

Abgabe bis spätestens am Dienstag, 26.06.2018,

- (vor der Vorlesung) im HG II, HS 3, oder
- in die Briefkästen im Durchgangsfur, der die 1. Etage der OH 12 mit dem Erdgeschoss der OH 14 verbindet.

**Beachten Sie die Schließzeiten der Gebäude!**

**Ansonsten gelten die Hinweise von Blatt 1.**

## Aufgabe 10.1 [Kodierung einer Turingmaschine]

**2 Punkte**

Die Turingmaschine  $M = (\{s, p\}, \{\triangleright, \sqcup, 0, 1\}, \delta, s)$  über dem Alphabet  $\Sigma = \{0, 1\}$  ist ein binärer Dekrementierer: Die Binärzahl  $w^R$  wird um 1 dekrementiert, falls  $\text{Str2N}(w^R) > 0$  gilt. Die Transitionen  $(q, \sigma, q', \sigma', d)$  aus  $\delta$  sind dabei wie folgt definiert:

$q$	$\sigma$	$q'$	$\sigma'$	$d$
$s$	$\triangleright$	$s$	$\triangleright$	$\rightarrow$
$s$	$0$	$s$	$0$	$\rightarrow$
$s$	$1$	$p$	$0$	$\leftarrow$
$s$	$\sqcup$	$h$	$\sqcup$	$\downarrow$
$p$	$0$	$p$	$1$	$\leftarrow$
$p$	$\triangleright$	$h$	$\triangleright$	$\downarrow$

- a) Wie werden die Symbole und Zustände von  $M$  gemäß den im Abschnitt „Universelle Turingmaschinen“ von Kapitel 16 genannten Konventionen kodiert, wenn  $M$  Eingabe für eine universelle Turingmaschine ist? Verwenden Sie die folgende Nummerierung der Zustände, Richtungen und Zeichen und ergänzen Sie die Tabellen:

$x$	$\text{num}(x)$	$\text{enc}(x)$
$s$	1	
$h$	4	
$p$	5	
$\leftarrow$	1	
$\downarrow$	2	
$\rightarrow$	3	

$x$	$\text{num}(x)$	$\text{enc}(x)$
$\triangleright$	1	
$\sqcup$	2	
$0$	3	
$1$	4	

**(1 Punkt)**

- b) Geben Sie die Kodierungen  $\text{enc}(s, 1)$  und  $\text{enc}(p, 0)$  an.

**(1 Punkt)**

**Aufgabe 10.2 [Abschlusseigenschaften]****4 Punkte**

Es seien  $L_1$  und  $L_2$  Sprachen über einem Alphabet  $\Sigma$  und  $M_1$  bzw.  $M_2$  Turingmaschinen für die  $L_1 = L(M_1)$  und  $L_2 = L(M_2)$  gilt. Beschreiben Sie anschaulich, wie sich Turingmaschinen  $M_a$  und  $M_b$  für die folgende Sprachen  $L_a$  und  $L_b$  konstruieren lassen, so dass jeweils  $L_x = L(M_x)$  gilt. Bedenken Sie, dass  $M_x$  die Sprache  $L_x$  nicht *entscheiden* muss. Es ist also möglich, dass sie für einige Eingaben nicht terminiert.

a)  $L_a = L_1 \cup L_2$  (2 Punkte)

b)  $L_b = L_1 \circ L_2$  (2 Punkte)

**Hinweis**

$M_1$  und  $M_2$  können als 1-String-Turingmaschinen angenommen werden. Für  $M_a$  und  $M_b$  dürfen Sie Mehrstring-Turingmaschinen verwenden. Sie müssen die (Mehrstring-)Turingmaschinen  $M_a$  und  $M_b$  weder formal aufschreiben, noch als Diagramm angeben. Beschreiben Sie jedoch die Arbeitsweise hinreichend verständlich und nutzen Sie dafür die Tatsache, dass Turingmaschinen beliebige andere Turingmaschinen simulieren können.

**Aufgabe 10.3 [Entscheidbarkeit, Semi-Entscheidbarkeit, Unentscheidbarkeit]****7 Punkte**

Geben Sie für die folgenden Probleme an, ob sie jeweils

- entscheidbar,
- nicht entscheidbar aber semi-entscheidbar oder
- unentscheidbar

sind. Beweisen Sie Ihre Behauptungen. Gehen Sie davon aus, dass jede Turingmaschine die Zeichen 0 und 1 im Eingabe- und im Arbeitsalphabet enthält.

a) *Problem:*  $A$   
*Gegeben:* Turingmaschine  $M$  und  $k \in \mathbb{N}_0$   
*Frage:* Erzeugt  $M$  bei der Eingabe  $0^k$  die Ausgabe 1? (3 Punkte)

b) *Problem:*  $B$   
*Gegeben:* Turingmaschine  $M$   
*Frage:* Erzeugt  $M$  bei *keiner* Eingabe die Ausgabe 1? (4 Punkte)

**Hinweis**

Laut den Konventionen im Abschnitt „Universelle Turingmaschinen“ von Kapitel 16 ist die Kodierung der Zeichen 0 und 1 eindeutig gegeben durch  $\text{num}(0) = 3$  und  $\text{num}(1) = 4$ .

**Aufgabe 10.4 [Primitiv Rekursive Funktionen]****2 Punkte**

Zeigen Sie: Die Funktion  $\text{even}(x) : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$  mit

$$\text{even}(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ ist gerade} \\ 0, & x \text{ ist ungerade} \end{cases}$$

ist primitiv rekursiv.