Fakultät für Informatik
Lehrstuhl 11
Prof. Dr. Petra Mutzel
Dipl.-Inf. Andre Droschinsky

Übungen zur Vorlesung
Effiziente Algorithmen
Sommersemester 2018

Übungsblatt 3
Besprechungszeit:
07.-09.05.2017

Bitte beachten Sie die Hinweise zu den Übungen und der Übungsgruppenverteilung auf der Homepage der Übung.

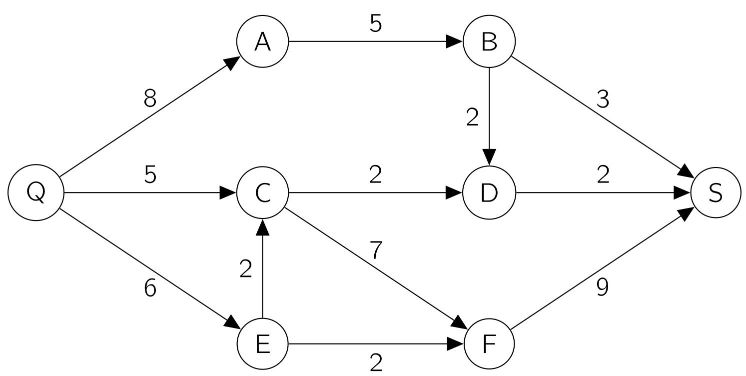
Die (freiwilligen) schriftlichen Lösungen können Sie einfach in Ihrer Übungsgruppe abgeben (gerne auch als Gruppenabgaben).

Aufgabe 3.1 – Wiederholung (3 Punkte)

- Wie ist ein Netzwerk definiert? Was ist ein (maximaler) Fluss und wie ist er definiert?
- Was ist ein Restgraph? Wofür wird er beim Algorithmus von Ford und Fulkerson benötigt?
- Wie ist die Laufzeit des Algorithmus von Ford und Fulkerson? Warum hat der Algorithmus eine pseudopolynomielle Laufzeit?

Aufgabe 3.2 – Algorithmus von Ford und Fulkerson (7 Punkte)

Führen Sie auf dem folgenden Netzwerk den Algorithmus von Ford und Fulkerson durch. Zeichnen Sie in jeder Iteration den Restgraphen und geben Sie den berechneten flussvergrößernden Weg an. Geben Sie nach jeder Iteration den aktuellen Fluss im Originalgraphen an.



Aufgabe 3.3 – Laufzeit des Algorithmus von Ford und Fulkerson mit Breitensuche (7 Punkte)

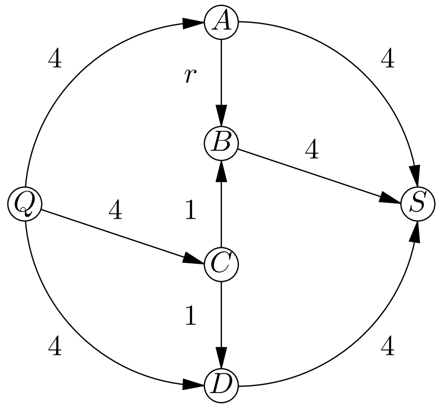
Beweisen Sie, dass die Laufzeit für den Ford-Fulkerson Algorithmus $\mathcal{O}(ne^2) = \mathcal{O}(n^5)$ ist, wenn Breitensuche für die Suche nach flussvergrößernden Wegen benutzt wird.

Hinweis: Zeigen Sie, dass jede Augmentierung eines kürzesten flussvergrößernden Weges der Länge k mindestens eine Kante aus dem Restgraphen entfernt; dabei wird keine neue Kante eingefügt, die im neuen Restgraphen auf einem Pfad der Länge $\leq k$ liegen würde. Schließen Sie dadurch auf die maximale Anzahl an Augmentierungen auf flussvergrößernden Wegen der Länge k.

Aufgabe 3.4 – Algorithmus von Ford und Fulkerson mit reellen Kapazitäten (7 Punkte)

In der Vorlesung wurde die Kapazitätsfunktion definiert als: $c : E \to \mathbb{N}_0$. Nun betrachten wir eine Kapazitätsfunktion der folgenden Form: $c : E \to \mathbb{R}_0^+$; d.h. es sind reellwertige nicht-negative Kapazitäten erlaubt.

Betrachten Sie folgendes Netzwerk G, in dem die Kante (A,B) eine reellwertige Kapazität von $r = (\sqrt{5}-1)/2$ hat.



Was ist der maximale Fluss in G?

Zeigen Sie, dass der Algorithmus von Ford und Fulkerson nicht notwendigerweise einen maximalen Fluss berechnet.

Tipp 1: Betrachten Sie die rekursiv definierte Folge $\{a_n\}$ mit $a_0 = 1$, $a_1 = r$, $a_{n+2} = a_n - a_{n+1}$. Der Wert r ist so gewählt, dass $1-r = r^2$ gilt; damit ist $a_0 = r^0$, $a_1 = r^1$ und $a_{n+2} = a_n - a_{n+1} = r^n - r^{n+1} = r^n(1-r) = r^{n+2}$, d. h. die Folge $\{a_n\}$ entspricht der Folge $\{r^n\}$. Das ist die sogenannte *geometrische Folge*.

Zeigen Sie, dass mit einer geeigneten Folge flussvergrößernder Wege die Berechnung der Folge $\{a_n\}$ simuliert werden kann.

Tipp 2: Die Pfade $(Q \to C \to B \to S)$, $(Q \to A \to B \to C \to D \to S)$, $(Q \to C \to B \to A \to S)$ und $(Q \to D \to C \to B \to S)$ könnten hilfreich sein.