Grundbegriffe der Theoretischen Informatik

Sommersemester 2017 - Beate Bollig

Die Folien basieren auf den Materialien von Thomas Schwentick.

Teil C: Berechenbarkeit und Entscheidbarkeit

12: Verschiedene Berechnungsmodelle

Inhalt

Ein einfaches algorithmisches Puzzle-Problem

- Wir betrachten zwei Varianten eines „Puzzle-Problems“
  - Eine wird sich als deutlich schwieriger als die andere herausstellen

- Einfache Variante des Puzzlespiels:
  - Gegeben: schwarze und gelbe Spielsteintypen mit Strings
  - Von jedem Steintyp stehen beliebig viele Steine zur Verfügung
  - Lässt sich das selbe Wort aus schwarzen wie aus gelben Spielsteinen legen?

Beispiel

- Schwarze Steintypen: 01, 10, 011
- Gelbe Steintypen: 101, 00, 11
- Lösungswort: 1010011
  - ... in schwarz: 10 10 011
  - ...und in gelb: 101 00 11

Def.: Pseudo-PCP

Gegeben: eine Folge von Paaren $(u_1, v_1), \ldots, (u_k, v_k)$ nicht-leerer Strings

Frage: Gibt es Indexfolgen $i_1, \ldots, i_n$ und $j_1, \ldots, j_m$ mit $n \geqslant 1$, so dass
$$u_{i_1} u_{i_2} \cdots u_{i_n} = v_{j_1} v_{j_2} \cdots v_{j_m}?$$

- Die Frage ist also: Gibt es einen String w, der sowohl aus u_is als auch aus v_js zusammen gesetzt werden kann

- Pseudo-PCP lässt sich mit Hilfe von Automaten in polynomieller Zeit entscheiden:
  - Konstruiere einen Automaten $\mathcal{A}$, der nichtleere Strings akzeptiert, die aus den u_i zusammengesetzt sind
  - Konstruiere einen Automaten $\mathcal{B}$, der nichtleere Strings akzeptiert, die aus den v_i zusammengesetzt sind
  - Teste, ob $L(\mathcal{A}) \cap L(\mathcal{B}) \neq \varnothing$

Ein schwieriges algorithmisches Puzzle-Problem

- Gegeben eine Menge von Spielsteintypen

$$\frac{u_1}{v_1}, \frac{u_2}{v_2}, \ldots, \frac{u_k}{v_k}$$

- Von jedem Typ stehen beliebig viele Steine zur Verfügung
- Lassen sich die Steine so in einer Reihe auslegen, dass das schwarze (obere) Wort gleich dem gelben (unteren) Wort ist?

Beispiel

- Steintypen: $\frac{1}{101}, \frac{10}{00}, \frac{011}{11}$
- Mögliche Lösung: $\frac{1}{101}\frac{011}{11}\frac{10}{00}\frac{011}{11}$

Beispiel

- $\frac{10}{101}, \frac{011}{11}, \frac{101}{011}$ hat keine Lösung

Def.: Postsches Korrespondenzproblem (PCP)

Gegeben: eine Folge von Paaren $(u_1, v_1), \ldots, (u_k, v_k)$ nicht-leerer Strings

Frage: Gibt es eine Indexfolge $i_1, \ldots, i_n$ mit $n \geqslant 1$, so dass

$$u_{i_1} u_{i_2} \cdots u_{i_n} = v_{i_1} v_{i_2} \cdots v_{i_n}?$$

- Die Frage ist also: Gibt es einen String w, der sowohl aus u_is als auch aus v_is zusammen gesetzt werden kann, und zwar **mit derselben nicht-leeren Indexfolge**?

- Wir nennen eine solche Indexfolge $\vec{i} = i_1, \ldots, i_n$ eine **Lösung** und den String $u_{i_1} u_{i_2} \cdots u_{i_n}$ einen **Lösungsstring**

Ein komplizierteres Beispiel

Drittes Beispiel

- Steintypen:

001	01	01	10
0	011	101	001

- Kleinste Lösung:

01	10	01	10	10	01	001	01	10	01
011	001	101	001	001	011	0	011	001	101

10	01	10	10	01	10	10	01	001	10	10
001	101	001	001	101	001	001	011	0	001	001

01	001	01	10	001	001	01	10	10	10	01
011	0	101	001	0	0	101	001	001	001	011

001	01	001	001	001	01	10	01	10	001	01
0	011	0	0	0	101	001	101	001	0	011

001	10	10	01	001	10	001	001	01	10	001
0	001	001	011	0	001	0	0	101	001	0

001	01	001	001	01	001	01	001	10	001	001	01
0	101	0	0	101	0	011	0	001	0	0	101

PCP **ist algorithmisch nicht lösbar**

Satz

- PCP ist nicht entscheidbar

- Für den Beweis benötigen wir einige Vorbereitung

- Zunächst müssen wir den Begriff „entscheidbar“ definieren
- Informell soll ein algorithmisches Problem entscheidbar sein, wenn es einen Algorithmus gibt, der bei jeder Eingabe anhält und immer die richtige Antwort gibt

- Um dies zu formalisieren benötigen wir eine Definition von „Algorithmus“

- Um zu definieren, was ein Algorithmus ist, benötigen wir ein allgemeines „Berechnungsmodell“
- Damit unsere Definition nicht zu modellspezifisch wird, ziehen wir mehrere Berechnungsmodelle in Betracht

Inhalt

Übersicht

- Wir suchen Antworten auf folgende Fragen
  - Was ist ein Algorithmus?
  - Wann ist eine Funktion berechenbar?
- Wir betrachten dazu verschiedene Berechnungsmodelle

- Zwei Modelle, die von Programmiersprachen inspiriert sind:
  - WHILE-Programme
  - GOTO-Programme

- Ein Modell, das als mächtige Erweiterung der endlichen Automaten aufgefasst werden kann, ursprünglich aber als mathematische Formalisierung des „Rechnens mit Papier und Bleistift“ gedacht war:
  - Turingmaschinen

- Später betrachten wir noch ein Modell, das durch rekursive Definitionen inspiriert ist:
  - μ-rekursive Funktionen

- Im nächsten Kapitel werden wir die Mächtigkeit dieser Berechnungsmodelle miteinander vergleichen

Partielle Funktionen

- Wir werden häufig partielle Funktionen über den natürlichen Zahlen verwenden

- Bei **partiellen Funktionen** f muss der Funktionswert nicht für alle Elemente der Grundmenge definiert sein

- Notation:
  - $f : \mathbb{N}_0 \rightharpoonup \mathbb{N}_0$
  - Um auszudrücken, dass $f(n)$ undefiniert ist, schreiben wir: $f(n) = \perp$

