LOG8470 : Exercices supplémentaures
Analyse comportementale des systèmes à l'aide de réseaux de Petri
Solutions

Prof. John Mullins, Ph.D.
Département de Génie Informatique et de Génie Logiciel
École Polytechnique de Montréal

Automne 2018

1 Analyse structurelle

Exercice 1. Pour le réseau de la figure 1,

a. Calculez les matrices Pre, $Post$ et C.

b. à l'aide de la matrice d'incidence, calculez le marquage résultant du tir de la séquence de transitions $t_2 t_4^{25}$.

c. Déterminez les invariants de places et de transitions.

d. Que peut-on déduire à propos du caractère borné du réseau à partir des invariants calculés ? Justifiez bien vos réponses.

Solution :

a. $Pre = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $Post = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

b. Par l'équation fondamentale à partir de $M_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$:

$$M = M_0 + C \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 25 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 25 \\ 1 \end{pmatrix}$$

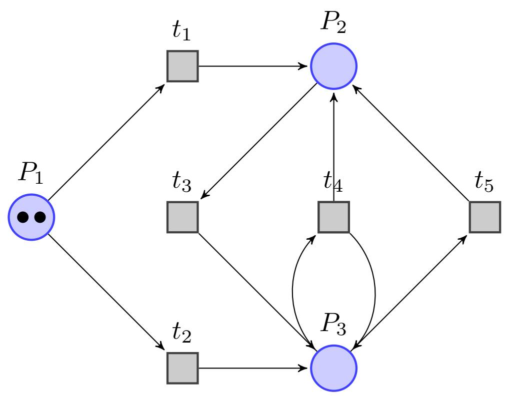


FIGURE 1 – Réseau de Petri

c. Calculons les invariants de place i.e. les solutions du système $X^t C = 0$.

$$\left\{\begin{array}{rcl} -x_1 + x_2 & = & 0 \\ -x_1 + x_3 & = & 0 \\ -x_2 + x_3 & = & 0 \\ x_2 & = & 0 \\ x_1 - x_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

dont la seule solution est $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Il n'y a donc pas d'invariant de place.

Calculons les invariants de transitions i.e. les solutions du système $CX = 0$.

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ - & - & - & - & - \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ - & - & - & - & - \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc $\mathcal{B} = \{(-1, 1, 0, 0, 1)^t, (0, 0, 1, 0, 1)^t\}$ est une base des invariants de transitions.

d. On ne peut rien déduire du caractère borné du réseau étant donné qu'il n'y a aucun invariant de place et donc, en particulier, aucun invariant dont toutes les places sont positives.

D'autre part, comme toute combinaison linéaire positives des invariants de transition possède une composante négative, on en déduit en particulier qu'il n'y a aucune séquence s telle que $M_0 \xrightarrow{s} M_0$ car une telle séquence inclurait forcément les transitions t_1 et t_2. M_0 n'est donc pas un marquage d'acceuil. Notez que $(0,0,1,0,1)^t$ spécifie les seuls cycles possibles du réseau.

Exercice 2. Pour le réseau de la figure 2,

a. Donnez les matrices Pre, $Post$ et C.

b. On sait que la propriété de franchissabilité est monotone. Déterminez le plus petit marquages initial à partir duquel la séquence $xyxyz$ est franchissable.

c. Cherchez un marquage initial à partir duquel le franchissement de la séquence $xyxxyxz$ conduit au marquage B^2CD.

Solution :

a. $Pre = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $Post = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

b. Supposons le marquage initial $M_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$.

Pour franchir $xyxyz$ nous devons obtenir :

$$M_0 \xrightarrow{x} M_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$M_1 \xrightarrow{y} M_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} a+1 \\ b-2 \\ c \\ d \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$M_2 \xrightarrow{x} M_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} a-2 \\ b-1 \\ c-1 \\ d+1 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$M_3 \xrightarrow{y} M_4 \Rightarrow \begin{pmatrix} a-1 \\ b-3 \\ c-1 \\ d+1 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$M_4 \xrightarrow{z} M_5 \Rightarrow \begin{pmatrix} a-4 \\ b-2 \\ c-2 \\ d+2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit :

$$\begin{cases} a & \geq & 4 \\ b & \geq & 3 \\ c & \geq & 4 \\ d & \geq & 0 \end{cases}$$

et finalement, $M_{min} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

c. Le but est de franchir la séquence $s = xyxxyxz$ afin d'atteindre

$$M = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

De la même manière que précédemment, partons de $M_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$. Par l'équation fondamentale $M = M_0 + C \cdot \overline{s}$:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-2 \\ b-6 \\ c-1 \\ d+1 \end{pmatrix}$$

Et donc nécessairement,

$$M_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Mais la condition n'est pas suffisante. On doit vérifier que la séquence est effectivement franchissable depuis ce marquage. Or,

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{x} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{y} \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{x} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{x} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{y} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Puisqu'une place ne peut contenir un nombre de ressources négatif, on en déduit que la séquence s n'est pas franchissable de M_0. Ainsi, il n'exixte aucun marquage initial M_0 tel que $M_0 \xrightarrow{s} M$.

Exercice 3. a. Montrez que s'il y a plusieurs marquages morts, alors il n'y a pas de marquage d'accueil.

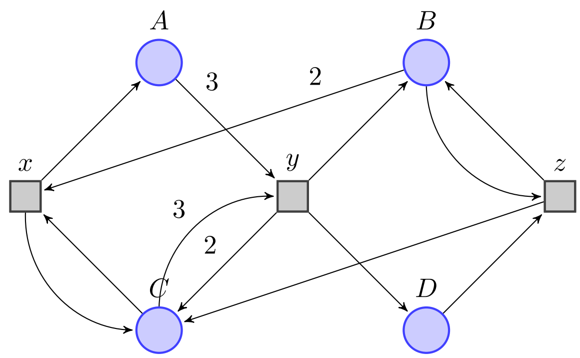


FIGURE 2 – Réseau de Petri

Solution : Soit M_a un marquage d'acceuil et M, un marquage mort. Alors puisque M_a est un marquage d'acceuil, il existe une séquence s t.q. $M \rightarrow sM_a$ et puisque M est mort, $s = \epsilon$, la séquence vide. Par conséquent $M = M_a$.

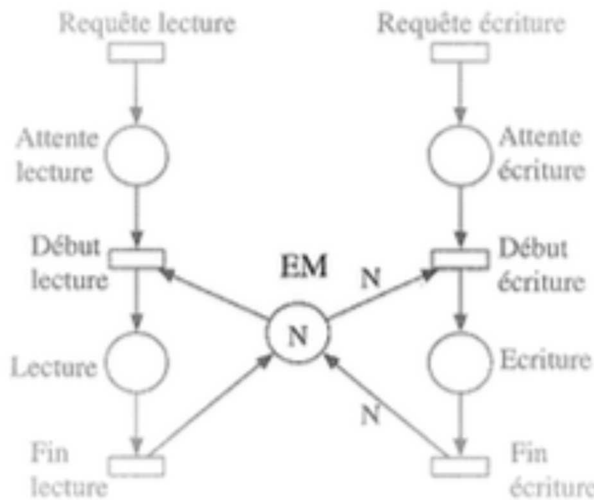
Supposons M, M', deux marquages morts distincts. On a donc $M = M_a$ et $M' = M_a$, ce qui contredit l'hypothèse que M et M' sont distincts.

b. Montrez que si un réseau de Petri (N, M_0) est vivace, alors il est quasi-vivace et sans blocage.

Solution : Si (N, M_0) est vivace alors de tout marquage accessible M de M_0, toutes les transitions sont tirables et comme M_0 est accessible de M_0, (N, M_0) est quasi-vivace.

Si (N, M_0) bloquait au marquage M, comme aucune transition n'est tirable de M alors (N, M_0) ne serait pas vivace.

