# LOG8470
# Méthodes formelles en fiabilité et sécurité

## II. Analyse des réseaux de Petri

John Mullins

Dép. de génie informatique et de génie logiciel
École Polytechnique de Montréal

John.Mullins@polymtl.ca

2018 - 2019

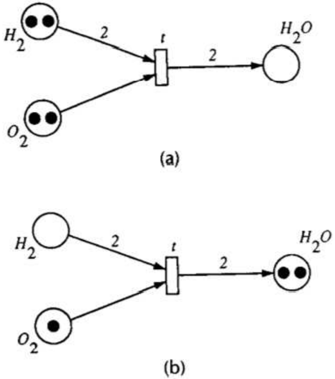
# Plan de la partie II

1. Approche informelle
2. Formalisation du modèle
3. Propriétés du comportement
4. Vérification des propriétés
5. Analyse structurelle
   - Représentation matricielle
   - Invariants
   - Vérification de la sûreté
   - Vérification de la vivacité
6. Les réseaux de Petri colorés

# Plan de la partie II


1. Approche informelle
2. Formalisation du modèle
3. Propriétés du comportement
4. Vérification des propriétés
5. Analyse structurelle
   - Représentation matricielle
   - Invariants
   - Vérification de la sûreté
   - Vérification de la vivacité
6. Les réseaux de Petri colorés

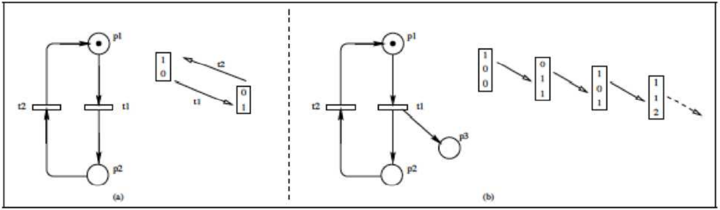
# Illustration : La réaction $2H_2 + O_2 \longrightarrow 2H_2O$



# Plan de la partie II

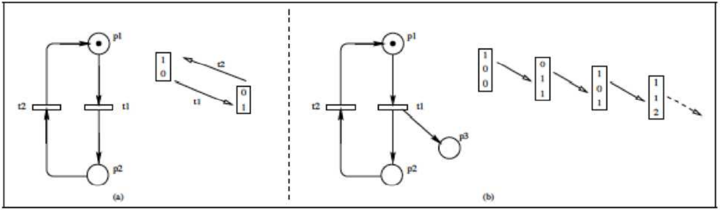
1. Approche informelle
2. Formalisation du modèle
3. Propriétés du comportement
4. Vérification des propriétés
5. Analyse structurelle
   - Représentation matricielle
   - Invariants
   - Vérification de la sûreté
   - Vérification de la vivacité
6. Les réseaux de Petri colorés

# Syntaxe




- Un réseau est un triplet $N = (P, T, W)$ où :
  - $P$ est un ensemble de places
  - $T$ est un ensemble de transitions t.q. $P \cap T = \emptyset$
  - $W : P \times T \cup T \times P \to \mathbb{N}$ est une fonction de valuation des arcs
    - $W(p, t) > 0$ : arc de $p$ à $t$
    - $W(t, p) > 0$ : arc de $t$ à $p$
    - $W(p, t) = W(t, p) = 0$ : sinon
- Un marquage de $N$ est une fonction $M : P \to \mathbb{N}$
- $\mathcal{N} = (N, M_0)$ est un réseau de Petri si $N$ est fini et $M_0$ est un marquage de $N$

# Syntaxe




Soit $\mathcal{N} = (P, T, W, M_0)$, un réseau de Petri.

- *pre* : $P \times T \to \mathbb{N}$ la restriction de $W$ à $P \times T$ $\quad (pre(p,t) = W(p,t))$

$$^{\bullet}t = \{p \in P : pre(p,t) > 0\}$$

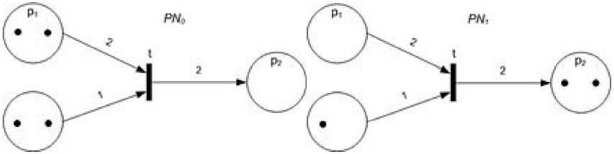
  est la pré-condition de $t \in T$ :

- *post* : $P \times T \to \mathbb{N}$ la restriction de $W$ à $T \times P$ $(post(p,t) = W(t,p))$

$$t^{\bullet} = \{p \in P : post(p,t) > 0\}$$

  est la post-condition de $t \in T$

# Sémantique




- Une transition $t$ est tirable d'un marquage $M$ ($M \xrightarrow{t}$) si

$$\forall_{p \in P} M(p) \geq pre(p, t)$$

- Si $M \xrightarrow{t}$ alors si $t$ est tirée, $M$ se transforme en $M'$ ($M \xrightarrow{t} M'$) :

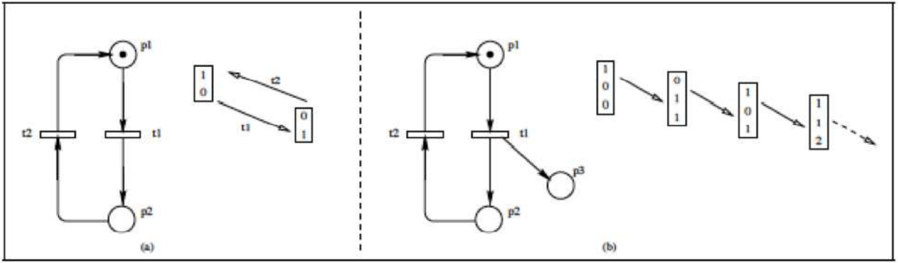
$$\forall_{p \in P} M'(p) = M(p) - pre(p, t) + post(p, t)$$

- Pour $\sigma = t_1 t_2 \ldots t_n \in T^*$, $M \xrightarrow{\sigma} M'$ si

$$M = M_0 \xrightarrow{t_1} M_1 \xrightarrow{t_2} \cdots \xrightarrow{t_n} M_n = M'.$$

- Si un tel $\sigma$ existe, $M'$ est accessible de $M$ ($M' \in R(N, M)$)

# Sémantique



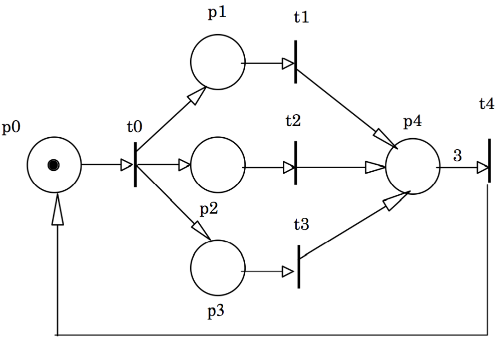

Le graphe d'accessibilité de $\mathcal{N} = (N, M_0)$ :

- Sommets : $V = R(N, M_0)$
- Arcs étiquetées : $L : V \times V \to T$ t.q.

$$L(M, M') = t \text{ ssi } M \xrightarrow{t} M'$$

# Exercice

Considérez le réseau de Petri suivant :




Construisez le graphe des marquages accessibles.