Beispiel

- Sei sqrt die partielle Funktion $\mathbb{N}_0 \rightharpoonup \mathbb{N}_0$, die jeder natürlichen Zahl n die natürliche Zahl m mit $m^2 = n$ zuordnet, wenn ein solches m existiert

- Es gilt also z.B.:
  - sqrt$(9) = 3$
  - sqrt$(10) = \perp$

Definition

- Sei $f : \mathbb{N}_0 \rightharpoonup \mathbb{N}_0$ eine partielle Funktion
  - Der **Definitionsbereich** $D(f)$ einer partiellen Funktion f ist
  $$\{n \in \mathbb{N}_0 \mid f(n) \neq \perp\}$$
  - Der **Wertebereich** $W(f)$ einer partiellen Funktion f ist
  $$\{n \in \mathbb{N}_0 \mid \exists m \in \mathbb{N}_0 : f(m) = n\}$$

- Eine **totale** Funktion $\mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ ist eine Funktion, die für alle natürlichen Zahlen definiert ist

✎ Zu beachten:
  - Der Begriff „partielle Funktion“ erzwingt nicht, dass es Zahlen gibt, für die kein Funktionswert existiert
  - Jede totale Funktion ist also auch eine partielle Funktion

✎ Wir werden auch partielle Funktionen über Strings betrachten

WHILE-Programme: Beispiele

Beispiel

$x_1 := x_2;$
WHILE $x_3 \neq 0$ DO
  $x_1 := x_1 + 1;$
  $x_3 := x_3 \dot{-} 1$
END

- Variablen nehmen in WHILE-Programmen nur Werte aus $\mathbb{N}_0$ an
- Der Effekt des Programmes ist also:

$$x_1 := x_2 + x_3$$

☞ Und: $x_3 := 0$

Beispiel

$x_1 := 0;$
WHILE $x_3 \neq 0$ DO
  $x_4 := x_2;$
  WHILE $x_4 \neq 0$ DO
    $x_1 := x_1 + 1;$
    $x_4 := x_4 \dot{-} 1$
  END;
  $x_3 := x_3 \dot{-} 1$
END

- Der (wesentliche) Effekt des Programmes ist: $x_1 := x_2 \times x_3$

Beispiel

$x_1 := 1;$
WHILE $x_1 \neq 0$ DO
  $x_3 := x_2 + 2$
END

- Dieses Programm hält nie an...

WHILE-Programme: Syntax

- **WHILE-Programme** verwenden die folgenden syntaktischen Grundelemente:
  - Variablen: $x_1, x_2, x_3, \ldots$
  - Konstanten: $0, 1, 2, \ldots$
  - Trennsymbole: ; $:=$
  - Operationszeichen: $+ \dot{-}$
  - Schlüsselwörter: `WHILE`, `DO`, `END`

Definition

- Die **Syntax von WHILE-Programmen** ist wie folgt definiert:

  Wertzuweisung:
  - $x_i := c$
  - $x_i := x_j$
  - $x_i := x_j + c$
  - $x_i := x_j \dot{-} c$

  sind WHILE-Programme
  (für jede Konstante c und $i, j \geqslant 1$)

  Reihung: Falls P_1 und P_2 WHILE-Programme sind, so auch $P_1; P_2$

  (Bedingte Wiederholung)
  Ist P ein WHILE-Programm, so auch
  `WHILE` $x_i \neq 0$ `DO` P `END`

WHILE-Programme: Semantik (1/2)

- Wir definieren die Semantik von WHILE-Programmen durch ihre Wirkung auf Speicherinhalte
- Dabei modellieren wir Speicherinhalte durch Funktionen X, die die Werte der Variablen $x_1, x_2, \ldots$ repräsentieren
  - $X[i]$ repräsentiert den Wert von x_i

Definition

- Ein **Speicherinhalt** X ist eine Funktion $\mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$, für die $X[i] \neq 0$ nur für endlich viele $i \in \mathbb{N}$ gilt
- Der **initiale Speicherinhalt X^b_{Init} bei Eingabe $b \in \mathbb{N}_0$** ist definiert durch:

$$X^b_{\text{Init}}[i] \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} b & \text{für } i = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

✎ Wir schreiben hier $X[i]$ statt $X(i)$ um später die Unterscheidung zu anderen (runden) Klammern zu erleichtern

✎ Manchmal beschreiben wir Speicherinhalte als Folge von Zahlen $X[1], X[2], X[3], \ldots$
- In dieser Sichtweise wird der initiale Speicherinhalt X^b_{Init} bei Eingabe b durch die Folge $b, 0, 0, \ldots$ repräsentiert

WHILE-Programme: Semantik (2/2)

Definition

- Ist X ein Speicherinhalt und P ein WHILE-Programm, so bezeichne $P(X)$ den **Speicherinhalt nach Bearbeitung von P**
- $P(X)$ ist induktiv wie folgt definiert

- Falls P von der Form $x_i := x_j + c$ ist:

$$P(X)[k] \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} X[j] + c & \text{für } k = i \\ X[k] & \text{sonst} \end{cases}$$

  – Analog für $x_i := c$ und $x_i := x_j$

- Falls P von der Form $x_i := x_j \dot{-} c$ ist:

$$P(X)[k] \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \max(X[j] - c, 0) & \text{für } k = i \\ X[k] & \text{sonst} \end{cases}$$

- Falls P von der Form $P_1; P_2$ ist:

$$P(X) \stackrel{\text{def}}{=} P_2(P_1(X))$$

Definition (Forts.)

- Ist P von der Form

$$\texttt{WHILE } x_i \neq 0 \texttt{ DO } P_1 \texttt{ END}$$

und X ein Speicherinhalt, so sei

$$P(X) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} X & \text{falls } X[i] = 0 \\ P(P_1(X)) & \text{sonst} \end{cases}$$

- Die durch ein WHILE-Programm P berechnete Funktion f_P ist wie folgt definiert:
  – Für jedes $b \in \mathbb{N}_0$ ist $f_P(b) \stackrel{\text{def}}{=} P(X^b_{\text{Init}})[1]$
- Eine Funktion $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ heißt **WHILE-berechenbar**, falls $f = f_P$ für ein WHILE-Programm P

✎ Der durch das Programm berechnete Funktionswert entspricht also dem Inhalt von x_1 nach Ende der Berechnung

WHILE-Programme: Bemerkungen

- Intuitive Bedeutung der Semantik der bedingten Wiederholung:
  - Solange $X[i] \neq 0$ gilt, wird P_1 ausgeführt
- Zu beachten:
  - Die Semantik-Definition ist rekursiv
  - $P(X)$ ist nicht für alle P und X definiert

