

Grundbegriffe der Theoretischen Informatik

Sommersemester 2018 - Thomas Schwentick

Teil A: Reguläre Sprachen

3: Äquivalenz der Modelle

Version von: 24. April 2018 (16:09)

Einleitung

- Wir kennen schon:
 - Reguläre Ausdrücke (REs)
 - NFAs (auch mit ϵ -Übergängen)
 - DFAs
 - Wir können REs in ϵ -NFAs umwandeln
-
- In diesem Kapitel werden wir sehen:
 - ϵ -NFAs (und NFAs) lassen sich in DFAs umwandeln
 - DFAs lassen sich auch in REs umwandeln
 - Alle vier Modelle sind gleich mächtig
-
- Wir werden die Größen der dabei jeweils konstruierten Objekte vergleichen
 - Und mit dem Nachweis der Korrektheit von Automaten werden wir uns auch beschäftigen

Inhalt

▷ 3.1 Vom NFA zum DFA

3.2 Vom DFA zum RE

3.3 Größenverhältnisse bei den Umwandlungen

3.4 Korrektheitsbeweise für DFAs

Vom NFA zum DFA

- Wie verhalten sich NFAs zu DFAs?
- Gibt es Sprachen, die von einem NFA entschieden werden, aber von keinem DFA?
- Erstaunlicherweise und praktischerweise ist die Antwort **nein!**

Satz 3.1

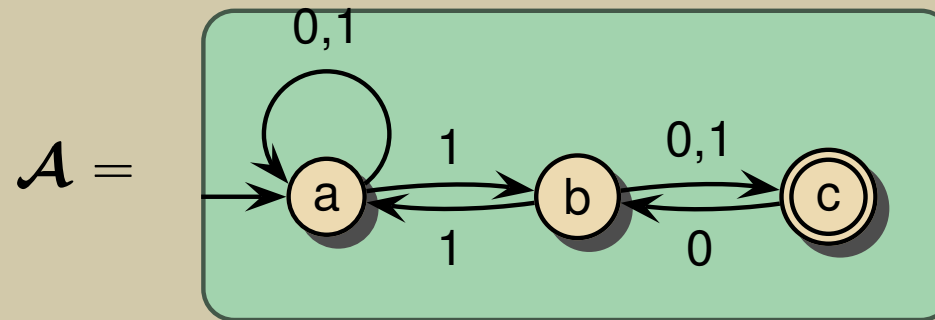
- Zu jedem NFA \mathcal{A} gibt es einen DFA \mathcal{A}_D mit $L(\mathcal{A}_D) = L(\mathcal{A})$

Beweisidee

- Als Zustände von \mathcal{A}_D werden die Teilmengen der Zustandsmenge von \mathcal{A} gewählt
- Nach Lesen eines Wortes w soll der Zustand von \mathcal{A}_D die Menge aller Zustände von \mathcal{A} sein, zu denen es einen Lauf vom Startzustand gibt, der w liest
☞ Potenzmengen-Automat
- Also die Menge der Zustände q mit $s \xrightarrow{w, \mathcal{A}} q$

Potenzmengen-Automat: Beispiel (1/3)

Beispiel



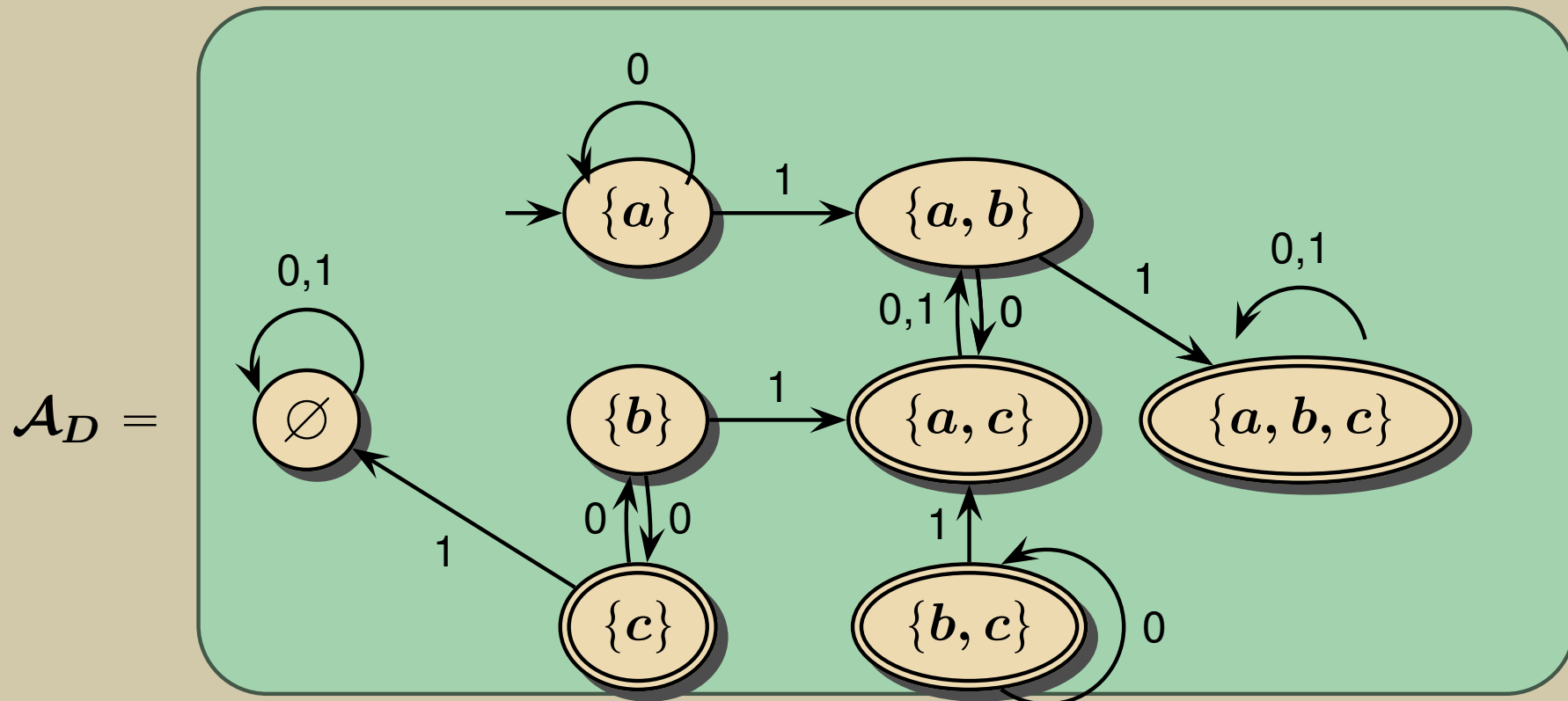
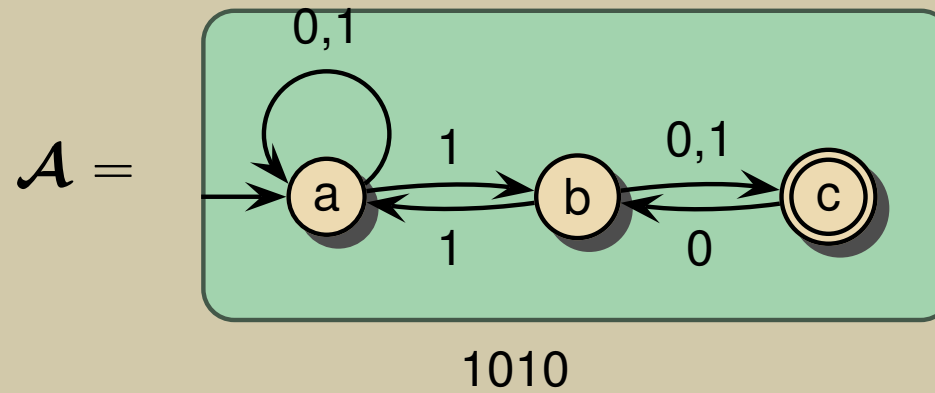
PINGO-Frage: pingo.upb.de

Was ist die Menge aller Zustände von \mathcal{A} , zu denen es einen Lauf vom Startzustand gibt, der **1010** liest?

