Zufallsvariablen und deren Verteilungen

Erinnerung

Zufallsexperiment Datenerhebungsprozess mit nicht vorhersagbarem Ausgang

Ergebnis ω Elementarer Ausgang eines Zufallsexperiments

Grundraum Ω Menge aller möglichen Ergebnisse
$\Omega = \{\omega \mid \omega$ ist Ergebnis des Zufallsexperiments$\}$

Zufallsvariable

Eine Abbildung, die jedem Ergebnis eines Zufallsexperiments eine reelle Zahl zuordnet, wird **Zufallsvariable** genannt. Ein konkreter Wert $x = X(\omega)$ heißt **Realisation** der Zufallsvariable X.

$$X : \Omega \to \Re \qquad \omega \mapsto X(\omega)$$

Zufallsvariablen und deren Verteilungen

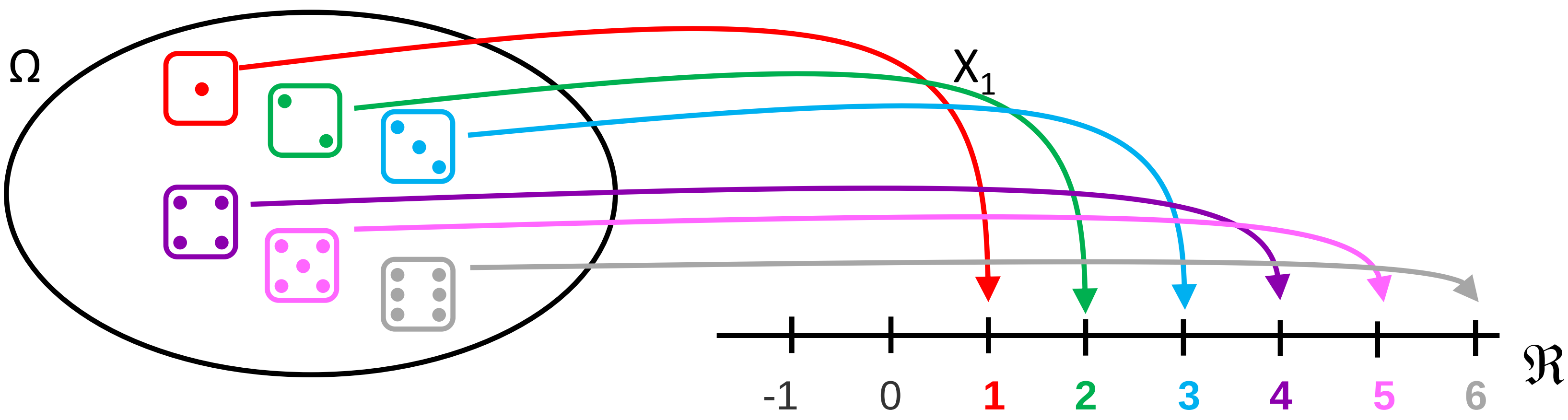
Zufallsvariable

Eine Abbildung, die jedem Ergebnis eines Zufallsexperiments eine reelle Zahl zuordnet, wird **Zufallsvariable** genannt. Ein konkreter Wert x = X(ω) heißt **Realisation** der Zufallsvariable X.

$$X:\ \Omega \rightarrow \mathfrak{R} \qquad\qquad \omega \mapsto X(\omega)$$

Beispiel Würfelwurf

Zufallsvariable Augenzahl: $X_1(\omega) = \omega$



Zufallsvariablen und deren Verteilungen

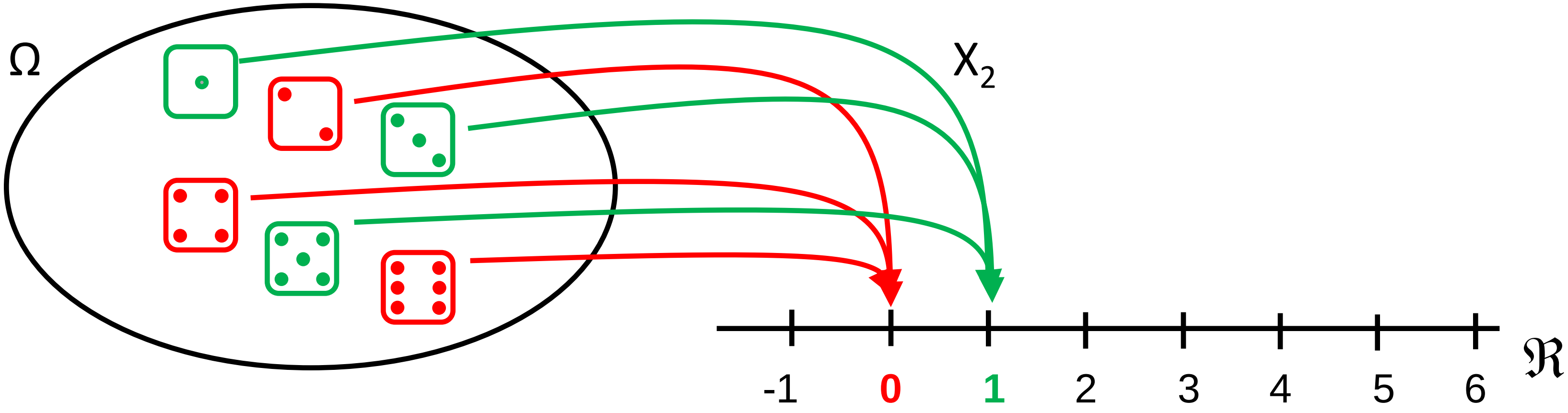
Zufallsvariable

Eine Abbildung, die jedem Ergebnis eines Zufallsexperiments eine reelle Zahl zuordnet, wird **Zufallsvariable** genannt. Ein konkreter Wert $x = X(\omega)$ heißt **Realisation** der Zufallsvariable X.

$$X : \Omega \rightarrow \Re \qquad\qquad \omega \mapsto X(\omega)$$

Beispiel Würfelwurf

Zufallsvariable Augenzahl: $X_1(\omega) = \omega$



Zufallsvariablen und deren Verteilungen

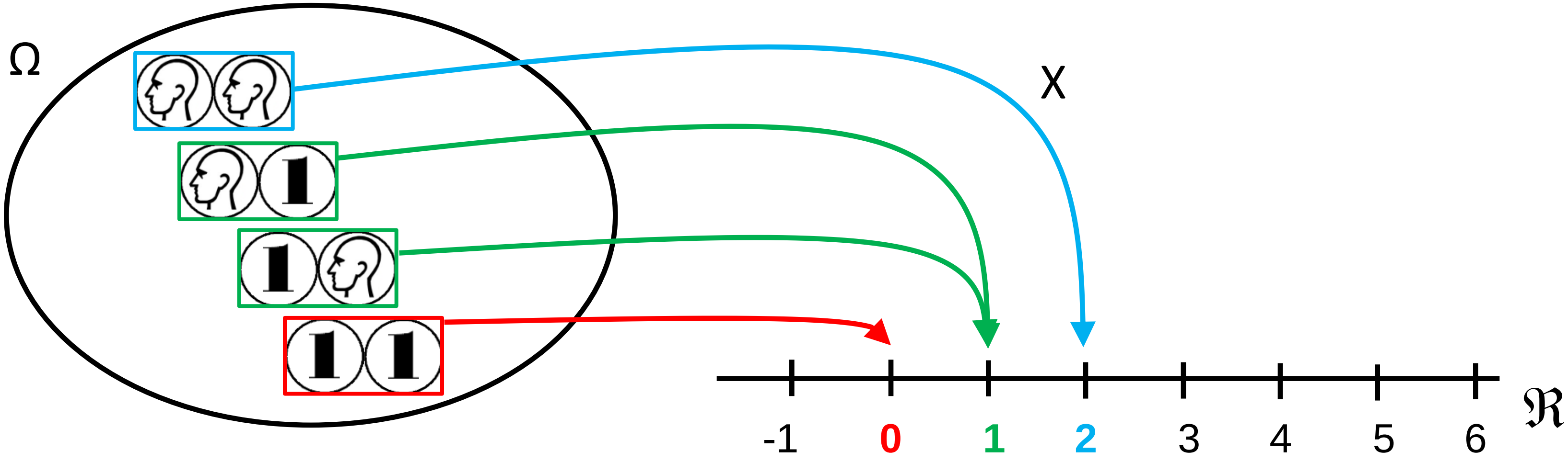
Zufallsvariable

Eine Abbildung, die jedem Ergebnis eines Zufallsexperiments eine reelle Zahl zuordnet, wird **Zufallsvariable** genannt. Ein konkreter Wert x = X(ω) heißt **Realisation** der Zufallsvariable X.

$$X : \Omega \rightarrow \Re \qquad\qquad \omega \mapsto X(\omega)$$

Beispiel zweifacher Münzwurf: $\omega_i = 1$, falls i-ter Wurf Kopf, $\omega_i = 0$, sonst

Zufallsvariable Anzahl Kopf: $X([\omega_1, \omega_2]) = \omega_1 + \omega_2$



Zufallsvariablen und deren Verteilungen

Zufallsvariable

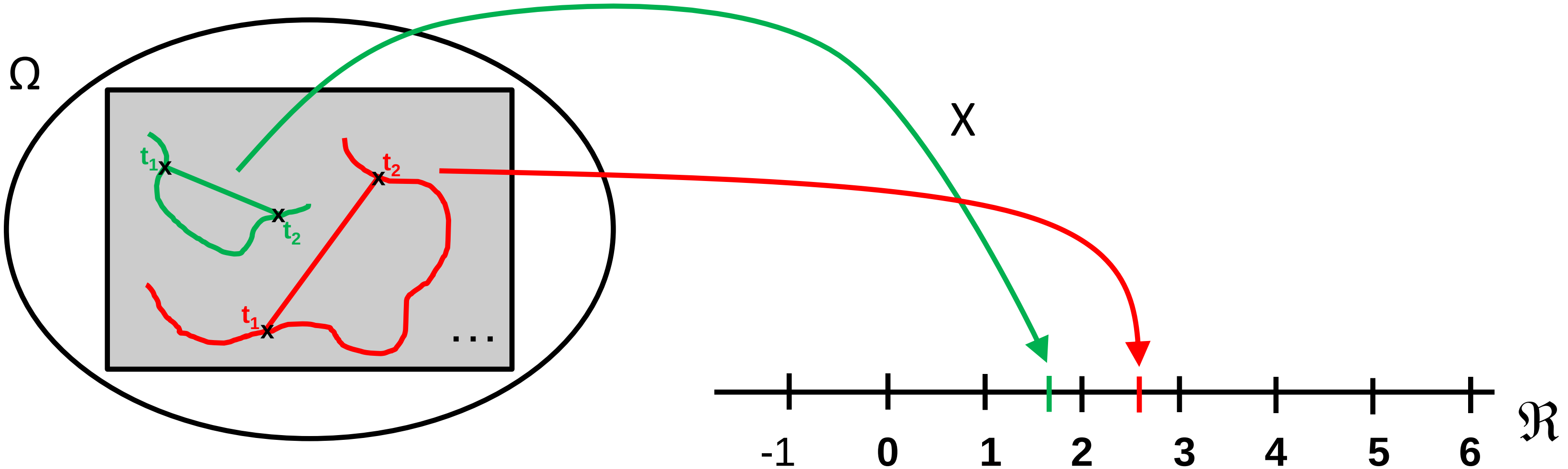
Eine Abbildung, die jedem Ergebnis eines Zufallsexperiments eine reelle Zahl zuordnet, wird **Zufallsvariable** genannt. Ein konkreter Wert x = X(ω) heißt **Realisation** der Zufallsvariable X.

$$X : \Omega \rightarrow \Re \qquad \omega \mapsto X(\omega)$$

Beispiel Mausaktivität: ω(t) = [x(t), y(t), c(t)]

ZV Distanz zwischen ersten 2 Mausclicks

$$\boxed{\begin{array}{c} X(\omega) = \sqrt{[x(t_2)-x(t_1)]^2 + [y(t_2)-y(t_1)]^2} \\ t_1 = \min(t | c(t) > 0), t_2 = \min(t | c(t) > 0, t > t_1) \end{array}}$$

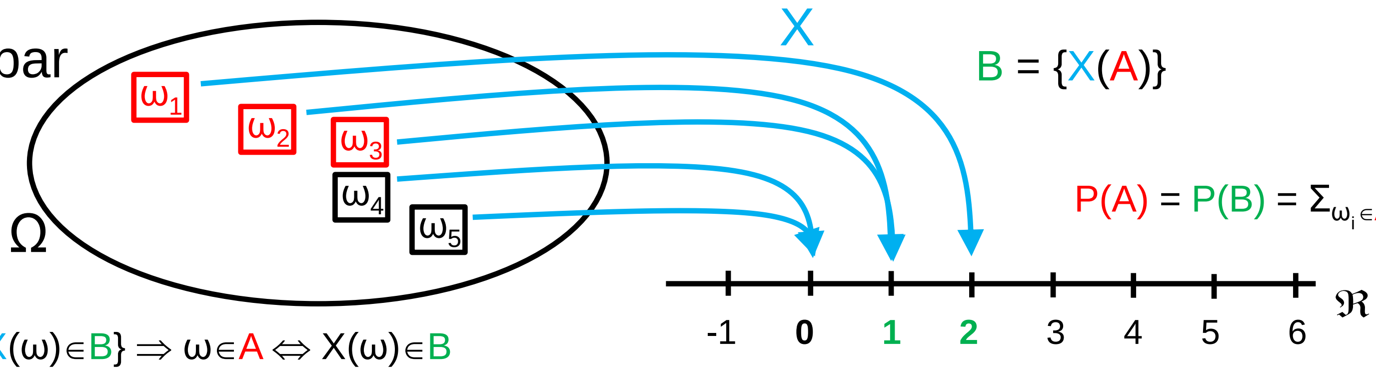


Zufallsvariablen und deren Verteilungen

Verteilung eindimensionaler Zufallsvariablen

Die durch die Zufallsvariable definierte Abbildung von beliebigem Grundraum Ω auf die reellen Zahlen erlaubt die Zuordnung von Wahrscheinlichkeiten zu Teilmengen von $\Re$.

Ω abzählbar

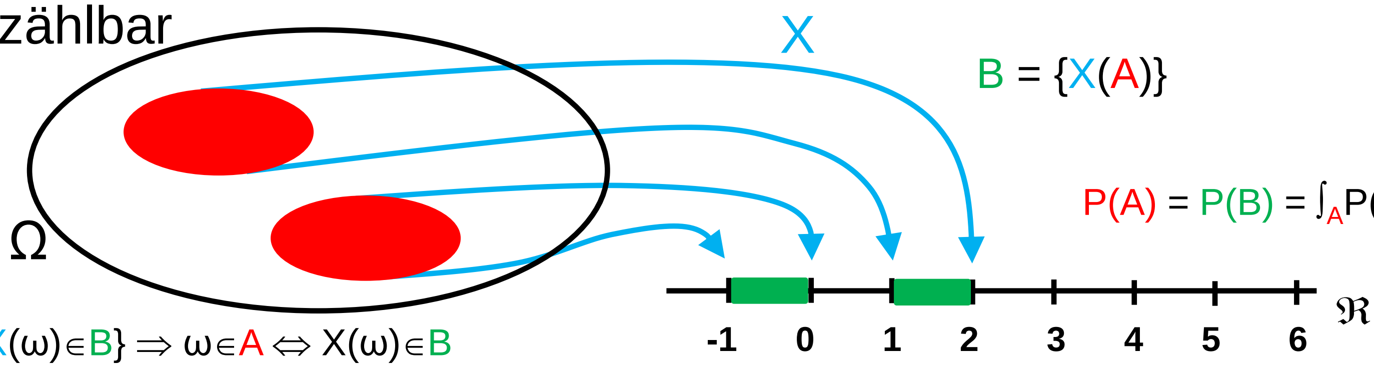


$B = \{X(A)\}$

$P(A) = P(B) = \Sigma_{\omega_i \in A} P(\{\omega_i\})$

$A = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\} \Rightarrow \omega \in A \Leftrightarrow X(\omega) \in B$

Ω überabzählbar



$B = \{X(A)\}$

$P(A) = P(B) = \int_A P(t)dt$

$A = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\} \Rightarrow \omega \in A \Leftrightarrow X(\omega) \in B$

Zufallsvariablen und deren Verteilungen

Verteilung eindimensionaler Zufallsvariablen

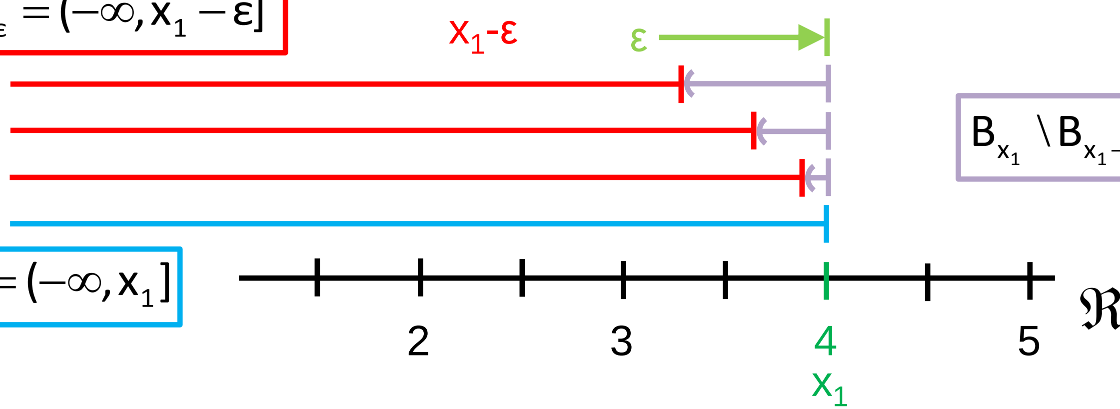
Die **Wahrscheinlichkeitsverteilung** oder kurz **Verteilung** einer Zufallsvariablen X ist definiert durch

$$P^X(B) = P(X \in B) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\}),\ B \subseteq \mathfrak{R}$$

Diese Verteilung ist eindeutig definiert, wenn $P^X(B_x)$ für jedes Intervall der Form $B_x = (-\infty, x]$ bekannt ist:

$$\boxed{B = \{x_1\}} = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} (\{B_{x_1} \setminus B_{x_1-\varepsilon}\}) \quad \Rightarrow \quad P^X(B) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} [P^X(B_{x_1}) - P^X(B_{x_1-\varepsilon})],\ \text{da}\ B_{x_1-\varepsilon} \subset B_{x_1}$$

$$\boxed{B_{x_1-\varepsilon} = (-\infty, x_1 - \varepsilon]}$$



$$\boxed{B_{x_1} \setminus B_{x_1-\varepsilon}}$$

$$\boxed{B_{x_1} = (-\infty, x_1]}$$

Zufallsvariablen und deren Verteilungen

Verteilung eindimensionaler Zufallsvariablen

Die **Wahrscheinlichkeitsverteilung** oder kurz **Verteilung** einer Zufallsvariablen X ist definiert durch

$$P^X(B) = P(X \in B) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\}),\ B \subseteq \Re$$

Diese Verteilung ist eindeutig definiert, wenn $P^X(B_x)$ für jedes Intervall der Form $B_x = (-\infty, x]$ bekannt ist:

$$\boxed{B = \{x_1\}} = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} (\{B_{x_1} \setminus B_{x_1 - \varepsilon}\}) \quad \Rightarrow \quad P^X(B) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} [P^X(B_{x_1}) - P^X(B_{x_1 - \varepsilon})],\ \text{da}\ B_{x_1 - \varepsilon} \subset B_{x_1}$$

$$x_1 \neq \ldots \neq x_k: \ \boxed{B = \{x_1, \ldots, x_k\}} = \bigcup_{i=1}^{k} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} (\{B_{x_i} \setminus B_{x_i - \varepsilon}\}) \quad \Rightarrow \quad P^X(B) = \sum_{i=1}^{k} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} [P^X(B_{x_i}) - P^X(B_{x_i - \varepsilon})]$$

Zufallsvariablen und deren Verteilungen

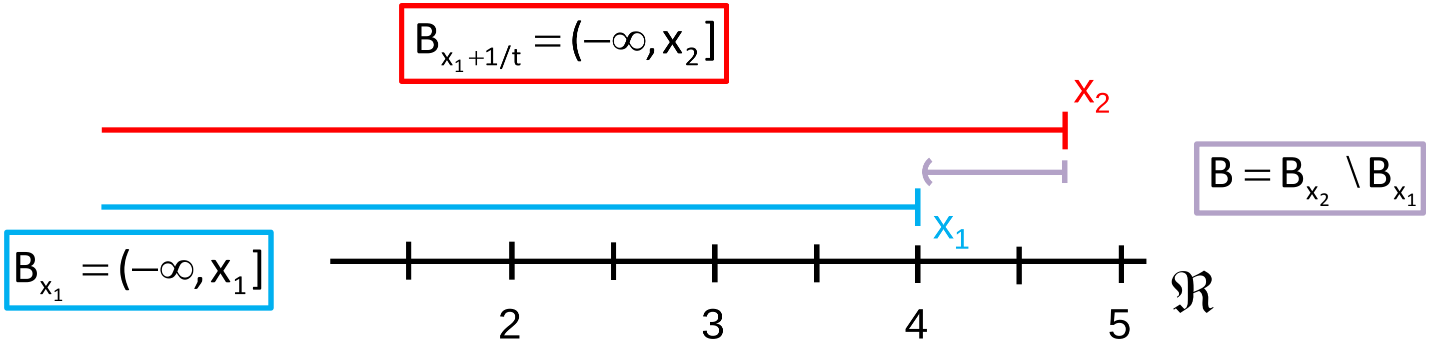
Verteilung eindimensionaler Zufallsvariablen

Die **Wahrscheinlichkeitsverteilung** oder kurz **Verteilung** einer Zufallsvariablen X ist definiert durch

$$P^X(B) = P(X \in B) = P(\{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \in B\}),\ B \subseteq \Re$$

Diese Verteilung ist eindeutig definiert, wenn $P^X(B_x)$ für jedes Intervall der Form $B_x = (-\infty, x]$ bekannt ist:

$$x_1 < x_2 \ :\ \boxed{B = (x_1, x_2]} = B_{x_2} \setminus B_{x_1} \Rightarrow P^X(B) = P^X(B_{x_2}) - P^X(B_{x_1}) \ ,\ \text{da } B_{x_1} \subset B_{x_2}$$



Zufallsvariablen und deren Verteilungen

Verteilung eindimensionaler Zufallsvariablen

Die **Wahrscheinlichkeitsverteilung** oder kurz **Verteilung** einer Zufallsvariablen X ist definiert durch

$$P^X(B) = P(X \in B) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\}),\ B \subseteq \Re$$

Diese Verteilung ist eindeutig definiert, wenn $P^X(B_x)$ für jedes Intervall der Form $B_x = (-\infty, x]$ bekannt ist:

$$\boxed{B = \{x_1\}} = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} (\{B_{x_1} \setminus B_{x_1 - \varepsilon}\}) \quad \Rightarrow \quad P^X(B) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} [P^X(B_{x_1}) - P^X(B_{x_1 - \varepsilon})],\ \text{da}\ B_{x_1 - \varepsilon} \subset B_{x_1}$$

$$x_1 \neq \ldots \neq x_k: \ \boxed{B = \{x_1, \ldots, x_k\}} = \bigcup_{i=1}^{k} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} (\{B_{x_i} \setminus B_{x_i - \varepsilon}\}) \quad \Rightarrow \quad P^X(B) = \sum_{i=1}^{k} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} [P^X(B_{x_i}) - P^X(B_{x_i - \varepsilon})]$$

$$x_1 < x_2 \ : \boxed{B = (x_1, x_2]} = B_{x_2} \setminus B_{x_1} \quad \Rightarrow \quad P^X(B) = P^X(B_{x_2}) - P^X(B_{x_1}),\ \text{da}\ B_{x_1} \subset B_{x_2}$$

...

Beliebige Ereignisse lassen sich dann aus den halboffenen Intervallen durch Schnitte und Vereinigungen konstruieren.

Zufallsvariablen und deren Verteilungen

Verteilung eindimensionaler Zufallsvariablen

Die Funktion $F = F^X : \Re \to [0,1]$ mit

$$F(x) = P^X((-\infty,x]) = P(X \leq x) = P(\{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \leq x\}),\ \ x \in \Re,$$

wird **Verteilungsfunktion** von X genannt.

Die Entsprechung der Verteilungsfunktion in der deskriptiven Statistik ist die empirische Verteilungsfunktion, bei der an die Stelle von Wahrscheinlichkeiten kumulierte relative Häufigkeiten treten.

$$F_N(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad x < x(1) \\ s_j = \dfrac{\#\{x_n | x_n \leq x(j)\}}{N} \quad \text{mit } j = \max\{\tilde{j} | x(\tilde{j}) \leq x\} & \text{falls} \quad x(1) \leq x \end{cases}$$

$$= \frac{\#\{x_n \,|\, x_n \leq x\}}{N}$$

Zufallsvariablen und deren Verteilungen

Verteilung eindimensionaler Zufallsvariablen

$F = F^X : \Re \to [0,1]$ mit $F(x) = P^X((-\infty,x]) = P(X \le x) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \le x\}),\ x \in \Re,$

Eigenschaften der Verteilungsfunktion

$$\boxed{\text{(A)} \quad \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \ , \quad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1}$$

Beweis

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = \lim_{x \to -\infty} P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in (-\infty, x] \cap \Re\}) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in \{-\infty\} \cap \Re\})$$

$$= P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = \varnothing\}) \underset{*}{=} P(\varnothing) = 0$$

$$* \ \left[\omega \in \Omega \ \Rightarrow \ X(\omega) \in \Re\right] \ \Leftrightarrow \ \left[X(\omega) \notin \Re \Rightarrow \omega \notin \Omega\right]$$

$$\lim_{x \to \infty} F(x) = \lim_{x \to \infty} P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in (-\infty, x] \cap \Re\}) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in \Re\}) = P(\Omega) = 1$$

□

Zufallsvariablen und deren Verteilungen

Verteilung eindimensionaler Zufallsvariablen

$F = F^X : \Re \to [0,1]$ mit $F(x) = P^X((-\infty,x]) = P(X \leq x) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\}), \; x \in \Re,$

Eigenschaften der Verteilungsfunktion

(A) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \; , \; \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$

$\boxed{\text{(B) } x < y \;\Rightarrow\; F(x) \leq F(y)}$

$$F(x) = P(A) \text{ mit } A = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\}$$
$$F(y) = P(B) \text{ mit } B = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq y\}$$

$$\boxed{x < y \Rightarrow} \; A \subseteq B \;\Rightarrow\; P(A) \leq P(B) \;\Leftrightarrow\; \boxed{F(x) \leq F(y)}$$

$\square$

Zufallsvariablen und deren Verteilungen

Verteilung eindimensionaler Zufallsvariablen

$F = F^X : \Re \to [0,1]$ mit $F(x) = P^X((-\infty,x]) = P(X \le x) = P(\{\omega\in\Omega \mid X(\omega) \le x\}),\ x\in\Re,$

Eigenschaften der Verteilungsfunktion

(A) $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0\ ,\quad \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$

$\boxed{\text{(C)}\quad \lim_{x\downarrow z} F(x) = F(z)}$

(B) $x < y \;\Rightarrow\; F(x) \le F(y)$

Beweis: Setze $A_n = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in (-\infty, z + 1/n]\},\ A_0 = \Omega$

$$\Rightarrow\quad A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in (-\infty, z]\},\ \ A_n \subset A_{n-1},\ A_{n-1}^C \subset A_n^C\ ,\ n = 1,2,\ldots$$

$$\boxed{F(z)} = P(A) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1 - P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^C\right) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n^C \setminus A_{n-1}^C)$$

$$= 1 - \lim_{N\uparrow\infty} \sum_{n=1}^{N} P(A_n^C \setminus A_{n-1}^C) = 1 - \lim_{N\uparrow\infty} P(A_N^C) = \lim_{N\uparrow\infty} P(A_N) = \boxed{\lim_{x\downarrow z} F(x)} \qquad \square$$

Zufallsvariablen und deren Verteilungen

Verteilung eindimensionaler Zufallsvariablen

$F = F^X : \Re \to [0,1]$ mit $F(x) = P^X((-\infty,x]) = P(X \leq x) = P(\{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \leq x\}),\ x \in \Re,$

Eigenschaften der Verteilungsfunktion

(A) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0\ ,\quad \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$

(B) $x < y \ \Rightarrow\ F(x) \leq F(y)$

(C) $\lim\limits_{x \downarrow z} F(x) = F(z)$

(D) $\boxed{P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)}$

Beweis: Setze $A = \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \in (-\infty, a]\}$ und $B = \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \in (-\infty, b]\}$

$$\Rightarrow \boxed{P(a < X \leq b)} = P(\{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \in (a,b]\}) = P(B \setminus A) \underset{A \subseteq B}{=} P(B) - P(A)$$

$$= P(X \leq b) - P(X \leq a) = \boxed{F(b) - F(a)}$$

$\square$

Zufallsvariablen und deren Verteilungen

Verteilung eindimensionaler Zufallsvariablen

$F = F^X : \Re \to [0,1]$ mit $F(x) = P^X((-\infty,x]) = P(X \leq x) = P(\{\omega\in\Omega \,|\, X(\omega) \leq x\}),\ x\in\Re,$

Eigenschaften der Verteilungsfunktion

(A) $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0\ ,\quad \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$

(B) $x < y \ \Rightarrow\ F(x) \leq F(y)$

(C) $\lim\limits_{x\downarrow z} F(x) = F(z)$

(D) $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$

(E) $\boxed{P(X > a) = 1 - F(a)}$

Beweis

Setze $A = \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \leq a\} \Rightarrow A^C = \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) > a\}$

