GTI Übungsblatt 12
Tutor: Marko Schmellenkamp
ID: MS1
Übung: Mi 16-18

Max Springengenberg, 177792

12.1

12.1.1

z.z.: $G_{RAPH}I_{SOMORPHIE} \in NP$

Nach Vorlesung hatten wir die Zugehörigkeit von Problemen wie folgt definiert:

1. es existiert ein Suchraum von Lösungen
2. jede Lösung ist polynomiell groß in ihrer Eingabe
3. jede Lösung kann in polynomieller Zeit überprüft werden

1.
Der Suchraum umfasst Bijektionen von Graph G nach G', oder Turingmaschinen die eine Bijektion umsetztzen.

2.
Diese Funktionen, oder auch Turingmaschinen sind polynomiell in ihrer Eingabegröße, da für jede Kante und jeden Knoten je ein Fall, oder ein Zustand benötigt wird, der die Jeweiligen variablen umbenennt.
Insbesondere ergibt sich daraus, dass Die Funktion oder auch TM durch den Betrag an Kanten und Knoten mit $O(|V| + E|)$ eingeschränkt werden kann.

3.
Der Test eines Lösungskandidaten kann wie folgt getestet werden.
$G = (V, E), G' = (V', E')$

1. $marked = \emptyset$
2. FOR $v \in V$ DO
3. $marked = marked \cup \{v\}$
4.   FOR $u \in adj(v) \cap marked$ DO
5.   IF $\neg(f(u) \in adj(f(v)))$ THEN
6.   return false
7. $marked = marked \cup \{u\}$
8. return true

Der algorithmus testet für jeden Knoten, allen adjazenten Knoten in adj auch nach anwenden der Bijektion noch adjazent sind. Sowie implizit umgekehrt.
Wenn dies der Fall ist wurde die Kantenrelation eingehalten, sonst nicht.
Insbesondere ist der Test durch die Anzahl an Kanten begrenzt da nur unmarkierte Kanten durchlaufen werden.
Der Algorithmus hat also eine Laufzeitschranke von $O(|E|)$.

12.1.2

Eine aussagenlogische Formel φ bestehe aus k Klauseln und n Literalen, mit $k, n \in \mathbb{N}$
Da eine Klausel aus Veroderungen besteht ist diese Bereits erfüllt, sobald eine Belegung eine in der Klausel enthaltenem Variable so belegt, dass das Literal positiv ist, ist die KLausel erfüllt.
Bereits erfüllte Klauseln sind nicht mehr ausschlaggeben für die Erfüllbarkeit von φ.

f Sei gegeben durch

$$f(\varphi, \alpha) = \varphi'$$

Wobei φ' (i) nur Klauseln aus φ enthält, die unter Belegung α nicht schon erfüllt sind und (ii) deren Klauseln nur noch Variablen enthalten, die nicht im Definitionsbereich von α liegen. Und (iii) φ' abschließend mit einer 1 verundet wird.

Zu zeigen bleibt:
(1) f ist total
(2) f ist polynomiell berechenbar
(3) f erfüllt $F_{INISH}S_{AT} \leq S_{AT}$

(1) Es wurden keine Definitionslücken definiert also, ist f total.

(2) f ist polynomiell berechenbar, da:
(i)
Für jede Klausel in polynomiell getested werden kann ob eines der belegten Literale wahr ist.
(ii)
Literale, die Variablen aus einer Menge enthalten in polynomieller zeit rausgefiltert werden können.
(iii)
Eine 1 in polynomieller Zeit verundet werden kann.

(3)
$(\varphi, \alpha) \in F_{INISH}S_{AT} \Rightarrow \varphi' \in S_{AT}$
Wenn es eine erweiterte Belgeung β zu α gibt, die φ erfüllt, dann:

1. War φ schon durch α erfüllt:
So wurden alle Klauseln aus φ für φ' getstirchen und nur noch 1 bleibt übrig, φ' hat keine Variablen und ist immer erfüllt.

2. Sonst:
Dann bleibt noch mindestens eine Klausel und eine Variable übrig. Da alle bereits belegten Variablen entfernt wurden sind nur noch die Variablen zu belegen, die unter der Erweiterung von β von α dazu

kommen. sei nun γ die Belegung, die wie β auf allen Variablen die in β aber nicht in α definiert sind, so ist γ auf φ' total und ferner eine φ' erfüllende Belegung.

$\varphi' \in S_{AT} \Rightarrow (\varphi, \alpha) \in F_{INISH}S_{AT}$
Wenn für φ' eine erfüllende Belgung existiert, so ist:

1. φ' frei von variablen und enthält nur 1:
Dann hatte bereits α für jede Klausel mindestens ein Literal erfüllt und alle erweiterungen von α auf eine totale Belegung würden φ erfüllen.

2. Sonst:
Da nur noch Variablen, die nicht in α vorkommen betrachtet werden und eine erfüllende Belegung γ existiert, muss α unter der Erweiterung der Belegungen aus γ auch φ erfüllen.

Damit ist f eine polynomielle Reduktion von $F_{INISH}S_{AT}$ auf S_{AT}.

