Kapitel 4

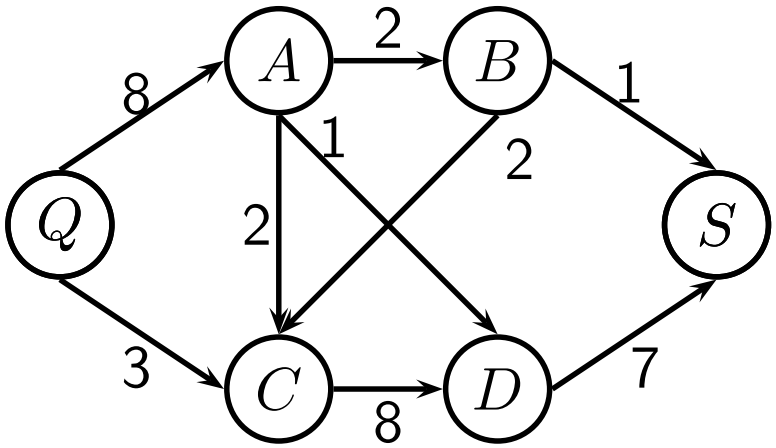
Flüsse in Graphen

Effiziente Algorithmen, SS 2018

Professor Dr. Petra Mutzel

VO 6 am 26. April 2018

4.1 Das Flussproblem

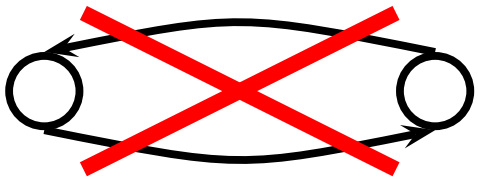


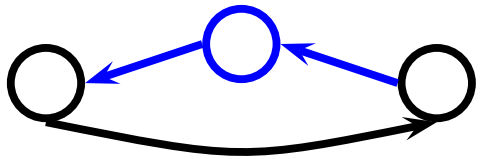
Definition 4.1

Ein Netzwerk N ist ein gerichteter, asymmetrischer, gewichteter Graph $G = (V, E, c)$ mit Quelle $Q \in V$ und Senke $S \in V$ und einer Kapazitätsfunktion $c\colon E \to \mathbb{N}_0$.
Die Quelle hat Eingangsgrad 0, die Senke hat Ausgangsgrad 0.

Bemerkung zur Definition

- Asymmetrisch bedeutet: $\forall u, v \in V : (u, v) \in E \Rightarrow (v, u) \notin E$.
- Mit dieser Bedingung, auf die auch verzichtet werden könnte, ist die Beschreibung der Algorithmen einfacher.
- Praktisch bedeutet sie keine Einschränkung, weil man im Falle einer Verletzung künstliche Knoten hinzufügen kann $\Rightarrow$ asymmetrisch.





Definitionen

Definition 4.1

Ein Netzwerk N ist ein gerichteter, asymmetrischer, gewichteter Graph $G = (V, E, c)$ mit Quelle $Q \in V$ und Senke $S \in V$ und einer Kapazitätsfunktion $c\colon E \to \mathbb{N}_0$.
Die Quelle hat Eingangsgrad 0. Die Senke hat Ausgangsgrad 0.

- In einem Netzwerk heißt die Abbildung $\phi\colon E \to \mathbb{R}_0^+$ Fluss, wenn gilt:
  1. $\forall e \in E\colon \phi(e) \leq c(e)$ (Kapazitäten respektierend)
  2. $\forall v \in V \setminus \{Q, S\}\colon \sum_{e=(u,v)} \phi(e) = \sum_{e=(v,u)} \phi(e)$ (Kirchhoff-Regel)

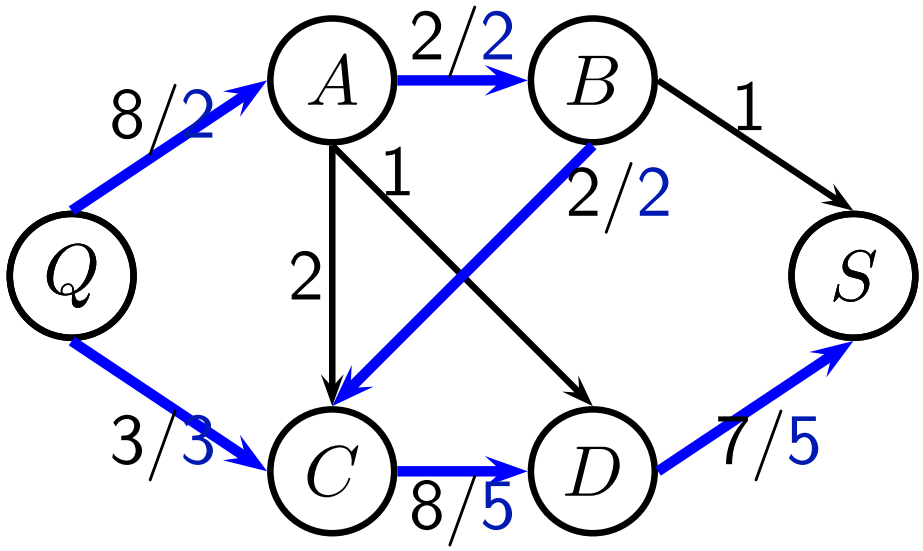
     alles was reinfließt muss rausfließen
- Ein Fluss ϕ heißt ganzzahlig, wenn $\forall e \in E\colon \phi(e) \in \mathbb{N}_0$

Definitionen

Definition 4.1 ff

- Der Wert eines Flusses ϕ ist $w(\phi) = \sum_{e=(Q,v)} \phi(e)$.
- Ein Fluss ϕ heißt maximal, wenn $\forall \phi'$ Fluss: $w(\phi') \leq w(\phi)$.
- Das Flussproblem: Berechne maximalen Fluss in einem gegebenen Netzwerk N

Flussproblem – Beispiel



Fluss ϕ mit Wert $w(\phi) = 5$.

