

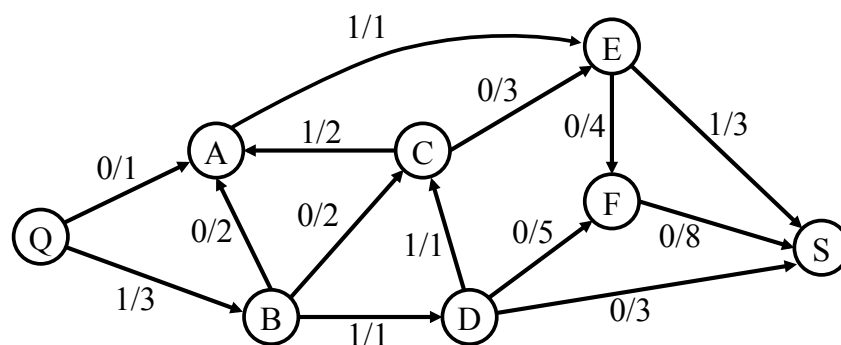
Probeklausur zur Vorlesung
Effiziente Algorithmen
Sommersemester 2016

Datum:
21.06.2016

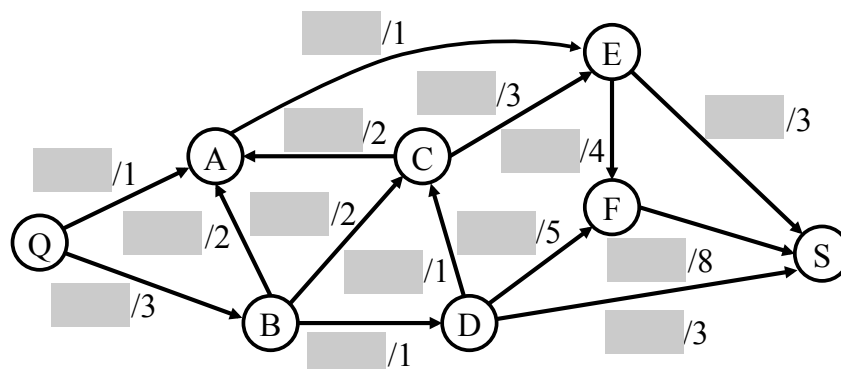
Hinweis: Der Umfang dieser Probeklausur entspricht in etwa einer halben Klausur.

Aufgabe 1 – Flussproblem

Betrachten Sie das folgende Netzwerk $N = (G = (V, E), c)$ mit dem Fluss Φ : die Werte an den Kanten geben den jeweiligen aktuellen Flusswert $\Phi(e)$ (links) und die Kapazität $c(e)$ (rechts) wieder.



Führen Sie **eine Iteration** des Algorithmus von Malhotra, Pramodh Kumar und Maheshwari aus. Geben Sie den **Restgraphen** und das **Niveaunetzwerk** – inklusive der Potenziale – zum aktuellen Fluss Φ an. Berechnen Sie anschließend den **Sperrfluss** Ψ und zeichnen Sie diesen sowie den **neuen Fluss** $\Phi' := \Phi + \Psi$, der durch das Hinzufügen des Sperrflusses entsteht. Wie lautet der **Wert des Flusses** von Φ und der von Φ' ? Tragen Sie den neuen Fluss Φ' in die folgende Vorlage ein:



Aufgabe 2 – Amortisierte Analyse: 3-Zähler

Analog zu dem in der Vorlesung betrachteten Binärzähler wird hier eine Zahl $z \in \mathbb{N}$ als lineare Liste $(z_{m-1}, \dots, z_1, z_0)$ mit maximal m Stellen gespeichert. Das erste Element der Liste ist z_0 und das letzte Element z_{m-1} .

Hierbei wird als Basis 3 verwendet, so dass $z_i \in \{0, 1, 2\}, \forall i \in \{0, \dots, m-1\}$. Somit entspricht $(z_{m-1}, \dots, z_1, z_0)$ der Zahl $\sum_{i=0}^{m-1} z_i \cdot 3^i$.

Beispiel: **(1, 2, 0)** stellt die Zahl $1 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^1 + 0 \cdot 3^0 = 15$ dar.

