

anotações buxas de matemática cringe

Alexander Kahleul

10 de janeiro de 2026

Sumário

| | |
|---|-----------|
| I Fundamentos | 6 |
| 1 Lógica Proposicional | 7 |
| 2 Teorias de Primeira Ordem | 8 |
| 2.1 Linguagens de Primeira Ordem | 8 |
| 2.2 Estruturas | 11 |
| 3 O sistema ZFC | 13 |
| 3.1 Primeiros Axiomas | 13 |
| 3.1.1 O Axioma da Extensão | 13 |
| 3.1.2 O Axioma do Vazio | 14 |
| 3.1.3 O Axioma do Par | 15 |
| 3.1.4 O Axioma da União | 15 |
| 3.1.5 O Axioma das Partes | 16 |
| 3.1.6 O Esquema de Axiomas da Separação | 17 |
| 3.1.7 Propriedades Algébricas | 18 |
| 3.1.8 O Axioma da Regularidade | 20 |
| 3.2 Relações e Funções | 21 |
| 3.2.1 Produto Cartesiano | 21 |
| 3.2.2 Relações | 22 |

| | |
|--|-----------|
| <i>SUMÁRIO</i> | 2 |
| 3.2.3 Relações de Ordem | 25 |
| 3.2.4 Relações de Equivalência | 28 |
| 3.2.5 Funções | 29 |
| 3.2.6 Bijeções e Funções Inversas | 30 |
| 3.3 O Axioma do Infinito e os Números Naturais | 35 |
| 3.3.1 O Teorema da Recursão | 38 |
| 3.3.2 Aritmética dos Números Naturais | 40 |
| 3.4 O Axioma da Escolha | 40 |
| II Números Reais | 43 |
| 4 Números Reais como na Análise | 44 |
| 4.1 Corpos | 44 |
| 4.2 Números Naturais | 46 |
| 4.2.1 O Teorema da Recursão | 50 |
| 4.2.2 A Unicidade dos Números Naturais | 50 |
| 4.3 Conjuntos Finitos | 50 |
| 4.3.1 Resultadinhos | 52 |
| 4.4 Conjuntos Infinitos | 53 |
| 4.5 Conjuntos Enumeráveis e Não-Enumeráveis | 54 |
| 4.6 Números Inteiros | 54 |
| 4.6.1 Teoria Elementar dos Números | 55 |
| 4.7 Números Racionais | 55 |
| 4.8 Números Reais | 56 |
| 5 Números Reais como na Álgebra | 58 |
| 5.1 Homomorfismos | 62 |

| | |
|--|------------|
| <i>SUMÁRIO</i> | 3 |
| III Análise Real I | 63 |
| 6 Sequências | 64 |
| 7 Limites e Continuidade | 67 |
| 7.1 Topologia da Reta | 67 |
| 7.2 Limites | 68 |
| 7.3 Continuidade | 72 |
| 7.4 Limites Infinitos | 75 |
| 7.5 Limites e Sequências | 77 |
| 7.6 Teoremas do Valor Intermediário e de Weierstrass | 80 |
| 7.7 Algumas Funções Transcendentais | 82 |
| 7.7.1 Trigonometria, parte I | 82 |
| 7.7.2 Exponencial e Logaritmo | 84 |
| 8 Derivadas | 90 |
| 8.1 Definições e Resultados Iniciais | 90 |
| 8.2 Teoremas de Rolle, do Valor Médio e de Cauchy | 93 |
| 8.3 Gráficos de Funções | 95 |
| 8.4 Regras de L'Hospital | 97 |
| 8.5 Trigonometria, parte II | 99 |
| 8.6 Polinômio de Taylor | 100 |
| 9 Integrais | 101 |
| 9.1 A integral de Darboux | 101 |
| 9.1.1 Estendendo a definição | 105 |
| 9.2 Resultados | 106 |
| 9.3 O Teorema Fundamental do Cálculo | 108 |

| | |
|---|------------|
| <i>SUMÁRIO</i> | 4 |
| 9.4 A Integral de Riemann | 111 |
| 9.5 Integrais Impróprias | 112 |
| 10 Demonstrações | 113 |
| | |
| IV Álgebra Linear | 119 |
| 11 Matrizes e Sistemas Lineares | 120 |
| 11.1 Definições Iniciais e Operações Matriciais | 120 |
| 11.2 Operações e Matrizes Elementares | 123 |
| 11.3 Eliminação Gaussiana e Decomposição LU | 125 |
| 11.4 Sistemas Lineares | 125 |
| 12 Espaços Vetoriais | 129 |
| 12.1 Espaços e Subespaços Vetoriais | 129 |
| 12.2 Combinações Lineares e Geradores | 133 |
| 12.3 Dependência e Independência Linear | 135 |
| 12.4 Base e Dimensão | 137 |
| 13 Transformações Lineares | 141 |
| 13.1 Matrizes | 142 |
| 14 Geometria Analítica | 144 |
| | |
| V Cálculo II | 145 |
| 15 Topologia do Espaço Euclidiano | 146 |
| 16 Caminhos | 150 |

| | |
|--|------------|
| <i>SUMÁRIO</i> | 5 |
| 16.1 Curvas | 154 |
| 17 Campos Escalares e Vetoriais | 157 |
| 18 Integrais de Linha | 160 |
| VI Probabilidade | 162 |
| 19 Combinatória Finita | 163 |
| 20 Espaços de Probabilidade | 165 |
| 20.1 Variáveis Aleatórias | 169 |
| 20.1.1 Distribuições Discretas | 170 |
| 20.1.2 Distribuições Absolutamente Contínuas | 171 |
| VII Outros | 172 |
| 21 Shoenfield | 173 |
| Bibliografia | 175 |

Parte I

Fundamentos

Capítulo 1

Lógica Proposicional

Capítulo 2

Teorias de Primeira Ordem

2.1 Linguagens de Primeira Ordem

Definição 2.1 (Linguagens de Primeira Ordem).

- (a) Um *alfabeto* é uma coleção infinita de símbolos distintos, nenhum deles propriamente contido em outro, separados nas seguintes categorias:
 - i. Conectivos: \vee, \neg .
 - ii. Quantificador universal: \forall .
 - iii. Parênteses: $(,)$.
 - iv. Variáveis, uma para cada inteiro positivo n : $v_1, v_2, \dots, v_n, \dots$
 - v. Símbolos de função: para cada inteiro positivo n , uma coleção de símbolos de função n -ários.
 - vi. Símbolos de predicado: para cada inteiro positivo n , uma coleção de símbolos de predicado n -ários.
 - vii. Símbolo predicado binário de igualdade: $=$.
 - viii. Símbolos de constantes: uma coleção de símbolos.
- (b) Os *termos* correspondentes a um alfabeto são definidos do seguinte modo:
 - i. as variáveis são termos;
 - ii. as constantes são termos;
 - iii. se t_1, t_2, \dots, t_n são termos e f é um símbolo de função n -ário, então $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$ é um termo;
 - iv. todos os termos têm uma das formas acima.
- (c) As *fórmulas* correspondentes a um alfabeto são definidas do seguinte modo:

- i. se t_1 e t_2 são termos, então $= (t_1, t_2)$ é uma fórmula;
- ii. se t_1, t_2, \dots, t_n são termos e R é um símbolo de predicado n -ário, então $R(t_1, t_2, \dots, t_n)$ é uma fórmula;
- iii. se α e β são fórmulas, então $(\neg\alpha)$ e $(\alpha \vee \beta)$ são fórmulas;
- iv. se x é uma variável e α é uma fórmula, então $(\forall x)(\alpha)$ é uma fórmula;
- v. todas as fórmulas têm uma das formas acima.

As fórmulas como definidas nos itens i. e ii. são ditas *atômicas*. A fórmula α que aparece no item iv. é chamada de *escopo* do quantificador \forall .

- (d) Uma *linguagem de primeira ordem* \mathcal{L} consiste num alfabeto como descrito no item (a) e termos (\mathcal{L} -termos) e fórmulas (\mathcal{L} -fórmulas) como descritos nos itens (b) e (c).
- (e) Para especificar uma linguagem de primeira ordem \mathcal{L} , basta especificar quais são suas constantes, seus símbolos de função e seus símbolos de predicado:

$$\mathcal{L} \text{ é } \{c_1, c_2, \dots, f_1^{a(f_1)}, f_2^{a(f_2)}, \dots, R_1^{a(R_1)}, R_2^{a(R_2)}, \dots\},$$

onde cada c_i é um símbolo de constante, cada $f_i^{a(f_i)}$ é um símbolo de função de aridade $a(f_i)$ e cada $R_i^{a(R_i)}$ é um símbolo de predicado de aridade $a(R_i)$.

Teorema 2.2 (Legibilidade única). Seja \mathcal{L} uma linguagem de primeira ordem.

- (a) Todo termo tem uma, e exatamente uma, das formas i.-iii. da definição de termo.
- (b) Toda fórmula tem uma, e exatamente uma, das formas i.-iv. da definição de fórmula.

Prova. Ver [20], página 16, ou ainda, [15], página 18.

Definição 2.3 (Subtermos e subfórmulas). Sejam t um \mathcal{L} -termo e φ uma \mathcal{L} -fórmula.

- (a) Um *subtermo* de t é um \mathcal{L} -termo definido recursivamente do seguinte modo:
 - i. se t é uma variável ou uma constante, então t é o único subtermo de si mesmo;
 - ii. se t é da forma $ft_1t_2\dots t_n$, onde f é um símbolo funcional n -ário e t_1, t_2, \dots, t_n são \mathcal{L} -termos, então os subtermos de t são t e os subtermos de t_1, t_2, \dots, t_n .
- (b) Uma *subfórmula* de φ é uma \mathcal{L} -fórmula definida recursivamente do seguinte modo:
 - i. se φ é atômica, então φ é a única subfórmula de si mesma;

- ii. se φ é da forma $(\neg\alpha)$ ou da forma $(\forall x)(\alpha)$, então as subfórmulas de φ são φ e as subfórmulas de α ;
- iii. se φ é da forma $(\alpha \vee \beta)$, então as subfórmulas de φ são φ e as subfórmulas de α e de β .

Definição 2.4. Sejam \mathcal{L} uma linguagem de primeira ordem, x uma variável e φ uma fórmula.

- (a) (Variáveis livres) Dizemos que x é *livre* em φ se
 - i. φ é atômica e x ocorre em (é um símbolo) φ ; ou
 - ii. φ é da forma $(\neg\alpha)$ e x é livre na fórmula α ; ou
 - iii. φ é da forma $(\alpha \vee \beta)$ e x é livre em pelo menos uma das fórmulas α ou β ; ou
 - iv. φ é da forma $(\forall y)(\alpha)$, com x diferente de y e livre na fórmula α .
 Equivalentemente, podemos dizer que uma ocorrência de x é livre em φ se x não ocorre no escopo de uma subfórmula $(\forall x)(\alpha)$ de φ .
- (b) (Variáveis ligadas) Dizemos que x é *ligada* em φ se não for livre em φ .
- (c) (Sentenças) Uma *sentença* de \mathcal{L} , ou uma \mathcal{L} -*sentença*, é uma \mathcal{L} -fórmula que não possui variáveis livres.

Definição 2.5 (Substituição). Sejam \mathcal{L} uma linguagem de primeira ordem, t um termo e x uma variável.

- (a) Seja u um termo. O termo u_t^x , que resulta da substituição de todas as ocorrências de x em u por t , é definido recursivamente do seguinte modo:
 - i. se u é uma variável diferente de x , então u_t^x é u ;
 - ii. se u é a variável x , então u_t^x é t ;
 - iii. se u é uma constante, então u_t^x é u ;
 - iv. se u é da forma $ft_1 \dots t_n$, então u_t^x é $ft_1^x \dots t_n^x$.
- (b) Seja φ uma fórmula. A fórmula φ_t^x , que resulta da substituição de todas as ocorrências de x em φ por t , é definida recursivamente do seguinte modo:
 - i. se φ é da forma $(t_1 = t_2)$, então φ_t^x é $(t_1^x = t_2^x)$;
 - ii. se φ é da forma $Rt_1 \dots t_n$, então φ_t^x é $Rt_1^x \dots t_n^x$;
 - iii. se φ é da forma $(\neg\alpha)$, então φ_t^x é $(\neg\alpha_t^x)$;
 - iv. se φ é da forma $(\alpha \vee \beta)$, então φ_t^x é $(\alpha_t^x \vee \beta_t^x)$;
 - v. se φ é da forma $(\forall y)(\alpha)$, então φ_t^x é

$$\begin{cases} \varphi, & \text{se } y \text{ é } x; \text{ ou} \\ (\forall y)(\alpha_t^x), & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Definição 2.6 (Substituibilidade). Sejam \mathcal{L} uma linguagem de primeira ordem, φ uma fórmula, t um termo e x uma variável. Dizemos que x é *substituível* por t em φ se

- i. φ é atômica; ou
- ii. φ é da forma $(\neg\alpha)$ e x é substituível por t em α ;
- iii. φ é da forma $(\alpha \vee \beta)$ e x é substituível por t em α e em β ;
- iv. φ é da forma $(\forall y)(\alpha)$ e, exclusivamente, ou x é ligada em φ , ou y não ocorre em t e x é substituível por t em α .

2.2 Estruturas

Definição 2.7. Seja \mathcal{L} uma linguagem de primeira ordem. Uma \mathcal{L} -estrutura \mathfrak{A} consiste num conjunto A , chamado de *universo* de \mathfrak{A} , tal que

- i. para cada símbolo de constante c de \mathcal{L} , há um elemento $c^{\mathfrak{A}}$ em A ;
- ii. para cada símbolo de função n -ário f de \mathcal{L} , há uma função $f^{\mathfrak{A}} : A^n \rightarrow A$;
- iii. para cada símbolo de relação n -ário R de \mathcal{L} , há uma relação $R^{\mathfrak{A}}$ em A (isto é, $R^{\mathfrak{A}} \subseteq A^n$).

Definição 2.8. Seja \mathfrak{A} uma \mathcal{L} -estrutura de universo A .

- (a) Uma *valoração* é qualquer função $s : \text{Vars} \rightarrow A$.
- (b) Sejam s uma valoração, x uma variável e a um elemento de A . Uma *x-modificação* de s é definida como

$$s[x|a](v) := \begin{cases} s(v) & \text{se } v \text{ é uma variável diferente de } x \\ a & \text{se } v \text{ é a variável } x \end{cases}.$$

- (c) Seja $s : \text{Vars} \rightarrow A$ uma valoração. Uma *valoração de termos gerada por s* é uma função $\bar{s} : \text{Term} \rightarrow A$ definida recursivamente do seguinte modo:
 - i. se t é uma variável, então $\bar{s}(t) = s(t)$;
 - ii. se t é um símbolo de constante c , então $\bar{s}(t) = c^{\mathfrak{A}}$;
 - iii. se t é da forma $ft_1 \dots t_n$, onde f é um símbolo funcional n -ário e t_1, \dots, t_n são termos, então $\bar{s}(t) = f^{\mathfrak{A}}(\bar{s}(t_1), \dots, \bar{s}(t_n))$.
- (d) Sejam φ uma \mathcal{L} -fórmula e $s : \text{Vars} \rightarrow A$ uma valoração. Dizemos que \mathfrak{A} *satisfaz* φ com relação a s , denotando isso por $\mathfrak{A} \models \varphi[s]$, se

- i. φ é da forma $= t_1 t_2$ e $\bar{s}(t_1)$ coincide com $\bar{s}(t_2)$; ou
- ii. φ é da forma $Rt_1 \dots t_n$ e $(\bar{s}(t_1), \dots, \bar{s}(t_n))$ é um elemento de $R^{\mathfrak{A}}$; ou
- iii. φ é da forma $(\neg\alpha)$ e $\mathfrak{A} \not\models \alpha[s]$; ou
- iv. φ é da forma $(\alpha \vee \beta)$ e $\mathfrak{A} \models \alpha[s]$ ou $\mathfrak{A} \models \beta[s]$; ou
- v. φ é da forma $(\forall x)(\alpha)$ e $\mathfrak{A} \models \alpha[s[x|a]]$ para cada elemento a de A .

Se Γ é um conjunto de \mathcal{L} -fórmulas, dizemos que \mathfrak{A} satisfaz Γ com relação a s , escrevendo $\mathfrak{A} \models \Gamma[s]$, se $\mathfrak{A} \models \gamma[s]$ para cada fórmula γ em Γ .

Teorema 2.9. Seja \mathfrak{A} uma \mathcal{L} -estrutura.

- (a) Se s_1 e s_2 são valorações tais que $s_1(v) = s_2(v)$ para toda variável v que ocorre num termo t , então $\bar{s}_1(t) = \bar{s}_2(t)$.
- (b) Se s_1 e s_2 são valorações tais que $s_1(v) = s_2(v)$ para toda variável livre v que ocorre na fórmula φ , então $\mathfrak{A} \models \varphi[s_1]$ se, e somente se, $\mathfrak{A} \models \varphi[s_2]$.
- (c) Se ψ é uma sentença, então ou $\mathfrak{A} \models \psi[s]$ para todas as valorações s , ou $\mathfrak{A} \models \psi[s]$ para nenhuma valoração s .

Prova. Ver [15], seção 1.7.

Definição 2.10. Seja \mathfrak{A} uma \mathcal{L} -estrutura.

- (a) Seja φ uma fórmula. Diremos que \mathfrak{A} é um *modelo* de φ , denotando isso por $\mathfrak{A} \models \varphi$, se $\mathfrak{A} \models \varphi[s]$ para toda função de atribuição de variável s .
- (b) Seja Φ um conjunto de fórmulas. Diremos que \mathfrak{A} *modela* Φ , denotando isso por $\mathfrak{A} \models \Phi$, se $\mathfrak{A} \models \varphi$ para cada fórmula φ de Φ .

Capítulo 3

O sistema ZFC

A linguagem (de primeira ordem) da teoria dos conjuntos, denotada por \mathcal{L}_{ST} , consiste em somente um símbolo de predicado binário dito de *pertencimento* \in . A seguir apresentamos os axiomas de ZFC que constituem a teoria de primeira ordem da teoria dos conjuntos. Na primeira seção apresentamos e discutimos os axiomas básicos, deixando os axiomas do infinito (que garante a existência do conjunto dos números naturais ω), da escolha (que tem muitas equivalências) e da substituição (fundamental para a teoria dos ordinais), os mais importantes, e mais complicados, para serem tratados nas próximas seções.

3.1 Primeiros Axiomas

3.1.1 O Axioma da Extensão

Axioma 3.1 (da Extensão). Dois conjuntos são iguais se, e somente se, eles têm os mesmos elementos.

$$\boxed{\forall x \forall y ((x = y) \leftrightarrow \forall z ((z \in x) \leftrightarrow (z \in y)))}$$

Definição 3.2 (Inclusão). Um conjunto x está *contido* num conjunto y , ou é um *subconjunto* de y , se todo elemento de x é um elemento de y :

$$(x \subseteq y) \stackrel{\text{def}}{\leftrightarrow} \forall z ((z \in x) \rightarrow (z \in y)).$$

Observação 3.3. De maneira análoga podemos definir \subsetneq , $\not\subseteq$, \supseteq , etc. Além disso, com a definição de \subseteq , o axioma da extensão pode ser enunciado assim:

$$\forall x \forall y ((x = y) \leftrightarrow ((x \subseteq y) \wedge (y \subseteq x))).$$

Proposição 3.4.¹

- (a) $\forall x(x \subseteq x)$.
- (b) $\forall x \forall y((x \subseteq y) \wedge (y \subseteq x) \rightarrow (x = y))$.
- (c) $\forall x \forall y \forall z(((x \subseteq y) \wedge (y \subseteq z)) \rightarrow (x \subseteq z))$.

Prova.

■

3.1.2 O Axioma do Vazio**Definição 3.5.** Um conjunto x é *vazio* se $\forall y(y \notin x)$.**Axioma 3.6** (do Vazio). Existe um conjunto vazio.

$$\boxed{\exists x \forall y(y \notin x)}$$

Onde $(y \notin x) \stackrel{\text{def}}{\leftrightarrow} (\neg(y \in x))$.**Proposição 3.7.** Quaisquer dois conjuntos vazios são iguais.

$$\forall x_1 \forall x_2 ((\forall y(y \notin x_1) \wedge \forall y(y \notin x_2)) \rightarrow (x_1 = x_2)).$$

Prova. Se $x_1 \neq x_2$, então ou existe $z \in x_1$ tal que $z \notin x_2$, ou existe $z \in x_2$ tal que $z \notin x_1$. Em ambos os casos, x_1 e x_2 não são vazios, uma contradição. Logo $x_1 = x_2$. ■**Observação 3.8.** O axioma do vazio (3.6), junto com a proposição (3.7), nos permite estabelecer que existe um único conjunto vazio:

$$\exists x(\forall y(y \notin x) \wedge \forall z(\forall y(y \notin z) \rightarrow (z = x))).$$

Podemos então falar *do* conjunto vazio (em vez de *de um*). Ele é denotado por \emptyset .**Proposição 3.9.** O conjunto vazio está contido em qualquer conjunto.

$$\forall x(\emptyset \subseteq x)$$

Prova. Suponha que existe x tal que $\emptyset \not\subseteq x$. Então existe $y \in \emptyset$ tal que $y \notin x$, uma contradição pois $\forall y(y \notin \emptyset)$. Logo $\forall x(\emptyset \subseteq x)$. ■**Prova.** Pela definição de \subseteq , precisamos provar que $\forall x(\forall y((y \in \emptyset) \rightarrow (y \in x)))$. Como a fórmula $y \in \emptyset$ é sempre falsa, $(y \in \emptyset) \rightarrow (y \in x)$ é sempre verdadeira,

¹Conforme a definição (3.45), isso significa que a relação \subseteq é uma relação de ordem parcial.

onde $\forall y((y \in \emptyset) \rightarrow (y \in x))$ é sempre verdadeira, donde $\forall x(\forall y((y \in \emptyset) \rightarrow (y \in x)))$ é sempre verdadeira. Isto prova que a fórmula $\forall x(\emptyset \subseteq x)$ é sempre verdadeira. ■

3.1.3 O Axioma do Par

Axioma 3.10 (do Par). Para quaisquer conjuntos x e y , existe um conjunto cujos elementos são x e y .

$$\boxed{\forall x \forall y \exists z \forall w ((w \in z) \leftrightarrow ((w = x) \vee (w = y)))}$$

Proposição 3.11. O conjunto z do axioma do par é único. Notação: $z := \{x, y\}$.

Prova. Pelo axioma do par, z é tal que

$$\forall w((w \in z) \leftrightarrow ((w = x) \vee (w = y))).$$

Se z' é tal que

$$\forall w((w \in z') \leftrightarrow ((w = x) \vee (w = y))),$$

então $\forall w((w \in z') \leftrightarrow (w \in z))$, de modo que $z' = z$ pelo axioma da extensão. ■

Proposição 3.12. $\forall x \forall y((x \in y) \leftrightarrow \{x\} \subseteq y)$.

3.1.4 O Axioma da União

Axioma 3.13 (da União). Para todo conjunto x existe o conjunto de todos os conjuntos que pertencem a algum elemento de x .

$$\boxed{\forall x \exists y \forall z ((z \in y) \leftrightarrow \exists w ((z \in w) \wedge (w \in x)))}$$

Proposição 3.14. O conjunto y do axioma da união é único. Notação: $y := \bigcup x$.

Prova. Pelo axioma da união, y é tal que

$$\forall z((z \in y) \leftrightarrow \exists w ((z \in w) \wedge (w \in x))).$$

Se y' é tal que

$$\forall z((z \in y') \leftrightarrow \exists w ((z \in w) \wedge (w \in x))),$$

então $\forall z((z \in y') \leftrightarrow (z \in y))$, donde $y' = y$ pelo axioma da extensão. ■

Teorema 3.15. Para quaisquer conjuntos x e y , existe o conjunto dos conjuntos que pertencem a x ou a y .

$$\forall x \forall y \exists z \forall w ((w \in z) \leftrightarrow ((w \in x) \vee (w \in y)))$$

Ademais, esse conjunto é único, sendo denotado por $x \cup y$.

Prova. Provemos que $z := \bigcup\{x, y\}$, que existe pelos axiomas do par e da união, funciona. De fato, para todo w , temos $w \in z$ se, e somente se, existe $u \in \{x, y\}$ tal que $w \in u$. Mas $u \in \{x, y\}$ se, e somente se, $u = x$ ou $u = y$, de modo que $w \in x$ ou $w \in y$, como queríamos. A unicidade de z segue do axioma da extensão, de modo que podemos denotar $x \cup y := z$. ■

Prova. Uma prova alternativa é a seguinte. Precisamos provar que

$$\forall w \left(\left(w \in \bigcup\{x, y\} \right) \leftrightarrow ((w \in x) \vee (w \in y)) \right). \quad (\diamond)$$

Pelos axiomas do par e da união, temos

$$\begin{aligned} w \in \bigcup\{x, y\} &\leftrightarrow \exists u((u \in \{x, y\}) \wedge (w \in u)) \\ &\leftrightarrow \exists u(((u = x) \vee (u = y)) \wedge (w \in u)) \\ &\leftrightarrow \exists u(((u = x) \wedge (w \in u)) \vee ((u = y) \wedge (w \in u))) \\ &\leftrightarrow \exists u((w \in x) \vee (w \in y)) \\ &\leftrightarrow (w \in x) \vee (w \in y). \end{aligned}$$

Com isso, temos \diamond , como queríamos. ■

3.1.5 O Axioma das Partes

Axioma 3.16 (das Partes). Para todo conjunto x , existe o conjunto dos subconjuntos de x .

$$\boxed{\forall x \exists y \forall z ((z \in y) \leftrightarrow (z \subseteq x))}$$

Proposição 3.17. O conjunto y do axioma das partes é único. Notação: $y := \mathcal{P}(x)$.

Prova. Pelo axioma das partes, o conjunto y cumpre $\forall z ((z \in y) \leftrightarrow (z \subseteq x))$. Se y' cumpre $\forall z ((z \in y') \leftrightarrow (z \subseteq x))$, então $\forall z ((z \in y') \leftrightarrow (z \in y))$, de modo que $y' = y$ pelo axioma da extensão. ■

3.1.6 O Esquema de Axiomas da Separação

Axioma 3.18 (da Separação). Para cada fórmula P em que z não ocorre livre, a fórmula

$$\boxed{\forall y \exists z \forall x((x \in z) \leftrightarrow ((x \in y) \wedge P))}$$

é um axioma.

Observação 3.19. O conjunto y é o “universo” da discussão. O axioma da separação também é chamado de axioma da compreensão ou axioma da especificação.

Proposição 3.20. O conjunto z do axioma da separação (3.18) é único. Notação: $z := \{x \in y : P(x)\}$.

Prova. Segue do axioma da extensão. ■

Teorema 3.21 (Paradoxo de Russell). Não existe o conjunto de todos os conjuntos.

$$\forall x \exists y(y \notin x)$$

Prova. Suponha que $\exists x \forall y(y \in x)$. Pelo axioma da separação com universo x e a fórmula $y \notin y$, existe z tal que $\forall y((y \in z) \leftrightarrow ((y \in x) \wedge (y \notin y)))$ (note que z não ocorre livre em $y \notin y$). Como $\forall y(y \in x)$, temos $\forall y((y \in z) \leftrightarrow (y \notin y))$. Particularmente para $y = z$, temos $((z \in z) \leftrightarrow (z \notin z))$, uma contradição. Logo $\forall x \exists y(y \notin x)$. ■

Teorema 3.22. Para todo conjunto $x \neq \emptyset$ existe o conjunto de todos os conjuntos que pertencem simultaneamente a todos os elementos de x .

$$\forall x((x \neq \emptyset) \rightarrow \exists y \forall z((z \in y) \leftrightarrow \forall w((w \in x) \rightarrow (z \in w))))$$

Ademais, esse conjunto é único, sendo denotado por $\bigcap x$.

Prova. Precisamos provar que existe y tal que

$$\forall z((z \in y) \leftrightarrow \forall w((w \in x) \rightarrow (z \in w))). \quad (\diamond)$$

Observe inicialmente que o axioma da separação pode ser escrito como

$$\forall x \exists y \forall z((z \in y) \leftrightarrow ((z \in x) \wedge P)),$$

onde P é uma fórmula em que y não ocorre livre. Agora, como $x \neq \emptyset$, tome $v \in x$. Pelo axioma da separação com universo v e a fórmula $\forall w((w \in x) \rightarrow (z \in w))$, onde y não ocorre livre, existe y tal que

$$\forall z((z \in y) \leftrightarrow ((z \in v) \wedge (\forall w((w \in x) \rightarrow (z \in w))))),$$

isto é, existe

$$y := \{z \in v : \forall w((w \in x) \rightarrow (z \in w))\}.$$

Afirmamos que vale (\Diamond) nesse y . De fato,

- por um lado (\Rightarrow), se $z \in y$, então trivialmente $\forall w((w \in x) \rightarrow (z \in w))$;
- por outro lado (\Leftarrow), se z é tal que $\forall w((w \in x) \rightarrow (z \in w))$, então, particularmente para $w = v$, temos $v \in x \rightarrow z \in v$, e como $v \in x$, temos $z \in v$. Como $z \in v$ e $\forall w((w \in x) \rightarrow (z \in w))$, temos que $z \in y$.

Logo, existe y tal que \Diamond . A unicidade de y segue do axioma da extensão, de modo que podemos denotar $\bigcap x := y$. ■

Definição 3.23. Sejam x e y conjuntos.

(a) A *interseção* entre x e y é definida como

$$x \cap y := \{z \in x : z \in y\}.$$

Dizemos que x e y são *disjuntos* se $x \cap y = \emptyset$.

(b) A *diferença* entre x e y é definida como

$$x \setminus y := \{z \in x : z \notin y\}.$$

Dizemos que $x \setminus y$ é o *complementar* de y relativo a x se $y \subseteq x$. Nesse caso, denotamos $x \setminus y$ por y^C .

(c) A *diferença simétrica* entre x e y é definida como

$$x \Delta y := \{z \in x \cup y : z \notin x \cap y\}.$$

Observação 3.24. As definições (3.23) se dão pelo axioma da separação. Vejamos como isso é feito, por exemplo, na definição de $x \cap y$. Sendo x o universo, o axioma da separação é a fórmula $\forall x \exists w \forall z((z \in w) \leftrightarrow ((z \in x) \wedge P))$, onde P é uma fórmula em que w não ocorre livre. Se P é a fórmula $z \in y$, então existe w que cumpre $\forall z((z \in w) \leftrightarrow (z \in x) \wedge (z \in y))$, isto é, $w = \{z \in x : z \in y\}$. Denotamos esse w por $x \cap y$.

3.1.7 Propriedades Algébricas

Proposição 3.25 (Propriedades da União).

- (a) $\forall x(x \cup x = x)$.
- (b) $\forall x(x \cup \emptyset = x)$.

- (c) $\forall x \forall y (x \cup y = y \cup x)$.
- (d) $\forall x \forall y \forall z (x \cup (y \cup z) = (x \cup y) \cup z)$.
- (e) $\forall x \forall y (x \cup y = y \leftrightarrow x \subseteq y)$.
- (f) $\forall x \forall y ((x \subseteq x \cup y) \wedge (y \subseteq x \cup y))$.
- (g) $\forall x \forall y \forall z (x \subseteq y \rightarrow x \cup z \subseteq y \cup z)$.
- (h) $\forall x \forall y (x \subseteq y \rightarrow \bigcup x \subseteq \bigcup y)$.

Prova. Trivial. ■

Proposição 3.26 (Propriedades da Interseção).

- (a) $\forall x (x \cap x = x)$.
- (b) $\forall x (x \cap \emptyset = \emptyset)$.
- (c) $\forall x \forall y (x \cap y = y \cap x)$.
- (d) $\forall x \forall y \forall z (x \cap (y \cap z) = (x \cap y) \cap z)$.
- (e) $\forall x \forall y (x \cap y = x \leftrightarrow x \subseteq y)$.
- (f) $\forall x \forall y ((x \cap y \subseteq x) \wedge (x \cap y \subseteq y))$.
- (g) $\forall x \forall y \forall z (x \subseteq y \rightarrow x \cap z \subseteq y \cap z)$.
- (h) $\forall x \forall y (x \subseteq y \wedge x \neq \emptyset \rightarrow \bigcap y \subseteq \bigcap x)$.

Prova. Trivial. ■

Proposição 3.27 (Distributividade).

- (a) $\forall x \forall y \forall z (x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z))$.
- (b) $\forall x \forall y \forall z (x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z))$.

Prova. Trivial. ■

Proposição 3.28 (Propriedades da Diferença).

- (a) (Imediatas).
 - i. $\forall x (x \setminus \emptyset = x)$;
 - ii. $\forall x (x \setminus x = \emptyset)$;
 - iii. $\forall x (\emptyset \setminus x = \emptyset)$.
- (b)
 - (a) $\forall x \forall y (x \setminus y = x \leftrightarrow x \cap y = \emptyset)$;
 - (b) $\forall x \forall y (x \setminus y = \emptyset \leftrightarrow x \subseteq y)$.
- (c) (Leis de De Morgan).

- i. $\forall x \forall y \forall z (x \setminus (y \cup z) = (x \setminus y) \cap (x \setminus z));$
 - ii. $\forall x \forall y \forall z (x \setminus (y \cap z) = (x \setminus y) \cup (x \setminus z)).$
- (d) $\forall x \forall y \forall z (x \setminus (y \setminus z) = (x \setminus y) \cup (x \cap z)).$
- (e) (Diferenças entre interseções).
- i. $\forall x \forall y \forall z (x \cap (y \setminus z) = (x \cap y) \setminus (x \cap z));$
 - ii. $\forall x \forall y \forall z ((x \setminus y) \cap z = (x \cap z) \setminus y).$
- (f) (Monotonocidade da diferença).
- i. $\forall x \forall y \forall z (x \subseteq y \rightarrow x \setminus z \subseteq y \setminus z).$
 - ii. $\forall x \forall y \forall z (y \subseteq z \rightarrow x \setminus z \subseteq x \setminus y).$

Prova. Trivial. ■

Proposição 3.29 (Propriedades do Complemento Relativo).

- (a) $\forall x \forall y (y \subseteq x \rightarrow (y^C)^C = y).$
- (b) $\forall x \forall y (y \subseteq x \rightarrow (y \cup y^C = x) \wedge (y \cap y^C = \emptyset)).$
- (c) $\forall x \forall y \forall z (z \subseteq y \subseteq x \rightarrow y^C \subseteq z^C).$
- (d) $\forall x \forall y \forall z (y \subseteq x \wedge z \subseteq x \rightarrow y \setminus z = y \cap z^C).$
- (e) (Leis de De Morgan para complementos).
- i. $\forall x \forall y \forall z (y \subseteq x \wedge z \subseteq x \rightarrow (y \cup z)^C = y^C \cap z^C).$
 - ii. $\forall x \forall y \forall z (y \subseteq x \wedge z \subseteq x \rightarrow (y \cap z)^C = y^C \cup z^C).$

Prova. Trivial. ■

Proposição 3.30.

- (a) $\forall x \forall y \forall z (((x \in y) \wedge (y \in z)) \rightarrow ((x \in \bigcup z) \wedge (y \subseteq \bigcup z))).$

Proposição 3.31. $\forall A (\bigcup \mathcal{P}(A) = A).$

3.1.8 O Axioma da Regularidade

Axioma 3.32 (da Regularidade). Para todo conjunto $x \neq \emptyset$ existe $y \in x$ tal que $x \cap y = \emptyset$.

$$\boxed{\forall x ((x \neq \emptyset) \rightarrow \exists y ((y \in x) \wedge (x \cap y = \emptyset)))}$$

Proposição 3.33. Não existem conjuntos x e y tais que $x \in y$ e $y \in x$.

$$\neg(\exists x \exists y ((x \in y) \wedge (y \in x)))$$

Prova. Basta provar que $\forall x \forall y((x \notin y) \vee (y \notin x))$. Pelo axioma do par, tome $z := \{x, y\}$. Como $z \neq \emptyset$, pelo axioma da regularidade existe $w \in z$ tal que $w \cap z = \emptyset$. Se $w = x$, então $y \notin x$, porque se fosse $y \in x$ teríamos $x \cap z = \{y\} \neq \emptyset$, uma contradição. Analogamente, se $w = y$, então $x \notin y$. ■

Corolário 3.34. Não existe x tal que $x \in x$.

$$\forall x(x \notin x)$$

Prova. Segue do teorema anterior com $y = x$. ■

3.2 Relações e Funções

3.2.1 Produto Cartesiano

Definição 3.35 (Par ordenado). Sejam a e b conjuntos. O *par ordenado* (a, b) é definido como o conjunto $\{\{a\}, \{a, b\}\}$, isto é,

$$(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

Proposição 3.36. Dois pares ordenados (a, b) e (c, d) são iguais se, e somente se, $a = c$ e $b = d$.

$$\forall a \forall b \forall c \forall d (((a, b) = (c, d)) \leftrightarrow ((a = c) \wedge (b = d)))$$

Prova. Ver [5], teorema 4.2, página 95. Ver [7], teorema 4.2, página 50. ■

Teorema 3.37. Para quaisquer conjuntos A e B existe o conjunto de todos os pares ordenados (a, b) tais que $a \in A$ e $b \in B$.

$$\forall A \forall B \exists C \forall x (x \in C \leftrightarrow \exists a \exists b (a \in A \wedge b \in B \wedge x = (a, b)))$$

Ademais, esse conjunto é único, sendo denotado por $A \times B$.

Prova. Pelos axiomas da união e das partes, considere o conjunto $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$; pelo axioma da separação, considere o conjunto

$$C := \{x \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B)) : \exists a \exists b (a \in A \wedge b \in B \wedge x = (a, b))\}.$$

Afirmamos que C cumpre as condições do enunciado. Se $x \in C$, então pela definição de C existem $a \in A$ e $b \in B$ tais que $x = (a, b)$. Provemos então que se

existem $a \in A$ e $b \in B$ tais que $x = (a, b)$, então $x \in C$. Para isso, basta provar que $x \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$. Qualquer que seja o par ordenado (a, b) , onde $a \in A$ e $b \in B$,

$$\begin{aligned} (a, b) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B)) &\leftrightarrow \{\{a\}, \{a, b\}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B)) \\ &\leftrightarrow \{\{a\}, \{a, b\}\} \subseteq \mathcal{P}(A \cup B) \\ &\leftrightarrow \{a\} \in \mathcal{P}(A \cup B) \wedge \{a, b\} \in \mathcal{P}(A \cup B) \\ &\leftrightarrow \{a\} \subseteq (A \cup B) \wedge \{a, b\} \subseteq (A \cup B), \end{aligned}$$

o que sabemos ser verdade. A unicidade de C segue do axioma da extensão, de modo que podemos denotar $A \times B := C$. \blacksquare

Definição 3.38. O *produto cartesiano* dos conjuntos A e B é definido como $A \times B$.

3.2.2 Relações

Definição 3.39.

- (a) Uma *relação binária*, ou simplesmente uma *relação*, é um conjunto de pares ordenados.
- (b) Um símbolo de predicado para “ R é relação”, onde R ocorre livre, é

$$\text{Rel}(R) \stackrel{\text{def}}{\leftrightarrow} \forall x (x \in R \rightarrow \exists a \exists b (x = (a, b))).$$

Denotamos $(a, b) \in R$ por aRb .

- (c) Dizemos que R é uma relação de A em B se $R \subseteq A \times B$. Dizemos que R é uma relação em A se $R \subseteq A \times A$.

Teorema 3.40. Um conjunto R é uma relação se, e somente se, existem conjuntos A e B tais que $R \subseteq A \times B$.

$$\forall R (\text{Rel}(R) \leftrightarrow \exists A \exists B (R \subseteq A \times B))$$

Prova. (\Rightarrow) Sendo R uma relação, usando os axiomas da união e da separação, defina

$$\begin{aligned} A &:= \left\{ a \in \bigcup \bigcup R : \exists b \left(b \in \bigcup \bigcup R \wedge aRb \right) \right\} \\ B &:= \left\{ b \in \bigcup \bigcup R : \exists a \left(a \in \bigcup \bigcup R \wedge aRb \right) \right\} \end{aligned}$$

Seja $x \in R$. Então existem a e b tais que $x = (a, b)$. Se $\{\{a\}, \{a, b\}\} \in R$, então $\{\{a\}, \{a, b\}\} \subseteq \bigcup R$, donde $\{a, b\} \in \bigcup R$, donde $\{a, b\} \subseteq \bigcup \bigcup R$, donde

$a, b \in \bigcup \bigcup R$. Como aRb , pelas definições de A e B , temos $a \in A$ e $b \in B$. Como $x = (a, b)$ e $a \in A$ e $b \in B$, pelo teorema (3.37) temos $x \in A \times B$, donde, por fim, segue que $R \subseteq A \times B$.

(\Leftarrow) Os elementos de $A \times B$ são pares ordenados; logo, qualquer subconjunto de $A \times B$ terá pares ordenados como elementos. \blacksquare

Definição 3.41. Seja R uma relação.

(a) O domínio de R é definido como

$$\text{Dom}(R) := \left\{ a \in \bigcup \bigcup R : \exists b((a, b) \in R) \right\}.$$

(b) A imagem de R é definida como

$$\text{Im}(R) := \left\{ b \in \bigcup \bigcup R : \exists a((a, b) \in R) \right\}.$$

(c) A relação inversa de R é definida como

$$R^{-1} := \{(b, a) \in \text{Im}(R) \times \text{Dom}(R) : (a, b) \in R\}.$$

(d) A imagem de um conjunto X por R é definida como

$$R[X] := \{b \in \bigcup \bigcup R : \exists a(a \in X \wedge (a, b) \in R)\}.$$

(e) A imagem inversa de um conjunto Y por R é definida como

$$R^{-1}[Y] := \left\{ a \in \bigcup \bigcup R : \exists b(b \in Y \wedge (a, b) \in R) \right\}$$

Equivalentemente, $R^{-1}[Y]$ é a imagem de Y pela relação R^{-1} .

(f) A restrição de R a X é definida como

$$R|_X := \{(a, b) \in R : a \in X\}.$$

(g) A composição de R e S é definida como

$$S \circ R := \{(a, c) \in \text{Dom}(R) \times \text{Im}(S) : \exists b(b \in \text{Im}(R) \cap \text{Dom}(S) \wedge (aRb \wedge bSc))\}.$$

Proposição 3.42. Sejam R e S relações e A, B, C e D conjuntos tais que $R \subseteq A \times B$ e $S \subseteq C \times D$.

(a) $\text{Dom}(R) = \{x \in A : \exists y(y \in B \wedge xRy)\}.$

- (b) $\text{Im}(R) = \{y \in B : \exists x(x \in A \wedge xRy)\}.$
(c) $S \circ R \subseteq A \times D.$

Prova.

- (a)
(b)
(c)

Proposição 3.43. Sejam R , S e T relações. Valem as seguintes afirmações.

- (a) $\text{Dom } R^{-1} = \text{Im}(R)$, $\text{Im}(R^{-1}) = \text{Dom}(R)$ e $(R^{-1})^{-1} = R$.
(b) $T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R$.
(c) $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$.
(d) Se $\text{Im}(R) \subseteq \text{Dom}(S)$, então $\text{Dom}(S \circ R) = \text{Dom}(R)$.
(e) Se $\text{Dom}(S) \subseteq \text{Im}(R)$, então $\text{Im}(S \circ R) = \text{Im}(S)$.

Prova.

- (a) Temos $(a, b) \in R$ se, e somente se, $(b, a) \in R^{-1}$, o que é equivalente a $(a, b) \in (R^{-1})^{-1}$. Logo $R = (R^{-1})^{-1}$. ■
(b) Se $(a, d) \in T \circ (S \circ R)$, então $a \in \text{Dom}(S \circ R)$, $d \in \text{Im}(T)$ e existe $c \in \text{Im}(S \circ R) \cap \text{Dom}(T)$ tal que $(a, c) \in S \circ R$ e $(c, d) \in T$. De $(a, c) \in S \circ R$ segue que $a \in \text{Dom}(R)$, $c \in \text{Im}(S)$ e existe $b \in \text{Im}(R) \cap \text{Dom}(S)$ tal que $(a, b) \in R$ e $(b, c) \in S$. Como $b \in \text{Dom}(S)$, $d \in \text{Im}(T)$ e existe $c \in \text{Dom}(T) \cap \text{Im}(S)$ tal que $(b, c) \in S$ e $(c, d) \in T$, temos que $(b, d) \in T \circ S$. Com isso, $b \in \text{Dom}(T \circ S)$ e $d \in \text{Im}(T \circ S)$. Como $a \in \text{Dom}(R)$, $d \in \text{Im}(T \circ S)$ e existe $b \in \text{Dom}(T \circ S) \cap \text{Im}(R)$ tal que $(a, b) \in R$ e $(b, d) \in T \circ S$, temos que $(a, d) \in (T \circ S) \circ R$. Com isso, $T \circ (S \circ R) \subseteq (T \circ S) \circ R$. A prova de que $(T \circ S) \circ R \subseteq T \circ (S \circ R)$ é completamente análoga, de modo que $T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R$. ■
(c) Se $(c, a) \in (S \circ R)^{-1}$, então $(a, c) \in S \circ R$, $a \in \text{Dom}(R)$, $c \in \text{Im}(S)$ e existe $b \in \text{Im}(R) \cap \text{Dom}(S)$ tal que $(a, b) \in R$ e $(b, c) \in S$ isto é, $(c, b) \in S^{-1}$, $(b, a) \in R^{-1}$, com $c \in \text{Dom}(S^{-1})$, $a \in \text{Im}(R^{-1})$ e $b \in \text{Im}(S^{-1}) \cap \text{Dom}(R^{-1})$. Com isso, $(c, a) \in R^{-1} \circ S^{-1}$, de modo que $(S \circ R)^{-1} \subseteq R^{-1} \circ S^{-1}$. A prova de que $R^{-1} \circ S^{-1} \subseteq (S \circ R)^{-1}$ é completamente análoga, de modo que $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$. ■
(d) Se $a \in \text{Dom}(R)$, então existe $b \in \text{Im}(R)$ tal que $(a, b) \in R$. Se $\text{Im}(R) \subseteq \text{Dom}(S)$, então $b \in \text{Dom}(S)$, de modo que existe $c \in \text{Im}(S)$ tal que $(b, c) \in S$. Assim, $(a, c) \in S \circ R$, de modo que $a \in \text{Dom}(S \circ R)$. Com

isso, $\text{Dom}(R) \subseteq \text{Dom}(S \circ R)$. Agora, se $a \in \text{Dom}(S \circ R)$, então existe $c \in \text{Im}(S \circ R)$ tal que $(a, c) \in S \circ R$, donde $a \in \text{Dom}(R)$ e $\text{Dom}(S \circ R) \subseteq \text{Dom}(R)$. Com isso, $\text{Dom}(R) = \text{Dom}(S \circ R)$. \blacksquare

- (e)** Se $c \in \text{Im}(S)$, então existe $b \in \text{Dom}(S)$ tal que $(b, c) \in S$. Se $\text{Dom}(S) \subseteq \text{Im}(R)$, então $b \in \text{Im}(R)$, de modo que existe $a \in \text{Dom}(R)$ tal que $(a, b) \in R$. Assim, $(a, c) \in S \circ R$, de modo que $c \in \text{Im}(S \circ R)$. Com isso, $\text{Im}(S) \subseteq \text{Im}(S \circ R)$. Agora, se $c \in \text{Im}(S \circ R)$, então existe $a \in \text{Dom}(S \circ R)$ tal que $(a, c) \in S \circ R$, donde $c \in \text{Im}(S)$ e $\text{Im}(S \circ R) \subseteq \text{Im}(S)$. Com isso, $\text{Im}(S) = \text{Im}(S \circ R)$. \blacksquare

3.2.3 Relações de Ordem

Definição 3.44. Seja R uma relação em X .

- (a)** Dizemos que R é *reflexiva* se

$$\forall x(x \in X \rightarrow (x, x) \in R).$$

- (b)** Dizemos que R é *irreflexiva* se

$$\forall x(x \in X \rightarrow (x, x) \notin R).$$

- (c)** Dizemos que R é *simétrica* se

$$\forall x \forall y(x, y \in X \rightarrow (xRy \rightarrow yRx)).$$

- (d)** Dizemos que R é *antissimétrica* se

$$\forall x \forall y(x, y \in X \rightarrow (xRy \wedge yRx \rightarrow x = y)).$$

- (e)** Dizemos que R é *transitiva* se

$$\forall x \forall y \forall z(x, y, z \in X \rightarrow (xRy \wedge yRz \rightarrow xRz)).$$

Definição 3.45 (Ordem parcial).

- (a)** Uma *relação de ordem parcial* em X é uma relação $\leq \subseteq X \times X$ que tem as seguintes propriedades.
- Reflexividade: $\forall x(x \in X \rightarrow x \leq x)$;
 - Antissimetria: $\forall x \forall y(x, y \in X \rightarrow (x \leq y \wedge y \leq x \rightarrow x = y))$;
 - Transitividade: $\forall x \forall y \forall z(x, y, z \in X \rightarrow (x \leq y \wedge y \leq z \rightarrow x \leq z))$.

Dizemos que X é o *domínio* de \leq .

- (b) Um *conjunto parcialmente ordenado* é um par (X, \leq) onde $\leq \subseteq X \times X$ é uma relação de ordem parcial.

Notação 3.46. Sendo \leq uma ordem parcial, abreviaremos $y \leq x$ por $x \geq y$, $x \leq y$ e $x \neq y$ por $x < y$ e $x < y$ por $y > x$. Quando não houver perigo de confusão, podemos escrever somente *ordem* em vez de ordem parcial.

Exemplo 3.47. A relação de inclusão \subseteq é uma relação de ordem parcial (3.4).

Definição 3.48. Dois conjuntos parcialmente ordenados (X_1, \leq_1) e (X_2, \leq_2) são *ordem-isomorfos* se existe uma bijeção $f : X_1 \rightarrow X_2$ tal que

$$\forall x \forall y (x, y \in X_1 \rightarrow (x \leq_1 y \leftrightarrow f(x) \leq_2 f(y))).$$

Dizemos que a função f é um *isomorfismo de ordens parciais*.

Teorema 3.49. Se (X, \leq) é um conjunto ordenado, então existe um conjunto ordenado (Y, \preceq) ordem-isomorfo a (X, \leq) tal que

$$\preceq = \{(x, y) \in Y \times Y : x \subseteq y\}.$$

Prova. Definindo $f : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ por $f(x) := \{y \in X : y \leq x\}$, temos que f é bijetora em relação a $Y := \text{Im}(f)$. De fato, se $f(x) = f(y)$, então $x \in f(y)$ e $y \in f(x)$ já que $x \in f(x)$ e $y \in f(y)$; daí, pela definição de f , vem $x \leq y$ e $y \leq x$, de modo que $x = y$ e f é injetora. Provemos então que $x \leq y$ se, e somente se, $f(x) \subseteq f(y)$, para quaisquer $x, y \in X$. Se $z \in f(x)$, então $z \leq x$, e se $x \leq y$, então $z \leq y$, de modo que $z \in f(y)$ e $f(x) \subseteq f(y)$. Agora, se $x \in f(x) \subseteq f(y)$, então $x \in f(y)$, donde $x \leq y$. Com isso, (X, \leq) é ordem-isomorfo a (Y, \subseteq) , como havíamos afirmado. ■

Definição 3.50. Sejam (X, \leq) um conjunto parcialmente ordenado e $S \in \mathcal{P}(X)_{\neq \emptyset}$.

- (a) Dizemos que $x \in X$ é um *limitante superior* de S se $y \leq x$ para todo $y \in S$.
- (b) Dizemos que $x \in X$ é um *limitante inferior* de S se $x \leq y$ para todo $y \in S$.
- (c) Dizemos que S é *limitado superiormente* se existe $x \in X$ que é um limitante superior de S .
- (d) Dizemos que S é *limitado inferiormente* se existe $x \in X$ que é limitante inferior de S .
- (e) Dizemos que $x \in S$ é o *máximo* de S se $y \leq x$ para todo $y \in S$.
- (f) Dizemos que $x \in S$ é o *mínimo* de S se $x \leq y$ para todo $y \in S$.
- (g) Dizemos que $x \in S$ é *maximal* em S se não existe $y \in S$ tal que $x < y$.

- (h) Dizemos que $x \in S$ é *minimal* em S se não existe $y \in S$ tal que $y < x$.
- (i) Dizemos que $x \in X$ é o *supremo* de S se S é limitado superiormente e $x \leq y$ para todo limitante superior $y \in X$ de S .
- (j) Dizemos que $x \in X$ é o *ínfimo* de S se S é limitado inferiormente e $y \leq x$ para todo limitante inferior $y \in X$ de S .

Observação 3.51. É fácil ver que o máximo de S , quando existe, é único. De fato, se $x, y \in S$ são máximos de S , então $x \leq y$ e $y \leq x$, de modo que $x = y$. Essa unicidade também vale para o mínimo, o ínfimo e o supremo de S , quando existem. Isso justifica o uso do artigo “o” (em *o* máximo, em vez de *um* máximo, por exemplo) e nos permite denotar esses elementos por $\max S$, $\min S$, $\inf S$ e $\sup S$, respectivamente.

Definição 3.52. Seja (X, \leq) um conjunto parcialmente ordenado.

- (a) Dizemos que \leq é uma relação de ordem *total*, ou que o par (X, \leq) é *totalmente ordenado*, se

$$\forall x \forall y (x, y \in X \rightarrow (x \leq y \vee y \leq x)).$$

- (b) Dizemos que \leq é uma *boa ordem* em X , ou que o par (X, \leq) é *bem-ordenado*, se todo subconjunto não vazio de X possui um elemento mínimo.
- (c) Dizemos que \leq é uma *árvore* se, para todo $x \in X$, o conjunto $S = \{y \in X : y \leq x\}$ é tal que $(S, \leq \cap S \times S)$ é bem-ordenado.
- (d) Dizemos que \leq é um *reticulado* se para quaisquer $x, y \in X$, o conjunto $\{x, y\}$ possui supremo e ínfimo.

Proposição 3.53.

- (a) Toda boa ordem é uma ordem total.
- (b) Toda boa ordem é uma árvore.
- (c) Toda ordem total é um reticulado.

Proposição 3.54. Se (X, \leq) é ordenado e $Y \subset X$, então $\leq \cap Y \times Y$ é uma relação de ordem e

- (a) se \leq é uma ordem total, então $\leq \cap Y \times Y$ é uma ordem total;
- (b) se \leq é uma boa ordem, então $\leq \cap Y \times Y$ é uma boa ordem;
- (c) se \leq é uma árvore, então $\leq \cap Y \times Y$ é uma árvore;

Definição 3.55. Seja (X, \leq) um conjunto ordenado. Sendo $Y \subset X$, dizemos que $\leq \cap Y \times Y$ é uma *subordem* de \leq . Dizemos que o conjunto ordenado $(Y, \leq \cap Y \times Y)$ é um *subconjunto ordenado* de (X, \leq) .

3.2.4 Relações de Equivalência

Definição 3.56. (Relações de equivalência)

- (a) Uma relação de equivalência em X é uma relação $\sim \subseteq X \times X$ que tem as seguintes propriedades.
 - i. Reflexividade: $\forall x(x \in X \rightarrow x \sim x)$;
 - ii. Simetria: $\forall x \forall y(x, y \in X \rightarrow (x \sim y \rightarrow y \sim x))$;
 - iii. Transitividade: $\forall x \forall y \forall z(x, y, z \in X \rightarrow (x \sim y \wedge y \sim z \rightarrow x \sim z))$.
- (b) A classe de equivalência de $a \in X$ por \sim é definida como

$$[a]_{\sim} := \{x \in X : x \sim a\}.$$

- (c) O conjunto das classes de equivalência de \sim é definido como

$$X/\sim := \{Y \in \mathcal{P}(X) : \exists x \forall y(y \in Y \leftrightarrow x \sim y)\} = \{[x]_{\sim} : x \in X\}.$$

Proposição 3.57. Seja \sim uma relação de equivalência num conjunto X . As seguintes afirmações são equivalentes.

- (a) $a \sim b$.
- (b) $a \in [b]$.
- (c) $b \in [a]$.
- (d) $[a] = [b]$.

Prova.

- (a) \Rightarrow (b): Por definição, $[b] = \{x \in X : x \sim b\}$, e como $a \sim b$, segue $a \in [b]$. ■
- (b) \Rightarrow (c): Se $a \in [b]$, então $a \sim b$, isto é, $b \in [a]$. ■
- (c) \Rightarrow (d): Se $b \in [a]$, então $b \sim a$. Se $x \in [a]$, então $x \sim a$, de modo que $x \sim b$, isto é, $x \in [b]$. Com isso, $[a] \subseteq [b]$. Analogamente temos $[b] \subseteq [a]$, de modo que $[a] = [b]$. ■
- (d) \Rightarrow (a): Se $a \in [a] = [b]$, então $a \sim b$. ■

Definição 3.58. Uma partição de um conjunto $X \neq \emptyset$ é um subconjunto $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}(X)$ que tem as seguintes propriedades.

- i. $\emptyset \notin \mathcal{P}$;
- ii. $\bigcup \mathcal{P} = X$;
- iii. $A \cap B = \emptyset$ para quaisquer $A, B \in \mathcal{P}$ tais que $A \neq B$.

Teorema 3.59. Se \sim é uma relação de equivalência num conjunto X , então X/\sim é uma partição de X , isto é, valem as seguintes afirmações.

- (a) $\emptyset \notin X/\sim$.
- (b) $\bigcup X/\sim = X$.
- (c) $\forall Y \forall Z ((Y, Z \in X/\sim) \rightarrow (Y = Z \vee Y \cap Z = \emptyset))$.

Prova.

- (a) Se $\emptyset \in X/\sim$, então existiria $x \in X$ tal que $\emptyset = [x]$, mas $x \in [x]$, uma contradição. ■
- (b) Se $y \in \bigcup X/\sim$, então existe $Y \in X/\sim$ tal que $y \in Y$. Como $Y \in X/\sim$, existe $x \in X$ tal que $Y = [x]$. Como $[x] \subseteq X$, vem $y \in X$, de modo que $\bigcup X/\sim \subseteq X$. Agora, se $x \in X$, então $x \sim x$ e $x \in [x]$, e como $[x] \in X/\sim$, vem $x \in \bigcup X/\sim$, de modo que $X \subseteq \bigcup X/\sim$. Logo $\bigcup X/\sim = X$. ■
- (c) Se $Y \cap Z = \emptyset$, nada há de ser provado. Se $Y \cap Z \neq \emptyset$, então existe $x \in X$ tal que $x \in Y \cap Z$. Sendo $y_0, z_0 \in X$ tais que $Y = [y_0]$ e $Z = [z_0]$, temos $x \sim y_0$ e $x \sim z_0$, de modo que $[y_0] = [z_0]$, isto é, $Y = Z$. ■

Teorema 3.60. Se \mathcal{P} é uma partição de um conjunto $X \neq \emptyset$, então existe uma relação de equivalência R em X tal que $X/R = \mathcal{P}$.

Prova. Pois tome $R := \{(x, y) \in X \times X : \exists A (A \in \mathcal{P} \wedge x, y \in A)\}$. ■

3.2.5 Funções

Definição 3.61 (Função).

- (a) Uma relação f é uma *função* se $(a, b) \in f$ e $(a, c) \in f$ implicam $b = c$. A *imagem* de $a \in \text{Dom}(f)$ é denotada por $f(a)$.
- (b) Uma *função de A em B* é uma função f tal que $\text{Dom}(f) = A$ e $\text{Im}(f) \subseteq B$. Isso é denotado por $f : A \rightarrow B$.

Observação 3.62. Um símbolo de predicado para “ f é função”, onde f ocorre livre, é

$$\text{Fun}(f) \stackrel{\text{def}}{\leftrightarrow} \text{Rel}(f) \wedge \forall a \forall b \forall c ((a, b) \in f \wedge (a, c) \in f \rightarrow b = c).$$

Um símbolo de predicado para “ f é função de A em B ”, onde f , A e B ocorrem livre, é

$$\text{Fun}(f, A, B) \stackrel{\text{def}}{\leftrightarrow} \text{Fun}(f) \wedge \text{Dom}(f) = A \wedge \text{Im}(f) \subseteq B,$$

ou ainda, de maneira mais explícita,

$$\text{Fun}(f, A, B) \stackrel{\text{def}}{\leftrightarrow} \text{Fun}(f) \wedge \forall x(x \in A \leftrightarrow \exists y((x, y) \in f)) \wedge \forall x \forall y((x, y) \in f \rightarrow y \in B).$$

Proposição 3.63. Sejam f e g funções e X um conjunto.

- (a) $f|_X$ é uma função e seu domínio é $\text{Dom}(f) \cap X$.
- (b) $g \circ f$ é uma função.

Prova.

- (a) Por definição, $f|_X = \{(a, b) \in f : a \in X\}$, isto é, f é um conjunto de pares ordenados e, portanto, uma relação. Se $(a, b) \in f|_X$ e $(a, c) \in f|_X$, então, pela definição de $f|_X$, $(a, b) \in f$, $(a, c) \in f$ e $a \in X$; como f é função, $b = c$, de modo que $f|_X$ é também uma função. Provemos, por fim, que $\text{Dom}(f|_X) = \text{Dom}(f) \cap X$. Se $a \in \text{Dom}(f|_X)$, então existe $b \in \text{Im}(f|_X)$ tal que $(a, b) \in f|_X$; pela definição de $f|_X$, vem $(a, b) \in f$ e $a \in X$, e de $(a, b) \in f$ vem $a \in \text{Dom}(f)$. Com isso, $a \in \text{Dom}(f) \cap X$, de modo que $\text{Dom}(f|_X) \subseteq \text{Dom}(f) \cap X$. Por outro lado, se $a \in \text{Dom}(f) \cap X$, então de $a \in \text{Dom}(f)$ segue que existe $b \in \text{Im}(f)$ tal que $(a, b) \in f$, e como $a \in X$, vem $(a, b) \in f|_X$, de modo que $\text{Dom}(f) \cap X \subseteq \text{Dom}(f|_X)$. Logo $\text{Dom}(f|_X) = \text{Dom}(f) \cap X$. Em particular, temos $f|_X = f|_{\text{Dom}(f) \cap X}$. ■
- (b) Se $(a, x) \in g \circ f$ e $(a, y) \in g \circ f$, então, por definição, existe $b \in \text{Im}(f) \cap \text{Dom}(g)$ tal que $(a, b) \in f$ e $(b, x) \in g$ e existe $c \in \text{Im}(f) \cap \text{Dom}(g)$ tal que $(a, c) \in f$ e $(c, y) \in g$. Como f é função, vem $b = c$; daí, vem $(b, x) \in g$ e $(b, y) \in g$, e como g é função, vem $x = y$. ■

Definição 3.64. A função *identidade* de um conjunto A é a função $\text{Id}_A : A \rightarrow A$ definida por $\text{Id}_A(x) = x$ para todo $x \in A$.

Proposição 3.65. Se $f : A \rightarrow B$ é uma função, então $\text{Id}_B \circ f = B$ e $f \circ \text{Id}_A = A$.

Prova. Teste só para ver se está funcionando. ■

3.2.6 Bijeções e Funções Inversas

Injeções

Definição 3.66. Uma função f é *injetora* se

$$\forall x \forall y(x, y \in \text{Dom}(f) \rightarrow (x \neq y \rightarrow f(x) \neq f(y))).$$

Proposição 3.67. Sejam f e g funções.

- (a) Se f e g são injetoras, então $g \circ f$ é injetora.
- (b) Se $g \circ f$ é injetora e $\text{Im}(f) \subseteq \text{Dom}(g)$, então f é injetora.

Prova.

- (a) Sejam $x, y \in \text{Dom}(g \circ f)$. Se $g(f(x)) = g(f(y))$, então $f(x) = f(y)$ pela injetividade de g . Se $f(x) = f(y)$, então $x = y$ pela injetividade de f . Logo $g \circ f$ é injetora. ■
- (b) Sejam $x, y \in \text{Dom}(f)$ tais que $f(x) = f(y)$. Se $\text{Im}(f) \subseteq \text{Dom}(g)$, então $f(x), f(y) \in \text{Dom}(g)$, e como $f(x) = f(y)$, temos $g(f(x)) = g(f(y))$. Daí, pela injetividade de $g \circ f$ temos $x = y$, de modo que f é injetora. ■

Teorema 3.68. Seja f uma função.

- (a) Se a relação f^{-1} é uma função, então f^{-1} é injetora.
- (b) A relação f^{-1} é uma função se, e somente se,
 - i. f é injetora;²
 - ii. $f^{-1} \circ f = \text{Id}_{\text{Dom}(f)}$;
 - iii. $f \circ f^{-1} = \text{Id}_{\text{Im}(f)}$.

Prova.

- (a) Se $(y, x) \in f^{-1}$ e $(z, x) \in f^{-1}$, então $(x, y) \in f$ e $(x, z) \in f$, e como f é função vem $y = z$, de modo que f^{-1} é uma função injetora. ■
- (b) A equivalência mais importante é com f ser injetora.

- i. Se f^{-1} é uma função, então $(x, y) \in f^{-1}$ e $(x, z) \in f^{-1}$ implicam $y = z$. Daí, como $(y, x) \in f$ e $(z, x) \in f$, sendo $y = z$ segue que f é injetora. Agora, se f é injetora, então $(y, x) \in f$ e $(z, x) \in f$ implicam $y = z$, e como $(x, y) \in f^{-1}$ e $(x, z) \in f^{-1}$, segue que f^{-1} é uma função. ■

Provemos que f é injetora se, e somente se, $f^{-1} \circ f = \text{Id}_{\text{Dom}(f)}$.

- ii. (\Rightarrow) Se $(x, z) \in f^{-1} \circ f$, então existe $y \in \text{Im}(f) \cap \text{Dom}(f^{-1})$ tal que $(x, y) \in f$ e $(y, z) \in f^{-1}$. Com isso, $(z, y) \in f$, e como f é injetora vem $z = x$, de modo que $(x, x) \in \text{Id}_{\text{Dom}(f)}$, isto é, $f^{-1} \circ f \subseteq \text{Id}_{\text{Dom}(f)}$. Agora, se $(x, x) \in \text{Id}_{\text{Dom}(f)}$, então existe $y \in \text{Im}(f)$ tal que $(x, y) \in f$, isto é, $(y, x) \in f^{-1}$. Com isso, $(x, x) \in f^{-1} \circ f$, de modo que $\text{Id}_{\text{Dom}(f)} \subseteq f^{-1} \circ f$. Com isso, vem $f^{-1} \circ f = \text{Id}_{\text{Dom}(f)}$.

²Uma hipótese adicional necessária para este enunciado é a de que $\text{Dom}(f) \neq \emptyset$. Colocamos essa hipótese aqui, numa nota de rodapé, para não deixar o enunciado feio e, principalmente, para não chatear o leitor.

(\Leftarrow) Se $(x, y) \in f$ e $(z, y) \in f$, então $(y, x) \in f^{-1}$ e $(y, z) \in f^{-1}$. Como $(x, x) \in f^{-1} \circ f$, existe $w \in \text{Im}(f) \cap \text{Dom}(f^{-1})$ tal que $(x, w) \in f$ e $(w, x) \in f^{-1}$. Como f é uma função, vem $w = y$, de modo que $(y, x) \in f^{-1}$. Analogamente temos $(y, z) \in f^{-1}$, e como f é uma função vem $x = z$, de modo que f é injetora. ■

Agora, sendo $(x, y) \in f$ e $(z, y) \in f$, provemos que $x = z$. Como f é invertível, existe uma função g tal que $g \circ f = \text{Id}_{\text{Dom}(f)}$. Como $(x, x) \in g \circ f$, existe $w \in \text{Im}(f) \cap \text{Dom}(g)$ tal que $(x, w) \in f$ e $(w, x) \in g$. Como f é uma função, vem $w = y$, de modo que $(y, x) \in g$. Analogamente temos $(y, z) \in g$, e como g é uma função vem $x = z$, de modo que f é injetora.

Por fim, provemos que f é injetora se, e somente se, $f \circ f^{-1} = \text{Id}_{\text{Im}(f)}$.

iii. Segue analogamente. Para ver os detalhes, consulte ver [5], teorema 4.14, página 104. ■

Com isso, todas as equivalências foram provadas. ■

Definição 3.69. Uma função f é *invertível à esquerda* se existe uma função g tal que $g \circ f = \text{Id}_{\text{Dom}(f)}$. Dizemos que g é uma *inversa à esquerda* de f .

Teorema 3.70. Uma função f é invertível à esquerda se, e somente se, f é injetora.

Prova. Se f é injetora, então pelo teorema (3.68) f^{-1} é uma função tal que $f^{-1} \circ f = \text{Id}_{\text{Dom}(f)}$, isto é, f é invertível à esquerda. Agora, sendo $(x, y) \in f$ e $(z, y) \in f$, provemos que $x = z$. Como f é invertível, existe uma função g tal que $g \circ f = \text{Id}_{\text{Dom}(f)}$. Como $(x, x) \in g \circ f$, existe $w \in \text{Im}(f) \cap \text{Dom}(g)$ tal que $(x, w) \in f$ e $(w, x) \in g$. Como f é uma função, vem $w = y$, de modo que $(y, x) \in g$. Analogamente temos $(y, z) \in g$, e como g é uma função vem $x = z$, de modo que f é injetora. ■

Sobrejeções

Definição 3.71. Uma função $f : A \rightarrow B$ é *sobrejetora em relação a B* se $\text{Im}(f) = B$.

Proposição 3.72. Uma função $f : A \rightarrow B$ é sobrejetora em relação a B se, e somente se, para todo $y \in B$ existe $x \in A$ tal que $(x, y) \in f$.

Prova. ■

Lema 3.73. Sejam $f : A \rightarrow B$ e $g : C \rightarrow D$ funções.

(a) $\text{Dom}(g \circ f) = \{x \in A : f(x) \in C\}$.

(b) $\text{Dom}(g \circ f) = A$ se, e somente se, $f(A) \subseteq C$.

Prova.

(a) Pela proposição (3.42), $\text{Dom}(g \circ f) = \{x \in A : \exists y(y \in D \wedge (x, y \in g \circ f))\}$.

- i. Se $x \in \text{Dom}(g \circ f)$, então existe $y \in D$ tal que $(x, y) \in g \circ f$. Logo existe $z \in \text{Im}(f) \cap \text{Dom}(g) \subseteq B \cap C$ tal que $(x, z) \in f$ e $(z, y) \in g$, isto é, $z = f(x)$ e $y = g(z)$. Com isso, $x \in A$ e $f(x) \in C$, de modo que $x \in \{x \in A : f(x) \in C\}$, isto é, $\text{Dom}(g \circ f) \subseteq \{x \in A : f(x) \in C\}$.
- ii. Se $x \in \{x \in A : f(x) \in C\}$, então $x \in A$ e $f(x) \in C$, isto é, existe (um único) $z \in C$ tal que $(x, z) \in f$. Como $z \in C$, existe $y \in \text{Im } g \subseteq D$ tal que $(z, y) \in g$. Com isso, $x \in A$ e existe $y \in D$ tal que $(x, y) \in g \circ f$, de modo que $x \in \text{Dom}(g \circ f)$, isto é, $\{x \in A : f(x) \in C\} \subseteq \text{Dom}(g \circ f)$.

Logo $\text{Dom}(g \circ f) = \{x \in A : f(x) \in C\}$. ■

(b) A volta (\Leftarrow) já foi provada (proposição (3.43)). Agora, se $y \in f(A)$, então existe $x \in A$ tal que $y = f(x)$, e como $A = \text{Dom}(g \circ f)$, vem $f(x) \in C$, isto é, $y \in C$. Logo $f(A) \subseteq C$. ■

Proposição 3.74. Sejam $f : A \rightarrow B$ e $g : C \rightarrow D$ funções.

- (a) Se f e g são sobrejetoras e $B = C$, então $g \circ f$ é sobrejetora.
- (b) Se $g \circ f$ é sobrejetora e $f(A) \subseteq C$, então g é sobrejetora.

Prova. ■

Definição 3.75. Uma função $f : A \rightarrow B$ é *invertível à direita* se existe uma função $g : B \rightarrow A$ tal que $f \circ g = \text{Id}_B$. Dizemos que g é uma *inversa à direita* de f .

Teorema 3.76. Uma função $f : A \rightarrow B$ é invertível à direita se, e somente se, f é sobrejetora em relação a B .

Observação 3.77. A prova deste teorema depende do axioma da escolha. Mais precisamente, de um enunciado equivalente ao axioma da escolha: para toda relação R existe uma função $f \subseteq R$ tal que $\text{Dom}(f) = \text{Dom}(R)$. Ainda assim, enunciamos este resultado aqui por uma questão de organização didática.

Prova. ■

Bijeções e Funções Inversas

Definição 3.78. Uma função $f : A \rightarrow B$ é *bijetora em relação a B* se é injetora e sobrejetora em relação a B .

Proposição 3.79. Uma função $f : A \rightarrow B$ é bijetora em relação a B se, e somente se, para todo $y \in B$ existe um único $x \in A$ tal que $(x, y) \in f$.

Prova.

■

Proposição 3.80. Se $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$ são funções bijetoras, então a função $g \circ f : A \rightarrow C$ é uma função bijetora.

Prova.

Teorema 3.81. Seja $f : A \rightarrow B$ uma função.

(a) Se a relação f^{-1} é uma função de B em A , então f^{-1} bijetora.

(b) A relação f^{-1} é uma função de B em A se, e somente se,

- i. f é bijetora;
- ii. $f^{-1} \circ f = \text{Id}_A$;
- iii. $f \circ f^{-1} = \text{Id}_B$.

Prova.

■

(a) Como f é função, para todo $x \in A$ existe um único $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$, isto é, $(y, x) \in f^{-1}$. Daí, pela proposição (3.79), f^{-1} é bijetora em relação a A .

■

(b) A equivalência que mais importa é com f ser bijetora.

- i. Se $f^{-1} \subseteq B \times A$ é uma função tal que $\text{Dom}(f^{-1}) = B$, então para todo $y \in B$ existe um único $x \in A$ tal que $(y, x) \in f^{-1}$, isto é, $(x, y) \in f$. Daí, pela proposição (3.79), temos que f é bijetora. Agora, pela mesma proposição, se f é bijetora, então para todo $y \in B$ existe um único $x \in A$ tal que $(x, y) \in f$, isto é, $(y, x) \in f^{-1}$. Daí, pela definição de função, f^{-1} é uma função de B em A .

■

Provemos que f é bijetora se, e somente se, $f^{-1} \circ f = \text{Id}_A$.

- ii. Segue analogamente à prova do teorema (3.68).

■

Por fim, provemos que f é bijetora se, e somente se, $f \circ f^{-1} = \text{Id}_B$.

- iii. Segue analogamente à prova do teorema (3.68).

■

Com isso, todas as equivalências foram provadas.

■

Definição 3.82. Uma função $f : A \rightarrow B$ é *invertível* se f é invertível à esquerda e à direita. A função $g : B \rightarrow A$ tal que $g \circ f = \text{Id}_A$ e $f \circ g = \text{Id}_B$ é chamada de *função inversa* de f .

Proposição 3.83. A função inversa de uma função invertível é única.

Prova. Sejam $f : A \rightarrow B$ uma função invertível e $g_1, g_2 : B \rightarrow A$ funções inversas de f . Provemos que $g_1 = g_2$. De fato,

$$g_1 = g_1 \circ \text{Id}_B = g_1 \circ (f \circ g_2) = (g_1 \circ f) \circ g_2 = \text{Id}_A \circ g_2 = g_2.$$

Logo, a inversa de f , quando existe, é única. ■

Teorema 3.84. Seja $f : A \rightarrow B$ uma função.

- (a) f é invertível se, e somente se, f é bijetora.
- (b) Se f é invertível, então a função inversa de f é a relação inversa f^{-1} .

Prova.

- (a) f é invertível se, e somente se, é invertível à esquerda e à direita. Pelo teorema (3.70), f é invertível à esquerda se, e somente se, f é injetora. Pelo teorema (3.76), f é invertível à direita se, e somente se, f é sobrejetora. Com isso, f é invertível se, e somente, f é bijetora. ■
- (b) Se f é invertível, então f é bijetora. Se f é bijetora, então pelo teorema (3.81) a relação $f^{-1} \subseteq B \times A$ é uma função de B em A , isto é, $f^{-1} : B \rightarrow A$. Naturalmente, f^{-1} (como relação inversa de f) é uma candidata para ser a função inversa de f , de sorte que teorema (3.81) temos $f^{-1} \circ f = \text{Id}_A$ e $f \circ f^{-1} = \text{Id}_B$, isto é, f^{-1} é, de fato, a função inversa de f . ■

Observação 3.85. Vamos resumir o que está acontecendo. O resultado mais importante é a equivalência entre $f : A \rightarrow B$ ser invertível e f ser bijetora: por um lado, se f é bijetora, então existe uma função inversa de f , que é única, e ela é dada pela relação inversa $f^{-1} \subseteq B \times A$, que pelo teorema (3.81) é uma função de B em A , que é ainda bijetora. Por outro lado, se f é invertível, então existe $f^{-1} : B \rightarrow A$ (como função inversa de f), que coincide com f^{-1} (como relação inversa de f).

3.3 O Axioma do Infinito e os Números Naturais

Definição 3.86.

- (a) (Sucessor) Dado um conjunto x , o sucessor de x , denotado por x^+ , é definido como o conjunto $x \cup \{x\}$:

$$\forall x \forall y ((y \in x^+) \leftrightarrow ((y \in x) \vee (y = x)))$$

- (b)** (Conjuntos indutivos) Um conjunto x é *indutivo* se $\emptyset \in x$ e $y \in x \rightarrow y^+ \in x$ para todo conjunto y . Isso é denotado por

$$\text{Ind}(x) \stackrel{\text{def}}{\leftrightarrow} ((\emptyset \in x) \wedge \forall y((y \in x) \rightarrow (y^+ \in x))).$$

Axioma 3.87 (Infinito). Existe um conjunto indutivo.

$$\boxed{\exists x((\emptyset \in x) \wedge \forall y((y \in x) \rightarrow (y^+ \in x))))}$$

Teorema 3.88. Para cada conjunto indutivo I , definindo

$$\omega(I) := \bigcap \{x \in \mathcal{P}(I) : \text{Ind}(x)\},$$

valem as seguintes afirmações para quaisquer conjuntos I e J indutivos.

- (a)** $\omega(I)$ é um conjunto indutivo:

$$\forall I(\text{Ind}(I) \rightarrow \text{Ind}(\omega(I))).$$

- (b)** $\omega(I) = \omega(J)$:

$$\forall I \forall J(\text{Ind}(I) \wedge \text{Ind}(J) \rightarrow \omega(I) = \omega(J)).$$

Prova. Provemos primeiramente que $\omega(I)$ está bem definido. Pelo axioma das partes, existe o conjunto $\mathcal{P}(I)$. Pelo axioma da separação com universo $\mathcal{P}(I)$ e a fórmula $(\emptyset \in x) \wedge \forall y((y \in x) \rightarrow (y^+ \in x))$ (que se abrevia por $\text{Ind}(x)$), existe $z(I) := \{x \in \mathcal{P}(I) : \text{Ind}(x)\}$. Pelo teorema (3.22), como $z(I) \neq \emptyset$ já que $I \in z(I)$, existe $\omega(I) := \bigcap z(I)$.

(a) Provemos primeiramente que $\emptyset \in \omega(I)$. Observe que, pelo teorema (3.22), $\omega(I) := \bigcap z(I)$ é o conjunto que satisfaz

$$\forall x \left(x \in \bigcap z(I) \leftrightarrow \forall y(y \in z(I) \rightarrow x \in y) \right). \quad (\diamondsuit_1)$$

Com isso, $\emptyset \in \bigcap z(I) \leftrightarrow \forall y(y \in z(I) \rightarrow \emptyset \in y)$. Agora, note que, por definição,

$$\forall y(y \in z(I) \leftrightarrow y \subset I \wedge \text{Ind}(y)); \quad (\diamondsuit_2)$$

daí, $\emptyset \in \bigcap z(I) \leftrightarrow \forall y(y \subset I \wedge \text{Ind}(y) \rightarrow \emptyset \in y)$, o que sabemos ser verdade: se $y \subset I$ é indutivo, então $\emptyset \in y$. Assim, $\emptyset \in \bigcap z(I) = \omega(I)$.

Agora provemos que $\forall x((x \in \omega(I)) \rightarrow (x^+ \in \omega(I)))$. Com (\diamondsuit_1) , precisamos provar que

$$\forall x(\forall y(y \in z(I) \rightarrow x \in y) \rightarrow \forall y(y \in z(I) \rightarrow x^+ \in y)),$$

isto é, precisamos provar que

$$\forall x(\forall y(y \in z(I) \rightarrow (x \in y \rightarrow x^+ \in y))).$$

Por (\Diamond_2) , ficamos com

$$\forall x(\forall y(y \subset I \wedge \text{Ind}(y) \rightarrow (x \in y \rightarrow x^+ \in y))),$$

o que sabemos ser verdade: se $y \subset I$ é indutivo, então $\forall x(x \in y \rightarrow x^+ \in y)$.

(b) Provemos inicialmente que, para quaisquer I e J indutivos, $\omega(I) \subset J$, isto é, que $\omega(I)$ é, de certo modo, o “menor” conjunto indutivo. Inicialmente, veja que o mesmo argumento do item (a) nos mostra que, se I e J são indutivos, então $I \cap J$ é indutivo. Como $I \cap J \subset I$, temos $I \cap J \in z(I)$. Agora, pelo teorema (3.22),

$$x \in \bigcap z(I) \leftrightarrow \forall w(w \in z(I) \rightarrow x \in w),$$

onde, particularmente para $w = I \cap J$, $x \in \bigcap z(I) \rightarrow x \in I \cap J$, isto é, $\omega(I) = \bigcap z(I) \subset I \cap J \subset J$. Para finalizar, como $\omega(I)$ é indutivo, vale $\omega(I) \subset \omega(J)$ e, por simetria, também vale $\omega(J) \subset \omega(I)$, donde $\omega(I) = \omega(J)$.

Observação 3.89. O teorema (3.88) nos diz que $\omega(I)$ é a interseção da família de todos os conjuntos indutivos e que o parâmetro I pode ser suprimido. A seguinte definição só é possível devido a esse teorema.

Definição 3.90. O conjunto dos números naturais, que será denotado por ω , é definido como a interseção de todos os conjuntos indutivos.

Teorema 3.91. O conjunto ω dos números naturais serve como modelo para os axiomas de Peano, a saber:

- (a) $\forall x \forall y(x, y \in \omega \rightarrow (\neg(x = y) \rightarrow \neg(x^+ = y^+)))$;
- (b) $\forall x(x \in \omega \rightarrow (\neg(x^+ = \emptyset)))$;
- (c) $(P(\emptyset) \wedge \forall x(x \in \omega \rightarrow (P(x) \rightarrow P(x^+)))) \rightarrow \forall x(x \in \omega \rightarrow P(x))$, para cada fórmula P .

Prova. (a) Suponha, por absurdo, que $x \neq y$ e $x^+ = y^+$. Sabemos que $x \in x^+$; sendo $x^+ = y^+ = y \cup \{y\}$, vemos que $x \in y$ ou $x \in \{y\}$. Esta última equivale a $x = y$, o que contradiz a hipótese. Logo, só pode ser $x \in y$. Analogamente, obtemos $y \in x$, o que contradiz a proposição (3.33). Logo, se $x \neq y$, só pode ser $x^+ \neq y^+$. ■

Note que não usamos a hipótese de ser $x, y \in \omega$, ou seja, vale a afirmação mais forte $\forall x \forall y(\neg(x = y) \rightarrow \neg(x^+ = y^+))$.

(b) Sabemos que $\forall x(x \in x^+)$. Se fosse $x^+ = \emptyset$ para algum x , seria $x \in \emptyset$, o que não é. \blacksquare

Novamente, não usamos a hipótese de ser $x \in \omega$, ou seja, vale a afirmação mais forte $\forall x(\neg(x^+ = \emptyset))$.

(c) Seja P uma fórmula em que x aparece livre tal que $P(\emptyset)$ e $\forall x(P(x) \rightarrow P(x^+))$. Pelo axioma da separação, defina $A := \{x \in \omega : P(x)\}$. Afirmamos que A é indutivo. De fato, isso segue imediatamente do fato de ser, por hipótese, $P(\emptyset)$ e $\forall x(P(x) \rightarrow P(x^+))$. Com o que provamos no item (b) do teorema (3.3), temos $\omega \subset A$, o que nos mostra que todo elemento de ω satisfaz $P(x)$.

Teorema 3.92. (ω, \subset) é bem ordenado.

Prova. Ver [5], teorema 4.26, página 111.

