

Inhalt der mathematischen Ergänzung zur Physik B2:

- Wiederholung Divergenz, Gauß-Integralsatz
- **Rotation, Stokes-Integralsatz, Anwendungen**
- Ladungen in elektrischen und magnetischen Feldern
- Kondensator und Induktivität im Stromkreis
- Berechnung von Wechselstromnetzwerken
- Zusammenfassung der Maxwell-Gleichungen
- Die Kontinuitätsgleichung
- Berechnungen zur Wellenoptik
- Zusammenfassung der klassischen Physik
- Mathematische Wiederholung zu Wellen
- Die Schrödinger-Gleichung
- Die Mathematik des Wasserstoff-Atoms
- Der Aufbau des Periodensystems

Stokes-Integralsatz (Satz von Stokes) George G. Stokes 1819-1903



Für jedes Vektorfeld \vec{A} mit:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} A_x(x, y, z) \\ A_y(x, y, z) \\ A_z(x, y, z) \end{pmatrix}$$

gilt:

$$\oint_{C(a)} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \iint_a \text{rot} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{a}$$

Wir integrieren also auf der linken Seite über den Rand $C(a)$ der Fläche a . Rechts steht ein Fluss, nämlich der Fluss der Größe „Rotation von des Vektorfeldes A “ durch die Fläche a .

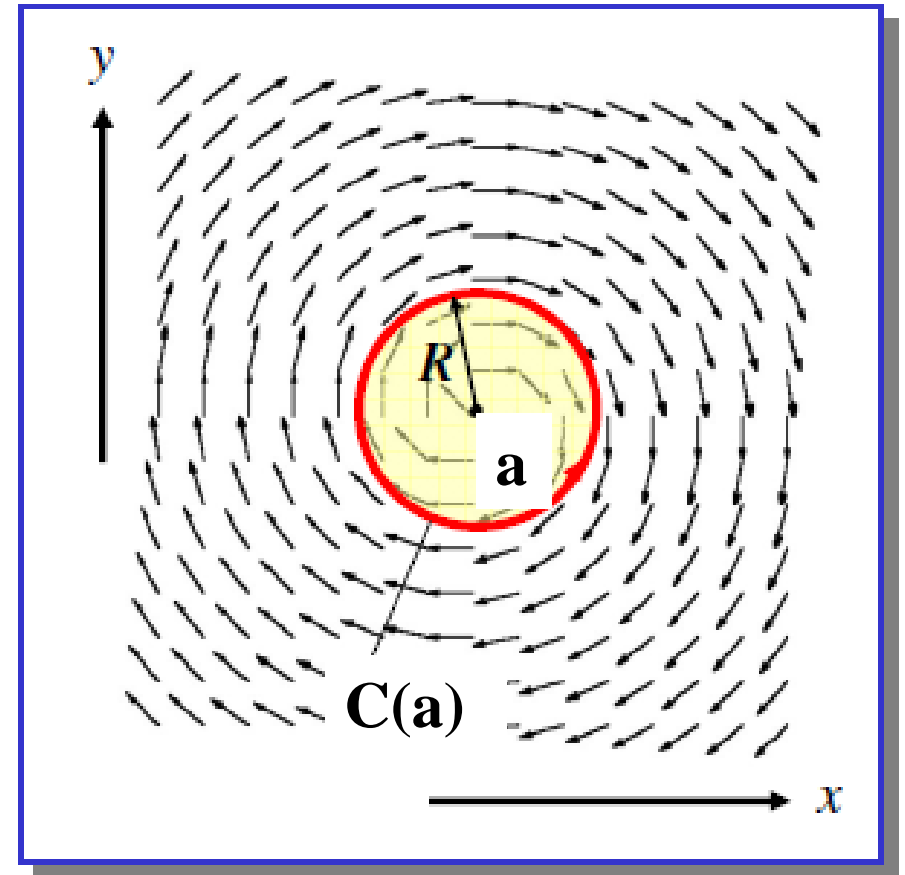
Beispiel zum Stokes-Integralsatz:

Betrachten Sie folgendes Vektorfeld:

$$\vec{A}(\vec{r}) = A_0 \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wir bilden die Rotation und erhalten:

$$\text{rot}\vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix} = A_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1-1 \end{pmatrix} = A_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$



Vektorfeld A in der x, y-Ebene
mit Fläche a und Berandung C(a)

Wir berechnen zunächst das Wegintegral entlang eines Kreises mit Radius R in der x,y -Ebene.

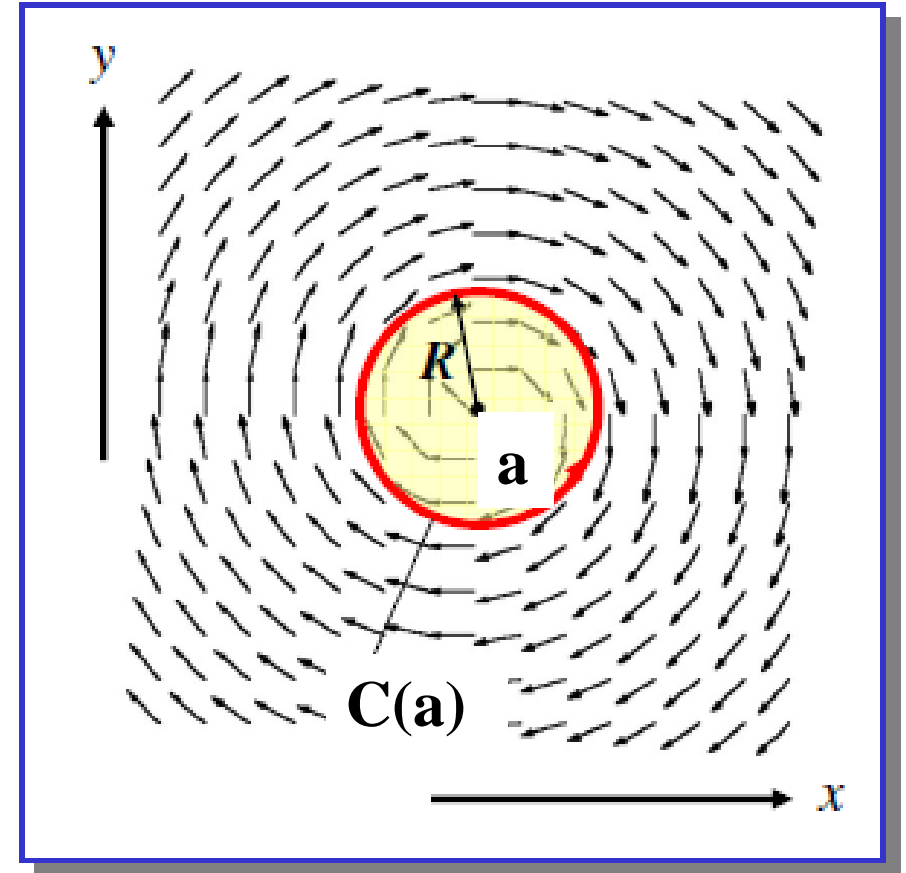
Die Parametrisierung lautet:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cos t \\ R \sin t \\ 0 \end{pmatrix}$$

