Übungen zur Vorlesung Grundbegriffe der Theoretischen Informatik

technische universität dortmund

Beate Bollig

Gaetano Geck, Thomas Harweg
David Mezlaf, Christopher Spinrath

fakultät für informatik

SoSe 2017 | **Übungsblatt 12** | **11.07.2017**

Abgabe bis spätestens am Dienstag, 18.07.2017, 10:00 Uhr

- **in die Briefkästen im Durchgangsflur, der die 1. Etage der OH 12 mit dem Erdgeschoss der OH 14 verbindet.**

Ansonsten gelten die Hinweise von Blatt 1.

Aufgabe 12.1 [Polynomielle und exponentielle Zeit] — 5 Punkte

Kurzaufgabe (1 Punkt)

Gegeben seien das einfache WHILE-Programm P und das WHILE-Programm P'.

***P*:**

```
x2 := x1 + 0;
x1 := 1;
WHILE x2 ≠ 0 DO
  x3 := x1 + 0;
  WHILE x3 ≠ 0 DO
    x1 := x1 + 1;
    x3 := x3 ∸ 1
  END;
  x2 := x2 ∸ 1
END
```

***P'*:**

```
x2 := x1 + 0;
x1 := 1;
WHILE x2 ≠ 0 DO
  x1 := x1 + x1;
  x2 := x2 ∸ 1
END
```

Beide WHILE-Programme berechnen dieselbe Funktion $f = f_P = f_{P'} : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ mit $f(n) = 2^n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Bestimmen Sie Funktionen $t_P : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ und $t_{P'} : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$, welche jedem Eingabewert n die Laufzeiten der Programme P und P' zuordnen. Unter der Laufzeit eines (einfachen) WHILE-Programms verstehen wir die Anzahl der Zuweisungen oder Schleifentests, die ausgeführt werden. Beurteilen Sie den asymptotischen Unterschied zwischen t_P und $t_{P'}$, indem Sie eine Schranke in $\mathcal{O}$-Notation für die Funktion $\Delta : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ mit $\Delta(n) = \frac{t_P(n)}{t_{P'}(n)}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ angeben.

Hauptaufgabe (4 Punkte)

Für einen ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ ist eine Teilmenge $E' \subseteq E$ eine *Überdeckung der Größe* $|E'|$, falls jeder Knoten $v \in V$ mit mindestens einer Kante aus E' inzidiert. Die folgenden Problemvarianten beziehen sich auf diese Überdeckungseigenschaft.

Problem: Überdeckungstest
Gegeben: Ungerichteter Graph $G = (V, E)$, natürliche Zahl $k \leqslant |E|$, Teilmenge $E' \subseteq E$
Frage: Ist E' mit $|E'| \leqslant k$ eine Überdeckung von G?

Problem: Überdeckung
Gegeben: Ungerichteter Graph $G = (V, E)$, natürliche Zahl $k \leqslant |E|$
Frage: Gibt es eine Überdeckung E' von G mit Größe $|E'| \leqslant k$?

Ferner definieren wir eine Familie 1-ÜBERDECKUNG, 2-ÜBERDECKUNG, 3-ÜBERDECKUNG, ..., indem wir für jedes $k \in \mathbb{N}$ das Problem k-ÜBERDECKUNG wie folgt festlegen (beachten Sie, dass k hier nicht Teil der Eingabe ist, sondern für jedes Problem der Familie fest ist):

Problem: k-ÜBERDECKUNG
Gegeben: Ungerichteter Graph $G = (V, E)$
Frage: Gibt es eine Überdeckung E' von G mit Größe $|E'| \leqslant k$?