3.3.1 O Teorema da Recursão

Para definir funções de domínio ω recursivamente, precisamos

1. estabelecer o valor da função em 0;
2. estabelecer uma “regra” para definir o valor da função em n^+ uma vez que se conheça o seu valor em n .

Teorema 3.93 (da recursão finita). Sejam X um conjunto, $x_0 \in X$ e $g : X \rightarrow X$. Existe e é única a função $f : \omega \rightarrow X$ tal que

- $f(0) = x_0$;
- $f(n^+) = g(f(n))$, para todo $n \in \omega$.

Prova. A ideia é considerar todas as relações contidas em $\omega \times X$ que cumprem as condições desejadas e provar que a interseção de todas elas resulta em uma única função de domínio ω . Defina

$$\mathcal{C} := \{R \in \mathcal{P}(\omega \times X) : (0, x_0) \in R \wedge \forall n \forall y((n, y) \in R \rightarrow (n^+, g(y)) \in R)\}.$$

Como $\omega \times X \in \mathcal{C}$, temos $\mathcal{C} \neq \emptyset$, de modo que, pelo teorema (3.22) podemos tomar $f := \bigcap \mathcal{C}$. Temos $(0, x_0) \in f$ porque $(0, x_0) \in R$ para toda $R \in \mathcal{C}$. Analogamente, se $(n, y) \in f$, então $(n, y) \in R$ para toda $R \in \mathcal{C}$, de modo que $(n^+, g(y)) \in R$ para toda $R \in \mathcal{C}$, provando que $(n^+, g(y)) \in f$ e que $f \in \mathcal{C}$.

- i. $\text{Dom}(f) = \omega$. Claramente, $\text{Dom}(f) \subset \omega$. Como $(0, x_0) \in f$, temos $0 \in \text{Dom}(f)$. Agora, se $n \in \text{Dom}(f)$, então existe $y \in X$ tal que $(n, y) \in f$,

já que f é uma relação. Com isso, vem $(n^+, g(y)) \in f$, donde $n^+ \in \text{Dom}(f)$. Assim, $\text{Dom}(f)$ é indutivo, e como $\text{Dom}(f) \subset \omega$, temos que $\text{Dom}(f) = \omega$.

- ii. f é função. Provaremos que $(n, y) \in f$ e $(n, z) \in f$ implicam $y = z$ por indução em n .

- Base de indução. Como $(0, x_0) \in f$, provemos que se $(0, z) \in f$, então $z = x_0$. Equivalentemente, via contrapositiva, podemos provar que se $z \in X$ é tal que $z \neq x_0$, então $(0, z) \notin f$. Como $(0, z) \notin f$ equivale a $f \setminus \{(0, z)\} \in \mathcal{C}$, provemos isso para todo $z \in X$ tal que $z \neq x_0$. Sendo $z \neq x_0$, o par $(0, x_0)$ não foi “removido” de f , de modo que $(0, x_0) \in f \setminus \{(0, z)\}$. Agora, se $(n, y) \in f \setminus \{(0, z)\}$, então, como $f \in \mathcal{C}$, temos que $(n^+, g(y)) \in f$. Como, pelo teorema (3.91), $n^+ \neq 0$ para todo $n \in \omega$, temos $(n^+, g(y)) \in f \setminus \{(0, z)\}$. Isso prova que $f \setminus \{(0, z)\}$ é uma relação que satisfaz as condições do teorema e, portanto, $f \setminus \{(0, z)\} \in \mathcal{C}$. Com isso, se $(0, z) \in f$, então $z = x_0$.
- Passo indutivo. Agora, tomando $n \in \text{Dom}(f)$, existe $y \in X$ tal que $(n, y) \in f$, e ainda, $(n^+, g(y)) \in f$. Supondo, por hipótese de indução, que $(n, z) \in f$ implica $y = z$, precisamos provar que $(n^+, z) \in f$ implica $z = g(y)$. Provemos, então, via contrapositiva, que se $z \in X$ é tal que $z \neq g(y)$, então $(n^+, z) \notin f$. Isso significa provar, assim como fizemos no caso base da indução, que $f \setminus \{(n^+, z)\} \in \mathcal{C}$. De fato, como $n^+ \neq 0$, temos $(0, x_0) \in f \setminus \{(n^+, z)\}$ (o par $(0, x_0)$ não pode ter sido “removido”). Agora, se $m \in \text{Dom}(f)$, existe $t \in X$ tal que $(m, t) \in f$ e $(m^+, g(t)) \in f$. Se for $m^+ = n^+$, então $m = n$ (teorema (3.91)), de modo que, pela hipótese de indução, $t = y$, donde $g(t) = g(y) \neq z$. Assim, $f \setminus \{(n^+, z)\}$ satisfaz as condições do teorema e, portanto, $f \setminus \{(n^+, z)\} \in \mathcal{C}$. Com isso, se $(n^+, z) \in f$, então $z = g(y)$.

- iii. Unicidade de f . Se h é outra função satisfazendo as condições do teorema, então $h(0) = x_0 = f(0)$ e, se $h(n) = f(n)$, então

$$h(n^+) = g(h(n)) = g(f(n)) = f(n^+).$$

de modo que, por indução, $h = f$.

Com isso, vemos que existe uma relação f que é uma função, tem domínio ω , é única e satisfaz as condições do teorema.

Teorema 3.94 (da recursão com parâmetro). Sejam X um conjunto, $x_0 \in X$ e $g : \omega \times X \rightarrow X$. Existe e é única a função $f : \omega \rightarrow X$ tal que

- $f(0) = x_0$;
- $f(n^+) = g(n, f(n))$, para todo $n \in \omega$.

Prova. Defina $g' : \omega \times X \rightarrow \omega \times X$ por $g'(n, y) = (n^+, g(n, y))$. Pelo teorema da recursão finita (3.93), existe uma única função $f' : \omega \rightarrow \omega \times X$ tal que $f'(0) = (0, x_0)$ e $f'(n^+) = g'(f'(n))$ para todo $n \in \omega$.

Afirmamos que a primeira coordenada de $f'(n)$ é sempre n , isto é, que $f'(n) = (n, y_n)$ para todo $n \in \omega$ e algum $y_n \in X$. De fato, $f'(0) = (0, x_0)$ claramente cumpre a afirmação, e se $f'(n) = (n, y_n)$ para algum $y_n \in X$, então $f'(n^+) = g'(f'(n)) = (n^+, g(n, y_n)) = (n^+, g(n, y_n))$, o que prova, via indução, a afirmação. Com isso, podemos definir $f : \omega \rightarrow X$ de modo que $f(n) = y_n$, para todo $n \in \omega$.

Provemos que f satisfaz as condições do teorema. Temos $f'(0) = (0, x_0)$, donde $f(0) = x_0$. Ainda pela definição de f , temos $f'(n) = (n, f(n))$ e $f'(n^+) = (n^+, f(n^+))$; por outro lado, $f'(n^+) = g'(f(n)) = (n^+, g(n, f(n)))$, de modo que $f(n^+) = g(n, f(n))$ para todo $n \in \omega$.

Por fim, provemos a unicidade de f . Se $h : \omega \rightarrow X$ tal que $h(0) = x_0$ e $h(n^+) = g(n, h(n))$ para todo $n \in \omega$, definindo $h' : \omega \rightarrow \omega \times X$ por $h'(n) = (n, h(n))$, temos que $h'(0) = (0, x_0)$ e, para todo $n \in \omega$,

$$h(n^+) = (n^+, h(n^+)) = (n^+, g(n, h(n))) = g'(n, h(n)) = g'(h'(n)).$$

Com isso, h' é uma função que satisfaz as mesmas condições que f' ; como f' foi construída pelo teorema da recursão, segue que $h' = f'$.

Para a próxima versão do teorema da recursão, denotamos por $X^{<\omega}$ o conjunto de todas as funções de um certo $n \in \omega$ em X .

Teorema 3.95 (da recursão completa). Sejam X um conjunto e $g : X^{<\omega} \rightarrow X$ uma função. Existe e é única a função $f : \omega \rightarrow X$ tal que $f(n) = g(f|_n)$ para todo $n \in \omega$.

Prova. Ver [5], corolário 4.31, página 115. Observe que esse resultado, assim como (3.94), são corolários do teorema (3.93).

3.3.2 Aritmética dos Números Naturais

3.4 O Axioma da Escolha

Axioma 3.96 (da Escolha). Para todo conjunto x de conjuntos não vazios existe uma função $f : x \rightarrow \bigcup x$ tal que $f(y) \in y$ para todo $y \in x$.

$$\forall x (\emptyset \notin x \rightarrow \exists f (\text{Fun}(f, x, \bigcup x) \wedge \forall y (y \in x \rightarrow f(y) \in y))).$$

$$\forall x \exists f \left(\text{Fun} \left(f, x \setminus \{\emptyset\}, \bigcup x \right) \wedge \forall y (y \in x \setminus \{\emptyset\} \rightarrow f(y) \in y) \right).$$

Dizemos que f é uma *função escolha* em x .

Observação 3.97. Usamos a sigla AC (do inglês Axiom of Choice) para nos referir ao axioma da escolha. Por seu caráter não construtivo, o axioma da escolha é o axioma matemático mais controverso, evitado por uns e usado indiscriminadamente por outros. Desastres acontecem com e sem AC: por exemplo, sem AC, muitos resultados matemáticos fundamentais falham, sendo equivalentes em ZF a AC ou a alguma forma fraca de AC.

Definição 3.98. Uma *sequência* de elementos de um conjunto X *indexada* por elementos de um conjunto I é uma função $x : I \rightarrow X$.

- (a) Denotamos por x_i a imagem de $i \in I$ pela sequência $x : I \rightarrow X$, isto é, $x_i := x(i)$.
- (b) Denotamos por $(x_i)_{i \in I}$ a sequência $x : I \rightarrow X$.
- (c) Denotamos por $\{x_i : i \in I\}$ a imagem da sequência $(x_i)_{i \in I}$.
- (d) Denotamos por $\bigcup_{i \in I} x_i$ a união da imagem da sequência $(x_i)_{i \in I}$, isto é, $\bigcup_{i \in I} x_i := \bigcup \{x_i : i \in I\}$

Definição 3.99. O *produto cartesiano* de $(X_i)_{i \in I}$ é definido como

$$\prod_{i \in I} X_i := \left\{ f \in \mathcal{P} \left(I \times \bigcup_{i \in I} X_i \right) : \text{Fun} \left(f, I, \bigcup_{i \in I} X_i \right) \wedge \forall i (i \in I \rightarrow f(i) \in X_i) \right\},$$

isto é, $\prod_{i \in I} X_i$ é definido como o conjunto de todas as funções f de domínio I tais que $f(i) \in X_i$ para todo $i \in I$.

Proposição 3.100. O axioma da escolha é equivalente à seguinte afirmação: se $(X_i)_{i \in I}$ é uma sequência com $X_i \neq \emptyset$ para todo $i \in I$, então $\prod_{i \in I} X_i \neq \emptyset$.

Prova. (\Rightarrow) Usemos a notação usual de função escrevendo $g = (X_i)_{i \in I}$. Note que o conjunto imagem de g , denotado por $\{X_i : i \in I\}$, é, formalmente, o conjunto

$$\left\{ x \in \mathcal{P} \left(\bigcup_{j \in I} X_j \right) : \exists i (i \in I \wedge x = X_i) \right\}.$$

Como $X_i \neq \emptyset$ para todo $i \in I$, temos que $\emptyset \notin \text{Im}(g)$, de modo que, pelo axioma da escolha, existe uma função $f : \text{Im}(g) \rightarrow \bigcup \text{Im}(g)$ tal que $f(x) \in x$ para todo $x \in \text{Im}(g)$. Assim, existe uma função, $f \circ g : I \rightarrow \bigcup \text{Im}(g)$, tal que $(f \circ g)(i) = f(X_i) \in X_i$ para todo $i \in I$, de modo que $f \circ g \in \prod_{i \in I} X_i \neq \emptyset$.

(\Leftarrow) Agora, seja $x \neq \emptyset$ tal que $\emptyset \notin x$. Sendo g a função identidade em x e fazendo $I = x$ e $X_i = i$ para todo $i \in I$, temos que g é a sequência $(X_i)_{i \in I}$. Como $I \neq \emptyset$ e $X_i \neq \emptyset$ para todo $i \in I$, temos, por hipótese, que $\prod_{i \in I} X_i \neq \emptyset$. Com isso, toda função $f \in \prod_{i \in I} X_i$ é tal que $f(i) \in X_i$ para todo $i \in I$, isto é, $f(y) \in y$ para todo $y \in x$, como exige o axioma da escolha.

Parte II

Números Reais

Capítulo 4

Números Reais como na Análise

4.1 Corpos

Definição 4.1. Uma tripla $(\mathbb{F}, +, \cdot)$ é um *corpo* se no conjunto $\mathbb{F} \neq \emptyset$ existem duas operações, $+ : \mathbb{F} \times \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$ e $\cdot : \mathbb{F} \times \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$, para as quais

- A1: $x + (y + z) = (x + y) + z$ para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{F}$;
- A2: $x + y = y + x$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{F}$;
- A3: existe $0 \in \mathbb{F}$ tal que $x + 0 = x$ para todo $x \in \mathbb{F}$;
- A4: para cada $x \in \mathbb{F}$ existe $y \in \mathbb{F}$ tal que $x + y = 0$;
- M1: $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{F}$;
- M2: $x \cdot y = y \cdot x$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{F}$;
- M3: existe $1 \in \mathbb{F}_{\neq 0}$ tal que $x \cdot 1 = x$ para todo $x \in \mathbb{F}$;
- M4: para cada $x \in \mathbb{F}_{\neq 0}$ existe $y \in \mathbb{F}$ tal que $x \cdot y = 1$;
- D: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{F}$.

Para simplificar a notação, e quando não houver perigo de confusão, vamos nos referir ao corpo $(\mathbb{F}, +, \cdot)$ simplesmente como o conjunto \mathbb{F} .

Observação 4.2. As operações $+$ e \cdot são chamadas, respectivamente, de *adição* e *multiplicação*. As propriedades descritas em A1 e M1 são chamadas de *associatividade*; em A2 e M2, de *comutatividade*; em A3 e M3, de existência de *elementos neutros*; em A4, de existência de um *oposto aditivo*; em M4, de existência de um *inverso multiplicativo*; e em D, de *distributividade*.

Proposição 4.3. Seja $(\mathbb{F}, +, \cdot)$ um corpo. Valem as seguintes afirmações.

(a) (Unicidade)

- i. O elemento neutro 0 de $+$ é único.
- ii. O elemento neutro 1 de \cdot é único.
- iii. O inverso multiplicativo de cada elemento de $\mathbb{F}_{\neq 0}$ é único.

(b) (Leis do corte) Para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{F}$, temos

- i. $x + z = y + z \Rightarrow x = y;$
- ii. $x \cdot z = y \cdot z$ e $z \in \mathbb{F}_{\neq 0} \Rightarrow x = y.$

(c) (Integridade) Para quaisquer $x, y \in \mathbb{F}$, temos

- i. $x \cdot 0 = 0;$
- ii. $x \cdot y = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $y = 0;$

(d) (Regras dos sinais) Para quaisquer $x, y \in \mathbb{F}$, temos

- i. $(-1) \cdot x = -x;$
- ii. $-(-x) = x;$
- iii. $(-x) \cdot y = x \cdot (-y) = -(x \cdot y);$
- iv. $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y.$

(e) Para quaisquer $x, y \in \mathbb{F}$, temos

$$x^2 = y^2 \Leftrightarrow x = y \text{ ou } x = -y.$$

Prova.

Definição 4.4. Um corpo $(\mathbb{F}, +, \cdot)$ é *ordenado* se existe uma relação $\leq \subseteq \mathbb{F} \times \mathbb{F}$ tal que (\mathbb{F}, \leq) é um conjunto totalmente ordenado e

- i. para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{F}$, se $x \leq y$, então $x + z \leq y + z;$
- ii. para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{F}$, se $x \leq y$ e $0 \leq z$, então $x \cdot z \leq y \cdot z.$

Isso é denotado por $(\mathbb{F}, +, \cdot, \leq).$

Proposição 4.5. Seja $(\mathbb{F}, +, \cdot, \leq)$ um corpo ordenado.

(a) A relação $< \subseteq \mathbb{F} \times \mathbb{F}$ definida como

$$< := \{(x, y) \in \mathbb{F} \times \mathbb{F} : x \leq y \wedge x \neq y\}$$

é de ordem estrita total.

(b) Existe um subconjunto $\mathbb{F}_{>0} \subseteq \mathbb{F}$ tal que

- i. se $x, y \in \mathbb{F}_{>0}$, então $x + y \in \mathbb{F}_{>0}$ e $x \cdot y \in \mathbb{F}_{>0};$
- ii. se $x \in \mathbb{F}$, então ou $x = 0$, ou $x \in \mathbb{F}_{>0}$, ou $-x \in \mathbb{F}_{>0}$, exclusivamente.

Prova.

(a)

(b) Como a notação “ $\mathbb{F}_{>0}$ ” sugere, basta tomar $\mathbb{F}_{>0} := \{x \in \mathbb{F} : x > 0\}$, onde $y > x$ significa $x < y$.

Observação 4.6. Sendo \mathbb{F} um corpo ordenado, escrevemos $x < y$ quando $y > x$ e $x \leq y$ quando $y \geq x$.

Proposição 4.7. Propriedades cringe de ordem

Definição 4.8. Seja \mathbb{F} um corpo ordenado. A função $|\cdot| : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}_{\geq 0}$ definida por

$$|x| := \begin{cases} x & \text{se } x \in \mathbb{F}_{\geq 0} \\ -x & \text{se } x \in \mathbb{F}_{< 0} \end{cases}$$

é chamada de *função modular*. O *módulo*, ou o *valor absoluto*, de $x \in \mathbb{F}$, é a imagem de x pela função modular, isto é, $|x| \in \mathbb{F}_{\geq 0}$.

Proposição 4.9. Seja \mathbb{F} um corpo ordenado. Valem as seguintes afirmações.

- (a) $x \leq |x|$ para todo $x \in \mathbb{F}$;
- (b) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{F}$;
- (c) $|x + y| \leq |x| + |y|$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{F}$;
- (d) $|x| \leq \epsilon \Leftrightarrow -\epsilon \leq x \leq \epsilon$ para quaisquer $x \in \mathbb{F}$ e $\epsilon \in \mathbb{F}_{>0}$.

Prova. Ver [14], teorema 4.5, página 14. ■

4.2 Números Naturais

Em toda esta seção, $(\mathbb{F}, +, \cdot, \leq)$ é um corpo ordenado qualquer.

Definição 4.10. Um subconjunto $I \subseteq \mathbb{F}$ é *indutivo* se $1 \in I$ e $n \in I \Rightarrow n + 1 \in I$. Isso é denotado por $\text{Ind } I$.

Exemplo 4.11. \mathbb{F} é um conjunto indutivo. Com isso, o conjunto de todos os subconjuntos indutivos de \mathbb{F} é não vazio, isto é, $\{I \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) : \text{Ind}(I)\} \neq \emptyset$. Em particular, isso nos permite considerar $\bigcap\{I \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) : \text{Ind}(I)\}$.

Proposição 4.12. Se \mathcal{A} é uma coleção não vazia de subconjuntos indutivos de \mathbb{F} , isto é, se

$$\mathcal{A} \in \mathcal{P}(\{I \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) : \text{Ind}(I)\})_{\neq \emptyset},$$

então $\bigcap \mathcal{A}$ é um conjunto indutivo.

Prova. Como $1 \in A$ para todo $A \in \mathcal{A}$, temos $1 \in \bigcap \mathcal{A}$. Agora, se $n \in \bigcap \mathcal{A}$, então $n \in A$ para todo $A \in \mathcal{A}$; como cada $A \in \mathcal{A}$ é indutivo, temos $n + 1 \in A$, donde $n + 1 \in \bigcap \mathcal{A}$. \blacksquare

Definição 4.13. O conjunto dos números naturais é definido como o menor subconjunto indutivo de \mathbb{F} :

$$\mathbb{N}_{\mathbb{F}} := \bigcap \{I \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) : \text{Ind}(I)\}.$$

Observação 4.14. Explicação

Teorema 4.15 (Indução).

- (a) Se um subconjunto $A \subseteq \mathbb{N}$ é indutivo, então $A = \mathbb{N}$.
- (b) Seja $s(n)$ uma proposição bem definida para cada $n \in \mathbb{N}$. Se $s(1)$ é verdadeira e se $s(n + 1)$ é verdadeira sempre que $s(n)$ é verdadeira, então $s(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

Prova.

- (a) Se A é um conjunto indutivo, então, pela definição de \mathbb{N} , temos $\mathbb{N} \subseteq A$. Daí, se $A \subseteq \mathbb{N}$, então $A = \mathbb{N}$. \blacksquare
- (b) Definindo $A := \{n \in \mathbb{N} : s(n)\}$, temos $A \subseteq \mathbb{N}$. Além disso, $1 \in A$ e $n + 1 \in A$ sempre que $n \in A$, de modo que A é indutivo. Com isso, $\mathbb{N} \subseteq A$, de modo que $A = \mathbb{N}$, isto é, vale $s(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. \blacksquare

Proposição 4.16.

- (a) Para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$ tem-se $m + n \in \mathbb{N}$.
- (b) Para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$ tem-se $m \cdot n \in \mathbb{N}$.
- (c) Para qualquer $n \in \mathbb{N}$, tem-se $n \geq 1$. Isso significa, em particular, que \mathbb{N} é limitado inferiormente.

Prova.

- (a) Fixe $m \in \mathbb{N}$ e defina $A := \{n \in \mathbb{N} : m + n \in \mathbb{N}\}$. Temos $1 \in A$ pois se $m \in \mathbb{N}$ então $m + 1 \in \mathbb{N}$ já que \mathbb{N} é indutivo. Agora, se $n \in A$, então $m + n \in \mathbb{N}$, e como \mathbb{N} é indutivo vem $(m + n) + 1 \in \mathbb{N}$, isto é, $m + (n + 1) \in \mathbb{N}$, de modo que $n + 1 \in A$. Com isso, A é indutivo, isto é, $\mathbb{N} \subseteq A$. Como $A \subseteq \mathbb{N}$ pela definição de A , segue que $A = \mathbb{N}$. Como m foi fixado arbitrariamente, segue que $m + n \in \mathbb{N}$ para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$. \blacksquare
- (b) Fixe $m \in \mathbb{N}$ e defina $A := \{n \in \mathbb{N} : m \cdot n \in \mathbb{N}\}$. Temos $1 \in A$ pois $m \cdot 1 = m \in \mathbb{N}$. Agora, se $n \in A$, então $m \cdot n \in \mathbb{N}$, e pelo item anterior

$m \cdot n + m \in \mathbb{N}$, isto é, $m \cdot (n + 1) \in \mathbb{N}$, de modo que $n + 1 \in A$. Com isso, A é indutivo, isto é, $\mathbb{N} \subseteq A$. Como $A \subseteq \mathbb{N}$ pela definição de A , segue que $A = \mathbb{N}$. Como m foi fixado arbitrariamente, segue que $m \cdot n \in \mathbb{N}$ para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$. ■

- (c) Definindo $A := \{n \in \mathbb{N} : n \geq 1\}$, temos $A \subseteq \mathbb{N}$. Claramente $1 \in A$ pois $1 \geq 1$. Agora, se $n \in A$, então $1 > 0 \Rightarrow n + 1 > n \geq 1 \Rightarrow n + 1 \geq 1$, de modo que $n + 1 \in A$. Com isso $\mathbb{N} \subseteq A$, donde $A = \mathbb{N}$. ■

Lema 4.17.

- (a) Para qualquer $n \in \mathbb{N}$, se $n \neq 1$, então $n - 1 \in \mathbb{N}$.
- (b) Para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$, se $n < m$, então $m - n \in \mathbb{N}$.
- (c) Para qualquer $n \in \mathbb{N}$ não existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $n < m < n + 1$.

Prova.

- (a) Suponha que existe $p \in \mathbb{N}$ com $p \neq 1$ tal que $p - 1 \notin \mathbb{N}$, e seja $A = \mathbb{N} \setminus \{p\}$. Como $1 \in \mathbb{N}$ e $p \neq 1$, temos $1 \in A$. Agora, se $n \in A$, então $n \neq p$, e também $n + 1 \neq p$ (se fosse $n + 1 = p$, então $p - 1 = n \in \mathbb{N}$, mas supomos $p - 1 \notin \mathbb{N}$), de modo que A é indutivo. Assim, $\mathbb{N} \setminus \{p\} = \mathbb{N}$, uma clara contradição, de modo que não existe tal p . ■
- (b) Definindo $A := \{n \in \mathbb{N} : \forall m (m \in \mathbb{N} \wedge n < m \Rightarrow m - n \in \mathbb{N})\}$, temos $A \subseteq \mathbb{N}$. Para todo $m \in \mathbb{N}$ com $m > 1$, temos $m \neq 1$, de modo que $m - 1 \in \mathbb{N}$ pelo item anterior. Com isso, $1 \in A$. Agora, se $n \in A$, então para todo $m \in \mathbb{N}$ com $m > n$ tem-se $m - n \in \mathbb{N}$, e precisamos provar que $n + 1 \in A$, isto é, que para todo $m \in \mathbb{N}$ com $m > n + 1$ tem-se $m - (n + 1) \in \mathbb{N}$. Se $m > n + 1$, então $m > n + 1 > n$, de modo que, pela hipótese de indução, temos $m - n \in \mathbb{N}$. Agora, como $m > n + 1$, temos $m - n \neq 1$, e como $m - n \in \mathbb{N}$, pelo item anterior temos $(m - n) - 1 \in \mathbb{N}$, isto é, $m - (n + 1) \in \mathbb{N}$, de modo que $n + 1 \in A$. Com isso, A é indutivo, isto é, $\mathbb{N} \subseteq A$, de modo que $A = \mathbb{N}$. ■
- (c) Sendo $n \in \mathbb{N}$, suponha que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $n < m < n + 1$. Daí, $m - n < 1$ e, pelo item anterior, $m - n \in \mathbb{N}$, absurdo! Logo, tal m não pode existir. ■

Teorema 4.18 (Princípio da Boa Ordenação). Todo subconjunto não vazio de números naturais possui um elemento mínimo. Isto é, se $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})_{\neq \emptyset}$, então existe $a \in A$ tal que $a \leq x$ para todo $x \in A$.

Prova. Suponha por contradição que existe um subconjunto $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})_{\neq \emptyset}$ que não tem um elemento mínimo. Definindo $[n] := \{x \in \mathbb{N} : x \leq n\}$ e $X := \{n \in \mathbb{N} : [n] \cap A = \emptyset\}$, temos $1 \in X$ (de fato, se $1 \notin X$, então $[1] \cap A \neq \emptyset$, de modo

que $1 \in A$ seria o elemento mínimo de A , absurdo!). Agora, se $n \in X$, então $[n] \cap A = \emptyset$; daí, se fosse $n+1 \in A$, este seria o elemento mínimo de A , absurdo! Logo, só pode ser $n+1 \in X$, de modo que X é indutivo e $\mathbb{N} \subseteq X$. Como $X \subseteq \mathbb{N}$ por definição, temos que $X = \mathbb{N}$, donde $A = \emptyset$, uma contradição. ■

Prova. Suponha por contradição que existe um subconjunto $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})_{\neq \emptyset}$ que não tem um elemento mínimo. Definindo

$$X := \{n \in \mathbb{N} : \forall r \in \mathbb{N} (r \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq r \leq n \Rightarrow r \in \mathbb{N} \setminus A)\},$$

temos $1 \in X$. De fato, se fosse $1 \notin X$, então existiria $r \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq r \leq 1$ e $r \notin \mathbb{N} \setminus A$, isto é, teríamos $1 \in A$, de modo que A teria um elemento mínimo, uma contradição. Agora, provemos que se $n \in X$ então $n+1 \in X$. Se fosse $n+1 \notin X$, então teríamos $n+1 \in A$, e como A não tem um elemento mínimo existiria $p \in A$ tal que $p < n+1$. Como $p \in \mathbb{N}$, pelo lema (4.17) teríamos $1 \leq p \leq n$ (não poderia ser $n < p < n+1$ justamente pelo lema), mas como $n \in X$ teríamos $p \in \mathbb{N} \setminus A$, uma contradição pois $p \in A$. Com isso, $n+1 \in X$ e X é indutivo, de modo que, $X = \mathbb{N}$. Logo, para todo $n \in \mathbb{N}$ temos $n \in \mathbb{N} \setminus A$, isto é, $A = \emptyset$, de modo que não existe um subconjunto não vazio de \mathbb{N} que não tenha um elemento mínimo. ■

Prova. Defina $X := \{n \in \mathbb{N} : [n] \subseteq \mathbb{N} \setminus A\}$. Se $1 \in A$, então $1 = \min A$. Se $1 \notin A$, então $[1] = \{1\} \subset \mathbb{N} \setminus A$, de modo que $1 \in X$. Agora, como $A \neq \emptyset$, temos que $X \neq \mathbb{N}$. Se $1 \in X$ e $X \neq \mathbb{N}$, então existe $n_0 \in X$ tal que $n_0 + 1 \notin X$ (se um tal n_0 não existisse, X seria indutivo e teríamos $X = \mathbb{N}$), isto é, $[n_0] \cap A = \emptyset$ e $[n_0 + 1] \cap A \neq \emptyset$. Com isso, temos $n_0 + 1 \in A$, sendo este o elemento mínimo de A (pois, pelo lema (4.17), não existe um natural entre n_0 e $n_0 + 1$). ■

Corolário 4.19. Todo subconjunto não vazio de números naturais limitado superiormente possui um elemento máximo. Isto é, se $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})_{\neq \emptyset}$ é limitado superiormente, então existe $a \in A$ tal que $x \leq a$ para todo $x \in A$.

Prova.

Teorema 4.20 (Indução forte). Se $A \subseteq \mathbb{N}$ é tal que $n \in A$ sempre que $m \in A$ para todo $m < n$, então $A = \mathbb{N}$.

Prova. Provemos que $X := \mathbb{N} - A$ é vazio. De fato, se $X \neq \emptyset$, então pela Boa Ordenação existiria $p \in X$ mínimo; daí, todo $m < p$ seria $m \in A$, de modo que, pela definição de A , $p \in A$, absurdo! Logo, $X = \emptyset$. ■

Definição 4.21. Um corpo ordenado \mathbb{F} é *arquimediano* se para quaisquer $a \in \mathbb{F}_{>0}$ e $b \in \mathbb{F}$ existe $n \in \mathbb{N}_{\mathbb{F}}$ tal que $n \cdot a > b$.

Teorema 4.22. $\mathbb{N}_{\mathbb{F}}$ é ilimitado superiormente em \mathbb{F} se, e somente se,

- i. \mathbb{F} é arquimediano;
- ii. para todo $\epsilon \in \mathbb{F}_{>0}$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{n} < \epsilon$.

Prova. Ver [18], teorema 3 do capítulo 3. ■

4.2.1 O Teorema da Recursão

4.2.2 A Unicidade dos Números Naturais

4.3 Conjuntos Finitos

Seguimos [18] e [17] de perto.

Definição 4.23. Um conjunto $X \neq \emptyset$ é *finito* se existem um natural $n \in \mathbb{N}$ e uma bijeção $f : [n] \rightarrow X$. Isso é denotado por $|X| = n$. O natural n é o *número de elementos* de X , enquanto f é uma *contagem dos elementos* de X . Em particular, o conjunto vazio \emptyset é finito e tem 0 elementos.

Teorema 4.24.

- (a) Para todo $n \in \mathbb{N}$, não existe uma bijeção $f : A \subsetneq [n] \rightarrow [n]$.
- (b) Para todo $n \in \mathbb{N}$, se existe uma bijeção $f : [n] \rightarrow A \subseteq [n]$, então $A = [n]$.

Prova.

- (a) Comecemos com um lema: se existe uma bijeção $f : X \rightarrow Y$, então, dados $a \in X$ e $b \in Y$, existe também uma bijeção $g : X \rightarrow Y$ tal que $g(a) = b$. De fato, como f é sobrejetora, então existe $a' \in X$ tal que $f(a') = b$; sendo $b' = f(a)$, definamos $g : X \rightarrow Y$ pondo $g(a) = b$, $g(a') = b'$ e $g(x) = f(x)$ para todo $x \neq a, a'$ em X . É fácil ver que g é uma bijeção. Agora, seja n_0 o menor natural para o qual existe uma bijeção $f : A \subsetneq [n_0] \rightarrow [n_0]$. Se $n_0 \in A$, então, pelo lema, existe uma bijeção $g : A \subsetneq [n_0] \rightarrow [n_0]$ com $g(n_0) = n_0$; daí, a restrição $\tilde{g} : A \setminus \{n_0\} \subsetneq [n_0 - 1] \rightarrow [n_0 - 1]$ é uma bijeção, o que contraria a minimalidade de n_0 . Por outro lado, se $n_0 \notin A$, então $A \subsetneq [n_0 - 1]$; tomado $a \in A$ com $f(a) = n_0$, a restrição $\tilde{f} : A \setminus \{a\} \subsetneq A \subseteq [n_0 - 1] \rightarrow [n_0 - 1]$ é uma bijeção, o que, novamente, contraria a minimalidade de n_0 . ■
- (b) Basta ver que esse enunciado é a contrapositiva do item anterior. No entanto, ainda assim, daremos uma outra prova, que se dará por indução em n . Evidentemente, o resultado vale para $n = 1$. Agora, supondo que o resultado

vale para $n \in \mathbb{N}$, tomando uma bijeção $f : [n+1] \rightarrow A \subseteq [n+1]$ provaremos que $A = [n+1]$. Sendo $a := f(n+1)$, a restrição $\tilde{f} : [n] \rightarrow A \setminus \{a\}$ é uma bijeção.

- Se for $A \setminus \{a\} \subseteq [n]$, então, pela hipótese de indução, $A \setminus \{a\} = [n]$, donde $a = n+1$ e $A = [n+1]$.
- Se for $A \setminus \{a\} \not\subseteq [n]$, então $n+1 \in A \setminus \{a\}$ e existe $p \in [n]$ tal que $f(p) = n+1$. Agora, definindo a bijeção $g : [n+1] \rightarrow A \subseteq [n+1]$ por

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \neq p \text{ e } x \neq n+1 \\ a, & \text{se } x = p \\ n+1, & \text{se } x = n+1 \end{cases},$$

a restrição $\tilde{g} : [n] \rightarrow A \setminus \{n+1\}$ é uma bijeção; daí, como $A \setminus \{n+1\} \subseteq [n]$, pela hipótese de indução $A \setminus \{n+1\} = [n]$, donde $A = [n+1]$.

Com isso, temos $A = [n+1]$ em ambos os casos, como queríamos provar. ■

Corolário 4.25.

- (a) O número de elementos de um conjunto finito está bem definido. Isto é, se $f : [m] \rightarrow X$ e $g : [n] \rightarrow X$ são bijeções, então $m = n$.
- (b) (Princípio bijetivo) Sejam $A, B \neq \emptyset$ conjuntos finitos. Temos $|A| = |B|$ se, e somente se, existe uma bijeção $f : A \rightarrow B$.

Prova.

- (a) Se fosse $m < n$, teríamos $[m] \subsetneq [n]$, donde existiria uma bijeção $g^{-1} \circ f : [m] \rightarrow [n]$, o que contraria o teorema (4.24). Analogamente, se fosse $n < m$, teríamos $[n] \subsetneq [m]$, donde existiria uma bijeção $f^{-1} \circ g : [n] \rightarrow [m]$, o que novamente contraria o teorema (4.24)! Logo, só pode ser $m = n$.

Uma outra prova é o que segue. Se $h = g^{-1} \circ f : [m] \rightarrow [n]$ é uma bijeção, então $m = n$. De fato, se $m \leq n$, então $[m] \subseteq [n]$, e como $h^{-1} : [n] \rightarrow [m] \subseteq [n]$, pelo teorema (4.24) só pode ser $[m] = [n]$, donde $m = n$. ■

- (b) Como $A, B \neq \emptyset$ são finitos, existem $n, m \in \mathbb{N}$ e bijeções $g : [n] \rightarrow A$ e $h : [m] \rightarrow B$.

(\Rightarrow) Sendo $|B| = n$, existe uma bijeção $\varphi : [n] \rightarrow B$, donde $g^{-1} \circ \varphi : A \rightarrow B$ é uma bijeção.

(\Leftarrow) Existindo uma bijeção $f : A \rightarrow B$, temos que $g^{-1} \circ f^{-1} \circ h : [m] \rightarrow [n]$ é também uma bijeção, donde $m = n$, isto é, $|A| = |B|$. ■

4.3.1 Resultadinhos

Proposição 4.26. Seja X um conjunto finito.

- (a) Para todo subconjunto próprio $Y \subsetneq X$ não existe uma bijeção $f : X \rightarrow Y$.
- (b) Todo subconjunto $Y \subseteq X$ também é finito. Se $Y \subsetneq X$, então $|Y| < |X|$, sendo $|Y| = |X|$ somente quando $Y = X$.

Prova.

- (a) Suponha que existe uma tal bijeção. Se X é finito, então existe uma bijeção $h : [n] \rightarrow X$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Definindo $A := h^{-1}(Y)$, temos $A \subsetneq [n]$ e, além disso, a restrição de h a A é uma bijeção $h_A : A \rightarrow Y$. Com isso, a composta $h^{-1} \circ f^{-1} \circ h_A : A \rightarrow [n]$ é uma bijeção de $A \subsetneq [n]$ em $[n]$, o que contradiz o teorema (4.24)! Logo, não pode existir uma bijeção $f : X \rightarrow Y$ onde X é finito e $Y \subsetneq X$. ■

Observe que esse item é uma mera reformulação do teorema (4.24).

- (b) Ver [18], página 31, teorema 4. Ver [17], página 5, teorema 2.

Corolário 4.27.

- (a) Se X é um conjunto finito, então uma função $f : X \rightarrow X$ será injetora se, e somente se, for sobrejetora.
- (b) Seja $f : X \rightarrow Y$ uma função injetora. Se Y é finito, então X é finito e $|X| \leq |Y|$.
- (c) Seja $f : X \rightarrow Y$ uma função sobrejetora. Se X é finito, então Y é finito e $|Y| \leq |X|$.

Prova.

- (a) Ver [17], página 4, corolário 2.
- (b) Ver [17], página 5, corolário 1. Ver [18], página 31, corolário 1.
- (c) Ver [17], página 5, corolário 1. Ver [18], página 31, corolário 2.

Definição 4.28.

- (a) Um conjunto $X \subseteq \mathbb{N}$ é *limitado* se existir $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \leq n$ para todo $x \in X$.
- (b) (Maior elemento)

Teorema 4.29. Dado $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{N}$, as seguintes afirmações são equivalentes.

1. X é finito;

2. X é limitado;
3. X possui um maior elemento.

Prova. Ver [18], página 32, teorema 5. Para finito sse limitado, ver [17], página 5, corolário 2.

4.4 Conjuntos Infinitos

Definição 4.30.

- (a) Um conjunto X é *infinito* quando ele não é finito, isto é, quando $X \neq \emptyset$ e quando não existe uma bijeção $f : [n] \rightarrow X$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- (b) Diremos que $X \subseteq \mathbb{N}$ é *ilimitado* quando ele não é limitado, isto é, quando para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $p \in X$ tal que $p > n$.

Corolário 4.31. \mathbb{N} é infinito.

Proposição 4.32. Segue como contrapositiva do teorema (4.29): um conjunto $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{N}$ é infinito se, e somente se, não é limitado. Como \mathbb{N} não é limitado, ele é infinito.

Teorema 4.33. Se X é um conjunto infinito, então existe uma função $f : \mathbb{N} \rightarrow X$ injetora.

Prova.

Corolário 4.34. Um conjunto X é infinito se, e somente se, existe uma bijeção $f : X \rightarrow Y \subsetneq X$.

Prova.

Corolário 4.35.

- (a) Seja $f : X \rightarrow Y$ uma função injetora. Se X é infinito, então Y é infinito.
- (b) Seja $f : X \rightarrow Y$ uma função sobrejetora. Se Y é infinito, então X é infinito.

Prova. Basta ver que essas afirmações são equivalentes às afirmações do resultado (4.27) por contrapositiva.

Proposição 4.36. Se X é um conjunto finito e Y é um conjunto infinito, então existem funções $f : X \rightarrow Y$ injetora e $g : Y \rightarrow X$ sobrejetora.

Prova.

4.5 Conjuntos Enumeráveis e Não-Enumeráveis

Definição 4.37. Um conjunto X é dito *enumerável* quando é finito ou quando existe uma bijeção $f : \mathbb{N} \rightarrow X$. A função f é chamada de uma *enumeração* dos elementos de X .

Teorema 4.38. Todo subconjunto de \mathbb{N} é enumerável.

Prova. Seja $X \subseteq \mathbb{N}$. Se X é finito, nada há de ser provado.

Corolário 4.39. (a) Seja $f : X \rightarrow Y$ uma função injetora. Se Y é enumerável, então X é enumerável.

(b) Seja $f : X \rightarrow Y$ uma função sobrejetora. Se X é enumerável, então Y é enumerável.

Prova.

Corolário 4.40. (a) O produto cartesiano de um número finito de conjuntos enumeráveis é enumerável.

(b) A união de uma família enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável.

4.6 Números Inteiros

Definição 4.41. O conjunto dos números inteiros é definido como

$$\mathbb{Z}_{\mathbb{F}} := \mathbb{N}_{\mathbb{F}} \cup \{0\} \cup -\mathbb{N}_{\mathbb{F}}.$$

Proposição 4.42.

- (a) Para quaisquer $m, n \in \mathbb{Z}$ tem-se $m + n \in \mathbb{Z}$.
- (b) Para quaisquer $m, n \in \mathbb{Z}$ tem-se $m - n \in \mathbb{Z}$ e $n - m \in \mathbb{Z}$.
- (c) Para quaisquer $m, n \in \mathbb{Z}$ tem-se $m \cdot n \in \mathbb{Z}$.

Prova.

Proposição 4.43. Para todo $x \in \mathbb{F}$ existe um único $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n \leq x < n + 1$.

4.6.1 Teoria Elementar dos Números

4.7 Números Racionais

(Racionais) Sendo $y, w \neq 0$, temos que $x \cdot w = y \cdot z \Leftrightarrow x \cdot y^{-1} = z \cdot w^{-1}$.

