Bedingte Wahrscheinlichkeiten und stochastische Unabhängigkeit

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Bisher: Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

Grundraum Ω, Menge aller Ereignisse $\mathcal{A}$ auf Ω, Wahrscheinlichkeitsmaß P auf Ω

$P: \mathcal{A} \to [0,1], \quad A \mapsto P(A)$

1. $0 \leq P(A) \leq 1$ für jedes Ereignis $A \in \mathcal{A}$
2. $P(\Omega) = 1$
3. $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ für alle paarweise disjunkten Ereignisse $A_i \in \mathcal{A}$

Jetzt: Wahrscheinlichkeitsraum $(B, \mathcal{B}, P_B)$

Einschränkung des Grundraums auf Ereignis $B \subset \Omega$, Wahrscheinlichkeitsmaß P_B auf B

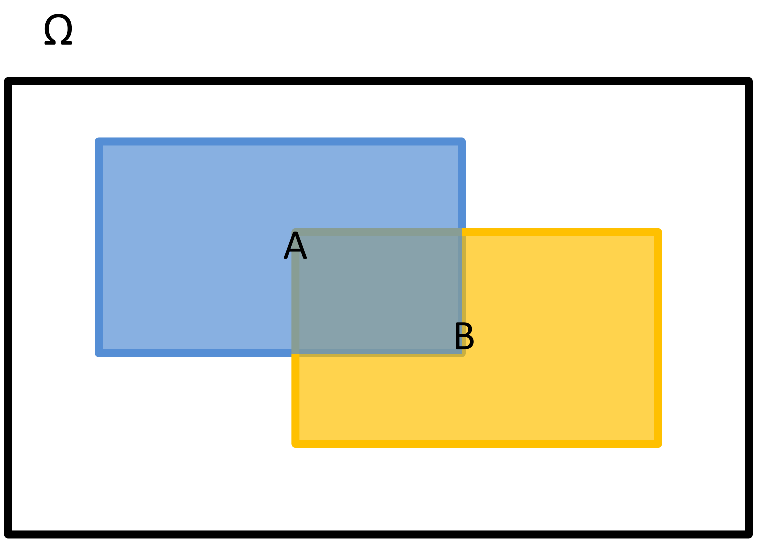
$P: \mathcal{B} \to [0,1], \quad B \mapsto P(B)$

1. $0 \leq P(B) \leq 1$ für jedes Ereignis $B \in \mathcal{B}$
2. $P(B) = 1$
3. $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i)$ für alle paarweise disjunkten Ereignisse $B_i \in \mathcal{B}$

Bedingte Wahrscheinlichkeiten und stochastische Unabhängigkeit

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

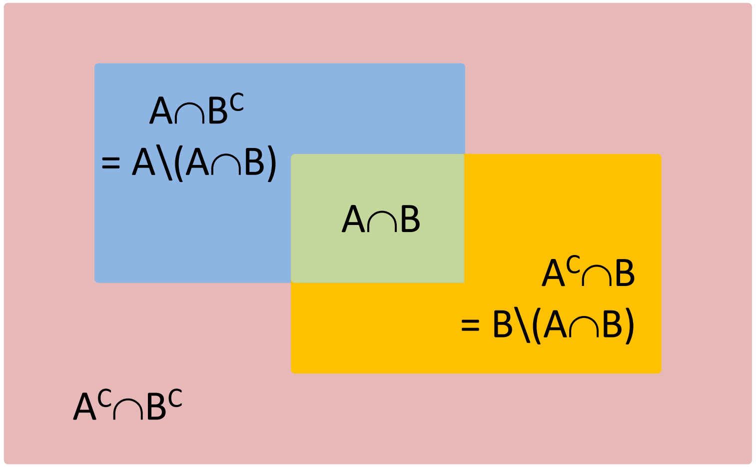
Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$



Bedingte Wahrscheinlichkeiten und stochastische Unabhängigkeit

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

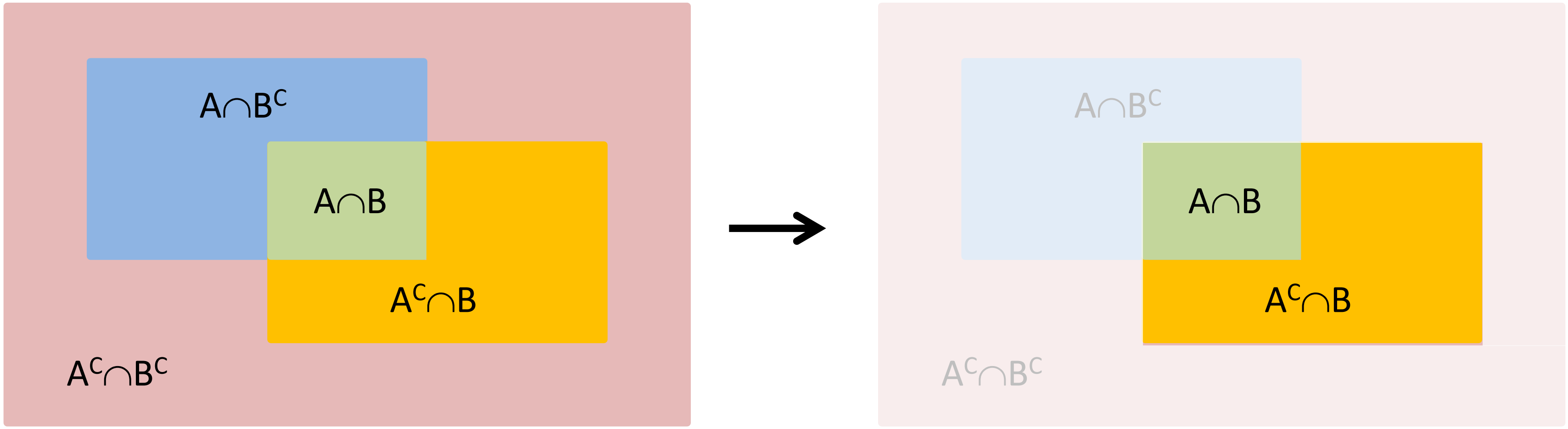


Bedingte Wahrscheinlichkeiten und stochastische Unabhängigkeit

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

Wahrscheinlichkeitsraum $(B, \mathcal{B}, P_B)$



$A \cap B^C \subset B^C$

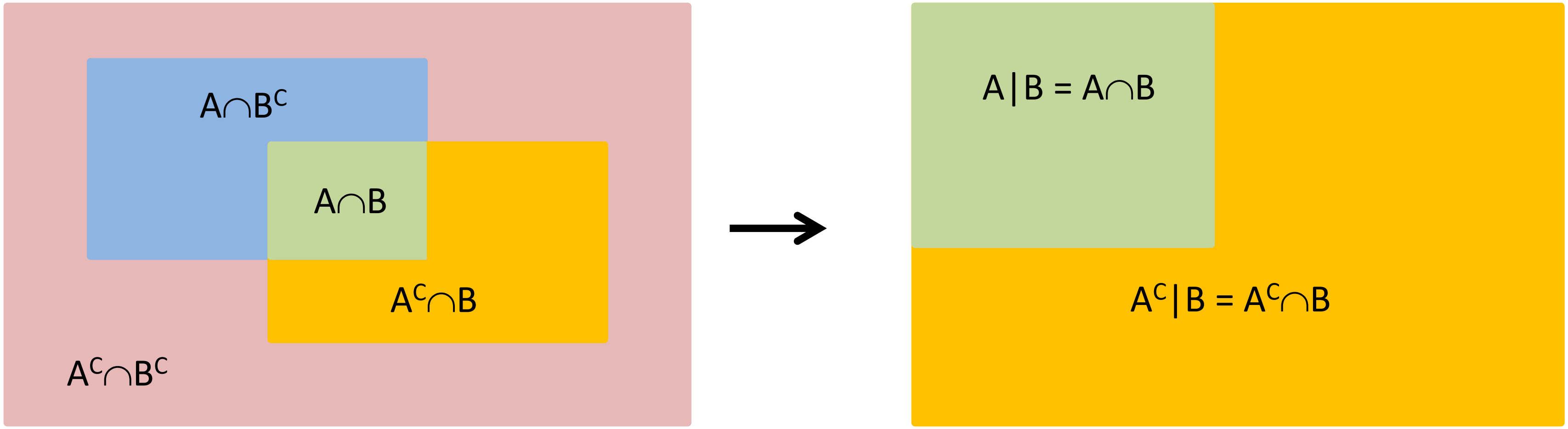
$A^C \cap B^C \subset B^C$

Bedingte Wahrscheinlichkeiten und stochastische Unabhängigkeit

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

Wahrscheinlichkeitsraum $(B, \mathcal{B}, P_B)$

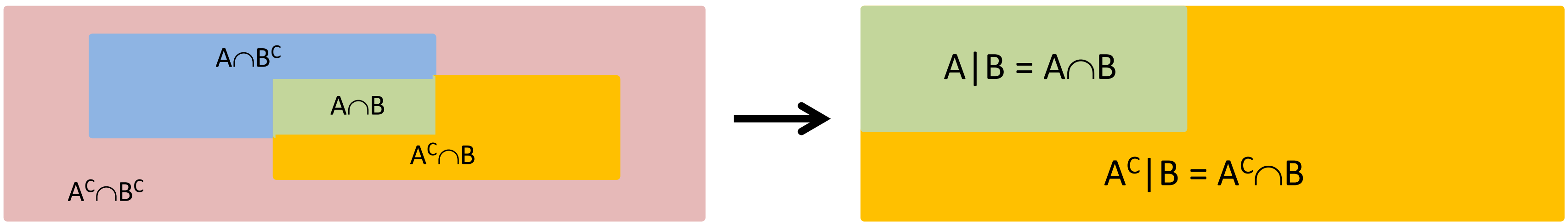


$A \cap B^C \subset B^C$
$A^C \cap B^C \subset B^C$

Bedingte Wahrscheinlichkeiten und stochastische Unabhängigkeit

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ Wahrscheinlichkeitsraum $(B, \mathcal{B}, P_B)$



$$1 = P(\Omega) = P_\Omega(\Omega) = P(\Omega \mid \Omega)$$

$$= P\left[\boxed{A \cap B^C}\right] + P\left[\boxed{A^C \cap B^C}\right]$$

$$+ P\left[\boxed{A \cap B}\right] + P\left[\boxed{A^C \cap B}\right]$$

$$= P(\boxed{C_1}) + P(\boxed{C_2}) + P(\boxed{C_3}) + P(\boxed{C_4})$$

$$1 = P_B(B) = P(B \mid B)$$

$$= P\left[\boxed{A \mid B}\right] + P\left[\boxed{A^C \mid B}\right]$$

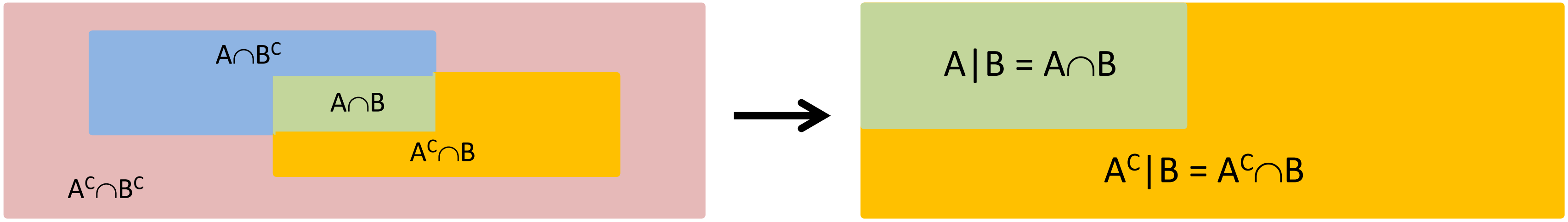
$$= P_B\left[\boxed{A \cap B}\right] + P_B\left[\boxed{A^C \cap B}\right]$$

$$= P_B(\boxed{C_3}) + P_B(\boxed{C_4})$$

Bedingte Wahrscheinlichkeiten und stochastische Unabhängigkeit

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ Wahrscheinlichkeitsraum $(B, \mathcal{B}, P_B)$