# Plan de la partie II

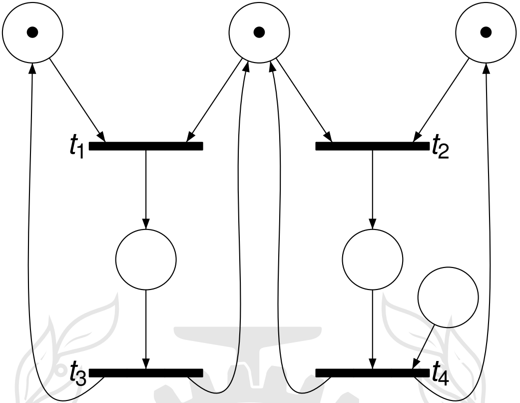

1. Approche informelle
2. Formalisation du modèle
3. Propriétés du comportement
4. Vérification des propriétés
5. Analyse structurelle
   - Représentation matricielle
   - Invariants
   - Vérification de la sûreté
   - Vérification de la vivacité
6. Les réseaux de Petri colorés

# Propriétés

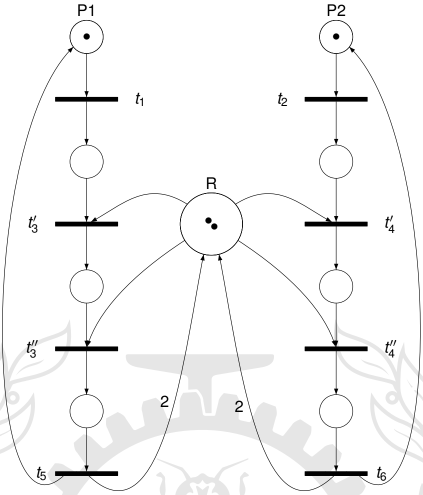
Soit $\mathcal{N} = (P, T, W, M_0)$, un réseau de Petri.

- k-borné ssi $\forall M \in R(N, M_0), \forall p \in P, M(p) \leq k$
- borné ss'il existe $k \in \mathbb{N}$ t.q. $\mathcal{N}$ est k-borné
- vivace ssi $\forall M \in R(N, M_0), \forall t \in T, \exists s \in T^*, M \xrightarrow{s} M' \xrightarrow{t}$
- quasi-vivace ssi $\forall t \in T, \exists M \in R(N, M_0) : M \xrightarrow{t}$
- pseudo-vivace (sans blocage) ssi $\forall M \in R(N, M_0), \exists t \in T : M \xrightarrow{t}$

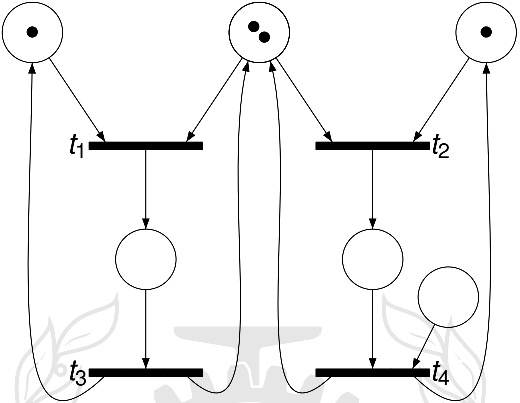
# Ni pseudo-vivace, ni quasi-vivace, ni vivace



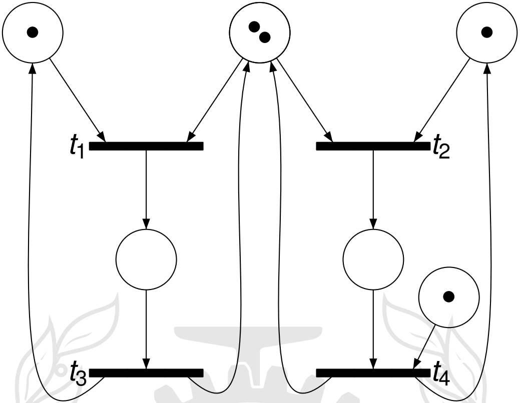
# Quasi-vivace mais ni pseudo-vivace, ni vivace



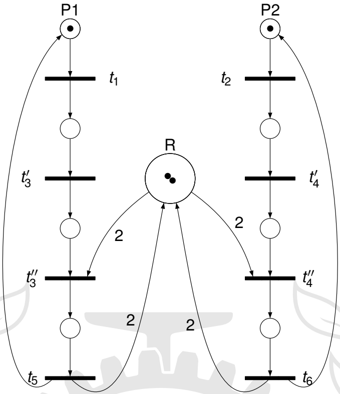
# Pseudo-vivace, mais ni quasi-vivace, ni vivace



# Pseudo-vivace et quasi-vivace, mais pas vivace



# Pseudo-vivace, quasi-vivace et vivace



# Plan de la partie II


1. Approche informelle
2. Formalisation du modèle
3. Propriétés du comportement
4. Vérification des propriétés
5. Analyse structurelle
   - Représentation matricielle
   - Invariants
   - Vérification de la sûreté
   - Vérification de la vivacité
6. Les réseaux de Petri colorés

# Construction du graphe des marquages

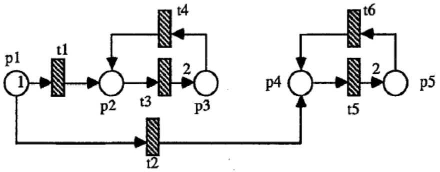
S := $\{M_0\}$ ; // Ensemble des sommets
A : = $\emptyset$ ; // Ensemble des arcs
**Répéter**
    **Pour** chaque marquage $M \in S$ **Faire**
        **Pour** chaque transition $t$ telle que $M \xrightarrow{t}$ **Faire**
            M' := M $-(Pre(p,t))_{p \in P} + (Post(p,t))_{p \in P}$ ;
            **Si** $M' \notin S$ **alors** S := S $\cup \{M'\}$ ;
            A := A $\cup \{M \xrightarrow{t} M'\}$ ;
        // Fin du Pour
    // Fin du Pour
**Jusqu'à** stabilisation de S
**Retourner** (S, A) ;

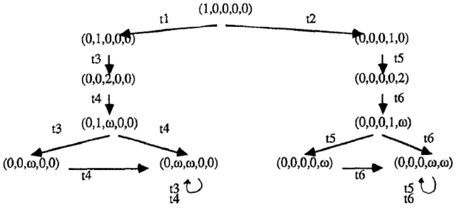
# Graphe des marquages

### Théorème

Un réseau de Petri est vivace ssi toute CFC terminale de $R(N, M_0)$ contient toutes les transitions $t \in T$.