Definição 4.44. O conjunto dos números racionais é definido como

$$\mathbb{Q}_{\mathbb{F}} := \{x \in \mathbb{F} : \exists a \exists b (a \in \mathbb{Z}_{\mathbb{F}} \wedge b \in \mathbb{Z}_{\mathbb{F}} \wedge b \neq 0 \wedge x = a \cdot b^{-1})\}.$$

Proposição 4.45. Para quaisquer $p, q \in \mathbb{Q}$, temos $p + q \in \mathbb{Q}$ e $p \cdot q \in \mathbb{Q}$.

Prova.

Definição 4.46. Dado $x \in \mathbb{R}$, definimos, para cada $n \in \mathbb{N}$, $x^1 := x$ e $x^{n+1} := x^n \cdot x$, e sendo $x \neq 0$, definimos, para cada $n \in \mathbb{N}_0$, $x^0 := 1$ e $x^{-n} := \frac{1}{x^n}$.

Teorema 4.47. (a) Seja $n \in \mathbb{N}$. Para todo $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ existe um único $b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que $b^n = a$. Notação: $b := \sqrt[n]{a}$

(b) Seja $n \in \mathbb{N}$ ímpar. Para todo $a \in \mathbb{R}$ existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $b^n = a$. Notação: $b := \sqrt[n]{a}$.

Prova.

Definição 4.48. (a) Seja $n \in \mathbb{N}$. Dado $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, definimos $x^{\frac{1}{n}} := \sqrt[n]{x}$. Se n for ímpar, dado $x \in \mathbb{R}$, definimos $x^{\frac{1}{n}} := \sqrt[n]{x}$.

(b) Seja $n \in \mathbb{N}$. Dado $x \in \mathbb{R}$, definimos $x^{-\frac{1}{n}} := \frac{1}{x^{\frac{1}{n}}}$, desde que $x^{\frac{1}{n}} \neq 0$ esteja definido.

(c) Seja $r := \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}_{\neq 0}$. Dado $x \in \mathbb{R}$, definimos $x^r := \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p$, desde que $x^{\frac{1}{q}}$ esteja definido.

Teorema 4.49. (a) Se $a, b \in \mathbb{R}$ cumprem $a < b$, então existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $a < r < b$.

(b) Se $a, b \in \mathbb{R}$ cumprem $a < b$, então existe $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tal que $a < s < b$.

Prova.

4.8 Números Reais

Definição 4.50. Sejam $(\mathbb{F}, +, \cdot, \leq)$ um corpo ordenado e $S \in \mathcal{P}(\mathbb{F})_{\neq \emptyset}$.

(a) Dizemos que S é

- i. *limitado superiormente* se existe $M \in \mathbb{F}$ tal que $x \leq M$ para todo $x \in S$. Nesse caso, dizemos que M é uma *cota superior* de S .
- ii. *limitado inferiormente* se existe $m \in \mathbb{F}$ tal que $m \leq x$ para todo $x \in S$. Nesse caso, dizemos que m é uma *cota inferior* de S .

(b) Dizemos que $\alpha \in \mathbb{F}$ é o

- i. *supremo* de S se α é uma cota superior de S e $\alpha \leq x$ para toda cota superior $x \in \mathbb{F}$ de S . Denotamos α por $\sup S$.
- ii. *ínfimo* de S se α é uma cota inferior de S e $x \leq \alpha$ para toda cota inferior $x \in \mathbb{F}$ de S . Denotamos α por $\inf S$.

Proposição 4.51. Sejam $(\mathbb{F}, +, \cdot, \leq)$ um corpo ordenado e $S \in \mathcal{P}(\mathbb{F})_{\neq \emptyset}$.

(a) O supremo de S , quando existe, é único.

(b) O ínfimo de S , quando existe, é único.

Prova.

(a) Sejam α e β supremos de S . Como α é a menor das cotas superiores de S e β é uma cota superior de S , temos $\alpha \leq \beta$. Como β é a menor das cotas superiores de S e α é uma cota superior de S , temos $\beta \leq \alpha$. Logo $\alpha = \beta$. ■

(b) Segue analogamente. ■

Teorema 4.52. Sejam $(\mathbb{F}, +, \cdot, \leq)$ um corpo ordenado e $S \in \mathcal{P}(\mathbb{F})_{\neq \emptyset}$.

(a) Suponha que existe $\sup S$.

- i. Se $\beta \in \mathbb{F}$ e $\beta < \sup S$, então existe $x \in S$ tal que $x > \beta$.
- ii. Para todo $\epsilon \in \mathbb{F}_{>0}$ existe $x \in S$ tal que $\sup S - \epsilon < x$.

(b) Suponha que existe $\inf S$.

- i. Se $\beta \in \mathbb{F}$ e $\inf S < \beta$, então existe $x \in S$ tal que $x < \beta$.
- ii. Para todo $\epsilon \in \mathbb{F}_{>0}$ existe $x \in S$ tal que $x < \inf S + \epsilon$.

Prova.

(a) Segue facilmente por contradição.

- i. Do contrário, seria $x \leq \beta < \sup S$ para todo $x \in S$, de modo que β seria uma cota superior de S menor que $\sup S$, um absurdo. ■

- ii. Do contrário, existiria $\epsilon \in \mathbb{F}_{>0}$ tal que $x \leq \sup S - \epsilon < \sup S$ para todo $x \in S$, de modo que $\sup S - \epsilon$ seria uma cota superior de S menor que $\sup S$, um absurdo. ■

(b) Segue analogamente. ■

Definição 4.53. Um corpo ordenado \mathbb{F} é *completo* se todo subconjunto não vazio de \mathbb{F} limitado superiormente possui supremo em \mathbb{F} .

Corolário 4.54. Um corpo ordenado \mathbb{F} é *completo* se, e somente se, todo subconjunto não vazio de \mathbb{F} limitado inferiormente possui ínfimo em \mathbb{F} .

Prova. Ver [22], teorema 1-10, página 32. Ver [21], corolário 1.12, página 13. ■

Proposição 4.55. Todo corpo ordenado completo é arquimédiano.

Prova. Provemos que em todo corpo ordenado completo \mathbb{F} o conjunto $\mathbb{N}_{\mathbb{F}}$ é ilimitado superiormente. Daí, pelo teorema (4.22), seguirá que \mathbb{F} é arquimédiano.

Suponha que $\mathbb{N}_{\mathbb{F}}$ seja limitado superiormente. Como $\mathbb{N}_{\mathbb{F}} \in \mathcal{P}(\mathbb{F})_{\neq \emptyset}$, existe $a := \sup \mathbb{N}_{\mathbb{F}}$. Por (4.52), para $\epsilon = 1$ existe $n \in \mathbb{N}_{\mathbb{F}}$ tal que $a - 1 < n$, isto é, $a < n + 1$, e como $n + 1 \in \mathbb{N}_{\mathbb{F}}$, temos uma contradição. ■

Teorema 4.56. Existe um corpo ordenado completo.

Observação 4.57. Veremos mais a frente que, a menos de isomorfismos, existe um único corpo ordenado completo. Ele é denotado por \mathbb{R} e seus elementos são chamados de *números reais*.

Propriedades do Supremo e do Ínfimo

Prova.

Capítulo 5

Números Reais como na Álgebra

Definição 5.1 (Grupo).

- (a) Um par $(G, *)$ é um *grupo* se no conjunto $G \neq \emptyset$ existe uma operação $* : G \times G \rightarrow G$ para a qual
- G1: $x * (y * z) = (x * y) * z$ para quaisquer $x, y, z \in G$;
 - G3: existe $e \in G$ tal que $x * e = x = e * x$ para todo $x \in G$;
 - G4: para cada $x \in G$ existe $y \in G$ tal que $x * y = e = y * x$.
- (b) Um grupo $(G, *)$ é *comutativo*, ou *abeliano*, se
- G2: $x * y = y * x$ para quaisquer $x, y \in G$,

Observação 5.2. As propriedades descritas em G1–G4 se chamam, respectivamente, *associatividade*, *comutatividade*, existência de um *elemento neutro* e *inversibilidade* (ou existência de *inversos operativos*).

Proposição 5.3. Seja $(G, *)$ um grupo.

- (a) O elemento neutro de $*$ é único.
(b) O inverso de cada elemento de G é único.

Prova.

- (a) Se $e' \in G$ é um elemento neutro de $*$, então

$$e = e * e' = e' * e = e',$$

como havíamos afirmado. ■

- (b) Segue analogamente. ■

Anéis

Definição 5.4. Uma tripla $(A, +, \cdot)$ é um *anel* se no conjunto $A \neq \emptyset$ existem duas operações, $+ : A \times A \rightarrow A$ e $\cdot : A \times A \rightarrow A$, para as quais

- A1: $a + (b + c) = (a + b) + c$ para quaisquer $a, b, c \in A$;
- A2: $a + b = b + a$ para quaisquer $a, b \in A$;
- A3: existe $0 \in A$ tal que $a + 0 = a$ para todo $a \in A$;
- A4: para cada $a \in A$ existe $b \in A$ tal que $a + b = 0$;
- M1: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ para quaisquer $a, b, c \in A$;
- AM: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ e $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ para quaisquer $a, b, c \in A$.

Proposição 5.5. Seja $(A, +, \cdot)$ um anel.

- (a) O elemento neutro 0 de $+$ é único.
- (b) (Lei do corte) Para quaisquer $a, b, c \in A$, vale
 - i. $a + c = b + c \Rightarrow a = b$;
 - ii. $a + b = a \Rightarrow b = 0$.
- (c) $a \cdot 0 = 0$ para todo $a \in A$.

Prova.

- (a) Se $0' \in A$ é um elemento neutro de $+$, então

$$0' = 0' + 0 = 0 + 0' = 0,$$

conforme afirmado. ■

- (b)

- (c) Observando que $a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$, somando $-(a \cdot 0)$ aos dois lados de $a \cdot 0 = a \cdot 0 + a \cdot 0$, segue que $0 \cdot a = 0$. ■

Definição 5.6. Um anel $(A, +, \cdot)$ é um *anel comutativo* se

- M2: $a \cdot b = b \cdot a$ para quaisquer $a, b \in A$.

Definição 5.7. Um anel $(A, +, \cdot)$ é um *anel com unidade* se

- M3: existe $1 \in A_{\neq 0}$ tal que $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ para todo $a \in A$.

Proposição 5.8. Seja $(A, +, \cdot)$ um anel com unidade.

- (a) O elemento neutro 1 de \cdot é único.

(b) (Regras dos sinais) Para quaisquer $a, b \in A$, vale

- i. $(-1) \cdot a = -a$;
- ii. $-(-a) = a$;
- iii. $(-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$;
- iv. $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$.

Prova.



Definição 5.9. Um anel comutativo com unidade $(A, +, \cdot)$ é um *domínio de integridade* se

- M4: $a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$ para quaisquer $a, b \in A$.

Proposição 5.10. Seja $(A, +, \cdot)$ um domínio de integridade.

(a) (Leis do corte) Para quaisquer $a, b, c \in A$, com $c \neq 0$,

- i. $a \cdot c = b \cdot c \Rightarrow a = b$;
- ii. $a \cdot b = a \Rightarrow a = 0 \vee b = 1$;
- iii. $a^2 = \begin{cases} 0 & \Leftrightarrow a = 0 \\ 1 & \Leftrightarrow a = 1 \text{ ou } a = -1 \\ a & \Leftrightarrow a = 0 \text{ ou } a = 1 \end{cases}$.

Prova.



Definição 5.11. Um anel comutativo com unidade $(A, +, \cdot)$ é um *corpo* se

- M5: para cada $a \in A_{\neq 0}$ existe $b \in A$ tal que $a \cdot b = 1$.

Proposição 5.12. Todo corpo é um domínio de integridade.



Prova.

Observação 5.13. Para simplificar a linguagem, um anel comutativo com unidade será chamado simplesmente de anel.

Definição 5.14. Um anel $(A, +, \cdot)$ é um *anel ordenado* se existe uma relação de ordem total $\leq \subseteq A \times A$ tal que

- OA: $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$ para quaisquer $a, b, c \in A$;
- OM: $a \leq b \Rightarrow a \cdot c \leq b \cdot c$ para quaisquer $a, b, c \in A$ com $0 \leq c$.

Proposição 5.15. Se $(A, +, \cdot, \leq)$ é um anel ordenado e $a, b, c, d \in A$, então

- (a)** $a \geq 0 \Rightarrow -a \leq 0$ e $a \leq 0 \Rightarrow -a \geq 0$;
- (b)** $a + c \leq b + c \Rightarrow a \leq b$;

- (c) $a \leq b, c \leq d \Rightarrow a + c \leq b + d;$
- (d) $a \leq b, c \leq 0 \Rightarrow a \cdot c \geq b \cdot c;$
- (e) $a \geq 0, b \leq 0 \Rightarrow a \cdot b \leq 0$ e $a \leq 0, b \leq 0 \Rightarrow a \cdot b \geq 0;$
- (f) $a^2 \geq 0, 1 > 0$ e $-1 < 0.$

Prova.

Definição 5.16. Seja $(A, +, \cdot, \leq)$ um anel ordenado. O *valor absoluto* de $a \in A$ é definido como

$$|a| := \begin{cases} a, & \text{se } a \geq 0 \\ -a, & \text{se } a < 0 \end{cases}.$$

Proposição 5.17. Seja $(A, +, \cdot, \leq)$ um anel ordenado. Para quaisquer $a, b \in A$, vale

- (a) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|.$
- (b) $-|a| \leq a \leq |a|.$
- (c) $|a| \leq b \Leftrightarrow -b \leq a \leq b.$
- (d) $||a| - |b|| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|.$

Prova.

■

Definição 5.18. Seja $(A, +, \cdot, \leq)$ um anel ordenado.

- (a) Um subconjunto $X \subseteq A$ é
 - i. *limitado inferiormente* se existe $a \in A$ tal que $a \leq x$ para todo $x \in X$;
 - ii. *limitado superiormente* se existe $a \in A$ tal que $a \geq x$ para todo $x \in X$.
- (b) Um subconjunto $X \subseteq A$ tem um
 - i. *menor elemento* se existe $a \in X$ tal que $a \leq x$ para todo $x \in X$;
 - ii. *maior elemento* se existe $a \in X$ tal que $a \geq x$ para todo $x \in X$.

Proposição 5.19. Seja $(A, +, \cdot, \leq)$ um domínio ordenado. Todo subconjunto não vazio de A , limitado inferiormente, possui um menor elemento se, e somente se, todo subconjunto não vazio de A , limitado superiormente, possui um maior elemento.

Prova.

■

Definição 5.20. Um domínio ordenado $(A, +, \cdot, \leq)$ é um *domínio bem ordenado* se

- PBO: todo subconjunto não vazio de A , limitado inferiormente, possui um menor elemento.

Teorema 5.21. Existe um único domínio bem ordenado.

Teorema 5.22. Seja $(A, +, \cdot, \leq)$ um domínio bem ordenado.

(a) Para quaisquer $a, b \in A$, vale

- $a > 0 \Rightarrow a \geq 1$;
- $a > b \Rightarrow a \geq b + 1$;
- $b \neq 0 \Rightarrow |a \cdot b| \geq |a|$.

(b) Para quaisquer $a, b \in A$, com $b \neq 0$, existe $n \in A$ tal que $n \cdot b \geq a$.

Prova.

■

5.1 Homomorfismos

Definição 5.23.

- Um *homomorfismo de anéis* $(A, +, \cdot)$ e $(B, +, \cdot)$ é uma função $f : A \rightarrow B$ tal que $f(a + b) = f(a) + f(b)$ e $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$ para quaisquer $a, b \in A$.
- Um *homomorfismo de anéis com unidade* $(A, +, \cdot)$ e $(B, +, \cdot)$ é um homomorfismo $f : A \rightarrow B$ tal que $f(1_A) = 1_B$.
- Um *homomorfismo de anéis ordenados* $(A, +, \cdot, \leq)$ e $(B, +, \cdot, \leq)$ é um homomorfismo $f : A \rightarrow B$ tal que $a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$ para quaisquer $a, b \in A$.

Isso é denotado por $A \cong B$.

Parte III

Análise Real I

Capítulo 6

Sequências

Definição 6.1. Uma *sequência numérica* é qualquer função $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada número natural n um número real $x_n := x(n)$ (isto é, $n \mapsto x_n$), que será chamado de *n-ésimo termo* da sequência. Escreveremos $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou (x_n) para indicar a sequência $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ cujo *n-ésimo termo* é $x_n \in \mathbb{R}$.

Definição 6.2. Uma sequência (x_n) é

- i. *crescente* se $n > m \Rightarrow x_n \geq x_m$;
- ii. *decrescente* se $n > m \Rightarrow x_n \leq x_m$;
- iii. *estritamente crescente* se $n > m \Rightarrow x_n > x_m$;
- iv. *estritamente decrescente* se $n > m \Rightarrow x_n < x_m$;
- v. *monótona* se cumprir exatamente uma das condições acima.

Definição 6.3. Uma sequência (x_n) é

- i. *limitada superiormente* se existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$;
- ii. *limitada inferiormente* se existe $m \in \mathbb{R}$ tal que $m \leq x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$;
- iii. *limitada* se é limitada superiormente e limitada inferiormente.
- iv. *ilimitada* se não é limitada.

Proposição 6.4. Uma sequência (x_n) é limitada se, e somente se, existe $L \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $|x_n| \leq L$ para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Prova. Absolutamente trivial.

Exemplo 6.5. A sequência (x_n) é limitada se, e somente se, a sequência $\{|x_n|\}$ é limitada.

Prova. Elão, início da seção 4.1.

Definição 6.6.

- (a) Uma sequência (x_n) é *convergente* e *converge* para $a \in \mathbb{R}$ se para todo $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \epsilon$. Isso é denotado por

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a.$$

- (b) Uma sequência (x_n) é *divergente* se não for convergente.

Observação 6.7. As notações “ $\lim_{n \in \mathbb{N}} x_n = a$ ”, “ $\lim x_n = a$ ”, “ $x_n \rightarrow a$ quando $n \rightarrow +\infty$ ” e “ $x_n \rightarrow a$ ” também são frequentemente usadas para indicar que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$.

Proposição 6.8 (Unicidade). Uma sequência convergente converge para um único limite.

Prova. Provemos que se a sequência (x_n) converge para $a \in \mathbb{R}$ e para $b \in \mathbb{R}$, então $a = b$.

Proposição 6.9. Toda sequência convergente é limitada.

Prova.

Teorema 6.10 (Convergência monótona).

- (a) Toda sequência crescente e limitada superiormente é convergente.
- (b) Toda sequência decrescente e limitada inferiormente é convergente.
- (c) Toda sequência monótona e limitada é convergente.

Prova. (a) Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência crescente e limitada superiormente. Como o conjunto $X := \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ é, por hipótese, não vazio e limitado superiormente, pela propriedade do supremo existe $\sup X$. Como, para todo $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, $\sup X - \epsilon$ não é uma cota superior de X , existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sup X - \epsilon < x_{n_0} \leq \sup X$. Como $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é crescente, para todo $n \in \mathbb{N}$, se $n > n_0$, então $\sup X - \epsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq \sup X < \sup X + \epsilon$. Temos então que $x_n \rightarrow \sup X$, isto é, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para $\sup X$. ■

(b) Segue analogamente: sendo $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência decrescente e limitada inferiormente, basta provar que $x_n \rightarrow \inf \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Definição 6.11. Uma *subsequência* de uma sequência $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $n \mapsto x_n$ é qualquer composição $x \circ n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, onde $n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ dada por $k \mapsto n_k$ é

uma sequência estritamente crescente de números naturais. A subsequência de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida por $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ será denotada por $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$.

Proposição 6.12. Se uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para $a \in \mathbb{R}$, então toda subsequência $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ converge para a .

Prova.

Teorema 6.13. (Bolzano-Weierstrass) Toda sequência limitada possui uma subsequência convergente.

Prova. Pelo teorema (6.10), basta mostrar que toda sequência possui uma subsequência monótona. Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência limitada. Um índice $k \in \mathbb{N}$ é dito *básico* quando $x_p \geq x_k$ para todo $p > k$, isto é, x_k é menor ou igual aos termos que o sucedem.

- Se existem infinitos índices básicos $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$, então $x_{n_1} \leq x_{n_2} \leq x_{n_3} \leq \dots$, de modo que a subsequência $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ é crescente; como ela é limitada, pelo teorema (6.10), ela é convergente.
- Por outro lado, se o número de índices básicos é finito, seja $n_1 \in \mathbb{N}$ maior que todos eles (se o número de índices básicos for 0, qualquer n_1 funciona). Como n_1 não é um índice básico, existe um índice $n_2 \in \mathbb{N}_{>n_1}$ tal que $x_{n_2} < x_{n_1}$. Como n_2 não é um índice básico, existe um índice $n_3 \in \mathbb{N}_{>n_2}$ tal que $x_{n_3} < x_{n_2}$. Prosseguindo deste modo, obtemos uma subsequência $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ estritamente decrescente; como ela é limitada, pelo teorema (6.10), ela é convergente.

Com isso, vemos que toda sequência possui uma subsequência monótona, e como a sequência original é limitada, a subsequência monótona também é (proposição (6.12)), sendo, portanto, convergente.

Capítulo 7

Limites e Continuidade

7.1 Topologia da Reta

Definição 7.1. Uma vizinhança de um ponto $a \in \mathbb{R}$ com raio $r \in \mathbb{R}_{>0}$ é definida como

$$V_r(a) := \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < r\}.$$

Corolário 7.2. Para quaisquer $a \in \mathbb{R}$ e $r \in \mathbb{R}_{>0}$, temos $V_r(a) = (a - r, a + r)$.

Definição 7.3. Um ponto de acumulação de um subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ é um ponto $a \in \mathbb{R}$ tal que

$$V_\delta(a) \cap A_{\neq a} \neq \emptyset$$

para todo $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$. O conjunto de todos os pontos de acumulação de A é denotado por A' .

Proposição 7.4. Seja $A \subseteq \mathbb{R}$.

- (a) $a \in A'$ se, e somente se, para todo $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ existe $x \in A$ tal que $0 < |x - a| < \delta$.
- (b) $a \in A'$ se, e somente se, $0 \in B'$, onde $B := \{h \in \mathbb{R}_{\neq 0} : a + h \in A\}$.

Prova.

- (a) (\Rightarrow) blabla.
(\Leftarrow) blabla. ■
- (b) (\Rightarrow) Para que 0 seja um ponto de acumulação de B , para todo $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ deve existir $h \in B$ tal que $0 < |h - 0| < \delta$. Bem, como a é um ponto de acumulação de A , para todo $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ existe $x \in A$ tal que $0 < |x - a| < \delta$.

Pois tomando $h := x - a$, temos que $x = a + h$, e como $x \in A$, temos $a + h \in A$, de modo que $h \in B$. Daí, segue a conclusão.

(\Leftarrow) Para que a seja um ponto de acumulação de A , para todo $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ deve existir $x \in A$ tal que $0 < |x - a| < \delta$. Bem, como 0 é ponto de acumulação de B , para todo $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ existe $h \in B$ tal que $0 < |h| < \delta$. Pois tome $x := a + h$: como $h \in B$, temos que $a + h \in A$, de modo que $x \in A$. Daí, segue a conclusão. ■

Definição 7.5.

- (a) Diremos que $a \in \mathbb{R}$ é um *ponto de acumulação à direita* de $A \subseteq \mathbb{R}$ se $(a, a + \delta) \cap A \neq \emptyset$ para todo $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$.
- (b) Diremos que $a \in \mathbb{R}$ é um *ponto de acumulação à esquerda* de $A \subseteq \mathbb{R}$ se $(a - \delta, a) \cap A \neq \emptyset$ para todo $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$.

7.2 Limites

Definição 7.6 (Limite). Uma função $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tem *limite* $L \in \mathbb{R}$ quando x *tende* a $a \in A'$ se para todo $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existe $\delta = \delta(\epsilon, a) \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

para todo $x \in A$. Isso é denotado por

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L.$$

Proposição 7.7 (Unicidade).

Prova.

Definição 7.8 (Limites laterais).

- (a) Diremos que uma função $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tem *limite lateral à direita* $L \in \mathbb{R}$ quando x *tende* ao ponto de acumulação à direita $a \in \mathbb{R}$ de A , indicando isso por

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L,$$

se para todo $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existir $\delta = \delta(\epsilon, a) \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que

$$a < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

para todo $x \in A$.

- (b) Diremos que uma função $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tem *limite lateral à esquerda* $L \in \mathbb{R}$ quando x *tende* ao ponto de acumulação à esquerda $a \in \mathbb{R}$ de A , indicando isso por

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L,$$

se para todo $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existir $\delta = \delta(\epsilon, a) \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que

$$a - \delta < x < a \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

para todo $x \in A$.

Proposição 7.9 (Unicidade).

Prova.

Teorema 7.10 (Bilateral \Leftrightarrow Laterais).

Prova.

Definição 7.11. (Limites no infinito)

- (a) Diremos que uma função $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, onde A é ilimitado superiormente, tem limite $L \in \mathbb{R}$ quando x cresce *indefinidamente*, ou *tende ao infinito positivo*, indicando isso por

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L,$$

se para todo $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existir $\delta = \delta(\epsilon) \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que

$$x > \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

para todo $x \in A$.

- (b) Diremos que uma função $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, onde A é ilimitado inferiormente, tem limite $L \in \mathbb{R}$ quando x decresce *indefinidamente*, ou *tende ao infinito negativo*, indicando isso por

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L,$$

se para todo $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existir $\delta = \delta(\epsilon) \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que

$$x < -\delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

para todo $x \in A$.

Teorema 7.12. (a) (Unicidade do Limite) Seja f uma função. O limite de f quando $x \rightarrow p, p^\pm, \pm\infty$, quando existe, é único, isto é, se $\lim f(x) = L_1$ e $\lim f(x) = L_2$, então $L_1 = L_2$.

(b) (Bilateral \Leftrightarrow Laterais) Sejam f uma função e p um número real. Se existem números reais a e b , com $a < p < b$, tais que $]a, p[\cup]p, b[\subset D_f$, então

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow p^+} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow p^-} f(x).$$

(c) (Cálculo de Limites) Sejam f e g funções para as quais existe $r > 0$ tal que $f(x) = g(x)$ sempre que $0 < |x - p| < r$ (caso $x \rightarrow p$), ou $p < x < p + r$ (caso $x \rightarrow p^+$), ou $p - r < x < p$ (caso $x \rightarrow p^-$), ou $x > r$ (caso $x \rightarrow +\infty$), ou $x < -r$ (caso $x \rightarrow -\infty$). Nestas condições, se $\lim f(x) = L \in \mathbb{R}$, então $\lim g(x) = L$.

(d) (do Confronto) Sejam f , g e h funções para as quais existe $r > 0$ tal que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ sempre que $0 < |x - p| < r$ (caso $x \rightarrow p$), ou $p < x < p + r$ (caso $x \rightarrow p^+$), ou $p - r < x < p$ (caso $x \rightarrow p^-$), ou $x > r$ (caso $x \rightarrow +\infty$), ou $x < -r$ (caso $x \rightarrow -\infty$). Nestas condições, se $\lim f(x) = \lim h(x) = L \in \mathbb{R}$, então $\lim g(x) = L$.

(e) (Limites Básicos) Dados $a, p \in \mathbb{R}$, temos que

$$\lim_{x \rightarrow p} a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a = a; \quad \lim_{x \rightarrow p} x = p; \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Prova. **(a)** Consideremos o caso em que $x \rightarrow p$. Como $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L_2$, temos por definição que para todo $\epsilon > 0$ existem $\delta_1, \delta_2 > 0$ para os quais

$$\begin{aligned} 0 < |x - p| < \delta_1 &\Rightarrow |f(x) - L_1| < \frac{\epsilon}{2}; \\ 0 < |x - p| < \delta_2 &\Rightarrow |f(x) - L_2| < \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Tomando $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$, temos que para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - L_1| + |f(x) - L_2| < \epsilon.$$

Com isso, temos que, para todo $\epsilon > 0$,

$$\begin{aligned} |L_1 - L_2| &= |L_1 - f(x) + f(x) - L_2| \\ &\leq |L_1 - f(x)| + |f(x) - L_2| \\ &= |f(x) - L_1| + |f(x) - L_2| \\ &< \epsilon, \end{aligned}$$

onde $L_1 = L_2$. ■

(b)

(c)

(d) Consideremos o caso em que $x \rightarrow p$. Como, por hipótese, $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow p} h(x)$, temos

$$\begin{aligned}\forall \epsilon > 0, \exists \delta_1 > 0 : 0 < |x - p| < \delta_1 \Rightarrow L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon; \\ \forall \epsilon > 0, \exists \delta_2 > 0 : 0 < |x - p| < \delta_2 \Rightarrow L - \epsilon < h(x) < L + \epsilon.\end{aligned}$$

Pois tome $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, r\}$; daí, vem

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < |x - p| < \delta \Rightarrow L - \epsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < L + \epsilon,$$

e então

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < |x - p| < \delta \Rightarrow L - \epsilon < g(x) < L + \epsilon,$$

onde $\lim_{x \rightarrow p} g(x) = L$.

Teorema 7.13. (Propriedades Operatórias) Se f_1, f_2, \dots, f_n são funções tais que $\lim f_1(x) = L_1$, $\lim f_2(x) = L_2, \dots$, $\lim f_n(x) = L_n$, em que $x \rightarrow p, p^\pm, \pm\infty$, então:

(a) O limite da soma é igual à soma dos limites:

$$\lim \left[\sum_{i=1}^n f_i(x) \right] = \sum_{i=1}^n [\lim f_i(x)] = \sum_{i=1}^n L_i = L_1 + L_2 + \dots + L_n.$$

(b) O limite do produto é igual ao produto dos limites:

$$\lim \left[\prod_{i=1}^n f_i(x) \right] = \prod_{i=1}^n [\lim f_i(x)] = \prod_{i=1}^n L_i = L_1 \cdot L_2 \cdot \dots \cdot L_n.$$

(c) O limite do quociente é igual ao quociente dos limites, desde que o denominador seja diferente de 0:

$$\lim \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim f_1(x)}{\lim f_2(x)} = \frac{L_1}{L_2}. \quad (L_2 \neq 0)$$

Prova.

Teorema 7.14. (Composição de Limites) Sejam f e g funções tais que $Im_f \subset D_g$ e $\lim f(x) := a$, com $x \rightarrow p, \pm\infty$.

(a) Se $\lim_{u \rightarrow a} g(u) = g(a)$, então

$$\lim g[f(x)] = \lim_{u \rightarrow a} g(u),$$

sendo $u := f(x)$.

(b) Se $\lim_{u \rightarrow a} g(u) := L$ e $a \notin D_g$, então

$$\lim g[f(x)] = \lim_{u \rightarrow a} g(u),$$

sendo $u := f(x)$.

Prova.

Observação 7.15. Para o item (a) do teorema acima, como, por hipótese, $\lim_{u \rightarrow a} g(u) = g(a)$, podemos expressar o teorema como $\lim g[f(x)] = g[\lim f(x)]$.

Corolário 7.16. (a) (Conservação do sinal) Se $\lim_{x \rightarrow p} f(x) := L \neq 0$, então existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in D_f$, temos $0 < |x - p| < \delta \Rightarrow f(x) \neq 0$.

(b) Temos

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow p} f(x) = L &\Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} f(p + h) = L \\ &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow p} [f(x) - L] = 0 \\ &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow p} |f(x) - L| = 0. \end{aligned}$$

Prova. (a) Basta tomar $\epsilon = L$. ■

(b)

7.3 Continuidade

Definição 7.17 (Continuidade). Seja $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função.

(a) f é *contínua* em $a \in A$ se para todo $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existe $\delta = \delta(\epsilon, a) \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que

$$\forall x(x \in A \cap V_\delta(a) \Rightarrow f(x) \in V_\epsilon(f(a))),$$

ou ainda, equivalentemente,

$$\forall x(x \in A \wedge |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon).$$

- (b) f é contínua em $X \subseteq A$ se f é contínua em todos os pontos de X , isto é, se para cada $a \in X$ e todo $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon, a) > 0$ tal que

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

para todo $x \in A$.

- (c) f é uniformemente contínua em A se para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

para quaisquer $x, y \in A$.

Teorema 7.18. Uma função $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em $a \in A \cap A'$ se, e somente se, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Prova.

Teorema 7.19. Se f e g são funções contínuas em p , então as funções $f + g$ e $f \cdot g$ são contínuas em p ; e se $g(p) \neq 0$, então a função $\frac{f}{g}$ é contínua em p .

Prova. Segue como corolário do Teorema (7.13).

Proposição 7.20. (a) Seja $a \in \mathbb{R}$. A função constante $f(x) := a$ é contínua.

(b) A função identidade $f(x) := x$ é contínua.

(c) Toda função polinomial é contínua. E ainda, toda função racional é contínua.

Prova.

Teorema 7.21. Sejam $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : B \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções tais que $f(A) \subseteq B$. Se f é contínua em $a \in A$ e se g é contínua em $f(a) \in B$, então a função composta $g \circ f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em a .

Teorema 7.22. Sejam f e g funções tais que $Im_f \subset D_g$. Se f é contínua em p e g é contínua em $f(p)$, então a função composta $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$ é contínua em p .

Prova. Pois tome: $\lim_{x \rightarrow p} g[f(x)] = g\left[\lim_{x \rightarrow p} f(x)\right] = g[f(p)]$.

Teorema 7.23. (Intervalos) Sejam f uma função e $p \in D_f$ um número real.

(a) Se para todo $\epsilon > 0$ existir um intervalo aberto $]a, b[$, com $p \in]a, b[$, tal que $\forall x \in D_f : x \in]a, b[\Rightarrow |f(x) - f(p)| < \epsilon$, então f é contínua em p .

(b) Seja $r > 0$. Se para todo $0 < \epsilon < r$ existir um intervalo aberto I (como no

item anterior, com $p \in I$) tal que $\forall x \in D_f : x \in I \Rightarrow |f(x) - f(p)| < \epsilon$, então f é contínua em p .

Prova. (a) Segue imediatamente do seguinte fato: para todo intervalo $]a, b[$, existe $\delta > 0$ tal que $]p - \delta, p + \delta[\subset]a, b[$. Com efeito, basta tomar $\delta = \min\{b - p, p - a\}$. Com isso, escolhendo esse δ , temos que

$$x \in]p - \delta, p + \delta[\Rightarrow x \in]a, b[.$$

Como, por hipótese, $x \in]a, b[\Rightarrow |f(x) - f(p)| < \epsilon$, temos então que

$$x \in]p - \delta, p + \delta[\Rightarrow |f(x) - f(p)| < \epsilon.$$

Como $x \in]p - \delta, p + \delta[\Leftrightarrow |x - p| < \delta$, vemos que para todo $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que $|x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(p)| < \epsilon$, isto é, f é contínua em p . ■

(b) Pelo item anterior, se $\epsilon < r$, então nada há de ser provado. Temos que provar o resultado para todos os ϵ 's, isto é, falta provar o caso $\epsilon \geq r$.

Pois tome $\epsilon_1 < r$. Para esse ϵ_1 , existe (por hipótese) um intervalo aberto I tal que $x \in I \Rightarrow |f(x) - f(p)| < \epsilon_1$. Como $\epsilon_1 < \epsilon$, também vale

$$x \in I \Rightarrow |f(x) - f(p)| < \epsilon,$$

o que completa a prova.

Proposição 7.24 (Conservação do sinal). Seja $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em $a \in A$.

- (a) Se $f(a) > 0$, então existe $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in V_\delta(a) \cap A$.
- (b) Se $f(a) < 0$, então existe $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $f(x) < 0$ para todo $x \in V_\delta(a) \cap A$.

Prova.

- (a) Para $\epsilon = f(a)$ na definição de continuidade, existe $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que

$$\forall x (x \in V_\delta(a) \cap A \Rightarrow |f(x) - f(a)| < f(a)).$$

Observando que

$$|f(x) - f(a)| < f(a) \Leftrightarrow 0 = f(a) - f(a) < f(x) < 2f(a),$$

a conclusão segue. ■

- (b) Tomando $\epsilon = -f(a)$, segue analogamente. ■

7.4 Limites Infinitos

Definição 7.25. (Limites infinitos quando $x \rightarrow \pm\infty$) Seja f uma função.

(a) Suponha que existe um número real a tal que $]a, +\infty[\subset D_f$.

- i. Diremos que f cresce indefinidamente, ou tende ao infinito positivo, quando x tende ao infinito positivo, indicando $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, se para todo $\epsilon > 0$ existir $\delta > 0$, com $\delta > a$, tal que $x > \delta \Rightarrow f(x) > \epsilon$.
- ii. Diremos que f decresce indefinidamente, ou tende ao infinito negativo, quando x tende ao infinito positivo, indicando $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, se para todo $\epsilon > 0$ existir $\delta > 0$, com $\delta > a$, tal que $x > \delta \Rightarrow f(x) < -\epsilon$.

(b) Suponha que existe um número real a tal que $]-\infty, a[\subset D_f$.

- i. Diremos que f tende ao infinito positivo, quando x tende ao infinito negativo, indicando $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, se para todo $\epsilon > 0$ existir $\delta > 0$, com $-\delta < a$, tal que $x < -\delta \Rightarrow f(x) > \epsilon$.
- ii. Diremos que f tende ao infinito negativo, quando x tende ao infinito negativo, indicando $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, se para todo $\epsilon > 0$ existir $\delta > 0$, com $-\delta < a$, tal que $x < -\delta \Rightarrow f(x) < -\epsilon$.

Definição 7.26. (Limites infinitos quando $x \rightarrow p^\pm$) Seja f uma função e p um número real.

(a) Suponha que existe um número real b tal que $]p, b[\subset D_f$.

- i. Diremos que f tende ao infinito positivo, quando x tende a p , pela direita, indicando $\lim_{x \rightarrow p^+} f(x) = +\infty$, se para todo $\epsilon > 0$ existir $\delta > 0$, com $p + \delta < b$, tal que $p < x < p + \delta \Rightarrow f(x) > \epsilon$.
- ii. Diremos que f tende ao infinito negativo, quando x tende a p , pela direita, indicando $\lim_{x \rightarrow p^+} f(x) = -\infty$, se para todo $\epsilon > 0$ existir $\delta > 0$, com $p + \delta < b$, tal que $p < x < p + \delta \Rightarrow f(x) < -\epsilon$.

(b) Suponha que existe um número real a tal que $]a, p[\subset D_f$.

- i. Diremos que f tende ao infinito positivo, quando x tende a p , pela esquerda, indicando $\lim_{x \rightarrow p^-} f(x) = +\infty$, se para todo $\epsilon > 0$ existir $\delta > 0$, com $a < p - \delta$, tal que $p - \delta < x < p \Rightarrow f(x) > \epsilon$.

- ii. Diremos que f tende ao infinito negativo, quando x tende a p , pela esquerda, indicando $\lim_{x \rightarrow p^-} f(x) = -\infty$, se para todo $\epsilon > 0$ existir $\delta > 0$, com $a < p - \delta$, tal que $p - \delta < x < p \Rightarrow f(x) < -\epsilon$.

Definição 7.27. (Limites infinitos quando $x \rightarrow p$) Seja f uma função e p um número real. Suponha que existem números reais a e b , com $a < p < b$, tais que $]a, p[,]p, b[\subset D_f$.

- i. Diremos que f tende ao infinito positivo, quando x tende a p , indicando $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = +\infty$, se para todo $\epsilon > 0$ existir $\delta > 0$, com $a < p - \delta$ e $p + \delta < b$, tal que $0 < |x - p| < \delta \Rightarrow f(x) > \epsilon$.
- ii. Diremos que f tende ao infinito negativo, quando x tende a p , indicando $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = -\infty$, se para todo $\epsilon > 0$ existir $\delta > 0$, com $a < p - \delta$ e $p + \delta < b$, tal que $0 < |x - p| < \delta \Rightarrow f(x) < -\epsilon$.

Teorema 7.28. Seja f uma função e p um número real. Se existem números reais a e b , com $a < p < b$, tais que $]a, p[,]p, b[\subset D_f$, então

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \pm\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow p^+} f(x) = \pm\infty = \lim_{x \rightarrow p^-} f(x).$$

Prova.

Teorema 7.29. Os resultados a seguir valem para $x \rightarrow p$, $x \rightarrow p^\pm$ e $x \rightarrow \pm\infty$.

- (a) Se $\lim f(x) = \lim g(x) = \pm\infty$, então $\lim[f(x) + g(x)] = \pm\infty$ e $\lim[f(x)g(x)] = +\infty$.
- (b) Se $\lim f(x) = -\infty$ e $\lim g(x) = +\infty$, então $\lim[f(x)g(x)] = -\infty$.
- (c) Seja $\lim f(x) = L$. Se $\lim g(x) = \pm\infty$, então $\lim[f(x) + g(x)] = \pm\infty$.
- (d) Seja $\lim f(x) = L > 0$. Se $\lim g(x) = \pm\infty$, então $\lim[f(x)g(x)] = \pm\infty$.
- (e) Seja $\lim f(x) = L < 0$. Se $\lim g(x) = \pm\infty$, então $\lim[f(x)g(x)] = \mp\infty$.

Prova.

Proposição 7.30. (a) Seja $\lim f(x) = 0$, com $x \rightarrow p^\pm$. Se existe $r > 0$ tal que $f(x) > 0$ sempre que $p < x < p + r$, se $x \rightarrow p^+$, ou $p - r < x < p$, se $x \rightarrow p^-$, então $\lim \frac{1}{f(x)} = +\infty$.

(b) Sejam $\lim f(x) = L \neq 0$ e $\lim g(x) = 0$, com $x \rightarrow p^\pm$. Se existe $r > 0$ tal que $f(x) > 0$ sempre que $p < x < p + r$, se $x \rightarrow p^+$, ou $p - r < x < p$, se $x \rightarrow p^-$,

então ou $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$, ou $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$, ou $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ não existe.

Prova.

7.5 Limites e Sequências

Definição 7.31. (c) Diremos que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$

1. *diverge para $+\infty$* , indicando

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty,$$

se para todo $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n > \epsilon$.

2. *diverge para $-\infty$* , indicando

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = -\infty,$$

se para todo $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n < -\epsilon$.

Observação 7.32. (a) Note que as definições acima são análogas àquelas que demos aos limites no infinito de funções. Assim, os resultados sobre os limites da forma $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ também são válidos para os limites da forma $\lim_{x \rightarrow +\infty} x_n$.

(b) A notação “ $x_n \rightarrow a$ quando $n \rightarrow +\infty$ ” também é frequentemente usada para indicar $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$. Quando não houver confusão, podemos escrever simplesmente $x_n \rightarrow a$. Analogamente, também podemos escrever $x_n \rightarrow \pm\infty$ quando $n \rightarrow \infty$ ou, simplesmente, $x_n \rightarrow \pm\infty$.