Die Wahrscheinlichkeit $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ heißt

bedingte Wahrscheinlichkeit von A gegeben B

Bedingte Wahrscheinlichkeiten und stochastische Unabhängigkeit

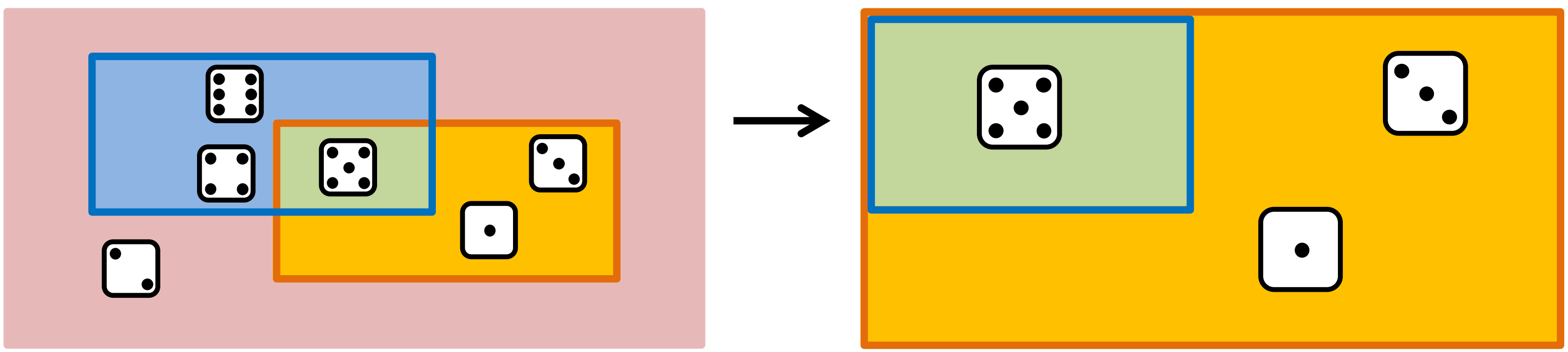
Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Beispiel: **einfacher Würfelwurf**

A = Zahl größer 3

B = Zahl ungerade

Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ Wahrscheinlichkeitsraum $(B, \mathscr{B}, P_B)$



$P_{(1,\ldots,6)}(A) = 3/6$ $P_{(1,\ldots,6)}(B) = 3/6$

$P_{(1,\ldots,6)}(A \cap B) = 1/6$

$P_{(1,3,5)}(B) = P_{(1,\ldots,6)}(B \cap B) / P_{(1,\ldots,6)}(B) = 1$

$P_{(1,3,5)}(A) = P_{(1,\ldots,6)}(A \cap B) / P_{(1,\ldots,6)}(B)$

$= (1/6)/(3/6) = 1/3$

Bedingte Wahrscheinlichkeiten und stochastische Unabhängigkeit

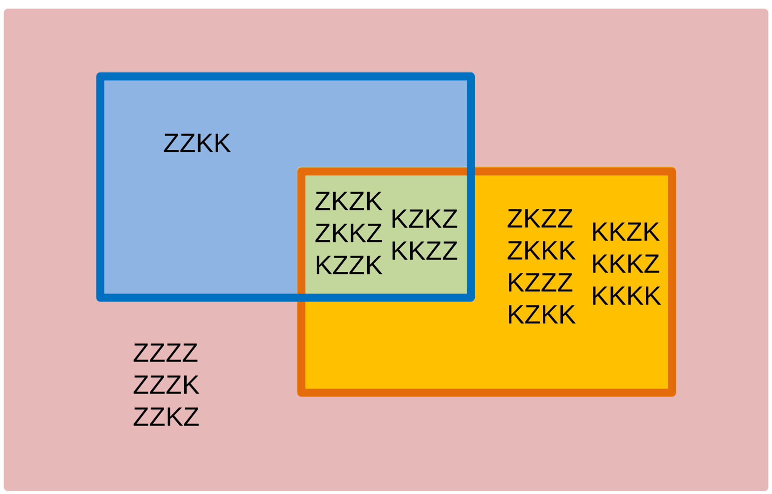
Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Beispiel: **vierfacher Münzwurf**

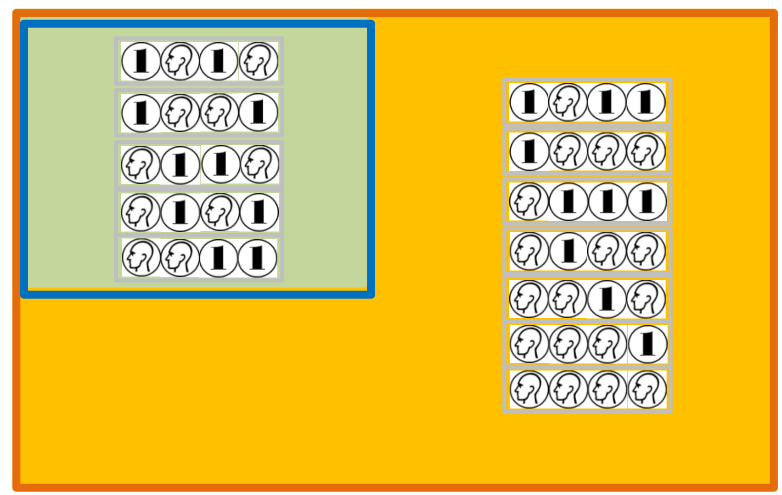
A = Genau zweimal Kopf nach vier Würfen

B = Mindestens einmal Kopf nach zwei Würfen

Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$



Wahrscheinlichkeitsraum $(B, \mathcal{B}, P_B)$



$P_\Omega(A) = 6/16 = 0.375$ $\quad P_\Omega(B) = 12/16$

$P_\Omega(A \cap B) = 5/16$

$P_B(A) = P_\Omega(A \cap B) / P_\Omega(B)$

$= (5/16)/(12/16) = 5/12 \approx 0.417$

Bedingte Wahrscheinlichkeiten und stochastische Unabhängigkeit

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Umformung der Definitionsformel

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$$

$$\boxed{\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A|B) \cdot P(B) \\ P(A^c \cap B) &= P(A^c|B) \cdot P(B) \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} P(A \cap B^c) &= P(A|B^c) \cdot P(B^c) \\ P(A^c \cap B^c) &= P(A^c|B^c) \cdot P(B^c) \end{aligned}}$$

Bedingte Wahrscheinlichkeiten und stochastische Unabhängigkeit

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Umformung der Definitionsformel

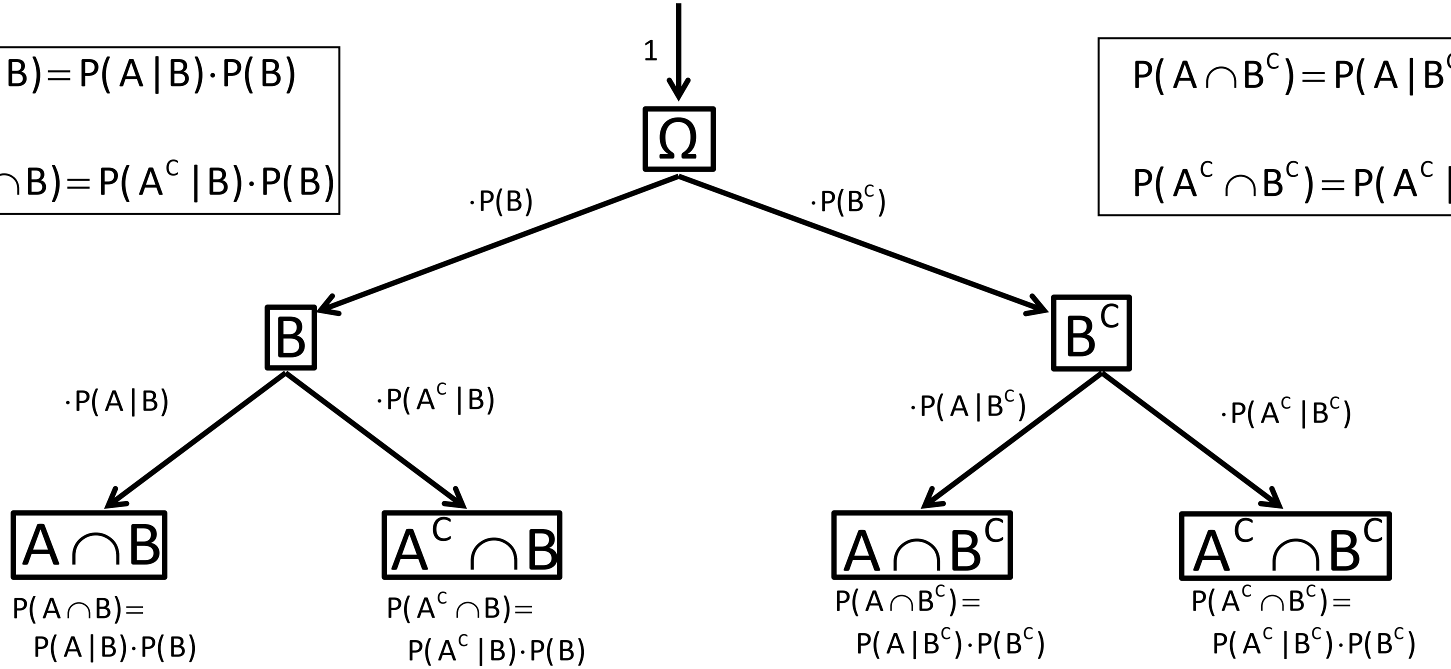
Darstellung der Wahrscheinlichkeit für Schnittereignisse in Ereignisbaum