Motivation

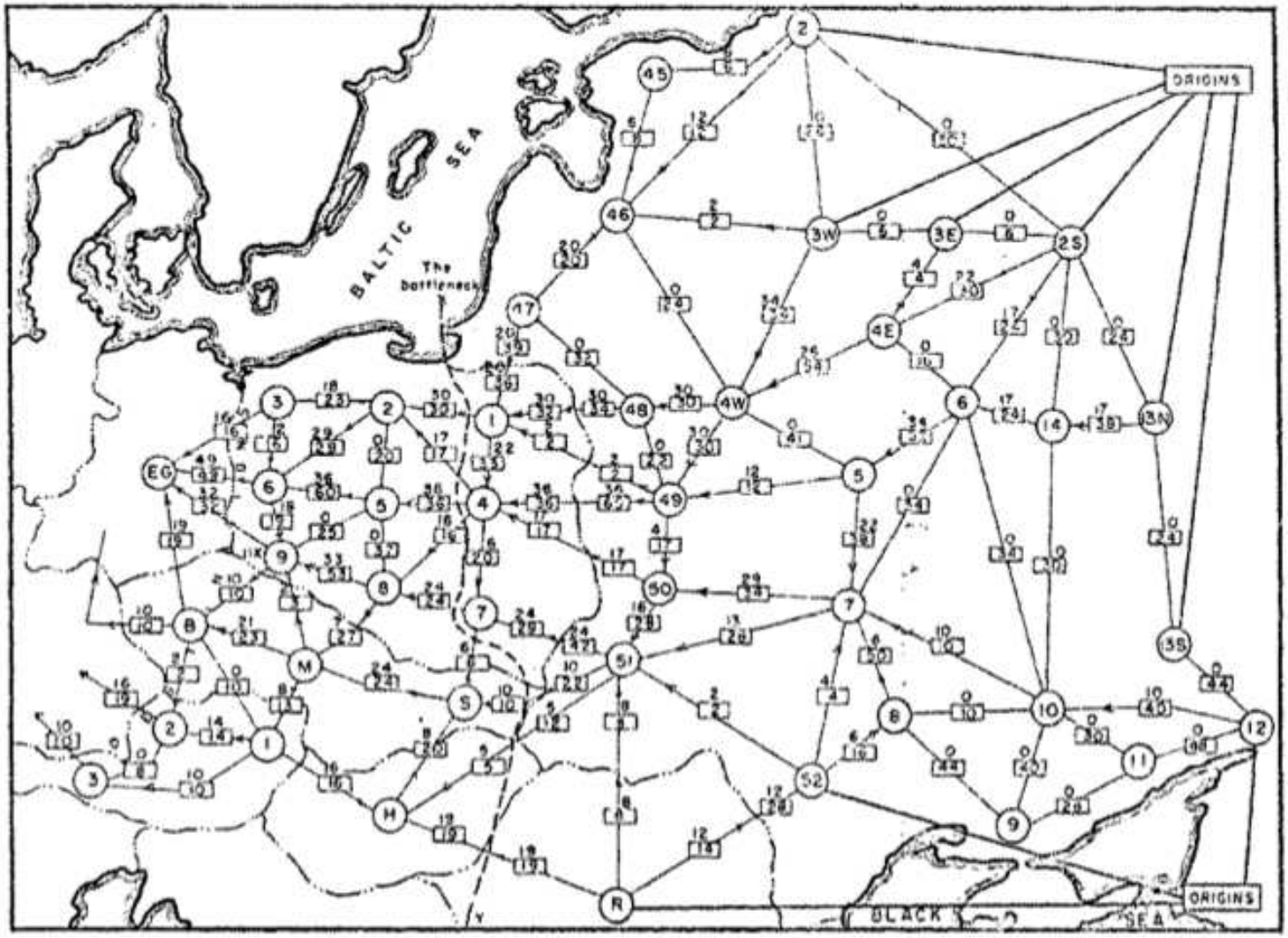
Ziel: möglichst viel Substanz (z.B. Wasser, Öl, Gas) durch ein Netzwerk von einer Quelle zu einer Senke liefern

Viele praktische Anwendungen, wie z.B.

- Energietransporte, wie z.B. Fernwärme
- Telekommunikation
- Gütertransporte (wenn Güter klein sind oder teilbar)
- Paketzustelldienst
- Multimodale Transporte (Speditionen, Green Logistics)
- ...

Viele Probleme als Flussproblem modellierbar!

Historische Anwendung: Eisenbahnnetz [Harris, Ross 1955]



Beispielanwendung

Maximale Matchings in bipartiten Graphen

Sei $G = (U \uplus V, E)$ ein bipartiter Graph.
Definiere Netzwerk $N(G) := (V_N, E_N, c_N)$ durch

- $V_N := \{Q\} \uplus \{S\} \uplus U \uplus V$
- $E_N := \{(Q, u) \mid u \in U\}$
  $\uplus \{(u, v) \mid u \in U, v \in V, \{u, v\} \in E\} \uplus \{(v, S) \mid v \in V\}$
- $c_N(e) := 1$ für alle $e \in E_N$

Beobachtung erinnert an Hopcroft/Karp

Lemma

Sei G ein ungerichteter, bipartiter Graph und ϕ ein ganzzahliger, maximaler Fluss auf $N(G)$.
$M := \{\{u, v\} \mid \phi(u, v) = 1\}$ ist maximales Matching in G.

Beweis des Lemmas

Beweis.

1. Jeder solche Fluss Φ def. Matching M mit $|M| = w(\Phi)$:
   Definiere M durch $e \in M \Leftrightarrow \Phi(e) = 1$.
   M ist Matching, da alle Knoten $u \in U$ genau eine eingehende Kante und alle Knoten $v \in V$ genau eine ausgehende Kante haben und darum nur Fluss 1 durch jeden Knoten gehen kann.
2. Jedes Matching M def. solchen Fluss Φ mit $|M| = w(\Phi)$:
   Definiere $\phi(Q, u_i) := \phi(u_i, v_i) := \phi(v_i, S) := 1$ für alle $\{u_i, v_i\} \in M$.
   ϕ ist ganzzahliger Fluss mit $w(\phi) = |M|$.

□

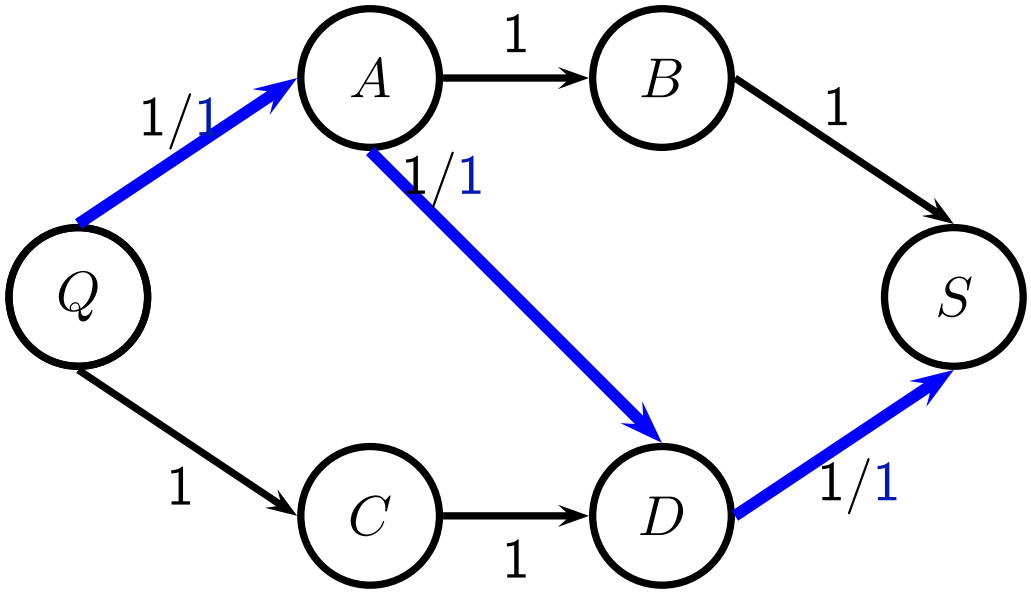
Aber gibt es einen ganzzahligen maximalen Fluss?