- (A) $\{a, b, c\}$
- (B) \emptyset
- (C) $\{a, c\}$
- (D) $\{a, b\}$

Potenzmengen-Automat: Beispiel (2/3)

Beispiel

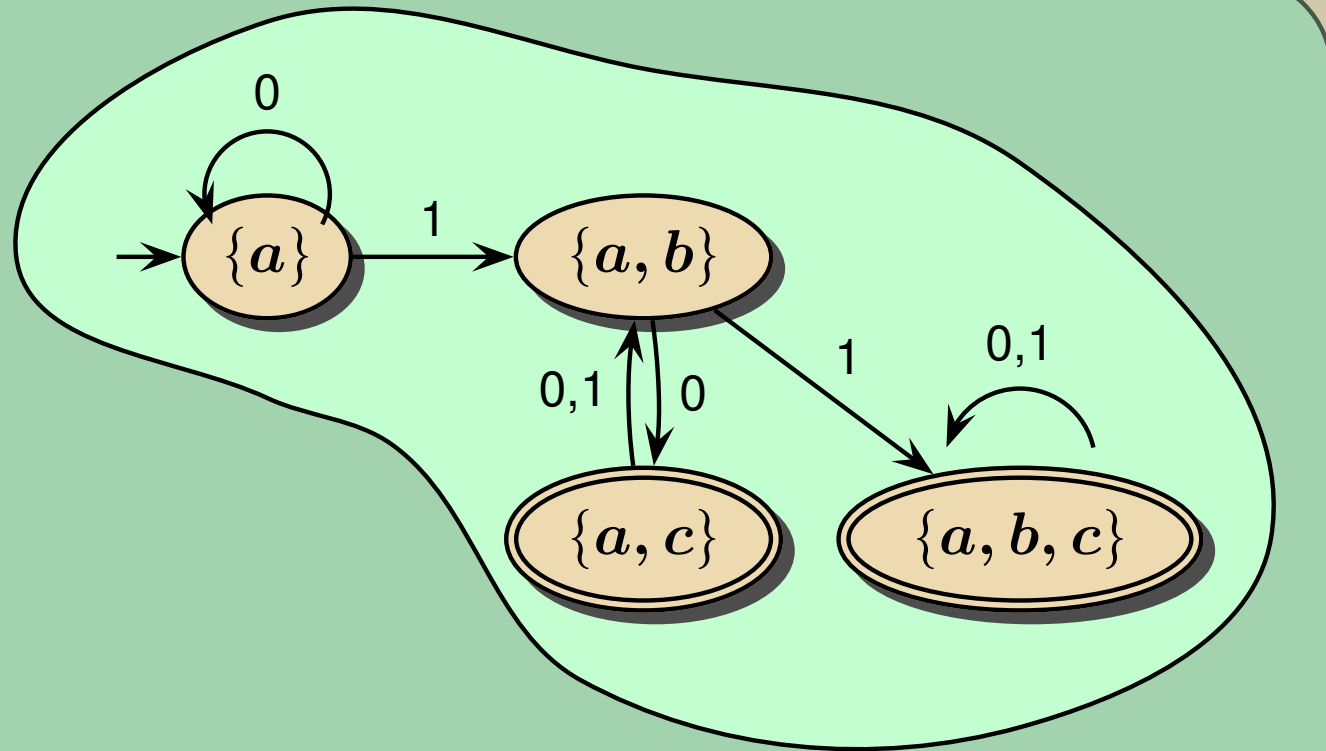


Potenzmengen-Automat: Beispiel (3/3)

- Es genügt, die von $\{a\}$ aus erreichbaren Zustände in \mathcal{A}_D aufzunehmen

Beispiel

$\mathcal{A}_D =$



Einschub: Strukturelle Induktion

- Wir beweisen die Korrektheit von \mathcal{A}_D mit **struktureller Induktion**

- Die Definition von regulären Ausdrücken ist ein Beispiel für eine **induktive Definition** einer Menge:

- Zuerst werden gewisse Grundelemente der Menge definiert
 - * \emptyset , ϵ und σ , für alle $\sigma \in \Sigma$
- Dann wird beschrieben, wie aus gegebenen Elementen der Menge neue Elemente gewonnen werden:
 - * durch Konkatination, Auswahl, Wiederholung
- Die Menge besteht dann aus allen so (in endlich vielen Schritten) konstruierbaren Elementen, und keinen anderen

- Ein (hoffentlich) bekanntes Beispiel einer induktiven Definition:
 - $0 \in \mathbb{N}_0$
 - $n \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow n + 1 \in \mathbb{N}_0$

- Induktive Definitionen ermöglichen:
 - induktive Definitionen von Funktionen auf den Elementen der Menge und
 - induktive Beweise von Eigenschaften aller Elemente der Menge

- Auch die Menge Σ^* aller Strings über Σ lässt sich induktiv definieren:
 - $\epsilon \in \Sigma^*$
 - Ist $w \in \Sigma^*$ und $\sigma \in \Sigma$, so ist $w \cdot \sigma \in \Sigma^*$

- Induktive Definition einer Funktion über Σ^* :
 - $\delta^*(q, \epsilon) = q$,
 - $\delta^*(q, u\sigma) = \delta(\delta^*(q, u), \sigma)$
für $u \in \Sigma^*, \sigma \in \Sigma$

- Beweise mit **struktureller Induktion** beweisen die Aussage zuerst für die Grundelemente und dann für „zusammengesetzte Elemente“

Beweis von Satz 3.1

Satz 3.1

- Zu jedem NFA \mathcal{A} gibt es einen DFA \mathcal{A}_D mit $L(\mathcal{A}_D) = L(\mathcal{A})$

Beweis

- Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$
- Wir definieren $\mathcal{A}_D \stackrel{\text{def}}{=} (\mathcal{P}(Q), \Sigma, \delta_D, \{s\}, F_D)$ durch
 - $\delta_D(S, \sigma) \stackrel{\text{def}}{=} \{q \mid \exists p \in S : p \xrightarrow{\sigma, \mathcal{A}} q\}$,
für alle $S \subseteq Q$ und $\sigma \in \Sigma$, und
 - $F_D \stackrel{\text{def}}{=} \{S \subseteq Q \mid S \cap F \neq \emptyset\}$
- Für jeden String $w \in \Sigma^*$ sei

$$R(w) \stackrel{\text{def}}{=} \{q \mid s \xrightarrow{w, \mathcal{A}} q\}$$

Beweis (Forts.)

- Durch Induktion nach w zeigen wir:

$$\delta_D^*(\{s\}, w) = R(w) \quad (*)$$

- $w = \epsilon$: $\delta_D^*(\{s\}, \epsilon) = \{s\} = R(\epsilon)$

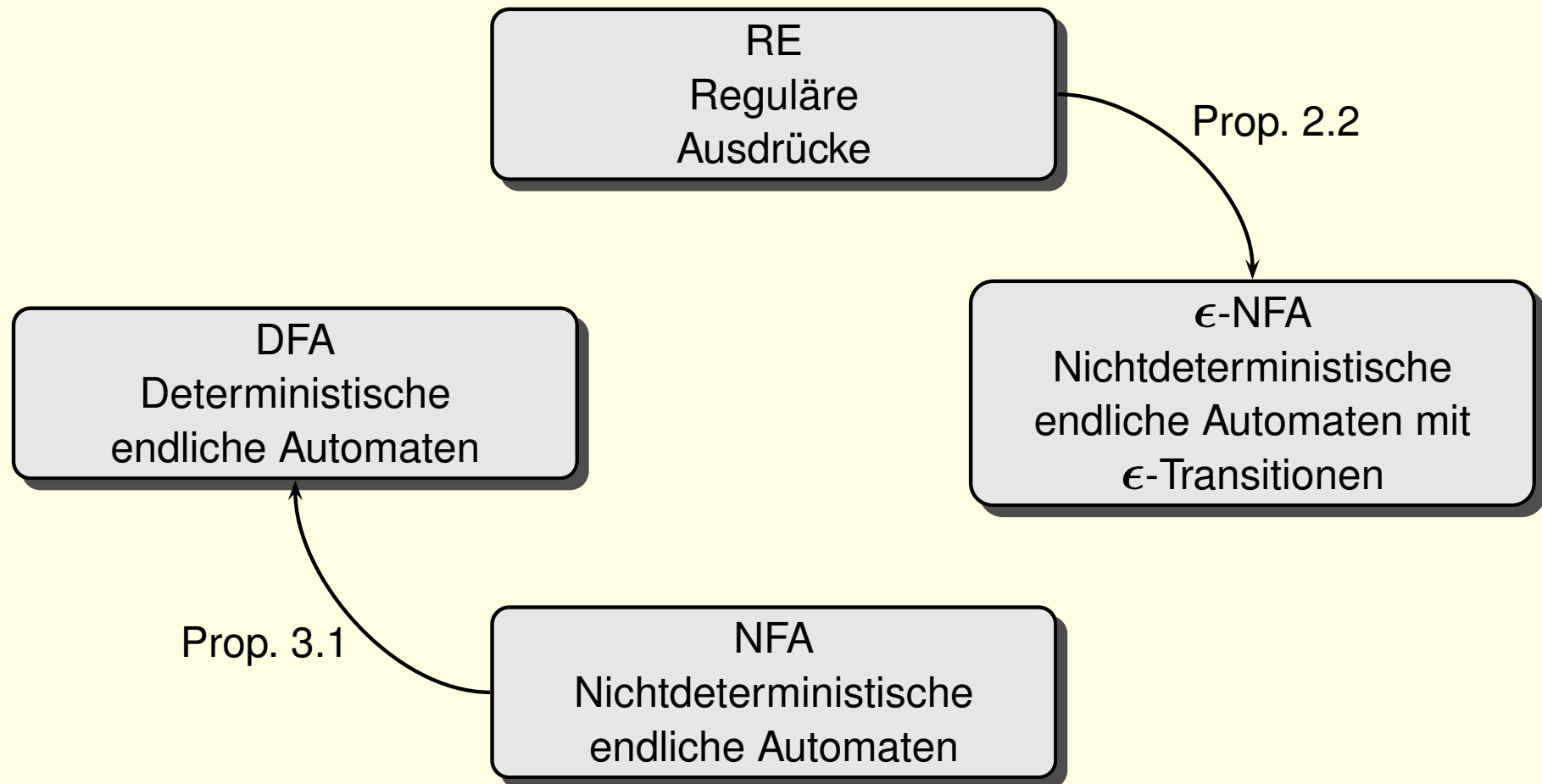
- $w = u\sigma$:

$$\begin{aligned} \delta_D^*(\{s\}, w) &= \delta_D(\delta_D^*(\{s\}, u), \sigma) && \text{Def } \delta_D^* \\ &= \delta_D(R(u), \sigma) && \text{Induktion} \\ &= \{q \mid \exists p \in R(u) : p \xrightarrow{\sigma, \mathcal{A}} q\} && \text{Def } \delta_D \\ &= \{q \mid \exists p : s \xrightarrow{u, \mathcal{A}} p \xrightarrow{\sigma, \mathcal{A}} q\} && \text{Def } R \\ &= R(u\sigma) = R(w) \end{aligned}$$

- Also:

$$\begin{aligned} &\mathcal{A}_D \text{ akzeptiert } w \\ \iff &\delta_D^*(\{s\}, w) \in F_D && \text{Def „DFA akzeptiert“} \\ \iff &\delta_D^*(\{s\}, w) \cap F \neq \emptyset && \text{Def } F_D \\ \iff &R(w) \cap F \neq \emptyset && (*) \\ \iff &\mathcal{A} \text{ akzeptiert } w && \text{Def „NFA akzeptiert“} \end{aligned}$$

Die Äquivalenz der Modelle (Forts.)



