technische universität
dortmund

LS 2 /
Informatik

Datenstrukturen, Algorithmen und Programmierung 2 (DAP2)

Teile & Herrsche

Teile & Herrsche (Divide & Conquer)

- Teile Eingabe in mehrere Teile auf
- Löse das Problem rekursiv auf den Teilen
- Füge die Teillösungen zu einer Gesamtlösung zusammen

Beispiel (Sortieren)

Schritt 1: Aufteilen der Eingabe

15	**7**	**6**	**13**	**25**	**4**	**9**	**12**

15	**7**	**6**	**13**

25	**4**	**9**	**12**

Teile & Herrsche

Teile & Herrsche (Divide & Conquer)

- Teile Eingabe in mehrere Teile auf
- Löse das Problem rekursiv auf den Teilen
- Füge die Teillösungen zu einer Gesamtlösung zusammen

Beispiel (Sortieren)

15	**7**	**6**	**13**	**25**	**4**	**9**	**12**

6	**7**	**13**	**15**

4	**9**	**12**	**25**

Schritt 2:
Rekursiv Sortieren

Teile & Herrsche

Teile & Herrsche (Divide & Conquer)

- Teile Eingabe in mehrere Teile auf
- Löse das Problem rekursiv auf den Teilen
- Füge die Teillösungen zu einer Gesamtlösung zusammen

Beispiel (Sortieren)

4	**6**	**7**	**9**	**12**	**13**	**15**	**25**

6	**7**	**13**	**15**

4	**9**	**12**	**25**

Schritt 3:
Zusammenfügen

Teile & Herrsche

Teile & Herrsche (Divide & Conquer)

- Teile Eingabe in mehrere Teile auf
- Löse das Problem rekursiv auf den Teilen
- Füge die Teillösungen zu einer Gesamtlösung zusammen

Wichtig

- Wir benötigen Rekursionabbruch
- Sortieren: Folgen der Länge 1 sind sortiert

Teile & Herrsche

$\text{MergeSort}(\text{Array } A, p, r)$

1. $\textbf{if } p < r \textbf{ then}$
2. $q \leftarrow \lfloor (p+r)/2 \rfloor$
3. $\text{MergeSort}(A, p, q)$
4. $\text{MergeSort}(A, q+1, r)$
5. $\text{Merge}(A, p, q, r)$

- Sortiere $A[p..r]$
- $p \geq r$, dann nichts zu tun
- Berechne Mitte
- Sortiere linke Hälfte
- Sortiere rechte Hälfte
- Zusammenfügen

Aufruf des Algorithmus

$\text{MergeSort}(A, 1, r)$ für $r = \text{length}[A]$

Teile & Herrsche

Erweiterte Induktion

- (I.A.) Aussage $A(1)$ ist richtig
- (I.V.) Aussage $A(m)$ gilt für alle $1 \leq m \leq n$
- (I.S.) Aus (I.V.) folgt Aussage $A(n+1)$

- Bisher hatten wir nur $A(n)$ benutzt, um $A(n+1)$ zu folgern. Nun nutzen wir alle $A(m)$ mit $1 \leq m \leq n$ (oder eine Teilmenge).

Teile & Herrsche

Satz 4

Algorithmus $\mathrm{MergeSort}(A,p,r)$ sortiert das Feld $A[p..r]$ korrekt.

Beweis

- Wir zeigen die Korrektheit per Induktion über $n = r - p$.
- (I.A.) Für $n = 0$, d.h. $p = r$, macht der Algorithmus nichts. Das Feld $A[p..r]$ enthält nur ein Element und ist somit sortiert.
- (I.V.) Für alle r, p mit $m = r - p$ und $0 \leq m \leq n$ sortiert $\mathrm{MergeSort}(A,p,r)$ das Feld $A[p..r]$ korrekt.

Teile & Herrsche

Satz 4

Algorithmus $\text{MergeSort}(A, p, r)$ sortiert das Feld $A[p..r]$ korrekt.