$\Rightarrow \boxed{P(X > a)} = P(A^C) = 1 - P(A) = \boxed{1 - F(a)}$ $\square$

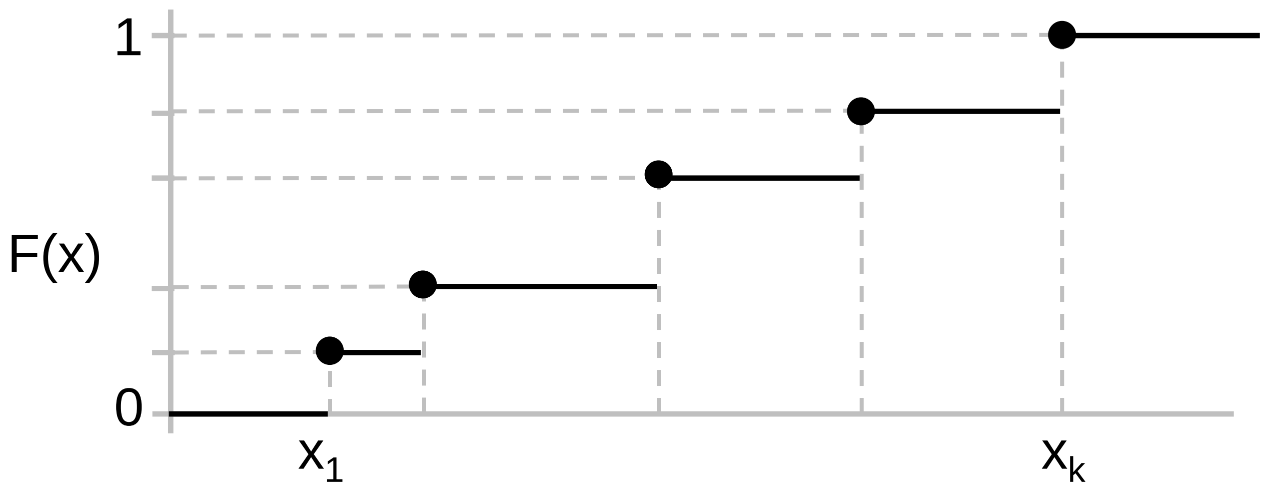
Zufallsvariablen und deren Verteilungen

Verteilung eindimensionaler Zufallsvariablen

Spezialfall diskrete Verteilungsfunktion (Ω abzählbar)

$$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\} \Rightarrow X \in \{x_1, \dots, x_k\} \text{ mit } -\infty < x_1 < \dots < x_k < \infty, k \leq n$$

$F = F^X : \mathfrak{R} \to [0,1]$ mit $F(x) = P^X((-\infty, x]) = P(X \leq x) = P(\{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \leq x\}), \; x \in \mathfrak{R}$



Zufallsvariablen und deren Verteilungen

Verteilung eindimensionaler Zufallsvariablen

Spezialfall diskrete Verteilungsfunktion (Ω abzählbar)

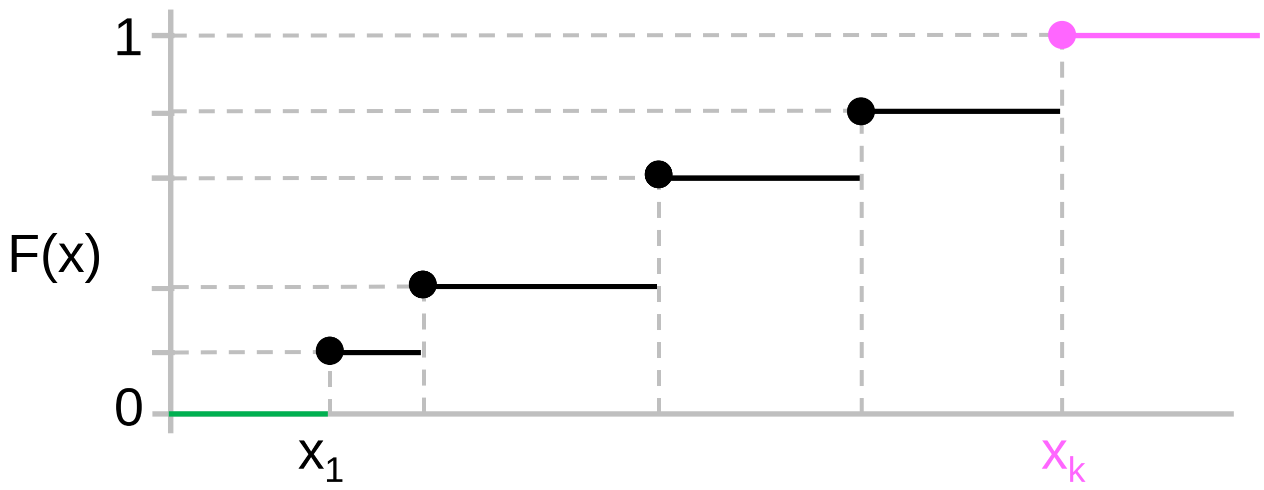
$$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\} \Rightarrow X \in \{x_1, \dots, x_k\} \text{ mit } -\infty < x_1 < \dots < x_k < \infty, k \leq n$$

$$\boxed{\text{(A)} \quad \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \,, \quad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1}$$

$$F(x) = P(A_x) \text{ mit } A_x = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in (-\infty, x] \cap \{x_1, \dots, x_k\}\}$$

$$\boxed{x < x_1 \Rightarrow A_x = \varnothing \Rightarrow P(A_x) = 0}$$

$$\boxed{x \geq x_k \Rightarrow A_x = \Omega \Rightarrow P(A_x) = 1}$$



Zufallsvariablen und deren Verteilungen

Verteilung eindimensionaler Zufallsvariablen

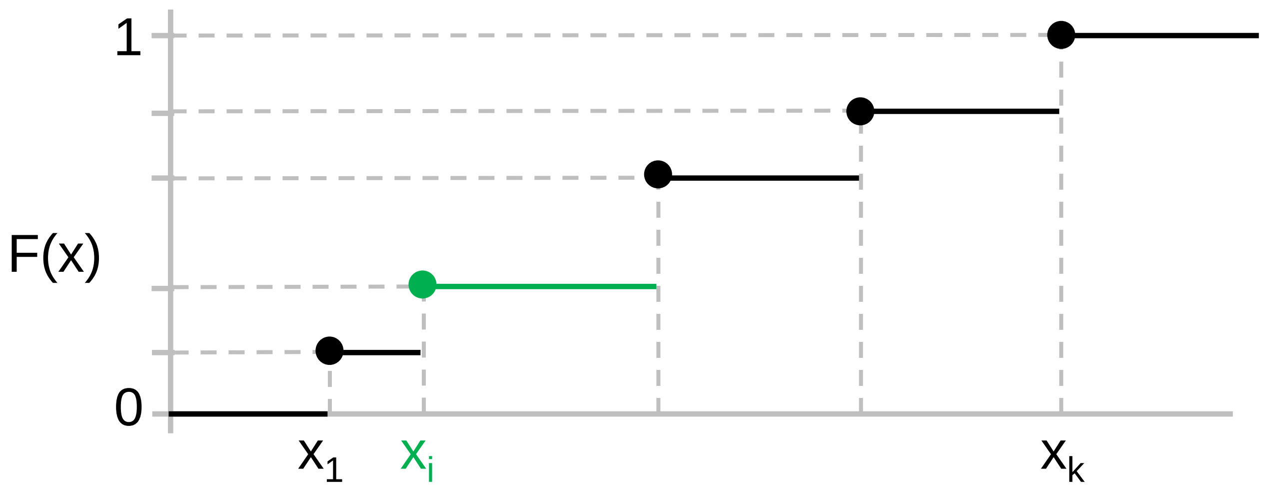
Spezialfall diskrete Verteilungsfunktion (Ω abzählbar)

$$\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\} \Rightarrow X \in \{x_1, \ldots, x_k\} \text{ mit } -\infty < x_1 < \ldots < x_k < \infty, k \leq n$$

$$F(x) = P(A_x) \text{ mit } A_x = \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \in (-\infty, x] \cap \{x_1, \ldots, x_k\}\}$$

$$\boxed{\text{(C)} \quad \lim_{x \downarrow z} F(x) = F(z)}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} i = 1, \ldots, n-1: \; x_i \leq x < x_{i+1} \Rightarrow A_x = \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \in \{x_1, \ldots, x_i\}\} \\ \qquad \Rightarrow P(A_x) = F(x_i) \end{array}}$$



Zufallsvariablen und deren Verteilungen

Verteilung eindimensionaler Zufallsvariablen

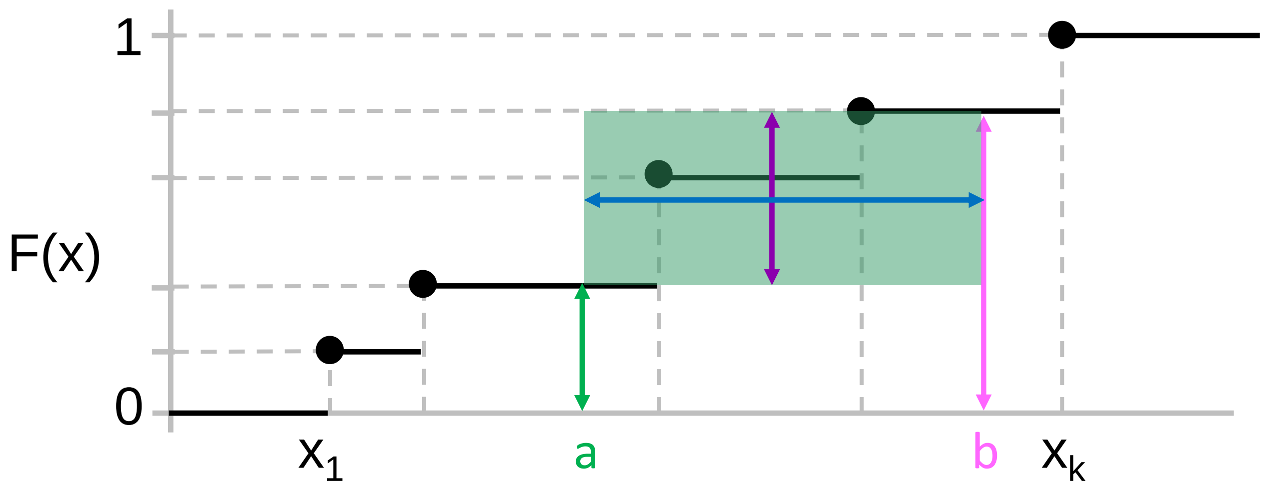
Spezialfall diskrete Verteilungsfunktion (Ω abzählbar)

$$\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\} \Rightarrow X \in \{x_1, \ldots, x_k\} \text{ mit } -\infty < x_1 < \ldots < x_k < \infty, k \le n$$

$$\boxed{\text{(D)}\ \ P(a < X \le b) = F(b) - F(a)}$$

$$A_b \setminus A_a = \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \in \{x_1, \ldots, x_k\}, a < X(\omega) \le b\}$$

$$\boxed{P(\boxed{a < X \le b})} = P(A_b \setminus A_a) = F(b) - F(a)$$



Zufallsvariablen und deren Verteilungen

Verteilung eindimensionaler Zufallsvariablen

Spezialfall diskrete Verteilungsfunktion (Ω abzählbar)

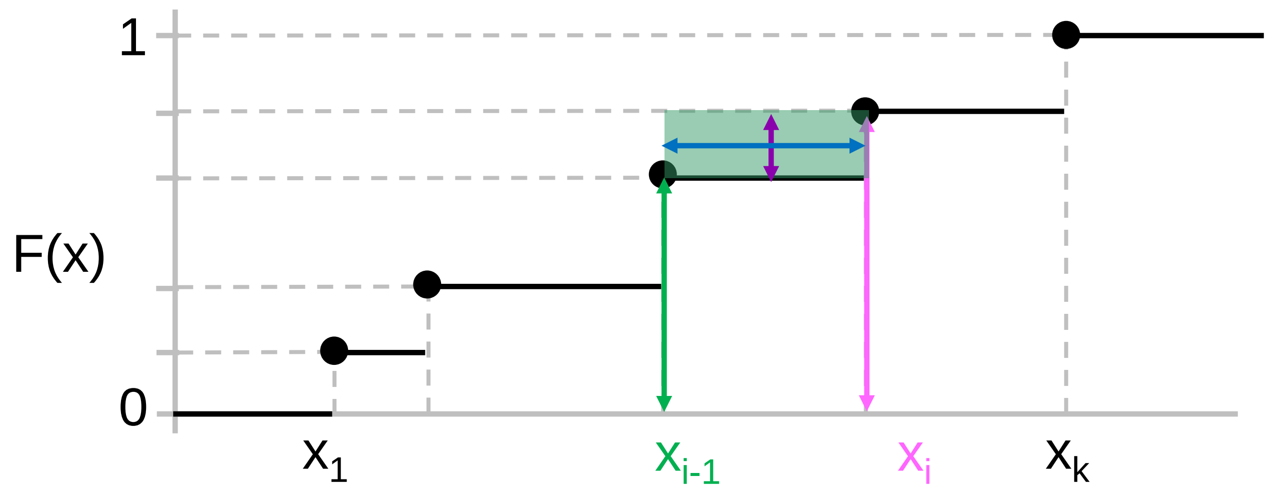
$$\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\} \Rightarrow X \in \{x_1, \ldots, x_k\} \text{ mit } -\infty < x_1 < \ldots < x_k < \infty, k \le n$$

$$\boxed{(D)\ \ i = 1, \ldots, n:\ P(x_{i-1} < X \le x_i)}$$

$$(x_0 = -\infty)$$

$$A_{x_i} \setminus A_{x_{i-1}} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in \{x_i\}\}$$

$$\boxed{P(\boxed{x_{i-1} < X \le x_i})} = P(A_{x_i} \setminus A_{x_{i-1}}) = P(X = x_i) = p_i$$



Zufallsvariablen und deren Verteilungen

Verteilung eindimensionaler Zufallsvariablen

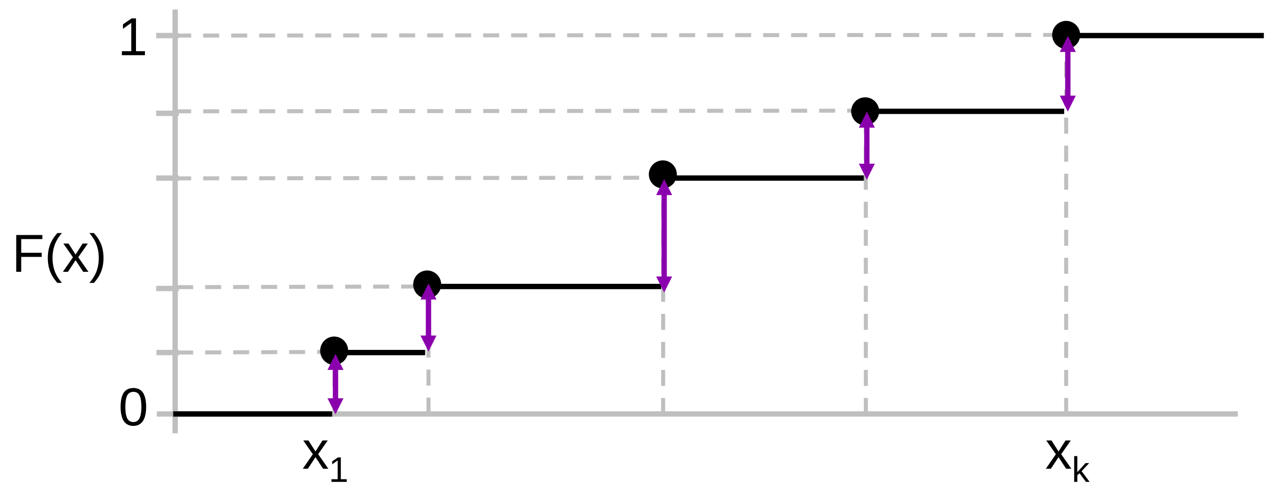
Spezialfall diskrete Verteilungsfunktion (Ω abzählbar)

$$\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\} \Rightarrow X \in \{x_1, \ldots, x_k\} \text{ mit } -\infty < x_1 < \ldots < x_k < \infty, k \leq n$$

$$\boxed{\text{(D)} \quad i = 1, \ldots, n: \; P(x_{i-1} < X \leq x_i)}$$

$$A_{x_i} \setminus A_{x_{i-1}} = \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \in \{x_i\}\}$$

$$(x_0 = -\infty) \qquad P(x_{i-1} < X \leq x_i) = P(A_{x_i} \setminus A_{x_{i-1}}) = P(X = x_i) = \boxed{p(x_i)}$$



