

Grundbegriffe der Theoretischen Informatik

Sommersemester 2017 - Beate Bollig

Die Folien basieren auf den Materialien von Thomas Schwentick.

Teil B: Kontextfreie Sprachen

11: Wortproblem und Syntaxanalyse

Wortproblem und Syntaxanalyse für kontextfreie Sprachen


- Phasen eines Compilers (schematisch):
 - Lexikalische Analyse
 - Syntaktische Analyse
 - Semantische Analyse
 - Zwischencode-Erzeugung
 - Zwischencode-Optimierung
 - Code-Erzeugung
- Bei der **Syntaxanalyse** wird die Struktur eines Programmes überprüft und in Form eines Syntax-Baumes repräsentiert
- Sie wird vom **Parser** durchgeführt
- Hierbei spielen kontextfreie Sprachen eine wichtige Rolle

- Die Syntaxanalyse liefert die Information, ob das gegebene Programm w syntaktisch korrekt ist

Def.: Wortproblem für kontextfreie Sprachen

Gegeben: Wort $w \in \Sigma^*$, Grammatik G

Frage: Ist $w \in L(G)$?

- Wenn das Programm syntaktisch korrekt ist, soll die Syntaxanalyse auch einen Ableitungsbaum liefern, da dieser das Rückgrat für die Codeerzeugung darstellt
- Außerdem sollte bei syntaktisch inkorrekten Programmen w eine Begründung geliefert werden, warum $w \notin L(G)$  Das betrachten wir nicht

Def.: Syntaxanalyse-Problem für kfr. Sprachen

Gegeben: Wort $w \in \Sigma^*$, Grammatik G

Gesucht: Falls $w \in L(G)$: Ableitungsbaum

Übersicht

- Das Wortproblem für reguläre Sprachen kann für jede feste reguläre Sprache in linearer Zeit gelöst werden
 - durch Auswertung eines DFA
- Auch deterministische Kellerautomaten können in linearer Zeit ausgewertet werden
 - aber leider gibt es nicht für jede kontextfreie Sprache einen deterministischen Kellerautomaten
- Wir werden in diesem Kapitel sehen:
- Die naive Auswertung von PDAs mit Backtracking kann zu exponentieller Laufzeit führen
- Es gibt einen Algorithmus, der das Syntaxanalyse-Problem für kontextfreie Sprachen in polynomieller Zeit löst:
 - Der **CYK-Algorithmus** basiert auf dynamischer Programmierung und hat Laufzeit $\mathcal{O}(|G||w|^3)$
- Da kubische Laufzeit für viele Zwecke nicht akzeptabel ist, betrachten wir danach zwei eingeschränkte Grammatiktypen, die eine Syntaxanalyse in **linearer Zeit** erlauben:
 - LL(**1**)-Grammatiken: recht einfach zu definieren
 - LR(**1**)-Grammatiken: komplizierter zu definieren, aber gleichmächtig zu DPDAs

Syntaxanalyse: Herangehensweisen

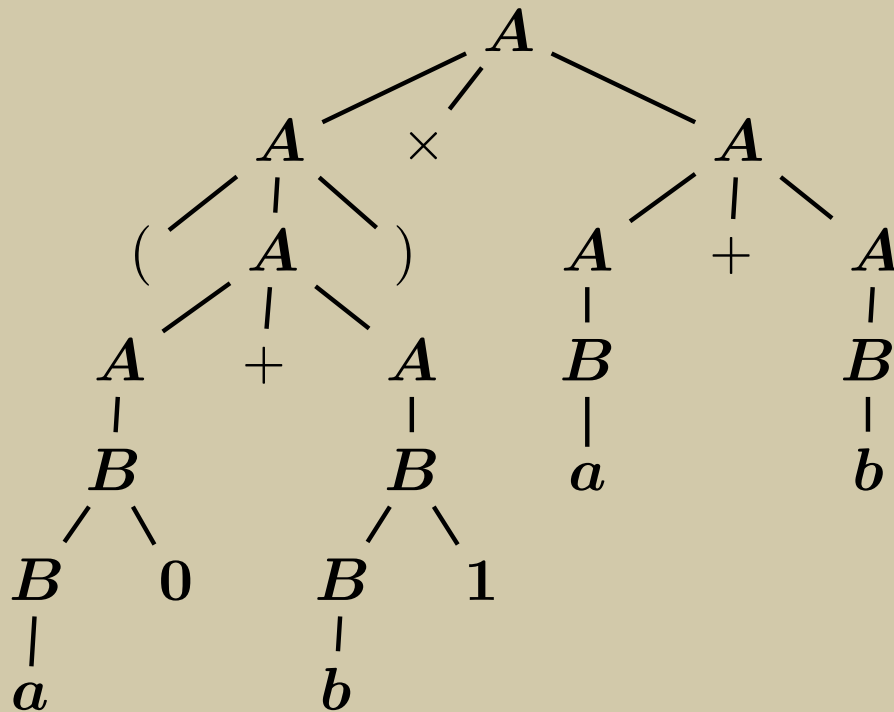
- Wir betrachten zwei Arten von Algorithmen für das Wortproblem für kontextfreie Sprachen
- Algorithmen, die versuchen beim Lesen des Eingabestrings von links nach rechts eine Ableitung zu erzeugen
 - Backtracking (Linksableitung, top-down)
 - $LL(k)$ (Linksableitung, top-down)
 - $LR(k)$ (Rechtsableitung, bottom-up)
- Algorithmen, die den Eingabestring „als Ganzes“ analysieren
 - CYK-Algorithmus
- Bevor wir uns dem Backtracking-Algorithmus zuwenden, werfen wir zunächst einen Blick auf den Ansatz der Top-down Syntaxanalyse
 - Bottom-up Syntaxanalyse werden wir gegen Ende des Kapitels betrachten

Top-down Syntaxanalyse (1/3)

Beispiel-Grammatik

$A \rightarrow B \mid A + A \mid A \times A \mid (A)$
 $B \rightarrow a \mid b \mid Ba \mid Bb \mid B0 \mid B1$

Beispiel-Ableitungsbaum



- Bei der Top-down Syntaxanalyse wird der Ableitungsbaum von oben nach unten und (üblicherweise) von links nach rechts konstruiert
- Dieses Vorgehen ergibt eine Linksableitung

Beispiel-Ableitung: Top-down

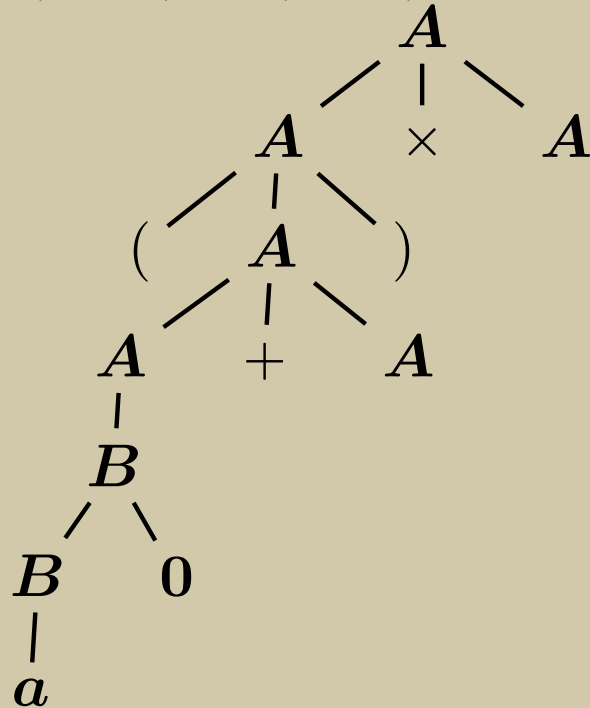
$A \Rightarrow A \times A$
 $\Rightarrow (A) \times A$
 $\Rightarrow (A + A) \times A$
 $\Rightarrow (B + A) \times A$
 $\Rightarrow (B0 + A) \times A$
 $\Rightarrow (a0 + A) \times A$
 $\Rightarrow (a0 + B) \times A$
 $\Rightarrow (a0 + B1) \times A$
 $\Rightarrow (a0 + b1) \times A$
 $\Rightarrow (a0 + b1) \times A + A$
 $\Rightarrow (a0 + b1) \times B + A$
 $\Rightarrow (a0 + b1) \times a + A$
 $\Rightarrow (a0 + b1) \times a + B$
 $\Rightarrow (a0 + b1) \times a + b$

Top-down Syntaxanalyse (2/3)

Beispiel

$A \rightarrow B \mid A + A \mid A \times A \mid (A)$

$B \rightarrow a \mid b \mid Ba \mid Bb \mid B0 \mid B1$



- Eingabe: $(a0 + b1) \times a + b$

Beispiel

- Der angegebene unvollständige Ableitungsbaum stellt eine Zwischensituation bei der Erzeugung einer Linksableitung für $(a0 + b1) \times a + b$ dar
- Der linke Teil der Blätter des Baumes stimmt mit dem Anfang der Eingabe überein: $(a0 +$
- Der unvollständige Baum entspricht der Satzform: $(a0 + A) \times A$
- Als nächstes muss also die Variable A ersetzt werden
- Die restliche Satzform ist: $) \times A$

Top-down Syntaxanalyse (3/3)

- Die allgemeine Situation bei der Bestimmung des nächsten Schrittes einer Linksableitung für einen Eingabestring w ist wie folgt:

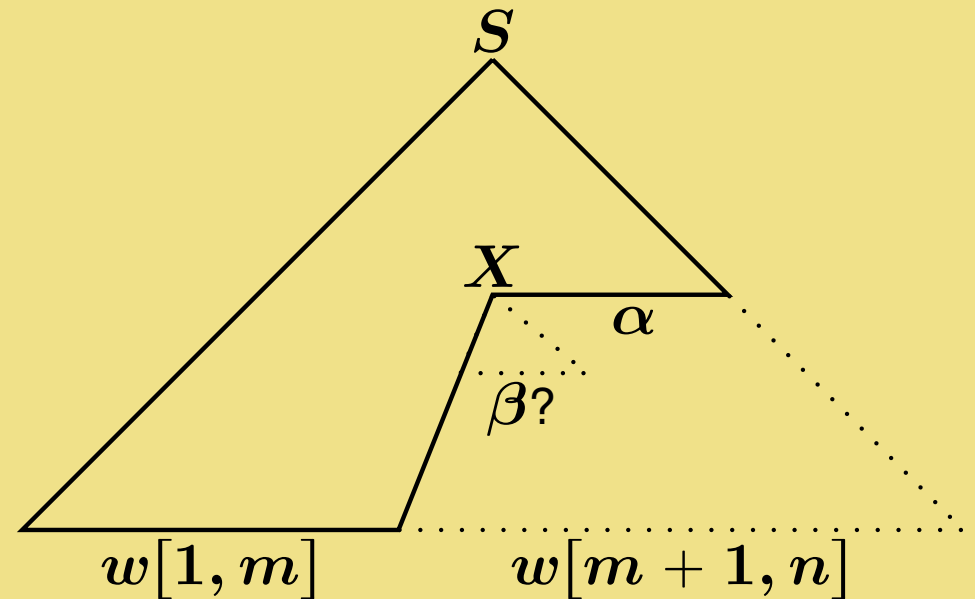
- Es ist schon eine Satzform abgeleitet
- Ihre erste Variable bezeichnen wir mit X
- Die davor stehenden Zeichen aus dem Alphabet Σ müssen mit dem Anfang der Eingabe übereinstimmen

☞ $m \stackrel{\text{def}}{=} \text{Anzahl dieser Zeichen}$

- Den Rest der Satzform bezeichnen wir mit α

- Wir haben also: $S \Rightarrow_l^* w[1, m]X\alpha$
- Damit insgesamt w erzeugt wird, muss also aus $X\alpha$ der restliche String $w[m + 1, n]$ erzeugt werden

- Der nächste Ableitungsschritt ist gesucht:
 $w[1, m]X\alpha \Rightarrow_l w[1, m]\beta\alpha$



11.1 Algorithmen für beliebige kontextfreie Sprachen

▷ 11.1.1 Backtracking

11.1.2 Der CYK-Algorithmus

11.2 Effiziente Syntaxanalyse

Backtracking-Algorithmus: Idee

- Der Backtrackingalgorithmus versucht systematisch eine Linksableitung zu erzeugen
 - Er probiert dazu nach Ableitung von $S \Rightarrow_l^* w[1, m] X \alpha$ alle Regeln der Form $X \rightarrow \beta$ nacheinander aus
 - Wenn die entstehende Satzform nicht zur Eingabe passt oder zu lang wird, wählt er beim nächsten Mal die nächste Regel
 - Dabei kann es nötig sein, Schritte wieder rückgängig zu machen
- Die Laufzeit des Backtracking-Algorithmus kann exponentiell werden, wie das folgende Beispiel zeigt

Backtracking-Algorithmus: Beispiel (1/2)

• Backtracking-Algorithmus:

- Versuche, Linksableitung zu erzeugen
- Wähle immer jeweils die erste passende Regel
- Falls nicht erfolgreich:
* zurücksetzen und nächste Regel wählen

Beispiel

• Grammatik:

$$S \rightarrow aA0 \quad (1)$$

$$S \rightarrow aB1 \quad (2)$$

$$A \rightarrow aA0 \quad (3)$$

$$A \rightarrow aB1 \quad (4)$$

$$A \rightarrow c \quad (5)$$

$$B \rightarrow aA0 \quad (6)$$

$$B \rightarrow aB1 \quad (7)$$

$$B \rightarrow c \quad (8)$$

• Eingabe: aaac111

Lauf des Backtracking-Algorithmus

Eingabe	Satzform	Regeln	Letzte Aktion
aaac111	S		
aaac111	aA0	1	Regel 1
a aac111	a A0	1	Vergleich: ok
a aac111	a aA00	1 3	Regel 3
aa ac111	aa A00	1 3	Vergleich: ok
aa ac111	aa aA000	1 3 3	Regel 3
aaa c111	aaa A000	1 3 3	Vergleich: ok
aaa c111	aaa aA0000	1 3 3 3	Regel 3
aaac 111	aaaa A0000	1 3 3 3	Vergleich: nicht ok
aaa c111	aaa A000	1 3 3 (3)	zurück
aaa c111	aaa aB1000	1 3 3 4	Regel 4
aaac 111	aaaa B1000	1 3 3 4	Vergleich: nicht ok
aaa c111	aaa A000	1 3 3 (4)	zurück
aaa c111	aaa c000	1 3 3 5	Regel 5
aaac 111	aaac 000	1 3 3 5	Vergleich: ok
aaac1 11	aaac0 00	1 3 3 5	Vergleich: nicht ok
aaa c111	aaa A000	1 3 3 (5)	zurück
aa ac111	aa A00	1 3 (3)	zurück
aa ac111	aa aB100	1 3 4	Regel 4
aaa c111	aaa B100	1 3 4	Vergleich: ok
aaa c111	aaa aA0100	1 3 4 6	Regel 6
aaac 111	aaaa A0100	1 3 4 6	Vergleich: nicht ok

Backtracking-Algorithmus: Beispiel (2/2)

• Backtracking-Algorithmus:

- Versuche, Linksableitung zu erzeugen
- Wähle immer jeweils die erste passende Regel
- Falls nicht erfolgreich:
* zurücksetzen und nächste Regel wählen

Beispiel

• Grammatik:

- $S \rightarrow aA0$ (1)
- $S \rightarrow aB1$ (2)
- $A \rightarrow aA0$ (3)
- $A \rightarrow aB1$ (4)
- $A \rightarrow c$ (5)
- $B \rightarrow aA0$ (6)
- $B \rightarrow aB1$ (7)
- $B \rightarrow c$ (8)

• Eingabe: aaac111

Lauf des Backtracking-Algorithmus (Forts.)

Eingabe	Satzform	Regeln	Letzte Aktion
aaac 111	aaaa A0100	1 3 4 6	Vergleich: nicht ok
aaa c111	aaa B100	1 3 4 (6)	zurück
aaa c111	aaa aB1100	1 3 4 7	Regel 7
aaac 111	aaaa B1100	1 3 4 (7)	Vergleich: nicht ok
aaa c111	aaa B100	1 3 4 (7)	zurück
aaa c111	aaa c100	1 3 4 8	Regel 8
aaac 111	aaac 100	1 3 4 8	Vergleich: ok
aaac1 11	aaac1 00	1 3 4 8	Vergleich: ok
aaac11 1	aaac10 0	1 3 4 8	Vergleich: nicht ok
aaa c111	aaa B100	1 3 4 (8)	zurück
aa ac111	aa A00	1 3 (4)	zurück
aa ac111	aa c00	1 3 5	Regel 5
aaa c111	aac 00	1 3 5	Vergleich: nicht ok
aa ac111	aa A00	1 3 (5)	zurück
a aac111	a A0	1 (3)	zurück
a aac111	a aB10	1 4	Regel 4
...
aaac111	aaac111	2 7 7 8	Vergleich: ok

- Beobachtung: Bei Eingabe $a^n c 1^n$ kommen alle n -stelligen Binärzahlen x in einer Satzform $a^n c x$ vor
➡ exponentiell viele Schritte

11.1 Algorithmen für beliebige kontextfreie Sprachen

11.1.1 Backtracking

▷ 11.1.2 Der CYK-Algorithmus

11.2 Effiziente Syntaxanalyse

Der CYK-Algorithmus

- Exponentieller Aufwand ist bei der Syntaxanalyse natürlich inakzeptabel
- Wir betrachten jetzt einen Algorithmus, der das Wortproblem für **beliebige** kontextfreie Grammatiken in polynomieller Zeit löst
(für CNF in Zeit $\mathcal{O}(|G||w|^3)$)
- Der **CYK-Algorithmus** wurde von Cocke, Younger und Kasami (unabhängig voneinander) entwickelt
(um 1965)
 - „Richtig“ veröffentlicht wurde er nur von Younger
[\[Younger 67\]](#)
- Der CYK-Algorithmus verwendet **dynamische Programmierung**
- Er nutzt aus, dass die Grammatik G für L in CNF ist, lässt sich aber für kontextfreie Grammatiken, die nicht in CNF sind, anpassen

Der CYK-Algorithmus: Grundidee

- Sei G in CNF gegeben und w ein String der Länge n
- Zunächst wird das Problem in Teilprobleme zerlegt, die durch Parameter repräsentiert werden
✎ Das Problem wird also „parametrisiert“

