

Übungen zur Vorlesung
Effiziente Algorithmen
Sommersemester 2018

Übungsblatt 9
Besprechungszeit:
18.-21.06.2018

Die (freiwilligen) schriftlichen Lösungen können Sie einfach in Ihrer Übungsgruppe abgeben (gerne auch als Gruppenabgaben).

Aufgabe 9.1 – Wiederholung

- Wie berechnet sich die erwartete Rechenzeit bei randomisierten Algorithmen?
- Wie sind die Probleme SAT, k -SAT und Max- k -SAT definiert? Für welche Probleme sind polynomielle Algorithmen bekannt?
- Welche Algorithmen haben Sie für das Max- k -SAT-Problem in der Vorlesung kennen gelernt? Wie sind die Laufzeiten und wie viele Klauseln werden erfüllt?
- Was ist ein (ganzzahliges) lineares Programm?

Aufgabe 9.2 – Max- k -SAT

(6 Punkte)

Formulieren Sie die folgende Max- k -SAT-Instanz (mit $k = 3, m = 4, n = 4$) als ganzzahliges lineares Programm und geben Sie zusätzlich die kanonische LP-Relaxierung an:

$$\begin{aligned}x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4 \\x_1 \vee x_2 \vee x_3 \\ \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_4 \\ \bar{x}_1 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4\end{aligned}$$

Berechnen Sie eine optimale Lösung der LP-Relaxierung als auch des ganzzahligen linearen Programms.

Aufgabe 9.3 – Vertex Cover

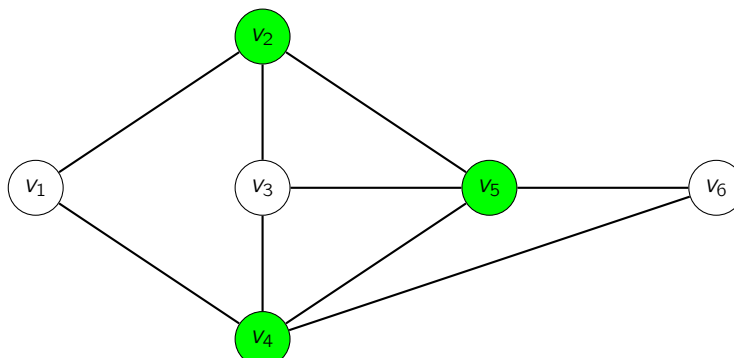
(8 Punkte)

Das Problem Vertex Cover (CV) ist folgendermaßen definiert.

Gegeben: Graph $G = (V, E)$ mit $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ und ein $k > 0$.

Gesucht: Knotenmenge $V' \subseteq V$, $V' \leq k$, so dass für jede Kante $\{u, v\} \in E$ mindestens einer der Knoten u, v in V' enthalten ist.

Anschaulich müssen also alle Kanten durch höchstens k Knoten überdeckt werden. Im folgenden Beispiel überdecken die 3 grünen Knoten alle Kanten des Graphen.



In der gewichteten Optimierungsversion (wVC) besitzt jeder Knoten $v_i \in V$ ein Gewicht $w_i \geq 0$. Ziel ist es, eine Überdeckung kleinsten Gewichts zu finden.

- a) Geben Sie ein ganzzahliges lineares Programm zur Bestimmung eines wVC an. Tipp: Orientieren Sie sich an dem ILP für Max-k-SAT.
- b) Bestimmen Sie eine geeignete Relaxierung für ihr ILP.
- c) Nutzen Sie die errechneten Werte der Relaxierung, um zu einer 2-approximativen Lösung zu kommen.
- d) Zeigen Sie, dass es sich bei Ihrer Lösung um ein Vertex Cover handelt.
- e) Beweisen Sie, dass Ihre Lösung tatsächlich eine 2-Approximation ist.

Aufgabe 9.4 – Lineare Programmierung

(5 Punkte)

Eine Getränke-Firma plant den kommenden Produktionszeitraum mit den zwei Getränkesorten A und B. Für die Herstellung von einem Liter des Produktes A werden drei Maschinen-Arbeitsstunden und für Produkt B vier Stunden benötigt; der gesamte verfügbare Zeitrahmen für den kommenden Planungszeitraum beträgt dabei 20.000 Stunden.

Die Zutaten für die Herstellung der beiden Sorten sind unterschiedlich und die Kosten belaufen sich auf 3 € bzw. 2 € pro Liter für Getränk A bzw. B. Das Unternehmen hat für den kommenden Planungshorizont ein Budget von 14.000 € verfügbar.

Darüber hinaus möchte das Unternehmen für die Ausrichtung auf dem Markt das Angebot der beiden Getränke möglichst balanciert halten: das Ziel ist dass die hergestellten Mengen der beiden Getränke höchstens um den Faktor 2 voneinander abweichen.

Das Unternehmen möchte natürlich einen möglichst hohen Gewinn erreichen und hat dafür einen Verkaufspreis pro Liter von 5 € für Getränk A und 4,50 € für Getränk B mit einem Großkunden vereinbart.

- a) Formulieren Sie das Problem als lineares Programm.
- b) Stellen Sie das lineare Programm (inklusive der Zielfunktion) graphisch dar. Gibt es Lösungen mit einem Gewinn von 10.000 € für das Unternehmen?
- c) Wie lautet die optimale Lösung?