Inhalt der Vorlesung Physik A2 / B2

3. Wärmelehre

Druck und Temperatur: Das ideale Gas

Wärmemenge, spezifische Wärme

Die Hauptsätze der Wärmelehre

- SEMESTERENDE -

4. Elektrizitätslehre, Elektrodynamik

Die Ladung und elektrostatische Felder

Elektrischer Strom

Magnetische Felder und Magnetostatik

Zeitlich veränderliche Felder, Elektrodynamik

Wechselstromnetzwerke

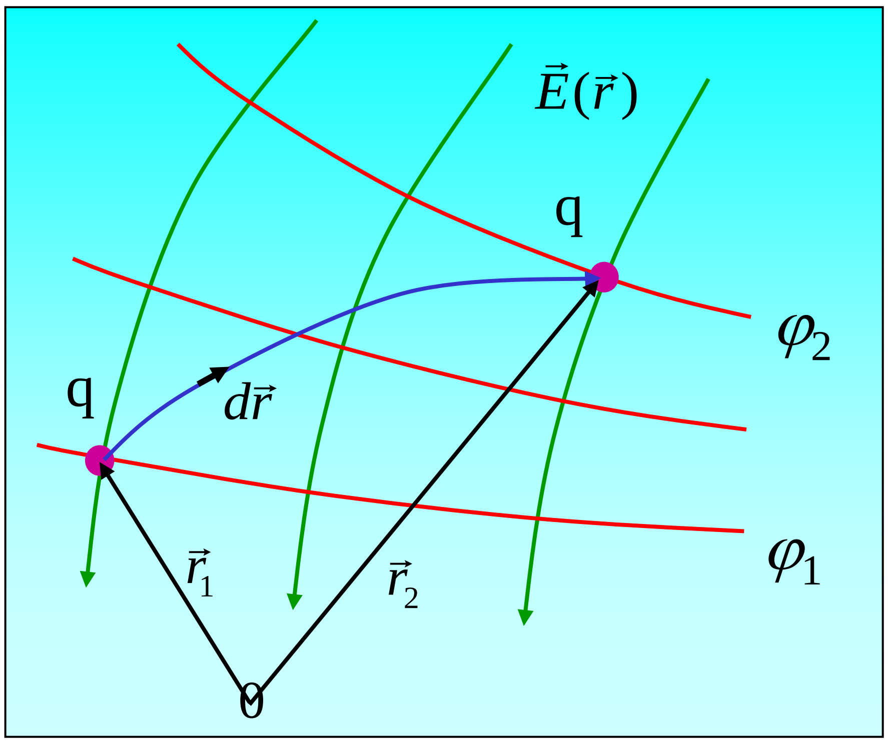
Die Maxwellschen Gleichungen

Elektromagnetische Wellen und Strahlung

Relativität der Felder – Relativitätstheorie

Elektrische Spannung, Potential

Bei der Verschiebung einer Ladung *q* im elektrischen Feld muss wegen der auftretenden Kraft eine Arbeit *W* verrichtet werden. In Analogie zur Mechanik folgt dann:



$$\vec{F}(\vec{r}) = q\vec{E}(\vec{r})$$

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r})d\vec{r} = q\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E}(\vec{r})d\vec{r}$$

Die Coulombkraft ist eine konservative Kraft (Zentralkraft). Die Arbeit W hängt dann nicht vom gewählten Verschiebeweg ab. Dann können wir auch wieder ein ***Potential*** einführen, das nur vom Ort selbst abhängt. Wir führen deshalb eine ***Potentialdifferenz*** oder ***elektrische Spannung U*** wie folgt ein:

$$-\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E}(\vec{r})d\vec{r} = \varphi(\vec{r}_2) - \varphi(\vec{r}_1) = U$$

Die Potentialdifferenz Δφ bezeichnet man als ***elektrische Spannung U***. Die Einheit des elektrostatischen Potentials und der Spannung ist

$$1\ Nm/C = 1\ V = 1\ Volt$$

Da das elektrische Feld *E* ein konservatives Kraftfeld ist, können wir es in Analogie zu den Betrachtungen in der Mechanik aus einem Potential, eben dem elektrischen Potential φ ableiten. Dies geschieht wieder mit Hilfe des Nabla-Operators und Bildung des Gradienten. Das elektrische Feld ist damit über das Gefälle des Potential verknüpft.