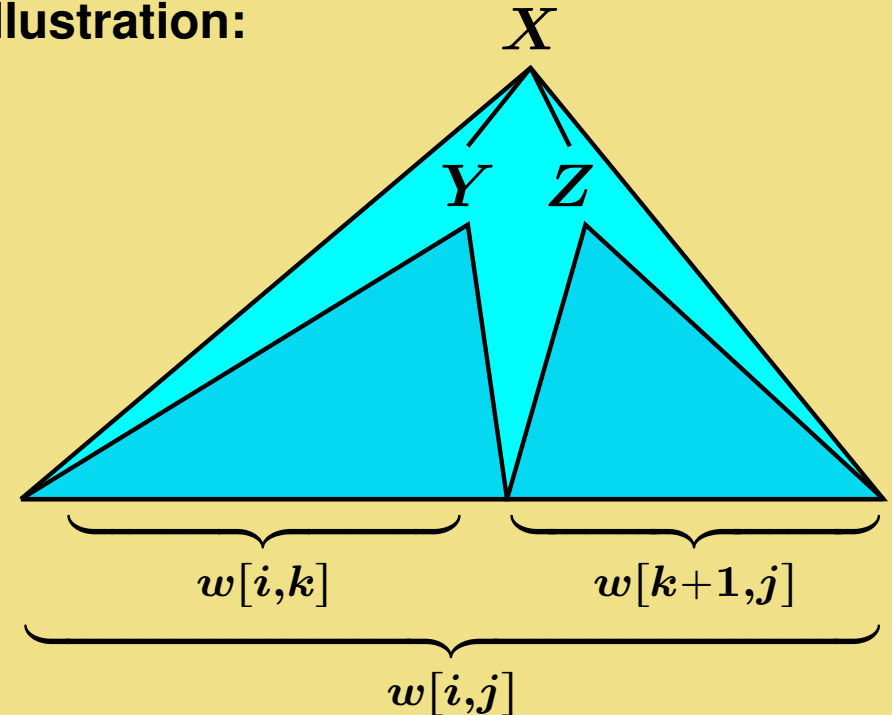
- Für jede Wahl von $i, j \in \{1, \dots, n\}$ mit $i \leq j$ sei

$$\underline{V_{i,j}} \stackrel{\text{def}}{=} \{X \in V \mid X \Rightarrow^* w[i, j]\}$$

- ✎ V_{ij} ist also die Menge aller Variablen, aus denen $w[i, j]$ abgeleitet werden kann

- Klar: $w \in L(G) \iff S \in V_{1,n}$
- Der CYK-Algorithmus berechnet die Mengen $V_{i,j}$ **bottom-up**

• Illustration:



- Er nutzt aus, dass bei einer CNF-Grammatik für $X \in V$, $1 \leq i < j \leq n$ äquivalent sind:
 - $X \in V_{ij}$
 - es gibt $Y, Z \in V$ und $k \in \{i, \dots, j-1\}$ mit:
 - * $X \rightarrow YZ$ ist Regel von G ,
 - * $Y \in V_{i,k}$ und
 - * $Z \in V_{k+1,j}$

Der CYK-Algorithmus

Algorithmus 11.1 (CYK-Algorithmus)

Eingabe: $w \in \Sigma^*$, $G = (V, \Sigma, S, P)$ in CNF

Ausgabe: „ja“, falls $w \in L(G)$

```
1: for  $i := 1$  TO  $n$  do
2:    $V_{i,i} := \{X \in V \mid X \rightarrow w[i, i] \text{ in } P\}$ 
3: for  $\ell := 1$  TO  $n - 1$  do
4:   for  $i := 1$  TO  $n - \ell$  do
5:      $V_{i,i+\ell} := \emptyset$  {Teilstrings der Länge  $\ell + 1$ }
6:     for  $k := i$  TO  $i + \ell - 1$  do
7:        $V_{i,i+\ell} := V_{i,i+\ell} \cup \{X \mid$ 
          $X \rightarrow YZ \text{ in } P, Y \in V_{i,k}, Z \in V_{k+1,i+\ell}\}$ 
8: if  $S \in V_{1,n}$  then
9:   Akzeptieren
10: else
11:   Ablehnen
```

- Anweisung 7 wird durch eine Schleife über alle Regeln von G implementiert

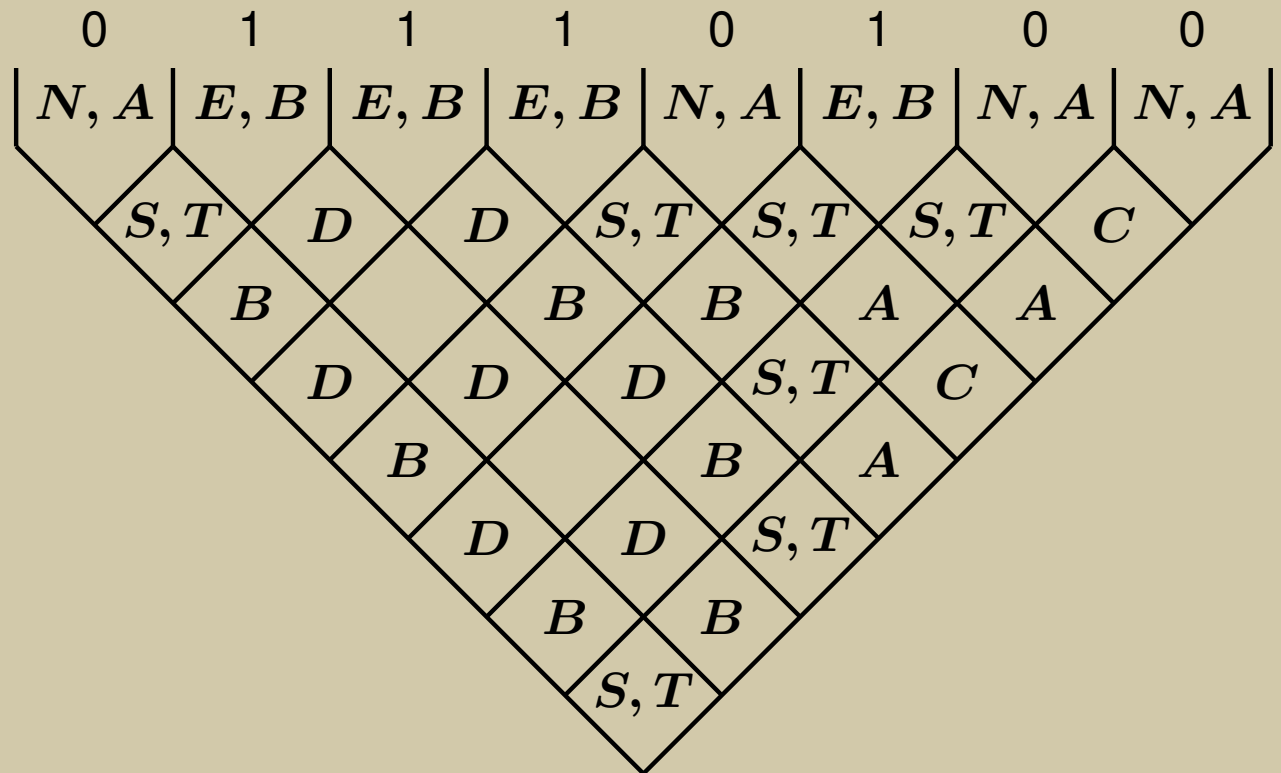
- Dass der Aufwand $\mathcal{O}(n^3|G|)$ ist (für $n = |w|$), lässt sich an den verschachtelten Schleifen des Algorithmus direkt ablesen

CYK-Algorithmus: Beispiel

Beispiel-Grammatik

$S \rightarrow NB \mid EA \mid \epsilon$
 $T \rightarrow NB \mid EA$
 $N \rightarrow 0$
 $E \rightarrow 1$
 $A \rightarrow 0 \mid NT \mid EC$
 $B \rightarrow 1 \mid ET \mid ND$
 $C \rightarrow AA$
 $D \rightarrow BB$

Verlauf der Bearbeitung



- Ergebnis: $S \in V_{1,8}$ deshalb: $01110100 \in L(G)$
- Wie lässt sich nun ein Ableitungsbaum für **01110100** gewinnen?
 - Durch eine kleine Erweiterung des CYK-Algorithmus: er merkt sich jeweils nicht nur X , sondern auch das zugehörige k


Der erweiterte CYK-Algorithmus

Algorithmus 11.2 Erweiterter CYK-Algorithmus

Eingabe: $w \in \Sigma^*$, $G = (V, \Sigma, S, P)$ in CNF

Ausgabe: Ableitungsbaum, falls $w \in L(G)$

- 1: **for** $i := 1$ **TO** n **do**
- 2: $V_{i,i} := \{(X, i) \mid X \rightarrow w[i, i] \text{ in } P\}$
- 3: **for** $\ell := 1$ **TO** $n - 1$ **do**
- 4: **for** $i := 1$ **TO** $n - \ell$ **do**
- 5: $V_{i,i+\ell} := \emptyset$ {Teilstrings der Länge $\ell + 1$ }
- 6: **for** $k := i$ **TO** $i + \ell - 1$ **do**
- 7: $V_{i,i+\ell} := V_{i,i+\ell} \cup \{(X, k) \mid$
 $X \rightarrow YZ \text{ in } P, Y \in V_{i,k}, Z \in V_{k+1,i+\ell}\}$
- 8: **if** es gibt kein k mit $(S, k) \in V_{1,n}$ **then**
- 9: Ablehnen
- 10: Konstruiere Ableitungsbaum rekursiv durch Aufruf von $\text{Tree}(S, 1, n)$

