Grundbegriffe der Theoretischen Informatik

Sommersemester 2018 - Thomas Schwentick

Teil B: Kontextfreie Sprachen

9: Kellerautomaten

Version von: 17. Mai 2018 (14:12)

Ein Beispiel: Klammerausdrücke

- Sei $L_{\langle 2\rangle}$ die Sprache der korrekt geklammerten „Tag-Ausdrücke“ mit zwei Tag-Paaren $\langle b\rangle\langle/b\rangle$ und $\langle a\rangle\langle/a\rangle$
  - Also über dem Alphabet $\Sigma = \{\langle a\rangle, \langle/a\rangle, \langle b\rangle\langle/b\rangle\}$

- $\langle a\rangle\langle a\rangle\langle b\rangle\langle/b\rangle\langle a\rangle\langle/a\rangle\langle/a\rangle\langle b\rangle\langle/b\rangle\langle/a\rangle$ ist korrekt
- $\langle a\rangle\langle a\rangle\langle b\rangle\langle/b\rangle\langle a\rangle\langle/b\rangle\langle/a\rangle\langle b\rangle\langle/b\rangle\langle/a\rangle$ ist nicht korrekt

- $L_{\langle 2\rangle}$ ist kontextfrei und wird von der folgenden Grammatik erzeugt:

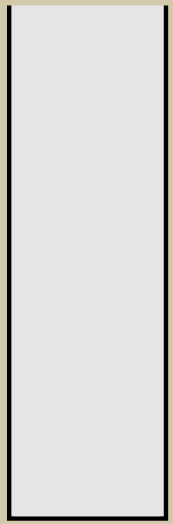
$$K \to KK \mid \langle b\rangle K\langle/b\rangle \mid \langle a\rangle K\langle/a\rangle \mid \epsilon$$

- Klar: $L_{\langle 2\rangle}$ ist nicht regulär:
  - die Strings $\langle a\rangle^n$, $n \geqslant 0$, sind paarweise nicht äquivalent bezüglich $\sim_{L_{\langle 2\rangle}}$

- Wie lässt sich algorithmisch testen, ob ein gegebener Klammerausdruck korrekt ist?
- Idee:
  - Versuche zusammengehörige Klammern zu finden
  - Geeignete Datenstruktur:
    - Keller („Last In First Out“)

Erkennen von Klammerausdrücken mit Hilfe eines Kellers

Beispiel



$\langle b\rangle\langle a\rangle\langle b\rangle\langle a\rangle\langle a\rangle\langle /a\rangle\langle b\rangle\langle /b\rangle\langle /a\rangle\ \langle /b\rangle\langle a\rangle$
$\langle /a\rangle\langle /a\rangle\langle b\rangle\langle /b\rangle\langle /b\rangle$

- $\langle a\rangle$ und $\langle b\rangle$ werden jeweils auf den Keller gelegt
- Wenn ein $\langle /a\rangle$ gelesen wird, muss ein $\langle a\rangle$ auf dem Keller sein
  ☞ und wird gelöscht
- Wenn ein $\langle /b\rangle$ gelesen wird, muss ein $\langle b\rangle$ auf dem Keller sein
  ☞ und wird gelöscht
- Am Schluss muss der Keller leer sein

Kellerautomaten: informell (1/2)

- Die Vorgehensweise dieses Algorithmus ähnelt einem endlichen Automaten:
  - Zeichenweises Lesen der Eingabe von links nach rechts
  - Am Ende Entscheidung, ob die Eingabe akzeptiert wird

- Allerdings verwendet der Algorithmus zusätzlich einen Keller
- Solche Algorithmen modellieren wir im Folgenden durch **Kellerautomaten**

- Wir werden sehen, dass Kellerautomaten genau die kontextfreien Sprachen entscheiden können

- Bevor wir die formale Defintion von Kellerautomaten geben, betrachten wir noch ein Beispiel

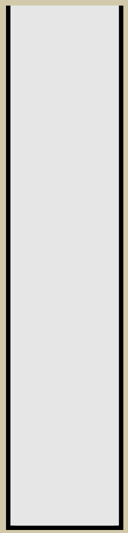
Zweites Beispiel

Beispiel

- $L = \{a^i b^j \mid i \geqslant j\}$

- Idee:
  - 1.Phase: Lege jedes a auf den Keller
  - 2.Phase: Lösche für jedes b ein a vom Keller
  - Falls auf diese Weise der String ganz gelesen wird, akzeptiere

☞ auch wenn noch etwas im Keller steht



aaabb wird akzeptiert

aaabbbb wird nicht akzeptiert

Kellerautomaten: informell (2/2)

- Die beiden betrachteten Beispiele waren nur sehr einfache Kellerautomaten

- Im Allgemeinen erlauben wir zusätzlich:
  - Zustände ☞ endlich viele
  - Nichtdeterminismus
  - ϵ-Übergänge
  - Zusätzliche Symbolmenge für Keller
  - Zusätzliches unterstes Kellersymbol
  - Schreiben mehrerer Kellersymbole in einem Schritt

- Das erste Beispiel hat illustriert, dass es hilfreich sein kann, wenn die Akzeptierbedingung besagt, dass der Keller am Ende der Berechnung leer sein soll
- Das zweite Beispiel hat illustriert, dass es hilfreich sein kann, wenn die Akzeptierbedingung vom Zustand abhängt ☞ Phase 2
- Wir erlauben in der Definition von Kellerautomaten beides

Inhalt

Eine kleine Komplikation

- Wenn der erste Beispiel„automat“ den String $\langle \boldsymbol{a}\rangle\langle \boldsymbol{b}\rangle\langle /\boldsymbol{b}\rangle\langle /\boldsymbol{a}\rangle\langle \boldsymbol{a}\rangle\langle \boldsymbol{b}\rangle\langle \boldsymbol{a}\rangle\langle /\boldsymbol{a}\rangle\langle /\boldsymbol{b}\rangle\langle \boldsymbol{b}\rangle\langle /\boldsymbol{b}\rangle\langle /\boldsymbol{a}\rangle$ liest, ist der Keller nach dem Lesen des vierten Zeichens leer ☞ Vor Lesen des ersten Zeichens auch...
- Die Transitionen von Kellerautomaten sollen aber immer vom obersten Symbol des Kellers abhängen (und möglicherweise dem nächsten Eingabezeichen)
- Dass der Keller vor dem Ende der Berechnung leer wird, soll also vermieden werden

- Deshalb definieren wir für jeden Kellerautomaten ein *unterstes Kellersymbol*, das zu Beginn der Berechnung schon auf dem Keller liegt

Kellerautomaten: Definition

Definition (Kellerautomat, PDA)

- Ein **Kellerautomat** (**PDA**) $\mathcal{A}$ besteht aus
  - einer Zustandsmenge Q,
  - einem Eingabealphabet Σ,
  - einem **Kelleralphabet** Γ (nicht notwendigerweise disjunkt zu Σ),
  - einer endlichen **Transitionsrelation** $\delta \subseteq \big(Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \times \Gamma\big) \times \big(Q \times \Gamma^*\big)$,
  - einem Startzustand s,
  - einem **untersten Kellersymbol** $\tau_0 \in \Gamma$, und
  - einer Menge F akzeptierender Zustände

- Also: $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, \tau_0, F)$

✎ Englische Bezeichnung: *pushdown automaton*

- Deshalb Abkürzung: PDA

- Warum ist δ so kompliziert?

- Das Verhalten des Automaten im nächsten Schritt darf abhängen von:
  - dem aktuellen Zustand p
  - dem nächsten Eingabesymbol σ
  - dem obersten Kellersymbol τ

- **In einem Schritt:**
  - kann sich der Zustand ändern ☞ q
  - kann ein Eingabesymbol gelesen werden ☞ muss aber nicht: ϵ
  - kann sich der Kellerinhalt verändern:
    - ∗ τ kann durch (möglicherweise) mehrere Symbole ersetzt werden ☞ String z

- Transitionen sind deshalb von der Form
  - (p, σ, τ, q, z) mit $\sigma \in \Sigma$ oder
  - $(p, \epsilon, \tau, q, z)$

PDA für $L_{\langle 2\rangle}$: formal

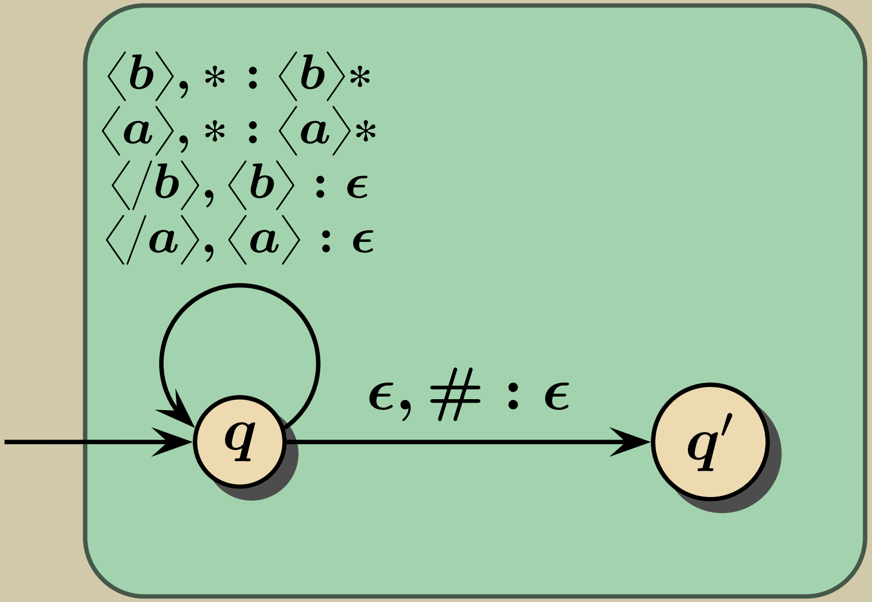
Beispiel

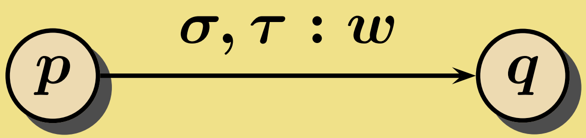
- Ein PDA $\mathcal{A}_{\langle 2\rangle}$ für die Sprache $L_{\langle 2\rangle}$, der dem vorgestellten Algorithmus entspricht, lässt sich wie folgt definieren:
  $(\{q, q'\}, \{\langle b\rangle, \langle a\rangle, \langle /a\rangle, \langle /b\rangle\},$
  $\{\langle b\rangle, \langle a\rangle, \#\}, \delta, q, \#, \varnothing)$,
  wobei δ die folgenden Transitionen enthält:
  - $(q, \langle a\rangle, \tau, q, \langle a\rangle\tau)$, für alle $\tau \in \Gamma$
  - $(q, \langle b\rangle, \tau, q, \langle b\rangle\tau)$, für alle $\tau \in \Gamma$
  - $(q, \langle /a\rangle, \langle a\rangle, q, \epsilon)$
  - $(q, \langle /b\rangle, \langle b\rangle, q, \epsilon)$
  - $(q, \epsilon, \#, q', \epsilon)$

