Inhalt der mathematischen Ergänzung zur Physik B2:

- Wiederholung Divergenz, Gauß-Integralsatz
- Rotation, Stokes-Integralsatz, Anwendungen
- ***Ladungen in elektrischen und magnetischen Feldern***
- Kondensator und Induktivität im Stromkreis
- Berechnung von Wechselstromnetzwerken
- Zusammenfassung der Maxwell-Gleichungen
- Die Kontinuitätsgleichung
- Berechnungen zur Wellenoptik
- Zusammenfassung der klassischen Physik
- Mathematische Wiederholung zu Wellen
- Die Schrödinger-Gleichung
- Die Mathematik des Wasserstoff-Atoms
- Der Aufbau des Periodensystems

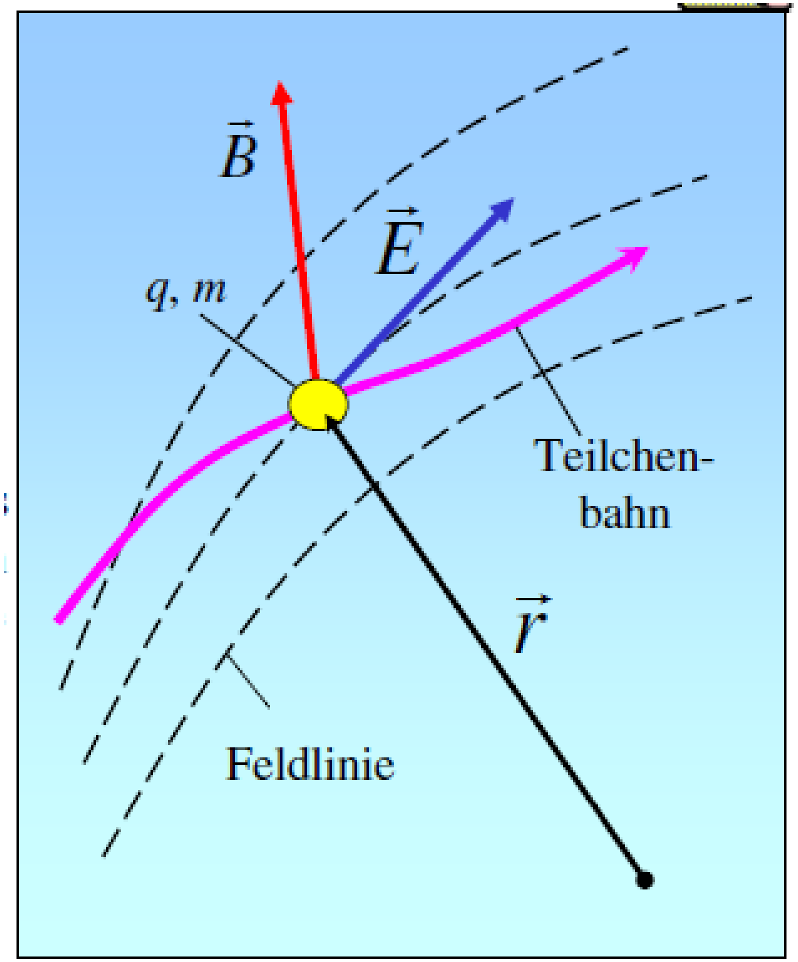
Ladungen in elektrischen und magnetischen Feldern

Zur Erinnerung: Felder (etwa *E*, *B*, aber auch die Gravitation) sind reine Hilfsgrößen, die über die Kraftwirkung auf Probeteilchen (Ladungen q bzw. Massen m definiert sind:

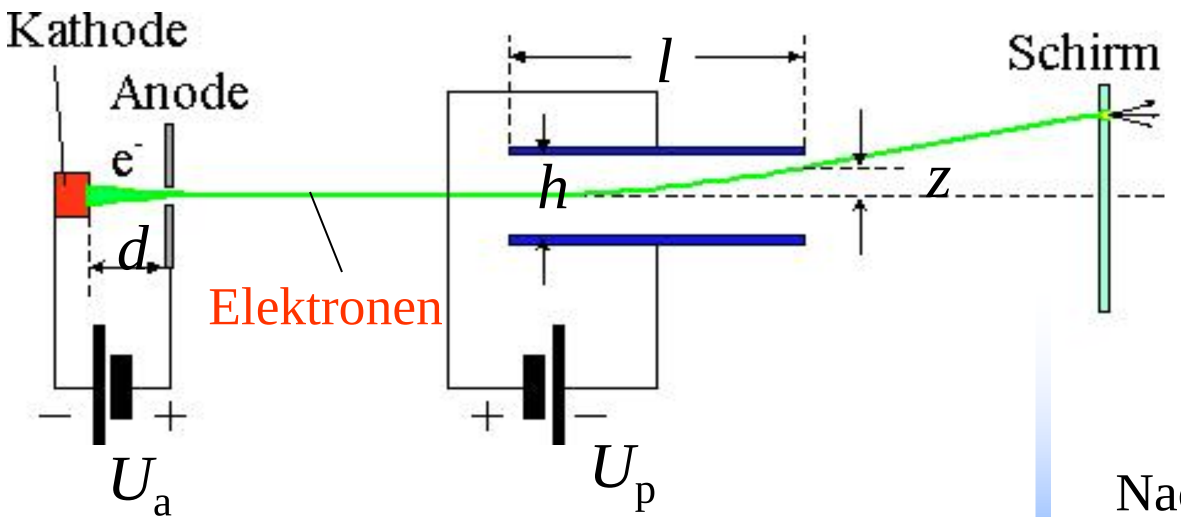
Gravitation: $\vec{F}_G = m\vec{G}$

Elektrisches Feld: $\vec{F}_E = q \cdot \vec{E}$

Magnetisches Feld: $\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B}$



Beispiel: Braunsche Röhre (Oszillograph)



Ladung des Elektrons:

$$q = -e = -1.602 \cdot 10^{-19} C$$

Masse des Elektrons:

$$m_e = 9.11 \cdot 10^{-31} kg$$

Bewegungsgleichung der Elektronen zwischen Kathode und Anode:

$$F = m_e a_e = m_e \dot{v} = e E_a \quad \text{mit} \quad E_a = \frac{U_a}{d}$$

Beschleunigung:

$$a_e = \frac{e}{m_e} \frac{U_a}{d}$$

Nach der Zeit t ist die Anode erreicht, also

$$d = \frac{1}{2} a_e t^2 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2 m_e d}{e E_a}}$$

und

$$t = \sqrt{\frac{2}{e} \frac{m_e d^2}{U_a}} = d \sqrt{\frac{2}{e} \frac{m_e}{U_a}}$$

Aus der Bewegungsgleichung folgt durch Integration

$$v_\mathrm{e} = \frac{e}{m_\mathrm{e}} E_\mathrm{a} \int dt = \frac{e}{m_\mathrm{e}} E_\mathrm{a}\, t$$

und damit:

$$v_\mathrm{e} = \frac{e}{m_\mathrm{e}} U_\mathrm{a} \sqrt{\frac{2 m_\mathrm{e}}{e U_\mathrm{a}}} = \sqrt{\frac{2 e U_\mathrm{a}}{m_\mathrm{e}}}$$

In den Platten wirkt die transversale Kraft (a_p = Transversalbeschleunigung)

$$F_\mathrm{p} = e E_\mathrm{p} = e \frac{U_\mathrm{p}}{h} \quad \Rightarrow \quad a_\mathrm{p} = \frac{e U_\mathrm{p}}{m_\mathrm{e} h}$$

Die Platten werden in der Zeit t_p durchflogen. Dann ist die Ablenkung

$$z = \frac{1}{2} a_\mathrm{p} t_\mathrm{p}^2$$

Flugzeit durch die Platten:

$$t_\mathrm{p} = \frac{l}{v_\mathrm{e}} = l \sqrt{\frac{m_\mathrm{e}}{2 e U_\mathrm{a}}}$$

dann folgt für die Ablenkung

$$z = \frac{1}{2} \frac{e U_\mathrm{p}}{m_\mathrm{e} h} l^2 \frac{m_\mathrm{e}}{2 e U_\mathrm{a}} = \frac{1}{4} \frac{U_\mathrm{p}}{U_\mathrm{a}} \frac{l^2}{h}$$

Beispiel :