Beweis

- (I.V.) Für alle r, p mit $m = r - p$ und $0 \le m \le n$ sortiert $\text{MergeSort}(A, p, r)$ das Feld $A[p..r]$ korrekt.
- (I.S.) Wir betrachten den Aufruf von MergeSort für beliebige p, r mit $n + 1 = r - p$. Da $n + 1 > 0$ folgt $p < r$ und der Algorithmus führt den **then**-Fall aus. Hier wird q auf $\lfloor (p + r)/2 \rfloor$ gesetzt. Es gilt $q \ge p$ und $q < r$. Dann wird MergeSort rekursiv in den Grenzen p, q bzw. $q + 1, r$ aufgerufen. Nach (I.V.) sortiert MergeSort in diesem Fall korrekt. Nun folgt die Korrektheit aus der Tatsache, dass Merge die beiden Bereiche korrekt zu einem sortierten Feld zusammenfügt.

Teile & Herrsche

$\text{MergeSort}(\text{Array } A, p, r)$

1. $\textbf{if } p < r \textbf{ then}$
2. $q \leftarrow \lfloor (p+r)/2 \rfloor$
3. $\text{MergeSort}(A, p, q)$
4. $\text{MergeSort}(A, q+1, r)$
5. $\text{Merge}(A, p, q, r)$

- Sortiere $A[p..r]$
- $p \geq r$, dann nichts zu tun
- Berechne Mitte
- Sortiere linke Hälfte
- Sortiere rechte Hälfte
- Zusammenfügen

Aufruf des Algorithmus

- $\text{MergeSort}(A, 1, n)$ für Feld $A[1..n]$
- Laufzeit?

Teile & Herrsche

Wir nehmen an, dass n eine Zweierpotenz ist, d.h. wir müssen uns nicht um das Runden kümmern.

MergeSort(Array A, p, r)	Laufzeit:
1. **if** $p < r$ **then**	1
2. $q \leftarrow \lfloor (p+r)/2 \rfloor$	1
3. $\text{MergeSort}(A, p, q)$	$1 + T(n/2)$
4. $\text{MergeSort}(A, q+1, r)$	$1 + T(n/2)$
5. $\text{Merge}(A, p, q, r)$	$\leq c'n$
	$\leq 2T(n/2) + cn$

c‘ ist genügend große Konstante

$c \geq c' + 4$

Aufruf des Algorithmus

- $\text{MergeSort}(A, 1, n)$ für Feld $A[1..n]$
- $T(m) =$ maximale Laufzeit bei Eingabe A, p, r mit $r - p + 1 = m$

Teile & Herrsche

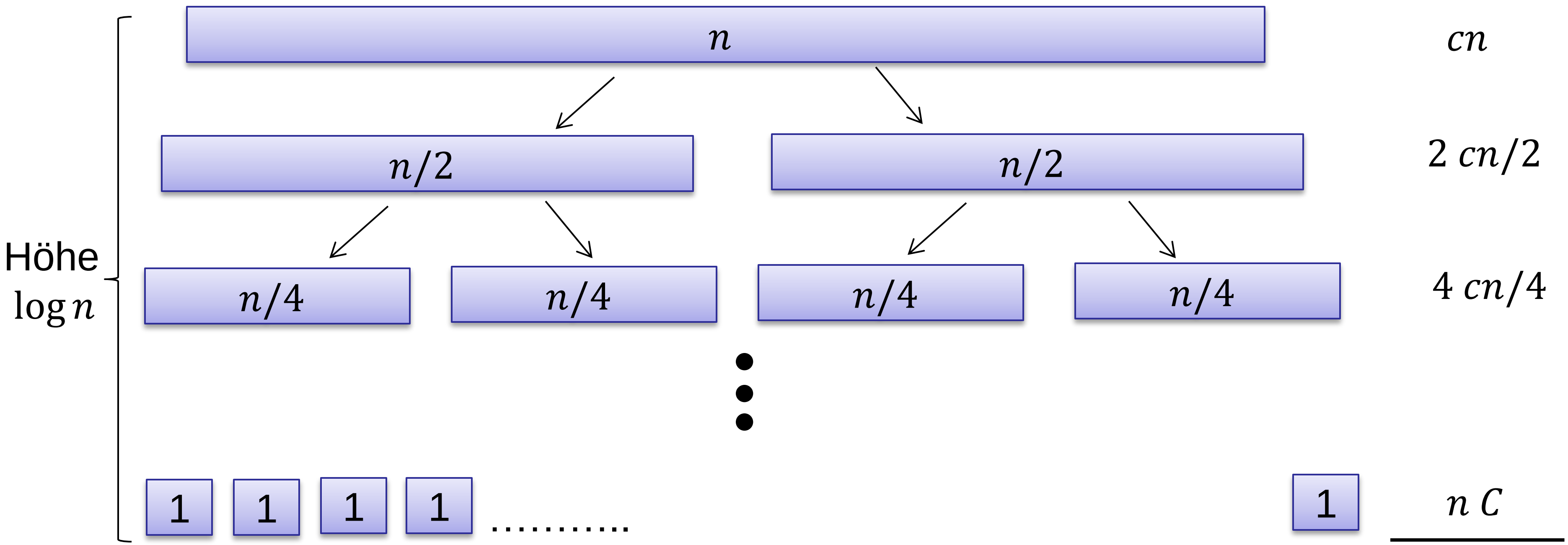
Laufzeit als Rekursion

$$T(n) \leq \begin{cases} C & \text{, falls } n = 1 \\ 2\,T(n/2) + cn & \text{, falls } n > 1 \end{cases}$$

Wobei c, C geeignete Konstanten sind

Teile & Herrsche

Auflösen von $T(n) \leq 2\,T(n/2) + cn$ (Intuition)



$\leq (c + C) \cdot n \log n = \mathbf{O}(n \log n)$

Teile & Herrsche

Satz 5

Algorithmus MergeSort hat eine Laufzeit von $\mathbf{O}(n \log n)$.

Beweis

- Wir zeigen den Satz nur für den Fall, dass n eine Zweierpotenz ist.
- Die Laufzeit für $T(1)$ und $T(2)$ ist konstant. Sei also $T(2) \leq C‘$ und $C^* \geq \max\{c, C‘\}$. Wir zeigen per Induktion, $T(n) \leq C^* n \log n$ für alle $n \geq 2$
- (I.A.) für $n = 2$ gilt $T(2) \leq C‘ \leq C^* 2 \log 2$.
- (I.V.) Für Eingabelänge $m < n, m$ Zweierpotenz, ist die Laufzeit $T(m) \leq C^* m \log m$

Teile & Herrsche

Satz 5

Algorithmus $\mathrm{MergeSort}$ hat eine Laufzeit von $\mathbf{O}(n \log n)$.

Beweis (Fortsetzung)

- (I.S.) Sei n eine Zweierpotenz. Es gilt $T(n) \le 2\,T(n/2) + cn$.
  Nach (I.V.) gilt $T(n) \le 2\,C^*\frac{n}{2}\log(n/2) + cn$
  $$\begin{aligned} &\le C^*\,n(\log(n) - 1) + cn \\ &\le C^*\,n(\log(n) - 1) + C^*n \\ &\le C^*\,n\log(n) \end{aligned}$$
- Also gilt $T(n) = \mathbf{O}(n \log n)$, [da für $n \ge n_0 = 2$, $T(n) \le C^*n \log n$ ist]

Teile & Herrsche

Wo liegt der Fehler?

A) Im Induktionsanfang
B) In der Induktionsvoraussetzung
C) Im Induktionsschluss
D) Der Beweis ist korrekt. Die Behauptung stimmt nicht, wenn n keine Zweierpotenz ist.

(Falsche) Behauptung

$\mathrm{MergeSort}$ hat Laufzeit $\mathbf{O}(n)$.

(Falscher) Beweis

- Wir zeigen die Aussage nur für den Fall, dass n eine Zweierpotenz ist.
- Die Laufzeit für $T(1)$ und $T(2)$ ist $\mathbf{O}(1)$. Wir zeigen per Induktion, $T(n) = \mathbf{O}(n)$ für alle $n \geq 2$.
- (I.A.) für $n = 2$ gilt $T(2) = \mathbf{O}(1)$.
- (I.V.) Für Eingabelänge $m < n$, m Zweierpotenz, ist die Laufzeit $T(m) = \mathbf{O}(m)$.
- (I.S.) Sei n eine Zweierpotenz. Es gilt $T(n) = 2\,T(n/2) + \mathbf{O}(n)$. Nach (I.V.) gilt
  $$T(n) = 2\,\mathbf{O}(n) + \mathbf{O}(n) = \mathbf{O}(n)$$
- Also gilt $T(n) = \mathbf{O}(n)$.