Vom ϵ -NFA zum DFA (1/2)

- Wir haben REs nicht in NFAs sondern in ϵ -NFAs umgewandelt
- ϵ -NFAs müssen auch noch in DFAs umgewandelt werden

Proposition 3.2

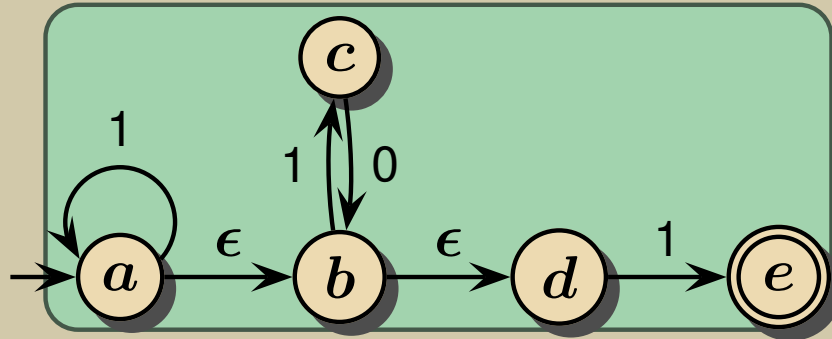
- Zu jedem ϵ -NFA \mathcal{A} gibt es einen DFA \mathcal{A}_D mit $L(\mathcal{A}_D) = L(\mathcal{A})$

Beweisskizze

- Sehr ähnlich zur Umwandlung von NFAs in DFAs
- Wir verwenden einen neuen Begriff:
 - $\epsilon\text{-closure}(p) \stackrel{\text{def}}{=} \{q \mid p \xrightarrow{\epsilon} q\}$
 - * (Menge aller von p aus ohne Lesen eines Symbols erreichbaren Zustände)
 - Für $S \subseteq Q$:
$$\epsilon\text{-closure}(S) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{q \in S} \epsilon\text{-closure}(q)$$
- Gegenüber dem Beweis von Satz 3.1 zu ändern:
 - Startzustand: $\epsilon\text{-closure}(s)$ statt $\{s\}$
 - $\delta_D(S, \sigma) \stackrel{\text{def}}{=} \epsilon\text{-closure}(\{q \mid \exists p \in S : p \xrightarrow{\sigma, \mathcal{A}} q\})$

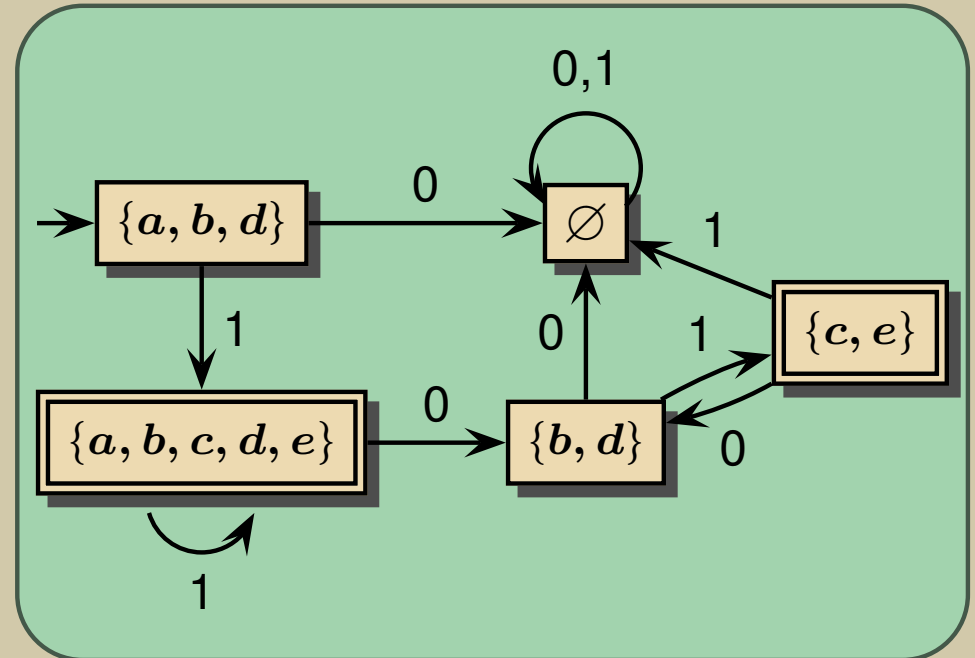
Vom ϵ -NFA zum DFA (2/2)

Beispiel: ϵ -NFA

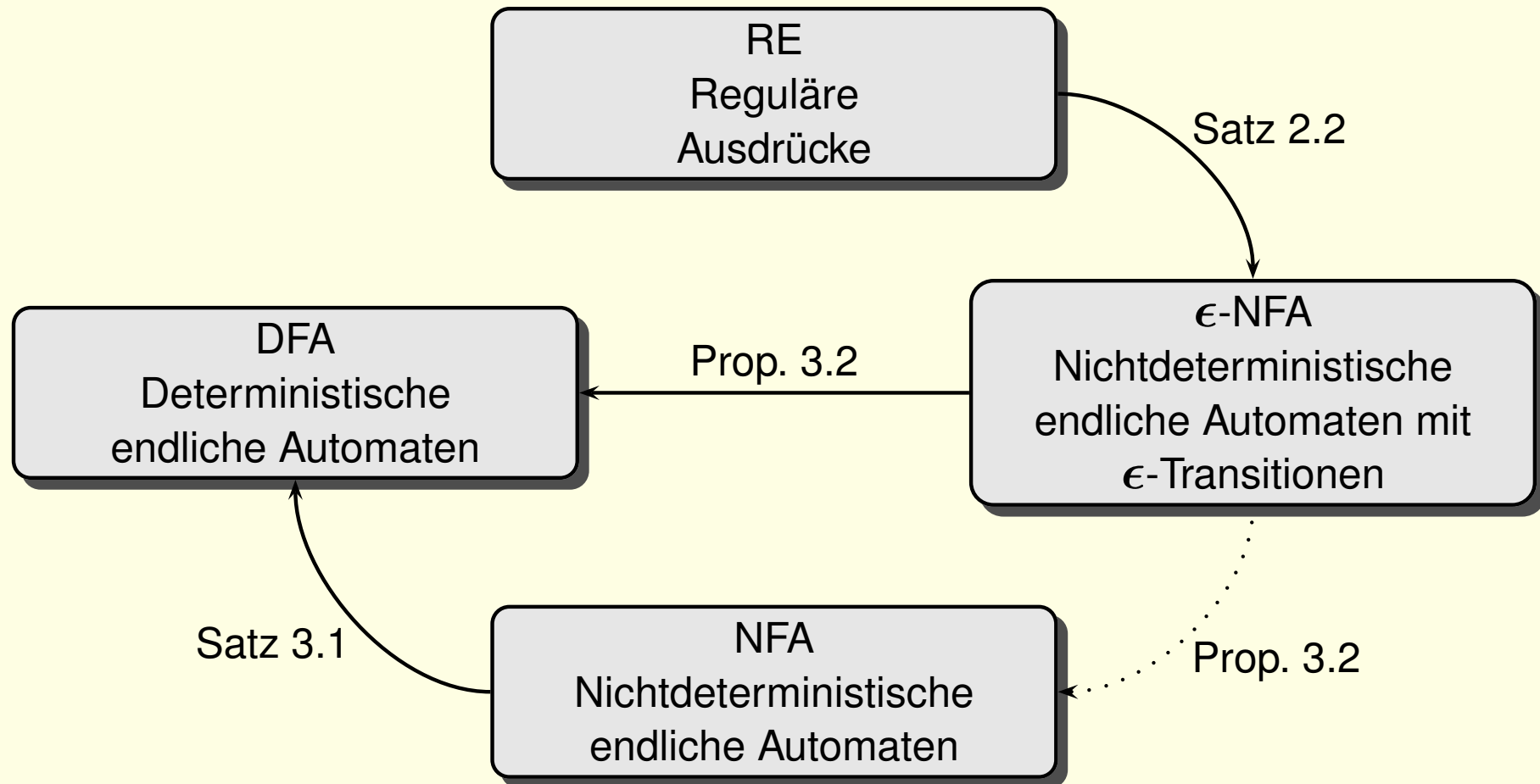


- ϵ -closure(a) = $\{a, b, d\}$
- ϵ -closure(b) = $\{b, d\}$

Beispiel: äquivalenter DFA

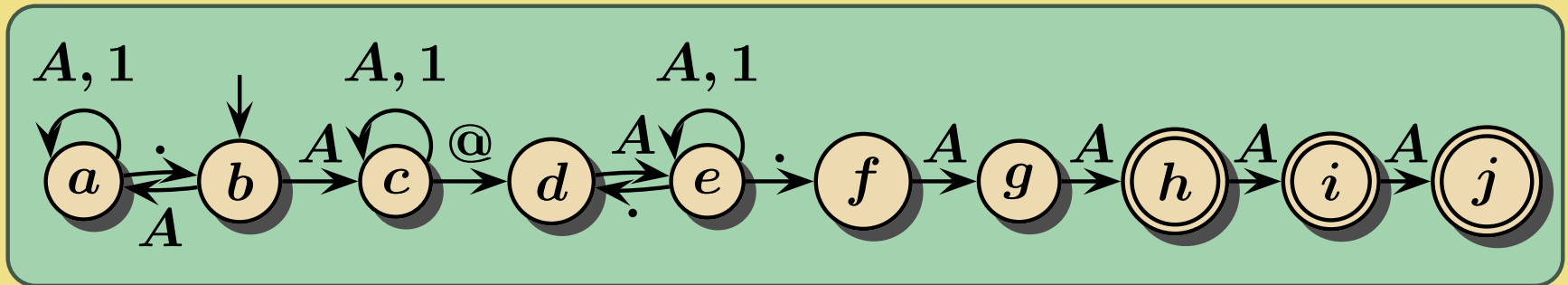


Die Äquivalenz der Modelle (Forts.)



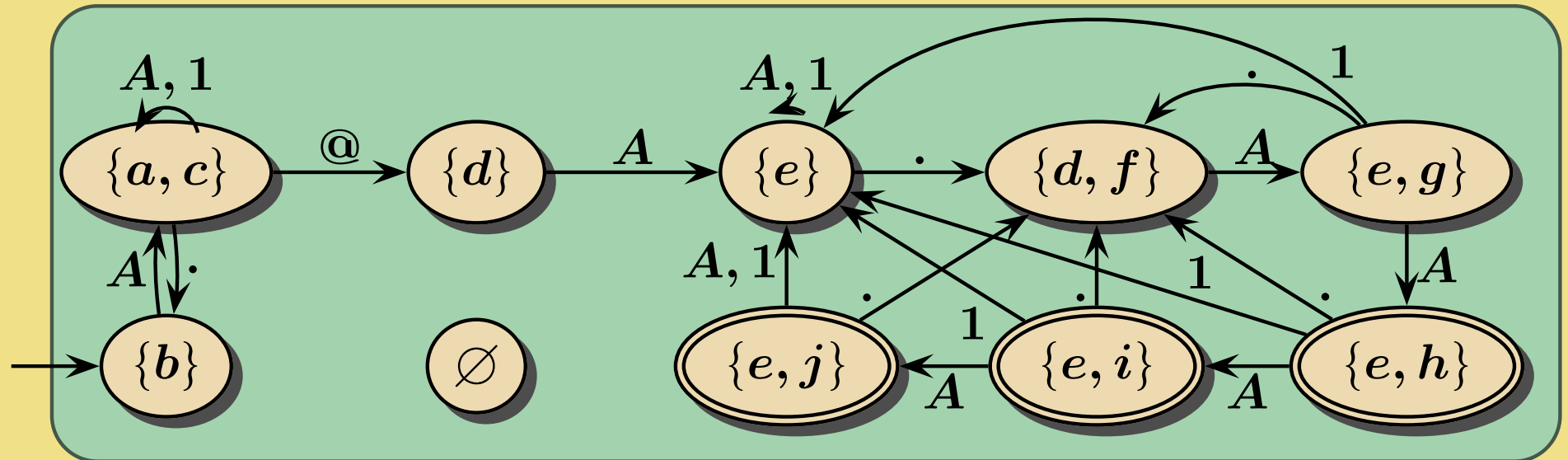
Vom RE zum DFA

- Im letzten Kapitel hatten wir aus dem erweiterten regulären Ausdruck für Mail-Adressen bereits einen NFA konstruiert:



✎ Zur Erinnerung: A steht für $a \dots, z, A \dots, Z$ und 1 für $0, \dots, 9, -, _$

- Dieser lässt sich in den folgenden DFA umwandeln:



✎ Alle übrigen Übergänge führen in den Senkenzustand \emptyset

Inhalt

3.1 Vom NFA zum DFA

▷ **3.2 Vom DFA zum RE**

3.3 Größenverhältnisse bei den Umwandlungen

3.4 Korrektheitsbeweise für DFAs

Endliche Automaten vs. reguläre Ausdrücke

- Um den Nachweis der Äquivalenz der betrachteten Modelle abzuschließen, zeigen wir folgendes Resultat

Proposition 3.3 [McNaughton, Yamada 60]

- Zu jedem DFA \mathcal{A} gibt es einen RE α mit
$$L(\alpha) = L(\mathcal{A})$$

- Für den Beweis von Proposition 3.3 betrachten wir zuerst einen konstruktiven und anschaulichen Weg, um von \mathcal{A} zu α zu kommen:

 Zustandselimination

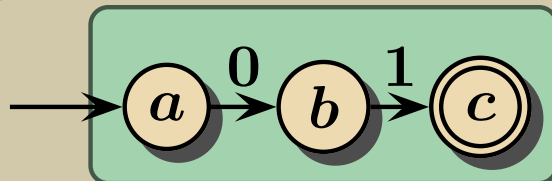
- Der Nachweis, dass diese Konstruktion korrekt ist, ist aber technisch mühsam
- Deshalb führen wir den formalen Beweis für Proposition 3.3 dann auf eine etwas weniger anschauliche, aber leicht hinzuschreibende Weise

Vom DFA zum RE: Anschauliche Vorgehensweise (1/4)

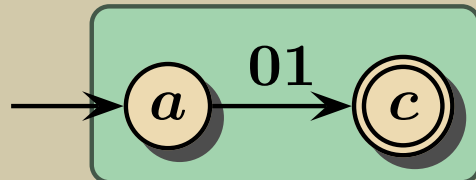
- Grundidee der anschaulichen Vorgehensweise
 - Wir verwenden ein **hybrides Automatenmodell**, dessen Transitionen mit regulären Ausdrücken (statt einzelnen Zeichen) beschriftet sind
 - Durch **sukzessives Entfernen von Zuständen** wird schließlich ein einzelner regulärer Ausdruck erreicht

Ein einfaches Beispiel

- Wandle



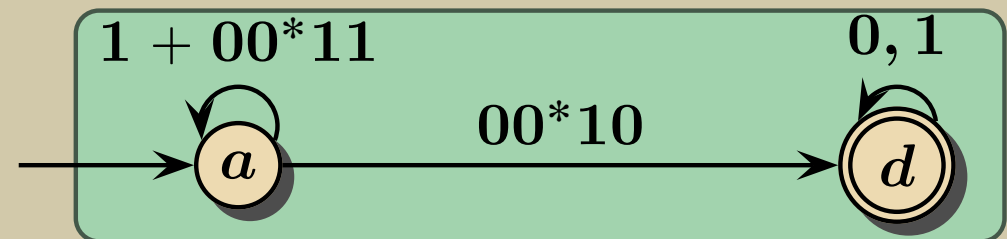
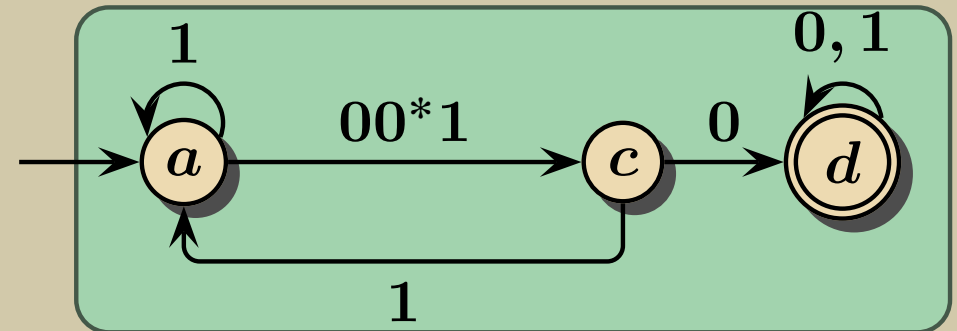
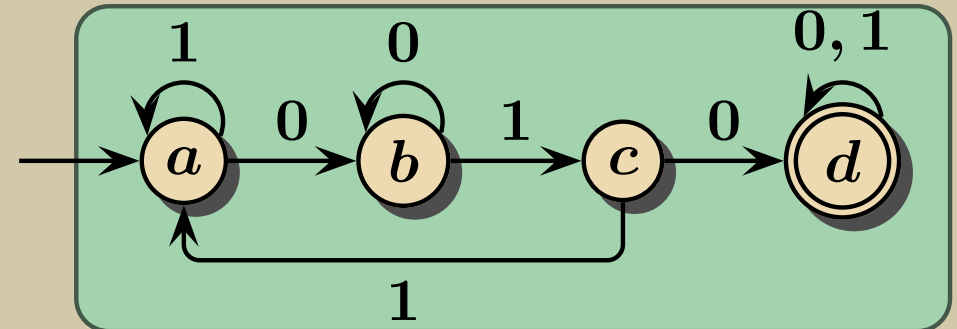
um in