Exercice 4. On considère le problème des lecteurs-écrivains. On modélise le problème par le réseau de Petri suivant :



Les conditions de synchronisation requises sont les suivantes :

— *Propriété 1* : Il n'y a jamais plus de N (le nombre de jetons de la place centrale) lectures simultanées ;
— *Propriété 2* : Il n'y a jamais plus d'une écriture à la fois ;
— *Propriété 3* : Il n'y a jamais de lecture et d'écriture simultanées.

a. Exprimez ces trois propriétés en termes de relations invariantes pour tout marquage accessible ;

b. Calculez une base de l'espace des invariants de place pour ce réseau ;

c. Partant de ce résultat, pouvez-vous montrer que les trois propriétés requises sont effectivement vérifiées ? Justifiez bien vos réponse à partir des invariants obtenus.

Solution :

a. Les propriétés voulues s'expriment par les relations suivantes (pour tout marquage accessible) :
   — *Propriété 1* : $M(\mathit{Lecture}) \leq N$;
   — *Propriété 2* : $M(\mathit{Ecriture}) \leq 1$;
   — *Propriété 3* : $M(\mathit{Lecture}) \cdot M(\mathit{Ecriture}) = 0$.

b. Dans l'ordre *Attente lecture–Lecture–Attente écriture–Écriture–EM* pour les places et *Requête lecture–Début lecture–Fin lecture–Requête écriture–Début écriture–Fin écriture* pour les transitions. Nous avons donc, en appliquant la méthode du pivot de Gauss :

$$C|I = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -N & N & | & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -N & N & | & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & 0 & N & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Nous avons donc $\mathcal{B} = \{(0,1,0,N,1)^t\}$

c. On en déduit l'invariant

$$M(L) + M(EM) + N \cdot M(E) = N$$

Comme chaque terme est inférieur ou égal à N on a :
— $M(\textit{Lecture}) \leq N$ (*Propriété 1*) ;
— $N \cdot M(E) = \leq N$ et donc $M(E) \leq 1$ (*Propriété 2*)
Si $M(L) \geq 1$ alors on a $M(E) = 0$ et si $M(E) \geq 1$ alors $M(L) = 0$
Sinon, dans les deux cas, on aurait

$$M(L) + N \cdot M(E) \geq N + 1.$$

Par suite, $M(\textit{Lecture}) \cdot M(\textit{Ecriture}) = 0$ (*Propriété 3*).

2 Réseaux de Petri colorés

Exercice 5. Modélisez l'algorithme de Peterson (Figure 3) par un réseau de Petri coloré et vérifiez qu'il satisfait bien la propriété d'exclusion mutuelle.

Solution : Dans le réseau déplié, la variable d_i peut être modélisée par les places $d_i = \textit{true}$ et $d_i = \textit{false}$. Un jeton dans $d_i = \textit{true}$ (resp. $d_i = \textit{false}$) signifie qu'au marquage courant la variable d_i a la valeur *true* (resp. *false*). La variable *tour* est modélisée de manière analogue.

La solution complète a été donnée en classe.

Exercice 6. On considère un système de 4 processus avec recyclage. On exécute les processus dans l'ordre $P_1 \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_3 \longrightarrow P_4$ en boucle.

a. Modélisez ce système.

```
var  d0, d1 : boolean (init : false);
     tour : {0,1};

loop forever                          loop forever
     begin                                 begin
     {section non critique};               {section non critique};
     d0 := true;                           d1 := true;
     tour := 1;                            tour := 0;
     wait until(¬d1 ∨ tour = 0)            wait until (¬d0 ∨ tour = 1);
     {section critique};                   {section critique};
     d0 := false                           d1 := false
     end                                   end
```

FIGURE 3 – Algorithme de Peterson pour deux processus $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_1$.

Solution : Solutionné à la séance de cours.

b. Supposons maintenant qu'on prenne en compte la durée d'exécution des processus : P_1 dure une unité de temps, P_2 dure deux unités de temps, P_3 dure une unité de temps et P_4 dure trois unités de temps. Modélisez le fonctionnement de ce système à l'aide d'un réseau de Petri coloré.

Solution : Solutionné à la séance de cours.