Technische Universität Dortmund
Fakultät Statistik
Jun.-Prof. Dr. Andreas Groll
M.Sc. Hendrik van der Wurp

Wintersemester 2018/2019
13. Dezember 2018

Übungen zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitsrechnung und Mathematische Statistik (für Informatiker)

Blatt 5

Aufgabe 13: (per Hand)

Gegeben seien n Beobachtungen, für die jeweils die Werte für zwei Variablen X und Y vorliegen. Welche der folgenden Aussagen sind richtig und welche sind falsch?

(i) Wenn X immer größer ist als Y, dann gilt $r_{XY} > 0$ und $r_{XY}^{\text{SP}} > 0$ für die Korrelationskoeffizienten Nach Bravais-Pearson und Spearman.

Antwort: **Falsch**. Die Lage sagt nichts über die Richtung der Korrelation aus. mit $x = (11,\ 12,\ 13)$ und $y = (3,\ 2,\ 1)$ gilt $X > Y$, jedoch liegt offensichtlich perfekte negative (lineare bzw. monotone) Korrelation vor, sodass $r_{XY} = r_{XY}^{\text{Sp}} = -1$.

(ii) Je *steiler* eine entstehende Regressionsgerade im Streudiagramm ist, desto näher liegt r_{XY} an 1.

Antwort: **Falsch**. Die Steigung der Regressionsgeraden hat mit der Ausprägung von r_{XY} nichts zu tun. Lediglich das Vorzeichen wird durch die Richtung festgelegt.

(iii) Der Rangkorrelationskoeffizient (Spearman) verändert sich nicht, wenn X oder Y linear transformiert werden ($X^* = aX + b$).

Antwort: **Großteils richtig**. Ränge bleiben bei linearer Transformation i.d.R. unverändert. Ausnahme: $a < 0$. Dann dreht sich die Reihenfolge um und die Ränge verändern sich. (Wenn bei Bindungen mit mittleren Rängen gearbeitet wird, ist die Reihenfolge der Ränge 'gespiegelt' und r_{XY}^{Sp} ändert nur das Vorzeichen.

(iv) Korrelationskoeffizient und Rangkorrelationskoeffizient können sich zwar unterscheiden, müssen aber immer dasselbe Vorzeichen haben.

Antwort: **Falsch**. Es gibt keine solche Regel. Besonders, wenn kaum Korrelation vorliegt und beide Korrelationskoeffizienten nahe bei 0 liegen kann dieser Fall auftreten.

(v) Der Rangkorrelationskoeffizient ist mindestens so groß wie der Korrelationskoeffizient, das heißt $r_{XY}^{\text{Sp}} \geq r_{XY}$.

Antwort: **Falsch**. Es gibt keine solche Regel. Ein Gegenbeispiel war bereits in Aufgabe 11 zu finden mit $r_{XY} = 0.94$ und $r_{XY}^{\text{Sp}} = 0.89$.

(vi) Die Interpretation der beiden Koeffizienten ist identisch.

Antwort: **Falsch**. r_{XY} misst lineare Korrelation und r_{XY}^{Sp} misst monotone Korrelation.

(vii) Der Rangkorrelationskoeffizient ist bezüglich Ausreißern robuster als der Korrelationskoeffizient.

Antwort: **Richtig**. Die Stärke eines Ausreißers wird durch seinen Rang nicht abgebildet. Das heißt der Rangkorrelationskoeffizient r_{XY}^{Sp} berücksichtigt diesen nicht vollumfänglich.

Aufgabe 14: (per Hand)

Ein Grundraum sei gegeben durch $\Omega = \{1,\ 2.72,\ 6,\ \pi,\ 7.\overline{7},\ 11\}$.

(a) Welche Ergebnisse gehören zu den folgenden auf Ω eingeschränkten Ereignissen? Das heißt bestimmen Sie die Schnittmengen

mit den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$, also $\mathbb{N} \cap \Omega = A$,

mit den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$, also $\mathbb{Q} \cap \Omega = B$ und

mit Primzahlen Pr, also $\text{Pr} \cap \Omega = C$.

(b) Wie sehen jeweils die paarweisen Schnittmengen $A \cap B$, $A \cap C$ und $B \cap C$ aus?

(c) Wie sehen jeweils die paarweisen Vereinigungen $A \cup B$, $A \cup C$ und $B \cup C$ aus?

(d) Wie sehen die jeweiligen Komplemente A^C, B^C und C^C auf Ω aus?

(e) Angenommen, es würden die Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse

$$P(\{1\}) = 0.22, \qquad P(\{2.72\}) = 0.16, \qquad P(\{6\}) = 0.07,$$

$$P(\{\pi\}) = 0.28, \qquad P(\{7.\overline{7}\}) = 0.2, \qquad P(\{11\}) = 0.07$$

gelten. Berechnen Sie

$P(A)$, $P(B)$, $P(C)$

$P(A^C)$, $P(B^C)$, $P(C^C)$

$P(A \cap B^C)$, $P(A^C \cap C)$, $P(B \cap C^C)$

$P(A^C \cup B)$, $P(A \cup C^C)$ und $P(B^C \cup C)$.

