Wahrscheinlichkeitstheorie

Wahrscheinlichkeitstheorie

- Teilgebiet der Mathematik, dass sich mit Wahrscheinlichkeiten und der Analyse zufälliger Prozesse beschäftigt
- Mathematische Abstraktion von nicht-deterministischen Ereignissen

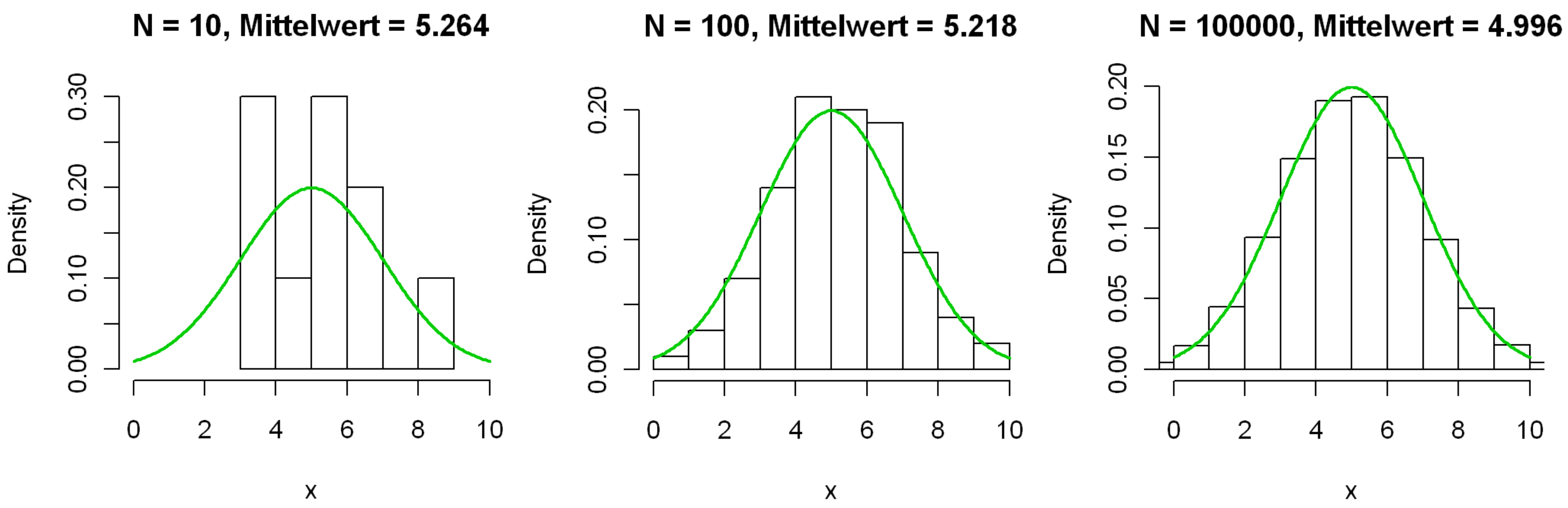
Unterscheidung von Empirie und Theorie

- Bisher: reine Beschreibung von Lage, Streuung und Zusammenhang von Daten ohne Berücksichtigung ihrer Entstehung
- Jetzt: Interpretation der Daten als Realisationen von Zufallsvariablen und Beschreibung von deren Wahrscheinlichkeitsverteilungen
- Auf Basis dieser Wahrscheinlichkeitsverteilungen lassen sich dann Aussagen über nicht betrachtete oder zukünftige Daten machen

Beschreibung des Zufalls

Vergleich unterschiedlich großer Stichproben aus der gleichen Wahrscheinlichkeitsverteilung

Beispiel Normalverteilung: Gesetz der großen Zahlen



Mengentheoretische Grundlagen

Elementare Begriffe

Zufallsexperiment	Datenerhebungsprozess mit nicht vorhersagbarem Ausgang
Ergebnis ω	Elementarer Ausgang eines Zufallsexperiments
Grundraum Ω	Menge aller möglichen Ergebnisse $\Omega = \{\omega \mid \omega$ ist Ergebnis des Zufallsexperiments$\}$
Ereignis A	Menge von Ergebnissen, d.h. Teilmenge von Ω
Elementarereignis	Einelementiges Ereignis

Mengentheoretische Grundlagen

Beispiel

Zufallsexperiment	Einfacher Würfelwurf
Ergebnisse	$\omega_1 = 1, \omega_2 = 2, \omega_3 = 3, \omega_4 = 4, \omega_5 = 5, \omega_6 = 6$
Grundraum	$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
Ereignisse	$A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{1, 3, 5\}$, $C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $D = \{3, 4, 5, 6\}$, $E = \{2, 3, 5\}$, $F = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega$
Elementarereignisse	$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$

Mengentheoretische Grundlagen

Beispiele

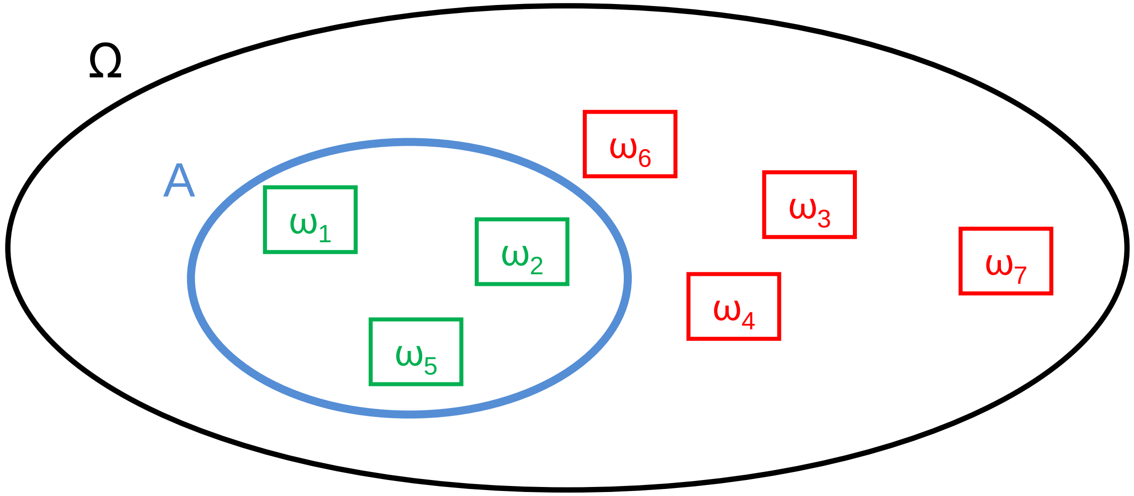
Experiment	Grundraum Ω	Ergebnis ω
Roulette	$\{0,1,\ldots,36\}$	Zahlenfeld der Kugel
Würfeln: Warten auf 6	$\aleph \cup \{\infty\}$	Anzahl Würfe bis zur ersten 6
6 aus 49	$\{(\omega_1,\ldots,\omega_6) \mid 1 \leq \omega_1 < \ldots < \omega_6 \leq 49\}$	Geordnete Nummern der gezogenen Kugeln
Einzelne Serveranfrage	$[t_{min},t_{max}]$	Anfragezeitpunkt t
Mausaktivität	$\{\omega: [t_{min},t_{max}] \to (1,\ldots,600)\text{x}(1,\ldots,800)\text{x}(0,1,2)\}$	Koordinaten und Clickzustand (nicht, links, rechts) des Mauszeigers zu jeder Zeit
Wartezeit bis zur nächsten Serveranfrage	$[0,\infty)$	Zeit zwischen zwei Anfragen

Mengentheoretische Grundlagen

Bezeichnungen

$$\omega \in A$$

Ergebnis ω ist im Ereignis A enthalten

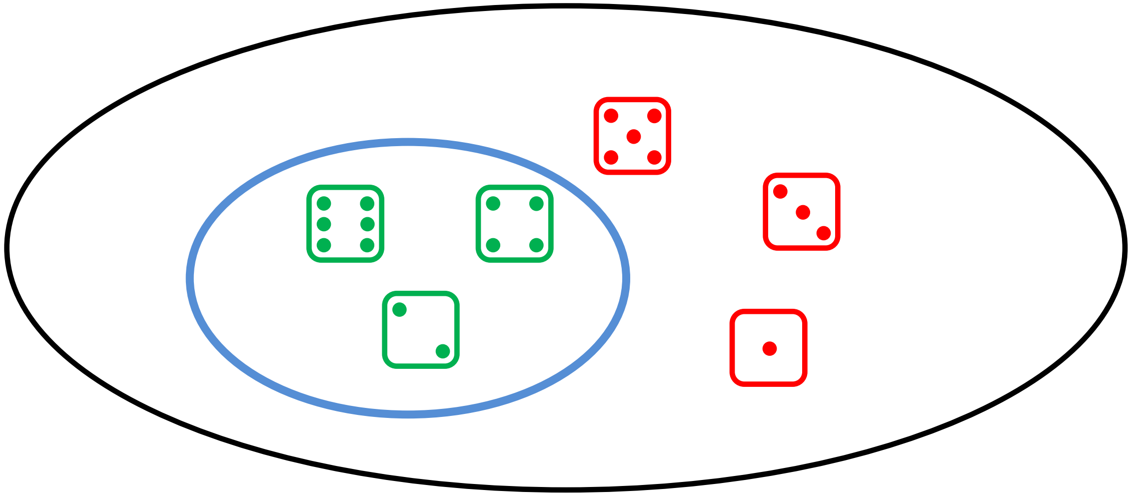


Mengentheoretische Grundlagen

Bezeichnungen: Beispiel Würfelwurf

$$2 \in \{2,4,6\}$$

Augenzahl 2 ist gerade Zahl



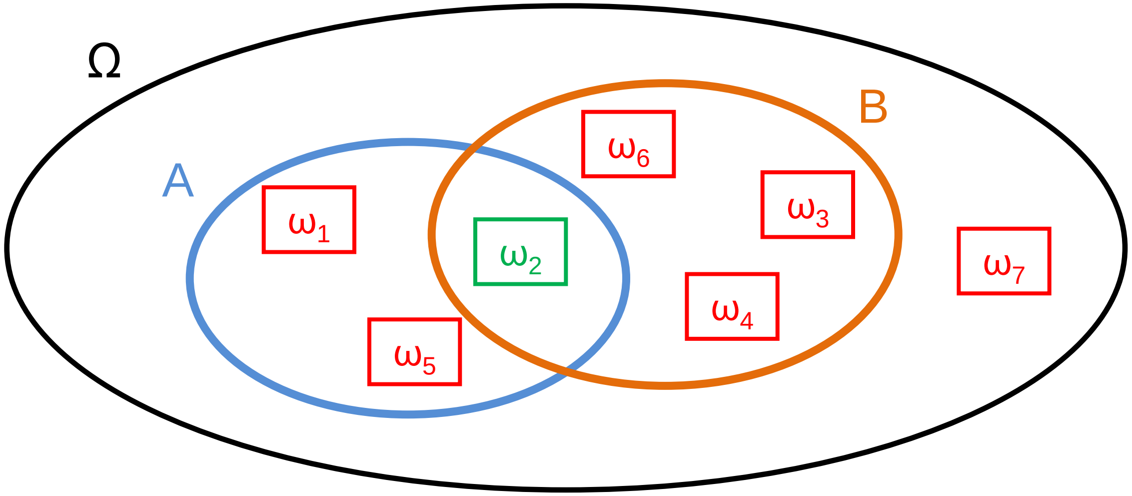
Mengentheoretische Grundlagen

Bezeichnungen

Schnittereignis zweier Mengen

$$A \cap B = \{\omega \in \Omega \,|\, \omega \in A \text{ und } \omega \in B\}$$

Ergebnis ω ist in Ereignis A **und** Ereignis B enthalten



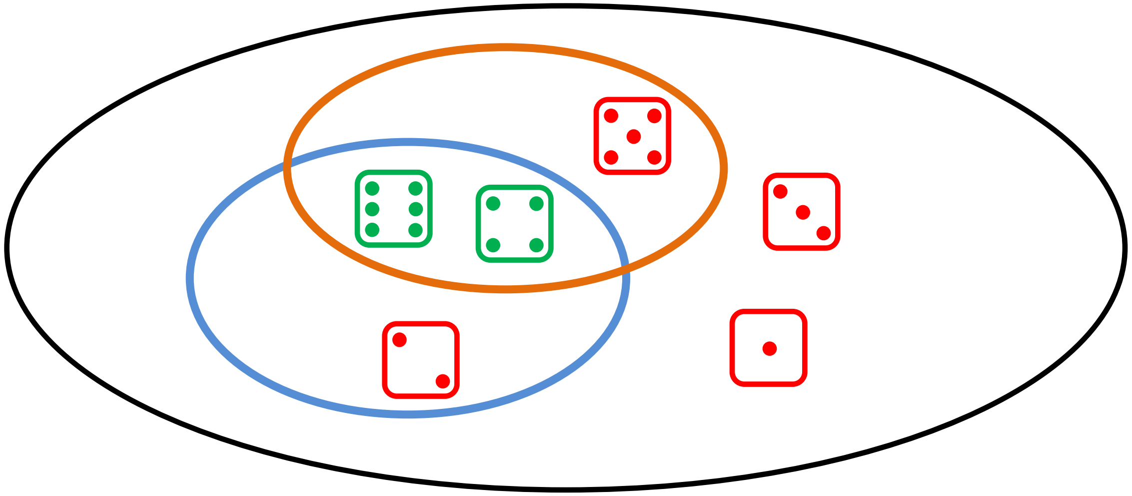
Mengentheoretische Grundlagen

Bezeichnungen: Beispiel Würfelwurf

Schnittereignis zweier Mengen

$$4 \in \{2,4,6\} \cap \{4,5,6\}$$

Augenzahl 4 ist gerade Zahl **und** größer als 3



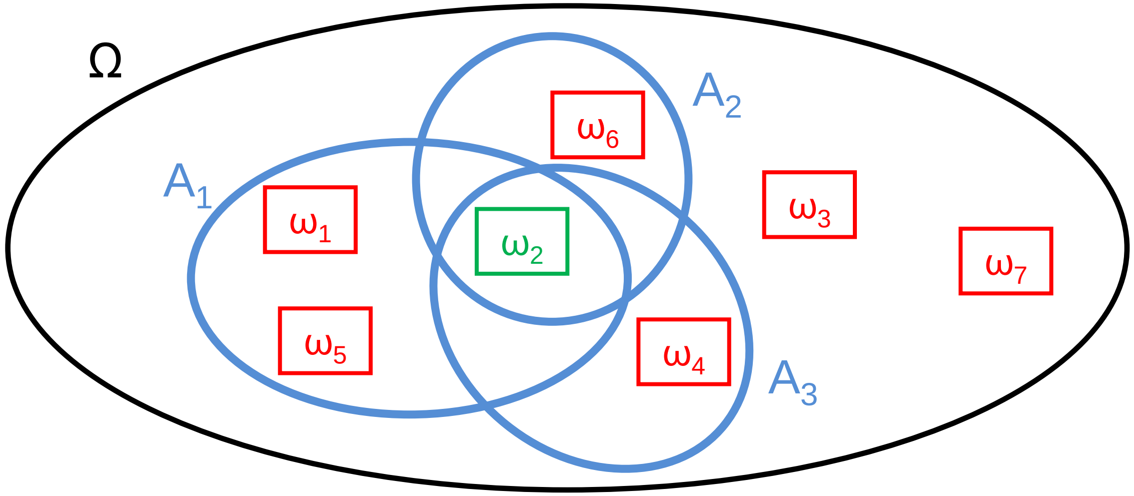
Mengentheoretische Grundlagen

Bezeichnungen

Schnittereignis beliebig vieler Mengen

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A_i \text{ für } i \in I\}$$