- Dabei ist $\#$ das unterste Kellersymbol, das zu Beginn der Berechnung schon im Keller liegt und am Ende der Berechnung „anzeigt“, ob alle Klammern wieder vom Keller gelöscht wurden

Beispiel

- $\mathcal{A}_{\langle 2\rangle}$ als Diagramm:



- 

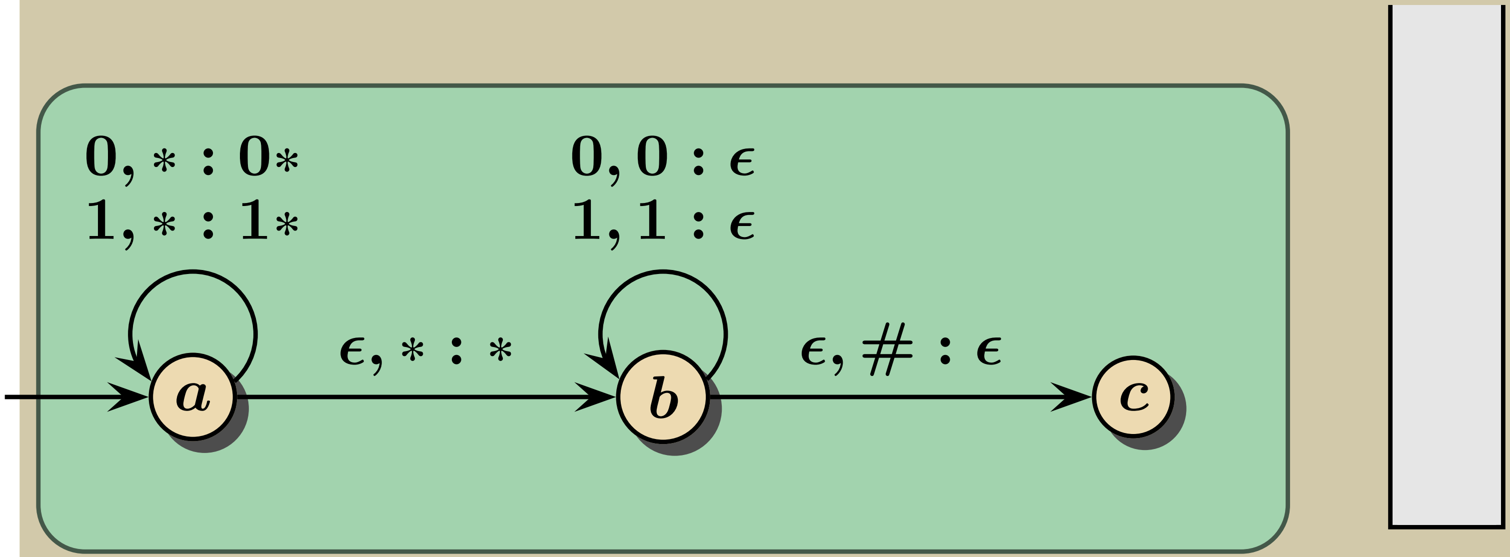
  steht für $(p, \sigma, \tau, q, w) \in \delta$

- Die abkürzende Schreibweise $\langle b\rangle, * : \langle b\rangle *$ bedeutet, dass alle Übergänge der Art $\langle b\rangle, \tau : \langle b\rangle\tau$, mit $\tau \in \Gamma$ möglich sind

Noch ein PDA

Beispiel

- Kellerautomat $\mathcal{A}_{\text{rev}}$ für $L_{\text{rev}} \stackrel{\text{def}}{=} \{ww^R \mid w \in \{0,1\}^*\}$
- **Konstruktionsidee:**
  - „Rate“ die Stelle, an der w zu Ende ist
  - Kopiere bis zu dieser Stelle alles auf den Keller
  - Nach dieser Stelle vergleiche immer das nächste Eingabesymbol mit dem obersten Kellersymbol (und lösche dieses)



01011010

Kellerautomaten: Konfigurationen

- Das zukünftige Verhalten eines endlichen Automaten hängt jeweils ab von:
  - dem aktuellen Zustand,
  - den noch zu lesenden Eingabezeichen

- Das zukünftige Verhalten eines Kellerautomaten hängt jeweils ab von:
  - dem aktuellen Zustand,
  - den noch zu lesenden Eingabezeichen,
  - **dem Kellerinhalt**

➞ der Kellerinhalt muss für die Definition der Semantik von Kellerautomaten berücksichtigt werden

- Läufe (Berechnungen) bestehen bei PDAs also nicht nur aus Folgen von Zuständen und gelesenen Zeichen
- Stattdessen werden wir Folgen von **Konfigurationen** betrachten, die jeweils die aktuelle „Situation" beschreiben

Definition (Konfiguration eines PDA)

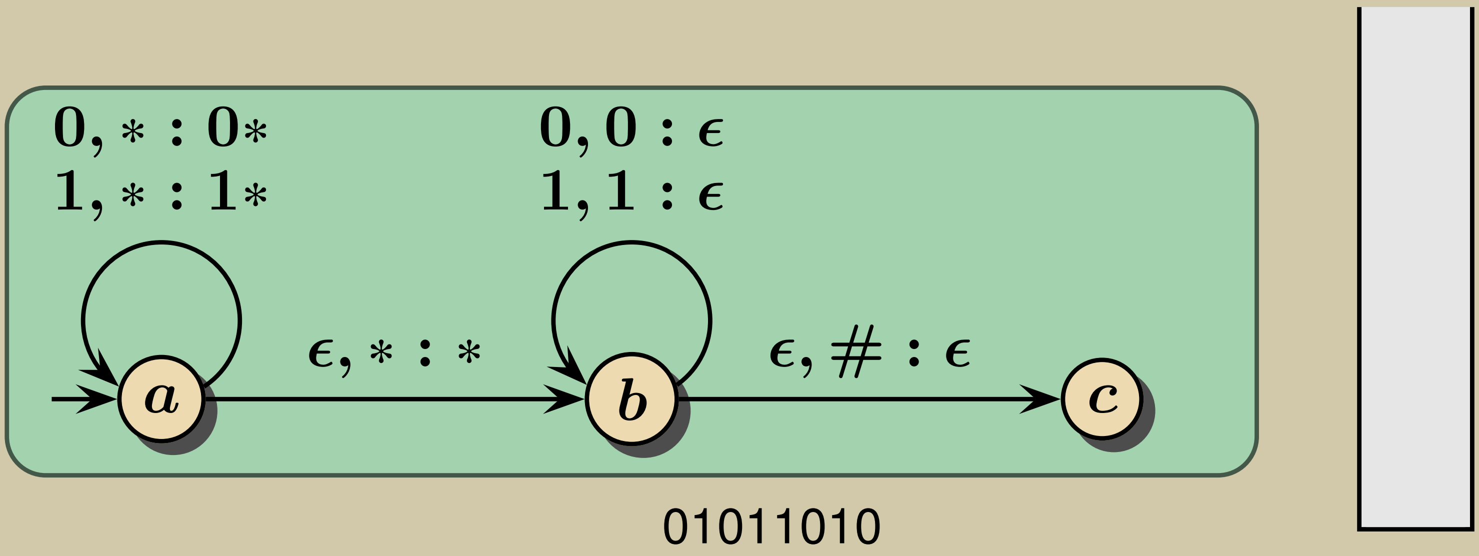
- Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, \tau_0, F)$ ein Kellerautomat
- Eine **Konfiguration** (q, u, v) von $\mathcal{A}$ besteht aus:
  - einem Zustand $q \in Q$
  - der noch zu lesenden Eingabe $u \in \Sigma^*$
  - dem Kellerinhalt $v \in \Gamma^*$

  ✎ Das erste Zeichen von v ist das *oberste* Kellerzeichen!

- **Startkonfiguration** bei Eingabe w: (s, w, τ_0)

Konfigurationen: Beispiel

Beispiel



$$
\begin{aligned}
(a, 01011010, \#) &\vdash (a, 1011010, 0\#) \\
&\vdash (a, 011010, 10\#) \\
&\vdash (a, 11010, 010\#) \\
&\vdash (a, 1010, 1010\#) \\
&\vdash (b, 1010, 1010\#) \\
&\vdash (b, 010, 010\#) \\
&\vdash (b, 10, 10\#) \\
&\vdash (b, 0, 0\#) \\
&\vdash (b, \epsilon, \#) \\
&\vdash (c, \epsilon, \epsilon)
\end{aligned}
$$

Kellerautomaten: Konfigurationen und Berechnungen

Definition (Nachfolgekonfiguration)

- Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, \tau_0, F)$ ein PDA
- Die Nachfolgekonfigurationsrelation $\vdash_{\mathcal{A}}$ ist wie folgt definiert
- Für alle $p, q \in Q$, $\sigma \in \Sigma$,$\tau \in \Gamma$, $u \in \Sigma^*$, $z, v \in \Gamma^*$ gilt:
- $(p, \sigma u, \tau v) \vdash_{\mathcal{A}} (q, u, zv)$, falls $(p, \sigma, \tau, q, z) \in \delta$
- $(p, u, \tau v) \vdash_{\mathcal{A}} (q, u, zv)$, falls $(p, \epsilon, \tau, q, z) \in \delta$
- Wenn $K \vdash_{\mathcal{A}} K'$ gilt heißt K' (eine) **Nachfolgekonfiguration** von K

✎ Wenn der Automat $\mathcal{A}$ durch den Kontext klar ist, lassen wir das Subskript $\mathcal{A}$ meist weg

Definition (Berechnung eines PDA)

- Eine **Berechnung** (oder: ein Lauf) eines PDA $\mathcal{A}$ ist eine Folge $K_1, \ldots, K_n$ von Konfigurationen mit
  - $K_i \vdash K_{i+1}$, für alle $i \in \{1, \ldots, n-1\}$
- Schreibweise: $K_1 \vdash_{\mathcal{A}}^* K_n$

✎ Zu beachten:
- Wenn die Eingabe schon vollständig gelesen wurde, ist es immer noch möglich, ϵ-Übergänge auszuführen,
  - ∗ aber: bei leerem Keller gibt es keine Nachfolgekonfiguration!

Kellerautomaten: Akzeptieren

- Wann akzeptiert $\mathcal{A}$ die Eingabe?

