technische universität dortmund

Thomas Schwentick

Gaetano Geck, Lutz Oettershagen,
Christopher Spinrath, Marco Wilhelm

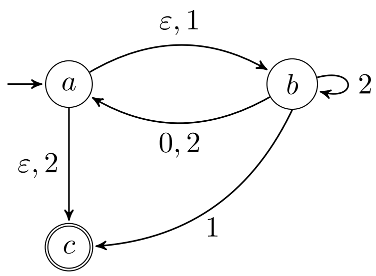
Lehrstuhl 1
Logik in der Informatik

SoSe 2018 **Übungsblatt 13** **10.07.2018**

Dieses Übungsblatt dient der Klausurvorbereitung, die Bearbeitung ist freiwillig.
Es wird nicht korrigiert und es wird keine Beispiellösung veröffentlicht.

Aufgabe 13.1 [Potenzmengenkonstruktion]

Konstruieren Sie den Potenzmengen-Automaten zu dem ε-NFA $\mathcal{A}$:



Der Automat $\mathcal{A}$ ist über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1, 2\}$ definiert. Beschränken Sie sich auf die vom Startzustand erreichbaren Zustände.

Aufgabe 13.2 [Nerode-Relation]

Geben Sie die Äquivalenzklassen der Nerode-Relation $\sim_L$ für die Sprache L der Strings über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$ an, die eine gerade Anzahl von a's und eine jeweils ungerade Anzahl von b's und c's enthalten. Konstruieren Sie dann den Äquivalenzklassenautomaten. Vergessen Sie nicht zu begründen, dass die von Ihnen angegebenen Klassen auch wirklich Äquivalenzklassen sind und alle Strings umfassen.

Aufgabe 13.3 [Formale Sprachen]

Geben Sie für jede der folgenden Sprachen an, ob sie regulär ist; oder kontextfrei und nicht regulär ist; oder nicht kontextfrei ist. Beweisen Sie Ihre Behauptung.

a) $L_a = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid |w| \leq 3\}$

b) $L_b = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid |w| > 3\}$

c) $L_c = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid 2\#_a(w) = \#_b(w)\} \cap \{w \in \{a, b, c\}^* \mid 2\#_b(w) = \#_c(w)\}$

d) $L_d = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid w = u_1 v_1 u_2 v_2, \quad u_1 = u_2^R, \quad v_1 = v_2^R, \quad |v_1| + |v_2| = 4\}$

e) $L_e = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid (\#_b(w) + \#_c(w)) \equiv_4 1\}$

Aufgabe 13.4 [Entscheidbarkeit]

Welche der folgenden Probleme sind

- entscheidbar
- nicht entscheidbar, aber semi-entscheidbar
- nicht semi-entscheidbar?

a)
Problem: NOT5
Gegeben: Turingmaschine M
Frage: Gibt es ein Wort x, so dass $f_M(x) \neq 5$ ist?

b)
Problem: IMAGE
Gegeben: Turingmaschine M, Wort w
Frage: Ist w im Bild von f_M? Also: Gibt es ein Wort x, so dass $f_M(x) = w$?

Aufgabe 13.5 [NP-Vollständigkeit]

Der kleine Tim sammelt Überraschungseierfiguren, möchte seine Sammlung vervollständigen und benötigt dafür noch ganz bestimmte Figuren. Ein Händler in der Nähe bietet kleine Päckchen an, von denen er jedes zum selben Preis erwerben können. In den Päckchen sind verschiedene Anzahlen von Figuren enthalten, auch von denen, die er noch benötigt. Da der kleine Tim nur sehr wenig Geld hat möchte er herausfinden, wieviele der Päckchen er kaufen muss, um seine Sammlung zu vervollständigen. Um ihm diese Aufgabe zu erleichtern, formalisieren wir das Problem zunächst. Sei S die Menge der Figuren, die dem kleinen Tim noch fehlen. Außerdem gibt es eine Menge $M = \{P_1, \ldots, P_m\}$ von Teilmengen von S (die Päckchen), die er auswählen kann. Das Problem (SETCOVERW) ist nun, herauszufinden, wieviele Päckchen $P_{i_1}, \ldots, P_{i_k}$ nötig sind, so dass gilt

$$\bigcup_{j \in \{i_1, \ldots, i_k\}} P_j = S$$

a) Formulieren Sie dieses Problem zu einem Entscheidungsproblem SETCOVER um und zeigen Sie, dass dieses Problem SETCOVER in **NP** liegt.

b) Beweisen Sie, dass SETCOVER **NP**-schwierig ist. Sie können dafür nutzen, dass das folgende Problem VERTEXCOVER NP-vollständig ist:

Problem: VERTEXCOVER
Gegeben: Ungerichteter Graph $G = (V, E)$, Zahl $k \in \mathbb{N}$
Frage: Gibt es eine Knotenmenge $C \subseteq V$ mit $|C| \leq k$, so dass für jede Kante $(u, v) \in E$ gilt $u \in C$ oder $v \in C$?