Lösungsvorschlag:

Mit $\mathbb{N} = \{0,\ 1,\ 2,\ \ldots\}$ und $\Omega = \{1,\ 2.72,\ 6,\ \pi,\ 7.\overline{7},\ 11\}$ gelten:

(a)
$$\begin{aligned} \mathbb{N} \cap \Omega &= \{1,\ 6,\ 11\} = A \\ \mathbb{Q} \cap \Omega &= \{1,\ 2.72,\ 6,\ 7.\overline{7},\ 11\} = B \\ \text{Pr} \cap \Omega &= \{11\} = C \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} A \cap B &= \{1,\ 6,\ 11\} &&= A \\ A \cap C &= \{11\} &&= C \\ B \cap C &= \{11\} &&= C \end{aligned}$$

(c) $A \cup B = B$, da A vollständig in B liegt nach (b).

$A \cup C = A$, da C vollständig in A liegt nach (b).

$B \cup C = B$, da C vollständig in B liegt nach (b).

(d)
$$\begin{aligned} A^C &= \Omega \setminus A = \{2.72,\ \pi,\ 7.\overline{7}\} \\ B^C &= \Omega \setminus B = \{\pi\} \end{aligned}$$

$C^C = \Omega \setminus C = \{1,\ 2.72,\ 6,\ \pi,\ 7.\overline{7}\}$

(e) $P(A) = P(\{1,\ 6,\ 11\} = 0.22 + 0.07 + 0.07 = 0.36$
$P(B) = P(\{1,\ 2.72,\ 6,\ 7.\overline{7},\ 11\}) = 1 - P(\{\pi\}) = 1 - 0.28 = 0.72$
$P(C) = P(\{11\}) = 0.07$

$P(A^C) = 1 - P(A) = 1 - 0.36 = 0.64$
$P(B^C) = 1 - P(B) = 1 - 0.72 = 0.28$
$P(C^C) = 1 - P(C) = 1 - 0.07 = 0.93$

$P(A \cap B^C) = P(\{1,\ 6,\ 11\} \cap \{\pi\}) = P(\emptyset) = 0$
$P(A^C \cap C) = P(\{2.72,\ \pi,\ 7.\overline{7}\} \cap \{11\}) = P(\emptyset) = 0$
$P(B \cap C^C) = P(\{1,\ 2.72,\ 6,\ 7.\overline{7}\} = 0.22 + 0.16 + 0.07 + 0.2 = 0.65$

$P(A^C \cup B) = P(\Omega) = 1$
$P(A \cup C^C) = P(\Omega) = 1$
$P(B^C \cup C) = P(\{\pi,\ 11\}) = 0.28 + 0.07 = 0.35$

Aufgabe 15: (per Hand)

Gegeben sei ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

(a) Wann gilt $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ und wann gilt $P(A \cup B) > P(A) + P(B)$?

(b) Gelten
  (i) $P(A \cap B) \geq P(A) \cdot P(B)$ oder
  (ii) $P(A \cap B) \leq P(A) \cdot P(B)$?
  Begründen Sie oder geben Sie ein Gegenbeispiel. Wann gilt die Gleichheit?

(c) Warum gilt für Wahrscheinlichkeiten stets $P(A) \geq 0$ und $P(A) \leq 1$?

(d) Ordnen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten (aufsteigend) nach potentieller Größenordnung:

$$P(A) \qquad P(A \cup B) \qquad P(A \cap B) \qquad P(\emptyset) \qquad P(\Omega)$$

Lösungsvorschlag:

(a) Wenn $P(A) + P(B) = P(A \cup B)$, dann gilt für die Schnittmenge $A \cap B = \emptyset$. (Folie 223)
Ganz allgemein gilt:
$$P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A \cup B).$$
Da $P(A \cap B) \geq 0$, kann $P(A \cup B) > P(A) + P(B)$ niemals gelten.

(b) Die Gleichheit gilt bei Unabhängigkeit und ist Deckungsgleich mit den erwarteten Einträgen einer relativen Kontingenztafel!
Sowohl (i) als auch (ii) gelten im nicht im Allgemeinen. Abweichungen in beide Richtungen sind möglich, wie auch in Kontingenztafeln Werte kleiner oder größer als der jeweils erwartete auftreten können. Zahlenbeispiel BVB in Übung.

(c) Wegen der Kolmogorov-Axiome.

(d) $P(\emptyset) \leq P(A \cap B) \leq P(A) \leq P(A \cup B) \leq P(\Omega)$