Teile & Herrsche

Wodurch unterscheiden sich Teile & Herrsche Algorithmen?

- Die Anzahl der Teilprobleme
- Die Größe der Teilprobleme
- Den Algorithmus für das Zusammensetzen der Teilprobleme
- Den Rekursionsabbruch

Wann lohnt sich Teile & Herrsche?

Kann durch Laufzeitanalyse vorhergesagt werden

Teile & Herrsche

Laufzeiten der Form

$$T(n) = a \cdot T(n/b) + f(n)$$

Anzahl Unterprobleme

Aufwand für Aufteilen und Zusammenfügen

Größe der Unterprobleme
(bestimmt Höhe des Rekursionsbaums)

(und $T(1)$ = const)

Welche unterschiedlichen Fälle gibt es?

Teile & Herrsche

Beispiel $MergeSort$:

$$T(n) = 2 \cdot T(n/2) + cn$$

Anzahl Unterprobleme

Aufwand für Aufteilen und Zusammenfügen

Größe der Unterprobleme
(bestimmt Höhe des Rekursionsbaums)

(und $T(1)$ = const)

(n Zweierpotenz)

Teile & Herrsche

Weiteres Beispiel

- Problem: Finde Element in sortiertem Feld
- Eingabe: Sortiertes Feld A, gesuchtes Element $b \in A[1, \dots, n]$
- Ausgabe: Index i mit $A[i] = b$

BinäreSuche(A, b, p, r)

1. **if** $p = r$ **then return** p
2. **else**
3. $\quad q \leftarrow \lfloor (p+r)/2 \rfloor$
4. $\quad$ **if** $b \leq A[q]$ **then return** BinäreSuche(A, b, p, q)
5. $\quad$ **else return** BinäreSuche$(A, b, q+1, r)$

Teile & Herrsche

BinäreSuche(A, b, p, r)
1. **if** $p = r$ **then return** p
2. **else**
3. $\quad q \leftarrow \lfloor (p+r)/2 \rfloor$
4. $\quad$ **if** $b \leq A[q]$ **then return** BinäreSuche(A, b, p, q)
5. $\quad$ **else return** BinäreSuche$(A, b, q+1, r)$

Aufruf

BinäreSuche$(A, b, 1, n)$

Teile & Herrsche

BinäreSuche(A, b, p, r)

1. **if** $p = r$ **then return** p
2. **else**
3. $\quad q \leftarrow \lfloor (p+r)/2 \rfloor$
4. $\quad$ **if** $b \leq A[q]$ **then return** BinäreSuche(A, b, p, q)
5. $\quad$ **else return** BinäreSuche$(A, b, q+1, r)$

2	**7**	**10**	**11**	**23**	**34**	**47**

$p = 1$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $r = 7$

Suche $b = 23$

Teile & Herrsche

Satz 6

Algorithmus $\mathrm{BinäreSuche}(A, b, p, r)$ findet den Index einer Zahl b in einem sortierten Feld $A[p..r]$, sofern b in $A[p..r]$ vorhanden ist.

Beweis

- Wir zeigen die Korrektheit per Induktion über $n = r - p$. Ist $n < 0$, so ist nichts zu zeigen. Wir nehmen an, dass b in $A[p..r]$ ist, da es sonst nichts zu zeigen gibt.
- (I.A.) Für $n = 0$, d.h. $p = r$, gibt der Algorithmus p zurück. Dies ist der korrekte (weil einzige) Index.
- (I.V.) Für alle r, p mit $m = r - p$ und $0 \leq m \leq n$ findet $\mathrm{BinäreSuche}(A, b, p, r)$ den Index einer Zahl b in einem sortierten Feld $A[p..r]$, sofern b im Feld vorhanden ist.

Teile & Herrsche

Satz 6

Algorithmus $\mathrm{BinäreSuche}(A, b, p, r)$ findet den Index einer Zahl b in einem sortierten Feld $A[p..r]$, sofern b in $A[p..r]$ vorhanden ist.