- Auch mehrstellige Funktionen lassen sich durch WHILE-Programme berechnen:
  - Für jedes k-Tupel $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ sei $f_{P,k}(\vec{a})$ der Wert von $X'(1)$, wobei
    - $X' = P(X^{\vec{a}}_{\text{Init}})$
    - und $X^{\vec{a}}_{\text{Init}}$ der Folge $a_1, \ldots, a_k, 0, 0, \ldots$ entspricht

- Wir haben schon gesehen, dass WHILE-Programme verschiedene Konstrukte simulieren können:
  - Addition zweier Variablen
  - Produkt zweier Variablen
- Es ist nicht schwer zu sehen, dass mit WHILE-Programmen auch bedingte Anweisungen der Art

  $$\texttt{IF } x_1 = c \texttt{ THEN } P \texttt{ END}$$

  simuliert werden können

- Wir werden im Folgenden solche Anweisungen als „syntaktischen Zucker" erlauben
- WHILE-Programme im Sinne der formalen Definition nennen wir im Folgenden „einfache WHILE-Programme"
- Der Begriff „WHILE-berechenbar" bezieht sich auf einfache WHILE-Programme

Inhalt

GOTO-Programme: Syntax

Definition

- Ein **GOTO-Programm** besteht aus einer Folge
  - $M_1 : A_1;$
  - $M_2 : A_2;$
  - $\vdots$
  - $M_k : A_k$

  von Anweisungen A_i mit Sprungmarken M_i
- Mögliche Anweisungen:
  - **Wertzuweisung**:
    - $x_i := c$
    - $x_i := x_j$
    - $x_i := x_j + c$
    - $x_i := x_j \dot{-} c$
  - **Bedingter Sprung**:
    IF $x_i = c$ THEN GOTO M_j
  - **Stoppanweisung**: HALT

Beispiel

1: $x_4 := 1;$
2: $x_1 := x_2;$
3: IF $x_3 = 0$ THEN GOTO 7;
4: $x_1 := x_1 + 1;$
5: $x_3 := x_3 \dot{-} 1;$
6: IF $x_4 = 1$ THEN GOTO 3;
7: HALT

- Intuitiv hat dieses Programm den Effekt:
  $x_1 := x_2 + x_3$
  (und Seiteneffekte für x_3 und x_4)

✎ Das Beispiel illustriert, dass sich unbedingte Sprünge durch bedingte Sprünge simulieren lassen

- Wir erlauben im Folgenden deshalb auch unbedingte Sprünge GOTO M_j als syntaktischen Zucker

✎ Sprungmarken, die nicht als Sprungadresse dienen, lassen wir oft weg

GOTO-Programme: Semantik

Definition

- Eine **Konfiguration eines GOTO-Programmes P** ist ein Paar $(M; X)$, wobei M eine Sprungmarke von P und X ein Speicherinhalt ist
- **Start-Konfiguration** bei Eingabe b:
$$(M_1; X^b_{\text{Init}})$$
- Ist M eine Sprungmarke eines GOTO-Programms, so bezeichnet $M + 1$ die Sprungmarke der folgenden Zeile
- Die **Nachfolge-Konfiguration** $(M'; X')$ einer Konfiguration $(M_\ell; X)$ ist wie folgt definiert:
  - Ist A_ℓ eine Wertzuweisung, so ist $M' \stackrel{\text{def}}{=} M_\ell + 1$ und X' ist definiert wie bei WHILE-Programmen
  - Falls A_ℓ ein bedingter Sprung
  $$\texttt{IF } x_i = c \texttt{ THEN GOTO } M_j$$
  ist, so ist $X' \stackrel{\text{def}}{=} X$ und
  $$M' \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} M_j & \text{falls } X[i] = c \\ M_\ell + 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Definition (Forts.)

- **Halte-Konfiguration**: $(M_k + 1; X)$ oder $(M_\ell; X)$ und A_ℓ ist HALT

- Die **Berechnung** von P bei Eingabe b ist die eindeutig bestimmte Folge $K_1, K_2, \ldots$ von Konfigurationen mit:
  - $K_1 = (M_1, X^b_{\text{Init}})$ und
  - jede Konfiguration K_i ist die Nachfolgekonfiguration von K_{i-1} (für $i > 1$)

- Falls die Berechnung von P bei Eingabe b endlich ist, so ist die letzte Konfiguration eine Halte-Konfiguration $(M; X)$
- Dann sei wieder: $f_P(b) \stackrel{\text{def}}{=} X[1]$
- Falls die Berechnung von P bei Eingabe b unendlich ist, so ist $f_P(b) \stackrel{\text{def}}{=} \perp$,

- Eine Funktion $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ heißt **GOTO-berechenbar**, falls $f = f_P$ für ein GOTO-Programm P

Inhalt

Warum Turingmaschinen?

- Bisher haben wir Berechnungsmodelle betrachtet, die sich an Programmiersprachen anlehnen:
  WHILE- und GOTO-Programme

- Jetzt betrachten wir ein Berechnungsmodell, das „menschliche Rechner“ zum Vorbild nimmt
- Dieses Modell wurde 1936 von Alan Turing „erfunden“

- Warum hat jemand etliche Jahre vor dem Bau des ersten Computers und Jahrzehnte vor der Entwicklung „richtiger Programmiersprachen“ ein abstraktes Berechnungsmodell erfunden?

- Turing war Mathematiker und wollte beweisen, dass es kein automatisches Verfahren gibt, das zu jeder mathematischen Aussage entscheidet, ob sie wahr oder falsch ist

- Etwas anders formuliert, wollte er zeigen, dass es keinen Algorithmus für das folgende algorithmische Problem gibt

Definition: Allgemeingültigkeitsproblem

Gegeben: Prädikatenlogische Formel φ

Frage: Gilt für alle passenden Modelle $\mathcal{M}$:

$$\mathcal{M} \models \varphi?$$

Turings Ideen zur Berechenbarkeit (1/4)

- Wie gesagt: zu Turings Zeit gab es noch keine künstlichen programmierbaren Rechner
- Wenn er von einem **Computer** sprach, meinte er einen Menschen, der nach einem festgelegten Verfahren etwas berechnet

- Seine Vorstellungen, wie ein solcher *Computer* arbeitet, hat er in der folgenden Arbeit beschrieben:
  - A. M. Turing. On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem. *Proc. London Math. Soc.*, 2(42):230–265, 1936

- Die Abstraktion des Computers, die Turing in dieser Arbeit definierte, wird heute **Turingmaschine** genannt

Turings Ideen zur Berechenbarkeit (2/4)

- Computing is normally done by writing certain symbols on paper
- We may suppose this paper is divided into squares like a child's arithmetic book

