Der linearzeit MST-Algorithmus

Der schnellste Algorithmus für das MST/ MSF Problem

Max Springenberg

Proseminar: Randomisierte Algorithmen, TU Dortmund

Motivation

„the fastest“

Borůvka, Kruskal, Prim	$O(m\ log(n))$	(deterministisch)
Chazelle	$O(m\ log(\beta(m,n)))$	(deterministisch)
MST	$O(m+n)$	(randomisiert)

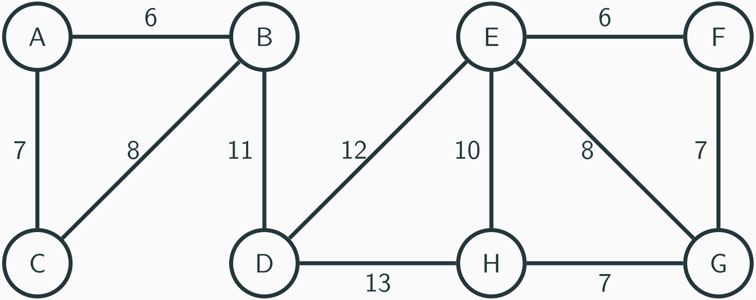
„the fastest“

Borůvka, Kruskal, Prim	$O(m\ log(n))$	(deterministisch)
Chazelle	$O(m\ log(\beta(m,n)))$	(deterministisch)
MST	$O(m+n)$	(randomisiert)

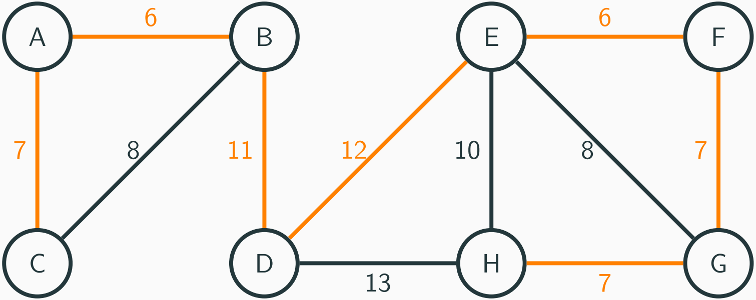
„For many applications, a randomized algorithm is the simplest algorithm available, or the fastest, or both.“ [**?**]

Was wollen wir erreichen?