U_a = 100 V, $m_\mathrm{e} = 9.1 \cdot 10^{-31}$ kg

$\Rightarrow \quad v_\mathrm{e} = 5.9 \cdot 10^6$ m/s

U_p = 5 V, l = 5 cm, h = 1 cm

$\Rightarrow \quad z$ = 3.1 mm

Magnetische Kräfte auf ein geladenes Teilchen

Im elektrischen Feld wirkt auf eine Ladung immer eine Kraft, dagegen ist im Magnetfeld

$$\vec{F}_{\mathrm{mag}} = 0 \quad \text{wenn} \quad \vec{v}_{\mathrm{Ladung}} = 0$$

Wenn sich die Ladung bewegt, d.h. $\vec{v} \neq 0$, dann ergibt sich eine Kraft

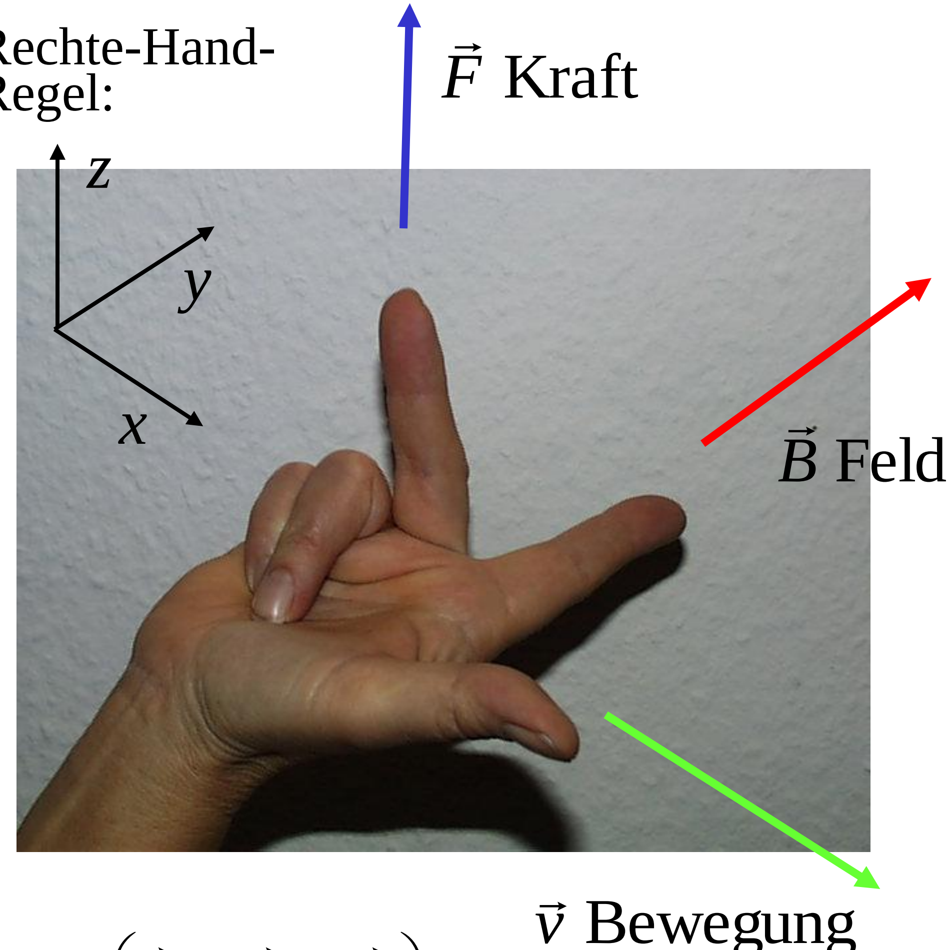
$$\vec{F}_{\mathrm{mag}} \perp \vec{v} \text{ und } \vec{F}_{\mathrm{mag}} \perp \vec{B}$$

Das Experiment zeigt folgendes Kraftgesetz („Lorentzkraft“)

$$\boxed{\vec{F}_{\mathrm{mag}} = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}}$$

