

anotações buxas de matemática cringe

Alexander Kahleul

18 de janeiro de 2026

Sumário

I Fundamentos	6
1 Lógica Proposicional	7
2 Teorias de Primeira Ordem	8
2.1 Linguagens de Primeira Ordem	8
2.2 Estruturas	11
3 O sistema ZFC	13
3.1 Primeiros Axiomas	13
3.1.1 O Axioma da Extensão	13
3.1.2 O Axioma do Vazio	14
3.1.3 O Axioma do Par	15
3.1.4 O Axioma da União	15
3.1.5 O Axioma das Partes	16
3.1.6 O Esquema de Axiomas da Separação	17
3.1.7 Propriedades Algébricas	18
3.1.8 O Axioma da Regularidade	20
3.2 Relações e Funções	21
3.2.1 Produto Cartesiano	21
3.2.2 Relações	22

<i>SUMÁRIO</i>	2
3.2.3 Relações de Ordem	25
3.2.4 Relações de Equivalência	28
3.2.5 Funções	29
3.2.6 Bijeções e Funções Inversas	30
3.3 O Axioma do Infinito e os Números Naturais	35
3.3.1 O Teorema da Recursão	37
3.3.2 Aritmética dos Números Naturais	40
3.4 O Axioma da Escolha	40
 II Números Reais	42
 4 Números Reais como na Análise	43
4.1 Corpos	43
4.2 Números Naturais	45
4.2.1 A Unicidade dos Números Naturais	49
4.2.2 Definições recursivas	51
4.3 Conjuntos Finitos	52
4.3.1 Resultadinhos	53
4.4 Conjuntos Infinitos	54
4.5 Conjuntos Enumeráveis e Não-Enumeráveis	55
4.6 Números Inteiros	56
4.6.1 Teoria Elementar dos Números	56
4.7 Números Racionais	56
4.8 Números Reais	57
 5 Números Reais como na Álgebra	60
5.1 Homomorfismos	64

<i>SUMÁRIO</i>	3
III Análise Real I	65
6 Sequências	66
7 Limites e Continuidade	69
7.1 Topologia da Reta	69
7.2 Limites	70
7.3 Continuidade	74
7.4 Limites Infinitos	77
7.5 Limites e Sequências	79
7.6 Teoremas do Valor Intermediário e de Weierstrass	82
7.7 Algumas Funções Transcendentais	84
7.7.1 Trigonometria, parte I	84
7.7.2 Exponencial e Logaritmo	86
8 Derivadas	92
8.1 Definições e Resultados Iniciais	92
8.2 Teoremas de Rolle, do Valor Médio e de Cauchy	95
8.3 Gráficos de Funções	97
8.4 Regras de L'Hospital	99
8.5 Trigonometria, parte II	101
8.6 Polinômio de Taylor	102
9 Integrais	103
9.1 A integral de Darboux	103
9.1.1 Estendendo a definição	107
9.2 Resultados	108
9.3 O Teorema Fundamental do Cálculo	110

<i>SUMÁRIO</i>	4
9.4 A Integral de Riemann	113
9.5 Integrais Impróprias	114
10 Demonstrações	115
IV Álgebra Linear	121
11 Matrizes e Sistemas Lineares	122
11.1 Definições Iniciais e Operações Matriciais	122
11.2 Operações e Matrizes Elementares	125
11.3 Eliminação Gaussiana e Decomposição LU	127
11.4 Sistemas Lineares	127
12 Espaços Vetoriais	131
12.1 Espaços e Subespaços Vetoriais	131
12.2 Combinações Lineares e Geradores	135
12.3 Dependência e Independência Linear	137
12.4 Base e Dimensão	139
13 Transformações Lineares	143
13.1 Matrizes	144
14 Geometria Analítica	146
V Cálculo II	147
15 Topologia do Espaço Euclidiano	148
16 Caminhos	152

<i>SUMÁRIO</i>	5
16.1 Curvas	156
17 Campos Escalares e Vetoriais	159
18 Integrais de Linha	162
VI Probabilidade	164
19 Combinatória Finita	165
20 Espaços de Probabilidade	167
20.1 Variáveis Aleatórias	171
20.1.1 Distribuições Discretas	172
20.1.2 Distribuições Absolutamente Contínuas	173
VII Outros	174
21 Shoenfield	175
Bibliografia	177

Parte I

Fundamentos

Capítulo 1

Lógica Proposicional

Capítulo 2

Teorias de Primeira Ordem

2.1 Linguagens de Primeira Ordem

Definição 2.1 (Linguagens de Primeira Ordem).

- (a) Um *alfabeto* é uma coleção infinita de símbolos distintos, nenhum deles propriamente contido em outro, separados nas seguintes categorias:
 - i. Conectivos: \vee, \neg .
 - ii. Quantificador universal: \forall .
 - iii. Parênteses: $(,)$.
 - iv. Variáveis, uma para cada inteiro positivo n : $v_1, v_2, \dots, v_n, \dots$
 - v. Símbolos de função: para cada inteiro positivo n , uma coleção de símbolos de função n -ários.
 - vi. Símbolos de predicado: para cada inteiro positivo n , uma coleção de símbolos de predicado n -ários.
 - vii. Símbolo predicado binário de igualdade: $=$.
 - viii. Símbolos de constantes: uma coleção de símbolos.
- (b) Os *termos* correspondentes a um alfabeto são definidos do seguinte modo:
 - i. as variáveis são termos;
 - ii. as constantes são termos;
 - iii. se t_1, t_2, \dots, t_n são termos e f é um símbolo de função n -ário, então $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$ é um termo;
 - iv. todos os termos têm uma das formas acima.
- (c) As *fórmulas* correspondentes a um alfabeto são definidas do seguinte modo:

- i. se t_1 e t_2 são termos, então $= (t_1, t_2)$ é uma fórmula;
- ii. se t_1, t_2, \dots, t_n são termos e R é um símbolo de predicado n -ário, então $R(t_1, t_2, \dots, t_n)$ é uma fórmula;
- iii. se α e β são fórmulas, então $(\neg\alpha)$ e $(\alpha \vee \beta)$ são fórmulas;
- iv. se x é uma variável e α é uma fórmula, então $(\forall x)(\alpha)$ é uma fórmula;
- v. todas as fórmulas têm uma das formas acima.

As fórmulas como definidas nos itens i. e ii. são ditas *atômicas*. A fórmula α que aparece no item iv. é chamada de *escopo* do quantificador \forall .

- (d) Uma *linguagem de primeira ordem* \mathcal{L} consiste num alfabeto como descrito no item (a) e termos (\mathcal{L} -termos) e fórmulas (\mathcal{L} -fórmulas) como descritos nos itens (b) e (c).
- (e) Para especificar uma linguagem de primeira ordem \mathcal{L} , basta especificar quais são suas constantes, seus símbolos de função e seus símbolos de predicado:

$$\mathcal{L} \text{ é } \{c_1, c_2, \dots, f_1^{a(f_1)}, f_2^{a(f_2)}, \dots, R_1^{a(R_1)}, R_2^{a(R_2)}, \dots\},$$

onde cada c_i é um símbolo de constante, cada $f_i^{a(f_i)}$ é um símbolo de função de aridade $a(f_i)$ e cada $R_i^{a(R_i)}$ é um símbolo de predicado de aridade $a(R_i)$.

Teorema 2.2 (Legibilidade única). Seja \mathcal{L} uma linguagem de primeira ordem.

- (a) Todo termo tem uma, e exatamente uma, das formas i.-iii. da definição de termo.
- (b) Toda fórmula tem uma, e exatamente uma, das formas i.-iv. da definição de fórmula.

Prova. Ver [20], página 16, ou ainda, [15], página 18.

Definição 2.3 (Subtermos e subfórmulas). Sejam t um \mathcal{L} -termo e φ uma \mathcal{L} -fórmula.

- (a) Um *subtermo* de t é um \mathcal{L} -termo definido recursivamente do seguinte modo:
 - i. se t é uma variável ou uma constante, então t é o único subtermo de si mesmo;
 - ii. se t é da forma $ft_1t_2\dots t_n$, onde f é um símbolo funcional n -ário e t_1, t_2, \dots, t_n são \mathcal{L} -termos, então os subtermos de t são t e os subtermos de t_1, t_2, \dots, t_n .
- (b) Uma *subfórmula* de φ é uma \mathcal{L} -fórmula definida recursivamente do seguinte modo:
 - i. se φ é atômica, então φ é a única subfórmula de si mesma;

- ii. se φ é da forma $(\neg\alpha)$ ou da forma $(\forall x)(\alpha)$, então as subfórmulas de φ são φ e as subfórmulas de α ;
- iii. se φ é da forma $(\alpha \vee \beta)$, então as subfórmulas de φ são φ e as subfórmulas de α e de β .

Definição 2.4. Sejam \mathcal{L} uma linguagem de primeira ordem, x uma variável e φ uma fórmula.

- (a) (Variáveis livres) Dizemos que x é *livre* em φ se
 - i. φ é atômica e x ocorre em (é um símbolo) φ ; ou
 - ii. φ é da forma $(\neg\alpha)$ e x é livre na fórmula α ; ou
 - iii. φ é da forma $(\alpha \vee \beta)$ e x é livre em pelo menos uma das fórmulas α ou β ; ou
 - iv. φ é da forma $(\forall y)(\alpha)$, com x diferente de y e livre na fórmula α .
 Equivalentemente, podemos dizer que uma ocorrência de x é livre em φ se x não ocorre no escopo de uma subfórmula $(\forall x)(\alpha)$ de φ .
- (b) (Variáveis ligadas) Dizemos que x é *ligada* em φ se não for livre em φ .
- (c) (Sentenças) