GTI Übungsblatt 9
Tutor: Marko Schmellenkamp
ID: MS1
Übung: Mi 16-18

Max Springenberg, 177792

9.1

9.1.1

Gegeben sei ein 2-Kellerautomat A mit

$$A = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, \tau_0, F)$$

Dabei hat δ die Form

$$\delta \subseteq (Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \times \Gamma \times \Gamma) \times (Q \times \Gamma^* \times \Gamma^*)$$

Folglich besteht eine Konfiguration von A aus:

1. einem Zustand $q \in Q$
2. einem Kellerinhalt des ersten Kellers $u \in \Gamma$
3. einem Kellerinhalt des zweiten Kellers $v \in \Gamma$
4. der noch zu lesenden Eingabe $w \in \Sigma^*$

Dementsprechend kann eine Solche Konfiguration auch als Tupel notiert werden, mit:

$$(q, w, u, v), q \in Q, w \in \Sigma^*, u, v \in \Gamma^*$$

Die untersten Kellsymbole der jeweiligen Keller können, aber müssen nicht gleich sein, wichtig ist lediglich, dass sie als solche definiert sind.
$\tau_n, n \in \{1, 2\}$, sei das unterste Kellersymbol des n-ten Kellers.
Des weiteren sei ein Stratzustand s nach Notation des Automaten aus der Aufgabenstellung definiert.

Daraus folgt die Startkonfiguration $K_0 = (s, w, \tau_1, \tau_2), w \in \Sigma^*$, mit dem Eingabewort w für A.

Die Folgekonfigurationsrelation $\vdash_A$ sei wie folgt definiert:
$\forall p, q \in Q, \qquad \sigma \in \Sigma, y \in \Sigma^*, \qquad \tau', \tau'' \in \Gamma, u, v, z', z'' \in \Gamma^*$:

$(p, \sigma y, \tau' u, \tau'' v) \vdash_A (q, y, z' u, z'' v)$, falls: $((p, \sigma, \tau', \tau''), (q, z', z'')) \in \delta$

$(p, y, \tau' u, \tau'' v) \vdash_A (q, y, z' u, z'' v)$, falls: $((p, \epsilon, \tau', \tau''), (q, z', z'')) \in \delta$

Eine Konfiguration K' ist also genau dann eine Nachfolgekonfiguration von K, wenn gilt $K \vdash_A K'$.

Nach Aufgabenstellung wird mit akzeptierenden Zuständen akzeptiert.
Eine Eingabe $w \in \Sigma^*$ wird genau dann akzeptiert, wenn gilt:

$(F \neq \emptyset) \wedge (K_0 \vdash_A^* (q, \epsilon, w', w''), w', w'' \in \Gamma^*, q \in F)$

Für die Semantik von A bedeuted dies ferner:

$$L(A) = \{w \in \Sigma^* | A \text{ akzeptiert } w\}$$

Damit A deterministisch ist muss zusätzlich mit den Konfigurationen K, K_1, K_2 gelten:
$\forall K \nexists K_1, K_2 : K \vdash_A K_1 \wedge K \vdash_A K_2 \wedge K_1 \neq K_2$

9.1.2

Das unterste Kellersymbol beider Keller sei $\rhd$, der erste Keller enthalte den Teil des Strings vom linken Rand bis zur aktuellen Position, der zweite Keller enthalte den Teil rechts von der aktuellen Position.

Zunächst soll die Eingabe komplett eingelesen werden.
Dies geschieht über Transitionsregeln:

$$((p, \sigma y, u, \rhd), (q, \sigma u, \rhd)) \in \delta$$

, die zu Nachfolgekonfigurationen der Form:

$$(p, \sigma y, u, \rhd) \vdash_A (q, y, \sigma u, \rhd),$$

, mit $\sigma \in \Sigma, y \in \Sigma^*, u \in \Gamma^*, p, q \in Q - F$ führen.

Nachdem die Eingabe eingelesen wurde befindet sich A also noch nicht in einem Akzeptierenden Zustand.
Fortan wird mit ϵ-Transitionen die Touringmaschine $M = (Q_M, \Gamma, \delta_M, s_M)$ simuliert.

Dabei wird zunächst wieder zurück zum Start des Strings gelaufen:

$$(p, \epsilon, \tau u \rhd, \rhd v) \vdash_A (q, \epsilon, u \rhd, \rhd \tau v), \tau \in \Gamma, u, v \in \Gamma^*, p, q \in Q - F$$

, bis die Konfiguration $K_{M0} = (q_{M0}, \epsilon, \rhd, \rhd w), q_{M0} \in Q - F, w \in \Gamma^*$ erreicht wird.

