Übungen zur Vorlesung Grundbegriffe der Theoretischen Informatik

technische universität dortmund

Thomas Schwentick

Gaetano Geck, Lutz Oettershagen,
Christopher Spinrath, Marco Wilhelm

Lehrstuhl 1
Logik in der Informatik

SoSe 2018 | **Übungsblatt 11** | **26.06.2018**

Abgabe bis spätestens am Dienstag, 03.07.2018,

- **(vor der Vorlesung) im HG II, HS 3, oder**
- **in die Briefkästen im Durchgangsflur, der die 1. Etage der OH 12 mit dem Erdgeschoss der OH 14 verbindet.**

Ansonsten gelten die Hinweise von Blatt 1.

Aufgabe 11.1 [Optimierungsprobleme vs. Entscheidungsprobleme] **7 Punkte**

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Ein *Weg* in G ist eine durch Kanten verbundene Folge von Knoten aus G in der *kein Knoten mehrfach* vorkommt. Ein Weg w' ist eine *Fortsetzung* eines Weges w, falls $w = v_1 \dots v_\ell$ und $w' = v_1 \dots v_\ell v_{\ell+1} \dots v_k$. Wir betrachten die folgenden Problemvarianten:

Problem: k-Weg-Fortsetzung
Gegeben: ungerichteter Graph G, Weg $w = v_1 \dots v_\ell$ in G mit $\ell \leq k$
Frage: Lässt sich der Weg w zu einem Weg der Länge k fortsetzen?

Problem: Weg-Fortsetzung
Gegeben: ungerichteter Graph G, Zahl $k \in \mathbb{N}$, Weg $w = v_1 \dots v_\ell$ in G mit $\ell \leq k$
Frage: Lässt sich der Weg w zu einem Weg der Länge k fortsetzen?

Problem: Weg-FortsetzungW
Gegeben: ungerichteter Graph G, Weg w in G
Gesucht: Maximale Zahl $k \in \mathbb{N}$, für die sich der Weg w zu einem Weg der Länge k fortsetzen lässt.

Problem: Weg-FortsetzungO
Gegeben: ungerichteter Graph G, Weg w in G
Gesucht: Fortsetzung von w maximaler Länge.

a) Zeigen Sie, dass sich das Problem k-Weg-Fortsetzung für festes $k \in \mathbb{N}$ in polynomieller Zeit lösen lässt. Warum folgt daraus nicht, dass sich auch das Problem Weg-Fortsetzung in polynomieller Zeit lösen lässt? **(2 Punkte)**

b) Zeigen Sie: **(5 Punkte)**

(i) Lässt sich Weg-Fortsetzung in polynomieller Zeit lösen,
dann lässt sich auch Weg-FortsetzungW in polynomieller Zeit lösen. **[2 Punkte]**

(ii) Lässt sich Weg-FortsetzungW in polynomieller Zeit lösen,
dann lässt sich auch Weg-FortsetzungO in polynomieller Zeit lösen. **[3 Punkte]**

Aufgabe 11.2 [Polynomielle Reduktionen] 8 Punkte

Aus der Vorlesung kennen Sie das Erfüllbarkeitsproblem für aussagenlogische Formeln, SAT.

Problem: SAT
Gegeben: aussagenlogische Formel φ in KNF
Frage: Gibt es eine erfüllende Belegung α für φ?

Gegeben sei ferner das folgende Problem ALLEZEICHEN.

Problem: ALLEZEICHEN
Gegeben: regulärer Ausdruck β, Alphabet Σ
Frage: Gibt es ein Wort $w \in L(\beta)$ mit $\#_\sigma(w) > 0$ für jedes $\sigma \in \Sigma$?

a) Seien $\beta = \big(c_1c_3 + c_2\big)\big(c_1c_2 + \varepsilon\big)\big(c_2 + c_1c_3\big)$ und $\Sigma = \{c_1, c_2, c_3\}$. Gilt $(\beta, \Sigma) \in$ ALLEZEICHEN? Falls ja, geben Sie ein Wort $w \in L(\beta)$ an, dass jedes Zeichen aus Σ enthält. **(0,5 Punkte)**

b) Zeigen Sie, dass ALLEZEICHEN in NP ist. **(2 Punkte)**

Gegeben sei ferner die folgende Funktion f, die Instanzen für SAT (aussagenlogische Formeln in KNF) auf Instanzen für ALLEZEICHEN (reguläre Ausdrücke, mit Alphabet) wie folgt abbildet.

Funktion f

Jede Eingabeformel $\varphi = \psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_k$ mit Klauseln $\psi_1, \ldots, \psi_k$ über Variablen $x_1, \ldots, x_m$ wird abgebildet auf $\boldsymbol{f(\varphi) = (\beta_\varphi, \Sigma_\varphi)}$ mit

$$\beta_\varphi = (p(x_1) + n(x_1)) \ldots (p(x_m) + n(x_m)) \text{ und}$$
$$\Sigma_\varphi = \{c_1, \ldots, c_k\}.$$

Dabei bilden die Funktionen p und n jede Variable x_i auf einen regulären Ausdruck ab:

- $p(x_i) = \sigma_{i,1} \ldots \sigma_{i,k}$, wobei $\sigma_{i,j} = c_j$ gilt, falls x_i ein Literal von ψ_j ist, und $\sigma_{i,j} = \varepsilon$ sonst;
- $n(x_i) = \tau_{i,1} \ldots \tau_{i,k}$, wobei $\tau_{i,j} = c_j$ gilt, falls $\neg x_i$ ein Literal von ψ_j ist, und $\tau_{i,j} = \varepsilon$ sonst.

Beispielsweise bildet f die folgende Formel $\varphi = (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_3)$ auf die ALLEZEICHEN-Instanz $f(\varphi) = (\beta, \Sigma)$ aus Teilaufgabe a) ab.

c) Sei $\varphi = (\neg x_2 \vee \neg x_1) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_3 \vee x_1) \wedge (x_2 \vee x_3 \vee \neg x_3)$. Geben Sie $f(\varphi)$ an. **(0,5 Punkte)**

d) Begründen Sie, warum f in polynomieller Zeit berechenbar ist. **(1 Punkt)**

e) Zeigen Sie, dass f die Reduktionseigenschaft erfüllt, dass also für jede Eingabe φ für SAT gilt:

1. Wenn φ in SAT ist, dann ist $f(\varphi)$ in ALLEZEICHEN.
2. Wenn $f(\varphi)$ in ALLEZEICHEN ist, dann ist φ in SAT.

(4 Punkte)

Zusatzaufgabe [Polynomielle Reduktionen] 2 Punkte

Betrachten Sie das folgende Problem VERTEXCOVER.

Problem: VERTEXCOVER
Gegeben: ungerichteter Graph $G = (V, E)$, Zahl k
Frage: Gibt es eine Menge $S \subseteq V$ mit $|S| \leq k$, sodass jede Kante einen Knoten in S hat?

Gegeben sei ferner das folgende Problem MINMAXZEICHEN.

Problem: MINMAXZEICHEN
Gegeben: regulärer Ausdruck α, Zahlen $m_1, m_2 \in \mathbb{N}_0$, Alphabete Σ_1, Σ_2
Frage: Gibt es ein Wort $w \in L(\alpha)$, sodass

- $\#_\sigma(w) \geq m_1$ für jedes $\sigma \in \Sigma_1$ und
- $\#_\sigma(w) \leq m_2$ für jedes $\sigma \in \Sigma_2$ gilt?

Zeigen Sie VERTEXCOVER $\leq_p$ MINMAXZEICHEN.