Teorema 7.33. (Convergência Monótona)

(a) Toda sequência crescente e limitada superiormente é convergente.

(b) Toda sequência decrescente e limitada inferiormente é convergente.

Prova. **(a)** Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência crescente e limitada superiormente. Como o conjunto $X := \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ é, por hipótese, não vazio e limitado superiormente, pela propriedade do supremo existe $\sup X$. Como, para todo $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, $\sup X - \epsilon$ não é uma cota superior de X , existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sup X - \epsilon < x_{n_0} \leq \sup X$. Como $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é crescente, para todo $n \in \mathbb{N}$, se $n > n_0$, então $\sup X - \epsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq \sup X < \sup X + \epsilon$. Temos então que $x_n \rightarrow \sup X$, isto é, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para $\sup X$. ■

(b) Segue analogamente: sendo $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência decrescente e limitada inferiormente, basta provar que $x_n \rightarrow \inf \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Teorema 7.34. (Bolzano-Weierstrass) Toda sequência limitada possui uma subsequência convergente.

Prova. Pelo teorema (7.33), basta mostrar que toda sequência possui uma subsequência monótona. Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência limitada. Um índice $k \in \mathbb{N}$ é dito *básico* quando $x_p \geq x_k$ para todo $p > k$, isto é, x_k é menor ou igual aos termos que o sucedem.

- Se existem infinitos índices básicos $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$, então $x_{n_1} \leq x_{n_2} \leq x_{n_3} \leq \dots$, de modo que a subsequência $(x_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ é crescente; como ela é limitada, pelo teorema (7.33), ela é convergente.
- Por outro lado, se o número de índices básicos é finito, seja $n_1 \in \mathbb{N}$ maior que todos eles (se o número de índices básicos for 0, qualquer n_1 funciona). Como n_1 não é um índice básico, existe um índice $n_2 \in \mathbb{N}_{>n_1}$ tal que $x_{n_2} < x_{n_1}$. Como n_2 não é um índice básico, existe um índice $n_3 \in \mathbb{N}_{>n_2}$ tal que $x_{n_3} < x_{n_2}$. Prosseguindo deste modo, obtemos uma subsequência $(x_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ estritamente decrescente; como ela é limitada, pelo teorema (7.33), ela é convergente.

Com isso, toda sequência possui uma subsequência monótona, e como a sequência original é limitada, a subsequência monótona também é, sendo, portanto, convergente.

Teorema 7.35. Seja $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e $a \in A$. As seguintes afirmações são equivalentes:

- f é contínua em a ;
- toda sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, com $x_n \in A$ para todo $n \in \mathbb{N}$, satisfaz

$$x_n \rightarrow a \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(a).$$

Prova.

Teorema 7.36. Toda função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua em $[a, b]$ é uniformemente contínua em $[a, b]$.

Prova. Suponha que exista uma função f contínua em $[a, b]$ que não seja uniformemente contínua em $[a, b]$. Negando a definição de continuidade uniforme (7.17), isso significa que existe $\epsilon_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que, para todo $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$, existem $x, y \in [a, b]$ tais que $|x - y| < \delta$ e $|f(x) - f(y)| \geq \epsilon_0$. Em particular, escolhendo $\delta_n = \frac{1}{n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, existem $x_n, y_n \in [a, b]$ tais que $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ e

$|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon_0$; definimos, assim, duas sequências $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Como $x_n \in [a, b]$ para todo $n \in \mathbb{N}$, a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada, de modo que, pelo teorema de Bolzano-Weierstrass (7.34), existe uma subsequência $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ que converge para algum $L \in [a, b]$, isto é, $x_{n_k} \rightarrow L$. Considerando a subsequência correspondente $(y_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, temos, para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$|x_{n_k} - y_{n_k}| < \frac{1}{n_k}.$$

Como $n_k \rightarrow +\infty$ (pois $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de índices), temos que $\frac{1}{n_k} \rightarrow 0$, de modo que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} |x_{n_k} - y_{n_k}| = 0.$$

Com isso, sendo $x_{n_k} \rightarrow L$, só pode ser $y_{n_k} \rightarrow L$. Como f é contínua em $L \in [a, b]$, pelo teorema (7.35) temos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(L) \quad \text{e} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} f(y_{n_k}) = f(L),$$

de modo que $\lim_{k \rightarrow +\infty} |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| = 0$, o que contraria a hipótese de ser $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \epsilon_0 > 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Assim, uma tal função f não pode existir.

Teorema 7.37. Se $(a_n)_{n \geq 0}$ e $(b_n)_{n \geq 0}$ são sequências tais que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (b_n - a_n) = 0$ e, para todo $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$, então existe um único $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq \alpha \leq b_n$.

Prova. (Existência) A segunda condição nos diz que $(a_n)_{n \geq 0}$ é crescente (pois $a_n \leq a_{n+1}$) e limitada superiormente (pois todo b_n é uma cota superior dessa sequência). Analogamente, $(b_n)_{n \geq 0}$ é decrescente e limitada inferiormente. Assim, pelo Teorema (7.33), existem $\alpha := \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ e $\beta := \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$, e então $0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} (b_n - a_n) = \alpha - \beta$, donde $\alpha = \beta$. Ainda pelo Teorema (7.33), $\alpha = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, e então, para todo $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq \alpha$. Analogamente, $\alpha = \beta = \inf\{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, e então, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $\alpha \leq b_n$. Logo, existe um $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq \alpha \leq b_n$.

(Unicidade) Suponha que existe $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ para o qual também vale $a_n \leq \alpha_1 \leq b_n$. Daí, $0 \leq \alpha_1 - a_n \leq b_n - a_n$; observando que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} (b_n - a_n) = 0$, temos, pelo Teorema do Confronto, que $0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha_1 - a_n) = \alpha_1 - \alpha$, isto é, $\alpha_1 = \alpha$. Logo, é único o $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq \alpha \leq b_n$.

Corolário 7.38. (Intervalos Encaixantes) Se $([a_n, b_n])_{n \geq 0}$ for uma sequência de intervalos fechados em que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$, e $\lim_{n \rightarrow +\infty} (b_n - a_n) = 0$, então o conjunto $\bigcap_{n=0}^{\infty} [a_n, b_n]$ é unitário.

Prova. Este enunciado é equivalente ao enunciado do Teorema (7.37).

Corolário 7.39. Se $([a_n, b_n])_{n \geq 0}$ for uma sequência de intervalos encaixantes, com $a_n, b_n \geq 0$, então $([a_n^m, b_n^m])_{n \geq 0}$, com $m \geq 2$ natural, também será uma sequência de intervalos encaixantes.

Prova. Basta ver que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} [a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}] &\Leftrightarrow a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \\ &\Leftrightarrow a_n^m \leq a_{n+1}^m \leq b_{n+1}^m \leq b_n^m \\ &\Leftrightarrow [a_n^m, b_n^m] \supset [a_{n+1}^m, b_{n+1}^m], \end{aligned}$$

e ainda,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} (b_n^m - a_n^m) &= \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n \right)^m - \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \right)^m \\ &= \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \right)^m - \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \right)^m = 0. \end{aligned}$$

Logo, $([a_n^m, b_n^m])_{n \geq 0}$ é de intervalos encaixantes.

Ademais, se α é o real que satisfaz, para todo $k \in \mathbb{N}$, $a_k \leq \alpha \leq b_k$, então α^m é o real que satisfaz, para todo $k \in \mathbb{N}$, $a_k^m \leq \alpha^m \leq b_k^m$.¹

7.6 Teoremas do Valor Intermediário e de Weierstrass

Teorema 7.40 (Bolzano). Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a, b]$. Se $f(a) \cdot f(b) < 0$, então existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Prova. Suponha, sem perda de generalidade, que $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$. Pois tome

$$S := \{x \in [a, b] : f(x) \leq 0\}.$$

Temos $S \neq \emptyset$ pois $a \in S$ já que $f(a) < 0$. S é limitado pois $S \subsetneq [a, b]$. Assim, existe $p := \sup S$. Provemos que $f(p) = 0$. De fato, pela tricotomia de $<$ em \mathbb{R} , ou $f(p) > 0$, ou $f(p) < 0$, ou $f(p) = 0$.

- Se fosse $f(p) > 0$, pela conservação do sinal existiria $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in (p - \delta, p + \delta) \cap [a, b]$. Com isso, se $x \in S$, então $x \leq p - \delta$, de modo que $p - \delta$ é uma cota superior de S , uma contradição pois $p - \delta < p = \sup S$.

¹Prove! O argumento é semelhante ao argumento da unicidade no Teorema (7.37).

- Se fosse $f(p) < 0$, pela conservação do sinal existiria $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $f(x) < 0$ para todo $x \in (p - \delta, p + \delta) \cap [a, b]$. Em particular, se $x \in (p, p + \delta) \cap [a, b]$, então $f(x) > 0$ e $x \in S$, uma contradição pois $x > p = \sup S$.

Logo, só pode ser $f(p) = 0$. Além disso, como $p \in [a, b]$ e $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$, temos que $p \in (a, b)$. ■

Prova. Suponha, sem perda de generalidade, que $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$. Construamos uma sequência de intervalos $([a_n, b_n])_{n \geq 0}$ recursivamente do seguinte modo: $a_0 := a$, $b_0 := b$ e

$$\begin{cases} a_{n+1} := \frac{a_n + b_n}{2} \text{ e } b_{n+1} := b_n, & \text{se } f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) < 0 \\ a_{n+1} := a_n \text{ e } b_{n+1} := \frac{a_n + b_n}{2}, & \text{se } f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) \geq 0. \end{cases}$$

É fácil ver que, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} (b_n - a_n) = 0$. Com isso, $([a_n, b_n])_{n \geq 0}$ é uma sequência de intervalos encaixantes, de modo que existe um único $c \in [a, b]$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq c \leq b_n$. Em particular, temos que $f(a_n) < 0 \leq f(b_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Pela continuidade de f , $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = f(c)$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n) = f(c)$, e como $f(a_n) < 0 \leq f(b_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos, pelo Teorema do Confronto, que $f(c) = 0$.

Teorema 7.41 (Valor Intermediário). Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a, b]$.

- Se $f(a) \leq f(b)$, então para todo $\gamma \in [f(a), f(b)]$ existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = \gamma$.
- Se $f(b) \leq f(a)$, então para todo $\gamma \in [f(b), f(a)]$ existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = \gamma$.
- Para todo $\gamma \in [\min\{f(a), f(b)\}, \max\{f(a), f(b)\}]$ existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = \gamma$.

Prova. Pois tome $g(x) := f(x) - \alpha$, com $x \in [a, b]$. Como f é contínua em $[a, b]$, g também o é. Em particular, $g(a) = f(a) - \alpha < 0$ e $g(b) = f(b) - \alpha > 0$, de modo que, pelo Teorema do Anulamento, existe $c \in [a, b]$ tal que $g(c) = 0$, isto é, $f(c) = \alpha$.

Teorema 7.42. (Limitação) Se uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em $[a, b]$, então f é limitada em $[a, b]$.

Prova. Suponhamos, por absurdo, que f não seja limitada em $[a, b]$. Colocando

$a_0 := a$ e $b_0 := b$, existe $x_0 \in [a_0, b_0]$ tal que $|f(x_0)| > 0$. Suponha, indutivamente, que $[a_n, b_n] \subset [a_0, b_0]$ esteja bem definido, sendo f não limitada em $[a_n, b_n]$. Em particular, existe $x_n \in [a_n, b_n]$ tal que $|f(x_n)| > n$. Agora, defina $a_{n+1} := a_n$ e $b_{n+1} := \frac{a_n + b_n}{2}$, se f não for limitada em $\left[a_n, \frac{a_n + b_n}{2}\right]$, ou $a_{n+1} := \frac{a_n + b_n}{2}$ e $b_{n+1} := b_n$ se f não for limitada em $\left[\frac{a_n + b_n}{2}, b_n\right]$. No intervalo em que f não for limitada, existirá x_{n+1} nesse intervalo tal que $|f(x_{n+1})| > n + 1$.

Assim, fica construída uma sequência $([a_n, b_n])_{n \geq 0}$ de intervalos encaixantes tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in [a_n, b_n]$ com $|f(x_n)| > n$. Em particular, isso significa que $\lim_{n \rightarrow +\infty} |f(x_n)| = +\infty$. Agora, sendo c o único real tal que $a_n \leq c \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, pelo Teorema do Confronto temos que $x_n \rightarrow c$, e sendo f contínua em c , temos que $\lim_{n \rightarrow +\infty} |f(x_n)| = |f(c)|$, absurdo! Logo, f não ser limitada em $[a, b]$ nos leva a uma contradição, de modo que f é, então, limitada em $[a, b]$.

Teorema 7.43 (Valor Extremo, ou Weierstrass). Se uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em $[a, b]$, então existem $x_1, x_2 \in [a, b]$ tais que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ para todo $x \in [a, b]$.

Prova. Pelo teorema da limitação (7.42), f é limitada em $[a, b]$, de modo que o conjunto $A := \{f(x) : x \in [a, b]\}$ admite $M := \sup A$ e $m := \inf A$. Isto significa que $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in [a, b]$. Afirmamos que existe $x_2 \in [a, b]$ para o qual $M = f(x_2)$. De fato, se um tal x_2 não existisse, seria $f(x) < M$ para todo $x \in [a, b]$, de modo que a função $g(x) := \frac{1}{M - f(x)}$, com $x \in [a, b]$, seria contínua, mas não limitada, em $[a, b]$, o que é uma contradição (se g fosse limitada, então existiria $\gamma > 0$ tal que $0 < \frac{1}{M - f(x)} < \gamma$, donde $f(x) < M - \frac{1}{\gamma}$, de modo que M não seria supremo de A). Assim, não pode ser $f(x) < M$, e como $f(x) \leq M$, existirá $x_2 \in [a, b]$ para o qual $f(x_2) = M$. Analogamente, prova-se que existe $x_1 \in [a, b]$ para o qual $f(x_1) = m$.

7.7 Algumas Funções Transcendentais

7.7.1 Trigonometria, parte I

Teorema 7.44. Existe um único par de funções, $s, c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, para as quais

- $s(0) = 0$ e $c(0) = 1$;
- $\forall x \forall y : s(x - y) = s(x)c(y) - s(y)c(x)$ e $c(x - y) = c(x)c(y) + s(x)s(y)$;
- $\exists r > 0 : 0 < x < r \Rightarrow 0 < s(x) < x < \frac{s(x)}{c(x)}$.

A função s é chamada de *seno* e será indicada por $\sin x$, enquanto c é chamada de *cosseno* e será indicada por $\cos x$.

Prova.

Proposição 7.45. (a) (Identidade Fundamental) Temos $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(b) \sin é uma função ímpar, isto é, $\sin -x = -\sin x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, enquanto \cos é uma função par, isto é, $\cos -x = \cos x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(c) Temos, para todos $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\sin(x + y) &= \sin x \cos y + \sin y \cos x \\ \cos(x + y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y\end{aligned}$$

(d) Temos $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ e $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(e) Temos $\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x$ e $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Prova.

Teorema 7.46. As funções \sin e \cos são contínuas em \mathbb{R} .

Prova. Pelo terceiro item no resultado (7.44), existe $r > 0$ tal que $|x| < r \Rightarrow |\sin x| \leq |x|$. Usaremos isso para provar que $|x - p| < 2r \Rightarrow |\sin x - \sin p| \leq |x - p|$. Pois tome:

$$\begin{aligned}|\sin x - \sin p| &= \left| 2 \sin \left(\frac{x - p}{2} \right) \cos \left(\frac{x + p}{2} \right) \right| \\ &= 2 \left| \sin \left(\frac{x - p}{2} \right) \right| \left| \cos \left(\frac{x + p}{2} \right) \right|;\end{aligned}$$

como $\left| \cos \left(\frac{x + p}{2} \right) \right| \leq 1$, temos que

$$|\sin x - \sin p| \leq 2 \left| \sin \left(\frac{x - p}{2} \right) \right|,$$

e então, pelo fato mencionado acima, vem

$$|x - p| < 2r \Rightarrow \left| \sin \left(\frac{x - p}{2} \right) \right| \leq \left| \frac{x - p}{2} \right|,$$

onde $|x - p| < 2r \Rightarrow |\sin x - \sin p| \leq |x - p|$. De maneira completamente análoga, prova-se que $|x - p| < 2r \Rightarrow |\cos x - \cos p| \leq |x - p|$.

Com isso, $|x - p| < 2r \Rightarrow 0 \leq |\sin x - \sin p| \leq |x - p|$, e como $\lim_{x \rightarrow p} |x - p| = 0$, pelo Teorema do Confronto vem $\lim_{x \rightarrow p} |\sin x - \sin p| = 0$, donde $\lim_{x \rightarrow p} \sin x = \sin p$. De modo completamente análogo, prova-se que $\lim_{x \rightarrow p} \cos x = \cos p$. Logo, sen e cos são contínuas em todo $p \in \mathbb{R}$.

Teorema 7.47. Temos $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ e $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$.

Prova.

7.7.2 Exponencial e Logaritmo

Exponentes Racionais

O intuito aqui é definir a^x quando $x \in \mathbb{Q}$. A referência é [9].

Teorema 7.48.

- (a) Para quaisquer $a \in \mathbb{R}_{>0}$ e $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ existe um único $x \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $x^n = a$.
- (b) Para quaisquer $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ ímpar existe um único $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^n = a$.

Prova. (a) Iremos construir duas sequências, $(a_k)_{k \geq 0}$ e $(b_k)_{k \geq 0}$, no sentido dos Teoremas (7.37) e (7.38).

Seja A_0 o maior natural tal que $A_0^n \leq a < (A_0 + 1)^n$. Em particular, isso nos diz que, se o real $x > 0$ existe, então ele satisfaz $A_0 \leq x < A_0 + 1$. Agora, para cada $k \geq 1$, seja A_k um elemento do conjunto $\{0, 1, \dots, 9\}$ (isto é, A_k é um dígito, ou algarismo), e defina $(a_k)_{k \geq 0}$ e $(b_k)_{k \geq 0}$ por

$$a_k := \max \left\{ \sum_{i=0}^k \frac{A_i}{10^i} \mid \left(\sum_{i=0}^k \frac{A_i}{10^i} \right)^n \leq a \right\}, \forall k \geq 0$$

$$b_k := \begin{cases} A_0 + 1, & \text{se } k = 0 \\ a_{k-1} + \frac{A_k + 1}{10^k}, & \text{se } k \geq 1 \end{cases}$$

É imediato que, para todo $k \in \mathbb{N}$, $a_k^n \leq a < b_k^n$. Em particular, isso nos diz que, se o real $x > 0$ existe, então ele satisfaz $a_k \leq x < b_k$. Provemos agora que $a_k \leq a_{k+1} \leq b_{k+1} \leq b_k$:

i. $a_k \leq a_{k+1}$: para ver isso, basta ver que

$$a_{k+1} = \sum_{i=0}^{k+1} \frac{A_i}{10^i} = \sum_{i=0}^k \frac{A_i}{10^i} + \frac{A_{k+1}}{10^k} = a_k + \frac{A_{k+1}}{10^k}.$$

Daí, $a_{k+1} - a_k = \frac{A_{k+1}}{10^k} \geq 0 \Rightarrow a_k \leq a_{k+1}$.

ii. $a_{k+1} \leq b_{k+1}$: releia uma das afirmações ditas acima.

iii. $b_{k+1} \leq b_k$: basta ver que

$$\begin{aligned} b_k - b_{k+1} &= \left(a_{k-1} + \frac{A_k + 1}{10^k} \right) - \left(a_k + \frac{A_{k+1} + 1}{10^{k+1}} \right) \\ &= \left(a_{k-1} + \frac{A_k + 1}{10^k} \right) - \left(a_{k-1} + \frac{A_k}{10^k} + \frac{A_{k+1} + 1}{10^{k+1}} \right) \\ &= \frac{A_k + 1}{10^k} - \frac{A_k}{10^k} - \frac{A_{k+1} + 1}{10^{k+1}} \\ &= \frac{1}{10^k} - \frac{A_{k+1} + 1}{10^{k+1}} = \frac{9 - A_{k+1}}{10^{k+1}}. \end{aligned}$$

Como $A_{k+1} \in \{1, 2, \dots, 9\}$, temos que $\frac{9 - A_{k+1}}{10^{k+1}} \geq 0$, donde $b_{k+1} \leq b_k$.

Por fim, provemos que $\lim_{k \rightarrow +\infty} (b_k - a_k) = 0$. De fato, veja que

$$\begin{aligned} b_k - a_k &= a_{k-1} + \frac{A_k + 1}{10^k} - \sum_{i=0}^k \frac{A_i}{10^i} \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \frac{A_i}{10^i} + \frac{A_k}{10^k} + \frac{1}{10^k} - \sum_{i=0}^k \frac{A_i}{10^i} \\ &= \sum_{i=0}^k \frac{A_i}{10^i} + \frac{1}{10^k} - \sum_{i=0}^k \frac{A_i}{10^i} = \frac{1}{10^k}, \end{aligned}$$

e então $\lim_{k \rightarrow +\infty} (b_k - a_k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{10^k} = 0$.

Com isso, a sequência $([a_k, b_k])_{k \geq 0}$ é de intervalos encaixantes, e então existe um único $x \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $k \in \mathbb{N}$, $a_k \leq x \leq b_k$. Pelo resultado (7.39), a sequência $([a_k^n, b_k^n])_{k \geq 0}$ também é de intervalos encaixantes; temos então que, para todo $k \in \mathbb{N}$, $a_k^n \leq x^n \leq b_k^n$. No entanto, vimos isso também vale para o real $a > 0$: para todo $k \in \mathbb{N}$, $a_k^n \leq a \leq b_k^n$. Daí, $x^n = a$.

(b) Se $a > 0$, então, pelo item (a), existe $x > 0$ tal que $x^n = a$. Por outro lado, se $a < 0$, então $-a > 0$, e pelo item (a) existe $x > 0$ tal que $x^n = -a$; daí, $(-x)^n = a$.

Definição 7.49. Seja $n \geq 1$ um natural.

(a) Para cada real a , o único real x tal que $x^n = a$ será chamado de *raiz n-ésima* de a e será denotado por $\sqrt[n]{a}$. Assim, temos que $(\sqrt[n]{a})^n = a$.

(b) Como para todo $x \in \mathbb{R}_+$ existe um único $\sqrt[n]{x} \in \mathbb{R}_+$, a relação $\{(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ : y = \sqrt[n]{x}\}$ é uma função, que será chamada de *função raiz*.

Corolário 7.50. Se $a, b > 0$ são reais, $m, n \geq 1$ são naturais e p é um inteiro, então

$$\text{(a)} \quad \sqrt[n]{a^p} = \sqrt[nm]{a^{pm}};$$

$$\text{(b)} \quad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a};$$

$$\text{(c)} \quad \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab};$$

$$\text{(d)} \quad a < b \Leftrightarrow \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}.$$

Prova.

Proposição 7.51. A função $f(x) := \sqrt[n]{x}$ é contínua em todo seu domínio.

Prova.

Definição 7.52. (Expoente Racional) Seja $a > 0$ um real. Para cada racional r (isto é, $r := m/n$, com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), definimos $a^r = a^{\frac{m}{n}} := \sqrt[n]{a^m}$.²

Proposição 7.53. Para quaisquer $a, b > 0$ reais e r, s racionais, temos que

$$\text{(a)} \quad a^r \cdot a^s = a^{r+s};$$

$$\text{(b)} \quad (a^r)^s = a^{rs};$$

$$\text{(c)} \quad (ab)^r = a^r b^r;$$

$$\text{(d)} \quad \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s};$$

$$\text{(e)} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r};$$

$$\text{(f)} \quad \text{Se } 1 < a \text{ e } r < s, \text{ então } a^r < a^s;$$

²Como $\sqrt[n]{a^p} = \sqrt[nm]{a^{pm}}$, a definição acima não depende da escolha da fração m/n . Em particular, $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ tal que $f(r) = a^r$ fica bem definida como função.

(g) Se $0 < a < 1$ e $r < s$, então $a^s < a^r$.

Prova.

Exponentes Reais

O intuito aqui é definir a^x quando $x \in \mathbb{R}$.

Teorema 7.54. (a) Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em \mathbb{R} e $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{Q}$, então $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(b) Se $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são contínuas em \mathbb{R} e $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{Q}$, então $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.³

(c) Se $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são contínuas em \mathbb{R} e existe $0 < a \neq 1$ tal que $f(x) = a^x$ e $g(x) = a^x$ para todo $x \in \mathbb{Q}$, então $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.⁴

Prova. (a) Segue como corolário da conservação do sinal (7.24). ■

(b) Basta aplicar o resultado do item (a) na função $h(x) := f(x) - g(x)$. ■

(c) Segue como corolário do item (b) acima.

Teorema 7.55. (a) Se $a > 1$ é um real, então para todo $\epsilon > 0$ existe um natural n tal que $a^{\frac{1}{n}} - 1 < \epsilon$.

(b) Se $a > 1$ e x são reais, então para todo $\epsilon > 0$ existem racionais r e s tais que $r < x < s$ e $a^s - a^r < \epsilon$.

(c) Se $a > 1$ é um real, então para todo x real existe um único real γ tal que $a^r < \gamma < a^s$ para todos os racionais r e s com $r < x < s$.

(d) Se $0 < a \neq 1$ é um real, então existe uma única função definida e contínua em \mathbb{R} tal que $f(r) = a^r$ para todo $x \in \mathbb{Q}$.

Prova. (a) Sabemos que $(1 + \epsilon)^n \geq 1 + n\epsilon$ para todo natural $n \geq 1$. Pois tome n tal que $1 + n\epsilon > a$ (basta que $n > \frac{a-1}{\epsilon}$); daí, $(1 + \epsilon)^n > a$, donde $a^{\frac{1}{n}} - 1 < \epsilon$. ■

(b) Para racionais $t > x$ temos $a^r < a^t$ para todo racional $r < x$. Pelo item anterior, existe um natural n para o qual $a^{\frac{1}{n}} - 1 < \epsilon \cdot a^{-t}$, donde $a^t(a^{\frac{1}{n}} - 1) < \epsilon$. Tomando racionais r e s , com $r < x < s$, para os quais $s - r < 1/n$, temos $a^s - a^r = a^r(a^{s-r} - 1) < a^r(a^{\frac{1}{n}} - 1) < \epsilon$. ■

³Isto nos diz que se duas funções contínuas em \mathbb{R} coincidem em \mathbb{Q} , então elas são iguais.

⁴Isto significa que poderá existir no máximo uma função definida e contínua em \mathbb{R} que coincide com a^x para todo $x \in \mathbb{Q}$.

(c) O conjunto $A := \{a^r : r \in \mathbb{Q} \wedge r < x\}$ é não vazio e limitado superiormente (por todo a^s , com $s > x$). Assim, existe $\gamma := \sup A$. Claramente, $a^r \leq \gamma \leq a^s$, mas, mais geralmente, $a^r < \lambda < a^s$ (prove!). Provemos, agora, a unicidade de γ . Se γ' for tal que $a^r < \gamma' < a^s$ para quaisquer racionais r e s , com $r < x < s$, então $|\gamma - \gamma'| < a^s - a^r$. Pelo item anterior, para todo $\epsilon > 0$ existem r_0 e s_0 , com $r_0 < x < s_0$, para os quais $a^{s_0} - a^{r_0} < \epsilon$; logo, temos $|\gamma - \gamma'| < \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$, donde $\gamma = \gamma'$. ■

(d) Pelo item anterior, para quaisquer $a > 1$ e x reais existe um único γ ; assim, basta tomar $f(x) := \gamma$. Antes de provar a continuidade de f , provemos que f é estritamente crescente. De fato, tomando reais $x_1 < x_2$ temos que $a^{x_1} < f(x_1) < a^{x_2}$ e $a^{x_2} < f(x_2) < a^{x_1}$ para todos os racionais x_1 , x_2 , s_1 e s_2 tais que $x_1 < s_1 < x_2$ e $x_2 < s_2 < x_1$. Como existe s racional tal que $x_1 < s < x_2$, temos $f(x_1) < a^s < f(x_2)$, donde f é estritamente crescente.

Agora, sendo $p \in \mathbb{R}$, pelo item (b) deste teorema, para todo $\epsilon > 0$ existem racionais r e s , com $r < x < s$, para os quais $a^s - a^r < \epsilon$. Em particular, para todo $x \in]r, s[$, temos $a^r < f(x) < a^s$, e como também $a^r < f(p) < a^s$, temos $|f(x) - f(p)| < a^s - a^r < \epsilon$. Assim, pelo Teorema (7.23), f é contínua em p . Como p foi tomado de modo arbitrário, segue que f é contínua em \mathbb{R} .

Por outro lado, se $0 < a < 1$, então $f(x) := (\frac{1}{a})^{-x}$ está bem definida em \mathbb{R} , é contínua em \mathbb{R} e coincide com a^r nos racionais.

Definição 7.56. Seja $0 < a \neq 1$ um real. Para todo $x \in \mathbb{R}$, definimos $a^x := f(x)$, em que f é a função a que se refere o item (d) do Teorema (7.55).

Proposição 7.57. Para quaisquer $0 < a, b \neq 1$ reais e x, y reais, temos que

(a) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$;

(b) $(a^x)^y = a^{xy}$;

(c) $(ab)^x = a^x b^x$;

(d) $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$;

(e) $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$;

(f) Se $1 < a$ e $x < y$, então $a^x < a^y$;

(g) Se $0 < a < 1$ e $x < y$, então $a^y < a^x$.

Prova.

Logaritmos

Teorema 7.58. Para quaisquer reais $0 < a \neq 1$ e $b > 0$, existe um único real $\gamma := \log_a b$ tal que $a^\gamma = a^{\log_a b} = b$. Em particular, $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) := \log_a x$ fica bem definida.

Prova.

Teorema 7.59. Para quaisquer $0 < a, b \neq 1$ e $x, y > 0$, temos que

$$\begin{aligned}\log_a xy &= \log_a x + \log_a y \\ \log_a x^y &= y \log_a x \\ \log_a \frac{x}{y} &= \log_a x - \log_a y \\ \log_a x &= \frac{\log_b x}{\log_b a}\end{aligned}$$

E ainda, se $a > 1$ e $x < y$, então $\log_a x < \log_a y$ (isto é, se $a > 1$ então $f(x) := \log_a x$ é crescente), e se $0 < a < 1$ e $x < y$, então $\log_a y < \log_a x$ (isto é, se $0 < a < 1$, então $f(x) := \log_a x$ é decrescente).

Prova.

Teorema 7.60. Se $a > 1$, então $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = \infty$ e $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty$; se $0 < a < 1$, então $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = +\infty$.

Prova.

Teorema 7.61. A função logarítmica $f(x) := \log_a x$ é contínua em todo seu domínio.

Prova.

Capítulo 8

Derivadas

8.1 Definições e Resultados Iniciais

Definição 8.1. Uma função $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é *derivável* em $a \in A \cap A'$, se existe o limite

$$f'(a) := \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Noutros termos, f é derivável em a se existe o limite $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\Delta f}{\Delta x}(a)$, onde $\frac{\Delta f}{\Delta x}(a) : A \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ é a *função quociente de diferenças*, definida por

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}(a) := \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Sendo f derivável em a , o limite $f'(a)$ é a *derivada* de f em a .

Observação 8.2. O objetivo das proposições seguintes é estabelecer precisamente a equivalência

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = L \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = L,$$

por vezes assumida sem mais explicações.

Proposição 8.3. Sejam $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in A'$. Tem-se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ para algum $L \in \mathbb{R}$ se, e somente se, $\lim_{h \rightarrow 0} g(h) = L$, onde $g : \{h \in \mathbb{R}_{\neq 0} : a + h \in A\} \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por $g(h) := f(a + h)$.

Prova. A proposição (???) estabelece que $a \in A' \Leftrightarrow 0 \in \{h \in \mathbb{R}_{\neq 0} : a + h \in A\}'$.

Daí, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ se, e somente se, para todo $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existe $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$ para todo $x \in A$. Tomando $h := x - a$, temos $x = a + h \in A$, de modo que $h \in B$. Assim, para todo $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existe $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $0 < |h| < \delta \Rightarrow |f(a + h) - L| < \epsilon$ para todo $h \in B$, de modo que $\lim_{h \rightarrow 0} g(h) = L$.

Corolário 8.4. Uma função $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é derivável em $a \in A \cap A'$, com derivada $L \in \mathbb{R}$, se, e somente se, $\lim_{h \rightarrow 0} g(h) = L$, onde $g : \{h \in \mathbb{R}_{\neq 0} : a + h \in A \setminus \{a\}\} \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por $g(h) := \frac{\Delta f}{\Delta x}(a + h)$.

Prova. Por definição, f ser derivável em a com derivada L significa que $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$. Definindo $\varphi : \{h \in \mathbb{R}_{\neq 0} : a + h \in A \setminus \{a\}\} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\varphi(h) = g(a + h) = \frac{f(a + h) - f(a)}{(a + h) - a} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h},$$

pela proposição (8.3) temos $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = L$, como havíamos afirmado.

Definição 8.5. Seja f uma função e $A \subseteq D_f$ o conjunto dos $x \in D_f$ para os quais existe $f'(x)$. A função $f' : A \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $x \rightarrow f'(x)$ denomina-se *função derivada* ou, simplesmente, *derivada* de f . Diremos, ainda, que f' é a *derivada de 1ª ordem* de f , que também pode ser denotada por $f^{(1)}$. Por fim, definimos, indutivamente, $f^{(n+1)} := [f^{(n)}]'$.

Definição 8.6. Seja f uma função, sendo $y := f(x)$. O símbolo $\frac{dy}{dx}$, que se lê “derivada de y em relação a x ”, denota a derivada de f em x , isto é, $\frac{dy}{dx} := f'(x)$. Já $\frac{d^n y}{dx^n}$ denota a n -ésima derivada de f em x : $\frac{d^n y}{dx^n} := f^{(n)}(x)$. E ainda, $\frac{df}{dx}$ denota a função derivada de $y = f(x)$: $\frac{df}{dx} := f'$. Naturalmente, então, $\frac{df}{dx}(x) := f'(x)$. A derivada de $y = f(x)$ no ponto p é denotada por $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=p}$.

Teorema 8.7. Se f for derivável em p , então f será contínua em p .

Prova.

Teorema 8.8. Se f e g são funções deriváveis em p , então

(a) a função $f + g$ é derivável em p e

$$(f + g)'(p) = f(p) + g(p);$$

(b) a função $f \cdot g$ é derivável em p e

$$(f \cdot g)'(p) = f'(p) \cdot g(p) + g'(p) \cdot f(p);$$

(c) a função $\frac{f}{g}$ é derivável em p , desde que $g(p) \neq 0$, sendo

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(p) = \frac{f'(p) \cdot g(p) - g'(p) \cdot f(p)}{[g(p)]^2}.$$

Prova.

Corolário 8.9. derivada de n funções, derivada de kf.

Lema 8.10. Seja $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável em $p \in D_f$. Definindo $\rho : D_f \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{R}$ de modo que

$$f(x) = f(p) + f'(p)(x - p) + \rho(x)(x - p),$$

temos que $\lim_{x \rightarrow p} \rho(x) = 0$.

Prova.

Teorema 8.11. (Regra da Cadeia) Se $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : D_g \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são funções deriváveis, com $Im_g \subseteq D_f$, então a função composta $h : D_g \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $h(x) = f(g(x))$ é derivável e

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Sendo $y = f(u)$ e $u = g(x)$, a regra da cadeia nos diz que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx},$$

em que $\frac{dy}{du}$ deve ser calculada em $u = g(x)$.

Prova.

Teorema 8.12. (Derivada de Função Inversa) Seja f uma função inversível e g a função inversa de f . Se f for derivável em $q = g(p)$, com $f'(q) \neq 0$, e se g for contínua em p , então g será derivável em p e

$$g'(p) = \frac{1}{f'(g(p))}.$$

Prova.

8.2 Teoremas de Rolle, do Valor Médio e de Cauchy

Definição 8.13. Sejam $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e $p \in D_f$ um ponto no domínio de f .

(a) Diremos que $f(p)$ é o *valor máximo global* de f , ou que p é um *ponto de máximo global* de f , se $f(x) \leq f(p)$ para todo $x \in D_f$. Diremos que $f(p)$ é o *valor mínimo global* de f , ou que p é um *ponto de mínimo global* de f , se $f(x) \geq f(p)$ para todo $x \in D_f$.

(b) Suponha ainda que $p \in A \subseteq D_f$. Diremos que $f(p)$ é o *valor máximo* de f em A , ou que p é um *ponto de máximo* de f em A , se $f(x) \leq f(p)$ para todo $x \in A$. Diremos que $f(p)$ é o *valor mínimo* de f em A , ou que p é um *ponto de mínimo* de f em A , se $f(x) \geq f(p)$ para todo $x \in A$.

(c) Diremos que $f(p)$ é o *valor máximo local* de f , ou que p é um *ponto de máximo local* de f , se existir $r > 0$ tal que $f(x) \leq f(p)$ para todo $x \in]p - r, p + r[\cap D_f$. Diremos que $f(p)$ é o *valor mínimo local* de f , ou que p é um *ponto de mínimo local* de f , se existir $r > 0$ tal que $f(x) \geq f(p)$ para todo $x \in]p - r, p + r[\cap D_f$.

Definição 8.14. Dada uma função f , diremos que o ponto p é *interior* a D_f se existir um intervalo aberto $I \subset D_f$ tal que $p \in I$.

Teorema 8.15. Seja $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável no ponto interior $p \in D_f$. Se p é ponto de máximo (mínimo) local de f , então $f'(p) = 0$.

Prova. Como p é ponto de máximo local de f , existe $r_1 > 0$ tal que $f(x) \leq f(p)$ para todo $x \in]p - r_1, p + r_1[\cap D_f$. Como p é um interior a D_f , existe $r_2 > 0$ tal que $]p - r_2, p + r_2[\subseteq D_f$. Sendo $r := \min\{r_1, r_2\}$, temos $f(x) \leq f(p)$ para todo $x \in]p - r, p + r[$. Como f é derivável em p , temos que $f'(p) = \lim_{x \rightarrow p^+} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{x \rightarrow p^-} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$. Sendo $p < x < p + r$, temos $\frac{f(x) - f(p)}{x - p} \leq 0$; daí, pela conservação do sinal, $\lim_{x \rightarrow p^+} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \leq 0$. Analogamente, sendo $p - r < x < p$, temos $\frac{f(x) - f(p)}{x - p} \geq 0$; daí, pela conservação do sinal, $\lim_{x \rightarrow p^+} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \geq 0$. Com isso, temos $f'(p) \leq 0$ e $f'(p) \geq 0$, donde, $f'(p) = 0$. O caso em que p é ponto de mínimo local de f segue de forma completamente análoga.

$\subseteq D_f$ e derivável em $]a, b[$.

Teorema 8.16. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua em $[a, b]$ e derivável em $]a, b[$.

- (a) (Rolle) Se $f(a) = f(b)$, então existe $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$.
- (b) (Valor Médio) Existe $c \in]a, b[$ tal que

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a).$$

Prova. (a) Se f for constante em $[a, b]$, então $f'(x) = 0$ para todo $x \in]a, b[$. Suponha, então, que f não seja constante em $[a, b]$. Sendo f contínua em $[a, b]$, pelo Teorema de Weierstrass (7.43), existem $x_1, x_2 \in [a, b]$ tais que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ para todo $x \in [a, b]$. Se fosse $f(x_1) = f(x_2)$, então f seria constante; logo, $f(x_1) \neq f(x_2)$. E como, por hipótese, $f(a) = f(b)$, temos que x_1 ou x_2 estão em $]a, b[$. O $x_i \in]a, b[$ é um ponto de máximo local de f ; daí, pelo Teorema (8.15), $f'(x_i) = 0$. ■

- (b) Defina $S : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$S(x) := f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Observe que o gráfico de S é a reta que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$. Agora, defina $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ por $g(x) := f(x) - S(x)$. Note que g é contínua em $[a, b]$ e derivável em $]a, b[$; daí, pelo Teorema de Rolle, existe $c \in]a, b[$ tal que $g'(c) = 0$. Como

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

temos que

$$g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0,$$

onde $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Teorema 8.17. (Cauchy) Se $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : D_g \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas em $[a, b] \subseteq D_f \cap D_g$ e deriváveis em $]a, b[$, então existe pelo menos um ponto $c \in]a, b[$ tal que

$$[f(b) - f(a)]g'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c).$$

Em particular, se $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in]a, b[$, então

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Prova. Defina $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$h(x) := [f(b) - f(a)]g(x) - [g(b) - g(a)]f(x).$$

É fácil ver que h é contínua em $[a, b]$, derivável em $]a, b[$ e $h(a) = h(b)$. Daí, pelo Teorema de Rolle (8.16), existe $c \in]a, b[$ tal que

$$[f(b) - f(a)]g(c) - [g(b) - g(a)]f(c) = 0,$$

onde

$$[f(b) - f(a)]g'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c).$$

Em particular, se $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in]a, b[$, então

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

pois o Teorema do Valor Médio (8.16) aplicado à função g nos diz que existe $\tilde{c} \in]a, b[$ tal que $g(b) - g(a) = g'(\tilde{c})(b - a)$; como $g'(\tilde{c}) \neq 0$ e $b \neq a$, temos $g(b) - g(a) \neq 0$.

8.3 Gráficos de Funções

Teorema 8.18. Seja $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável no intervalo aberto $I \subset D_f$.

(a) Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$ interior, então f será estritamente crescente em I .

(b) Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in I$ interior, então f será estritamente decrescente em I .

Prova. (a) Provemos que para quaisquer $a, b \in I$ temos $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$. Sejam, então, $a, b \in I$ com $a < b$. Evidentemente, temos que f é contínua em $[a, b]$ e derivável em $]a, b[$; daí, pelo Teorema do Valor Médio (8.16), existe $c \in]a, b[$ tal que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$. Como $f'(c) > 0$ e $b > a$, temos que $f(b) - f(a) > 0$, donde $f(a) < f(b)$. ■

(b) Segue analogamente.

Corolário 8.19. Seja $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável até a 2ª ordem em $]a, b[\subseteq D_f$. Se $f''(x) > 0$ para todo $x \in]a, b[$ e se existe $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$, então f é estritamente decrescente em $]a, c[$ e estritamente crescente em $]c, b[$.