Wir erarbeiten uns konstruktiven Beweis: Algorithmus, der ganzzahligen maximalen Fluss berechnet

4.2 Algorithmus von Ford und Fulkerson: Erste Idee

1. Starte mit dem leeren Fluss $\phi \equiv 0$.
2. Suche einen Weg von der Quelle zur Senke ausschließlich über Kanten mit freien Kapazitäten.
3. Vergrößere den Fluss, indem die kleinste Restkapazität auf diesem Weg auf den Fluss der betroffenen Kanten addiert wird.
4. Weiter bei 2.

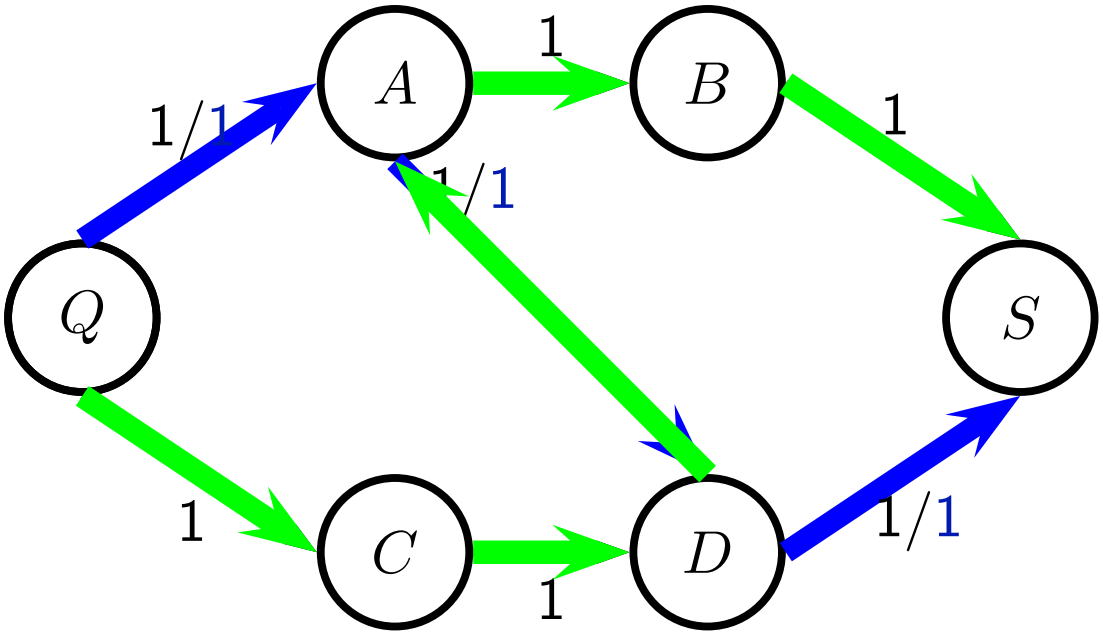
Ein warnendes Beispiel



Man muss schlechte Entscheidungen rückgängig machen können.

Das „warnende“ Beispiel

Idee „Fluss zurücknehmen“ $\leftrightarrow$ „Kante mit Fluss rückwärts gehen“



Der Restgraph

Definition

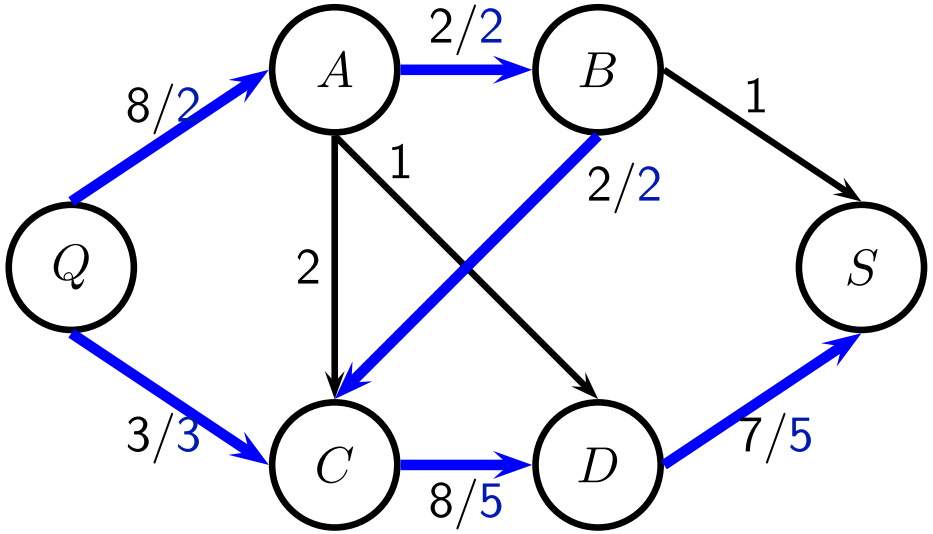
Zu $e = (x, y) \in E$ heißt $\text{rev}(e) = (y, x)$ Rückwärtskante von e.

Definition 4.2 (Restgraph)

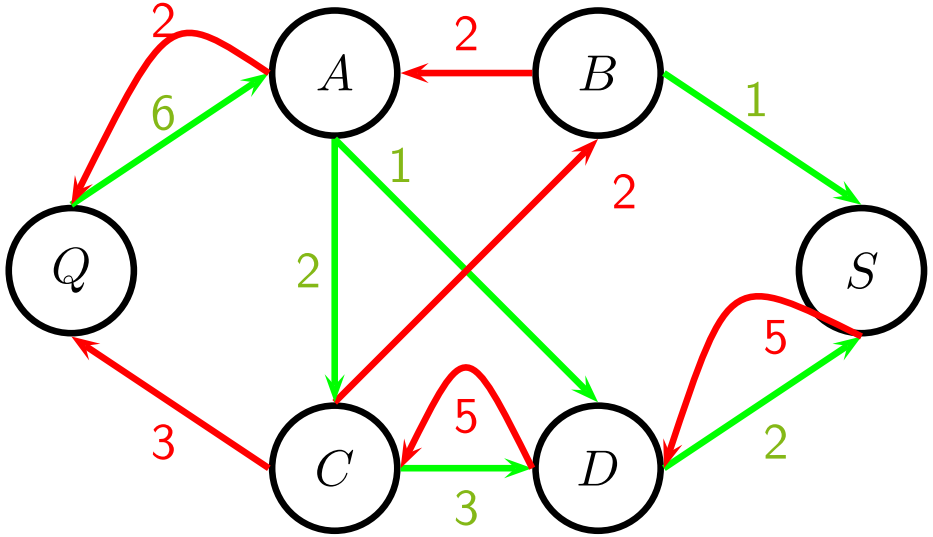
Sei $G = (V, E, c)$ ein Netzwerk, $\phi\colon E \to \mathbb{R}_0^+$ ein Fluss auf G.
Der Restgraph $\text{Rest}_\phi = (V, E_\phi, r_\phi)$ hat die gleichen Knoten wie G und folgende Kanten:

- für $e \in E$ mit $\phi(e) < c(e)$ enthält E_ϕ die Kante e mit Kapazität $r_\phi(e) = c(e) - \phi(e)$,
- für $e \in E$ mit $\phi(e) > 0$ enthält E_ϕ die Kante $e' = \text{rev}(e)$ mit der Kapazität $r_\phi(e') = \phi(e)$.

Beispiel Restgraph



Netzwerk mit Fluss



Restgraph

Über den Nutzen von Restgraphen

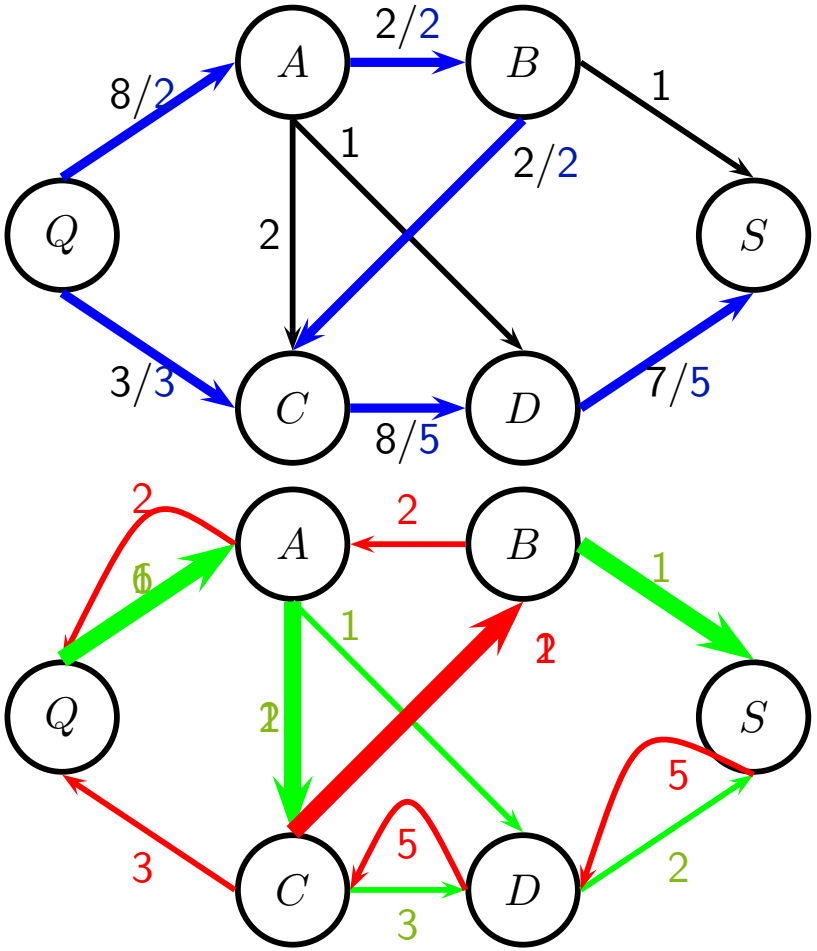
Lemma 4.3

Sei $(G = (V, E), c)$ Netzwerk, Φ Fluss auf G, $\text{Rest}_\Phi = ((V, E'), r_\Phi)$ Restgraph dazu, $P = (e_1, e_2, \ldots, e_l)$ einfacher gerichteter Weg in Rest_Φ mit Start in Q und Ende in S, $r := \min\{r_\Phi(e) \mid e \in P\}$. Betrachte $\Phi' \colon E \to \mathbb{R}_0^+$ mit

$$\Phi'(e) := \begin{cases} \Phi(e) + r & \text{falls } e \in P, \\ \Phi(e) - r & \text{falls } \text{rev}(e) \in P, \\ \Phi(e) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Φ' ist ein Fluss für (G, c) mit $w(\Phi') = w(\Phi) + r > w(\Phi)$.