- In elementary arithmetic the two-dimensional character of the paper is sometimes used
- But such a use is always avoidable, and I think that it will be agreed that the two-dimensional character of paper is no essential of computation
- I assume then that the computation is carried out on one-dimensional paper, i.e. on a tape divided into squares

- I shall also suppose that the number of symbols which may be printed is finite
  - If we were to allow an infinity of symbols, then there would be symbols differing to an arbitrarily small extent

Turings Ideen zur Berechenbarkeit (3/4)

- The **behaviour** of the computer at any moment is **determined by the symbols which he is observing and his ”state of mind”** at that moment
- We may suppose that there is a **bound** B to the **number of symbols** or squares **which the computer can observe** at one moment
- If he wishes to observe more, he must use successive observations
- We will also suppose that the **number of states** of mind which need be taken into account **is finite**

- Let us imagine the operations performed by the computer to be split up into **”simple operations”** which are so elementary that it is not easy to imagine them further divided
- Every such operation consists of some change of the physical system consisting of the computer and his tape

- We know the state of the system if we know the sequence of symbols on the tape, which of these are observed by the computer (possibly with a special order), and the state of mind of the computer

- We may suppose that **in a simple operation not more than one symbol is altered**
  - Any other changes can be set up into simple changes of this kind

- The situation in regard to the squares whose symbols may be altered in this way is the same as in regard to the observed squares
- We may, therefore, without loss of generality, **assume that the squares whose symbols are changed are always ”observed” squares**

Turings Ideen zur Berechenbarkeit (4/4)

- Besides these changes of symbols, the simple operations must include changes of distribution of observed squares
- The new observed squares must be immediately recognisable by the computer
- I think it is reasonable to suppose that they can only be squares whose distance from the closest of the immediately previously observed squares does not exceed a certain fixed amount
- Let us say that each of the new observed squares is within L squares of an immediately previously observed square

- The most general single operation must therefore be taken to be one of the following:
  (A) A possible change (a) of symbol together with a possible change of state of mind
  (B) A possible change (b) of observed squares, together with a possible change of state of mind

- The operation actually performed is determined, as has been suggested on p.250, by the state of mind of the computer and the observed symbols
- In particular, they determine the state of mind of the computer after the operation is carried out

Vom Automaten zur Turingmaschine

- Turingmaschinen können als Erweiterung von endlichen Automaten in drei Stufen aufgefasst werden
  (1) **Mehr Bewegung:**
  - Der Kopf darf sich nach rechts **und** nach links bewegen

  ✎ Endliche Automaten mit dieser Erweiterung können nur reguläre Sprachen entscheiden

  (2) **Schreiben:**
  - Die Symbole der Eingabe können verändert werden — jeweils an der Position des Kopfes

- Das Berechnungsmodell, das endliche Automaten um (1) und (2) erweitert, wird **linear beschränkte Automaten** genannt
  - Sie entscheiden genau die kontextsensitiven Sprachen

  (3) **Mehr Platz:**
  - Der Arbeitsbereich kann über die Eingabe hinaus erweitert werden (nach rechts)
  - Links von der Eingabe steht ein Symbol ($\triangleright$), das den linken Rand markiert, der nicht verschoben werden kann
  - Berechnungen enden nicht mehr durch Verlassen der Eingabe sondern durch Erreichen spezieller **Endzustände**

- Wir betrachten zunächst Beispiele von Turingmaschinen

Turingmaschinen: 1. Beispiel

Beispiel

Turingmaschine zum Test, ob die Eingabe von der Form ww^R ist

Idee: Vergleiche jeweils das erste mit dem letzten Symbol und lösche beide (durch Überschreiben mit $\#$ bzw. $\sqcup$)

a **:** 0 und 1 überlesen, nach links — falls $\triangleright$ oder $\#$ nach rechts in b

b**:** Falls 0 nach rechts in c — falls 1 nach rechts in d (dabei $0/1$ durch $\#$ überschreiben) — falls $\sqcup$ akz.

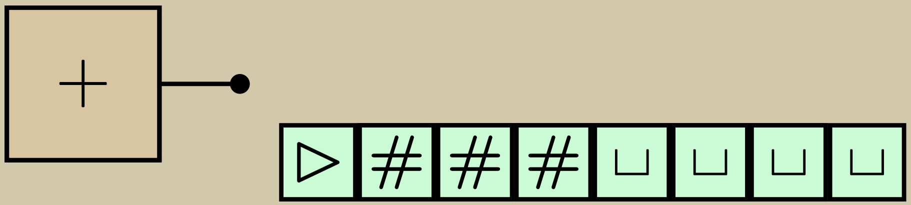
c**:** 0 und 1 überlesen, nach rechts bis $\sqcup$, dann nach links in e

d**:** 0 und 1 überlesen, nach rechts bis $\sqcup$, dann nach links in f

e**:** Falls 0 durch $\sqcup$ ersetzen, nach links in a — falls 1 oder $\#$ ablehnen

f**:** Falls 1 durch $\sqcup$ ersetzen, nach links in a — falls 0 oder $\#$ ablehnen

1. Beispielberechnung:



Turingmaschinen: 1. Beispiel, 2. Berechnung

Beispiel

Turingmaschine zum Test, ob die Eingabe von der Form ww^R ist

a : 0 und 1 überlesen, nach links — falls $\triangleright$ oder $\#$ nach rechts in b

b: Falls 0 nach rechts in c — falls 1 nach rechts in d (dabei $0/1$ durch $\#$ überschreiben) — falls $\sqcup$ akz.

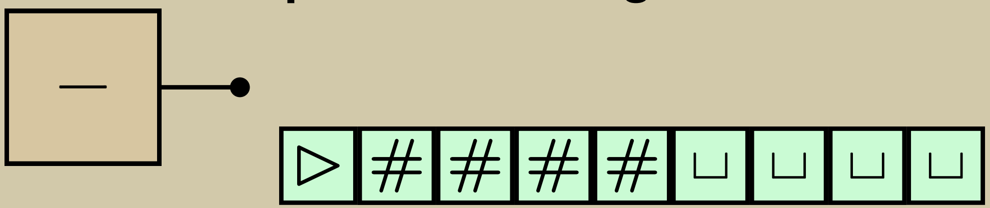
c: 0 und 1 überlesen, nach rechts bis $\sqcup$, dann nach links in e

d: 0 und 1 überlesen, nach rechts bis $\sqcup$, dann nach links in f

e: Falls 0 durch $\sqcup$ ersetzen, nach links in a — falls 1 oder $\#$ ableh-nen

f: Falls 1 durch $\sqcup$ ersetzen, nach links in a — falls 0 oder $\#$ ableh-nen

2. Beispielberechnung:



Turingmaschinen: Definition

Definition

- Eine **Turingmaschine (TM)** $M = (Q, \Gamma, \delta, s)$ besteht aus
  - einer endliche Menge Q (**Zustandsmenge**)
  - einem Alphabet Γ mit $\sqcup, \rhd \in \Gamma$ (**Bandalphabet**)
  - einer Funktion
    $\delta : Q \times \Gamma \to (Q \cup \{\text{ja}, \text{nein}, h\}) \times \Gamma \times \{\leftarrow, \downarrow, \rightarrow\}$
    (**Transitionsfunktion**)
  - einem ausgezeichneten Zustand $s \in Q$ (**Startzustand**)
- Dabei seien $Q, \Gamma, \{h, \text{ja}, \text{nein}\}$ und $\{\leftarrow, \downarrow, \rightarrow\}$ paarweise disjunkt

- Turingmaschinen müssen außerdem die folgenden Bedingungen erfüllen:
  - Das Symbol $\rhd$ für den linken Rand darf nicht überschrieben werden
  - Von $\rhd$ darf sich der Kopf nicht nach links bewegen

- Das lässt sich dadurch erreichen, dass $\delta(q, \rhd)$ immer von der Form $(q', \rhd, d)$ mit $d \in \{\downarrow, \rightarrow\}$ ist

Turingmaschinen: Diagramm-Darstellung

Zustände der Beispiel-TM

a : 0 und 1 überlesen, nach links — falls $\triangleright$ oder $\#$ nach rechts in b

b: Falls 0 nach rechts in c — falls 1 nach rechts in d (dabei $0/1$ durch $\#$ überschreiben) — falls $\sqcup$ akz.

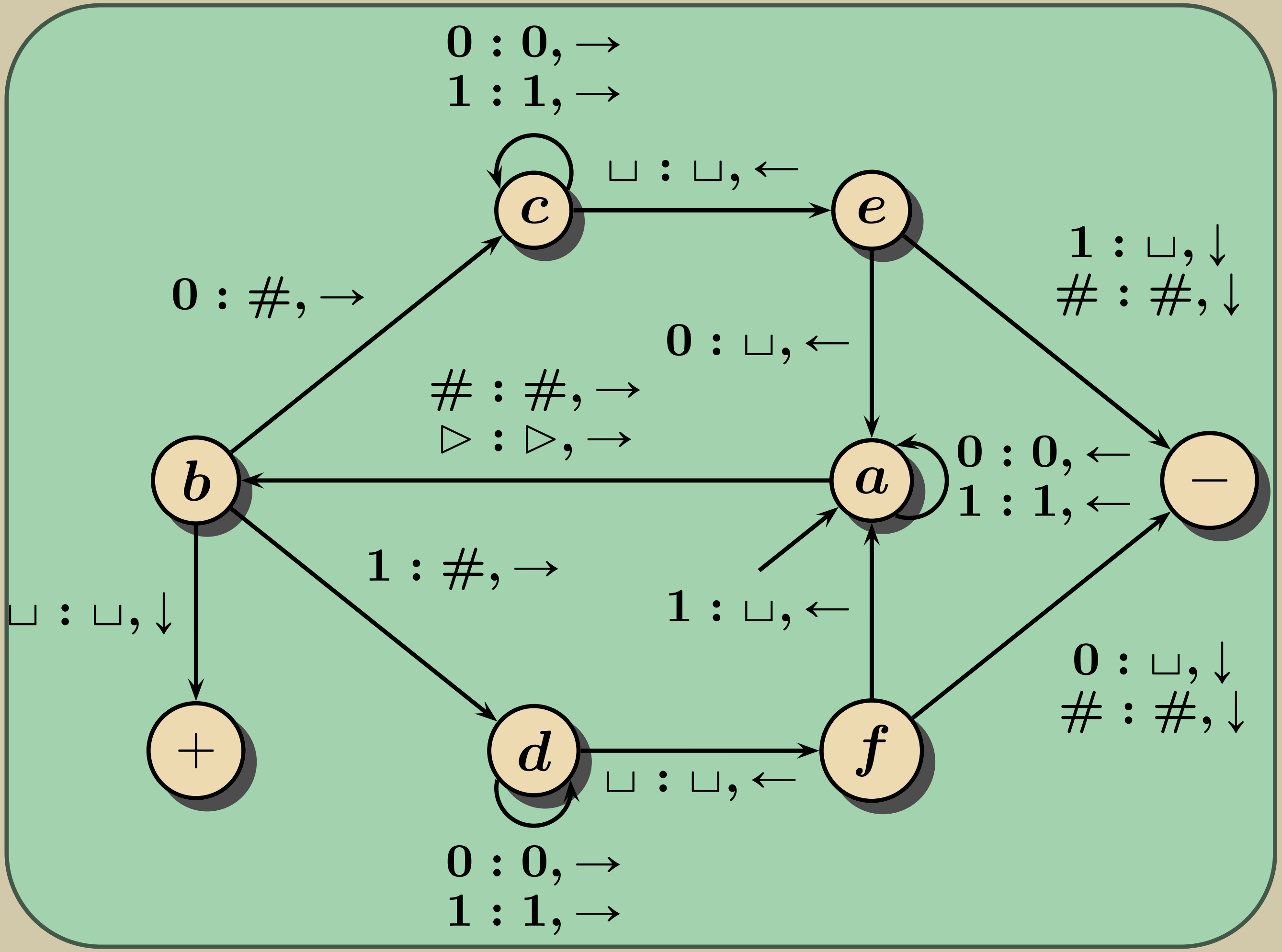
c: 0 und 1 überlesen, nach rechts bis $\sqcup$, dann nach links in e

d: 0 und 1 überlesen, nach rechts bis $\sqcup$, dann nach links in f

e: Falls 0 durch $\sqcup$ ersetzen, nach links in a — falls 1 oder $\#$ ablehnen

f: Falls 1 durch $\sqcup$ ersetzen, nach links in a — falls 0 oder $\#$ ablehnen

Beispiel-Turingmaschine als Diagramm



- Konvention: ist für ein Paar $(q, \sigma) \in Q \times \Gamma$ kein Übergang eingezeichnet, so sei $\delta(q, \sigma) \overset{\text{def}}{=} (\text{nein}, \sigma, \downarrow)$