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\varphi(\vec{r}) = -grad\,\varphi(\vec{r}) = -\begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Beispiel: Potential einer Punktladung

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\vec{e}_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^3}\vec{r}$$

mit

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

folgt z.B. für die x-Komponente

$$E_x(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}}$$

Aus $-\dfrac{\partial\varphi(\vec r)}{\partial x} = E_x(\vec r)$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}$$

für die x-Komponente und analog für die y- und z-Komponente folgt schließlich für das ***Potential der Punktladung***

$$\varphi(\vec r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r}$$

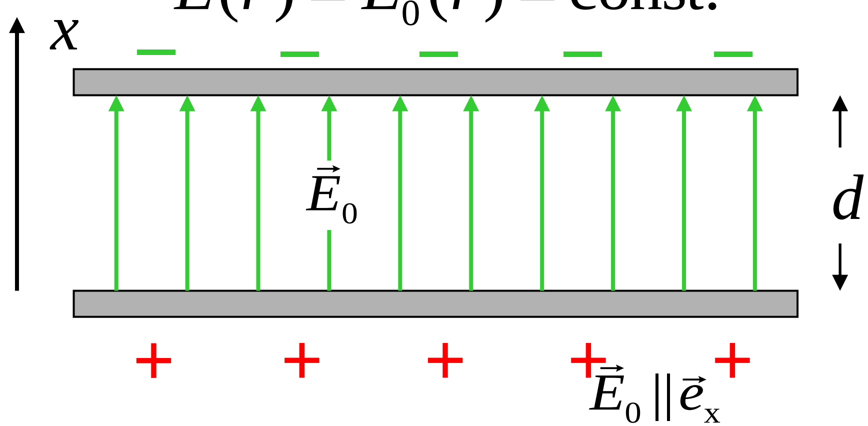
Das elektrische Potential ist wie immer nur auf eine additive Konstante definiert. Hier haben wir den Bezugspunkt φ = 0 ins Unendliche gelegt

$$\lim_{r\to\infty}\varphi(\vec r) = 0$$

Beispiel: Plattenkondensator

Zwei parallele geladene Metallplatten bilden einen ***Kondensator.*** Es gilt aus Symmetriegründen

$$\vec E(\vec r) = \vec E_0(\vec r) = \text{const.}$$



Für die Potentialdifferenz U gilt dann

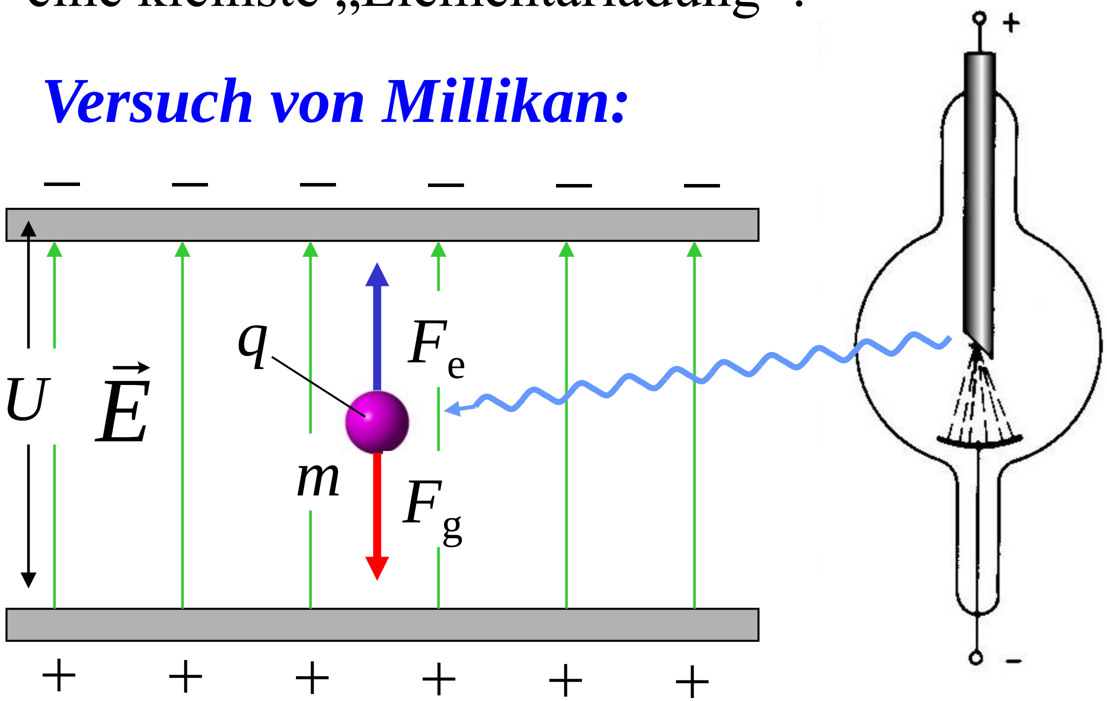
$$U = \int_0^d E(x)dx = E_0\cdot d$$

Legt man also zwischen den Platten eine Spannung U an, erhält man das Feld

$$E_0 = U/d$$

Sind Ladungen beliebig teilbar, oder gibt es eine kleinste „Elementarladung“?

Versuch von Millikan:



geladener Öltropfen

Röntgen-röhre oder UV-Quelle

Kleine Öltropfen werden zwischen die geladenen Platten eines Kondensators gesprüht. Der Plattenabstand sei d.

