Technische Universität Dortmund
Fakultät Statistik
Jun.-Prof. Dr. Andreas Groll
M.Sc. Hendrik van der Wurp

Wintersemester 2018/2019
21. Januar 2019

Übungen zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitsrechnung und Mathematische Statistik (für Informatiker)

Blatt 6 - Lösungsvorschlag

Aufgabe 16: (per Hand)

Ein Würfel habe acht Seiten mit den Zahlen 1, 2, 3, 3, 4, 4, 5, und 6. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Würfel beim Würfeln auf eine bestimmte Seite fällt, sei jeweils 1/8, er sei also *fair*.

(a) Bestimmen Sie die Zähldichte der Zufallsvariablen X, die das Ergebnis bezeichnet.

(b) Bestimmen und skizzieren Sie die Verteilungsfunktion von X.

(c) Bestimmen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

$$P(X > 3), \qquad P(X \geq 3), \qquad P(3 \cdot X + 1 < 9), \qquad P(13/7 \leq X \leq 31/7).$$

(d) Geben Sie Erwartungswert $E(X)$ und Varianz $\mathrm{Var}(X)$ für X an.

Lösungsvorschlag:

Aus Vorlesung:
Die Funktion $p : \mathbb{R} \to [0,1]$ mit $p(x) = P(X = x)$ heißt Zähldichte von X. Wir bilden wir von Ereignissen auf Wahrscheinlichkeiten ab. Hier also:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}, \, x \in \{1,2,5,6\} \\ \frac{1}{4}, \, x \in \{3,4\} \end{cases}$$

Für die Verteilungsfunktion $F(X) = P(X \leq x)$ gehen wir X strukturiert durch:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \frac{1}{8}, & 1 \leq x < 2 \\ \frac{1}{4}, & 2 \leq x < 3 \\ \frac{1}{2}, & 3 \leq x < 4 \\ \frac{3}{4}, & 4 \leq x < 5 \\ \frac{7}{8}, & 5 \leq x < 6 \\ 1, & x \geq 6 \end{cases}$$

Hier ist die stufenartige Verteilungsfunktion an den jeweiligen Sprungstellen gut zu erkennen. Die Wahrscheinlichkeiten für (c) können sowohl über die Dichte $p(x)$ als auch über die Verteilungsfunktion $F(x)$ bestimmt werden:

$$P(X > 3) = p(4) + p(5) + p(6) = \frac{1}{2} \qquad \text{oder}$$
$$P(X > 3) = 1 - F(3) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$P(X \geq 3) = p(3) + p(4) + p(5) + p(6) = 1 - [p(1) + p(2)] = \frac{3}{4}$$
$$P(3 \cdot X + 1 < 9) = P(3 \cdot X < 8) = P(X < \frac{8}{3}) = p(1) + p(2) = \frac{1}{4}$$
$$P(13/7 \leq X \leq 31/7) = p(2) + p(3) + p(4) = \frac{5}{8}$$

(d) Die Formel für den Erwartungswert (diskret):

$$\begin{aligned}
\sum_i x_i \cdot p(x_i) &= 1 \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{1}{8} + 3 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{4} + 5 \cdot \frac{1}{8} + 6 \cdot \frac{1}{8} \\
&= \frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{6}{8} + \frac{8}{8} + \frac{5}{8} + \frac{6}{8} \\
&= \frac{28}{8} = 3.5
\end{aligned}$$

Und für die Varianz (diskret):

$$\begin{aligned}
\sum_i p(x_i) \cdot (x_i - E(X))^2 &= \frac{1}{8} \cdot (-2.5)^2 + \frac{1}{8} \cdot (-1.5)^2 + \frac{2}{8} \cdot (-0.5)^2 + \frac{2}{8} \cdot 0.5^2 + \frac{1}{8} \cdot 1.5^2 + \frac{1}{8} \cdot 2.5^2 \\
&= 6.25 \cdot \frac{1}{8} + 2.25 \cdot \frac{1}{8} + 0.25 \cdot \frac{2}{8} + 0.25 \cdot \frac{2}{8} + 2.25 \cdot \frac{1}{8} + 6.25 \cdot \frac{1}{8} \\
&= \frac{1}{8}(6.25 + 2.25 + 0.5 + 0.5 + 2.25 + 6.25) \\
&= \frac{18}{8} = \frac{9}{4} = 2.25
\end{aligned}$$

Aufgabe 17: (per Hand)

Die Verteilung einer Zufallsvariablen X mit Werten im Intervall $[0,1]$ mit $c > 0$, $c \in \mathbb{R}$ habe die folgende Dichte:

$$f(x) = c(x + x^2).$$

(a) Bestimmen Sie die Konstante c, sodass f tatsächlich eine Dichte ist.

(b) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion F von X.

(c) Berechnen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

$$P(X \leq 1/3), \qquad P(X > 1/2), \qquad P(X = 1/2), \qquad P(1/3 < X \leq 1/2), \qquad P(X > 1).$$

Lösungsvorschlag:

(a) Damit $f(x)$ eine Dichte sein kann, muss $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$ gelten. Setze daher:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$$

$$= \int_0^1 c(t + t^2)dt = \int_0^1 (ct + ct^2)dt$$

$$= \left[\frac{1}{2}ct^2 + \frac{1}{3}ct^3\right]_0^1 = \left(\frac{1}{2}c \cdot 1^2 + \frac{1}{3}c \cdot 1^3\right) - \left(\frac{1}{2}c \cdot 0 + \frac{1}{3}c \cdot 0\right)$$

$$= \frac{5}{6}c \overset{!}{=} 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad c = \frac{6}{5}$$

(b) Verteilungsfunktion $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$. Also hier:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_0^x \frac{6}{5}(t + t^2)dt$$

$$= \int_0^x \frac{6}{5}t + \frac{6}{5}t^2 dt = \left[\frac{6}{10}t^2 + \frac{6}{15}t^3\right]_0^x = \left[\frac{6}{10}x^2 + \frac{6}{15}x^3\right] - 0 = \frac{2}{5}x^3 + \frac{3}{5}x^2 = F(x)$$

Die Funktion startet offensichtlich bei 0 ($F(0) = 0$) und endet bei 1 ($F(1) = 1$) und ist monoton wachsend in x. Damit sind alle Anforderungen an eine Verteilungsfunktion erfüllt.

(c)
- $P(X \leq 1/3) = F(1/3) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{27} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{9} = \frac{11}{135} = 0.081$
- $P(X > 1/2) = 1 - P(X \leq 1/2) = 1 - F(1/2) = 1 - \left(\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{8} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$
- $P(X = 1/2) = 0$ nach Vorlesung. Im Stetigen sind Einzelwahrscheinlichkeiten immer 0.
- $P(1/3 < X \leq 1/2) = P(X \leq 1/2) - P(X < 1/3) = F(1/2) - F(1/3) = \frac{1}{5} - 0.081 = 0.119$
- $P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - F(1) = 1 - 1 = 0$

In solchen Fällen ist Vorsicht geboten. $F(1)$ ist definiert und daher korrekt. Auf Werten außerhalb von $[0,1]$ sind Dichte- und Verteilungsfunktion hier nicht definiert (bzw. konstant 0 für $x < 0$ und konstant 1 für $x > 1$).

Aufgabe 18: (per Hand)

Bei einem Zufallsexperiment werden zwei faire Würfel geworfen, die jeweils vier Seiten haben und bei denen die Werte 0, 1, 2 und 3 jeweils mit Wahrscheinlichkeiten 1/4 erzielt werden. Es werden die Summe und die absolute Differenz der beiden gewürfelten Augenzahlen bestimmt. Dabei bezeichne die Zufallsvariable X die Summe und die Zufallsvariable Y die absolute Differenz der beiden gewürfelten Augenzahlen.

(a) Bestimmen Sie die Zähldichte und die Verteilungsfunktion jeweils für X und Y.

(b) Bestimmen Sie die bivariate Zähldichte und die bivariate Verteilungsfunktion von (X, Y).

(c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der erste Wurf größer als 0 ist? Wie groß sind die folgenden Wahrscheinlichkeiten?

$$P(1 \leq Y < 3), \qquad P(X \leq 3, Y \leq 3), \qquad P(X < 2, Y \geq 2).$$

Lösungsvorschlag:

(a) $X \widehat{=}$ Summe und $Y \widehat{=}$ absolute Differenz. Da die einzelnen Würfel $\{0,1,2,3\}$ annehmen können, betrachten wir alle möglichen Realisierungen:

Würfe	X	Y	Würfe	X	Y	Würfe	X	Y	Würfe	X	Y
(0,0)	0	0	(1,0)	1	1	(2,0)	2	2	(3,0)	3	3
(0,1)	1	1	(1,1)	2	0	(2,1)	3	1	(3,1)	4	2
(0,2)	2	2	(1,2)	3	1	(2,2)	4	0	(3,2)	5	1
(0,3)	3	3	(1,3)	4	2	(2,3)	5	1	(3,3)	6	0

Jede Einzelwahrscheinlichkeit ist $\frac{1}{16}$, weil die Würfel fair sind. Also folgen