Beweis

- (I.V.) Für alle r, p mit $m = r - p$ und $0 \leq m \leq n$ findet $\mathrm{BinäreSuche}(A, b, p, r)$ den Index einer Zahl b in einem sortierten Feld $A[p..r]$, sofern b im Feld vorhanden ist.
- (I.S.) Wir betrachten den Aufruf von $\mathrm{BinäreSuche}$ für beliebige p, r mit $n + 1 = r - p$. Da $n + 1 > 0$ folgt $p < r$ und der Algorithmus führt den **else**-Fall aus. Dort wird q auf $\lfloor (p + r)/2 \rfloor$ gesetzt. Es gilt $q \geq p$ und $q < r$. Ist $b \leq A[q]$, so wird $\mathrm{BinäreSuche}$ rekursiv für $A[p..q]$ aufgerufen. Da $A[p..r]$ sortiert ist, liegt b in $A[p..q]$. Damit folgt aus (I.V.), dass der Index von b gefunden wird. Ist $b > A[q]$, so wird $\mathrm{BinäreSuche}$ rekursiv für $A[q + 1..r]$ aufgerufen. Da $A[p..r]$ sortiert ist, liegt b in $A[q + 1..r]$. Damit folgt aus (I.V.), dass der Index von b gefunden wird.

Teile & Herrsche

BinäreSuche(A,b,p,r)	Laufzeit:
1. **if** $p=r$ **then return** p	1
2. **else**	1
3. $\quad q \leftarrow \lfloor (p+r)/2 \rfloor$	1
4. $\quad$ **if** $b \le A[q]$ **then return** BinäreSuche(A,b,p,q)	$1+T(\lceil n/2 \rceil)$
5. $\quad$ **else return** BinäreSuche$(A,b,q+1,r)$	$1+T(\lfloor n/2 \rfloor)$

Laufzeit

$T(n)$, wobei $n = r - p + 1$ ist

Teile & Herrsche

BinäreSuche(A, b, p, r)

1. **if** $p = r$ **then return** p
2. **else**
3. $\quad q \leftarrow \lfloor (p+r)/2 \rfloor$
4. $\quad$ **if** $b \leq A[q]$ **then return** BinäreSuche(A, b, p, q)
5. $\quad$ **else return** BinäreSuche$(A, b, q+1, r)$

Laufzeit:

1

1

1

$1 + T(\lceil n/2 \rceil)$

$1 + T(\lfloor n/2 \rfloor)$

$5 + \max\{T(\lceil n/2 \rceil), T(\lfloor n/2 \rfloor)\}$

Laufzeit

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{, falls } n = 1 \\ 5 + \max\{T(\lceil n/2 \rceil), T(\lfloor n/2 \rfloor)\} & \text{, falls } n > 1 \end{cases}$$

Teile & Herrsche

Beispiel $BinäreSuche$:

$$T(n) = 1 \cdot T(n/2) + c$$

Anzahl Unterprobleme

Aufwand für Aufteilen und Zusammenfügen

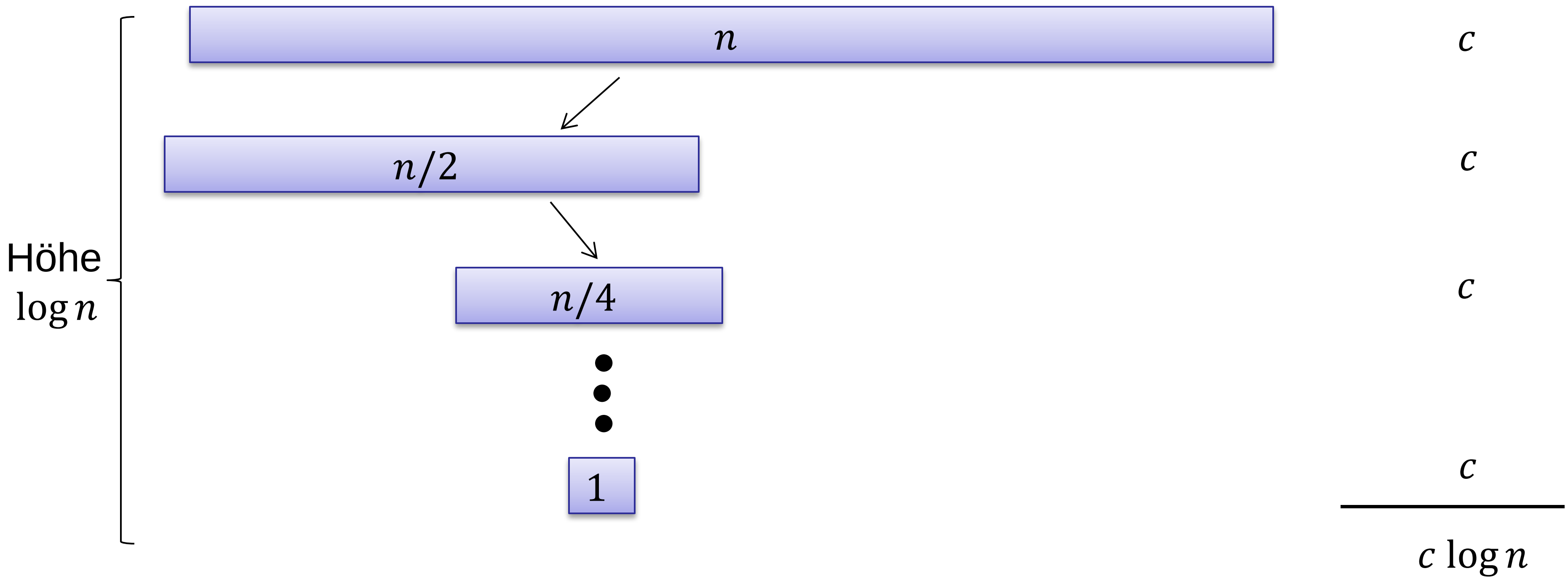
Größe der Unterprobleme
(bestimmt Höhe des Rekursionsbaums)

(und $T(1)$ = const)

(n Zweierpotenz)

Teile & Herrsche

Auflösen von $T(n) \leq T(n/2) + c$ (Intuition; wir ignorieren Runden)



Teile & Herrsche

Satz 7

Algorithmus BinäreSuche hat eine Laufzeit von $\mathbf{O}(\log n)$.

Beweis

- Wir zeigen per Induktion, $T(n) \leq 5\ \lceil \log n \rceil + 1$.
- (I.A.) für $n = 1$ gilt $T(1) = 1 = 5\ \lceil \log n \rceil + 1$.
- (I.V.) Für Eingabelänge $m < n$ ist die Laufzeit $T(m) \leq 5\lceil \log m \rceil + 1$.
- (I.S.) Wir wissen: $T(n) \leq \max\{T(\lceil n/2 \rceil), T(\lfloor n/2 \rfloor)\} + 5$. Nach (I.V.) gilt somit:
  $T(n) \leq \max\{5\lceil \log(\lceil n/2 \rceil) \rceil, 5\lceil \log(\lfloor n/2 \rfloor) \rceil\} + 1 + 5 \leq 5\lceil \log(\lceil n/2 \rceil) \rceil + 1 + 5$
  Ist n gerade, so gilt $\lceil \log(\lceil n/2 \rceil) \rceil = \lceil \log(n/2) \rceil = \lceil \log(n) - 1 \rceil = \lceil \log(n) \rceil - 1$.
  Somit folgt $T(n) \leq 5\lceil \log n \rceil + 1$. Ist n ungerade, so gilt $\lceil \log(\lceil n/2 \rceil) \rceil =$
  $\lceil \log((n+1)/2) \rceil = \lceil \log(n+1) - 1 \rceil = \lceil \log(n+1) \rceil - 1\ = \lceil \log(n) \rceil - 1$.
- Somit folgt auch hier $T(n) \leq 5\ \lceil \log n \rceil + 1$.

Teile & Herrsche

Binäre Suche vs. lineare Suche

Laufzeit	**10**	**100**	**1,000**	**10,000**	**100,000**
n	10	100	1,000	10,000	100,000
$\log n$	3	6	10	13	17

Beobachtung

- n wächst sehr viel stärker als $\log n$
- Binäre Suche effizient für riesige Datenmengen
- In der Praxis ist $\log n$ fast wie eine Konstante