# Übungen zur Vorlesung Grundbegriffe der Theoretischen Informatik

technische universität dortmund

Beate Bollig

Gaetano Geck, Thomas Harweg
David Mezlaf, Christopher Spinrath

fakultät für informatik

SoSe 2017 | Übungsblatt 4 | 16.05.2017

**Abgabe bis spätestens am Dienstag, 23.05.2017, 10:00 Uhr**

- **in die Briefkästen im Durchgangsflur, der die 1. Etage der OH 12 mit dem Erdgeschoss der OH 14 verbindet.**

**Ansonsten gelten die Hinweise von Blatt 1.**

## Aufgabe 4.1 [Pumping-Lemma] — 5 Punkte

**Kurzaufgabe (1 Punkt)**

Gegeben sei die Sprache $L = \{bb^j a^i b^i \mid j, i \in \mathbb{N}_0\} \cup \{av \mid v \in \{a,b\}^*\}$, die nicht regulär ist. Begründen Sie, warum das Pumping-Lemma nicht geeignet ist, um zu zeigen, dass $L$ nicht regulär ist.

**Hauptaufgabe (4 Punkte)**

Zeigen Sie für die folgenden Sprachen entweder mit Hilfe des Pumping-Lemmas, dass die Sprache nicht regulär ist, oder durch Angabe eines Automaten oder regulären Ausdrucks, dass die Sprache regulär ist.

**a)** $L_1 = \{ucv \in \{a,b,c\}^* \mid u, v \in \{a,b\}^*, \#_a(u) \leqslant \#_b(v)\}$ **(3 Punkte)**

**b)** $L_2 = \{u\hat{u}c\hat{v}v \in \{a,b,c\}^* \mid u, v, \hat{u}, \hat{v} \in \{a,b\}^*, \#_a(u) \leqslant \#_b(v) \leqslant \max(\#_a(\hat{u}), \#_b(\hat{v}))\}$ **(1 Punkt)**

## Aufgabe 4.2 [Zeichenkettensuche] — 5 Punkte

**Kurzaufgabe (1 Punkt)**

Wir betrachten die Problemstellung MultiSearch aus dem Vorlesungskapitel 4. Erklären Sie die Annahme über die Menge $M = \{w_1, \dots, w_n\}$, derzufolge kein String $w_i$ Teilstring eines anderen Strings $w_j$ ist (Vorlesungskapitel 6.1.2). Wieso kann das Wort $w_j$ sonst weggelassen werden?

**Hauptaufgabe (4 Punkte)**

Ein Text sei gegeben als ein Wort über dem Alphabet $\{a, \dots, z\}$. Es soll überprüft werden, ob eine der Zeichenketten *ananas*, *banane* oder *nashi* im Text enthalten ist.

**a)** Geben Sie einen NFA an, der akzeptiert, wenn eines der gesuchten Wörter im Text enthalten ist. Bezeichnen Sie dabei die Zustände des Automaten wie im Vorlesungskapitel 6.1.2 („NFA zur Zeichenkettensuche: allgemein“) mit dem bisher gelesenen Präfix. **(2 Punkte)**

**b)** Leiten Sie anschließend einen äquivalenten DFA wie in der Vorlesung beschrieben her. Die Herleitung soll direkt (wie in Kapitel 6.1.2) erfolgen und *nicht* über die Potenzmengen-Konstruktion. Begründen Sie für mindestens eine zusätzlich eingefügte Transition die Korrektheit.

**Hinweis:** Der Übersicht halber müssen nicht alle Transitionen eingezeichnet werden. Nicht eingezeichnete Transitionen, die für das gleiche gelesene Zeichen in den gleichen Zustand führen, können unter Angabe einer geeigneten Transitionsfunktion $\delta(q, \sigma) = q_{pre}$, wobei $q_{pre}$ dem Präfix des entsprechenden (Ziel-)Zustands entspricht, zusammengefasst werden.