- Bei den bisherigen Beispielen galten am Ende der Berechnung die beiden folgenden Aussagen:
  - der Keller ist leer
  - der Automat ist in einem „speziellen“ Zustand

- Wir definieren zwei Varianten von PDAs, deren Akzeptieren jeweils auf **einer** dieser beiden Bedingungen basiert
- Denn: mal ist das eine praktischer, mal das andere

- Dann werden wir sehen:
  - Beide Modelle sind äquivalent

Definition (Sprache eines PDA)

- Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, \tau_0, F)$ ein Kellerautomat

- $\mathcal{A}$ akzeptiert einen String $w \in \Sigma^*$, falls

  - $F = \varnothing$ und
    $(s, w, \tau_0) \vdash^* (q, \epsilon, \epsilon)$ für ein $q \in Q$

    ☞ „Akzeptieren mit leerem Keller“

  oder

  - $F \neq \varnothing$ und
    $(s, w, \tau_0) \vdash^* (q, \epsilon, u)$ für ein $u \in \Gamma^*$
    und $q \in F$

    ☞ „Akzeptieren mit akzeptierenden Zuständen“

- $L(\mathcal{A}) \stackrel{\text{def}}{=} \{w \mid \mathcal{A} \text{ akzeptiert } w\}$

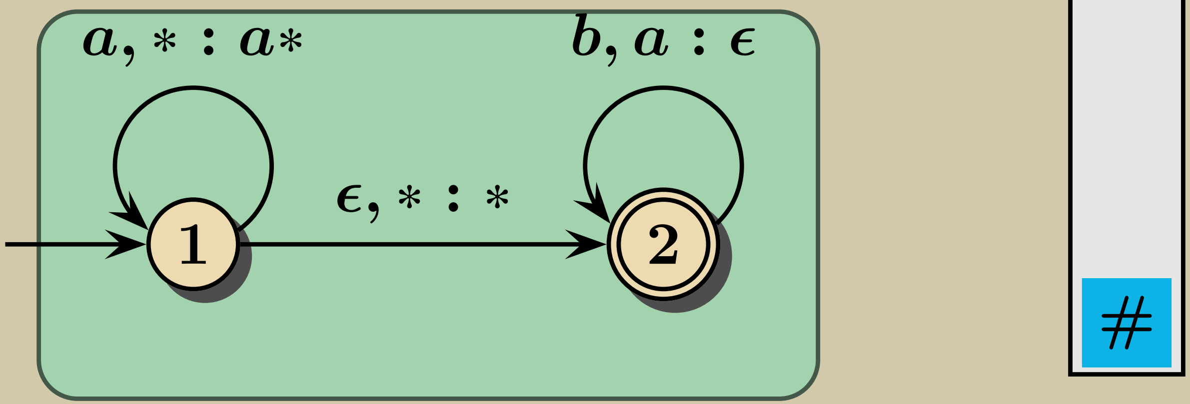
- Wir sagen, dass $\mathcal{A}$ die Sprache $L(\mathcal{A})$ entscheidet

Akzeptierende Zustände: Beispielautomat

Beispiel

- $L = \{a^i b^j \mid i \geqslant j\}$

- Idee:
  - 1.Phase: Lege jedes a auf den Keller ☞ Zustand 1
  - 2.Phase: Lösche für jedes b ein a vom Keller ☞ Zustand 2
  - Falls auf diese Weise der String ganz gelesen wird, akzeptiere
    ☞ auch wenn noch etwas im Keller steht



aaabb wird akzeptiert
aaabbbb wird nicht akzeptiert

Inhalt

Leerer Keller vs. akzeptierende Zustände

- Dass PDAs mit leerem Keller oder mit akzeptierenden Zuständen definiert werden können, gibt uns bei der Konstruktion von PDAs eine gewisse Freiheit
- Der folgende Satz besagt aber, dass PDAs mit leerem Keller und PDAs mit akzeptierenden Zuständen genau dieselben Sprachen entscheiden können

Satz 9.1

(a) Für jeden Kellerautomaten $\mathcal{A}$, der mit leerem Keller akzeptiert, gibt es es einen Kellerautomaten $\mathcal{B}$, der mit akzeptierenden Zuständen akzeptiert und $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{B})$ erfüllt

(b) Für jeden Kellerautomaten $\mathcal{A}$, der mit akzeptierenden Zuständen akzeptiert, gibt es es einen Kellerautomaten $\mathcal{B}$, der mit leerem Keller akzeptiert und $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{B})$ erfüllt

- Beide Beweise verwenden die Methode der **Simulation**:
  - Der Automat $\mathcal{B}$ ahmt jeweils das Verhalten von $\mathcal{A}$ nach
  - Kurz: „$\mathcal{B}$ simuliert $\mathcal{A}$“

Leerer Keller $\longrightarrow$ akzeptierende Zustände: Idee

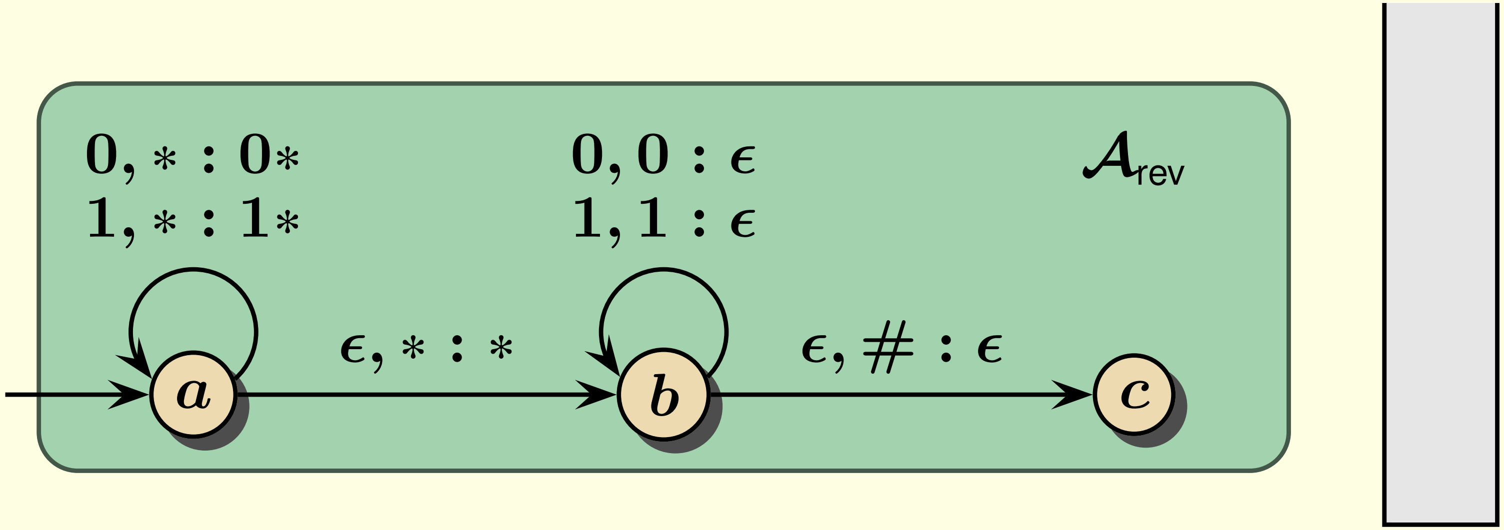
Beweisidee zu Satz 9.1 (a)

- „Leerer Keller $\longrightarrow$ akzeptierende Zustände“

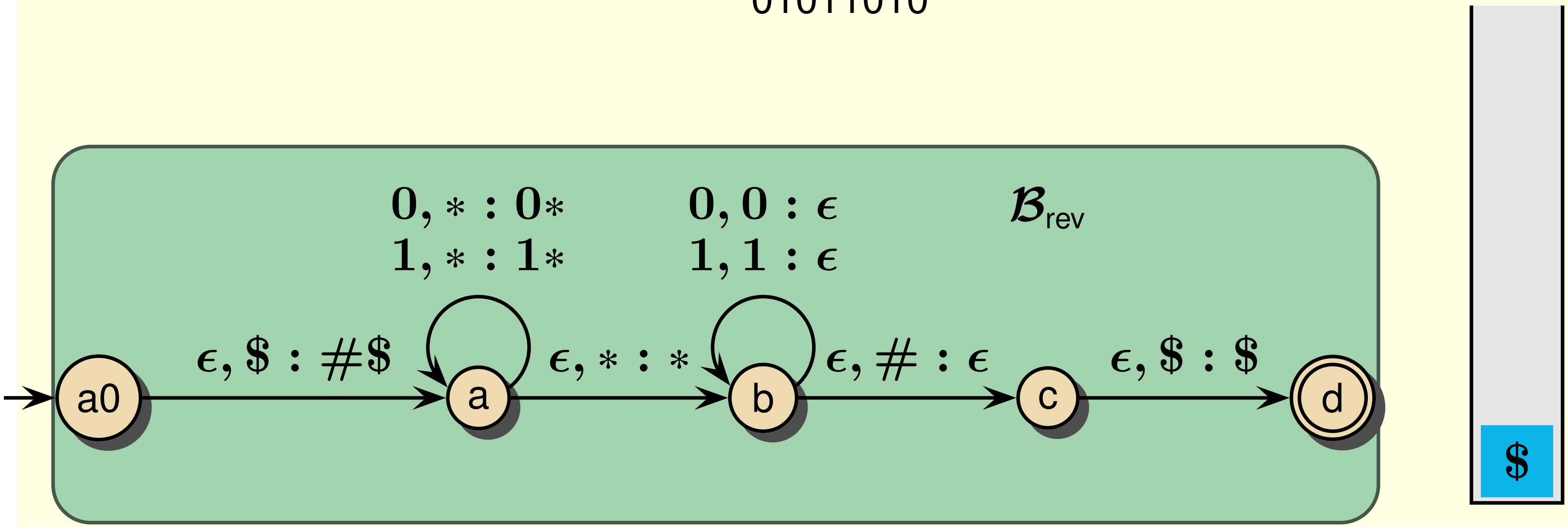
- **Herausforderung:** wenn in $\mathcal{A}$ der Keller leer wird, ist keine weitere Transition in einen akzeptierenden Zustand möglich

- **Idee:**
  - $\mathcal{B}$ simuliert $\mathcal{A}$
  - $\mathcal{B}$ verwendet gegenüber $\mathcal{A}$ ein neues unterstes Kellersymbol $\$$, das zu Beginn der Simulation unter das unterste Kellersymbol τ_0 von $\mathcal{A}$ gelegt wird
  - Wenn bei der Simulation in $\mathcal{B}$ das Zeichen $\$$ „sichtbar“ wird, wäre in $\mathcal{A}$ der Keller leer
  - Falls bei der Simulation von $\mathcal{A}$ das Symbol $\$$ auf dem Keller zum Vorschein kommt, kann $\mathcal{B}$ deshalb in den akzeptierenden Zustand übergehen

