Wichtige Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariablen X:

$$P^X(B) = P(X \in B) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\}),\ B \subseteq \Re$$

Verteilungsfunktion von X

$$F = F^X : \Re \to [0,1]$$

$$\text{mit } F(x) = P^X((-\infty, x]) = P(X \le x) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \le x\}),\ x \in \Re$$

Träger T_X einer diskreten Wahrscheinlichkeitsverteilung P^X

$$T_X = \{x \mid P(X = x) > 0\}$$

Träger T_X einer stetigen Wahrscheinlichkeitsverteilung P^X

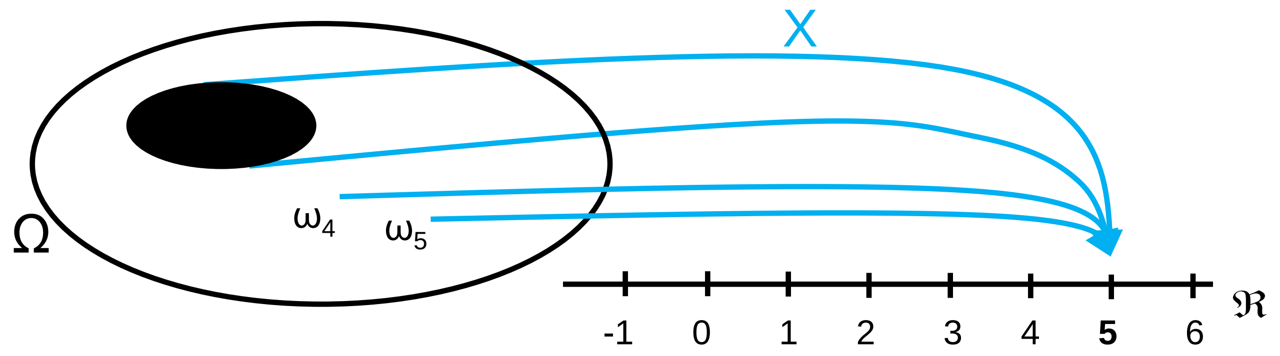
$$T_X = \{x \mid f(x) > 0\}$$

Wichtige Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Einpunktverteilung ε_a

$$\omega \in \Omega \Rightarrow X(\omega) = a$$



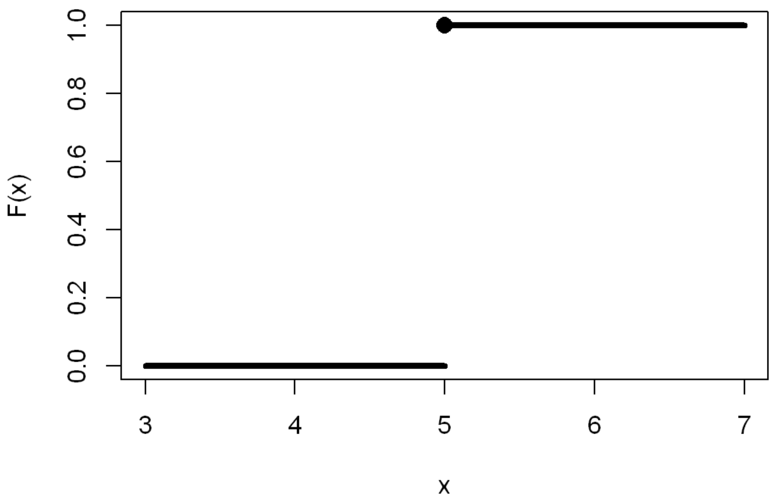
Bestimmung der Dichte über Laplace-Raum

Setze $\Omega' = \{\omega_1\}, \ \omega \in \Omega' \Rightarrow \omega = \omega_1 \Rightarrow X(\omega_1) = a \Rightarrow \ p(X = a) = 1/|\Omega'| = 1$

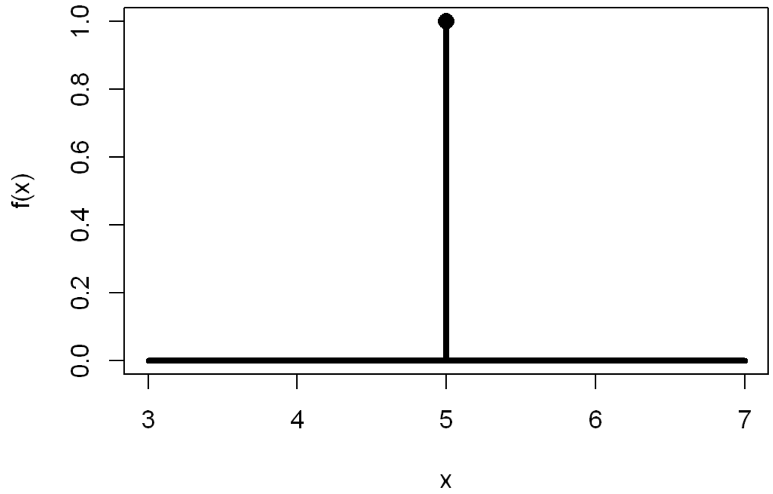
Wichtige Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Einpunktverteilung ε_a



Verteilungsfunktion: $F(x) = \mathbf{I}(a \leq x)$



Zähldichte: $p(x) = \mathbf{I}(a = x)$

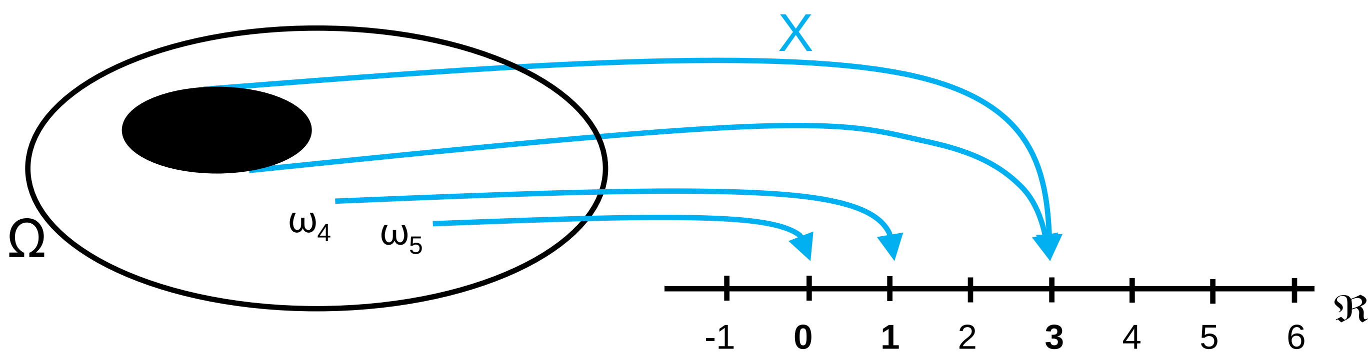
Träger: $T_X = \{a\}$

Wichtige Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Diskrete Gleichverteilung $G(x_1,\dots x_n)$

$$P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x_1\}) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x_2\}) = \dots = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x_n\})$$



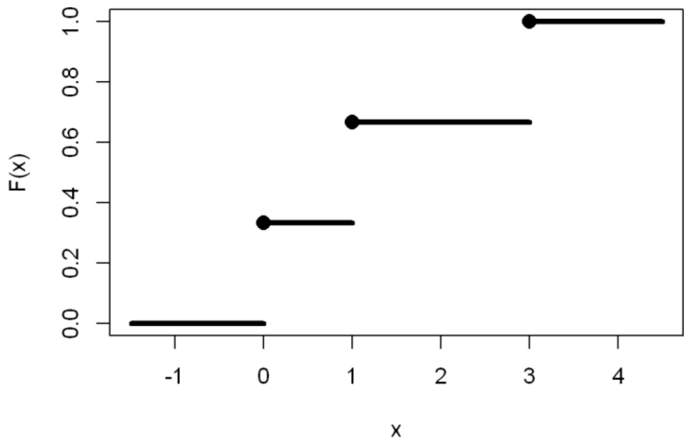
Bestimmung der Dichte über Laplace-Raum

Setze $\Omega' = \{\omega_1,\dots,\omega_n\}$, $\omega \in \Omega' \Rightarrow \omega = \omega_i \Rightarrow X(\omega) = x_i \Rightarrow p(X = x_i) = 1/|\Omega'| = 1/n$

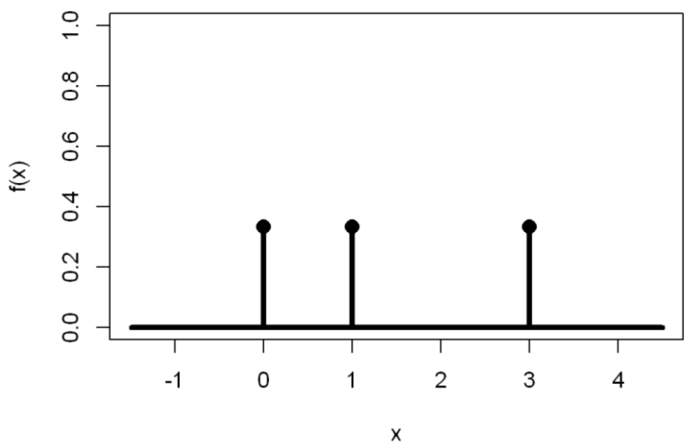
Wichtige Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Diskrete Gleichverteilung $G(x_1,\ldots x_n)$



Verteilungsfunktion: $F(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{I}(x_i \leq x)$



Zähldichte: $p(x) = \frac{1}{n} \cdot \mathbf{I}(x \in \{x_1,\ldots,x_n\})$

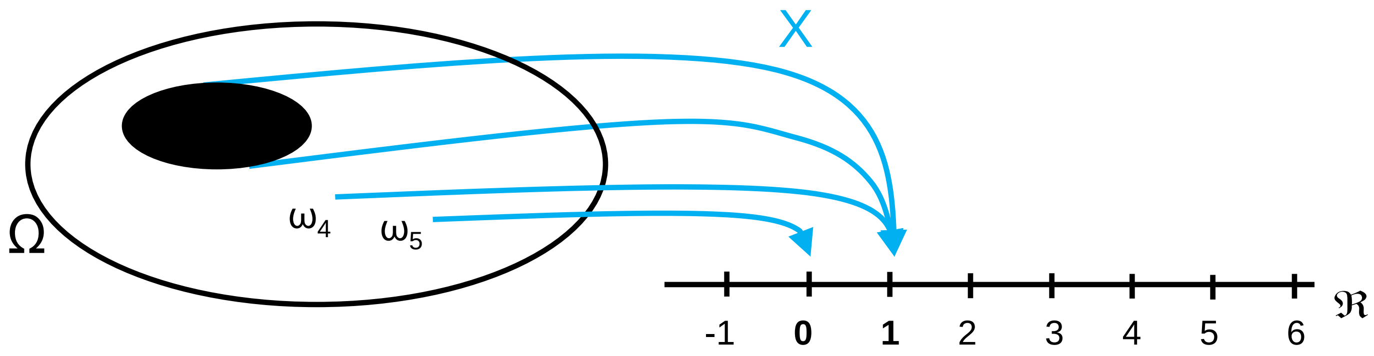
Träger: $T_X = \{x_1,\ldots,x_n\}$

Wichtige Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Bernoulli-Verteilung B(1,p)

$$P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = 1\}) = p \quad , \quad P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = 0\}) = 1 - p$$



Der Fall X(ω) = 1 wird Erfolg genannt, entsprechend ist p die Erfolgswahrscheinlichkeit

Wichtige Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Bernoulli-Verteilung B(1,p) $P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = 1\}) = p, \quad P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = 0\}) = 1 - p$

Bestimmung der Dichte über Laplace - Raum

Sei p o.B.d.A. rational,

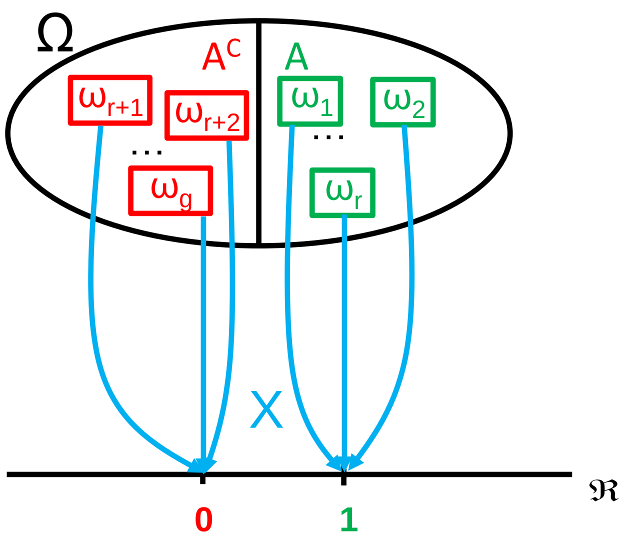
d.h. es gibt $r, g \in \aleph$ mit $p = r/g$

Setze $\Omega' = \{\omega_1, \ldots, \omega_g\}$

$\boxed{A = \{\omega_1, \ldots, \omega_r\}}$, $\boxed{A^C = \{\omega_{r+1}, \ldots, \omega_g\}}$, $X(\omega) = \mathbf{I}(\omega \in A)$

$$\Rightarrow \quad p(X = 1) = \boxed{P(A)} = \sum_{i=1}^{r} 1/|\Omega'| = r/g = p$$

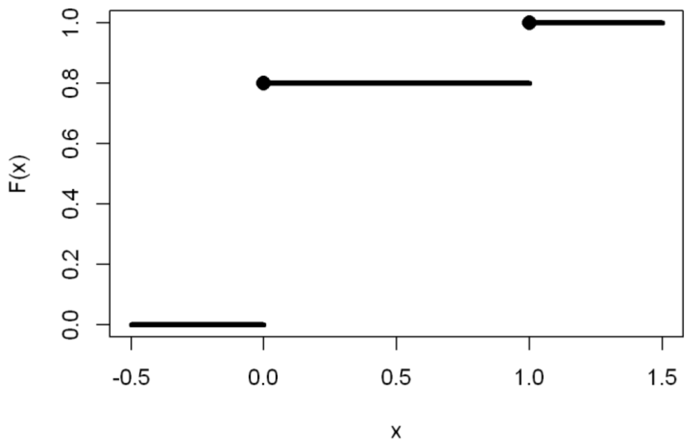
$$p(X = 0) = \boxed{P(A^C)} = 1 - r/g = 1 - p$$



Wichtige Wahrscheinlichkeitsverteilungen

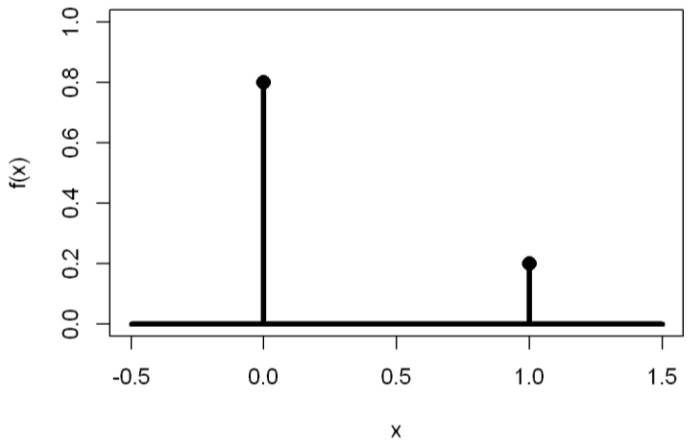
Diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Bernoulli-Verteilung B(1,p), $0 < p < 1$



Verteilungsfunktion:

$$F(x) = (1-p)\cdot \mathbf{I}(0 \le x) + p \cdot \mathbf{I}(1 \le x)$$



Zähldichte: $p(x) = p \cdot \mathbf{I}(x=1) + (1-p)\cdot \mathbf{I}(x=0)$

Träger: $T_X = \{0,1\}$

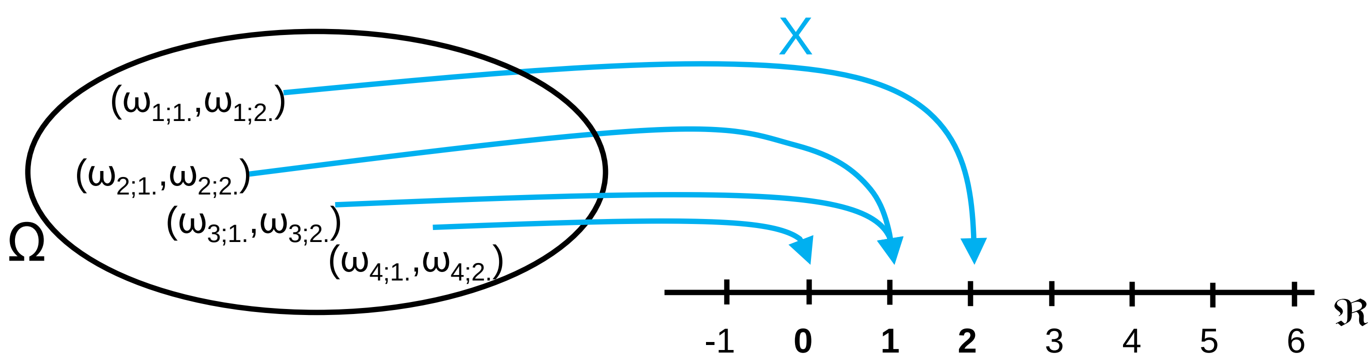
Wichtige Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Binomialverteilung-Verteilung B(n, p)

$$P(\{\omega = (\omega_{1.},\ldots,\omega_{n.}) \in \Omega = (\Omega')^n \mid X(\omega) = \sum_{i=1}^{n} Y(\omega_{i.}) = k\}),\ Y \sim B(1,p) \ \text{ ist die W'keit}$$

für genau k Erfolge in n Zufallsexperimenten mit B(1,p)-verteilter Zufallsvariable



Wichtige Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Binomialverteilung-Verteilung B(n, p)

Bestimmung der Dichte über Laplace-Raum

$r, g \in \aleph$, $p = r/g$, $\Omega' = \{\omega_1, \ldots, \omega_g\}$, $A = \{\omega_1, \ldots, \omega_r\}$, $A^C = \{\omega_{r+1}, \ldots, \omega_g\}$, $Y(\omega_{i.}) = \mathbf{I}(\omega_{i.} \in A)$, $i = 1, \ldots, n$

Elementarereignisse insgesamt: $|\Omega| = |\Omega'|^n = g^n$

Elementarereignisse mit Erfolg in ersten k Versuchen, danach Misserfolge: $\left| A^k \times \left(A^C\right)^{n\text{-}k} \right| = r^k \cdot (g-r)^{n-k}$

Dieselbe Anzahl ergibt sich für jede Verteilung der k Erfolge auf die n Experimente.

Anzahl der Anordnungen der k Erfolge in den n Versuchen: n! = Anzahl der Reihenfolgen-Permutationen

Die Reihenfolge der Erfolge/Misserfolge untereinander spielt dabei keine Rolle; es wird also jedes Elementarereignis k!·(n-k)! mal gezählt.

Binomialkoeffizient:

Anzahl Elementarereignisse mit insgesamt k Erfolgen

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Wichtige Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Binomialverteilung-Verteilung B(n, p)

Bestimmung der Dichte über Laplace-Raum

$$\omega = (\omega_1,\dots,\omega_n) \in \Omega = (\Omega')^n,$$

$$X(\omega) = \sum_{i=1}^{n} Y(\omega_i), \quad Y \sim B(1,p)$$

Elementarereignisse insgesamt:

$$|\Omega| = |\Omega'|^n = g^n$$

Elementarereignisse mit ausschließlich Erfolgen in den ersten k Versuchen, danach nur Misserfolge:

$$|A^k \times (A^C)^{n-k}| = r^k \cdot (g-r)^{n-k}$$

Beispiel n=3, r=3, g=5, k=2

$$P(X=2) = 54/125$$

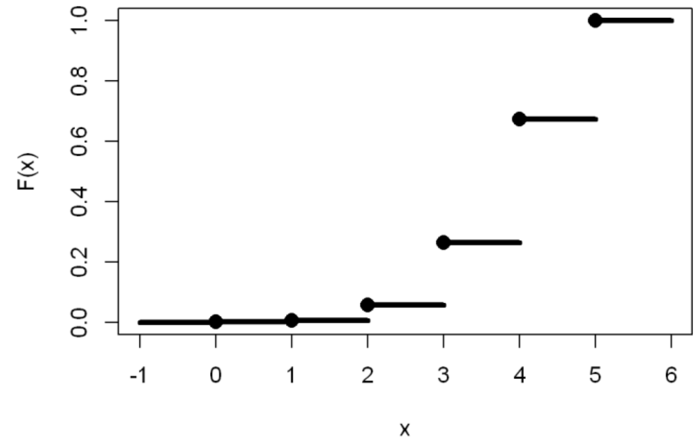
Wahrscheinlichkeit für k Erfolge

$$\boxed{P(X=k)} = \frac{r^k \cdot (g-r)^{n-k} \cdot \binom{n}{k}}{g^n} = \frac{r^k \cdot (g-r)^{n-k} \cdot \binom{n}{k}}{g^k g^{n-k}} = \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{r}{g}\right)^k \cdot \left(\frac{g-r}{g}\right)^{n-k} = \boxed{\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}}$$

Wichtige Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Binomialverteilung B(n,p) $0 < p < 1,\ n \in \aleph$