Zufallsvariablen und deren Verteilungen

Verteilung eindimensionaler Zufallsvariablen

Spezialfall diskrete Verteilungsfunktion (Ω abzählbar)

$$\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\} \Rightarrow X \in \{x_1, \ldots, x_k\} \text{ mit } -\infty < x_1 < \ldots < x_k < \infty, k \leq n$$

Die Funktion p: $\mathfrak{R} \rightarrow [0,1]$ mit p(x) = P(X = x) heißt **Zähldichte von X**

Zufallsvariablen und deren Verteilungen

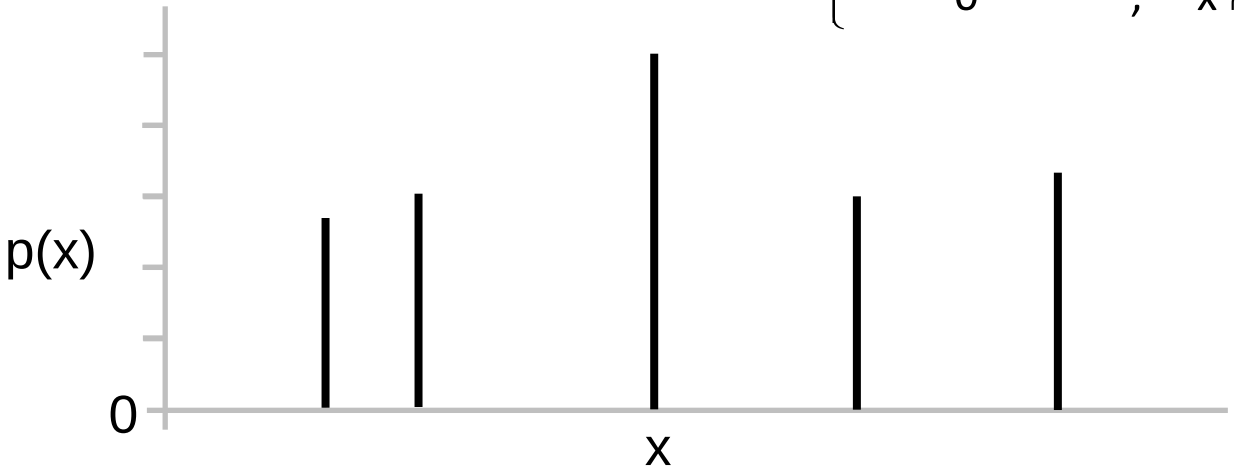
Verteilung eindimensionaler Zufallsvariablen

Spezialfall diskrete Verteilungsfunktion (Ω abzählbar)

$$\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\} \Rightarrow X \in \{x_1, \ldots, x_k\} \text{ mit } -\infty < x_1 < \ldots < x_k < \infty, k \leq n$$

Die Funktion p: $\Re \to [0,1]$ mit p(x) = P(X = x) heißt **Zähldichte von X**

$$p(x) = \begin{cases} F(x_i) - F(x_{i-1}) & , \quad x \cap \{x_1, \ldots, x_k\} = \{x_i\} \\ 0 & , \quad x \cap \{x_1, \ldots, x_k\} = \emptyset \end{cases}$$

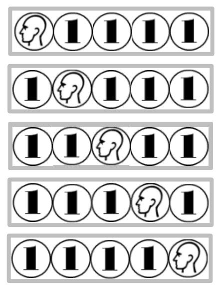
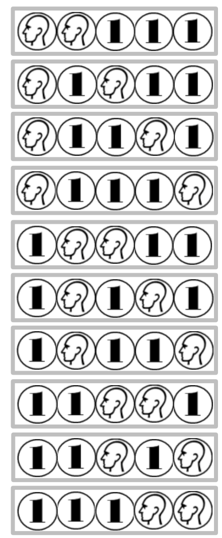
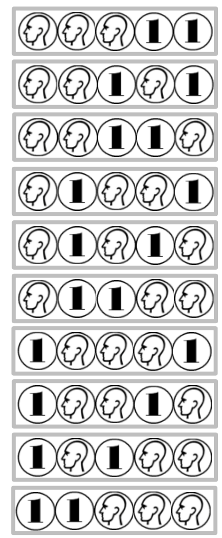
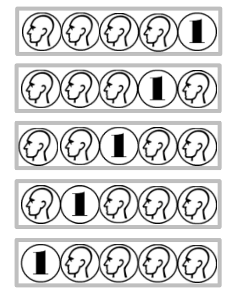


Zufallsvariablen und deren Verteilungen

Verteilung eindimensionaler Zufallsvariablen, diskrete Verteilungsfunktion

Beispiel: Anzahl Kopf beim **5-fachen Münzwurf**

Zähldichte

x	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
$A_x = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}$						
$p(x)=P(X=x)$ $=\lvert A_x\rvert/\lvert\Omega\rvert$	1/32	5/32	10/32	10/32	5/32	1/32

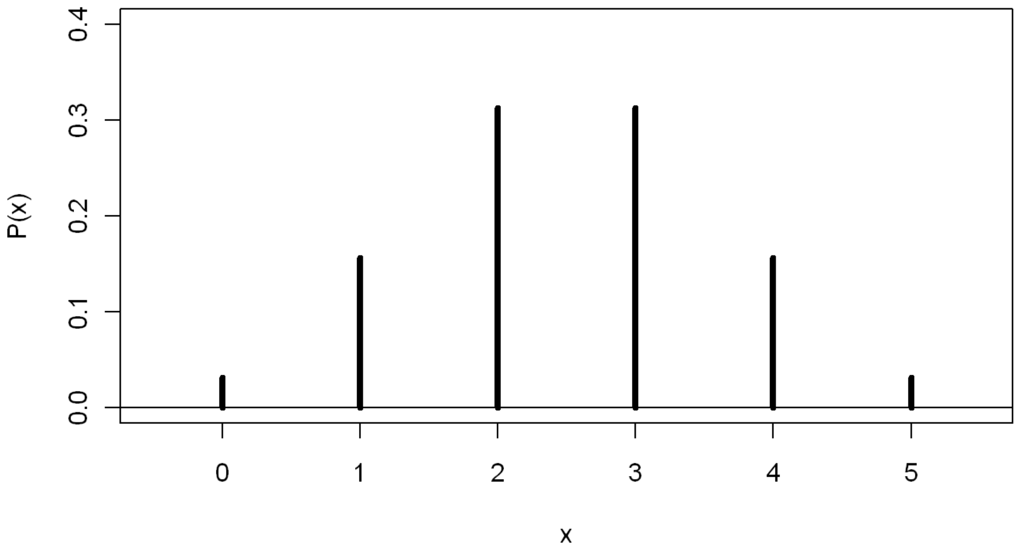
Zufallsvariablen und deren Verteilungen

Verteilung eindimensionaler Zufallsvariablen, diskrete Verteilungsfunktion

Beispiel: Anzahl Kopf beim **5-fachen Münzwurf**

Zähldichte

x	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
p(x)=P(X=x)	1/32	5/32	10/32	10/32	5/32	1/32



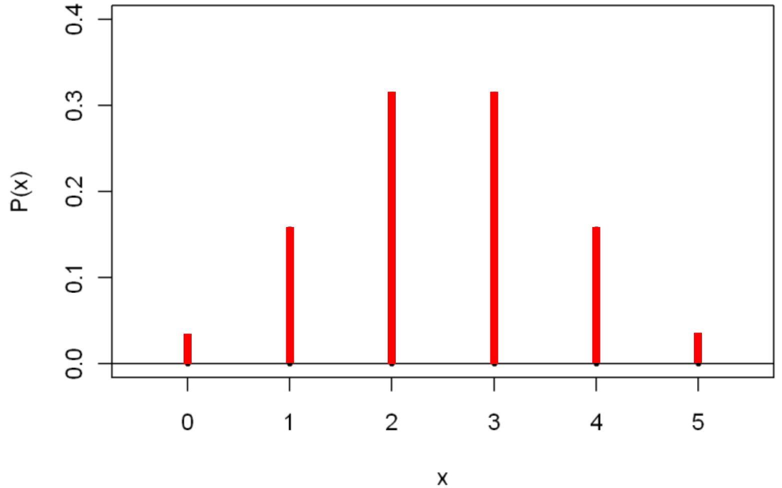
Zufallsvariablen und deren Verteilungen

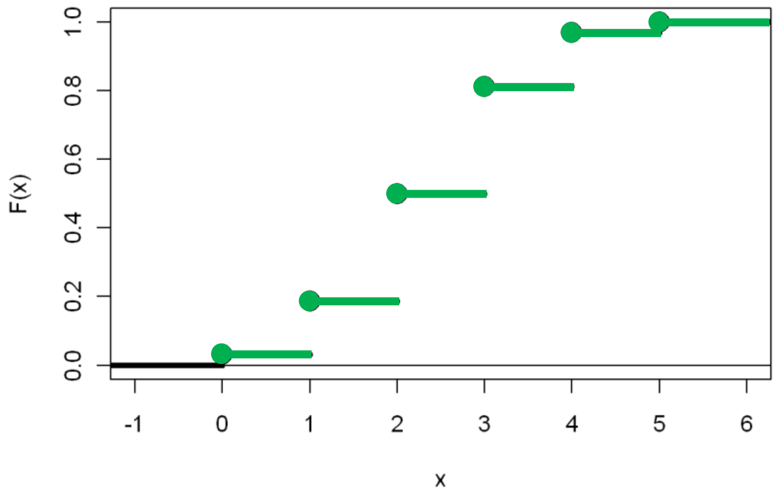
Verteilung eindimensionaler Zufallsvariablen, diskrete Verteilungsfunktion

Beispiel: Anzahl Kopf beim **5-fachen Münzwurf**

Zähldichte und Verteilungsfunktion

x	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
p(x)=P(X=x)	1/32	5/32	10/32	10/32	5/32	1/32
$F(x)=P(X\leq x)=\sum_{i=0}^{x} p(i)$	1/32	6/32	16/32	26/32	31/32	32/32





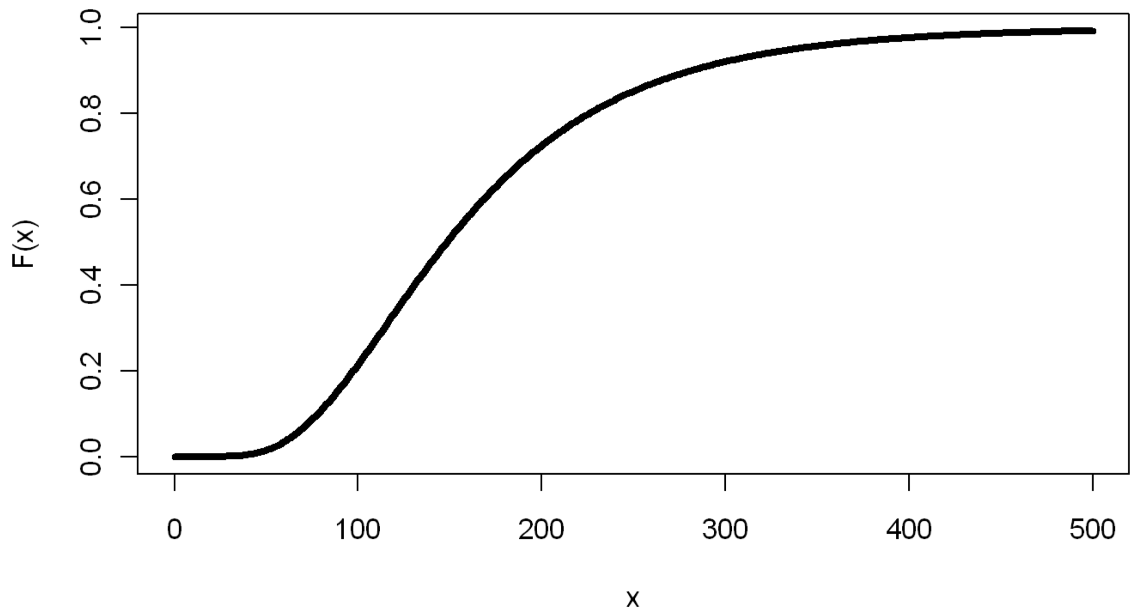
Zufallsvariablen und deren Verteilungen

Verteilung eindimensionaler Zufallsvariablen

Spezialfall stetige Verteilungsfunktion (Ω überabzählbar)

$$\omega \in \Omega: \; X(\omega) \in B, \; B \subseteq \mathfrak{R}$$

$$F = F^X : \mathfrak{R} \to [0,1] \;\; \text{mit} \;\; F(x) = P^X((-\infty, x]) = P(X \le x) = P(\{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \le x\}), \;\; x \in \mathfrak{R}$$



Zufallsvariablen und deren Verteilungen

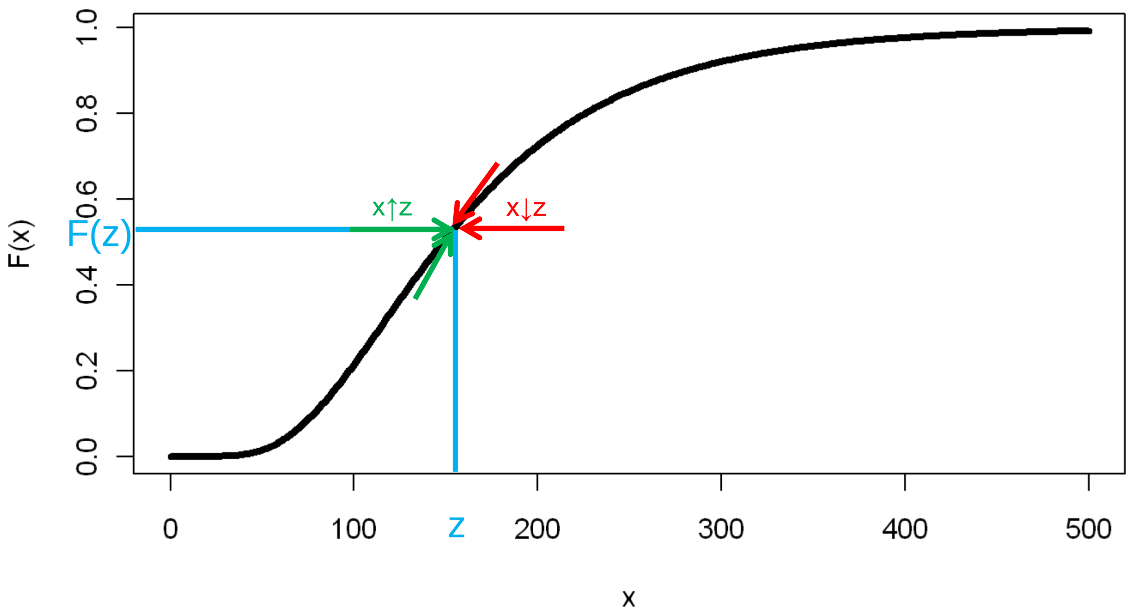
Verteilung eindimensionaler Zufallsvariablen

Spezialfall stetige Verteilungsfunktion (Ω überabzählbar)

$$\omega \in \Omega:\ X(\omega) \in B,\ B \subseteq \Re$$

$$F = F^X : \Re \rightarrow [0,1] \text{ mit } F(x) = P^X((-\infty, x]) = P(X \leq x) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\}),\ x \in \Re$$

$$\text{(C)}\ \lim_{x \downarrow z} F(x) = \boxed{F(z)} = \lim_{x \uparrow z} F(x)$$



Zufallsvariablen und deren Verteilungen

Verteilung eindimensionaler Zufallsvariablen

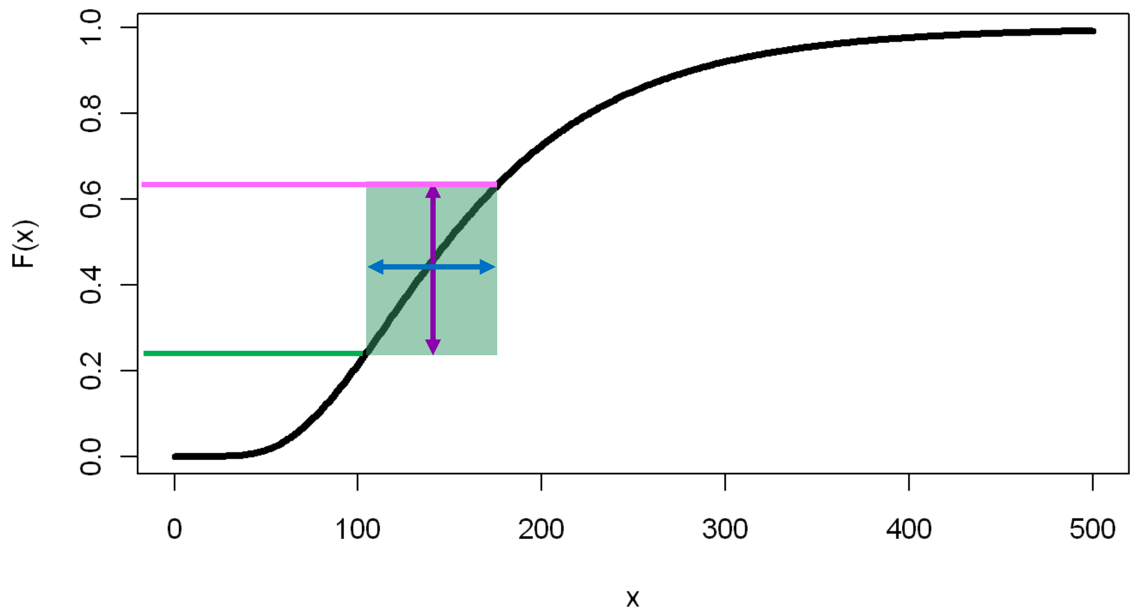
Spezialfall stetige Verteilungsfunktion (Ω überabzählbar)

$$\omega \in \Omega: \; X(\omega) \in B, \; B \subseteq \Re$$

$$F = F^X : \Re \to [0,1] \;\; \text{mit} \;\; F(x) = P^X((-\infty,x]) = P(X \le x) = P(\{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \le x\}), \;\; x \in \Re$$

(C) $\lim_{x \downarrow z} F(x) = F(z) = \lim_{x \uparrow z} F(x)$

(D) $\boxed{P(a < X \le b) = F(b) - F(a)}$



Zufallsvariablen und deren Verteilungen

Verteilung eindimensionaler Zufallsvariablen

Spezialfall stetige Verteilungsfunktion (Ω überabzählbar)

$$\omega \in \Omega: X(\omega) \in B,\ B \subseteq \Re$$

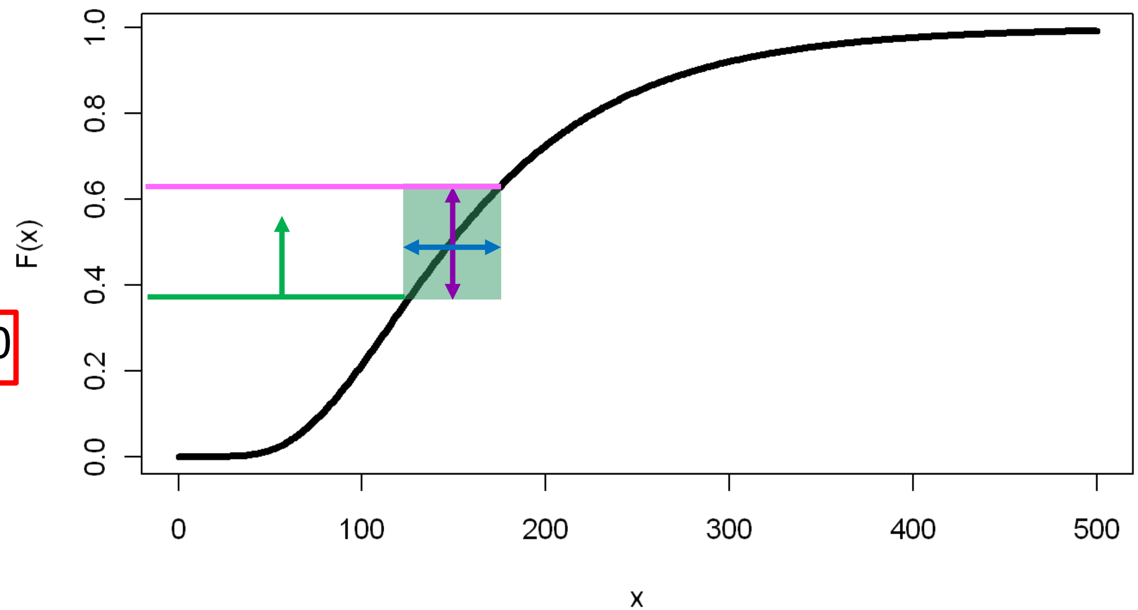
$$F = F^X : \Re \to [0,1] \text{ mit } F(x) = P^X((-\infty, x]) = P(X \le x) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \le x\}),\ x \in \Re$$

$$\text{(C)} \lim_{x \downarrow z} F(x) = F(z) = \lim_{x \uparrow z} F(x)$$

$$\text{(D)} P(a < X \le b) = F(b) - F(a)$$

$$\boxed{P(X = b)} = \lim_{a \uparrow b} P(a < X \le b)$$

$$= F(b) - \lim_{a \uparrow b} F(a) = F(b) - F(b) \boxed{= 0}$$



Zufallsvariablen und deren Verteilungen

Verteilung eindimensionaler Zufallsvariablen

Spezialfall stetige Verteilungsfunktion (Ω überabzählbar)

$$\omega \in \Omega : X(\omega) \in B, \; B \subseteq \Re$$

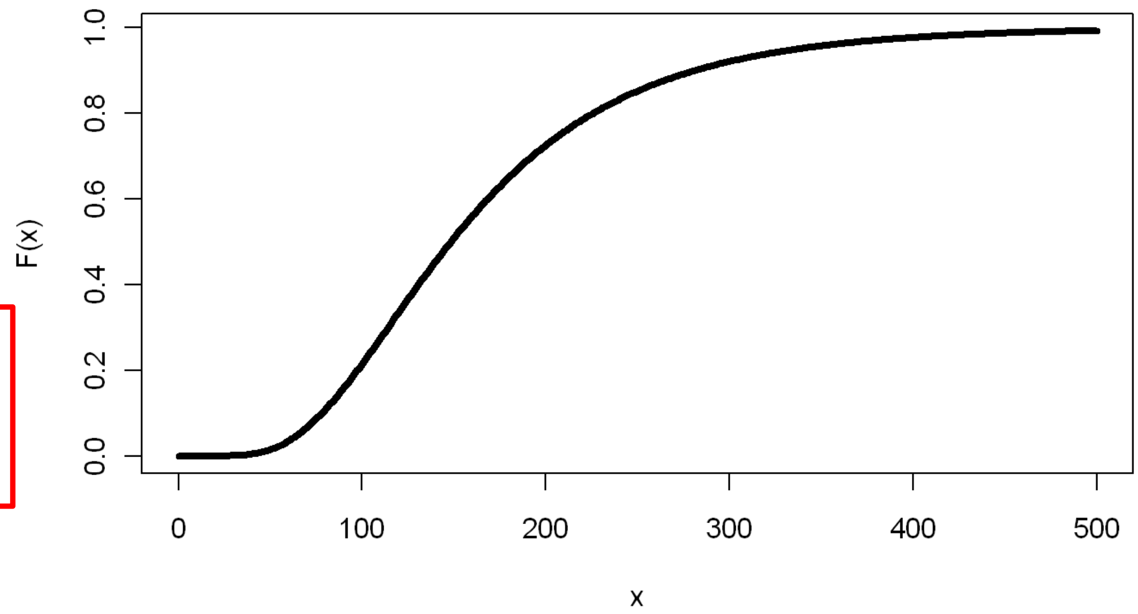
$$F = F^X : \Re \to [0,1] \;\text{ mit }\; F(x) = P^X((-\infty, x]) = P(X \le x) = P(\{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \le x\}), \;\; x \in \Re$$

(C) $\lim_{x \downarrow z} F(x) = F(z) = \lim_{x \uparrow z} F(x)$

(D) $P(a < X \le b) = F(b) - F(a)$

(F) $P(X = x) = 0, \; x \in \Re$

(G) $\boxed{\begin{aligned} P(a < X \le b) &= P(a \le X \le b) \\ &= P(a \le X < b) = P(a < X < b) \\ &= F(b) - F(a) \end{aligned}}$



Zufallsvariablen und deren Verteilungen

Verteilung eindimensionaler Zufallsvariablen

Spezialfall stetige Verteilungsfunktion (Ω überabzählbar)

$$\omega \in \Omega: \; X(\omega) \in B, \; B \subseteq \Re$$

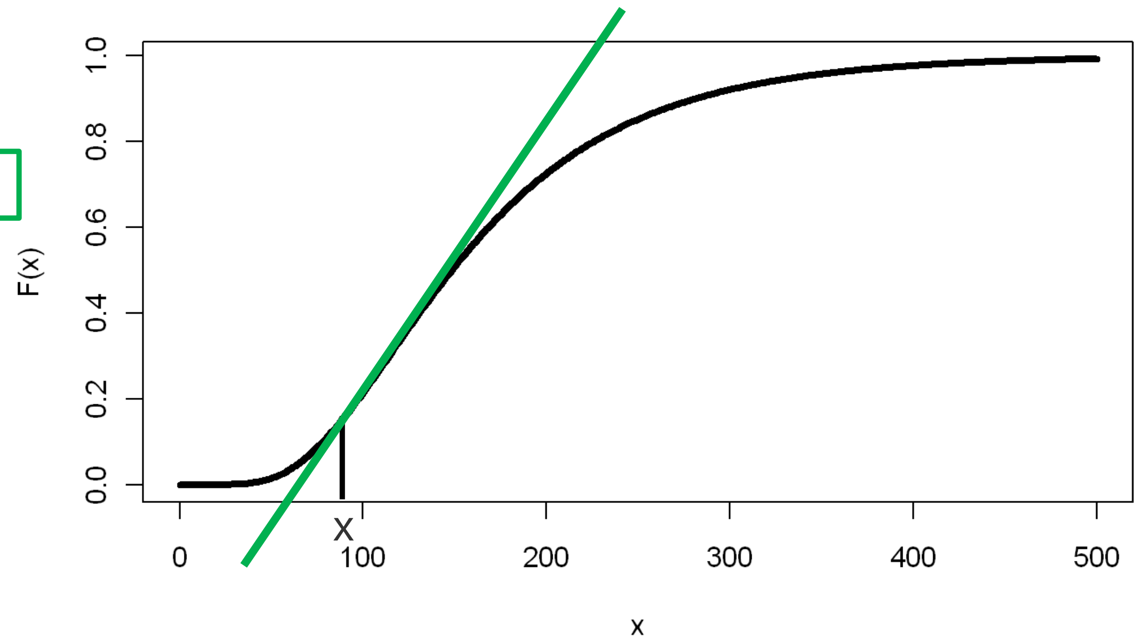
$$F = F^X : \Re \to [0,1] \;\text{ mit }\; F(x) = P^X((-\infty, x]) = P(X \leq x) = P(\{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \leq x\}), \;\; x \in \Re$$

$$\lim_{a \to b} P(\, a < X \leq b \,) = 0$$

$$\lim_{c \downarrow 0} \frac{F(x+c) - F(x)}{c} = \boxed{F'(x) = f(x)}$$

Die Funktion f(x) wird **Dichtefunktion** bzw. **Dichte** von X genannt.

Sie beschreibt die Steigung (Grad der Verdichtung) der Verteilung X



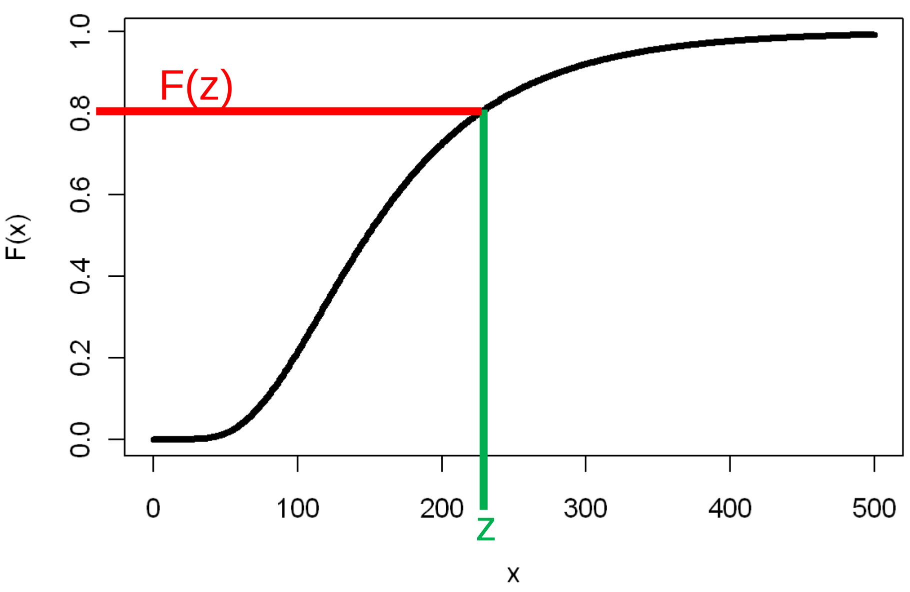
Zufallsvariablen und deren Verteilungen

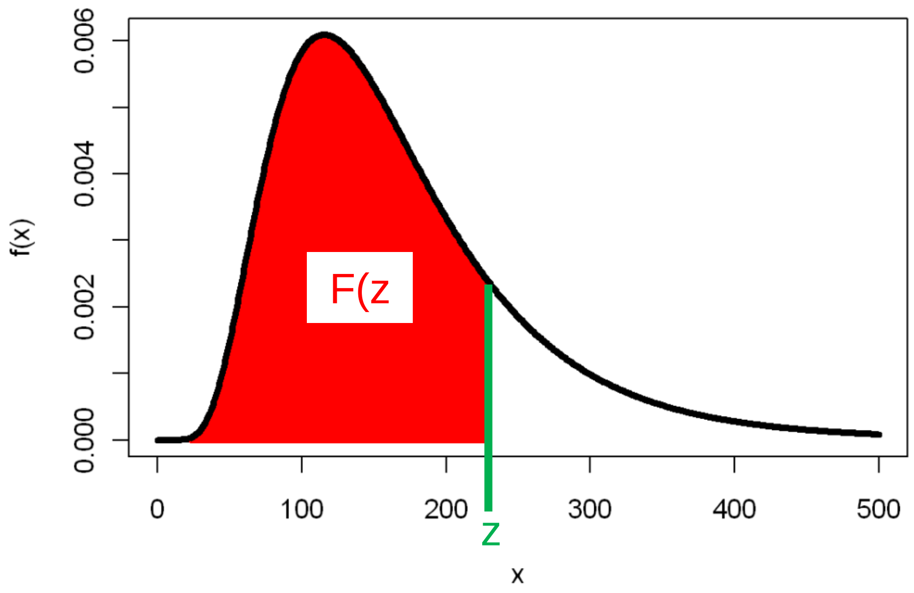
Verteilung eindimensionaler Zufallsvariablen