und damit:

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} R \cos t \\ R \sin t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R \sin t \\ R \cos t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$d\vec{r} = \begin{pmatrix} -R \sin t \\ R \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt$$



$$\oint_{C(\mathbf{a})} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} A_0 \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -R \sin t \\ R \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt$$

und weiter:

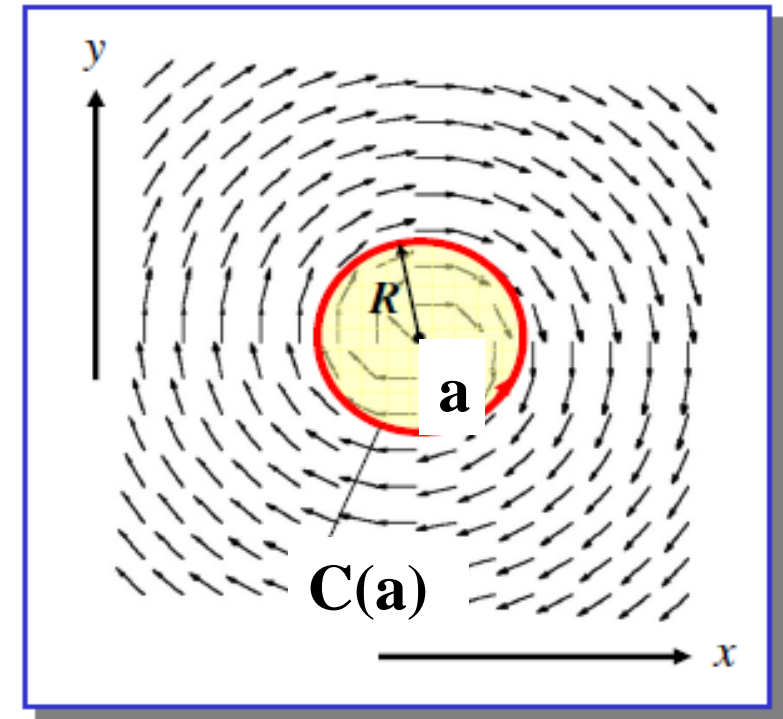
$$\oint_{C(a)} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} A_0 \begin{pmatrix} R \sin t \\ -R \cos t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -R \sin t \\ R \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt = -A_0 R^2 \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = -2\pi A_0 R^2$$

Für den Fluss der Rotation durch die Fläche a gilt:

$$\iint_a \text{rot} \vec{A} \cdot d\vec{a} = \iint_a A_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} da = -2A_0 \iint_a da = -2\pi R^2 A_0$$

Es ist also tatsächlich:

$$\oint_{C(a)} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \iint_a \text{rot} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{a} = -2\pi R^2 A_0$$



Übertragung auf die Gegebenheiten der Elektrostatik

Maxwell-Gleichungen der Elektrostatik

differentiell (lokal)

$$\text{rot} \vec{E}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) = 0$$

Integralsätze der
Vektoranalysis

integral

$$\oint_{C(a)} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0$$

$$\oint_{C(a)} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \iint_a \text{rot} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{a}$$

Stokes

$$\text{div} \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r})$$

$$\oiint_{a(V)} \vec{E} \cdot d\vec{a} = \iiint_{V(a)} \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} \cdot dV = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\oiint_{a(V)} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{a} = \iiint_{V(a)} \text{div} \vec{A}(\vec{r}) \cdot dV$$

Gauß

Wir hatten schon gezeigt, dass das E -Feld in der Elektrostatik wirbelfrei ist und daher ein skalares Potential φ existiert mit

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi = -\vec{\nabla}\varphi$$

Andererseits gilt

$$\text{div}\vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Wir kombinieren die beiden Gleichungen und erhalten

$$\begin{aligned} -\text{divgrad}\varphi(\vec{r}) &= \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0} \\ &= -\vec{\nabla}^2\varphi(\vec{r}) = -\Delta\varphi(\vec{r}) \end{aligned}$$

mit dem ***Deltaoperator oder Laplace-Operator***

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Den Zusammenhang zwischen der Ladungsdichte und dem Potential vermittelt die

