technische universität dortmund

Beate Bollig

Gaetano Geck, Thomas Harweg
David Mezlaf, Christopher Spinrath

fakultät für informatik

SoSe 2017 — Übungsblatt 3 — 09.05.2017

Abgabe bis spätestens am Dienstag, 16.05.2017, 10:00 Uhr

- **in die Briefkästen im Durchgangsflur, der die 1. Etage der OH 12 mit dem Erdgeschoss der OH 14 verbindet.**

Ansonsten gelten die Hinweise von Blatt 1.

Aufgabe 3.1 [Satz von Myhill und Nerode] — 5 Punkte

Kurzaufgabe (1 Punkt)

Welche Aussage trifft der Satz von Myhill und Nerode?

Hauptaufgabe (4 Punkte)

Sind die folgenden Sprachen regulär? Zeigen oder widerlegen Sie Ihre Behauptung mit Hilfe des Satzes von Myhill und Nerode oder durch Angabe eines endlichen Automaten.

$$L_1 = \{0^i 1^{2i} \mid i \in \mathbb{N}_0\}$$
$$L_2 = \{w \in \{0,1\}^* \mid \#_0(w) \neq \#_1(w)\}$$
$$L_3 = \{0^i 0^{3i} \mid i \geqslant 0\}$$

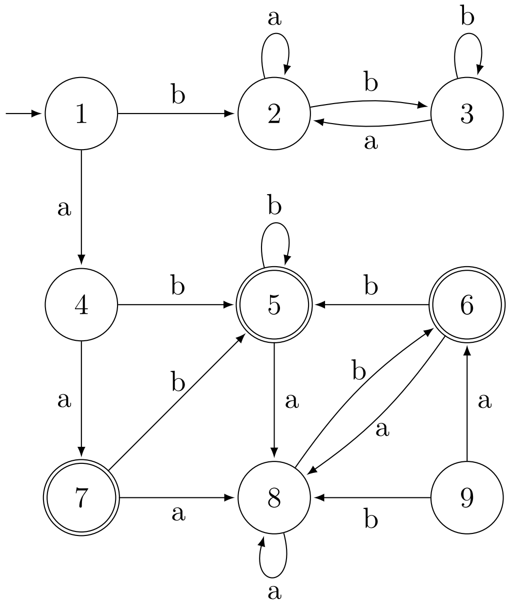
Aufgabe 3.2 [Minimierung endlicher Automaten] — 5 Punkte

Kurzaufgabe (1 Punkt)

Gegeben sei ein endlicher Automat $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ mit zwei verschiedenen Zuständen $q, q' \in Q$, sodass $\delta^*(q, w) \in F \Leftrightarrow \delta^*(q', w) \in F$ für alle Wörter $w \in \Sigma^*$ mit $w \neq \varepsilon$ gilt. Kann der Automat minimal sein?

Hauptaufgabe (4 Punkte)

Bestimmen Sie zu nachfolgend angegebenem DFA einen äquivalenten minimalen DFA unter Verwendung des in der Vorlesung vorgestellten Algorithmus. Geben Sie dabei für jedes markierte Zustandspaar (tabellarisch, siehe Vorlesung) an, in welchem Durchlauf es markiert wurde und zeichnen Sie den resultierenden Minimalautomaten.



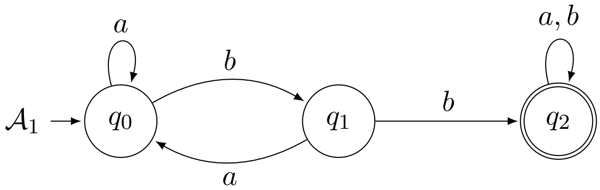
Aufgabe 3.3 [Abschlusseigenschaften: Produktautomaten] 5 Punkte

