GTI Übungsblatt 9
Tutor: Marko Schmellenkamp
ID: MS1
Übung: Mi 16-18

Max Springenberg, 177792

9.1

9.1.1

Gegeben sei ein 2-Kellerautomat A mit

$$A = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, \tau_0, F)$$

Dabei hat δ die Form

$$\delta \subseteq (Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \times \Gamma \times \Gamma) \times (Q \times \Gamma^* \times \Gamma^*)$$

Folglich besteht eine Konfiguration von A aus:

1. einem Zustand $q \in Q$
2. einem Kellerinhalt des ersten Kellers $u \in \Gamma$
3. einem Kellerinhalt des zweiten Kellers $v \in \Gamma$
4. der noch zu lesenden Eingabe $w \in \Sigma^*$

Dementsprechend kann eine Solche konfiguration auch als Tupel notiert werden, mit:

$$(q, w, u, v), q \in Q, w \in \Sigma^*, u, v \in \Gamma^*$$

Die untersten Kellsymbole der jeweiligen Keller können, aber müssen nicht gleich sein, wichtig ist lediglich, dass sie als solche definiert sind.
$\tau_n, n \in \{1, 2\}$, sei das unterste Kellersymbol des n-ten Kellers.
Des weiteren sei ein Stratzustand s nach Notation des Automaten aus der Aufgabenstellung definiert.

Daraus folgt die Startkonfiguration $K_0 = (s, w, \tau_1, \tau_2), w \in \Sigma^*$, mit dem Eingabewort w für A.

Die Folgekonfigurationsrelation $\vdash_A$ sei wie folgt definiert:
$\forall p, q \in Q, \qquad \sigma \in \Sigma, y \in \Sigma^*, \qquad \tau', \tau'' \in \Gamma, u, v, z', z'' \in \Gamma^*$:

$(p, \sigma y, \tau' u, \tau'' v) \vdash_A (q, y, z' u, z'' v)$, falls: $((p, \sigma, \tau', \tau''), (q, z', z'')) \in \delta$

$(p, y, \tau' u, \tau'' v) \vdash_A (q, y, z' u, z'' v)$, falls: $((p, \epsilon, \tau', \tau''), (q, z', z'')) \in \delta$

Eine Konfiguration K' ist also genau dann eine Nachfolgekonfiguration von K, wenn gilt $K \vdash_A K'$.

Nach Aufgabenstellung wird mit akzeptierenden Zuständen akzeptiert.
Eine Eingabe $w \in \Sigma^*$ wird genau dann akzeptiert, wenn gilt:

$(F \neq \emptyset) \wedge (K_0 \vdash_A^* (q, \epsilon, w', w''), w', w'' \in \Gamma^*, q \in F)$

Für die Semantik von A bedeuted dies ferner:

$$L(A) = \{w \in \Sigma^* | A \text{ akzeptiert } w\}$$

Damit A deterministisch ist muss zusätzlich mit den Konfigurationen K, K_1, K_2 gelten:
$\nexists K_1, K_2 : K \vdash_A K_1 \wedge K \vdash_A K_2 \wedge K_1 \neq K_2$

9.1.2

Das unterste Kellersymbol beider Keller sei $\rhd$, der erste Keller enthalte den Teil des Strings vom linken Rand bis zur aktuellen Position, der zweite Keller enthalte den Teil rechts von der aktuellen Position.

Zunächst soll die Eingabe komplett eingelesen werden.
Dies geschieht über Transitionsregeln:

$$((p, \sigma y, u, \rhd), (q, \sigma u, \rhd)) \in \delta$$

, die zu Nachfolgekonfigurationen der Form:

$$(p, \sigma y, u, \rhd) \vdash_A (q, y, \sigma u, \rhd),$$

, mit $\sigma \in \Sigma, y \in \Sigma^*, u \in \Gamma^*, p, q \in Q - F$ führen.

Nachdem die Eingabe eingelesen wurde befindet sich A also noch nicht in einem Akzeptierenden Zustand.
Fortan wird mit ϵ-Transitionen die Touringmaschine M simuliert.