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{16}, & x \in \{0,6\} \\ \frac{1}{8}, & x \in \{1,5\} \\ \frac{3}{16}, & x \in \{2,4\} \\ \frac{1}{4}, & x = 3 \end{cases} \qquad \text{und} \qquad F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{16}, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{3}{16}, & 1 \leq x < 2 \\ \frac{6}{16}, & 2 \leq x < 3 \\ \frac{10}{16}, & 3 \leq x < 4 \\ \frac{13}{16}, & 4 \leq x < 5 \\ \frac{15}{16}, & 5 \leq x < 6 \\ 1, & x \geq 6 \end{cases}$$

und

$$p_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & y = 0 \\ \frac{3}{8}, & y = 1 \\ \frac{1}{4}, & y = 2 \\ \frac{1}{8}, & y = 3 \end{cases} \qquad \text{und} \qquad F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ \frac{4}{16}, & 0 \leq y < 1 \\ \frac{10}{16}, & 1 \leq y < 2 \\ \frac{14}{16}, & 2 \leq y < 3 \\ 1, & y \geq 3 \end{cases}$$

(b) Berechnung der bivariaten Dichte über Zählen.

$p_{X,Y}(x,y)$		Y			
Zähldichte		0	1	2	3
	0	$\frac{1}{16}$	0	0	0
	1	0	$\frac{2}{16}$	0	0
	2	$\frac{1}{16}$	0	$\frac{2}{16}$	0
X	3	0	$\frac{2}{16}$	0	$\frac{2}{16}$
	4	$\frac{1}{16}$	0	$\frac{2}{16}$	0
	5	0	$\frac{2}{16}$	0	0
	6	$\frac{1}{16}$	0	0	0

$F_{X,Y}(x,y)$		Y			
Verteilungsfkt		0	1	2	3
	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
	1	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{16}$
	2	$\frac{2}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{6}{16}$
X	3	$\frac{2}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{8}{16}$	$\frac{10}{16}$
	4	$\frac{3}{16}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{11}{16}$	$\frac{13}{16}$
	5	$\frac{3}{16}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{13}{16}$	$\frac{15}{16}$
	6	$\frac{4}{16}$	$\frac{10}{16}$	$\frac{14}{16}$	$\frac{16}{16}$

(c)

$$\begin{aligned} P(1 \le Y < 3) = P(0 < Y \le 2) &= P(Y \le 2) - P(Y \le 0) \\ = F_Y(2) - F_Y(0) &= \frac{14}{16} - \frac{4}{16} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8} \\ \text{oder biv.:} = F_{X,Y}(6,2) - F_{X,Y}(6,0) &= \frac{14}{16} - \frac{4}{16} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8} \end{aligned}$$

$$P(X \le 3, Y \le 3) = F_{X,Y}(3,3) = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$$

$$\begin{aligned} P(X < 2, Y \ge 2) = P(X \le 1, Y > 1) &= P(X \le 1, Y \le 3) - P(X \le 1, Y \le 1) \\ = F_{X,Y}(1,3) - F_{X,Y}(1,1) &= \frac{3}{16} - \frac{3}{16} = 0. \end{aligned}$$

Weitere Beispiele:

$$\begin{aligned} P(X = 3, Y = 1) &= p_{X,Y}(3,1) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8} \\ P(X \le 2, Y \le 2) &= F_{X,Y}(2,2) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8} \\ P(3 \le X \le 5, 1 \le Y \le 2) &= P(X \le 5,\ Y \le 2) - P(X \le 5,\ Y \le 0) - P(X \le 2, Y \le 2) \\ &\quad + P(X \le 2, Y \le 0) \\ &= F_{X,Y}(5,2) - F_{X,Y}(5,0) - F_{X,Y}(2,2) + F_{X,Y}(2,0) \\ &= \frac{13}{16} - \frac{3}{16} - \frac{6}{16} + \frac{2}{16} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

Aufgabe 19: (per Hand)

(a) Ein Viertel der 20 Angestellten eines kleinen IT-Unternehmens beschweren sich auf Nachfrage über zu hohe Arbeitsbelastung. Ein Unternehmensberater befragt drei zufällig ausgewählte Angestellte dieses Unternehmens. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

(i) sich keiner beschwert?

(ii) sich höchstens zwei beschweren?

(iii) sich höchstens einer nicht beschwert?

(b) Jeweils ein Viertel der Angestellten von drei IT-Unternehmen beschweren sich auf Nachfrage über zu hohe Arbeitsbelastung. Ein Unternehmensberater befragt jeweils einen zufällig ausgewählten Angestellten pro Unternehmen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

(i) sich keiner beschwert?

(ii) sich höchstens zwei beschweren?

(iii) sich höchstens einer nicht beschwert?

Lösungsvorschlag wird nachgereicht, wenn die Vorlesung das entsprechende Kapitel erreicht.