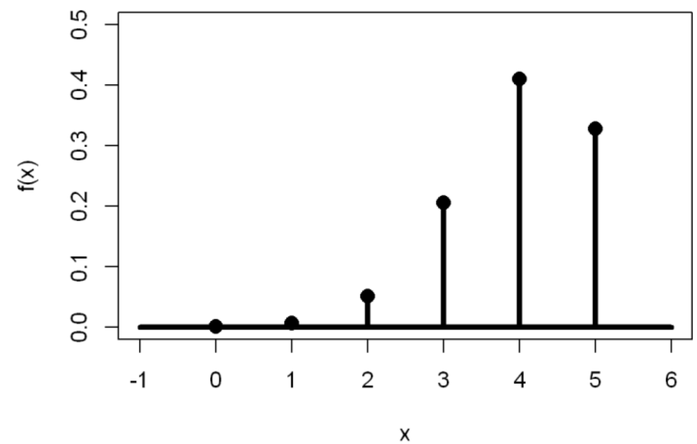


Verteilungsfunktion:

$$F(x) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{I}(i \le x) \cdot \binom{n}{i} \cdot p^{i} \cdot (1-p)^{n-i}$$

Zähldichte:

$$p(x) = \mathbf{I}(x \in \{0,\dots,n\}) \cdot \binom{n}{x} \cdot p^{x} \cdot (1-p)^{n-x}$$



Träger: $T_X = \{0,\dots,n\}$

Beispiel: $X =$ Anzahl Treffer bei 5 Strafstößen

Wichtige Wahrscheinlichkeitsverteilungen

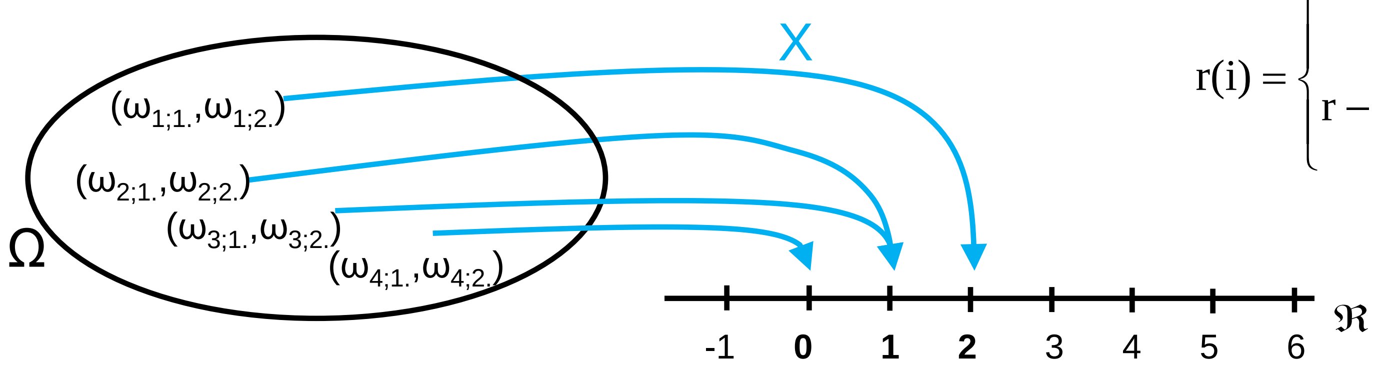
Diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Hypergeometrische Verteilung Hyp(n,r,s)

$$P(\{\omega = (\omega_{1.},\ldots,\omega_{n.}) \in \Omega = \Omega' \times \Omega'\backslash\{\omega_{1.}\} \times \ldots \times \Omega'\backslash\{\omega_{1.},\ldots,\omega_{n-1.}\} \mid X(\omega) = \sum_{i=1}^{n} Y_i(\omega_{i.}) = k\}),$$

$Y_i \sim B\left(1, \dfrac{r(i)}{r+s-i+1}\right)$ ist die W'keit für genau k Erfolge in n Zufalls-experimenten mit jeweils $B[r(i), r+s-i+1]$-verteilter Zufallsvariable

$$r(i) = \begin{cases} r & , \quad i = 1 \\ r - \sum_{j=1}^{i-1} Y_j & , \quad i > 1 \end{cases}$$



Wichtige Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Hypergeometrische Verteilung Hyp(n,r,s)

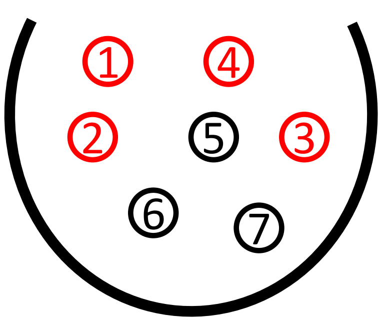
$$P(\{\omega = (\omega_{1.},\dots,\omega_{n.}) \in \Omega = \Omega' \times \Omega' \setminus \{\omega_{1.}\} \times \dots \times \Omega' \setminus \{\omega_{1.},\dots,\omega_{n-1.}\} \mid X(\omega) = \sum_{i=1}^{n} Y_i(\omega_{i.}) = k\}),$$

Urnenmodell

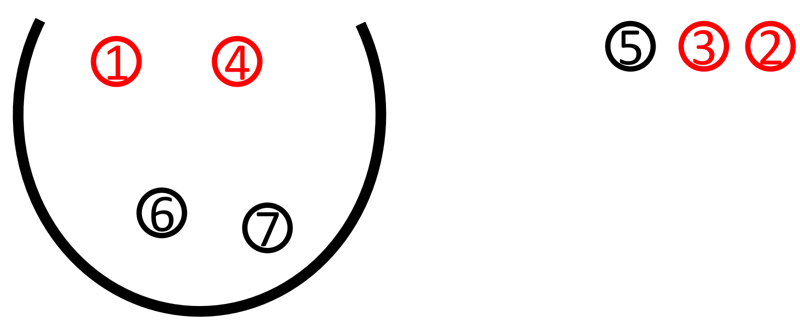
k=Anzahl rote Kugeln nach n-maligem Ziehen aus einer Urne
mit r roten und s schwarzen Kugeln ohne Zurücklegen

$$Y_i \sim B\left(1, \frac{r(i)}{r+s-i+1}\right)$$

Beispiel n=3, r=4, s=3



Ziehen von n=3 Kugeln



Wichtige Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Hypergeometrische Verteilung Hyp(n,r,s)

$$P(\{\omega = (\omega_{1.},\dots,\omega_{n.}) \in \Omega = \Omega' \times \Omega' \backslash \{\omega_{1.}\} \times \dots \times \Omega' \backslash \{\omega_{1.},\dots,\omega_{n-1.}\} \mid X(\omega) = \sum_{i=1}^{n} Y_i(\omega_{i.}) = k\}),$$

Urnenmodell

k=Anzahl rote Kugeln nach n-maligem Ziehen aus einer Urne mit r roten und s schwarzen Kugeln ohne Zurücklegen

$$Y_i \sim B\left(1, \frac{r(i)}{r+s-i+1}\right)$$

Ω sind alle Möglichkeiten, die n $\boxed{\text{"Ziehungserfolge"}}$ auf die $r+s$ Kugeln zu verteilen.

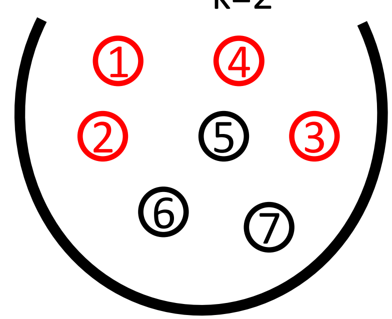
Davon gibt es $|\Omega| = \binom{r+s}{n}$.

Die $\boxed{\text{günstigen Fälle}}$ sind alle, in denen k rote und $n-k$ schwarze Kugeln auf die n gezogenen verteilt werden.

Davon gibt es $\left|\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = k\}\right| = \binom{r}{k} \cdot \binom{s}{n-k}$.

Beispiel n=3, r=4, s=3, k=2

123	124	125
126	127	134
135	136	137
145	146	147
156	157	167
234	235	236
237	245	246
247	256	257
267	345	346
347	356	357
367	356	457
467	567	



Wichtige Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Hypergeometrische Verteilung Hyp(n,r,s)

$$P(\{\omega = (\omega_{1.},\ldots,\omega_{n.}) \in \Omega = \Omega' \times \Omega' \backslash \{\omega_{1.}\} \times \ldots \times \Omega' \backslash \{\omega_{1.},\ldots,\omega_{n-1.}\} \mid X(\omega) = \sum_{i=1}^{n} Y_i(\omega_{i.}) = k\}),$$

Urnenmodell

k=Anzahl rote Kugeln nach n-maligem Ziehen aus einer Urne mit r roten und s schwarzen Kugeln ohne Zurücklegen

$$Y_i \sim B\left(1, \frac{r(i)}{r+s-i+1}\right)$$

Es gibt $|\Omega| = \binom{r+s}{n}$ Möglichkeiten, die n "Ziehungserfolge" auf die $r+s$ Kugeln zu verteilen.

Davon enthalten $\left|\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = k\}\right| = \binom{r}{k} \cdot \binom{s}{n-k}$ k rote Kugeln.

Die Wahrscheinlichkeit für k rote Kugeln beträgt also

$$P(X = k) = \frac{\binom{r}{k} \cdot \binom{s}{n-k}}{\binom{r+s}{n}}$$

Wichtige Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Hypergeometrische Verteilung Hyp(n,r,s)

$$n \in \aleph,\ 0 < n < r+s$$

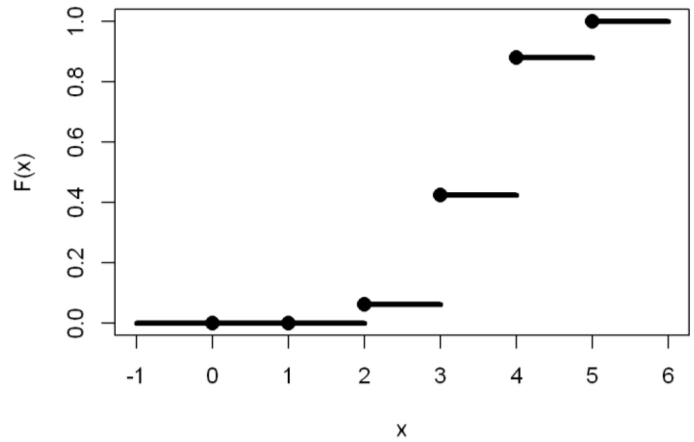
Verteilungsfunktion :

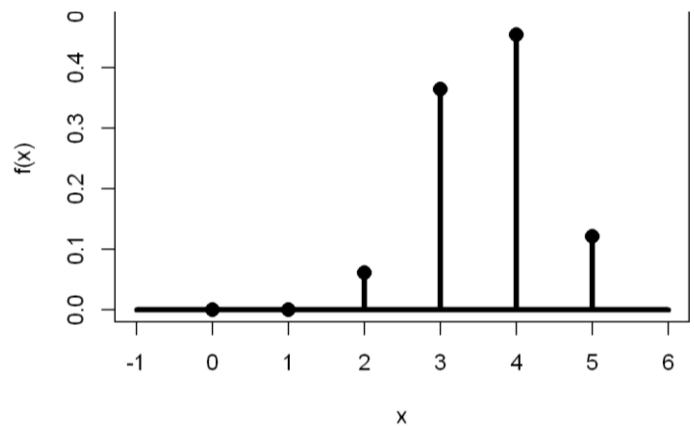
$$F(x) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{I}(i \le x) \cdot \frac{\binom{r}{i} \cdot \binom{s}{n-i}}{\binom{r+s}{n}}$$

Zähldichte :

$$p(x) = \mathbf{I}(x \in \{\max(0,n-s),\dots,\min(n,r)\}) \cdot \frac{\binom{r}{x} \cdot \binom{s}{n-x}}{\binom{r+s}{n}}$$

Träger: $T_X = \{\max(0,n-s),\dots,\min(n,r)\}$





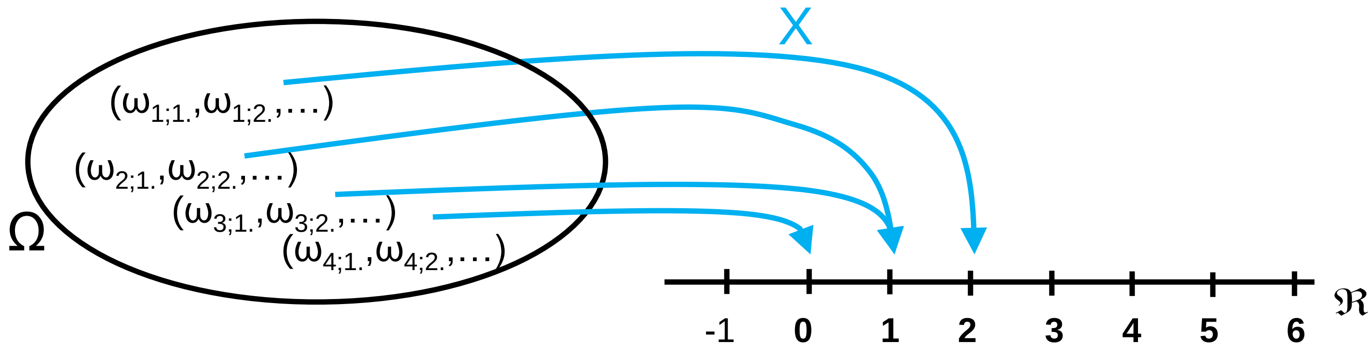
Wichtige Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Geometrische Verteilung Geo(p)

$P(\{\omega = (\omega_{1.}, \omega_{2.}, \ldots) \in \Omega = \Omega'^{\infty} \mid X(\omega) = \min[i \mid Y_i(\omega_{i.}) = 1] - 1 = k\}) \;, \quad Y_i \sim B(1,p)$

ist die W'keit, den ersten Erfolg im $(k+1)$-ten Zufallsexperiment mit jeweils $B(1,p)$-verteilter Zufallsvariable zu erhalten.



Wichtige Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Geometrische Verteilung Geo(p)

$$P(\{\omega = (\omega_{1.}, \omega_{2.}, \ldots) \in \Omega = \Omega'^{\infty} \mid X(\omega) = \min[i \mid Y_i(\omega_{i.}) = 1] - 1 = k\}) \;, \quad Y_i \sim B(1,p)$$

$$r, g \in \aleph \;,\; p = r/g \;,\; \Omega' = \{\omega_1, \ldots, \omega_g\} \;,\; A = \{\omega_1, \ldots, \omega_r\} \;,\; A^C = \{\omega_{r+1}, \ldots, \omega_g\} \;,\; Y(\omega_{i.}) = \mathbf{I}(\omega_{i.} \in A) \;,\; i = 1, \ldots, n$$

Für festes k relevanter Grundraum $\quad \Omega'_{k+1} = |\Omega'|^{k+1} \Rightarrow |\Omega'_{k+1}| = g^{k+1}$

Günstige Elementarereignisse sind diejenigen mit ausschließlich Misserfolgen in den ersten k Versuchen, danach ein Erfolg:

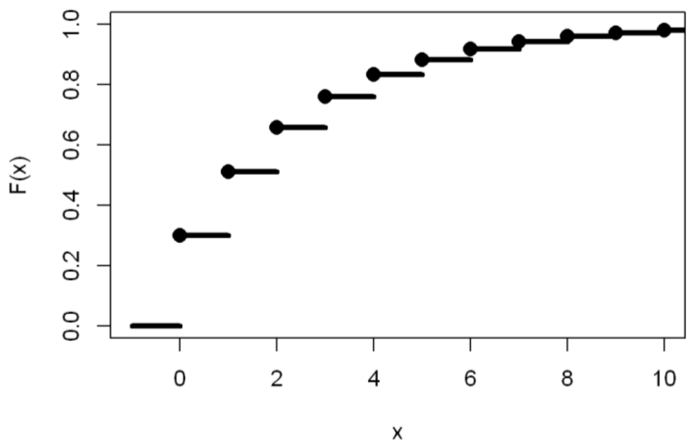
$$\left|\left(A^C\right)^k \times A\right| = r \cdot (g-r)^k$$

$$\Rightarrow \boxed{P(X=k)} = \frac{r \cdot (g-r)^k}{g^{k+1}} = \frac{r \cdot (g-r)^k}{g \cdot g^k} = \left(\frac{r}{g}\right) \cdot \left(\frac{g-r}{g}\right)^k = \boxed{p \cdot (1-p)^k}$$

Wichtige Wahrscheinlichkeitsverteilungen

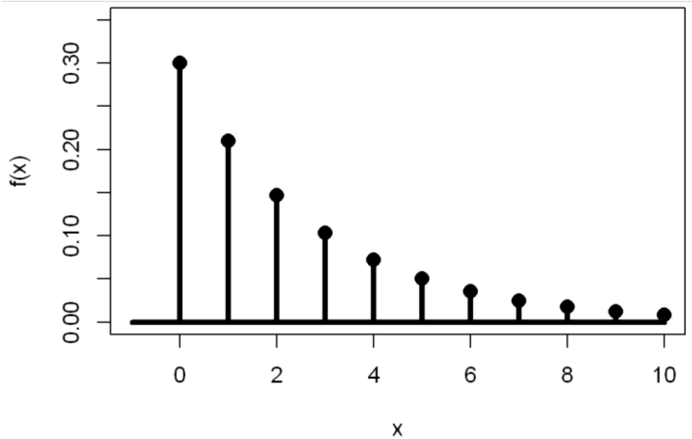
Diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Geometrische Verteilung Geo(p) $0 < p < 1$



Verteilungsfunktion :

$$F(x) = 1 - (1-p)^{x+1}$$



Zähldichte :

$$p(x) = \mathbf{I}(x \in \aleph \cup 0) \cdot p \cdot (1-p)^x$$

Träger: $T_X = \aleph \cup 0$

Beispiel: X = Anzahl verschossener Strafstöße bis zum ersten verwandelten

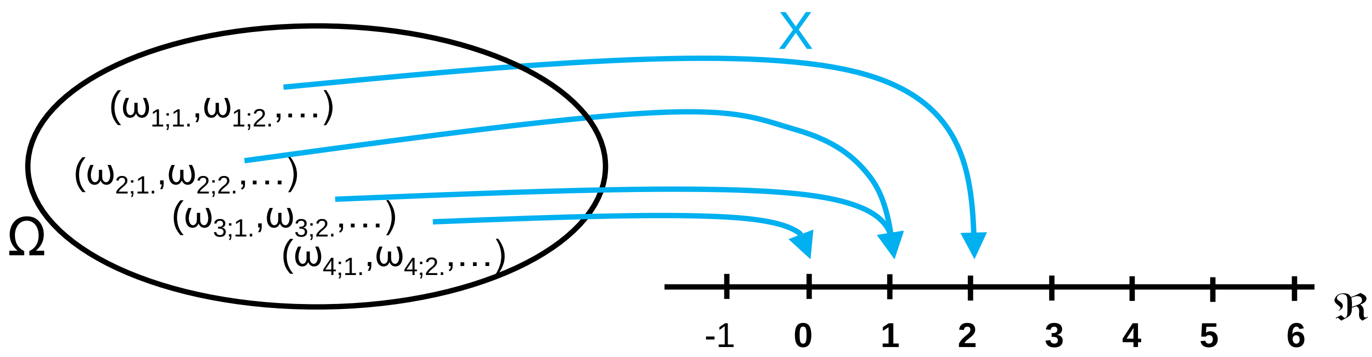
Wichtige Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Poisson-Verteilung Poi(λ) $P(\{\omega = (\omega_{1.}, \omega_{2.}, \ldots) \in \Omega = \Omega'^{\infty} \mid X(\omega) = k\})$

$$= \lim_{n \to \infty} P(\{\omega = (\omega_{1.}, \ldots, \omega_{n.}) \in \Omega = \Omega'^{n} \mid X_n(\omega) = \sum_{i=1}^{n} Y_n(\omega_{i.}) = k\}), \quad Y_n \sim B(1, \lambda/n)$$

ist die Wahrscheinlichkeit, in einem festen Zeitraum der Länge t genau k Ereignisse zu beobachten, wenn die mittlere Anzahl an Ereignissen im Zeitraum t durch den Wert von λ gegeben ist und ein Erfolg zu jedem Zeitpunkt im betrachteten Zeitraum gleichwahrscheinlich ist



Wichtige Wahrscheinlichkeitsverteilungen

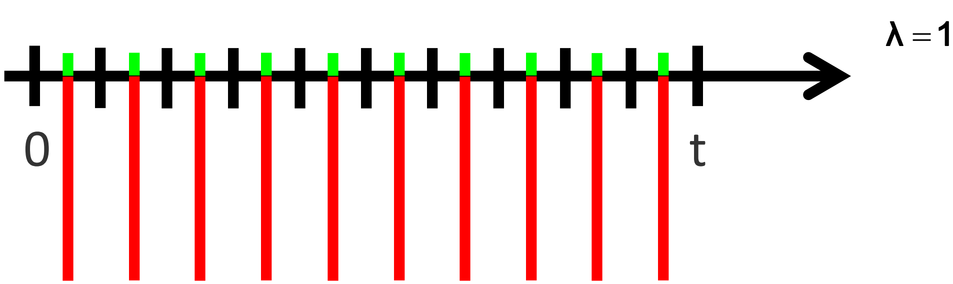
Diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen

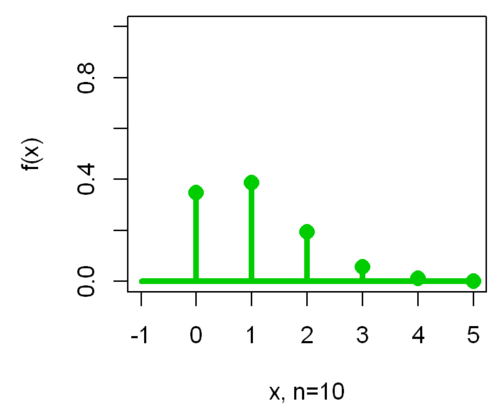
Poisson-Verteilung Poi(λ) $P(\{\omega = (\omega_{1.}, \omega_{2.}, \ldots) \in \Omega = \Omega'^{\infty} \mid X(\omega) = k\})$

$$= \lim_{n\to\infty} P(\{\omega = (\omega_{1.}, \ldots, \omega_{n.}) \in \Omega = \Omega'^{n} \mid X_n(\omega) = \sum_{i=1}^{n} Y_n(\omega_{i.}) = k\}), \quad Y_n \sim B(1, \lambda/n)$$

ist die Wahrscheinlichkeit, in einem festen Zeitraum der Länge t genau k Ereignisse zu beobachten, wenn die mittlere Anzahl an Ereignissen im Zeitraum t durch den Wert von λ gegeben ist und ein Erfolg zu jedem Zeitpunkt im betrachteten Zeitraum gleichwahrscheinlich ist

Durchführung von n Bernoulli-Experimenten im Zeitraum t: $p(x) = \mathbf{I}(x \in \{0,\ldots,n\}) \cdot \binom{n}{x} \cdot \left(\frac{\lambda}{n}\right)^{x} \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$





Wichtige Wahrscheinlichkeitsverteilungen

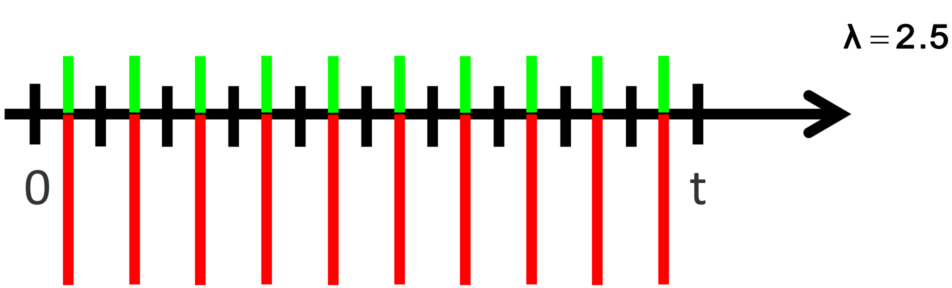
Diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen

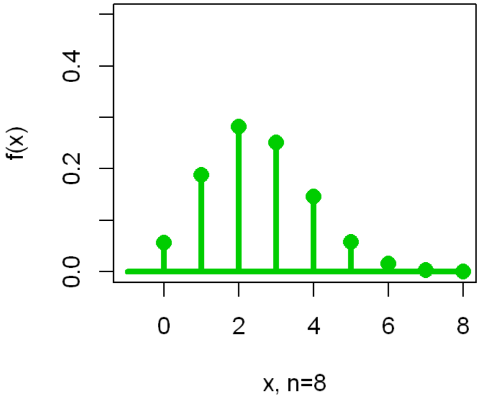
Poisson-Verteilung Poi(λ) $P(\{\omega = (\omega_{1.}, \omega_{2.}, \ldots) \in \Omega = \Omega'^{\infty} \mid X(\omega) = k\})$

$$= \lim_{n\to\infty} P(\{\omega = (\omega_{1.}, \ldots, \omega_{n.}) \in \Omega = \Omega'^{n} \mid X_n(\omega) = \sum_{i=1}^{n} Y_n(\omega_{i.}) = k\}), \quad Y_n \sim B(1, \lambda/n)$$

ist die Wahrscheinlichkeit, in einem festen Zeitraum der Länge t genau k Ereignisse zu beobachten, wenn die mittlere Anzahl an Ereignissen im Zeitraum t durch den Wert von λ gegeben ist und ein Erfolg zu jedem Zeitpunkt im betrachteten Zeitraum gleichwahrscheinlich ist

Durchführung von n Bernoulli-Experimenten im Zeitraum t: $p(x) = \mathbf{I}(x \in \{0,\ldots,n\}) \cdot \binom{n}{x} \cdot \left(\frac{\lambda}{n}\right)^{x} \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$





Wichtige Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen: Poisson-Verteilung Poi(λ)

$$P(\{\omega=(\omega_{1.},\omega_{2.},\ldots)\in\Omega=\Omega'^{\infty} \mid X(\omega)=k\}) = \lim_{n\to\infty} P(\{\omega=(\omega_{1.},\ldots,\omega_{n.})\in\Omega=\Omega'^{n} \mid X_n(\omega)=\sum_{i=1}^{n} Y_n(\omega_{i.})=k\}), \quad Y_n \sim B(1,\lambda/n)$$

$$\boxed{p(x)} = \lim_{n\to\infty}\left[\mathbf{I}(x\in\{0,\ldots,n\})\cdot\binom{n}{x}\cdot\left(\frac{\lambda}{n}\right)^{x}\cdot\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}\right] = \mathbf{I}(x\in\aleph\cup 0)\cdot\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n!}{x!(n-x)!}\cdot\left(\frac{\lambda}{n}\right)^{x}\cdot\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}\right]$$

$$= \mathbf{I}(x\in\aleph\cup 0)\cdot\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-x+1)}{x!}\cdot\frac{\lambda^{x}}{n^{x}}\cdot\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n}\cdot\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-x}\right]$$

$$= \mathbf{I}(x\in\aleph\cup 0)\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\lambda^{x}}{x!}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{n-k+1}{n}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-x}$$

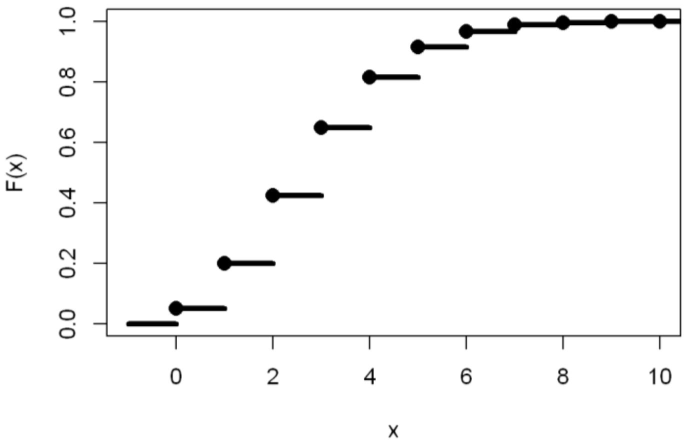
$$= \mathbf{I}(x\in\aleph\cup 0)\cdot\left(\frac{\lambda^{x}}{x!}\right)\cdot 1\cdot e^{-\lambda}\cdot 1 = \boxed{\frac{\lambda^{x}e^{-\lambda}}{x!}}$$

Wichtige Wahrscheinlichkeitsverteilungen

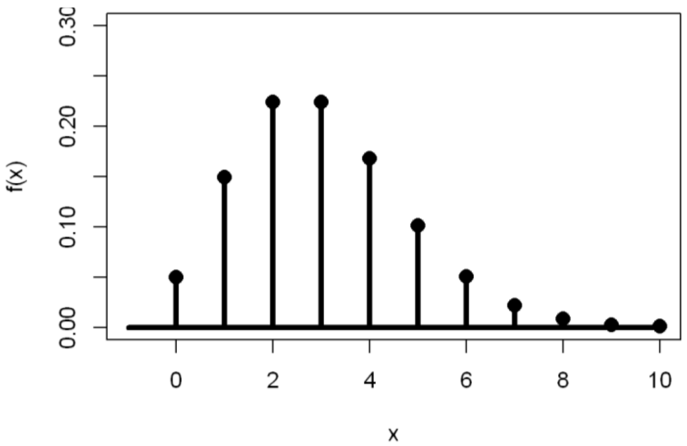
Diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Poisson-Verteilung Poi(λ) $\lambda > 0$

Verteilungsfunktion: $F(x) = e^{-\lambda} \cdot \sum_{i=0}^{n} \mathbf{I}(i \leq x) \cdot \frac{\lambda^x}{x!}$



Zähldichte : $p(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$



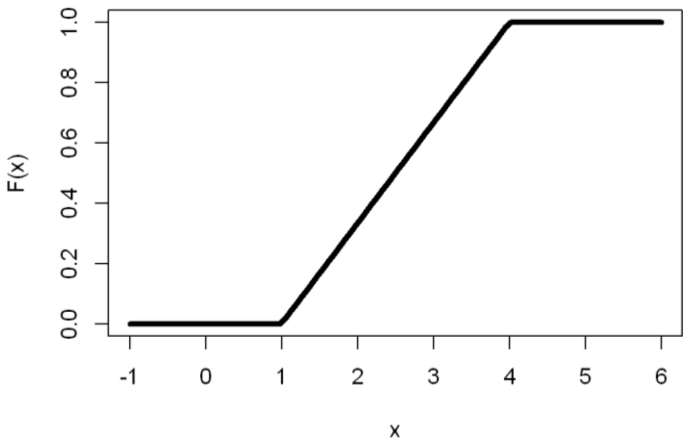
Träger: $T_X = \aleph \cup 0$

Beispiel: X = Anzahl Tore pro Bundesliga-Spieltag

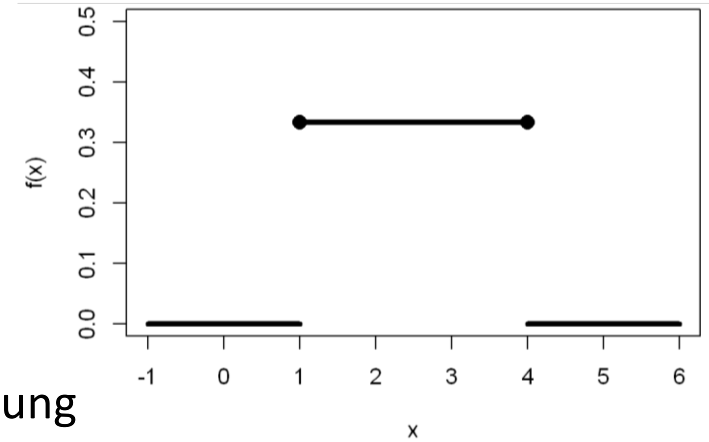
Wichtige Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Stetige Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Rechteckverteilung R(a,b) $a < b$



Verteilungsfunktion: $F(x) = \mathbf{I}(a \leq x) \cdot \frac{\min(x,b) - a}{b - a}$



Dichtefunktion: $f(x) = \frac{\mathbf{I}(a \leq x \leq b)}{b - a}$

Träger: $T_X = [a,b]$

Beispiel: $X =$ Zeitpunkt beliebiger Spielunterbrechung zwischen 10. und 20. Spielminute

Wichtige Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Stetige Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Exponentialverteilung Exp(λ) $\lambda > 0$

