Fakultät für Informatik
Lehrstuhl 11
Prof. Dr. Petra Mutzel
Dipl.-Inf. Andre Droschinsky

Übungen zur Vorlesung

# Effiziente Algorithmen

Sommersemester 2018

**Übungsblatt 9**

Besprechungszeit:
18.-21.06.2018

Die (freiwilligen) schriftlichen Lösungen können Sie einfach in Ihrer Übungsgruppe abgeben (gerne auch als Gruppenabgaben).

### Aufgabe 9.1 – Wiederholung

- Wie berechnet sich die erwartete Rechenzeit bei randomisierten Algorithmen?
- Wie sind die Probleme SAT, $k$-SAT und Max-$k$-SAT definiert? Für welche Probleme sind polynomielle Algorithmen bekannt?
- Welche Algorithmen haben Sie für das Max-$k$-SAT-Problem in der Vorlesung kennen gelernt? Wie sind die Laufzeiten und wie viele Klauseln werden erfüllt?
- Was ist ein (ganzzahliges) lineares Programm?

### Aufgabe 9.2 – Max-$k$-SAT (6 Punkte)

Formulieren Sie die folgende Max-$k$-SAT-Instanz (mit $k = 3, m = 4, n = 4$) als ganzzahliges lineares Programm und geben Sie zusätzlich die kanonische LP-Relaxierung an:

$$x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4$$
$$x_1 \vee x_2 \vee x_3$$
$$\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_4$$
$$\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4$$

Berechnen Sie eine optimale Lösung der LP-Relaxierung als auch des ganzzahligen linearen Programms.

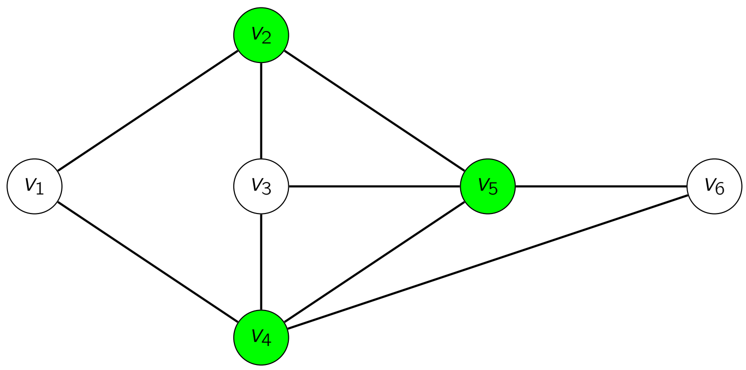
### Aufgabe 9.3 – Vertex Cover (8 Punkte)

Das Problem Vertex Cover (CV) ist folgendermaßen definiert.

Gegeben: Graph $G = (V,E)$ mit $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ und ein $k > 0$.

Gesucht: Knotenmenge $V' \subseteq V$, $V' \leq k$, so dass für jede Kante $\{u,v\} \in E$ mindestens einer der Knoten $u,v$ in $V'$ enthalten ist.

Anschaulich müssen also alle Kanten durch höchstens $k$ Knoten überdeckt werden. Im folgenden Beispiel überdecken die 3 grünen Knoten alle Kanten des Graphen.



In der gewichteten Optimierungsversion (wVC) besitzt jeder Knoten $v_i \in V$ ein Gewicht $w_i \geq 0$. Ziel ist es, eine Überdeckung kleinsten Gewichts zu finden.

a) Geben Sie ein ganzzahliges lineares Programm zur Bestimmung eines wVC an. Tipp: Orientieren Sie sich an dem ILP für Max-$k$-SAT.

b) Bestimmen Sie eine geeignete Relaxierung für ihr ILP.

c) Nutzen Sie die errechneten Werte der Relaxierung, um zu einer 2-approximativen Lösung zu kommen.

d) Zeigen Sie, dass es sich bei Ihrer Lösung um ein Vertex Cover handelt.

e) Beweisen Sie, dass Ihre Lösung tatsächlich eine 2-Approximation ist.

**Aufgabe 9.4 – Lineare Programmierung** (5 Punkte)

Eine Getränke-Firma plant den kommenden Produktionszeitraum mit den zwei Getränkesorten A und B. Für die Herstellung von einem Liter des Produktes A werden drei Maschinen-Arbeitsstunden und für Produkt B vier Stunden benötigt; der gesamte verfügbare Zeitrahmen für den kommenden Planungszeitraum beträgt dabei 20.000 Stunden.

Die Zutaten für die Herstellung der beiden Sorten sind unterschiedlich und die Kosten belaufen sich auf 3 € bzw. 2 € pro Liter für Getränk A bzw. B. Das Unternehmen hat für den kommenden Planungshorizont ein Budget von 14.000 € verfügbar.

Darüber hinaus möchte das Unternehmen für die Ausrichtung auf dem Markt das Angebot der beiden Getränke möglichst balanciert halten: das Ziel ist dass die hergestellten Mengen der beiden Getränke höchstens um den Faktor 2 voneinander abweichen.

Das Unternehmen möchte natürlich einen möglichst hohen Gewinn erreichen und hat dafür einen Verkaufspreis pro Liter von 5 € für Getränk A und 4,50 € für Getränk B mit einem Großkunden vereinbart.

a) Formulieren Sie das Problem als lineares Programm.

b) Stellen Sie das lineare Programm (inklusive der Zielfunktion) graphisch dar. Gibt es Lösungen mit einem Gewinn von 10.000 € für das Unternehmen?

c) Wie lautet die optimale Lösung?