Technische Universität Dortmund
Fakultät Statistik

Prof. Dr. Jörg Rahnenführer

Wintersemester 2017/18
16.11.2017

Übungen zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik

Übungsblatt 4

Aufgabe 10: Korrelation und lineare Regression (mit R)

Die folgende Tabelle enthält für die Jahre 2000 bis 2009 die Werte des Pro-Kopf-Verbrauch von Käse in den USA (Einheit Pund) und des Gesamtumsatzes mit Golfplätzen in den USA (in Milliarden Dollar). Die Datei *KaeseGolf.txt* auf der Homepage enthält dieselben Daten.

Jahr	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Kaese	29.8	30.1	30.5	30.6	31.3	31.7	32.6	33.1	32.7	32.8
Golf	16.7	16.9	17.5	17.3	18.5	19.4	20.5	21.2	21.0	20.3

a) Berechnen Sie den Korrelationskoeffizienten nach Bravais-Pearson zwischen den Variablen *Kaese* und *Golf*.

b) Berechnen Sie den entsprechenden Rangkorrelationskoffizienten nach Spearman. Interpretieren Sie den Zusammenhang der beiden Variablen und den Vergleich der Ergebnisse aus Teilaufgabe (a) und Teilaufgabe (b).

c) Berechnen Sie die Regressionsparameter der beiden linearen Modelle, wenn Käse durch Golf und wenn Golf durch Käse vorhergesagt wird.

Aufgabe 11: Korrelation und lineare Regression (per Hand)

Gegeben seien drei Beobachtungen eines Datensatzes mit zwei Variablen X und Y:

$$x_1 = 0,\ x_2 = 2,\ x_3 = -2, \qquad y_1 = 5,\ y_2 = 4,\ y_3 = 3.$$

Führen Sie die folgenden Rechnungen per Hand durch.

(a) Berechnen Sie für die beiden Variablen Mittelwert, Varianz und Standardabweichung.

(b) Berechnen Sie für die beiden Variablen den Korrelationskoeffizienten nach Bravais-Pearson.

(c) Berechnen Sie die Regressionsparameter des linearen Modells $y = c + d\,x$, bei dem also Y durch X vorhergesagt wird.

Aufgabe 12: Interpretation der Korrelation

Gegeben seien n Beobachtungen, für die jeweils die Werte für zwei Variablen X_1 und X_2 vorliegen. Welche der folgenden Aussagen sind richtig und welche sind falsch?

a) Wenn X_1 immer größer als X_2 ist, dann ist der Korrelationskoeffizient (Pearson) positiv.

b) Wenn die Werte von X_1 und X_2 in einem Streudiagramm abgetragen exakt auf einer Geraden liegen, genau dann ist der Betrag der Korrelationskoeffizienten (Pearson) exakt 1.

c) Die Korrelationskoeffizient (Spearman) von X_1 und $2 \cdot X_2 + 3$ ist gleich dem Korrelationskoeffizienten (Spearman) von X_1 und X_2.

d) Der Rangkorrelationskoeffizient (Spearman) ist mindestens so groß wie die Korrelationskoeffizient (Pearson).

Aufgabe 13: Wahrscheinlichkeitstheorie: Mengentheoretische Grundlagen

Ein Grundraum sei gegeben durch $\Omega = \{3,\, 3.1,\, \pi,\, 13,\, 33\}$.

a) Welche Ergebnisse gehören zu den folgenden auf Ω eingeschränkten Ereignissen?

   A: natürliche Zahlen; B: rationale Zahlen; C: Primzahlen.

b) Wie sehen jeweils die paarweisen Schnittmengen und Vereinigungen der Ereignisse A, B und C^c (Komplement von C) aus?

c) Wie sieht B\C aus und wie das Komplement von A?

d) Angenommen, für die Wahrscheinlichkeiten, mit denen die Elementarereignisse auftreten, würde gelten:

$$P(\{3.1\}) = 0.35, \quad P(\{\pi\}) = 0.05, \quad P(\{3\}) = P(\{13\}) = P(\{33\}).$$

   Berechnen Sie für alle Mengen aus den Aufgabenteilen b) und c) deren Wahrscheinlichkeiten.

Aufgabe 14: Wahrscheinlichkeitstheorie: Regeln für Wahrscheinlichkeiten

Gegeben sei ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

a) Wann gilt $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ und wann gilt $P(A \cup B) > P(A) + P(B)$?

b) Welche Wahrscheinlichkeit ist größer, $P(A \cap B)$ oder $P(A) \cdot P(B)$?

c) Warum gilt für Wahrscheinlichkeiten stets $P(A) \geq 0$ und $P(A) \leq 1$?

Besprechung der Aufgaben: Donnerstag, 30.11.2017, 18:05 Uhr in EF 50, Hörsaal 1.