und erhalte den regulären Ausdruck **01**

Ein komplizierteres Beispiel

- Umwandlung von

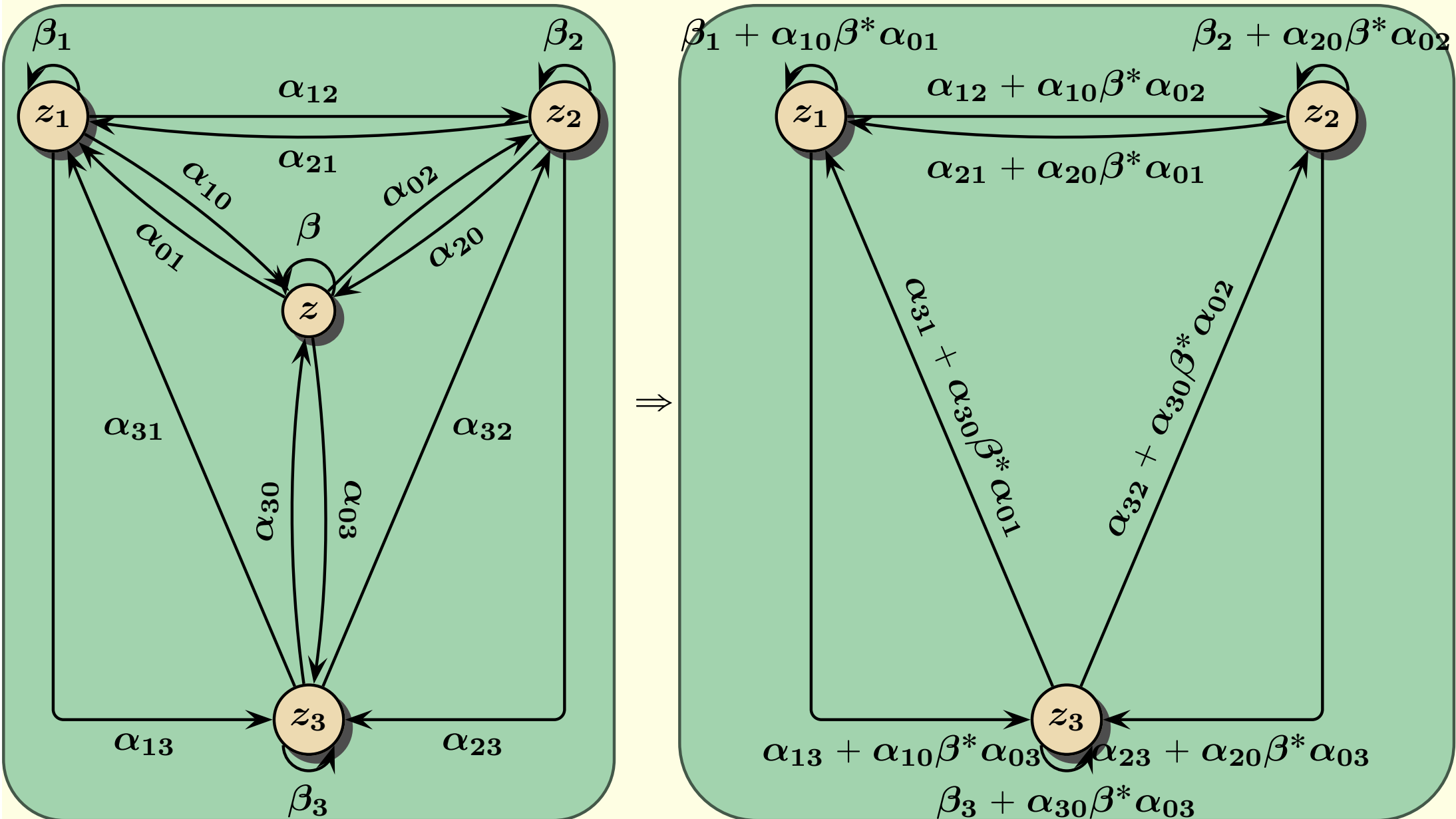


ergibt den regulären Ausdruck

$$(1 + 00^*11)^*00^*10(0 + 1)^*$$

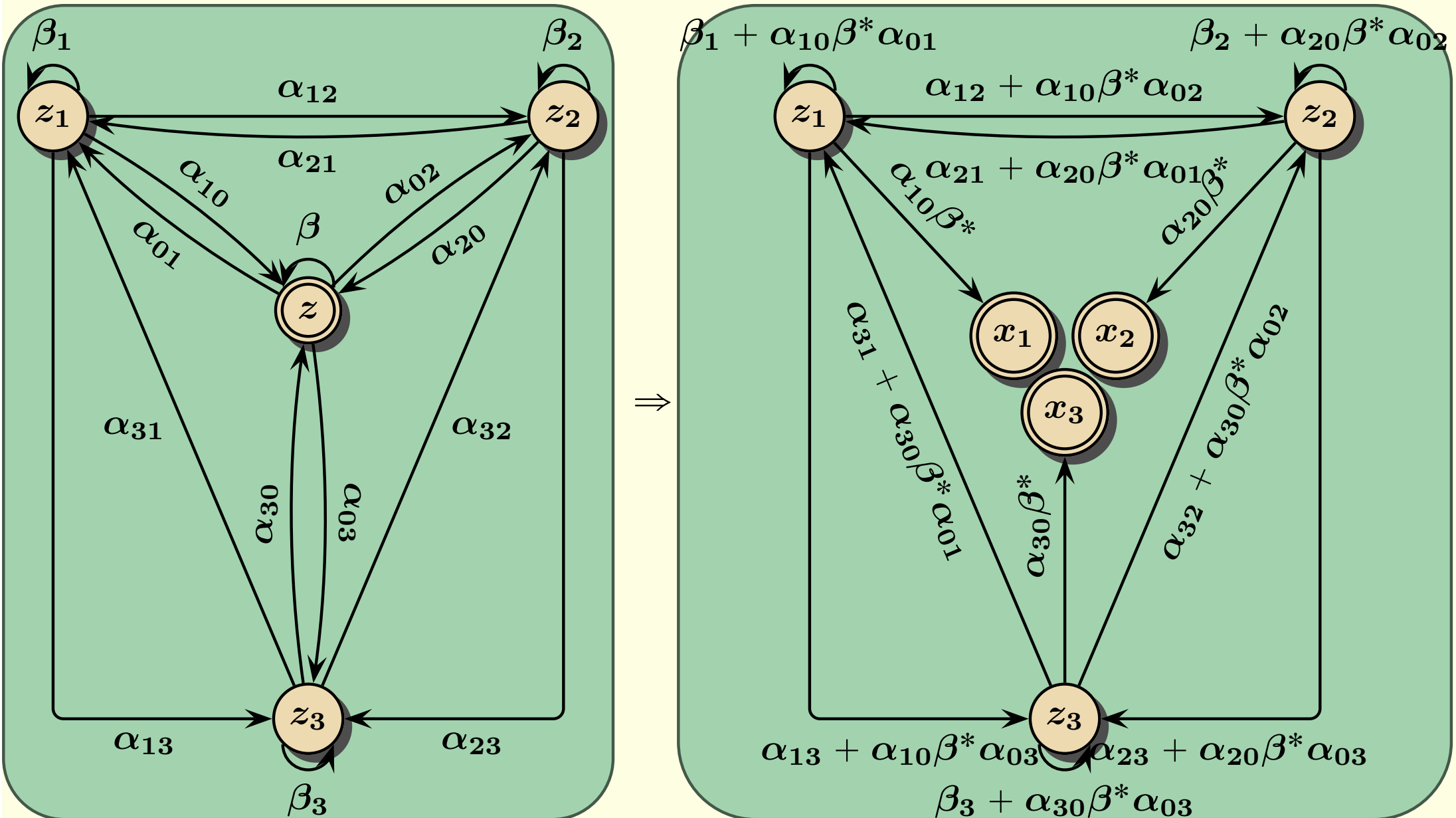
Vom DFA zum RE: Anschauliche Vorgehensweise (2/4)

- Im Allgemeinen wird ein **nicht akzeptierender Zustand** z wie folgt entfernt:



Vom DFA zum RE: Anschauliche Vorgehensweise (3/4)

- Im Allgemeinen wird ein **akzeptierender Zustand** z wie folgt behandelt:

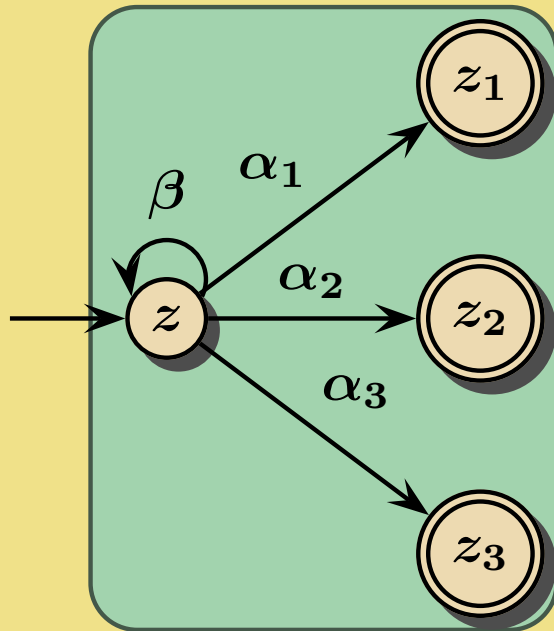


Vom DFA zum RE: Anschauliche Vorgehensweise (4/4)

- Am Ende erhalten wir einen hybriden Automaten in einer von zwei Formen:

- 1. Fall:

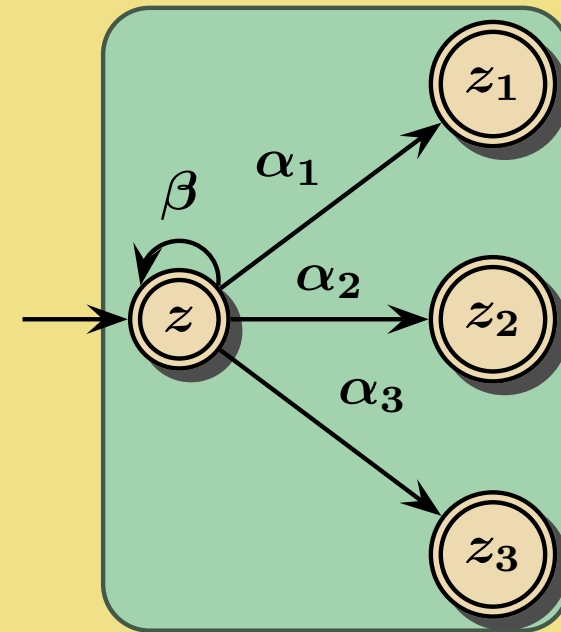
Startzustand ist **nicht akzeptierend**:



Der zugehörige reguläre Ausdruck ist dann $\beta^*(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$

- Der Fall, dass es in z keine Schleife gibt, entspricht $\beta = \emptyset$ und liefert $\emptyset^*(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \equiv (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$

- 2. Fall: Startzustand ist **akzeptierend**:



Der zugehörige reguläre Ausdruck ist dann $\beta^*(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \epsilon)$

- Wie gesagt: der Beweis der Korrektheit dieser Vorgehensweise ist etwas mühsam
- Deshalb betrachten wir jetzt einen Beweis, der weniger anschaulich ist, sich aber leichter aufschreiben lässt

Vom DFA zum RE: Beweis (1/4)

Proposition 3.3 [McNaughton, Yamada 60]

- Zu jedem DFA \mathcal{A} gibt es einen regulären Ausdruck α mit $L(\alpha) = L(\mathcal{A})$

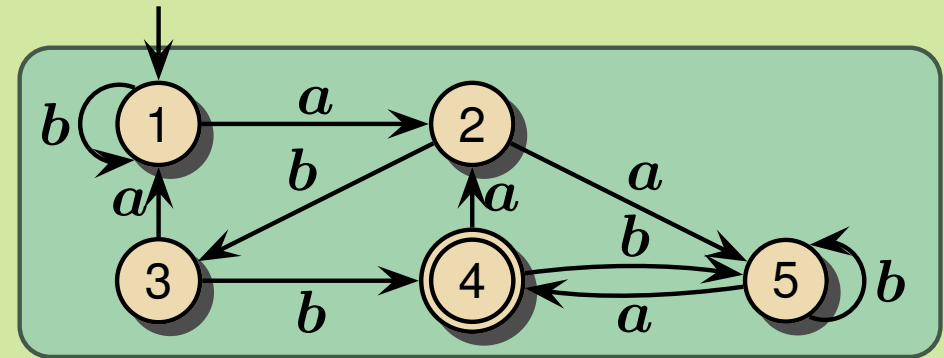
Beweisskizze

- Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$
- Seien oBdA $Q = \{1, \dots, n\}$ und $s = 1$
- Für jedes $i, j \in \{1, \dots, n\}$ und $k \in \{0, \dots, n\}$ soll $\underline{L_{i,j}^k}$ die Menge aller Strings $w \in \Sigma^*$ sein, für die der Automat
 - vom Zustand i in den Zustand j übergeht,
 - und zwischendurch nur Zustände aus $\{1, \dots, k\}$ annimmt
- $L_{i,j}^k \stackrel{\text{def}}{=} \text{Menge aller Strings } w \text{ mit:}$
 - $\delta^*(i, w) = j$ und
 - für alle echten Präfixe $v \neq \epsilon$ von w ist $\delta^*(i, v) \leq k$

3.1

PINGO-Frage: pingo.upb.de

Ein regulärer Ausdruck für die Menge $L_{1,5}^3$ zum Automaten



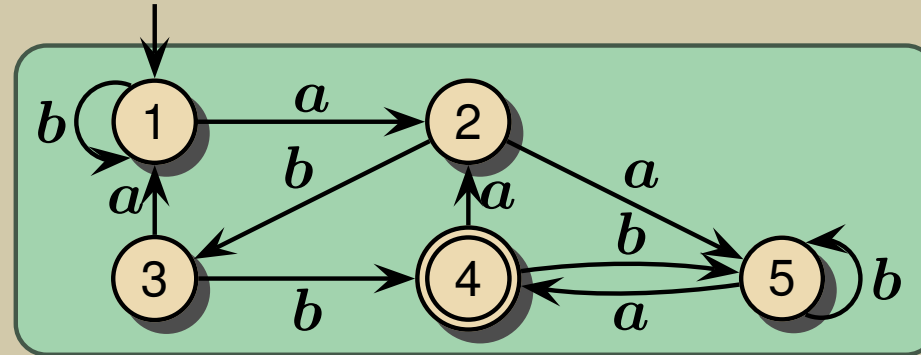
ist:

- (A) aa
- (B) aab^*
- (C) $b^*a(bab^*a)^*a$
- (D) $b^*a(bab^*a)^*ab^*$

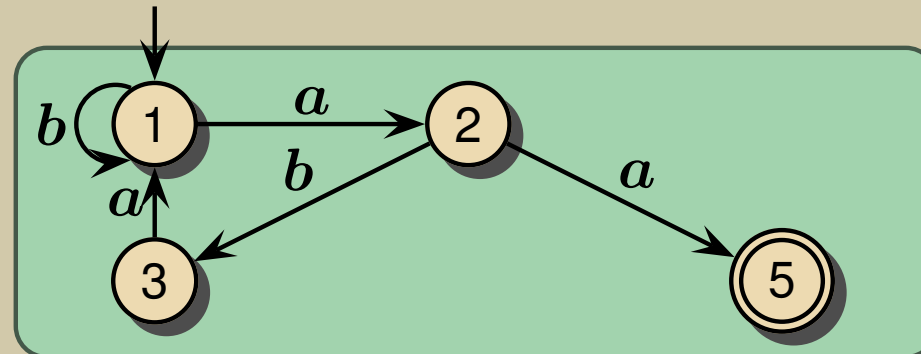
Vom DFA zum RE: Beweis (2/4)

Beispiel

- Für den Automaten




entspricht die Menge $L_{1,5}^3$
dem (partiellen) Teil-DFA



Vom DFA zum RE: Beweis (3/4)

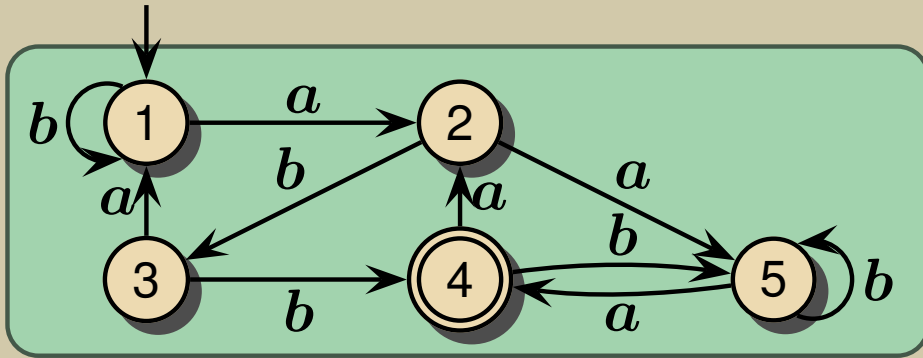
Beweisskizze (Forts.)

- Behauptung: für jede Menge $L_{i,j}^k$ gibt es einen regulären Ausdruck $\alpha_{i,j}^k$ mit $L(\alpha_{i,j}^k) = L_{i,j}^k$
- Beweis durch Induktion nach k
- $k = 0$:
 - Für $i \neq j$ ist
$$L_{i,j}^0 = \{\sigma \mid \sigma \in \Sigma, \delta(i, \sigma) = j\}$$

 Hier sind nur direkte Übergänge erlaubt!
Keine Zwischenschritte!
 - Analog:
$$L_{i,i}^0 = \{\epsilon\} \cup \{\sigma \mid \sigma \in \Sigma, \delta(i, \sigma) = i\}$$
- $L_{i,j}^0$ und $L_{i,i}^0$ sind endlich und können deshalb durch reguläre Ausdrücke beschrieben werden

Vom DFA zum RE: Beweis (4/4)

Beispiel



$$\underbrace{ab}_{\in L_{1,3}^2} \underbrace{abbbab}_{\in L_{3,3}^2} \underbrace{abab}_{\in L_{3,3}^2} \underbrace{abaa}_{\in L_{3,5}^2} \in L_{1,5}^3 (!)$$

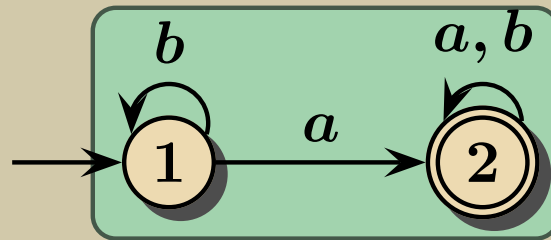
Beweisskizze (Forts.)