Mit Hilfe einer Röntgenröhre werden einige Moleküle des Öltropfens ionisiert, so dass er die Ladung q erhält. Im E-Feld wirkt darauf die Kraft

$$\vec{F}_e = q\,\vec{E}$$

Mit der Spannung U wird das Feld E so eingestellt, dass die Schwerkraft F_g gerade kompensiert wird, also

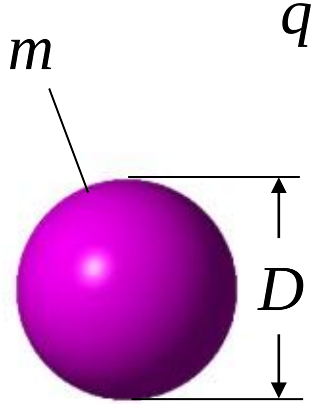
$$\vec{F}_g = -\vec{F}_e$$

$$\Rightarrow \quad m\,g = q\,E = q\,\frac{U}{d}$$

Da die Kräfte nur senkrecht wirken, genügt ihr Betrag.

Die Ladung des Öltropfens ist dann

$$q = \frac{m\,g\,d}{U}$$



Zur Berechnung muß noch die Masse m des Tropfens bestimmt werden.

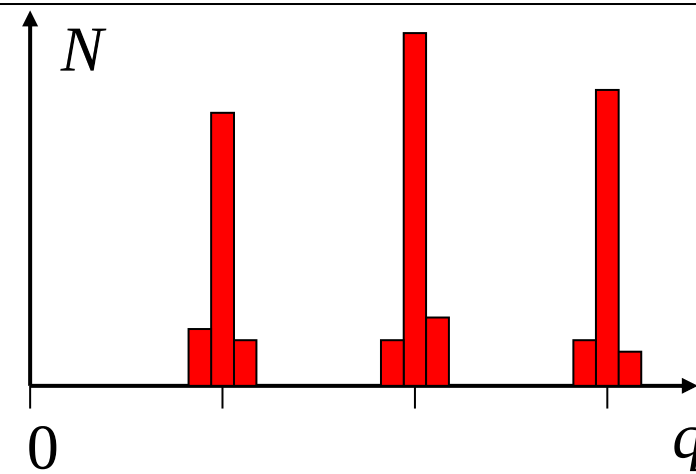
Man bestimmt z.B. mit Hilfe eines Mikroskops den Durchmesser D. Dann ist das Volumen

$$V = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{D}{2}\right)^3$$

Mit der Dichte $\rho_{\text{Öl}}$ ist die Masse

$$m = \rho_{\text{Öl}}\, V$$

In der Praxis muss der Auftrieb in Luft berücksichtigt werden. Den Tröpfchendurchmesser bestimmt man über die Stokessche Reibung bei abgeschaltetem E- Feld (Sinkgeschwindigkeit)



Die Messung liefert nur diskrete Ladungen

$$q = n \cdot e \qquad n = \text{ganze Zahl}$$

mit der ***Elementarladung***

$$e = 1{,}602189 \cdot 10^{-19}\,\text{C}$$

In einem abgeschlossenen System ist die Ladung erhalten = konstant!

1.4 Einheiten von Arbeit, Energie und Leistung

Die Einheiten in der Elektrostatik sind über die Kraft an die mechanischen Einheiten angeschlossen:

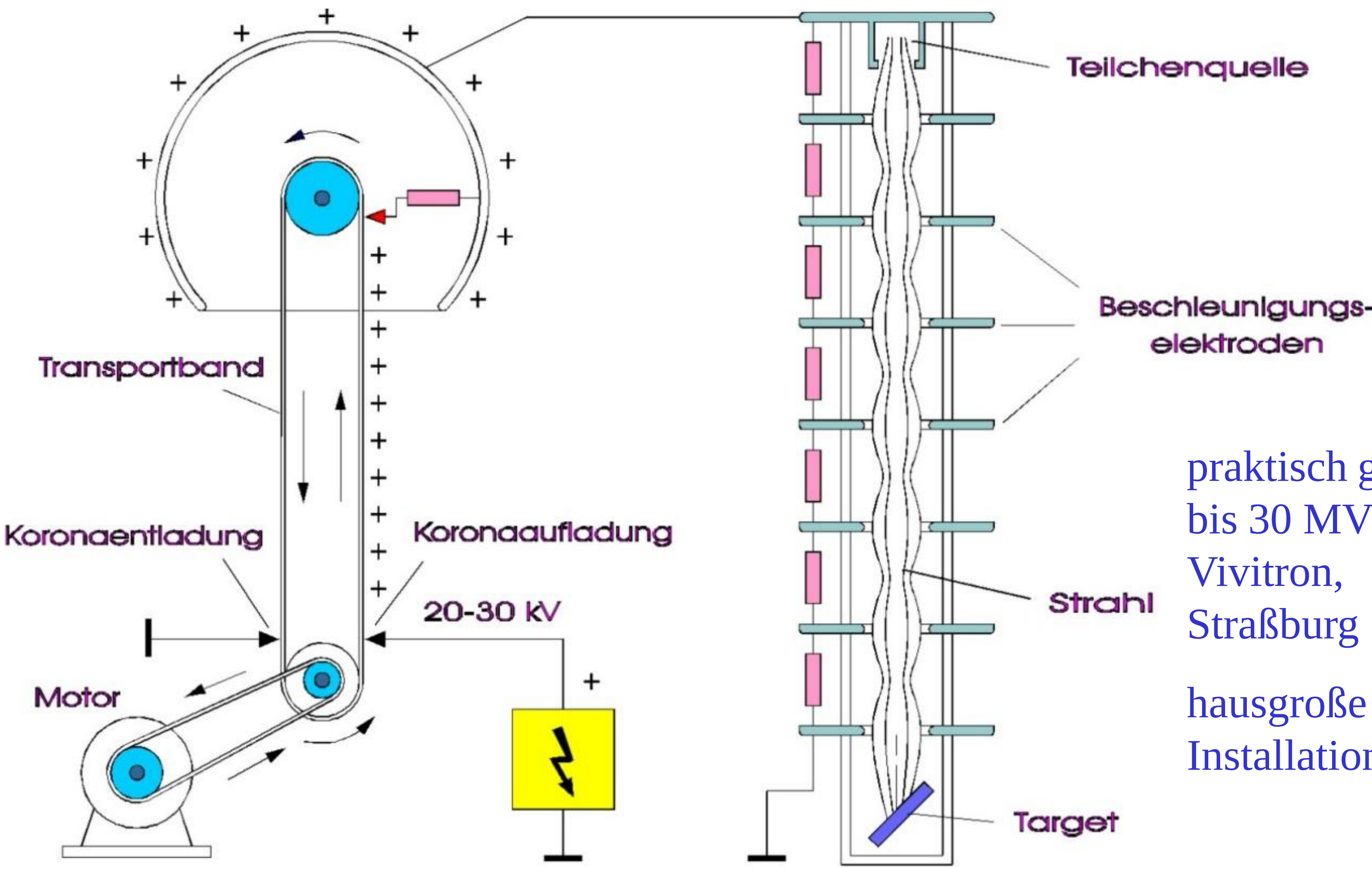
Arbeit/Energie	J	$N \cdot m$	$\frac{kg \cdot m^2}{s^2}$	$W \cdot s$	$\mathrm{V} \cdot \mathrm{A} \cdot \mathrm{s}$	$\mathrm{V} \cdot \mathrm{C}$
Leistung	W	$\frac{N \cdot m}{s}$	$\frac{kg \cdot m^2}{s^3}$	$\frac{J}{s}$	$\mathrm{V} \cdot \mathrm{A}$	
Potential/Spannung	V	$\frac{N \cdot m}{A \cdot s}$	$\frac{kg \cdot m^2}{A \cdot s^3}$			

Eine Besonderheit in der mikroskopischen Physik ist die Einheit eV (Elektronenvolt) für die Arbeit bzw. Energie.

Definition: „Ein eV ist die Arbeit, die an einer Ladung der Größe der Elementarladung *e* beim Durchlaufen einer Potentialdifferenz $\Delta\varphi$ bzw. Spannung $U = 1\ V$ verrichtet wird“