Ergebnis ω ist in allen Ereignissen A_i enthalten



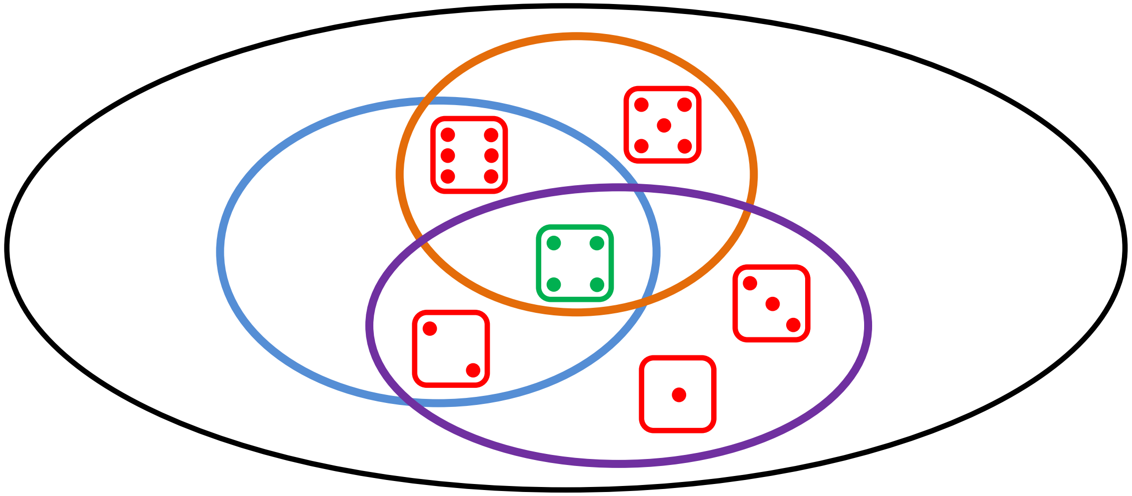
Mengentheoretische Grundlagen

Bezeichnungen: Beispiel Würfelwurf

Schnittereignis beliebig vieler Mengen

$$4 \in \{2,4,6\} \cap \{4,5,6\} \cap \{1,2,3,4\}$$

Augenzahl 4 ist gerade Zahl **und** größer als 3 **und** kleiner als 5



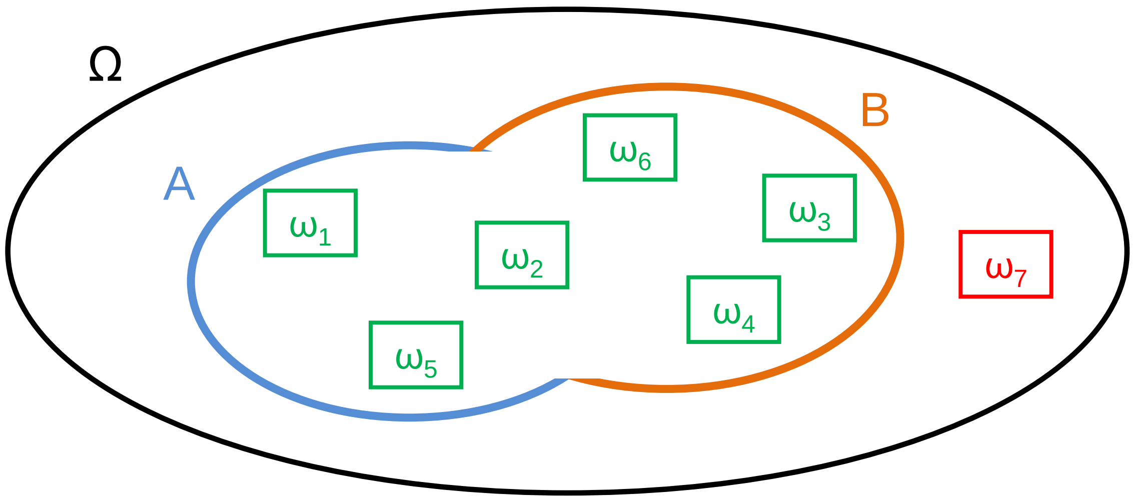
Mengentheoretische Grundlagen

Bezeichnungen

Vereinigungsereignis zweier Mengen

$$A \cup B = \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A \text{ und/oder } \omega \in B\}$$

Ergebnis ω ist in Ereignis A **und/oder** Ereignis B enthalten



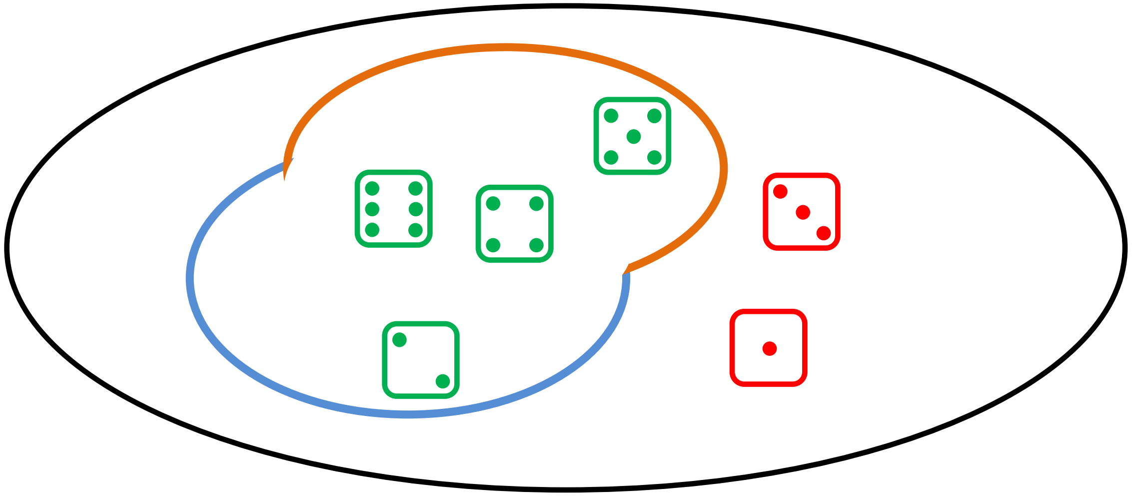
Mengentheoretische Grundlagen

Bezeichnungen: Beispiel Würfelwurf

Vereinigungsereignis zweier Mengen

$$2 \in \{2,4,6\} \cup \{4,5,6\}$$

Augenzahl 2 ist gerade Zahl



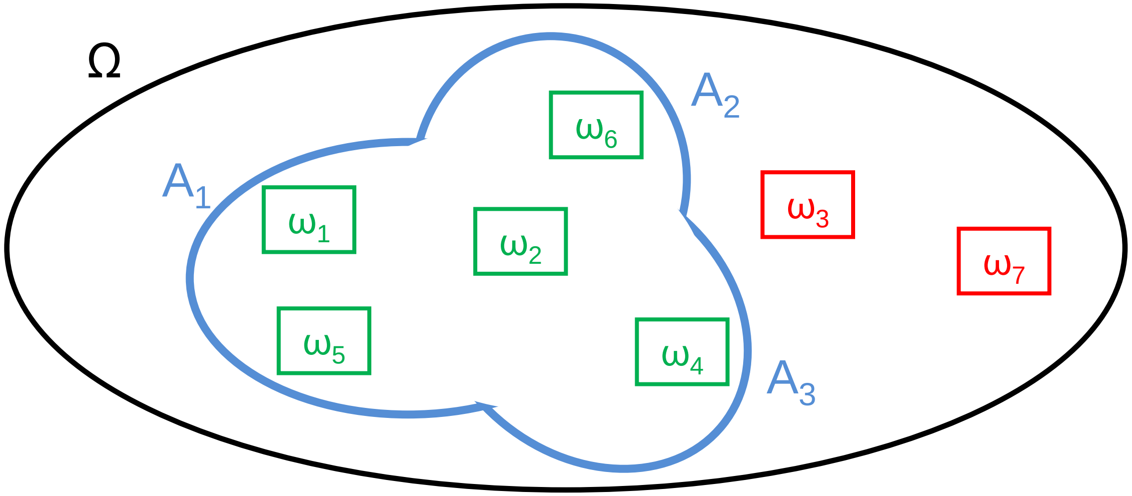
Mengentheoretische Grundlagen

Bezeichnungen

Vereinigungsereignis beliebig vieler Mengen

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{\omega \in \Omega \,|\, \omega \in A_i \text{ für mindestens ein } i \in I\}$$