Lösen Sie die folgenden Teilaufgaben, indem Sie geeignete Algorithmen in Pseudo-Code angeben und beschreiben. Geben Sie ferner Zeitschranken für Ihre Algorithmen an und beschreiben Sie, wie sich diese Schranken ergeben.

a) Zeigen Sie, dass ÜBERDECKUNGSTEST in polynomieller Zeit entschieden werden kann.
(1,5 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass k-ÜBERDECKUNG für jedes $k \in \mathbb{N}$ in polynomieller Zeit entschieden werden kann. Erläutern Sie insbesondere die Korrektheit und Laufzeit des Algorithmus im Fall $k = 3$.
(1,5 Punkte)

c) Zeigen Sie, dass ÜBERDECKUNG in exponentieller Zeit entschieden werden kann.
(1 Punkt)

Aufgabe 12.2 [Optimierungsprobleme vs. Entscheidungsprobleme] 5 Punkte

Aus der Vorlesung kennen Sie bereits das Problem SAT. Wir betrachten im Folgenden verschiedene Varianten des verwandten Problems MINSAT.

Problem: MINSAT
Gegeben: Eine aussagenlogische Formel φ in konjunktiver Normalform (KNF), ein $k \in \mathbb{N}_0$
Frage: Gibt es eine erfüllende Belegung der Variablen in φ, in der höchstens k Variablen auf *wahr* gesetzt sind?

Kurzaufgabe (1 Punkt)

Sei φ eine aussagenlogische Formel in KNF über den Variablen $x_1, \ldots, x_\ell$ für ein $\ell \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

$$(\varphi, k) \in \text{MINSAT} \Leftrightarrow (\varphi \wedge x_{\ell+1}, k + 1) \in \text{MINSAT}.$$

Hauptaufgabe (4 Punkte)

Analog zu den Definitionen der Probleme TSPV und TSPO aus der Vorlesung ergeben sich folgende Optimierungsvarianten des Problems.

Problem: MINSATV
Gegeben: Eine aussagenlogische Formel φ in KNF
Gesucht: Das minimale $k \in \mathbb{N}_0$, für das es eine erfüllende Belegung der Variablen in φ gibt, in der höchstens k Variablen auf *wahr* gesetzt sind

Problem:	MinSatO
Gegeben:	Eine aussagenlogische Formel φ in KNF
Gesucht:	Eine erfüllende Belegung der Variablen von φ mit minimaler Anzahl an Variablen, die auf *wahr* gesetzt sind

Beweisen Sie die folgenden Behauptungen.

a) Lässt sich MinSat in polynomieller Zeit lösen, dann lässt sich auch MinSatV in polynomieller Zeit lösen. **(2 Punkte)**

b) Lässt sich MinSatV in polynomieller Zeit lösen, dann lässt sich auch MinSatO in polynomieller Zeit lösen. **(2 Punkte)**

Aufgabe 12.3 [Polynomielle Reduktionen] 5 Punkte

Wir betrachten in dieser Aufgabe das Problem DominatingSet. Für einen ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ heißt eine Menge $D \subseteq V$ *dominierend*, falls jeder Knoten des Graphen G in D enthalten ist oder durch eine Kante mit einem Knoten in D verbunden ist. Das heißt, für jeden Knoten $v \in V$ gilt $v \in D$ oder es gibt einen Knoten $v' \in D$, sodass $(v, v') \in E$ gilt. Das Problem DominatingSet ist dann wie folgt definiert.

Problem:	DominatingSet
Gegeben:	Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$
Frage:	Gibt es eine dominierende Menge $D \subseteq V$ mit $\lvert D\rvert = k$?

Gegeben sei nun die Funktion f, die eine Eingabe φ für das Problem SAT, also eine aussagenlogische Formel in KNF, auf eine Eingabe (G_φ, k_φ) mit $G_\varphi = (V_\varphi, E_\varphi)$ für das Problem DominatingSet wie folgt abbildet:
Seien $x_1, \ldots, x_n$ die Variablen, die in φ vorkommen, und $C_1, \ldots, C_m$ die Klauseln, die in φ vorkommen. Es gilt also $\varphi = \bigwedge_{j=1}^{m} C_j$ und in φ kommen insgesamt n Variablen vor.
Für jede Variable x_i, die in der Formel φ vorkommt, hat G_φ die Knoten $v_i, \overline{v}_i$ und h_i. Hierbei soll der Knoten v_i das Literal x_i in der Formel repräsentieren und der Knoten $\overline{v}_i$ entsprechend das Literal $\neg x_i$. Die Knoten $h_1, \ldots, h_n$ sind Hilfsknoten. Zusätzlich hat G_φ für jede Klausel C_j von φ einen Knoten w_j. Formal gilt also

$$V_\varphi = \{v_i, \overline{v}_i, h_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n\} \cup \{w_j \mid 1 \leqslant j \leqslant m\}.$$

