden



Die 1. Maxwellsche Gleichung in differentieller (lokaler) Form



Carl Friedrich Gauß 1777 - 1855



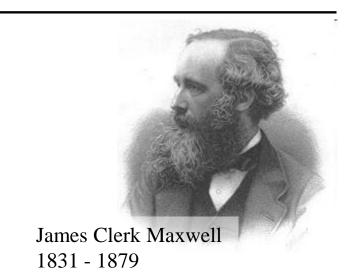
Gauß-Integralsatz

$$\iint_{A(V)} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{A} = \iiint_{V(A)} div \vec{E} \cdot dV$$

- *Kurzversion:* Die Quellstärke des elektrostatischen Feldes (die Divergenz) an einem Ort hängt nur von der dort existierenden Ladungsdichte ρ ab.
- Ist ein lokaler Zusammenhang und deshalb für Berechnungen besser geeignet.

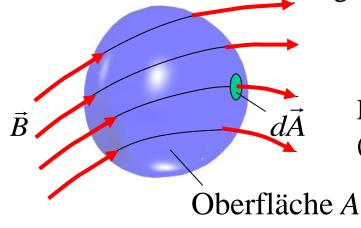
Die 2. Maxwellsche Gleichung

$$\oint_{A(V)} \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{A} = 0$$



- *Kurzversion:* Es gibt keine Quellen oder Senken des magnetischen Feldes. Die magnetischen Feldlinien können daher weder Anfang noch Ende haben, müssen also wirbelförmig sein.
- *In Worten:* Der magnetische Fluss durch eine beliebig geformte geschlossene Oberfläche A verschwindet. Magnetische Ladungen (Monopole) existieren nicht.
- Die obige gleiche gilt generell sowohl in der Magnetostatik, als auch in der Elektrodynamik.

Zur Erinnerung:

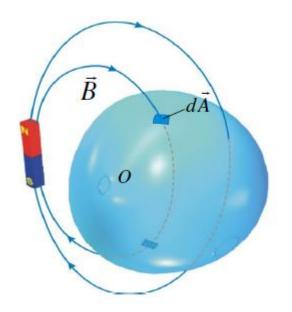


Magnetischer Fluss durch eine nicht notwendigerweise geschlossene Fläche A

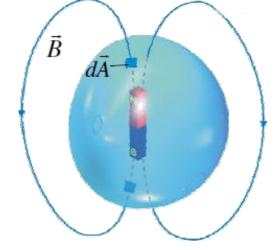
$$\Phi_M = \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

Magnetischer Fluss durch eine geschlossene Fläche A (Oberfläche des Volumens V)

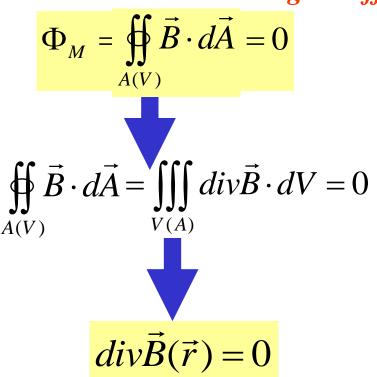
$$\Phi_M = \iint_{A(V)} \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$



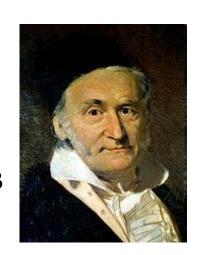
Dies gilt generell, unabhängig davon, ob sich die magnetischen Momente, die kleinste Einheit des Magnetismus, innerhalb oder außerhalb des Volumens befinden.



Die 2. Maxwellsche Gleichung in differentieller (lokaler) Form



Carl Friedrich Gauß 1777 - 1855



Gauß-Integralsatz

$$\oint_{A(V)} \vec{B} \cdot d\vec{A} = \iiint_{V(A)} div \vec{B} \cdot dV$$

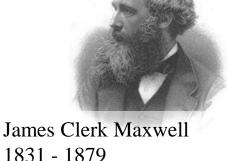
Anmerkungen:

• *Kurzversion:* Die Quellstärke des magnetischen Feldes (die Divergenz) verschwindet an jedem Ort. Magnetfelder sind Wirbelfelder.

Die 3. Maxwellsche Gleichung

$$\oint_{C(A)} \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{d}{dt} \iint_{A} \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

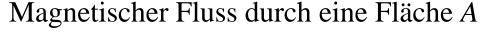


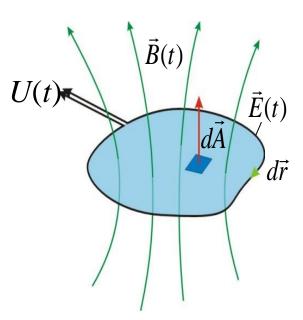


Michael Faraday (1791-1867)

- *Kurzversion:* Zeitlich veränderliche Magnetfelder und/oder magnetische Flüsse erzeugen wirbelförmige elektrische Felder
- *In Worten:* Ein zeitlich sich ändernder magnetischer Fluss durch eine beliebige Fläche erzeugt ein elektrisches Wirbelfeld
- Dies ist das so genannte Faradaysche Induktionsgesetz
- Elektrische Felder können also nicht nur durch Ladungen, sondern auch durch Induktion erzeugt werden. Die Eigenschaften dieser Wirbelfelder sind vollständig anders als die elektrischen Felder in der Elektrostatik
- Das Minuszeichen entspricht der Lenzschen Regel.