Prova. Se $f''(x) > 0$ para todo $x \in]a, b[$, então f' é estritamente crescente em $]a, b[$. Com isso, $f'(x) < f'(c) = 0$ para todo $x \in]a, c[$ e $f'(x) > f'(c) = 0$ para todo $x \in]c, b[$. Com isso, f é estritamente decrescente em $]a, c[$ e estritamente crescente em $]c, b[$.

Definição 8.20. Seja $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável no intervalo aberto $I \subseteq D_f$.

(a) Se $f(x) > f(p) + f'(p)(x - p)$ para todos $x, p \in I$, com $x \neq p$, diremos que f tem a *concavidade para cima* em I , ou que f é *convexa* em I .

(b) Se $f(x) < f(p) + f'(p)(x - p)$ para todos $x, p \in I$, com $x \neq p$, diremos que f tem a *concavidade para baixo* em I , ou que f é *côncava* em I .

Teorema 8.21. Seja $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável até a 2^a ordem no intervalo aberto $I \subseteq D_f$.

(a) Se $f''(x) > 0$ em I , então f terá a concavidade para cima em I .

(b) Se $f''(x) < 0$ em I , então f terá a concavidade para baixo em I .

Prova. (a) Sendo $p \in I$, provemos que para todo $x \in I$, com $x \neq p$, temos $f(x) > f(p) + f'(p)(x - p)$. Definindo $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ por $g(x) := f(x) - f(p) - f'(p)(x - p)$, basta provar que $g(x) > 0$ para todo $x \in I$, com $x \neq p$. É fácil ver que $g'(x) = f'(x) - f'(p)$. Como $f''(x) > 0$ em I , temos que f' é estritamente crescente em I . Com isso, $g'(x) > 0$ para $x > p$ e $g'(x) < 0$ para $x < p$. Com isso, g é estritamente decrescente em $\{x \in I : x < p\}$ e estritamente crescente em $\{x \in I : x > p\}$. Com isso, sendo $g(p) = 0$, temos $g(x) > 0$ para todo $x \in I$, com $x \neq p$. ■

(b) Segue analogamente.

Definição 8.22. Seja $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em $p \in D_f$. Diremos que p é um *ponto de inflexão* de f se existirem $a, b \in \mathbb{R}$, com $p \in]a, b[\subseteq D_f$, para os quais a concavidade de f em $]a, p[$ é diferente da concavidade de f em $]p, b[$.

Proposição 8.23. (a) Seja $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável até a 3^a ordem no intervalo aberto $]a, b[\subseteq D_f$. Se f''' é contínua em $p \in]a, b[$, $f'''(p) \neq 0$ e $f''(p) = 0$, então p é um ponto de inflexão de f .

(b) Seja $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável até a 2^a ordem no intervalo aberto $I \subseteq D_f$. Se f'' é contínua em $p \in I$ e p é um ponto de inflexão de f , então $f''(p) = 0$.

Prova. (a) Suponha, sem perda de generalidade, que $f'''(p) > 0$. Como f''' é contínua em p , pela conservação do sinal (7.24) existe $r_1 > 0$ tal que $f'''(x) > 0$ para

todo $x \in]p - r_1, p + r_1[$. Por outro lado, existe $r_2 > 0$ tal que $]p - r_2, p + r_2[\subseteq]a, b[$ (de fato, basta tomar $r_2 = \min\{b - p, p - a\}$). Sendo, então, $r := \min\{r_1, r_2\}$, temos que $f'''(x) > 0$ para todo $x \in]p - r, p + r[\subseteq]a, b[$. Com isso, f'' é estritamente crescente em $]p - r, p + r[$, e como $f''(p) = 0$, só pode ser $f''(x) < 0$ para todo $x \in]p - r, p + r[$ e $f''(x) > 0$ para todo $x \in]p, p + r[$. Logo, p é um ponto de inflexão de f .

(b) Se fosse $f''(p) \neq 0$, como f'' é contínua em p , pela conservação do sinal existiria $r > 0$ tal que $f''(p)$ e $f''(x)$ teriam o mesmo sinal em $]p - r, p + r[$, donde p não seria ponto de inflexão de f , absurdo. Logo, $f''(p) = 0$.

8.4 Regras de L'Hospital

Teorema 8.24. (Regra de L'Hospital para indeterminações do tipo 0/0)

(a) Sejam $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : D_g \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções para as quais existe $r \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que f e g são deriváveis e $g'(x) \neq 0$ em

- $I :=]p, p + r[\subseteq D_f \cap D_g$ (caso $x \rightarrow p^+$); ou
- $I :=]p - r, p[\subseteq D_f \cap D_g$ (caso $x \rightarrow p^-$); ou
- $I :=]p - r, p + r[\setminus \{p\} \subseteq D_f \cap D_g$ (caso $x \rightarrow p$).

Se $\lim f(x) = \lim g(x) = 0$ e $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, então

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

(b) Sejam $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : D_g \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções para as quais existe $r \in \mathbb{R}$ tal que f e g são deriváveis e $g'(x) \neq 0$ em

- $I :=]r, +\infty[\subseteq D_f \cap D_g$ (caso $x \rightarrow +\infty$); ou
- $I :=]-\infty, r[\subseteq D_f \cap D_g$ (caso $x \rightarrow -\infty$).

Se $\lim f(x) = \lim g(x) = 0$ e $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, então

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Prova. (a) Suponha $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R}$. Façamos o caso $x \rightarrow p^+$, isto é,

$$\lim_{x \rightarrow p^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow p^+} g(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow p^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L.$$

Defina $F, G : I \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$F(x) := \begin{cases} f(x) & x \in I \\ 0 & x = p \end{cases} \quad \text{e} \quad G(x) := \begin{cases} g(x) & x \in I \\ 0 & x = p \end{cases}$$

Afirmamos que $G'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$ e $G(p) = 0$ resultam em $G(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. De fato, se não fosse $G(x) \neq 0$ para todo $x \in I$, então existiria $a \in I$ com $G(a) = 0$; pelo Teorema do Valor Médio, existiria $b \in]p, a[$ tal que

$$\underbrace{G(a) - G(p)}_{=0} = G'(b) \underbrace{(a - p)}_{\neq 0},$$

onde $G'(b) = 0$, contrariando a hipótese de ser $G'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Agora, sendo $\lim_{x \rightarrow p^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, para todo $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existe $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$, com $\delta < r$, tal que

$$p < x < p + \delta \Rightarrow \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - L \right| < \epsilon,$$

isto é, $\left| \frac{F'(x)}{G'(x)} - L \right| < \epsilon$. Por outro lado, o Teorema de Cauchy aplicado às funções F e G no intervalo $[p, x]$ nos diz que existe $q \in]p, x[$ tal que

$$\frac{F(x) - F(p)}{G(x) - G(p)} = \frac{F'(q)}{G'(q)};$$

daí,

$$\left| \frac{F(x)}{G(x)} - L \right| = \left| \frac{F(x) - F(p)}{G(x) - G(p)} - L \right| = \left| \frac{F'(q)}{G'(q)} - L \right| < \epsilon,$$

pois $p < q < x < p + \delta$. Com isso, $\lim_{x \rightarrow p^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$, como queríamos provar.

(b)

Teorema 8.25. (Regra de L'Hospital para indeterminações do tipo ∞/∞)

(a) Sejam $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : D_g \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções para as quais existe $r \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que f e g são deriváveis e $g'(x) \neq 0$ em

- $I :=]p, p + r[\subseteq D_f \cap D_g$ (caso $x \rightarrow p^+$); ou
- $I :=]p - r, p[\subseteq D_f \cap D_g$ (caso $x \rightarrow p^-$); ou
- $I :=]p - r, p + r[\setminus \{p\} \subseteq D_f \cap D_g$ (caso $x \rightarrow p$).

Se $\lim f(x) = \lim g(x) = \pm\infty$ e $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, então

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

(b) Sejam $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : D_g \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções para as quais existe $r \in \mathbb{R}$ tal que f e g são deriváveis e $g'(x) \neq 0$ em

- $I :=]r, +\infty[\subseteq D_f \cap D_g$ (caso $x \rightarrow +\infty$); ou
- $I :=]-\infty, r[\subseteq D_f \cap D_g$ (caso $x \rightarrow -\infty$).

Se $\lim f(x) = \lim g(x) = \pm\infty$ e $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, então

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Prova.

8.5 Trigonometria, parte II

Teorema 8.26. Existe um menor real $a > 0$ tal que $\cos a = 0$ e $\sin a = 1$.

Prova.

Definição 8.27. Definimos $\pi := 2a$, em que a é o menor real a que se refere o Teorema (8.26). Assim, $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ e $\sin \frac{\pi}{2} = 1$.

Teorema 8.28. As funções sen e cos são periódicas com período 2π , isto é, $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ e $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

8.6 Polinômio de Taylor

Definição 8.29. Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função n vezes diferenciável e $x_0 \in I$ um ponto de I . O polinômio

$$P_n(x) := \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

chama-se *polinômio de Taylor de ordem n de f centrado, ou em volta, de x_0* .

Proposição 8.30. Nas condições da definição (8.29), $P_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$ para todo $k \leq n$.

Prova.

Capítulo 9

Integrais

9.1 A integral de Darboux

Definição 9.1.

- (a) Uma *partição* de um intervalo $[a, b]$ é um conjunto finito $P := \{x_0, \dots, x_n\}$ tal que $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Isso é denotado por

$$P : a = x_0 < \dots < x_n = b.$$

O conjunto de todas as partições de $[a, b]$ é denotado por $\mathcal{P}[a, b]$.

- (b) A *amplitude* do i -ésimo intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, para cada $i \in [n]$, é definida como $\Delta x_i := x_i - x_{i-1}$.
- (c) Um *refinamento* de uma partição $P \in \mathcal{P}[a, b]$ é uma partição $Q \in \mathcal{P}[a, b]$ tal que $P \subseteq Q$.

Definição 9.2. Sejam $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada e $P : a = x_0 < \dots < x_n = b$ uma partição de $[a, b]$.

- (a) A *soma superior* de f com relação à P é definida como

$$U(f, P) := \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i,$$

onde $M_i := \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f$ para cada $i \in [n]$.

- (b) A *soma inferior* de f com relação à P é definida como

$$L(f, P) := \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i,$$

onde $m_i := \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f$ para cada $i \in [n]$.

Proposição 9.3. Sejam $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada e $P : a = x_0 < \dots < x_n = b$ uma partição de $[a, b]$.

- (a) Tem-se $L(f, P) \leq U(f, P)$.
- (b) Se Q é um refinamento de P , então $U(f, Q) \leq U(f, P)$ e $L(f, Q) \geq L(f, P)$.
- (c) Se Q é uma qualquer outra partição de $[a, b]$, então $L(f, P) \leq U(f, Q)$.

Prova.

- (a) Para todo $i \in [n]$ temos $m_i \leq M_i$ e $\Delta x_i > 0$. Logo $m_i \Delta x_i \leq M_i \Delta x_i$ para todo $i \in [n]$. Tomando a soma, temos que

$$\sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i,$$

de modo que $L(f, P) \leq U(f, P)$, como havíamos afirmado. ■

- (b) Façamos indução em $|Q \setminus P|$. Se $|Q \setminus P| = 1$, então Q só tem um ponto a mais que P , isto é, existe $\bar{x} \in Q$ tal que $\bar{x} \notin P$. Em particular, existe um único índice $j \in [n]$ tal que $x_{j-1} < \bar{x} < x_j$. Com isso, tomindo

$$M'_j := \sup_{[x_{j-1}, \bar{x}]} f \quad \text{e} \quad M''_j := \sup_{[\bar{x}, x_j]} f,$$

temos $M'_j, M''_j \leq M_j$, donde

$$\begin{aligned} U(f, Q) &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n M_i \Delta x_i + M'_j(\bar{x} - x_{j-1}) + M''_j(x_j - \bar{x}) \\ &\leq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n M_i \Delta x_i + M_j(\bar{x} - x_{j-1}) + M_j(x_j - \bar{x}) \\ &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n M_i \Delta x_i + M_j(x_j - x_{j-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i = U(f, P). \end{aligned}$$

Isso completa a base da indução. Agora, suponha que se $|Q \setminus P| = k > 1$, então $U(f, Q) \leq U(f, P)$. Tomando Q' com só um ponto a mais que Q ,

temos que $U(f, Q') \leq U(f, Q)$, de modo que se $|Q' \setminus P| = k + 1$ então $U(f, Q') \leq U(f, P)$. Isso completa o passo induutivo e, portanto, completa a prova. A prova de que $L(f, P') \geq L(f, P)$ segue de modo completamente análogo. ■

- (c) Para quaisquer partições P e Q de $[a, b]$, sempre existe um refinamento comum a ambas. De fato, basta tomar a união $P \cup Q$ e reindexar os índices conforme a definição. Assim, pelos itens anteriores,

$$L(f, P) \leq L(f, P \cup Q) \leq U(f, P \cup Q) \leq U(f, Q),$$

como havíamos afirmado. ■

Definição 9.4. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada.

- (a) A *integral inferior* de f é definida como

$$\int_a^b f(x) dx := \sup_{P \in \mathcal{P}[a,b]} L(f, P).$$

- (b) A *integral superior* de f é definida como

$$\int_a^b f(x) dx := \inf_{P \in \mathcal{P}[a,b]} U(f, P).$$

Observação 9.5. A proposição (9.3) garante que $\{L(f, P) \in \mathbb{R} : P \in \mathcal{P}[a, b]\}$ é limitado superiormente; logo, pela propriedade do supremo, existe $\sup_{P \in \mathcal{P}[a,b]} L(f, P)$.

Analogamente, existe $\inf_{P \in \mathcal{P}[a,b]} U(f, P)$. Isso garante que as definições de integral superior e inferior são consistentes (estão bem definidas).

Proposição 9.6. Se uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é limitada, então

$$\int_a^b f(x) dx \leq \bar{\int}_a^b f(x) dx.$$

Prova. Vimos que $L(f, P) \leq U(f, Q)$ para quaisquer partições $P, Q \in \mathcal{P}[a, b]$. Fixando Q , temos que $U(f, Q)$ é uma cota superior de $L(f, P)$, para qualquer $P \in \mathcal{P}[a, b]$, de modo que

$$\int_a^b f(x) dx \leq U(f, Q).$$

Com isso, $\int_a^b f(x) dx$ é uma cota inferior de $U(f, Q)$, para qualquer $Q \in \mathcal{P}[a, b]$, de modo que

$$\int_a^b f(x) dx \leq \bar{\int}_a^b f(x) dx,$$

como havíamos afirmado. ■

Definição 9.7. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada.

(a) f é integrável em $[a, b]$ segundo Darboux se

$$\underline{\int}_a^b f(x) dx = \bar{\int}_a^b f(x) dx.$$

(b) Seja f Darboux-integrável em $[a, b]$. A integral de Darboux de f em $[a, b]$ é definida como

$$\int_a^b f(x) dx := \underline{\int}_a^b f(x) dx = \bar{\int}_a^b f(x) dx.$$

(c) Se f está definida em $c \in \mathbb{R}$, estendemos a definição dizendo que f é integrável em c colocando

$$\int_c^c f(x) dx = 0.$$

(d) Se f é integrável, estendemos a definição colocando

$$\int_b^a f(x) dx := - \int_a^b f(x) dx.$$

Observação 9.8. Decorre das definições que, sendo $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrável, vale

$$L(f, P) \leq \int_a^b f(x) dx = \underline{\int}_a^b f(x) dx = \bar{\int}_a^b f(x) dx \leq U(f, P),$$

para qualquer $P \in \mathcal{P}[a, b]$.

Teorema 9.9 (Critério de integrabilidade). Uma função limitada $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável em $[a, b]$ se, e somente se, para todo $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existe $P \in \mathcal{P}[a, b]$ tal que $U(f, P) - L(f, P) < \epsilon$.

Prova. (a) (\Rightarrow)¹ Sendo f integrável, para todo $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existem partições $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$ tais que

$$S(P_2, f) - \int_a^b f(x) dx < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{e} \quad \int_a^b f(x) dx - s(P_1, f) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Com isso, sendo P uma partição comum à P_1 e P_2 , temos que

$$S^+(f, P) \leq S(P_2, f) < \int_a^b f(x) dx + \frac{\epsilon}{2} < s(P_1, f) + \epsilon \leq S^-(f, P) + \epsilon,$$

de modo que $S^+(f, P) - S^-(f, P) < \epsilon$.

(\Leftarrow) Agora, suponha que para todo $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existe uma partição P de $[a, b]$ tal que $S^+(f, P) - S^-(f, P) < \epsilon$. Como

$$S^-(f, P) \leq \underline{\int}_a^b f(x) dx \leq \bar{\int}_a^b f(x) dx \leq S^+(f, P),$$

temos que $0 \leq \bar{\int}_a^b f(x) dx - \underline{\int}_a^b f(x) dx \leq S^+(f, P) - S^-(f, P) < \epsilon$, de modo que $\bar{\int}_a^b f(x) dx - \underline{\int}_a^b f(x) dx < \epsilon$ para todo $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, donde $\bar{\int}_a^b f(x) dx = \underline{\int}_a^b f(x) dx$. Assim, f é integrável.

9.1.1 Estendendo a definição

Proposição 9.10. (a) Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função tal que $f(x) = 0$ para todo $x \in [a, b] \setminus \{c\}$, onde $c \in [a, b]$ e $f(c) \neq 0$, então f é integrável em $[a, b]$ e

$$\int_a^b f(x) dx = 0.$$

(b) Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função tal que $f(x) = 0$ para todo $x \in [a, b] \setminus \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$, onde $c_i \in [a, b]$ e $f(c_i) \neq 0$ para todo $i \in [n]$, então f é integrável em $[a, b]$ e

$$\int_a^b f(x) dx = 0.$$

¹Esta prova depende de um resultado sobre supremos e ínfimos.

(c) Sejam $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funções tais que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in [a, b] \setminus \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$, onde $c_i \in [a, b]$ e $f(c_i) \neq g(c_i)$ para todo $i \in [n]$. Se f é integrável, então g é integrável e

$$\int_a^b g(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Prova. Táboas, observação 4.1.16, página 171.

Definição 9.11. Seja $f : [a, b] \setminus \{c_1, c_2, \dots, c_n\} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função, $c_i \in [a, b]$ para todo $i \in [n]$. Diremos que f é integrável em $[a, b]$ se qualquer extensão g de f a $[a, b]$ o for, pondo

$$\int_a^b f(x) dx := \int_a^b g(x) dx.$$

9.2 Resultados

Teorema 9.12. (a) Toda função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua é integrável.

(b) Se a função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é limitada e tem apenas um número finito de pontos de descontinuidade, então f é integrável.

Prova. (a) Pelo teorema da limitação (7.42), f é limitada. Pelo teorema (7.36), f é uniformemente contínua, de modo que para todo $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existe $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{b - a}.$$

Escolha uma partição $P : a = x_0 < \dots < x_n = b$ tal que $\Delta x_i < \delta$ para todo $i \in [n]$. Uma tal partição existe: tomando $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \frac{b-a}{\delta}$, é fácil ver que definindo $x_i = a + i \cdot \frac{b-a}{n}$ para cada $i \in [n]$ temos $\Delta x_i < \delta$ para cada $i \in [n]$. Agora, f é contínua em cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, de modo que, pelo teorema de Weierstrass (7.43), existem $a_i, b_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tais que $f(a_i) = m_i$ e $f(b_i) = M_i$, onde

$$M_i := \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x);$$

$$m_i := \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x).$$

Como $|b_i - a_i| \leq \Delta x_i < \delta$ para todo $i \in [n]$, pela continuidade uniforme de f

temos $M_i - m_i = |f(b_i) - f(a_i)| < \frac{\epsilon}{b-a}$ para todo $i \in [n]$, de modo que

$$S^+(f, P) - S_-(f, P) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta x_i < \frac{\epsilon}{b-a} \sum_{i=1}^n \Delta x_i = \epsilon.$$

Assim, pelo critério de integrabilidade, f é integrável. ■

(b) Como f é limitada, existe $M \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in [a, b]$. Se f tem, digamos $p \in \mathbb{N}$ pontos de descontinuidade, sejam eles $x_j \in [a, b]$, para cada $j \in [p]$. Agora, seja $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ arbitrário. Para cada $j \in [p]$, tome $[c_j, d_j]$ centrado em x_j tal que $[c_i, d_i] \cap [c_j, d_j] = \emptyset$ se $i \neq j$ e $\sum_{j=1}^p (d_j - c_j) < \epsilon$. Tomando $[a_j, b_j] = [c_j, d_j] \cap [a, b]$ para cada $j \in [p]$, sendo $A := [a, b] \setminus \bigcup_{j=1}^p [a_j, b_j]$ temos que f é uniformemente contínua em A .

Teorema 9.13. (a) Toda função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monótona é integrável.

(b) Se a função $f : [a, b] \rightarrow [m, M]$ é integrável e a função $g : [m, M] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, então a função $g \circ f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável.

Prova. (a) Suponha, num primeiro caso, que f seja crescente. Com isso, $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ para todo $x \in [a, b]$ e f é limitada em $[a, b]$. Para todo $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existe $n = n(\epsilon) \in \mathbb{N}$ suficientemente grande de modo que

$$n > \frac{(b-a)[f(b) - f(a)]}{\epsilon}.$$

Agora, a partição $P : a = x_0 < \dots < x_n = b$ definida por $x_i = a + i \cdot \frac{b-a}{n}$ para todo $i \in [n] \cup \{0\}$ é tal que $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$, $M_i = f(x_i)$ e $m_i = f(x_{i-1})$ (pois f é crescente), donde

$$\begin{aligned} S^+(f, P) - S_-(f, P) &= \sum_{i=1}^n \left[M_i \frac{b-a}{n} \right] - \sum_{i=1}^n \left[m_i \frac{b-a}{n} \right] \\ &= \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^n [f(x_i) - f(x_{i-1})] \\ &= \frac{b-a}{n} [f(b) - f(a)] \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

Assim, pelo critério de integrabilidade, f é integrável. No caso em que f é decrescente, a demonstração é análoga. ■

(b)

Teorema 9.14. Se $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ são funções integráveis em $[a, b]$, então

- (a) $f + g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável em $[a, b]$ e

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

- (b) $c \cdot f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (onde $c \in \mathbb{R}$ é uma constante) é integrável em $[a, b]$ e

$$\int_a^b [c \cdot f(x)] dx = c \cdot \int_a^b f(x) dx.$$

- (c) $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$ sempre que $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$.

- (d) $f \cdot g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável em $[a, b]$.

- (e) $|f| : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável em $[a, b]$ e

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Prova. Táboas, página 173.

Proposição 9.15. Se $I \subseteq \mathbb{R}$ é um intervalo fechado e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função integrável em I , então

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

para quaisquer $a, b, c \in I$.

Prova.

9.3 O Teorema Fundamental do Cálculo

Teorema 9.16. Sejam $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo e $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas.

- (a) Se $f'(x) = 0$ para todo $x \in I$ interior, então existe uma constante $C \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = C$ para todo $x \in I$.
- (b) Se $f'(x) = g'(x)$ para todo $x \in I$ interior, então existe uma constante $C \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = g(x) + C$ para todo $x \in I$.

Prova.

Definição 9.17. Seja $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo. Diremos que a função $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma *primitiva* da função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ se $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$.

Teorema 9.18. (Fundamental do Cálculo, parte I) Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável.

(a) A função $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) := \int_a^x f(t) dt$$

é uniformemente contínua em $[a, b]$.

(b) Se f é contínua em $x_0 \in [a, b]$, então F é derivável em x_0 e $F'(x_0) = f(x_0)$.

Prova.

(a) Precisamos provar que para todo $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existe $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |F(x) - F(y)| < \epsilon$$

para quaisquer $x, y \in [a, b]$. Como f é integrável, f é limitada, de modo que existe $M \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in [a, b]$. Como, para quaisquer $x, y \in [a, b]$, temos

$$|F(x) - F(y)| = \left| \int_x^y f(t) dt \right| \leq |M(y - x)| = M|x - y|,$$

basta tomar $\delta \leq \frac{\epsilon}{M}$. De fato, se $\delta = \frac{\epsilon}{M}$ e $x, y \in [a, b]$ são tais que $|x - y| < \frac{\epsilon}{M}$, então $|F(x) - F(y)| \leq M|x - y| < M \cdot \frac{\epsilon}{M} = \epsilon$, como queríamos.

(b) Para provar que F é derivável em x_0 e $F'(x_0) = f(x_0)$, basta provar que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right] = 0.$$

Mais precisamente, basta provar que para todo $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existe $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que

$$0 < |h| < \delta \Rightarrow \left| \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| < \epsilon$$

para todo $h \in \mathbb{R}_{\neq 0}$ tal que $x_0 + h \in [a, b]$. Da continuidade de f em x_0 , para todo $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existe $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que

$$|t - x_0| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(x_0)| < \epsilon$$

para todo $t \in [a, b]$. Veja que todo $h \in \mathbb{R}_{\neq 0}$ com $0 < |h| < \delta$ e $x_0 + h \in [a, b]$ é tal que $|t - x_0| \leq |h| < \delta$ para todo t no intervalo definido por x_0 e $x_0 + h$ (especificamente, $t \in [x_0, x_0 + h]$ se $h > 0$ ou $t \in [x_0 + h, x_0]$ se $h < 0$), de modo que $|f(t) - f(x_0)| < \epsilon$ para todo t no intervalo definido por x_0 e $x_0 + h$. Com isso,

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| &= \left| \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} [f(t) - f(x_0)] dt \right| \\ &\leq \frac{1}{|h|} \left| \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)| dt \right| \\ &< \frac{1}{|h|} \left| \int_{x_0}^{x_0+h} \epsilon dt \right| = \frac{1}{|h|} \epsilon |h| = \epsilon, \end{aligned}$$

o que prova que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right] = 0,$$

como havíamos afirmado. ■

(a)

(b)

Corolário 9.19. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a, b]$.

(a) A função $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) := \int_a^x f(t) dt$$

é uma primitiva de f em $[a, b]$.

(b) Se $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é qualquer outra primitiva de f , então

$$G(x) = G(a) + \int_a^x f(t) dt$$

para todo $x \in [a, b]$. Particularmente para $x = b$, temos

$$\int_a^b f(t) dt = G(b) - G(a).$$

Prova.

Teorema 9.20 (Fundamental do Cálculo, parte II). Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função integrável e $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma primitiva qualquer de f , então

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(t) dt$$

para todo $x \in [a, b]$. Particularmente para $x = b$, temos

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a).$$

Prova.

9.4 A Integral de Riemann

Definição 9.21. Seja $P : a < x_0 < \dots < x_n = b$ uma partição do intervalo $[a, b]$.

- (a) Definimos $\max \Delta x_i$ como a *norma* de P , a qual denotaremos por $\|P\|$, isto é, $\|P\| := \max \Delta x_i$.
- (b) (Partição marcada)
- (c) (Soma de Riemann)

Definição 9.22. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Diremos que a soma de Riemann $S(f, P, \xi)$ tem limite $L \in \mathbb{R}$ quando $\|P\|$ tende a 0, denotando isso por

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} S(f, P, \xi) = L,$$

se para todo $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existir $\delta = \delta(\epsilon) \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que

$$|S(f, P, \xi) - L| < \epsilon$$

para toda partição marcada (P, ξ) de $[a, b]$ com $\|P\| < \delta$.

Proposição 9.23. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. O limite das somas de Riemann, quando existe, é único, isto é, se

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} S(f, P, \xi) = L_1 \quad \text{e} \quad \lim_{\|P\| \rightarrow 0} S(f, P, \xi) = L_2,$$

então $L_1 = L_2$.

Prova.

Definição 9.24. Diremos que uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é *integrável em $[a, b]$ segundo Riemann* se $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} S(f, P, \xi)$ existir. Nesse caso, esse número real será chamado de *integral de f em $[a, b]$ segundo Riemann*, o qual será denotado por

$$\int_a^b f(x) dx,$$

isto é,

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{\|P\| \rightarrow 0} S(f, P, \xi).$$

Proposição 9.25. Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função integrável segundo Riemann, então f é limitada em $[a, b]$.

Prova.

Teorema 9.26. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função.

- (a) f é integrável segundo Riemann se, e somente se, é integrável segundo Darboux.
- (b) Sendo f integrável, as integrais de Riemann e Darboux coincidem.

Prova.

9.5 Integrais Impróprias

Definição 9.27. Seja

Capítulo 10

Demonstrações

Prova. (a) Consideremos o caso em que $x \rightarrow p$. Como $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L_2$, temos por definição que para todo $\epsilon > 0$ existem $\delta_1, \delta_2 > 0$ para os quais

$$0 < |x - p| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L_1| < \frac{\epsilon}{2};$$
$$0 < |x - p| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - L_2| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Tomando $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$, temos que para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - L_1| + |f(x) - L_2| < \epsilon.$$

Com isso, temos que, para todo $\epsilon > 0$,

$$\begin{aligned} |L_1 - L_2| &= |L_1 - f(x) + f(x) - L_2| \\ &\leq |L_1 - f(x)| + |f(x) - L_2| \\ &= |f(x) - L_1| + |f(x) - L_2| \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

Daí, $L_1 = L_2$. ■

(b) ■

(c) ■

(d) (Verificar) Como, por hipótese, $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow p} h(x)$, temos

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta_1 > 0 : 0 < |x - p| < \delta_1 \Rightarrow L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon;$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta_2 > 0 : 0 < |x - p| < \delta_1 \Rightarrow L - \epsilon < h(x) < L + \epsilon.$$

Pois tome $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, r\}$; daí, vem

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < |x - p| < \delta \Rightarrow L - \epsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < L + \epsilon,$$

e então

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < |x - p| < \delta \Rightarrow L - \epsilon < g(x) < L + \epsilon,$$

isto é, $\lim_{x \rightarrow p} g(x) = L$.

Prova. (a) (Verificar) Consideremos o caso em que $x \rightarrow p$. Precisamos provar que

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < |x - p| < \delta \Rightarrow \lim_{u \rightarrow a} g(u) - \epsilon < g[f(x)] < \lim_{u \rightarrow a} g(u) + \epsilon.$$

Como $\lim_{u \rightarrow a} g(u) = g(a)$, temos que provar que

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < |x - p| < \delta \Rightarrow g(a) - \epsilon < g[f(x)] < g(a) + \epsilon. \quad (1)$$

Por definição,

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow a} g(u) = g(a) \Leftrightarrow & \forall \epsilon > 0, \exists \delta_1 > 0 : \\ & a - \delta_1 < u < a + \delta_1 \Rightarrow g(a) - \epsilon < g(u) < g(a) + \epsilon, \end{aligned}$$

sendo esta última parte equivalente a

$$a - \delta_1 < f(x) < a + \delta_1 \Rightarrow g(a) - \epsilon < g[f(x)] < g(a) + \epsilon. \quad (2)$$

Como, por hipótese, $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = a$, temos que

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < |x - p| < \delta \Rightarrow a - \epsilon < f(x) < a + \epsilon. \quad (3)$$

Para $\epsilon = \delta_1$ em (3), existe um $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - p| < \delta \Rightarrow a - \delta_1 < f(x) < a + \delta_1. \quad (4)$$

Daí, (4), com (2), resulta que

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < |x - p| < \delta \Rightarrow g(a) - \epsilon < g[f(x)] < g(a) + \epsilon,$$

como queríamos provar. ■

(b) (Verificar) Precisamos provar que

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < |x - p| < \delta \Rightarrow \left| g[f(x)] - \lim_{u \rightarrow a} g(u) \right| < \epsilon,$$

isto é,

$$0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |g[f(x)] - L| < \epsilon.$$

Bem, por definição,

$$\lim_{u \rightarrow a} g(u) = g(a) \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta_1 > 0 : 0 < |u - a| < \delta_1 \Rightarrow |g(u) - L| < \epsilon.$$

Lembrando que $u := f(x)$, temos então

$$0 < |f(x) - a| < \delta_1 \Rightarrow |g[f(x)] - L| < \epsilon.$$

Por outro lado,

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = a \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta_2 > 0 : 0 < |x - p| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - a| < \epsilon,$$

e então, tomando $\epsilon = \delta_1$, $0 < |x - p| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - a| < \delta_1$.

Pois tome $\delta = \{\delta_2, r\}$; teremos $0 < |x - p| < \delta \Rightarrow 0 < |f(x) - a| < \delta_1$.

Prova.

Um *designador* é uma expressão que é um termo ou uma fórmula. Como se vê na definição de termo e fórmula, todo designador tem a forma $uv_1 \dots v_n$, onde u é um símbolo, v_1, \dots, v_n são designadores, e n é um número natural determinado por u . Por exemplo, se u é uma variável, então $n = 0$; se u é um símbolo funcional k -ário, então $n = k$; se u é \exists , então $n = 2$. Chamamos n de *índice* de u .

Dizemos que duas expressões são *compatíveis* se uma delas pode ser obtida adicionando alguma expressão (possivelmente a expressão vazia) ao final da outra.

- Se uv e $u'v'$ são compatíveis, então u e u' são compatíveis;
- se uv e uv' são compatíveis, então v e v' são compatíveis.

Lema. Seja n um natural fixo. Se u_1, \dots, u_n e u'_1, \dots, u'_n são designadores, e $u_1 \dots u_n$ e $u'_1 \dots u'_n$ são compatíveis, então u'_i é u_i , para $i = 1, \dots, n$.

Prova. Façamos indução no comprimento de $u_1 \dots u_n$, isto é, no número de símbolos totais dessa expressão. Sendo $|u_1 \dots u_n| = L$, provemos que se o resultado vale para toda sequência de designadores de comprimento menor que L , então vale para as sequências de designadores de comprimento L . Escrevendo u_1 como $vv_1 \dots v_k$, onde v é um símbolo e v_1, \dots, v_k são designadores, vemos que u'_1 é da forma $vv'_1 \dots v'_k$, onde v'_1, \dots, v'_k são designadores. Agora, como u_1 é compatível com u'_1 (isso segue do primeiro bullet point, fazendo u ser u_1 , v ser $u_2 \dots u_n$, u' ser u'_1 e v' ser $u'_2 \dots u'_n$), temos que $vv_1 \dots v_k$ é compatível com $vv'_1 \dots v'_k$, de modo que $v_1 \dots v_k$ é compatível com $v'_1 \dots v'_k$ (isso segue do segundo bullet point). Como, evidentemente, $|v_1 \dots v_k| < L$, pela hipótese de indução concluímos que v_i é v'_i para cada $i = 1, \dots, k$. Com isso, temos que u_1 é u'_1 , de modo que $u_2 \dots u_n$ é compatível com $u'_2 \dots u'_n$ (pela segunda observação), e como $|u_2 \dots u_n| < L$, pela hipótese de indução concluímos que u_i é u'_i para $i = 2, \dots, n$. Isso nos dá a tese de indução, já que já sabemos que u_1 é u'_1 .

Prova. Façamos indução forte no comprimento de $u_1 \dots u_n$, isto é, no número de símbolos totais dessa expressão. Sendo $|u_1 \dots u_n| = L$, provemos que se o resultado vale para toda sequência de designadores de comprimento menor que L , então vale para as sequências de designadores de comprimento L . Escrevendo u_1 como $vv_1 \dots v_k$, onde v é um símbolo e v_1, \dots, v_k são designadores, vemos que u'_1 é da forma $vv'_1 \dots v'_k$, onde v'_1, \dots, v'_k são designadores. Agora, como u_1 é compatível com u'_1 (isso segue da primeira observação “se uv e $u'v'$ são compatíveis, então u e u' são compatíveis”, fazendo u ser u_1 , v ser $u_2 \dots u_n$, u' ser u'_1 e v' ser $u'_2 \dots u'_n$), temos que $vv_1 \dots v_k$ é compatível com $vv'_1 \dots v'_k$, de modo que $v_1 \dots v_k$ é compatível com $v'_1 \dots v'_k$ (isso segue da segunda observação “se uv e uv' são compatíveis, então v e v' são compatíveis”). Como, evidentemente, $|v_1 \dots v_k| < L$, pela hipótese de indução concluímos que v_i é v'_i para cada

$i = 1, \dots, k$. Com isso, temos que \mathbf{u}_1 é \mathbf{u}'_1 , de modo que $\mathbf{u}_2 \dots \mathbf{u}_n$ é compatível com $\mathbf{u}'_2 \dots \mathbf{u}'_n$ (pela segunda observação), e como $|\mathbf{u}_2 \dots \mathbf{u}_n| < L$, pela hipótese de indução concluímos que \mathbf{u}_i é \mathbf{u}'_i para $i = 2, \dots, n$. Isso nos dá a tese de indução, já que já sabemos que \mathbf{u}_1 é \mathbf{u}'_1 .

Consideremos um conjunto enumerável correspondente aos símbolos do alfabeto e X o conjunto de todas as sequências finitas de símbolos. Seja Z o conjunto de todos os subconjuntos Y de X tais que

- as variáveis proposicionais pertencem a Y ;
- se A pertence a Y , então $(\neg A)$ pertence a Y ;
- se A e B pertencem a Y , então $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$ e $(A \leftrightarrow B)$ pertencem a Y .

Teorema 10.1. Suponha que uma propriedade vale para toda fórmula atômica e que, se vale para as fórmulas A e B , também vale para $(\neg A)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$ e $(A \leftrightarrow B)$. Então essa propriedade vale para todas as fórmulas da lógica proposicional.

Prova. Tomando F a interseção de Z , temos que F satisfaz as condições acima (isto é, pertence à família Z) e é o menor conjunto (na ordem da inclusão) que pertence a Z . Isto é, se $Y \in Z$, então $F \subset Y$. Segue facilmente, daí, o teorema. Deixamos os detalhes ao leitor.

Parte IV

Álgebra Linear

Capítulo 11

Matrizes e Sistemas Lineares

11.1 Definições Iniciais e Operações Matriciais

Definição 11.1. (a) Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ é uma função $A : \{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada par (i, j) , com $i \in [m]$ e $j \in [n]$, um elemento $a_{ij} \in \mathbb{R}$. A representação canônica de uma matriz é uma tabela com m linhas e n colunas

$$A := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Dizemos que a matriz A definida acima tem *tamanho*, ou *tipo*, $m \times n$ (lê-se m por n). Dizemos que a_{ij} , ou $[A]_{ij}$, é o *elemento*, ou a *entrada*, de posição i, j . O conjunto de todas as matrizes de tamanho $m \times n$ com entradas reais será denotado por $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$.

(b) Duas matrizes são ditas *iguais* se elas são do mesmo tipo e se os elementos correspondentes forem iguais. Mais especificamente, as matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{p \times q}$ são iguais se $m = p$, $n = q$ e $a_{ij} = b_{ij}$ para todos $i \in [m]$ e $j \in [n]$.

Definição 11.2. Dada uma matriz $A := (a_{ij})_{m \times n}$, definimos

$$L_i(A) := [a_{i1} \ a_{i2} \ \cdots \ a_{in}]$$

como a i -ésima linha da matriz A , com $i \in [m]$. Definimos, ainda,

$$C_j(A) := \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

como a j -ésima coluna da matriz A , com $j \in [n]$.

Operações Matriciais

Definição 11.3. A *soma*, ou *adição*, de duas matrizes do mesmo tipo $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$ é definida como a matriz $C = (c_{ij})_{m \times n}$ em que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ para todos $i \in [m]$ e $j \in [n]$. Denotamos isso com $C = A + B$.

Proposição 11.4. Para quaisquer matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{m \times n}$ e $C = (c_{ij})_{m \times n}$, valem

- (a) a associatividade da adição, isto é, $A + (B + C) = (A + B) + C$;
- (b) a comutatividade da adição, isto é, $A + B = B + A$;
- (c) a existência de um elemento neutro, isto é, $A + 0 = A$;
- (d) a existência de um oposto aditivo, isto é, $A + (-A) = 0$.

Prova.

Definição 11.5. A multiplicação de uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ por um *escalar* α é definida como a matriz $B = (b_{ij})_{m \times n}$ em que $b_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$ para todos $i \in [m]$ e $j \in [n]$. Denotamos isso com $B = \alpha \cdot A = \alpha A$.

Proposição 11.6. Para quaisquer matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$ e escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, temos que

- (a) $\alpha \cdot (\beta \cdot A) = (\alpha \cdot \beta) \cdot A$;
- (b) $\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$;
- (c) $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$;
- (d) $1 \cdot A = A$.

Prova.

Definição 11.7. (a) O *produto*, ou *multiplicação*, de duas matrizes, em que o número de colunas da primeira matriz é igual ao número de linhas da segunda,

$A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{n \times p}$, é definido como a matriz $C = (c_{ij})_{m \times p}$ em que

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj},$$

para todos $i \in [m]$ e $j \in [p]$. Denotamos isso por $C = A \cdot B = AB$.

(b) O produto de duas matrizes, em que o número de colunas da primeira matriz é igual ao número de linhas da segunda, $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{jk})_{n \times p}$ também pode ser definido como a matriz $C = (c_{ik})_{m \times p}$ em que

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk},$$

para todos $i \in [m]$, $k \in [p]$ e $j \in [n]$. Essa definição pode ser útil para evitar confusões com os índices.

Proposição 11.8. Para quaisquer matrizes A , B e C , de tamanhos compatíveis, e escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, valem

- (a)** a associatividade do produto, isto é, $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$;
- (b)** a existência de um elemento neutro, isto é $A \cdot I = I \cdot A = A$;
- (c)** a distributividade da multiplicação com relação à adição, isto é, $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ e $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$;
- (d)** a associatividade do produto de matrizes com relação ao produto por escalar, isto é, $(\alpha \cdot A) \cdot B = \alpha \cdot (A \cdot B) = A \cdot (\alpha \cdot B)$;

Prova.

Matrizes Especiais

Definição 11.9. Uma matriz $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ é dita

1. *invertível à esquerda* se existir uma matriz $B \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$ tal que $BA = I_n$;
2. *invertível à direita* se existir uma matriz $C \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$ tal que $AC = I_m$;
3. *invertível*, ou ainda, *não singular*, se for invertível à esquerda e à direita;
4. *singular* se não for invertível.

Proposição 11.10. Se uma matriz possui uma matriz inversa, então ela é única.

Prova. Se $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ é invertível, então, por definição, existem $B \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$ e $C \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$ tais que $BA = I_n$ e $AC = I_m$. Com isso, basta ver que

$$B = BI_m = B(AC) = (BA)C = I_n C = C,$$

isto é, $B = C$.

11.2 Operações e Matrizes Elementares

Dada uma matriz, podemos

- trocar a posição de duas de suas linhas;
- multiplicar uma de suas linhas por um escalar;¹
- e somar a uma de suas linhas uma outra linha que foi multiplicada por um escalar.

