ÜBUNGEN ZUR VORLESUNG GRUNDBEGRIFFE DER THEORETISCHEN INFORMATIK

technische universität dortmund

BEATE BOLLIG

GAETANO GECK, THOMAS HARWEG
DAVID MEZLAF, CHRISTOPHER SPINRATH

fakultät für informatik

SOSE 2017 | ÜBUNGSBLATT 11 | 04.07.2017

Abgabe bis spätestens am Dienstag, 11.07.2017, 10:00 Uhr

- **in die Briefkästen im Durchgangsflur, der die 1. Etage der OH 12 mit dem Erdgeschoss der OH 14 verbindet.**

Ansonsten gelten die Hinweise von Blatt 1.

Aufgabe 11.1 [Satz von Rice] **5 Punkte**

Kurzaufgabe (1 Punkt)

Zeigen Sie mit dem Satz von Rice, dass die beiden folgenden Probleme unentscheidbar sind.

Problem: NICHTTOTALE FUNKTION
Gegeben: Turingmaschine M
Frage: Ist f_M nicht total?

Problem: MONOTONE FUNKTION
Gegeben: Turingmaschine M
Frage: Gilt $|u| \leqslant |f_M(u)|$ für alle $u \in D(f_M)$?

Hauptaufgabe (4 Punkte)

Gegeben seien zwei feste Turing-berechenbare Funktionen f_1, f_2 und die folgenden Probleme.

Problem: EINE VON ZWEI FUNKTIONEN
Gegeben: Turingmaschine M
Frage: Gilt $f_M = f_1$ oder $f_M = f_2$?

Problem: EINE VON ZWEI MASCHINEN
Gegeben: Turingmaschinen M_1 und M_2
Frage: Gilt $f_{M_1} = f_1$ oder $f_{M_2} = f_2$?

Problem: KEINE VON ZWEI FUNKTIONEN
Gegeben: Turingmaschine M
Frage: Gilt $f_M \neq f_1$ und $f_M \neq f_2$?

Problem: RE ENTSCHEIDER
Gegeben: Turingmaschine M
Frage: Entscheidet M die Sprache $L(0(0+1)^*)$?

Beurteilen Sie die Entscheidbarkeit der angegebenen Probleme und begründen Sie Ihr Urteil.

a) Ist das Problem EINE VON ZWEI FUNKTIONEN entscheidbar? **(1 Punkt)**

b) Ist das Problem KEINE VON ZWEI FUNKTIONEN entscheidbar? **(0,5 Punkte)**

c) Ist das Problem EINE VON ZWEI MASCHINEN entscheidbar? **(1 Punkt)**

d) Ist das Problem RE ENTSCHEIDER entscheidbar? **(1,5 Punkte)**

Aufgabe 11.2 [Abschlusseigenschaften: Entscheidbarkeit, Berechenbarkeit] 5 Punkte

Kurzaufgabe (1 Punkt)

Gegeben seien Sprachen $L_i \subseteq \Sigma^*$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$.

1. Sind L_1 und L_2 stets entscheidbar, wenn $L_0 = L_1 \cup L_2$ entscheidbar ist?
2. Ist $L_0 = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} L_i$ stets entscheidbar, wenn L_i für jedes $i \in \mathbb{N}$ entscheidbar ist?

Hauptaufgabe (4 Punkte)

Beurteilen Sie für jede der nachfolgend definierten partiellen Funktionen $g_{\text{cat}}, g_{\text{def}}, g_{\text{inv}} : \Sigma^* \rightharpoonup \Sigma^*$, ob sie stets Turing-berechenbar sind, wenn die partiellen Funktionen $f_1, f_2 : \Sigma^* \rightharpoonup \Sigma^*$ Turing-berechenbar sind, und begründen Sie Ihr Urteil.

a) $g_{\text{cat}}(u) = \begin{cases} w_1w_2, & \text{falls } u \in D(f_1) \cap D(f_2) \text{ und } w_1 = f_1(u),\, w_2 = f_2(u) \\ \bot, & \text{sonst} \end{cases}$ **(1 Punkt)**

b) $g_{\text{def}}(u) = \begin{cases} \varepsilon, & \text{falls } u \in D(f_1) \text{ oder } u \in D(f_2) \\ \bot, & \text{sonst} \end{cases}$ **(1,5 Punkte)**

c) $g_{\text{inv}}(u) = \begin{cases} 1, & \text{falls } f_1(u) = \bot \\ \bot, & \text{falls } f_1(u) \neq \bot \end{cases}$ **(1,5 Punkte)**

Aufgabe 11.3 [Entscheidbarkeit, Semi-Entscheidbarkeit, Unentscheidbarkeit] 5 Punkte

Das folgende Problem, bei dem für ein ganzzahliges Polynom mit beliebig vielen Unbestimmten die Existenz einer ganzzahligen Nullstelle zu entscheiden ist, ist unentscheidbar.