Spezialfall stetige Verteilungsfunktion (Ω überabzählbar)

$$F'(x) = f(x), \quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt, x \in \Re, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$$

$$\boxed{P(X \le \boxed{z})} = \boxed{F(\boxed{z})} = \int_{-\infty}^{z} f(t)dt$$





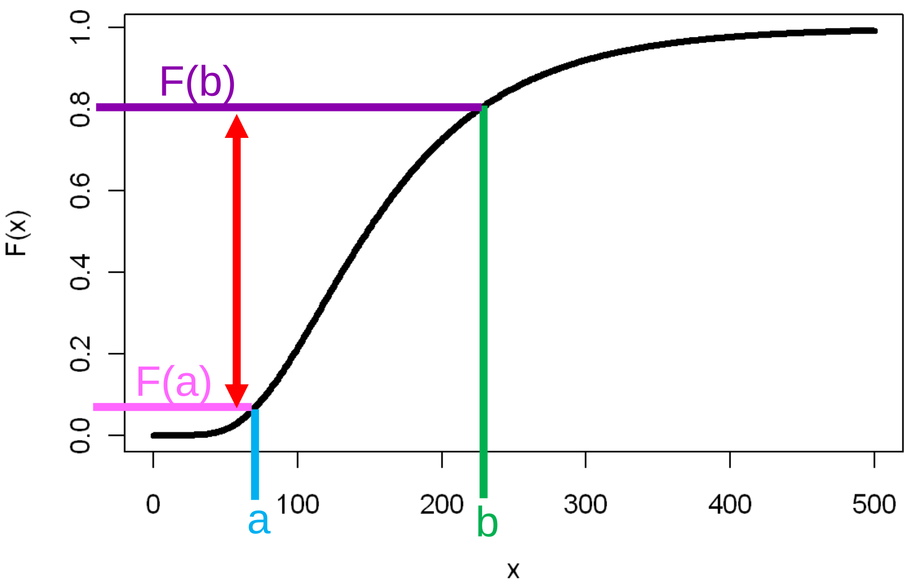
Zufallsvariablen und deren Verteilungen

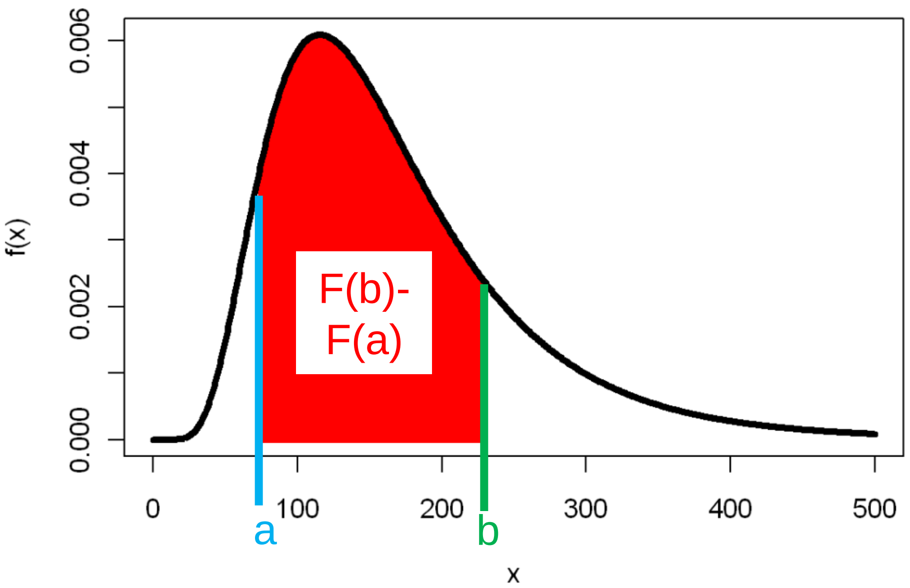
Verteilung eindimensionaler Zufallsvariablen

Spezialfall stetige Verteilungsfunktion (Ω überabzählbar)

$$F'(x) = f(x), \quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt, x \in \Re, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$$

$$\boxed{P(\boxed{a} < X \leq \boxed{b})} = \boxed{\boxed{F(b)} - \boxed{F(a)}} = \int_{a}^{b} f(t)dt$$





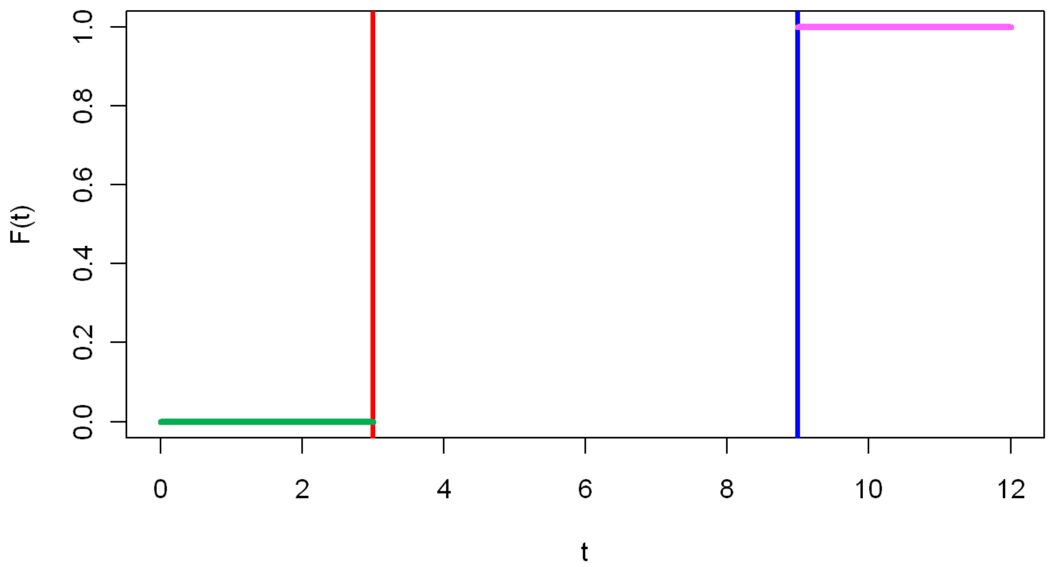
Zufallsvariablen und deren Verteilungen

Verteilung eindimensionaler Zufallsvariablen, stetige Verteilungsfunktion

Beispiel: **Mausaktivität, exakter Zeitpunkt T des ersten Mausclicks**

Annahme: T fällt in jedes Intervall gleicher Länge c zwischen t_{min} und t_{max} mit derselben Wahrscheinlichkeit

$P(T < t_{min}) = 0 = F(t_{min}) \Rightarrow \boxed{F(t) = 0, t \le \boxed{t_{min}}}$ $\qquad$ $P(T > t_{max}) = 0 = 1 - F(t_{max}) \Rightarrow \boxed{F(t) = 1, t \ge \boxed{t_{max}}}$



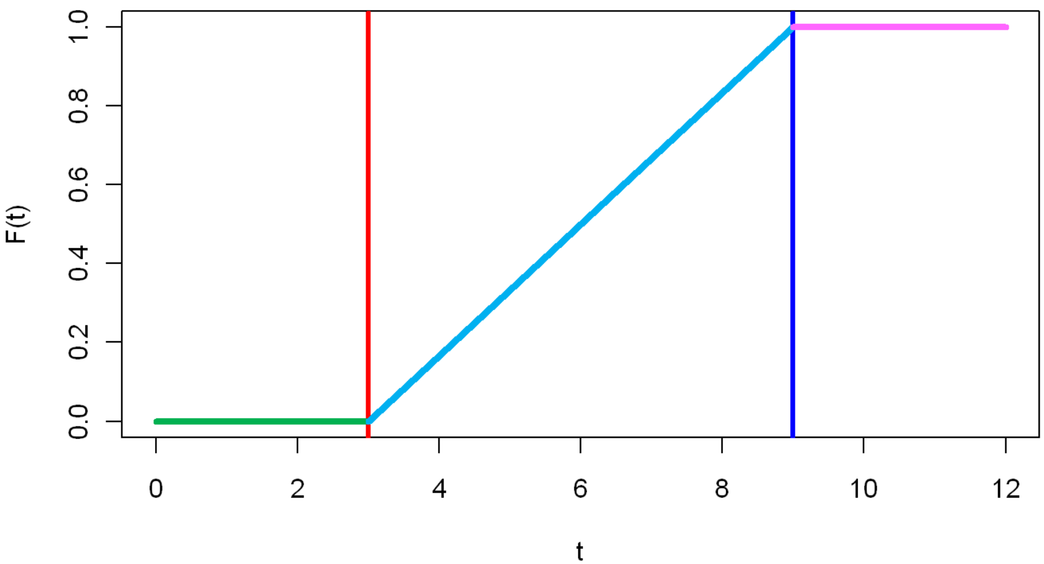
Zufallsvariablen und deren Verteilungen

Verteilung eindimensionaler Zufallsvariablen, stetige Verteilungsfunktion

Beispiel: **Mausaktivität, exakter Zeitpunkt T des ersten Mausclicks**

Annahme: T fällt in jedes Intervall gleicher Länge c zwischen t_{min} und t_{max} mit derselben Wahrscheinlichkeit

$F(t)=0, t \le \boxed{t_{min}}$ $\quad F(t)=\frac{t-t_{min}}{t_{max}-t_{min}}, \boxed{t_{min}} < t < \boxed{t_{max}}$ $\quad F(t)=1, t \ge \boxed{t_{max}}$



Wahrscheinlichkeitsdichte

$t \le t_{min}$: $F'(t) = f(t) = \partial 0/\partial t = 0$

$t_{min} < t < t_{max}$:

$$F'(t) = f(t) = \partial\left(\frac{t-t_{min}}{t_{max}-t_{min}}\right)/\partial t = \frac{1}{t_{max}-t_{min}}$$

$t>t_{max}$: $F'(t) = f(t) = \partial 1/\partial t = 0$

Zufallsvariablen und deren Verteilungen

Verteilung eindimensionaler Zufallsvariablen, stetige Verteilungsfunktion

Beispiel: **Mausaktivität, exakter Zeitpunkt T des ersten Mausclicks**

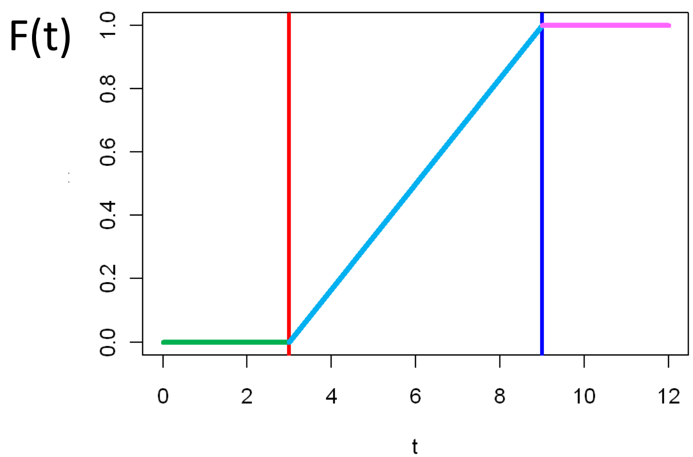
Annahme: T fällt in jedes Intervall gleicher Länge c zwischen t_{min} und t_{max} mit derselben Wahrscheinlichkeit

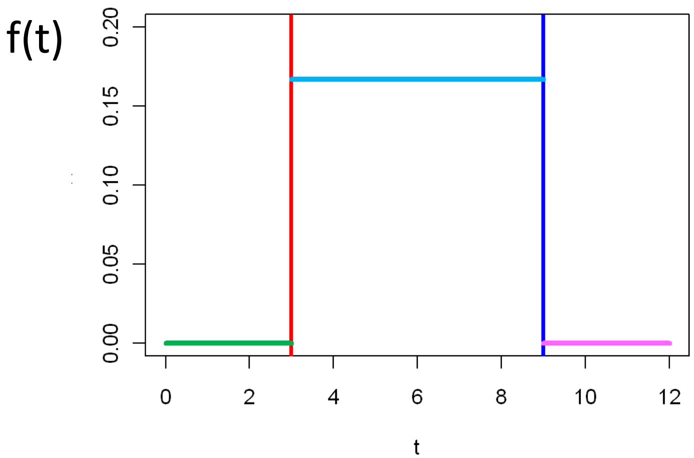
$$F(t) = 0,\ t \le \boxed{t_{min}} \qquad F(t) = 1,\ t \ge \boxed{t_{max}}$$

$$F(t) = \frac{t - t_{min}}{t_{max} - t_{min}},\ \boxed{t_{min}} < t < \boxed{t_{max}}$$

$$f(t) = 0,\ t \le \boxed{t_{min}} \qquad f(t) = 0,\ t \ge \boxed{t_{max}}$$

$$f(t) = \frac{1}{t_{max} - t_{min}},\ \boxed{t_{min}} < t < \boxed{t_{max}}$$





Zufallsvariablen und deren Verteilungen

Verteilung mehrdimensionaler Zufallsvariablen

Die **Wahrscheinlichkeitsverteilung** oder kurz **Verteilung** einer zweidimensionalen Zufallsvariablen (X,Y) ist definiert durch

$$P^{(X,Y)}(B) = P((X,Y)\in B) = P(\{\omega\in\Omega \mid (X(\omega), Y(\omega))\in B\}),\ B \subseteq \Re^2$$

Die Funktion $F = F^{(X,Y)} : \Re^2 \to [0,1]$ mit

$$F(x,y) = P^{(X,Y)}((-\infty,x] \times (-\infty,y]) = P(X \le x, Y \le y) = P(\{\omega\in\Omega \mid X(\omega) \le x, Y(\omega) \le y\}),\ \ x,y\in\Re,$$

wird **Verteilungsfunktion** von (X,Y) genannt.