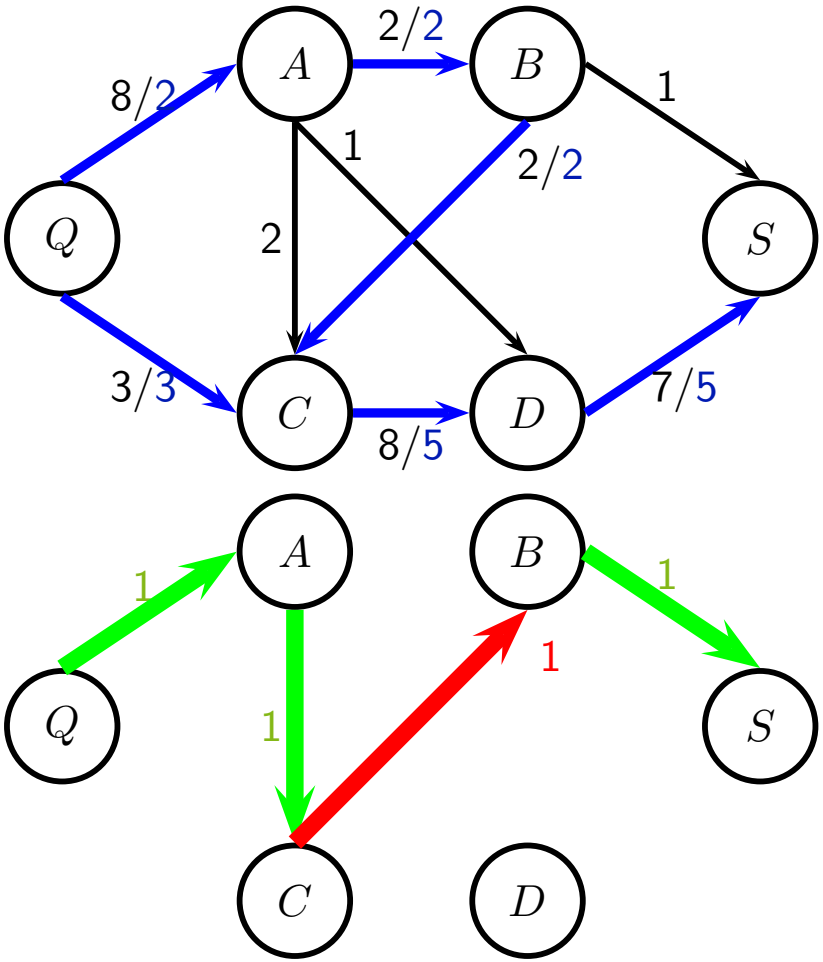
Beispiel Restgraph

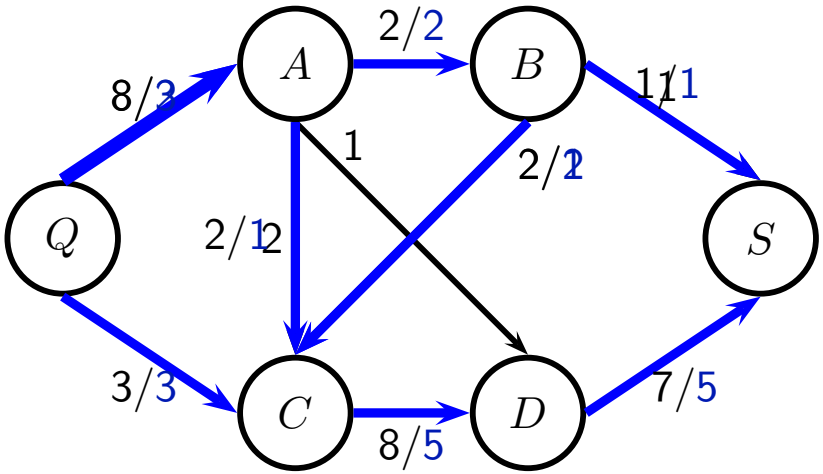


Netzwerk mit Fluss

Restgraph

Beispiel Restgraph





Über den Nutzen von Restgraphen

Lemma 4.3

Sei $(G = (V, E), c)$ Netzwerk, Φ Fluss auf G, $\text{Rest}_\Phi = ((V, E'), r_\Phi)$ Restgraph dazu, $P = (e_1, e_2, \ldots, e_l)$ einfacher gerichteter Weg in Rest_Φ mit Start in Q und Ende in S, $r := \min\{r_\Phi(e) \mid e \in P\}$. Betrachte $\Phi' \colon E \to \mathbb{R}_0^+$ mit

$$\Phi'(e) := \begin{cases} \Phi(e) + r & \text{falls } e \in P, \\ \Phi(e) - r & \text{falls } \text{rev}(e) \in P, \\ \Phi(e) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Φ' ist ein Fluss für (G, c) mit $w(\Phi') = w(\Phi) + r > w(\Phi)$.

Offensichtlich $w(\Phi') = w(\Phi) + r > w(\Phi)$

zu zeigen Ist Φ' wirklich ein Fluss? Kapazitäten, Kirchhoff-Regel

Beweis von Lemma 4.3

Fluss Φ, $\text{Rest}_\Phi = ((V, E'), r_\Phi)$ Restgraph,
$P = (e_1, e_2, \ldots, e_l)$ einfacher gerichteter Weg in Rest_Φ

$$\Phi'(e) := \begin{cases} \Phi(e) + r & \text{falls } e \in P, \\ \Phi(e) - r & \text{falls } \text{rev}(e) \in P, \\ \Phi(e) & \text{sonst.} \end{cases}$$

schon gesehen Kirchhoff-Regel kritisch: $\sum_{e=(\cdot,v)} \phi(e) = \sum_{e=(v,\cdot)} \phi(e)$

klar für Q und S nichts zu zeigen ✓
Betrachte $e_i = (u, v)$, $e_{i+1} = (v, w)$ mit $v \in V \setminus \{Q, S\}$
Voraussetzung für Φ Kirchhoff-Regel für v erfüllt
1. Fall $e_i \in E$, $e_{i+1} \in E$:

Beobachtung eingehende und ausgehende Summe wachsen um r ✓
2. Fall $e_i \notin E$, $e_{i+1} \notin E$:

Beobachtung eingehende und ausgehende Summe fallen um r ✓

Beweis von Lemma 4.3 – 2. Teil

Fluss Φ, $\text{Rest}_\Phi = ((V, E'), r_\Phi)$ Restgraph,
$P = (e_1, e_2, \ldots, e_l)$ einfacher gerichteter Weg in Rest_Φ

$$\Phi'(e) := \begin{cases} \Phi(e) + r & \text{falls } e \in P, \\ \Phi(e) - r & \text{falls } \text{rev}(e) \in P, \\ \Phi(e) & \text{sonst.} \end{cases}$$

3. Fall $e_i \in E$, $e_{i+1} \notin E$:
Beobachtung eingehende Summe wächst wegen e_i um r
Beobachtung eingehende Summe fällt wegen e_{i+1} um r ✓

4. Fall $e_i \notin E$, $e_{i+1} \in E$:
Beobachtung ausgehende Summe wächst wegen e_{i+1} um r
Beobachtung ausgehende Summe fällt wegen e_i um r ✓ □

Auf dem Weg zum Algorithmus ...

- Restgraph Rest_Φ zu Fluss Φ
- $Q - S$-Weg in $\text{Rest}_\Phi \Rightarrow$ Fluss kann vergrößert werden:
  - minimale Restkapazität r auf dem Pfad berechnen
  - r zu $\Phi(e)$ für $e \in E$ addieren
  - r von $\Phi(e)$ für $e \notin E$ abziehen
  - Wert des Flusses erhöht sich um r

Definition

Ein Weg $Q \rightsquigarrow S$ im Restgraphen heißt flussvergrößernd (FV-Weg) (oder auch augmentierender Weg).

Wir sagen auch: Der Fluss wird entlang des Weges augmentiert.