12.2

12.2.1

Betrachte $I = \{2, 3, 4\}$ mit:
$\bigcup_{i \in I} S_i = \{a, b, c, d, h\} = M$
$S_2 \cap S_3 = \emptyset$
$S_2 \cap S_4 = \emptyset$
$S_3 \cap S_4 = \emptyset$

I ist eine entsprechende Indexmenge.

12.2.2

$f(M, (S_1, \ldots, S_4)) =$

$(i)(c_{1,e}x_1 + \ldots + c_{k,e}x_k \geq 1)$:
$e = a$:
$x_1 + x_4 \geq 1$
$e = b$:
$x_2 + x_2 \geq 1$
$e = c$:
$x_2 \geq 1$
$e = d$:
$x_3 \geq 1$
$e = h$:
$x_3 \geq 1$

$(ii)(x_i + x_j \leq 1, \forall i \neq j : S_i \cap S_j \neq \emptyset)$:
$i = 1, j = 2$:
$x_1 + x_2 \leq 1$
$i = 2, j = 1$:
$x_2 + x_1 \leq 1$
$i = 1, j = 4$:
$x_1 + x_4 \leq 1$
$i = 4, j = 1$:
$x_4 + x_1 \leq 1$

12.2.3

(i) $(c_{1,e}x_1 + \ldots + c_{k,e}x_k \geq 1)$:
Es muss für jede Variable eine Menge gewählt werden, in der diese Variable enthalten ist.
(ii) $(x_i + x_j \leq 1, \forall i \neq j : S_i \cap S_j \neq \emptyset)$:
Es darf von Menge, die zueinander einen nicht leeren Schnitt haben nur eine der jeweiligen Mengen genommen werden.

12.2.4

z.z.:
$(M, S_1, \ldots, S_k) \in E_{XACT}C_{OVER} \Leftrightarrow f(M, S_1, \ldots, S_k) \in 0-1-ILP$

$(M, S_1, \ldots, S_k) \in E_{XACT}C_{OVER} \Rightarrow f(M, S_1, \ldots, S_k) \in 0-1-ILP$
Ist $(M, S_1, \ldots, S_k) \in E_{XACT}C_{OVER}$, so existiert eine Indexmenge I mit:
$\bigcup_{i \in I} S_i = M \wedge \forall i \neq j : S_i \cap S_j = \emptyset$

Für die durch f berechneten Ungleichungen bedeutet das, dass:

(i) alle Ungleichungen der Form $(c_{1,e}x_1 + \ldots + c_{k,e}x_k \geq 1)$ erfüllt werden können. Da $\bigcup_{i \in I} S_i = M$ gilt. Also jede Variable in mindestens einer Menge vorkommt.

(ii) alle Ungleichungen der Form $(x_i + x_j \leq 1, \forall i \neq j : S_i \cap S_j \neq \emptyset)$ ebenfalls erfüllt werden, da $\forall i \neq j : S_i \cap S_j = \emptyset$ gilt. Also von den Variablen aus den Mengen, die gewählt wurden keine in mehr als eine der Mengen vorkommt.
Damit sind dann auch alle Ungleichungen erfüllt.

$f(M, S_1, \ldots, S_k) \in 0-1-ILP \Rightarrow (M, S_1, \ldots, S_k) \in E_{XACT}C_{OVER}$
Ist $f(M, S_1, \ldots, S_k) \in 0-1-ILP$, so gilt, dass alle der Unglichungen:
(i) $(c_{1,e}x_1 + \ldots + c_{k,e}x_k \geq 1)$
(ii) $(x_i + x_j \leq 1, \forall i \neq j : S_i \cap S_j \neq \emptyset)$
erfüllbar sind.

Das bedeutet im Rückschluss für $(M, S_1, \ldots, S_k)$:
(1) Jedes Element aus M ist in einer der Teilmengen $S_i, i \in I$ enthalten, da (i) gilt.
(2) Jede der Teilmengen $S_i \in I$ zu jeder anderen Teilmenge Disjunkt ist, da (ii) gilt.
Damit ist $\bigcup_{i \in I} S_i = M \wedge \forall i \neq j : S_i \cap S_j = \emptyset$ erfüllt.

Ferner ist damit die Reduktionseigenschaft erfüllt.

12.2.5

(i) $(c_{1,e}x_1 + \ldots + c_{k,e}x_k \geq 1)$:
Es gibt $|M|$ Ungleichungen, deren Länge je durch $O(k)$ eingegrenzt werden kann.
Damit also in $O(|M| * k)$.
(ii) $(x_i + x_j \leq 1, \forall i \neq j : S_i \cap S_j \neq \emptyset)$:
Es kann maximal jede Menge zu jeder anderen Menge nicht disjunkt sein.
Daraus ergeben sich dann maximal $2 * k^2$ Ungleichungen deren Länge jeweils durch $O(1)$ beschränkt ist.
Damit also in $O(k^2)$

Insgesamt ist die Laufzeit der Funktion damit in $O(k^2 + |M| * k)$ und damit insbesondere polynomiell zur Größe der Eingaben.