Zufallsvariablen und deren Verteilungen

Verteilung mehrdimensionaler Zufallsvariablen

$P^{(X,Y)}(B) = P((X,Y) \in B) = P(\{\omega \in \Omega \,|\, (X(\omega), Y(\omega)) \in B\}),\ B \subseteq \Re^2$

$F(x,y) = P^{(X,Y)}((-\infty,x] \times (-\infty,y]) = P(X \leq x,\ Y \leq y) = P(\{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \leq x,\ Y(\omega) \leq y\}),\ \ x,y \in \Re$

Eigenschaften

$$\boxed{1.\ \lim_{x \to -\infty} F(x,y) = \lim_{y \to -\infty} F(x,y) = \lim_{x,y \to -\infty} F(x,y) = 0}$$

Beweis

$$A = \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \leq x,\ Y(\omega) \leq y\} = A_x \cap A_y \quad \text{mit} \quad A_x = \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \leq x\}$$

$$A_y = \{\omega \in \Omega \,|\, Y(\omega) \leq y\}$$

$$F(x,y) = P(A) = P(A_x \cap A_y) = 1 - P(A_x^C \cup A_y^C)$$

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} F(x,y)} = 1 - P(A_{-\infty}^C \cup A_y^C) = 1 - P(\Omega \cup A_y^C) = 1 - [P(\Omega) + P(A_y^C) - P(A_y^C)] = 1 - 1 \boxed{= 0}$$

$\square$

Zufallsvariablen und deren Verteilungen

Verteilung mehrdimensionaler Zufallsvariablen

$P^{(X,Y)}(B) = P((X,Y) \in B) = P(\{\omega \in \Omega \,|\, (X(\omega), Y(\omega)) \in B\}),\ B \subseteq \Re^2$

$F(x,y) = P^{(X,Y)}((-\infty,x] \times (-\infty,y]) = P(X \leq x, Y \leq y) = P(\{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \leq x, Y(\omega) \leq y\}),\ \ x,y \in \Re$

Eigenschaften

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x,y) = \lim\limits_{y \to -\infty} F(x,y) = \lim\limits_{x,y \to -\infty} F(x,y) = 0\,,\ \boxed{\lim\limits_{x,y \to \infty} F(x,y) = 1}$

2. $\boxed{\lim\limits_{y \to \infty} F(x,y) = F^X(x)\,,\quad \lim\limits_{x \to \infty} F(x,y) = F^Y(y)}$

Beweis

$A = \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \leq x, Y(\omega) \leq y\} = A_x \cap A_y$ mit $A_x = \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \leq x\}$

$A_y = \{\omega \in \Omega \,|\, Y(\omega) \leq y\}$

$F(x,y) = P(A) = P(A_x \cap A_y) = 1 - P(A_x^C \cup A_y^C)$

$\boxed{\lim\limits_{x \to \infty} F(x,y)} = 1 - P(A_\infty^C \cup A_y^C) = 1 - P(\varnothing \cup A_y^C) = 1 - [P(A_y^C)] = P(A_y) = \boxed{F^Y(y)}$ $\square$

Zufallsvariablen und deren Verteilungen

Verteilung mehrdimensionaler Zufallsvariablen

$P^{(X,Y)}(B) = P((X,Y)\in B) = P(\{\omega\in\Omega \mid (X(\omega), Y(\omega))\in B\}),\ B \subseteq \Re^2$

$F(x,y) = P^{(X,Y)}((-\infty,x] \times(-\infty,y]) = P(X \le x, Y \le y) = P(\{\omega\in\Omega \mid X(\omega) \le x, Y(\omega) \le y\}),\ x,y\in\Re$

Eigenschaften

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x,y) = \lim\limits_{y\to-\infty} F(x,y) = \lim\limits_{x,y\to-\infty} F(x,y) = 0$, $\boxed{\lim\limits_{x,y\to\infty} F(x,y) = 1}$
2. $\boxed{\lim\limits_{y\to\infty} F(x,y) = F^X(x),\quad \lim\limits_{x\to\infty} F(x,y) = F^Y(y)}$

Beweis

$\boxed{\lim\limits_{x\to\infty} F(x,y) = F^Y(y)}$

$\boxed{\lim\limits_{x,y\to\infty} F(x,y)} = \lim\limits_{y\to\infty} F^Y(y) = \boxed{1}$

$\square$

Beweis für $F^X(x)$ analog.

$F^X(x)$ und $F^Y(y)$ heißen **Randverteilungen** von X und Y

Zufallsvariablen und deren Verteilungen

Verteilung mehrdimensionaler Zufallsvariablen

$P^{(X,Y)}(B) = P((X,Y) \in B) = P(\{\omega \in \Omega \,|\, (X(\omega), Y(\omega)) \in B\}),\ B \subseteq \Re^2$

$F(x,y) = P^{(X,Y)}((-\infty,x] \times (-\infty,y]) = P(X \le x,\ Y \le y) = P(\{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \le x,\ Y(\omega) \le y\}),\ \ x,y \in \Re$

Eigenschaften

1. $\lim_{x \to -\infty} F(x,y) = \lim_{y \to -\infty} F(x,y) = \lim_{x,y \to -\infty} F(x,y) = 0\,,\quad \lim_{x,y \to \infty} F(x,y) = 1$
2. $\lim_{y \to \infty} F(x,y) = F^X(x)\,,\quad \lim_{x \to \infty} F(x,y) = F^Y(y)$
3. $\boxed{x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1,y) \le F(x_2,y)\ ,\ \ y_1 < y_2 \Rightarrow F(x,y_1) \le F(x,y_2)}$

Beweis

$F(x_i,y) = P(A_i)$ mit $A_i = \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \le x_i,\ Y(\omega) \le y\}$

$\boxed{x_1 < x_2} \Rightarrow A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow P(A_1) \le P(A_2) \Leftrightarrow \boxed{F(x_1,y) \le F(x_2,y)}$

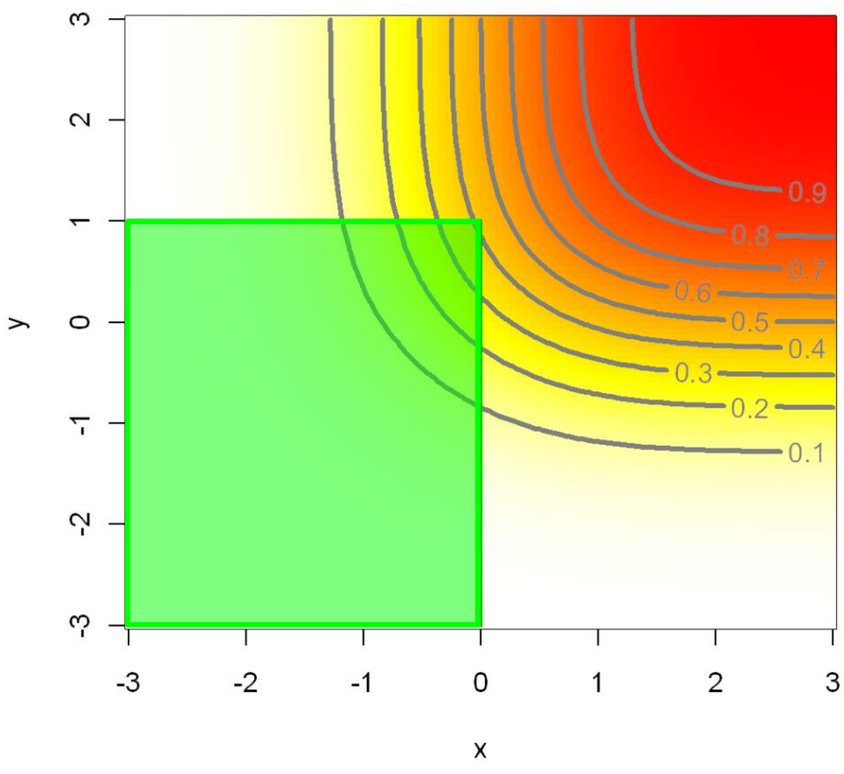
Beweis für $F(x,y_1)$ analog

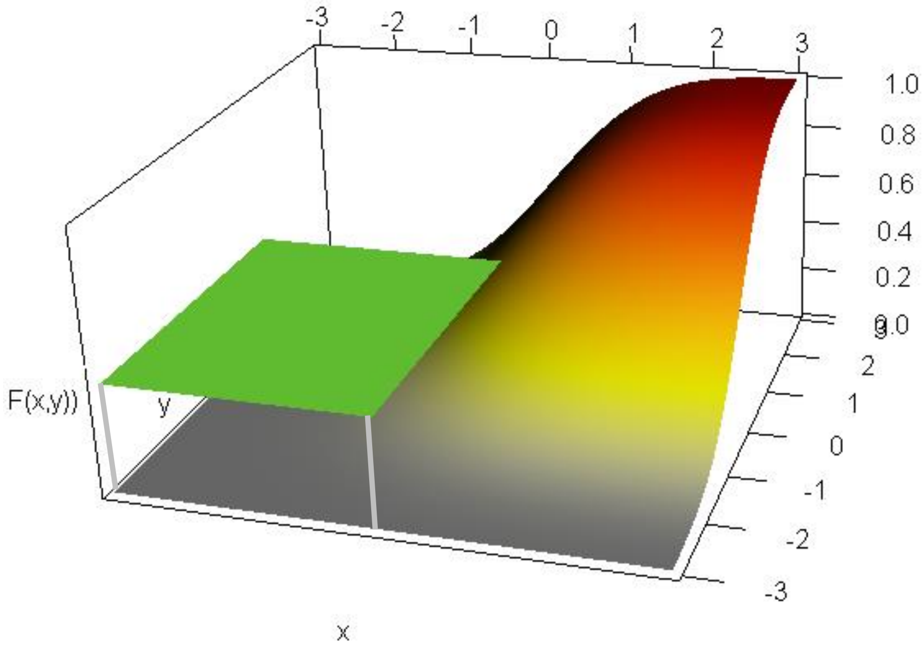
$\square$

Zufallsvariablen und deren Verteilungen

Verteilung mehrdimensionaler Zufallsvariablen

$$\boxed{F(x,y)} = \boxed{P(\boxed{X \leq x\,,\; Y \leq y})}\,,\quad x,y \in \Re$$

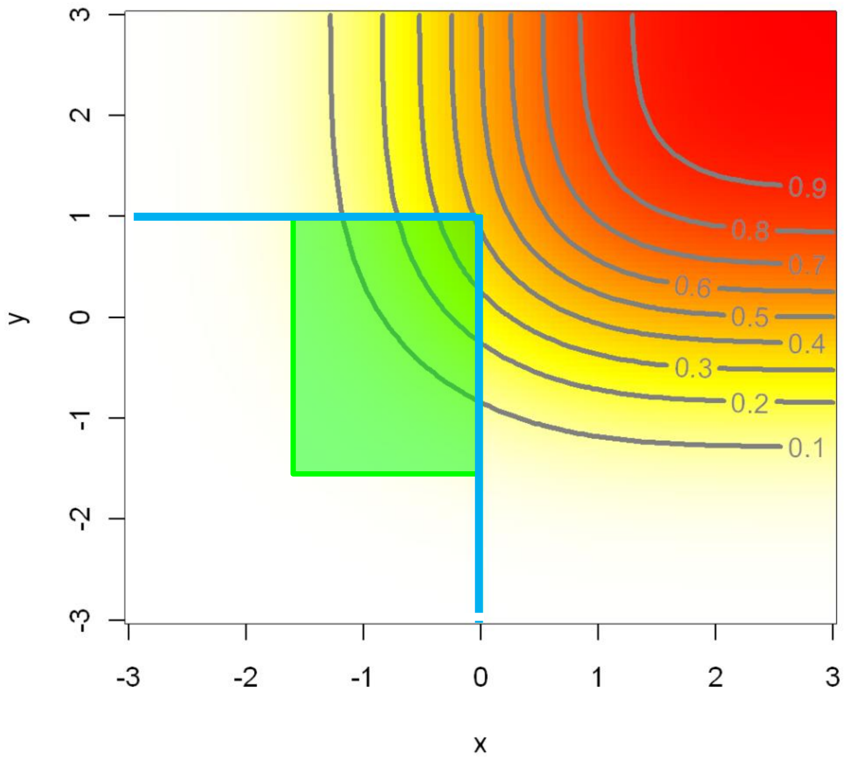




Zufallsvariablen und deren Verteilungen

Verteilung mehrdimensionaler Zufallsvariablen

$$P(\boxed{x_1} < X \le \boxed{x_2}\ ,\ \boxed{y_1} < Y \le \boxed{y_2}) = P(\ X \le \boxed{x_2}\ ,\ \ Y \le \boxed{y_2}\ )$$

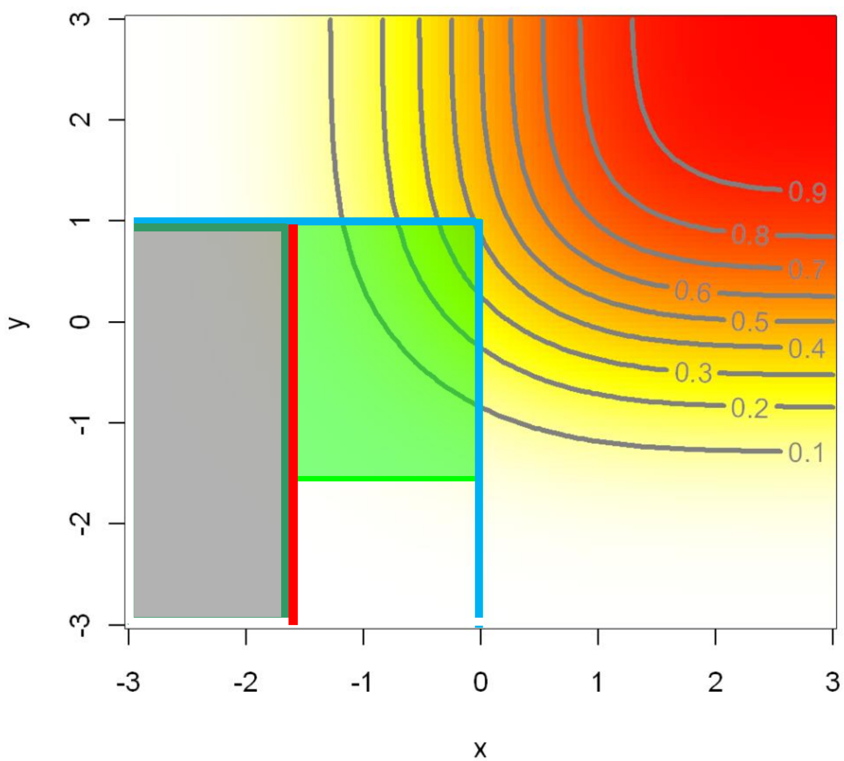


Zufallsvariablen und deren Verteilungen

Verteilung mehrdimensionaler Zufallsvariablen

$$P(\boxed{x_1} < X \le \boxed{x_2}\ ,\ \boxed{y_1} < Y \le \boxed{y_2}) = \boxed{P(\ X \le \boxed{x_2}\ ,\ Y \le \boxed{y_2}\ )}$$

$$- \boxed{P(\ X \le \boxed{x_1}\ ,\ Y \le \boxed{y_2})}$$



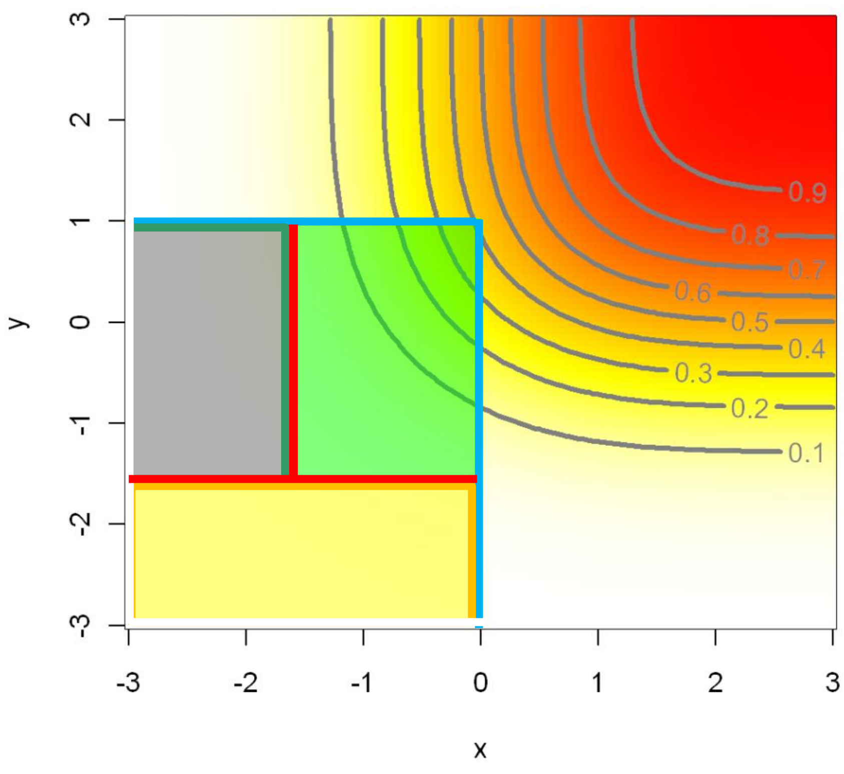
Zufallsvariablen und deren Verteilungen

Verteilung mehrdimensionaler Zufallsvariablen

$$\boxed{P(x_1 < X \le x_2\,,\; y_1 < Y \le y_2)} = \boxed{P(X \le x_2\,,\; Y \le y_2)}$$