Algorithmus von Ford und Fulkerson

1. Start mit dem leeren Fluss $\phi \equiv 0$.
2. Berechne den Restgraphen.
3. Markiere Q. {∗ *Wir suchen FV-Weg.* ∗}
4. Solange S nicht markiert ist Weg durch DFS oder BFS
5. Falls es im Restgraphen einen markierten Knoten x, einen nicht markierten Knoten y und eine Kante (x, y) gibt, markiere y mit dem Vermerk „erreicht von x“.
6. Sonst STOP. Ausgabe ϕ.
7. Betrachte den markierten Weg P von Q nach S.
8. $r := \min\{r_\phi(e) \mid e \in P\}$ {∗ *kleinste „Kapazität“* ∗}
9. $\forall e \in E \cap P\colon \phi'(e) := \phi(e) + r$ {∗ *Vorwärtskante* $+r$ ∗}
10. $\forall \text{rev}(e) \in E \cap P\colon \phi'(e) := \phi(e) - r$ {∗ *Rückwärtskante* $-r$ ∗}
11. Weiter bei 2.

Einfache Beobachtungen

- Schritte 4.-6. mit Breitensuche oder Tiefensuche erreichbar
- Minimumsuche geht in Zeit $O(|P|) = O(V)$.
- ϕ wird in Zeit $O(|P|) = O(V)$ augmentiert (aktualisiert).
- Also: eine Runde läuft in Zeit $O(|V| + |E|)$.
- ϕ ist nach jeder Runde ein Fluss.
- Wenn S markiert wird, ist Φ nicht maximal.
- Der berechnete Fluss ist ganzzahlig.

Terminierung

Ist der Ford-Fulkerson-Algorithmus endlich?

klar

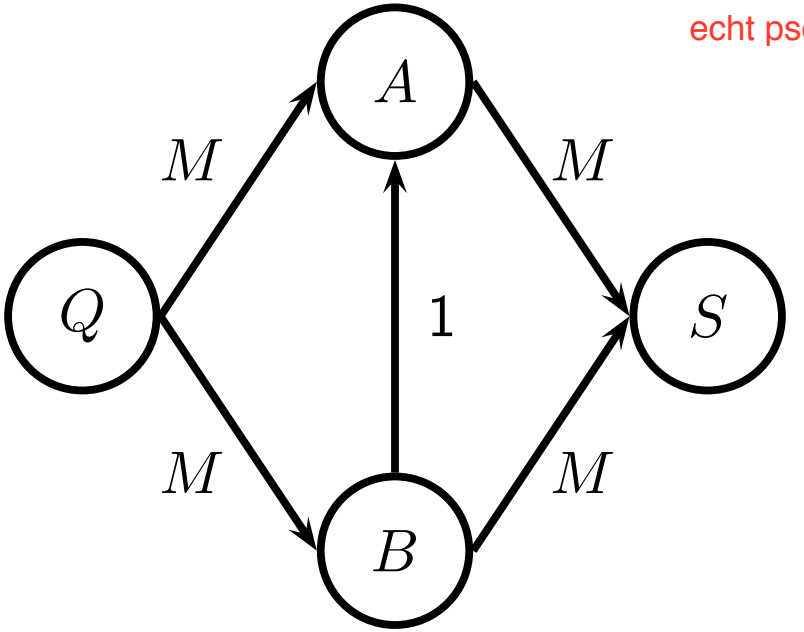
- $B := \sum_{e=(Q,\cdot)} c(e)$ ist obere Schranke für ϕ
- ϕ wächst je Runde um ≥ 1
- Algorithmus stoppt nach $\leq B$ Runden
- Laufzeit $O(B \cdot (|V| + |E|))$

Pseudopolynomiell

Laufzeit des Ford-Fulkerson-Algorithmus

Unsere Abschätzung sagt „superpolynomiell“. Ist das realistisch?

echt pseudopolynomiell



also $2M$ Flussvergrößerungen wenn man Pech hat

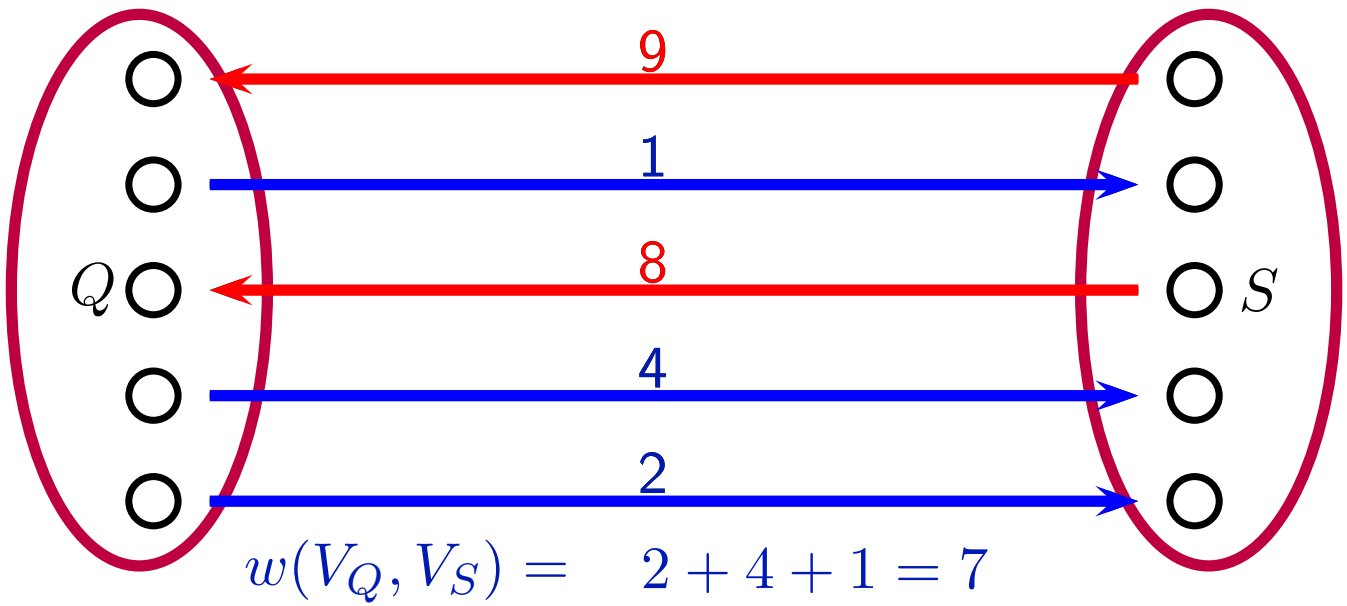
mehr dazu: später

Ist der Fluss maximal? — Beweis im nächsten Abschnitt...

4.3 Das Max-Flow / Min-Cut Theorem

Definition 4.5: Q-S-Schnitte

Eine Partitionierung der Knotenmenge von G in (V_Q, V_S) mit $V_Q \uplus V_S = V$, $Q \in V_Q$ und $S \in V_S$ definiert einen Q-S-Schnitt.
Der Wert eines Q-S-Schnitts ist definiert durch
$w(V_Q, V_S) := \sum_{e \in E \cap (V_Q \times V_S)} c(e)$.



