GTI Übungsblatt 6
Tutor: Marko Schmellenkamp
ID: MS1
Übung: Mi 16-18

Max Springenberg, 177792

6.1

6.1.1

gegeben:

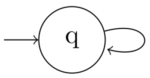
$$\text{Grammatik } G \text{ mit: } \begin{array}{lcllll} S & \rightarrow & A & & & \\ A & \rightarrow & aAB & |bA & |cA & |\epsilon \\ B & \rightarrow & a & & & \end{array}$$

gesucht:
Kellerautomat, der die Sprache

$$L(G) = \{u(av_ia)^k | miti \in \{1, \dots n\}, v_i, u \in \{b, c\}^*, k \in \mathbb{N}_0\}$$

entscheidet

Eine mögliche Lösung ist der PDA A mit:



ϵ, S:A
ϵ, A:aAB
ϵ, A:bA
ϵ, A:cA
ϵ, A:ϵ
ϵ, B:a
a, a:ϵ
b, b:ϵ
c, c:ϵ

A wurde nach dem Vorgehen der Vorlesung konstruiert.

A Kann über seine ϵ-Transitionen alle Regeln zu den jeweiligen Variablen aufbauen und damit auch sämtliche Ableitungen von G.
Die jeweilige gewählte rechte Regelseite wird auf den Keller gelegt.
Nach einlesen eines Terminalsymbols $\sigma \in \Sigma$ wird dieses vom Keller gelöscht, wenn nun eine Variable oben auf dem Keller liegt kann diese wieder abgeleitet, bzw. ihre rechte Regelseite auf den Keller gepackt werden.
Insbesondere werden hierbei solange Terminalsymbole aus $\{b, c\}$ auf den Keller gelegt und nach Einlesen gelöscht, bis ein a auf den Keller gelegt und nach Einlesen gelöscht wird. Dann können wieder Terminalsymbole aus $\{b, c\}$ auf den Keller gelegt werden und nach Einlsen gelöscht werden, aber es wird insbesondere ein a am Ende auf den Keller gelegt und nach Einlsen gelöscht. Damit gilt, dass A Wörter der Form $L(G) = \{u(av_ia)^k|$, mit$i \in \{1, \dots n\}, v_i, u \in \{b, c\}^*, k \in \mathbb{N}_0\}$ mit leerem Keller akzeptiert und ferner $L(G)$ entscheidet.

6.1.2

(i)

gegeben:

$w_1 = ab, w_2 = abaa, w_3 = abaaaa$

w_1:
A akzeptiert w_1 nicht, da nach dem Einlsen des letzten Zeichen b ein b oben auf dem Keller liegt und eine Transition zum Keller-leerenden Zustand 2 nicht mehr möglich ist.

w_2:
A akzeptiert w_2 mit leerem Keller:

$$\begin{array}{rcl}
(1, abaa, \#) & \vdash & (1, baa, a\#) \\
& \vdash & (1, aa, ba\#) \\
& \vdash & (1, a, aba\#) \\
& \vdash & (1, \epsilon, aaba\#) \\
& \vdash & (2, \epsilon, aaba\#) \\
& \vdash & (2, \epsilon, aba\#) \\
& \vdash & (2, \epsilon, ba\#) \\
& \vdash & (2, \epsilon, a\#) \\
& \vdash & (2, \epsilon, \#) \\
& \vdash & (2, \epsilon, \epsilon)
\end{array}$$

w_3:
A akzeptiert w_3 mit leerem Keller:

$$\begin{array}{rcl}
(1, abaaaa, \#) & \vdash & (1, baaaa, a\#) \\
& \vdash & (1, aaaa, ba\#) \\
& \vdash & (1, aaa, aba\#) \\
& \vdash & (1, aa, aaba\#) \\
& \vdash & (1, a, aaaba\#) \\
& \vdash & (1, \epsilon, aaaaba\#) \\
& \vdash & (2, \epsilon, aaaaba\#) \\
& \vdash & (2, \epsilon, aaaba\#) \\
& \vdash & (2, \epsilon, aaba\#) \\
& \vdash & (2, \epsilon, aba\#) \\
& \vdash & (2, \epsilon, ba\#) \\
& \vdash & (2, \epsilon, a\#) \\
& \vdash & (2, \epsilon, \#) \\
& \vdash & (2, \epsilon, \epsilon)
\end{array}$$

(ii)

Regeln für die Variablen $X_{1,\tau,1}$ und $X_{1,\tau,2}$, mit $\tau \in \Gamma$ waren bereits gegeben.
Für die Variablen $X_{2,\tau,1}$, mit $\tau \in \Gamma$ gilt, dass sie nicht erzeugend sind, da von 2 aus keine Transition zu 1 existiert.
Es würden sich ausschließlich Regeln, der Form:$X_{2,\tau,1} \to X_{2,\tau',2}X_{2,\tau,1}$, mit $\tau, \tau' \in \Gamma$ ergeben, die keine endliche Ableitung besitzen.
Deshalb können diese nicht erzeugenden Variablen und Regeln, die sie enthalten, gestrichen werden.

Die Regeln der Form $X_{2,\tau,2}$, mit $\tau \in \Gamma$ ergeben sich zu:

$$
\begin{aligned}
X_{2,\#,2} &\rightarrow \epsilon \\
X_{2,a,2} &\rightarrow a \\
X_{2,b,2} &\rightarrow a
\end{aligned}
$$

Nachdem wir nun alle notwendigen Regeln aufgestellt haben wählen wir das Startsymbol gemäß der Vorlesung mit:

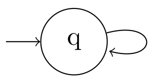
$$S \rightarrow X_{1,\#,1} \quad | X_{1,\#,2}$$

6.2

gegeben:
$\Sigma = \{N_1, N_2, S_1, S_2\}$

wir wählen:
$\tau_0 = \#, \Gamma = \{\#, n, s\}$

Eine mögliche Lösung unter dem gewählten Kelleralphabet ist:



ϵ, # : ϵ
N_1, * : n*
N_1, s : ϵ
S_1, * : s*
S_1, n : ϵ
N_2, * : nn*
N_2, s : n
N_2, ss : ϵ
S_2, * : ss*
S_2, n : s
S_2, nn : ϵ

Dieser Kellerautomat ist sinnvoll gewählt, da ein leerer Spaziergung und ferner das Beenden eines Spaziergangs durch $\epsilon, \#\epsilon$ möglich ist, Schritte jeweils ein Symbol für die Schrittrichtung auf den Keller legen oder eines der Gegenrichtung löschen und die Sprünge analog vorgehen, wobei zwei Symbole der Gegenrichtung gelöscht, eines der Gegenrichtung durch eines der Schrittrichtung ausgetauscht wird oder zwei der Schrittrichtung auf den Keller gelegt werden.
Dadurch lässt sich das 'über einem Punkt hin und her wandern' einfach simulieren.

6.3

6.3.1 $L_1 = \{a^l b^m c^p d^q | l, m, p, q \in \mathbb{N}_0, l < p \land q < m\}$

Wir zeigen, dass L nicht kontextfrei ist nach dem Korrolar des Pumpinglemma für kontextfreie Sprachen.

Insbesondere gilt für alle Wörter aus L die Eigenschaft:

$$\#_a(w) < \#_c(w) \land \#_b(w) < \#_d(w)$$

wir wählen:

$$z \stackrel{\text{def}}{=} a^n b^{n+1} c^{n+1} d^n$$

wir betrachten Zerlegungen der Form $z = uvwxy$, mit:
$vx \neq \epsilon$
$|vwx| \leq n$

Fortan werden 4 Fälle betrachtet:

(i) mindestens 1 a in vx, aber kein c, da zwischen a und c $(n+1)$ b's liegen und $|vwx| \leq n$.

(ii) mindestens 1 b in vx, aber kein d, da zwischen b und d $(n+1)$ c's liegen und $|vwx| \leq n$.

(iii) mindestens 1 c in vx, aber kein a, da zwischen a und c $(n+1)$ b's liegen und $|vwx| \leq n$.

(iv) mindestens 1 d in vx, aber kein b, da zwischen d und b $(n+1)$ c's liegen und $|vwx| \leq n$.