Estas são as chamadas *operações elementares*. Elas estão formalizadas na próxima definição e serão úteis no nosso estudo dos sistemas de equações lineares.

Definição 11.11. Sejam $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ e $p, q \in [m]$, com $p < q$.

(a) Definimos $A_{L_p \leftrightarrow L_q}$ como a matriz, também $m \times n$, tal que

$$L_i(A_{L_p \leftrightarrow L_q}) := \begin{cases} L_q(A) & \text{se } i = p \\ L_p(A) & \text{se } i = q \\ L_i(A) & \text{se } i \neq p, q \end{cases}.$$

(b) Seja $\lambda \in \mathbb{R}^*$ um escalar. Definimos $A_{L_p \leftarrow \lambda L_p}$ como a matriz, também $m \times n$, tal que

$$L_i(A_{L_p \leftarrow \lambda L_p}) := \begin{cases} \lambda L_p(A), & \text{se } i = p \\ L_i(A), & \text{se } i \neq p \end{cases}.$$

(c) Seja $\lambda \in \mathbb{R}^*$ um escalar. Definimos $A_{L_p \leftarrow L_p + \lambda L_q}$ como a matriz, também $m \times n$, tal que

$$L_i(A_{L_p \leftarrow L_p + \lambda L_q}) := \begin{cases} L_p(A) + \lambda L_q(A), & \text{se } i = p \\ L_i(A), & \text{se } i \neq p \end{cases},$$

¹Esperamos ser evidente que nos referimos a uma multiplicação que ocorre em *cada entrada* da referida linha.

e definimos $A_{L_q \leftarrow L_q + \lambda L_p}$ como a matriz, também $m \times n$, tal que

$$L_i(A_{L_q \leftarrow L_q + \lambda L_p}) := \begin{cases} L_q(A) + \lambda L_p(A), & \text{se } i = q \\ L_i(A), & \text{se } i \neq q \end{cases}.$$

Na proposição a seguir, mostramos que cada operação elementar equivale à multiplicar a matriz A por uma matriz dita *elementar*, obtida pela aplicação de operações elementares na matriz identidade I_m .

Proposição 11.12. Sejam $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ e $p, q \in [m]$, com $p < q$.

(a) Temos $I_{L_p \leftrightarrow L_q} \cdot A = A_{L_p \leftrightarrow L_q}$.

(b) Temos $I_{L_p \leftarrow \lambda L_p} \cdot A = A_{L_p \leftarrow \lambda L_p}$.

(c) Temos $I_{L_p \leftarrow L_p + \lambda L_q} \cdot A = A_{L_p \leftarrow L_p + \lambda L_q}$ e $I_{L_q \leftarrow L_q + \lambda L_p} \cdot A = A_{L_q \leftarrow L_q + \lambda L_p}$.

Prova.

Proposição 11.13. As operações (matrizes) elementares são invertíveis.

Prova. A demonstração é feita exibindo-se, explicitamente, as inversas.

- A inversa de $I_{L_p \leftrightarrow L_q}$ é ela mesma, isto é, $I_{L_p \leftrightarrow L_q} \cdot I_{L_p \leftrightarrow L_q} = I$.
- A inversa de $I_{L_p \leftarrow \lambda L_p}$ é $I_{L_p \leftarrow \frac{1}{\lambda} L_p}$, isto é,

$$I_{L_p \leftarrow \lambda L_p} \cdot I_{L_p \leftarrow \frac{1}{\lambda} L_p} = I_{L_p \leftarrow \frac{1}{\lambda} L_p} \cdot I_{L_p \leftarrow \lambda L_p} = I.$$

- A inversa de $I_{L_q \leftarrow L_q + \lambda L_p}$ é $I_{L_q \leftarrow L_q - \lambda L_p}$, isto é,

$$I_{L_q \leftarrow L_q + \lambda L_p} \cdot I_{L_q \leftarrow L_q - \lambda L_p} = I_{L_q \leftarrow L_q - \lambda L_p} \cdot I_{L_q \leftarrow L_q + \lambda L_p} = I.$$

Definição 11.14. (a) (Informal) Uma matriz A é dita *equivalente por linhas* a uma matriz B , de mesmo tamanho, se existir uma sequência finita de operações elementares que, quando aplicadas em A , tem B como resultado. Denotamos isso por

$$E \cdot A = B, \text{ em que } E = E_k \cdot E_{k-1} \cdot \dots \cdot E_2 \cdot E_1,$$

em que E_i é uma matriz elementar para cada $i \in [k]$.

(b) Diremos que uma matriz $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ é dita *equivalente por linhas* a uma matriz $B \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$, denotando isso por $A \sim B$, se existir uma sequência finita de matrizes elementares $E_1, \dots, E_k \in \mathcal{M}_{m \times m}(\mathbb{R})$ tais que

$$E_k \cdot E_{k-1} \cdot \dots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = B.$$

Proposição 11.15. A equivalência por linhas definida em (11.14) é uma relação de equivalência.

11.3 Eliminação Gaussiana e Decomposição LU

Definição 11.16. (a) (Intuitiva) Uma matriz será dita *escalonada* se (i) o primeiro elemento não nulo de cada linha está à esquerda do primeiro elemento não nulo de cada uma das linhas seguintes e (ii) as linhas nulas (se houver) estão abaixo das demais.

(b) Uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ será dita *escalonada* se existir uma sequência de índices $1 \leq b_1 < b_2 < \dots < b_r \leq n$ tal que $a_{ib_i} \neq 0$ para todo $i = 1, 2, \dots, r$ e $a_{ij} = 0$ para todo $1 \leq j < b_i$. Os termos a_{ib_i} são chamados de *pivôs*, enquanto o número de pivôs, r , é chamado de *posto*.

Proposição 11.17. Toda matriz é equivalente por linhas a uma matriz escalonada.

Prova. Hefez, 32 e 44.

Definição 11.18. (a) (Intuitiva) Uma matriz escalonada será dita *reduzida* se todo pivô for unitário e se todos os outros elementos da coluna de um pivô forem iguais a 0.

(b) Uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ será dita *escalonada reduzida* se existir uma sequência de índices $1 \leq b_1 < b_2 < \dots < b_r \leq n$ tal que $a_{ib_i} = 1$ para todo $1 \leq i \leq r$, $a_{kb_i} = 0$ para todo $k \neq i$ e $a_{ij} = 0$ para todo $1 \leq j < b_i$.

Teorema 11.19. Toda matriz é equivalente por linhas a uma única matriz escalonada reduzida.

Prova. Hefez, 32 e 44. Reginaldo, 68.

Proposição 11.20. Se $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ é uma matriz escalonada reduzida e $A \neq I_n$, então A possui pelo menos uma linha nula.

Prova. Reginaldo, 47.

11.4 Sistemas Lineares

Definição 11.21. (a) Uma *equação linear* nas incógnitas x_1, x_2, \dots, x_n é qualquer equação do tipo

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b,$$

onde $a_1, a_2, \dots, a_n, b \in \mathbb{R}$. Cada a_i é chamado de *coeficiente*, enquanto b é chamado de *termo independente*.

(b) O conjunto das soluções de uma equação linear é

$$\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b\}.$$

Definição 11.22. **(a)** Definimos *sistema de equações lineares* como todo conjunto finito de equações lineares nas incógnitas x_1, x_2, \dots, x_n . Com m equações, a representação canônica é

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}.$$

Por simplicidade, diremos apenas *sistema linear*, ou ainda, apenas *sistema*, em vez de sistema de equações lineares.

(b) O conjunto das soluções de um sistema linear é

$$\bigcap_{i=1}^m \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = b_i\}.$$

Fato 11.23. Todo sistema linear

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}.$$

pode ser representado matricialmente como $Ax = b$, onde

$$A := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n} \quad x := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n \times 1} \quad b := \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}_{m \times 1}.$$

Observe que $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$, $x \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{R})$ e $b \in \mathcal{M}_{m \times 1}(\mathbb{R})$. Trabalharemos, preferencialmente, com a forma matricial dos sistemas lineares, tendo em mente que as abordagens são equivalentes.

Definição 11.24. Seja $Ax = b$ um sistema linear como acima.

(a) Denominamos a matriz A como a *matriz incompleta*, ou ainda, a *matriz*, desse sistema. Ela também é chamada de *matriz de coeficientes*.

(b) Denominamos a matriz

$$[A|b] := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}_{m \times (n+1)}$$

como a *matriz completa*, ou a *matriz aumentada*, desse sistema.

Definição 11.25. Um sistema linear é dito *possível* se ele tiver pelo menos uma solução. Se houver mais de uma solução, ele será dito *possível e indeterminado*, no sentido do resultado a seguir; se a solução for única, então ele será dito *possível e determinado*. Por fim, se não houver solução alguma, ele será dito *impossível*.

Teorema 11.26. Se um sistema linear $Ax = b$ tem (pelo menos) duas soluções distintas, então, na verdade, ele tem infinitas soluções distintas.

Prova. Se $x_1 \neq x_2$ são soluções, então $x_3 := \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$, para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$, também é uma solução. De fato, basta observar que $Ax_3 = A[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] = b$.

Definição 11.27. Diremos que dois sistemas de equações lineares são equivalentes se eles têm o mesmo conjunto solução.

Proposição 11.28. Os sistemas lineares $Ax = b$ e $Cx = d$ são equivalentes se, e somente se, as matrizes $[A|b]$ e $[C|d]$ são equivalentes por linhas.

Prova. Reginaldo, 32.

Definição 11.29. Um sistema de equações lineares em que todos os termos independentes são nulos, isto é,

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{array} \right.,$$

ou ainda, em notação matricial,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

é dito *homogêneo*.

Proposição 11.30. Todo sistema homogêneo é possível.

Prova. Basta ver que $x = 0_{n \times 1}$ é uma solução, dita *trivial*.

Teorema 11.31. Todo sistema linear homogêneo em que o número de incógnitas é maior que o número de equações possui uma solução não trivial (e, portanto, possui infinitas soluções).

Prova. Elon, 27

Capítulo 12

Espaços Vetoriais

12.1 Espaços e Subespaços Vetoriais

Definição 12.1. Uma tripla $(V, +, \cdot)$ é um *espaço vetorial real* se no conjunto $V \neq \emptyset$ existem duas operações, $+ : V \times V \rightarrow V$ e $\cdot : \mathbb{R} \times V \rightarrow V$, para as quais

- A1: $u + (v + w) = (u + v) + w$ para quaisquer $u, v, w \in V$;
- A2: $u + v = v + u$ para quaisquer $u, v \in V$;
- A3: existe $0_V \in V$ tal que $u + 0_V = u$ para todo $u \in V$;
- A4: para cada $u \in V$ existe $v \in V$ tal que $u + v = 0_V$;
- M1: $\lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot u) = (\lambda_1 \cdot \lambda_2) \cdot u$ para quaisquer $u \in V$ e $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$;
- M2: $(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot u = \lambda_1 \cdot u + \lambda_2 \cdot u$ para quaisquer $u \in V$ e $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$;
- M3: $\lambda_1 \cdot (u + v) = \lambda_1 \cdot u + \lambda_1 \cdot v$ para quaisquer $u, v \in V$ e $\lambda_1 \in \mathbb{R}$;
- M4: $1 \cdot u = u$ para todo $u \in V$.

Os elementos de V são chamados de *vetores*. Para simplificar a notação, e quando não houver perigo de confusão, pomos $0 := 0_V$, $\lambda v := \lambda \cdot v = v$ e $-v := w$ se $v + w = 0$. Vamos nos referir ao espaço vetorial $(V, +, \cdot)$ simplesmente como o conjunto V .

Exemplo 12.2.

- O espaço \mathbb{R}^n , com soma e produto por escalar usuais, é um espaço vetorial.
- O conjunto \mathbb{R}^X de todas as funções reais $f : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, com soma e produto por escalar usuais, é um espaço vetorial.

- (c) O conjunto $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ de todos os polinômios em x , com soma e multiplicação por escalar usuais, é um espaço vetorial.
- (d) O conjunto $\mathbb{R}_{>0}$ dos números reais positivos, com as operações $x \oplus y := x \cdot y$ e $\alpha \odot x := x^\alpha$, é um espaço vetorial.

Prova.

Proposição 12.3. Seja $(V, +, \cdot)$ um espaço vetorial. Valem as seguintes afirmações.

- (a) (Unicidade)
- (b) (Integridade) Para quaisquer $u \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos
 - i. $\lambda \cdot 0_V = 0_V$;
 - ii. $0 \cdot u = 0_V$;
 - iii. se $\lambda \cdot u = 0_V$, então $\lambda = 0$ ou $u = 0_V$.
- (c) (Sinais) Para quaisquer $u \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos
 - i. $(-1) \cdot u = -u$;
 - ii. $-(-u) = u$;
 - iii. $(-\lambda) \cdot u = \lambda(-u) = -(\lambda \cdot u)$.
- (d) (Lei do Corte) Para quaisquer $u, v, w \in V$ e $\lambda, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, vale
 - i. $u + w = v + w \Rightarrow u = v$;
 - ii. $\lambda \neq 0 \wedge \lambda \cdot u = \lambda \cdot v \Rightarrow u = v$;
 - iii. $v \neq 0_V \wedge \lambda_1 u = \lambda_2 u \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2$.
- (e) Se $V \neq \{0\}$, então V é infinito.

Prova.

Definição 12.4. Um espaço vetorial $(W, +, \cdot)$ é um *subespaço vetorial* de um espaço vetorial $(V, +, \cdot)$ se $W \subseteq V$.

Teorema 12.5. Uma tripla $(W, +, \cdot)$ é um subespaço vetorial de $(V, +, \cdot)$ se $W \subseteq V$ e $u + v, \lambda \cdot v \in W$ para quaisquer $u, v \in W$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

Definição 12.6. Seja V um espaço vetorial. Um subconjunto $W \subseteq V$ é um *subespaço vetorial* de V se $u + v \in W$ e $\lambda u \in W$ para quaisquer $u, v \in W$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

Corolário 12.7. Sejam V um espaço vetorial. Se $u + \lambda \cdot v \in W$ para quaisquer $u, v \in W \subseteq V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então W é um subespaço vetorial de V .

Prova. Particularmente para $\lambda = 1$, temos $u + v \in W$. Particularmente para $v = 0_V$, temos $\lambda u \in W$. ■

Proposição 12.8. Se V é um espaço vetorial e $W \subseteq V$ é um subespaço, então W é um espaço vetorial.

Prova. Para provar que W é um espaço vetorial, precisamos verificar que (i) existem operações $+$ e \cdot bem definidas em W e que (ii) essas operações satisfazem as propriedades A1–A4 e M1–M4 de um espaço vetorial.

- i. Como esperado, as operações $+$ e \cdot de W serão as mesmas de V : como V é um espaço vetorial, as operações $+$ e \cdot , bem definidas em V , também estão bem definidas em qualquer subconjunto não vazio de V ; em particular, também em W . Por exemplo, podemos tomar $w_1, w_2 \in W$ e considerar sua soma, $w_1 + w_2$, porque $W \subset V \Rightarrow w_1, w_2 \in V$ e, em V , a operação $+$ está bem definida.
- ii. O fechamento das operações $+$ e \cdot em W garantem, de cara, A1–A2 e M1–M4. Falta, então, provar A3 e A4. Dado $w \in W$, temos que $0_V = 0 \cdot w \in W$; com isso, tomando $0_W := 0_V$, teremos um elemento neutro de $+$ em W porque $w + 0_W = w + 0_V = w$. Por fim, dado $w \in W$, $-w = (-1) \cdot w \in W$, e então o oposto aditivo de $w \in W$ está em W .

Logo, W é um espaço vetorial, como queríamos.

Exemplo 12.9.

- (a) Todo espaço vetorial V tem pelo menos dois subespaços vetoriais, dito *triviais*: $\{0_V\}$ e o próprio V .
- (b) O conjunto $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ dos polinômios de grau menor ou igual a n , juntamente com o polinômio nulo, é um subespaço de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Prova. (a) Elon, 10. Reginaldo, 26.

Proposição 12.10 (Interseção de subespaços). Se W_1 e W_2 são dois subespaços vetoriais de um espaço vetorial V , então

- (a) $W_1 \cap W_2$ é um subespaço vetorial;
- (b) $W_1 \cup W_2$ é um subespaço vetorial se, e somente se, $W_1 \subset W_2$ ou $W_2 \subset W_1$.

Prova.

- (a) Para quaisquer $u, v \in W_1 \cap W_2$, temos, em particular, $u, v \in W_1$ e $u, v \in W_2$. Como W_1 e W_2 são espaços vetoriais, temos que $u + \lambda v \in W_1$ e $u + \lambda v \in W_2$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, donde $u + \lambda v \in W_1 \cap W_2$. Logo $W_1 \cap W_2$ é um subespaço vetorial de V . ■
- (b) Por contradição, suponha que existam $w_1 \in W_1$ e $w_2 \in W_2$ tais que $w_1 \notin W_2$ e $w_2 \notin W_1$. Como, por hipótese, $W_1 \cup W_2$ é um subespaço vetorial,

$w := w_1 + w_2 \in W_1 \cup W_2$, isto é, $w \in W_1$ ou $w \in W_2$.

- Se $w \in W_1$, então $w + (-w_1) = w_2 \in W_1$, absurdo!
- Se $w \in W_2$, então $w + (-w_2) = w_1 \in W_2$, absurdo!

Logo, a prova da ida está completa. A volta é evidente. Logo, a prova está completa.

Corolário 12.11. Seja V um espaço vetorial e I um conjunto de índices. Se para cada $\lambda \in I$ o conjunto $W_\lambda \subseteq V$ for um subespaço vetorial de V , então $\bigcap_{\lambda \in I} W_\lambda$ é ainda um subespaço vetorial de V .

Prova. Elon, 10.

Definição 12.12. Sejam W_1 e W_2 subespaços vetoriais de um espaço vetorial V .

(a) (Soma de subespaços) Definimos $W_1 + W_2$ como sendo o conjunto de todos os vetores de V que são soma de um elemento de W_1 com um elemento de W_2 , isto é,

$$W_1 + W_2 := \{v \in V : \exists w_1 \exists w_2 (w_1 \in W_1 \wedge w_2 \in W_2 \wedge v = w_1 + w_2)\}.$$

(b) (Soma direta) Diremos que $W_1 \oplus W_2 := W_1 + W_2$ é a *soma direta* de W_1 e W_2 se $W_1 \cap W_2 = \{0_V\}$.

Proposição 12.13. Nos termos da definição acima, $W_1 + W_2$ é um subespaço vetorial de V .

Prova. Veja inicialmente que $W_1, W_2 \subset W_1 + W_2$.

i. Se $u, v \in W_1 + W_2$, então existem $u_1, v_1 \in W_1$ e $u_2, v_2 \in W_2$ tais que $u = u_1 + u_2$ e $v = v_1 + v_2$. Com isso,

$$u + v = (u_1 + u_2) + (v_1 + v_2) = \underbrace{(u_1 + v_1)}_{\in W_1} + \underbrace{(u_2 + v_2)}_{\in W_2},$$

de modo que $u + v$ é a soma de um vetor de W_1 com um vetor de W_2 , isto é, $u + v \in W_1 + W_2$.

ii. Se $u \in W_1 + W_2$, então existem $u_1 \in W_1$ e $u_2 \in W_2$ tais que $u = u_1 + u_2$. Com isso, para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\lambda u = \lambda(u_1 + u_2) = \underbrace{\lambda u_1}_{\in W_1} + \underbrace{\lambda u_2}_{\in W_2},$$

de modo que λu é a soma de um vetor de W_1 com um vetor de W_2 , isto é, $\lambda u \in W_1 + W_2$.

Assim, $W_1 + W_2$ é um subespaço vetorial de V .

Teorema 12.14. Sejam W_1 e W_2 dois subespaços vetoriais de um espaço vetorial V . Teremos $V = W_1 \oplus W_2$ se, e somente se, para cada $v \in V$ existirem únicos $w_1 \in W_1$ e $w_2 \in W_2$ tais que $v = w_1 + w_2$.

Prova. (\Rightarrow) Se $V = W_1 \oplus W_2$, então temos a existência da decomposição. Provemos, então, sua unicidade. Dado $v \in V$, sejam $v_1, w_1 \in W_1$ e $v_2, w_2 \in W_2$ tais que $v = v_1 + v_2 = w_1 + w_2$. Somando $[(-w_1) + (-v_2)]$, vem

$$\begin{aligned} v &= v_1 + v_2 = w_1 + w_2 \\ v_1 + v_2 + [(-w_1) + (-v_2)] &= w_1 + w_2 + [(-w_1) + (-v_2)] \\ \underbrace{v_1 + (-w_1)}_{\in W_1} &= \underbrace{w_2 + (-v_2)}_{\in W_2}. \end{aligned}$$

Como $W_1 \cap W_2 = \{0\}$, temos então que $v_1 = w_1$ e $v_2 = w_2$, como queríamos.

(\Leftarrow) Segue da hipótese que $V = W_1 + W_2$; provemos, então, que $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. Como $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$ (pelo menos $0 \in W_1 \cap W_2$), tome $v \in W_1 \cap W_2$, para o qual, por hipótese, existem únicos $w_1 \in W_1$ e $w_2 \in W_2$. Com isso, temos

$$v = \underbrace{w_1}_{\in W_1} + \underbrace{w_2}_{\in W_2} = \underbrace{(w_1 + v)}_{\in W_1} + \underbrace{(w_2 + (-v))}_{\in W_2},$$

e como a decomposição é única, temos $w_1 = w_1 + v$ e $w_2 = w_2 - v$, donde $v = 0$. Logo, $W_1 \cap W_2 = \{0\}$, como queríamos.

Exemplo 12.15. O conjunto das funções reais pares,

$$W_1 = \{f \in \mathbb{R}^{\mathcal{X}} : \forall x (x \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow f(-x) = f(x))\},$$

bem como o conjunto das funções reais ímpares,

$$W_2 = \{f \in \mathbb{R}^{\mathcal{X}} : \forall x (x \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow f(-x) = -f(x))\}$$

são subespaços de $\mathbb{R}^{\mathcal{X}}$. E ainda, temos que $\mathbb{R}^{\mathcal{X}} = W_1 \oplus W_2$.

Prova. Reginaldo, 35.

12.2 Combinações Lineares e Geradores

Definição 12.16. Seja $(V, +, \cdot)$ um espaço vetorial. Um vetor $u \in V$ é uma *combinação linear* dos vetores $u_1, u_2, \dots, u_n \in V$ se existem escalares $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in$

\mathbb{R} para os quais

$$u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i.$$

Teorema 12.17. Seja V um espaço vetorial e $\emptyset \neq S \subseteq V$ um subconjunto de vetores de V . O conjunto de todas as combinações lineares dos vetores de S , que denotaremos por $[S]$, é um subespaço vetorial de V .

Prova. Se $u, v \in [S]$, então, por definição, existem vetores e escalares

$$\begin{aligned} u_1, u_2, \dots, u_n, v_1, v_2, \dots, v_m &\in S \\ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

para os quais $u = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i$ e $v = \sum_{i=1}^m \alpha_i v_i$. Com isso, para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$u + \lambda v = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i + \sum_{i=1}^m (\lambda \alpha_i) v_i,$$

de modo que $u + \lambda v$ é uma combinação linear de vetores de S , isto é, $u + \lambda v \in [S]$. Logo, pelo resultado (12.7), $[S]$ é um subespaço vetorial de V .

Definição 12.18. Sejam V um espaço vetorial e $\emptyset \neq S \subseteq V$ um subconjunto de vetores de V .

- (a) Diremos que $[S]$ é o *subespaço gerado* por S , ou que S *gera* $[S]$. Diremos, ainda, que os elementos de S são *geradores* de $[S]$.
- (b) Se S é finito e $[S] = V$, diremos que V é *finitamente gerado* e que S é um *conjunto de geradores* para (ou de) V .
- (c) Convenciona-se pôr $[\emptyset] = \{0\}$.

Proposição 12.19. Sejam V um espaço vetorial e $\emptyset \neq S, T \subseteq V$ subconjuntos de vetores de V . Valem as seguintes afirmações.

- (a) $S \subseteq [S]$.
- (b) $[[S]] = [S]$.
- (c) Se S é um subespaço vetorial, então $[S] = S$.
- (d) $S \subset T \Rightarrow [S] \subset [T]$.
- (e) $[S \cup T] = [S] + [T]$.

Prova.

- (a) Se $u \in S$, então $u = 1u \in [S]$. ■
- (b) Pelo item anterior, $[S] \subseteq [[S]]$. Agora, se $u \in [[S]]$, então u é uma combinação linear de vetores de $[S]$, que por sua vez são combinações lineares de vetores de $[S]$, de modo que $u \in [S]$. Assim, $[[S]] \subseteq [S]$, de modo que $[[S]] = [S]$. ■
- (c) Se $u \in [S]$, então u é uma combinação linear de elementos de S ; como S é um subespaço vetorial, temos então $u \in S$, de modo que $[S] \subseteq S$. Como $S \subseteq [S]$, temos então $[S] = S$. ■
- (d) Se $u \in S$, então existem vetores $u_1, \dots, u_n \in S$ e escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tais que $u = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n$. Como $u_1, \dots, u_n \in S$, por ser $S \subseteq T$ vem $u_1, \dots, u_n \in T$, de modo que $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n \in T$. ■
- (e)

12.3 Dependência e Independência Linear

Definição 12.20. Seja $(V, +, \cdot)$ um espaço vetorial.

- (a) Os vetores $u_1, u_2, \dots, u_n \in V$ são *linearmente independentes* (L.I.) se a equação

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n = 0$$

possuir somente a solução trivial $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$. Caso contrário, ou seja, se existir pelo menos uma solução com pelo menos um $\lambda_i \neq 0$, diremos que os vetores $u_1, u_2, \dots, u_n \in V$ são *linearmente dependentes* (L.D.).

- (b) Um subconjunto finito $S \subseteq V^1$ é L.D. (L.I.) se os vetores de S são L.D. (L.I.).
- Um subconjunto infinito $S \subseteq V$ é L.D. se pelo menos um subconjunto finito de S é L.D..
 - Um subconjunto infinito $S \subseteq V$ é L.I. se todo subconjunto finito de S é L.I..

Proposição 12.21. Sejam $(V, +, \cdot)$ um espaço vetorial e $S \subseteq V$ não vazio. Valem as seguintes afirmações.

- (a) Se $|S| = 1$ e $0_V \notin S$, então S é L.I..
- (b) S é L.D. se, e somente se, pelo menos um vetor de S é combinação linear de outros vetores de S .

¹Sendo S finito, só pode ser $S = V$ se for $V = \{0\}$.

Equivalentemente, pela contrapositiva, S é L.I. se, e somente se, nenhum vetor de S é combinação linear de outros vetores de S .

- (c) Se $0_V \in S$, então S é L.D..

Equivalentemente, pela contrapositiva, se S é L.I., então $0_V \notin S$.

- (d) Suponha S L.I. e seja $u \in V$. Se $S \cup \{u\}$ é L.D., então $u \in [S]$.

Equivalentemente, pela contrapositiva, se $u \notin [S]$, então $S \cup \{u\}$ é L.I..

- (e) Sejam $S_1, S_2 \neq \emptyset$ subconjuntos de V tais que $S_1 \subseteq S_2$. Temos que

- i. se S_1 é L.D., então S_2 também é L.D..
- ii. se S_2 é L.I., então S_1 também é L.I..

- (f) Se S é finito e L.I., então cada vetor $u \in [S]$ se escreve de maneira única como combinação linear de vetores de S .

- (g) Se $u \in S$ é tal que $u \in [S \setminus \{u\}]$, então $[S] = [S \setminus \{u\}]$.

Prova.

- (a) Sendo $S = \{u\}$, se $\lambda \cdot u = 0_V$ então $\lambda \neq 0$ já que $u \neq 0_V$. Logo S é L.I.. ■

- (b) (\Rightarrow) Se S é L.D., então existem $v_1, v_2, \dots, v_n \in S$ para os quais vale

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = 0$$

com $\lambda_i \neq 0$ para pelo menos um $i \in [n]$. Suponha, sem perda de generalidade, que $i = 1$, isto é, que $\lambda_1 \neq 0$; com isso,

$$v_1 = \left(\frac{-\lambda_2}{\lambda_1} \right) v_2 + \left(\frac{-\lambda_3}{\lambda_1} \right) v_3 + \cdots + \left(\frac{-\lambda_n}{\lambda_1} \right) v_n,$$

de modo que $v_1 \in S$ é combinação linear de $v_2, v_3, \dots, v_n \in S$.

(\Leftarrow) Se $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$, com $v_1, \dots, v_n \in V$ e $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, então

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n + (-1)v = 0;$$

como $-1 \neq 0$, temos, por definição, que S é L.D.. ■

- (c) Basta ver que 0_V é combinação linear de quaisquer $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$: temos $0_V = 0v_1 + 0v_2 + \cdots + 0v_n$. Assim, pelo item anterior, S é L.D.. ■

- (d)

- (e)

- (f)

- (g) Esta afirmação nos diz que se um vetor de S é combinação linear de outros vetores de S , então ele pode ser removido do subespaço gerado por S sem alterá-lo.

12.4 Base e Dimensão

Lema 12.22. Seja $(V, +, \cdot)$ um espaço vetorial. Se um subconjunto finito $S \subseteq V$ é L.I., então todo subconjunto $T \subseteq [S]$ tal que $|T| = |S| + 1$ é L.D..

Prova. Façamos indução em $|S|$. Se $|S| = 1$, então $S = \{u_1\}$, com $u_1 \neq 0_V$ já que S é L.I.. Tomando $v_1, v_2 \in [S]$ distintos, existem escalares $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tais que $v_1 = \lambda_1 u_1$ e $v_2 = \lambda_2 u_1$. Multiplicando v_1 por λ_2 e v_2 por λ_1 , obtemos

$$\lambda_2 v_1 - \lambda_1 v_2 = 0_V,$$

isto é, uma combinação linear não trivial dos vetores de $T = \{v_1, v_2\}$, de modo que eles são L.D.. Isso completa a base de indução. Suponha então, por hipótese de indução, que o resultado vale para subconjuntos de V de $n - 1$ vetores. Agora, sejam $S = \{u_1, \dots, u_n\} \subsetneq V$ e $T = \{v_1, \dots, v_n, v_{n+1}\} \subseteq [S]$. Provemos que T é L.D.. Como $v_i \in [S]$ para todo $i \in [n + 1]$, existem escalares $a_{ij} \in \mathbb{R}$, com $i \in [n + 1]$ e $j \in [n]$, tais que

$$v_i = a_{i1} u_1 + \dots + a_{in} u_n$$

para todo $i \in [n + 1]$.

- $a_{i1} = 0$ para todo $i \in [n + 1]$. Nesse caso, temos

$$v_i = a_{i2} u_2 + \dots + a_{in} u_n$$

para todo $i \in [n + 1]$, donde $T \subsetneq [S \setminus \{u_1\}]$, e como $|S \setminus \{u_1\}| = n - 1$, segue da hipótese de indução que todo subconjunto de T com n vetores é L.D., de modo que T é L.D..

- $a_{i1} \neq 0$ para algum $i \in [n + 1]$. Nesse caso, suponha, sem perda de generalidade, que $a_{11} \neq 0$. Definindo

$$w_i := \frac{a_{i1}}{a_{11}} \cdot v_1 - v_i$$

para cada $i \in [n + 1] \setminus \{1\}$, fazendo as contas obtemos

$$w_i = \sum_{j=2}^n \left[\left(\frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1j} - a_{ij} \right) u_j \right].$$

Com isso, vemos que cada w_i é uma combinação linear dos vetores u_2, \dots, u_n , de modo que $T' := \{w_2, \dots, w_n, w_{n+1}\} \subsetneq [S \setminus \{u_1\}]$. Como $|S \setminus \{u_1\}| =$

$n - 1$ e $|T'| = n$, pela hipótese de indução temos que T' é L.D., de modo que existem n escalares, $\lambda_2, \dots, \lambda_{n+1} \in \mathbb{R}$, com algum $\lambda_i \neq 0$, tais que

$$\sum_{i=2}^{n+1} \lambda_i w_i = 0_V.$$

Daí, obtemos

$$\sum_{i=2}^{n+1} \left(\lambda_i \frac{a_{i1}}{a_{11}} \right) v_1 - \sum_{i=2}^{n+1} \lambda_i v_i = 0_V,$$

uma combinação linear não trivial de T , de modo que T é L.D..

Com isso, vemos que se o resultado vale para subconjuntos de V com $n - 1$ vetores, então ele também vale para subconjuntos de V com n vetores. Isso completa o passo indutivo e, portanto, completa a prova. ■

Corolário 12.23. Seja $(V, +, \cdot)$ um espaço vetorial. Se um subconjunto finito $S \subseteq V$ é L.I., então todo subconjunto $T \subseteq [S]$ tal que $|T| \geq |S| + 1$ é L.D..

Definição 12.24. Seja $(V, +, \cdot)$ um espaço vetorial. Um subconjunto $\mathcal{B} \subsetneq V$ é uma *base* de V se \mathcal{B} é L.I. e $[\mathcal{B}] = V$.

Teorema 12.25 (Completamento). Todo espaço vetorial finitamente gerado possui uma base.

Prova. Seja $(V, +, \cdot)$ um espaço vetorial finitamente gerado. Se $V = \{0\}$, então \emptyset é uma base de V , já que os vetores de \emptyset são L.I. por vacuidade e convencionamos pôr $[\emptyset] = \{0\}$. Suponha, então, $V \neq \{0\}$. Como V é finitamente gerado, existe um subconjunto finito $S := \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subsetneq V$ que gera V . Se S for L.I., então S será uma base de V . Se S for L.D., então vale

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = 0,$$

sendo $\lambda_i \neq 0$ para pelo menos um $i \in [n]$. Suponha, sem perda de generalidade, que $i = n$, isto é, que $\lambda_n \neq 0$; com isso,

$$v_n = \left(\frac{-\lambda_1}{\lambda_n} \right) v_1 + \left(\frac{-\lambda_2}{\lambda_n} \right) v_2 + \cdots + \left(\frac{-\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \right) v_{n-1},$$

de modo que v_n é uma combinação linear de $v_1, v_2, \dots, v_{n-1} \in S$. Pelo item (g) de (12.21), removemos v_n e obtemos $[S \setminus \{v_n\}] = [S] = V$. Repetindo esse processo (em um número finito de vezes, digamos, m , já que V é finitamente gerado) eventualmente obteremos um subconjunto L.I. de S com $n - m$ vetores que continua gerando V ; esse subconjunto vem a ser, então, a base de V . ■

Prova. Alternativamente, suponha que S é L.D.. Como $V \neq \{0\}$, existe $i \in [n]$ tal que $v_i \neq 0$. Suponha, sem perda de generalidade, que $i = 1$, isto é, que $v_1 \neq 0$; se todo v_i , com $i \in [n] \setminus \{1\}$, puder ser escrito como combinação linear de v_1 , então $V = [v_1]$ e $\{v_1\}$ é uma base de V . Se isso não ocorre, então existe algum v_i , com $i \in [n] \setminus \{1\}$, que não pode ser escrito como combinação linear de v_1 . Suponha, sem perda de generalidade, que $i = 2$; se todo v_i , com $i \in [n] \setminus \{1, 2\}$, puder ser escrito como combinação linear de v_1 e v_2 , então $V = [v_1, v_2]$ e $\{v_1, v_2\}$ é uma base de V . Repetindo esse processo (em um número finito de vezes, já que V é finitamente gerado) eventualmente obteremos um subconjunto L.I. de S que gera V ; esse subconjunto vem a ser, então, a base de V . ■

Teorema 12.26 (Invariância). Seja V um espaço vetorial finitamente gerado. Se \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_2 são bases de V , então $|\mathcal{B}_1| = |\mathcal{B}_2|$.

Prova. Como \mathcal{B}_1 é L.I. e $[\mathcal{B}_1] = V$, pelo lema (12.22) temos que $|\mathcal{B}_2| \leq |\mathcal{B}_1|$ já que $\mathcal{B}_2 \subsetneq V = [\mathcal{B}_1]$. De fato, se fosse $|\mathcal{B}_2| > |\mathcal{B}_1|$, pelo lema (12.22) \mathcal{B}_2 seria L.D., o que contradiz a hipótese. Analogamente, como \mathcal{B}_2 é L.I. e $[\mathcal{B}_2] = V$, temos que $|\mathcal{B}_1| \leq |\mathcal{B}_2|$. Sendo $|\mathcal{B}_2| \leq |\mathcal{B}_1|$ e $|\mathcal{B}_1| \leq |\mathcal{B}_2|$, temos que $|\mathcal{B}_1| = |\mathcal{B}_2|$, conforme afirmado. ■

Definição 12.27. A *dimensão* de um espaço vetorial finitamente gerado $(V, +, \cdot)$ é o número de vetores de qualquer uma de suas bases. Mais especificamente, se \mathcal{B} é uma base de V , a dimensão de V é definida como $\dim V := |\mathcal{B}|$.

Teorema 12.28. Seja $(V, +, \cdot)$ um espaço vetorial de dimensão finita $n > 0$.

- (a) Todo subconjunto de V com n vetores L.I. é uma base de V .
- (b) Todo subconjunto de V com n vetores que gera V é uma base de V .
- (c) Todo subconjunto de V que gera V tem pelo menos n elementos.
- (d) Todo subconjunto de V com $m < n$ vetores não é uma base de V .
- (e) Todo subconjunto de V com $m < n$ vetores L.I. pode ser completado para formar uma base de V .
- (f) Se W é um subespaço vetorial de V , então W tem dimensão finita e $\dim W \leq \dim V$. Em particular, se $\dim W = \dim V$, então $W = V$.
- (g) Se W_1 e W_2 são subespaços vetoriais de V , então

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2).$$

Prova. (a) Reginaldo, 88.

(b) Reginaldo, 88.

- (c) Reginaldo, 88.
- (d) Zani, 44.
- (e) Reginaldo, 88. Zani, 48.
- (f) Reginaldo, 87.
- (g) Reginaldo, 93. Zani, 49.

Definição 12.29. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita $n > 0$ e $\mathcal{B} := \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ uma base ordenada (indexada) de V . Para cada $v \in V$, diremos que os únicos $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tais que $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n$ são as *coordenadas* de v com relação à base \mathcal{B} e denotamos isso por

$$v := \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} := \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}_{v_1, v_2, \dots, v_n} .$$

Teorema 12.30. (Mudança de Base) Seja $(V, +, \cdot)$ um espaço vetorial de dimensão finita $n > 0$ e $v \in V$. Sejam \mathcal{B} e \mathcal{C} duas bases de um espaço vetorial de dimensão finita $(V, +, \cdot)$ e $v \in V$.

Capítulo 13

Transformações Lineares

Definição 13.1. Sejam $(V, +, \cdot)$ e $(W, +, \cdot)$ espaços vetoriais.

- (a) Uma *transformação linear* de $(V, +, \cdot)$ em $(W, +, \cdot)$ é uma função $T : V \rightarrow W$ tal que $T(u+v) = T(u)+T(v)$ e $T(\lambda \cdot u) = \lambda \cdot T(u)$ para quaisquer $u, v \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.
- (b) Um *operador linear* é uma transformação linear $T : V \rightarrow V$.

Exemplo 13.2. Sejam $(V, +, \cdot)$ e $(W, +, \cdot)$ espaços vetoriais.

- (a) A função $0 : V \rightarrow W$ definida por $0(v) = 0_W$ para todo $v \in V$ é uma transformação linear, chamada de *transformação nula*.
- (b) A função $I_V : V \rightarrow V$ definida por $I_V(v) = v$ para todo $v \in V$ é um operador linear, chamada de *transformação identidade*.

Proposição 13.3. Uma função $T : V \rightarrow W$ é uma transformação linear se, e somente se,

$$T\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i T(v_i)$$

para quaisquer $n \in \mathbb{N}$, $v_1, \dots, v_n \in V$ e $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.

Prova.

Proposição 13.4. Seja $T : V \rightarrow W$ uma transformação linear. Valem as seguintes afirmações.

- (a) $T(0_V) = 0_W$.

Definição 13.5. Sejam V e W espaços vetoriais. O conjunto de todas as transformações lineares de V em W é denotado por $\mathcal{L}(V, W)$

Definição 13.6. Seja $T : V \rightarrow W$ uma transformação linear.

(a) O *núcleo* de T é definido como

$$\ker T := \{v \in V : T(v) = 0_W\}.$$

(b) A *imagem* de T é definida como

$$\text{Im } T := \{w \in W : \exists v \in V \wedge T(v) = w\}.$$

Teorema 13.7. Seja $T : V \rightarrow W$ uma transformação linear.

(a) $\ker T$ é um subespaço vetorial de V .

(b) $\text{Im } T$ é um subespaço vetorial de W .

13.1 Matrizes

O conjunto $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ de todas as matrizes $m \times n$ com entradas reais, com soma e produto por escalar usuais (vistas no capítulo 1), é um espaço vetorial.

Exemplo 13.8. (a) Dado $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, temos que

$$W := \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0\}$$

é um subespaço de \mathbb{R}^n . No caso desinteressante em que $a_i = 0$ para todo $i \in [n]$, o subespaço W é todo o \mathbb{R}^n . Se, por outro lado, existe pelo menos um $i \in [n]$ tal que $a_i \neq 0$, diremos que W é um *hiperplano* que passa pela origem.

(b) Seja $m \in \mathbb{N}$. Para cada $i \in [m]$, sendo $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) \in \mathbb{R}^n$, pelo item anterior temos que cada

$$W_i := \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = 0\}$$

é um subespaço vetorial de V . Pela proposição (12.11), temos que $W := W_1 \cap W_2 \cap \cdots \cap W_m$ é ainda um subespaço vetorial de V , que é exatamente o conjunto das soluções do sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}.$$

Outra maneira de verificar que o conjunto das soluções de um sistema linear homogêneo é um espaço vetorial é a seguinte.

O conjunto das matrizes simétricas,

$$W_1 = \{A \in \mathcal{M}_{n \times n} : A^T = A\},$$

bem como o conjunto das matrizes antissimétricas,

$$W_2 = \{A \in \mathcal{M}_{n \times n} : A^T = -A\},$$

são subespaços de $\mathcal{M}_{n \times n}$. E ainda, temos que $\mathcal{M}_{n \times n} = W_1 \oplus W_2$.

Capítulo 14

Geometria Analítica

Parte V

Cálculo II

Capítulo 15

Topologia do Espaço Euclidiano

Definição 15.1. A projeção de $A \in \mathbb{R}^n$ em $B \in \mathbb{R}_{\neq 0}^n$ é definida como

$$\text{proj}_B A := \left(\frac{A \cdot B}{\|B\|^2} \right) B.$$

Definição 15.2. Uma reta no \mathbb{R}^n que passa pelo ponto $P \in \mathbb{R}^n$ e é paralela ao vetor $A \in \mathbb{R}_{\neq 0}^n$ é a imagem da função $L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $L(t) = P + tA$. Denota-se $L(P, A) := \text{Im } L$, isto é,

$$L(P, A) := \{X \in \mathbb{R}^n : \exists t(t \in \mathbb{R} \wedge X = P + tA)\}.$$

Proposição 15.3. Sejam $P, Q, A, B \in \mathbb{R}^n$.

- (a) $L(P, A) = L(P, B) \Leftrightarrow A \parallel B$.
- (b) $L(P, A) = L(Q, B) \Leftrightarrow Q \in L(P, A) \vee P \in L(Q, B)$.
- (c) Se $P \neq Q$, então existe uma única reta $L \subsetneq \mathbb{R}^n$ tal que $P, Q \in L$.

Prova.

- (a)
- (b)
- (c) Pois tome $L = L(P, Q - P)$. Temos $P \in L$ pois $P = P + 0 \cdot (Q - P)$ e temos $Q \in L$ pois $Q = P + 1 \cdot (Q - P)$. Agora, seja L' uma reta tal que $P, Q \in L'$. Como $P \in L'$, temos por definição $L' = L(P, A)$ para algum vetor $A \in \mathbb{R}_{\neq 0}^n$. Como $Q \in L' = L(P, A)$, existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $Q = P + tA$. Daí, $Q - P = tA$, e como $Q - P \neq 0$, temos $t \neq 0$ e $Q - P \parallel A$, donde $L' = L$ pelo primeiro item. ■

Definição 15.4. Duas retas $L(P, A)$ e $L(Q, B)$ são *paralelas* se $A \parallel B$. Isso é denotado por $L(P, A) \parallel L(Q, B)$.

Teorema 15.5 (Paralelas). Seja $L \subsetneq \mathbb{R}^n$ uma reta. Para todo ponto $Q \notin L$ existe uma única reta $L' \subsetneq \mathbb{R}^n$ tal que $Q \in L'$ e $L' \parallel L$.

Prova. Seja $L = L(P, A)$ e tome $L' = L(Q, A)$. De cara, $Q \in L'$ e $L' \parallel L$. A unicidade segue imediatamente da proposição (15.3). ■

Teorema 15.6. Sejam $P, A \in \mathbb{R}^2$. Se $N \in \mathbb{R}^2$ é tal que $N \cdot A = 0$, então

- i. $\{X \in \mathbb{R}^2 : (X - P) \cdot N = 0\} = L(P, A);$

ii. vale

$$\|X\| \geq \frac{|P \cdot N|}{\|N\|}$$

para todo $X \in L(P, A)$, com igualdade somente se $X = \text{proj}_N P$;

iii. Se $Q \notin L(P, A)$, então

$$\|X - Q\| \geq \frac{|(P - Q) \cdot N|}{\|N\|}$$

para todo $X \in L(P, A)$, com igualdade somente se $Q = \text{proj}_N (P - Q)$;

Prova. Comecemos com um lema: se $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$ são tais que $(a, b) \cdot (c, d) = 0$, então $(c, d) = t \cdot (b, -a)$ para algum $t \in \mathbb{R}$.

Definição 15.7. Seja $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Um *plano* no \mathbb{R}^n que passa por um ponto $P \in \mathbb{R}^n$ e é gerado por vetores $u, v \in \mathbb{R}^n$, linearmente independentes, é a imagem da função $\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $\alpha(s, t) = P + su + tv$. Denota-se $\{P + su + tv\} := \text{Im } \alpha$, isto é,

$$\{P + su + tv\} = \{X \in \mathbb{R}^n : \exists s \exists t (s, t \in \mathbb{R} \wedge X = P + su + tv)\}.$$

Teorema 15.8.

- (a) Se $M = \{P + sA + tB\}$ e $M' = \{P + sC + tD\}$ são planos, então $M = M'$ se, e somente se, $[A, B] = [C, D]$.
- (b) Se $\alpha = \{P + su + tv\}$ e $\beta = \{Q + su + tv\}$ são planos, então $\alpha = \beta$ se, e somente se, $Q \in \alpha$ ou $P \in \beta$.
- (c) Se $P, Q, R \in \mathbb{R}^n$ não são colineares, então existe um único plano $\alpha \subsetneq \mathbb{R}^n$ tal que $P, Q, R \in \alpha$.

Prova.

(a) $\Rightarrow)$ bla bla

$\Leftarrow)$

(b) $\Rightarrow)$ bla bla

$\Leftarrow)$

(c)

Definição 15.9. Sejam $\alpha = \{P + sA + tB\}$ e $\beta = \{Q + sC + tD\}$ planos no \mathbb{R}^n .

(a) Um vetor $v \in \mathbb{R}^n$ é *paralelo ao plano* α se $v \in [A, B]$.

(b) Os planos α e β são *paralelos* se $[A, B] = [C, D]$.

Teorema 15.10 (Paralelas). Seja $\alpha \subsetneq \mathbb{R}^n$ um plano. Para todo ponto $Q \notin \alpha$ existe um único plano $\beta \subsetneq \mathbb{R}^n$ tal que $Q \in \beta$ e $\beta \parallel \alpha$. ■

Prova.

Teorema 15.11.

(a) Dois vetores $u, v \in \mathbb{R}^n$ são L.I. se, e somente se, existe uma reta $r \subsetneq \mathbb{R}^n$ tal que $u, v, 0 \in r$.

(b) Três vetores $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ são L.I. se, e somente se, existe um plano $\alpha \subsetneq \mathbb{R}^n$ tal que $u, v, w, 0 \in \alpha$.

Prova.

(a)

(b)

Definição 15.12. Uma *bola aberta de raio* $r \in \mathbb{R}_{>0}$ e *centro* $a \in \mathbb{R}^n$ é definida como

$$B_r(a) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| < r\}.$$

Definição 15.13.

(a) Um ponto $a \in \mathbb{R}^n$ é um *ponto interior* de $A \subseteq \mathbb{R}^n$ se existe $r \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $B_r(a) \subseteq A$.

(b) O *interior* de $A \subseteq \mathbb{R}^n$, denotado por $\text{int } A$, é definido como o conjunto de todos os pontos interiores de A , isto é,

$$\text{int } A = \{x \in A : \exists r \in \mathbb{R}_{>0} \wedge B_r(x) \subseteq A\}.$$

(c) Um subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ é *aberto* se $\text{int } A = A$.

Corolário 15.14. Toda bola aberta é um conjunto aberto.

Prova. Ver [10], página 113. ■

Definição 15.15. Um ponto $a \in \mathbb{R}^n$ é um *ponto de acumulação* de $A \subseteq \mathbb{R}^n$ se $B_r(a) \cap A_{\neq a} \neq \emptyset$ para todo $r \in \mathbb{R}_{>0}$.

Definição 15.16.

- (a) Um ponto $a \in \mathbb{R}^n$ é um *ponto exterior* de $A \subseteq \mathbb{R}^n$ se existe $r \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $B_r(a) \cap A = \emptyset$.
- (b) O *exterior* de $A \subseteq \mathbb{R}^n$, denotado por $\text{ext } A$, é definido como o conjunto de todos os pontos exteriores de A , isto é,

$$\text{ext } A = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists r (r \in \mathbb{R}_{>0} \wedge B_r(x) \cap A = \emptyset)\}.$$

Definição 15.17. Um ponto $a \in \mathbb{R}^n$ é um *ponto da fronteira* de $A \subseteq \mathbb{R}^n$ se $a \notin \text{int } A$ e $a \notin \text{ext } A$. O conjunto de todos os pontos da fronteira de A é denotado por ∂A .

Capítulo 16

Caminhos

Definição 16.1. Uma *função vetorial de variável real* é uma função $f : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$.

As funções vetoriais de variável real que nos interessam, nesse momento, são aquelas cujo domínio é um intervalo ou uma união de intervalos.

Proposição 16.2. Seja $f : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função. Existem e são únicas as funções $f_i : X \rightarrow \mathbb{R}$, com $i \in [n]$, tais que

$$f(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$$

para todo $t \in X$. Isso é denotado por $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$.

Prova. Trivial. ■

Definição 16.3. Uma função $f : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ tem limite $L \in \mathbb{R}^n$ quando t tende ao ponto $t_0 \in X'$ se para todo $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existe $\delta = \delta(\epsilon, t_0) \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que

$$0 < |t - t_0| < \delta \rightarrow \|f(t) - L\| < \epsilon$$

para todo $t \in X$. Isso é denotado por

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = L.$$

Proposição 16.4 (Unicidade do limite). Se uma função $f : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ tem limites $L_1, L_2 \in \mathbb{R}^n$, então $L_1 = L_2$.

Prova.

Proposição 16.5. Sejam $F : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $t_0 \in X'$ e $L \in \mathbb{R}^n$. Vale

$$\lim_{t \rightarrow t_0} F(t) = L \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow t_0} \|F(t) - L\| = 0.$$

Prova. Ver [10], p. 124. ■

Teorema 16.6. Sejam $f : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $t_0 \in X'$ e $L \in \mathbb{R}^n$, com $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ e $L = (L_1, L_2, \dots, L_n)$. Para todo $i \in [n]$, vale

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = L \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow t_0} f_i(t) = L_i.$$

Prova. Ver [10], p. 124. ■

Proposição 16.7 (Propriedades operatórias). Oi

Prova.

Definição 16.8 (Continuidade). Sejam $f : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $t_0 \in X \cap X'$.

(a) f é contínua em t_0 se

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = f(t_0).$$

(b) f é contínua em $Y \subseteq X$ se f for contínua em todo $t_0 \in Y$.

(c) f é contínua se f for contínua em X .

Corolário 16.9. Sejam $f : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função, com $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$, e $t_0 \in X \cap X'$. f é contínua em t_0 se, e somente se, f_i é contínua em t_0 , para todo $i \in [n]$.

Definição 16.10. Sejam $f : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $t_0 \in X \cap X'$.

(a) f é derivável, ou diferenciável, em t_0 , se existir o limite

$$f'(t_0) := \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}.$$

Mais precisamente, f é derivável em t_0 se existir o limite $\lim_{t \rightarrow t_0} g(t)$, onde $g : X \setminus \{t_0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é a função definida por

$$g(t) := \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}.$$

Sendo F derivável em t_0 , ou ainda, diferenciável em t_0 , dizemos que o limite $F'(t_0)$ é a derivada de F em t_0 .

(b) Diremos que F é derivável em $Y \subseteq X$ se F for derivável em todo $t \in Y$; se for $Y = X$, diremos que F é derivável.

Proposição 16.11. Sejam $F : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $t_0 \in X$. Sendo $F = (f_1, f_2, \dots, f_n)$, temos que F é derivável em t_0 se, e somente se, f_i é derivável em t_0 para todo $i \in [n]$. Sendo F derivável em t_0 , temos que

$$F'(t) = (f'_1(t), f'_2(t), \dots, f'_n(t)).$$

Prova.

Definição 16.12. Seja $F : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ derivável em $t_0 \in X$, com $F'(t_0) \neq 0$.

(a)

Proposição 16.13 (Propriedades operatórias).

Prova.

Proposição 16.14 (Regra da cadeia).

Proposição 16.15. Se $F : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função vetorial derivável em X tal que $\|F(t)\| = k \in \mathbb{R}$ para todo $t \in X$, então $F(t) \cdot F'(t) = 0$ para todo $t \in X$.

Prova.

Definição 16.16. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função. A soma de Riemann $S(F, P, \xi)$ tem limite $L \in \mathbb{R}^n$ quando $\|P\|$ tende a 0 se para todo $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existir $\delta = \delta(\epsilon) \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que

$$\|S(f, P, \xi) - L\| < \epsilon$$

para toda partição marcada (P, ξ) de $[a, b]$ com $\|P\| < \delta$. Isso é denotado por

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} S(f, P, \xi) = L.$$

Proposição 16.17. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função. O limite das somas de Riemann, quando existe, é único, isto é, se

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} S(f, P, \xi) = L_1 \quad \text{e} \quad \lim_{\|P\| \rightarrow 0} S(f, P, \xi) = L_2,$$

então $L_1 = L_2$.

Prova.

Definição 16.18. Uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é *integrável em $[a, b]$ segundo Riemann* se $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} S(f, P, \xi)$ existe. Nesse caso, esse número real é chamado de *integral de f em $[a, b]$ segundo Riemann* e é denotado por

$$\int_a^b F(x) dx,$$

isto é,

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{\|P\| \rightarrow 0} S(f, P, \xi).$$

Proposição 16.19. Seja $f : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função com $F = (f_1, f_2, \dots, f_n)$. f é integrável em $[a, b]$ se, e somente se, f_i é integrável em $[a, b]$ para todo $i \in [n]$, sendo nesse caso

$$\int_a^b F(t) dt = \left(\int_a^b f_1(t) dt, \int_a^b f_2(t) dt, \dots, \int_a^b f_n(t) dt \right).$$

Prova.

Proposição 16.20 (Propriedades operatórias).

Teorema 16.21. (Fundamental do Cálculo, parte I) Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função integrável.

(a) A função $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por

$$F(x) := \int_a^x f(t) dt$$

é uniformemente contínua em $[a, b]$.

(b) Se f é contínua em $x_0 \in [a, b]$, então F é derivável em x_0 e $F'(x_0) = f(x_0)$.

Prova.

Corolário 16.22. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função contínua em $[a, b]$.

(a) A função $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por

$$F(x) := \int_a^x f(t) dt$$

é uma primitiva de f em $[a, b]$.

(b) Se $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é qualquer outra primitiva de f , então

$$G(x) = G(a) + \int_a^x f(t) dt$$

para todo $x \in [a, b]$. Particularmente para $x = b$, temos

$$\int_a^b f(t) dt = G(b) - G(a).$$

Prova.

Teorema 16.23 (Fundamental do Cálculo, parte II). Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função integrável e $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma primitiva qualquer de f , então

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(t) dt$$

para todo $x \in [a, b]$. Particularmente para $x = b$, temos

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a).$$

Prova.

Proposição 16.24. Seja $C \in \mathbb{R}^n$. Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função integrável, então a função $C \cdot f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável e

$$C \cdot \left[\int_a^b f(t) dt \right] = \int_a^b [C \cdot f(t)] dt.$$

Prova.

Proposição 16.25. Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\|f\| : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ são funções integráveis em $[a, b]$, então

$$\left\| \int_a^b f(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\| dt.$$

16.1 Curvas

No que segue, $I, J \subseteq \mathbb{R}$ são intervalos.

Definição 16.26.

- (a) Uma *curva* no \mathbb{R}^n é uma função vetorial de variável real $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$.
- (b) Uma *curva paramétrica* é uma curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínua. O *traço* da curva é a imagem de I por α , isto é, o conjunto $\alpha(I)$.
- (c) Uma curva paramétrica $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é *regular* se α é derivável em I com $\alpha'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$.

Definição 16.27. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma curva paramétrica regular. Uma curva paramétrica $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma *reparametrização* de α se $\beta(J) = \alpha(I)$ e se existe uma *função de reparametrização* $\varphi : J \rightarrow I$ bijetora, derivável em J , com $\varphi'(t) \neq 0$, tal que $\beta(t) = \alpha(\varphi(t))$.

Proposição 16.28 (Reparametrização conserva regularidade). Se uma curva paramétrica $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma reparametrização de uma curva paramétrica regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, então é β regular. ■

Prova.

Definição 16.29. Sejam $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma curva paramétrica regular e $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma reparametrização de α por meio de uma função de reparametrização $\varphi : J \rightarrow I$.

- (a) β é uma reparametrização *positiva* se $\varphi'(t) > 0$ para todo $t \in J$.
- (b) β é uma reparametrização *negativa* se $\varphi'(t) < 0$ para todo $t \in J$.

Definição 16.30. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma curva paramétrica derivável e com derivada integrável.

- (a) O *comprimento do arco* de $a \in I$ até $b \in I$ é definido como

$$L_a^b(\alpha) := \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt.$$

- (b) Seja $t_0 \in I$. A *função comprimento de arco* de α é definida como

$$L(t) := \int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\| du.$$

Proposição 16.31. Se $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma curva paramétrica regular e $\beta : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma reparametrização de α , então $L_c^d(\beta) = L_a^b(\alpha)$.

Proposição 16.32. A função comprimento de arco de uma curva paramétrica $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função de reparametrização.

Definição 16.33. Uma curva paramétrica $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é *reparametrizada por comprimento de arco* se $\|\alpha'(t)\| = 1$ para todo $t \in I$.

Definição 16.34.

- (a) Um caminho $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é *retificável* se existe $M \in \mathbb{R}$ tal que

$$L_a^b(\alpha, P) \leq M$$

para toda partição $P : a = t_0 < \dots < t_k = b$ de $[a, b]$, onde

$$L_a^b(\alpha, P) := \sum_{i=1}^k \|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\|.$$

- (b) Seja $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ um caminho retificável. O *comprimento da curva* descrita por α é definido como

$$L_a^b(\alpha) := \sup \{L_a^b(\alpha, P) : P \in \mathcal{P}[a, b]\}.$$

Teorema 16.35. Se um caminho $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é de classe C^1 em $[a, b]$, então

$$L_a^b(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt.$$

Prova.

■

Capítulo 17

Campos Escalares e Vetoriais

Definição 17.1. Sejam $m, n \in \mathbb{N}$.

- (a) Um *campo* é uma função $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.
- (b) Um campo $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é um *campo escalar* se $m = 1$. Ou seja, um *campo escalar* é uma função $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.
- (c) Um campo $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é um *campo vetorial* se $m \geq 2$.

Teorema 17.2. Se $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é um campo, então existem e são únicas as funções $f_i : X \rightarrow \mathbb{R}$, com $i \in [m]$, tais que

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))$$

para todo $x \in X$. Isso é denotado por $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$.

Prova. ■

Definição 17.3. Uma função $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tem limite $L \in \mathbb{R}^m$ quando x tende a $a \in X'$ se para todo $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existe $\delta = \delta(\epsilon, a) \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que

$$0 < \|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - L\| < \epsilon$$

para todo $x \in X$. Isso é denotado por

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L.$$

Proposição 17.4. Sejam $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $L \in \mathbb{R}^m$ e $a \in X'$. Vale

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{\|x - a\| \rightarrow 0} \|f(x) - L\| = 0.$$

Prova.

■

Proposição 17.5 (Propriedades operatórias).

Definição 17.6 (Continuidade). Seja $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ um campo.

- (a) Dizemos que f é *contínua em $a \in A$* se para todo $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existe $\delta = \delta(\epsilon, a) \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que

$$\|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \epsilon$$

para todo $x \in A$.

- (b) Dizemos que f é *contínua em $X \subseteq A$* se f é contínua em todo ponto $a \in X$. Mais especificamente, f é contínua em X se para cada $a \in X$ e cada $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existe $\delta = \delta(\epsilon, a) \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que

$$\|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \epsilon$$

para todo $x \in A$.

Teorema 17.7. Uma função $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é contínua em $a \in A \cap A'$ se, e somente se, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Prova.

■

Teorema 17.8. Sejam $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $g : B \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ funções tais que $f(A) \subseteq B$. Se f é contínua em $a \in A$ e se g é contínua em $f(a) \in B$, então a função composta $g \circ f : X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ é contínua em a .

Prova.

■

Proposição 17.9. Sejam $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in X \cap X'$ tais que $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe. Se $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua em $t_0 \in I$, com $\alpha(t_0) = a$, e $\alpha(t) \in X$ para todo $t \in I$, com $t \neq t_0 \Rightarrow \alpha(t) \neq \alpha(t_0)$, então

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(\alpha(t)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x).$$

Prova. Ver [10], p. 165, exemplo 4.

■

Teorema 17.10 (Compostas).

- (a) Sejam $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : Y \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções tais que $f(X) \subseteq Y$. Se f é contínua em $a \in X$ e g é contínua em $f(a) \in Y$, então a função composta $g \circ f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em a .
- (b) Sejam $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma curva tais que $\alpha(t) \in X$ para todo $t \in I$. Se α é contínua em $a \in I$ e f é contínua em $f(a) \in X$, então a função composta $f \circ \alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em a .

- (c)** Sejam $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $f_1, \dots, f_n : Y \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funções tais que $(f_1(x), \dots, f_n(x)) \in X$ para todo $x \in Y$. Se f_1, \dots, f_n são contínuas em $a \in Y$, e se f é contínua em $(f_1(a), \dots, f_n(a))$, então a função composta $f((f_1(x), \dots, f_n(x)))$ é contínua em a .

Prova. Ver [10], pg. 170, Teorema 1. ■

Teorema 17.11. Sejam $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ tais que $\alpha(t) \in X$ para todo $t \in I$. Se α é contínua em $a \in I$ e f é contínua em $\alpha(a) \in X$, então a função composta $f \circ \alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em a .

Prova.

Definição 17.12. Sejam $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto, $a \in A$ e $y \in \mathbb{R}^n$.

- (a)** Um campo escalar $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ é *derivável* em a com respeito a y se existe o limite

$$f'_y(a) := \lim_{h \rightarrow 0} g(h),$$

onde $g : \{h \in \mathbb{R}_{\neq 0} : a + hy \in A\} \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por

$$g(h) := \frac{f(a + hy) - f(a)}{h}.$$

- (b)** Seja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ derivável em a com respeito a y .

- i. Se $\|y\| = 1$, então dizemos que $f'_y(a)$ é a *derivada direcional* de f na *direção* de y .
- ii. Se $y = e_k$ para algum $k \in [n]$, então dizemos que $f'_{e_k}(a)$ é a *derivada parcial* de f com respeito a e_k . Outras notações para $f'_{e_k}(a)$ são

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a), \quad D_k f(a) \quad \text{e} \quad f'_{x_k}(a).$$

Definição 17.13. Sejam $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ derivável em $a \in A$ com respeito a e_k para todo $k \in [n]$. O *gradiente* de f em a é definido como

$$\nabla f(a) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right).$$

Definição 17.14. Seja $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto. Um campo escalar $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ é *diferenciável* em $a \in A$ se existe uma transformação linear $T_a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ para a qual a função $r_a : \{h \in \mathbb{R}^n : a + h \in A\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$r_a(h) := f(a + h) - f(a) - T_a(h)$$

satisfaz $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|r_a(h)|}{\|h\|} = 0$. A transformação linear T_a é a *derivada total* de f em a .

Capítulo 18

Integrais de Linha

Definição 18.1.

- (a) Um *caminho* é uma função contínua $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$.
- (b) Um caminho $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é *suave* se γ é de classe C^1 em $]a, b[$.
- (c) Um caminho $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é *suave por partes* se existe uma partição

$$P : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b$$

tal que $\gamma_i := \gamma|_{[x_{i-1}, x_i]}$ é suave para todo $i \in [k]$.

Definição 18.2. Sejam $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ um caminho suave por partes e $f : \gamma([a, b]) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial limitado. A *integral de linha* de f com respeito a γ em $C := \gamma([a, b])$ é definida como

$$\int_C f \cdot d\gamma := \int_a^b f[\gamma(t)] \cdot \gamma'(t) dt.$$

Definição 18.3. Seja $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ um caminho. Um caminho $\beta : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma *reparametrização* de α se existe uma bijeção $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$, derivável em $[c, d]$, com $\varphi'(t) \neq 0$ para todo $t \in [c, d]$, tal que $\beta(t) = \alpha(\varphi(t))$ para todo $t \in [c, d]$. Os caminhos α e β são *equivalentes*, enquanto a bijeção φ é uma *mudança de parâmetro*.

Proposição 18.4. Dois caminhos equivalentes descrevem a mesma curva.

Definição 18.5. Sejam $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ um caminho e $\beta : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma reparametrização de α por meio de uma mudança de parâmetro $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$.

- (a) β é uma reparametrização *positiva* se $\varphi'(t) > 0$ para todo $t \in [c, d]$. Dizemos que os caminhos α e β têm o *mesmo sentido* e que a mudança de parâmetro *conserva a orientação* do traço.
- (b) β é uma reparametrização *negativa* se $\varphi'(t) < 0$ para todo $t \in [c, d]$. Dizemos que os caminhos α e β têm *sentidos opostos* e que a mudança de parâmetro *inverte a orientação* do traço.

Teorema 18.6. Sejam $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\gamma_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ caminhos suaves por partes equivalentes. Seja $f : C \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial limitado, onde C é o traço dos caminhos γ_1 e γ_2 .

- (a) Se γ_1 e γ_2 têm o mesmo sentido, então

$$\int_C f \cdot d\gamma_1 = \int_C f \cdot d\gamma_2.$$

- (b) Se γ_1 e γ_2 têm sentidos opostos, então

$$\int_C f \cdot d\gamma_1 = - \int_C f \cdot d\gamma_2.$$

Prova.

■

Definição 18.7. Sejam $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ um caminho de classe C^1 em $[a, b]$ e $f : \gamma([a, b]) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ um campo escalar limitado. A *integral de linha* de f com respeito a γ em $C := \gamma([a, b])$ é definida como

$$\int_C f \cdot ds := \int_a^b f[\gamma(t)] \cdot \|\gamma'(t)\| dt.$$

Parte VI

Probabilidade

Capítulo 19

Combinatória Finita

Proposição 19.1.

- (a) (Regra da soma) Se n conjuntos finitos X_1, X_2, \dots, X_n são conjuntos finitos dois a dois disjuntos, então o conjunto $\bigcup_{i=1}^n X_i$ é finito e

$$\left| \bigcup_{i=1}^n X_i \right| = \sum_{i=1}^n |X_i|.$$

- (b) (Regra do produto) Se X_1, X_2, \dots, X_n são conjuntos finitos, então o conjunto $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ é finito e

$$|X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n| = \prod_{i=1}^n |X_i|.$$

Prova.

- (a) Façamos indução em $n \geq 2$.

Para $n = 2$, ver [18], p. 32, teorema 6, [8], p. 14, [4], p. 2.

Para completar a indução, ver [18], p. 33, corolário 1, [8], p. 15, [4], p. 2.

- (b) Ver [18], p. 33, corolário 3.

Proposição 19.2.

- (a) Se X é um conjunto finito, então $\mathcal{P}(X)$ é finito e $|\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}$.

- (b) Se X e Y são conjuntos finitos, então o conjunto X^Y (de todas as funções $f : X \rightarrow Y$) é finito $|X^Y| = |Y|^{|X|}$.

Prova.

(a)

(b) Ver [18], p. 33, corolário 3.

Capítulo 20

Espaços de Probabilidade

Definição 20.1. Seja Ω um conjunto.

(a) Uma σ -álgebra é um subconjunto $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$, tal que

- i. $\Omega \in \mathcal{F}$;
- ii. se $A \in \mathcal{F}$, então $A^C \in \mathcal{F}$;
- iii. se $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$, então $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$.

(b) Um *espaço mensurável* é um par (Ω, \mathcal{F}) , onde \mathcal{F} é uma σ -álgebra em Ω .

Exemplo 20.2. Seja Ω um conjunto.

(a) $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ é um espaço mensurável.

(b) $(\Omega, \{\emptyset, \Omega\})$ é um espaço mensurável, dito *trivial*, pois $\{\emptyset, \Omega\}$ é uma σ -álgebra em Ω .

Corolário 20.3. Seja (Ω, \mathcal{F}) um espaço mensurável. Valem as seguintes afirmações.

(a) $\emptyset \in \mathcal{F}$.

(b) Se $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$, então $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$.

(c) Se $A, B \in \mathcal{F}$, então $A \setminus B \in \mathcal{F}$ e $B \setminus A \in \mathcal{F}$.

Prova.

(a) Temos $\Omega \in \mathcal{F}$, de modo que $\Omega^C \in \mathcal{F}$, isto é, $\emptyset \in \mathcal{F}$. ■

(b)

Definição 20.4. Seja (Ω, \mathcal{F}) um espaço mensurável com $\Omega \neq \emptyset$.

- (a) Uma *medida de probabilidade* em (Ω, \mathcal{F}) é uma função $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que
- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;
 - $\mathbb{P}(A) \geq 0$ para todo $A \in \mathcal{F}$;
 - se $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ e $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$, então

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n).$$

- (b) Um *espaço de probabilidade* é uma terna $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, onde $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma medida de probabilidade definida em (Ω, \mathcal{F}) . Neste contexto, dizemos que Ω é um *espaço amostral* e que os elementos de \mathcal{F} (subconjuntos de Ω) são *eventos aleatórios*, ou simplesmente *eventos*.

Proposição 20.5. Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade, $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ e $A, B \in \mathcal{F}$. Valem as seguintes afirmações.

- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$;
- $\mathbb{P}(A^C) = 1 - \mathbb{P}(A)$;
- se $A \subseteq B$, então $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A) \geq 0$;
- $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$;
- $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_i)$;
- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

Prova.

- (a) Temos $\mathbb{P}(\emptyset) \geq 0$. Notando que $\mathbb{P}(\emptyset) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \emptyset\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(\emptyset)$, só pode ser $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$. ■

Teorema 20.6. Seja Ω um conjunto enumerável. Se $p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função tal que $p(\omega) \geq 0$ para todo $\omega \in \Omega$ e

$$\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1,$$

então a tripla $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$, onde $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ é a função definida por

$$\mathbb{P}(A) := \sum_{\omega \in A} p(\omega)$$

para todo $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, é um espaço de probabilidade.

Prova.

Definição 20.7. Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade, $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ e $A \in \mathcal{F}$.

(a) Denota-se

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots \quad \text{e} \quad \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = A$$

por $A_n \uparrow A$.

(b) Denota-se

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots \quad \text{e} \quad \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = A$$

por $A_n \downarrow A$.

Proposição 20.8. Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade, $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ e $A \in \mathcal{F}$.

(a) Se $A_n \uparrow A$, então $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A)$.

(b) Se $A_n \downarrow A$, então $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A)$.

Prova.

(a) Pois tome $A_0 := \emptyset$ e defina $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ por $B_n := A_n \setminus A_{n-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. É fácil provar que $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é disjunto e que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Com isso,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k \setminus A_{k-1}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k \setminus A_{k-1}) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n [\mathbb{P}(A_k) - \mathbb{P}(A_{k-1})] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n), \end{aligned}$$

como queríamos. ■

(b) Se $A_n \downarrow A$, então $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots$ e $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = A$. Observando que

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots \Leftrightarrow A_1^C \subseteq A_2^C \subseteq A_3^C \subseteq \dots,$$

trivialmente temos $A_n^C \uparrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n^C = A^C$, donde $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n^C) = \mathbb{P}(A^C)$ pelo item anterior. Com isso,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} [1 - \mathbb{P}(A_n^C)] = 1 - \mathbb{P}(A^C) = \mathbb{P}(A),$$

como queríamos. ■

Definição 20.9. Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade. A *probabilidade condicional de $A \in \mathcal{F}$ dado $B \in \mathcal{F}$* é definida como

$$\mathbb{P}(A|B) := \begin{cases} \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} & \text{se } \mathbb{P}(B) > 0; \\ \mathbb{P}(A) & \text{se } \mathbb{P}(B) = 0. \end{cases}$$

Proposição 20.10. Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade e $B \in \mathcal{F}$. A terna $(\Omega, \mathcal{F}, \bar{\mathbb{P}})$, onde $\bar{\mathbb{P}} : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por $\bar{\mathbb{P}}(A) := \mathbb{P}(A|B)$ para todo $A \in \mathcal{F}$, é um espaço de probabilidade.

Prova. Ver [19], proposição 2.2. ■

Teorema 20.11 (Regra do produto). Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade e $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$. Tem-se

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \prod_{i=2}^n \mathbb{P}\left(A_i \mid \bigcap_{j=1}^{i-1} A_j\right).$$

Prova. Basta fazer indução em n . Ver [19], teorema 2.5. ■

Teorema 20.12 (Probabilidade total). Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade e $A \in \mathcal{F}$. Se $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ é uma partição de Ω , então

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(B_n) \mathbb{P}(A|B_n).$$

Prova. ■

Corolário 20.13 (fórmula de Bayes). Sejam

(a) Oi

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B)}{\mathbb{P}(A)} \cdot \mathbb{P}(B).$$

(b) Se $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ é uma partição de Ω , então

$$\mathbb{P}(B_j|A) = \frac{\mathbb{P}(B_j)\mathbb{P}(B_j|A)}{\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(B_n)\mathbb{P}(A|B_n)}$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. ■

Prova.

Definição 20.14. Dois eventos $A, B \in \mathcal{F}$ são *independentes* se $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

Proposição 20.15. Dois eventos $A, B \in \mathcal{F}$ são independentes se, e somente se, $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$. ■

Prova.

Definição 20.16. Seja J um conjunto de índices.

- (a) Eventos independentes dois a dois.
- (b) Eventos independentes

20.1 Variáveis Aleatórias

Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade.

Definição 20.17. Uma *variável aleatória* é uma função $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $X^{-1}(I) \in \mathcal{F}$ para todo intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$.

Definição 20.18. Seja $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma variável aleatória. A *função de distribuição acumulada* de X é a função $F_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $F_X(x) = \mathbb{P}(X \in]-\infty, x])$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Proposição 20.19. Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade, $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma variável aleatória e $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ a FDA de X . Valem as seguintes afirmações.

- (a) F_X é crescente.
- (b) F_X é contínua à direita.
- (c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$.

Definição 20.20. Uma função $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma *função de distribuição* se é crescente, contínua à direita e $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$.

Definição 20.21. Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma *função de densidade* se $f \geq 0$ e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1.$$

Proposição 20.22. Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de densidade, então a função $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ é uma função de distribuição. ■

Prova.

Definição 20.23. Duas variáveis aleatórias $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ são *independentes* se os eventos $[X \in I_1], [Y \in I_2] \in \mathcal{F}$ são independentes para quaisquer intervalos $I_1, I_2 \subseteq \mathbb{R}$.

20.1.1 Distribuições Discretas

Definição 20.24. Uma variável aleatória $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é *discreta* se existe $A \subsetneq \mathbb{R}$ enumerável tal que $\mathbb{P}(X \in A) = 1$.

Definição 20.25. Seja $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma variável aleatória.

- (a) Dizemos que X tem distribuição *Bernoulli* de parâmetro $p \in]0, 1[$ se $\mathbb{P}(X = 1) = p$ e $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$. Isso é denotado por $X \sim \text{Bernoulli}(p)$.
- (b) Dizemos que X tem distribuição *geométrica* de parâmetro $p \in]0, 1[$ se $\mathbb{P}(X = k) = p(1 - p)^{k-1}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Isso é denotado por $X \sim \text{Geom}(p)$.
- (c) Dizemos que X tem distribuição *binomial* de parâmetros $n \in \mathbb{N}$ e $p \in]0, 1[$ se

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Isso é denotado por $X \sim \text{Binom}(n, p)$.

- (d) Dizemos que X tem distribuição *Poisson* de parâmetro $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ se

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Isso é denotado por $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$.

Proposição 20.26. As distribuições da definição (20.25) são discretas.

Prova.

(a)

20.1.2 Distribuições Absolutamente Contínuas

Definição 20.27. Uma variável aleatória $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é *absolutamente contínua* se existe uma função contínua por partes $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e

$$\mathbb{P}(X \in I) = \int_I f$$

para todo intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$.

Parte VII

Outros

Capítulo 21

Shoenfield

Definição 21.1 (Linguagens de Primeira Ordem).

(a) Um *alfabeto* é uma coleção infinita de símbolos distintos, nenhum deles propriamente contido em outro, separados nas seguintes categorias:

- i. Conectivos: \vee, \neg .
- ii. Quantificador existencial: \exists .
- iii. Variáveis, uma para cada inteiro positivo n : $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$
- iv. Símbolos de função: para cada natural n , uma coleção de símbolos de função n -ários. Os símbolos de função 0-ários são chamados de *constantes*.
- v. Símbolos de predicado: para cada natural n , uma coleção de símbolos de predicado n -ários.
- vi. Símbolo de predicado binário de igualdade $=$.

Símbolos de função e de predicado distintos de $=$ são chamados de símbolos *não lógicos*. Os demais são chamados de símbolos lógicos. Usamos x, y, z e w para denotar variáveis sintáticas que variam entre variáveis, f e g para denotar variáveis sintáticas que variam entre símbolos de funções, p e q para denotar variáveis sintáticas que variam entre símbolos de predicado e e para denotar uma variável sintática que varia entre constantes.

(b) Os *termos* de um alfabeto são definidos do seguinte modo:

- i. toda variável é um termo;
- ii. se u_1, \dots, u_n são termos e f é n -ário, então $f u_1 \dots u_n$ é um termo.

Termos são apenas expressões que denotam indivíduos. Note que constantes também são termos. Usamos a, b, c e d para denotar variáveis sintáticas que variam entre termos.

- (c) As *fórmulas* de um alfabeto são definidas do seguinte modo:
- i. se u_1, \dots, u_n são termos e p é n -ário, então $p u_1 \dots u_n$ é uma fórmula;
 - ii. se u é uma fórmula, então $\neg u$ é uma fórmula;
 - iii. se u e v são fórmulas, então $\vee u v$ é uma fórmula;
 - iv. se u é uma fórmula, então $\exists x u$ é uma fórmula.

As fórmulas do tipo i. são chamadas de *atômicas*.

- (d) Uma *linguagem de primeira ordem* \mathcal{L} consiste num alfabeto como descrito no item (a) e termos (\mathcal{L} -termos) e fórmulas (\mathcal{L} -fórmulas) como descritos nos itens (b) e (c). Uma linguagem de primeira ordem fica então completamente determinada pelos seus símbolos não lógicos.

Definição 21.2. Um *designador* é uma expressão que é um termo ou uma fórmula.

Proposição 21.3. Todo designador tem a forma $uv_1 \dots v_n$, onde u é um símbolo do alfabeto, v_1, \dots, v_n são designadores e n é um natural determinado por u .

Prova. Se d é um designador, então d

Definição 21.4. Duas expressões são *compatíveis* se uma delas puder ser obtida adicionando alguma expressão (possivelmente a expressão vazia) ao final da outra.

Proposição 21.5. Sejam u, u', v e v' expressões.

- (a) Se uv e $u'v'$ são compatíveis, então u e u' são compatíveis;
- (b) se uv e uv' são compatíveis, então v e v' são compatíveis.

Prova.

Lema 21.6. Seja n um natural. Se u_1, \dots, u_n e u'_1, \dots, u'_n são designadores, e $u_1 \dots u_n$ e $u'_1 \dots u'_n$ são compatíveis, então u'_i é u_i , para $i = 1, \dots, n$.

Prova. Faremos indução no comprimento de $u_1 \dots u_n$. Escreva u_1 como $vv_1 \dots v_k$, onde v é um símbolo de índice k e v_1, \dots, v_k são designadores. Como u'_1 começa com v , ele tem a forma $vv'_1 \dots v'_k$, onde v'_1, \dots, v'_k são designadores. Com isso, temos que u_1 é compatível com u'_1 , donde $v_1 \dots v_k$ é compatível com $v'_1 \dots v'_k$. Daí, pela hipótese de indução, v_i é v'_i para $i = 1, \dots, k$, donde u_1 é u'_1 . Com isso, temos que $u_2 \dots u_n$ é compatível com $u'_2 \dots u'_n$; assim, pela hipótese de indução, u_i é u'_i para $i = 2, \dots, n$.

Teorema 21.7 (Formação).

Lema 21.8.

Teorema 21.9 (Ocorrência).

Bibliografia

- [1] APOSTOL, Tom Mike. *Calculus Volume I*. 2^a ed. John Wiley e Sons, Inc., 1969.
- [2] APOSTOL, Tom Mike. *Calculus Volume II*. 2^a ed. John Wiley e Sons, Inc., 1969.
- [3] AURICHI, Leandro F. *Cálculo não renal*. Notas de Aula, 2025.
- [4] CAMINHA, Antonio. *Tópicos de Matemática Elementar - volume 4: Combinatória*. 3^a ed. Editora da SBM, 2024.
- [5] FAJARDO, Rogério A. S. *A Teoria dos Conjuntos e os Fundamentos da Matemática*. 1^a ed. Edusp, 2024.
- [6] FAJARDO, Rogério A. S. *Lógica Matemática*. 1^a ed. Edusp, 2017.
- [7] FEITOSA, Hércules de Araújo; ALFONSO, Alexys Bruno; NASCIMENTO, Maria Cunho. *Teoria dos Conjuntos*. 1^a ed. Editora Ciência Moderna, 2010.
- [8] FRANCO, Tertuliano. *Princípios de Combinatória e Probabilidade*. 1^a ed. Editora do IMPA, 2020.
- [9] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. *Um Curso de Cálculo Volume 1*. 5^a ed. LTC, 2001.
- [10] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. *Um Curso de Cálculo Volume 2*. 5^a ed. LTC, 2001.
- [11] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. *Um Curso de Cálculo Volume 3*. 5^a ed. LTC, 2001.
- [12] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. *Um Curso de Cálculo Volume 4*. 5^a ed. LTC, 2001.
- [13] JECH, Thomas; HRBACEK, Karel. *Introduction to Set Theory*. 3^a ed. CRC Press, 1999.
- [14] JOHNSONBAUGH, Richard; PFAFFENBERGER, W. E. *Foundations of Mathematical Analysis*. 1^a ed. MARCEL DEKKER, INC., 1981.

- [15] LEARY, Christopher; KRISTIANSEN, Lars. *A Friendly Introduction to Mathematical Logic*. 2^a ed. Milne Library Publishing, 2015.
- [16] LIMA, Elon Lages. *Álgebra Linear*. 10^a ed. Editora do IMPA, 2020.
- [17] LIMA, Elon Lages. *Análise Real vol. 1*. 13^a ed. Editora do IMPA, 2024.
- [18] LIMA, Elon Lages. *Curso de Análise vol. 1*. 15^a ed. Editora do IMPA, 2022.
- [19] ROLLA, Leonardo T.; LIMA, Bernardo N. B. de. *Probabilidade*. 1^a ed. Editora do IMPA, 2026.
- [20] SHOENFIELD, Joseph R. *Mathematical Logic*. 1^a ed. Addison-Wesley Publishing Company, 1967.
- [21] STROMBERG, Karl R. *An Introduction to Classical Real Analysis*. 1^a ed. Wadsworth, Inc., 1981.
- [22] WHITE, A. J. *Real Analysis: an introduction*. 1^a ed. Addison-Wesley Publishing Company, 1968.