technische universität dortmund

Beate Bollig

Gaetano Geck, Thomas Harweg
David Mezlaf, Christopher Spinrath

fakultät für informatik

SoSe 2017 | Übungsblatt 9 | 20.06.2017

Abgabe bis spätestens am Dienstag, 27.06.2017, 10:00 Uhr

- **in die Briefkästen im Durchgangsflur, der die 1. Etage der OH 12 mit dem Erdgeschoss der OH 14 verbindet.**

Ansonsten gelten die Hinweise von Blatt 1.

Aufgabe 9.1 [WHILE-Programme] — 5 Punkte

Kurzaufgabe (1 Punkt)

Gegeben sei das folgende WHILE-Programm P:

```
x3 := x1;
x4 := x2;
WHILE x2 ≠ 0 DO
   x3 := x3 ∸ 1;
   x2 := x2 ∸ 1
END;
WHILE x3 ≠ 0 DO
   x3 := x3 + 1
END;
WHILE x4 ≠ 0 DO
   x1 := x1 + 1;
   x4 := x4 ∸ 1
END
```

Geben Sie den Definitionsbereich $D(f_P)$ sowie den Wertebereich $W(f_P)$ der von P berechneten partiellen Funktion $f_P : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ an. Begründen Sie Ihre Behauptung.

Hauptaufgabe (4 Punkte)

a) Unter einer *vollkommenen* oder *perfekten Zahl* versteht man eine natürliche Zahl, die der Summe aller ihrer positiven Teiler (sich selbst ausgenommen) entspricht. Beispielsweise gilt $6 = 1+2+3$ und $1, 2, 3, 6$ sind alle positiven Teiler von 6; die Zahl 6 ist demnach vollkommen. Interessanterweise ist es unbekannt, ob *ungerade* vollkommene Zahlen existieren, und ebenso, ob es *unendlich viele* vollkommene Zahlen gibt.

Verfassen Sie ein WHILE-Programm, welches zu einer natürlichen Zahl n die kleinste Zahl m bestimmt, die größer oder gleich n und vollkommen ist, oder unendlich lang läuft, falls eine solche Zahl nicht existiert. Erläutern Sie die Funktionsweise Ihres Programmes.

Hinweis: Sie dürfen die folgende Erweiterung der Syntax von WHILE-Programmen voraussetzen. Neben Wertzuweisungen, Reihungen und bedingten Wiederholungen ist auch die Zuweisung z `:= MOD(`x`,` y`)` ein WHILE-Programm, welches für zwei Variablen x, y den Rest der ganzzahligen Division von x durch y in der Variablen z speichert. **(2 Punkte)**

b) Zeigen Sie, dass es zu einer beliebigen WHILE-berechenbaren totalen Funktion $g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ eine WHILE-berechenbare partielle Funktion h gibt, sodass $D(h) = W(g)$ gilt.

Hinweis: Sie dürfen hierbei Unterprogramme P_1 der Form `IF` x_i `=` x_j `THEN` P_2 `END` für beliebige WHILE-Programme P_2 und beliebige Indizes $i, j \in \mathbb{N}$ verwenden.

Die Semantik dieses Code-Fragmentes ist die folgende: Programm P_2 wird ausgeführt, wenn unmittelbar vor der Ausführung des Fragmentes der Wert der Variablen x_i dem Wert der Variablen x_j entspricht, andernfalls nicht.
Formal ist der Speicherinhalt nach Ausführung von P_1 definiert durch

$$P_1(X) = \begin{cases} P_2(X), & \text{falls } X[i] = X[j]; \\ X, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(2 Punkte)

