

УДК 532.546

Конюхов А.¹, Тараканов А.²

¹ОИВТ РАН

²МФТИ

О двух моделях неравновесной фильтрации в пористой среде

В работе рассматриваются процессы неравновесной фильтрации флюидов в пористой среде. Сравнивается поведение решений задачи о вытеснении одного флюида другим при использовании двух различных моделей, учитывающих неравновесные эффекты.

Особое внимание уделено процессам с сильной и слабой неравновесностью а так же процессам с нестационарным режимом закачки.

Ключевые слова: пористая среда, фильтрация, неравновесность.

On two mathematical models of nonequilibrium flow in a porous medium.

The present article is focused on nonequilibrium processes of filtration of fluids in a porous medium. Solutions of a problem of displacement of one fluid by other, which were obtained according two different models, were compared. Attention was paid to cases of strongly and slightly nonequilibrium processes and also to unsteady flow.

Key words: porous medium, filtration, nonequilibrium effects.

1. Введение

Эффект неравновесности процесса вытеснения несмешивающихся жидкостей в пористой среде, проявляющийся в зависимости относительных фазовых проницаемостей не только от фазовых насыщенныхностей, но также от скорости вытеснения, хорошо известен [2]. Существует, по меньшей мере, два различных способа учета этого эффекта в рамках математических моделей неравновесной фильтрации. Первый способ основан на использовании динамических соотношений вида $f(S, S_t)$ вместо равновесных функций насыщенности при определении относительных фазовых проницаемостей и капиллярного давления. Модель этого типа была разработана Баренблаттом и сотрудниками [1]. Большим преимуществом данной модели является малое количество эмпирически определяемых параметров. При

некоторых предположениях характерное время капиллярной релаксации τ является единственным дополнительным параметром модели, а динамические относительные фазовые проницаемости имеют вид $f_\alpha = f_\alpha^e(S + \tau S_t)$. Другой подход [2] основан на принципах неравновесной термодинамики. В рамках этого подхода вводится зависимость термодинамического потенциала (свободной энергии) от дополнительного параметра, характеризующего неравновесные состояния. Для данного параметра (далее обозначаемого ξ) формулируется кинетическое уравнение, обеспечивающее неотрицательность диссипации капиллярных сил в произвольных процессах (см. [2]). Относительные фазовые проницаемости и капиллярное давление являются функциями данного параметра и насыщенности

$$f_\alpha = f_\alpha(S, \xi), p_c = p_c(S, \xi). \quad (1.1)$$

В основе данного подхода лежит зависимость термодинамического потенциала от параметров состояния. Даже простые модели, основанные на разложении потенциала в ряд относительно состояния равновесия, включают в себя сравнительно большое количество эмпирически определяемых констант.

Определение зависимости $f_\alpha(S, \xi)$ требует дополнительных аргументов. В настоящей работе зависимость относительных фазовых проницаемостей от параметра ξ определяется таким образом, чтобы модель была совместима с моделью Баренблатта при малых характерных временах капиллярной релаксации, т.е.

$$f_\alpha \rightarrow f_\alpha^e(S + \tau S_t) \text{ при } \tau \rightarrow 0. \quad (1.2)$$

С другой стороны, при конечных τ , зависимости (1.1) не могут быть представлены в виде $f=f(S, S_t)$. Далее проводится сравнение моделей применительно к одномерным задачам вытеснения в пористой среде с постоянной и переменной во времени скоростью закачки.

2. Описание моделей.

Одна из наиболее часто используемых моделей в гидродинамических симуляторах – это модель Маскета-Лeverетта. В ее основе лежат закон сохранения массы, закон Дарси, т.е.

$$u_1 = -\frac{kk_1}{\mu_1} \nabla p_1, \quad u_2 = -\frac{kk_2}{\mu_2} \nabla p_2, \quad (2.1)$$

$$p_2 - p_1 = p_{cap}, \quad (2.2)$$

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + \nabla \cdot u_1 = 0, \quad \phi \frac{\partial (1-S)}{\partial t} + \nabla \cdot u_2 = 0, \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot (u_1 + u_2) = 0, \quad (2.4)$$

где p_1 и p_2 давления воды и нефти соответственно, p_{cap} капиллярное давление, k , k_1 , k_2 абсолютная проницаемость и относительные проницаемости воды и нефти соответственно, μ_1 , μ_2 динамические вязкости, S насыщенность, u_1 , u_2 скорости расхода нефти и воды соответственно, ϕ пористость. Заметим, что их последнего уравнения в одномерном случае следует, что $u_1 + u_2 = u = const$. Из вышеприведенных уравнений получается уравнение для насыщенности в одномерном случае

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{\phi} \frac{\partial}{\partial x} u b(S) = \frac{\partial}{\partial x} \left[a(S) \frac{\partial S}{\partial x} \right] \quad (2.5)$$

$$\text{Где } b(S) = \frac{k_1}{k_1 + \mu k_2}, \text{ и } \mu = \frac{\mu_1}{\mu_2}, \text{ при этом } a(S, \xi) = -\frac{kM}{\phi \mu_2} \frac{k_1(S)k_2(S)}{k_1(S) + \mu k_2(S)}.$$

Особое внимание следует обратить на то, что относительные фазовые проницаемости являются функциями насыщенности. Подобное выражение возможно только при наличии локального равновесия между флюидами, т.е. когда перестройка каналов, по которым текут жидкости происходит достаточно быстро. Таким образом, для корректного расчета по модели Маскета-Левеверетта необходимо, чтобы характерное время изменения насыщенности было много больше характерного времени установления равновесия между флюидами, что вообще говоря не всегда верно на фронте вытеснения одного флюида другим. Таким образом, неравновесные эффекты могут повлиять на процесс фильтрации флюидов не только при нестационарном вытеснении, но и при стационарном вытеснении, т.е. при постоянном расходе воды.

Для учета вышеупомянутых эффектов Баренблаттом и сотрудниками предложили считать, что относительные фазовые проницаемости зависят от эффективной насыщенности, которая дается формулой

$$\omega = S(t + \tau) \approx S + \tau \frac{\partial S}{\partial t} \quad (2.6)$$

где τ - время релаксации. Данное предположение объяснялось тем, что при вытеснении нефти водой более смачивающий флюид прорывается сначала в крупные поры, а затем занимает мелкие, то проницаемость для воды должна быть выше равновесной, а для нефти – ниже. Это наблюдение позволяет в задаче о вытеснении нефти водой из

изначально насыщенного только нефтью пласта считать, что фазовые проницаемости зависят от некоторой эффективной насыщенности, которая, вообще говоря, не меньше действительной насыщенности. Кроме того, такой выбор эффективной насыщенности обеспечивает зависимость процесса вытеснения от скорости.

Тогда, преобразовав уравнение (1.5) и сохраняя величины только первого порядка малости по τ , получим следующее уравнение

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{1}{\phi} \frac{\partial}{\partial x} ub(\omega) + \tau \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{\phi} \frac{\partial}{\partial x} ub(\omega) \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[a(\omega) \frac{\partial \omega}{\partial x} \right] + \tau \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left[a(\omega) \frac{\partial \omega}{\partial x} \right] \right] \quad (2.7)$$

С начальным условием при $t = 0$

$$\omega + \tau \left[\frac{1}{\phi} \frac{\partial}{\partial x} (ub(\omega)) \right] - \tau \left[\frac{\partial}{\partial x} \left[a(\omega) \frac{\partial \omega}{\partial x} \right] \right] = S \quad (2.8)$$

В дальнейших расчетах будем пренебрегать слагаемыми, возникшими из-за капиллярного давления, иными словами $\Delta p \gg \Delta p_{cap}$. Т.е. решается уравнение

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{1}{\phi} \frac{\partial}{\partial x} (ub(\omega)) + \tau \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{\phi} \frac{\partial}{\partial x} (ub(\omega)) \right] = 0 \quad (2.9)$$

С начальным условием при $t = 0$

$$\omega + \tau \left[\frac{1}{\phi} \frac{\partial}{\partial x} ub(\omega) \right] = S \quad (2.10)$$

Для удобства работы с уравнениями перейдем к безразмерным временам и расстояниям. Пусть пространственный размер расчетной области x_0 , можно ввести характерный масштаб времени по формуле $t_0 = \frac{\phi x_0}{u}$. Таким образом, можно сделать замену

$$\begin{aligned} t' &= t / t_0 \\ x' &= x / x_0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

