Übungen zur Vorlesung Grundbegriffe der Theoretischen Informatik

technische universität dortmund

fakultät für informatik

SoSe 2017 | Übungsblatt 2 | 02.05.2017

Beate Bollig

Gaetano Geck, Thomas Harweg
David Mezlaf, Christopher Spinrath

Abgabe bis spätestens am Dienstag, 09.05.2017, 10:00 Uhr

- **in den Briefkästen im Durchgangsflur, der die 1. Etage der OH 12 mit dem Erdgeschoss der OH 14 verbindet.**

Ansonsten gelten die Hinweise von Blatt 1.

Aufgabe 2.1 [Operationen auf endlichen Automaten] — 5 Punkte

Kurzaufgabe (1 Punkt)

Wie wandelt man einen NFA mit ε-Übergängen in einen äquivalenten NFA ohne solche Übergänge um?

Hauptaufgabe (4 Punkte)

Sei L eine reguläre Sprache über einem Alphabet Σ, und sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ ein NFA, der diese Sprache entscheidet. Wir definieren die Präfix-Sprache $\mathtt{pre}(L)$ wie folgt:

$$\mathtt{pre}(L) = \{v \in \Sigma^* \mid \exists x \in \Sigma^* : vx \in L\}.$$

a) Konstruieren Sie einen NFA $\mathcal{A}_P = (Q, \Sigma, \delta, s, F_P)$ für die Sprache $\mathtt{pre}(L)$, indem Sie die Menge F_P der akzeptierenden Zustände von $\mathcal{A}_P$ bestimmen. **(1,5 Punkte)**

Seien nun L, L' zwei reguläre Sprachen über einem Alphabet Σ. Seien ferner für diese Sprachen die jeweiligen NFAs $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ und $\mathcal{A}' = (Q', \Sigma, \delta', s', F')$ mit $Q \cap Q' = \varnothing$ gegeben. Wir definieren die Präfix-Konkatenation $\mathtt{precon}(L, L')$ wie folgt:

$$\mathtt{precon}(L, L') = \left\{vw \mid v, w \in \Sigma^* \wedge \exists x, y \in \Sigma^* : vx \in L \wedge wy \in L'\right\}.$$

b) Konstruieren Sie einen ε-NFA $\mathcal{A}_C = (Q \cup Q', \Sigma, \delta_C, s_C, F_C)$ für die Sprache $\mathtt{precon}(L, L')$, indem Sie die Transitionsrelation δ_C, den Startzustand s_C sowie die Menge F_C der akzeptierenden Zustände von $\mathcal{A}_C$ bestimmen. **(2,5 Punkte)**

Aufgabe 2.2 [Umwandlungen] — 5 Punkte

Kurzaufgabe (1 Punkt)

Es sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ ein DFA. Wie verhält sich die *Transitionsfunktion* δ zur *erweiterten Transitionsfunktion* δ^*? Wann wird in diesem Kontext ein Wort w über Σ von $\mathcal{A}$ akzeptiert?

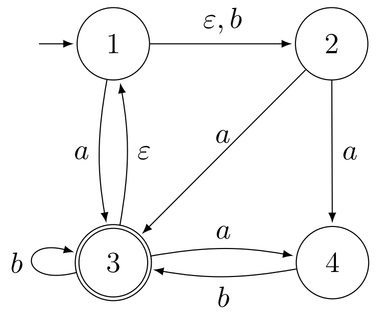
Hauptaufgabe (4 Punkte)

Führen Sie die folgenden Umwandlungen durch.

a) RE $\rightsquigarrow$ ε-NFA: Konstruieren Sie einen ε-NFA $\mathcal{A}_1$ mit $L(\mathcal{A}_1) = L\big((aa^* + b)^*\big)$.