Ergebnis ω ist in mindestens einem A_i enthalten



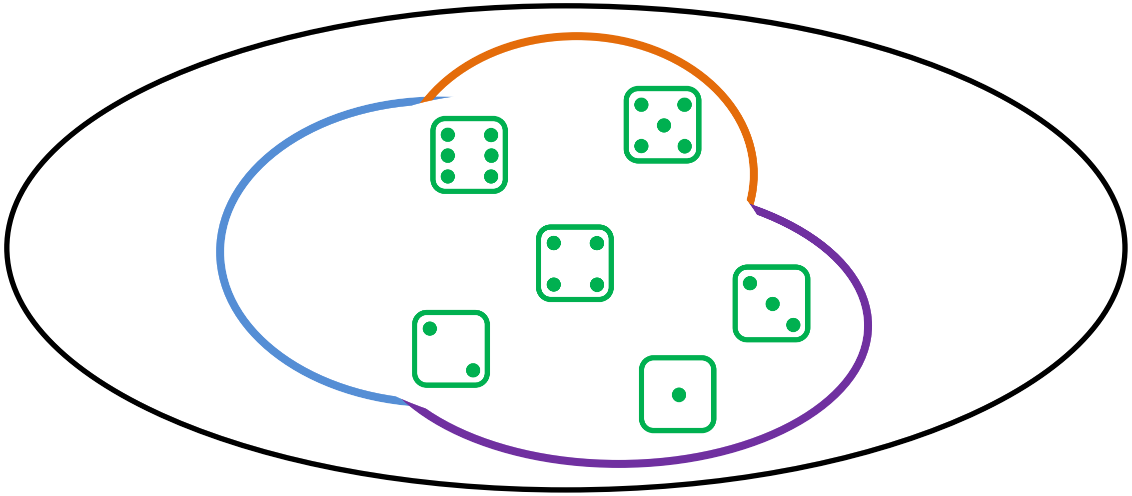
Mengentheoretische Grundlagen

Bezeichnungen: Beispiel Würfelwurf

Vereinigungsereignis beliebig vieler Mengen

$$5 \in \{2,4,6\} \cup \{4,5,6\} \cup \{1,2,3,4\}$$

Augenzahl 5 ist größer als 3



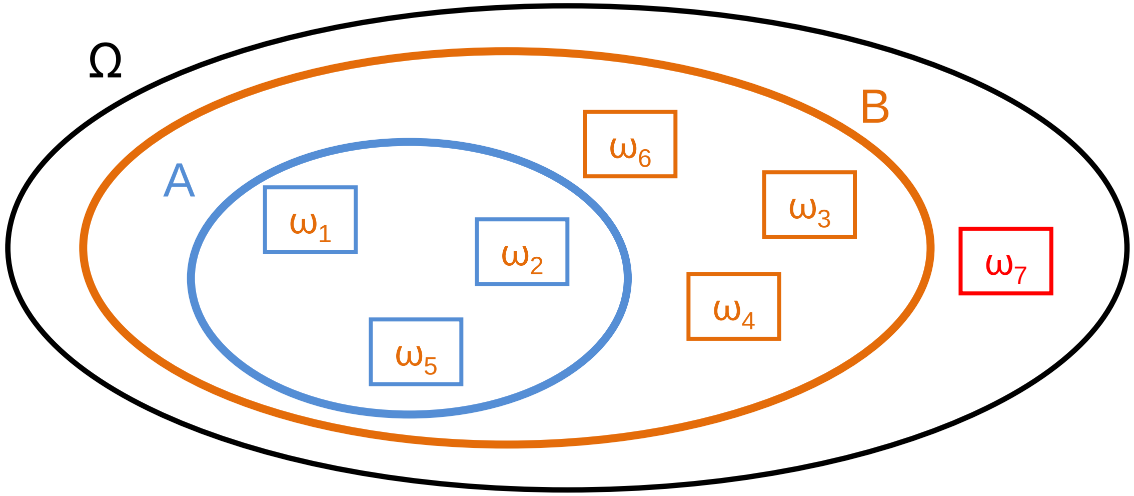
Mengentheoretische Grundlagen

Bezeichnungen

Teilereignis

$$A \subset B \;(\text{bzw.} A \subseteq B)$$

Ereignis A ist in Ereignis B enthalten, aus Ereignis A folgt Ereignis B



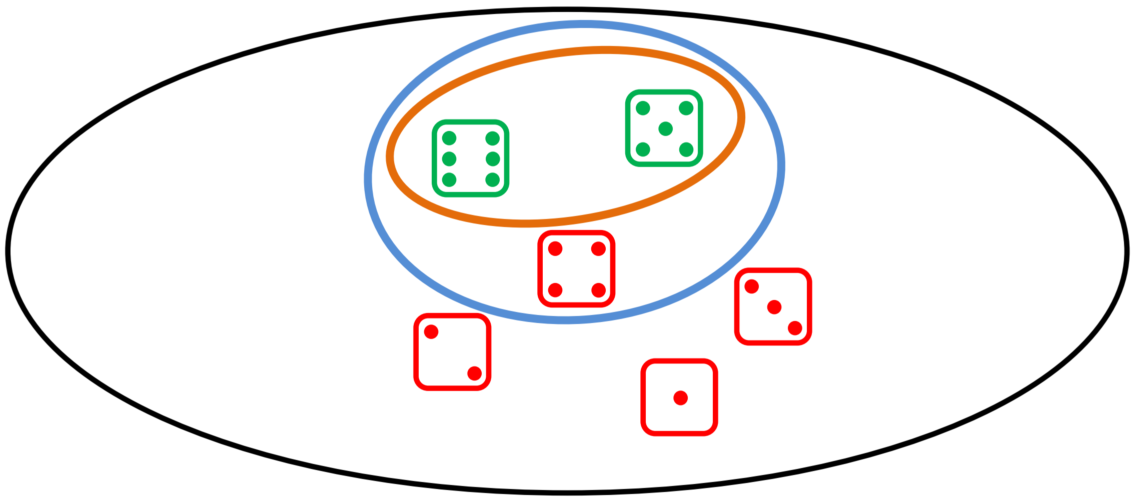
Mengentheoretische Grundlagen

Bezeichnungen: Beispiel Würfelwurf

Teilereignis

$$\{5,6\} \subset \{4,5,6\}$$

Augenzahl 5 ist größer als 4 und damit auch größer als 3



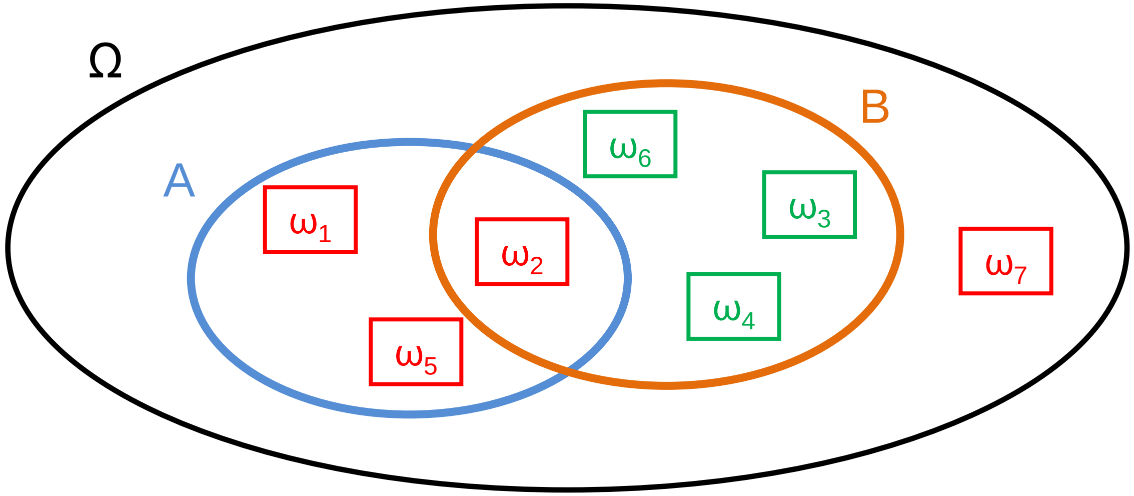
Mengentheoretische Grundlagen

Bezeichnungen

Differenzereignis

$$B\backslash A \;=\; \{\omega \in \Omega \,|\, \omega \in B \text{ und } \omega \notin A\}$$

Ergebnis ω ist in Ereignis B, aber nicht in Ereignis A enthalten



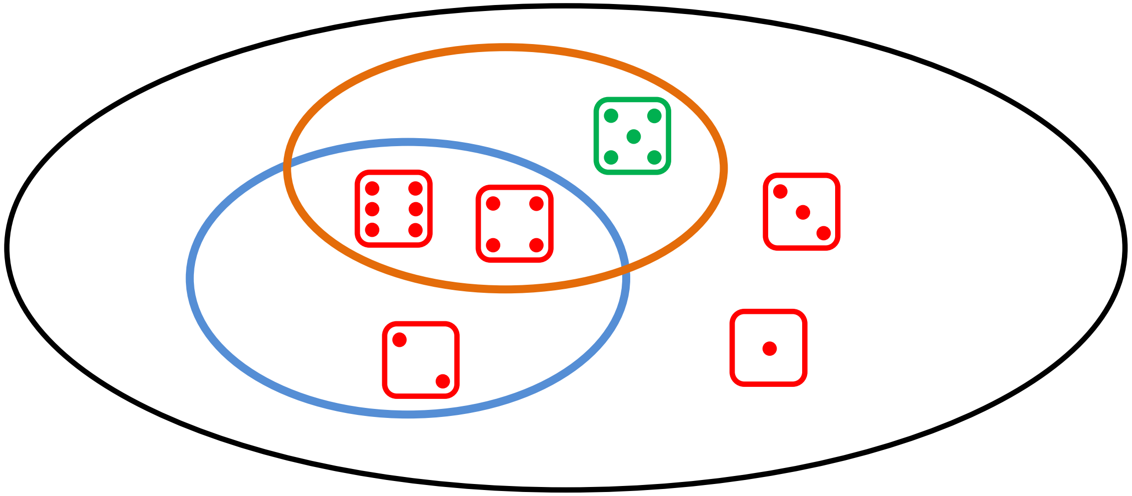
Mengentheoretische Grundlagen

Bezeichnungen: Beispiel Würfelwurf

Differenzereignis

$$5 \in \{4,5,6\} \setminus \{2,4,6\}$$

Augenzahl 5 ist größer als 3, aber nicht gerade Zahl



Mengentheoretische Grundlagen

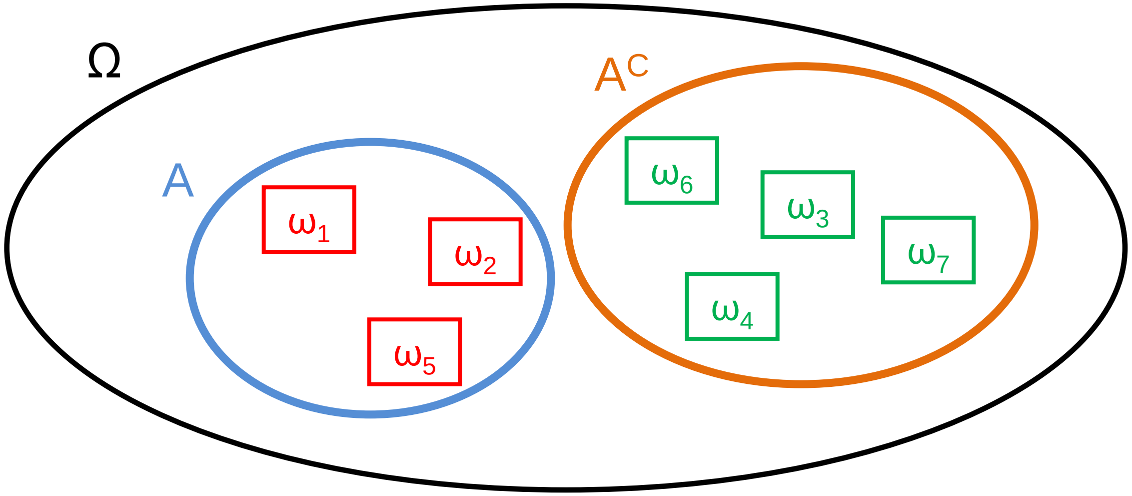
Bezeichnungen

Komplementärereignis

$$A^C = \Omega \setminus A = \{\omega \in \Omega \mid \omega \notin A\}$$

Ergebnis ω ist in Ereignis A^C enthalten ⇔ Ergebnis ω ist nicht in Ereignis A enthalten

Das Ereignis A^C heißt **Komplement** bzw. **Gegenereignis** von bzw. zu A



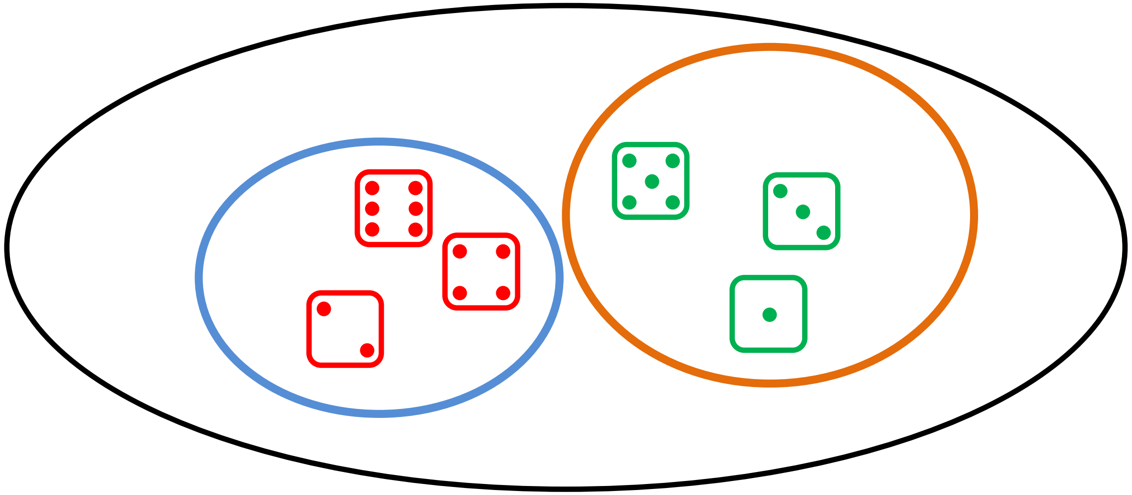
Mengentheoretische Grundlagen

Bezeichnungen: Beispiel Würfelwurf

Komplementärereignis

$$5 \in \{2,4,6\}^C$$

Augenzahl 5 ist nicht gerade Zahl



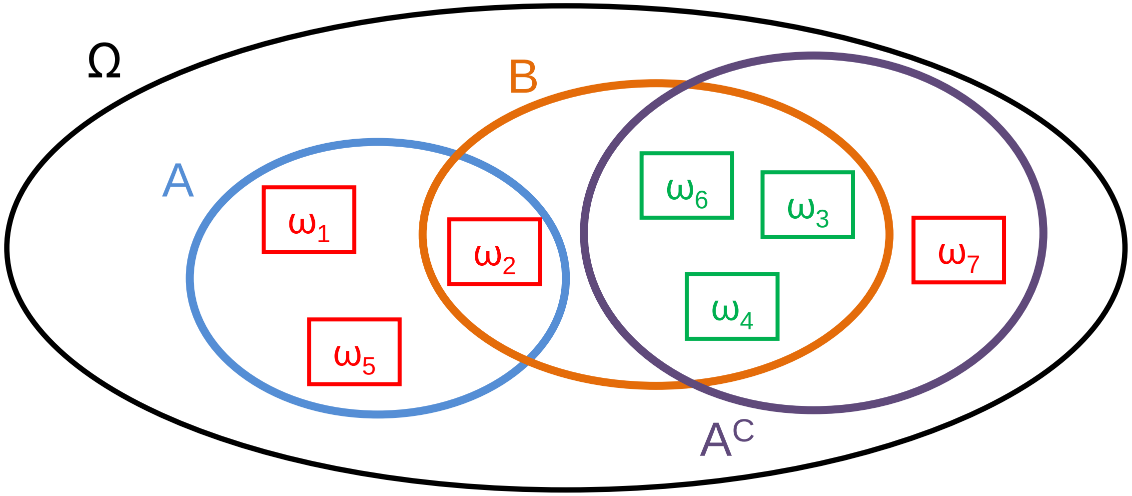
Mengentheoretische Grundlagen

Regeln

Differenzereignis und Komplementärereignis

$$B \backslash A \;=\; \{\omega \in \Omega \,|\, \omega \in B \text{ und } \omega \notin A\} \;=\; B \cap A^C \;=\; B \backslash (A \cap B)$$

Ergebnis ω ist in Ereignis B, aber nicht in Ereignis A enthalten

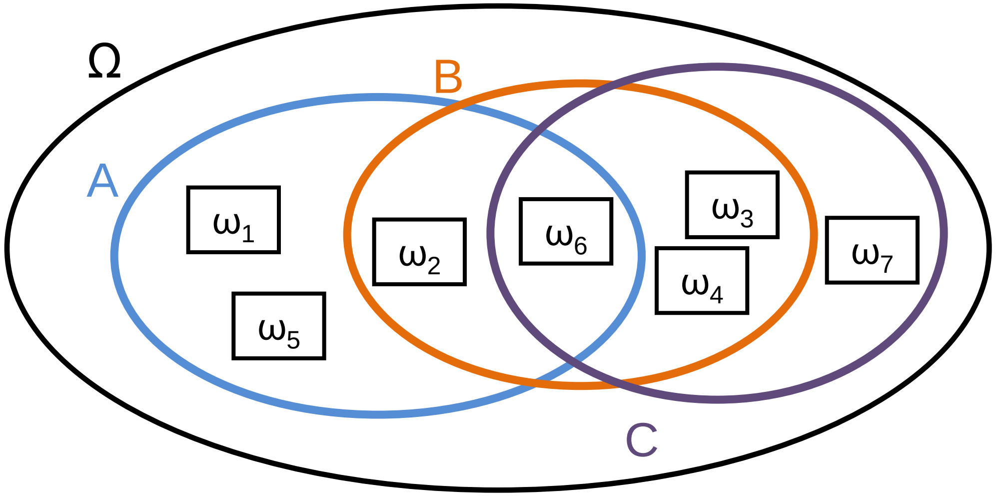


Mengentheoretische Grundlagen

Regeln

Distributivgesetz

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

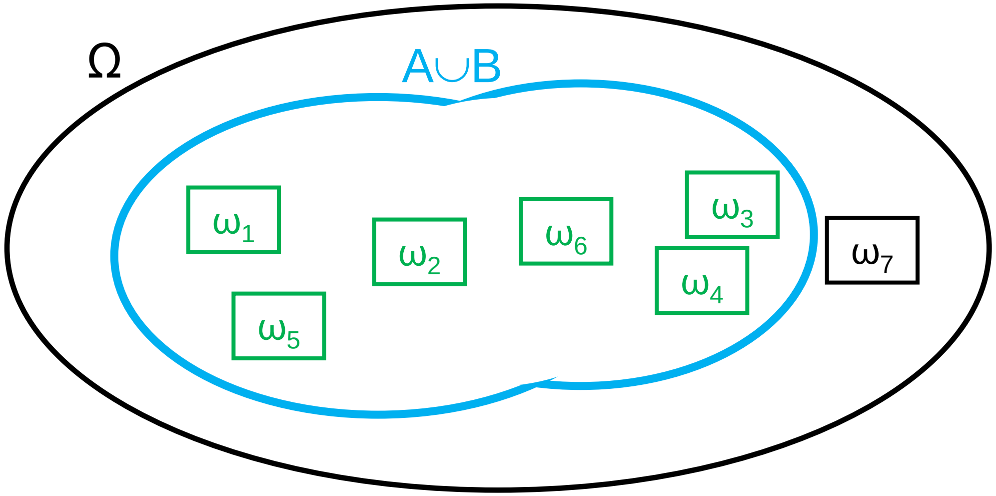


Mengentheoretische Grundlagen

Regeln

Distributivgesetz

$$\boxed{(A \cup B)} \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

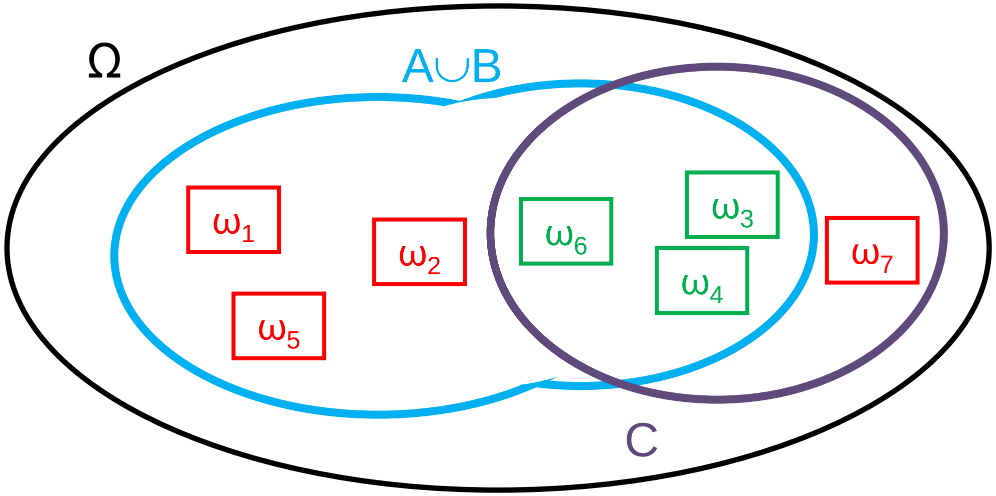


Mengentheoretische Grundlagen

Regeln

Distributivgesetz

$$\boxed{\boxed{(A \cup B)} \cap \boxed{C}} = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

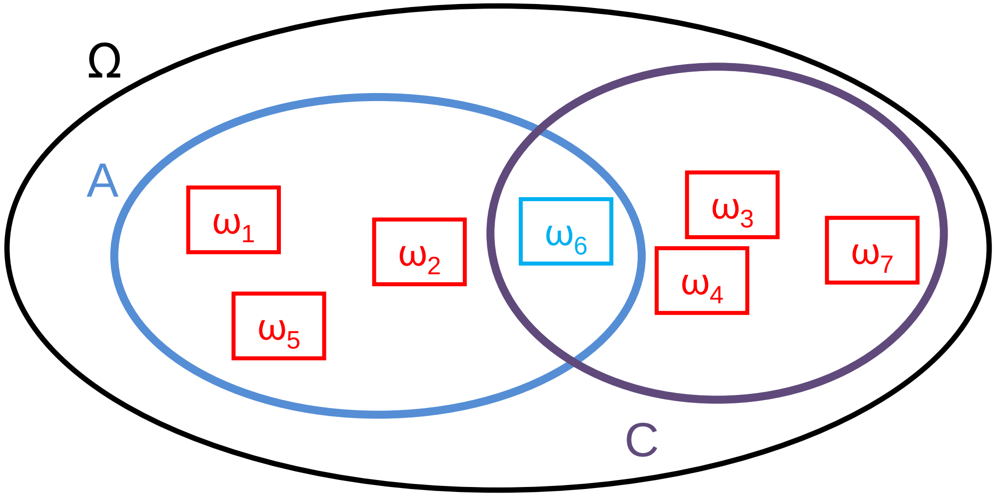


Mengentheoretische Grundlagen

Regeln

Distributivgesetz

$$(A \cup B) \cap C = \boxed{(A \cap C)} \cup (B \cap C)$$

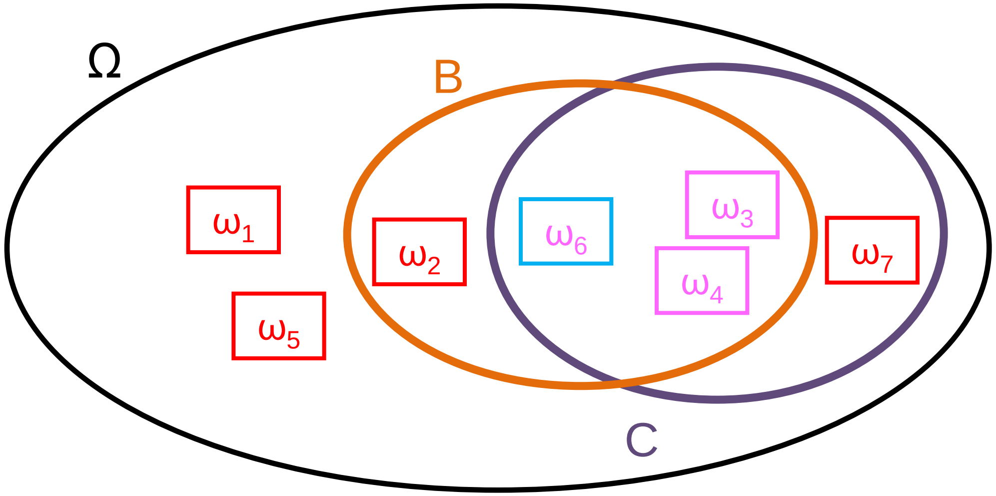


Mengentheoretische Grundlagen

Regeln

Distributivgesetz

$$(A \cup B) \cap C = \boxed{(A \cap C)} \cup \boxed{(B \cap C)}$$

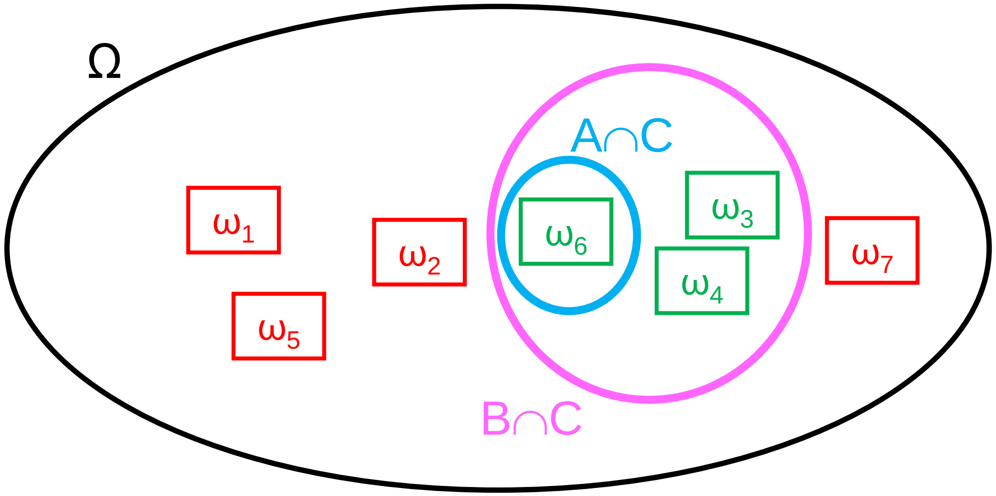


Mengentheoretische Grundlagen

Regeln

Distributivgesetz

$$(A\cup B)\cap C = \boxed{\boxed{(A\cap C)} \cup \boxed{(B\cap C)}}$$

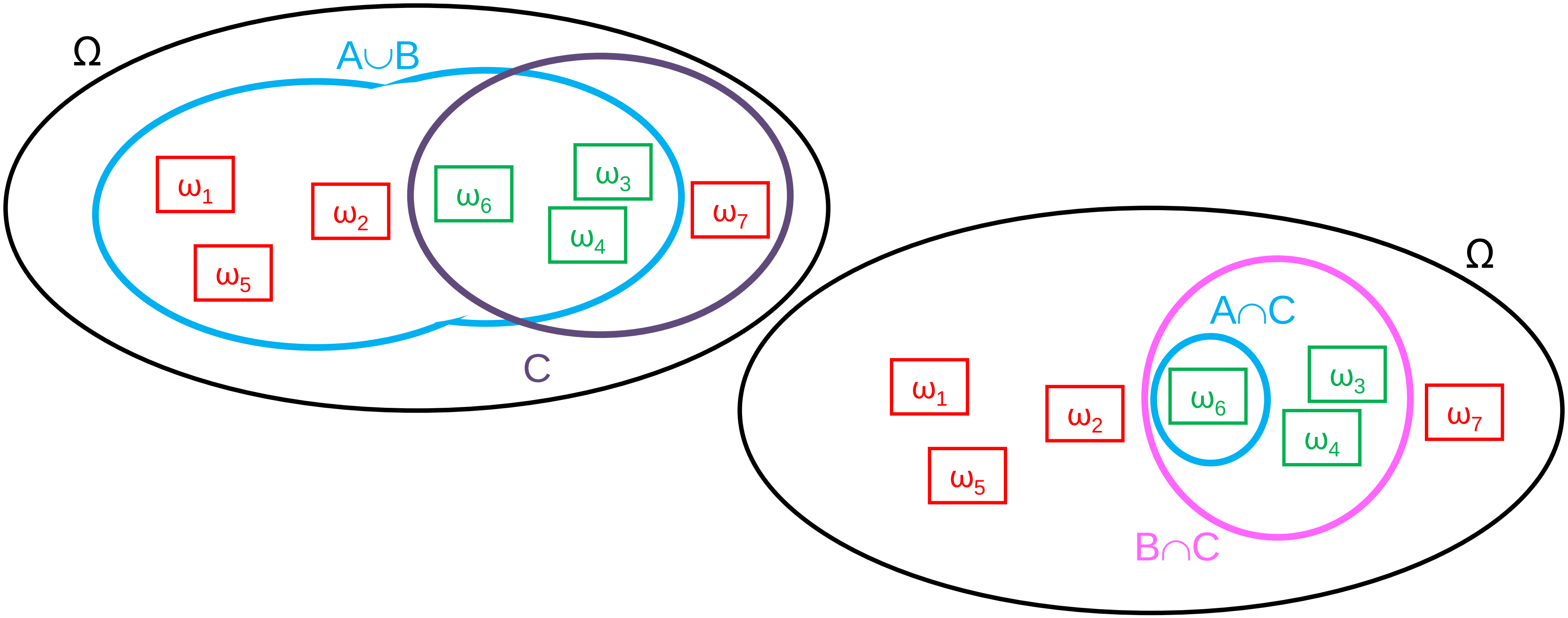


Mengentheoretische Grundlagen

Regeln

Distributivgesetz

$$\boxed{\boxed{(A\cup B)}\cap\boxed{C}}=\boxed{\boxed{(A\cap C)}\cup\boxed{(B\cap C)}}$$

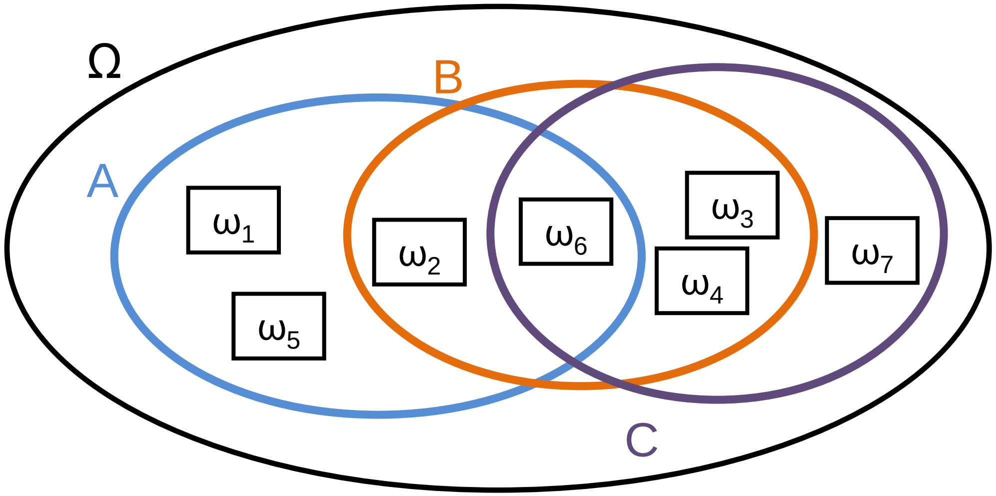


Mengentheoretische Grundlagen

Regeln

Distributivgesetz

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

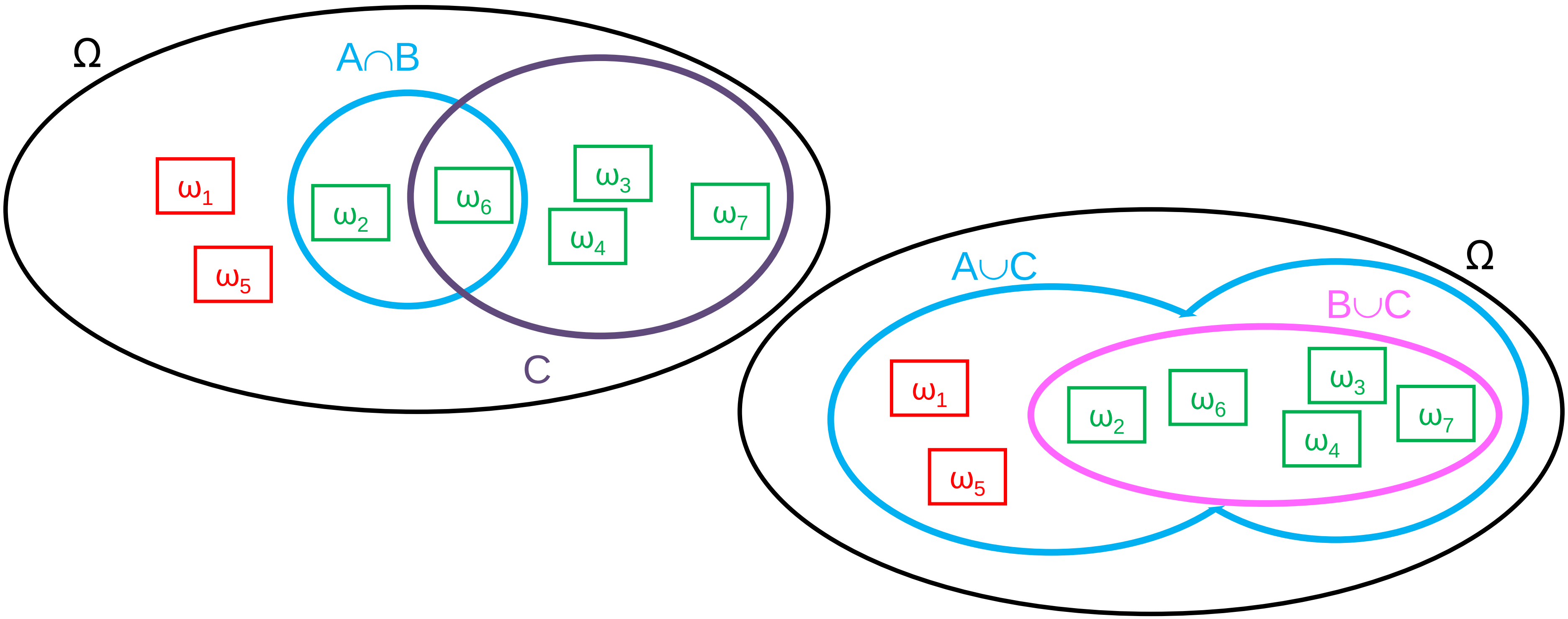


Mengentheoretische Grundlagen

Regeln

Distributivgesetz

$$\boxed{\boxed{(A \cap B)} \cup \boxed{C}} = \boxed{\boxed{(A \cup C)} \cap \boxed{(B \cup C)}}$$

