technische universität dortmund

Beate Bollig

Gaetano Geck, Thomas Harweg
David Mezlaf, Christopher Spinrath

fakultät für informatik

SoSe 2017 | Übungsblatt 7 | 06.06.2017

Abgabe bis spätestens am Dienstag, 13.06.2017, 10:00 Uhr

- **in die Briefkästen im Durchgangsflur, der die 1. Etage der OH 12 mit dem Erdgeschoss der OH 14 verbindet.**

Ansonsten gelten die Hinweise von Blatt 1.

Aufgabe 7.1 [Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen] — 5 Punkte

Kurzaufgabe (1 Punkt)

Sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine reguläre Sprache und n_{reg} gemäß dem Pumping-Lemma für *reguläre* Sprachen bzgl. L gewählt. Weiterhin sei $z \in L$ mit $|z| \geqslant n_{\text{reg}}$ und $z = x'y'z'$ eine Zerlegung, die die drei Bedingungen des Pumping-Lemmas für *reguläre* Sprachen bzgl. L und n_{reg} erfüllt. Beschreiben Sie, wie sich aus dieser Zerlegung $x'y'z'$ eine Zerlegung $z = uvwxy$ ableiten lässt, die die Bedingungen des Pumping-Lemmas für *kontextfreie* Sprachen erfüllt.

Hauptaufgabe (4 Punkte)

Zeigen Sie mit dem Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen, dass die folgenden Sprachen über dem Alphabet $\{a, b, c\}$ nicht kontextfrei sind:

a) $L_1 = \{\alpha c \beta \mid \beta \in \{a, b\}^*, \alpha \in L((\beta)^*)\}$ **(2 Punkte)**

b) $L_2 = \{a^p b^q c^{p+q} \mid p \text{ und } q \text{ sind Primzahlen}\}$ **(2 Punkte)**

Geben Sie die in den Beweisen auftretenden Fallunterscheidungen in jedem Fall vollständig an, auch wenn Sie bei einigen Fällen auf schon behandelte analoge Fälle verweisen (vergewissern Sie sich bei einem solchen Verweis aber, dass die Analogie wirklich gilt).

Hinweis: Beachten Sie, dass α und β in dieser Aufgabe Wörter über $\{a, b\}$ bezeichnen und nicht wie üblich reguläre Ausdrücke, um eine Verwechslung mit den Bezeichnern u, v, w, x, y im Pumping-Lemma zu vermeiden.

Aufgabe 7.2 [Abschlusseigenschaften von kontextfreien Sprachen] — 5 Punkte

Kurzaufgabe (1 Punkt)

Sei G eine kontextfreie Grammatik über einem festen Alphabet Σ und α ein regulärer Ausdruck über demselben Alphabet Σ. Weiterhin sei Γ ein Alphabet und $h : \Sigma^* \to \Gamma^*$ ein Homomorphismus. Ist die Sprache $K = h(L(G) \cap L(\alpha))$ kontextfrei? Wenn ja, ist K auch regulär?

Hauptaufgabe (4 Punkte)

Seien $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ zwei Sprachen. Die *Alternierungssprache* von L_1 und L_2 ist definiert als

$$\mathsf{alt}(L_1, L_2) = \{u_1 v_1 u_2 v_2 \dots u_n v_n \mid n \in \mathbb{N}_0, u_i \in L_1, v_i \in L_2 \text{ für alle } 1 \leqslant i \leqslant n\}.$$

a) Zeigen oder widerlegen Sie: Wenn L_1 und L_2 kontextfrei sind, dann auch $\mathsf{alt}(L_1, L_2)$. **(2 Punkte)**

Sei nun G eine kontextfreie Grammatik und α ein regulärer Ausdruck, beide über einem festem Alphabet Σ.

b) Geben Sie einen Algorithmus an, der entscheidet, ob $L(G) \subseteq L(\alpha)$ gilt. Benutzen Sie als Bausteine Algorithmen und Abschlusseigenschaften, die in der Vorlesung vorgestellt wurden. Die Funktionsweise und Korrektheit dieser Bausteine muss nicht erläutert werden. Beschreiben Sie aber auf jeden Fall Ihre Idee und begründen Sie kurz, warum der Algorithmus ingesamt korrekt ist. Geben Sie außerdem die asymptotische Laufzeit Ihres Algorithmus in Abhängigkeit von $|G|$ und $|\alpha|$ an. **(2 Punkte)**

Hinweis: Sie dürfen annehmen, dass der Produktautomat von einem PDA und einem DFA in der gleichen (asymptotischen) Zeit wie der Produktautomat zweier DFAs konstruiert werden kann.

Aufgabe 7.3 [Deterministische Kellerautomaten] **5 Punkte**

Kurzaufgabe (1 Punkt)

Wir betrachten deterministische Kellerautomaten, die mit leerem Keller akzeptieren. Welche Gestalt haben Sprachen über einem unären Alphabet, die von einem solchen Automaten entschieden werden?

Hauptaufgabe (4 Punkte)

Entscheiden Sie für die folgenden kontextfreien Sprachen jeweils,

- ob sie deterministisch kontextfrei sind, und,
- ob sie von einem deterministischen Kellerautomaten, der mit leeren Keller akzeptiert, entschieden werden.

Geben Sie entweder bezeugende deterministische Kellerautomaten an oder beweisen Sie, dass es keinen solchen Automaten gibt. Wenn beide Eigenschaften gelten, genügt es, einen Automaten anzugeben und kurz die Existenz des anderen Automaten zu folgern.

a) $L_a = \{a^n b^m \mid n \geqslant m\}$ **(1,5 Punkte)**

b) $L_b = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid \#_a(w) \neq \#_b(w) \text{ oder } \#_b(w) \neq \#_c(w)\}$ **(1 Punkt)**

c) $L_c = \{wcc \mid w \in \{a,b,c\}^*,\ \#_a(w) = \#_b(w),\ cc \text{ ist kein Infix von } w\}$

Hinweis: Ein Wort y ist ein Infix (oder Teilwort) von einem Wort w, wenn es Wörter x, z gibt, sodass $w = xyz$ gilt. **(1,5 Punkte)**

Anmerkung: Statt direkt zu beweisen, dass es für eine der Sprachen keinen Kellerautomaten mit den gewünschten Eigenschaften gibt, können Sie auch zeigen, dass eine zu der Existenz eines solchen Automaten notwendige Bedingung nicht von der Sprache erfüllt wird.

Testfragen

1. Gibt es zu jeder präfixfreien Sprache einen deterministischen Kellerautomaten, der diese Sprache entscheidet?
2. Welche Abschlusseigenschaften haben kontextfreie Sprachen? Haben deterministische kontextfreie Sprachen „bessere“ Abschlusseigenschaften?
3. Welche Möglichkeiten gibt es, um zu zeigen, dass eine Sprache nicht kontextfrei ist?