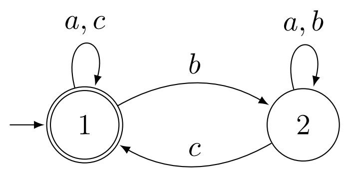
Gehen Sie dabei genau nach dem in der Beweisskizze zu Proposition 2.2 vorgestellten Baukastenprinzip vor. Fügen Sie insbesondere alle ε-Transitionen ein. Markieren Sie außerdem, welche Komponenten des ε-NFAs welchen Teilausdrücken entsprechen. **(1 Punkt)**

b) ε-NFA $\rightsquigarrow$ DFA: Konstruieren Sie gemäß dem in Proposition 3.2 skizzierten Verfahren den Potenzmengen-Automaten $\mathcal{A}'_2$ zu dem folgenden ε-NFA $\mathcal{A}_2$ über dem Alphabet $\{a, b\}$. Beschränken Sie sich auf die vom Startzustand des Potenzmengen-Automaten $\mathcal{A}'_2$ aus erreichbaren Zustände.



Begründen Sie für $\mathcal{A}'_2$ Ihre Wahl des Startzustandes, der akzeptierenden Zustände sowie der von Zustand $\{1, 2\}$ ausgehenden Transitionen. **(1,5 Punkte)**

c) DFA $\rightsquigarrow$ RE: Konstruieren Sie einen regulären Ausdruck α_3 mit $L(\alpha_3) = L(\mathcal{A}_3)$ zu dem folgenden DFA $\mathcal{A}_3$.



Gehen Sie nach dem Verfahren, das in der Beweisskizze zu Proposition 3.3 vorgestellt wird, vor. Alternativ können Sie die Vorgehensweise über hybride Automaten wählen. Begründen Sie in letzterem Fall, warum $L(\alpha_3) = L(\mathcal{A}_3)$ gilt. Die zwischenzeitlich entstehenden regulären Ausdrücke dürfen Sie äquivalent vereinfachen. **(1,5 Punkte)**

Aufgabe 2.3 [Nerode-Relation] **5 Punkte**

Kurzaufgabe (1 Punkt)

Wie ist die Nerode-Relation definiert und was sagt sie aus?

Hauptaufgabe (4 Punkte)

Seien

$$\begin{aligned} K_\varepsilon &= \{\varepsilon\}, & K_a &= \{aw \mid w \in \Sigma^*\}, \\ K_b^g &= \{bw \mid w \in \Sigma^* \text{ mit } |bw| \equiv_2 0\}, & K_b^u &= \{bw \mid w \in \Sigma^* \text{ mit } |bw| \equiv_2 1\} \end{aligned}$$

Mengen von Wörtern über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Weiter sei L definiert als $K_\varepsilon \cup K_b^g$.

a) Zeigen Sie, dass die Mengen K_a und K_b^g Äquivalenzklassen von $\sim_L$ sind.

Hinweis: Für eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist eine Menge $M \subseteq \Sigma^*$ eine Äquivalenzklasse bezüglich der Nerode-Relation $\sim_L$, falls $u \sim_L w$ für alle $u, w \in M$ und $v \not\sim_L w$ für alle $v \in M$ und alle $w \notin M$ gilt.

(2 Punkte)

b) Die Mengen $K_\varepsilon, K_a, K_b^g$ und K_b^u sind die Äquivalenzklassen von Σ^* bezüglich $\sim_L$.

Beschreiben Sie, wie sich ausgehend von diesen Klassen ein minimaler Automat zur Sprache L konstruieren lässt. Erläutern Sie hierzu kurz, wie sich die Zustandsmenge – insbesondere Startzustand und akzeptierende Zustände – und Transitionen ergeben (beschreiben Sie exemplarisch eine Transition). Geben Sie außerdem den so erzeugten Automaten an. **(2 Punkte)**

Testfragen

1. Wie effizient können reguläre Ausdrücke in endliche Automaten umgewandelt werden?
2. Sind äquivalente DFAs zueinander isomorph oder umgekehrt?
3. Welche Regeln führen zu einem minimalen DFA? Wie werden überflüssige Zustände entfernt?