 Dabei ist „ $Y \in V_{i,k}$ “ eine Abkürzung für:
„es gibt ein m mit $(Y, m) \in V_{i,k}$ “

Algorithmus Tree

Eingabe: X, i, j

Ausgabe: Ableitungsbaum für
 $w[i, j]$ aus X

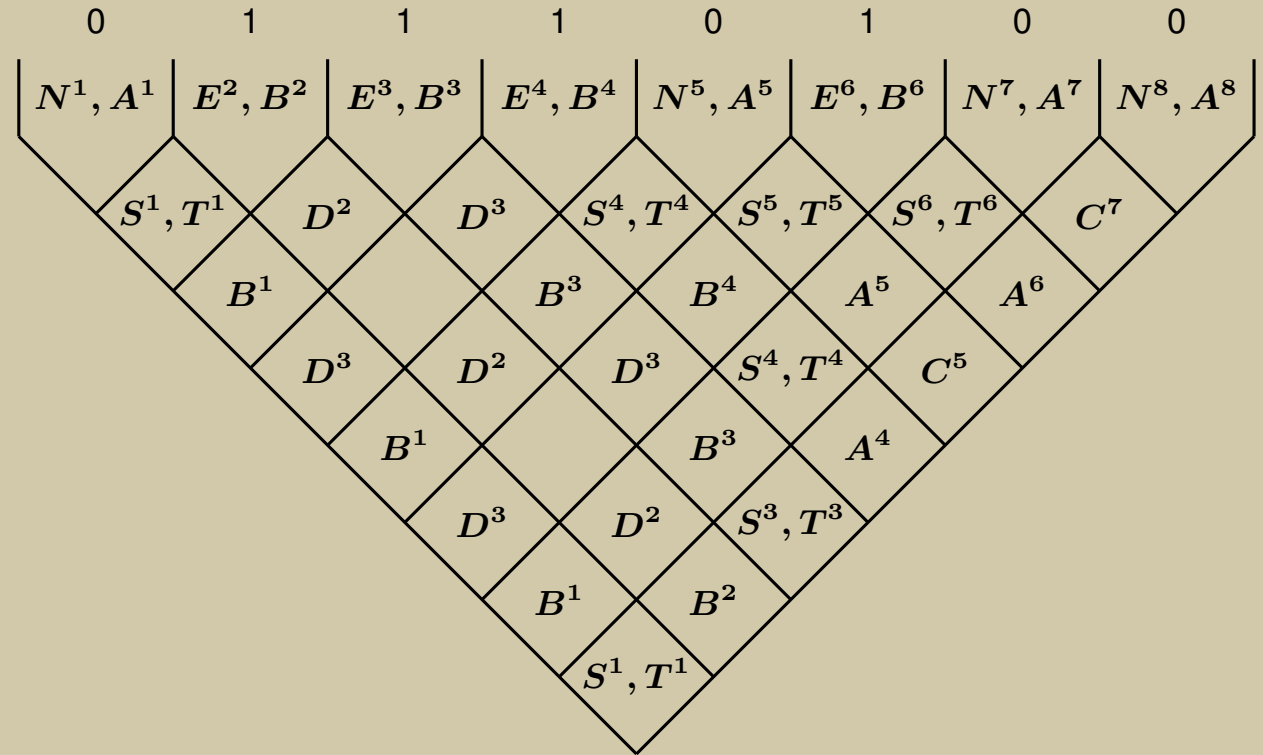
- 1: **if** $i = j$ **then**
- 2: RETURN Blatt σ_i
- 3: Wähle ein k mit $(X, k) \in V_{i,j}$
- 4: Wähle Y, Z , so dass
 - $X \rightarrow YZ$,
 - $Y \in V_{i,k}$ und
 - $Z \in V_{k+1,j}$
- 5: RETURN Baum mit Wurzel X , linkem Teilbaum $\text{Tree}(Y, i, k)$ und rechtem Teilbaum $\text{Tree}(Z, k + 1, j)$

Erweiterter CYK-Algorithmus: Beispiel

Beispiel-Grammatik

$S \rightarrow NB \mid EA \mid \epsilon$
 $T \rightarrow NB \mid EA$
 $N \rightarrow 0$
 $E \rightarrow 1$
 $A \rightarrow 0 \mid NT \mid EC$
 $B \rightarrow 1 \mid ET \mid ND$
 $C \rightarrow AA$
 $D \rightarrow BB$

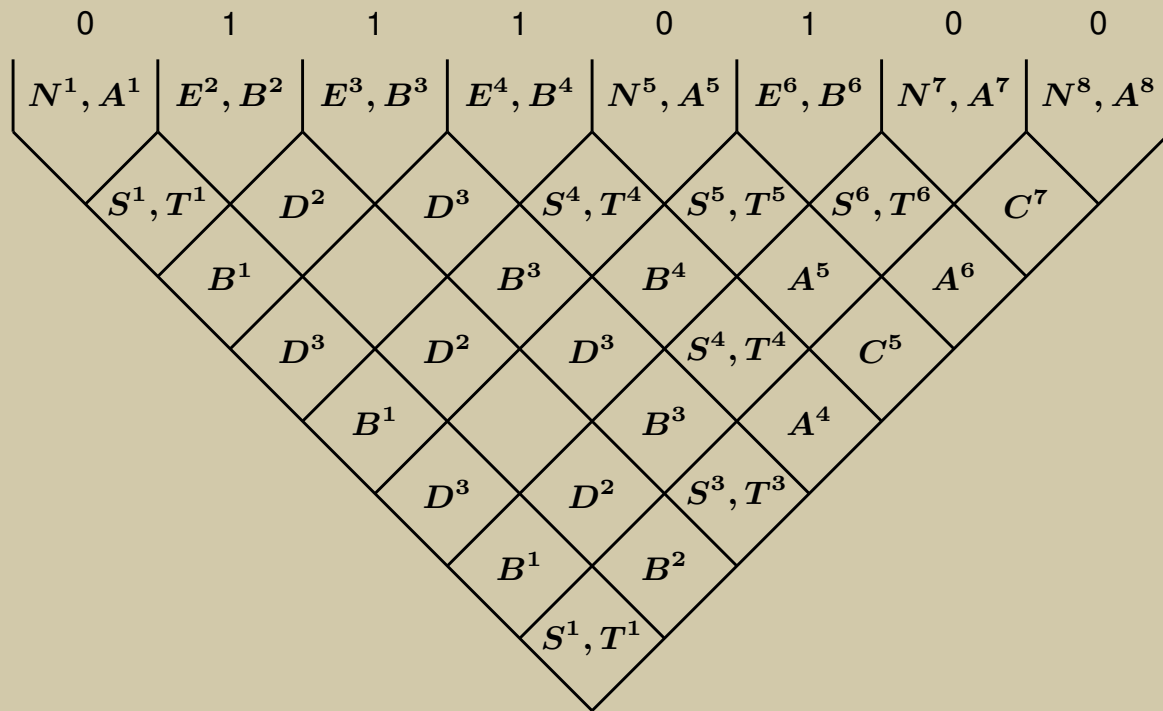
Beispiel



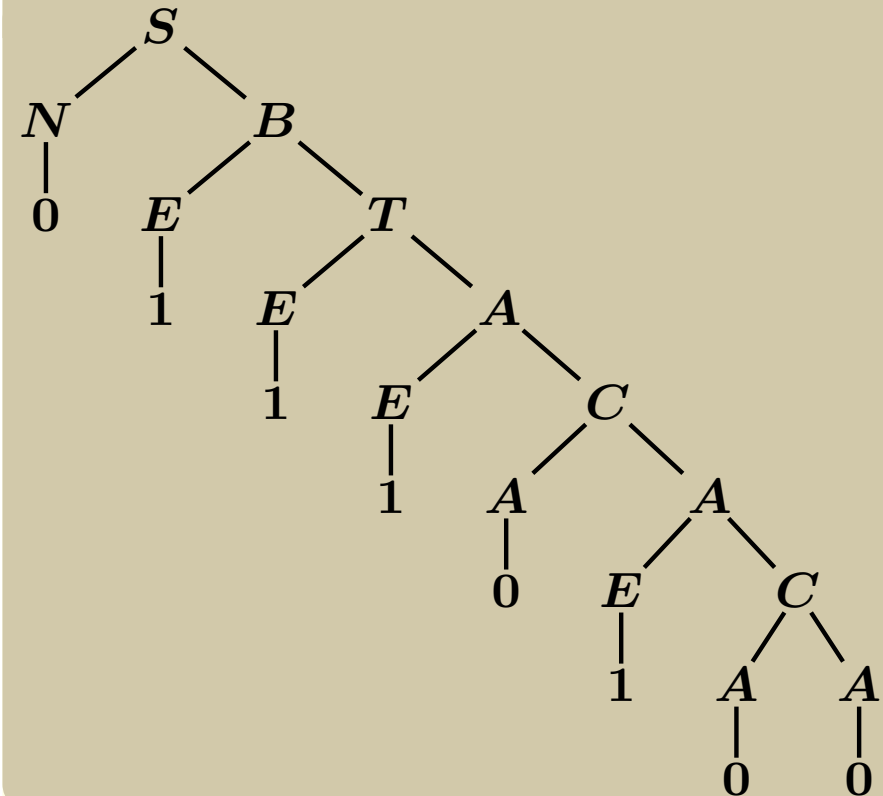
- Aus Platzgründen steht hier statt (X, k) jeweils X^k
- Außerdem ist nur jeweils höchstens **ein** k mit $(X, k) \in V_{i,j}$ angegeben