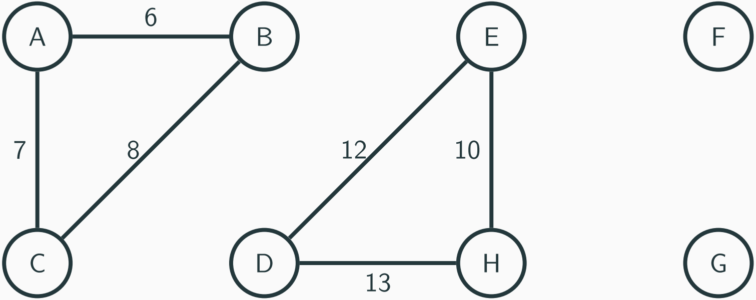
MST



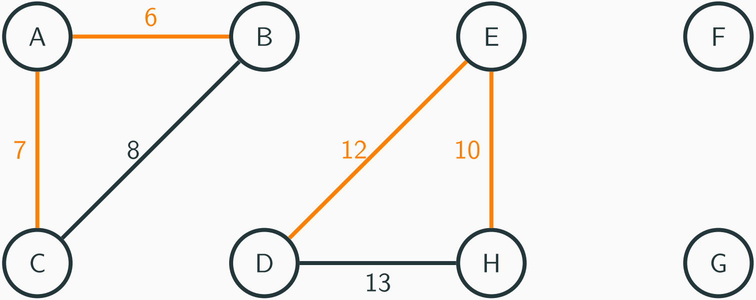
MST



MSF



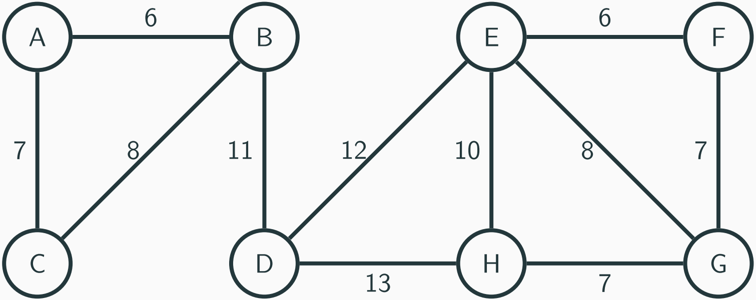
MSF



F-leicht/-schwer

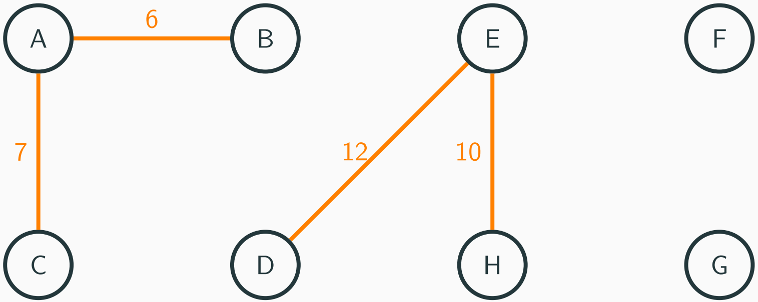
Teaser: F-schwer

Sei G:



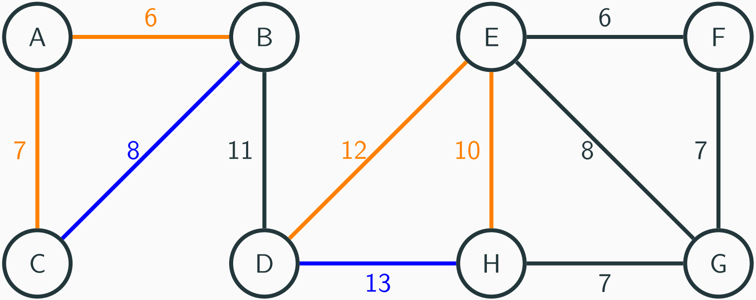
Teaser: F-schwer

Sei F:



Teaser: F-schwer

Dann ist etwas an diesen Kanten besonders.



F-leicht/-schwer

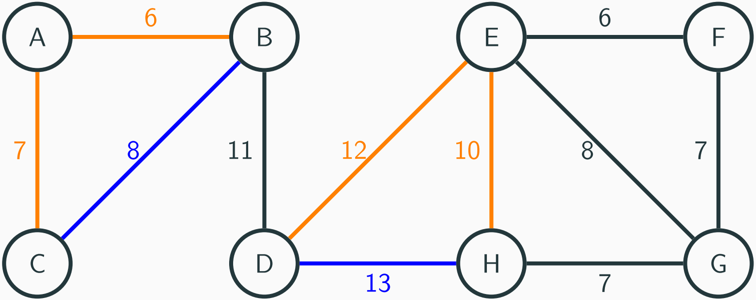
Sei $e = \{u, v\}$, P_e in F, w von G

$$w_F(e) = \begin{cases} \infty & , u \text{ und } v \text{ in verschiedenen Komponenten} \\ max\{w(P_e(e))\} & , \text{sonst} \end{cases}$$

F-schwer: $w(e) > w_F(e)$

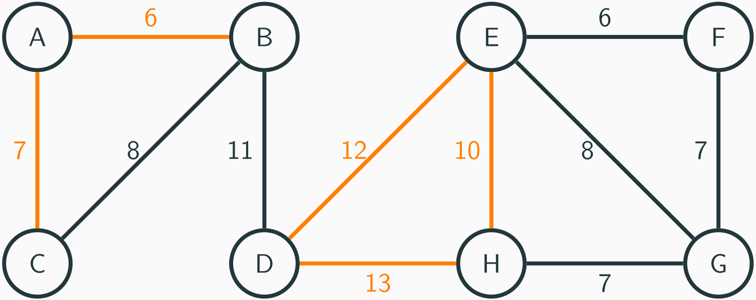
F-leicht: $w(e) \leq w_F(e)$

F-schwere Kanten im MSF?



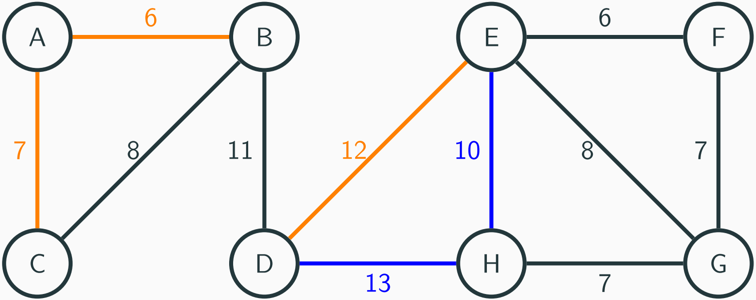
F-schwere Kanten im MSF?