Turingmaschinen: 2. Beispiel

2. Beispiel-TM: Inkrementieren einer Binärzahl

- Beschreibung der Zustände:

a: Die TM läuft, ohne etwas zu verändern, nach rechts bis zum ersten Leerzeichen und dann einen Schritt nach links in den Zustand b

b: Das maximale Suffix der Form 1^i wird durch 0^i ersetzt

- Ist davor eine 0, so wird sie durch 1 ersetzt und M geht in den Zustand e

  ✎ Das Suffix der Eingabe ist von der Form 01^i und wird durch 10^i ersetzt

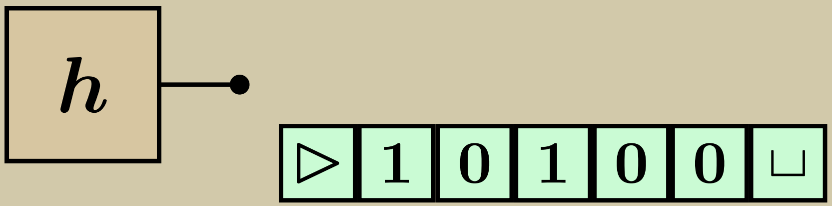
- Ist davor ein $\rhd$, so geht M in den Zustand c

  ✎ Die Eingabe war von der Form 1^i, wurde in 0^i geändert, und muss noch in 10^i umgewandelt werden

c: Ersetzt die erste 0 durch eine 1 und geht in den Zustand d

d: Fügt eine 0 hinten an und geht in den Zustand e

e: Läuft zum linken Rand und geht in den Endzustand h



Turingmaschinen: 2. Beispiel, 2. Berechnung

2. Beispiel-TM: Inkrementieren einer Binärzahl (Forts.)

- Beschreibung der Zustände:

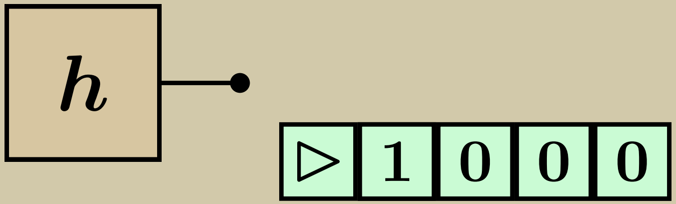
  a: Die TM läuft, ohne etwas zu verändern, nach rechts bis zum ersten Leerzeichen und dann einen Schritt nach links in den Zustand b

  b: Das maximale Suffix der Form 1^i wird durch 0^i ersetzt
  - Ist davor eine 0, so wird sie durch 1 ersetzt und M geht in den Zustand e
  - Ist davor ein $\triangleright$, so geht M in den Zustand c

  c: Ersetzt die erste 0 durch eine 1 und geht in den Zustand d

  d: Fügt eine 0 hinten an und geht in den Zustand e

  e: Läuft zum linken Rand und geht in den Endzustand h



Turingmaschinen: 2. Beispiel als Diagramm

Beispiel: Zustände der 2. TM

$\boldsymbol{a}$: Laufe nach rechts bis zum ersten $\sqcup$, dann einen Schritt nach links in den Zustand $\boldsymbol{b}$

$\boldsymbol{b}$: Gehe nach links bis zur nächsten $\mathbf{0}$ — ersetze dabei jede $\mathbf{1}$ durch $\mathbf{0}$

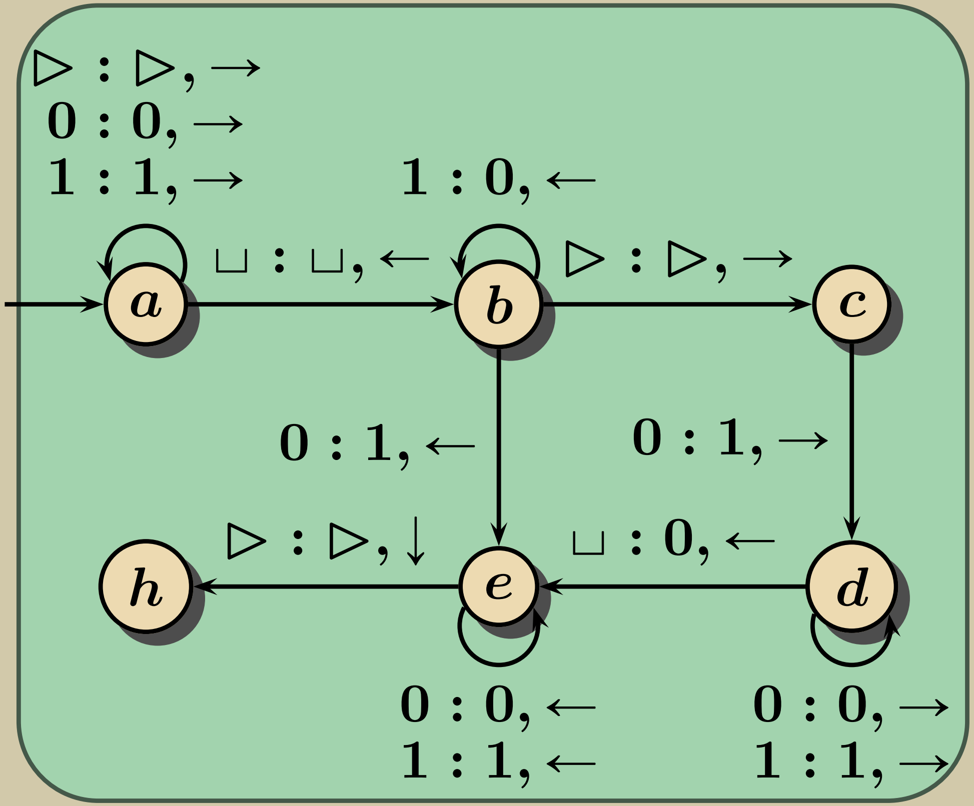
- Ist davor $\mathbf{0}$, ersetze durch $\mathbf{1}$ und gehe in den Zustand $\boldsymbol{e}$
- Ist davor $\rhd$, gehe in den Zustand $\boldsymbol{c}$

$\boldsymbol{c}$: Ersetze die erste $\mathbf{0}$ durch eine $\mathbf{1}$ und gehe in den Zustand $\boldsymbol{d}$

$\boldsymbol{d}$: Füge eine $\mathbf{0}$ hinten an und gehe in den Zustand $\boldsymbol{e}$

$\boldsymbol{e}$: Laufe zum linken Rand und gehe in den Endzustand $\boldsymbol{h}$

Diagramm zur 2. TM



Turingmaschinen: Konfigurationen (1/2)

- Um die aktuelle Situation einer TM zu beschreiben, verwenden wir Konfigurationen, bestehend aus einem Zustand und einer String-Zeigerbeschreibung

Definition

- Eine **String-Zeigerbeschreibung** (w, z) besteht aus
  - einem String $w \in \Gamma^*$ und
  - einer Zeigerposition $z \in \mathbb{N}_0$, $z \leqslant |w|$

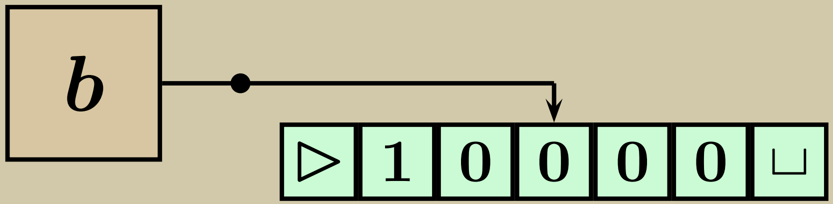
✎ Der linke Rand wird in w nicht repräsentiert!