Erweiterter CYK-Algorithmus: Beispiel-Ableitung

Beispiel



Beispiel



11.1 Algorithmen für beliebige kontextfreie Sprachen

▷ **11.2 Effiziente Syntaxanalyse**

11.2.1 Top-down-Syntaxanalyse

11.2.2 Bottom-up-Syntaxanalyse

Effizientere Syntaxanalyse

- Syntaxanalyse von Programmtexten sollte möglichst in linearer Zeit erfolgen
 - Die beiden bisher betrachteten Algorithmen für das Syntaxanalyse-Problem sind also nicht effizient genug
- Für allgemeine kontextfreie Grammatiken sind aber leider keine Linearzeit-Algorithmen für das Syntaxanalyse-Problem bekannt
- Ein möglicher Ausweg ist, Grammatiken so einzuschränken, dass die Syntaxanalyse in linearer Zeit möglich wird
 - Das Ziel ist dabei, möglichst viele Sprachen mit den eingeschränkten Grammatiken beschreiben zu können

- Wir werden zwei Einschränkungen von Grammatiken kennen lernen
 - Bei beiden wird die Eingabe von links nach rechts gelesen
 - Bei beiden hängt die nächste Regelanwendung nur vom nächsten Zeichen der Eingabe ab
 - * Damit kann uferloses Backtracking vermieden werden
- Bei $LL(1)$ -Grammatiken wird, ausgehend vom Startsymbol, eine **Linksableitung** für w erzeugt
 - Top-down-Syntaxanalyse
- Bei $LR(1)$ -Grammatiken wird, ausgehend von w , durch „Rückwärtsanwendung“ von Regeln eine **Rechtsableitung** erzeugt
 - Bottom-up-Syntaxanalyse
- Beide Grammatik-Typen gibt es auch mit Abhängigkeit von den nächsten k Zeichen

☞ $LL(k), LR(k)$

Inhalt

11.1 Algorithmen für beliebige kontextfreie Sprachen

11.2 Effiziente Syntaxanalyse

▷ **11.2.1 Top-down-Syntaxanalyse**

11.2.2 Bottom-up-Syntaxanalyse

Effiziente Top-down-Syntaxanalyse: Vorüberlegungen (1/5)

- Im Folgenden betrachten wir nur Grammatiken G , die nicht **linksrekursiv** sind
 - ☞ d.h.: $X \Rightarrow_G^* X\alpha$ mit $\alpha \neq \epsilon$ ist verboten
 - Sonst bestünde die Gefahr von Endlosschleifen
- **Problem:** welche Regel soll angewendet werden, wenn mehrere Anwendungen möglich sind?
 - Wir wissen: Backtracking ist zu ineffizient
- **Idee** zur Vermeidung exponentiellen Aufwandes:
 - Wir schränken G so ein, dass immer direkt erkennbar ist, welche Regel angewendet werden muss
 - „Direkt erkennbar“ heißt dabei, dass für die Entscheidung nur das nächste Zeichen der Eingabe angeschaut werden muss

Effiziente Top-down-Syntaxanalyse: Vorüberlegungen (2/5)

Beispiel

- Wir betrachten die Grammatik für Palindrome:

$$P \rightarrow aPa \mid bPb \mid a \mid b \mid \epsilon$$

und versuchen eine Linksableitung für den String *abba* zu finden:

- Der Versuch scheitert schon im ersten Schritt, da aus der Kenntnis des ersten Zeichens *a* nicht hervorgeht, ob wir die Regel $P \rightarrow a$ oder $P \rightarrow aPa$ anwenden sollen
- Wenn wir korrekt mit $P \Rightarrow aPa$ beginnen, stellt sich im zweiten Schritt wieder das Problem:

$$P \rightarrow b \text{ oder } P \rightarrow bPb$$

- Nach dem korrekten zweiten Schritt $aPa \Rightarrow abPba$ gibt es wieder zwei Möglichkeiten: $P \Rightarrow bPb$ oder $P \Rightarrow \epsilon$

- Diese Grammatik ist also sicher nicht für die Top-down-Analyse mit nur einem „Vorschau-Zeichen“ geeignet
- Ein offensichtlicher Grund hierfür ist, dass es mehrere Regeln derselben Variablen gibt, deren rechte Seite mit demselben Terminalsymbol beginnt
→ das verbieten wir in effizienten Top-down-Grammatiken

Effiziente Top-down-Syntaxanalyse: Vorüberlegungen (3/5)

Beispiel

- Wir betrachten die Grammatik

$$S \rightarrow aA \mid BC$$

$$A \rightarrow bA \mid c$$

$$B \rightarrow bC \mid Ca$$

$$C \rightarrow ba \mid ab$$

und suchen eine Linksableitung für *ababa*:

$$S \Rightarrow aA$$

$$\Rightarrow abA$$

$$\Rightarrow ?$$

Wir stellen fest, dass wir im ersten Schritt schon einen Fehler gemacht haben

- Eine Ableitung ergäbe sich durch:

$$S \Rightarrow BC$$

$$\Rightarrow CaC$$

$$\Rightarrow abaC$$

$$\Rightarrow ababa$$

- Was ist hier schiefgelaufen?

- Zwar haben die rechten Regelseiten hier jeweils verschiedene erste Terminalsymbole

- Aber aus *B* lässt sich der String *aba* ableiten

- Damit stehen die beiden rechten Regelseiten *aA* und *BC* miteinander in Konkurrenz, obwohl sie nicht mit dem selben Terminalsymbol beginnen

- Wir müssen also auch berücksichtigen, welche ersten Zeichen sich durch weitere Ableitung aus der ersten Variablen einer rechten Regelseite ergeben können

Effiziente Top-down-Syntaxanalyse: Vorüberlegungen (4/5)

Beispiel

- Wir betrachten die Grammatik

$$S \rightarrow aA \mid BC$$

$$A \rightarrow bA \mid c$$

$$B \rightarrow c \mid \epsilon$$

$$C \rightarrow ab$$

und suchen eine Linksableitung für ab :

$$S \Rightarrow aA$$

$$\Rightarrow abA$$

$$\Rightarrow ?$$

Wir stellen fest, dass wir wieder schon im ersten Schritt einen Fehler gemacht haben

- Eine Ableitung ergäbe sich durch:

$$S \Rightarrow BC$$

$$\Rightarrow C$$

$$\Rightarrow ab$$

- Was ist hier schiefgelaufen?

- Die rechten Regelseiten haben hier jeweils verschiedene erste Terminalsymbole, auch bei Berücksichtigung der möglichen ersten Terminalsymbole, die sich aus ersten Variablen rechter Regelseiten ableiten lassen

- Aber B lässt sich zu ϵ ableiten und C zu ab

- Deshalb stehen die beiden rechten Regelseiten aA und BC miteinander in Konkurrenz, obwohl aus B nicht als erstes Terminalsymbol a ableitbar ist

- Wir müssen also auch berücksichtigen, welche ersten Zeichen sich durch Ableitung aus den gesamten rechten Regelseiten ergeben können und dabei insbesondere ϵ -Ableitungen berücksichtigen

Effiziente Top-down-Syntaxanalyse: Vorüberlegungen (5/5)

Beispiel

- Wir betrachten die Grammatik

$$S \rightarrow AB$$

$$A \rightarrow \epsilon \mid aB$$

$$B \rightarrow aaB \mid b$$

und suchen eine Linksableitung für aab :

$$S \Rightarrow AB$$

$$\Rightarrow aBB$$

$$\Rightarrow ?$$

Wir stellen fest, dass wir im zweiten Schritt schon einen Fehler gemacht haben

- Eine Ableitung ergäbe sich durch:

$$S \Rightarrow AB$$

$$\Rightarrow B$$

$$\Rightarrow aaB$$

$$\Rightarrow aab$$

- Was ist hier schiefgelaufen?

- Zwar haben die rechten Regelseiten jeweils verschiedene erste Terminalsymbole, auch bei Berücksichtigung der ableitbaren Strings
- Aber in AB kann das nächste Zeichen a sowohl aus A entstehen als auch (nach Anwendung von $A \rightarrow \epsilon$) aus B
- Dies führt dazu, dass bei der Satzform AB und nächstem Symbol a nicht klar ist, ob als nächstes $A \rightarrow \epsilon$ oder $A \rightarrow aB$ angewendet werden muss
- Wir müssen deshalb in einem solchen Fall ($A \Rightarrow^* \epsilon$) auch darauf achten, welche Zeichen **hinter** A erzeugt werden können

- Diese Beobachtungen führen uns zur Definition von $LL(1)$ -Grammatiken

LL(1)-Grammatiken: Definition

- Zur Definition von LL(1)-Grammatiken verwenden wir die folgenden beiden Operatoren:

- Für eine Satzform α sei
 $\text{FIRST}(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \{\sigma \in \Sigma \mid \alpha \Rightarrow^* \sigma v, v \in \Sigma^*\} \cup \{\epsilon \mid \alpha \Rightarrow^* \epsilon\}$

- Für eine Variable X sei
 $\text{FOLLOW}(X) \stackrel{\text{def}}{=} \{\sigma \in \Sigma \mid S \Rightarrow^* uX\sigma v, u, v \in \Sigma^*\}$

- $\text{FIRST}(\alpha)$ enthält also alle ersten Terminalzeichen von Strings, die aus α abgeleitet werden können (und evtl. ϵ , wenn dieses aus α abgeleitet werden kann)

- $\text{FOLLOW}(X)$ enthält alle Terminalzeichen, die in irgendeiner aus S ableitbaren Satzform unmittelbar hinter X vorkommen können

Definition

- Sei G eine kontextfreie Grammatik G ohne nutzlose Variablen und ohne Linksrekursion
- G ist eine **LL(1)-Grammatik**, wenn für alle Variablen X und alle Regeln $X \rightarrow \alpha$ und $X \rightarrow \beta$ mit $\alpha \neq \beta$ die beiden folgenden Bedingungen gelten:
 - (i) $\text{FIRST}(\alpha) \cap \text{FIRST}(\beta) = \emptyset$
 - (ii) Falls $\alpha \Rightarrow^* \epsilon$ so ist
 $\text{FOLLOW}(X) \cap \text{FIRST}(\beta) = \emptyset$

- $\text{FIRST}(\alpha)$ und $\text{FOLLOW}(X)$ können effizient berechnet werden
- LL(1)-Grammatiken lassen sich sehr einfach rekursiv implementieren
- Die Erzeugung von Code lässt sich dabei oft sehr leicht integrieren: **rekursiver Abstieg**

LL(1)-Grammatiken: Beispiele

Beispiel

$$\begin{aligned} S &\rightarrow aB \mid bA \mid c \\ A &\rightarrow aS \mid bAA \\ B &\rightarrow bS \mid aBB \end{aligned}$$

- Offensichtlich erfüllt die Grammatik alle Bedingungen der Art (i)
- Da keine ϵ -Regeln vorkommen, erfüllt sie auch (ii)
- Also ist es eine LL(1)-Grammatik

Beispiel

$$\begin{aligned} S &\rightarrow AB \\ A &\rightarrow \epsilon \mid aB \\ B &\rightarrow aA \mid b \end{aligned}$$


- $\text{FOLLOW}(A) = \{a, b\}$
 - $\text{FIRST}(aB) = \{a\}$
 - Da es eine Regel $A \rightarrow \epsilon$ gibt, müssten diese beiden Mengen disjunkt sein
- keine LL(1)-Grammatik

Beispiel

$$\begin{aligned} A &\rightarrow BC \mid ab \\ B &\rightarrow cAA \mid bc \mid \epsilon \\ C &\rightarrow cC \mid \epsilon \end{aligned}$$

- Es gilt:
 - $\text{FIRST}(A) = \{a, b, c, \epsilon\}$
 - $\text{FIRST}(B) = \{b, c, \epsilon\}$
 - $\text{FIRST}(C) = \{c, \epsilon\}$
 - $\text{FOLLOW}(A) = \{a, b, c\}$
 - $\text{FOLLOW}(B) = \{a, b, c\}$
 - $\text{FOLLOW}(C) = \{a, b, c\}$
 - $BC \Rightarrow^* \epsilon$
 - Also haben wir:
 - $A \rightarrow BC$ und $A \rightarrow ab$,
 - $BC \Rightarrow^* \epsilon$
 - $\text{FOLLOW}(A) \cap \text{FIRST}(ab) = \{a\} \neq \emptyset$
- ➔ Dies ist keine LL(1)-Grammatik

LL(1)-Grammatiken: Parsing

- Parsing-Algorithmen für LL(1)-Grammatiken verwenden eine Tabelle, die dem Compiler in jeder Situation (Variable und nächstes Zeichen) sagt, welche Regel anzuwenden ist
- Die Berechnung dieser Tabelle wird hier nicht betrachtet
- Stattdessen schauen wir ein Beispiel an
 Die Beispieldtabelle vernachlässigt das Wortende-Symbol
- LL(k)-Grammatiken (für $k \geq 2$) erlauben Parsing-Algorithmen, die die nächsten k Zeichen der Eingabe berücksichtigen, und verallgemeinern LL(1)-Grammatiken

Beispiel

- Sei G die LL(1)-Grammatik

$$S \rightarrow AB \mid (S)S$$

$$A \rightarrow CA \mid \epsilon$$

$$B \rightarrow ba$$

$$C \rightarrow ca$$

- $\text{FIRST}(B) = \{b\}$, $\text{FIRST}(C) = \{c\}$
- $\text{FIRST}(A) = \{c, \epsilon\}$
- $\text{FIRST}(S) = \{b, c, (\}$
- $\text{FOLLOW}(A) = \{b\}$

- Die zugehörige Tabelle ist:

	a	b	c	$($	$)$
S		AB	AB	$(S)S$	
A		ϵ	CA		
C			ca		
B		ba			

Inhalt

11.1 Algorithmen für beliebige kontextfreie Sprachen

11.2 Effiziente Syntaxanalyse

11.2.1 Top-down-Syntaxanalyse

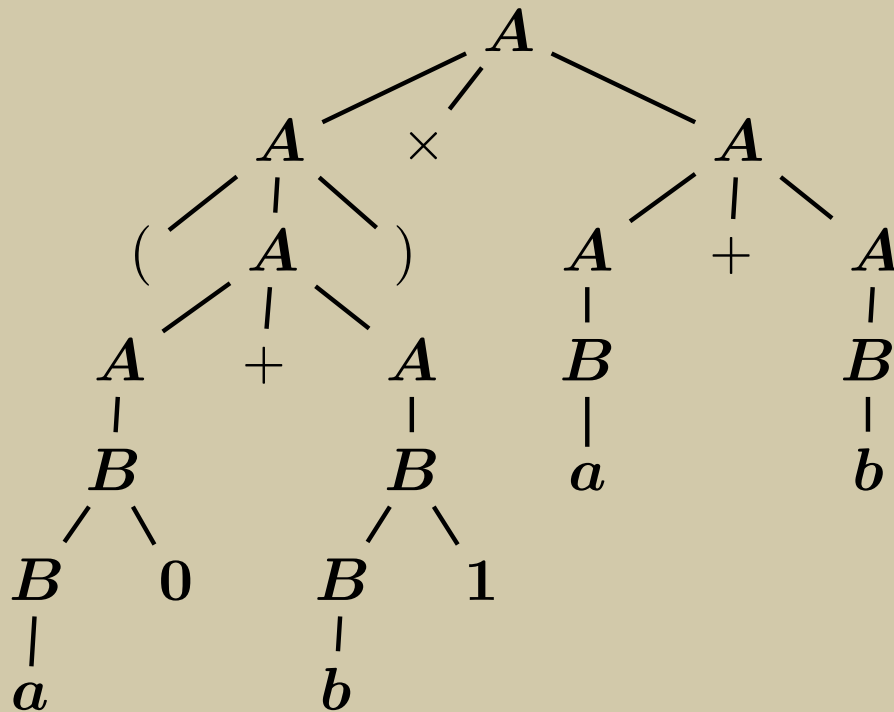
▷ **11.2.2 Bottom-up-Syntaxanalyse**

Bottom-up Syntaxanalyse (1/3)

Beispiel-Grammatik

$A \rightarrow B \mid A + A \mid A \times A \mid (A)$
 $B \rightarrow a \mid b \mid Ba \mid Bb \mid B0 \mid B1$

Beispiel-Ableitungsbaum



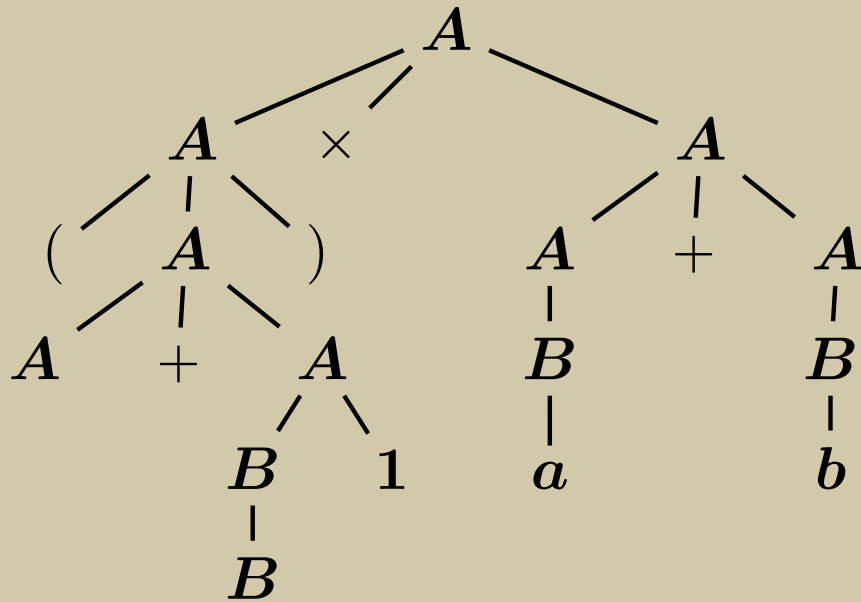
- Bei der Bottom-up Syntaxanalyse wird der Ableitungsbaum von unten nach oben und (üblicherweise) von links nach rechts konstruiert
- Dieses Vorgehen ergibt eine Rechtsableitung

Beispiel-Ableitung: Bottom-up (rückwärts)

$(a0 + b1) \times a + b \Leftarrow$
 $(B0 + b1) \times a + b \Leftarrow$
 $(B + b1) \times a + b \Leftarrow$
 $(A + b1) \times a + b \Leftarrow$
 $(A + B1) \times a + b \Leftarrow$
 $(A + B) \times a + b \Leftarrow$
 $(A + A) \times a + b \Leftarrow$
 $(A) \times a + b \Leftarrow$
 $A \times a + b \Leftarrow$
 $A \times B + b \Leftarrow$
 $A \times A + b \Leftarrow$
 $A \times A + B \Leftarrow$
 $A \times A + A \Leftarrow$
 $A \times A \Leftarrow A$

