ALGORITHM ENGINEERING

Fakultät für Informatik
Lehrstuhl 11
Prof. Dr. Petra Mutzel
Dipl.-Inf. Andre Droschinsky
Dipl.-Inf. Bernd Zey

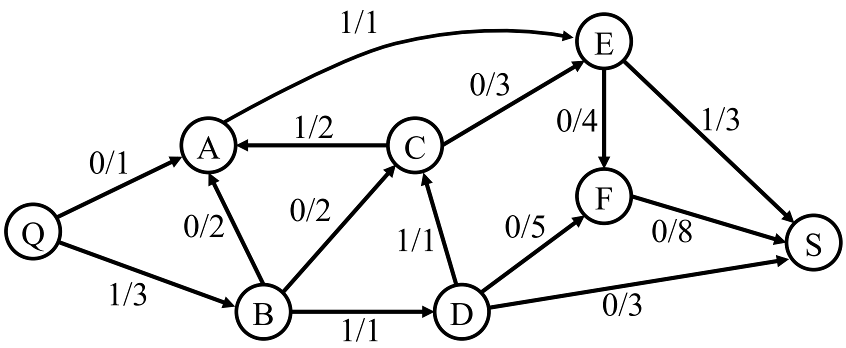
Probeklausur zur Vorlesung
Effiziente Algorithmen
Sommersemester 2016

Datum:
21.06.2016

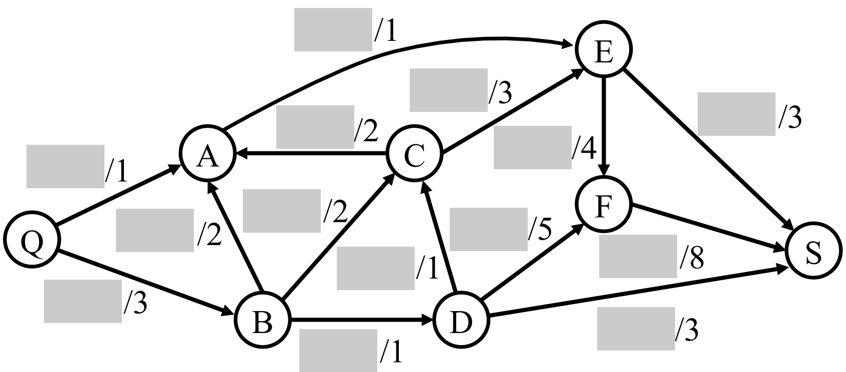
Hinweis: Der Umfang dieser Probeklausur entspricht in etwa einer halben Klausur.

Aufgabe 1 – Flussproblem

Betrachten Sie das folgende Netzwerk $N = (G = (V, E), c)$ mit dem Fluss Φ: die Werte an den Kanten geben den jeweiligen aktuellen Flusswert $\Phi(e)$ (links) und die Kapazität $c(e)$ (rechts) wieder.



Führen Sie **eine Iteration** des Algorithmus von Malhotra, Pramodh Kumar und Maheshwari aus. Geben Sie den **Restgraphen** und das **Niveaunetzwerk** – inklusive der Potenziale – zum aktuellen Fluss Φ an. Berechnen Sie anschließend den **Sperrfluss** Ψ und zeichnen Sie diesen sowie den **neuen Fluss** $\Phi' := \Phi + \Psi$, der durch das Hinzufügen des Sperrflusses entsteht. Wie lautet der **Wert des Flusses** von Φ und der von Φ'? Tragen Sie den neuen Fluss Φ' in die folgende Vorlage ein:



Aufgabe 2 – Amortisierte Analyse: 3-Zähler

Analog zu dem in der Vorlesung betrachteten Binärzähler wird hier eine Zahl $z \in \mathbb{N}$ als lineare Liste $(z_{m-1}, \ldots, z_1, z_0)$ mit maximal m Stellen gespeichert. Das erste Element der Liste ist z_0 und das letzte Element z_{m-1}.

Hierbei wird als Basis 3 verwendet, so dass $z_i \in \{0, 1, 2\}, \forall i \in \{0, \ldots, m-1\}$. Somit entspricht $(z_{m-1}, \ldots, z_1, z_0)$ der Zahl $\sum_{i=0}^{m-1} z_i \cdot 3^i$.