Zyklus D,E,H,D ↯



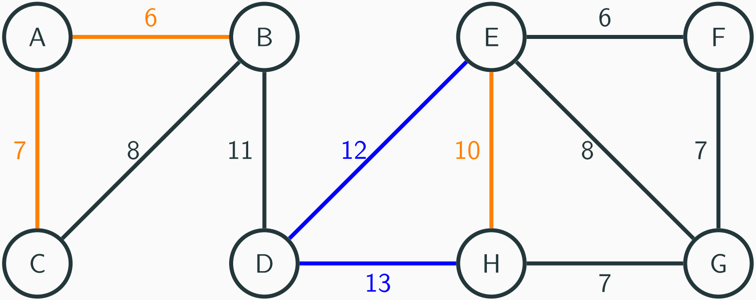
F-schwere Kanten im MSF?

$w(\{\text{D,H}\}) > w(\{\text{E,H}\})$



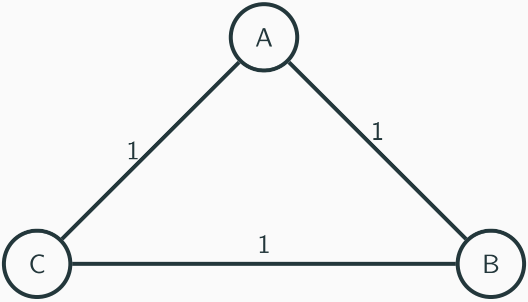
F-schwere Kanten im MSF?

$w(\{\text{D,H}\}) > w(\{\text{D,E}\})$



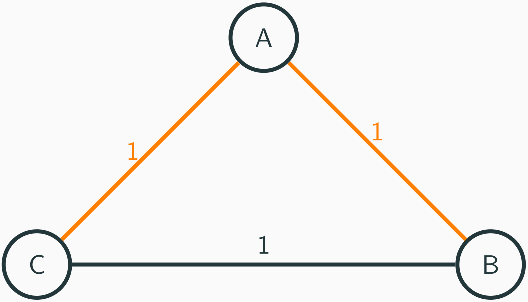
F-leichte Kanten im MSF?

G_{w_1}:



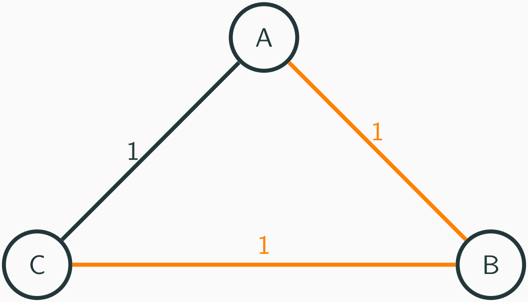
F-leichte Kanten im MSF?

G_{w_1}, MST F:



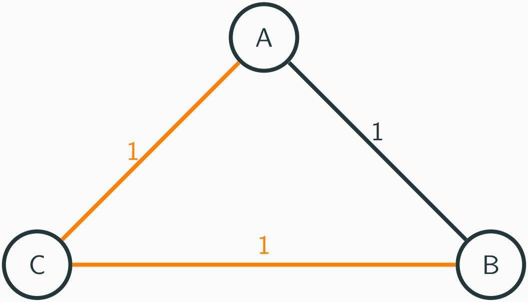
F-leichte Kanten im MSF?

G_{w_1}, MST F:



F-leichte Kanten im MSF?

G_{w_1}, MST F:



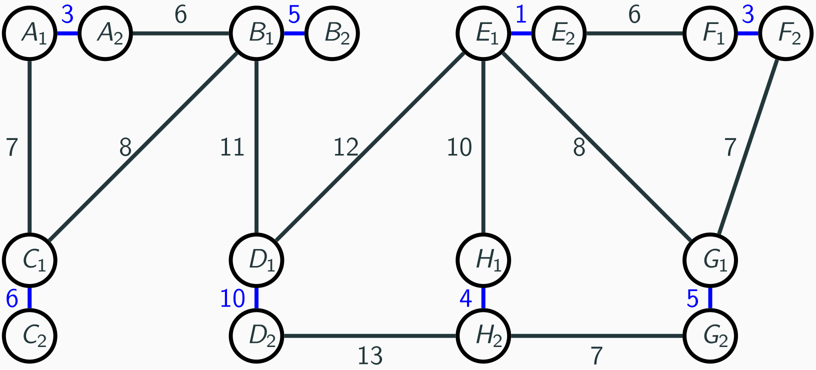
Borůvka Phasen

Ablauf

1. Kontraktierende Kanten markieren
2. Verbundene Komponenten bestimmen
3. Verbundene Komponenten durch einzelne Knoten ersetzen
4. Selbstschleifen entfernen