Bottom-up Syntaxanalyse (2/3)

Beispiel



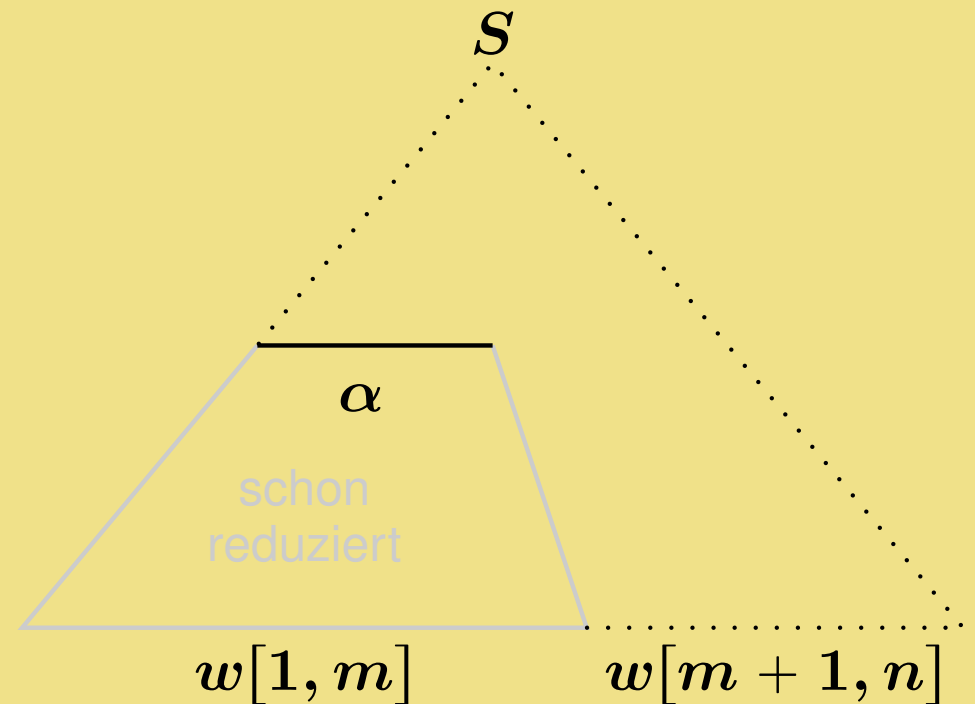
- Eingabe: $(a0 + b1) \times a + b$

Beispiel

- Der abgebildete unvollständige Ableitungsbaum stellt eine Zwischensituation bei der Erzeugung einer Rechtsableitung für $(a0 + b1) \times a + b$ dar
- Das Anfangsstück $(a0 + b1$ der Eingabe wurde schon gelesen und auf $(A + B1$ reduziert
- Der unvollständige Baum entspricht der Satzform:: $(A + B1) \times a + b$
- Die restliche Eingabe $) \times a + b$ muss noch gelesen werden
- Im nächsten Schritt muss wieder eine Regel rückwärts angewendet werden

Bottom-up Syntaxanalyse (3/3)

- Die allgemeine Situation bei der Bestimmung des nächsten Schrittes einer Rechtsableitung für einen Eingabestring w ist wie folgt:
 - Für ein Anfangsstück $w[1, m]$ des Strings wurden schon Regeln rückwärts angewendet
 - Die daraus entstandene Satzform α liegt auf dem Keller
- Wir haben also: $\alpha \Rightarrow_r^* w[1, m]$
- Damit insgesamt S erreicht wird, muss also $\alpha w[m + 1, n]$ auf S „zurück abgeleitet werden“
- Im nächsten Schritt muss eine passende rechte Regelseite β und eine Regel $X \rightarrow \beta$ identifiziert und dann (rückwärts) angewendet werden



Bottom-up Syntaxanalyse: Vorüberlegungen

Beispiel: Grammatik

$$S \rightarrow aABe$$

$$A \rightarrow Abc \mid b$$

$$B \rightarrow d$$

- Wir betrachten die Bottom-up Syntaxanalyse für den String *abbcede*
- Eine Rechtsableitung für diesen String:

Beispiel: Rechtsableitung

$$S \Rightarrow aABe$$

$$\Rightarrow aAde$$

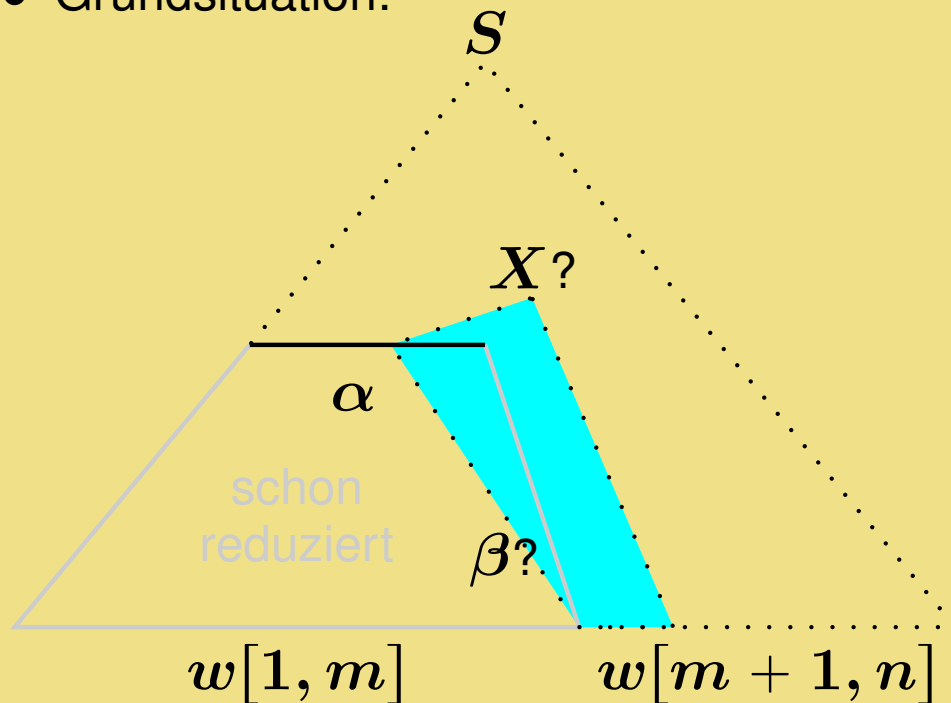
$$\Rightarrow aAbcde$$

$$\Rightarrow abbcde$$

- Bottom-up-Syntaxanalyse für *abbcede*
- Ziel: durch „umgekehrte“ Regelanwendung mit Rechtsableitung zu *S* kommen
- 1. Ableitungsschritt:
 - Wir suchen zuerst rechte Seiten von Produktionen in *abbcede*
 - Kandidaten: *b* und *d*
 - Wir entscheiden uns für $A \rightarrow b$ und erhalten die Satzform *aAbcde*
- 2. Ableitungsschritt:
 - Kandidaten (in *aAbcde*): *Abc*, *b*, *d*
 - Welche Produktion sollen wir anwenden?
- Die Grammatik soll garantieren, dass das Finden der „richtigen rechten Seite“ immer „einfach“ ist
- Wir nennen diese „richtige rechte Seite“ den **Schlüssel** (engl.: **handle**)
 - Der Schlüssel von *aAbcde* ist *Abc*

Bottom-up Sytaxanalyse: Prinzip (1/2)

- Grundsituation:

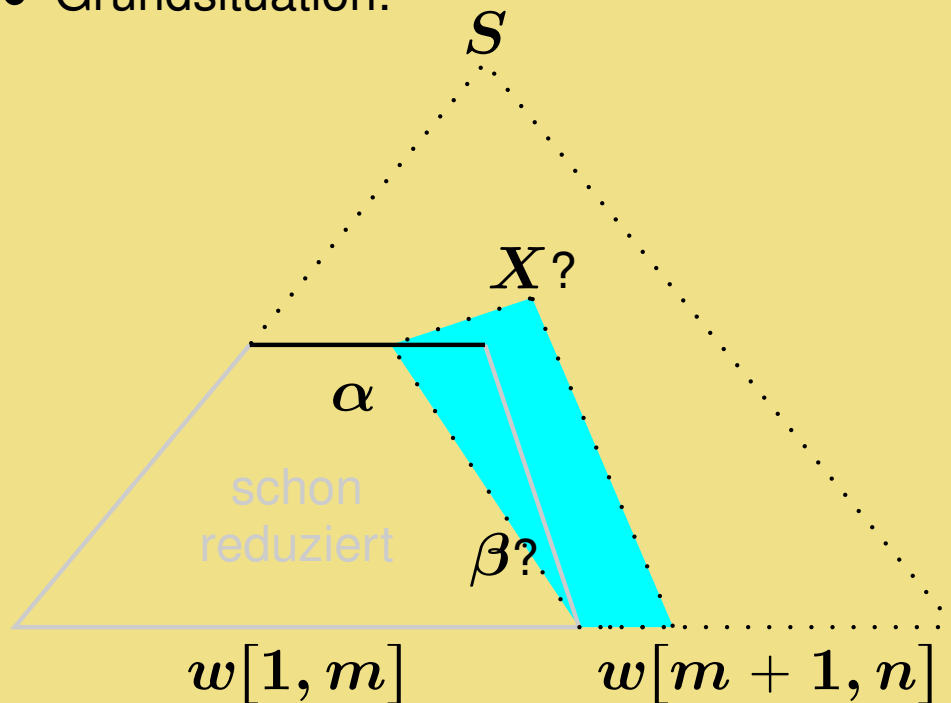


- $w[1, m]$ ist schon reduziert auf α
- $w[m + 1, n]$ ist noch zu lesen
- Nächster Schritt: Passenden Schlüssel β und Regel $X \rightarrow \beta$ identifizieren und anwenden
- β kann
 - (a) ein Suffix von α sein,
 - (b) ein Teilstring von $w[m + 1, n]$ sein, oder
 - (c) aus einem Suffix von α und einem Präfix von $w[m + 1, n]$ bestehen
- Die jeweils auszuführende Aktion:
 - (a) Ersetze auf dem Keller β durch eine passende linke Regelseite X (**Reduce**)
 - (b,c) oder lege (zunächst) $w[m + 1]$ auf den Keller (**Shift**)