Jede Transition $\delta_M(p_M, \tau) = (q_M, \tau', a), p_M, q_M \in Q_M, \tau, \tau' \in \Gamma, a \in \{\rightarrow, \leftarrow, \downarrow\}$ von M wird durch:

$((p, \epsilon, \tau u, \tau'' v), (q, u, \tau' \tau'' v))$, wenn $a = \leftarrow$
$((p, \epsilon, \tau u, v), (q, u \tau' \tau'', v))$, wenn $a = \rightarrow$
$((p, \epsilon, \tau u, v), (q, u \tau', \tau'' v))$, wenn $a = \downarrow$
$, p, q \in Q, \tau'' \in \Gamma$

in A , mit p, q denau dann akzeptierend, wenn p_M, bzw. $q_M \in \{ja\}$, simuliert.

9.2

Zu zeigen ist:

$$Reach \leq DG - Cycle$$

Dazu müssen wir:

(i) eine Reduktionsfunktion f angeben
(ii) beweisen, dass f eine gültige Reduktion ist

(i)

Ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ enthält genau dann einen Kreis durch $v \in V$, wenn ein Weg von v nach v über mindestens einen zu v verschiedenen Knoten gibt.
Existiert nun ein Weg von dem Knoten s über mindestens einen zu t verschiedenen Knoten nach t und man 'verschmilzt' die Knoten s, t und deren inzidente Kanten ohne dierekte Kanten zwischen den Knoten zu einem Knoten v, so existiert auch ein Kreis durch v.

Aus dieser Überlegung folgt f mit:
G kreisfrei :
$f(G) = f((V, E)) = G' = (V', E')$, mit:
$(1) V' = V - \{s, t\} \cup \{v\}$
$(2) E' = E - (\{(w, s)|w \in V\} \cup \{(s, w)|w \in V\} \cup \{(w, t)|w \in V\} \cup \{(t, w)|w \in V\})$
$\cup (\{(w, v)|((w, t) \in E \land w \neq s) \lor ((w, s) \in E \land w \neq t)\}$
$\cup \{(v, w)|((t, w) \in E \land w \neq s) \lor ((s, w) \in E \land w \neq t)\})$

(ii)

Nun bleibt zu zeigen, dass f total und berechenbar ist, sowie dass f die Vorüberlegung erfüllt und diese korrekt ist.

Das f berechenbar ist geht aus der Definition mittles Mengenvereinigung hervor.
Das f total ist, daraus, dass f auf jeden Graphen $G = (V, E)$ angewandt werden kann, da keine Bedingungen an V, E geknüpft sind und lediglich Kanten und Knoten hinzugefügt oder entfernt werden.

Es bleibt zu zeigen:
$I : G \in Reach \rightarrow G \in DG - Cycle$
Wenn t von s aus erreichbar, und deren ein und ausgehende Kanten werden in einem Knoten verschmolzen, so existiert auch ein Weg von dem Knoten zu sich selbst, genau dann wenn mindestens ein Knoten auf dem Weg zwischen s und t liegt.
Damit gilt $G \in Reach \rightarrow G \in DG - Cycle$

$II : G \notin Reach \rightarrow G \notin DG - Cycle$
Wenn t von s aus nicht erreichbar ist, so existiert auch kein Weg und damit kein Kreis von v nach v, es seie denn es s oder t wären bereits in einem Kreis in G. Dies ist nicht möglich, da G kreisfrei ist.

Damit gilt $G \notin Reach \rightarrow G \notin DG - Cycle$

9.3

9.3.1

Aus den Aussagen der Aufgabenstellung folgt, dass eine Menge dann abzählbar unendlich ist, wenn sie gleichmächtig zur Mende $\mathbb{N}$ ist.
Ferner sind die Mengen A, B genau dann zueinander gleichmächtig, wenn eine Bijektion $f : A \to B$ existiert.
Zu zeigen bleibt nun, dass eine solche Bijektion für $\Sigma^*, \mathbb{N}$ existiert.
Das Alphabet besteht aus den Elementen 0,1.

Beobachtung:
Betrachte ein mögliche zuordnung von Wörtern und Zahlen:

ϵ	1
0	2
1	3
00	4
01	5
10	6
11	7
000	8
001	9
010	10
011	11
100	12
101	13
110	14
111	15
...	...

