GTI Übungsblatt 5
Tutor: Marko Schmellenkamp
ID: MS1
Übung: Mi 16-18

Max Springenberg, 177792

5.1

5.1.1

Eine mögliche Lösung die die Grammatik G mit:

$$\begin{array}{lcll} S & \rightarrow & \epsilon & |S' \\ S' & \rightarrow & D & |H \\ D & \rightarrow & aDbb & |abb \\ H & \rightarrow & aaHb & |aab \end{array}$$

Ein Beweis war nicht erforderlich, die Motivation hinter der Struktur der Grammatik ist:

Ein Wort kann entweder halb oder doppelt soviele b's, wie a's haben.
$L(G)$ enthält das leere wort, da $|\epsilon| = 0$ gilt und 0 unter Multiplikation idempotent ist $(2 * \#_a(\epsilon) = 2 * 0 = \#_b(\epsilon))$
Der Fall für doppelt soviele b's wie a's ist durch die Variable D abgedeckt, der Fall für halb soviel durch die Variable H.
Von der Startvariablen aus kann nur genau eine, oder keine der beiden Variablen erreicht werden, die Ableitungsbäume der Variablen haben keine Gemeinsamen Variablen.

5.1.2

Eine mögliche Lösung ist die Grammatik G mit:

$$\begin{array}{lclllllll} V & \rightarrow & str & |num & |true & |false & |null & |A & |O \\ O & \rightarrow & \{\} & |\{V_o\} \\ V_o & \rightarrow & str : V & |V_o, V_o \\ A & \rightarrow & [] & |[V_a] \\ V_a & \rightarrow & V & |V_a, V_a \end{array}$$

, mit der Startvariablen V.
Ein Beweis wurde nicht gefordert, die Motivation hinter der Konstruktion der Grammatik ist:

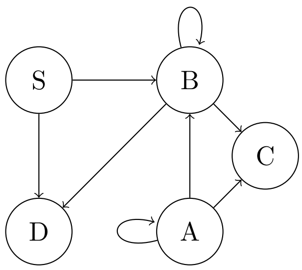
Es sollten genau die gültigen JSON *values* beschrieben werden, damit ist das leere Wort ϵ nicht in der Sprache $L(G)$, da anstelle dessen in JSON *null* verwendet wird.
Ein *value* kann aus einem der Terminalsymbolen $num, str, truefalse, null$ oder einem Array oder Objekt bestehen.
Neben den trivialen Regeln für die Terminalsymbole ergeben sich die Variablen O, für Objekte, und A, für Arrays, durch die vorgeschriebene Syntax.
Werte in einem Array sind durch je ein Komma getrennt und können sämtliche *values* enthalten.
Wertepaare in einem Objekt haben *str* als Schlüssel, ein *value* als Wert und sind wie auch im Array durch je einem Komma getrennt.

5.2

5.2.1

Die Menge V_e ergibt sich zu:
$V_e = \{C, D, S, A, , B\}$
Nicht erzeugende Variablen sind: E
E und Alle Regeln, die E enthalten werden aus der Grammatik G_0 entfernt.

Der Erreichbarkeitsgraph, der erzeugenden Variablen ergibt sich zu:



nicht erreichbare Variablen sind: A

Daraus ergibt sich die Grammatik G'_0 mit:
$S \rightarrow Bb|Da$
$B \rightarrow bBD|Bb|C$
$C \rightarrow c|D|B$
$D \rightarrow a$

5.2.2

CNF 2:
$S \rightarrow BBW_b|W_bW_c$
$A \rightarrow B|AW_a|W_c$
$B \rightarrow BABAW_a|BW_b|C$
$C \rightarrow W_c|A|B$

CNF 3:
$S \rightarrow BS_1|W_bW_c$
$S_1 \rightarrow BW_b$
$A \rightarrow B|AW_a|W_c$
$B \rightarrow BB_1|BW_b|C$
$B_1 \rightarrow AB_2$
$B_2 \rightarrow BB_3$
$B_3 \rightarrow AW_a$
$C \rightarrow W_c|A|B$
$W_a \rightarrow a$
$W_b \rightarrow b$
$W_c \rightarrow c$

5.2.3

CNF4: $V' = \{C, B, A\}$

$S \to W_bA|W_b|BW_c|W_c$
$A \to B|AW_a|W_a|W_c$
$B \to BW_a|W_a|BW_b|W_b|C$
$C \to W_c|A|B$
$W_a \to a$
$W_b \to b$
$W_c \to c$

CNF5:
$U = \{(A, B), (A, W_a), (A, W_c), (A, W_b), (A, C)$
$, (B, W_a), (B, W_b), (B, C), (B, W_c), (B, A)$
$, (C, W_c), (C, A), (C, W_a), (C, B), (C, W_b)\}$

$S \to W_bA|b|BW_c|c$
$A \to BW_a|a|BW_b|b|c|A|AW_a$
$B \to BW_a|a|BW_b|b|c|AW_a$
$W_a \to a$
$W_b \to b$
$W_c \to c$

5.3

5.3.1

gegeben:
Grammatik G mit:
$S \to aSbb|abb$

Sprache L mit:
$L = \{a^n b^m | n, m \in \mathbb{N} \wedge m \geq 2n\}$

z.z.: $\forall w \in L(G) : w = a^n b^m, n, m \in \mathbb{N}, m \geq 2n)$

Wir führen eine Induktion über die Wortlänge $n = |w|$
mit der Menge der Wortlängen von $L(G)$:

$$N_L = \{3n | n \in \mathbb{N}\}$$

Aussage:

$$\forall k \in N_L : w = a^n b^m, w \in L(G), |w| = n :, (n, m \in \mathbb{N}, m \geq 2n)$$

I.A.

$k = 3$, da abb kleinstes Element der Sprache L(G) ist

$\nexists w \in L(G) : w \not\equiv abb \wedge |w| = 3$, da $S \Rightarrow^G abb$ die einzige Ableitung für Wörter der Länge 3 ist.

Für $w = abb$:
$\#_a(w) = 1, \#_b(w) = 2$
$2 = 2 * 1$
damit gilt auch $2 \geq 2 * 1$

Dadurch wurde gezeigt, dass die Aussage für k=3 gilt.

I.V.
Die Aussage gelte für $k' \in N_L$ beliebig, aber fest.

I.S.
$k = k' + 3$

definiert seien:
w_k, mit: $|w| = k, w_k \in L(G)$
$w_{k'}$, mit: $|w| = k', w_{k'} \in L(G)$

nach der Ableitungsregel von S gilt:
$w_k = aw_{k'}bb$

nach der I.V. gilt:
$\#_b(w_{k'}) \geq 2 * \#_a(w_{k'})$

Daraus folgt:
$2 * \#_a(w_k) = 2 * (1 + \#_a(w_{k'})) = 2 + 2 * \#_a(w_{k'}) \overset{I.V.}{\leq} 2 + \#_b(w_{k'}) = \#_b(w_k)$

Damit wurde die Aussage für beliebige $k \in N_L$ gezeigt.

5.3.2

Annahme $L \subseteq L(G)$:

Daraus würde folgen:
$\forall w \in L : w \in L(G)$

$w \overset{\text{def}}{=} abbb$
$w \in L, w \notin L(G) \lightning$

w ist nicht in $L(G)$, da $L(G)$ keine Wörter der Länge 4 enthält.

Damit gilt die Aussage nicht.