$$1\, eV \;=\; 1{,}602189 \cdot 10^{-19}\, J$$

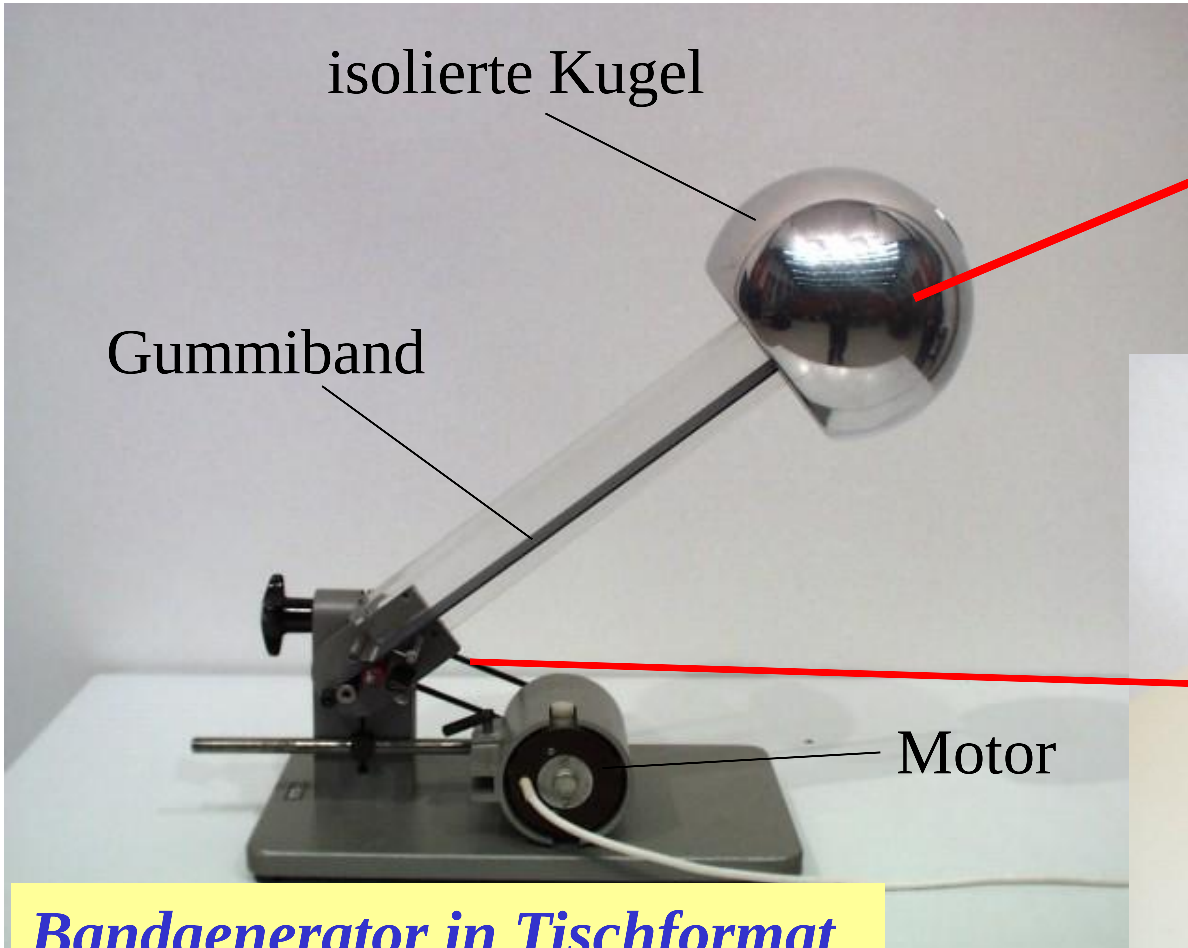
Hochspannungserzeugung mit Bandgenerator (Van de Graaff)

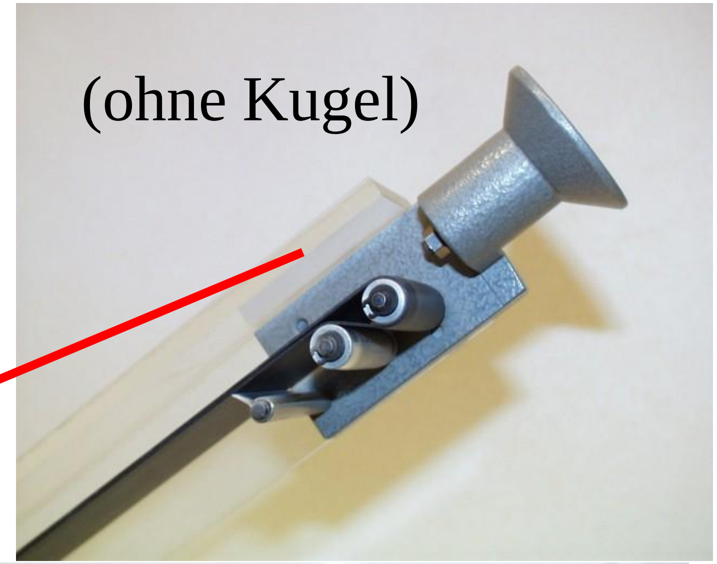


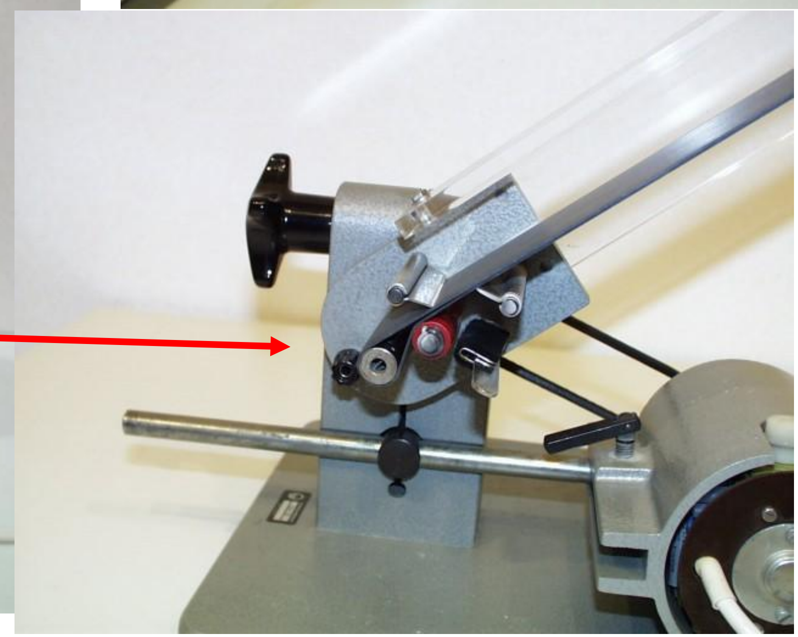
praktisch gebaut bis 30 MV
Vivitron, Straßburg

hausgroße Installation

Auf dem nicht leitenden Gummiband sitzen die Ladungen fest, sie können wie auf dem Förderband transportiert werden.







Bandgenerator in Tischformat

Maxwellsche Gleichungen der Elektrostatik:

Die ***Grundlagen der Elektrostatik*** lassen sich wie folgt zusammenfassen:

- die Ladungen q sind diskret und setzen sich aus Vielfachen der Elementarladung +/- e zusammen.

- Ursache des elektrostatischen Feldes E sind die Ladungen q, positive Ladungen sind Quellen des Feldes, negative Ladungen Senken. Die Felder von Ladungen überlagern sich ungestört (Superpositionsprinzip).

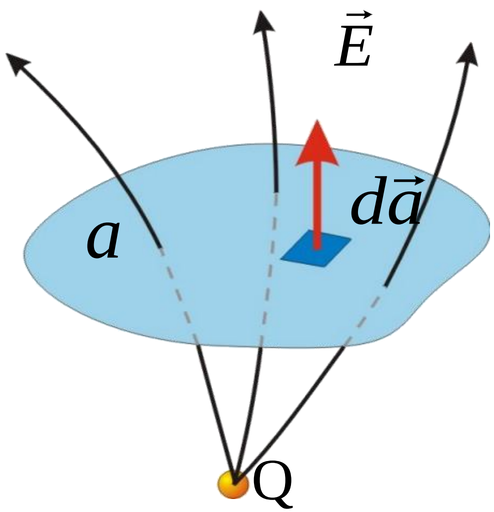
- die Kraft F auf eine Probeladung q im elektrischen Feld E ist konservativ, damit ist auch das elektrische Feld E ein konservatives Kraftfeld und kann aus einem elektrostatischen Potential φ abgeleitet werden.

- das elektrische Feld ist damit wirbelfrei.

Diese Aussagen lassen sich in den Maxwell-Gleichungen der Elektrostatik zusammenfassen, wie wir im folgenden kurz zeigen wollen. Für ein weitergehendes Verständnis sei hier auf die Ergänzungsvorlesung verwiesen.

Fluss des elektrischen Feldes

Der Fluss Φ des elektrischen Feldes E durch eine Fläche a ist ein Maß für das Produkt aus elektrischer Feldstärke senkrecht zur Fläche und der Größe der Fläche.



$$\Phi = \lim_{\substack{i\to\infty \\ da\to 0}} \sum_i E_\perp da = \iint_a \vec{E} \cdot d\vec{a} = \iint_a d\Phi$$

$d\vec{a}$ kennzeichnet ein Flächenelement bezgl. der Größe, aber auch der Orientierung. Der Vektor steht dann senkrecht auf dem Flächenelement. Der differentielle Fluss ist dann durch das Skalarprodukt gegeben:

$$d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{a} = E_\perp da$$

Wir wollen versuchen den Fluss des elektrostatischen Feldes durch Flächen mit den Ursachen, also den Ladungen, zu verbinden. Dazu beschränken wir die Betrachtungen auf geschlossene Oberflächen.

Einfaches Beispiel:

Elektrischer Fluss durch eine Kugeloberfläche mit Radius R:
Das Feld E tritt senkrecht aus der Oberfläche der Kugel aus und ist zudem überall konstant.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\vec{e}_r \rightarrow E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$$

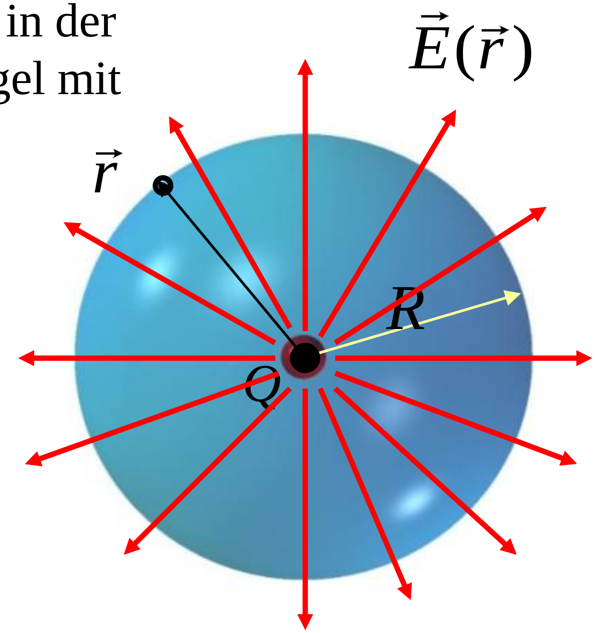
$$\rightarrow E(R) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2}$$