Poissongleichung

$$\Delta\varphi(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$$

Verschwindet lokal die Ladungsdichte, so gilt die

Laplacegleichung

$$\Delta\varphi(\vec{r}) = 0$$

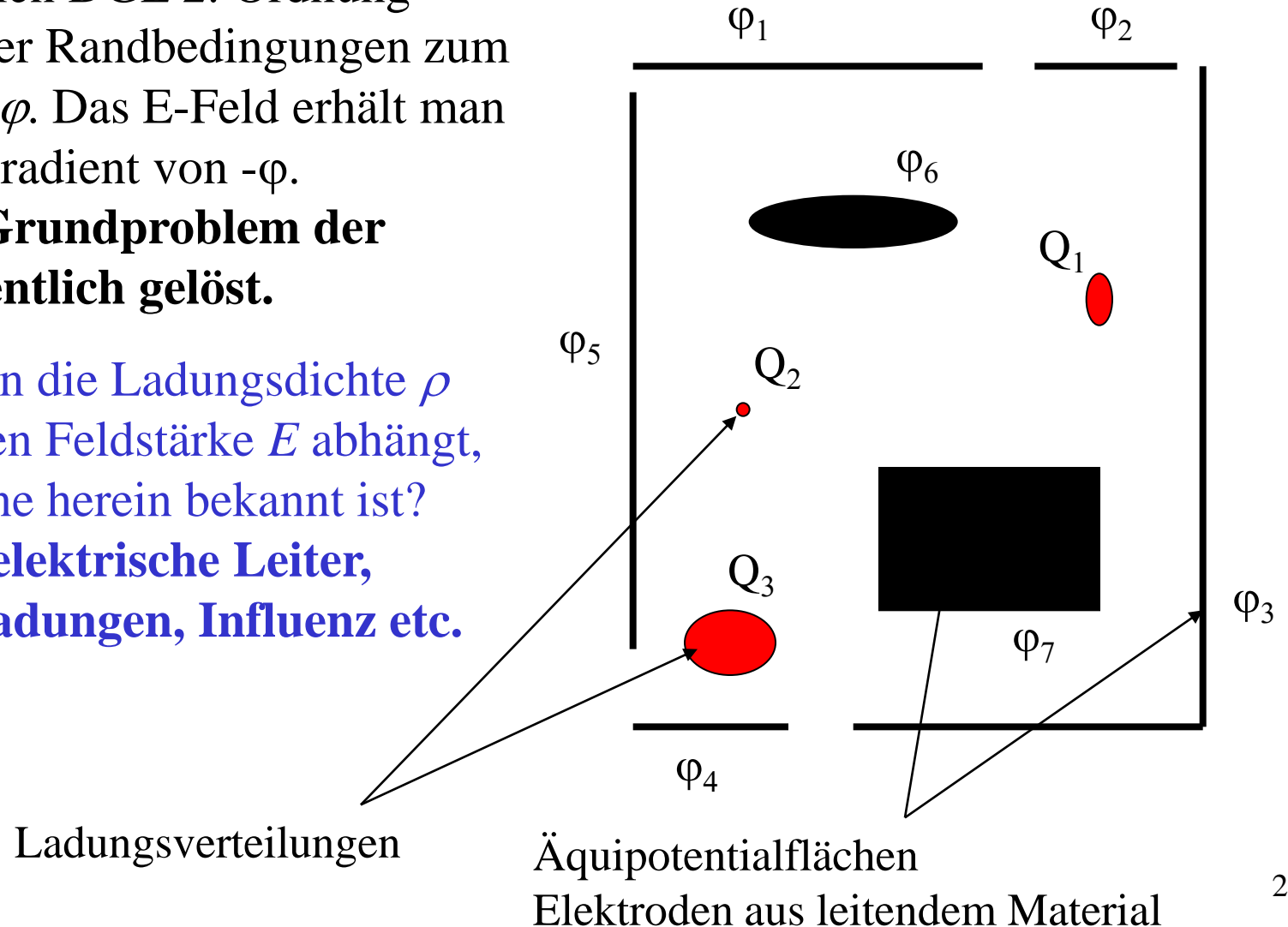
Bei bekannter Ladungsdichte ρ führt die Lösung der partiellen DGL 2. Ordnung unter Beachtung der Randbedingungen zum skalaren Potential φ . Das E-Feld erhält man dann einfach als Gradient von $-\varphi$.

Damit wäre das Grundproblem der Elektrostatik eigentlich gelöst.

aber: was ist, wenn die Ladungsdichte ρ von der elektrischen Feldstärke E abhängt, also nicht von vorne herein bekannt ist?

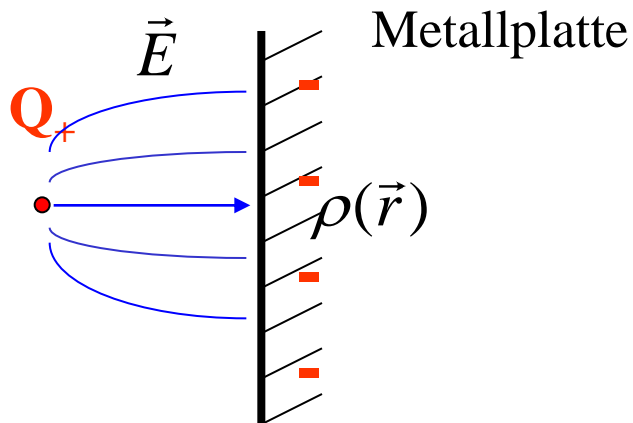
Stichworte sind: elektrische Leiter, Materie, Spiegelladungen, Influenz etc.

Grundproblem in der Elektrostatik



Einschub: Äquipotentialflächen, Elektroden, Influenz

Betrachte als Beispiel Ladung vor leitender Wand



Material enthält frei bewegliche Ladungen (i.a. Elektronen) auf denen die Feldlinien enden. Diese sitzen auf der Oberfläche (**Influenz**). Jede Änderung des elektrischen Feldes ändert auch die Ladungsdichte ρ auf der Oberfläche des Leiters.