**(2 Punkte)**

**Aufgabe 4.3 [Korrektheit]** **5 Punkte**

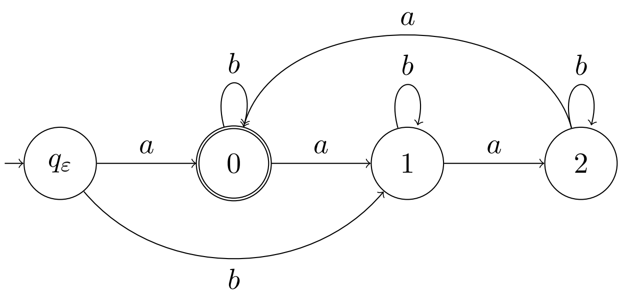
**Kurzaufgabe (1 Punkt)**

Es seien $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_1, F)$ und $\mathcal{A}' = (Q', \Sigma, \delta', q_1', F')$ zwei minimale DFAs mit Zustandsmengen $Q = \{q_1, q_2, q_3\}$ und $Q' = \{q_1', q_2', q_3'\}$ sowie den Mengen $F = \{q_1\}$ und $F' = \{q_1', q_3'\}$ akzeptierender Zustände. Kann $\mathcal{A}$ äquivalent zu $\mathcal{A}'$ sein?

**Hauptaufgabe (4 Punkte)**

Zeigen Sie analog zum Vorlesungskapitel 3.4, dass der nachfolgend angegebene DFA

$\mathcal{A}$ :




die Sprache $L = L_a \cup L_b$ entscheidet, also $L = L(\mathcal{A})$ gilt, für

$$\begin{aligned} L_a &= \{av \mid \#_a(v) \equiv_3 0\} \text{ und} \\ L_b &= \{bv \mid \#_a(v) \equiv_3 2\}. \end{aligned}$$

Sie dürfen für den Beweis die Identität $\delta^*(q, \sigma u) = \delta^*(\delta(q, \sigma), u)$ ausnutzen und ferner die folgende Hilfsaussage als bewiesen annehmen.

**Hilfsaussage:** Für alle Zustände $i \in \{0, 1, 2\}$ und alle Wörter $w \in \Sigma^*$ erfüllt die erweiterte Transitionsfunktion die Gleichung

$$\delta^*(i, w) \equiv_3 \big(i + \#_a(w)\big).$$

Beispielsweise gilt für $i = 1$ und das Wort $w = aababba$ die Aussage $\delta^*(1, w) \equiv_3 \big(1 + \#_a(w)\big)$, da $\delta^*(1, w) = 2$ und $\big(1 + \#_a(w)\big) = 5 \equiv_3 2$ gelten.

**Zusatzaufgabe [Jaffes Pumping-Lemma]** **5 Punkte**

In der Vorlesung wurde Jaffes Pumping-Lemma vorgestellt (Satz 5.7), das nicht nur eine notwendige, sondern auch eine hinreichende Bedingung für die Regularität einer Sprache liefert. Ziel dieser Aufgabe ist es die Korrektheit dieser Pumping-Lemma-Variante zu zeigen. Zur Erinnerung: Die Aussage von Jaffes Pumping-Lemma ist die folgende Äquivalenz:

$L$ ist regulär $\Leftrightarrow$ Es gibt ein $n$,
so dass es für alle $w \in \Sigma^*$ mit $|w| \geqslant n$
$x, y, z \in \Sigma^*$ gibt mit $xyz = w$ und den Eigenschaften:
i. $y \neq \varepsilon$, und
ii. $|xy| \leqslant n$,
iii. für alle $k \geqslant 0$ gilt: $xy^k z \sim_L xyz$.

**a)** Beweisen Sie, dass die rechte Seite der Äquivalenzaussage notwendig ist. D.h. zeigen Sie, dass jede reguläre Sprache $L$ die rechte Seite erfüllt. Sie können dabei analog zu dem Beweis des Pumping-Lemmas aus der Vorlesung vorgehen.

**Hinweis:** Statt einen beliebigen DFA für die Sprache $L$ zu wählen, betrachten Sie den Äquivalenzklassenautomaten $\mathcal{A}_L$.

**(2 Punkte)**

**b)** Zeigen Sie: Jede Sprache $L$, die die rechte Seite erfüllt, ist regulär.
Beweisen Sie dazu, dass es für jedes Wort $w \in \Sigma^*$ mit $|w| \geqslant n$ ein kürzeres dazu äquivalentes Wort gibt, also ein Wort $w' \in \Sigma^*$, so dass gilt: $|w'| < |w|$ und $w \sim_L w'$. Was bedeutet dies für die Nerode-Äquivalenzrelation $\sim_L$? **(3 Punkte)**

**Testfragen**

1. Wie effizient kann eine reguläre Sprache, die durch einen NFA gegeben ist, auf Leerheit getestet werden?
2. Warum folgt aus dem Pumping-Lemma **nicht**, dass reguläre Sprachen unendlich sind?
3. Kann man mit dem Pumping-Lemma zeigen, dass eine Sprache regulär ist?