После такой замены получим следующее уравнение

$$\partial_{t'} \omega + \partial_{x'} b(\omega) + \tau \partial_{t'x'}^2 b(\omega) = 0 \quad (2.12)$$

Численное решение уравнение (1.12) несколько затруднено смешанными производными по времени и пространству, поэтому уравнение (1.12) записывалось в виде системы

$$\begin{aligned}\partial_{t'} v &= -\frac{v - g(z)}{\tau} \\ \partial_{x'} z &= \frac{v - g(z)}{\tau}\end{aligned}\tag{2.13}$$

Где $v = \omega + \pi \partial_x b(\omega)$, $z = b(\omega)$ а $g(z) = b^{-1}(z)$ -обратная функция к функции Баклея.

Система (2.13) решается в настоящей работе при расчете двухфазного вытеснения на основе модели Баренблатта.

Перейдем теперь к описанию второй модели. В.И. Кондауровым было предложено ввести некоторый параметр неравновесности, который имеет смысл площади контакта менее смачивающего флюида со скелетом. Далее для этого параметра записывается кинетическое уравнение, которое имеет вид

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -C \frac{\partial \Psi}{\partial \xi}\tag{2.14}$$

Где Ψ - свободная энергия системы, а C - некоторая константа. Такой выбор кинетического уравнения обеспечивает неотрицательность диссипации капиллярных сил.

Т.к. общий вид термодинамического потенциала из (2.14) не известен, то Кондауровым было предложено рассматривать его разложение в ряд Тейлора до 2-ого порядка по насыщенности по нефти и по параметру неравновесности.

$$\Psi = \frac{1}{2} \beta \xi^2 + \frac{1}{2} M s^2 - \alpha \xi s + \gamma s\tag{2.15}$$

С учетом (1.15) получим кинетическое уравнение в виде

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{1}{\tau} \Lambda(s, \xi) = \frac{1}{\tau} \left(\frac{\alpha}{\beta} (1 - S) - \xi \right)\tag{2.16}$$

В оригинальной работе Кондаурова было введено упрощающее предположение, согласно которому относительные фазовые проницаемости есть функции от эффективной насыщенности

$$\omega = S + \frac{\alpha \xi}{M}\tag{2.17}$$

Что, с учетом (1.16), закона сохранения массы и закона Дарси, приводит к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{1}{\varphi} \frac{\partial}{\partial x} u b(\omega) - \frac{\partial}{\partial x} \left[a(\omega) \frac{\partial \omega}{\partial x} \right] &= \frac{\alpha}{\tau M} \Lambda(\omega, \xi), \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} &= \frac{1}{\tau} \Lambda(\omega, \xi),\end{aligned}\tag{2.18}$$

или, в рамках сделанного приближения о слабой роли капиллярного давления, получим

$$\begin{aligned}\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{1}{\varphi} \frac{\partial}{\partial x} u b(\omega) &= \frac{\alpha}{\tau M} \Lambda(\omega, \xi), \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} &= \frac{1}{\tau} \Lambda(\omega, \xi).\end{aligned}\tag{2.19}$$

При этом, при решении задачи о закачивании воды в изначально насыщенный только нефтью пласт, начальные и граничные условия примут вид

$$\begin{aligned}\omega(x, 0) &= \omega_0 = \frac{\alpha^2}{\beta M}, \\ \xi(x, 0) &= \xi_0 = \alpha / \beta, \\ \omega(0, t) &= 1, \\ \xi(0, t) &= 0, \\ \omega(x_0, t) &= \omega_0, \\ \xi(x_0, t) &= \xi_0,\end{aligned}$$

где ξ_0 - равновесное значение параметра неравновесности при $S=0$.

Как показали результаты численного моделирования и расчетов, рассматриваемая модель в формулировке (2.18) не переходит ни в первую модель, ни в модель Маскета-Леверетта ни при каких временах релаксации. Это связано с тем, что классическая модель и модель, предложенная Кондауровым, дают, вообще говоря, различные результаты для скорости распространения скачка насыщенности, а именно: для неравновесной модели:

$$v_f = \frac{u}{\varphi} \frac{\partial b(\omega_-)}{\partial \omega_-} = \frac{u}{\varphi} \frac{b(\omega_-) - b(\omega_0)}{\omega_- - \omega_0},$$

в то время как для классической модели имеет место формула

$$v_f = \frac{u}{\varphi} \frac{\partial b(S_-)}{\partial S_-} = \frac{u}{\varphi} \frac{b(S_-)}{S_-},$$

где v_f - скорость распространения скачка, S_-, ω_-, ξ_- - значения насыщенности, эффективной насыщенности и параметра неравновесности за скачком. Т.к. ω_0 , вообще говоря, отлично от 0, а $\omega_- = S_-$, то скорости распространения скачка различны.

Чтобы получить согласование моделей, в настоящей работе, предлагается изменить зависимость относительных фазовых проницаемостей и функции Баклея от параметра неравновесности, а именно, из (2.16) получим

$$\tau \frac{\beta}{\alpha} \frac{\partial \xi}{\partial t} = 1 - S - \frac{\beta}{\alpha} \xi \quad (2.20)$$

Тогда, дифференцируя обе части по времени и умножая на время релаксации, получим

$$\frac{\beta}{\alpha} \tau \frac{\partial}{\partial t} \xi = -\tau^2 \frac{\beta}{\alpha} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \tau \frac{\partial}{\partial t} S.$$

Подставив в (2.20), получим

$$\frac{\beta}{\alpha} \xi = 1 - S + \tau \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\beta}{\alpha} \tau^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2},$$

что приводит к следующему разложению

$$\frac{\beta}{\alpha} \xi = 1 - S + \tau \frac{\partial S}{\partial t} - \tau^2 \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} + \tau^3 \frac{\partial^3 S}{\partial t^3} + \dots$$

Пренебрегая членами второго порядка малости по τ получим, что

$$S + \tau \frac{\partial S}{\partial t} = 2S + \frac{\beta}{\alpha} \xi - 1. \quad (2.21)$$

Тогда, вместо равновесной функции Баклея $b(S)$ будем использовать функцию

$$b(S, \xi) = \frac{k_1 (2S + \frac{\beta}{\alpha} \xi - 1)}{k_1 (2S + \frac{\beta}{\alpha} \xi - 1) + \mu k_2 (2 - 2S - \frac{\beta}{\alpha} \xi)} = b_e(S + \tau \frac{\partial S}{\partial t}). \quad (2.22)$$

Окончательный вид уравнений, описывающих вторую модель, будет следующим

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{\varphi} \frac{\partial}{\partial x} u b(S, \xi) &= 0, \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} &= \frac{1}{\tau} \Lambda(S, \xi). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Граничные и начальные условия:

$$\begin{aligned} S(x, 0) &= 0, \\ \xi(x, 0) &= \xi_0 = \alpha / \beta, \\ S(0, t) &= 1, \\ \xi(0, t) &= 0, \\ S(x_{\max}, t) &= 0, \\ \xi(x_{\max}, t) &= \xi_0. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Особый интерес представляет собой случай сильной неравновесности. Пусть $\tau \rightarrow \infty$. Тогда система (2.23) перейдет в

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{\phi} \frac{\partial}{\partial x} u b(S, \xi) &= 0, \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} &= 0. \end{aligned} \quad (2.25)$$

С учетом начальных условий (1.24)

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{\phi} \frac{\partial}{\partial x} u b(S, \xi_0) = 0. \quad (2.26)$$

Таким образом, получилась классическая задача о вытеснении с несколько измененной зависимостью относительных фазовых проницаемостей от насыщенности, что позволяет, например, получить выражение для скорости распространения фронта вытеснения

$$v_f = \frac{u}{\phi} \frac{\partial b(S_-, \xi_0)}{\partial S_-} = \frac{u}{\phi} \frac{b(S_-, \xi_0)}{S_-}. \quad (2.27)$$

3. Сравнение результатов численного моделирования.

При решении задачи о вытеснении водой нефти, предполагалось, что изначально в расчетной области вода полностью отсутствует, а нагнетается вода в точке $x = 0$. При расчетах использовались следующие значения величин: размер $x_0 = 100$ м, скорость $u = 10^{-6}$ м/с, вязкость $\mu_1 = 10^{-2}$ Па·с, пористость $\phi = 10^{-2}$, проницаемость $k = 10^{-14}$ м², модуль капиллярного давления $M = 10^4$ Па, причем $\alpha = \beta = 0.1M$. Тогда характерное время $t_0 = \frac{x_0 \phi}{u} = 10^6$ с.

При выполнении расчетов по модели Баренблатта использовалась диагональная схема второго порядка точности, приведенная в работе [8], а именно, пусть n, j -индексы по времени и пространству соответственно, тогда, обозначив за Δx и Δt шаг по пространству и по времени и $\exp -\Delta t/\tau$ за θ , запишем вычислительную схему в виде:

$$\begin{aligned} z_{j+1}^n &= z_j^n + \frac{\Delta x}{2\tau} v_j^n + v_{j+1}^n - g(z_{j+1}^n) - g(z_j^n), \\ v_j^{n+1} &= \theta v_j^n + \frac{\Delta t}{2\tau} g(z_j^{n+1}) + \theta g(z_j^n). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Для определения профиля насыщенности во второй модели использовалась схема WENO-5.

На приведенных ниже графиках изображены результаты численного решения задачи фильтрации для каждой из моделей, при этом всюду в этой главе используются безразмерные единицы $t' = t / t_0$ и $x' = x / x_0$.

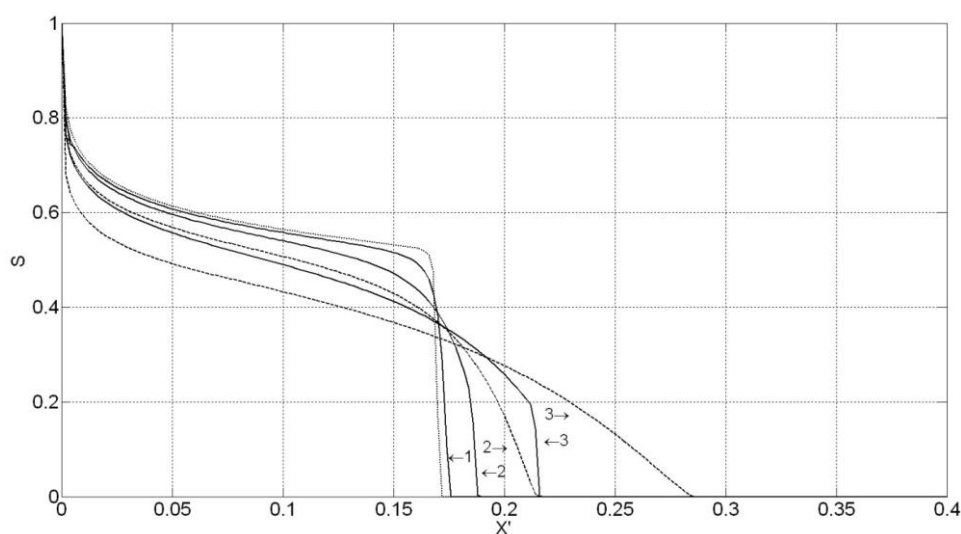


Рис. 1. На рисунке представлена зависимость насыщенности по воде от горизонтальной безразмерной координаты для классической модели (пунктирная линия) и для модели, предложенной Кондауровым (сплошная линия), при различных значениях $\tau/t_0=0.001, 0.01, 0.1$, кривые 1, 2, 3 соответственно. При $\tau/t_0=0.001$ профили насыщенности рассчитанные по каждой из моделей практически совпадают.

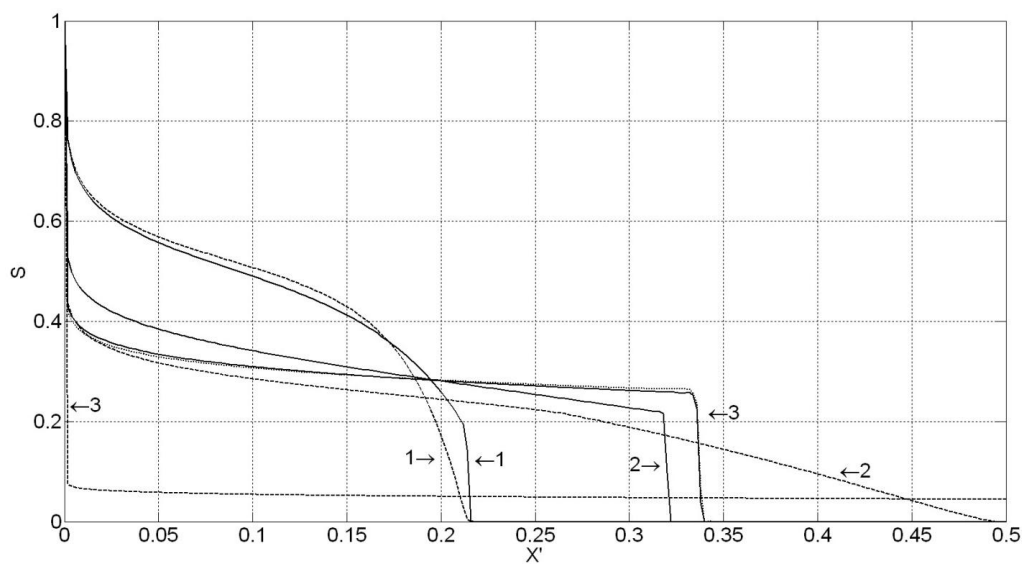


Рис. 2. Сравнение неравновесных моделей при $\tau/t_0=0.01, 0.1, 1.0$ (случаи 1,2,3 соответственно). Пунктирные линии соответствуют классической модели, а сплошные модели Кондаурова. Точечной линией показан профиль насыщенности при $\tau/t_0=1000000$ (почти полностью совпадает со второй моделью при $\tau/t_0=1,0$).

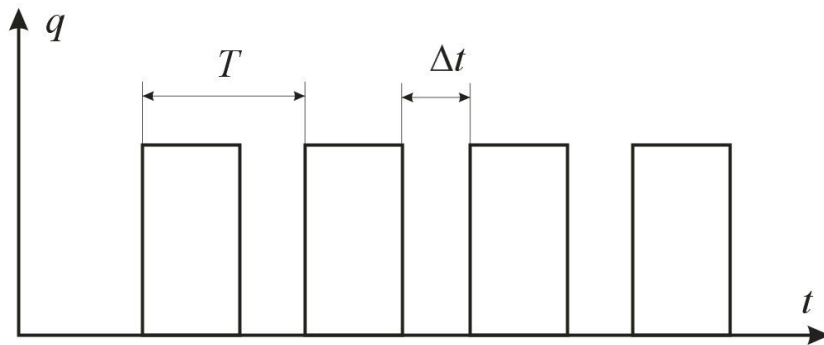


Рис. 3 Схема импульсной закачки.

Особый интерес представляет поведение моделей при импульсной закачке. Согласно (1.9) при отсутствии закачки, в первой модели не происходит перераспределения флюидов, т.к. $u = 0$. Отсюда следует, что профили насыщенности при постоянной закачке и в импульсном режиме должны совпадать, если было закачено одинаковое количество воды, что и наблюдалось при расчетах. В связи с этим профили насыщенности в режиме импульсной закачки изображены только для второй модели. При этом введены обозначения, T - период закачки (рис.3) Δt - время, в течении которого не происходит нагнетание жидкости, а $f = \Delta t/T$ - доля времени, в течении которого не происходит закачки.

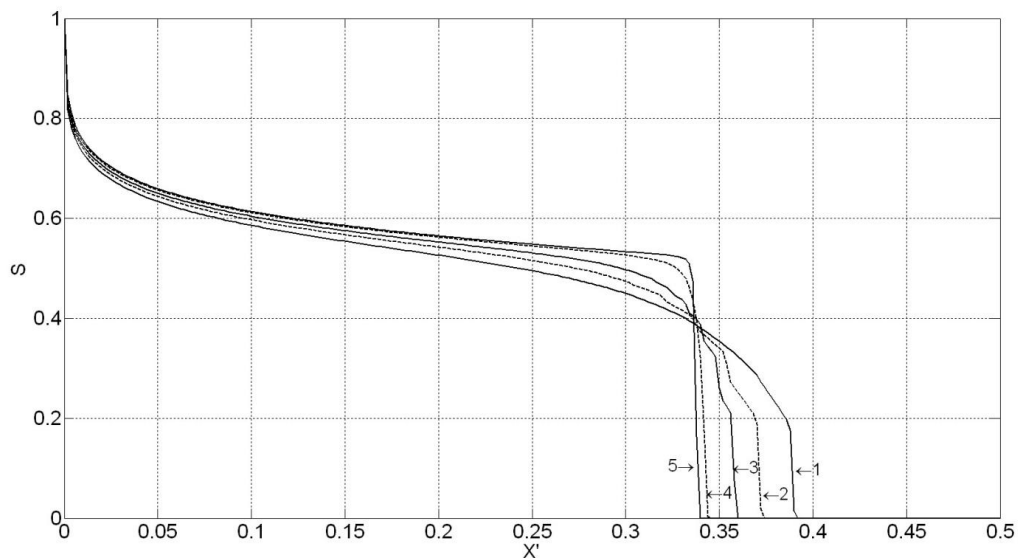


Рис. 4. Профили насыщенности, рассчитанные по второй модели, при $T = 2\tau$, а $f = 0.05, 0.50, 0.75$, и 0.95 для кривых 1, 2, 3, 4 соответственно. Кривая 5 — классическое решение.

Заключение

Поведение решений при конечном времени релаксации τ и сравнение решений в задаче с импульсным нагнетанием жидкости дает основу для физической аргументации. При $\tau \rightarrow 0$ обе модели ведут себя аналогично в соответствии со свойством (2). Как следует из анализа поведения решения при $\tau \rightarrow \infty$ скорость фронта вытеснения в модели Баренблатта стремится к бесконечности. С другой стороны решение с использованием второй модели стремится к некоторому предельному решению с конечной скоростью распространения фронта вытеснения. С физической точки зрения вытеснение при $\tau \rightarrow \infty$ является вытеснением в системе крупных пор, поскольку перераспределение флюидов между порами различных размеров под действием капиллярных сил не происходит. Если доля объема порового пространства, приходящаяся на крупные поры конечна, то конечна и скорость распространения фронта вытеснения.

Другое отличие между моделями иллюстрируется решениями задачи об импульсном вытеснении с кусочно-постоянной зависимостью расхода от времени $W(t)$ (см. рисунок 1). Модели типа модели Баренблатта не учитывают эффекты капиллярной релаксации, которые имеют место на интервалах времени с нулевой скоростью закачки, где $W(t)=0$ и, соответственно, $dS/dt=0$. В этом случае решение зависит только от W_0 и суммарного расхода закаченной жидкости и не зависит от интервала времени между импульсами Δt . С физической точки зрения, даже в том случае, когда насыщенность постоянна в пористой среде могут протекать процессы перераспределения флюидов в поровом пространстве под влиянием капиллярных сил. В результате площадь контакта смачивающей жидкости со скелетом увеличивается, а подвижность уменьшается. В рамках модели [2] этот процесс описывается кинетическим уравнением для параметра капиллярной неравновесности. При этом относительные фазовые проницаемости в начале каждого последующего импульса зависят от времени Δt , максимальный эффект достигается при $\Delta t \sim \tau$. Можно заключить, что даже при простой аппроксимации термодинамического потенциала модель [2] способна устранить некоторые недостатки, присущие моделям типа модели Баренблатта.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kondaurov V.I. A non-equilibrium model of a porous medium saturated with immiscible fluids, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, Vol.73, N1, 2009, pp.88-102.
2. Barenblatt G.I., Patzek T.W., Silin D.B. The mathematical model of nonequilibrium effects in water-oil displacement // *SPE Journal*, Vol. 8, N 4, 2003. P. 409-416
3. Азиз Х., Сеттари Э. Математическое моделирование пластовых систем.- М.: Недра, 1982.- 407 с.
4. Баренблатт Г.И., Ентов В.И. Неравновесные эффекты при фильтрации несмешивающихся жидкостей // Численные методы решения задач фильтрации многофазной несжимаемой жидкости. -Новосибирск: ИТПМ, 1972. - С.33-43.
5. Ентов В.М. К теории неравновесных эффектов при фильтрации неоднородных жидкостей // Изв. АН СССР. МЖГ. - 1980. - №3. - С.52-58.
6. Коллинз Р. Течение жидкостей через пористые материалы. - М.: Мир, 1964.-351с.
7. Experimental investigation of dynamic effects in capillary pressure: Grain size dependency and upscaling Jeremy Camps Roach,¹ Denis M. O'Carroll,¹ Timothy A. Newson,¹ Toshihiro Sakaki, and Tissa H. Illangasekare²
8. Numerical Schemes for the Barenblatt Model of Non-Equilibrium Two Phase Flow in Porous Media Denise. Aregba Driollet, Gabriella Bretti, Roberto Natalini