Wir sehen, das einerseits die umwandlung von Binär- in Dezimalwerte, sowie auch die Wortlänge selbst einen Faktor darstellen.
$b2d(w) : \{0,1\}^* \to \mathbb{N}$ sei die Funktion, die jeder Binärzahl die äquivalente Dezimalzahl zuordnet.
Wir müssen für jede Wortlänge $n \in \mathbb{N}$ neue Zahlen aus $\mathbb{N}$ vergeben können. Da wir ein zweielementiges Alphabet haben bedeutet das, dass vor vergabe der Zahlen für die nächst größere Worlänge $n+1$ bereits 2^n Zahlen vergeben wurden. Daraus ergibt sich ein Bias von 2^n für alle Bïnarzahlen.
Ferner muss das leere Wort ϵ auf die 1 abgebildet werden, da wir auf $\mathbb{N}$ abbilden und die 0 nicht enthalten ist.

Betrachte die Funktion:
$f : \Sigma^* \to \mathbb{N}$, mit

$$f(w) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, w = \epsilon \\ 2^{|w|} + b2d(w), \text{sonst} \end{cases}$$

Zu zeigen bleibt, dass f eine Bijektion ist.

(1) f ist injektiv:
$w, w' \in \Sigma^*$

$f(w) = f(w') \overset{!}{\Leftrightarrow} w = w'$

$(i) w = \epsilon \vee w' = \epsilon$
$f(\epsilon) = 1$
$\nexists x \in \Sigma^* - \{\epsilon\} : 2^{|x|} + b2d(x) = 1$
$\Rightarrow w = \epsilon = w'$

$(ii) w \neq \epsilon \wedge w' \neq \epsilon$
$f(w) = 2^{|w|} + b2d(w)$
$f(w') = 2^{|w'|} + b2d(w')$
$f(w) = f(w)$
$\Leftrightarrow 2^{|w|} + b2d(w) = 2^{|w'|} + b2d(w')$

Wenn $|w| > |w'|$, dann $2^{|w|} > 2^{|w'|} + b2d(w')$, da $b2d(w') < 2^{|w'|}$
Wenn $|w| < |w'|$, dann $2^{|w'|} > 2^{|w|} + b2d(w)$, da $b2d(w) < 2^{|w|}$
Wenn $|w| = |w'|$, dann $\Leftrightarrow 2^{|w|} + b2d(w) = 2^{|w'|} + b2d(w')$ genau dann, wenn $b2d(w) = b2d(w')$, dies ist genau dann der Fall, wenn $w = w'$.
Damit ist f injektiv.

(2) f ist surjektiv:
Aussage:

$n \in \mathbb{N} \wedge \exists w \in \Sigma^* : f(w) = n$

$I.A.:$
$n = 1$
$f(\epsilon) = 1$

$I.V.$
Die Aussage gelte für $n' \in \mathbb{N}$ beliebig, aber fest.

$I.S.$
$n = n' + 1$
$n = f(w) = 2^{|w|} + b2d(w)$
$\Leftrightarrow n - 1 = 2^{|w|} + b2d(w) - 1$
$\Leftrightarrow n' = 2^{|w|} + b2d(w) - 1$
Es existiert w', mit $f(w') = 2^{|w|} + b2d(w) - 1$, mit:
$|w| = |w'|, b2d(w) = b2d(w') + 1, 2^{|w|} + b2d(w') = 2^{|w|} + b2d(w) - 1$

oder falls $w = 0^{|w|}$:
$|w'| = |w| - 1, b2d(w') = 2^{|w'|} - 1, b2d(w) = 0,$
$2^{|w'|} + 2^{|w'|} - 1 = 2 * 2^{|w|-1} - 1 = 2^{|w|} - 1 = 2^{|w|} + 0 - 1 = 2^{|w|} + b2d(w) - 1$

damit gilt also:
$n' = 2^{|w|} + b2d(w)$
$\Leftrightarrow n' = f(w')$
Dies gilt nach $I.V.$

Damit ist f surjektiv.

Da f in- und surjektiv ist, ist es ferner auch bijektiv und damit sind dann auch Σ^* und $\mathbb{N}$ gleichmächtig.

9.3.2

Im Rahmen der Veranstaltung haben wir keien Ordnung auf Mengen definiert, wir können aber annehmen, dass es Tupel T gibt, deren Elemente an i-ter stelle, $0 \leq i < |T|, i \in \mathbb{N}_0$, fest definiert sind.