# Réseaux de Petri non-bornés : graphe de couverture




- La racine est étiquetée par $M_0$
- Soit $\cdot \xrightarrow{t} M$ t.q.

$$\exists M' : M' < M \text{ et } M' \text{ déjà visité depuis } M_0$$

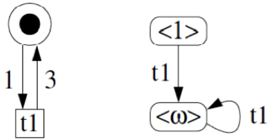
alors

$$M(p) = \begin{cases} \omega & \text{si } M'(p) < M(p) \\ \text{règles usuelles étendues} & \text{sinon} \end{cases}$$

- $\omega = \omega + n = n + \omega = \omega - n$ et $n < \omega < \omega$

# Graphe de couverture $C(N, M_0)$

- $M$ est couvert par $M'$ si $M \leq M'$
- Tout sommet $M \in R(N, M_0)$ est couvert par un sommet $M' \in C(N, M_0)$
- La réciproque n'est pas vraie



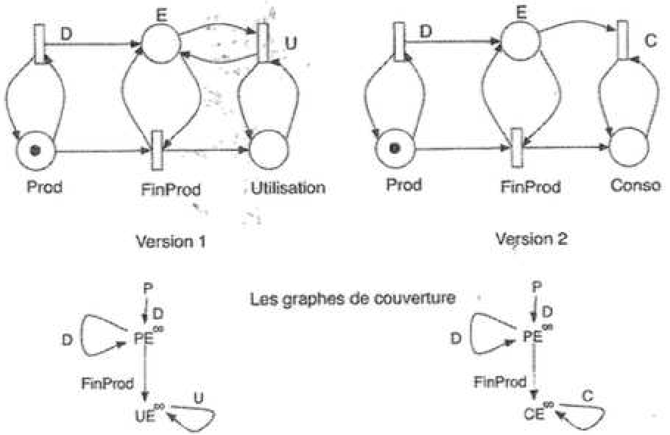

- Tout sommet $M' \in C(N, M_0)$ couvre un sommet $M \in R(N, M_0)$

# Graphe de couverture $C(N, M_0)$

## Théorème

1. Un réseau de Petri est quasi-vivace ssi ttes les transitions apparaissent $C(N, M_0)$
2. Si $C(N, M_0)$ contient une CFC terminale qui ne contient pas toutes les transitions alors le RdP n'est pas vivace
3. Si $C(N, M_0)$ contient un sommet sans successeur alors le RdP admet un blocage

# Exemple




- Version 1 sans blocage
- Version 2 avec blocage

# Où en sommes nous ?

## Que peut-on faire exactement avec les GA et les GC ?

- Calculer l'accessibilité dans le GA (si le calcul se termine)
- Surapproximer l'accessibilité dans le GC (dans le cas infini)
- Vérifier
  1. Les 3 vivacité dans le GA (si le calcul se termine)
  2. Critères nécessaires mais pas suffisant dans le GC
  3. des spécifications LTL dans $R(N, M_0)$

## Le problème

Comment obtenir de l'information exacte sans calculer $R(N, M_0)$ ?

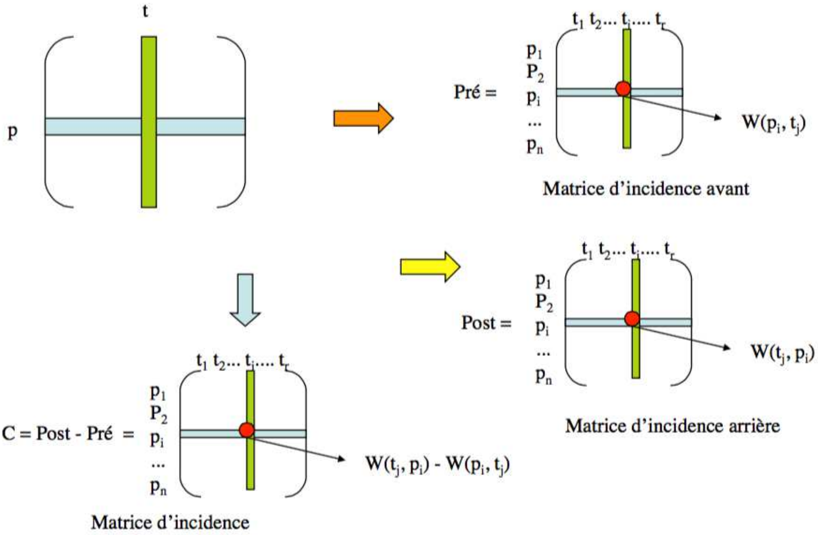
## L'objectif

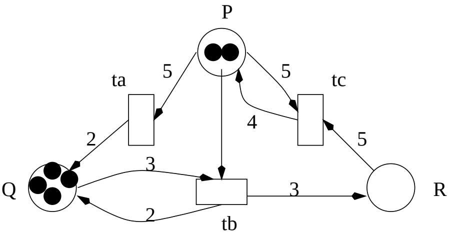
Se concentrer sur la structure du réseau

## La méthodologie : L'algèbre linéaire

# Plan de la partie II


1. Approche informelle
2. Formalisation du modèle
3. Propriétés du comportement
4. Vérification des propriétés
5. Analyse structurelle
   - Représentation matricielle
   - Invariants
   - Vérification de la sûreté
   - Vérification de la vivacité
6. Les réseaux de Petri colorés


t
p
Pré =
$t_1\ t_2 \dots t_j \dots t_r$
$p_1$
$P_2$
$p_i$
...
$p_n$
$W(p_i, t_j)$
Matrice d'incidence avant
Post =
$t_1\ t_2 \dots t_j \dots t_r$
$p_1$
$P_2$
$p_i$
...
$p_n$
$W(t_j, p_i)$
Matrice d'incidence arrière
C = Post - Pré =
$t_1\ t_2 \dots t_j \dots t_r$
$p_1$
$P_2$
$p_i$
...
$p_n$
$W(t_j, p_i) - W(p_i, t_j)$
Matrice d'incidence




$$Pre = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$Post = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -5 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix} \quad M_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $t_b$ est tirable de $M_0$ : $Pre(\_, t_b) \leq M_0$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $M' = M_0 + Post(\_, t_b) + Pre(\_, t_b) = M_0 + C(\_, t_b)$

$$M' = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

## Équation fondamentale

Soit $s = t_1 t_2 \ldots t_n$ tirable de $M$ alors

$$M' = M + C\overline{s}$$

avec $\overline{s} : T \to \mathbb{N}$ (Vecteur caractéristique)
où $\overline{s}(t) =$ le nombre d'occurrences de $t$ dans $s$.

