Fakultät für Informatik
Lehrstuhl 11
Prof. Dr. Petra Mutzel
Dipl.-Inf. Andre Droschinsky

Übungen zur Vorlesung

Effiziente Algorithmen

Sommersemester 2018

Übungsblatt 1

Besprechungszeit:
23.-26.04.2018
KW17

Bitte beachten Sie die Hinweise zu den Übungen und der Übungsgruppenverteilung auf der Homepage der Übung.

Die (freiwilligen) schriftlichen Lösungen können Sie einfach in Ihrer Übungsgruppe abgeben (gerne auch als Gruppenabgaben).

Aufgabe 1.1 – Wiederholung (6 Punkte)

- Was ist ein Matching und wie ist es definiert? Gibt es Matchings mit speziellen Eigenschaften? Falls ja, welche?
- Was ist ein M-verbessernder Pfad? Wie viele M-verbessernde Pfade können bzgl. eines optimalen Matchings M_{OPT} gefunden werden?
- Warum ist das Matching auf bipartiten Graphen einfacher? Welche Teile des Algorithmus von Hopcroft und Karp sind nicht direkt auf allgemeine Graphen übertragbar?

Aufgabe 1.2 – Verständnis - Berechnung M-verbessernder Pfade in bipartiten Graphen (6 Punkte)

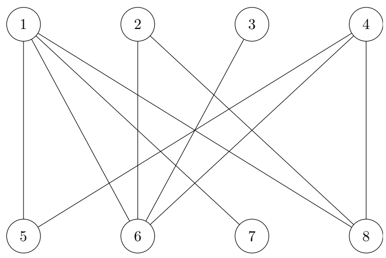
In der Vorlesung wurde ein effizienter Algorithmus zum Finden einer maximalen Menge M-verbessernder knotendisjunkter Pfade mit minimaler Länge in bipartiten Graphen vorgegeben.

a) Beschreiben Sie den Graphen, auf dem der DFS-Durchlauf ausgeführt wird. Beachten sie dabei die Einschränkung bzgl. der Distanzen. Wofür wird der BFS-Durchlauf daher benötigt? Welche Art von Fehler kann auftreten, falls der DFS-Durchlauf auf dem gesamten Graphen ausgeführt würde? Geben Sie ein Beispiel für den Fehlerfall an.

b) Wofür wird die Einschränkung des DFS-Durchlaufs bzgl. der Markierung *nicht mehr benutzbar* benötigt? Geben Sie auch hier ein Beispiel an, welches illustriert, welche Fehler bei Nichtbeachtung dieser Einschränkung entstehen können.

Aufgabe 1.3 – Algorithmus von Hopcroft und Karp (6 Punkte)

Wenden Sie den Algorithmus von Hopcroft und Karp auf dem unten dargestellten Beispielgraphen an. Geben Sie dabei zu jedem Knoten und Durchlauf die BFS-Entfernungen und die DFS-Wege an. Wählen Sie bei der Tiefensuche stets den Knoten mit der kleinsten Knotennummer (1 bis 8, siehe Abbildung), falls mehrere zur Auswahl stehen.



Aufgabe 1.4 – Matchings in unausgeglichenen bipartiten Graphen (6 Punkte)

Sei $G = (U \uplus W, E)$ mit $k := |U| \leq |W| := l$ und $e := |E|$ ein zusammenhängender bipartiter Graph.

a) Geben Sie für den Algorithmus von Hopcroft und Karp eine möglichst gute Zeitschranke in Abhängigkeit von k,l und/oder e an und beweisen Sie diese Zeitschranke.

b) Geben sie eine obere Schranke für k in Bezug auf l an, so dass der Algorithmus von Hopcroft und Karp ein maximales Matching in Zeit $\mathcal{O}(l^2)$ berechnet.

Aufgabe 1.5 – Dynamisches Matching in bipartiten Graphen (6 Punkte)

Nehmen Sie an, sie haben zu einem bipartiten Graphen $G = (V, E)$ ein maximales Matching M gegeben. Der Graph soll wie folgend modifiziert werden. Auf dem neuen Graphen soll dann wieder ein maximales Matching bestimmt werden.

a) Hinzufügen einer Kante.

b) Hinzufügen eines Knotens und mehrerer zu diesem Knoten inzidenter Kanten, so dass der Graph bipartit bleibt.

c) Entfernen einer Kante.

d) Entfernen eines Knotens und aller zu dem Knoten inzidenter Kanten.

Beschreiben Sie für jeden der vier Fälle, wie Sie nach der Modifikation ein neues maximales Matching erhalten und welche Laufzeit Ihr Algorithmus benötigt. Begründen Sie außerdem die Korrektheit ihres Algorithmus.