Tutorium 8

Max Springenberg, 177792

8.1

G mit:

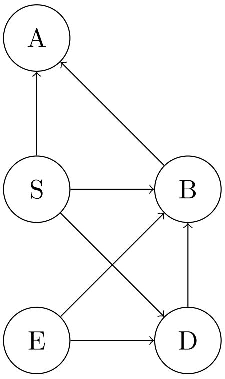
$$\begin{array}{lllll}
S & \rightarrow & aBb & |bDbb & |\epsilon \\
A & \rightarrow & AEF & |\epsilon & \\
B & \rightarrow & AA & |a & \\
C & \rightarrow & aFb & & \\
D & \rightarrow & B & & \\
E & \rightarrow & B & |D & |ab \quad |\epsilon \\
F & \rightarrow & Fa & |FE &
\end{array}$$

CNF1

(i) Entfernen der Nicht erzeugenden Variablen
$V_e = \{S, A, B, D, E\}$
Daraus folgt G':

$$\begin{array}{lllll}
S & \rightarrow & aBb & |bDbb & |\epsilon \\
A & \rightarrow & \epsilon & & \\
B & \rightarrow & AA & |a & \\
D & \rightarrow & B & & \\
E & \rightarrow & B & |D & |ab \quad |\epsilon
\end{array}$$

(ii) Erreichbarkeitsgraph



erreichbar nur S,A,D,B

Daraus folgt G_1:

$$\begin{array}{lllll}
S & \rightarrow & aBb & |bDbb & |\epsilon \\
A & \rightarrow & \epsilon & & \\
B & \rightarrow & AA & |a & \\
D & \rightarrow & B & &
\end{array}$$

CNF2

$$\begin{array}{lllll}
S & \rightarrow & W_aBb & |W_bDW_bW_b & |\epsilon \\
A & \rightarrow & \epsilon & & \\
B & \rightarrow & AA & |W_a & \\
D & \rightarrow & B & &
\end{array}$$

CNF3

$$\begin{array}{lll} S & \rightarrow & W_aBb \quad |W_bS_1 \quad |\epsilon \\ S_1 & \rightarrow & DS_2 \\ S_2 & \rightarrow & W_bW_b \\ A & \rightarrow & \epsilon \\ B & \rightarrow & AA \quad |W_a \\ D & \rightarrow & B \end{array}$$

CNF4

$V' = \{S, A, B, D\}$

$$\begin{array}{lll} S & \rightarrow & W_aBb \quad |W_bS_1 \\ S_1 & \rightarrow & DS_2 \\ S_2 & \rightarrow & W_bW_b \\ B & \rightarrow & W_a \\ D & \rightarrow & B \end{array}$$

CNF5

$U = \{(B, W_a), (D, B)\}$

$$\begin{array}{lll} S & \rightarrow & W_aBb \quad |W_bS_1 \\ S_1 & \rightarrow & DS_2 \\ S_2 & \rightarrow & W_bW_b \\ D & \rightarrow & W_a \end{array}$$

CNF6

$$\begin{array}{lll} S' & \rightarrow & \epsilon \quad |S \\ S & \rightarrow & W_aBb \quad |W_bS_1 \\ S_1 & \rightarrow & DS_2 \\ S_2 & \rightarrow & W_bW_b \\ D & \rightarrow & W_a \end{array}$$

8.2

CNF analog zu 1.

8.3

gegeben:
G mit: $S \rightarrow aSa \quad |bSa \quad |bSb \quad |\epsilon$

$L = \{w \in \{a,b\}^* || w| \text{gerade}\}$

8.3.1 $L(G) \subseteq L$

Aussage:
k, w, mit $S \Rightarrow^k w : w \in L$

Induktion über Abgleitungslänge k.

I.A.
$k = 1$:
Es gibt genau eine Ableitung der Länge $k = 1$, mit

$$S \Rightarrow^1 \epsilon$$

Es gilt $|\epsilon| = 0$, ferner ist 0 gerade und damit die Aussage für $k = 1$ erfüllt.

I.V.
Die Aussage gelte für $k \in \mathbb{N}$ beliebig, aber fest

I.S.
$k = k' + 1$
Für Ableitungen der Länge $k \geq 1$ müssen folgende Regeln betrachtet werden:
$(i) S \rightarrow aSa$
$(ii) S \rightarrow aSb$
$(iii) S \rightarrow bSa$
$(iii) S \rightarrow bSb$

(i)
$S \rightarrow aSa$, ergibt sich zu $w \stackrel{\text{def}}{=} ava$, mit $S \Rightarrow^{k'} v$, ferner gilt aus I.V., dass $|v|$ gerade ist und damit dann $|w| = |ava| = |v| + 2$ auch.

(ii) - (iv) analog.

8.3.2 $L \subseteq L(G)$

Aussage:
i, mit $|w| = i, w \in L : w \in L(G)$

Induktion über Wortlänge i.
Dabei muss die Wortlänge nach definition aus $N_{|w|=2n} = \{2n | n \in \mathbb{N}_0\}$ sein.
Ferner inkrementiert die Wortlänge damit in der Induktion um 2.

I.A.
$i = 0$
Nur das leere Wort ϵ hat die Wortlänge 0.
$S \Rightarrow \epsilon$ ist aus G ableitbar, damit ist $\epsilon \in G$ und die Aussage für $i = 0$ erfüllt.

I.V.

Die Aussage gelte für $k \in N_{|w|=2n}$ beliebig, aber fest.

I.S.
$i = i' + 2$
Σ_L sei das Alphabet der Sprache L.
Wir betrachten das Wort $w \stackrel{\text{def}}{=} \sigma v \sigma'$, mit $|w| = i, |v| = i', (i, i' \in N_{|w|=2n}), (\sigma, \sigma' \in \Sigma_L)$.

Nach I.V. gilt, dass v aus G ableitbar ist.

Nun bleibt zu zeigen, dass:

$(i) w_{(i)} \stackrel{\text{def}}{=} ava$
$(ii) w_{(ii)} \stackrel{\text{def}}{=} avb$
$(iii) w_{(iii)} \stackrel{\text{def}}{=} bva$
$(iv) w_{(iv)} \stackrel{\text{def}}{=} bvb$

aus G abgeleitet werden können.

(i)
nach I.V. gilt $S \Rightarrow^* v$, dann gilt auch $S \Rightarrow^* ava$, aufgrund der Regel $S \to aSa$

(ii) - (iv) analog.

8.4

G (mindestens ein b) mit:

$$\begin{array}{lll} S & \to & TS \quad |b \\ T & \to & ST \quad |a \end{array}$$

$G_{Greibach}$ mit:

$$\begin{array}{lllll} S & \to & aS & |bS' & |b \\ S' & \to & aS' & |bS' & |a \quad |b \end{array}$$