- $k > 0$:

$$L_{i,j}^k = L_{i,j}^{k-1} \cup L_{i,k}^{k-1} (L_{k,k}^{k-1})^* L_{k,j}^{k-1}$$
- Nach Induktion gibt es für jede auf der rechten Seite vorkommende Sprache einen regulären Ausdruck, also auch für $L_{i,j}^k$
- Der RE α ist dann $\sum_{i \in F} \alpha_{1,i}^n$
- Die Konstruktion funktioniert natürlich genauso auch für NFAs

Vom DFA zum RE: Beispiel

Beispiel



- $k = 0$:
 - $\alpha_{1,1}^0 = b + \epsilon$, $\alpha_{1,2}^0 = a$, $\alpha_{2,1}^0 = \emptyset$, $\alpha_{2,2}^0 = a + b + \epsilon$
- $k = 1$:
 - $\alpha_{1,1}^1 = b + \epsilon + (b + \epsilon)(b + \epsilon)^*(b + \epsilon) \equiv b^*$
 - $\alpha_{1,2}^1 = a + (b + \epsilon)(b + \epsilon)^*a \equiv b^*a$
 - $\alpha_{2,1}^1 = \emptyset + \emptyset(b + \epsilon)^*(b + \epsilon) \equiv \emptyset$
 - $\alpha_{2,2}^1 = (a + b + \epsilon) + \emptyset(b + \epsilon)^*a \equiv a + b + \epsilon$
- $k = 2$:
 - $\alpha_{1,1}^2 = b^* + b^*a(a + b + \epsilon)^*\emptyset \equiv b^*$
 - $\alpha_{1,2}^2 = b^*a + b^*a(a + b + \epsilon)^*(a + b + \epsilon) \equiv b^*a(a + b)^*$
 - $\alpha_{2,1}^2 = \emptyset + (a + b + \epsilon)(a + b + \epsilon)^*\emptyset \equiv \emptyset$
 - $\alpha_{2,2}^2 = (a + b + \epsilon) + (a + b + \epsilon)(a + b + \epsilon)^*(a + b + \epsilon) \equiv (a + b)^*$
- $\alpha = b^*a(a + b)^*$ (mit $k = 2$ hier nur $\alpha_{1,2}^2$ nötig)

Reguläre Sprachen: Äquivalenz

- Insgesamt haben wir den folgenden Satz bewiesen:

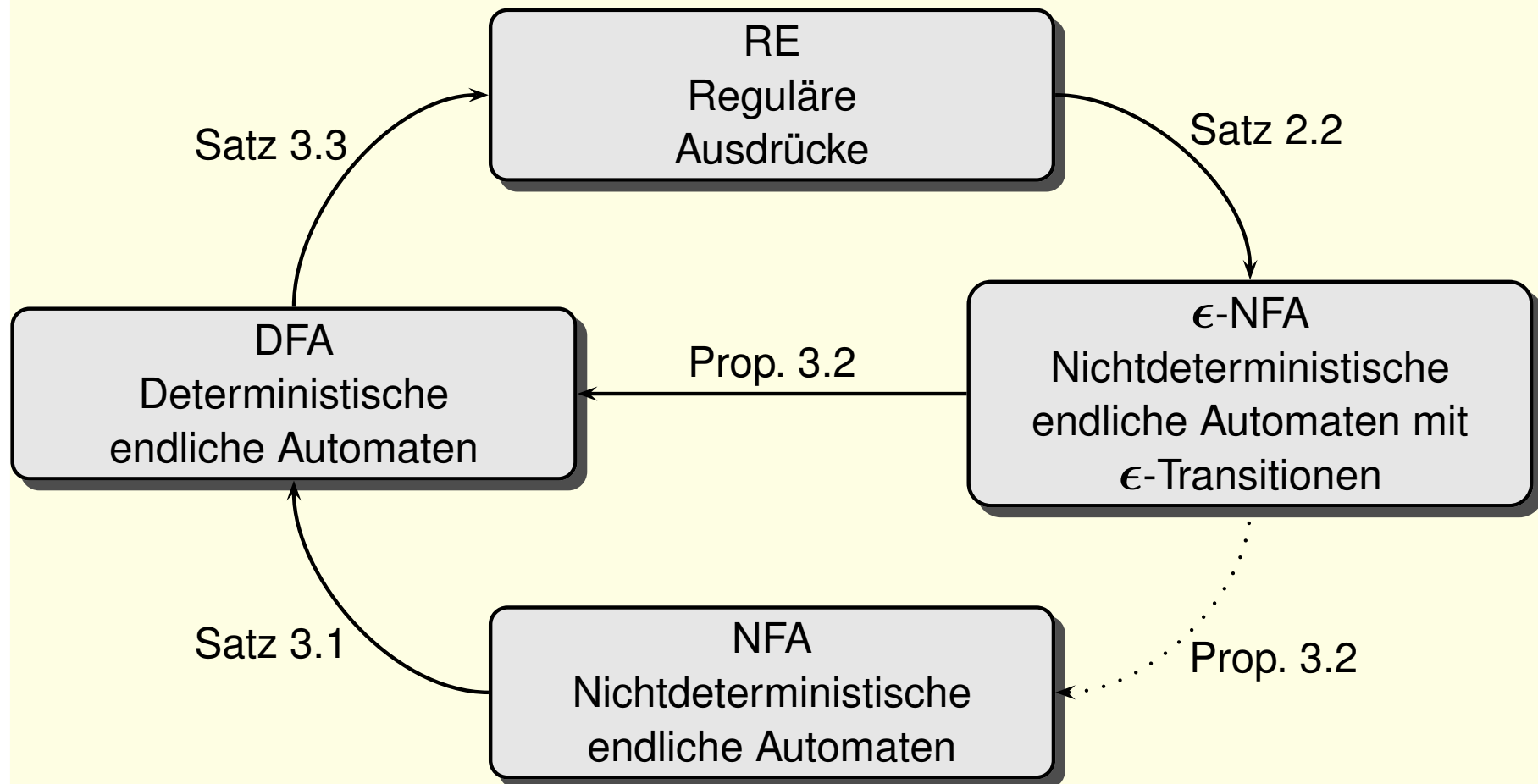
Satz 3.4

Für eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ sind äquivalent:

- (a) $L = L(\alpha)$ für einen RE α
- (b) $L = L(\mathcal{A})$ für einen DFA \mathcal{A}
- (c) $L = L(\mathcal{A})$ für einen NFA \mathcal{A}
- (d) $L = L(\mathcal{A})$ für einen ϵ -NFA \mathcal{A}

- Die regulären Sprachen bilden also eine sehr robuste Klasse von Sprachen

Die Äquivalenz der Modelle (Forts.)



Inhalt

3.1 Vom NFA zum DFA

3.2 Vom DFA zum RE

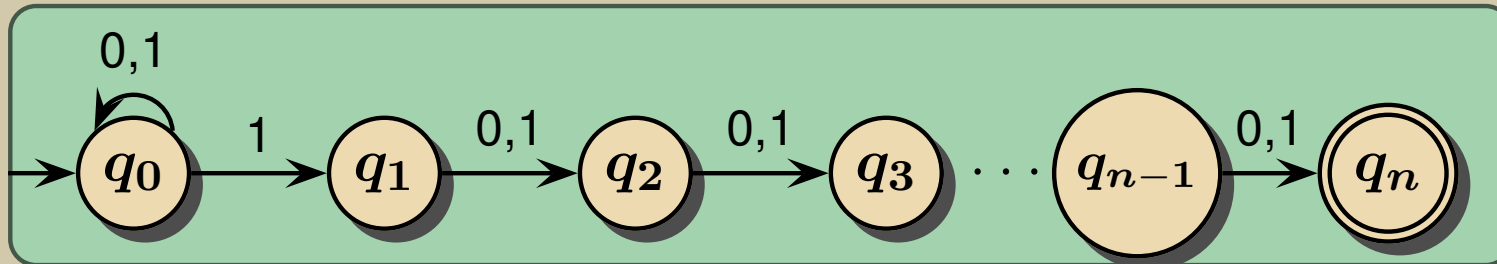
▷ **3.3 Größenverhältnisse bei den Umwandlungen**

3.4 Korrektheitsbeweise für DFAs

Vom NFA zum DFA: Größe des Potenzmengenautomaten

- Wir groß kann der Potenzmengenautomat \mathcal{A}_D im Verhältnis zu \mathcal{A} im Beweis von Satz 3.1 werden?
- Klar: maximal $2^{|Q|}$ Zustände ☞ Anzahl der Teilmengen von Q
- Aber: kann es wirklich passieren, dass (ungefähr) so viele Teilmengen von Q erreichbar sind?