(i)
wähle $k = 2$:
Da c's vom aufpumpen unaffektiert sind, bleiben $n+1$ c's.
Da mindestens ein a aufgepumpt wird gilt, dass nun $\#_a(uv^kwx^ky) \geq n+1$ existieren, damit gilt $\#_a(uv^kwx^ky) \geq \#_c(uv^kwx^ky)$
Dies verletzt die zuvor genannnte Eigenschaft von L_1.

(ii)
wähle $k = 2$:
Da d's vom aufpumpen unaffektiert sind, bleiben $n+1$ d's.
Da mindestens ein b aufgepumpt wird gilt, dass nun $\#_b(uv^kwx^ky) \geq n+1$ existieren, damit gilt $\#_b(uv^kwx^ky) \geq \#_d(uv^kwx^ky)$
Dies verletzt die zuvor genannnte Eigenschaft von L_1.

(iii)
wähle $k = 0$:
Da a's vom aufpumpen unaffektiert sind, bleiben n a's.
Da mindestens ein c abgepumpt wird gilt, dass nun $\#_c(uv^kwx^ky) \leq n$ existieren, damit gilt $\#_a(uv^kwx^ky) \geq \#_c(uv^kwx^ky)$
Dies verletzt die zuvor genannnte Eigenschaft von L_1.

(iv)
wähle $k = 0$:
Da b's vom aufpumpen unaffektiert sind, bleiben n b's.
Da mindestens ein b abgepumpt wird gilt, dass nun $\#_b(uv^kwx^ky) \leq n$ existieren, damit gilt $\#_b(uv^kwx^ky) \geq \#_d(uv^kwx^ky)$
Dies verletzt die zuvor genannnte Eigenschaft von L_1.

Da vx mindestens ein Zeichen aus $\{a, b, c, d\}$ enthalten muss, wurde für alle relevanten Fälle ein Pumpfaktor k gefunden, für den das auf- oder abgepumpte Wort nichtmehr in L_1 ist.

nach dem Korrolar zum Pumpinglemma ist L_1 damit nicht kontextfrei.

6.3.2 $L_2 = \{ww^Rw | w \in \{a,b\}^*\}$

Wir zeigen, dass L nicht kontextfrei ist nach dem Korrolar des Pumpinglemma für kontextfreie Sprachen.

wir wählen:

$$z \stackrel{\text{def}}{=} ba^nbba^nbba^nb$$

Wir betrachten Zerlegungen der Form $z = uvwxy$, mit:
$vx \neq \epsilon$
$|vwx| \leq n$

Fortan werden 2 Fälle betrachtet:
(i) genau ein b und möglicher Weise a's in vx, da zwischen b's n a's liegen
(ii) nur a's und insbesondere mindestens ein a in vx

(i)
wähle $k = 0$:
Da genau ein b abgepumpt wird und jedes Wort mit einem b anfängt und aufhört, kann das abgepumpte Wort uwy nicht die Form ww^Rw haben, da ein b weniger und insbesondere 4 b's übrig sind, die nicht gleichmäßig auf 3 Teilwörter aufgeteilt werden können.

(ii)
wähle $k = 0$:
Da im verbleibenden Fall nur a's in vx vorkommen und alle Teilwörter aus der Definition von L durch b's geklammert sind, sind die a's aus vx aus einem Teilwort.
Wir können annehmen, dass:
(1) alle Teilwörter w, mit $z = ww^Rw$ unter unserem gewählten Wort z die selbe Anzahl von a's besitzt.

Wenn nun mindestens ein a abgepumpt wird, so besitzt ein Teilwort mindestens ein a weniger.
Aus der Klammerung der Teilwörter durch b's folgt, dass die Zahl von a's der jeweiligen Teilwörter gleich der zwischen den b's stehenden Anzahl von a's ist.
Wie gesagt enthält ein Teilwort ein a weniger, damit ist die Eigenschaft (1) verletzt und das abgepumpte Wort nicht in der Sprache L_2.

vx mus ein b oder nur a's enthalten.

nach dem Korrolar zum Pumpinglemma ist L_2 damit nicht kontextfrei.