Max Flow = Min Cut

Theorem 4.6 (Max Flow = Min Cut)

Der Wert eines maximalen Flusses in einem Netzwerk N ist gleich dem Wert eines minimalen Q-S-Schnittes.

Beweisidee

2 Schritte:

1. „$\forall$ Flüsse ϕ und $\forall$ Schnitte (V_Q, V_S): $w(\phi) \leq w(V_Q, V_S)$“
2. $\exists \Phi^*$ und $\exists (V_Q^*, V_S^*)$: $w(v_Q^*, V_S^*) = w(\Phi^*)$

Aus dem Beweis folgt:

(a) Max Flow = Min Cut

(b) Optimalität von Ford-Fulkerson, da Φ^* := Ausgabe von Ford-Fulkerson

Beweis „Max Flow = Min Cut“

Beweis. „$\forall$ Flüsse ϕ und $\forall$ Schnitte (V_Q, V_S): $w(\phi) \leq w(V_Q, V_S)$“

Erinnerung $w(\Phi) = \sum_{e=(Q,\cdot)} \Phi(e)$ (Definition)

Beobachtung $\forall v \in V \setminus \{Q, S\}: \sum_{e=(v,\cdot)} \Phi(e) = \sum_{e=(\cdot,v)} \Phi(e)$

(Kirchhoff)

$\Leftrightarrow$ $\forall v \in V \setminus \{Q, S\}: \sum_{e=(v,\cdot)} \Phi(e) - \sum_{e=(\cdot,v)} \Phi(e) = 0$

natürlich auch $\forall v \in V_Q \setminus \{Q\}: \sum_{e=(v,\cdot)} \Phi(e) - \sum_{e=(\cdot,v)} \Phi(e) = 0$

darum $\sum_{v \in V_Q} \left(\sum_{e=(v,\cdot)} \Phi(e) - \sum_{e=(\cdot,v)} \Phi(e) \right) = \sum_{e=(Q,\cdot)} \Phi(e) = w(\Phi)$

Beweis $\forall \Phi, (V_Q, V_S)\colon w(\Phi) \leq w(V_Q, V_S)$

haben $$w(\Phi) = \sum_{v \in V_Q} \left(\sum_{e=(v,\cdot)} \Phi(e) - \sum_{e=(\cdot,v)} \Phi(e) \right)$$

Idee Partitioniere Kanten in drei Teilmengen
$E \cap (V_Q \times V_Q)$, $E \cap (V_Q \times V_S)$, $E \cap (V_S \times V_Q)$

Beobachtung

- $E \cap (V_Q \times V_S)$ ausschließlich in $\sum_{e=(v,\cdot)} \Phi(e)$
- $E \cap (V_S \times V_Q)$ ausschließlich in $-\sum_{e=(\cdot,v)} \Phi(e)$
- $E \cap (V_Q \times V_Q)$ jeweils einmal in beiden Summen $\rightsquigarrow$ Beitrag 0

also $$w(\Phi) = \sum_{e \in E \cap (V_Q \times V_S)} \Phi(e) - \sum_{e \in E \cap (V_S \times V_Q)} \Phi(e)$$

Beweis $\forall \Phi, (V_Q, V_S)\colon w(\Phi) \leq w(V_Q, V_S)$ (Fortsetzung)

haben $\quad w(\Phi) = \sum_{e \in E \cap (V_Q \times V_S)} \Phi(e) - \sum_{e \in E \cap (V_S \times V_Q)} \Phi(e)$

Erinnerung $\quad w(V_Q, V_S) = \sum_{e \in E \cap (V_Q \times V_S)} c(e)$ (Definition)

also $\quad w(V_Q, V_S) \geq \sum_{e \in E \cap (V_Q \times V_S)} \Phi(e)$ weil $\forall e\colon c(e) \geq \Phi(e)$

klar $\quad - \sum_{e \in E \cap (V_S \times V_Q)} \Phi(e) \leq 0$ weil $\forall e\colon \Phi(e) \geq 0$

also

$$w(\Phi) = \sum_{e \in E \cap (V_Q \times V_S)} \Phi(e) - \sum_{e \in E \cap (V_S \times V_Q)} \Phi(e) \leq w(V_Q, V_S) + 0$$

also $\quad \forall \Phi, (V_Q, V_S)\colon w(\Phi) \leq w(V_Q, V_S)$ ✓

Beweis „Max Flow = Min Cut“ (Fortsetzung)

haben $\forall \Phi, (V_Q, V_S)\colon w(\Phi) \leq w(V_Q, V_S)$

wollen Max Flow = Min Cut

zeigen $\exists \Phi^*$ und $\exists (V_Q^*, V_S^*)\colon w(V_Q^*, V_S^*) = w(\Phi^*)$

Beobachtung daraus folgt Behauptung

Definition $\Phi^* :=$ Ergebnis von Ford/Fulkerson

Erinnerung daraus folgt Optimalität des Algorithmus

Definition für (V_Q^*, V_S^*) betrachte markierten Restgraphen Rest_{Φ^*}
$V_Q^* := \{v \mid v \text{ markiert}\}$
$V_S^* := \{v \mid v \text{ nicht markiert}\}$

Beobachtung für $e \in V_Q^* \times V_S^*\colon \Phi(e) = c(e)$
sonst $e \in \text{Rest}_{\Phi^*}$ und Endpunkt markierbar

Beobachtung für $e \in V_S^* \times V_Q^*\colon \Phi(e) = 0$
sonst $\text{rev}(e) \in \text{Rest}_{\Phi^*}$ und Startpunkt markierbar

