Der Linearzeit MST Algorithmus

Ein randomisierter Ansatz für bessere Performanz

Max Springenberg

Proseminar: Randomisierte Algorithmen, TU Dortmund

Table of contents

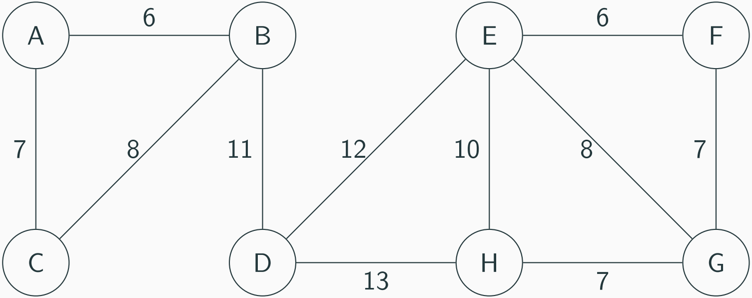
MST in gewichteten Graphen

Definition MST

Ein Teilgraph T ist genau dann ein minimaler Spannbaum von G, wenn er ein Spannbaum in G ist und die Summe seiner Kantengewichte $\sum\limits_{e \in E_T} w(e)$ minimal ist.

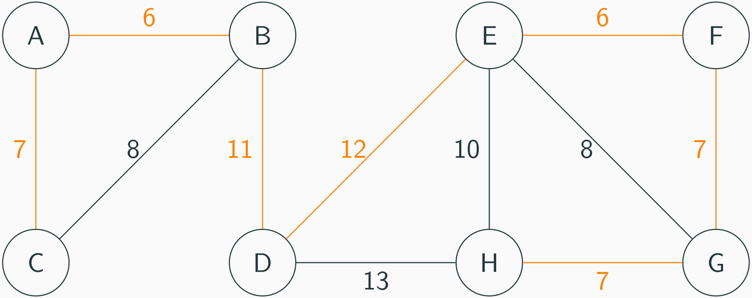
Definition MST

Ein Teilgraph T ist genau dann ein minimaler Spannbaum von G, wenn er ein Spannbaum in G ist und die Summe seiner Kantengewichte $\sum\limits_{e \in E_T} w(e)$ minimal ist.



Definition MST

Ein Teilgraph T ist genau dann ein minimaler Spannbaum von G, wenn er ein Spannbaum in G ist und die Summe seiner Kantengewichte $\sum\limits_{e \in E_T} w(e)$ minimal ist.



Bäume vs. Wälder

Borůvka Phasen

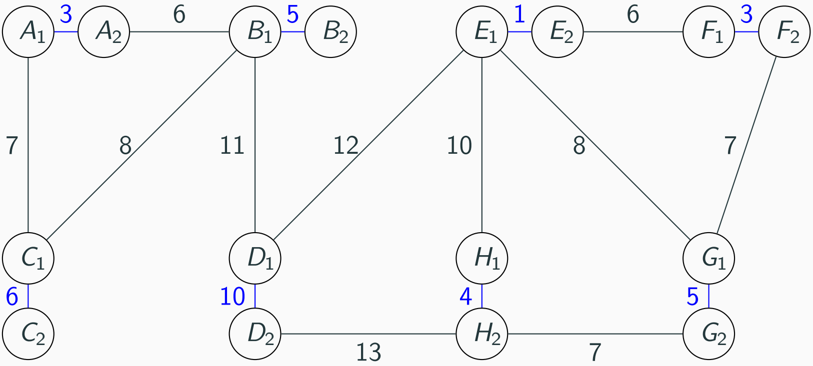
Ablauf

1. Kontraktierende Kanten markieren
2. Verbundene Komponente bestimmen
3. Verbundene Komponenten durch einzelnen Knoten ersetzen
4. Selbstschleifen entfernen

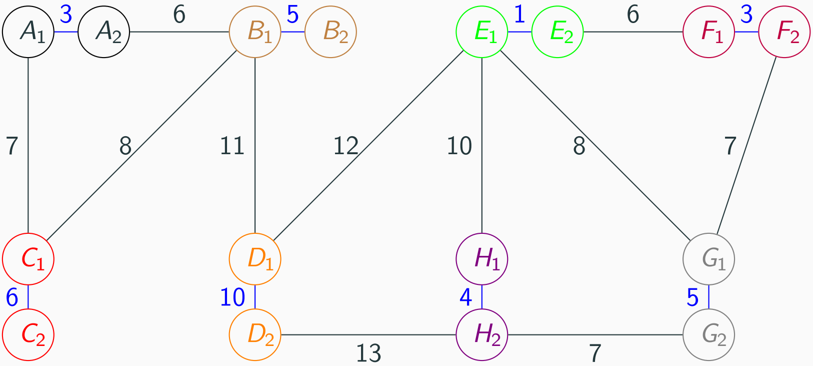
Was bedeutes das für den reduzierten Graphen?

$\Rightarrow$ Knoten werden auf maximal $n/2, n = |V|$ reduziert!