$$- \boxed{P(X \le x_1\,,\; Y \le y_2)}$$

$$- \boxed{P(X \le x_2\,,\; Y \le y_1)}$$



Zufallsvariablen und deren Verteilungen

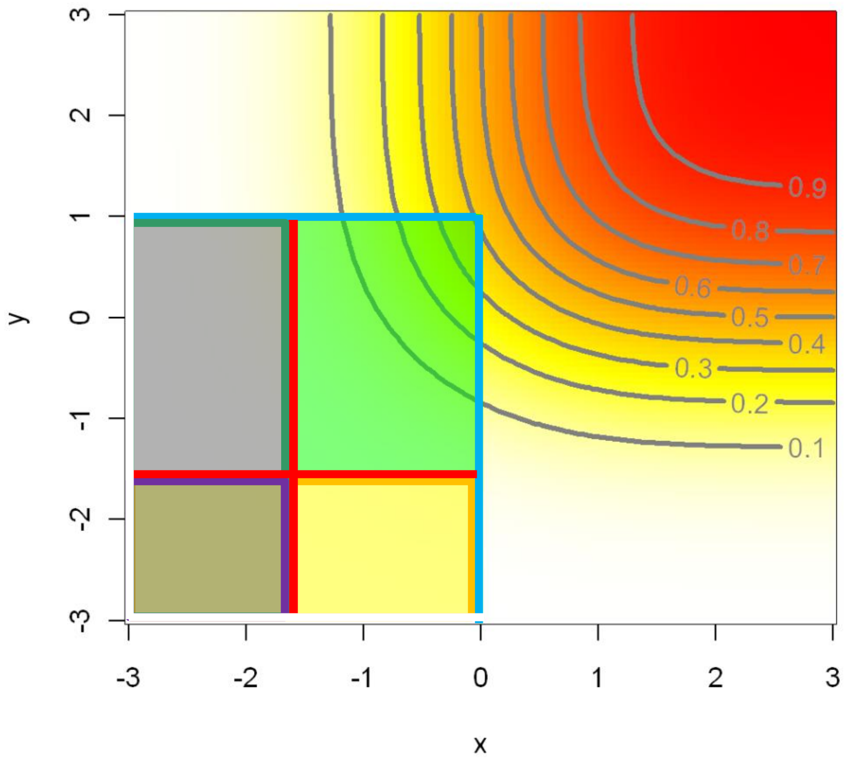
Verteilung mehrdimensionaler Zufallsvariablen

$$P(\boxed{x_1} < X \leq \boxed{x_2}\,,\ \boxed{y_1} < Y \leq \boxed{y_2}) = \boxed{P(\ X \leq \boxed{x_2}\,,\ \ Y \leq \boxed{y_2}\ )}$$

$$- \boxed{P(\ X \leq \boxed{x_1}\,,\ \ Y \leq \boxed{y_2})}$$

$$- \boxed{P(\ X \leq \boxed{x_2}\,,\ \ Y \leq \boxed{y_1})}$$

$$+ \boxed{P(\ X \leq \boxed{x_1}\,,\ \ Y \leq \boxed{y_1})}$$



$$= F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1)$$

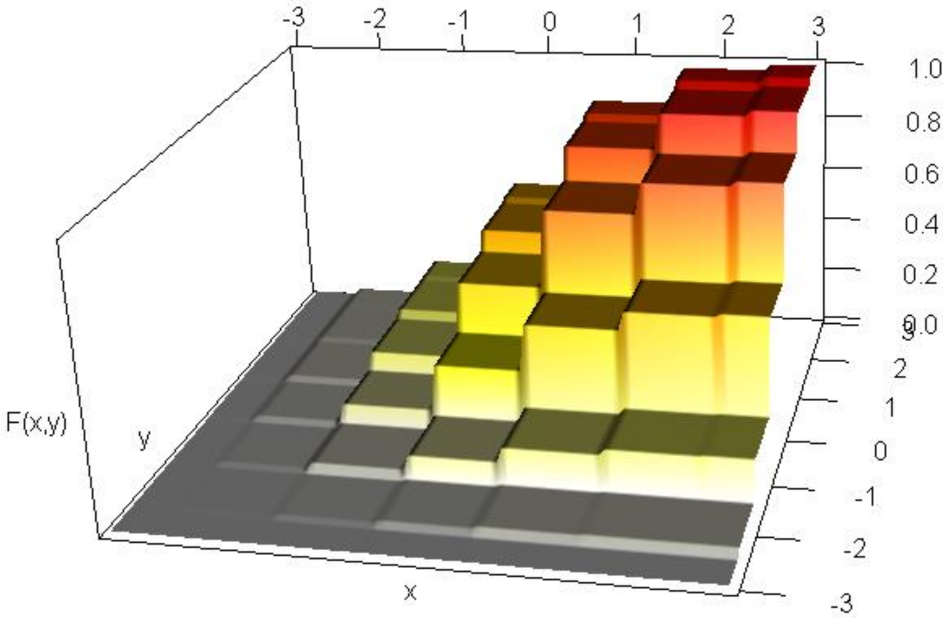
Zufallsvariablen und deren Verteilungen

Verteilung mehrdimensionaler Zufallsvariablen

Spezialfall diskrete Verteilungsfunktion (Ω abzählbar)

$$\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\} \Rightarrow X \in \{X(\omega_1), \ldots, X(\omega_n)\} = \{x_1, \ldots, x_n\} \text{ mit} -\infty < x_1 \leq \ldots \leq x_2 < \infty$$

$$Y \in \{Y(\omega_1), \ldots, Y(\omega_n)\} = \{y_1, \ldots, y_n\} \text{ mit} -\infty < y_1 \leq \ldots \leq y_2 < \infty$$



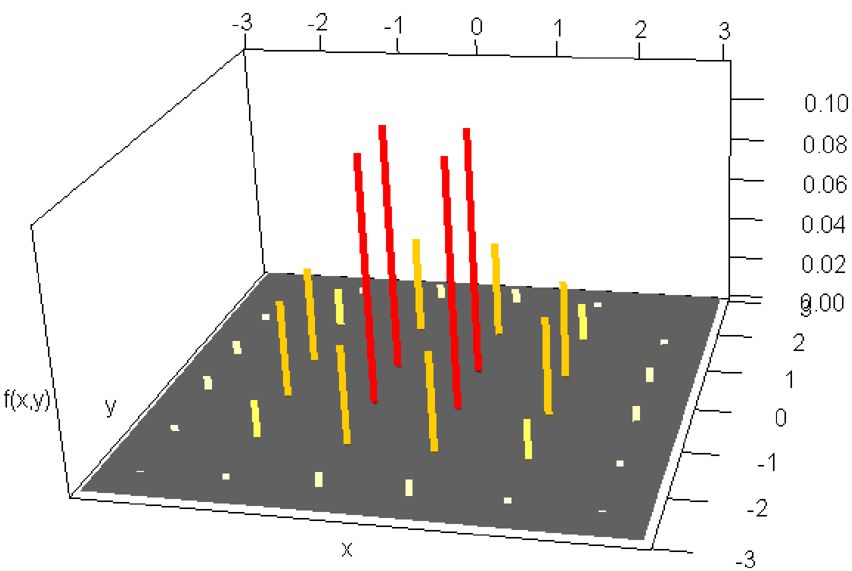
Zufallsvariablen und deren Verteilungen

Verteilung mehrdimensionaler Zufallsvariablen

Spezialfall diskrete Verteilungsfunktion (Ω abzählbar)

$$\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\} \Rightarrow X \in \{X(\omega_1), \ldots, X(\omega_n)\} = \{x_1, \ldots, x_n\} \ \text{mit} -\infty < x_1 \le \ldots \le x_2 < \infty$$
$$Y \in \{Y(\omega_1), \ldots, Y(\omega_n)\} = \{y_1, \ldots, y_n\} \ \text{mit} -\infty < y_1 \le \ldots \le y_2 < \infty$$

Die Funktion p: $\Re^2 \rightarrow [0,1]$ mit p(x,y) = P(X = x, Y = y) heißt **Zähldichte von (X,Y)**



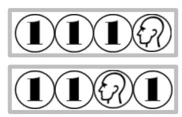
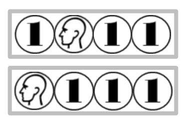
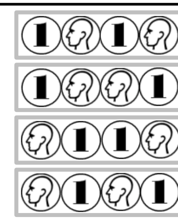
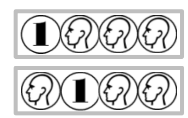
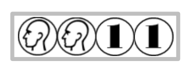
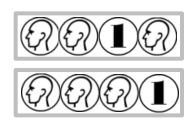
$$p(x,y) = \begin{cases} F(x_i, y_i) - F(x_{i-1}, y_i) & , \quad x_i \in \{x_1, \ldots, x_n\} \\ -F(x_i, y_{i-1}) + F(x_{i-1}, y_{i-1}) & , \quad y_i \in \{y_1, \ldots, y_n\} \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases}$$

Zufallsvariablen und deren Verteilungen

Verteilung mehrdimensionaler Zufallsvariablen, diskrete Verteilungsfunktion

Beispiel: **4-facher Münzwurf** , X=Anzahl Kopf nach 4 Würfen, Y=Anzahl Kopf nach 2 Würfen

Zähldichte

↓y x→	0	1	2	3	4
0					
1					
2					

Zufallsvariablen und deren Verteilungen

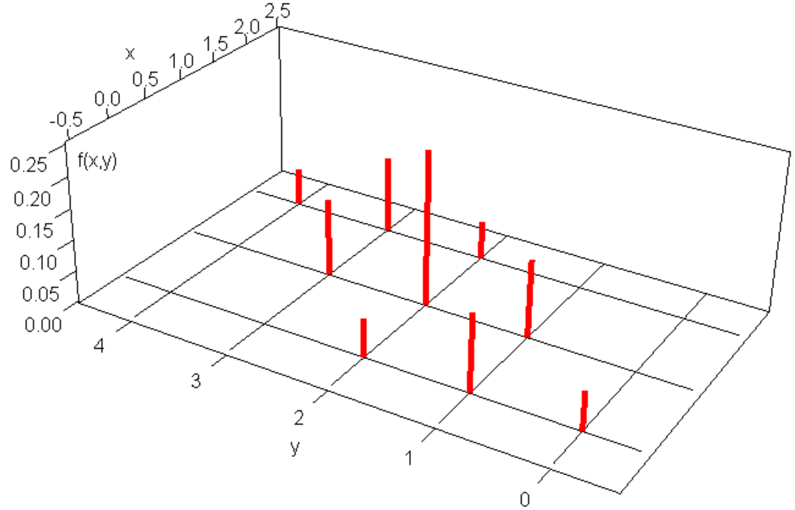
Verteilung mehrdimensionaler Zufallsvariablen, diskrete Verteilungsfunktion

Beispiel: **4-facher Münzwurf** , X=Anzahl Kopf nach 4 Würfen, Y=Anzahl Kopf nach 2 Würfen

Zähldichte

↓y x→	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
0	1/16	2/16	1/16		
1		2/16	4/16	2/16	
2			1/16	2/16	1/16

p(x,y)



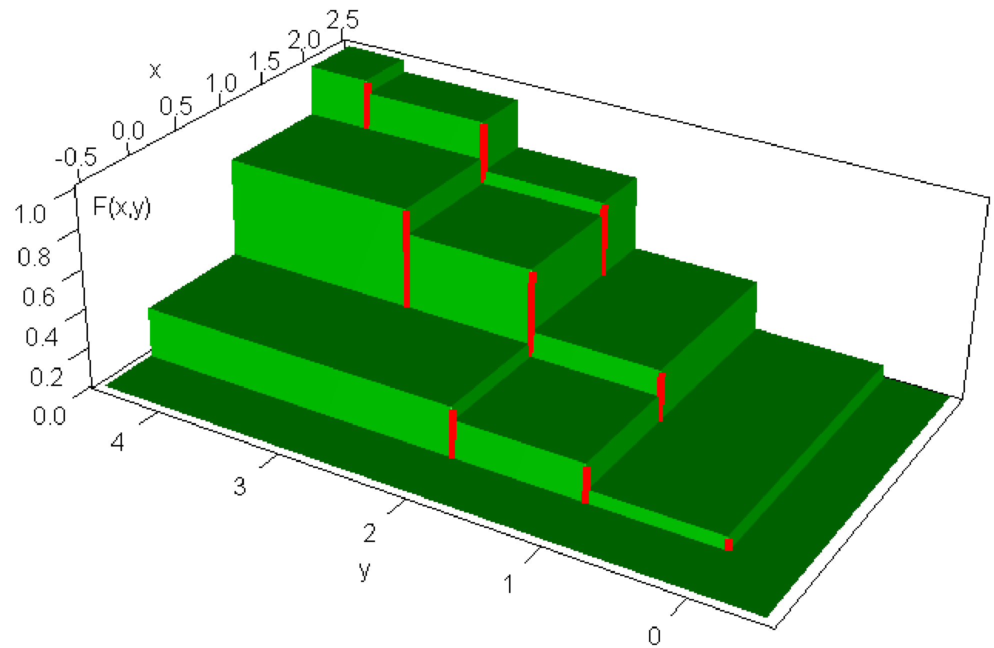
Zufallsvariablen und deren Verteilungen

Verteilung mehrdimensionaler Zufallsvariablen, diskrete Verteilungsfunktion

Beispiel: **4-facher Münzwurf** , X=Anzahl Kopf nach 4 Würfen, Y=Anzahl Kopf nach 2 Würfen

Zähldichte

↓y x→	0	1	2	3	4
0	1/16 **1/16**	2/16 **3/16**	1/16 **4/16**		
1		2/16 **5/16**	4/16 **10/16**	2/16 **12/16**	
2			1/16 **11/16**	2/16 **15/16**	1/16 **16/16**



p(x,y)
F(x,y)

Zufallsvariablen und deren Verteilungen

Verteilung mehrdimensionaler Zufallsvariablen

Spezialfall stetige Verteilungsfunktion (Ω überabzählbar)

$$\omega \in \Omega : \ (X(\omega), Y(\omega)) \in B, \ B \subseteq \mathfrak{R}^2$$

$F = F^{XY} : \mathfrak{R}^2 \to [0,1]$ mit $F(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) = P(\{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \leq x, Y(\omega) \leq y\})$, $x,y \in \mathfrak{R}$

Die Funktion f: $\mathfrak{R}^2 \to [0,1]$ mit $f(x,y) = \dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$

heißt die **gemeinsame Dichtefunktion** von X und Y.

Es gilt: $F(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{y} f(s,t)dtds, \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(s,t)dtds = 1$

Die **Randdichten** f^X und f^Y von X und Y sind definiert durch

$$f^X(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,t)\,dt \ \text{ und } \ f^Y(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(s,y)\,ds$$

Zufallsvariablen und deren Verteilungen

Verteilung mehrdimensionaler Zufallsvariablen

Spezialfall stetige Verteilungsfunktion (Ω überabzählbar)