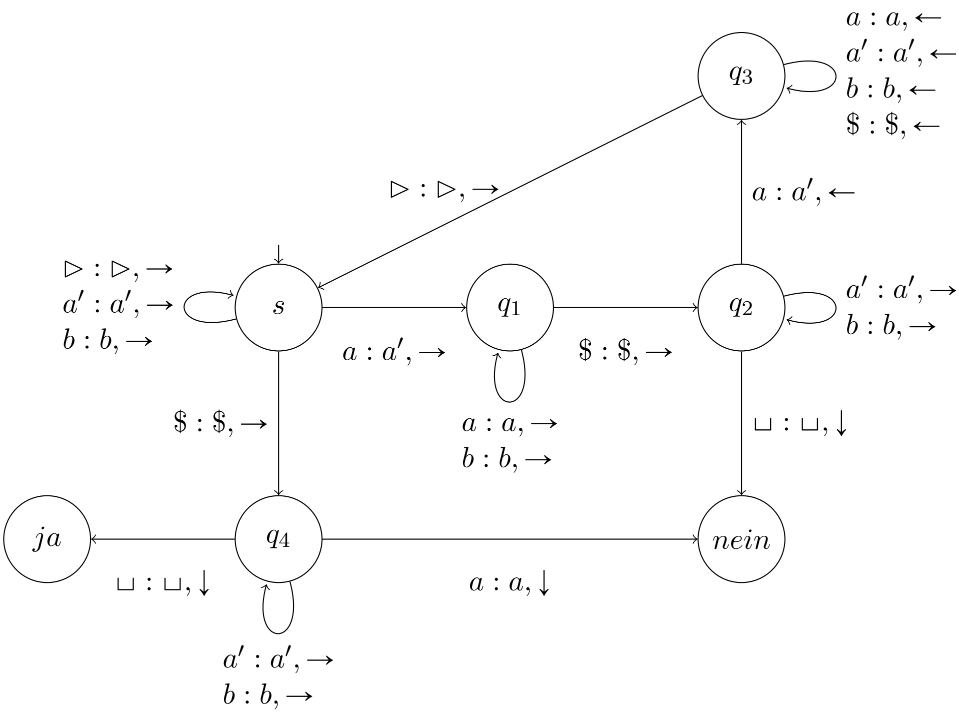
Aufgabe 9.2 [Turingmaschinen: Interpretation] **5 Punkte**

Kurzaufgabe (1 Punkt)

Welche Sprachen werden von Turingmaschinen entschieden, die ihren Zeiger für jede Eingabe ausschließlich nach rechts bewegen?

Hauptaufgabe (4 Punkte)

Gegeben sei die folgende Turingmaschine M mit dem Bandalphabet $\{a, a', b, \$, \sqcup, \triangleright\}$:



a) Geben Sie die Berechnung von M auf der Eingabe $a\$aba$ an. **(1 Punkt)**

b) Beschreiben Sie die Arbeitsweise der Turingmaschine M. Gehen Sie dabei insbesondere auf die Bedeutung der einzelnen Zustände ein. Geben Sie die von ihr entschiedene Sprache L_M anschließend formal an. Nehmen Sie dabei an, dass die Eingabe auf Wörter über dem Alphabet $\{a, b, \$\}$ beschränkt ist. **(2 Punkte)**

c) Die Transitionsfunktion δ' geht aus der Transitionsfunktion δ von M durch folgende Änderungen hervor:

- $\delta'(q_4, \sqcup) = (nein, \sqcup, \downarrow)$
- $\delta'(q_4, a) = (ja, a, \downarrow)$

Für alle weiteren Fälle gelte $\delta'(q, \sigma) = \delta(q, \sigma)$. Wie lautet die von $M' = (Q, \Gamma, \delta', s)$ entschiedene Sprache? **(1 Punkt)**

Aufgabe 9.3 [Turingmaschinen: Konstruktion] 5 Punkte

Kurzaufgabe (1 Punkt)

Skizzieren Sie, wie ein deterministischer Kellerautomat mit akzeptierenden Zuständen durch eine Turingmaschine simuliert werden kann. Beschreiben Sie dazu, wie eine Turingmaschine M in ihrem Arbeitsbereich eine Konfiguration eines DPDAs repräsentieren kann und wie M diese Repräsentation entsprechend einer Transition des DPDAs ändern kann.