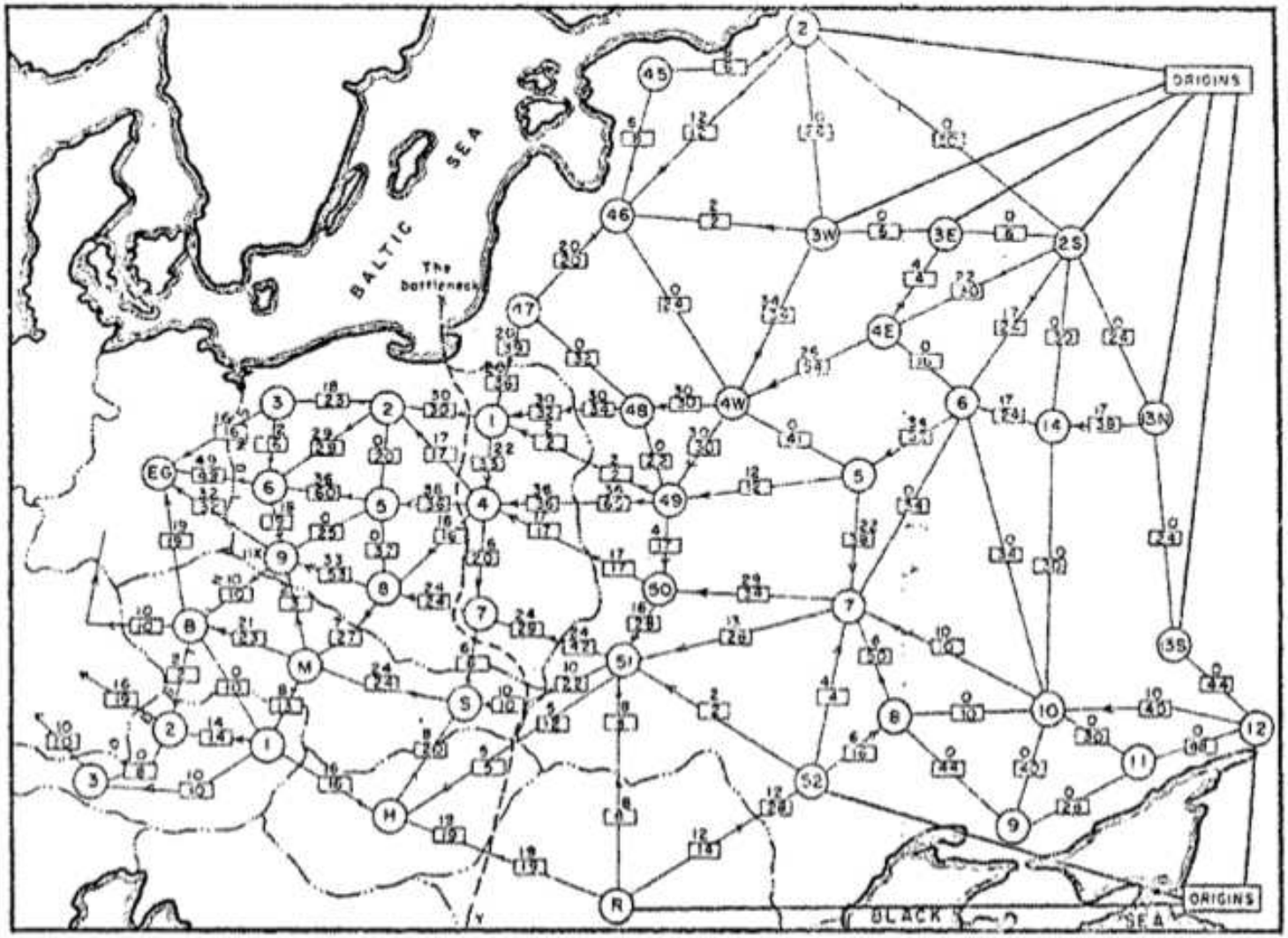
Zusammenfassung für Φ^* und (V_Q^*, V_S^*)

haben

- $\forall e \in V_Q^* \times V_S^* : \Phi(e) = c(e)$
- $\forall e \in V_S^* \times V_Q^* : \Phi(e) = 0$

$$\begin{aligned}
\text{also } w(\Phi^*) &= \sum_{e \in E \cap (V_Q^* \times V_S^*)} \Phi(e) - \sum_{e \in E \cap (V_S^* \times V_Q^*)} \Phi(e) \\
&= \sum_{e \in E \cap (V_Q^* \times V_S^*)} c(e) - \sum_{e \in E \cap (V_S^* \times V_Q^*)} 0 \\
&= \sum_{e \in E \cap (V_Q^* \times V_S^*)} c(e) = w(V_Q^*, V_S^*)
\end{aligned}$$

Motivation für Max Flow vs. Min Cut



Folgerungen aus Max Flow = Min Cut

- Wenn der Ford-Fulkerson-Algorithmus nicht die Senke S markiert, ist ϕ maximal.
- Der Ford-Fulkerson-Algorithmus ist korrekt.
- Der maximale Fluss ist ganzzahlig.

Theorem 4.7

Der Algorithmus von Ford und Fulkerson (Algorithmus 4.4) berechnet einen maximalen Fluss in Zeit $O(B \cdot (|V| + |E|))$ mit

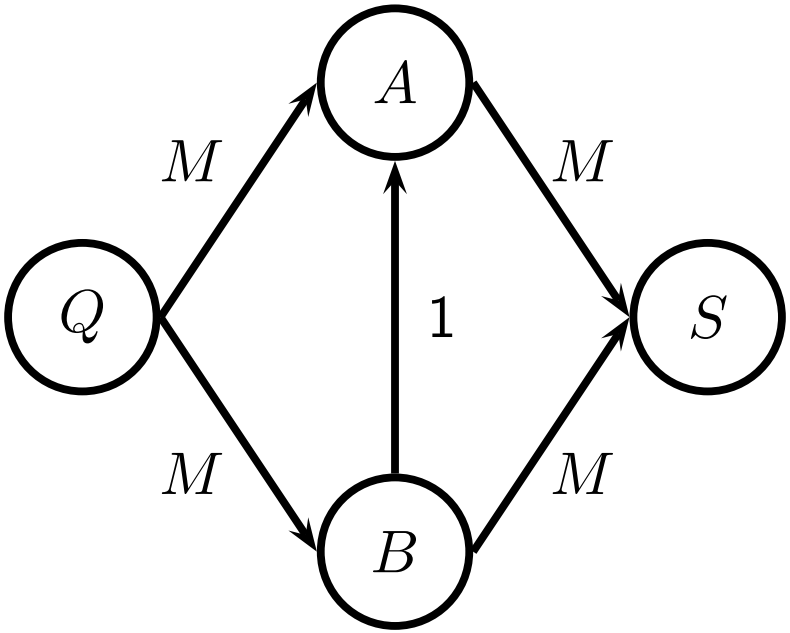
$$B = \min \left\{ \sum_{e=(Q,\cdot)} c(e), \sum_{e=(\cdot,S)} c(e) \right\}.$$

Definition Algorithmen mit Laufzeit polynomiell in Eingabelänge und Größe der größten Zahl heißen pseudopolynomiell

also Algorithmus von Ford und Fulkerson nur pseudopolynomiell

Laufzeit des Ford-Fulkerson-Algorithmus

Unsere Abschätzung sagt pseudopolynomiell. Ist das realistisch?



also $2M$ Flussvergrößerungen wenn man Pech hat
bei Eingabelänge $\Theta(\log M)$
also Laufzeit $O(B \cdot (|V| + |E|))$ wirklich pseudopolynomiell