Problem: Eine Nullstelle
Gegeben: Polynom $p(x_1, \dots, x_m)$ mit ganzzahligen Koeffizienten
Frage: Gibt es ganze Zahlen $z_1, \dots, z_m \in \mathbb{Z}$, sodass $p(z_1, \dots, z_m) = 0$ ist?

Hinweis: Beachten Sie, dass Polynome mit mehreren Unbestimmten betrachtet werden. Insbesondere kann die Anzahl der Unbestimmten mit der Eingabe variieren (m ist nicht fest). Beispielsweise ist die Funktion p mit $p(x_1, x_2, x_3) = -10x_1^{27}x_3 + 9x_1x_2^5x_3 - 89x_3^{59}$ für alle $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}^3$ ein Polynom mit drei Unbestimmten.

Kurzaufgabe (1 Punkt)

Geben Sie eine Reduktion f vom folgenden Problem Gleicher Wert auf Eine Nullstelle und eine Reduktion g von Eine Nullstelle auf Gleicher Wert an. Sie müssen nicht beweisen, dass es sich um Reduktionen handelt.

Problem: Gleicher Wert
Gegeben: Polynome $p(x_1, \dots, x_m)$ und $q(x_1, \dots, x_m)$ mit ganzzahligen Koeffizienten
Frage: Gibt es ganze Zahlen $z_1, \dots, z_m \in \mathbb{Z}$, sodass $p(z_1, \dots, z_m) = q(z_1, \dots, z_m)$ ist?

Hauptaufgabe (4 Punkte)

a) Ist Eine Nullstelle semi-entscheidbar? **(1 Punkt)**

b) Nachstehend sind zwei Variationen von Eine Nullstelle angegeben, wobei $[-k, k]$ das ganzzahlige geschlossene Intervall $\{z \in \mathbb{Z} \mid -k \leqslant z \leqslant k\}$ bezeichnet.

Problem: Beschränkte Nullstelle
Gegeben: Polynom $p(x_1, \ldots, x_m)$ mit ganzzahligen Koeffizienten, Zahl $k \in \mathbb{N}_0$
Frage: Gibt es ganze Zahlen $z_1, \ldots, z_m \in [-k, k]$, sodass $p(z_1, \ldots, z_m) = 0$ ist?

Problem: Keine Nullstelle
Gegeben: Polynom $p(x_1, \ldots, x_m)$ mit ganzzahligen Koeffizienten
Frage: Gilt für alle ganzen Zahlen $z_1, \ldots, z_m \in \mathbb{Z}$, dass $p(z_1, \ldots, z_m) \neq 0$ ist?

Beurteilen Sie für Beschränkte Nullstelle und Keine Nullstelle jeweils, ob das Problem entscheidbar ist und ob das Problem semi-entscheidbar ist. Beweisen Sie Ihre Behauptungen. **(2 Punkte)**

c) Wählen Sie aus den drei Problemen Eine Nullstelle, Beschränkte Nullstelle und Keine Nullstelle ein semi-entscheidbares aus und geben Sie einen rekursiv aufzählenden Algorithmus dafür an. **(1 Punkt)**

Zusatzaufgabe [Beweisdetails zur Unentscheidbarkeit von CFGAll] 5 Punkte

In der Beweisskizze zu Satz 15.4, in der zuletzt eine Reduktion von PCP auf $\overline{\text{CFGAll}}$ beschrieben wird, wird behauptet, dass die Komplemente von $L(G_1)$ und $L(G_2)$ kontextfreie Sprachen sind. Beweisen Sie diese Behauptung, indem Sie einen Algorithmus angeben, der ausgehend von einer Grammatik $G_1 = (V_1, \Sigma_1, S_1, P_1)$ mit den Regeln

$$S_1 \to u_1 S_1 1 \mid \cdots \mid u_k S_1 k \mid u_1 \$ 1 \mid \cdots \mid u_k \$ k,$$

für eine PCP-Instanz $(u_1, v_1), \ldots, (u_k, v_k)$, eine kontextfreie Grammatik H_1 erzeugt, sodass $L(H_1) = \Sigma_1^* - L(G_1)$ gilt (dabei sei $\Sigma_1 = \Sigma \cup \{1, \ldots, k, \$\}$ und Σ das Alphabet, über dem die PCP-Instanz gebildet wird). Begründen Sie die Korrektheit Ihres Algorithmus.

Testfragen

1. Warum ist die Reduktion von TM-Halt auf SPCP nicht schon eine Reduktion von TM-Halt auf PCP?
2. Wenn L_1 und L_2 semi-entscheidbare Sprachen sind, ist dann $L_1 - L_2$ notwendigerweise eine semi-entscheidbare Sprache?
3. Ist PCP rekursiv aufzählbar?