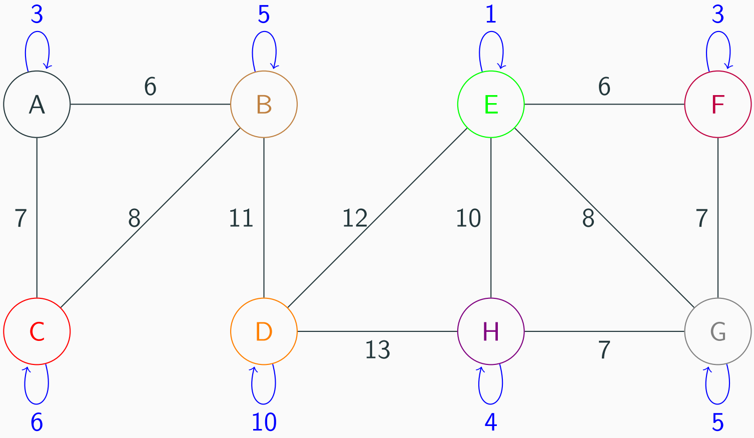
1. Kontraktierende Kanten markieren



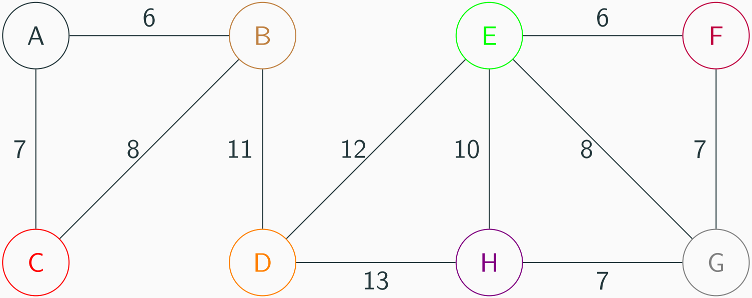
2. Verbundene Komponente bestimmen



3. Verbundene Komponenten durch einzelnen Knoten ersetzen



4. Selbstschleifen entfernen



F-schwere/ -leichte Kanten

Definition

Sei $P(e = \{u, v\})$ der Pfad, der die Knoten im MSF verbindet, in Kanten
Sei $w : E \to \mathbb{R}$, die Gewichtsfunktion von G
Sei ferner definiert $w(E) = \{w(e_1), \ldots, w(e_m)\}$

Eine Kante ist F-schwer, wenn gilt:

$$w(e) > w_F(e)$$

, wobei:

$$w_F(e = (u, v)) = \begin{cases} \infty\text{, u und v sind in verschiedenen Komponenten} \\ \text{max}\{\text{w(P(e))}\}, sonst \end{cases}$$

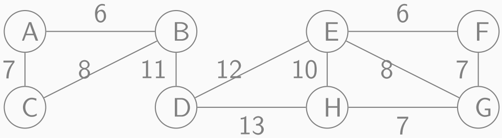
Randomiserte Stichprobem

Wirf eine Münze!

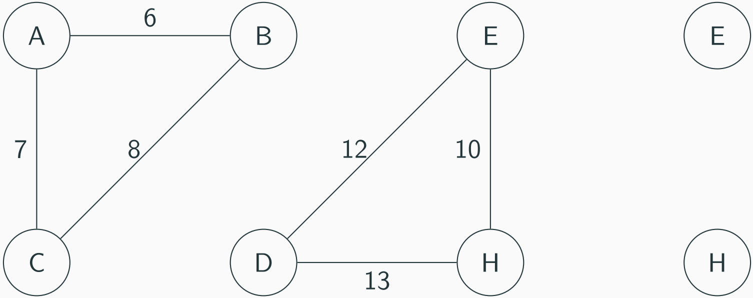
Quelle: https://melbournechapter.net/explore/coin-flip-clipart/

Kanten 'würfeln'

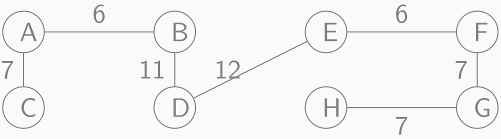
G:



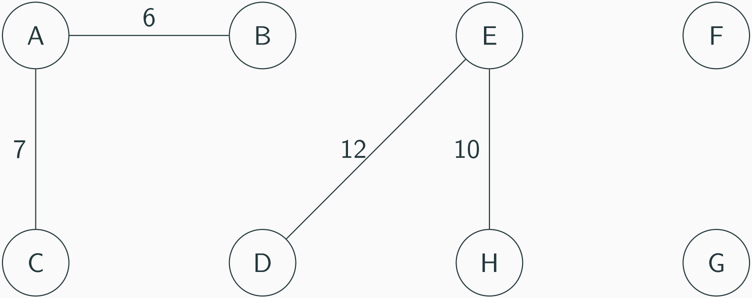
$G(p = 0,5)$:



MST:



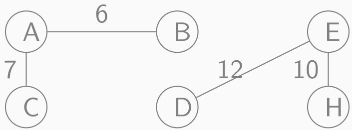
MSF:



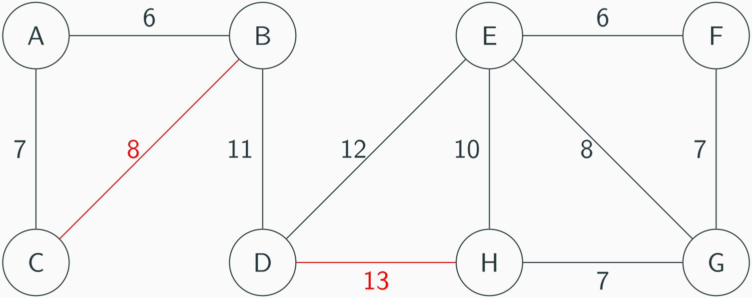
Erkenntnis

Eleminierung von unnützen Kanten

MSF:



G :



Aber wie fassen wir das in einen Algorithmus?

... doch:

- Wie erreicht man dadurch eine erwartete lineare Laufzeit?
- Wie kann ein vernünftiger Spannbaum trotzt eliminierung von Kanten erwartet werden?

Diese Antworten erhaltet ihr in meiner finalen Präsentation.