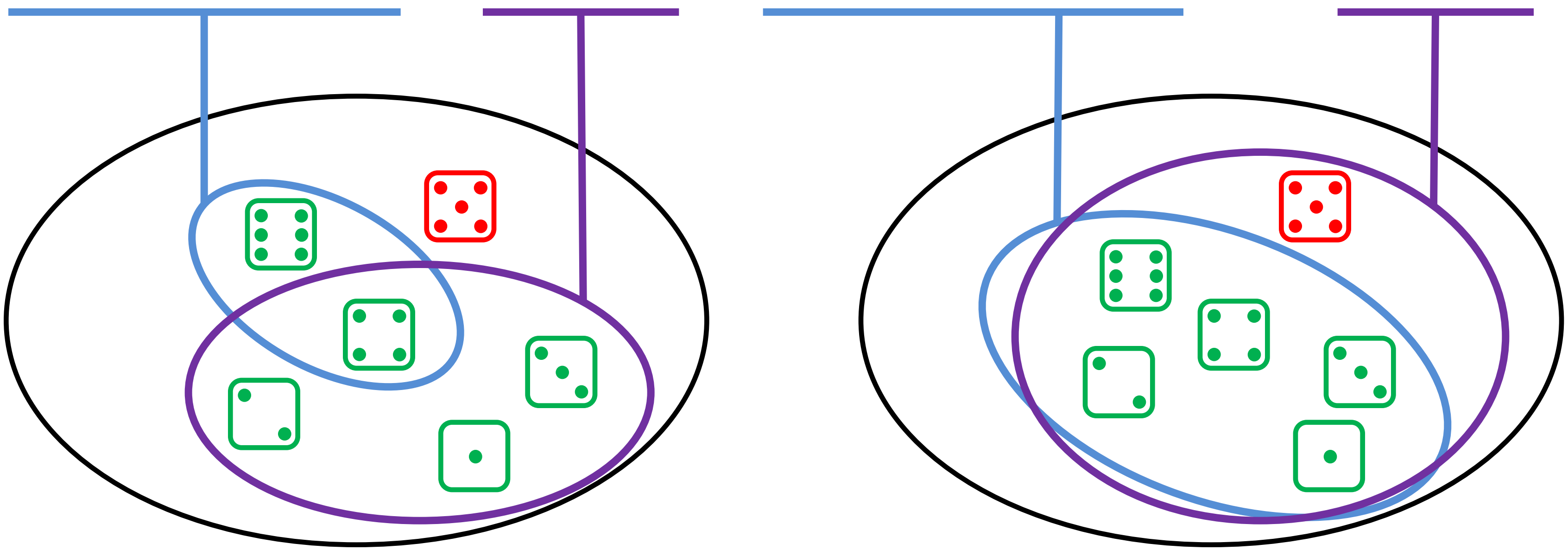


Mengentheoretische Grundlagen

Regeln: Beispiel Würfelwurf

Distributivgesetz

$$(\{2,4,6\} \cap \{4,5,6\}) \cup \{1,2,3,4\} = (\{2,4,6\} \cup \{1,2,3,4\}) \cap (\{4,5,6\} \cup \{1,2,3,4\})$$

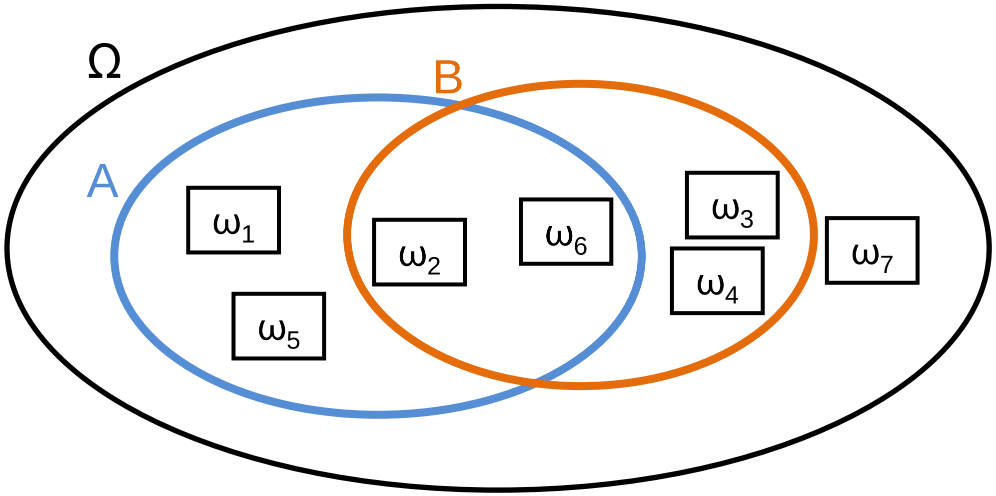


Mengentheoretische Grundlagen

Regeln

Regeln von de Morgan

$$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C \quad , \quad (A \cup B)^C = A^C \cap B^C$$

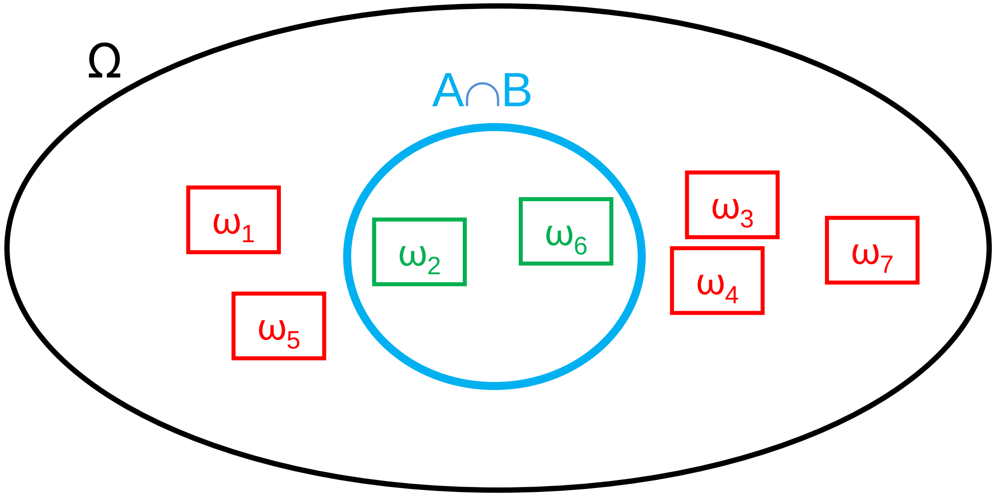


Mengentheoretische Grundlagen

Regeln

Regeln von de Morgan

$$\boxed{(A \cap B)}^C = A^C \cup B^C$$

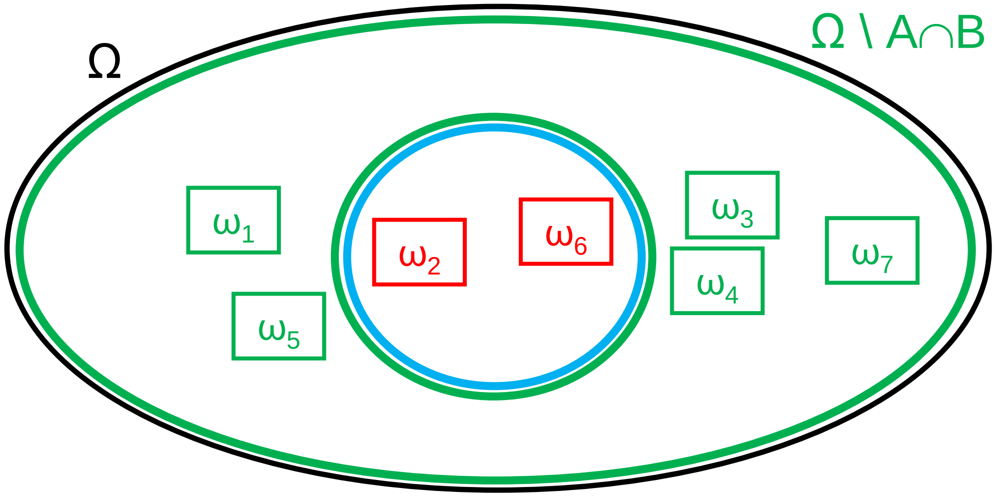


Mengentheoretische Grundlagen

Regeln

Regeln von de Morgan

$$\boxed{\boxed{(A \cap B)}^C} = A^C \cup B^C$$

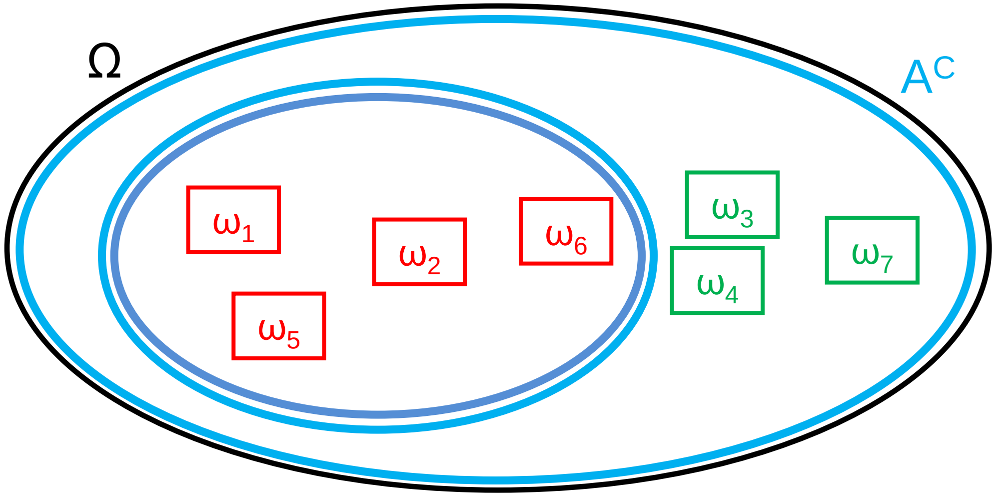


Mengentheoretische Grundlagen

Regeln

Regeln von de Morgan

$$(A \cap B)^C = \boxed{A^C} \cup B^C$$

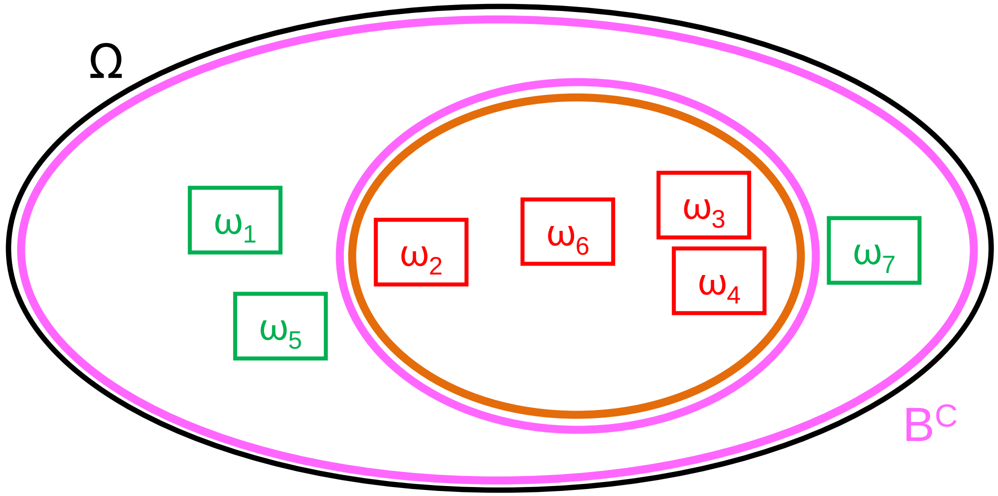


Mengentheoretische Grundlagen

Regeln

Regeln von de Morgan

$$(A \cap B)^C = A^C \cup \boxed{B^C}$$

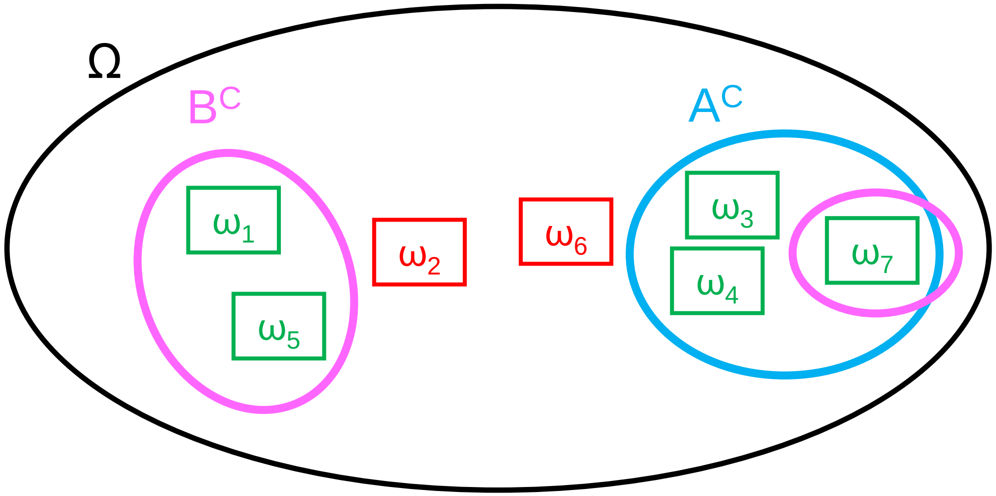


Mengentheoretische Grundlagen

Regeln

Regeln von de Morgan

$$(A \cap B)^C = \boxed{\boxed{A^C} \cup \boxed{B^C}}$$

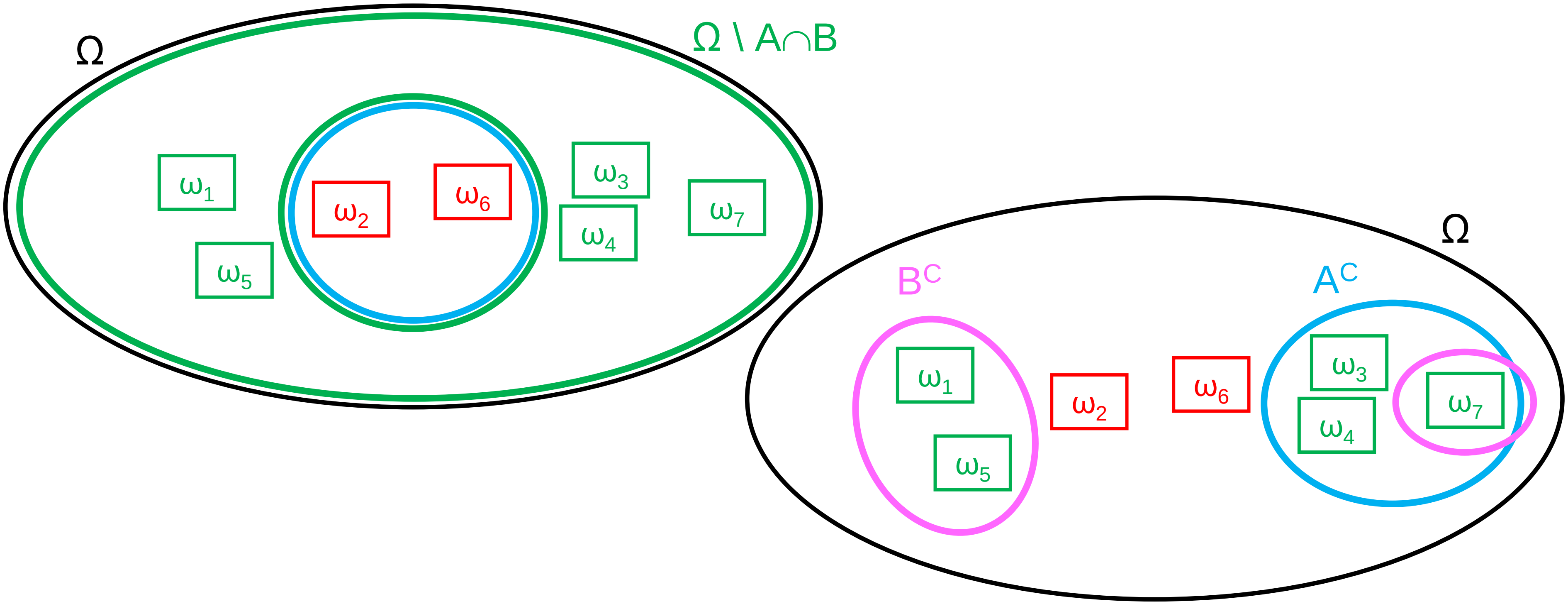


Mengentheoretische Grundlagen

Regeln

Regeln von de Morgan

$$\boxed{(A \cap B)^C} = \boxed{A^C \cup B^C}$$

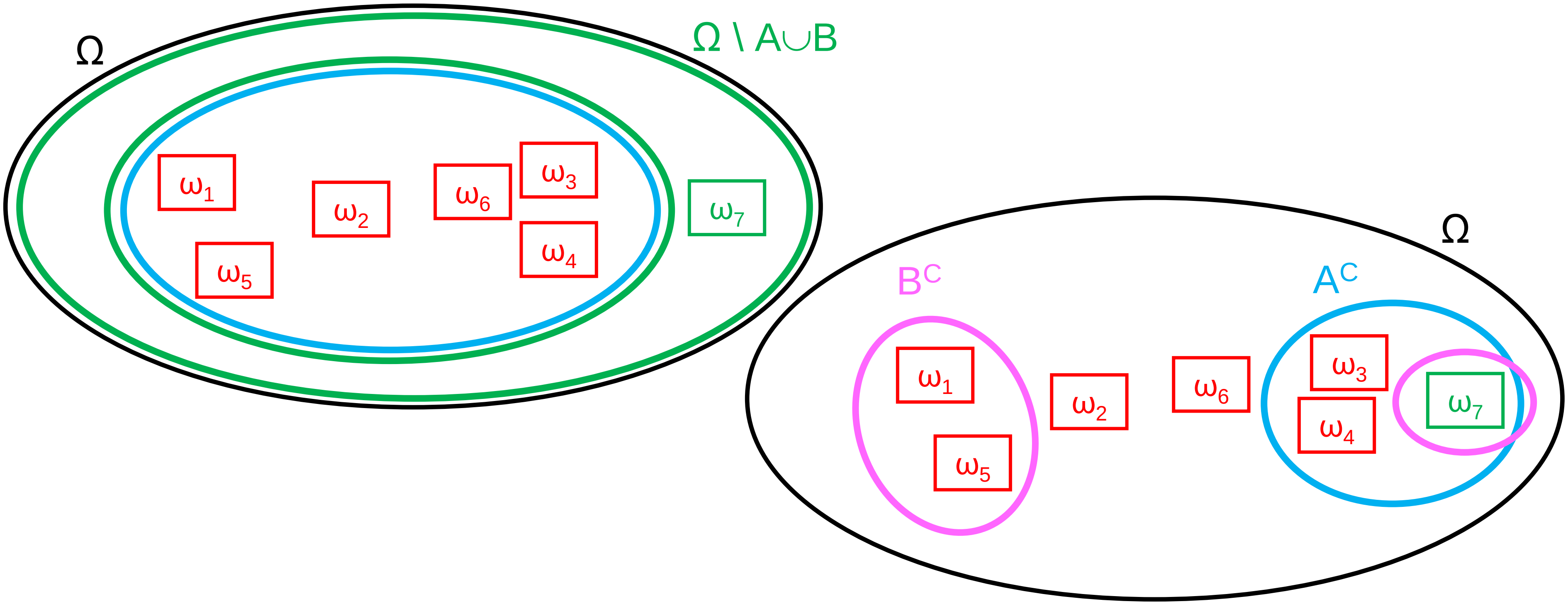


Mengentheoretische Grundlagen

Regeln

Regeln von de Morgan

$$\boxed{(A \cup B)^C} = \boxed{A^C} \cap \boxed{B^C}$$

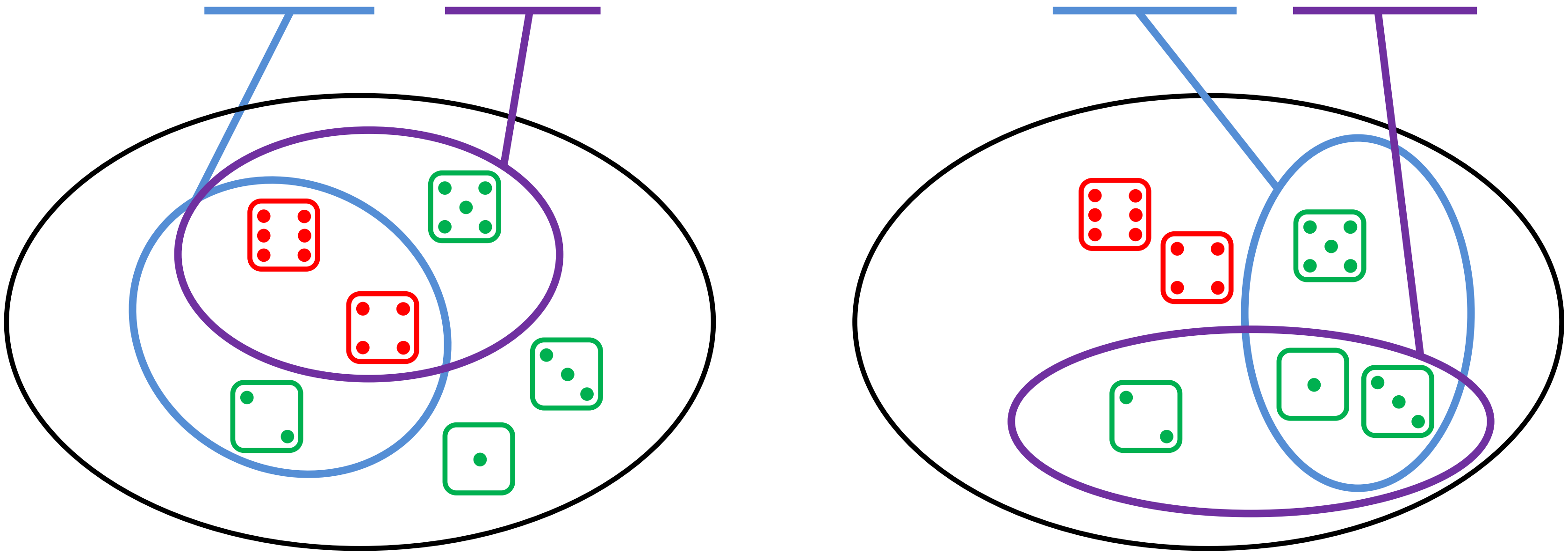


Mengentheoretische Grundlagen

Regeln: Beispiel Würfelwurf

Regeln von de Morgan

$$(\{2,4,6\} \cap \{4,5,6\})^C = \{2,4,6\}^C \cup \{4,5,6\}^C$$



Mengentheoretische Grundlagen

Beispiel Mausaktivität

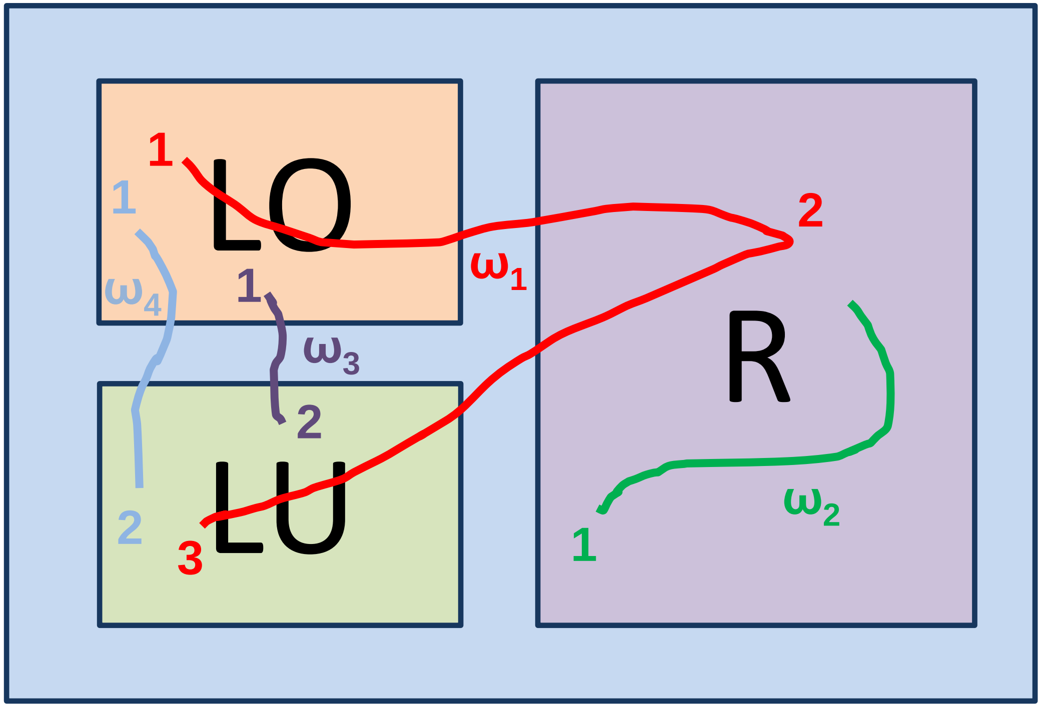
Ereignisbeispiele:

A $\supset\{\omega_1, \omega_3, \omega_4\}$
„Letzter Click auf LU“

B $\supset\{\omega_3, \omega_4\}$
„Mauszeiger immer in linker Hälfte“

C $\supset\{\omega_2\}$
„Nur einmal geclickt“

D $\supset\{\omega_1, \omega_2\}$
„R wurde geclickt“



Mengentheoretische Grundlagen

Zusammenfassung Bezeichnungen

Mathematische Schreibweise	**Ausformulierte Schreibweise**
$\omega \in A$	Ergebnis ω ist in Ereignis A enthalten
$A \cap B$	**Schnittereignis**: Menge aller Ergebnisse, die in A **und** B enthalten sind
$A \cap B = \emptyset$	A und B sind **disjunkt**: es gibt kein Ergebnis, dass in A und B enthalten ist
$A \cup B$	**Vereinigungsereignis**: Menge aller Ergebnisse, die in A **und/oder** B enthalten sind
$A \subseteq B$	A ist **Teilereignis** von B: Alle in A enthaltenen Ergebnisse sind auch in B enthalten
$B \setminus A$	**Differenzereignis**: Menge der Ergebnisse, die in B, aber nicht in A enthalten sind
$A^C = \Omega \setminus A$	**Komplementärereignis**: Menge aller Ergebnisse, die nicht in A enthalten sind

Mengentheoretische Grundlagen

Zusammenfassung Regeln

Mathematische Schreibweise	Ausformulierte Schreibweise
$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$	**Distributivgesetze**: Die Schnittmenge einer zwei Mengen A und B vereinigenden Menge mit einer weiteren Menge C ist gleich der Vereinigung der beiden aus C und jeweils einer der beiden Mengen A und B gebildeten Schnittmengen. Die Vereinigung der Schnittmenge zweier Mengen A und B mit einer weiteren Menge C ist gleich der Schnittmenge der beiden aus C und jeweils einer der beiden Mengen A und B gebildeten Vereinigungen
$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$ $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$	**Regeln von de Morgan**: Das Komplementärereignis der Schnittmenge zweier Mengen ist gleich der Vereinigung der Komplementärereignisse der zwei Mengen. Das Komplementärereignis der Vereinigung zweier Mengen ist gleich der Schnittmenge der Komplementärereignisse der zwei Mengen

Wahrscheinlichkeitsmaße, Wahrscheinlichkeitsräume

Zuletzt: Interpretation von Daten als Realisationen von Zufallsvariablen.
Mengentheoretische Grundlagen zur Ordnung von Ergebnissen und Ereignissen

Ergebnis und Ereignis $\omega \in A$	**Teilereignis** $A \subseteq B$	**Vereinigungsereignis** $A \cup B$
Schnittereignis $A \cap B$	**Differenzereignis** $B \setminus A$	**Distributivgesetze** $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
Disjunkte Ereignisse $A \cap B = \emptyset$	**Komplementärereignis** $A^C = \Omega \setminus A$	**Regeln von de Morgan** $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$ $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

Jetzt: Zuordnung von Wahrscheinlichkeiten zu Ergebnissen und Ereignissen

Wahrscheinlichkeitsmaße, Wahrscheinlichkeitsräume

Kolmogorov-Axiome, Wahrscheinlichkeitsmaß

Seien Ω ein Grundraum und $\mathcal{A}$ die Menge aller Ereignisse über Ω.
Dann heißt die Abbildung

$$P: \mathcal{A} \rightarrow [0,1] \ , \qquad A \mapsto P(A),$$

ein **Wahrscheinlichkeitsmaß**, falls sie folgende Eigenschaften (**Kolmogorov-Axiome**) besitzt:

1. $0 \leq P(A) \leq 1$ für jedes Ereignis $A \in \mathcal{A}$
2. $P(\Omega) = 1$
3. $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ für alle paarweise disjunkten Ereignisse $A_i \in \mathcal{A}$

Der Wert P(A) für ein Ereignis A heißt **Wahrscheinlichkeit** von A.
Das Tripel $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ heißt **Wahrscheinlichkeitsraum**.