Der Fluss folgt dann einfach aus dem Produkt von Feldstärke und Kugeloberfläche

$$\oiint_{Kugeloberfläche} \vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{a} = E(R)\cdot 4\pi R^2$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2}\cdot 4\pi R^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

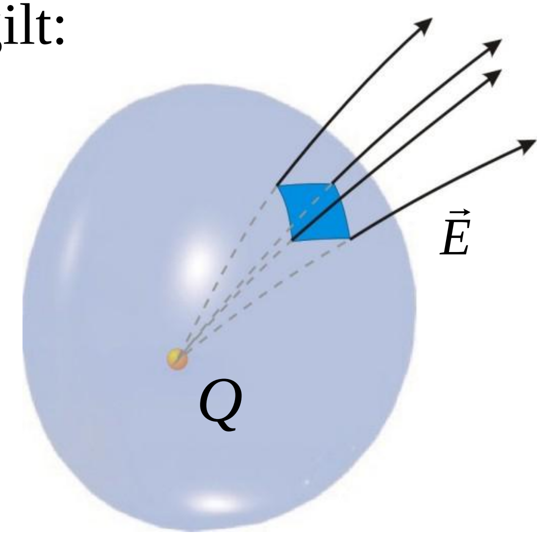
Punktladung Q in der Mitte einer Kugel mit Radius R.



Der elektrische Fluss durch die Kugeloberfläche hängt also nur von der Ladung Q im Mittelpunkt ab und ist unabhängig vom Radius R.

E nimmt mit $1/r^2$ ab, Kugeloberfläche mit r^2 zu. Wie allgemein ist dieser Zusammenhang?

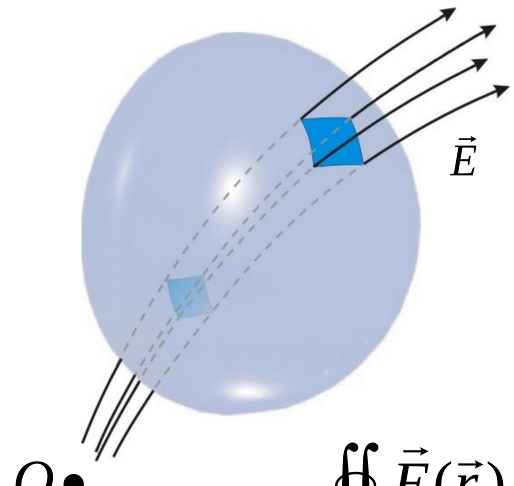
Ist die Ladung Q <u>innerhalb</u> einer beliebig geschlossenen Oberfläche, dann gilt:



$$\oint\!\!\!\oint_a \vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{a} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

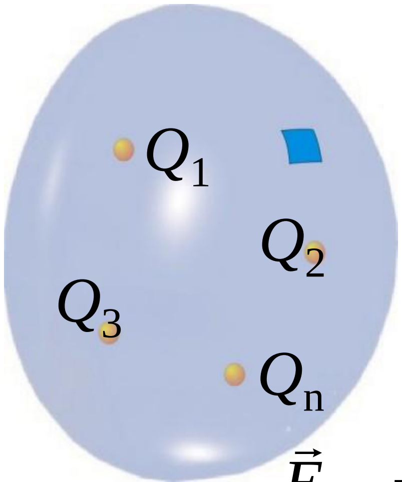
also das gleiche Ergebnis wie bei unserem Beispiel.

Ist die Ladung Q <u>außerhalb</u> der geschlossenen Oberfläche, dann gilt:



$$\oint\!\!\!\oint_a \vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{a} = 0$$

Das kann man noch weiter verallgemeinern, indem man eine beliebige Verteilung von Ladungen (genauer Elementarladungen) betrachtet. Dann gilt das Superpositionsprinzip und wir erhalten folgendes Ergebnis:



$$\vec{E}_{\mathrm{ges}} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \cdots + \vec{E}_{\mathrm{n}}$$

$$\oiint_a \vec{E}_{ges} \cdot d\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} \oiint_a \vec{E}_i \cdot d\vec{a} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} Q_{\mathrm{i}}$$

Warum ist das so einfach?

Weil die elektrische Feldstärke E Quellen besitzt, nämlich die Ladungen Q.

Nur, wenn die Quellen innerhalb des betrachteten Volumens sind, kann also ein Nettofluss nach außen auftreten. Sind die Quellen außerhalb, so tritt genauso viel Fluss in das Volumen ein, wie an anderer Stelle wieder austritt.