## Exemple

Soit $M = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. $s = t_b t_c t_a t_b$ est tirable de $M$

$$M' = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

## Définition

Un invariant de place est une solution de l'équation

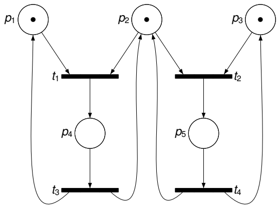
$$X^\top \cdot C = 0$$

## Propriété essentielle

- $s$, une séquence tirable de transitions
- $i^\top$, un invariant de place

$$\begin{aligned}
M \xrightarrow{s} M' \quad & \Leftrightarrow \quad M' = M + C \cdot \overline{s} \\
& \Leftrightarrow \quad i^\top \cdot M' = i^\top \cdot M + \underbrace{i^\top \cdot C}_{=(0,0,\ldots,0)} \cdot \overline{s} \\
& \Leftrightarrow \quad i^\top \cdot M' = i^\top \cdot M
\end{aligned}$$

## Exemple




- $i_1^\top = (0, 1, 0, 1, 1)$

$$M(p_2) + M(p_4) + M(p_5) = M_0(p_2) + M_0(p_4) + M_0(p_5) = 1$$

- $i_2^\top = (1, 0, 0, 1, 0)$

$$M(p_1) + M(p_4) = M_0(p_1) + M_0(p_4) = 1$$

- $i_3^\top = (0, 0, 1, 0, 1)$

$$M(p_3) + M(p_5) = M_0(p_3) + M_0(p_5) = 1$$

## Propriété de bornitude

S'il existe un invariant de place $i^\top$ tel que $i^\top(p) > 0$ pour toute place $p$ alors le réseau est borné.

## Démonstration

$$
\begin{array}{rcl}
M \text{ est accessible} & \Rightarrow & i^\top \cdot M = \imath^\top \cdot M_0 \\
& \Rightarrow & i^\top(p) \cdot M(p) \leq i^\top \cdot M = i^\top \cdot M_0, \text{pour tout } p \\
& \Rightarrow & M(p) \leq \dfrac{i^\top \cdot M_0}{i^\top(p)}, \text{pour tout } p
\end{array}
$$

## Exemple

$i_1^\top + i_2^\top + i_3^\top = (1, 1, 1, 2, 2)$ assure la bornitude du réseau.

### Définition

Un invariant de transition est une solution de l'équation

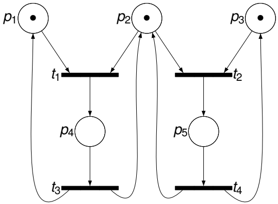
$$C \cdot X = 0$$

### Propriété essentielle

$M \xrightarrow{s} M'$ alors $M = M'$ ssi $\overline{s}$ est un invariant de transitions car

$$M + C \cdot \overline{s} = M'.$$

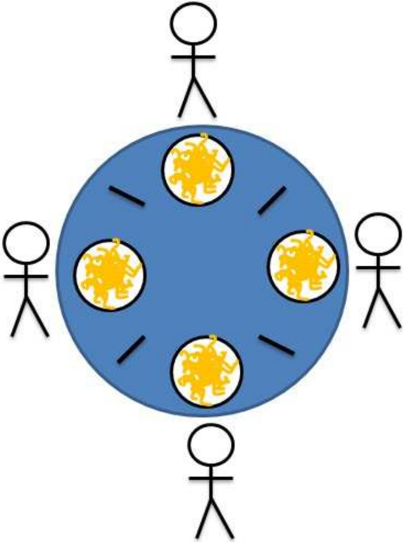
## Exemple



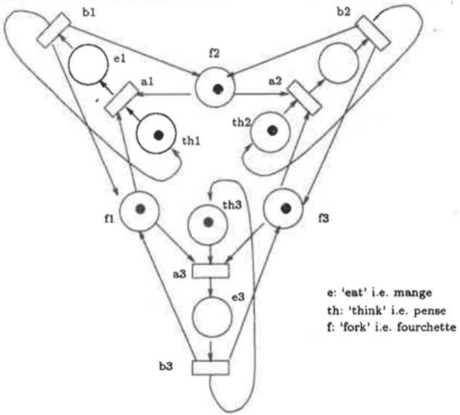

$$j_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; j_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; j_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

# Calcul des invariants : Méthode du pivot de Gauss

# Exemple : Le problème des $n$ philosophes ($n = 4$)



# Exemple : Le problème des $n$ philosophes ($n = 3$)



# Exemple : Montrer que le réseau est sans blocage

| | $C$ | | | | | | $M_0$ | P-invariants | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ | | $i_1$ | $i_2$ | $i_3$ | $i_4$ | $i_5$ | $i_6$ |
| $th_1$ | $-1$ | | | 1 | | | 1 | 1 | | | | | |
| $th_2$ | | $-1$ | | | 1 | | 1 | | 1 | | | | |
| $th_3$ | | | $-1$ | | | 1 | 1 | | | 1 | | | |
| $e_1$ | 1 | | | $-1$ | | | | 1 | | | 1 | 1 | |
| $e_2$ | | 1 | | | $-1$ | | | | 1 | | | 1 | 1 |
| $e_3$ | | | 1 | | | $-1$ | | | | 1 | 1 | | 1 |
| $f_1$ | $-1$ | | $-1$ | 1 | | 1 | 1 | | | | 1 | | |
| $f_2$ | $-1$ | $-1$ | | 1 | 1 | | 1 | | | | | 1 | |
| $f_3$ | | $-1$ | $-1$ | | 1 | 1 | 1 | | | | | | 1 |

FIGURE: La matrice $C$ et une base des solutions du système $X^\top \cdot C = 0$

# Exemple : Montrer que le réseau est sans blocage

| | $C$ | | | | | | $M_0$ | P-invariants | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ | | $i_1$ | $i_2$ | $i_3$ | $i_4$ | $i_5$ | $i_6$ |
| $th_1$ | $-1$ | | | 1 | | | 1 | 1 | | | | | |
| $th_2$ | | $-1$ | | | 1 | | 1 | | 1 | | | | |
| $th_3$ | | | $-1$ | | | 1 | 1 | | | 1 | | | |
| $e_1$ | 1 | | | $-1$ | | | | 1 | | | 1 | 1 | |
| $e_2$ | | 1 | | | $-1$ | | | | 1 | | | 1 | 1 |
| $e_3$ | | | 1 | | | $-1$ | | | | 1 | 1 | | 1 |
| $f_1$ | $-1$ | | $-1$ | 1 | | 1 | 1 | | | | 1 | | |
| $f_2$ | $-1$ | $-1$ | | 1 | 1 | | 1 | | | | | 1 | |
| $f_3$ | | $-1$ | $-1$ | | 1 | 1 | 1 | | | | | | 1 |

Soit $M \in R(N, M_0)$ quelconque

1. Si $\exists_{1 \leq i \leq 3} M(e_i) \neq 0$ alors $M \xrightarrow{b_i}$
2. Si $\forall_{1 \leq i \leq 3} M(e_i) = 0$ alors $M \xrightarrow{a_1}$ i.e. $M(th_1) \neq 0$, $M(f_1) \neq 0 \neq M(f_2)$
   1. $i_1^\top \cdot M = M(th_1) + M(e_1) = 1 = i_1^\top \cdot M_0$ et donc $M(th_1) = 1$
   2. $i_4^\top \cdot M = M(e_1) + M(e_3) + M(f_1) = 1 = i_4^\top \cdot M_0$ et donc $M(f_1) = 1$
   3. $i_5^\top \cdot M = M(e_1) + M(e_2) + M(f_2) = 1 = i_5^\top \cdot M_0$ et donc $M(f_2) = 1$
3. Si $\forall_{1 \leq i \leq 3} M(e_i) = 0$ alors $M \xrightarrow{a_2}$ et $M \xrightarrow{a_3}$ De la même façon

On a montré l'absence de famine !

# Marquage d'accueil

## Definition (Marquage d'accueil)

Un réseau de Petri $\mathcal{N} = (N, M_0)$ admet un marquage d'accueil s'il existe $M_a \in R(N, M_0)$ t.q.

$$\forall M \in R(N, M_0) \exists s \in T^* : M \xrightarrow{s} M_a.$$

$M_a$ est appelé marquage d'accueil.

## Proposition

Si $\mathcal{N} = (N, M_0)$ est quasi-vivace et admet $M_0$ comme marquage d'accueil alors $\mathcal{N}$ est vivace

## Lemme de monotonicité

Soit $\mathcal{N} = (N, M_0)$ et $s \in T^*$. Si $M_1 \xrightarrow{s} M_2 (= M_1 + \Delta)$ et $M_1' \geq M_1$ alors

$$\exists M_2' (= M_2 + \Delta) \geq M_2 : M_1' \xrightarrow{s} M_2'$$

# Norme

## Definition (Norme)

$\mu : R(N, M_0) \rightarrow \mathbb{N}$ est une norme pour $M_a$ si pour tout $M \in R(N, M_0)$,

1. $\mu(M) = 0$ ssi $M = M_a$
2. Si $\mu(M) > 0$ alors

$$\exists s \in T^* : M \xrightarrow{t} M' \text{ et } \mu(M') < \mu(M)$$

# Normes et marquage d'accueil

### Keller 1969

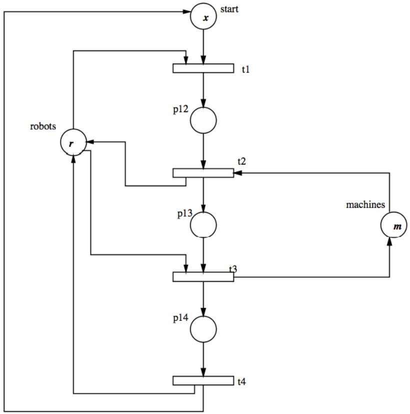
Si $M_a \in R(N, M_0)$ alors les propositions suivantes sont équivalentes :

1. Il existe une norme pour $M_a$ ;
2. $M_a$ est un marquage d'accueil de $(N, M_0)$.

### Méthode de preuve que $M_a$ est un marquage d'accueil

1. Trouver $\mu$
2. Calculer les invariants de place
3. Trouver la séquence $s$ qui réduit $\mu$, i.e. qui se rapproche de $M_a$

# Application de la méthode : Contrôleur de robots



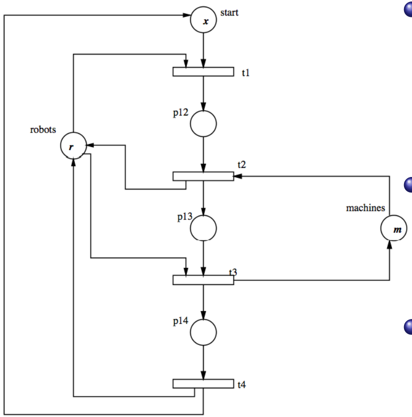

Pour usiner un objet :

1. Acquérir un robot pour déplacer l'objet ($t1$)
2. Prendre une machine pour usiner ($t2$) : libère le robot

Une fois l'objet usiné :

1. Acquérir un robot pour déplacer l'objet ($t3$) : libère la machine
2. Délivrer l'objet ($t4$) : libère le robot

# Application de la méthode : Contrôleur de robots




- Invariants de place

$$\begin{aligned} M(start) + M(p12) + M(p13) + M(p14) &= x \\ M(machines) + M(p13) &= m \\ M(robots) + M(p12) + M(p14) &= r \end{aligned}$$

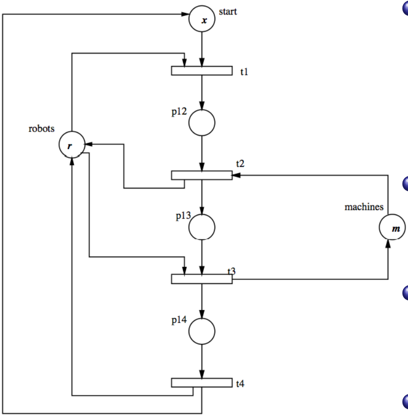
- On pose :

$$\mu(M) = 3M(p12)+2M(p13)+M(p14)$$

- On montre que $\mu$ est une norme pour $M_0$

$\Rightarrow \mathcal{N}$ est vivace.

# Application de la méthode : Contrôleur de robots




- Invariants de place

$$
\begin{aligned}
M(start) + M(p12) + M(p13) + M(p14) &= x \\
M(machines) + M(p13) &= m \\
M(robots) + M(p12) + M(p14) &= r
\end{aligned}
$$

- On a :

$$\mu(M) = 3M(p12) + 2M(p13) + M(p14)$$

- $\mu(M) = 0$ ssi

$$M(p12) = M(p13) = M(p14) = 0$$

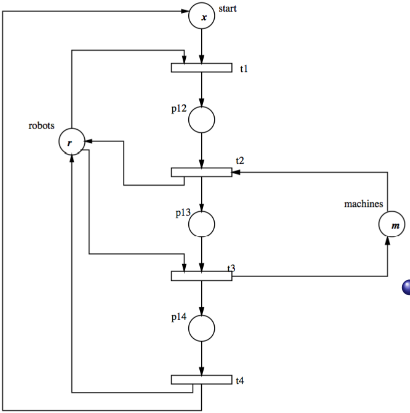
- Par les invariants :

$$\mu(M) = 0 \Leftrightarrow M = M_0$$

# Le cas $\mu(M) > 0$

$\mu(M) = 3M(p12) + 2M(p13) + M(p14)$

$$\begin{aligned} start + p12 + p13 + p14 &= x & (1)\\ machines + p13 &= m & (2)\\ robots + p12 + p14 &= r & (3) \end{aligned}$$



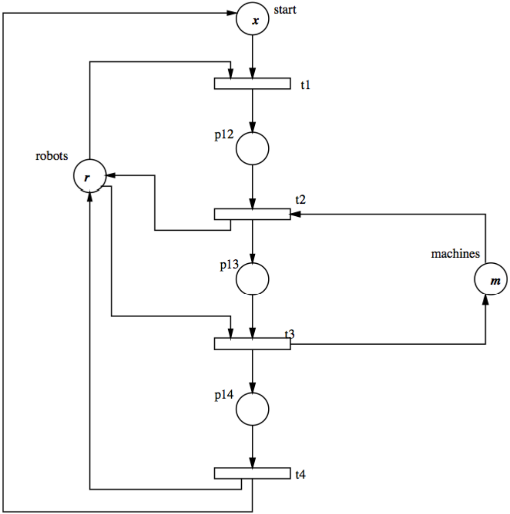

Cas possibles :

- $M(p14) > 0$ : Tirer $t_4$ décroît $\mu$
- $M(p14) = 0 < M(p12)$ :
  - si $t2$ tirable, $\mu$ décroît
  - sinon $M(machines) = 0$, $M(p13) = m$, par (2)
  - si $t3$ tirable, $\mu$ décroît
  - sinon $M(p12) + M(p14) = r$, par (3) et puisque $M(p14) = 0$ alors $M(p12) = r$!!
  - Pour éviter ce cas où $M(start) = x - m - r$, il faut imposer $x < m + r$ pour avoir un $M_a$.
- $M(p14) = M(p12) = 0$ et $M(p13) > 0$ :

$$M(robots) = r \Rightarrow M \xrightarrow{t3}$$

et dans ce cas $\mu$ décroît.

# Conclusion




Sous la contrainte

$$x < m + r$$

la fonction $\mu$ donnée par

$$\mu(M) = 3M(p12) + 2M(p13) + M(p14)$$

définie une norme pour $M_0$

$\Rightarrow$ $M_0$ est un marquage d'accueil

$\Rightarrow$ $(N, M_0)$ est vivace

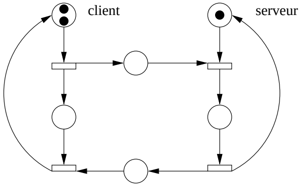
# Plan de la partie II

1. Approche informelle
2. Formalisation du modèle
3. Propriétés du comportement
4. Vérification des propriétés
5. Analyse structurelle
   - Représentation matricielle
   - Invariants
   - Vérification de la sûreté
   - Vérification de la vivacité
6. Les réseaux de Petri colorés

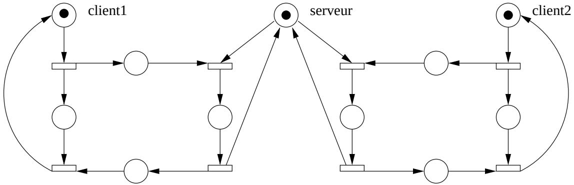
# Motivation

## Exemple (2 clients, 1 serveur)

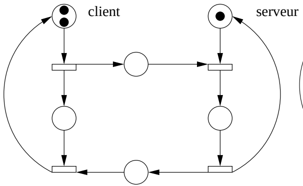
- Modèle trop abstrait du client-serveur

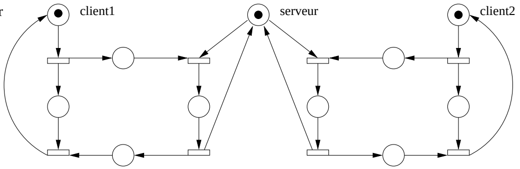



- Modèle raffiné du client-serveur

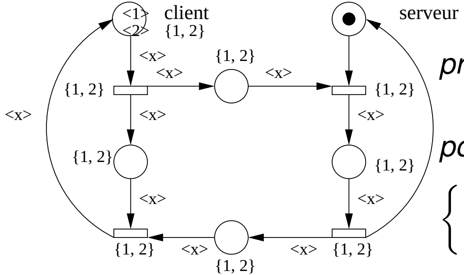


# Motivation




## Exemple (2 clients, 1 serveur)




$$pre(p_1, t_1) = \begin{cases} <1> \mapsto <1> \\ <2> \mapsto <2> \end{cases}$$

$$post(p_2, t_1) = post(p_4, t_1) =$$

$$\begin{cases} <1> \mapsto <1> \\ <2> \mapsto <2> \end{cases}$$

# Les multi-ensembles

Un multi-ensemble sur un ensemble $A$ est un ensemble dans lequel chaque élément a un ordre de multiplicité.

### Definition

Soit $A$ un ensemble fini appelé *domaine*. Un multi-ensemble sur $A$ est une application de $A$ dans $\mathbb{N}$.

- Exemple : $E = \{\!\{a; a; b; b; b; c\}\!\}$.
- $\mathcal{M}(A)$ : Ensemble des multi-ensembles sur $A$
- Représentation de $\mathcal{M}(A)$ : $E = \sum_{a \in A} E(a) \cdot a$
- $(\mathcal{M}(A), +)$ : $(E + F)(a) = E(a) + F(a)$, pour tout $a \in A$
- $(\mathcal{M}(A), \leq)$ : $E \leq F$ ssi $\forall a \in A, E(a) \leq F(a)$

# Syntaxe des réseaux de Petri colorés

## Definition

Un *réseau coloré* est un tuple $(ClrSet, P, T, Clr, pre, post)$ où :

1. *ClrSet* est un ensemble fini de couleurs ;
2. $P$ est un ensemble de places ;
3. $T$ est un ensemble de transitions ;
4. $Clr : P \uplus T \rightarrow \mathcal{P}(ClrSet)$
5. *pre* est une fonction définie sur $P \times T$ :

$$pre(p, t) : Clr(t) \rightarrow \mathcal{M}(Clr(p))$$

6. *post* est une fonction définie sur $P \times T$ :

$$post(p, t) : Clr(t) \rightarrow \mathcal{M}(Clr(p))$$

# Syntaxe des réseaux de Petri colorés (2)

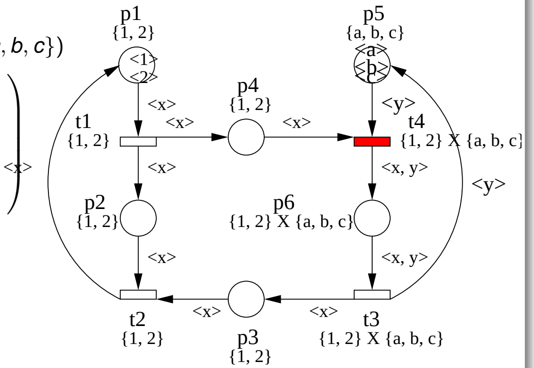
## Definition

Un marquage est une application $M$ définie sur $P$ : $M(p) \in \mathcal{M}(Clr(p))$

## Example (Généralisation du modèle coloré du client-serveur)

$$ClrSet = \{1, 2, a, b, c\} \cup (\{1, 2\} \times \{a, b, c\})$$

$$pre = \begin{pmatrix} \langle x \rangle & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \langle x \rangle & 0 & 0 \\ 0 & \langle x \rangle & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \langle x \rangle \\ 0 & 0 & 0 & \langle y \rangle \\ 0 & 0 & \langle x, y \rangle & 0 \end{pmatrix}$$




$$pre(p, t_1)(x) = \begin{cases} x & \text{si } p = p_1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

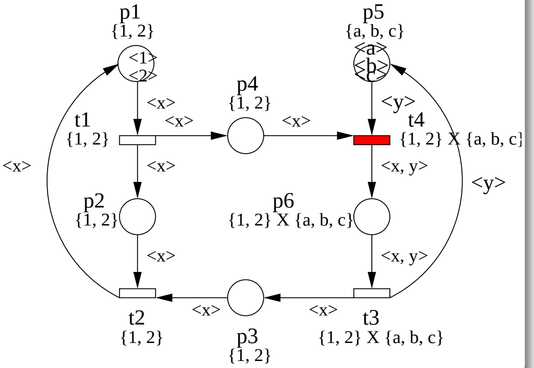
$$pre(p, t_4)(x, y) = \begin{cases} x & \text{si } p = p_4 \\ y & \text{si } p = p_5 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

# Syntaxe des réseaux de Petri colorés (3)

## Example (Généralisation du modèle coloré du client-serveur (2))

$$post = \begin{pmatrix} 0 & \langle x \rangle & 0 & 0 \\ \langle x \rangle & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \langle x \rangle & 0 \\ \langle x \rangle & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \langle y \rangle & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \langle x, y \rangle \end{pmatrix}$$

$$post(p, t_3)(x, y) \quad = \begin{cases} y & \text{si } p = p_5 \\ x & \text{si } p = p_3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

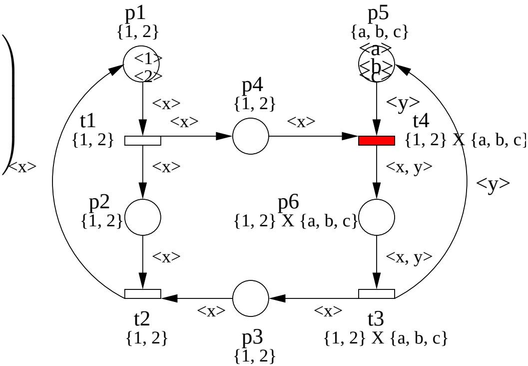


# Syntaxe des réseaux de Petri colorés (4)

## Example (Généralisation du modèle coloré du client-serveur (3))

$$C = \begin{pmatrix} -\langle x\rangle & \langle x\rangle & 0 & 0 \\ \langle x\rangle & -\langle x\rangle & 0 & 0 \\ 0 & -\langle x\rangle & \langle x\rangle & 0 \\ \langle x\rangle & 0 & 0 & -\langle x\rangle \\ 0 & 0 & \langle y\rangle & -\langle y\rangle \\ 0 & 0 & -\langle x,y\rangle & \langle x,y\rangle \end{pmatrix}$$

$$M_0 = \begin{pmatrix} \langle 1\rangle + \langle 2\rangle \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \langle a\rangle + \langle b\rangle + \langle c\rangle \\ 0 \end{pmatrix}$$



# Sémantique des réseaux de Petri colorés

**Definition (Tirabilité d'une transition)**

$t \in T$ est *tirable pour* $c \in Clr(t)$ depuis un marquage $M$ si les jetons nécessaires franchir $t$ selon $c$ sont disponibles dans $M$ :

$$\forall p \in P, M(p) \geq pre(p,t)(c)$$

et on note $M \xrightarrow{(t,c)}$.

# Sémantique des réseaux de Petri colorés (2)

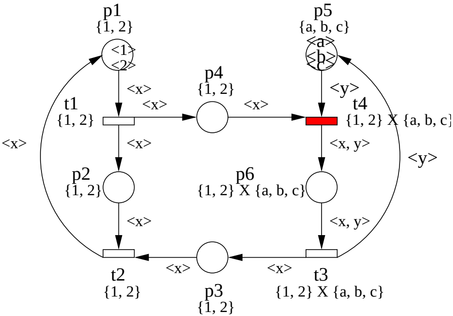
## Example (Le client-serveur coloré)

- $M_0 \xrightarrow{(t_1,<x>)}$ car

$$M_0 = \begin{pmatrix} \langle 1 \rangle + \langle 2 \rangle \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \langle a \rangle + \langle b \rangle + \langle c \rangle \\ 0 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} \langle x \rangle \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $M_0 \overset{(t_2,<x>)}{\not\longrightarrow}$ car

$$M_0 = \begin{pmatrix} \langle 1 \rangle + \langle 2 \rangle \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \langle a \rangle + \langle b \rangle + \langle c \rangle \\ 0 \end{pmatrix} \not\geq \begin{pmatrix} 0 \\ \langle x \rangle \\ \langle x \rangle \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