Im statischen Fall verschwindet die elektrische Feldstärke im Leiter, also

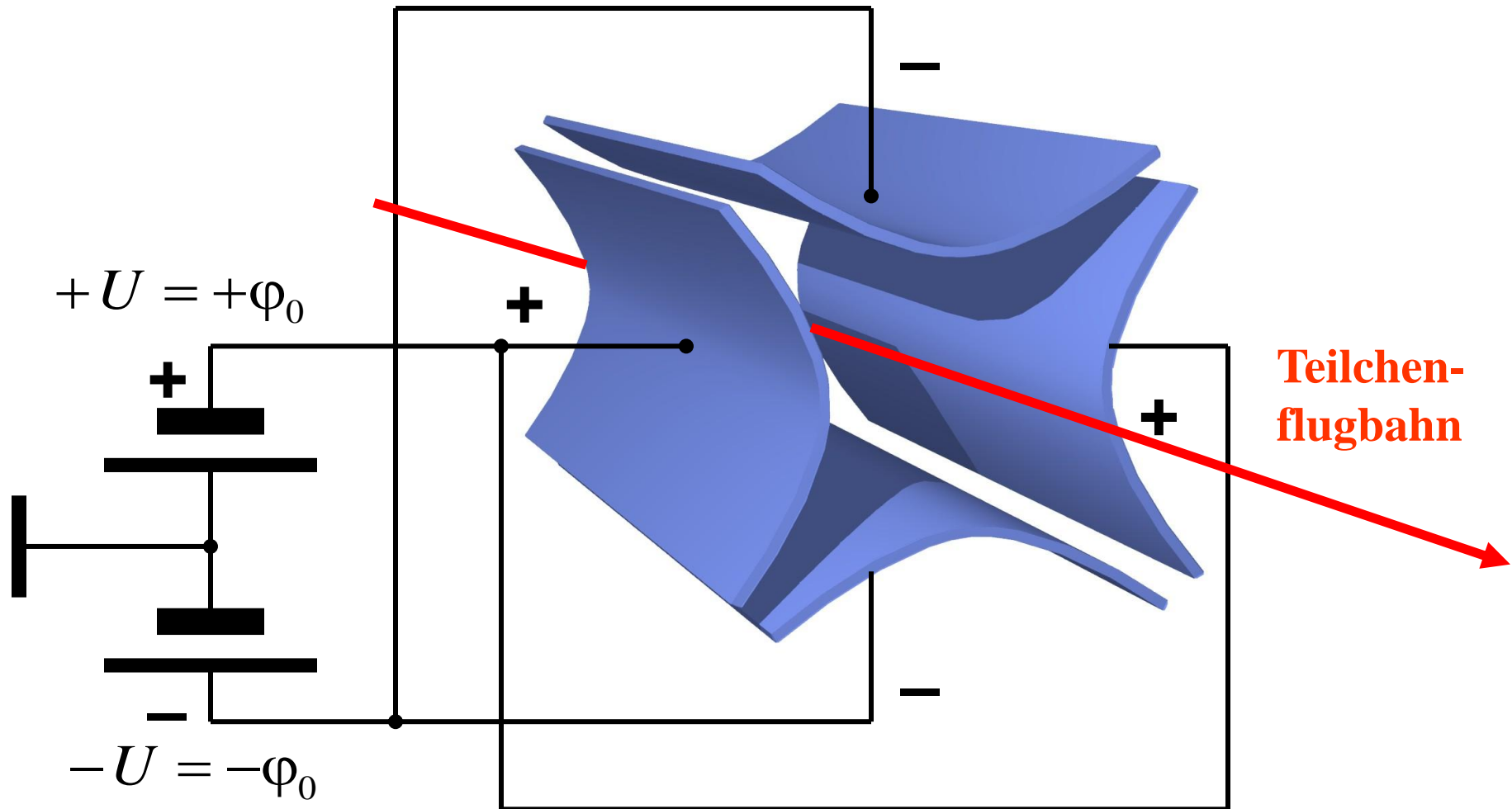
$$E(\vec{r})|_{\text{Leiter}} = 0 \quad \text{und} \\ \varphi(\vec{r})|_{\text{Leiter}} = \varphi_0 = \text{const.}$$

Damit ist das skalare Potential überall im Leiter konstant. Die Leiteroberfläche ist „Äquipotentialfläche“. Der Leiter (die Elektrode) „liegt auf einem Potential“.

Das elektrische Feld außerhalb des Leiters steht damit senkrecht auf der Oberfläche.

$$E(\vec{r}) \perp \text{Oberfläche}$$

an der Oberfläche des Leiters sitzen dann Oberflächenladungen.

Beispiel 1: Analytisch lösbares Problem (elektrostatischer Quadrupol)

Geometrie und Potentiale eines elektrostatischen Quadrupols

Lösung der Laplace-Gleichung

$$\Delta\varphi(\vec{r}) = 0$$

im ladungsfreien Raum
zwischen 4 Elektroden mit
vorgegebenem Potential

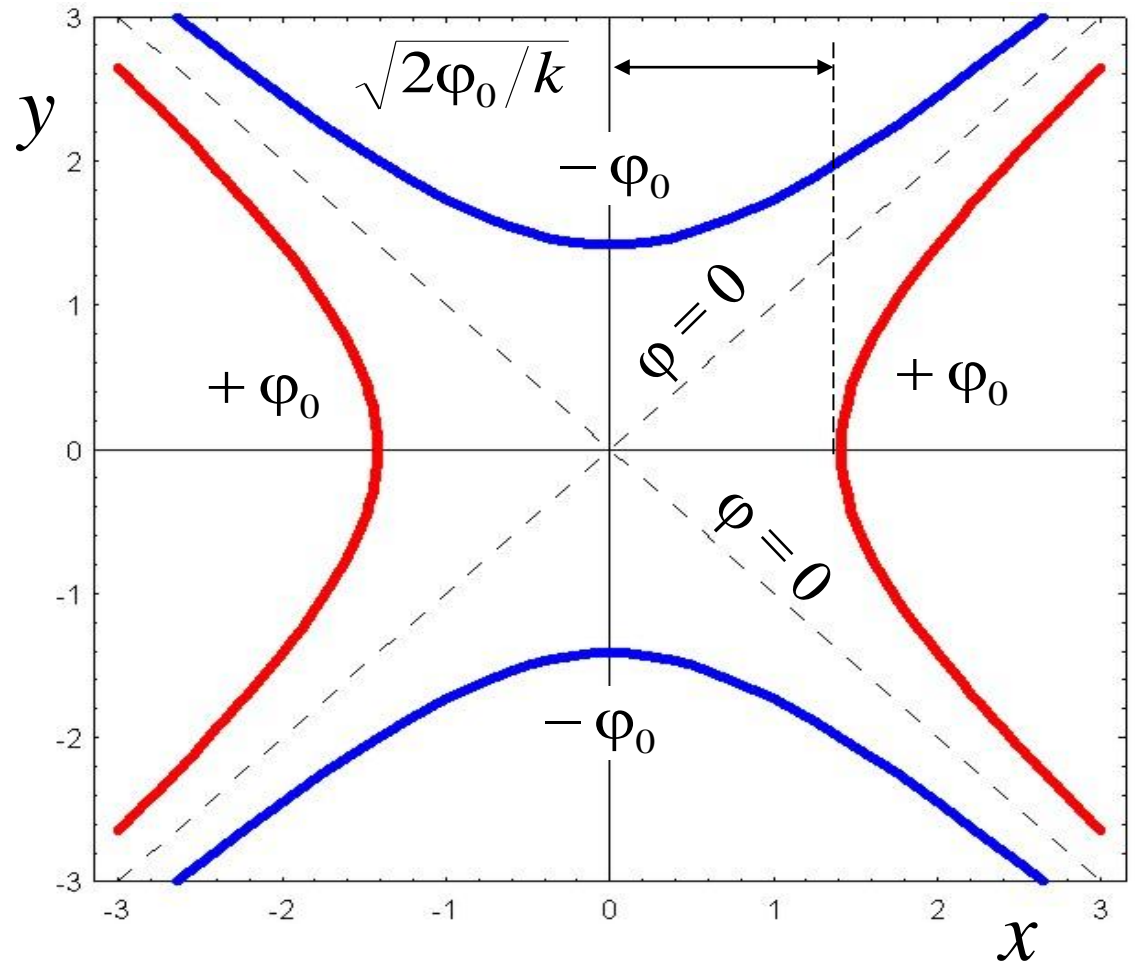
Das Potential lautet:

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2}k(x^2 - y^2)$$

$$\vec{E}(x, y) = -\text{grad}\varphi(x, y)$$

$$E_x = -kx$$

$$E_y = ky$$

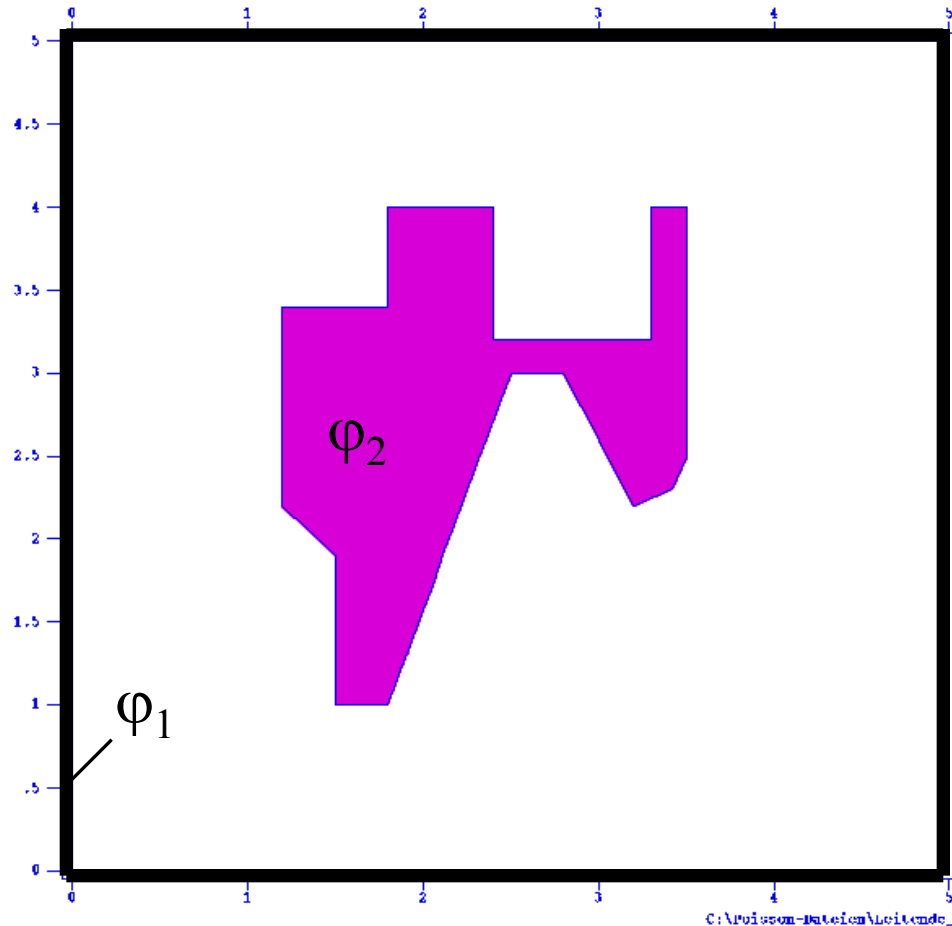


Elektroden haben Hyperbelform !

Beispiel 2: *Analytisch nicht lösbares Problem*

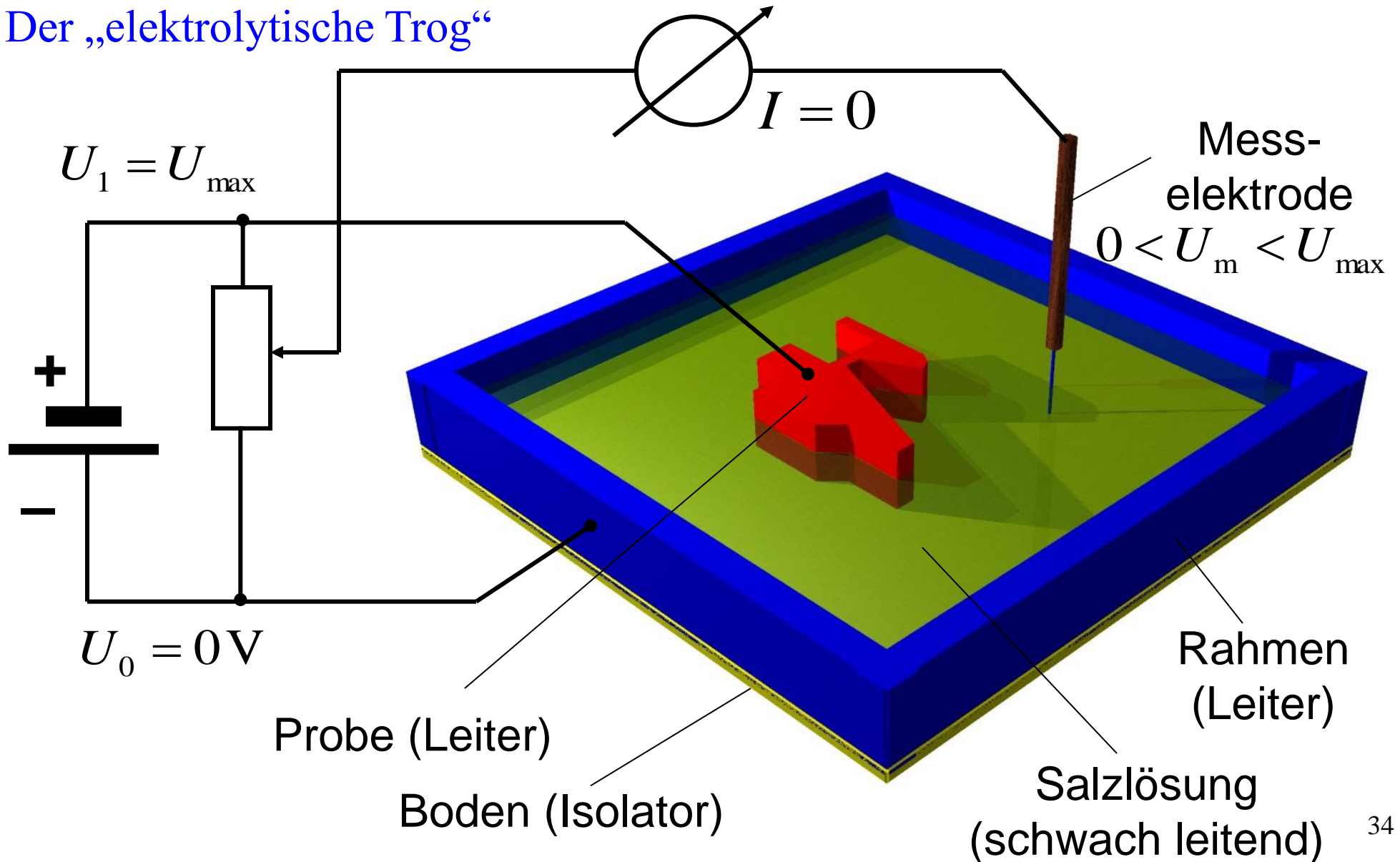
Lösung der Laplace-Gleichung

$$\Delta\varphi(\vec{r}) = 0$$

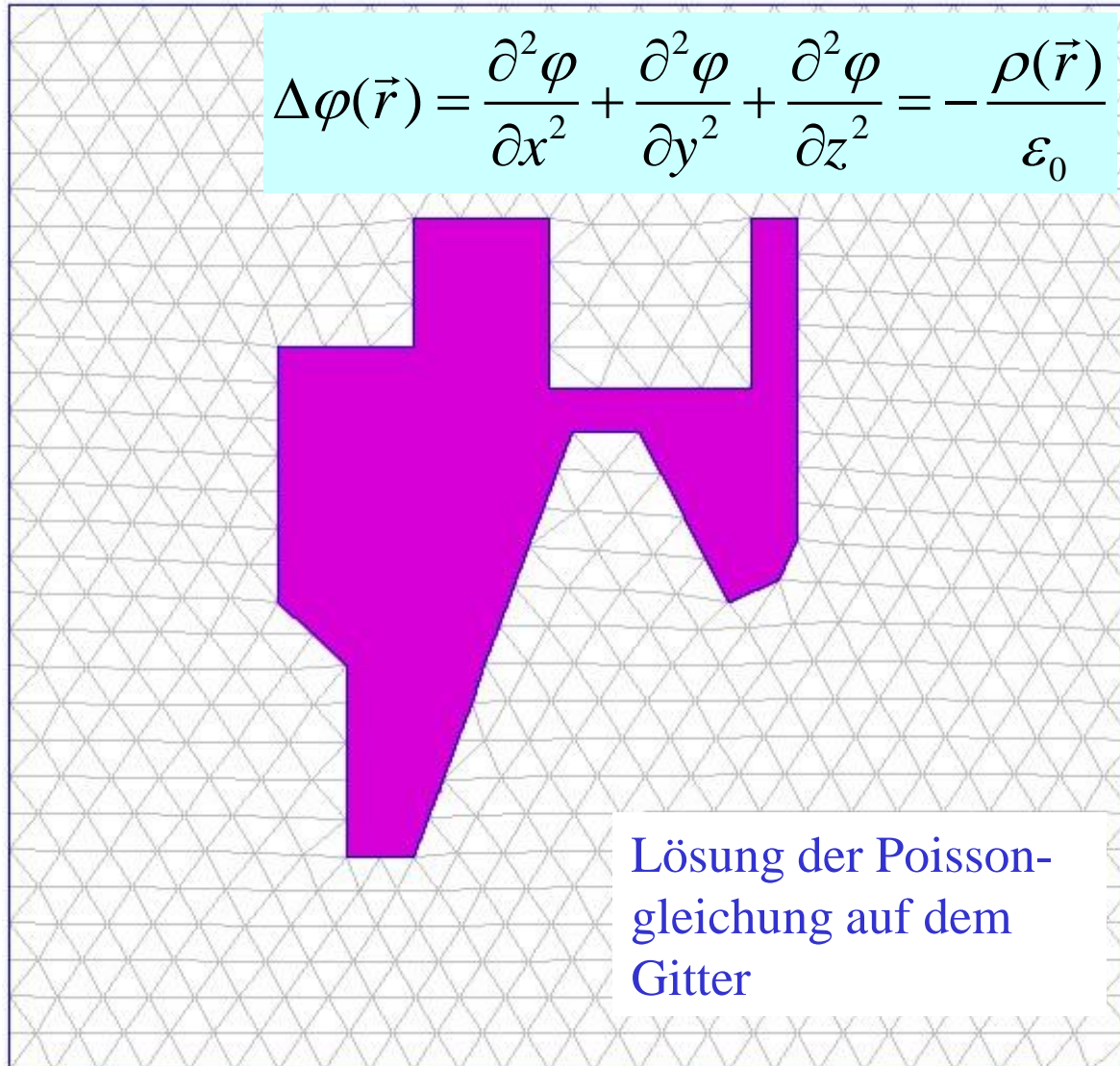


- experimenteller Ansatz
- numerischer Ansatz

Der „elektrolytische Trog“



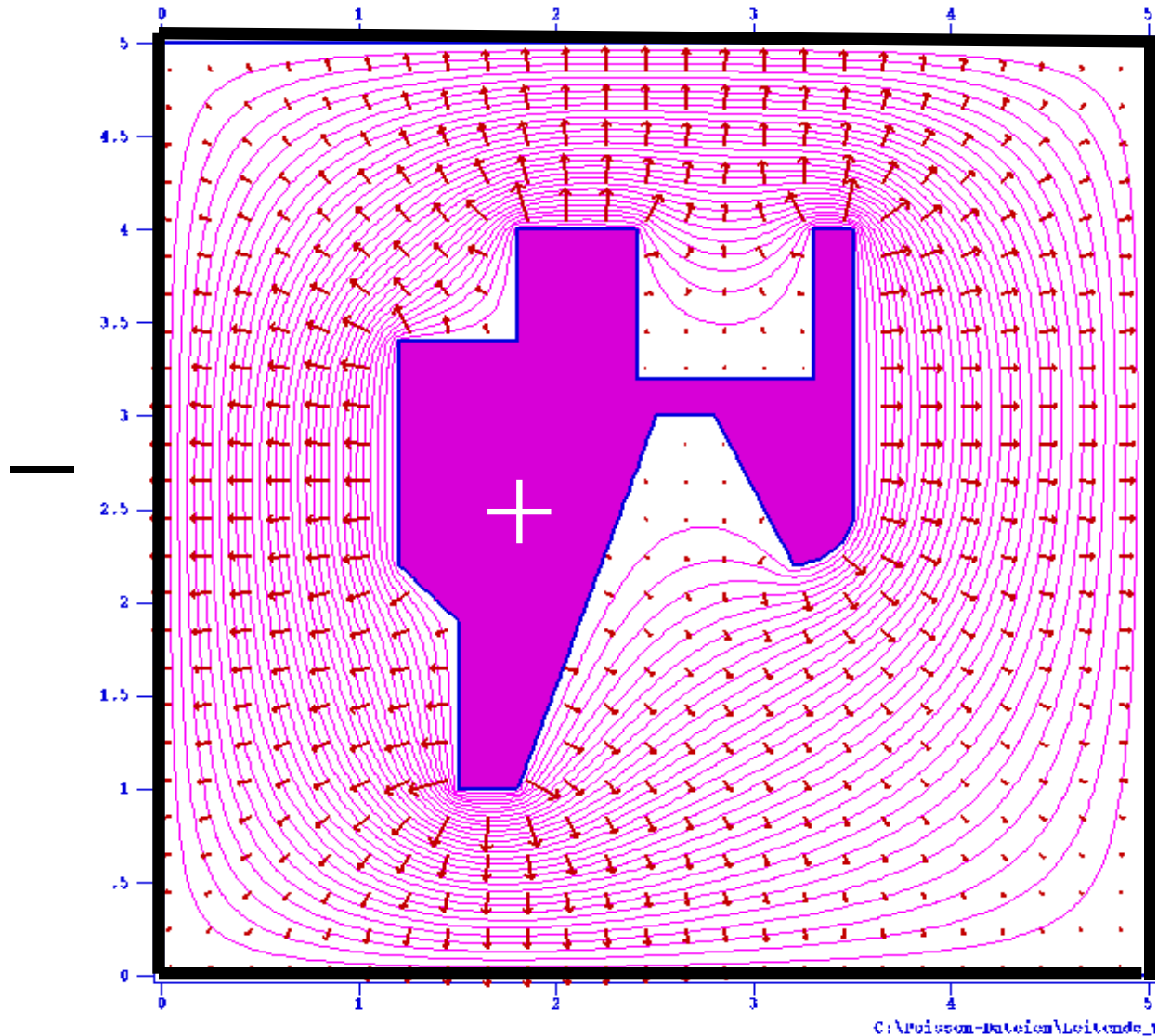
Moderne Lösungsmethode: „Finite Elemente-Methode“



Randbedingungen:

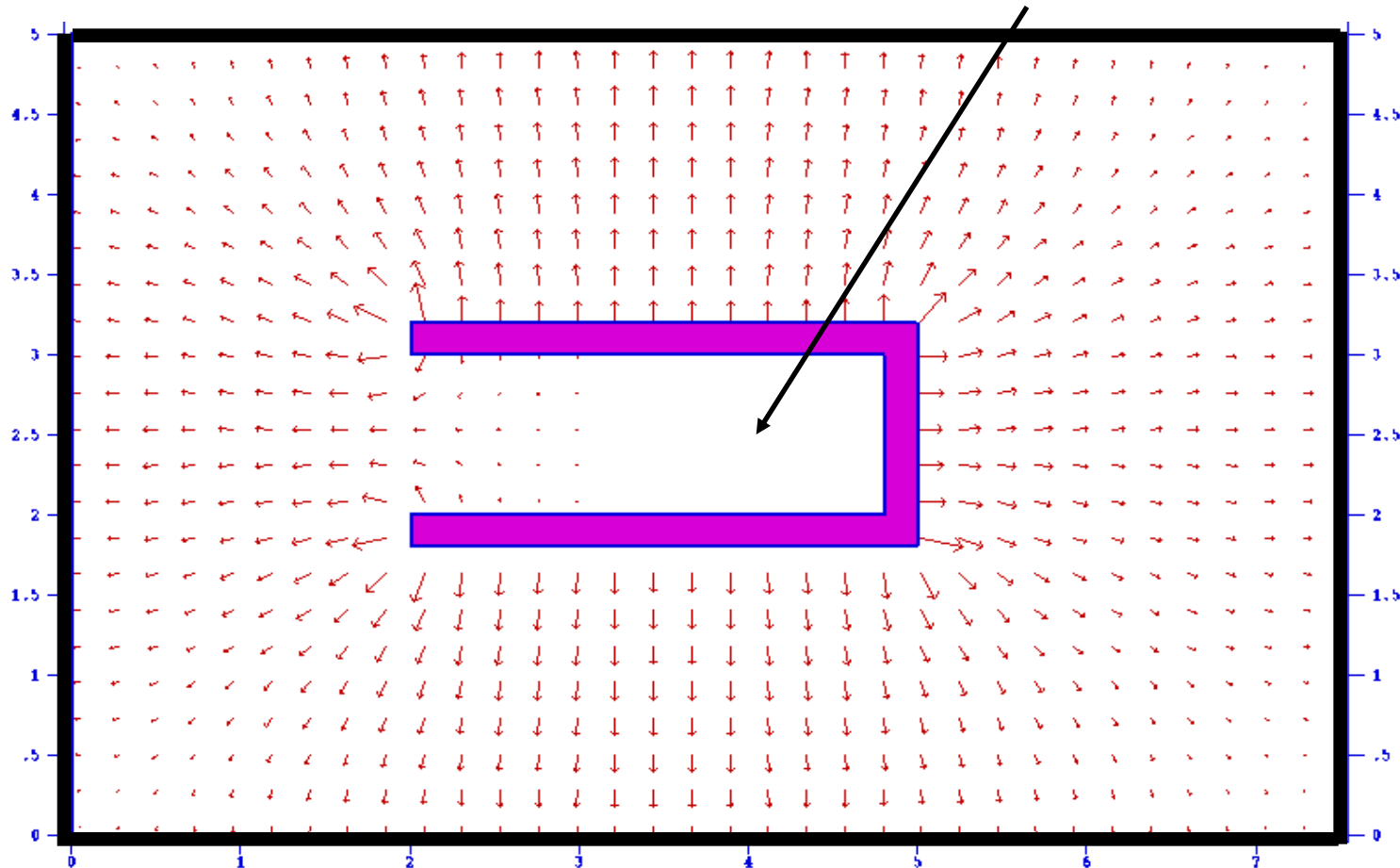
- **Dirichlet-Bedingung**
Funktionswert des Potentials am Rand gegeben
- **Neumann-Bedingung**
Ableitung des Potentials in Normalenrichtung am Rand gegeben