Beispiel

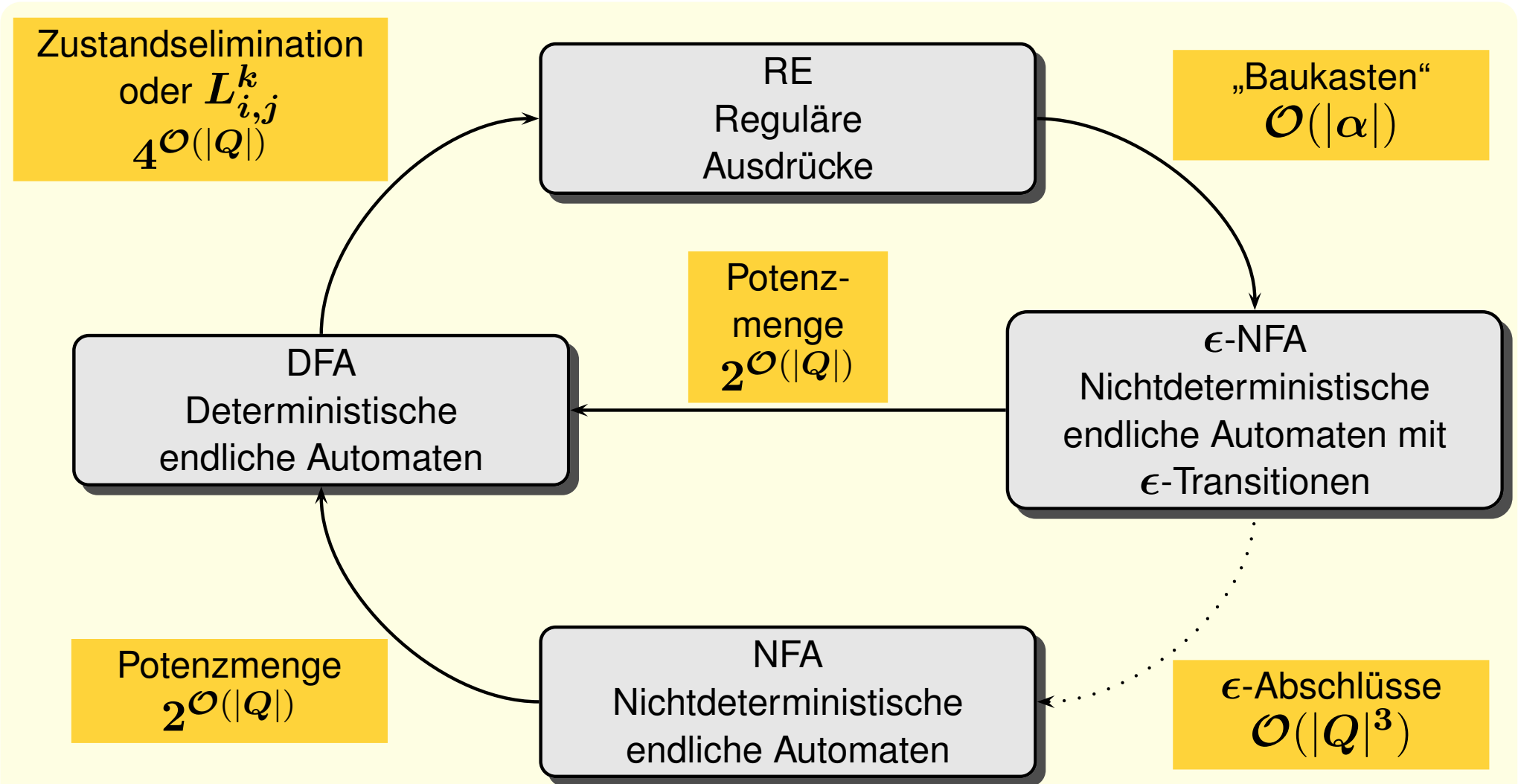


- Dieser Automat akzeptiert, falls das n -te Zeichen von rechts eine 1 ist
- Wir werden in Kapitel 4 zeigen: es gibt keinen DFA mit $< 2^n = \frac{1}{2} 2^{|Q|}$ Zuständen für diese Sprache

Vom DFA zum RE: Größe des REs

- Wie groß wird der RE α , der bei der Umwandlung vom DFA \mathcal{A} nach dem Beweis von Proposition 3.3 entsteht?
- Sei $g(k)$ die maximale Länge eines Ausdrucks für $L_{i,j}^k$
- Dann gilt:
 - $g(0) = \mathcal{O}(|\Sigma|)$
 - $g(k) \leq 4g(k-1) + \mathcal{O}(1)$
- Also: $g(n) = 4^{\mathcal{O}(n)} |\Sigma|$

Die Äquivalenz der Modelle: Größenverhältnisse



Inhalt

3.1 Vom NFA zum DFA

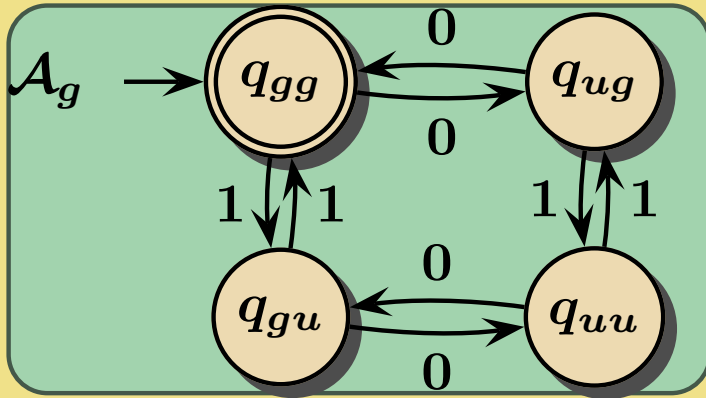
3.2 Vom DFA zum RE

3.3 Größenverhältnisse bei den Umwandlungen

▷ **3.4 Korrektheitsbeweise für DFAs**

Korrektheitsbeweis für Automaten (1/2)

- Zur Erinnerung: L_g ist die Menge aller Strings über $\{0, 1\}$ mit gerade vielen Einsen und Nullen



- Es erscheint offensichtlich, dass \mathcal{A}_g die Sprache L_g entscheidet
- Können wir das auch **beweisen**?

- Wir benötigen für den Beweis ein wenig Notation:
 - $\#_{\tau}(w) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Häufigkeit des Vorkommens des Zeichens } \tau \text{ im String } w$
* z.B.: $\#_a(baaba) = 3$
 - $n \equiv_k m \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} n \text{ und } m \text{ haben bei Division durch } k \text{ denselben Rest (für } k \in \mathbb{N})$
* z.B.: $5 \equiv_3 2$

- Mit dieser Notation definieren wir formal:

$$\underline{L_g} \stackrel{\text{def}}{=} \{w \in \{0, 1\}^* \mid \#_0(w) \equiv_2 0, \#_1(w) \equiv_2 0\}$$

Proposition 3.5

- $L(\mathcal{A}_g) = L_g$

- Korrektheitsbeweise für Automaten zeigen meisten durch Induktion nach w , dass die intuitive Bedeutung der Zustände mit der tatsächlichen Bedeutung übereinstimmt

Korrektheitsbeweis für Automaten (2/2)

Proposition 3.5

- $L(\mathcal{A}_g) = L_g$

Beweisskizze

- Wir zeigen durch Induktion nach $|w|$, dass für alle $w \in \Sigma^*$ gilt:
 - $\delta^*(q_{gg}, w) = q_{gg} \iff \#_0(w) \equiv_2 0, \#_1(w) \equiv_2 0$
 - $\delta^*(q_{gg}, w) = q_{ug} \iff \#_0(w) \equiv_2 1, \#_1(w) \equiv_2 0$
 - $\delta^*(q_{gg}, w) = q_{gu} \iff \#_0(w) \equiv_2 0, \#_1(w) \equiv_2 1$
 - $\delta^*(q_{gg}, w) = q_{uu} \iff \#_0(w) \equiv_2 1, \#_1(w) \equiv_2 1$
- Daraus folgt dann die Proposition wegen $F = \{q_{gg}\}$

Beweisskizze (Forts.)

- $w = \epsilon: \checkmark$
- $w = v\sigma$ für ein $v \in \Sigma^*$ und ein $\sigma \in \Sigma$:
 - Nach Induktion gilt für v die Induktionsbehauptung
 - Wir unterscheiden 8 Fälle, je nach σ und $\delta^*(q_{gg}, v)$:
 - * Beispielfall:
$$\sigma = 1, \delta^*(q_{gg}, v) = q_{ug}$$
$$\Rightarrow \#_0(v) \equiv_2 1, \#_1(v) \equiv_2 0$$

☞ Induktion

$$\Rightarrow \#_0(w) \equiv_2 1, \#_1(w) \equiv_2 1$$

☞ da $\sigma = 1$

$$\Rightarrow \text{Behauptung} \quad \text{☞ da } \delta(q_{ug}, 1) = q_{uu}$$
 - Die anderen sieben Fälle sind analog

Zusammenfassung

Themen dieser Vorlesung

- Umwandlung von NFAs und ϵ -NFAs in DFAs (Potenzmengenkonstruktion)
- Umwandlung von DFAs in REs
- Korrektheitsbeweise für endliche Automaten

Kapitelfazit

- Alle betrachteten Modelle beschreiben reguläre Sprachen
- Einige Umwandlungen zwischen den Modellen können exponentiell große Objekte erzeugen

Erläuterungen: Präfixe, Suffixe und Teilstrings

Bemerkung 3.1

- Sind x, y, z Wörter und ist $w = xyz$, so heißt
 - x ein Präfix von w ,
 - y ein Teilstring von w und
 - z ein Suffix von w
- Dabei können x, y oder z auch leer sein.
- Ein **echtes Präfix** x von w ist ein Präfix mit $x \neq w$

Beispiel

- Der String *abab* hat die
 - Präfixe $\epsilon, a, ab, aba, abab$
 - Suffixe $\epsilon, b, ab, bab, abab$
 - Teilstrings, $\epsilon, a, b, ab, ba, aba, bab, abab$

Literaturhinweise

Umwandlung DFA → RE: R. McNaughton and H. Yamada. Regular Expressions and State Graphs for Automata. *IEEE Transactions on Electronic Computers*, EC-9:39–47, 1960

Änderungslog

- 24.4.18: Fehler auf Folie 3.22 korrigiert: Definition von $L_{i,i}^0$