Leerer Keller → akzeptierende Zustände: Beispiel



01011010



Akzeptierende Zustände → Leerer Keller: Idee

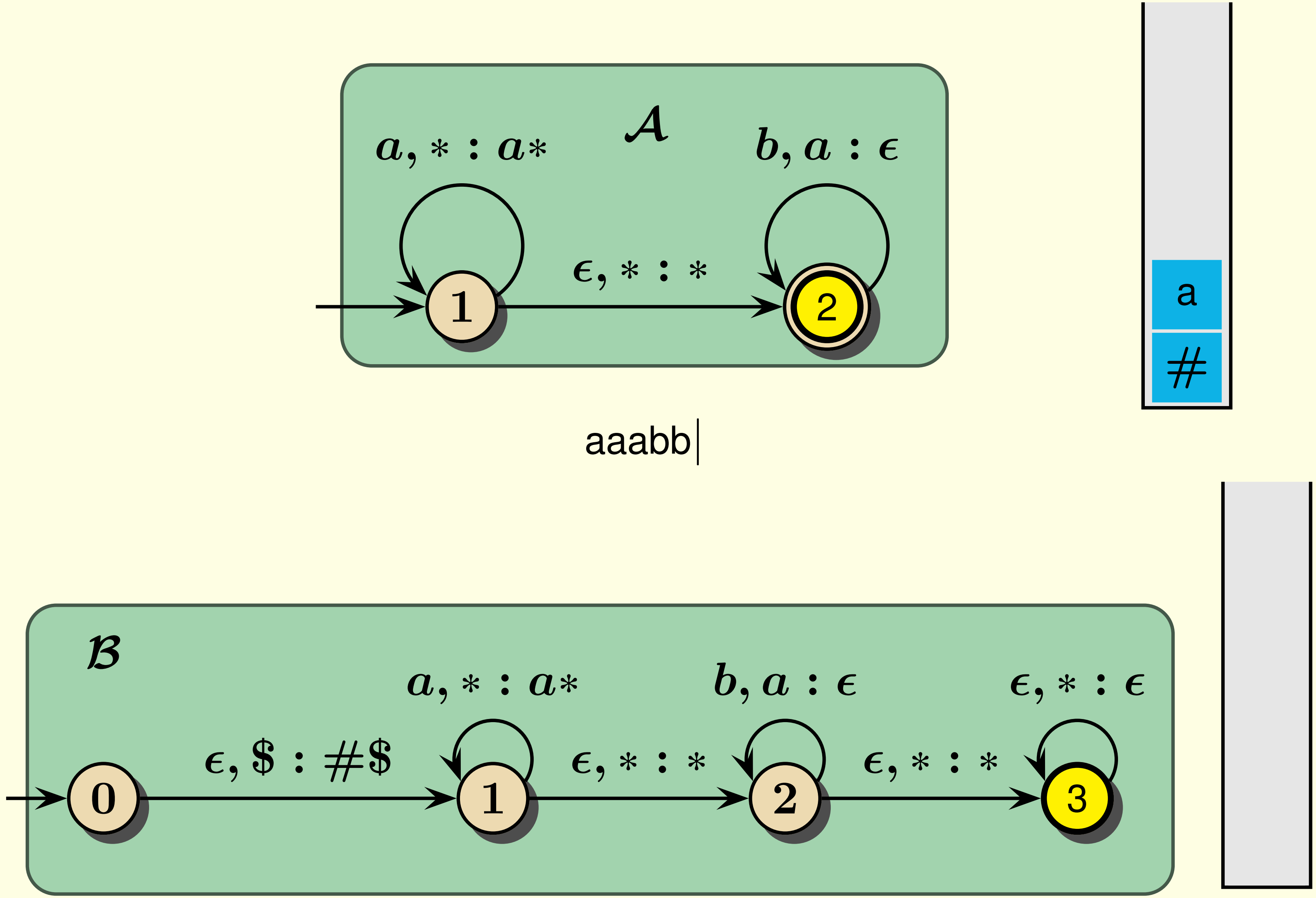
Beweisidee zu Satz 9.1 (b)

- „Akzeptierende Zustände → leerer Keller“

- **Herausforderungen:**
  - Wenn $\mathcal{A}$ am Ende einen akzeptierenden Zustanderreicht, muss $\mathcal{B}$ den Keller noch leeren
  - Wenn es eine Berechnung von $\mathcal{A}$ gibt, die am Ende einen leeren Keller hat, aber keinen akzeptierenden Zustand, so soll diese Berechnung in $\mathcal{B}$ *nicht* den Keller leeren

- **Idee:**
  - $\mathcal{B}$ simuliert $\mathcal{A}$
  - Von jedem Zustand in F aus kann $\mathcal{B}$ in den „Aufräumzustand“ q_a übergehen und dann den Keller mit Hilfe von ϵ-Übergängen leeren
  - Wenn die Eingabe vollständig gelesen war, führt das zum Akzeptieren mit leerem Keller
  - Damit Berechnungen von $\mathcal{A}$, die den Keller lehren ohne in einen akzeptierenden Zustand überzugehen, nicht fälschlich zum Akzeptieren von $\mathcal{B}$ führen, verwendet $\mathcal{B}$ wieder ein neues unterstes Kellersymbol $\$$

Akzeptierende Zustände → Leerer Keller: Beispiel



Inhalt

Äquivalenz von Grammatiken und Kellerautomaten

- Ziel: Nachweis, dass Kellerautomaten genau die kontextfreien Sprachen entscheiden

Satz 9.2

- Zu jeder kontextfreien Grammatik G gibt es einen Kellerautomaten $\mathcal{A}$ mit $L(\mathcal{A}) = L(G)$

- Der Beweis von Satz 9.2 ist nicht sehr schwierig und folgt einer einfachen Idee:
  - Der Kellerautomat versucht eine Linksableitung zu finden

Satz 9.3

- Zu jedem Kellerautomaten $\mathcal{A}$ gibt es eine kontextfreie Grammatik G mit $L(G) = L(\mathcal{A})$

- Der Beweis von Satz 9.3 ist deutlich komplizierter

Grammatik $\to$ Kellerautomat: Idee

Satz 9.2

- Zu jeder kontextfreien Grammatik G gibt es einen Kellerautomaten $\mathcal{A}$ mit $L(\mathcal{A}) = L(G)$

Beweisidee

- Sei $G = (V, \Sigma, S, P)$
- **Idee:**
  - Der Kellerautomat $\mathcal{A}$ erzeugt bei Eingabe w eine Linksableitung für ein Wort v und testet, dass $w = v$ gilt
  - Erzeugen und Testen sind dabei ineinander verschränkt:
    - ∗ Wenn die aktuelle Satzform mit einem Terminalsymbol anfängt, wird dieses gleich mit w verglichen

Beweisidee (Forts.)

- Ein einzelner Schritt einer Linksableitung
  - ersetzt in einer Satzform der Art $uX\alpha$
  - die Variable X durch einen String β
  - gemäß einer Regel $X \to \beta$

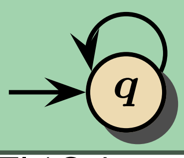
  ✎ mit $u \in \Sigma^*$, $X \in V$, $\alpha \in (\Sigma \cup V)^*$

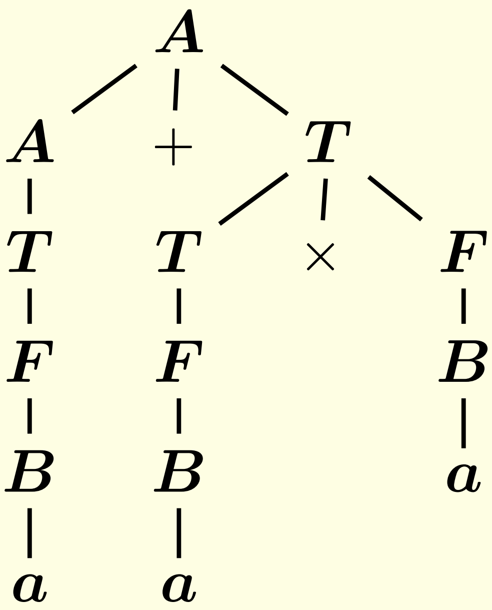
- In $\mathcal{A}$ soll dies der folgenden Situation entsprechen:
  - u ist schon gelesen, $X\alpha$ ist der Kellerinhalt
  - Zur Umsetzung des Ableitungsschrittes geht $\mathcal{A}$ wie folgt vor:
    1. „Rate“ Regel $X \to \beta \in P$
    2. Ersetze auf dem Keller X durch β
    3. Vergleiche die führenden Terminalsymbole von $\beta\alpha$ mit den nächsten Zeichen der Eingabe und reduziere sie ☞ d.h., lösche sie vom Keller

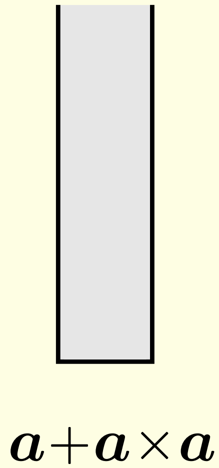
Grammatik → Kellerautomat: Beispiel

$A \rightarrow A + T \mid T$
$T \rightarrow T \times F \mid F$
$F \rightarrow (A) \mid B$
$B \rightarrow a \mid b \mid Ba \mid$
$\quad Bb \mid B0 \mid B1$

$a, a : \epsilon$
$b, b : \epsilon$
$0, 0 : \epsilon$
$1, 1 : \epsilon$
$\times, \times : \epsilon$
$+, + : \epsilon$
$(, (: \epsilon$
$),) : \epsilon$
$\epsilon, A : A + T$
$\epsilon, A : T$
$\epsilon, T : T \times F$
$\epsilon, T : F$
$\epsilon, F : (A)$
$\epsilon, F : B$
$\epsilon, B : a$
$\epsilon, B : b$
$\epsilon, B : Ba$
$\epsilon, B : Bb$
$\epsilon, B : B0$
$\epsilon, B : B1$







$(q, a{+}a{\times}a, A)$
$\vdash (q, a{+}a{\times}a, A{+}T)$
$\vdash (q, a{+}a{\times}a, T{+}T)$
$\vdash (q, a{+}a{\times}a, F{+}T)$
$\vdash (q, a{+}a{\times}a, B{+}T)$
$\vdash (q, a{+}a{\times}a, a{+}T)$
$\vdash (q, {+}a{\times}a, {+}T)$
$\vdash (q, a{\times}a, T)$
$\vdash (q, a{\times}a, T{\times}F)$
$\vdash (q, a{\times}a, F{\times}F)$
$\vdash (q, a{\times}a, B{\times}F)$
$\vdash (q, a{\times}a, a{\times}F)$
$\vdash (q, {\times}a, {\times}F)$
$\vdash (q, a, F)$
$\vdash (q, a, B)$
$\vdash (q, a, a)$
$\vdash (q, \epsilon, \epsilon)$

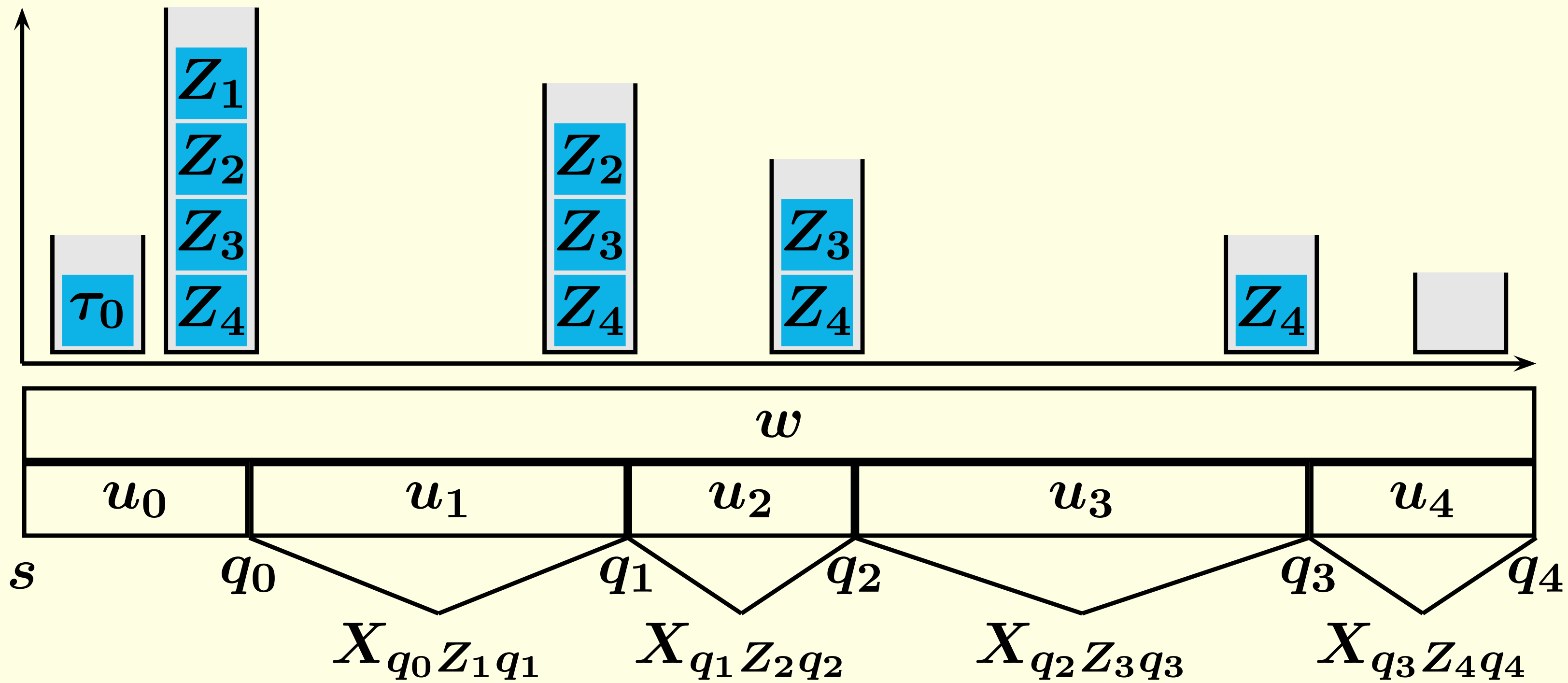
Grammatik $\longrightarrow$ Kellerautomat: Konstruktion

Beweis von Satz 9.2

- Sei $G = (V, \Sigma, S, P)$
- $\mathcal{A} \stackrel{\text{def}}{=} (\{q\}, \Sigma, V \cup \Sigma, \delta, q, S, \varnothing)$,
  - $\delta \stackrel{\text{def}}{=} \{(q, \sigma, \sigma, q, \epsilon) \mid \sigma \in \Sigma\} \cup \{(q, \epsilon, X, q, \alpha) \mid X \to \alpha \in P\}$

- Eine detaillierte Beweisskizze findet sich im Anhang

Kellerautomat → Grammatik: Idee

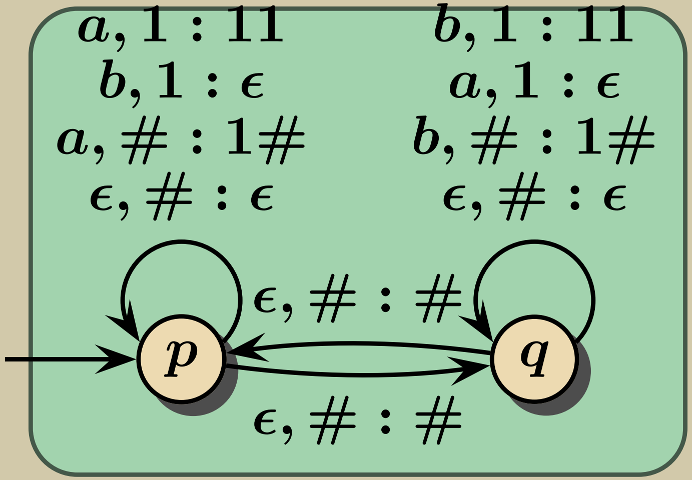


- Im ersten Schritt ersetzt $\mathcal{A}$ das unterste Kellersymbol durch einen String $Z_1 \cdots Z_k$ und liest ein Präfix u_0 der Eingabe w ☞ $u_0 \in \Sigma \cup \{\epsilon\}$
- Die Zeichen $Z_1, \ldots, Z_k$ werden dann im Rest der Berechnung nach und nach wieder vom Keller gelöscht
- Dabei werden Teilstrings $u_1, \ldots, u_k$ der Eingabe gelesen
- Idee für die Grammatik:
  - Für jede Kombination $p, p' \in Q$, $\tau \in \Gamma$ enthält G eine Variable $X_{p,\tau,p'}$, die alle Strings erzeugt, für die $\mathcal{A}$ eine Teilberechnung von Zustand p in Zustand p' hat, die insgesamt das Zeichen τ vom Keller löscht

Kellerautomat $\longrightarrow$ Grammatik: Beispiel (1/3)

Beispiel

- Kellerautomat für $L_{a=b} = \{w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$:



  - Zustand p:
    - ∗ Mindestens so viele a wie b gelesen
    - ∗ Anzahl der Einsen auf dem Keller entspricht Überschuss an a's
  - Zustand q: analog, aber mindestens so viele b wie a gelesen

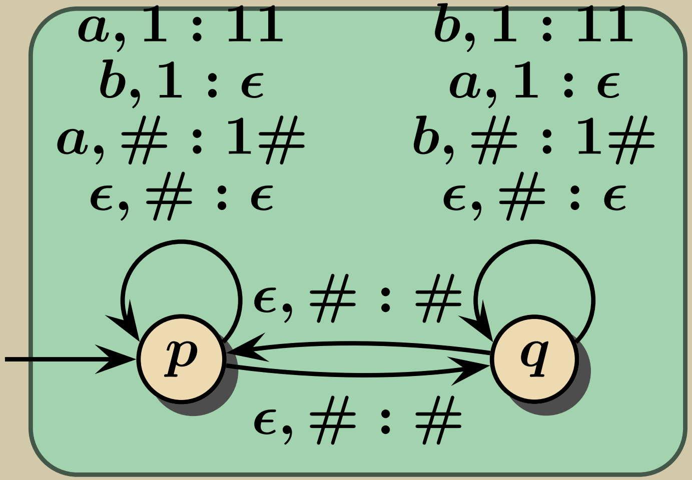
- Der PDA akzeptiert einen String w, wenn er bei Lesen von w insgesamt das Kellersymbol $\#$ löscht und dabei von p nach p oder q übergeht
- Das entspricht den „Start-Regeln“: $S \rightarrow X_{p\#p} \mid X_{p\#q}$

- Die Regeln für $X_{p\#p}$ ergeben sich aus den drei Transitionen, die für den PDA möglich sind, wenn $\#$ das oberste Kellersymbol ist
  (1) Er kann ein a lesen, eine 1 auf den Keller legen und im Zustand p bleiben
    - ∗ Um aus der entstehenden Situation den Keller zu leeren, muss zuerst 1 und dann $\#$ vom Keller gelöscht werden
    - ∗ Die Teilberechnung, die die 1 löscht, kann in p oder in q enden
    - ∗ Die entsprechenden Regeln sind: $X_{p\#p} \rightarrow aX_{p1p}X_{p\#p} \mid aX_{p1q}X_{q\#p}$

Kellerautomat $\longrightarrow$ Grammatik: Beispiel (2/3)

Beispiel

- Kellerautomat für $L_{a=b} = \{w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$:



  - Zustand p:
    - Mindestens so viele a wie b gelesen
    - Anzahl der Einsen auf dem Keller entspricht Überschuss an a’s
  - Zustand q: analog, aber mindestens so viele b wie a gelesen

- Die Regeln für $X_{p\#p}$ ergeben sich aus den drei Transitionen, die für den PDA möglich sind, wenn $\#$ das oberste Kellersymbol ist

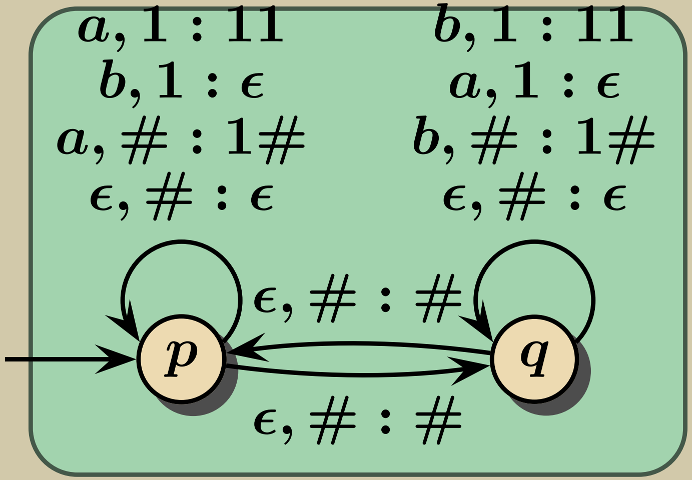
(2) Er kann ohne etwas zu lesen, eine 1 auf den Keller legen und $\#$ vom Keller löschen und im Zustand p bleiben
  - Die entsprechende Regel ist: $X_{p\#p} \rightarrow \epsilon$

(3) Er kann ohne etwas zu lesen und ohne den Keller zu verändern in Zustand q übergehen
  - Die entsprechende Regel ist: $X_{p\#p} \rightarrow X_{q\#p}$

