Musterlösung Aufgabe 15: Diskrete Dichte und Verteilungsfunktion

Ein Würfel habe 6 Seiten mit den Zahlen 1, 3, 3, 4, 4 und 6. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Würfel beim Würfeln auf eine bestimmte Seite fällt, sei jeweils $1/6$.

a) Bestimmen Sie die Zähldichte der Zufallsvariablen X, die das Ergebnis bezeichnet.

b) Bestimmen und skizzieren Sie die Verteilungsfunktion von X.

c) Bestimmen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

$$P(X > 3), \quad P(X \geq 3), \quad P(3 \cdot X + 1 < 9), \quad P(13/7 \leq X \leq 31/7).$$

Lösung:

(a) Zähldichte:

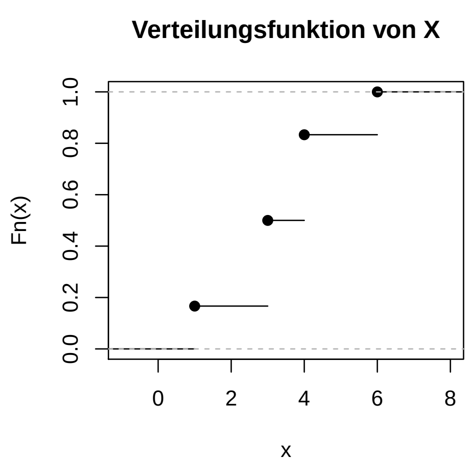
$$p(x) = \begin{cases} 1/6, & x \in \{1,6\}, \\ 1/3 & x \in \{3,4\}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

.

(b) Verteilungsfunktion:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ 1/6, & 1 \leq x < 3, \\ 1/2, & 3 \leq x < 4, \\ 5/6, & 4 \leq x < 6, \\ 1, & 6 \leq x. \end{cases}$$

.



(c)

$$\begin{aligned} P(X > 3) &= P(X = 4) + P(X = 6) \;=\; 1/3 + 1/6 \;=\; 1/2 \\ &= 1 - P(X \leq 3) = 1 - F(3) = 1 - 1/2 = 1/2, \\ P(X \geq 3) &= 1 - P(X \leq 1) \;=\; 1 - F(1) \;=\; 1 - 1/6 \;=\; 5/6, \\ P(3X + 1 < 9) &= P(X < 8/3) \;=\; P(X = 1) \;=\; 1/6, \\ P(13/7 \leq X < 31/7) &= P(X = 3) + P(X = 4) \;=\; 1/3 + 1/3 \;=\; 2/3 \\ &= F(31/7) - F(13/7) \;=\; 5/6 - 1/6 \;=\; 2/3. \end{aligned}$$

Musterlösung Aufgabe 16: Stetige Dichte und Verteilungsfunktion

Die Verteilung einer Zufallsvariablen X mit Werten in dem Intervall $[0,1]$, mit $c > 0\,, c \in \mathbb{R}$ habe die folgende Dichte:

$$f(x) = c\,(x + x^2).$$

a) Bestimmen Sie die Konstante c. Zeigen Sie, dass f tatsächlich eine Dichte ist.

b) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion von X.

c) Wie groß sind die folgenden Wahrscheinlichkeiten?

$$P(X \leq 1/3), \quad P(X > 1/2), \quad P(X = 1/2), \quad P(1/3 < X \leq 1/2), \quad P(X > 1).$$

Lösung:

(a) Das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\,du$ muss den Wert 1 annehmen.

$$\begin{aligned} 1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\,du &= \int_{-\infty}^{0} f(u)\,du + \int_{0}^{1} f(u)\,du + \int_{1}^{\infty} f(u)\,du \\ &= 0 + \int_{0}^{1} c\,(u + u^2)\,du + 0 = \left[c\,\left(\frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3\right)\right]_0^1 \\ &= c\,\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - c \cdot (0 + 0) = \frac{5}{6}\,c. \end{aligned}$$

Damit diese Forderung erfüllt ist, muss gelten: $c = \frac{6}{5}$.

Damit f eine Dichte ist, muss zusätzlich gelten: $f(x) \geq 0$ in dem Intervall $[0,1]$. Dies ist erfüllt, da c, x und x^2 nicht-negativ auf diesem Intervall sind.

(b) Die Verteilungsfunktion ergibt sich über

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du.$$

Für $x < 0$ ist $F(x)$ gleich Null, da hier die Dichtefunktion überall gleich Null ist. Für $x > 1$ ist $F(x)$ gleich Eins. Den Bereich dazwischen hatten wir in a) schon untersucht:

$$\begin{aligned} \int_{0}^{x} f(u)\,du &= \int_{0}^{x} c\,(u + u^2)\,du = \left[c\,\left(\frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3\right)\right]_0^x \\ &\underbrace{=}_{c=6/5} \frac{6}{5}\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3\right) = \frac{3}{5}x^2 + \frac{2}{5}x^3 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir insgesamt für die Verteilungsfunktion:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x < 0, \\ \frac{3}{5}x^2 + \frac{2}{5}x^3, & \text{falls } 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & \text{falls } x > 1. \end{cases}$$

(c) Alle Wahrscheinlichkeiten können mit Hilfe der Verteilungsfunktion berechnet werden:

$$\begin{aligned}
P(X \leq 1/3) &= F(1/3) = 3/(5 \cdot 9) + 2/(5 \cdot 27) = (9+2)/135 = 11/135 \approx 0.081, \\
P(X > 1/2) &= 1 - P(X \leq 1/2) = 1 - F(1/2) = 1 - (3/20 + 2/40) \\
&= 1 - 8/40 = 1 - 1/5 = 0.8, \\
P(X = 1/2) &= 0, \quad \text{(da stetige Verteilung)} \\
P(1/3 < X \leq 1/2) &= F(1/2) - F(1/3) = (1/5 - 11/135) = (27 - 11)/135 \\
&= 16/135 \approx 0.119, \\
P(X > 1) &= 1 - P(X \leq 1) = 1 - F(1) = 1 - 1 = 0.
\end{aligned}$$

Musterlösung Aufgabe 17: Bivariate Verteilungsfunktion

Bei einem Zufallsexperiment werden zwei faire Würfel geworfen, die jeweils 4 Seiten haben und bei denen die Werte 0, 1, 2, und 3 jeweils mit Wahrscheinlichkeit 1/4 erzielt werden. Es werden die Summe und die absolute Differenz der beiden gewürfelten Augenzahlen bestimmt. Dabei bezeichne die Zufallsvariable X die Summe und die Zufallsvariable Y die absolute Differenz der beiden gewürfelten Augenzahlen.

a) Bestimmen Sie die Zähldichte und die Verteilungsfunktion jeweils von X und von Y.

b) Bestimmen Sie die bivariate Zähldichte und die bivariate Verteilungsfunktion von (X, Y).

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeiten dass der erste Wurf mindestens größer als 0 ist? Wie groß sind die folgenden Wahrscheinlichkeiten?

$$P(1 \leq Y < 3), \quad P(X \leq 3, Y \leq 3), \quad P(X < 2, Y \geq 2).$$

Lösung:

(a) Die 16 möglichen Wurfkombinationen (erster Wurf und zweiter Wurf) haben jeweils die Wahrscheinlichkeit 1/16. Abhängig von der Wurfkombination ergibt sich für X (Summe) und für Y (absolute Differenz):

Würfe	X	Y	Würfe	X	Y	Würfe	X	Y	Würfe	X	Y
(0,0)	0	0	(1,0)	1	1	(2,0)	2	2	(3,0)	3	3
(0,1)	1	1	(1,1)	2	0	(2,1)	3	1	(3,1)	4	2
(0,2)	2	2	(1,2)	3	1	(2,2)	4	0	(3,2)	5	1
(0,3)	3	3	(1,3)	4	2	(2,3)	5	1	(3,3)	6	0

Damit erhält man für die Zähldichten und Verteilungsfunktionen von X und Y:

X (Summe)	0	1	2	3	4	5	6
p(x) = P(X = x)	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$
F(x) = P(X $\leq$ x)	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{10}{16}$	$\frac{13}{16}$	$\frac{15}{16}$	1

Y (absolute Differenz)	0	1	2	3
p(y) = P(Y= y)	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{2}{16}$
F(y) = P(Y $\leq$ y)	$\frac{4}{16}$	$\frac{10}{16}$	$\frac{14}{16}$	1

(b) Berechnung der bivariaten Dichte durch Auszählen der Kombinationen, dann Berechnung der bivariaten Verteilungsfunktion durch passendes Aufsummieren.

	$Y \rightarrow$	Absolute Differenz			
$X \downarrow$		0	1	2	3
	0	$\frac{1}{16}$	0	0	0
	1	0	$\frac{2}{16}$	0	0
	2	$\frac{1}{16}$	0	$\frac{2}{16}$	0
Summe	3	0	$\frac{2}{16}$	0	$\frac{2}{16}$
	4	$\frac{1}{16}$	0	$\frac{2}{16}$	0
	5	0	$\frac{2}{16}$	0	0
	6	$\frac{1}{16}$	0	0	0

Tabelle 1: *Zähldichte* p *von* (X, Y)

	$Y \rightarrow$	Absolute Differenz			
$X \downarrow$		0	1	2	3
	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
	1	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{16}$
	2	$\frac{2}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{6}{16}$
Summe	3	$\frac{2}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{8}{16}$	$\frac{10}{16}$
	4	$\frac{3}{16}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{11}{16}$	$\frac{13}{16}$
	5	$\frac{3}{16}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{13}{16}$	$\frac{15}{16}$
	6	$\frac{4}{16}$	$\frac{10}{16}$	$\frac{14}{16}$	$\frac{16}{16}$

Tabelle 2: *Verteilungsfunktion* F *von* (X, Y)

(c)

$$\begin{aligned}
P(1 \leq Y < 3) &= P(0 < Y \leq 2) = P(Y \leq 2) - P(Y \leq 0) \\
&= P(X \leq 6, Y \leq 2) - P(X \leq 6, Y \leq 0) \\
&= F(6,2) - F(6,0) = \frac{14}{16} - \frac{4}{16} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}, \\
P(X \leq 3, Y \leq 3) &= F(3,3) = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}, \\
P(X < 2, Y \geq 2) &= P(X \leq 1, Y > 1) = P(X \leq 1, Y \leq 3) - P(X \leq 1, Y \leq 1) \\
&= F(1,3) - F(1,1) = \frac{3}{16} - \frac{3}{16} = 0.
\end{aligned}$$

Weitere Beispiele:

$$
\begin{aligned}
P(X=3, Y=1) &= p(3,1) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}, \\
P(X \leq 2, Y \leq 2) &= F(2,2) = \frac{7}{16}, \\
P(3 \leq X \leq 5, 1 \leq Y \leq 2) &= P(2 \leq X \leq 5, 0 \leq Y \leq 2) \\
&= F(5,2) - F(5,0) - F(2,2) + F(2,0) \\
&= \frac{13-3-6+2}{16} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8} \\
&= p(3,1) + p(3,2) + p(4,1) + p(4,2) + p(5,1) + p(5,2) \\
&= \frac{2+0+0+2+2+0}{16} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}.
\end{aligned}
$$