Übungen zur Vorlesung Grundbegriffe der Theoretischen Informatik

Thomas Schwentick

technische universität dortmund

Gaetano Geck, Lutz Oettershagen,
Christopher Spinrath, Marco Wilhelm

Lehrstuhl 1
Logik in der Informatik

SoSe 2018 **Übungsblatt 9** **12.06.2018**

Abgabe bis spätestens am Dienstag, 19.06.2018,

- (vor der Vorlesung) im HG II, HS 3, oder
- in die Briefkästen im Durchgangsflur, der die 1. Etage der OH 12 mit dem Erdgeschoss der OH 14 verbindet.

Beachten Sie die Schließzeiten der Gebäude!

Ansonsten gelten die Hinweise von Blatt 1.

Aufgabe 9.1 [Kellerautomaten mit zwei Kellern] — 6 Punkte

In dieser Aufgabe betrachten wir Kellerautomaten mit zwei Kellern.
Ein 2-Kellerautomat $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, \tau_0, F)$ ist bis auf die Transitionsrelation

$$\delta \subseteq \big(Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \times \Gamma\big) \times \big(Q \times \Gamma^* \times \Gamma^*\big)$$

genau so definiert wie ein Kellerautomat. Das unterste Kellersymbol wird auf beiden Kellern als solches verwendet. Wir betrachten nur 2-Kellerautomaten, die mit akzeptierenden Zuständen akzeptieren.

a) Definieren Sie die Semantik von 2-Kellerautomaten (Konfiguration, Startkonfiguration, Nachfolgekonfiguration, Akzeptanz) analog zu der für Kellerautomaten aus Kapitel 9. Welche Bedingung muss für *deterministische* 2-Kellerautomaten zusätzlich gelten? **(2 Punkte)**

b) Zeigen Sie: Zu jeder Turingmaschine gibt es einen *deterministischen* 2-Kellerautomaten, der dieselbe Sprache entscheidet. Zur Vereinfachung können Sie annehmen, dass die Eingabe des deterministischen 2-Kellerautomates durch das Zeichen \$ begrenzt wird. Statt eines Eingabestrings u liest er also den String $u\$$. **(4 Punkte)**

Hinweis

Verwenden Sie $\triangleright$ als unterstes Kellersymbol, den ersten Keller für den Teil des Strings vom linken Rand bis zur aktuellen Position und den zweiten Keller für den Teil des Strings rechts von der aktuellen Position. Der 2-Kellerautomat soll zunächst die Eingabe bis zum Ende einlesen und anschließend die Turingmaschine simulieren.

Aufgabe 9.2 [Reduktion] — 5 Punkte

Wir betrachten die folgenden beiden Entscheidungsprobleme:

Problem: Reach
Gegeben: Gerichteter Graph $G = (V, E)$ und $s, t \in V$.
Frage: Existiert ein Weg von s nach t in G?

Problem: DG-Cycle
Gegeben: Gerichteter Graph $G = (V, E)$ und $v \in V$.
Frage: Enthält G einen gerichteten Kreis durch v?

Zeigen Sie Reach $\leq$ DG-Cycle durch Angabe einer passenden Reduktion f. Beweisen Sie, dass f tatsächlich eine Reduktion ist.

Aufgabe 9.3 **4 Punkte**

In dieser Aufgabe nutzen wir folgende Definitionen:

1. Eine Menge M heißt *gleichmächtig* zu einer Menge S, wenn eine Bijektion $f : M \to S$ existiert.
2. Eine Menge M heißt *abzählbar unendlich*, wenn sie gleichmächtig zur Menge $\mathbb{N}$ ist.
3. Eine Menge heißt *überabzählbar*, wenn sie weder endlich noch abzählbar unendlich ist.

Gegeben sei das Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$.

a) Zeigen Sie, dass Σ^* abzählbar unendlich ist. **(1 Punkt)**

b) Wir betrachten nun die Potenzmenge $\mathcal{P}(\Sigma^*)$. Was beschreibt diese Menge? Zeigen Sie mittels Diagonalisierung, dass die Potenzmenge $\mathcal{P}(\Sigma^*)$ überabzählbar ist. **(3 Punkte)**