→ **Shift-Reduce-Parsing**

Bottom-up Sytaxanalyse: Prinzip (2/2)

- Grundsituation:




- Damit Shift-Reduce-Parsing ohne Backtracking möglich ist, muss die Grammatik folgende Bedingungen erfüllen:
 - (1) Der Parser muss den Schlüssel β identifizieren können, um zu entscheiden, ob er einen Reduce-Schritt ausführen kann
 - (2) Er muss erkennen können, bezüglich welcher Variablen X ein Reduktionsschritt mit Regel $X \rightarrow \beta$ angewandt wird
- **Ziel bei LR(1)-Grammatiken:** um diese Entscheidungen zu treffen, muss nur das nächste Zeichen hinter dem (kürzesten möglichen) Schlüssel gelesen werden

LR(1)-Grammatiken: Definition

Definition

- Eine Grammatik G heißt **LR(1)-Grammatik**, falls für alle $X \in V$, $x, y \in \Sigma^*$, und alle Satzformen α, β, γ gelten:
 - (1) Falls für ein $\sigma \in \Sigma$
 $S \Rightarrow_r^* \alpha X \sigma x \Rightarrow_r \alpha \beta \sigma x$
und
 $\gamma \Rightarrow_r \alpha \beta \sigma y$
gelten mit $\gamma \neq \alpha X \sigma y$, dann ist γ nicht von S aus ableitbar
 - (2) Falls
 $S \Rightarrow_r^* \alpha X \Rightarrow_r \alpha \beta$
und
 $\gamma \Rightarrow_r \alpha \beta$
gelten mit $\gamma \neq \alpha X$, dann ist γ nicht von S aus ableitbar

 Bedingung (1) sagt also, dass es mit aktueller Satzform $\alpha\beta$ und nächstem Zeichen σ keine Alternative zur Rückwärtsanwendung von $X \rightarrow \beta$ gibt

- Die Definition garantiert also gerade die Gültigkeit der Bedingungen (1) & (2) der vorherigen Folie
- Nach Lesen von σ (oder am Ende der Eingabe) und mit $\alpha\beta$ auf dem Keller „weiß“ der Algorithmus, dass er $X \rightarrow \beta$ anwenden muss
- Um zu einer LR(1)-Grammatik einen Shift-Reduce-Algorithmus zu gewinnen, ist eine genauere Analyse der Grammatik nötig
 - Dann können die anzuwendenden Regeln jeweils aus einer Tabelle abgelesen werden
 - Diese Analyse geht aber über den Rahmen dieser Vorlesung hinaus
- LR(1)-Grammatiken lassen sich verallgemeinern für eine weitere Vorausschau (*look-ahead*) von k Zeichen statt einem Zeichen

LR(k)-Grammatiken: Beispiele (1/2)

Beispiel

$$S \rightarrow CD$$

$$C \rightarrow a$$

$$D \rightarrow EF \mid aG$$

$$E \rightarrow ab$$

$$F \rightarrow bb$$

$$G \rightarrow bba$$

- Die Grammatik hat nur zwei Rechtsableitungen:
 - $S \Rightarrow_r CD \Rightarrow_r CEF \Rightarrow_r CEbb \Rightarrow_r Cabbb$
 - $S \Rightarrow_r CD \Rightarrow_r CaG \Rightarrow_r Cabba$
- ➡ Sie erfüllt **nicht** die LR(1)-Bedingung:
 - $\sigma = b$
 - $\alpha = C, X = E, x = b, \beta = ab$
 - $\gamma = CaG, y = a$
 - Aber: $\gamma = CaG \neq CEbb = \alpha X \sigma x$
- Sie ist aber eine LR(2)-Grammatik

LR(k)-Grammatiken

Definition

- Für jedes $k \geq 0$ heißt eine Grammatik G **LR(k)-Grammatik**, falls für alle $X \in V$, $x, y \in \Sigma^*$, und alle Satzformen α, β, γ gelten:

- (1) Falls für ein $z \in \Sigma^k$

$$S \Rightarrow_r^* \alpha X z x \Rightarrow_r \alpha \beta z x$$

und

$$\gamma \Rightarrow_r \alpha \beta z y$$

gelten mit $\gamma \neq \alpha X z y$, dann ist γ nicht von S aus ableitbar

- (2) Falls für ein $z \in \Sigma^{<k}$

$$S \Rightarrow_r^* \alpha X z \Rightarrow_r \alpha \beta z$$

und

$$\gamma \Rightarrow_r \alpha \beta z$$

gelten mit $\gamma \neq \alpha X z$, dann ist γ nicht von S aus ableitbar

LR(k)-Grammatiken: Beispiele (2/2)

Beispiel

$$S \rightarrow Cc \mid Dd$$

$$C \rightarrow Ca \mid \epsilon$$

$$D \rightarrow Da \mid \epsilon$$

- Die Grammatik erzeugt Strings der Form $a^n c$ und $a^n d$
- Ableitungen:
 - $S \Rightarrow_r Cc \Rightarrow_r^* Ca^n c \Rightarrow_r a^n c$
 - $S \Rightarrow_r Dd \Rightarrow_r^* Da^n d \Rightarrow_r a^n d$
- Der Parser müsste zuerst $a^n c$ oder $a^n d$ lesen, um zu wissen, ob als letzter Ableitungsschritt der Rechtsableitung die Regel $C \rightarrow \epsilon$ oder $D \rightarrow \epsilon$ angewendet werden muss
- ➡ Die Grammatik erfüllt für kein k die LR(k)-Bedingung

LL(k)- und LR(k)-Grammatiken: Eigenschaften

Satz 11.3

- Für jedes $k \geq 1$ lassen sich durch LL($k+1$)-Grammatiken mehr Sprachen beschreiben als durch LL(k)-Grammatiken

Satz 11.4

- Für jedes $k \geq 1$ sind äquivalent:
 - L ist deterministisch kontextfrei
 - $L = L(G)$ für eine LR(k)-Grammatik G

Folgerung 11.5

- (a) Für jedes $k \geq 1$ sind LR(k)-Grammatiken und LR(1)-Grammatiken gleich ausdrucksstark
- (b) Das Syntaxanalyseproblem für LR(k)-Grammatiken lässt sich in linearer Zeit lösen

- Außerdem gilt:

- LR(0)-Grammatiken entsprechen gerade den deterministischen Kellerautomaten, die mit leerem Keller akzeptieren
- Jede LL(k)-Grammatik ist auch eine LR(k)-Grammatik
- Aber: nicht zu jeder LR(k)-Grammatik gibt es eine äquivalente LL(k)-Grammatik
- LR(k)-Grammatiken sind eindeutig

Folgerung 11.6

- Jede deterministisch kontextfreie Sprache hat eine eindeutige Grammatik

- Weitere Informationen zur Syntaxanalyse mit LR(k)-Grammatiken finden sich im Buch von Ingo Wegener
- Es gibt eine Vielzahl weiterer eingeschränkter kontextfreier Grammatiktypen, die für die Konstruktion von Compilern von Bedeutung sind
- Näheres (und natürlich sehr viel mehr) können Sie in der Vorlesung **Übersetzerbau** erfahren

Zusammenfassung

- Das Wortproblem für kontextfreie Sprachen lässt sich mit dem CYK-Algorithmus in Zeit $O(|G||w|^3)$ lösen
- Um die effiziente Syntaxanalyse von Programm-Code zu gewährleisten, ist es nötig, eingeschränkte Grammatiken zu verwenden
- Dabei gibt es zwei wichtige Ansätze:
 - Top-down: LL(**1**)-Grammatiken
 - Bottom-up: LR(**1**)-Grammatiken
- LL(**1**)-Grammatiken sind konzeptionell einfacher, aber LR(**1**)-Grammatiken sind ausdrucksstärker
- LR(**1**)-Grammatiken können genau die deterministisch kontextfreien Sprachen beschreiben
- Parser lassen sich zum Beispiel mit **yacc** automatisch aus kontextfreien Grammatiken erzeugen
- Dabei lässt sich im Falle eines (einfachen) Compilers sogar die Codeerzeugung integrieren
 - Zusammenspiel mit **lex**

Literatur

- **CYK-Algorithmus:**

- Daniel H. Younger. Recognition and parsing of context-free languages in time n^3 . *Information and Control*, 10(2):189–208, 1967