Daraus folgt:

„Umschließt eine beliebige geschlossene Fläche eine Gesamtladung Q, so gilt für den elektrischen Fluss durch diese Fläche“

$$\Phi = \oiint_a \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Gaußscher Satz der Elektrostatik

Fluss eines Vektorfeldes bei kontinuierlicher Verteilung der Quellen

Ladungen sind (zumindest makroskopisch) kontinuierlich verteilt. Es existiert dann eine ***Ladungsdichte*** als Funktion des Ortes, über die integriert werden muss:

$$\rho(\vec{r}) = \frac{dQ(\vec{r})}{dV}$$

Die Ladung Q kann dann durch ein Volumenintegral berechnet werden

$$\oiint_a \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{a} = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_{V(a)} \rho(\vec{r}) dV$$

Dies ist die ***1. Maxwellgleichung der Elektrostatik in integraler Form***

Da die Kraft auf Probeladungen q im elektrostatischen Feld E konservativ ist, ist auch die verrichtete Arbeit W entlang eines geschlossenen Weges Null. Dies gilt natürlich auf für das elektrische Feld selbst.

Daraus folgt sofort die
2. Maxwellgleichung der Elektrostatik in integraler Form

$$\oint_C \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0$$

Das geschlossene Wegintegral über die elektrische Feldstärke verschwindet. Das E-Feld ist wirbelfrei.

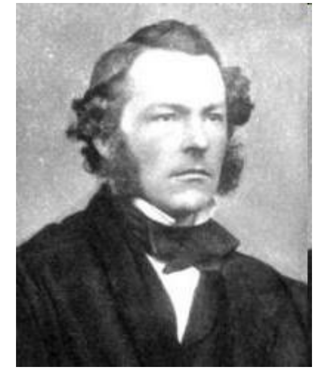
Lokale Maxwell-Gleichungen der Elektrostatik

Unsere integralen Maxwellgleichungen der Elektrostatik beschreiben den integralen Zusammenhang zwischen dem elektrostatischen Feld E und seiner Ursache, nämlich der elektrischen Ladung. Man kann nun die Aussagekraft dadurch steigern, dass man den Zusammenhang zwischen E und der Ladung bzw. der Ladungsdichte ρ lokal, d.h. an jedem Ort zu definieren versucht.

Dies gelingt über die Integralsätze der Vektoranalysis:

- Stokes-Integralsatz
- Gauß-Integralsatz

a) ***Stokes-Integralsatz***
(Satz von Stokes)



George G. Stokes
1819-1903

Für jedes Vektorfeld $\vec{A}$ (und damit auch für das elektrische Feld $\vec{E}$) gilt:

$$\oint_{C(a)} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \iint_{a} rot\vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{a}$$

Integralsatz von Stokes

Wir integrieren also auf der linken Seite über den Rand *C(a)* der Fläche *a*.

Da aber für jeden geschlossenen Weg

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

folgt sofort für jede Fläche *a*

$$\iint_a rot\vec{E}\cdot d\vec{a} = 0$$

und damit die differentielle (lokale) Form der 2. Maxwellgleichung der Elektrostatik

$$rot\vec{E}(\vec{r}) = \vec{\nabla}\times\vec{E}(\vec{r}) = 0$$

Diese Aussage gilt lokal an jedem Ort.

Die Wirbelstärke des elektrostatischen Feldes ist also Null. Das elektrostatische Feld ist wirbelfrei, die Feldlinien sind nicht geschlossen, sondern haben Quellen und Senken in den Ladungen.

b) ***Gauß-Integralsatz***

(Satz von Gauß)

Carl Friedrich Gauß
1777 - 1855

Für jedes Vektorfeld $\vec{A}$ (und damit auch für das elektrische Feld $\vec{E}$) gilt:

$$\oiint_{a(V)} \vec{E}\cdot d\vec{a} = \iiint_{V(a)} div\vec{E}\cdot dV$$

Integralsatz von Gauß

Wir integrieren also auf der linken Seite über die geschlossene Oberfläche a des Volumens V, auf der rechten Seite über das Volumen, das die geschlossene Oberfläche a einschließt.

Hierbei ist

$$div\vec{E}(\vec{r}) = \vec{\nabla}\cdot\vec{E}(\vec{r}) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}E_x(\vec{r}) + \frac{\partial}{\partial y}E_y(\vec{r}) + \frac{\partial}{\partial z}E_z(\vec{r})$$

die ***Divergenz des elektrischen Feldes***.

Einsetzen der ***1. Maxwellgleichung***

$$\oiint_{a(V)} \vec{E}\cdot d\vec{a} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_{V(a)} \rho\cdot dV = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

führt dann sofort auf

$$\oiint_{a(V)} \vec{E}\cdot d\vec{a} = \iiint_{V(a)} div\vec{E}\cdot dV$$

$$= \iiint_{V(a)} \frac{\rho}{\varepsilon_0}\cdot dV$$

Dies gilt für jedes beliebige Volumen V und damit folgt

$$\boxed{div\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\vec{r})}$$

die ***differentielle (lokale) Form der 1. Maxwellgleichung der Elektrostatik***

Auch diese Aussage gilt lokal an jedem Ort.

Die Divergenz (Quellstärke) des elektrostatischen Feldes ist also an jedem Ort durch die dort vorhandene Ladungsdichte ρ gegeben.