Berechnete Feld- und Äquipotentiallinien



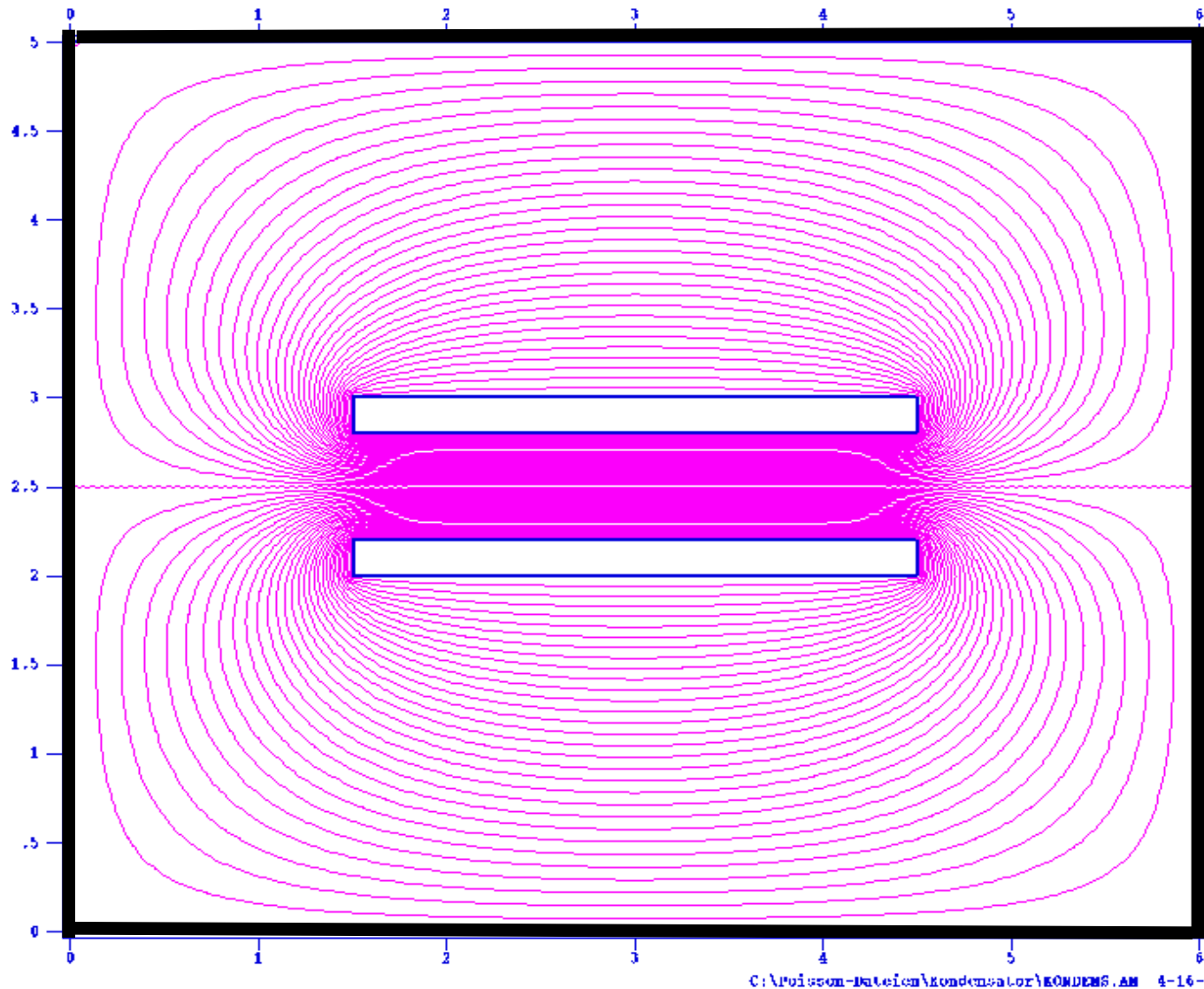
Ein anderes Beispiel: Der Faraday-Käfig

feldfreier Raum im Inneren !



C:\Poisson-Dateien\Faraday\FARADAY.AM 4-16-2004 13:23:26

Plattenkondensator: Äquipotentiallinien des Potentials



Plattenkondensator: Elektrisches Feld als Gradient des Potentials