Hauptaufgabe (4 Punkte)

a) Konstruieren Sie eine Turingmaschine, die die Sprache $\{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$ entscheidet. Geben Sie die Turingmaschine als Diagramm an und beschreiben Sie ihre Arbeitsweise, insbesondere die Bedeutung der einzelnen Zustände. **(2 Punkte)**

b) Konstruieren Sie eine Turingmaschine M mit $f_M : \{a, b\}^* \to \{a, b\}^*$, wobei f_M wie folgt gegeben ist:

$$f_M(w) = \begin{cases} a^k\sigma\sigma u & \text{, falls } w = a^k abu\sigma \text{ für ein } k \in \mathbb{N}_0, u \in \{a, b\}^*, \sigma \in \{a, b\}; \\ \perp & \text{, sonst.} \end{cases}$$

Die Turingmaschine M soll also in einem Wort der gegebenen Form das letzte Zeichen σ entfernen und das erste Vorkommen von ab im eingegebenen Wort mit $\sigma\sigma$ überschreiben. Geben Sie die Turingmaschine als Diagramm an und beschreiben Sie ihre Arbeitsweise, insbesondere die Bedeutung der einzelnen Zustände. **(2 Punkte)**

Zusatzaufgabe [Stereotype Turingmaschinen] 5 Punkte

Hauptaufgabe (5 Punkte)

Eine Turingmaschine M bezeichnen wir als *stereotype Turingmaschine*, kurz *STM*, wenn die Bewegung ihres Zeigers während ihrer Berechnung bereits durch die Länge des Eingabewortes eindeutig bestimmt ist. Seien nun $w, w' \in \Sigma^*$ zwei Wörter mit gleicher Länge, es gelte also $|w| = |w'|$. Seien ferner für jedes $t \in \mathbb{N}_0$ die Konfigurationen $K_t = (q_t, (w_t, s_t))$ und $K'_t = (q'_t, (w'_t, s'_t))$ die t-ten Konfigurationen der Turingmaschine M bei Eingabe w und w', also $(s, (w, 0)) \vdash_M^t K_t$ und $(s, (w', 0)) \vdash_M^t K'_t$. Ist M eine STM, so gilt $s_t = s'_t$ für alle $t \in \mathbb{N}_0$.

In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass für jede Turingmaschine M eine äquivalente STM M' existiert. Vereinfachend soll hier angenommen werden, dass die gegebene Turingmaschine M während ihrer gesamten Berechnung bei einer Eingabe w der Länge $|w| = n$ lediglich die ersten $n + 2$ Felder auf ihrem Arbeitsbereich besucht.

a) Beschreiben Sie, wie aus einer beliebigen Turingmaschine M, welche obige Vereinfachung erfüllt, eine äquivalente STM M' konstruiert werden kann.

(3 Punkte)

b) Präzisieren Sie Ihre Beschreibung aus Teilaufgabe a), indem Sie die Zustandsmenge Q', das Bandalphabet Γ', den Startzustand s' und die Transitionsfunktion δ' in Abhängigkeit von der Turingmaschine $M = (Q, \Gamma, \delta, s)$ so bestimmen, dass $M' = (Q', \Gamma', \delta', s')$ eine zu M äquivalente STM ist. **(2 Punkte)**

Testfragen

1. Wieso gibt es für jedes WHILE-Programm ein äquivalentes WHILE-Programm mit nur einer While-Schleife und mehreren If-Anweisungen?
2. Was ist ein Algorithmus und was bedeutet Entscheidbarkeit?
3. Sei M eine Turingmaschine und $L(M)$ die Menge der von ihr akzeptierten Wörter. Was muss gelten, damit M die Sprache $L(M)$ entscheidet?