Zur Erinnerung:



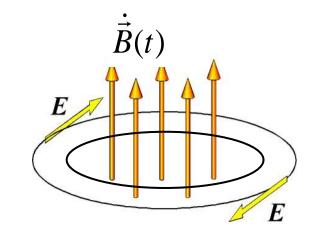


$$\Phi_M = \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

Ändert sich der magnetische Fluss zeitlich, entweder, weil *B* sich ändert, oder die Fläche *A* oder beides, so gilt:

$$\oint_{C(A)} \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{d}{dt} \iint_{A} \vec{B} \cdot d\vec{A} = -\frac{d}{dt} \Phi_{M}$$

Die Fläche A definiert eine Randkurve C. Das geschlossene Wegintegral über das elektrische Wirbelfeld ergibt direkt die Induktionsspannung, die auch mehrfach (etwa durch mehr als eine Windung) abgegriffen werden kann. $U_{ind} = n \oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = -n \frac{d}{dt} \Phi_M$



Die 3. Maxwellsche Gleichung in differentieller (lokaler) Form

$$\oint_{C(A)} \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{d}{dt} \iint_{A} \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

$$\oint_{C(A)} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \iint_{A} rot \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{A} = -\frac{d}{dt} \iint_{A} \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{A}$$

$$rot \vec{E}(\vec{r}) = -\frac{d}{dt} \vec{B}(\vec{r})$$

George G. Stokes 1819-1903



Stokes-Integralsatz

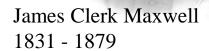
$$\oint_{C(A)} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \iint_{A} rot \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{A}$$

- *Kurzversion:* Die Wirbelstärke des elektrischen Feldes ist an jedem Ort durch die zeitliche Änderung des Magnetfeldes gegeben.
- Im stationären Fall gibt es keine zeitlichen Änderungen. Die Wirbelstärke ist dann Null. Es gibt in diesem Fall keine Wirbel- sondern nur Quellenfelder.

Die 4. Maxwellsche Gleichung

$$\oint_{C(A)} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 \iint_A \vec{j} \cdot d\vec{A} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \iint_A \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

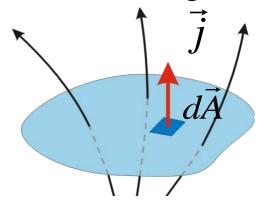




André-Marie Ampère 1775 - 1836

- *Kurzversion:* Ströme, aber auch zeitlich sich ändernde elektrische Felder erzeugen wirbelförmige Magnetfelder.
- In Worten: Sowohl der Fluss einer Stromdichte j als auch die zeitliche Änderung eines elektrischen Flusses erzeugen eine magnetisches Wirbelfeld.
- In der Magnetostatik können Magnetfelder nur durch Ströme erzeugt werden.
- Sowohl die durch Ströme, als auch die durch eine zeitliche Änderung des elektrischen Flusses hervorgerufenen Magnetfelder sind Wirbelfelder.
- Der erste Term auf der rechten Seite bezieht sich auf den Strom, der zweite Term auf den Verschiebungsstrom, dieser ist über die zeitliche Änderung des elektrischen Flusses definiert.

Zur Erinnerung:



Fluss der Stromdichte durch eine Fläche A:

$$\Phi_{j} = \iint_{A} \vec{j} \cdot d\vec{A} = I$$

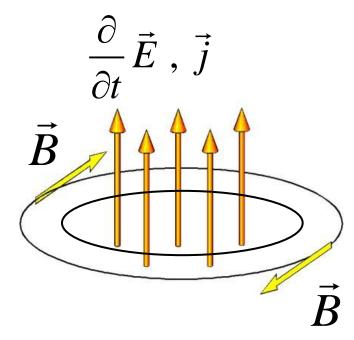
Der Fluss entspricht dem Strom I durch die Fläche. Man muss beachten, dass aufgrund des Skalarproduktes nur der senkrechte Anteil zum Integral beiträgt.

Zeitliche Änderung des elektrischen Flusses (Verschiebungsstrom I_V)

$$\varepsilon_0 \frac{d}{dt} \Phi_E = \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \iint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = I_V$$

insgesamt:

$$\oint_{C(A)} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 \iint_A \vec{j} \cdot d\vec{A} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \iint_A \vec{E} \cdot d\vec{A}$$



Die 4. Maxwellsche Gleichung in differentieller (lokaler) Form

$$\oint_{C(A)} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 \iint_A \vec{j} \cdot d\vec{A} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \iint_A \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

$$\oint_{C(A)} \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \iint_{A} rot \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{A} = \mu_{0} \iint_{A} \vec{j} \cdot d\vec{A} + \mu_{0} \varepsilon_{0} \frac{\partial}{\partial t} \iint_{A} \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

$$rot\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}$$

George G. Stokes 1819-1903



Stokes-Integralsatz

$$\oint_{C(A)} \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \iint_{A} rot \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{A}$$

Anmerkungen:

• *Kurzversion:* Die Wirbelstärke des magnetischen Feldes ist an jedem Ort durch die Stromdichte j und die zeitliche Änderung des elektrischen Feldes (Verschiebunsstromdichte j_v) gegeben.

Übersicht über die Maxwellgleichungen in Materie

Integrale Form



Differentielle Form

(1)
$$\iint_{A(V)} \vec{D} \cdot d\vec{A} = \iiint_{V(A)} \rho \, dV = \mathbf{Q}$$

$$\Leftrightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = div\vec{D} = \rho$$

(2)
$$\iint_{A(V)} \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = div\vec{B} = 0$$

(3)
$$\oint_{S(A)} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_{A(S)} \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

$$\Leftrightarrow \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

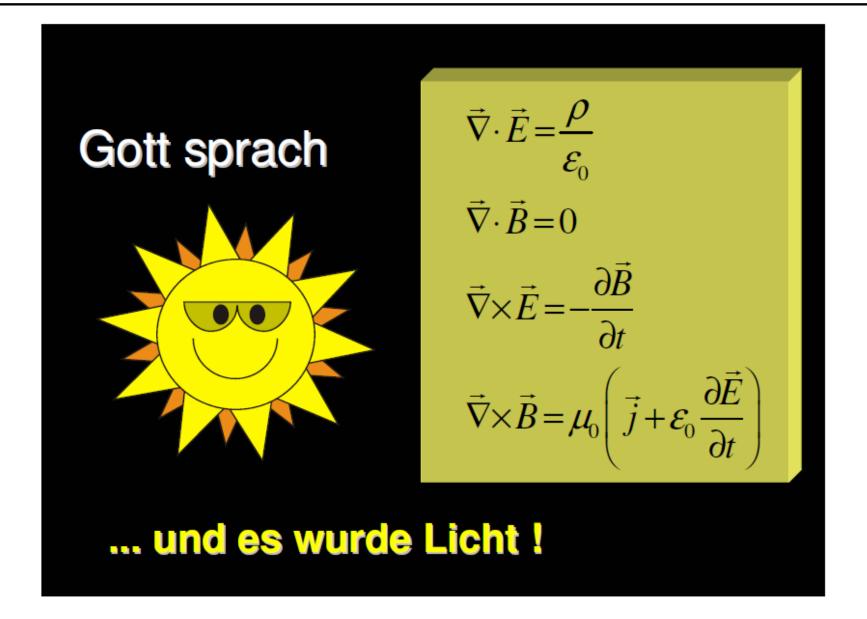
(4)
$$\oint_{S(A)} \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint_{A(S)} \left(\vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} \right) \cdot d\vec{A} \iff \vec{\nabla} \times \vec{H} = rot\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{D}$$

Dazu kommen die Materialgleichungen:

Q, ρ , j sind die wahren Ladungen und Ströme

$$ec{B} = \mu_0 \left(ec{H} + ec{M}
ight)$$
 $ec{M} = \chi_m ec{H} \qquad ec{B} = \mu_0 \mu_r ec{H}$

$$\begin{split} \vec{D} &= \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \\ \vec{P} &= \varepsilon_0 \chi_e \vec{E} \qquad \vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} \end{split}$$



Ergänzende Bemerkungen zu den Maxwellgleichungen:

(1)
$$div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$(3) -rot\vec{E} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + ???$$

(2)
$$div\vec{B} = 0 + ???$$

(4)
$$rot\vec{B} = \frac{\partial}{\partial t}\vec{E}\mu_0\varepsilon_0 + \mu_0\vec{j}$$

Die Unsymmetrie in den Maxwellgleichungen rührt natürlich daher, dass es keine magnetischen Ladungen bzw. Ladungsdichten ρ_m gibt und daher auch keine bewegten magnetischen Ladungen (magnetische Stromdichten j_m und Ströme).

$$(1) \quad div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

(3)
$$-rot\vec{E} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{j}_m$$

(2)
$$div\vec{B} = \rho_m$$

(4)
$$rot\vec{B} = \frac{\partial}{\partial t}\vec{E}\mu_0\varepsilon_0 + \mu_0\vec{j}$$

Es wird danach gesucht. Experimentelle Hinweise gibt es bisher nicht.