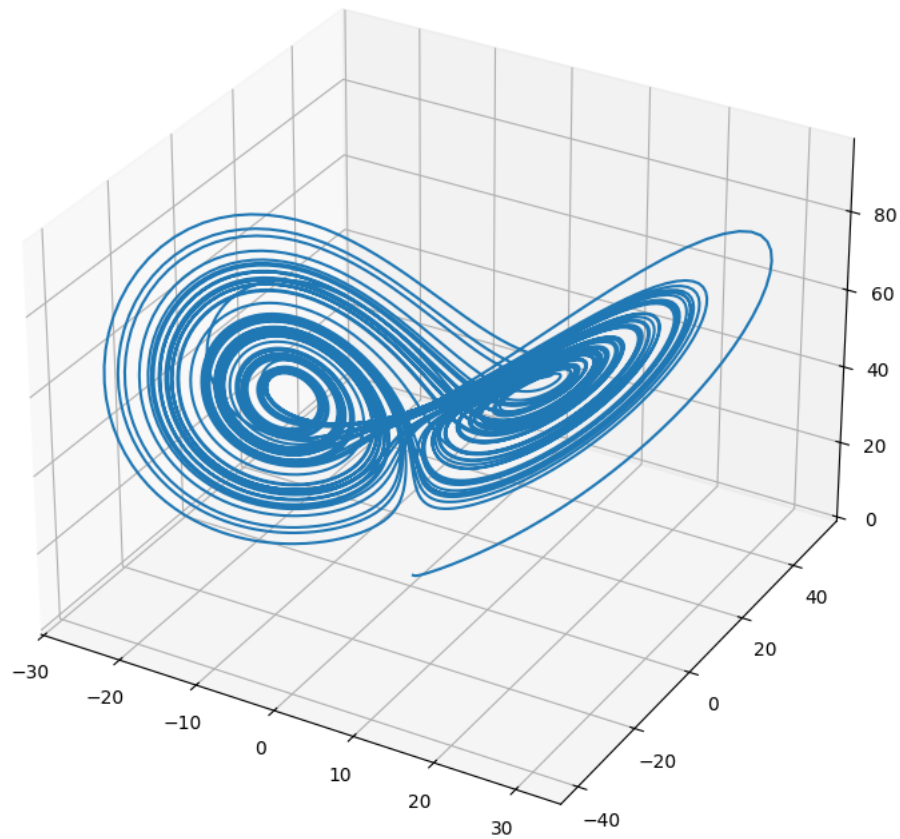


Etude Dynamique du Système de Lorenz

Kafui Homevo

December 27, 2025



Contents

1	Introduction	3
2	Modélisation Mathématique du Système	4
2.1	Formulation mathématique	4
2.2	L'Attracteur de Lorenz	4
2.3	La sensibilité aux conditions initiales	5
3	Equilibre et Stabilité	8
3.1	Points d'équilibre	8
3.2	Analyse de la stabilité autour des points d'équilibre	9
3.2.1	Stabilité au point $O = (0, 0, 0)$	9
3.2.2	Stabilité aux points C_+ et C_-	11
4	Conclusion	13

List of Figures

1	Système de Lorenz pour $P_0 = (0, 1, 1.05)$	5
2	Conditions Initiales 1: $P_0 = (0, 1, 1.05)$	5
4	Comparaisons des $x(t)$ pour $P_1 = (0, 1, 1.05)$ et $P_0 = (0, 1.001, 1.05)$	6
3	Conditions Initiales 2: $P_0 = (0, -1, 1.05)$	6

1 Introduction

En 1963, le mathématicien et météorologue Edward Norton Lorenz étudiait la dynamique d'un fluide dans une cellule en deux dimensions. Le fluide était chauffé par le bas et refroidi en haut, d'où les mouvements de convection encore appelés *convection de Rayleigh-Bénard*. Les solutions de ce système étant décrites par des équations différentielles aux paramètres nombreux, notamment l'équation de Navier-Stokes des fluides newtoniens, Lorenz décide de simplifier le système au maximum. Cette simplification presque exagérée (puisqu'elle n'a presque plus aucun lien avec le réel) a créé un système qui a défié la logique. En effet, tous les paramètres du système sont connus, donc selon le principe du déterminisme laplacien à l'époque, toutes les solutions sont prévisibles. Mais, le système de Lorenz donnait des solutions totalement impévisibles, et la représentation de ses solutions a la forme d'ailes de papillon (ou d'un huit renversé). De plus, les solutions diffèrent même lorsque les paramètres de départ sont proches. C'est alors que naît la théorie du chaos, qui est le caractère même du système de Lorenz.

Le but de cette étude est plus exploratoire qu'innovative, et nous allons analyser le système, son équilibre et sa stabilité, et nous parlerons enfin de cette notion d' *Attracteur Etrange*, assez étrange elle-même !

2 Modélisation Mathématique du Système

2.1 Formulation mathématique

Le système de Lorenz est un système à 3 équations différentielles ordinaires de 1er ordre, défini par :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{dt} = x(\rho - z) - y \\ \frac{dz}{dt} = xy - \beta z \end{cases}$$

avec les variables :

- x l'intensité du mouvement de convection
- y la différence de température horizontale entre les courants ascendants et descendants
- z l'écart de la température verticale

et les paramètres :

- σ le *nombre de Prandtl* (représentant la viscosité ou la diffusivité thermique du système)
- ρ le *nombre de Rayleigh normalisé*
- β le facteur géométrique de la cellule de convection

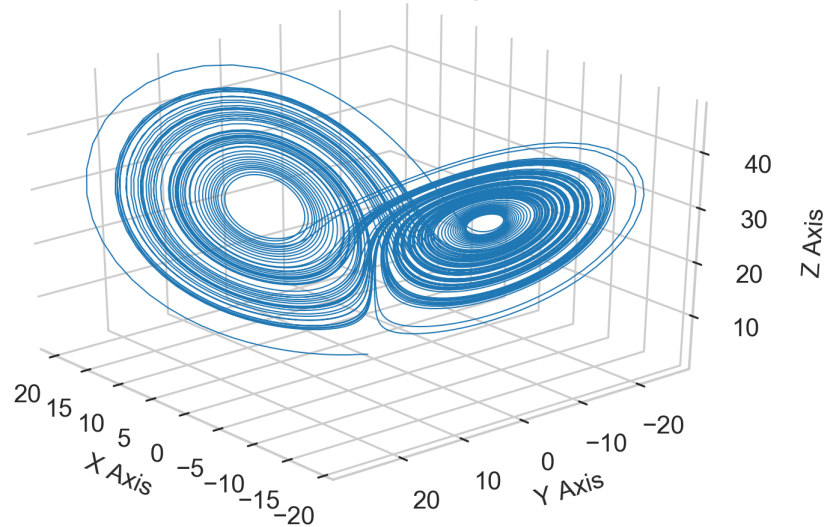
Les paramètres sont considérés tous positifs, avec en plus : $\sigma > b + 1$. Nous allons noter ce système $X' = L(X)$.

2.2 L'Attracteur de Lorenz

Lorsque Lorenz a étudié ce système pour la première fois, il a considéré les paramètres :

- $\sigma = 10$
- $b = \frac{8}{3}$
- $r = 28$

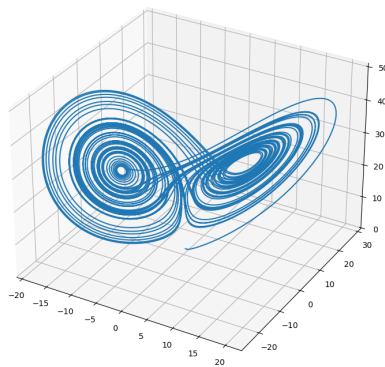
Ces paramètres seront ceux utilisés dans toute cette section. En considérant les conditions initiales $P_0 = (0, 1, 1.05)$, on obtient la figure 1.

Attracteur de Lorenz pour $x_0=0, y_0=1, z_0=1.05$ Figure 1: Système de Lorenz pour $P_0 = (0, 1, 1.05)$

On constate que les solutions semblent tourner autour d'un point de façon alternative, en cercles concentriques sans jamais se toucher. Les solutions tendent donc à rester dans ce même ensemble en encerclant deux points inconnus, qu'on appelle **Attracteur de Lorenz**. C'est la première propriété caractéristique de ce système.

2.3 La sensibilité aux conditions initiales

Comme nous l'avons déjà dit précédemment, toutes les solutions de ce système ont tendance à tourner autour d'un attracteur, quelles que soient les conditions initiales (voir figures 2 et 3).

Figure 2: Conditions Initiales 1: $P_0 = (0, 1, 1.05)$

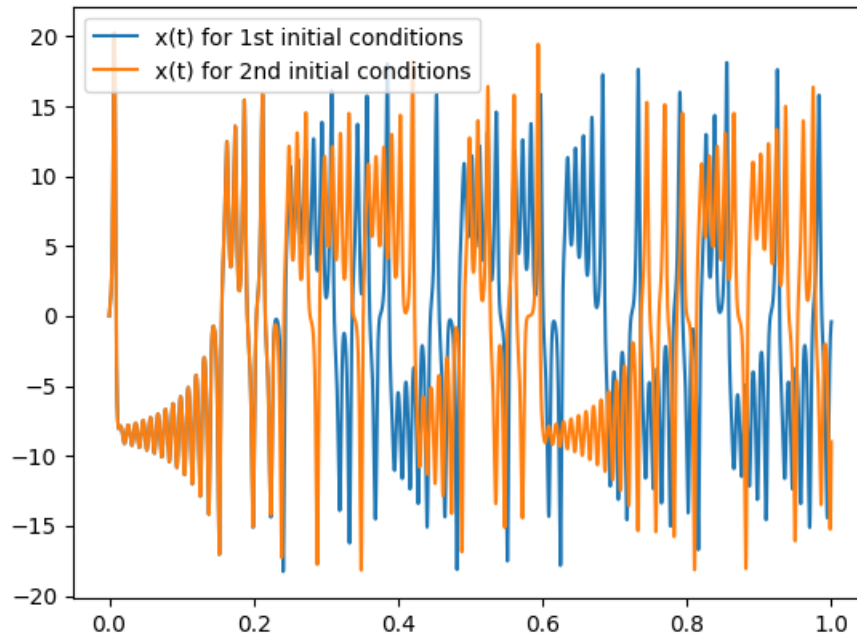


Figure 4: Comparaisons des $x(t)$ pour $P_1 = (0, 1, 1.05)$ et $P_0 = (0, 1.001, 1.05)$

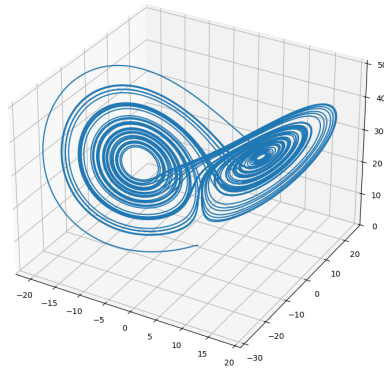


Figure 3: Conditions Initiales 2: $P_0 = (0, -1, 1.05)$

Où est donc la sensibilité aux conditions initiales ? La vue de ces deux ensembles, bien que visiblement différents, semble avoir une certaine homogénéité, si bien que l'on est tenté de se dire que, de façon intuitive, avec des conditions initiales proches, on devrait avoir des solutions très proches l'une de l'autre. Cependant, l'analyse du système démontre le contraire, comme le fait voir la figure 4.

La seule différence pour les conditions initiales d'un écart de 0.001 sur les ordonnées des conditions initiales, et pourtant on observe des valeurs extrêmement différentes des solutions de $x(t)$ (l'abscisse) au fil du temps. C'est ainsi que nous pouvons mettre en lumière le phénomène que nous qualifierons ici d'*hypersensibilité* aux conditions initiales.

3 Equilibre et Stabilité

On rappelle les équations du système de Lorenz :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{dt} = x(\rho - z) - y \\ \frac{dz}{dt} = xy - \beta z \end{cases}$$

avec les variables :

- $x > 0$ l'intensité du mouvement de convection
- $y > 0$ la différence de température horizontale entre les courants ascendants et descendants
- $z > 0$ l'écart de la température verticale

et les paramètres :

- σ le *nombre de Prandtl* (représentant la viscosité ou la diffusivité thermique du système), tel que $\sigma > b + 1$
- ρ le *nombre de Rayleigh normalisé*
- β le facteur géométrique de la cellule de convection

3.1 Points d'équilibre

Les points d'équilibre ou points fixes du systèmes sont les points où le système ne varie pas, c'est-à-dire où on a :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 0 \\ \frac{dy}{dt} = 0 \\ \frac{dz}{dt} = 0 \end{cases}$$

Résolution ce système : Pour des raisons de simplicité, nous allons noter les équations du système respectivement \dot{x} , \dot{y} et \dot{z} .

$$\begin{aligned} \dot{x} = 0 &\implies y = x \\ \dot{y} = 0 &\implies x(\rho - z) - y = 0 \\ &\implies x(\rho - z) - x = 0 \\ &\implies x(\rho - z - 1) = 0 \\ &\implies x = 0 \text{ ou } z = \rho - 1 \\ \dot{z} = 0 &\implies xy - \beta z = 0 \\ &\implies x^2 - \beta z = 0 \end{aligned}$$

Si $x = 0$, alors $y = 0$ et $z = 0$. Donc un point d'équilibre est $O = (0, 0, 0)$.

Sinon, si $z = \rho - 1$, on a :

$$\begin{aligned} x^2 - \beta(\rho - 1) &= 0 \implies x^2 = \beta(\rho - 1) \\ \implies x &= \pm\sqrt{\beta(\rho - 1)} \end{aligned}$$

Donc deux autres points d'équilibre sont :

$$\begin{aligned} C_+ &= \left(\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \sqrt{\beta(\rho - 1)}, \rho - 1 \right) \\ C_- &= \left(-\sqrt{\beta(\rho - 1)}, -\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \rho - 1 \right) \end{aligned}$$

On remarque que les points C_+ et C_- n'existent que si $\rho > 1$.

3.2 Analyse de la stabilité autour des points d'équilibre

Pour analyser la stabilité des points d'équilibre, nous allons calculer la matrice Jacobienne du système, puis évaluer ses valeurs propres en chaque point d'équilibre. La matrice Jacobienne J du système est donnée par :

$$J = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho - z & -1 & -x \\ y & x & -\beta \end{pmatrix}$$

Rappel sur la stabilité d'un système dynamique: Un point d'équilibre est dit :

- **Stable** si toutes les valeurs propres de la matrice Jacobienne évaluée en ce point ont des **parties réelles négatives**.
- **Asymptotiquement stable** si toutes les valeurs propres de la matrice Jacobienne évaluée en ce point ont des **parties réelles strictement négatives**.
- **Instable** si au moins une valeur propre de la matrice Jacobienne évaluée en ce point a une **partie réelle positive**.

3.2.1 Stabilité au point $O = (0, 0, 0)$

En évaluant la matrice Jacobienne J en O , on obtient :

$$J_O = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de J_0 sont les solutions de l'équation caractéristique :

$$\det(J_0 - \lambda I) = 0$$

Soit $P_0(\lambda)$ cette équation caractéristique :

$$P_0(\lambda) = -(\beta + \lambda) (\lambda^2 + (\sigma + 1)\lambda + \sigma(1 - \rho))$$

Une première racine de P_0 est donc : $\lambda_1 = -\beta$. (Remarquons que $\lambda_1 < 0$)

Les deux autres racines sont les solutions du deuxième facteur que nous allons noter $Q_0(\lambda)$:

$$Q_0(\lambda) = \lambda^2 + (\sigma + 1)\lambda + \sigma(1 - \rho)$$

Ce qui importe le plus ici, ce n'est pas tant la valeur des racines (valeurs propres) que leur signe. Pour déterminer les signes des racines de ce polynôme donc, nous allons remarquer la forme remarquable de $Q_0(\lambda)$:

$$Q_0(\lambda) = \lambda^2 + S\lambda + P$$

avec :

- $S = \sigma + 1 > 0$ qui représente la somme des racines, et
- $P = \sigma(1 - \rho)$ qui représente le produit des racines.

Le signe des racines dépend donc du signe de P :

- Si $P > 0 \iff \rho < 1$, alors les deux racines sont négatives¹.
- Si $P = 0 \iff \rho = 1$, alors au moins une des racines est nulle.
- Si $P < 0 \iff \rho > 1$, alors les racines sont de signes opposés.

Par conséquent, le point d'équilibre O est :

- **Asymptotiquement stable** si $\rho < 1$,
- **Stable** si $\rho = 1$,
- **Instable** si $\rho > 1$.

Justification Le signe de P dépend de ρ . Si $\rho < 1$, alors $P > 0$ et les deux racines de $Q_0(\lambda)$ sont négatives, donc toutes les valeurs propres de J_O ont des parties réelles strictement négatives, ce qui rend le point O asymptotiquement stable. A partir de $\rho = 1$, P devient nul, donc au moins une des racines de $Q_0(\lambda)$ est nulle, rendant le point O seulement stable. Enfin, si $\rho > 1$, alors $P < 0$ et les racines de $Q_0(\lambda)$ sont de signes opposés, donc au moins une valeur propre de J_O a une partie réelle positive, rendant le point O instable. Pour $\rho = 1$, le seul point d'équilibre existant est l'origine. Par ailleurs, on remarque que c'est seulement à partir de $\rho > 1$ que les points d'équilibre C_+ et C_- apparaissent. C'est donc un point de bifurcation du système.

¹Logiquement, on devrait dire que les deux racines sont de même signe. Mais, si un polynôme de 2nd degré possède des racines, au moins l'une d'entre elles est négative. Par conséquent, si le produit des deux racines est positif, il est évident que la deuxième racine soit aussi de signe négatif.

3.2.2 Stabilité aux points C_+ et C_-

En évaluant la matrice Jacobienne J en C_+ , on obtient :

$$J_{C_+} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & -\sqrt{\beta(\rho-1)} \\ \sqrt{\beta(\rho-1)} & \sqrt{\beta(\rho-1)} & -\beta \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de J_{C_+} sont les solutions de l'équation caractéristique :

$$\det(J_{C_+} - \lambda I) = 0$$

Soit $P_+(\lambda)$ cette équation caractéristique :

$$P_+(\lambda) = +\lambda^3 + (\sigma + \beta + 1)\lambda^2 + \beta(\sigma + \rho)\lambda + 2\sigma\beta(\rho - 1)$$

Pour analyser le signe des racines de ce polynôme, nous allons utiliser le critère de Routh-Hurwitz.

Critère de Routh-Hurwitz

Le critère de Routh-Hurwitz permet de déterminer la stabilité d'un système linéaire en examinant les coefficients de son polynôme caractéristique sans avoir à calculer explicitement les valeurs propres. Pour un polynôme caractéristique de degré n donné par :

$$P(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$$

Le système est stable si et seulement si toutes les conditions suivantes sont remplies :

- Tous les coefficients a_i sont positifs.
- Les déterminants des matrices de Routh-Hurwitz sont positifs.