$$P(A \cap B) = P(A \mid B) \cdot P(B)$$

$$P(A^C \cap B) = P(A^C \mid B) \cdot P(B)$$

$$P(A \cap B^C) = P(A \mid B^C) \cdot P(B^C)$$

$$P(A^C \cap B^C) = P(A^C \mid B^C) \cdot P(B^C)$$

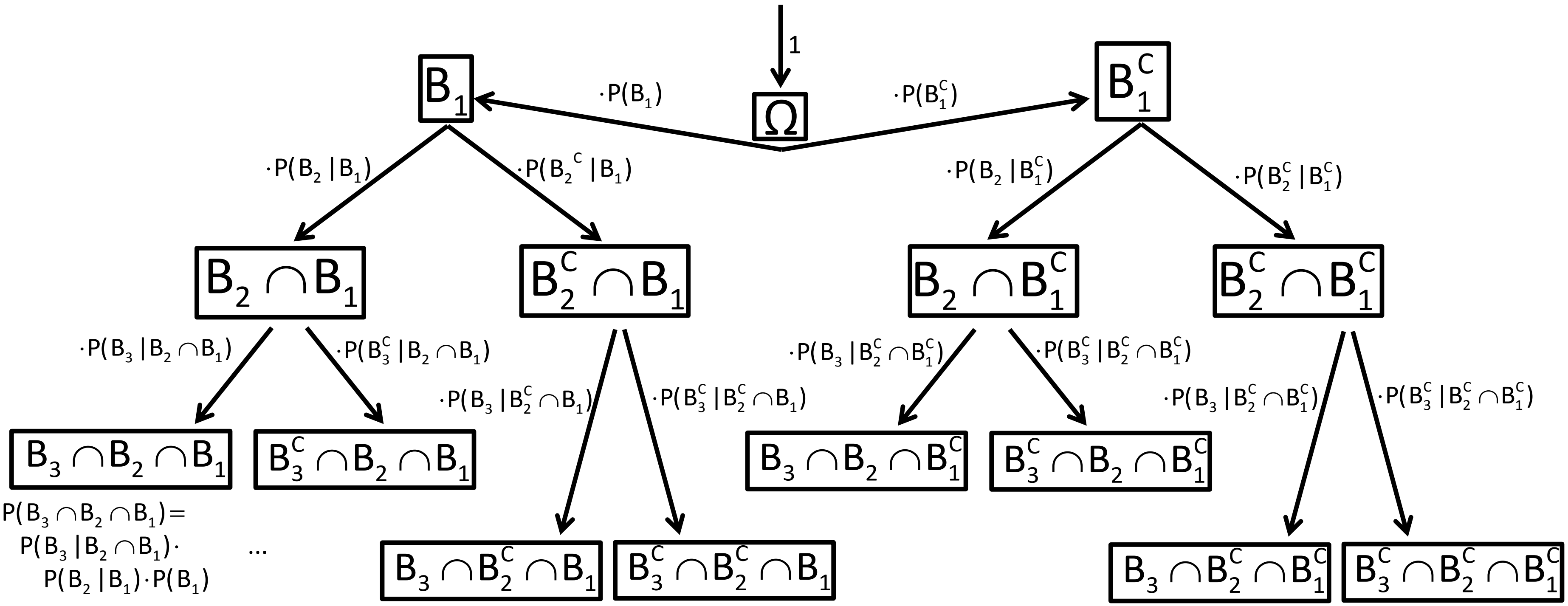


Bedingte Wahrscheinlichkeiten und stochastische Unabhängigkeit

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Umformung der Definitionsformel

Darstellung der Wahrscheinlichkeit für Schnittereignisse in Ereignisbaum



$$P(B_3 \cap B_2 \cap B_1) = P(B_3 \mid B_2 \cap B_1) \cdot P(B_2 \mid B_1) \cdot P(B_1)$$

...

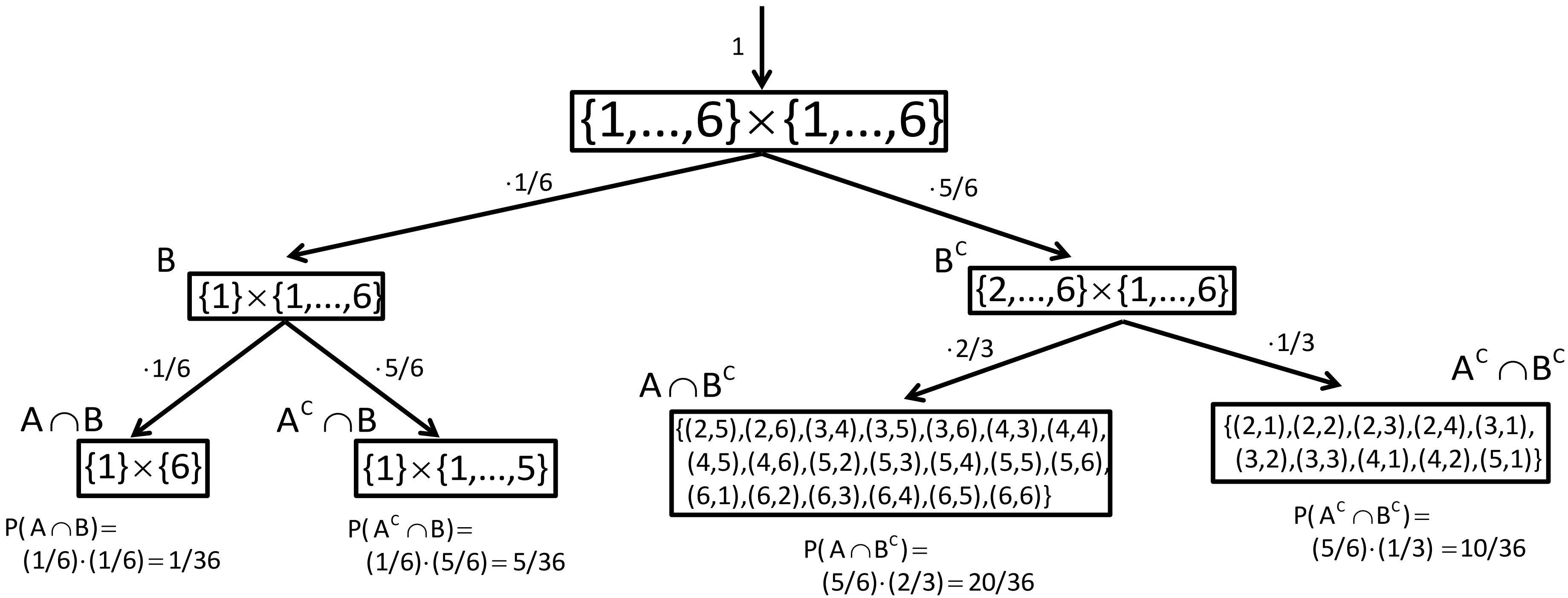
Bedingte Wahrscheinlichkeiten und stochastische Unabhängigkeit

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Ereignisbaum: Beispiel **zweifacher Würfelwurf**

A: Gesamtaugenzahl ist größer als 6

B: erster Wurf ergibt Augenzahl 1



Bedingte Wahrscheinlichkeiten und stochastische Unabhängigkeit

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

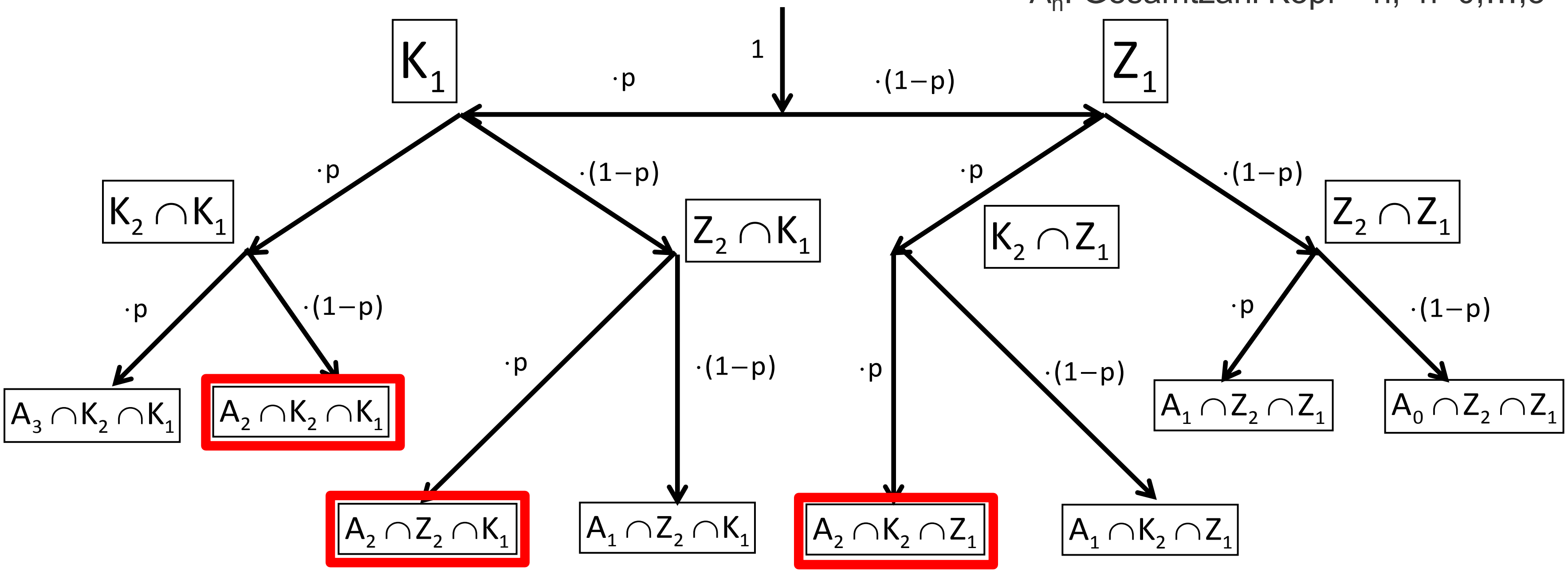
Ereignisbaum: Beispiel **dreifacher Münzwurf mit unfairerer Münze**

P: Wahrscheinlichkeit für Kopf

K_1: Erster Wurf Kopf $\quad$ Z_1: Erster Wurf Zahl

K_2: Zweiter Wurf Kopf $\quad$ Z_2: Zweiter Wurf Zahl

A_n: Gesamtzahl Kopf = n, n=0,…,3



$$P(\boxed{A_2}) = p \cdot p \cdot (1-p) + p \cdot (1-p) \cdot p + (1-p) \cdot p \cdot p = \binom{3}{2} \cdot p^2 (1-p)^{3-2}$$

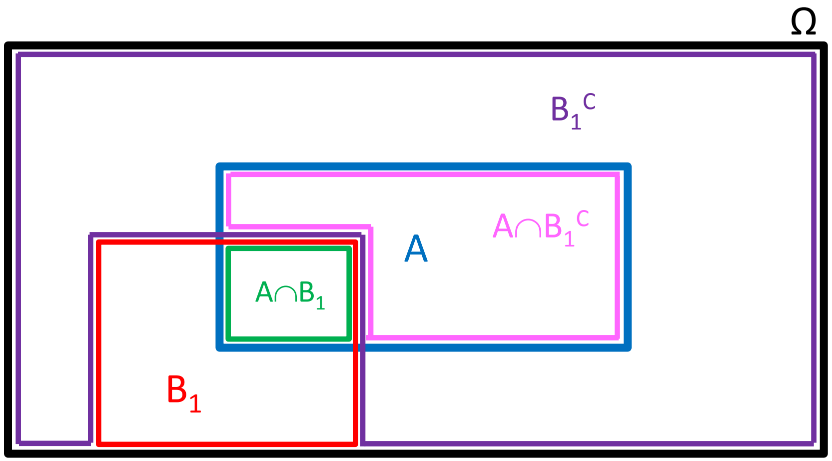
Bedingte Wahrscheinlichkeiten und stochastische Unabhängigkeit

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Umformung der Definitionsformel

$$P(A\,|\,B_1) = \frac{P(A \cap B_1)}{P(B_1)} \Rightarrow P(\boxed{A \cap B_1}) = P(\boxed{A\,|\,B_1}) \cdot P(\boxed{B_1})$$

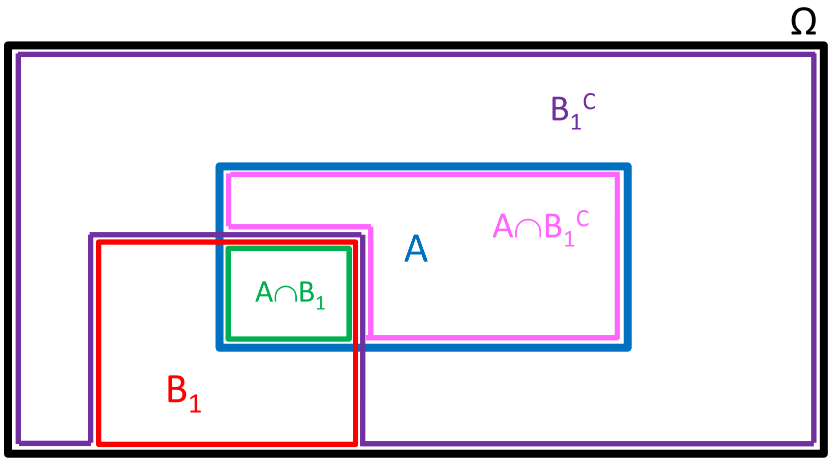
$$P(A\,|\,B_1^C) = \frac{P(A \cap B_1^C)}{P(B_1^C)} \Rightarrow P(\boxed{A \cap B_1^C}) = P(\boxed{A\,|\,B_1^C}) \cdot P(\boxed{B_1^C})$$



Bedingte Wahrscheinlichkeiten und stochastische Unabhängigkeit

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

$$P(\boxed{A}) = P(\boxed{A \cap B_1}) + P(\boxed{A \cap B_1^C}) = P(\boxed{A \mid B_1}) \cdot P(\boxed{B_1}) + P(\boxed{A \mid B_1^C}) \cdot P(\boxed{B_1^C})$$

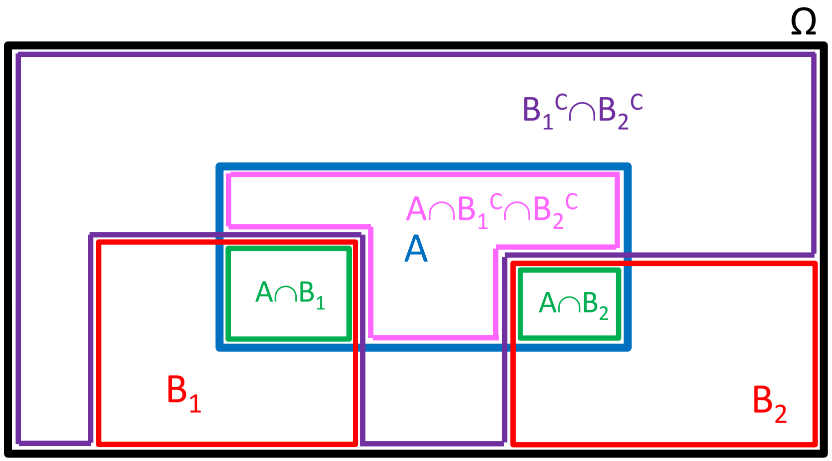


Bedingte Wahrscheinlichkeiten und stochastische Unabhängigkeit

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

$$B_1 \cap B_2 = \emptyset \Rightarrow \; P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_1^C \cap B_2^C)$$

$$= P(A \mid B_1) \cdot P(B_1) + P(A \mid B_2) \cdot P(B_2) + P(A \mid B_1^C \cap B_2^C) \cdot P(B_1^C \cap B_2^C)$$



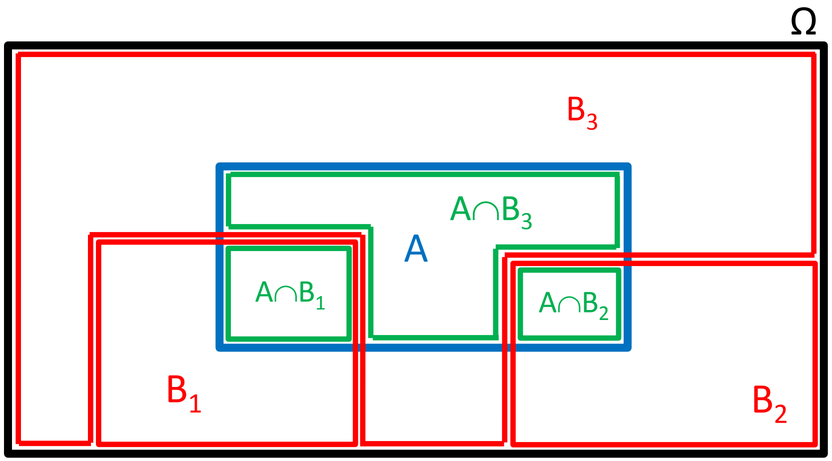
Bedingte Wahrscheinlichkeiten und stochastische Unabhängigkeit

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

$$B_3 = B_1^C \cap B_2^C \Rightarrow B_1 \cap B_2 = \varnothing, B_1 \cap B_3 = \varnothing, B_2 \cap B_3 = \varnothing, \; B_1 \cup B_2 \cup B_3 = \Omega$$

$$\Rightarrow P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3)$$

$$= P(A \mid B_1) \cdot P(B_1) + P(A \mid B_2) \cdot P(B_2) + P(A \mid B_3) \cdot P(B_3)$$

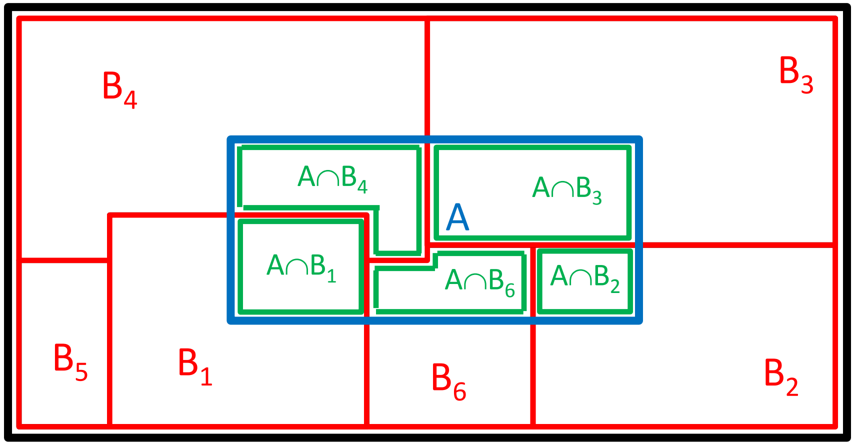


Bedingte Wahrscheinlichkeiten und stochastische Unabhängigkeit

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit

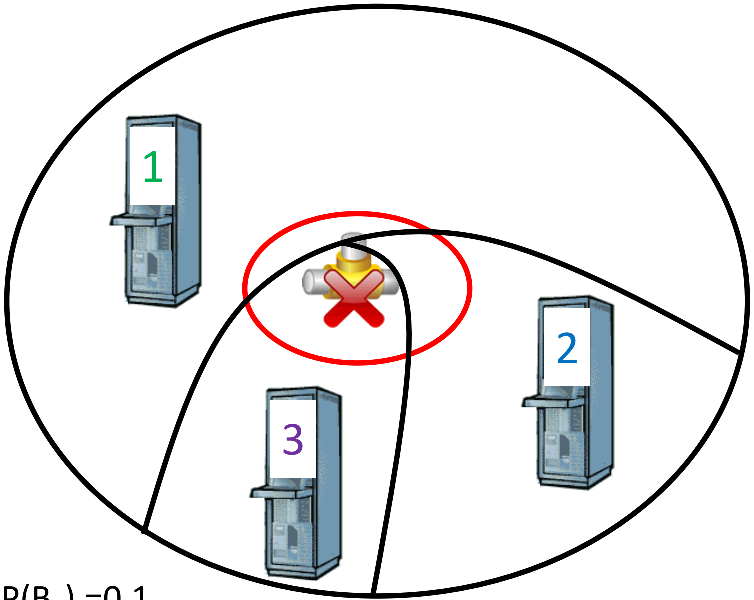
$$i \neq j \Rightarrow B_i \cap B_j = \varnothing,\ \bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega \ \Rightarrow \ P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \mid B_i) \cdot P(B_i)$$



Bedingte Wahrscheinlichkeiten und stochastische Unabhängigkeit

Bedingte Wahrscheinlichkeiten, Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit

Beispiel: **Ausfall einer Internetverbindung**



A = Internetverbindung fällt aus

B_1 = Verbindung mit Knoten 1

B_2 = Verbindung mit Knoten 2

B_3 = Verbindung mit Knoten 3

W'keiten für Einwahl in Knoten 1, 2 oder 3: $P(B_1) = 0.7$, $P(B_2) = 0.2$, $P(B_3) =0.1$

W'keiten für Verbindungsausfall für Knoten 1, 2 oder 3 : $P(A|B_1) = 0.02$, $P(A|B_2) = 0.04$, $P(A|B_3) = 0.06$

$\Rightarrow$ W'keit für Verbindungsausfall: $P(A) = 0.02 \cdot 0.7 + 0.04 \cdot 0.2 + 0.06 \cdot 0.1 = 0.028$

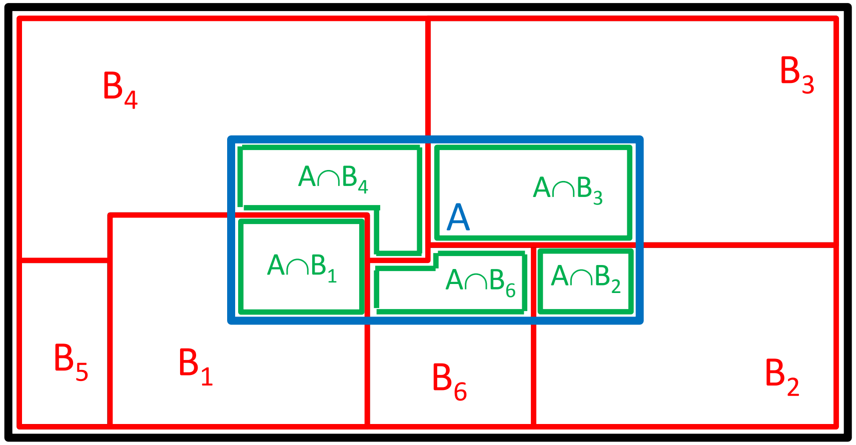
Bedingte Wahrscheinlichkeiten und stochastische Unabhängigkeit

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit

$$i \neq j \Rightarrow B_i \cap B_j = \emptyset, \quad \bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \mid B_i) \cdot P(B_i)$$



Bedingte Wahrscheinlichkeiten und stochastische Unabhängigkeit

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

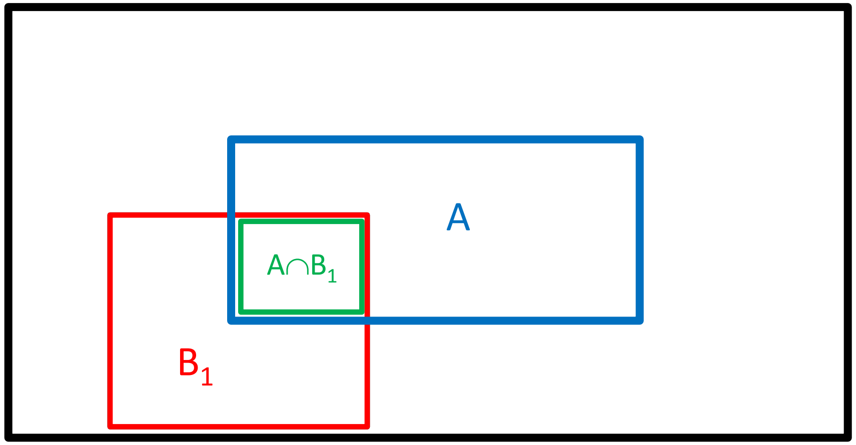
Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit

$$i \neq j \Rightarrow B_i \cap B_j = \varnothing, \quad \bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \mid B_i) \cdot P(B_i)$$

$$P(A \cap B_i) = \boxed{P(A \mid B_i)} \cdot \boxed{P(B_i)}$$

$$= \boxed{P(B_i \mid A)} \cdot \boxed{P(A)}$$



Bedingte Wahrscheinlichkeiten und stochastische Unabhängigkeit

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit

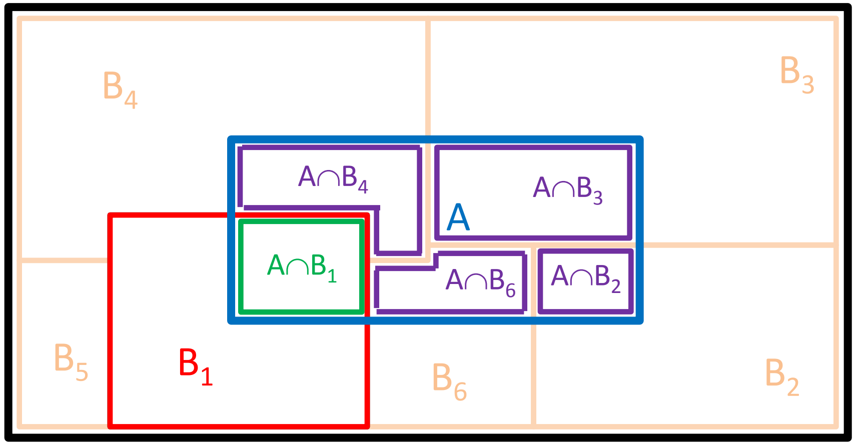
$$i \neq j \Rightarrow B_i \cap B_j = \varnothing, \quad \bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \mid B_i) \cdot P(B_i)$$

$$P(A \cap B_i) = P(A \mid B_i) \cdot P(B_i)$$

$$= P(B_i \mid A) \cdot P(A)$$

$$\Rightarrow P(B_i \mid A) = \frac{P(A \cap B_i)}{P(A)} = \frac{P(A \mid B_i) \cdot P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A \mid B_j) \cdot P(B_j)}$$



Bedingte Wahrscheinlichkeiten und stochastische Unabhängigkeit

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Satz von Bayes

$$i \neq j \Rightarrow B_i \cap B_j = \varnothing, \quad \bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega$$

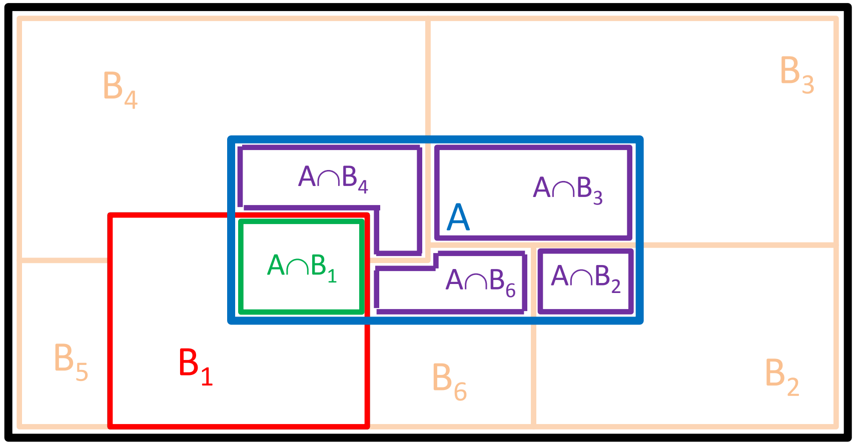
$$P(B_i \mid A) = \frac{P(A \mid B_i) \cdot P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A \mid B_j) \cdot P(B_j)}$$

$P(B_1),\ldots,P(B_n)$ heißen

a-priori-Wahrscheinlichkeiten,

$P(B_1 \mid A),\ldots, P(B_n \mid A)$ heißen

a-posteriori-Wahrscheinlichkeiten .



Bedingte Wahrscheinlichkeiten und stochastische Unabhängigkeit

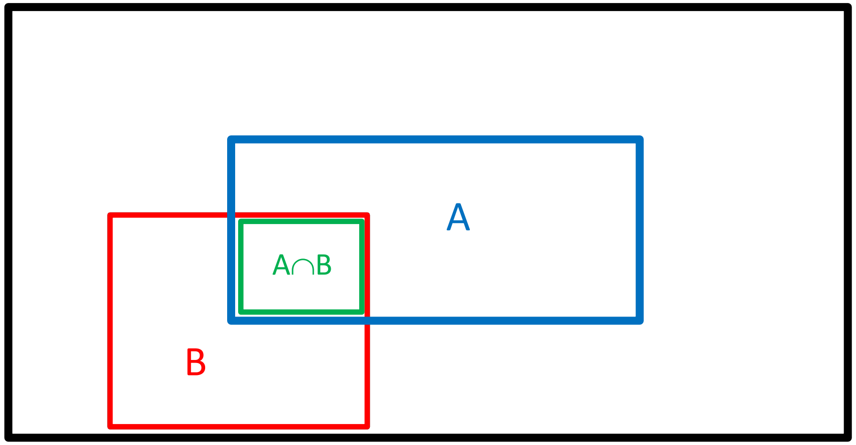
Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Satz von Bayes

$$i \neq j \Rightarrow B_i \cap B_j = \emptyset, \; \bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega \qquad \Rightarrow P(B_i \mid A) = \frac{P(A \mid B_i) \cdot P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A \mid B_j) \cdot P(B_j)}$$

Insbesondere

$$A, B \in \Omega \Rightarrow P(B \mid A) = \frac{P(A \mid B) \cdot P(B)}{P(A)}$$



Bedingte Wahrscheinlichkeiten und stochastische Unabhängigkeit

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

$$P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)}$$

Satz von Bayes, Beispiel **Spam-Filter**

Ereignis A: „Mail enthält das Wort ‚Maximalgewinn'" $\Rightarrow$ Klassifiziere Mail als Spam

Ereignis B: „Mail ist Spam"

$P(A|B)$ = **Sensitivität** = W'keit, Spam als solchen zu klassifizieren

$P(A^C|B^C)$ = **Spezifität** = W'keit, normale Mails nicht als Spam zu klassifizieren

	B: Mail ist Spam	B^C: Mail ist kein Spam
A: ‚Maximalgewinn' in Mail	$P(A\|B)$	$P(A\|B^C)=1-P(A^C\|B^C)$
A^C: ‚Maximalgewinn' nicht in Mail	$P(A^C\|B)=1-P(A\|B)$	$P(A^C\|B^C)$

Bedingte Wahrscheinlichkeiten und stochastische Unabhängigkeit

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Satz von Bayes, Beispiel **Spam-Filter**

$$P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)}$$

$P(A|B)$ = **Sensitivität** = W'keit, Spam als solchen zu klassifizieren

$P(A^C|B^C)$ = **Spezifität** = W'keit, normale Mails nicht als Spam zu klassifizieren

Gesucht:

$P(B|A)$ = W'keit, das klassifizierte Mail Spam ist

Im Satz von Bayes werden P(A) und P(B) benötigt.

$$P(A) = P(A|B) \cdot P(B) + P(A|B^C) \cdot [1 - P(B)]$$

	B: Mail ist Spam	B^C: Mail ist kein Spam
A: ‚Maximalgewinn' in Mail	$P(A\|B)$	$P(A\|B^C)$
A^C: ‚Maximalgewinn' nicht in Mail	$P(A^C\|B)$	$P(A^C\|B^C)$

Für die Berechnung von $P(B|A)$ ist also die Angabe der **Prävalenz** $P(B)$ ausreichend.

Bedingte Wahrscheinlichkeiten und stochastische Unabhängigkeit

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

$$P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)}$$

Satz von Bayes, Beispiel **Spam-Filter**

Gegeben

$P(A|B)$ = **Sensitivität**

$P(A^C|B^C)$ = **Spezifität**

$P(B)$ = **Prävalenz**

	B: Mail ist Spam	B^C: Mail ist kein Spam
A: ‚Maximalgewinn' in Mail	$P(A\|B)$	$P(A\|B^C)$
A^C: ‚Maximalgewinn' nicht in Mail	$P(A^C\|B)$	$P(A^C\|B^C)$

$$\Rightarrow \boxed{P(B|A)} = \frac{\boxed{P(A|B)} \cdot \boxed{P(B)}}{\boxed{P(A|B)} \cdot \boxed{P(B)} + [1 - \boxed{P(A^C|B^C)}] \cdot [1 - \boxed{P(B)}]}$$

Bedingte Wahrscheinlichkeiten und stochastische Unabhängigkeit

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

$$P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)}$$

Satz von Bayes, Beispiel **Spam-Filter**

Gegeben

$P(A|B)$ = **Sensitivität** = 0.95

$P(A^C|B^C)$ = **Spezifität** = 0.98

$P(B)$ = **Prävalenz** = 0.3

	B: Mail ist Spam	B^C: Mail ist kein Spam
A: ‚Maximalgewinn' in Mail	0.95	0.01
A^C: ‚Maximalgewinn' nicht in Mail	0.05	0.98

$$P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A|B) \cdot P(B) + [1 - P(A^C|B^C)] \cdot [1 - P(B)]}$$

$$= \frac{0.95 \cdot 0.3}{0.95 \cdot 0.3 + (1 - 0.98) \cdot (1 - 0.3)} = \frac{0.285}{0.299} \approx 0.9532$$

$\Rightarrow$ Wenn 30% der Mails Spam sind, sind bei einer Sensitivität von 95% und bei einer Spezifität von 98% ca. 95.3% der als Spam klassifizierten Mails tatsächlich Spam

Bedingte Wahrscheinlichkeiten und stochastische Unabhängigkeit

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

$$P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)}$$

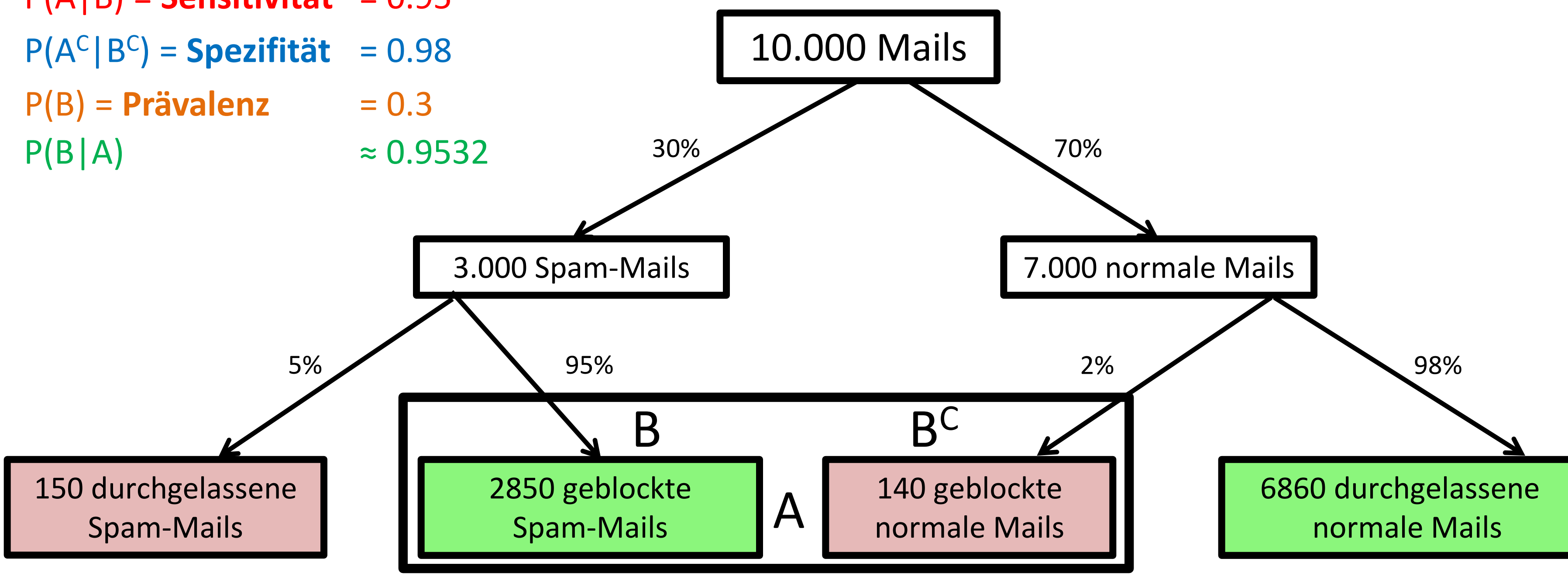
Satz von Bayes, Beispiel **Spam-Filter**

$P(A|B)$ = **Sensitivität** = 0.95

$P(A^C|B^C)$ = **Spezifität** = 0.98

$P(B)$ = **Prävalenz** = 0.3

$P(B|A)$ ≈ 0.9532



$P(B|A) = 2850/(2850+140) \approx 95.3\%$

Bedingte Wahrscheinlichkeiten und stochastische Unabhängigkeit

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

$$P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)}$$

Satz von Bayes, Beispiel **Spam-Filter**

Gegeben

$P(A|B)$ = **Sensitivität** = 0.95

$P(A^C|B^C)$ = **Spezifität** = 0.98

$P(B)$ = **Prävalenz** = 0.005

	B: Mail ist Spam	B^C: Mail ist kein Spam
A: ‚Maximalgewinn' in Mail	0.95	0.01
A^C: ‚Maximalgewinn' nicht in Mail	0.05	0.98

$$P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P_\Omega(B)}{P(A|B) \cdot P_\Omega(B) + [1 - P(A^C|B^C)] \cdot [1 - P_\Omega(B)]}$$

$$= \frac{0.95 \cdot 0.005}{0.95 \cdot 0.005 + (1 - 0.98) \cdot (1 - 0.005)} = \frac{0.00475}{0.02465} \approx 0.1927$$

$\Rightarrow$ Wenn 0.5% der Mails Spam sind, sind bei einer Sensitivität von 95% und bei einer Spezifität von 98% ca. 19.3% der als Spam klassifizierten Mails tatsächlich Spam

Bedingte Wahrscheinlichkeiten und stochastische Unabhängigkeit

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

$$P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)}$$

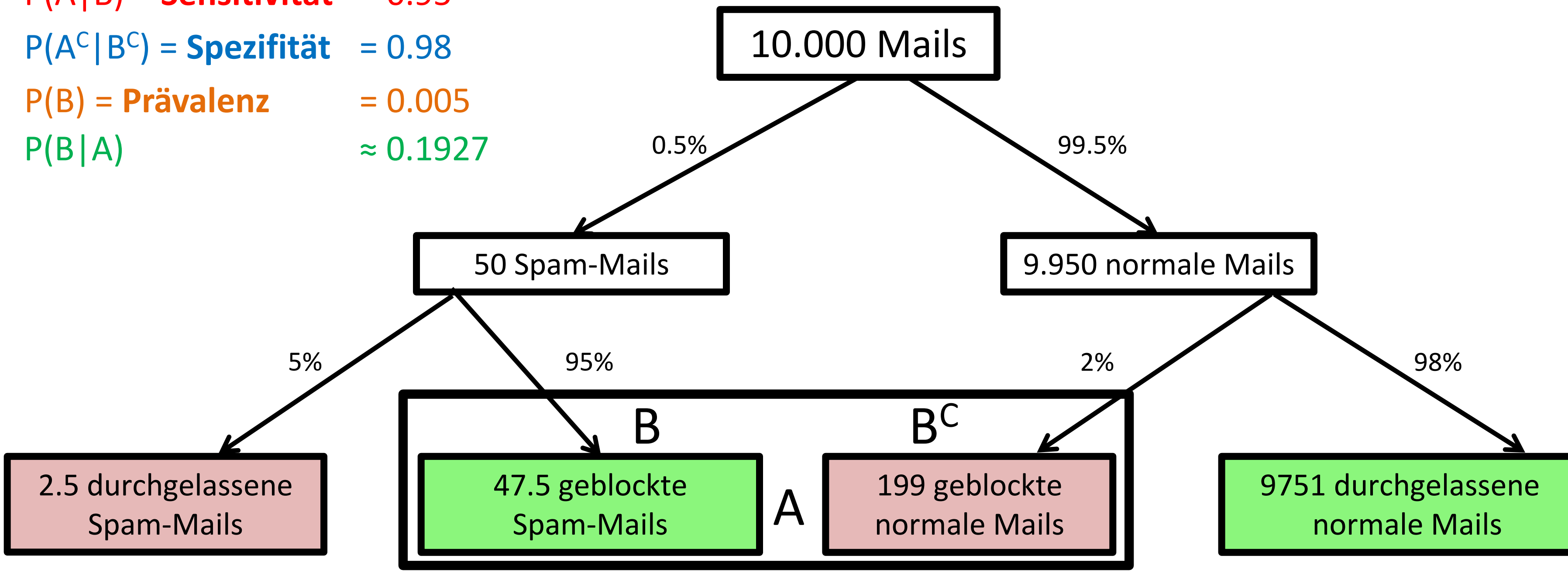
Satz von Bayes, Beispiel **Spam-Filter**

$P(A|B)$ = **Sensitivität** = 0.95

$P(A^C|B^C)$ = **Spezifität** = 0.98

$P(B)$ = **Prävalenz** = 0.005

$P(B|A)$ ≈ 0.1927



$P(B|A) = 47.5/(47.5+199) \approx 19.27\%$

Bedingte Wahrscheinlichkeiten und stochastische Unabhängigkeit

Stochastische Unabhängigkeit von Ereignissen

Zwei Ereignisse A und B aus (Ω,A,P) heißen **stochastisch unabhängig**, wenn

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

gilt.

Sind $P(B)>0$ stochastisch unabhängig, so sind bedingte und unbedingte Wahrscheinlichkeiten von A gleich:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A)$$

Bedingte Wahrscheinlichkeiten und stochastische Unabhängigkeit

Stochastische Unabhängigkeit von Ereignissen

Eine Menge von n Ereignissen $A_1,\ldots,A_n$ aus $(\Omega,\mathcal{A},P)$ heißt **paarweise stochastisch unabhängig**, wenn

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \cdot P(A_j)\,, \quad j \neq i,\ j = 1,\ldots,n,\ \ i = 1,\ldots,n$$

gilt.

Eine Menge von n Ereignissen $A_1,\ldots,A_n$ aus $(\Omega,\mathcal{A},P)$ heißt **gemeinsam stochastisch unabhängig**, wenn

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{s} A_{i_j}\right) = \prod_{j=1}^{s} P\left(A_{i_j}\right), \quad \{i_1,\ldots,i_s\} \subseteq \{1,\ldots,n\}$$

gilt.

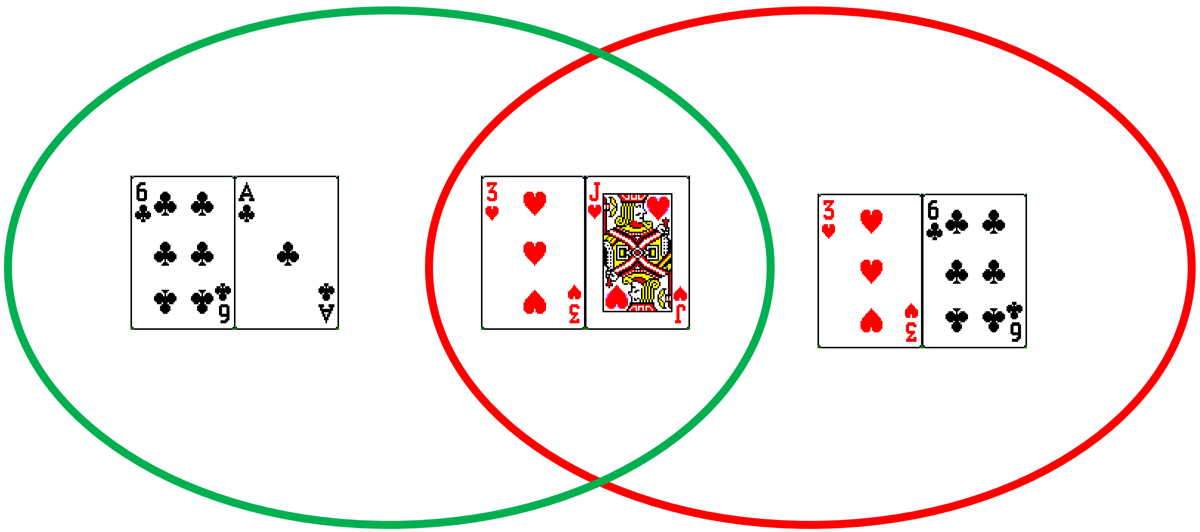
Bedingte Wahrscheinlichkeiten und stochastische Unabhängigkeit

Stochastische Unabhängigkeit von Ereignissen

Beispiel: **wiederholtes Ziehen aus gemischtem Skatspiel**

A: zweite Karte hat gleiche Symbolfarbe wie erste Karte

B: erste Karte ist rot



Bedingte Wahrscheinlichkeiten und stochastische Unabhängigkeit

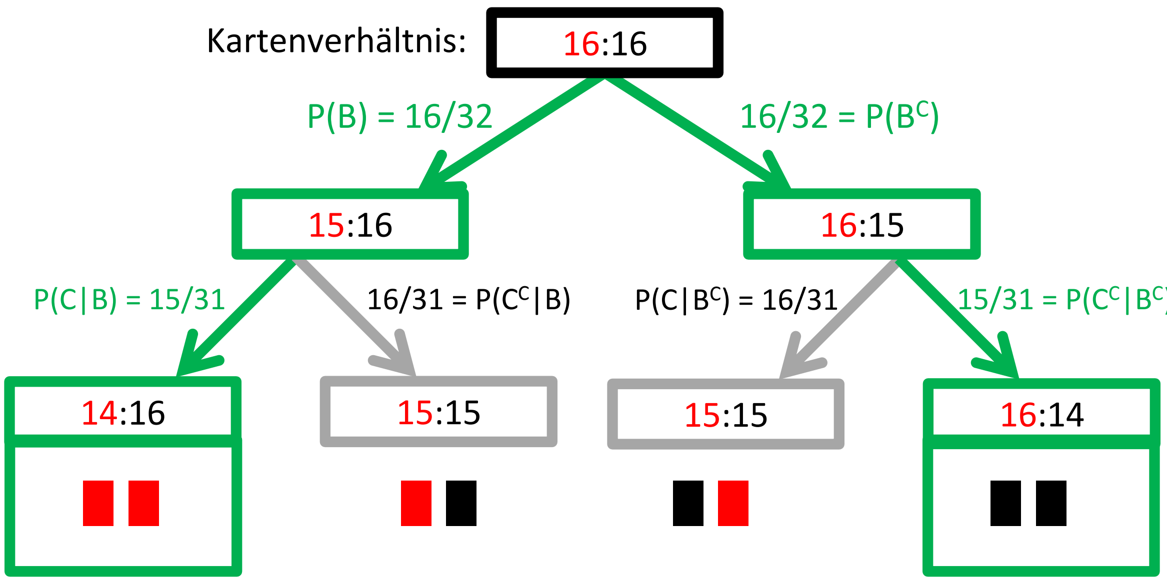
Stochastische Unabhängigkeit von Ereignissen

Beispiel: **wiederholtes Ziehen aus gemischtem Skatspiel**

A: zweite Karte hat gleiche Symbolfarbe wie erste Karte

B: erste Karte ist rot

C: zweite Karte ist rot



$$P(\boxed{A}) = \frac{16 \cdot 15}{32 \cdot 31} + \frac{16 \cdot 15}{32 \cdot 31} = \frac{15}{31}$$

Bedingte Wahrscheinlichkeiten und stochastische Unabhängigkeit

Stochastische Unabhängigkeit von Ereignissen

Beispiel: **wiederholtes Ziehen aus gemischtem Skatspiel**

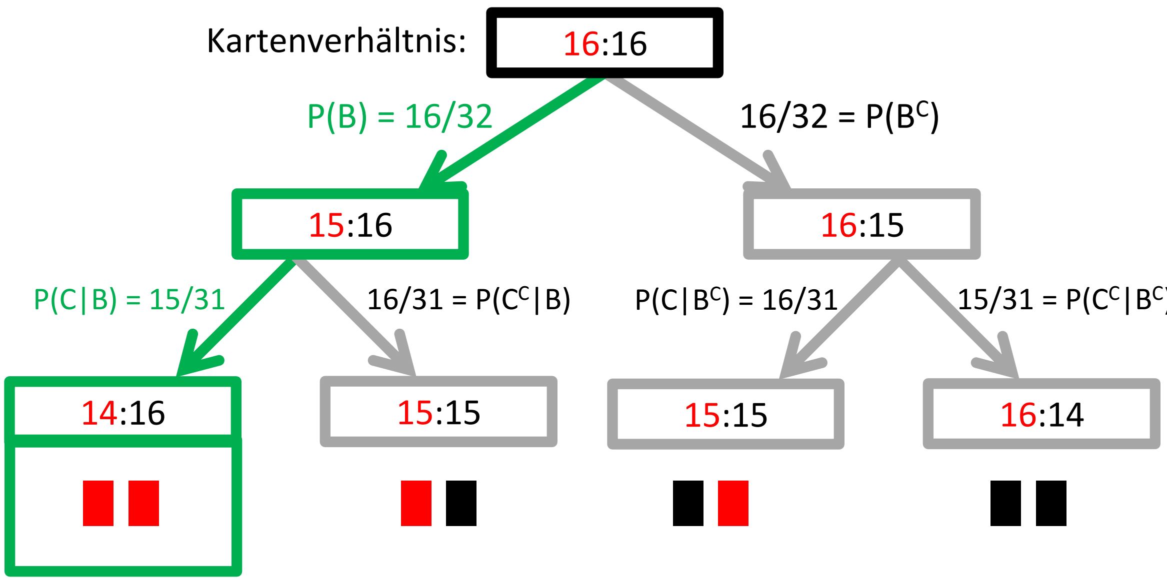
A: zweite Karte hat gleiche Symbolfarbe wie erste Karte

B: erste Karte ist rot

C: zweite Karte ist rot

$$P(\boxed{A}) = \frac{15}{31}$$

$$P(\boxed{A} \mid \boxed{B}) = \left(\frac{16 \cdot 15}{32 \cdot 31}\right) \Big/ \left(\frac{16}{32}\right) = \frac{15}{31}$$



Bedingte Wahrscheinlichkeiten und stochastische Unabhängigkeit

Stochastische Unabhängigkeit von Ereignissen

Beispiel: **wiederholtes Ziehen aus gemischtem Skatspiel**

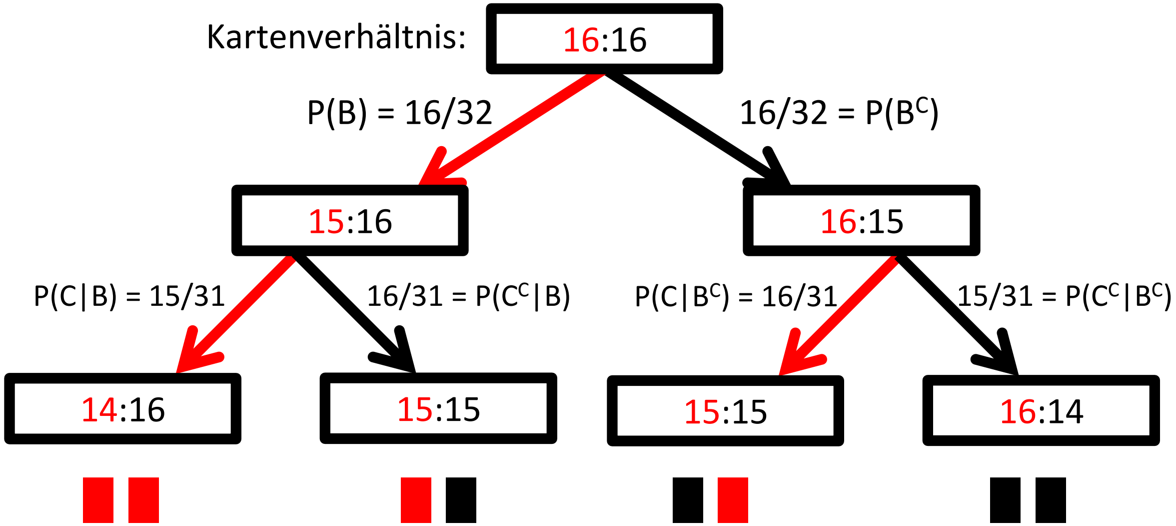
A: zweite Karte hat gleiche Symbolfarbe wie erste Karte

B: erste Karte ist rot

C: zweite Karte ist rot

$$P(A) = \frac{15}{31} = P(A \mid B)$$

$\Rightarrow$ A und B sind stochastisch unabhängig



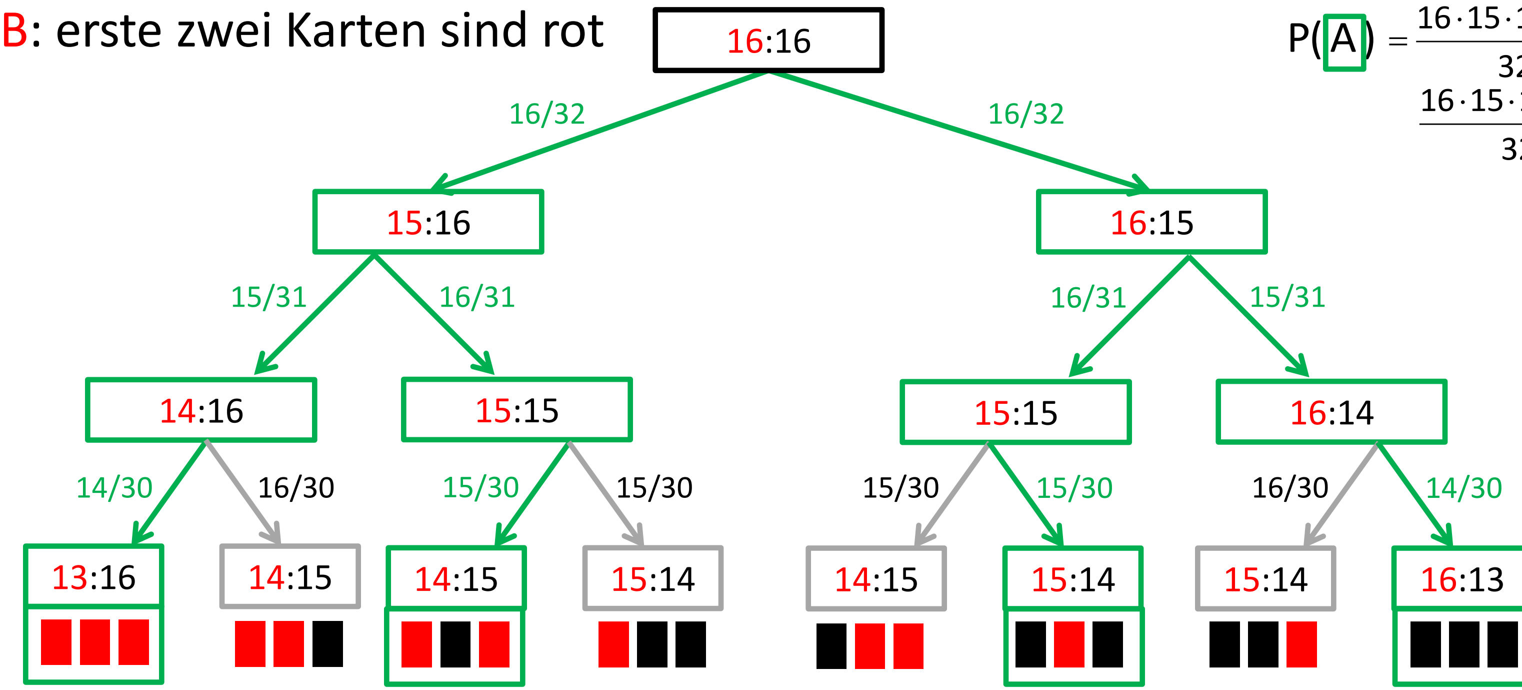
Bedingte Wahrscheinlichkeiten und stochastische Unabhängigkeit

Stochastische Unabhängigkeit von Ereignissen

Beispiel: **wiederholtes Ziehen aus gemischtem Skatspiel**

A: dritte Karte hat gleiche Symbolfarbe wie erste Karte

B: erste zwei Karten sind rot



$$P(\boxed{A}) = \frac{16\cdot 15\cdot 14 + 16\cdot 16\cdot 15}{32\cdot 31\cdot 30} + \frac{16\cdot 15\cdot 14 + 16\cdot 16\cdot 15}{32\cdot 31\cdot 30} \approx 0.4839$$