Kellerautomat $\longrightarrow$ Grammatik: Beispiel (3/3)

Beispiel

- Kellerautomat für $L_{a=b} = \{w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$:



  - Zustand p:
    - Mindestens so viele a wie b gelesen
    - Anzahl der Einsen auf dem Keller entspricht Überschuss an a's
  - Zustand q: analog, aber mindestens so viele b wie a gelesen

- Die daraus entstehende Grammatik:

$$\begin{aligned}
S &\to X_{p\#p} \mid X_{p\#q}\\
X_{p\#p} &\to aX_{p1p}X_{p\#p} \mid aX_{p1q}X_{q\#p} \mid \epsilon \mid X_{q\#p}\\
X_{p\#q} &\to aX_{p1p}X_{p\#q} \mid aX_{p1q}X_{q\#q} \mid X_{q\#q}\\
X_{p1p} &\to aX_{p1p}X_{p1p} \mid aX_{p1q}X_{q1p} \mid b\\
X_{p1q} &\to aX_{p1p}X_{p1q} \mid aX_{p1q}X_{q1q}\\
X_{q\#q} &\to bX_{q1q}X_{q\#q} \mid bX_{q1p}X_{p\#q} \mid \epsilon \mid X_{p\#q}\\
X_{q\#p} &\to bX_{q1q}X_{q\#p} \mid bX_{q1p}X_{p\#p} \mid X_{p\#p}\\
X_{q1q} &\to bX_{q1q}X_{q1q} \mid bX_{q1p}X_{p1q} \mid a\\
X_{q1p} &\to bX_{q1q}X_{q1p} \mid bX_{q1p}X_{p1p}
\end{aligned}$$

Kellerautomat $\longrightarrow$ Grammatik: Beweis (1/2)

Satz 9.3

- Zu jedem Kellerautomaten $\mathcal{A}$ gibt es eine kontextfreie Grammatik G mit $L(G) = L(\mathcal{A})$

Beweisidee

- Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, \tau_0, \varnothing)$
  - (oBdA: $\mathcal{A}$ akzeptiert mit leerem Keller)
- Weitere Annahme (oBdA): $\mathcal{A}$ legt bei jeder Transition maximal zwei Zeichen auf den Keller

- Wir konstruieren eine Grammatik $G_{\mathcal{A}}$ mit Variablen $X_{p,\tau,p'}$, für alle $p, p' \in Q$ und $\tau \in \Gamma$ mit der folgenden Intention:
  - $X_{p,\tau,p'} \Rightarrow^* w$ soll gelten, falls $\mathcal{A}$ durch Lesen von w vom Zustand p in den Zustand p' kommen und dabei insgesamt τ vom Keller löschen kann
  - Formal soll also gelten:

$$X_{p,\tau,p'} \Rightarrow^* w \iff (p, w, \tau) \vdash^*_{\mathcal{A}} (p', \epsilon, \epsilon)$$

Kellerautomat ⟶ Grammatik: Beweis (2/2)

Beweis von Satz 9.3

- P enthält pro Tupel in δ eine oder mehrere Regeln, jeweils für alle möglichen Zustände p_1, p_2:

δ	P
$(p, \alpha, \tau, q, \epsilon)$	$X_{p,\tau,q} \to \alpha$
$(p, \alpha, \tau, q, \tau_1)$	$X_{p,\tau,p_1} \to \alpha X_{q,\tau_1,p_1}$
$(p, \alpha, \tau, q, \tau_1\tau_2)$	$X_{p,\tau,p_2} \to \alpha X_{q,\tau_1,p_1} X_{p_1,\tau_2,p_2}$

- Dabei ist $\alpha \in \Sigma \cup \{\epsilon\}$ ☞ also: Zeichen oder Leerstring

- Zusätzlich hat $G_{\mathcal{A}}$ das Startsymbol S und Regeln $S \to X_{s,\tau_0,q}$, für jedes $q \in Q$

- **Behauptung:**
$$X_{p,\tau,p'} \Rightarrow^* w \iff (p, w, \tau) \vdash^*_{\mathcal{A}} (p', \epsilon, \epsilon)$$
- „⟸“: Induktion nach der Anzahl der Berechnungsschritte
- „⟹“: Induktion nach der Anzahl der Ableitungsschritte
- Die Beweisdetails finden sich im Anhang

Kellerautomaten und Grammatiken: Fazit

Satz 9.4

- Für eine Sprache L sind äquivalent:
  - L ist kontextfrei
  - L wird von einem Kellerautomaten mit akzeptierenden Zuständen entschieden
  - L wird von einem Kellerautomaten mit leerem Keller entschieden

- Wie groß werden die bei der Umwandlung konstruierten Objekte?
  - Grammatik $\longrightarrow$ Kellerautomat: $\mathcal{O}(n)$
  - Kellerautomat $\longrightarrow$ Grammatik: $\mathcal{O}(n^4)$
  - Zwischen Kellerautomaten: $\mathcal{O}(n)$

- Aus Satz 9.3 und dem Beweis von Satz 9.2 folgt außerdem folgende Normalform für Kellerautomaten:

Folgerung

- Zu jedem Kellerautomaten gibt es einen äquivalenten Kellerautomaten mit nur einem Zustand

Inhalt

Intervall-Notation für Teilstrings

- Wir verwenden zukünftig die folgende Notation, um über Teilstrings und einzelne Zeichen von Strings zu sprechen

- Sei $w = \sigma_1 \cdots \sigma_n$ ein String (der Länge n)
- Dann sei, für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $i \leqslant j$:
  - $w[i] \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_i$
  - $w[i, j] \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_i \cdots \sigma_j$
  - $w[i, j) \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_i \cdots \sigma_{j-1}$
  - $w(i, j] \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_{i+1} \cdots \sigma_j$
  - $w(i, j) \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_{i+1} \cdots \sigma_{j-1}$ (nur für $i < j$)
  - $w[*, j] \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_1 \cdots \sigma_j$
  - $w[i, *] \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_i \cdots \sigma_n$
- Für $i > j$ sei $w[i, j] \stackrel{\text{def}}{=} \epsilon$

Beispiel

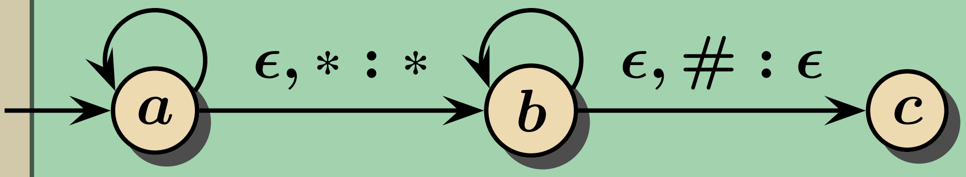
- Sei $w = acbbcabba$
- Dann ist
  - $w[3] = b$
  - $w[4, 6] = bca$
  - $w[4, 6) = bc$
  - $w(4, 6] = ca$
  - $w(4, 6) = c$
  - $w(4, 5) = \epsilon$
  - $w[*, 3] = acb$
  - $w[5, *] = cabba$

Kellerautomaten: Korrektheitsbeweise (1/2)

Beispiel

$0, * : 0*$ $\quad$ $0, 0 : \epsilon$

$1, * : 1*$ $\quad$ $1, 1 : \epsilon$



Proposition 9.5

$$L(\mathcal{A}_{\text{rev}}) = L_{\text{rev}}$$

- Zur Erinnerung:

$$L_{\text{rev}} = \{ww^R \mid w \in \{0,1\}^*\}$$

☞ Palindrome gerader Länge

Beweisskizze

- Wir beweisen:
  - $L_{\text{rev}} \subseteq L(\mathcal{A}_{\text{rev}})$ ☞ Vollständigkeit
  - $L(\mathcal{A}_{\text{rev}}) \subseteq L_{\text{rev}}$ ☞ Korrektheit

Beweisskizze für „$L_{\text{rev}} \subseteq L(\mathcal{A}_{\text{rev}})$"

- Wir zeigen, dass für beliebige $w \in \Sigma^*$ der String ww^R von $\mathcal{A}_{\text{rev}}$ akzeptiert wird
- Dazu lässt sich durch Induktion nach der Länge von u bzw. v für beliebige Strings $u, v, x \in \{0,1\}^*$ beweisen:

(a) $(a, ux, \#) \vdash^* (a, x, u^R\#)$ und

(b) $(b, v, v\#) \vdash^* (b, \epsilon, \#)$

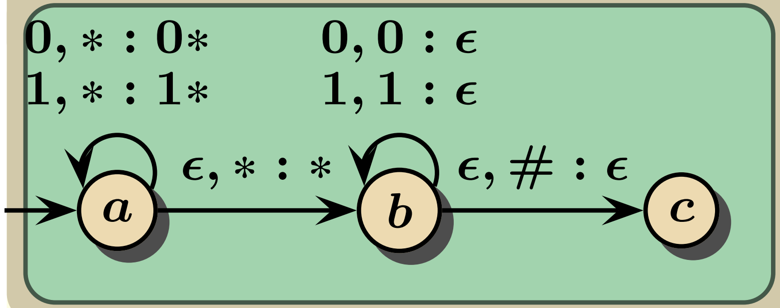
- Dann folgt:

$$\begin{aligned}(a, ww^R, \#) &\vdash^* (a, w^R, w^R\#)\\ &\vdash\ (b, w^R, w^R\#)\\ &\vdash^* (b, \epsilon, \#)\\ &\vdash\ (c, \epsilon, \epsilon)\end{aligned}$$

➡ $ww^R \in L(\mathcal{A}_{\text{rev}})$

Kellerautomaten: Korrektheitsbeweise (2/2)

Beispiel



Beweisskizze: „$L(\mathcal{A}_{\text{rev}}) \subseteq L_{\text{rev}}$"

- Klar: ein String v ist genau dann in L_{rev}, wenn
  - er gerade Länge $n = 2k$ hat und
  - für jedes $i \leqslant k$ gilt: $v[i] = v[n - i + 1]$

Beweisskizze (Forts.)

- Sei v ein von $\mathcal{A}_{\text{rev}}$ akzeptierter String mit n Zeichen

➨ $(a, v, \#) \vdash^* (b, \epsilon, \#) \vdash (c, \epsilon, \epsilon)$

- Nach Konstruktion von $\mathcal{A}$ verläuft diese Berechnung in drei Phasen
  1. $\mathcal{A}_{\text{rev}}$ liest ein Präfix $v[1, k]$ der Eingabe (für ein $k \leqslant n$) und schreibt es zeichenweise auf den Keller,
  2. dann geht $\mathcal{A}_{\text{rev}}$ in den Zustand b über
  3. schließlich liest $\mathcal{A}_{\text{rev}}$ die restliche Eingabe $v[k + 1, n]$ und vergleicht sie mit den zuvor auf den Keller geschriebenen Zeichen

- Durch Induktion lässt sich zeigen:
  - Die Konfiguration nach Phase 1 ist
    $$(a, v[k + 1, n], v[1, k]^R\#)$$
  - Damit Phase 3 erfolgreich ist, muss gelten:
    - $n - k = k \Rightarrow n = 2k$
    - für jedes $i \leqslant k$ ist $v[i] = v[n - i + 1]$

➨ $v \in L_{\text{rev}}$

Zusammenfassung

- Kellerautomaten entstehen durch Erweiterung von ϵ-NFAs um einen Keller (LIFO)
- Kellerautomaten, die durch leeren Keller akzeptieren, sind genauso mächtig wie Kellerautomaten, die mit akzeptierenden Zuständen akzeptieren
- Mit Kellerautomaten und kontextfreien Grammatiken lassen sich genau dieselben Sprachen beschreiben: die kontextfreien Sprachen
- Der Kellerautomat zu einer Grammatik versucht eine Linksableitung zu finden
- Die Konstruktion der Grammatik zu einem Kellerautomaten ist erheblich komplizierter

Inhalt

Leerer Keller vs. akzeptierende Zustände: Beweisideen (1/4)

- Der Beweis der Äquivalenz der beiden Akzeptiermethoden von PDAs verwendet mehrfach die folgende einfache Erkenntnis:
  - Eine Berechnung wird nur von den wirklich gelesenen Zeichen der Eingabe und des Kellers beeinflusst:
    (a) Deshalb können die Schritte einer Berechnung immer noch ausgeführt werden, wenn hinter der Eingabe und unter dem Keller etwas hinzugefügt wird
    (b) Andererseits können Zeichen der Eingabe, die während einer (partiellen) Berechnung (noch) nicht gelesen wurden und Zeichen des Kellers, die niemals sichtbar werden, entfernt werden, ohne die Berechnung zu beeinflussen

- Notation: $\underline{\boldsymbol{K} \vdash^*_{(\gamma)} \boldsymbol{K}'} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$

  es gibt eine Berechnung $\boldsymbol{K} \vdash \cdots \vdash \boldsymbol{K}'$, in der jede Konfiguration **vor** $\boldsymbol{K}'$ einen String $\boldsymbol{u}\gamma$ mit $\boldsymbol{u} \neq \epsilon$ im Keller stehen hat

  ✎ In $\boldsymbol{K}'$ kann γ „alleine“ im Keller stehen

Lemma 9.6

- Sei $\boldsymbol{\mathcal{A}} = (\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\Gamma}, \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{\tau_0}, \boldsymbol{F})$ ein Kellerautomat
- Seien
  - $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{\Sigma}^*$,
  - $\boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{\Gamma}^+$, $\boldsymbol{\beta}, \gamma \in \boldsymbol{\Gamma}^*$,
  - $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \boldsymbol{Q}$
- Dann sind äquivalent:
  (a) $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\alpha}) \vdash^* (\boldsymbol{q}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{\beta})$
  (b) $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}\boldsymbol{w}, \boldsymbol{\alpha}\gamma) \vdash^*_{(\gamma)} (\boldsymbol{q}, \boldsymbol{y}\boldsymbol{w}, \boldsymbol{\beta}\gamma)$

- Der Beweis kann leicht durch Induktion nach der Berechnungslänge geführt werden

Leerer Keller vs. akzeptierende Zustände: Beweisideen (2/4)

Beweisidee zu Satz 9.1 (a)

- „Leerer Keller $\longrightarrow$ akzeptierende Zustände“
- **Idee:**
  - $\mathcal{B}$ simuliert $\mathcal{A}$
  - $\mathcal{B}$ verwendet gegenüber $\mathcal{A}$ ein neues unterstes Kellersymbol $\$$, das zu Beginn der Simulation unter das unterste Kellersymbol τ_0 von $\mathcal{A}$ gelegt wird
  - Wenn bei der Simulation in $\mathcal{B}$ das Zeichen $\$$ „sichtbar“ wird, wäre in $\mathcal{A}$ der Keller leer
  - Falls bei der Simulation von $\mathcal{A}$ das Symbol $\$$ auf dem Keller zum Vorschein kommt, kann $\mathcal{B}$ deshalb in den akzeptierenden Zustand übergehen

Beweisansatz zu Satz 9.1 (a)

- Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, \tau_0, \varnothing)$
- Sei $\mathcal{B} \stackrel{\text{def}}{=} (Q \cup \{q_0, q_a\}, \Sigma, \Gamma \cup \{\$\}, \delta', q_0, \$, \{q_a\})$
- Dabei sind:
  - $q_0, q_a \notin Q$ neue Zustände, und
  - $\$ \notin \Gamma$ ein neues Kellersymbol
- δ' enthält:
  - alle Transitionen von δ
  - $(q_0, \epsilon, \$, s, \tau_0\$)$ ☞ Initialisierung
  - $(q, \epsilon, \$, q_a, \$)$, für alle $q \in Q$
    ☞ entspricht leerem Keller in $\mathcal{A}$

Leerer Keller vs. akzeptierende Zustände: Beweisideen (3/4)

Beweisdetails zu Satz 9.1 (a)

- Zur Erinnerung:
  - $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, \tau_0, \varnothing)$
  - $\mathcal{B} \overset{\text{def}}{=} (Q \cup \{q_0, q_a\}, \Sigma, \Gamma \cup \{\$\}, \delta', q_0, \$, \{q_a\})$
  - δ' enthält:
    * alle Transitionen von δ
    * $(q_0, \epsilon, \$, s, \tau_0\$)$
    * $(q, \epsilon, \$, q_a, \$)$, für alle $q \in Q$
- **Behauptung:** $L(\mathcal{B}) = L(\mathcal{A})$
- Ausnahmsweise zeigen wir nicht zwei Inklusionen sondern direkt, dass für alle Strings $w \in \Sigma^*$ gilt:
  $$w \in L(\mathcal{B}) \iff w \in L(\mathcal{A})$$
- Für den Beweis sei $w \in \Sigma^*$ beliebig

Beweisdetails zu Satz 9.1 (a) (Forts.)

- Der erste Schritt von $\mathcal{B}$ bei Eingabe w ist auf jeden Fall $(q_0, w, \$) \vdash_{\mathcal{B}} (s, w, \tau_0\$)$
- Da $\mathcal{B}$ genau dann in q_a übergeht, wenn $\$$ oberstes Kellersymbols ist, gilt für alle $u \in \Gamma^*$:
  $$(s, w, \tau_0\$) \vdash_{\mathcal{B}}^* (q_a, \epsilon, u) \Rightarrow u = \$$$
  Und: $(s, w, \tau_0\$) \vdash_{\mathcal{B}}^* (q_a, \epsilon, \$) \Rightarrow$
  es gibt ein q: $(s, w, \tau_0\$) \vdash_{\mathcal{B},(\$)}^* (q, \epsilon, \$)$
- Wegen Lemma 9.6 gilt, für alle q:
  $$(s, w, \tau_0\$) \vdash_{\mathcal{B},(\$)}^* (q, \epsilon, \$) \iff (s, w, \tau_0) \vdash_{\mathcal{B}}^* (q, \epsilon, \epsilon)$$
- Da $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ identisch arbeiten, solange $\$$ nicht zu sehen ist, gilt, für alle q:
  $$(s, w, \tau_0) \vdash_{\mathcal{B}}^* (q, \epsilon, \epsilon) \iff (s, w, \tau_0) \vdash_{\mathcal{A}}^* (q, \epsilon, \epsilon)$$
- Insgesamt haben wir also:
  $(s, w, \tau_0\$) \vdash_{\mathcal{B}}^* (q_a, \epsilon, u) \iff$
  es gibt ein q: $(s, w, \tau_0) \vdash_{\mathcal{A}}^* (q, \epsilon, \epsilon)$

➡ $w \in L(\mathcal{B}) \iff w \in L(\mathcal{A})$

Leerer Keller vs. akzeptierende Zustände: Beweisideen (4/4)

Beweisidee zu Satz 9.1 (b)

- „Akzeptierende Zustände $\longrightarrow$ leerer Keller“
- **Idee:**
  - $\mathcal{B}$ simuliert $\mathcal{A}$
  - Von jedem Zustand in F aus kann $\mathcal{B}$ in den „Aufräumzustand“ q_a übergehen und dann den Keller mit Hilfe von ϵ-Übergängen leeren
  - Wenn die Eingabe vollständig gelesen war, führt das zum Akzeptieren mit leerem Keller
  - Damit keine Berechnung von $\mathcal{A}$ fälschlich zum Akzeptieren von $\mathcal{B}$ führt, indem $\mathcal{A}$ den Keller selbst leert (ohne in einen akzeptierenden Zustand zu gehen), verwendet $\mathcal{B}$ wieder ein neues unterstes Kellersymbol $\$$

Beweisansatz zu Satz 9.1 (b) (Forts.)

- Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, \tau_0, F)$
- Sei $\mathcal{B} \stackrel{\text{def}}{=} (Q \cup \{q_0, q_a\}, \Sigma, \Gamma \cup \{\$\}, \delta', q_0, \$, \varnothing)$
  - $q_0, q_a \notin Q$, $\$ \notin \Gamma$ (wie zuvor)
- δ' enthält:
  - alle Transitionen aus δ
  - $(q_0, \epsilon, \$, s, \tau_0\$)$ ☞ Initialisierung
  - $(q, \epsilon, \tau, q_a, \tau)$, für alle $q \in F$
    * Aus akzeptierenden Zuständen ist ein Übergang nach q_a möglich
  - $(q_a, \epsilon, \tau, q_a, \epsilon)$

    ☞ zum Leeren des Kellers
- **Behauptung:** $L(\mathcal{B}) = L(\mathcal{A})$

  (ohne Beweis)

Grammatik → Kellerautomat: Beweisdetails (1/3)

Beweis von Satz 9.2

- Sei $G = (V, \Sigma, S, P)$
- $\mathcal{A} \stackrel{\text{def}}{=} (\{q\}, \Sigma, V \cup \Sigma, \delta, q, S, \varnothing)$,
  - $\delta \stackrel{\text{def}}{=} \{(q, \sigma, \sigma, q, \epsilon) \mid \sigma \in \Sigma\} \cup \{(q, \epsilon, X, q, \alpha) \mid X \to \alpha \in P\}$

- **Behauptung:** $L(\mathcal{A}) = L(G)$
  - Wir führen den Beweis nur für Grammatiken in Chomsky-Normalform

- **Wir zeigen zuerst:** $L(G) \subseteq L(\mathcal{A})$
  - Sei $w \in L(G)$ und sei
    $$S \Rightarrow \gamma_1 \Rightarrow \gamma_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow \gamma_n = w$$
    eine Linksableitung für w mit:
    * $\gamma_i = u_i X_i \alpha_i$
    * $z_i \stackrel{\text{def}}{=}$ Suffix von w mit $w = u_i z_i$
  - Dabei sind:
    * $u_i, z_i \in \Sigma^*$, $X_i \in V$, $\alpha_i \in V^*$, für $i < n$
    * $u_n = w$, $X_n \alpha_n = \epsilon$, $z_n = \epsilon$

Beweis (Forts.)