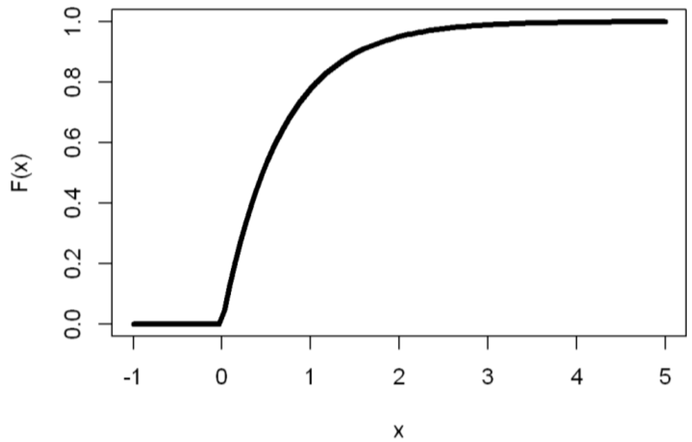
Verteilungsfunktion: $F(x) = \mathbf{I}(0 \le x) \cdot \left(1 - e^{-(\lambda \cdot x)}\right)$

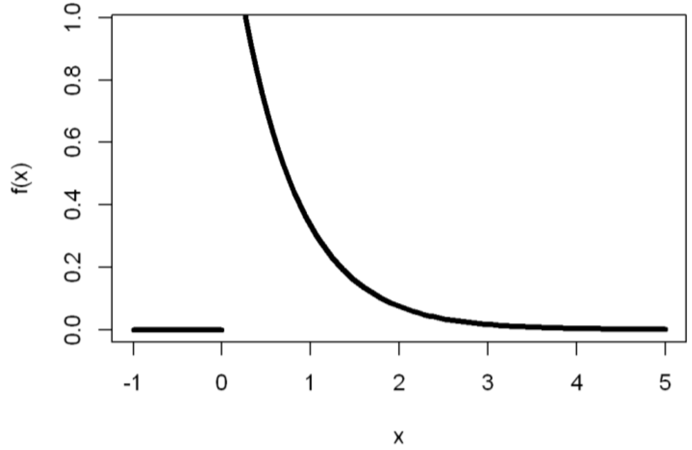
Dichtefunktion : $f(x) = \mathbf{I}(0 \le x) \cdot \lambda e^{-(\lambda \cdot x)}$

Träger: $T_X = [0,\infty)$

Beispiel:

$X =$ Zeit zwischen zwei Spielunterbrechungen





Wichtige Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Stetige Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Weibull-Verteilung W(α,β)

$P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\})$

ist die Wahrscheinlichkeit, höchstens x Zeiteinheiten auf das erste Ereignis zu warten, wenn die Hazardrate

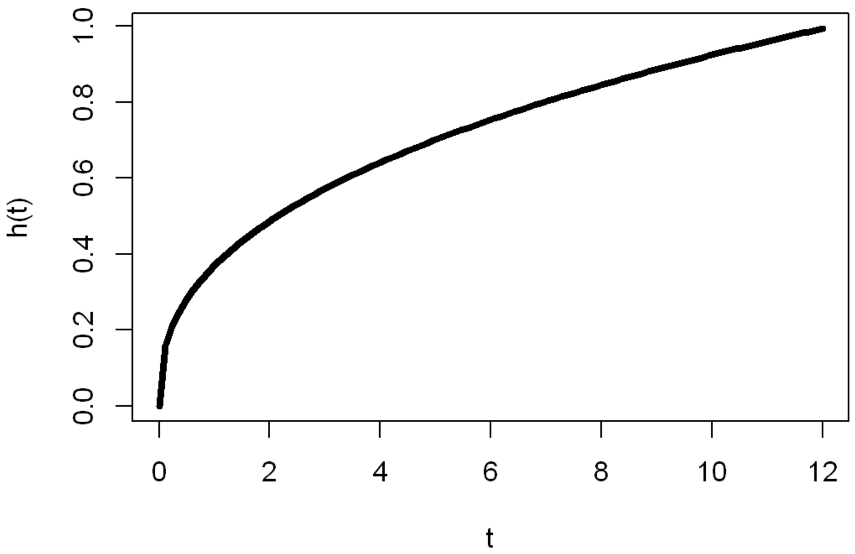
$$h(t) = \lim_{\delta t \to \infty} \frac{P(t \leq T < t + \delta t)}{\delta t}$$

durch die Funktion

$$h(t) = e^{(\nu + \rho \cdot \ln(t))}$$

$$\text{mit } \nu = \ln(\alpha) - \alpha \cdot \ln(\beta) \text{ und } \rho = \alpha - 1$$

beschrieben wird.



Wichtige Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Stetige Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Weibull-Verteilung W(α,β) $\alpha > 0,\ \beta > 0$

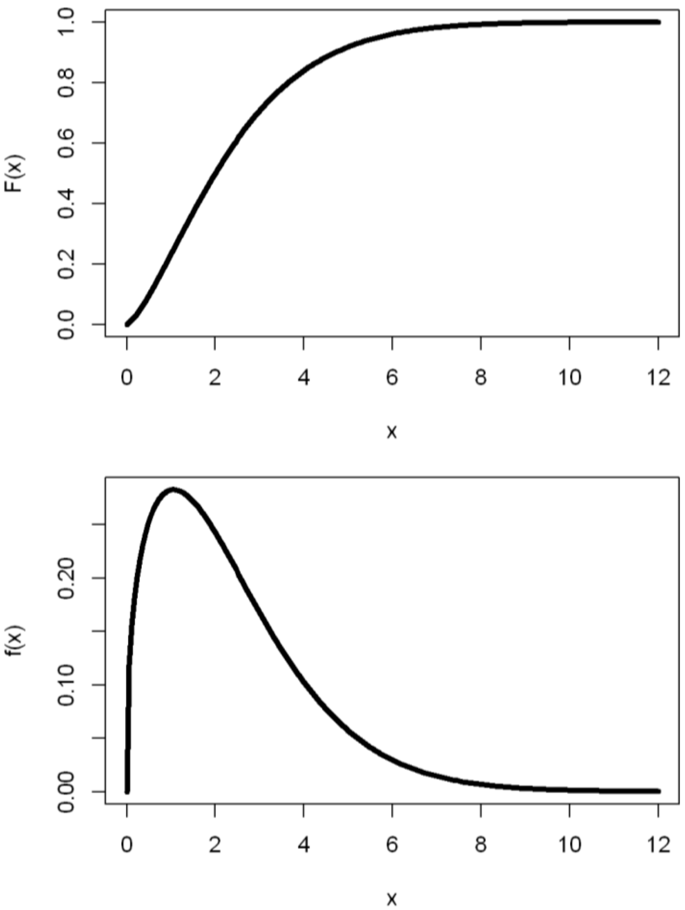
Verteilungsfunktion: $F(x) \ = \ \mathbf{I}(0 \le x) \cdot \left(1 - e^{-(x/\beta)^\alpha}\right)$

Dichtefunktion:

$$f(x) \ = \ \mathbf{I}(0 \le x) \cdot \left(\frac{\alpha}{\beta} \cdot \left[\frac{x}{\beta}\right]^{\alpha-1} e^{-(x/\beta)^\alpha} \right)$$

Träger: $T_X \ = \ [0,\infty)$

Beispiel: $X =$ Zeitpunkt des Tors zum $1-0$,
wenn das Hinspiel $0-1$ verloren wurde



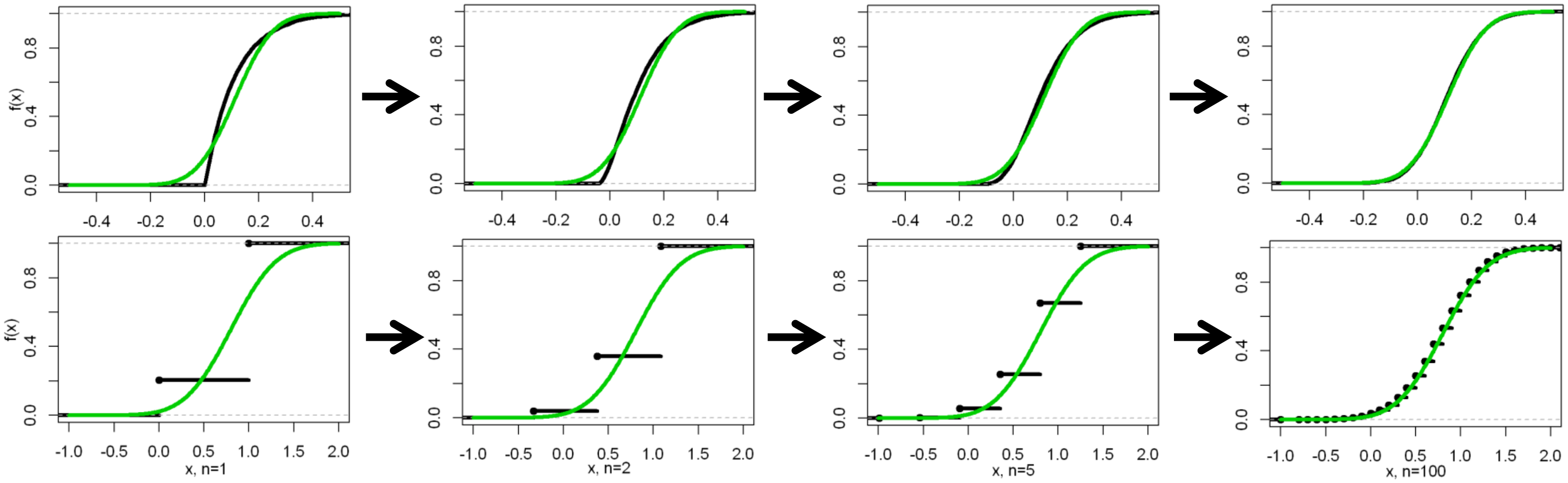
Wichtige Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Stetige Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Normalverteilung N(μ,σ²) $P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\}) =$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left\{\omega \in \Omega^n \;\middle|\; \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{Y(\omega_{i.}) - E(X)}{\sqrt{Var(X)}}\right]\right) \cdot \sqrt{Var(X) \cdot n} + E(X) \leq x\right\}\right), \quad Y \sim F_0(E(X) = \mu, Var(X) = \sigma^2)$$

ist die Grenzw'keit für unendliches n, dass der Mittelwert aus n standardisierten Zufalls-variablen, die aus der selben Verteilung stammen, den Wert $[x–E(X)]/[Var(X·n)^{0.5}]$ nicht übersteigt.

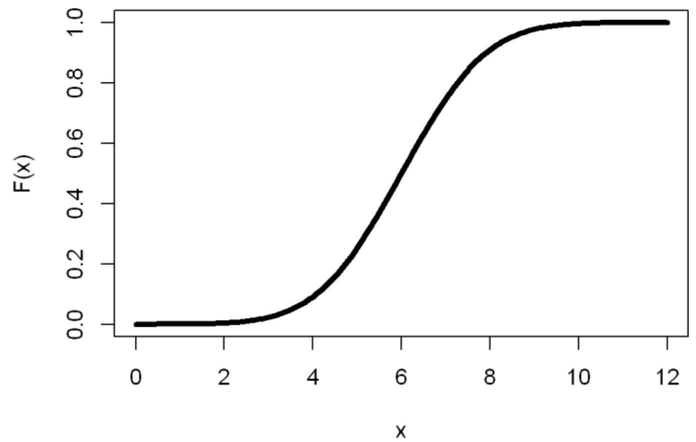


Wichtige Wahrscheinlichkeitsverteilungen

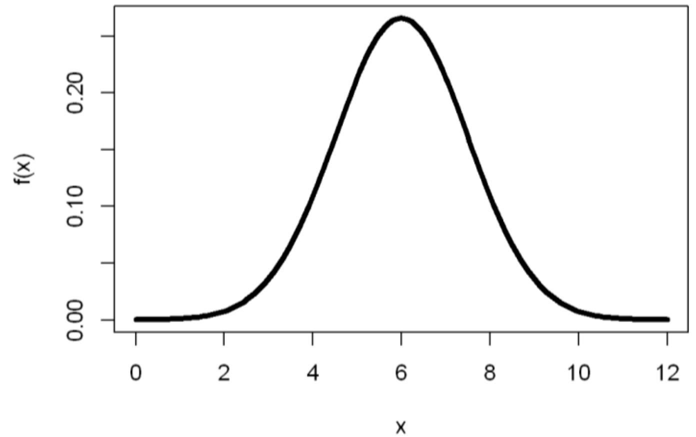
Stetige Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Normalverteilung N(μ,σ²) $\sigma > 0$

Verteilungsfunktion: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\,\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt$



Dichtefunktion : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\,\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$



Träger: $T_X = \Re$

Beispiel: $X =$ Nettospielzeit pro Bundesligaspieltag

Wichtige Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Stetige Wahrscheinlichkeitsverteilungen

χ^2-Verteilung χ_f^2 mit f Freiheitsgraden

$$P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \le x\}) = P\left(\{\omega \in \Omega'^f \mid \sum_{i=1}^{f} Y^2 \le x\}\right), \quad Y \sim N(0,1)$$

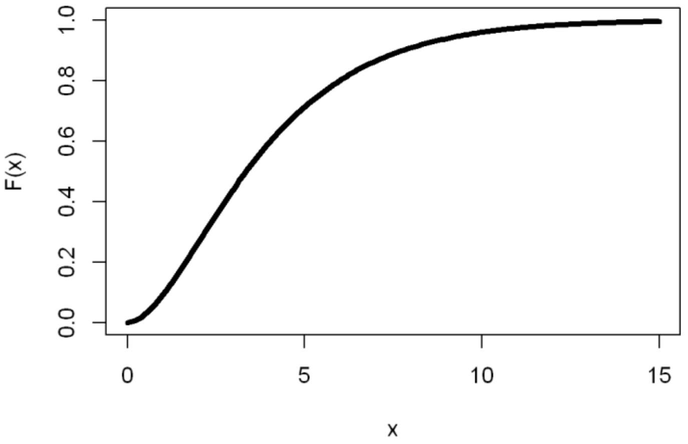
ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe von f quadrierten, standardnormalverteilten Zufallsvariablen den Wert x nicht übersteigt.

Wichtige Wahrscheinlichkeitsverteilungen

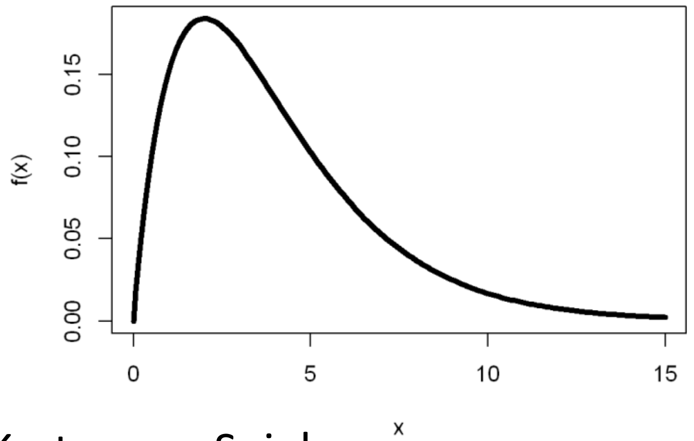
Stetige Wahrscheinlichkeitsverteilungen

χ^2-Verteilung χ_f^2 $f \in \aleph$ $\quad (=\Gamma[0.5, f/2])$

Verteilungsfunktion : $F(x) = \int_0^x \frac{1}{2^{f/2}\Gamma(f/2)} t^{f/2-1} e^{-t/2} dt$



Dichtefunktion : $f(x) = \mathbf{I}(0 < x) \cdot \frac{1}{2^{f/2}\Gamma(f/2)} x^{f/2-1} e^{-x/2}$



Träger : $T_X = [0,\infty)$

Beispiel: $X = \chi^2$ – Statistik zwischen Anzahl gelber Karten pro Spiel in Hin- und Rückrunde

Wichtige Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Stetige Wahrscheinlichkeitsverteilungen

F-Verteilung $F_{f1,f2}$ mit f_1 und f_2 Freiheitsgraden

$$P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\}) = P\left(\{\omega \in \Omega'^f \mid [Y \cdot f_2]/(Z \cdot f_1] \leq x\}\right), \quad Y \sim \chi^2_{f_1},\ Z \sim \chi^2_{f_2}$$

ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Quotient zweier durch ihre Anzahl an Freiheitsgraden dividierter χ^2-verteilter Zufallsvariablen den Wert x nicht übersteigt.

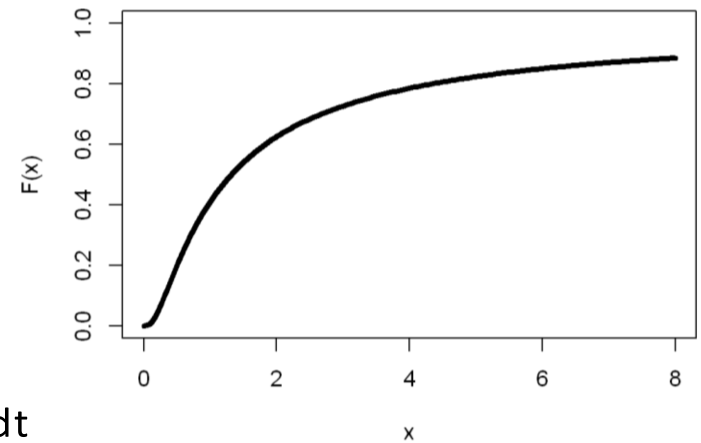
Wichtige Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Stetige Wahrscheinlichkeitsverteilungen

F-Verteilung $F_{f1,f2}$ $\quad f_1 \in \aleph,\ f_2 \in \aleph$

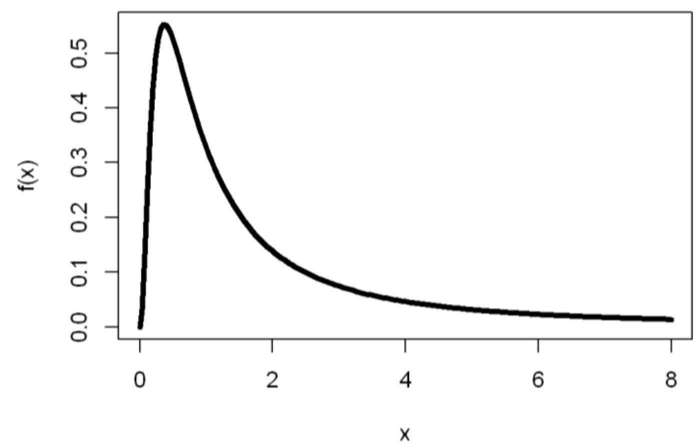
Verteilungsfunktion :

$$F(x) = \int_0^x \frac{\Gamma\left(\frac{f_1+f_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{f_1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{f_2}{2}\right)} \cdot \left(\frac{f_1}{f_2}\right)^{f_1/2} \frac{t^{f_1/2-1}}{(1+f_1 t/f_2)^{(f_1+f_2)/2}} dt$$



Dichtefunktion :

$$f(x) = \mathbf{I}(0<x) \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{f_1+f_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{f_1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{f_2}{2}\right)} \cdot \left(\frac{f_1}{f_2}\right)^{f_1/2} \frac{x^{f_1/2-1}}{(1+f_1 x/f_2)^{(f_1+f_2)/2}}$$



Träger : $\quad T_X = [0,\infty)$

Beispiel: X = Verhältnis der mittleren Varianz der Zuschauerzahlen pro Spiel an jeweils einem Spieltag zur Varianz der mittleren Zuschauerzahlen pro Spieltag

Wichtige Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Stetige Wahrscheinlichkeitsverteilungen

t-Verteilung t_f mit f Freiheitsgraden

$$P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\}) = P\left(\{\omega \in \Omega'^{(f+1)} \mid \frac{Z}{\sqrt{Y/f}} \leq x\}\right), \quad Z \sim N(0,1), \quad Y \sim \chi^2_f$$

ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Quotient einer standardnormalverteilten Zufallsvariable und der Wurzel aus einer durch die Anzahl ihrer Freiheitsgrade dividierter χ^2-verteilter Zufallsvariablen den Wert x nicht übersteigt.

Wichtige Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Stetige Wahrscheinlichkeitsverteilungen

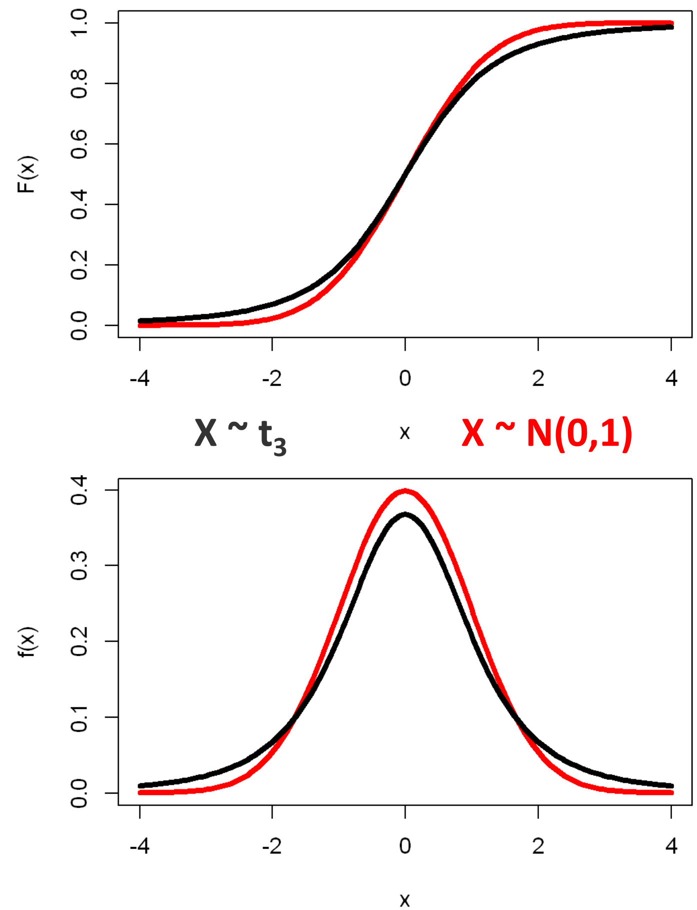
t-Verteilung t_f $\quad f \in \aleph$

Verteilungsfunktion :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{\Gamma\left(\frac{f+1}{2}\right)}{\sqrt{f\pi} \cdot \Gamma\left(\frac{f}{2}\right)} \cdot \left(1 + \frac{t^2}{f}\right)^{-(f+1)/2} dt$$

Dichtefunktion :

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{f+1}{2}\right)}{\sqrt{f\pi} \cdot \Gamma\left(\frac{f}{2}\right)} \cdot \left(1 + \frac{x^2}{f}\right)^{-(f+1)/2}$$



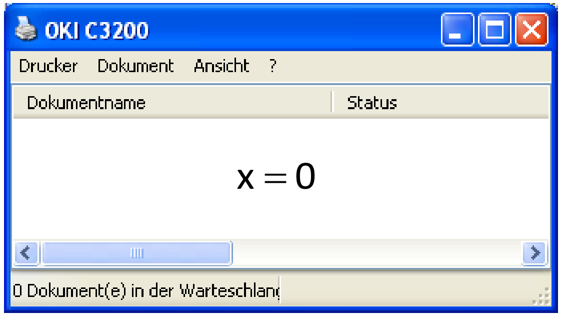
Träger : $\quad T_X = \Re$

Beispiel: $X =$ Geeignet skalierte Differenz aus mittlerer Nettospielzeit an geraden und ungeraden Spieltagen

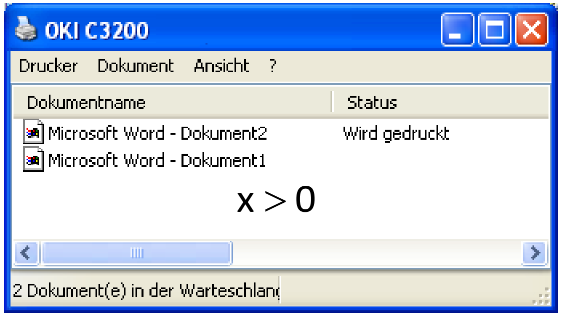
Wichtige Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Kombinationen aus diskreten und stetigen Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Beispiel **Wartezeit bis zum Start eines Druckauftrags**

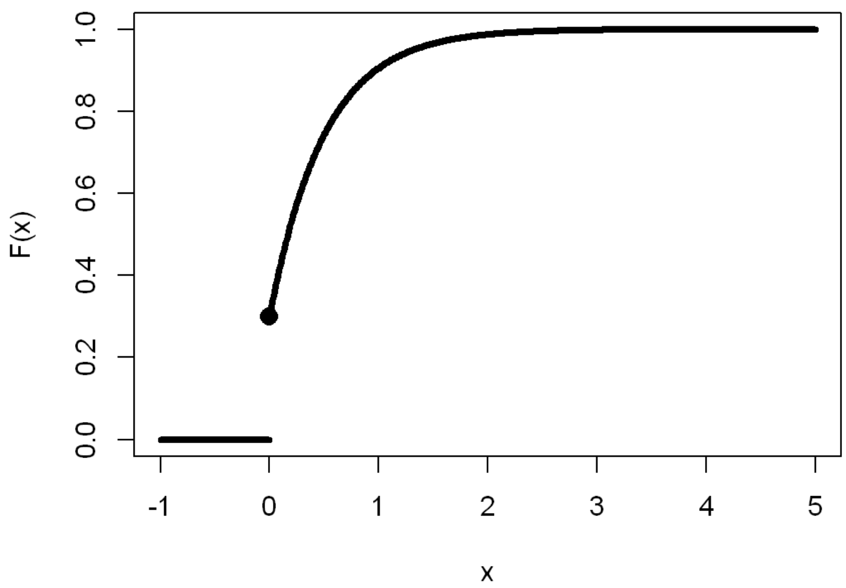


$$P(X = 0) = 1 - p$$



$$P(0 < X < x) = p - pe^{-\lambda x}$$

Verteilungsfunktion: $F(X) = \mathbf{I}(0 \le x) \cdot (1 - pe^{-\lambda x})$



Zwei- und Mehrdimensionale Wahrscheinlichkeitsverteilungen

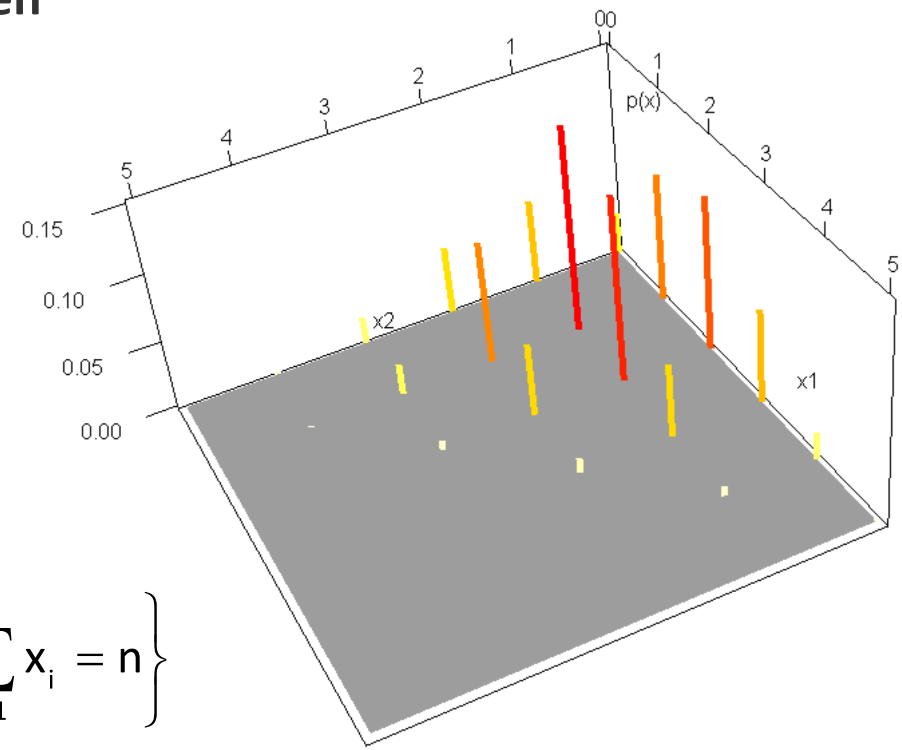
Diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Multinomialverteilung Mult($n,p_1,\dots,p_r$)

$$n \in \aleph,\quad 0 \le p_i \le 1, i = 1,\dots,r, \quad \sum_{i=1}^{r} p_i = 1$$

Zähldichte :

$$p(x_1,\dots,x_r) = \mathbf{I}(x \in T_x) \cdot \frac{n!}{\prod_{i=1}^{r} x_i!} \cdot \prod_{i=1}^{r} p_i$$



Träger: $T_x = \left\{ x = (x_1,\dots,x_r) \in \left(\aleph \cup \{0\}\right)^r \mid \sum_{i=1}^{r} x_i = n \right\}$

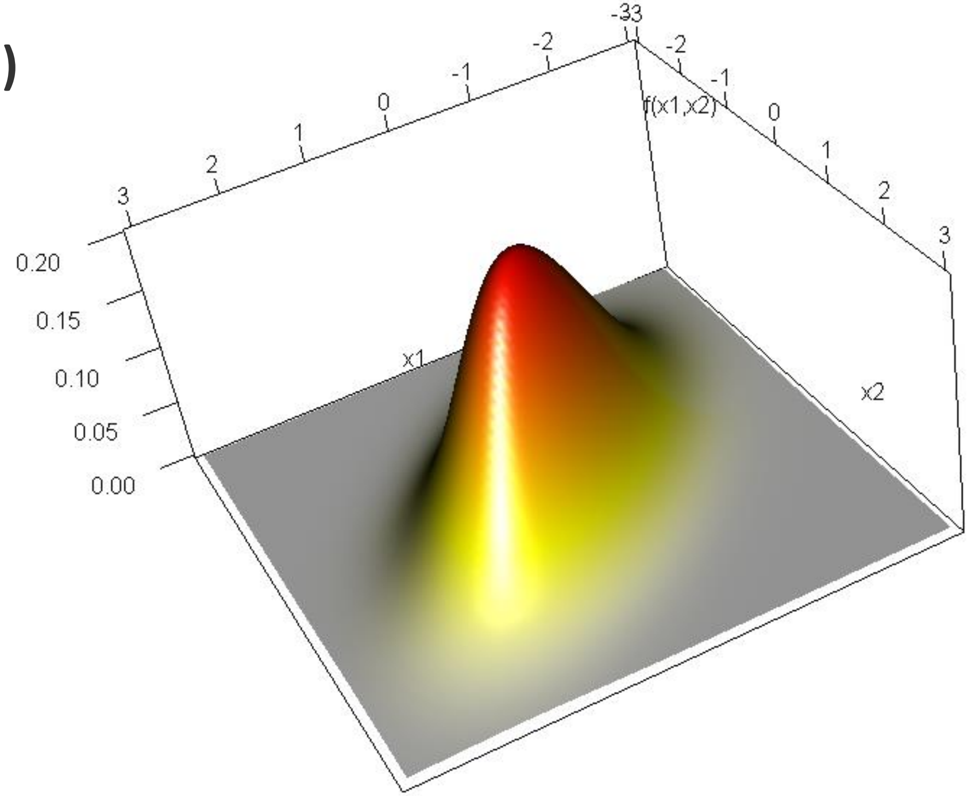
Beispiel: X = Anzahlen geschossener Tore in einer Saison
für alle Spieler im Kader

Zwei- und Mehrdimensionale Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Stetige Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Multivariate Normalverteilung N(μ,Σ)

$$\mu \in \Re^r,\ \ \Sigma \in \Re^{r \times r},\ \Sigma \text{ p.s.d.}$$



Dichtefunktion :

$$f(x_1,\ldots,x_r) = \frac{1}{(2\pi)^{k/2}\sqrt{|\Sigma|}}\, e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1}(x-\mu)}$$

Träger: $T_x \ = \ \Re^r$

Beispiel: $X =$ Zuschauerzahl, Etat
und Summe der Spielergehälter