Wir definieren die Funktionen $s2t : S \to T, t2s : T \to S$, mit:

$s2t(S) = (s_0, \ldots, s_n), s_0, \ldots, s_n \in S, s_0 < \ldots < s_n, n \in \mathbb{N}$
$t2s((t_0, \ldots, t_n)) = \{t_0, \ldots, t_n\}, n \in \mathbb{N}$
, die eine Menge mit ausschließlich unterschiedlichen Elementen auf ein aufsteigend sortiertes Tupel und ein Tupel auf eine Menge abbilden.

Wir definieren die Funktionen $map_t : f \times T \to T, map_s : f \times S \to S$, mit:
$map_t(f, (a_0, \ldots, a_n)) = (f(a_0), \ldots, f(a_n)), n \in \mathbb{N}$
$map_s(f, \{a_0, \ldots, a_n\}) = \{f(a_0), \ldots, f(a_n)\}, n \in \mathbb{N}$
, die auf jedes Element von einem Tupel T/ einer Menge S, die Funktion f anwenden.

Die Ordnungsstruktur erleichtert uns später den Beweis.

Wir wissen, dass Σ^* abzählbar unendlich ist und damit Bijektionen $b : \Sigma^* \to \mathbb{N}$ und $b^{-1} : \mathbb{N} \to \Sigma^*$ existieren.
Ferner bedeutet dies, dass wenn gezeigt werden kann, dass $P(\mathbb{N})$ überabzählbar unendlich ist, dann auch $P(map_s(b^{-1}, \mathbb{N})) = P(\Sigma)$

Wir betrachten alle Unendlichen Mengen $M \in P(\mathbb{N})$, die zueinander verschieden sind und jedes Element nur einzeln enthalten.
M ließe sich in etwa wie folgt rekursiv definieren:
$M = \{S \in P() | \text{S ist unendlich und enthllt jedes element nur einmal}, S \notin M\}$
Nun bilden wir die Menge M_t, die alle Mengen als aufsteigend sortierte Tupel enthält.
$M_t = map_s(s2t, M)$.
Alle Tupel aus M_t enthalten also noch die selben Elemente wie zuvor die jeweiligen Mengen in M.
Wir nehmen an, dass jeder Zahl $n \in \mathbb{N}$ ein Element aus M zugeordnet wurde, M also abzählbar unendlich sei.

Wir definieren $T_t = (T_0, \ldots, T_i)$, als alle Tupel aus M_t, für die gilt $t_{i,j} < t_{i+1,j}, i, j \in \mathbb{N}$, wobei $t_{i,j}$ das $j-te$ Element aus dem $i-ten$ Tupel aus T_t ist. Dann kann zunächst das Tupel $T = (t_{0,0}, \ldots, ti, j), i, j \in \mathbb{N}_0, i = j$ gebildet werden. T enthält also das $j-te$ Element, des $i-ten$ Tupel aus T_t, mit $i = j$ und ist damit auch aufsteigend sortiert.

Wenden wir nun auf T, die Funktion $add1(x) = x + 1$ an, so erhalten wir mit:

$$T' = map_t(add1, T)$$

ein Tupel, dass zu jedem Tupel aus T_t ein Element $t_j \in T'$, mit $t_j \neq t_{i,j}, i, j \in \mathbb{N}_0$ enthält.

Ferner ist das Tupel T' damit nicht in T_t enthalten, obwohl es die Kriterien für T_t erfüllt und auch $S = t2s(T')$ ist nicht in M, da sonst T' in T_t wäre.
Ferner gilt, das M damit nach Diagonalisierung überabzählbar unendlich ist. $\lightning$

Da $M \subset P(\mathbb{N})$ und M überabzählbar unendlich ist, ist dann auch die echt mächtigere Menge $P(\mathbb{N})$ auch überabzählbar.

Nun wissen wir, dass $P(\mathbb{N})$ überabzählbar unendlich ist.
Wir Können analog zu dem Beweis von $P(\mathbb{N})$ agieren, indem wir zunäuchst $P(\mathbb{N}) = P(map_s(b, \Sigma^*))$ bilden, dann wie zuvor vorgehen und argumentieren, dass $map_s(b^{-1}, S) \notin \{map_s(b^{-1}, m) | m \in M\}$ gilt und dadurch den Widerspruch erlangen.

Einfacher ist es aber zu sagen, dass Σ^* und $\mathbb{N}$ gleichmächtig und damit dann auch $P(\Sigma^*), P(\mathbb{N})$ gleichmächtig sind. Da $P(\mathbb{N})$überabzählbar unendlich ist, ist jede andere gleichmächtige Menge dann auch überabzählbar unendlich.
Damit ist auch $P(\Sigma^*)$ nach Diagonalisierung überabzählbar unendlich.