- X_i ist also die am weitesten links stehende Variable der i-ten Satzform
- u_i ist der String aus Terminalzeichen links davon
- α_i ist der String rechts davon, der nur aus Variablen besteht, da dies eine Linksableitung zu einer CNF-Grammatik ist

- Die im $(i+1)$-ten Schritt angewendete Regel sei
  - $X_i \to Y_i Z_i$ oder
  - $X_i \to \sigma_i$
- Dabei sind:
  - $\sigma_i \in \Sigma$
  - $Y_i, Z_i \in V$

- Wir zeigen durch Induktion nach i, dass für alle $i \geqslant 0$ gilt:
  $$(q, w, S) \vdash_{\mathcal{A}}^{*} (q, z_i, X_i \alpha_i)$$

Grammatik → Kellerautomat: Beweisdetails (2/3)

Beweisdetails für $L(G) \subseteq L(\mathcal{A})$

- Ind.-Beh.: $(q, w, S) \vdash_{\mathcal{A}}^* (q, z_i, X_i\alpha_i)$
- $i = 0$:✓ $\quad (z_0 = w, \alpha_0 = \epsilon)$
- Von i zu $i+1$:
  - Nach Induktion gilt:
    $$(q, w, S) \vdash_{\mathcal{A}}^* (q, z_i, X_i\alpha_i)$$
  - Wir unterscheiden nach der Art der im $(i+1)$-ten Schritt verwendeten Regel
  - 1. Fall: $X_i \to Y_iZ_i$
    - ∗ Dann gelten:
      - · $z_{i+1} = z_i$
      - · $X_{i+1} = Y_i$ und
      - · $\alpha_{i+1} = Z_i\alpha_i$
    - ∗ Nach Definition von $\mathcal{A}$ gilt dann:
      $$(q, z_i, X_i\alpha_i) \vdash (q, z_i, Y_iZ_i\alpha_i) = (q, z_{i+1}, X_{i+1}\alpha_{i+1})$$

  ➨ Induktionsbehauptung

Beweisdetails (Forts.)

- 2. Fall: $X_i \to \sigma_i$
  - Da wir eine Linksableitung einer CNF-Grammatik haben, ist das erste Symbol von α_i eine Variable, also X_{i+1} in der von uns gewählten Notation
  - Es gilt: $\alpha_i = X_{i+1}\alpha_{i+1}$
  - Es folgt:
    $$(q, z_i, X_i\alpha_i) \vdash (q, z_i, \sigma_iX_{i+1}\alpha_{i+1})$$
  - Da die Ableitung insgesamt w erzeugt, ist σ_i das erste Zeichen von z_i und es gilt $z_i = \sigma_i z_{i+1}$
  - Dann folgt: $(q, z_i, \sigma_iX_{i+1}\alpha_{i+1}) \vdash (q, z_{i+1}, X_{i+1}\alpha_{i+1})$

  ➨ Induktionsbehauptung
- Der 2. Fall findet insbesondere im letzten Ableitungsschritt Anwendung und führt damit zur Konfiguration (q, ϵ, ϵ)

➨ $w \in L(\mathcal{A})$

Grammatik → Kellerautomat: Beweisdetails (3/3)

Beweis (Forts.)

- Zu zeigen: $L(\mathcal{A}) \subseteq L(G)$
- Wir beweisen durch Induktion nach der Berechnungslänge n:
  - Für alle $X \in V$ und $w \in \Sigma^*$: wenn $(q, w, X) \vdash^n (q, \epsilon, \epsilon)$, dann $X \Rightarrow^* w$
- $n = 1$:
  - $(q, w, X) \vdash (q, \epsilon, \epsilon)$
  - ➡ $X = S$ und $w = \epsilon$ und es gibt die Regel $S \to \epsilon$ in G
    ☞ wegen CNF
  - ➡ $X \Rightarrow^* w$
- $n = 2$:
  - $(q, w, X) \vdash (q, w, \sigma) \vdash (q, \epsilon, \epsilon)$
  - ➡ $w = \sigma$ und es gibt die Regel $X \to \sigma$ in G
  - ➡ $X \Rightarrow^* w$

Beweis (Forts.)

- $n + 1$: $(q, w, X) \vdash^{n+1} (q, \epsilon, \epsilon)$
  - Sei $(q, w, X) \vdash (q, w, Z_1Z_2)$ der erste Schritt der Berechnung, für gewisse $Z_1, Z_2 \in V$
  - ➡ $(q, w, Z_1Z_2) \vdash^n (q, \epsilon, \epsilon)$ und in dieser Berechnung werden Z_1 und Z_2 nach und nach vom Keller entfernt
  - ➡ Es gibt eine Zerlegung $w = u_1u_2$, so dass $(q, u_1u_2, Z_1Z_2) \vdash^{m_1}_{(Z_2)} (q, u_2, Z_2) \vdash^{m_2} (q, \epsilon, \epsilon)$
  - Backstage-Lemma:
    - $(q, u_1, Z_1) \vdash^{m_1} (q, \epsilon, \epsilon)$
  - Induktion: $Z_1 \Rightarrow^* u_1$ und $Z_2 \Rightarrow^* u_2$
    ☞ $m_1, m_2 \leqslant n$
  - ➡ $X \Rightarrow Z_1Z_2 \Rightarrow^* u_1u_2 = w$
- Die Anwendung auf $X = S$ liefert dann $L(\mathcal{A}) \subseteq L(G)$

Kellerautomat → Grammatik: Beweisdetails (1/2)

Beweis von Satz 9.3 (Forts.)

- Wir zeigen zuerst durch Induktion nach n:
  - falls $(p, w, \tau) \vdash_{\mathcal{A}}^{n} (p', \epsilon, \epsilon)$
  - so gilt: $X_{p,\tau,p'} \Rightarrow^* w$
- $n = 1$:
  - Dann gilt:
    - $w = \epsilon$ und $(p, \epsilon, \tau, p', \epsilon) \in \delta$ oder
    - $w = \sigma$ und $(p, \sigma, \tau, p', \epsilon) \in \delta$
  - Im ersten Fall enthält P die Regel $X_{p,\tau,p'} \to \epsilon$ im zweiten Fall $X_{p,\tau,p'} \to \sigma$
- $n > 1$: Wir betrachten zuerst den Fall, dass der erste Schritt der Berechnung ein Zeichen σ liest, also:
  $(p, w, \tau) \vdash (q, u, \tau_1\tau_2)$ mit $w = \sigma u$
- Dann gilt: $(p, \sigma, \tau, q, \tau_1\tau_2) \in \delta$
- Nach Konstruktion von G gibt es also für alle p_1 und p' eine Regel
  $X_{p,\tau,p'} \to \sigma X_{q,\tau_1,p_1} X_{p_1,\tau_2,p'}$

Beweis (Forts.)

- Sei p_1 der Zustand nach dem Entfernen von τ_1 vom Keller in der Berechnung $(q, u, \tau_1\tau_2) \vdash^{n-1} (p', \epsilon, \epsilon)$
- Seien $u = u_1u_2$, so dass u_1 bis zum Entfernen von τ_1 gelesen wird

➡ Es gibt i, j mit $i + j = n - 1$, so dass:
$(p, w, \tau) \vdash (q, u_1u_2, \tau_1\tau_2) \vdash_{(\tau_2)}^{i} (p_1, u_2, \tau_2) \vdash^{j} (p', \epsilon, \epsilon)$

- Mit Lemma 10.3 gelten also:
  - $(q, u_1, \tau_1) \vdash^{i} (p_1, \epsilon, \epsilon)$ und
  - $(p_1, u_2, \tau_2) \vdash^{j} (p', \epsilon, \epsilon)$
- Nach Induktion folgt:
  - $X_{q,\tau_1,p_1} \Rightarrow^* u_1$
  - $X_{p_1,\tau_2,p'} \Rightarrow^* u_2$

➡ $X_{p,\tau,p'} \Rightarrow \sigma X_{q,\tau_1,p_1} X_{p_1,\tau_2,p'} \Rightarrow^* \sigma u_1u_2 = w$

- Der Fall, dass der erste Schritt ein ϵ-Übergang ist, lässt sich analog beweisen

Kellerautomat → Grammatik: Beweisdetails (2/2)

Beweis von Satz 9.3 (Forts.)

- Wir zeigen jetzt durch Induktion nach der Ableitungslänge n:
  - falls $X_{p,\tau,p'} \Rightarrow^n w$
  - so gilt: $(p, w, \tau) \vdash^*_{\mathcal{A}} (p', \epsilon, \epsilon)$
- $n = 1$: Die einzigen Regeln von G, die keine Variablen erzeugen, sind von der Form
  - $X_{p,\tau,p'} \to \alpha$, mit $$(p, \alpha, \tau, p', \epsilon) \in \delta$$ mit $\alpha \in \Sigma \cup \{\epsilon\}$
- Die Behauptung folgt direkt
- $n > 1$: In diesem Fall gibt es zwei verschiedene Typen des ersten Ableitungsschrittes

Beweis (Forts.)

- Wir betrachten den ersten Fall: $$X_{p,\tau,p'} \Rightarrow \alpha X_{q,\tau_1,p_1} X_{p_1,\tau_2,p'}$$
- Es gilt dann: $$\alpha X_{q,\tau_1,p_1} X_{p_1,\tau_2,p'} \Rightarrow^{n-1} w$$
- Also gibt es u_1, u_2 mit $w = \alpha u_1 u_2$ und i, j mit $i + j = n - 1$, so dass gilt:
  - $X_{q,\tau_1,p_1} \Rightarrow^i u_1$
  - $X_{p_1,\tau_2,p'} \Rightarrow^j u_2$
- Nach Induktion folgt:
  - $(q, u_1, \tau_1) \vdash^* (p_1, \epsilon, \epsilon)$
  - $(p_1, u_2, \tau_2) \vdash^* (p', \epsilon, \epsilon)$
- Mit Lemma 10.3 gelten dann auch:
  - $(q, u_1 u_2, \tau_1 \tau_2) \vdash^* (p_1, u_2, \tau_2)$
  - $(p_1, u_2, \tau_2) \vdash^* (p', \epsilon, \epsilon)$
- Zusammen ergibt sich $$(p, w, \tau) \vdash (q, u_1 u_2, \tau_1 \tau_2) \vdash^*_{(\tau_2)} (p', \epsilon, \epsilon)$$
- Die anderen Fällen sind analog