- Wir vereinbaren: $w[0] \stackrel{\text{def}}{=} \triangleright$

- Manchmal verwenden wir eine andere Notation und schreiben (u, σ, v) statt (w, z), falls
  - $w = u\sigma v$ und
  - $|u\sigma| = z$
- σ ist dann das Zeichen, auf das der Zeiger zeigt, v ist der String rechts vom Zeiger, u ist der String links vom Zeiger (ohne $u[0] = \triangleright$)
- Falls $z = 0$: (ϵ, ϵ, w)

Beispiel

Die String-Zeigerbeschreibung zu



ist

- $(10000\sqcup, 3)$ oder
- $(10, 0, 00\sqcup)$

Definition

- Eine **Konfiguration** von M ist ein Tupel $(q, (w, z))$ mit
  - $q \in Q \cup \{\text{ja}, \text{nein}, h\}$ (aktueller Zustand)
  - w der aktuelle String
  - z die Position des Zeigers der TM (linker Rand ist 0)

Turingmaschinen: Konfigurationen (2/2)

Definition

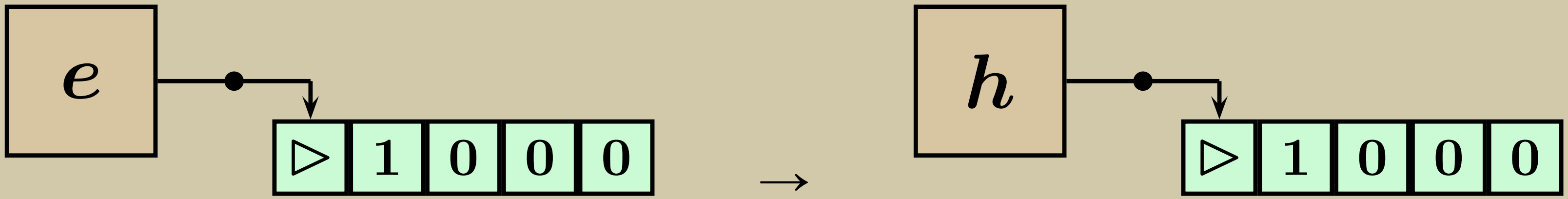
- Sei $K = (q, (w, z))$ eine Konfiguration mit $w[z] = \sigma$ und sei $\delta(q, \sigma) = (q', \tau, d)$ mit $\tau \in \Gamma$, $d \in \{\leftarrow, \downarrow, \rightarrow\}$
- Dann ist die **Nachfolgekonfiguration $K' = (q', (w', z'))$ von K** wie folgt definiert: (Schreibweise: $K \vdash_M K'$)
  - $z' = z + 1$, falls $d = \rightarrow$
  - $z' = z$, falls $d = \downarrow$
  - $z' = z - 1$, falls $d = \leftarrow$
  - $w' = w$, falls $z = 0$
  - $w' = w[z/\tau]\sqcup$, falls $z = |w|$ und $d = \rightarrow$
  - $w' = w[z/\tau]$, andernfalls

  ✎ Dabei bezeichnet $w[z/\tau]$ den String, der aus w entsteht, indem das Zeichen an Position z durch τ ersetzt wird
- Wir schreiben $K \vdash_M^* K'$, falls es Konfigurationen $K_1, \ldots, K_m$ gibt mit $K \vdash_M K_1 \vdash_M \cdots \vdash_M K_m \vdash_M K'$

Turingmaschinen: Illustration der Nachfolgekonfiguration (1/2)

Beispiel: Schritt ohne Kopf-Bewegung

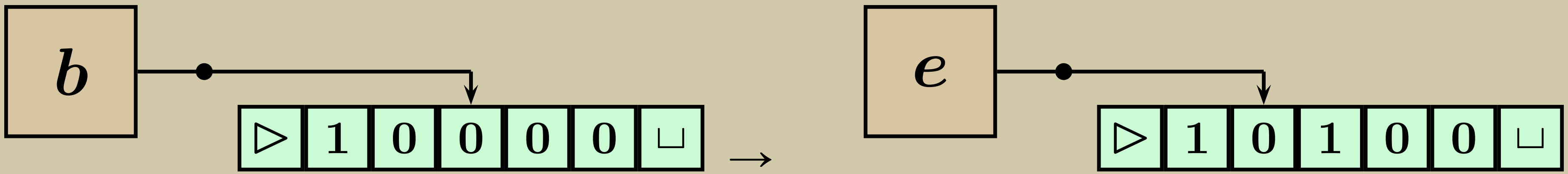
- $\boldsymbol{\delta(e, \triangleright) = (h, \triangleright, \downarrow)}$



$$\boldsymbol{(e, (1000, 0))} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{(h, (1000, 0))}$$

Beispiel: Linksschritt

- $\boldsymbol{\delta(b, 0) = (e, 1, \leftarrow)}$

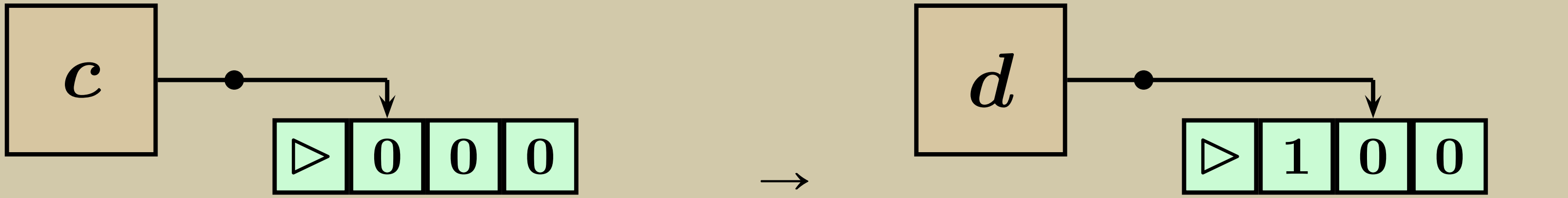


$$\boldsymbol{(b, (10000\sqcup, 3))} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{(e, (10100\sqcup, 2))}$$