Wahrscheinlichkeitsmaße, Wahrscheinlichkeitsräume

Kolmogorov-Axiome, Wahrscheinlichkeitsmaß: Beispiel Würfelwurf

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$\mathcal{A}$ = **{**Ø, {1}, {2}, {3}, {4}, {5}, {6},
{1,2}, {1,3}, {1,4}, {1,5}, {1,6}, {2,3}, {2,4}, {2,5}, {2,6}, {3,4}, {3,5}, {3,6}, {4,5}, {4,6}, {5,6},
{1,2,3}, {1,2,4}, {1,2,5}, {1,2,6}, {1,3,4}, {1,3,5}, {1,3,6}, {1,4,5}, {1,4,6}, {1,5,6}, {2,3,4}, {2,3,5}, {2,3,6}, {2,4,5},
{2,4,6}, {2,5,6}, {3,4,5}, {3,4,6}, {4,5,6},
{1,2,3,4}, {1,2,3,5}, {1,2,3,6}, {1,2,4,5}, {1,2,4,6}, {1,2,5,6}, {1,2,5,6}, {1,3,4,5}, {1,3,4,6}, {1,3,5,6}, {1,4,5,6},
{2,3,4,5}, {2,3,4,6}, {2,4,5,6}, {3,4,5,6},
{1,2,3,4,5}, {1,2,3,4,6}, {1,2,4,5,6}, {1,3,4,5,6}, {2,3,4,5,6},
{1,2,3,4,5,6}**}**

P({1}) = P({2}) = P({3}) = P({4}) = P({5}) = P({6}) = 1/6

1. $0 \le P(A) \le 6/6 = 1$ für alle $A \in \mathcal{A}$
2. $P(\Omega) = 1$
3. $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ für alle paarw. disj. Ereignisse $A_i \in \mathcal{A}$,

insb. für $A_i = \{i\},\ i = 1,\dots,6,\ A_i = \emptyset,\ i > 6$: $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}\{i\}\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{6}\{i\}\right) = P(\Omega) = \sum_{i=1}^{6} P(i) = 6/6 = 1$

Wahrscheinlichkeitsmaße, Wahrscheinlichkeitsräume

Kolmogorov-Axiome, Wahrscheinlichkeitsmaß:

Beispiel Mausaktivität, interpolierte x-Position des Mauszeigers zu stetiger Zeit t

$\Omega = [1,800]$

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{array}{l} \emptyset,\ \{(a,b) \mid a \in \Omega, b \in \Omega, a \le b\}, \left\{ \bigcup_{c=1}^{2} (a_c, b_c) \mid a_c \in \Omega, b_c \in \Omega, a_c \le b_c \right\}, \ldots, \\ \left\{ \bigcup_{c=1}^{\infty} (a_c, b_c) \mid a_c \in \Omega, b_c \in \Omega, a_c \le b_c \right\}, \{[a,b) \mid \ldots\}, \ldots, \{(a,b] \mid \ldots\}, \{[a,b] \mid \ldots\}, \ldots \end{array} \right\}$$

$P([a,b]) = (b-a)/799, \ a \le b$

1. $0 \le P(A) \le 799/799 = 1$ für alle $A \in \mathcal{A}$
2. $P(\Omega) = 1$
3. $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ für alle paarw. disj. Ereignisse $A_i \in \mathcal{A}$,

z.B. für $A_1 = 1, A_2 = (1,400), A_3 = 400, A_4 = (400,800), A_5 = 800, A_i = \emptyset, i > 5$:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P\big(1 \cup (1,400) \cup 400 \cup (400,800) \cup 800\big) = P(\Omega) = \sum_{i=1}^{5} P(i) = \frac{0 + 399 + 0 + 400 + 0}{799} = 1$$

Wahrscheinlichkeitsmaße, Wahrscheinlichkeitsräume

Eigenschaften von Wahrscheinlichkeitsmaßen

$P: \mathcal{A} \to [0,1], \quad A \mapsto P(A)$

1. $0 \leq P(A) \leq 1$ für jedes Ereignis $A \in \mathcal{A}$
2. $P(\Omega) = 1$
3. $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ für alle paarweise disjunkten Ereignisse $A_i \in \mathcal{A}$

(i) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Beweis

Setze $A_1=A$, $A_2=B$, $A_i=\emptyset$, für i>2

$$\boxed{P(A \cup B)} = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \underset{3.}{=} \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = P(A_1) + \sum_{i=2}^{\infty} P(A_i)$$

$$\underset{3.}{=} P(A_1) + P\left(\bigcup_{i=2}^{\infty} A_i\right) = \boxed{P(A) + P(B)}$$

$\square$

Wahrscheinlichkeitsmaße, Wahrscheinlichkeitsräume

Eigenschaften von Wahrscheinlichkeitsmaßen

$P: \mathcal{A} \to [0,1], \quad A \mapsto P(A)$

1. $0 \leq P(A) \leq 1$ für jedes Ereignis $A \in \mathcal{A}$
2. $P(\Omega) = 1$
3. $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ für alle paarweise disjunkten Ereignisse $A_i \in \mathcal{A}$

(ii) $A \subseteq B \Rightarrow P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$

Beweis

$$P(B) = P\left((B \setminus A) \cup A\right) \underset{(i)}{=} P(B \setminus A) + P(A) \Rightarrow \boxed{P(B \setminus A) = P(B) - P(A)}$$

$\square$

Wahrscheinlichkeitsmaße, Wahrscheinlichkeitsräume

Eigenschaften von Wahrscheinlichkeitsmaßen

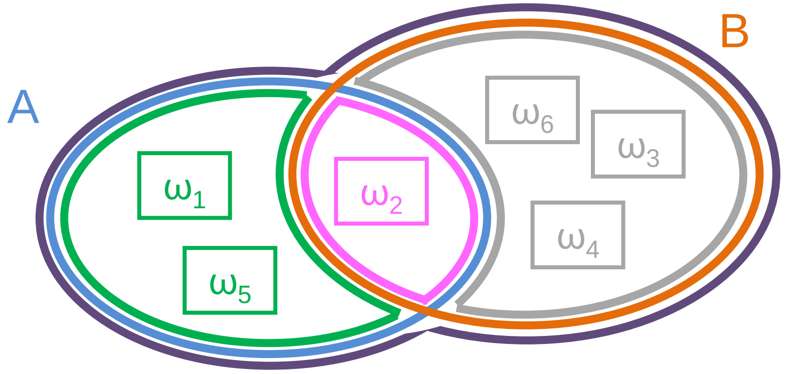
$P: \mathcal{A} \to [0,1], \quad A \mapsto P(A)$

1. $0 \leq P(A) \leq 1$ für jedes Ereignis $A \in \mathcal{A}$
2. $P(\Omega) = 1$
3. $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ für alle paarweise disjunkten Ereignisse $A_i \in \mathcal{A}$

(iii) $\mathbf{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$

Beweis

$A \cup B = [A \setminus (A \cap B)] \cup [B \setminus (A \cap B)] \cup [A \cap B]$



Wahrscheinlichkeitsmaße, Wahrscheinlichkeitsräume

Eigenschaften von Wahrscheinlichkeitsmaßen

$P: \mathcal{A} \to [0,1], \quad A \mapsto P(A)$

1. $0 \le P(A) \le 1$ für jedes Ereignis $A \in \mathcal{A}$
2. $P(\Omega) = 1$
3. $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ für alle paarweise disjunkten Ereignisse $A_i \in \mathcal{A}$

(iii) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Beweis

$A \cup B = [A \setminus (A \cap B)] \cup [B \setminus (A \cap B)] \cup [A \cap B]$

$$\Rightarrow \boxed{P([A \cup B])} = P([A \setminus (A \cap B)] \cup [B \setminus (A \cap B)] \cup [A \cap B])$$

$$\underset{(i)}{=} P([A \setminus (A \cap B)]) + P([B \setminus (A \cap B)]) + P(A \cap B)$$

$$\underset{(ii)}{=} P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) + P(A \cap B) \boxed{= P(A) + P(B) - P(A \cap B)} \quad \square$$

Wahrscheinlichkeitsmaße, Wahrscheinlichkeitsräume

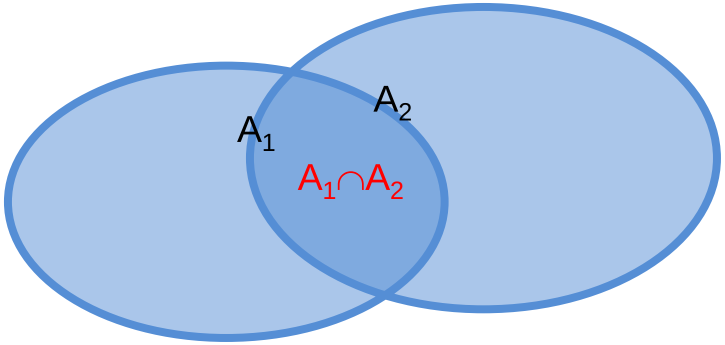
Eigenschaften von Wahrscheinlichkeitsmaßen

(iii) $\mathbf{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$

(iv) $$\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=1}^{N} \mathbf{A}_n\right) = \sum_{m=1}^{N} (-1)^{m+1} \sum_{1 \le n_1 < \ldots < n_m \le N} \mathbf{P}(\mathbf{A}_{n_1} \cap \ldots \cap \mathbf{A}_{n_m})$$ **Poincaré-Sylvesterformel**

$$N = 2: \quad P(A_1 \cup A_2) = (-1)^{1+1} \cdot P(A_1) + (-1)^{1+1} \cdot P(A_2) + (-1)^{2+1} \cdot P(A_1 \cap A_2)$$

$$= \boxed{P(A_1)} + \boxed{P(A_2)} - \boxed{P(A_1 \cap A_2)}$$



Wahrscheinlichkeitsmaße, Wahrscheinlichkeitsräume

Eigenschaften von Wahrscheinlichkeitsmaßen

(iii) $\mathbf{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$

(iv) $\mathbf{P\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) = \sum_{m=1}^{N} (-1)^{m+1} \sum_{1 \le n_1 < \ldots < n_m \le N} P(A_{n_1} \cap \ldots \cap A_{n_m})}$ **Poincaré-Sylvesterformel**

$$N = 3: \quad P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = (-1)^{1+1} \cdot P(A_1) + (-1)^{1+1} \cdot P(A_2) + (-1)^{1+1} \cdot P(A_3)$$
$$+ (-1)^{2+1} \cdot P(A_1 \cap A_2) + (-1)^{2+1} \cdot P(A_1 \cap A_3) + (-1)^{2+1} \cdot P(A_2 \cap A_3)$$
$$+ (-1)^{3+1} \cdot P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

$$= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

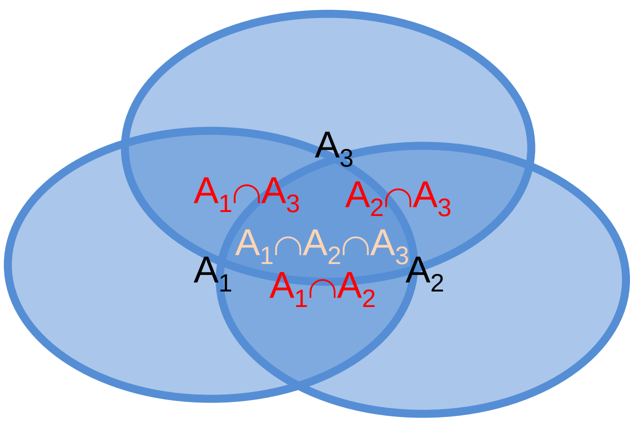
Wahrscheinlichkeitsmaße, Wahrscheinlichkeitsräume

Eigenschaften von Wahrscheinlichkeitsmaßen

(iii) $\mathbf{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$

(iv) $$\mathbf{P\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) = \sum_{m=1}^{N} (-1)^{m+1} \sum_{1 \le n_1 < \ldots < n_m \le N} P(A_{n_1} \cap \ldots \cap A_{n_m})}$$ **Poincaré-Sylvesterformel**

$$N = 3: \quad P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) =$$
$$\boxed{P(A_1)} + \boxed{P(A_2)} + \boxed{P(A_3)} - \boxed{P(A_1 \cap A_2)} - \boxed{P(A_1 \cap A_3)} - \boxed{P(A_2 \cap A_3)} + \boxed{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}$$



Wahrscheinlichkeitsmaße, Wahrscheinlichkeitsräume

Eigenschaften von Wahrscheinlichkeitsmaßen

$P: \mathcal{A} \to [0,1], \quad A \mapsto P(A)$

1. $0 \leq P(A) \leq 1$ für jedes Ereignis $A \in \mathcal{A}$
2. $P(\Omega) = 1$
3. $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ für alle paarweise disjunkten Ereignisse $A_i \in \mathcal{A}$

(v) **$P(A^C) = 1 - P(A)$**

Beweis

$$\boxed{P(A^C)} = P(\Omega \setminus A) \underset{(ii)}{=} P(\Omega) - P(A) = \boxed{1 - P(A)}$$

$\square$

Wahrscheinlichkeitsmaße, Wahrscheinlichkeitsräume

Eigenschaften von Wahrscheinlichkeitsmaßen

$P: \mathcal{A} \to [0,1], \quad A \mapsto P(A)$

1. $0 \leq P(A) \leq 1$ für jedes Ereignis $A \in \mathcal{A}$
2. $P(\Omega) = 1$
3. $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ für alle paarweise disjunkten Ereignisse $A_i \in \mathcal{A}$

(vi) **P(Ø) = 0**

Beweis

$$\boxed{P(\varnothing)} = P(\Omega^C) \underset{(v)}{=} 1 - P(\Omega) = \boxed{0}$$

$\square$

Wahrscheinlichkeitsmaße, Wahrscheinlichkeitsräume

Eigenschaften von Wahrscheinlichkeitsmaßen

$P: \mathcal{A} \to [0,1], \quad A \mapsto P(A)$

1. $0 \leq P(A) \leq 1$ für jedes Ereignis $A \in \mathcal{A}$
2. $P(\Omega) = 1$
3. $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ für alle paarweise disjunkten Ereignisse $A_i \in \mathcal{A}$

(vii) $\mathbf{A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)}$

Beweis

$$\boxed{A \subseteq B \Rightarrow} P(B \setminus A) \underset{(ii)}{=} P(B) - P(A)$$

$$\Rightarrow \boxed{P(A)} = P(B) - \underbrace{P(B \setminus A)}_{\geq 0} \boxed{\leq P(B)} \qquad \square$$

Wahrscheinlichkeitsmaße, Wahrscheinlichkeitsräume

Diskreter Wahrscheinlichkeitsraum

Seien $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ ein **endlicher** oder **abzählbar unendlicher** Grundraum und P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf Ω. Dann heißt $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ **diskreter Wahrscheinlichkeitsraum**.

Für beliebiges Ereignis $A \in \mathcal{A}$ gilt dann nach (i)

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i:\omega_i \in A} \{\omega_i\}\right) = \sum_{i:\omega_i \in A} P(\{\omega_i\})$$

Laplace-Raum

Treten die Elemente von endlichem $\Omega = \{\omega_1, \ldots \omega_{|\Omega|}\}$ aus einem diskreten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ alle mit der selben Wahrscheinlichkeit auf, d.h. gilt $P(\{\omega_i\})=1/|\Omega|$ für $i=1,\ldots, |\Omega|$, so wird $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ auch **Laplace-Raum** genannt und die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis $A \in \mathcal{A}$ kann durch $P(A)=|A|/|\Omega|$ angegeben werden.

Wahrscheinlichkeitsmaße, Wahrscheinlichkeitsräume

Eigenschaften von Wahrscheinlichkeitsmaßen, Diskreter Wahrscheinlichkeitsraum: Beispiel Bearbeitungen von Softwareaufgaben

Bearbei-tung	Bear-beiter(in)	Aufgabe	Version
e_1	Kai	Export	1.1
e_2	Kai	Verknüpfung	1.2
e_3	Miriam	Export	1.1
e_4	Tina	Verknüpfung	1.2
e_5	Oliver	Export	2.0
e_6	Tina	Export	1.2
e_7	Tina	Verknüpfung	1.2
e_8	Miriam	Export	1.2
e_9	Miriam	Export	1.2
e_{10}	Oliver	Abfrage	1.1
e_{11}	Oliver	Verknüpfung	2.0
e_{12}	Oliver	Abfrage	2.0

Zufällige Auswahl einer Bearbeitung
→ Ergebnis $\omega \in \{e_1,\dots,e_{12}\} = \Omega$
Elementarwahrscheinlichkeiten
$P(\{e_i\}) = 1/12, \; i = 1,\dots,12$

Ereignisse

1. Bearbeiter männlich
   $A_1 = \{e_1, e_2, e_5, e_{10}, e_{11}, e_{12}\}$
2. Gestellte Aufgabe Export
   $A_2 = \{e_1, e_3, e_5, e_6, e_8, e_9\}$
3. Verwendete Version 2.0
   $A_3 = \{e_5, e_{11}, e_{12}\}$

Wahrscheinlichkeitsmaße, Wahrscheinlichkeitsräume

Eigenschaften von Wahrscheinlichkeitsmaßen

(i) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

(ii) $A \subseteq B \Rightarrow P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$

(iii) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

(iv) $P\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) = \sum_{m=1}^{N} (-1)^{m+1} \sum_{1 \leq n_1 < \ldots < n_m \leq N} P(A_{n_1} \cap \ldots \cap A_{n_m})$

(v) $P(A^C) = 1 - P(A)$

(vi) $P(\emptyset) = 0$

(vii) $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

$\omega \in \{e_1, \ldots, e_{12}\} = \Omega$

$P(\{e_i\}) = 1/12, \; i = 1, \ldots, 12$

$A_1 = \{e_1, e_2, e_5, e_{10}, e_{11}, e_{12}\}$

$A_2 = \{e_1, e_3, e_5, e_6, e_8, e_9\}$

$A_3 = \{e_5, e_{11}, e_{12}\}$

Wahrscheinlichkeitsmaße, Wahrscheinlichkeitsräume

Eigenschaften von Wahrscheinlichkeitsmaßen

(i) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

(ii) $A \subseteq B \Rightarrow P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$

(iii) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

(iv) $P\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) = \sum_{m=1}^{N} (-1)^{m+1} \sum_{1 \le n_1 < \ldots < n_m \le N} P(A_{n_1} \cap \ldots \cap A_{n_m})$

(v) $P(A^C) = 1 - P(A)$

(vi) $P(\emptyset) = 0$

(vii) $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \le P(B)$

$\omega \in \{e_1, \ldots, e_{12}\} = \Omega$

$P(\{e_i\}) = 1/12, \ i = 1, \ldots, 12$

$A_1 = \{e_1, e_2, e_5, e_{10}, e_{11}, e_{12}\}$

$A_2 = \{e_1, e_3, e_5, e_6, e_8, e_9\}$

$A_3 = \{e_5, e_{11}, e_{12}\}$

$$\begin{aligned}\mathbf{P(A_1)} &= P(\{e_1\} \cup \{e_2\} \cup \{e_5\} \cup \{e_{10}\} \cup \{e_{11}\} \cup \{e_{12}\}) \\ &= P\left(\left[(\{e_1\} \cup \{e_2\}) \cup (\{e_5\} \cup \{e_{10}\})\right] \cup [\{e_{11}\} \cup \{e_{12}\}]\right) \\ &= P(\{e_1\}) + P(\{e_2\}) + P(\{e_5\}) + P(\{e_{10}\}) + P(\{e_{11}\}) + P(\{e_{12}\}) = 6/12 = \mathbf{1/2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{P(A_2)} &= P(\{e_1\} \cup \{e_3\} \cup \{e_5\} \cup \{e_6\} \cup \{e_8\} \cup \{e_9\}) \\ &= P\left(\left[(\{e_1\} \cup \{e_3\}) \cup (\{e_5\} \cup \{e_6\})\right] \cup [\{e_8\} \cup \{e_9\}]\right) \\ &= P(\{e_1\}) + P(\{e_3\}) + P(\{e_5\}) + P(\{e_6\}) + P(\{e_8\}) + P(\{e_9\}) = 6/12 = \mathbf{1/2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{P(A_3)} &= P(\{e_5\} \cup \{e_{11}\} \cup \{e_{12}\} = P\left([\{e_5\} \cup \{e_{11}\}] \cup \{e_{12}\}\right) \\ &= P(\{e_5\}) + P(\{e_{11}\}) + P(\{e_{12}\}) = 3/12 = \mathbf{1/4}\end{aligned}$$

Wahrscheinlichkeitsmaße, Wahrscheinlichkeitsräume

Eigenschaften von Wahrscheinlichkeitsmaßen

(i) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$\boxed{\text{(ii)} \quad A \subseteq B \Rightarrow P(B \setminus A) = P(B) - P(A)}$

(iii) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

(iv) $P\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) = \sum_{m=1}^{N} (-1)^{m+1} \sum_{1 \le n_1 < \ldots < n_m \le N} P(A_{n_1} \cap \ldots \cap A_{n_m})$

(v) $P(A^C) = 1 - P(A)$

(vi) $P(\emptyset) = 0$

$\boxed{\text{(vii)} \quad A \subseteq B \Rightarrow P(A) \le P(B)}$

$\omega \in \{e_1, \ldots, e_{12}\} = \Omega$

$P(\{e_i\}) = 1/12, \quad i = 1, \ldots, 12$

$A_1 = \{e_1, e_2, e_5, e_{10}, e_{11}, e_{12}\}$

$A_2 = \{e_1, e_3, e_5, e_6, e_8, e_9\}$

$A_3 = \{e_5, e_{11}, e_{12}\}$

$P(A_1) = 1/2$

$P(A_2) = 1/2$

$P(A_3) = 1/4$

Wahrscheinlichkeit für eine Bearbeitung, die von einem Mann mit einer anderen Version als 2.0 durchgeführt wurde

$A_3 = \{e_5, e_{11}, e_{12}\} \subset \{e_1, e_2, e_5, e_{10}, e_{11}, e_{12}\} = A_1$

$\Rightarrow$ (ii) $\mathbf{P(A_1 \setminus A_3)} = P(A_1) - P(A_3) = 1/2 - 1/4 = \mathbf{1/4}$

$\Rightarrow$ (vii) $1/4 = P(A_3) \le P(A_1) = 1/2$

Wahrscheinlichkeitsmaße, Wahrscheinlichkeitsräume

Eigenschaften von Wahrscheinlichkeitsmaßen

(i) $A \cap B = \varnothing \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

(ii) $A \subseteq B \Rightarrow P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$

(iii) $\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$

(iv) $P\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) = \sum_{m=1}^{N} (-1)^{m+1} \sum_{1 \leq n_1 < \ldots < n_m \leq N} P(A_{n_1} \cap \ldots \cap A_{n_m})$

(v) $P(A^C) = 1 - P(A)$

(vi) $P(\varnothing) = 0$

(vii) $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

$\omega \in \{e_1, \ldots, e_{12}\} = \Omega$

$P(\{e_i\}) = 1/12, \ i = 1, \ldots, 12$

$A_1 = \{e_1, e_2, e_5, e_{10}, e_{11}, e_{12}\}$

$A_2 = \{e_1, e_3, e_5, e_6, e_8, e_9\}$

$A_3 = \{e_5, e_{11}, e_{12}\}$

$P(A_1) = 1/2$

$P(A_2) = 1/2$

$P(A_3) = 1/4$

Wahrscheinlichkeit für eine Bearbeitung, die Aufgabe Export hatte und/oder von einem Mann durchgeführt wurde

$$\begin{aligned}
\mathbf{P(A_1 \cup A_2)} &= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) \\
&= 1/2 + 1/2 - P(\{e_1, e_2, e_5, e_{10}, e_{11}, e_{12}\} \cap \{e_1, e_3, e_5, e_6, e_8, e_9\}) \\
&= 1 - P(\{e_1, e_5\}) = 1 - P(\{e_1\} \cup \{e_5\}) \\
&= 1 - (P(\{e_1\}) + P(\{e_5\})) = 1 - 2/12 = 10/12 = \mathbf{5/6}
\end{aligned}$$

Wahrscheinlichkeitsmaße, Wahrscheinlichkeitsräume

Eigenschaften von Wahrscheinlichkeitsmaßen

(i) $A \cap B = \varnothing \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

(ii) $A \subseteq B \Rightarrow P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$

(iii) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

(iv) $P\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) = \sum_{m=1}^{N} (-1)^{m+1} \sum_{1 \le n_1 < \ldots < n_m \le N} P(A_{n_1} \cap \ldots \cap A_{n_m})$

(v) $P(A^C) = 1 - P(A)$

(vi) $P(\varnothing) = 0$

(vii) $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \le P(B)$

$\omega \in \{e_1,\ldots,e_{12}\} = \Omega$

$P(\{e_i\}) = 1/12, \ i = 1,\ldots,12$

$A_1 = \{e_1, e_2, e_5, e_{10}, e_{11}, e_{12}\}$

$A_2 = \{e_1, e_3, e_5, e_6, e_8, e_9\}$

$A_3 = \{e_5, e_{11}, e_{12}\}$

$P(A_1) = 1/2$

$P(A_2) = 1/2$

$P(A_3) = 1/4$

W'keit für eine Bearbeitung, die Aufgabe Export hatte und/oder von einem Mann und /oder mit Version 2.0 durchgeführt wurde

$$\begin{aligned}
\mathbf{P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)} &= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) \\
&\quad - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\
&= 1/2 + 1/2 + 1/4 - P(\{e_1, e_5\}) - P(\{e_5, e_{11}, e_{12}\}) - P(\{e_5\}) + P(\{e_5\}) \\
&= 15/12 - 2/12 - 3/12 - 1/12 + 1/12 = 10/12 = \mathbf{5/6}
\end{aligned}$$

Wahrscheinlichkeitsmaße, Wahrscheinlichkeitsräume

Eigenschaften von Wahrscheinlichkeitsmaßen

(i) $A \cap B = \varnothing \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

(ii) $A \subseteq B \Rightarrow P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$

(iii) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

(iv) $P\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) = \sum_{m=1}^{N} (-1)^{m+1} \sum_{1 \le n_1 < \ldots < n_m \le N} P(A_{n_1} \cap \ldots \cap A_{n_m})$

(v) $P(A^C) = 1 - P(A)$

(vi) $P(\varnothing) = 0$

(vii) $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \le P(B)$

$\omega \in \{e_1,\ldots,e_{12}\} = \Omega$

$P(\{e_i\}) = 1/12, \; i = 1,\ldots,12$

$A_1 = \{e_1, e_2, e_5, e_{10}, e_{11}, e_{12}\}$

$A_2 = \{e_1, e_3, e_5, e_6, e_8, e_9\}$

$A_3 = \{e_5, e_{11}, e_{12}\}$

$P(A_1) = 1/2$

$P(A_2) = 1/2$

$P(A_3) = 1/4$

W'keit für eine Bearbeitung, die weder Aufgabe Export hatte noch von einem Mann noch mit Version 2.0 durchgeführt wurde

Mit (v): $\mathbf{P([A_1 \cup A_2 \cup A_3]^C)} = 1 - P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 1 - 5/6 = \mathbf{1/6}$

Mit de Morgan: $\mathbf{P([A_1 \cup A_2 \cup A_3]^C)} = P(A_1^C \cap A_2^C \cap A_3^C)$

$= P(\{e_3, e_4, e_6, e_7, e_8, e_9\} \cap \{e_2, e_4, e_7, e_{10}, e_{11}, e_{12}\} \cap$

$\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}\}) = P(\{e_4, e_7\}) = 2/12 = \mathbf{1/6}$

Wahrscheinlichkeitsmaße, Wahrscheinlichkeitsräume

Eigenschaften von Wahrscheinlichkeitsmaßen

(i) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

(ii) $A \subseteq B \Rightarrow P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$

(iii) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

(iv) $P\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) = \sum_{m=1}^{N} (-1)^{m+1} \sum_{1 \le n_1 < \ldots < n_m \le N} P(A_{n_1} \cap \ldots \cap A_{n_m})$

(v) $P(A^C) = 1 - P(A)$

(vi) $\boxed{P(\emptyset) = 0}$

(vii) $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \le P(B)$

$\omega \in \{e_1, \ldots, e_{12}\} = \Omega$

$P(\{e_i\}) = 1/12, \ i = 1, \ldots, 12$

$A_1 = \{e_1, e_2, e_5, e_{10}, e_{11}, e_{12}\}$

$A_2 = \{e_1, e_3, e_5, e_6, e_8, e_9\}$

$A_3 = \{e_5, e_{11}, e_{12}\}$

$P(A_1) = 1/2$

$P(A_2) = 1/2$

$P(A_3) = 1/4$

W'keit für eine Bearbeitung, die mit Version 2.0 von einer Frau durchgeführt wurde

$$\mathbf{P(A_1^C \cap A_3)} = P(\{e_3, e_4, e_6, e_7, e_8, e_9\} \cap \{e_5, e_{11}, e_{12}\}) = P(\emptyset) = 0$$