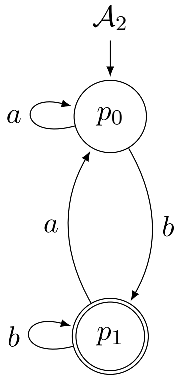
Kurzaufgabe (1 Punkt)

Geben Sie zwei DFAs $\mathcal{A} = (Q_\mathcal{A}, \Sigma, \delta_\mathcal{A}, s_\mathcal{A}, F_\mathcal{A})$ sowie $\mathcal{B} = (Q_\mathcal{B}, \Sigma, \delta_\mathcal{B}, s_\mathcal{B}, F_\mathcal{B})$ an, sodass $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ und $\mathcal{A}$ isomorph sind, aber $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$ *nicht* isomorph zu $\mathcal{B}$ ist. Wählen Sie dabei als Menge der akzeptierenden Zustände der Produkautomaten $F_\mathcal{A} \times F_\mathcal{A}$ bzw. $F_\mathcal{B} \times F_\mathcal{B}$.

Hauptaufgabe (4 Punkte)

a) Gegeben seien die folgenden DFAs $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$. Entscheiden Sie, ob $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ äquivalent sind. Konstruieren Sie dazu einen geeigneten Produktautomaten und beschreiben Sie, wie anhand dieses Produktautomaten die Äquivalenz entschieden werden kann.





(2 Punkte)

Seien nun $\mathcal{A} = (Q_\mathcal{A}, \Sigma, \delta_\mathcal{A}, s_\mathcal{A}, F_\mathcal{A})$ und $\mathcal{B} = (Q_\mathcal{B}, \Sigma, \delta_\mathcal{B}, s_\mathcal{B}, F_\mathcal{B})$ zwei NFAs. Analog zu dem Produktautomaten zweier DFAs ist der *Produktautomat der NFAs* $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ definiert durch

$$\mathcal{A} \times \mathcal{B} \;=\; (Q_\mathcal{A} \times Q_\mathcal{B}, \Sigma, \delta, (s_\mathcal{A}, s_\mathcal{B}), F) \text{ mit } \delta = \{((p,q),\sigma,(p',q')) \mid (p,\sigma,p') \in \delta_\mathcal{A}, (q,\sigma,q') \in \delta_\mathcal{B}\},$$

wobei die Menge der akzeptierenden Zustände F, wie in der Vorlesung, nicht festgelegt ist.

b) Geben Sie zwei NFAs $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ an, sodass der Produktautomat $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ mit der Menge von akzeptierenden Zuständen $F = (Q_\mathcal{A} \times F_\mathcal{B}) \cup (F_\mathcal{A} \times Q_\mathcal{B})$ *nicht* die Sprache $L(\mathcal{A}) \cup L(\mathcal{B})$ entscheidet.

Hinweis: Es gibt ein Beispiel, in dem $\mathcal{A}$ nur einen Zustand hat.

(1 Punkt)

c) Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zwei beliebige NFAs wie oben. Geben Sie eine formale Konstruktion für einen NFA $\mathcal{C} = (Q_\mathcal{C}, \Sigma, \delta_\mathcal{C}, s_\mathcal{C}, F_\mathcal{C})$ an, sodass $L(\mathcal{C}) = L(\mathcal{A}) \cup L(\mathcal{B})$ und $|Q_\mathcal{C}| \in \mathcal{O}(|Q_\mathcal{A}| + |Q_\mathcal{B}|)$ gilt.

Hinweis: Orientieren Sie sich an der Umwandlung von REs zu ε-NFAs im Falle einer Auswahl. Beachten Sie jedoch, dass Sie keine ε-Transitionen verwenden können.

(1 Punkt)

Testfragen

1. Ist jeder minimale DFA auch ein minimaler NFA?
2. Wie groß kann der Produktautomat zweier DFAs maximal werden? Welche Anwendungen hat er?
3. Welche Möglichkeiten gibt es, um zu beweisen, dass eine Sprache regulär ist?