Beispiel: $(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{0})$ stellt die Zahl $\mathbf{1} \cdot 3^2 + \mathbf{2} \cdot 3^1 + \mathbf{0} \cdot 3^0 = 15$ dar.

Die Operation `ErhöheUmEins()` addiert 1 auf die aktuelle Zahl:

$i := 0$;
while ($z_i = 2$ und $i < m - 1$)
    $z_i := 0$;
    $i := i + 1$;
$z_i := z_i + 1$;

Zeigen Sie mit Hilfe der **Kostenverteilung**, dass n `ErhöheUmEins()`-Operationen **amortisierte Laufzeit** $\mathcal{O}(\boldsymbol{n})$ haben.

Sie können davon ausgehen, dass initial $z = 0$ gilt, also $z_i = 0, \forall i \in \{0, \ldots, m-1\}$. Sie können außerdem davon ausgehen, dass $m \leq n < \sum_{i=0}^{m-1} 3^i$ gilt.

Aufgabe 3 – Starke Zusammenhangskomponenten

Es sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph. In dieser Aufgabe geht es darum, wie sich die **Anzahl der starken Zusammenhangskomponenten (SZHK)** von G durch Einfügen oder Entfernen einer Kante ändern kann.

a) Kann die Anzahl der SZHK von G **größer** werden,

   i) wenn eine Kante $(u, v) \notin E$ hinzugefügt wird?

   ii) wenn eine Kante $(u, v) \in E$ entfernt wird?

   Begründen Sie jeweils, warum dies nicht der Fall sein kann, oder geben Sie einen Graphen mit mindestens 3 Knoten an, in welchem es nach der jeweiligen Operation zu einem größtmöglichen (in Bezug auf die Anzahl der Knoten in G) Zuwachs an SZHK kommt.

b) Kann die Anzahl der SZHK von G **gleich** bleiben,

   i) wenn eine Kante $(u, v) \notin E$ hinzugefügt wird?

   ii) wenn eine Kante $(u, v) \in E$ entfernt wird?

   Begründen Sie jeweils, warum dies nicht der Fall sein kann, oder geben Sie einen Graphen mit mindestens 3 Knoten an, in welchem es durch die jeweilige Operation zu keiner Änderung der Anzahl der SZHK kommt.

c) Kann die Anzahl der SZHK von G **kleiner** werden,

   i) wenn eine Kante $(u, v) \notin E$ hinzugefügt wird?

   ii) wenn eine Kante $(u, v) \in E$ entfernt wird?

   Begründen Sie jeweils, warum dies nicht der Fall sein kann, oder geben Sie einen Graphen mit mindestens 3 Knoten an, in welchem es nach der jeweiligen Operation zu einer größtmöglichen (in Bezug auf die Anzahl der Knoten in G) Reduktion von SZHK kommt.

Hinweis: Jede Teilaufgabe ist 1 Punkt wert.

Aufgabe 4 – Kurzaufgaben

Geben Sie Antworten auf die Fragen oder vervollständigen Sie die Sätze.

Hinweis: Bei Fragen zur Laufzeit oder Güte ist nur die scharfe/best-bekannte Schranke korrekt.

a) Wie viele Sperrflussberechnungen benötigt der Algorithmus von Dinic zur Berechnung von maximalen Flüssen in einem Netzwerk $G = (V, E, c)$?

b) Es sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Ein Matching M ist genau dann maximal, wenn es …

c) Im Algorithmus von Hopcroft und Karp wird in jeder Runde eine maximale Menge an M-verbessernden Pfaden hinzugefügt. Wie viele Runden führt der Algorithmus von Hopcroft und Karp auf einem bipartiten Graphen $G = (V, E)$ aus?

d) Der Algorithmus von Stoer und Wagner zur Berechnung des minimalen Schnitts in einem ungerichteten, gewichteten Graphen $G = (V, E)$ mit $|E| = \Theta(|V|^2)$ hat eine Laufzeit von:

e) Gegeben sei ein Maximierungsproblem und eine Instanz $\mathcal{I}$ davon. Weiterhin sei ein Approximationsalgorithmus der Güte 5/3 gegeben, der für $\mathcal{I}$ eine Lösung mit Lösungswert 100 berechnet. Wie groß kann die optimale Lösung maximal sein?

f) Die Minimum-Spanning-Tree-Approximation (MST-Heuristik) für das metrische TSP hat eine Güte von: