technische universität dortmund

Thomas Schwentick

Gaetano Geck, Lutz Oettershagen,
Christopher Spinrath, Marco Wilhelm

Lehrstuhl 1
Logik in der Informatik

SoSe 2018 | **Übungsblatt 12** | **03.07.2018**

Abgabe bis spätestens am Dienstag, 10.07.2018,

- (vor der Vorlesung) im HG II, HS 3, oder
- in die Briefkästen im Durchgangsflur, der die 1. Etage der OH 12 mit dem Erdgeschoss der OH 14 verbindet.

Beachten Sie die Schließzeiten der Gebäude!

Ansonsten gelten die Hinweise von Blatt 1.

Aufgabe 12.1 [NP] — 6 Punkte

Wir untersuchen die Komplexität der Probleme GraphIsomorphismus und FinishSat, die wie folgt definiert sind.

Problem: GraphIsomorphismus
Gegeben: Gerichtete Graphen G und G'
Frage: Sind die Graphen isomorph?

Problem: FinishSat
Gegeben: Eine aussagenlogische Formel φ in KNF und eine partielle Wahrheitsbelegung $\alpha : \{x_1, x_2, \ldots\} \rightharpoonup \{0, 1\}$
Frage: Lässt sich α zu einer totalen Funktion $\beta : \{x_1, x_2, \ldots\} \to \{0, 1\}$ erweitern, so dass $\beta \models \varphi$ gilt?

Hinweis

Zur Erinnerung: Zwei gerichtete Graphen $G = (V, E)$ und $G' = (V', E')$ heißen *isomorph*, wenn es eine bijektive Abbildung $f : V \to V'$ gibt, welche die Kantenrelation respektiert: für alle Paare (u, v) von Knoten aus G gilt $(u, v) \in E$ genau dann, wenn $\big(f(u), f(v)\big) \in E'$ gilt.

a) Zeigen Sie: GraphIsomorphismus $\in$ NP. Beschreiben Sie dazu, aus welchen Daten sich die Lösungskandidaten (die Zusatzeingabe) für eine Probleminstanz zusammensetzen und warum die Größe der Lösungskandidaten polynomiell durch die Größe der Instanz beschränkt ist. Beschreiben Sie anschließend, welche Eigenschaften von Eingabe und Zusatzeingabe ein Algorithmus überprüfen muss, um richtigerweise zu akzeptieren oder abzulehnen. Geben Sie für jeden Test eine obere (asymptotische) Laufzeitschranke an. **(3 Punkte)**

b) Zeigen Sie zunächst FinishSat $\leq_p$ Sat. Folgern Sie dann, dass FinishSat $\in$ NP gilt. **(3 Punkte)**

Aufgabe 12.2 [Reduktionseigenschaften überprüfen] 9 Punkte

Wir betrachten die beiden Entscheidungsprobleme ExactCover und 0-1-ILP, welche nachfolgend angegeben sind.

Problem: ExactCover
Gegeben: Endliche Menge M und Teilmengen $S_1, \dots, S_k \subseteq M$
Frage: Gibt es eine Indexmenge $I \subseteq \{1, \dots, k\}$, sodass M die *disjunkte* Vereinigung der Mengen S_i mit $i \in I$ ist, d.h. gilt $M = \bigcup_{i \in I} S_i$ und $S_i \cap S_j = \emptyset$ für alle $i \neq j$ in I?

Beispiel

Wir betrachten die Menge $M = \{a, b, c, d\}$ und die folgenden Teilmengen von M.

$$\begin{aligned} S_1 &= \{a, b\} \\ S_2 &= \{c, d\} \\ S_3 &= \{b, c, d\} \end{aligned}$$

Die Indexmenge $I = \{1, 2\}$ belegt, dass $(M, (S_1, S_2, S_3))$ in ExactCover ist, weil $M = S_1 \cup S_2$ und $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ gilt. Die Indexmenge $J = \{1, 3\}$ tut dies allerdings nicht. Es gilt zwar $M = S_1 \cup S_3$, aber S_1 und S_3 sind nicht disjunkt, es gilt $S_1 \cap S_3 = \{b\} \neq \emptyset$.

Problem: 0-1-ILP
Gegeben: Ein System $\mathcal{U} = (U_1, \dots, U_m)$ ganzzahliger linearer Ungleichungen über einer endlichen Variablenmenge X.
Frage: Gibt es eine Wertebelegung $\beta : X \to \{0, 1\}$ der Variablen, die alle Ungleichungen erfüllt?

Beispiel

Für das folgende System von Ungleichungen ist $\beta = \{x \mapsto 1,\ y \mapsto 0,\ z \mapsto 1\}$ eine erfüllende Wertebelegung (auch *Lösung* genannt).

$$\begin{array}{rcrcrl} 4x & - & 2y & + & z & \geq 3 \\ & & 11y & - & 2z & \leq 8 \end{array}$$

Betrachten Sie die folgende Reduktion f von ExactCover auf 0-1-ILP und untersuchen Sie ihre Eigenschaften, indem Sie die Teilaufgaben lösen.

Funktion f

Einer Menge M und Teilmengen $S_1, \dots, S_k \subseteq M$ wird durch die Reduktion f das folgende System von Ungleichungen über den Indikatorvariablen x_i für $i \in \{1, \dots, k\}$ zugewiesen. Dabei soll eine Variable x_i intuitiv genau dann den Wert 1 annehmen, wenn i zur Indexmenge I gehört, und andernfalls den Wert 0.

$$\begin{array}{ll} c_{1,e}x_1 + \cdots + c_{k,e}x_k \geq 1 & \text{für alle } e \in M \\ x_i + x_j \leq 1 & \text{für alle } i \neq j \text{ mit } S_i \cap S_j \neq \emptyset \end{array}$$

wobei $c_{i,e}$ entweder für die Konstante 1 steht, wenn $e \in S_i$ gilt, oder für die Konstante 0, falls $e \notin S_i$ gilt.

a) Betrachten Sie die Menge $M = \{a, b, c, d, h\}$ und die folgenden Teilmengen von M.

$$\begin{aligned} S_1 &= \{a, b\} \\ S_2 &= \{b, c\} \\ S_3 &= \{d, h\} \\ S_4 &= \{a\} \end{aligned}$$

Gilt $(M, (S_1, S_2, S_3, S_4)) \in \textsc{ExactCover}$? Falls ja, geben Sie eine entsprechende Indexmenge I an, die dies bezeugt. **(0,5 Punkte)**

b) Stellen Sie das Ungleichungssytem $f(M, (S_1, \ldots, S_4))$ für die Menge M und die Teilmengen S_1, S_2, S_3, S_4 aus Teilaufgabe a) auf. Ist das System in 0-1-ILP? Wenn ja, geben Sie eine erfüllende Wertebelegung $\beta : \{x_1, \ldots, x_4\} \to \{0, 1\}$ für das System an. **(1,5 Punkte)**

c) Beschreiben Sie die Bedeutung der erzeugten Ungleichungen. Welchen Eigenschaften der Teilmengen S_i mit $i \in I$ entsprechen sie? **(1 Punkt)**

d) Beweisen Sie, dass die angegebene Funktion die Reduktionseigenschaft besitzt. **(4,5 Punkte)**

e) Begründen Sie, dass die Reduktionsfunktion in polynomieller Zeit berechnet werden kann. Geben Sie dazu insbesondere eine asymptotische obere Laufzeitschranke an. **(1,5 Punkte)**

Zusatzaufgabe [Sudoku]

In Kapitel 18 der Vorlesung wurden Sudoku-Rätsel als Beispiel für P vs. NP betrachtet. Wir betrachten in dieser Aufgabe die Folgende Verallgemeinerung von Sudoku-Rätseln. Für $k \in \mathbb{N}$ soll das Spielfeld die Größe $k^2 \times k^2$ haben. Alle Boxen bestehen dann aus $k \times k$ Feldern und sollen so mit den Zahlen 1 bis k^2 gefüllt werden, dass keine Box, keine Spalte und keine Reihe zwei gleiche Zahlen enthält. Wie beim gewöhnlichen Sudoku sind die Zahlen für einige Positionen des Spielfeldes schon vorgegeben.
Das allgemeine Sudoku-Rätsel ist also wie folgt definiert.

Problem: SUDOKU
Gegeben: 1^k für $k \in \mathbb{N}$, eine partielle Funktion $f : \{1, 2, \ldots, k^2\}^2 \rightharpoonup \{1, 2, \ldots, k^2\}$
Frage: Besitzt das durch k und f gegebene Sudoku-Rätsel eine Lösung?

Hierbei beschreibt k die Größe des Spielfeldes und f gibt an, ob und mit welcher Zahl eine Position bereits belegt ist. Ist f für eine Position i nicht definiert, d.h. $f(i) = \perp$, so ist die Position i *nicht* belegt, andernfalls ist sie mit der Zahl $f(i)$ belegt. Die herkömmlichen Sudoku-Rätsel sind also der Spezialfall $k = 3$ des allgemeinen Sudoku-Rätsels.

a) Lässt sich das Sudoku-Rätsel für den Fall $k = 23$ in polynomieller Zeit lösen?

b) Bei der folgenden Variante des Färbungsproblems muss eine Teilfärbung zu einer Färbung vervollständigt werden.

Problem: FINISHCOL
Gegeben: Ungerichteter Graph $G = (V, E)$, Zahl k, partielle Funktion $c : V \rightharpoonup \{1, \ldots, k\}$
Frage: Lässt sich c zu einer totalen Funktion (auf V) erweitern, die eine zulässige Färbung von G (mit k Farben) ist?

Für die Knoten, für die c definiert ist, sind die Farben also bereits festgelegt.

Geben Sie eine polynomielle Reduktion von SUDOKU auf FINISHCOL an und beweisen Sie deren Korrektheit.

Hinweis: Fassen Sie die Positionen des Spielfeldes als Knoten eines Graphen auf.

c) Geben Sie eine polynomielle Reduktion von FINISHCOL auf COL an und beweisen Sie deren Korrektheit.

Hinweis: Bilden Sie einen gegebenen Graphen G auf einen Graphen G' mit k zusätzlichen Knoten ab. Welche zusätzlichen Kanten muss G' haben?