Pour un polynôme de degré 3, les conditions spécifiques sont :

- $a_2 > 0$
- $a_0 > 0$
- $a_2a_1 > a_3$

Application au polynôme $P_+(\lambda)$:

En comparant $P_+(\lambda)$ avec la forme générale, on identifie les coefficients :

- $a_0 = 1$
- $a_1 = \sigma + \beta + 1$

- $a_2 = \beta(\sigma + \rho)$
- $a_3 = 2\sigma\beta(\rho - 1)$

On rappelle que les paramètres σ , β et ρ sont tous positifs, avec en plus : $\sigma > b + 1$. Par conséquent, les deux premières conditions du critère de Routh-Hurwitz sont toujours satisfaites :

- $a_2 = \beta(\sigma + \rho) > 0$
- $a_0 = 2\sigma\beta(\rho - 1) > 0$ (car $\rho > 1$ pour l'existence des points C_+ et C_-)

Il reste donc à analyser la troisième condition :

$$\begin{aligned}
 a_2 a_1 > a_0 &\iff \beta(\sigma + \rho)(\sigma + \beta + 1) > 2\sigma\beta(\rho - 1) \\
 &\iff (\sigma + \rho)(\sigma + \beta + 1) > 2\sigma(\rho - 1) \\
 &\iff \rho(\sigma + \beta + 1) + \sigma(\sigma + \beta + 1) > 2\sigma\rho - 2\sigma \\
 &\iff \rho(\sigma + \beta + 1 - 2\sigma) > -\sigma(\sigma + \beta + 1 + 2) \\
 &\iff \rho(\beta + 1 - \sigma) > -\sigma(\sigma + \beta + 3) \\
 &\iff \rho < \frac{-\sigma(\sigma + \beta + 3)}{\beta + 1 - \sigma}
 \end{aligned}$$

En posant :

$$\rho_h = \frac{\sigma(\sigma + \beta + 3)}{\sigma - (\beta + 1)}$$

, on a donc que le point d'équilibre C_+ est :

- **Asymptotiquement stable** si $1 < \rho < \rho_h$,
- **Instable** si $\rho > \rho_h$.

Par symétrie, le point d'équilibre C_- a la même stabilité que C_+ .

Le point $\rho = \rho_h$ est donc un autre point critique de bifurcation du système : c'est une bifurcation de Hopf.

Justification Pour $1 < \rho < \rho_h$, toutes les conditions du critère de Routh-Hurwitz sont satisfaites, donc toutes les valeurs propres de J_{C_+} ont des parties réelles strictement négatives, rendant les points C_+ et C_- asymptotiquement stables. Cependant, si $\rho > \rho_h$, la troisième condition du critère de Routh-Hurwitz n'est plus satisfaite, donc au moins une valeur propre de J_{C_+} a une partie réelle positive, rendant les points C_+ et C_- instables.

4 Conclusion

En conclusion, cette étude a permis de démontrer que la dynamique du système de Lorenz est régie par une succession de ruptures d'équilibre appelées bifurcations, déclenchées par l'évolution du paramètre de Rayleigh ρ . Nous avons établi mathématiquement que l'origine perd sa stabilité au profit de deux nouveaux points d'équilibre dès que $\rho > 1$, avant que ces derniers ne deviennent à leur tour instables lors du passage du seuil critique de Hopf, ρ_h . Au-delà de ce seuil, le système bascule dans un régime chaotique caractérisé par une hypersensibilité aux conditions initiales, où d'infimes variations de départ engendrent des trajectoires totalement divergentes au fil du temps. Cependant, malgré ce caractère imprévisible, les solutions ne tendent pas vers l'infini ; elles restent confinées dans une structure géométrique bornée et complexe, l'attracteur étrange, illustrant ainsi l'existence d'un ordre déterministe au sein même du chaos.

References

- [1] Robert L. Devaney Morris W. Hirsch, Stephen Smale. *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos*. 2013 edition.
- [2] Julie Muhlke. *Le système de Lorenz*.