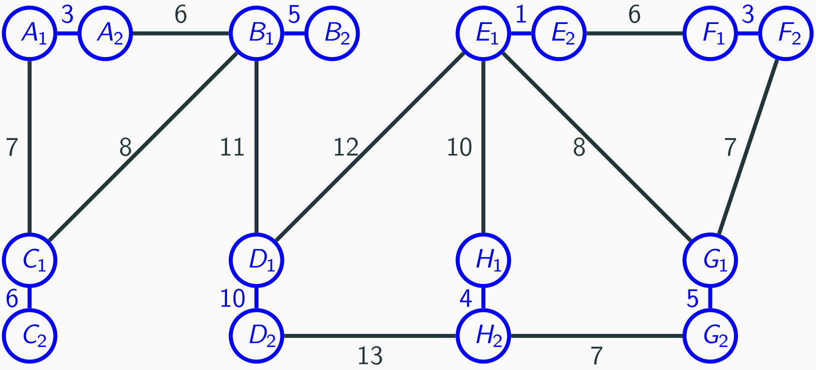
Ablauf

1. Kontraktierende Kanten markieren



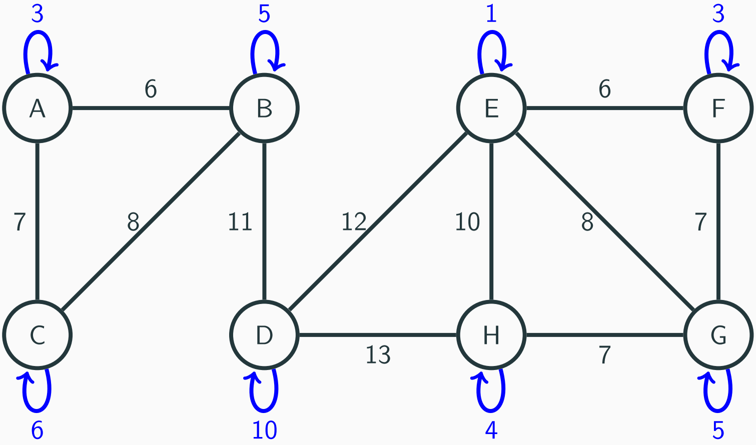
Ablauf

2. Verbundene Komponenten bestimmen

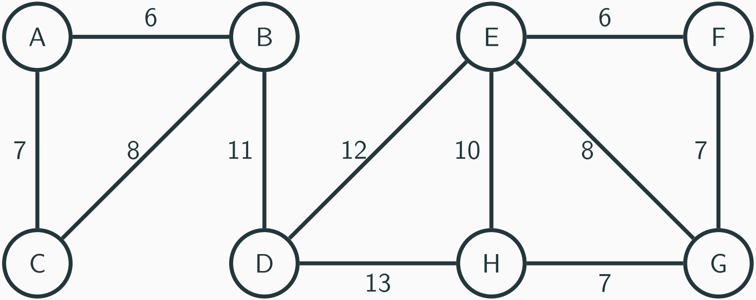


Ablauf

3. Verbundene Komponenten durch einzelne Knoten ersetzen



4. Selbstschleifen entfernen



Reduktion der Knoten

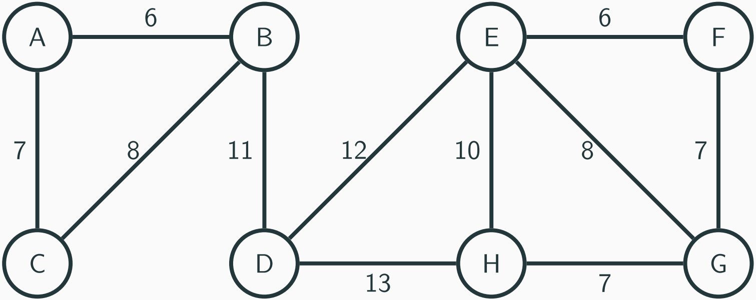
Randomisierte Stichproben

Wirf eine Münze!