Für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ sind die Knoten $v_i, \overline{v}_i$ und h_i in G jeweils paarweise durch eine Kante verbunden. Außerdem ist jeder Knoten w_j mit genau den Knoten durch eine Kante verbunden, die die Literale aus der Klausel C_j repräsentieren. Für die Klausel $C_1 = x_1 \vee \neg x_2$ gilt beispielsweise, dass w_1 mit den Knoten v_1 und $\overline{v}_2$ verbunden ist. Beachten Sie, dass es *keine* Kante zwischen den Knoten h_i und den Knoten w_j gibt. Formal ist die Kantenrelation E_φ wie folgt definiert.

$$\begin{aligned} E_\varphi = {} & \{(v_i, \overline{v}_i), (v_i, h_i), (\overline{v}_i, h_i) \mid 1 \leqslant i \leqslant n\} \\ & \cup \{(w_j, v_i) \in V_\varphi \times V_\varphi \mid \text{Das Literal } x_i \text{ kommt in } C_j \text{ vor}\} \\ & \cup \{(w_j, \overline{v}_i) \in V_\varphi \times V_\varphi \mid \text{Das Literal } \neg x_i \text{ kommt in } C_j \text{ vor}\} \end{aligned}$$

Schließlich sei $k_\varphi = n$. Wir fragen also nach einer dominierenden Menge, die genauso viele Elemente hat, wie φ Variablen.

Kurzaufgabe (1 Punkt)

Zeichnen Sie den Graphen G_φ für die folgende Formel φ.

$$\varphi = \underbrace{(x_1 \vee \neg x_2)}_{C_1} \wedge \underbrace{(\neg x_1 \vee \neg x_3)}_{C_2} \wedge \underbrace{\ x_3\ }_{C_3}$$

Gilt $f(\varphi) = (G_\varphi, 3) \in$ DOMINATINGSET? Wenn ja, geben Sie eine dominierende Menge D_φ mit $|D_\varphi| = 3$ an.

Hauptaufgabe (4 Punkte)

a) Zeigen Sie: Wenn φ erfüllbar ist, also $\varphi \in$ SAT gilt, dann gibt es eine dominierende Menge $D_\varphi \subseteq V_\varphi$ mit $|D_\varphi| = k_\varphi$. **(1 Punkt)**

b) Zeigen Sie: Wenn eine dominierende Menge $D_\varphi \subseteq V_\varphi$ mit $|D_\varphi| = k_\varphi$ existiert, dann ist φ erfüllbar. Argumentieren Sie dazu zunächst, dass D_φ für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ genau einen der Knoten v_i, $\overline{v}_i$ und h_i enthält, aber keinen der Knoten w_j für $j \in \{1, \ldots, m\}$. **(1,5 Punkte)**

c) Begründen Sie, dass f in polynomieller Zeit berechnet werden kann. **(0,5 Punkte)**

d) Begründen Sie, dass DOMINATINGSET $\in$ **NP** gilt. **(1 Punkt)**

Testfragen

1. Warum ist die im Satz von Cook angegebene Reduktion in polynomieller Zeit berechenbar?
2. Seien $L_1, L_2 \in \mathbf{P}$ mit $L_1 \leqslant_p L_2$. Gilt auch $L_2 \leqslant_p L_1$?
3. Gilt $K_1 \times K_2 \leqslant_p L_1 \times L_2$ stets, wenn $K_1 \leqslant_p L_1$ und $K_2 \leqslant_p L_2$ gilt?