# Sémantique des réseaux de Petri colorés (3)

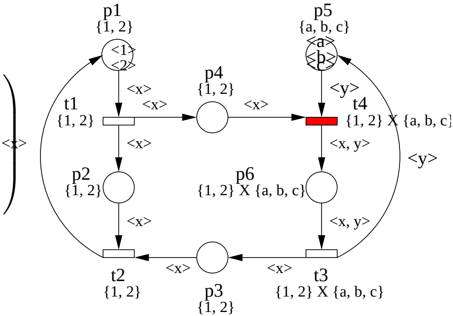
## Example (Le client-serveur coloré (2))

- $M_0 \overset{(t_3,<x,y>)}{\not\longrightarrow}$ car

$$M_0 = \begin{pmatrix} \langle 1\rangle + \langle 2\rangle \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \langle a\rangle + \langle b\rangle + \langle c\rangle \\ 0 \end{pmatrix} \not\geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \langle x, y\rangle \end{pmatrix}$$

- $M_0 \overset{(t_4,<x,y>)}{\not\longrightarrow}$ car

$$M_0 = \begin{pmatrix} \langle 1\rangle + \langle 2\rangle \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \langle a\rangle + \langle b\rangle + \langle c\rangle \\ 0 \end{pmatrix} \not\geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \langle x\rangle \\ \langle y\rangle \\ 0 \end{pmatrix}$$



# Sémantique des réseaux de Petri colorés (4)

**Definition (Franchissement d'une transition)**

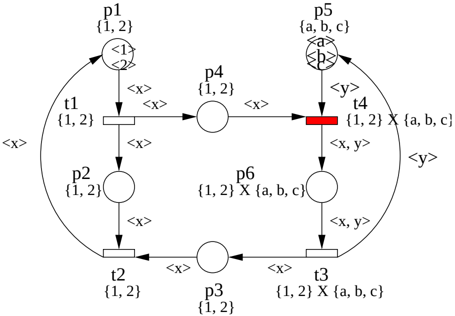
Lorsque $M \xrightarrow{(t,c)}$, un nouveau marquage $M'$ est atteint :

$$\forall p \in P, M'(p) = M(p) + C(p,t)(c)$$

Le franchissement d'une transition $t$ selon $c$ depuis un marquage $M$ vers un marquage $M'$ est noté $M \xrightarrow{(t,c)} M'$.

# Sémantique des réseaux de Petri colorés (4)

## Example (Le client-serveur coloré)




$$M_0 = \begin{pmatrix} \langle 1\rangle + \langle 2\rangle \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \langle a\rangle + \langle b\rangle + \langle c\rangle \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(t_1, <1>)} \begin{pmatrix} \langle 2\rangle \\ \langle 1\rangle \\ 0 \\ \langle 1\rangle \\ \langle a\rangle + \langle b\rangle + \langle c\rangle \\ 0 \end{pmatrix} = M_1$$

# Sémantique des réseaux de Petri colorés (5)

## Definition (Marquage accessible)

Un marquage $M'$ est *accessible à partir d*'un marquage $M$ s'il existe une séquence de tirs

$$M = M_1 \xrightarrow{(t_1, c_1)} M_2 \xrightarrow{(t_2, c_2)} \dots \xrightarrow{(t_{n-1}, c_{n-1})} M_n = M'.$$

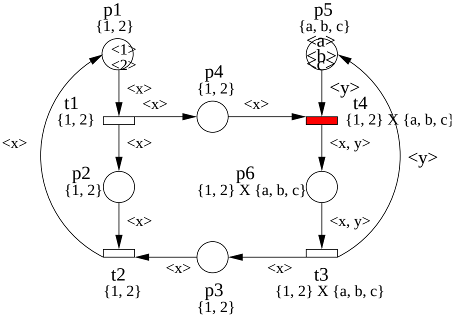
(noté :

$$M \xrightarrow{s} M'$$

où $s = (t_1, c_1)(t_2, c_2)\dots(t_{n-1}, c_{n-1})$). Un marquage est *accessible* s'il est accessible à partir d'un marquage initial $M_0$ fixé.

# Sémantique des réseaux de Petri colorés (6)

## Example (Le client-serveur coloré)




$$M_0 = \begin{pmatrix} \langle 1\rangle + \langle 2\rangle \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \langle a\rangle + \langle b\rangle + \langle c\rangle \\ 0 \end{pmatrix} \overset{(t_1, <1>)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} \langle 2\rangle \\ \langle 1\rangle \\ 0 \\ \langle 1\rangle \\ \langle a\rangle + \langle b\rangle + \langle c\rangle \\ 0 \end{pmatrix} \overset{(t_4, <1,b>)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} \langle 2\rangle \\ \langle 1\rangle \\ 0 \\ 0 \\ \langle a\rangle + \langle c\rangle \\ \langle 1, b\rangle \end{pmatrix}$$

# Sémantique des réseaux de Petri colorés (6)

**Definition (Graphe d'accessibilité de de $\mathcal{N} = (N, M_0)$)**

- Sommets : $V = R(N, M_0)$
- Arcs étiquetées : $L : V \times V \to T$ t.q.

$$L(M, M') = t \text{ ssi } M \xrightarrow{(t,c)} M'$$

# Analyse des réseaux de Petri colorés

- Les propriétés de $R(N, M_0)$ se formulent de la même manière :

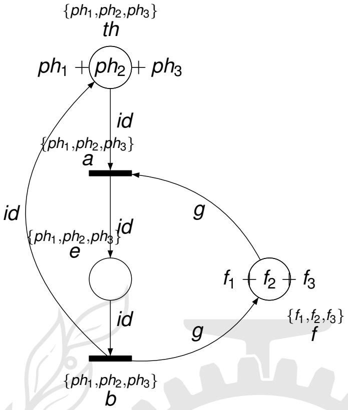
## Example

Un réseau est borné s'il existe un entier $k$ tel que pour tout $M \in R(N, M_0)$ et pour tout $p \in P$, la valeur de $M(p)$ est bornée par $k$ :

$$\exists_{k \in \mathbb{N}} \forall_M \forall_{p \in P} \forall_{c \in Clr(p)} (M \in R(N, M_0) \rightarrow M(p)(c) \leq k)$$

- Les algorithmes d'analyse de $R(N, M_0)$ s'étendent aux RdP colorés.
- Les algorithmes d'analyse structurelle des RdP s'étendent à plusieurs classes de RdP colorés.

# Illustration : Le dîner des philosophes




où $g(ph_i) = \begin{cases} f_i + f_1 & \text{si } i = 3 \\ f_i + f_{i+1} & \text{sinon} \end{cases}$

Quelle est la matrice $C$ du réseau ?