Quelle: https://melbournechapter.net/explore/coin-flip-clipart/

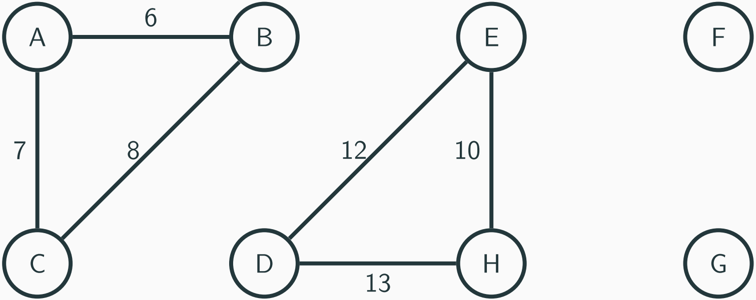
Kanten ‘würfeln‘

G_1 :



Kanten ‘würfeln‘

$G_1(p = 0.5)$:



Verschlechtern wir den MSF?

Der MST-Algorithmus

MST

Data: Graph G

Result: Approximation eines MST/ MSF in G

MST

Data: Graph G

Result: Approximation eines MST/ MSF in G

3 Borůvka-Phasen

1: $G_1, C \leftarrow$ **Wenn** G leer oder Borůvka-Phasen terminieren:

return $F = C$

MST

Data: Graph G

Result: Approximation eines MST/ MSF in G

1: $G_1, C \leftarrow$ 3 Borůvka-Phasen
Wenn G leer oder Borůvka-Phasen terminieren:
return $F = C$

2: $G_2 \leftarrow G_1(p = 0,5)$

MST

Data: Graph G

Result: Approximation eines MST/ MSF in G

$G_1, C \leftarrow$ 3 Borůvka-Phasen
Wenn G leer oder Borůvka-Phasen terminieren:
return $F = C$

$G_2 \leftarrow G_1(p = 0,5)$

$F_2 \leftarrow MST(G_2)$

MST

Data: Graph G

Result: Approximation eines MST/ MSF in G

1: $G_1, C \leftarrow$ 3 Borůvka-Phasen

Wenn G leer oder Borůvka-Phasen terminieren:

return $F = C$

2: $G_2 \leftarrow G_1(p = 0,5)$

3: $F_2 \leftarrow MST(G_2)$

4: $G_3 \leftarrow (V_{G_1}, E_{G_1} - E_{F_2-heavy})$

MST
Data: Graph G
Result: Approximation eines MST/ MSF in G

1: $G_1, C \leftarrow$ 3 Borůvka-Phasen
Wenn G leer oder Borůvka-Phasen terminieren:
return $F = C$
2: $G_2 \leftarrow G_1(p = 0,5)$
3: $F_2 \leftarrow MST(G_2)$
4: $G_3 \leftarrow (V_{G_1}, E_{G_1} - E_{F_2 - heavy})$
5: $F_3 \leftarrow MST(G_3)$

MST

Data: Graph G

Result: Approximation eines MST/ MSF in G

$G_1, C \leftarrow$ 3 Borůvka-Phasen
Wenn G leer oder Borůvka-Phasen terminieren:
  return $F = C$

$G_2 \leftarrow G_1(p = 0,5)$

$F_2 \leftarrow MST(G_2)$

$G_3 \leftarrow (V_{G_1}, E_{G_1} - E_{F_2-heavy})$

$F_3 \leftarrow MST(G_3)$

return $F = C \cup F_3$

Laufzeit

$G_1, C \leftarrow$ 3 Borůvka-Phasen
Wenn G leer
oder Borůvka-Phasen terminieren:
return $F = C$

$G_2 \leftarrow G_1(p = 0,5)$

$F_2 \leftarrow MST(G_2)$

$G_3 \leftarrow (V_{G_1}, E_{G_1} - E_{F_2-heavy})$

$F_3 \leftarrow MST(G_3)$

return $F = C \cup F_3$

Laufzeit

$O(n+m)$ $G_1, C \leftarrow$ 3 Borůvka-Phasen
Wenn G leer
oder Borůvka-Phasen terminieren:
return $F = C$

$O(n+m)$ $G_2 \leftarrow G_1(p = 0,5)$

$F_2 \leftarrow MST(G_2)$

$O(n+m)$ $G_3 \leftarrow (V_{G_1}, E_{G_1} - E_{F_2-heavy})$

$F_3 \leftarrow MST(G_3)$

$O(n+m)$ **return** $F = C \cup F_3$

Laufzeit

$O(n+m)$ $G_1, C \leftarrow$ 3 Borůvka-Phasen
Wenn G leer
oder Borůvka-Phasen terminieren:
return $F = C$

$O(n+m)$ $G_2 \leftarrow G_1(p = 0,5)$

? $F_2 \leftarrow MST(G_2)$

$O(n+m)$ $G_3 \leftarrow (V_{G_1}, E_{G_1} - E_{F_2-heavy})$

? $F_3 \leftarrow MST(G_3)$

$O(n+m)$ **return** $F = C \cup F_3$