Übungen zur Vorlesung Grundbegriffe der Theoretischen Informatik

technische universität dortmund

Thomas Schwentick

Gaetano Geck, Lutz Oettershagen,
Christopher Spinrath, Marco Wilhelm

Lehrstuhl 1
Logik in der Informatik

SoSe 2018 **Übungsblatt 10** **19.06.2018**

Abgabe bis spätestens am Dienstag, 26.06.2018,

- (vor der Vorlesung) im HG II, HS 3, oder
- in die Briefkästen im Durchgangsflur, der die 1. Etage der OH 12 mit dem Erdgeschoss der OH 14 verbindet.

Beachten Sie die Schließzeiten der Gebäude!

Ansonsten gelten die Hinweise von Blatt 1.

Aufgabe 10.1 [Kodierung einer Turingmaschine] **2 Punkte**

Die Turingmaschine $M = (\{s, p\}, \{\triangleright, \sqcup, 0, 1\}, \delta, s)$ über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$ ist ein binärer Dekrementierer: Die Binärzahl w^R wird um 1 dekrementiert, falls $\text{Str2N}(w^R) > 0$ gilt. Die Transitionen $(q, \sigma, q', \sigma', d)$ aus δ sind dabei wie folgt definiert:

q	σ	q'	σ'	d
s	$\triangleright$	s	$\triangleright$	$\rightarrow$
s	0	s	0	$\rightarrow$
s	1	p	0	$\leftarrow$
s	$\sqcup$	h	$\sqcup$	$\downarrow$
p	0	p	1	$\leftarrow$
p	$\triangleright$	h	$\triangleright$	$\downarrow$

a) Wie werden die Symbole und Zustände von M gemäß den im Abschnitt „Universelle Turingmaschinen" von Kapitel 16 genannten Konventionen kodiert, wenn M Eingabe für eine universelle Turingmaschine ist? Verwenden Sie die folgende Nummerierung der Zustände, Richtungen und Zeichen und ergänzen Sie die Tabellen:

x	$\text{num}(x)$	$\text{enc}(x)$
s	1	0^1 1= 01
h	4	0^4 1= 00001
p	5	0^5 1= 000001
$\leftarrow$	1	0^1 1= 01
$\downarrow$	2	0^2 1= 001
$\rightarrow$	3	0^3 1= 0001

x	$\text{num}(x)$	$\text{enc}(x)$
$\triangleright$	1	0^1 1= 01
$\sqcup$	2	0^2 1= 001
0	3	0^3 1= 0001
1	4	0^4 1 = 00001

(1 Punkt)

b) Geben Sie die Kodierungen $\text{enc}(s, 1)$ und $\text{enc}(p, 0)$ an. **(1 Punkt)**

enc(s,1) = 1enc(s)enc(1)enc(p)enc(0)enc(<-)
= 1 01 01 000001 0001 01
enc(p,0) = 1enc(p)enc(0)enc(p)enc(1)enc(<-)
= 1 000001 0001 000001 01 01

Aufgabe 10.2 [Abschlusseigenschaften] **4 Punkte**

Es seien L_1 und L_2 Sprachen über einem Alphabet Σ und M_1 bzw. M_2 Turingmaschinen für die $L_1 = L(M_1)$ und $L_2 = L(M_2)$ gilt. Beschreiben Sie anschaulich, wie sich Turingmaschinen M_a und M_b für die folgende Sprachen L_a und L_b konstruieren lassen, so dass jeweils $L_x = L(M_x)$ gilt. Bedenken Sie, dass M_x die Sprache L_x nicht *entscheiden* muss. Es ist also möglich, dass sie für einige Eingaben nicht terminiert.

M1 und M2 erhalten Übergänge, die für alle verwerfenden oder nicht existenten Knoten zum Anfang des Strings laufen und dann die andere TM durchlaufen. (muss ja nicht enden)

a) $L_a = L_1 \cup L_2$ **(2 Punkte)**

b) $L_b = L_1 \circ L_2$ erst M1 ab halten wieder and den Anfange des Strings, dann M2 **(2 Punkte)**

> **Hinweis**
>
> M_1 und M_2 können als 1-String-Turingmaschinen angenommen werden. Für M_a und M_b dürfen Sie Mehrstring-Turingmaschinen verwenden. Sie müssen die (Mehrstring-)Turingmaschinen M_a und M_b weder formal aufschreiben, noch als Diagramm angeben. Beschreiben Sie jedoch die Arbeitsweise hinreichend verständlich und nutzen Sie dafür die Tatsache, dass Turingmaschinen beliebige andere Turingmaschinen simulieren können.

Aufgabe 10.3 [Entscheidbarkeit, Semi-Entscheidbarkeit, Unentscheidbarkeit] **7 Punkte**

Geben Sie für die folgenden Probleme an, ob sie jeweils

- entscheidbar,
- nicht entscheidbar aber semi-entscheidbar oder
- unentscheidbar

sind. Beweisen Sie Ihre Behauptungen. Gehen Sie davon aus, dass jede Turingmaschine die Zeichen 0 und 1 im Eingabe- und im Arbeitsalphabet enthält.

a) *Problem:* A
Gegeben: Turingmaschine M und $k \in \mathbb{N}_0$
Frage: Erzeugt M bei der Eingabe 0^k die Ausgabe 1? **(3 Punkte)**

nicht entscheidbar -> Red analog zu hello world

b) *Problem:* B
Gegeben: Turingmaschine M
Frage: Erzeugt M bei *keiner* Eingabe die Ausgabe 1? **(4 Punkte)**

nicht entscheidbar -> Red analog zu hello world
nicht semientscheidbar
-> unendlich viele eingaben müssten abgelaufen werden ohne terminierung

> **Hinweis**
>
> Laut den Konventionen im Abschnitt „Universelle Turingmaschinen“ von Kapitel 16 ist die Kodierung der Zeichen 0 und 1 eindeutig gegeben durch num$(0) = 3$ und num$(1) = 4$.

Aufgabe 10.4 [Primitiv Rekursive Funktionen] **2 Punkte**

Zeigen Sie: Die Funktion $\text{even}(x) : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ mit

$$\text{even}(x) = \begin{cases} 1, & \text{x ist gerade} \quad g \\ 0, & \text{x ist ungerade} \quad h \end{cases}$$

ist primitiv rekursiv.