$\vec{B}$ ist die magnetische Feldstärke, genauer: die magnetische Induktion

Rechte-Hand-Regel:



$$\vec{v} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{e}_{\mathrm{x}} & \vec{e}_{\mathrm{y}} & \vec{e}_{\mathrm{z}} \\ v_{\mathrm{x}} & 0 & 0 \\ 0 & B_{\mathrm{y}} & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot \vec{e}_{\mathrm{x}} + 0 \cdot \vec{e}_{\mathrm{y}} + v_{\mathrm{x}} B_{\mathrm{y}} \vec{e}_{\mathrm{z}}$$

Im Magnetfeld gilt die wichtige Eigenschaft:

$$\left|\vec{v}(t)\right| = \text{const.}$$

d.h. die Ladung wird zwar abgelenkt, ändert dabei aber nicht den Betrag der Geschwindigkeit. Damit bleibt auch der Betrag des Impulses p und die kinteische Energie unverändert !

Warum ist das so?

Beweis: $\vec{F}_{\text{mag}} = m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v}\times\vec{B} \quad \Big| \cdot\vec{v}$

$$\Rightarrow m\vec{v}\,\frac{d\vec{v}}{dt} = q\,\underbrace{\vec{v}\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)}_{=0} = 0$$

Nun gilt aber:

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{v}\cdot\vec{v}\right) = \frac{d\vec{v}}{dt}\vec{v} + \vec{v}\,\frac{d\vec{v}}{dt} = 2\vec{v}\,\frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}m\frac{d}{dt}\left(\vec{v}\cdot\vec{v}\right) = \frac{d}{dt}E_{kin} = m\vec{v}\,\frac{d\vec{v}}{dt} = 0$$

$$\Downarrow$$

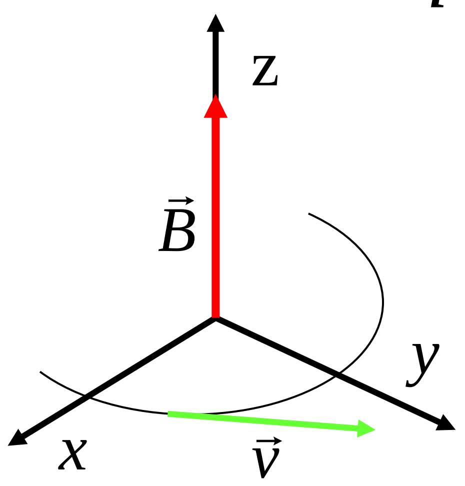
$$\frac{d}{dt}E_{kin} = 0 \Rightarrow \left|\vec{v}\right| = \left|\vec{p}\right| = \text{const.}$$

$$\vec{v}\,\frac{d\vec{v}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{v} \perp \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Bewegung im homogenen Magnetfeld

Lorentzkraft:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} = m\ddot{\vec{r}}$$



$$\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_z \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

Damit folgt

$$\vec{v} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ v_x & v_y & v_z \\ 0 & 0 & B_z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} v_y B_z \\ -v_x B_z \\ 0 \end{pmatrix}$$

Man erhält folgende Gleichungen:

$$(1) \quad m\ddot{x} = qv_y B_z$$

$$(2) \quad m\ddot{y} = -qv_x B_z$$

$$(3) \quad m\ddot{z} = 0$$

Aus (3) folgt sofort

$$z(t) = v_{0z}\, t + z_0$$

(1) und (2) ergeben das Gleichungs-system (gekoppelte DGL)

$$\dot{v}_x = \frac{qB_z}{m} v_y \quad \text{und} \quad \dot{v}_y = -\frac{qB_z}{m} v_x$$

mit der Zyklotron-frequenz: $\omega_z = \dfrac{qB_z}{m}$

Das Gleichungssystem kann durch folgenden Ansatz gelöst werden:

$$v_x(t) = v_0 \cos \omega_z t$$
$$v_y(t) = -v_0 \sin \omega_z t$$

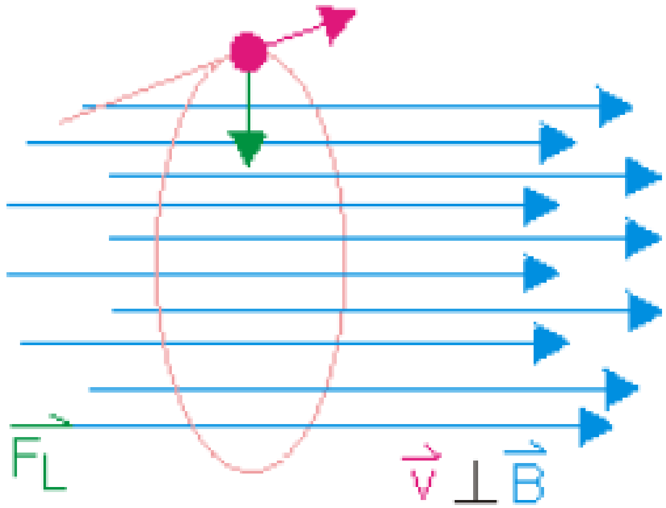
Es folgt

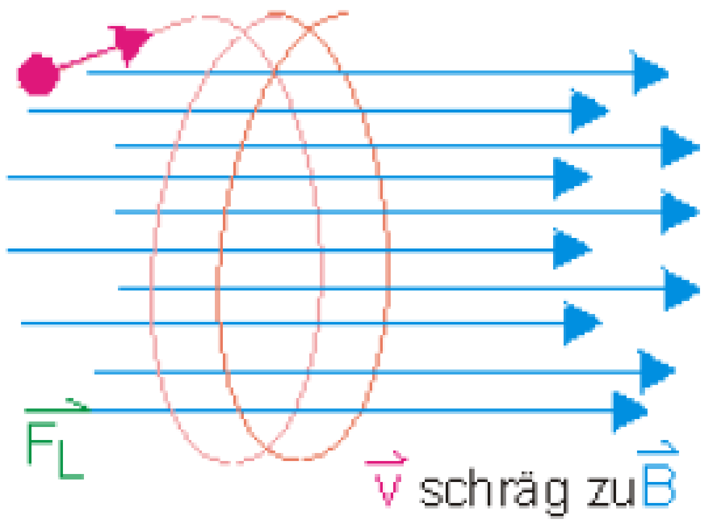
$$\dot{v}_x = -\omega_z v_0 \sin \omega_z t = \omega_z v_y$$
$$\dot{v}_y = -\omega_z v_0 \cos \omega_z t = -\omega_z v_x$$

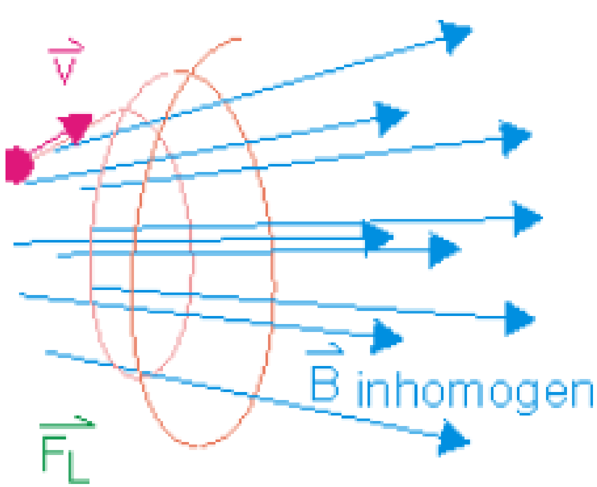
Das ist die Bewegung auf einer ***Kreisbahn mit konstanter Frequenz***

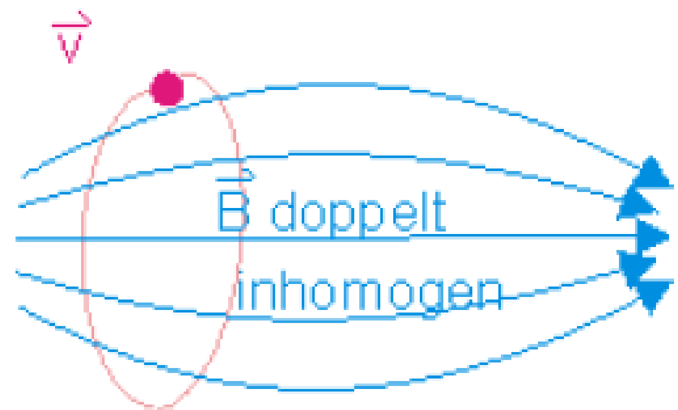
Zusammenfassung:

Die Bewegung verläuft also in der x,y-Ebene auf Kreisbahnen. Hat das Teilchen eine Anfangsgeschwindigkeit in der Richtung des Magnetfeldes B, also in z-Richtung, so überlagert sich der Kreisbewegung in x,y eine Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit in Richtung z.
Das Teilchen führt eine „Art“ Schraubenbewegung um die Feldlinien aus.

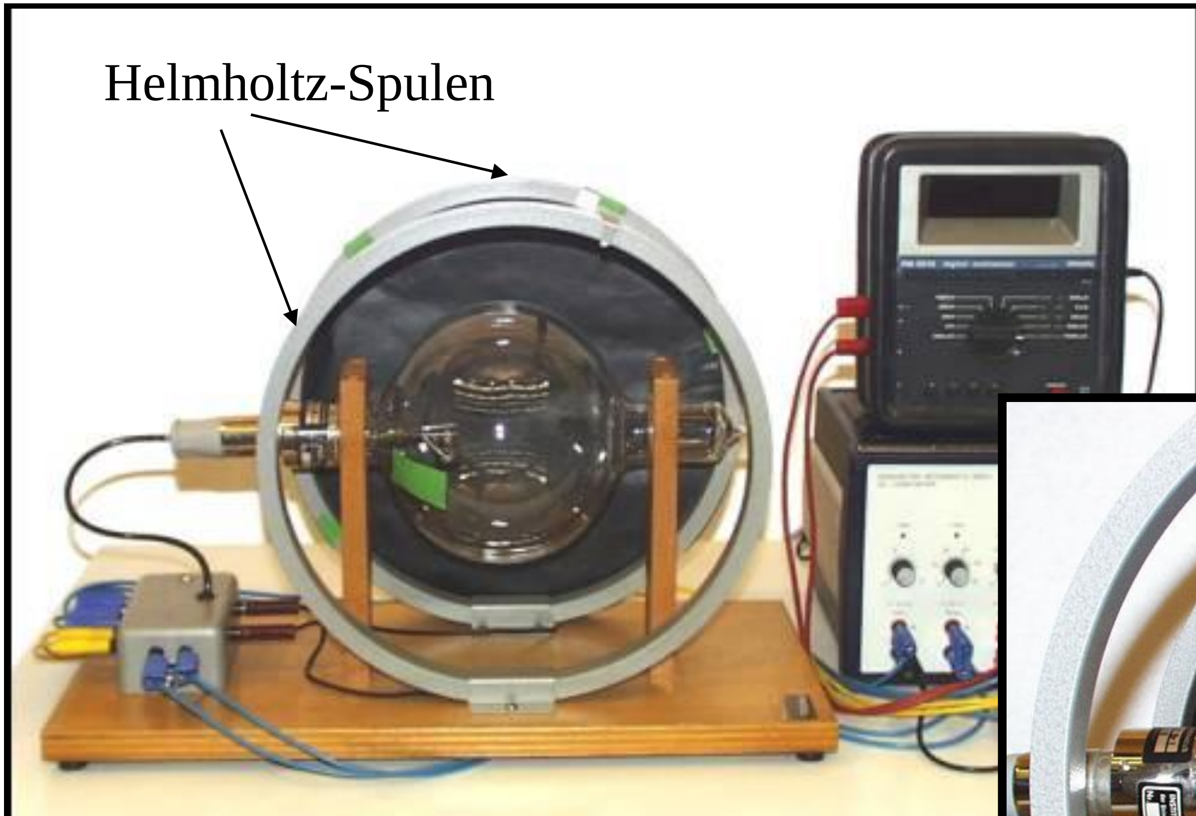




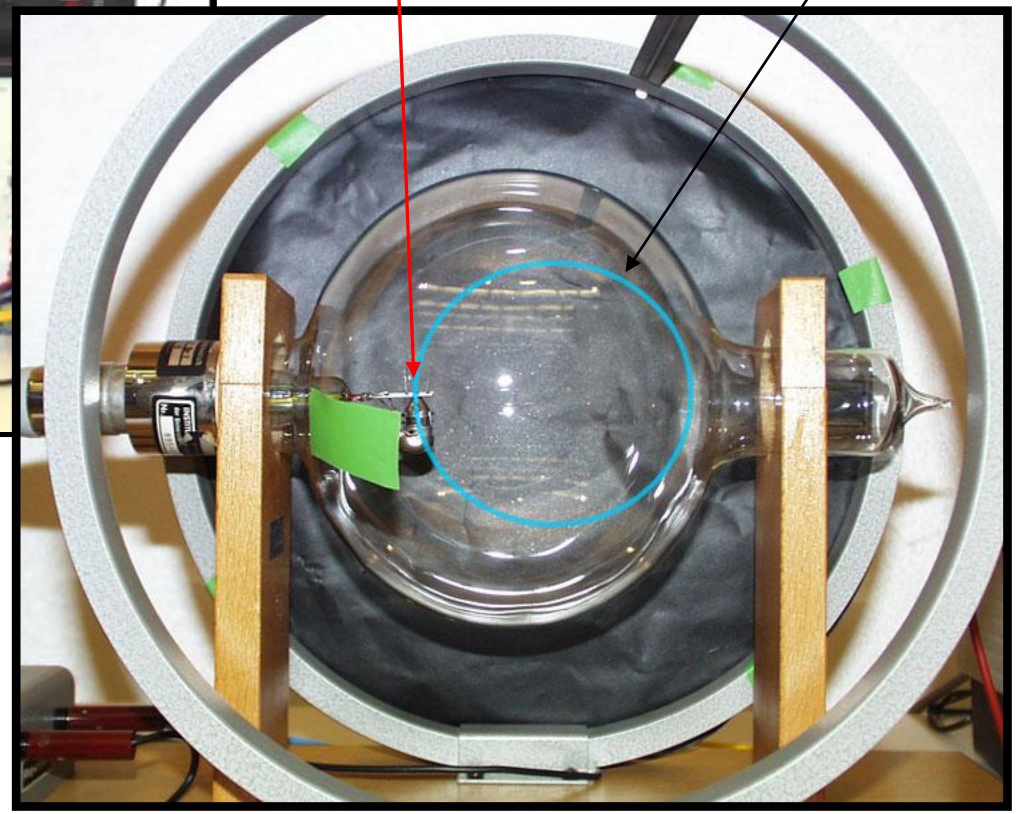




Magnetische Flasche:
Teilchen kann reflektiert werden



Experiment:
Fadenstrahlrohr



B-Feld steht senkrecht auf den Kreisflächen der Spulen.
Die Geschwindigkeit v der Elektronen ist nach oben gerichtet.

Elektronenstrahl im homogenen Magnetfeld / Oszilloskop / TV

Man kann Elektronenstrahlen natürlich auch magnetisch ablenken.

Im transversalen Magnetfeld beschreiben die Teilchen Kreisbahnen. Die Lorentzkraft ist hier die Zentripetalkraft und es gilt:

$$m\frac{v^2}{R} = m\omega_z^2 R = qvB$$

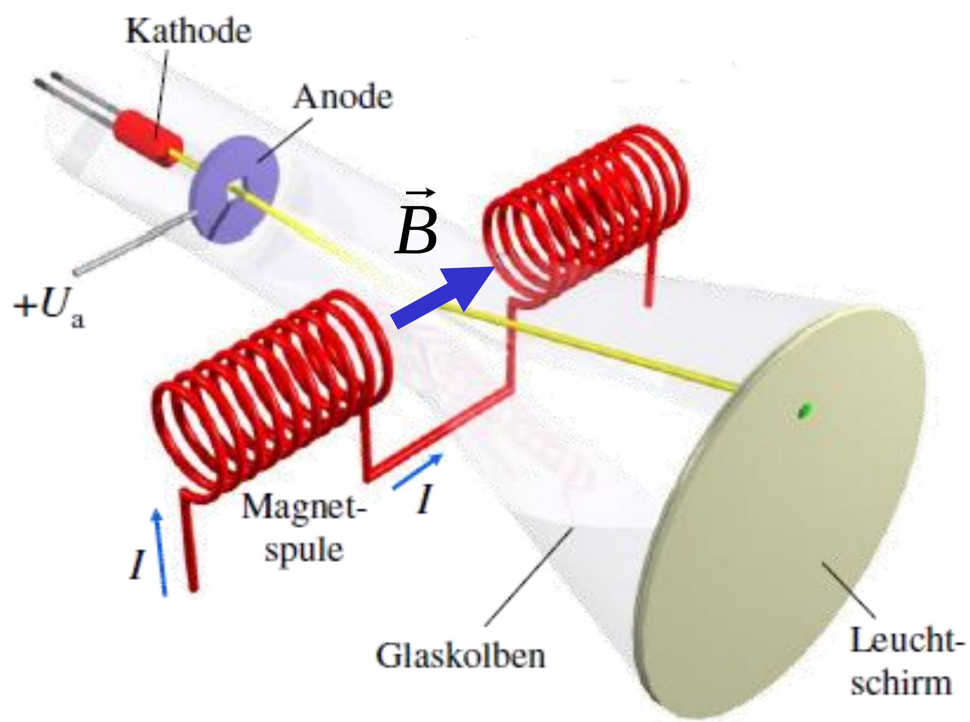
mit $\omega_z = \dfrac{qB}{m}$ folgt

$$m\frac{q^2B^2}{m^2}R = \frac{q^2B^2}{m}R = qvB$$

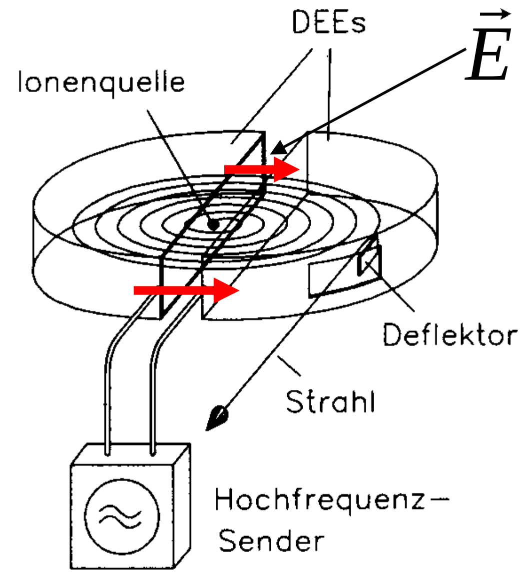
auflösen nach dem Bahnradius R ergibt

$$R = \frac{mv}{qB} = \frac{p}{qB}$$

Magnetfelder selektieren nach dem Impuls p

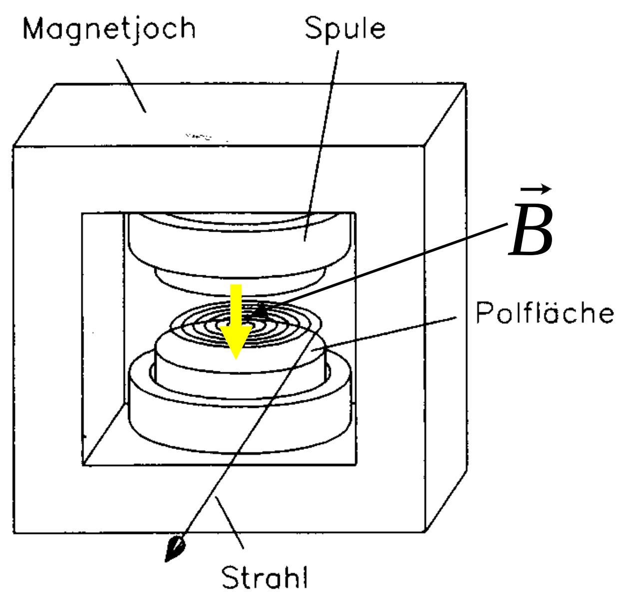


Anwendung beim „Zyklotron“



Prinzip:

Ein senkrechtes Magnetfeld zwingt die geladenen Teilchen abhängig von ihrer Energie auf eine Kreisbahn. Zwischen zwei Kupferhalbschalen existiert ein elektrisches Feld im Takt der Synchrotronfrequenz, das die Teilchen beschleunigt.



Historisches

Ernest Lawrence 1929
in Berkeley, Kalifornien

wesentlicher Meilenstein in der Kern- und Teilchenphysik.

Erzeugung von Teilchenstrahlen hoher Energie.
Möglichkeit zur Erzeugung künstlicher Kernumwandlungen
Entdeckung des Neutrons durch Chadwick (1932)

50 cm