Turingmaschinen: Illustration der Nachfolgekonfiguration (2/2)

Beispiel: Rechtsschritt

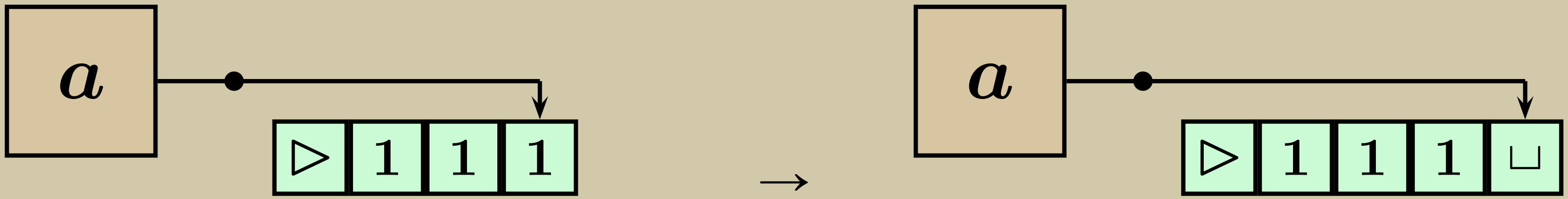
- $\delta(c, 0) = (d, 1, \rightarrow)$



$$(c, (000, 1)) \rightarrow (d, (100, 2))$$

Beispiel: Rechtsschritt mit neuem Blank

- $\delta(a, 1) = (a, 1, \rightarrow)$



$$(a, (111, 3)) \rightarrow (a, (111\sqcup, 4))$$

Turingmaschinen: Semantik (1/2)

Definition

- Sei $\Sigma \subseteq \Gamma - \{\triangleright, \sqcup\}$ (**Ein-/Ausgabe-Alphabet**)

- Die **Startkonfiguration** von M bei Eingabe $u \in \Sigma^*$ ist
$$K_0(u) \stackrel{\text{def}}{=} (s, (u, 0))$$
- $(q, (w, z))$ heißt **Haltekonfiguration**, falls
$$q \in \{h, \text{ja}, \text{nein}\}$$

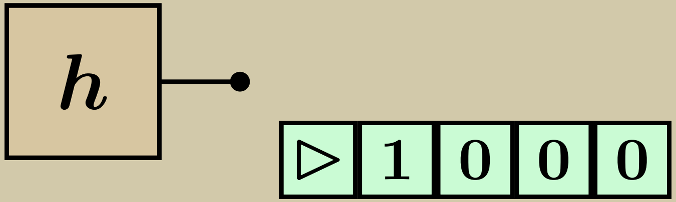
- $K_0, K_1, \ldots, K_t$ heißt **endliche Berechnung von M bei Eingabe u**, falls
  - $K_0 = K_0(u)$,
  - $K_i \vdash_M K_{i+1}$ für alle $i < t$ und
  - K_t eine Haltekonfiguration ist

- **M akzeptiert u**, falls $K_0(u) \vdash_M^* (\text{ja}, (w, z))$
- **M lehnt u ab**, falls $K_0(u) \vdash_M^* (\text{nein}, (w, z))$
  - (für gewisse $w \in \Sigma^*$, $z \leqslant |w|$)

- $M(u) \stackrel{\text{def}}{=}$ die (endliche oder unendliche) Berechnung von M bei Eingabe u ☞ $M(u)$ ist nicht die Ausgabe!

Turingmaschinen: Beispiel einer Konfigurationsfolge

Beispiel



$$
\begin{aligned}
(a,(\epsilon,\epsilon,111)) &\vdash_M (a,(\epsilon,1,11))\\
&\vdash_M (a,(1,1,1))\\
&\vdash_M (a,(11,1,\epsilon))\\
&\vdash_M (a,(111,\sqcup,\epsilon))\\
&\vdash_M (b,(11,1,\sqcup))\\
&\vdash_M (b,(1,1,0\sqcup))\\
&\vdash_M (b,(\epsilon,1,00\sqcup))\\
&\vdash_M (b,(\epsilon,\epsilon,000\sqcup))\\
&\vdash_M (c,(\epsilon,0,00\sqcup))\\
&\vdash_M (d,(1,0,0\sqcup))\\
&\vdash_M (d,(10,0,\sqcup))\\
&\vdash_M (d,(100,\sqcup,\epsilon))\\
&\vdash_M (e,(10,0,0))\\
&\vdash_M (e,(1,0,00))\\
&\vdash_M (e,(\epsilon,1,000))\\
&\vdash_M (e,(\epsilon,\epsilon,1000))\\
&\vdash_M (h,(\epsilon,\epsilon,1000))
\end{aligned}
$$

Turingmaschinen: Semantik (2/2)

Definition

- Eine TM M **entscheidet** eine Sprache L, falls für jedes $u \in \Sigma^*$ gilt:
  - $u \in L \Rightarrow M$ akzeptiert u
  - $u \notin L \Rightarrow M$ lehnt u ab
- $L(M) \stackrel{\text{def}}{=}$ Menge aller von M akzeptierten Wörter

- Zu beachten:
  - $L(M)$ ist immer definiert
  - Aber M entscheidet $L(M)$ nicht immer!
    - Es könnte sein, dass M für gewisse Eingabewörter, die nicht in $L(M)$ sind, nicht anhält
  - M entscheidet $L(M)$ genau dann, wenn M für jedes Eingabewort anhält

- Turingmaschinen können auch Funktionen berechnen

Definition

- $f_M(u) \stackrel{\text{def}}{=} v \in \Sigma^*$, falls
  - $K_0(u) \vdash_M^* (h, (v, 0))$ oder
  - $K_0(u) \vdash_M^* (h, (v\tau w, 0))$
    für ein $\tau \in \Gamma - \Sigma$, $w \in \Gamma^*$

✎ $f_M(u)$ ist nur dann definiert, wenn der Zeiger von M im Haltezustand ganz links steht
  - $f_M(u)$ ist dann die maximale Folge von Zeichen aus Σ, die direkt rechts vom Zeiger stehen

- Im Allgemeinen ist f_M also eine partielle Funktion $\Sigma^* \rightharpoonup \Sigma^*$

Definition

- Eine partielle Funktion $f : \Sigma^* \rightharpoonup \Sigma^*$ heißt **Turing-berechenbar**, falls $f = f_M$ für eine Turingmaschine M

Literatur

- Die Darstellung in diesem Kapitel richtet sich weitgehend nach dem folgenden Lehrbuch.
  - Uwe Schöning. *Theoretische Informatik - kurzgefaßt (3. Aufl.)*. Hochschultaschenbuch. Spektrum Akademischer Verlag, 1997