Bedingte Wahrscheinlichkeiten und stochastische Unabhängigkeit

Stochastische Unabhängigkeit von Ereignissen

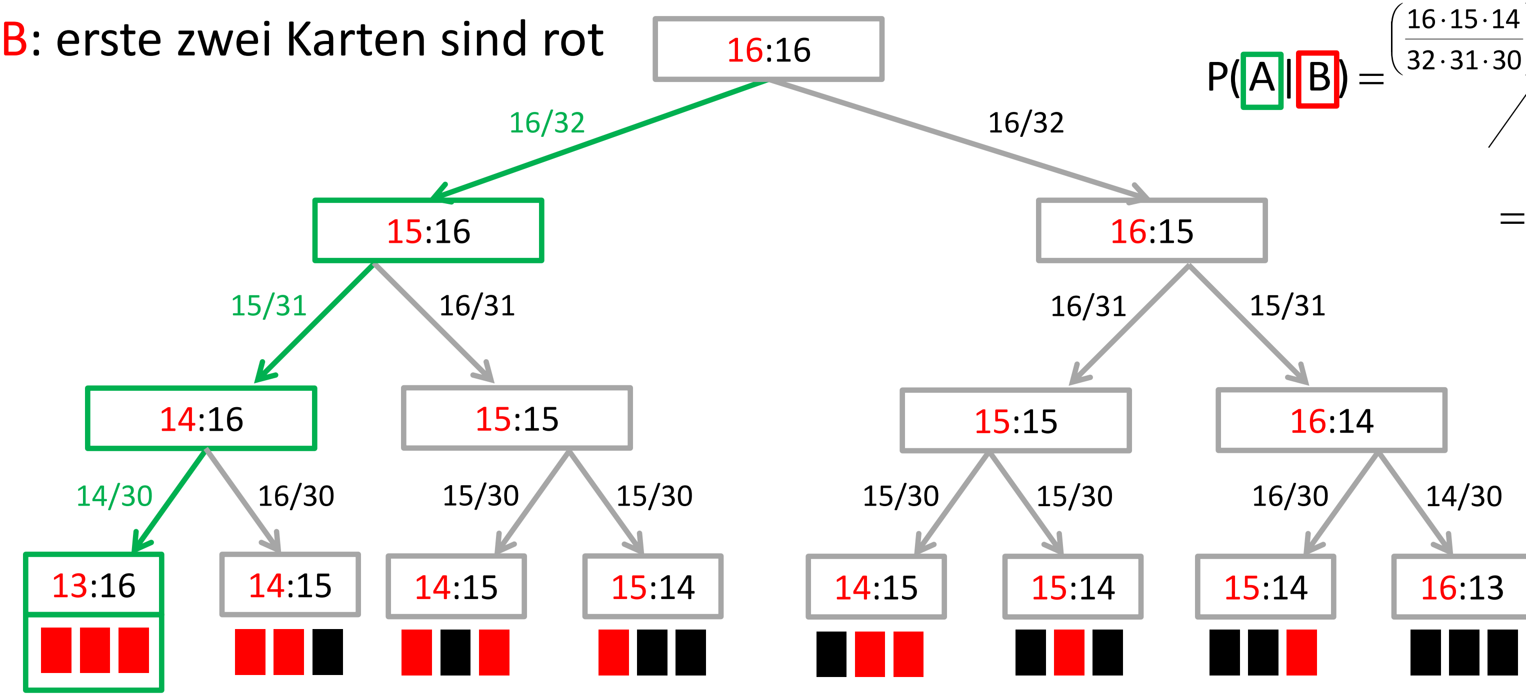
Beispiel: **wiederholtes Ziehen aus gemischtem Skatspiel**

$$P(\boxed{A}) \approx 0.4839$$

A: dritte Karte hat gleiche Symbolfarbe wie erste Karte

B: erste zwei Karten sind rot

$$P(\boxed{A}|\boxed{B}) = \left(\frac{16\cdot 15\cdot 14}{32\cdot 31\cdot 30}\right) \Big/ \left(\frac{16\cdot 15}{32\cdot 31}\right) = \frac{14}{30} \approx 0.4667$$



Bedingte Wahrscheinlichkeiten und stochastische Unabhängigkeit

Stochastische Unabhängigkeit von Ereignissen

Beispiel: **wiederholtes Ziehen aus gemischtem Skatspiel**

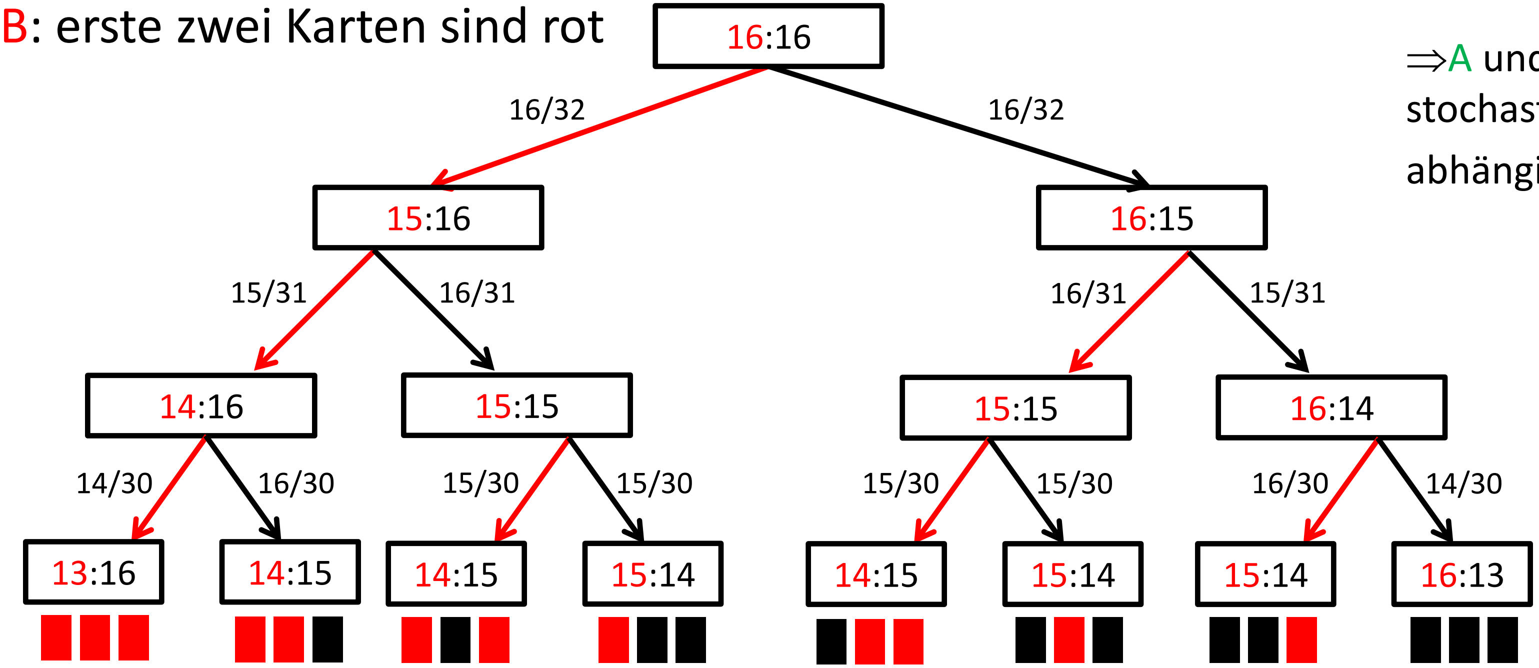
A: dritte Karte hat gleiche Symbolfarbe wie erste Karte

B: erste zwei Karten sind rot

$$P(A) \approx 0.4839$$

$$\neq 0.4667 = P(A \mid B)$$

$\Rightarrow$ A und B sind stochastisch abhängig



Bedingte Wahrscheinlichkeiten und stochastische Unabhängigkeit

Stochastische Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

Seien X und Y Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktionen F^X, F^Y und $F^{(X,Y)}$.

Dann heißen X und Y stochastisch unabhängig, falls

$$F^{(X,Y)}(x,y) = F^X(x) \cdot F^Y(y) \quad \text{für alle} \quad x,y \in \Re.$$

Die Zufallsvariablen $X_1,\ldots,X_n$ heißen stochastisch unabhängig, falls

$$F^{(X_1,\ldots,X_n)}(x_1,\ldots,x_n) = \prod_{i=1}^{n} F^{X_i}(x_i) \quad \text{für alle} \quad x_1,\ldots,x_n \in \Re.$$

Bedingte Wahrscheinlichkeiten und stochastische Unabhängigkeit

Stochastische Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

Seien X und Y Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktionen F^X, F^Y und $F^{(X,Y)}$.

Dann heißen X und Y stochastisch unabhängig, falls

$$F^{(X,Y)}(x,y) = F^X(x) \cdot F^Y(y) \quad \text{für alle} \;\; x,y \in \Re.$$

$$\Rightarrow \quad F^{(X,Y)}(x,y) = \boxed{P(A \cap B)} = \boxed{P(A) \cdot P(B)} = F^X(x) \cdot F^Y(y)$$

$$\text{mit} \;\; A = \{\omega \in \Omega | X(\omega) \le x\} \;, \quad B = \{\omega \in \Omega | Y(\omega) \le y\}$$

Bedingte Wahrscheinlichkeiten und stochastische Unabhängigkeit

Stochastische Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

Seien X und Y Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktionen F^X, F^Y und $F^{(X,Y)}$.

Dann heißen X und Y stochastisch unabhängig, falls

$$F^{(X,Y)}(x,y) = F^X(x) \cdot F^Y(y) \quad \text{für alle } x,y \in \Re.$$

$$F^{(X,Y)} \quad \text{diskret}$$

$$\Rightarrow \boxed{p(x_i,y_j)} = P(A \cap B) = F^{(X,Y)}(x_i,y_j) - F^{(X,Y)}(x_{i-1},y_j) - F^{(X,Y)}(x_i,y_{j-1}) + F^{(X,Y)}(x_{i-1},y_{j-1})$$

$$= F^X(x_i)F^Y(y_j) - F^X(x_{i-1})F^Y(y_j) - F^X(x_i)F^Y(y_{j-1}) + F^X(x_{i-1})F^Y(y_{j-1})$$

$$= \left[F^X(x_i) - F^X(x_{i-1})\right] \cdot \left[F^Y(y_i) - F^Y(y_{i-1})\right] \;=\; \boxed{p(x_i) \cdot p(y_j)}$$

$$\text{mit } A = \{\omega \in \Omega | X(\omega) = x_i\}, \quad B = \{\omega \in \Omega | Y(\omega) = y_j\}$$

Bedingte Wahrscheinlichkeiten und stochastische Unabhängigkeit

Stochastische Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

Seien X und Y Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktionen F^X, F^Y und $F^{(X,Y)}$.

Dann heißen X und Y stochastisch unabhängig, falls

$$F^{(X,Y)}(x,y) = F^X(x) \cdot F^Y(y) \quad \text{für alle } x,y \in \Re.$$

$F^{(X,Y)}$ stetig

$$\Rightarrow \boxed{f^{(X,Y)}(x,y)} = \frac{\partial F^{(X,Y)}(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial [F^X(x) \cdot F^Y(y)]}{\partial x \partial y} = \frac{\partial F^X(x) \cdot \partial F^Y(y)}{\partial x \partial y} = \boxed{f^X(x) \cdot f^Y(y)}$$

Bedingte Wahrscheinlichkeiten und stochastische Unabhängigkeit

Stochastische Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

Beispiel: **Multinomialverteilung**

(X,Y) ~ Mult(2, 0.5, 0.5)

$$\Rightarrow \; p^{XY}(0,2) = \frac{2}{0!\cdot 2!}\cdot 0.5^2 = \frac{2}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$p^{XY}(1,1) = \frac{2}{1!\cdot 1!}\cdot 0.5^2 = \frac{2}{1\cdot 1}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$p^{XY}(2,0) = \frac{2}{2!\cdot 0!}\cdot 0.5^2 = \frac{2}{2\cdot 1}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

Bedingte Wahrscheinlichkeiten und stochastische Unabhängigkeit

Stochastische Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

Beispiel: **Multinomialverteilung**

(X,Y) ~ Mult(2, 0.5, 0.5)

$$p^{XY}(0,2) = \frac{1}{4} \qquad p^X(0) = p^Y(0) = \frac{1}{4} \qquad p^X(0) \cdot p^Y(2) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16} \neq \frac{1}{4} = p^{XY}(0,2)$$

$$p^{XY}(1,1) = \frac{1}{2} \qquad p^X(1) = p^Y(1) = \frac{1}{2} \qquad p^X(1) \cdot p^Y(1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{2} = p^{XY}(1,1)$$

$$p^{XY}(2,0) = \frac{1}{4} \qquad p^X(2) = p^Y(2) = \frac{1}{4} \qquad p^X(2) \cdot p^Y(0) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16} \neq \frac{1}{4} = p^{XY}(2,0)$$

$\Rightarrow$ X und Y sind stochastisch abhängig