Die Operation `ErhöheUmEins()` addiert 1 auf die aktuelle Zahl:

1. $i := 0$;
2. while ($z_i = 2$ und $i < m - 1$)
3. $z_i := 0$;
4. $i := i + 1$;
5. $z_i := z_i + 1$;

Zeigen Sie mit Hilfe der **Kostenverteilung**, dass n `ErhöheUmEins()`-Operationen **amortisierte Laufzeit** $\mathcal{O}(n)$ haben.

Sie können davon ausgehen, dass initial $z = 0$ gilt, also $z_i = 0, \forall i \in \{0, \dots, m - 1\}$. Sie können außerdem davon ausgehen, dass $m \leq n < \sum_{i=0}^{m-1} 3^i$ gilt.

Aufgabe 3 – Starke Zusammenhangskomponenten

Es sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph. In dieser Aufgabe geht es darum, wie sich die **Anzahl der starken Zusammenhangskomponenten (SZHK)** von G durch Einfügen oder Entfernen einer Kante ändern kann.

- a) Kann die Anzahl der SZHK von G **größer** werden,
- i) wenn eine Kante $(u, v) \notin E$ hinzugefügt wird?
 - ii) wenn eine Kante $(u, v) \in E$ entfernt wird?

Begründen Sie jeweils, warum dies nicht der Fall sein kann, oder geben Sie einen Graphen mit mindestens 3 Knoten an, in welchem es nach der jeweiligen Operation zu einem größtmöglichen (in Bezug auf die Anzahl der Knoten in G) Zuwachs an SZHK kommt.

- b) Kann die Anzahl der SZHK von G **gleich** bleiben,
- i) wenn eine Kante $(u, v) \notin E$ hinzugefügt wird?
 - ii) wenn eine Kante $(u, v) \in E$ entfernt wird?

Begründen Sie jeweils, warum dies nicht der Fall sein kann, oder geben Sie einen Graphen mit mindestens 3 Knoten an, in welchem es durch die jeweilige Operation zu keiner Änderung der Anzahl der SZHK kommt.

- c) Kann die Anzahl der SZHK von G **kleiner** werden,
- i) wenn eine Kante $(u, v) \notin E$ hinzugefügt wird?
 - ii) wenn eine Kante $(u, v) \in E$ entfernt wird?

Begründen Sie jeweils, warum dies nicht der Fall sein kann, oder geben Sie einen Graphen mit mindestens 3 Knoten an, in welchem es nach der jeweiligen Operation zu einer größtmöglichen (in Bezug auf die Anzahl der Knoten in G) Reduktion von SZHK kommt.

Hinweis: Jede Teilaufgabe ist 1 Punkt wert.

Aufgabe 4 – Kurzaufgaben

Geben Sie Antworten auf die Fragen oder vervollständigen Sie die Sätze.

Hinweis: Bei Fragen zur Laufzeit oder Güte ist nur die scharfe/best-bekannte Schranke korrekt.

- a) Wie viele Sperrflussberechnungen benötigt der Algorithmus von Dinic zur Berechnung von maximalen Flüssen in einem Netzwerk $G = (V, E, c)$?

n

- b) Es sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Ein Matching M ist genau dann maximal, wenn es ...
keinen m verbessernden pfad gibt

- c) Im Algorithmus von Hopcroft und Karp wird in jeder Runde eine maximale Menge an M -verbessernden Pfaden hinzugefügt. Wie viele Runden führt der Algorithmus von Hopcroft und Karp auf einem bipartiten Graphen $G = (V, E)$ aus?

$$n^{1/2}$$

- d) Der Algorithmus von Stoer und Wagner zur Berechnung des minimalen Schnitts in einem ungerichteten, gewichteten Graphen $G = (V, E)$ mit $|E| = \Theta(|V|^2)$ hat eine Laufzeit von:

$$n^3$$

- e) Gegeben sei ein Maximierungsproblem und eine Instanz \mathcal{I} davon. Weiterhin sei ein Approximationsalgorithmus der Güte $5/3$ gegeben, der für \mathcal{I} eine Lösung mit Lösungswert 100 berechnet. Wie groß kann die optimale Lösung maximal sein?

$$L_{\text{opt}} / L = 5/3 \Rightarrow 5/3 * L = 500/3 = L$$

- f) Die Minimum-Spanning-Tree-Approximation (MST-Heuristik) für das metrische TSP hat eine Güte von:

$$2$$