technische universität dortmund

Beate Bollig

Gaetano Geck, Thomas Harweg
David Mezlaf, Christopher Spinrath

fakultät für informatik

SoSe 2017 | Übungsblatt 13 | 18.07.2017

Dieses Blatt wird nicht korrigiert und es wird keine Beispiellösung veröffentlicht.

Aufgabe 13.1 [Sudoku]
Besuchen Sie die Webseite `http://sudoku.zeit.de` und lösen Sie ein paar der dortigen Sudoku-Rätsel. Falls Sie dieses Spiel noch nicht kennen, finden Sie dort auch eine Anleitung.
Sudoku-Rätsel lassen sich wie folgt verallgemeinern. Für $k \in \mathbb{N}$ soll das Spielfeld die Größe $k^2 \times k^2$ haben. Alle Boxen bestehen dann aus $k \times k$ Feldern und sollen so mit den Zahlen 1 bis k^2 gefüllt werden, dass keine Box, keine Spalte und keine Reihe zwei gleiche Zahlen enthält. Wie beim gewöhnlichen Sudoku sind die Zahlen für einige Positionen des Spielfeldes schon vorgegeben.
Das allgemeine Sudoku-Rätsel ist also wie folgt definiert.

Problem: Sudoku
Gegeben: 1^k für $k \in \mathbb{N}$, $S \subseteq \{1, 2, \ldots, k^2\}^2$, $f : S \to \{1, 2, \ldots, k^2\}$
Frage: Besitzt das durch k, S und f gegebene Sudokurätsel eine Lösung?

Hierbei beschreibt k die Größe des Spielfeldes, S ist die Menge der Positionen, die schon festgelegt sind, und f gibt an, mit welchen Zahlen diese Positionen belegt sind.
Die herkömmlichen Sudoku-Rätsel sind also der Spezialfall $k = 3$ des allgemeinen Sudoku-Rätsels.

a) Lässt sich das Sudoku-Rätsel für den Fall $k = 23$ in polynomieller Zeit lösen?

b) Bei der folgenden Variante des Färbungsproblems muss eine Teilfärbung zu einer Färbung vervollständigt werden.

Problem: FinishCol
Gegeben: Ungerichteter Graph $G = (V, E)$, Zahl k, $S \subseteq V$ und $c : S \to \{1, \ldots, k\}$
Frage: Lassen sich die Knoten von G mit k Farben zulässig färben, so dass jeder Knoten v aus S die Farbe $c(v)$ erhält?

Für die Knoten aus S sind die Farben also bereits festgelegt.

Geben Sie eine polynomielle Reduktion von Sudoku auf FinishCol an und beweisen Sie deren Korrektheit.

Hinweis: Fassen Sie die Positionen des Spielfeldes als Knoten eines Graphen auf.

c) Geben Sie eine polynomielle Reduktion von FinishCol auf Col an und beweisen Sie deren Korrektheit.

Hinweis: Bilden Sie einen gegebenen Graphen G auf einen Graphen G' mit k zusätzlichen Knoten ab. Welche zusätzlichen Kanten muss G' haben?

Aufgabe 13.2 [Reguläre Ausdrücke mit Verschränkung]
Die *Verschränkung* zweier Sprachen $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ ist definiert als

$$L_1 \| L_2 = \{u_1 v_1 u_2 v_2 \dots u_n v_n \mid u_i, v_i \in \Sigma^* \text{ für alle } 1 \leqslant i \leqslant n \text{ und } u_1 u_2 \dots u_n \in L_1, v_1 v_2 \dots v_n \in L_2\}.$$

Reguläre Ausdrücke mit Verschränkung (kurz: REVs) sind definiert wie reguläre Ausdrücke (Regeln 1-3 auf Folie 2.12), mit folgender zusätzlicher Regel:

4) Sind α und β reguläre Ausdrücke mit Verschränkung, so auch $(\alpha\|\beta)$.

Die Semantik regulärer Ausdrücke mit Verschränkung entspricht jener von regulären Ausdrücken, mit folgender Ergänzung: Sind α und β REVs, so gilt

$$L((\alpha\|\beta)) = L(\alpha)\|L(\beta)$$

Zeigen Sie, dass das folgende Problem in **NP** liegt:

Problem:	REV-Wortproblem
Gegeben:	REV α über einem Alphabet Σ, Wort $w \in \Sigma^*$
Frage:	Gilt $w \in L(\alpha)$?

Aufgabe 13.3 [Quizfragen]
Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr oder falsch sind, und geben Sie jeweils eine stichhaltige Begründung in ca. ein bis zwei Sätzen.

a) Enthält ein regulärer Ausdruck α mindestens ein Zeichen aus einem Alphabet Σ, so ist die von ihm erzeugte Sprache nicht leer ($L(\alpha) \neq \varnothing$).

b) Für beliebige kontextfreie Sprachen L_1, L_2 und beliebige $L_1' \subseteq L_1$ und $L_2' \subseteq L_2$ ist $L_1' \cup L_2'$ stets kontextfrei.

c) Ist $G = (V, \Sigma, S, P)$ in Greibach-Normalform und $w \in L(G)$, dann gibt es eine Ableitung $S \Rightarrow^* w$ der Länge maximal $\max(|w|, 1)$.

d) Ist L_1 deterministisch kontextfrei und L_2 regulär, so ist $L_2 - L_1$ deterministisch kontextfrei.

e) Wenn L die Komplementsprache von $L(G)$ für eine LL(1)-Grammatik G ist, dann ist L in **NP**.

f) Sat ist rekursiv aufzählbar.

Testfragen

1. Kann jedes Problem aus **NP** polynomiell auf jedes Problem in **NP** reduziert werden?
2. Ist TSP in polynomieller Zeit entscheidbar?
3. Kann TM-Halt auf TSP reduziert werden?