Dabei wird zunächst wieder zurück zum Start des Strings gelaufen:

$$(p, \epsilon, \tau u \rhd, \rhd v) \vdash_A (q, \epsilon, u \rhd, \rhd \tau v), \tau \in \Gamma, u, v \in \Gamma^*, p, q \in Q - F$$

, bis die Konfiguration $K_{M0} = (q_{M0}, \epsilon, \rhd, \rhd w), q_{M0} \in Q - F, w \in \Gamma^*$ erreicht wird.

Jede Transition $\delta_M(p_M, \tau) = (q_M, \tau', a), p_M, q_M \in Q_M, \tau, \tau' \in \Gamma, a \in \{\rightarrow, \leftarrow, \downarrow\}$ von M wird durch:

$((p, \epsilon, \tau u, \tau'' v), (q, u, \tau' \tau'' v)),$ wenn $a = \leftarrow$
$((p, \epsilon, \tau u, v), (q, u \tau' \tau'', v)),$ wenn $a = \rightarrow$
$((p, \epsilon, \tau u, v), (q, u \tau', \tau'' v)),$ wenn $a = \downarrow$
$, p, q \in Q, \tau'' \in \Gamma$

in A , mit p, q denau dann akzeptierend, wenn p_M, bzw. $q_M \in \{ja\}$, simuliert.

9.2

Zu zeigen ist:

$$Reach \leq DG - Cycle$$

Dazu müssen wir:
(i) eine Reduktionsfunktion f angeben
(ii) beweisen, dass f eine gültige Reduktion ist

(i)

Ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ enthält genau dann einen Kreis durch $v \in V$, wenn ein Weg von v nach v über mindestens einen zu v verschiedenen Knoten gibt.
Wenn man nun eine Kante von einem neuem Knoten s zu v und Kanten die nach v gehen auch an einen neuen Knoten t anfügt, so existiert mit einem Solchen Kreis über v auch zwingend ein Weg von s nach t.

Aus dieser Überlegung folgt f mit:
$f(G) = f((V, E)) = G' = (V', E')$
$(1) V' = V \cup \{s, t\}$
$(2) E' = E \cup (s, v) \cup \{(w, t) | \forall w \in V : (w, v) \in E\}$

(ii)

Nun bleibt zu zeigen, dass f total und berechenbar ist, sowie dass f die Vorüberlegung erfüllt und diese korrekt ist.

Das f berechenbar ist geht aus der Definition mittles Mengenvereinigung hervor.
Das f total ist, daraus, dass f auf jeden Graphen $G = (V, E)$ angewandt werden kann, da keine Bedingungen an V, E geknüpft sind und lediglich Kanten und Knoten hinzugefügt werden.

f erfüllt die Vorüberlegung, da das hinzufügen von den Knoten durch (1) und das der Kanten durch (2) umgesetzt wird.

Nun zur Korrektheit der Überlegung:

Annahme: Es existiert ein Graph G mit einem Kreis durch v, für den $f(G)$ mit einem Weg von s nach t diesen nicht ermittelt.

Nach Annahme existiert ein Kreis durch v, das bedeutet insbesondere, das mindestens eine Kante, die zu v führt von v und damit auch von s, mit $(s, v) \in E'$ erreichbar ist. Inzidente Kanten zu t wurden durch (2) definiert. Existiert also von einem durch s und auch v erreichbaren Knoten keine Kante zu t, so existiert auch keine Kante zu v.
Nach Annahme darf keine solche Kante existieren, das würde bedeuten, dass auch kein Weg von v nach v existiert und damit dann auch kein Kreis über v . ↯

Nach Widerspruch ist damit f korrekt.

Dadurch, dass f korrekt, berechenbar und total ist, ist f eine Reduktion für $Reach \leq DG - Cycle$

9.3

9.3.1

Aus den Aussagen der Aufgabenstellung folgt, dass eine Menge dann abzählbar unendlich ist, wenn sie gleichmächtig zur Mende $\mathbb{N}$ ist.
Ferner sind die Mengen A, B genau dann zueinander gleichmächtig, wenn eine Bijektion $f : A \to B$ existiert.
Zu zeigen bleibt nun, dass eine solche Bijektion für $\Sigma^*, \mathbb{N}$ existiert.
Das Alphabet besteht aus den Elementen 0,1.

Beobachtung:
Betrachte ein mögliche zuordnung von Wörtern und Zahlen:

ϵ	1
0	2
1	3
00	4
01	5
10	6
11	7
000	8
001	9
010	10
011	12
100	13
101	14
110	15
111	16
...	...

Wir sehen, das einerseits die umwandlung von Binär- in Dezimalwerte, sowie auch die Wortlänge selbst einen Faktor darstellen.
$b2d(w) : \{0,1\}^* \to \mathbb{N}$ sei die Funktion, die jeder Binärzahl die äquivalente Dezimalzahl zuordnet.
Wir müssen für jede Wortlänge $n \in \mathbb{N}$ neue Zahlen aus $\mathbb{N}$ vergeben können. Da wir ein zweielementiges Alphabet haben bedeutet das, dass vor vergabe der Zahlen für die nächst größere Worlänge $n + 1$ bereits 2^n Zahlen vergeben wurden. Daraus ergibt sich ein Bias von 2^n für alle Bïnarzahlen.
Ferner muss das leere Wort ϵ auf die 1 abgebildet werden, da wir auf $\mathbb{N}$ abbilden und die 0 nicht enthalten ist.

Betrachte die Funktion:
$f : \Sigma^* \to \mathbb{N}$, mit

$$f(w) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, w = \epsilon \\ 1 + 2^{|w|} + b2d(w), \text{sonst} \end{cases}$$

Zu zeigen bleibt, dass f eine Bijektion ist.

(1) f ist injektiv:
$w, w' \in \Sigma^*$
$f(w) = f(w') \overset{!}{\Leftrightarrow} w = w'$
$(i) w = \epsilon \vee w' = \epsilon$
$f(\epsilon) = 1$
$\nexists x \in \Sigma^* - \{\epsilon\} : 1 + 2^{|x|} + b2d(x) = 1$
$\Rightarrow w = \epsilon = w'$

$(ii) w \neq \epsilon \wedge w' \neq \epsilon$
$f(w) = 1 + 2^{|w|} + b2d(w)$
$f(w') = 1 + 2^{|w'|} + b2d(w')$
$f(w) = f(w)$
$\Leftrightarrow 1 + 2^{|w|} + b2d(w) = 1 + 2^{|w'|} + b2d(w')$
$\Leftrightarrow 2^{|w|} + b2d(w) = 2^{|w'|} + b2d(w')$

Wenn $|w| > |w'|$, dann $2^{|w|} > 2^{|w'|} + b2d1^{|w'|}$
Wenn $|w| < |w'|$, dann $2^{|w'|} > 2^{|w|} + b2d1^{|w|}$
Wenn $|w| = |w'|$, dann $\Leftrightarrow 2^{|w|} + b2d(w) = 2^{|w'|} + b2d(w')$ genau dann, wenn $b2d(w) = b2d(w')$, dies ist genau dann der Fall, wenn $w = w'$.
Damit ist f injektiv.

(2) f ist surjektiv:
Aussage:

$n \in \mathbb{N} \exists w \in \Sigma^* : f(w) = n$

$I.A.:$
$n = 1$
$f(\epsilon) = 1$

$I.V.$
Die Aussage gelte für $n' \in \mathbb{N}$ beliebig, aber fest.

$I.S.$
$n = n' + 1$
$n = f(w) = 1 + 2^{|w|} + b2d(w)$
$\Leftrightarrow n - 1 = 2^{|w|} + b2d(w)$
$\Leftrightarrow n' = 2^{|w|} + b2d(w)$
Es existiert w', mit $f(w') = 2^{|w|} + b2d(w)$,mit:
$|w| = |w'|, b2d(w) = b2d(w') - 1, 1 + 2^{|w|} + b2d(w') - 1 = 2^{|w|} + b2d(w)$

oder falls $w = 0^{|w|}$:
$|w'| = |w| - 1, b2d(w') = 2^{|w'|} - 1, b2d(w) = 0, 1 + 2 * 2^{|w|-1} - 1 = 2 * 2^{|w|-1} = 2^{|w|} = 2^{|w|} + 0 = 2^{|w|} + b2d(w)$

damit gilt also:
$n' = 2^{|w|} + b2d(w)$
$\Leftrightarrow n' = f(w')$
Dies gilt nach $I.V.$

Damit ist f surjektiv.

Da f in- und surjektiv ist ist es ferner auch bijektiv und damit sind dann auch Σ^* und $\mathbb{N}$ gleichmächtig.

9.3.2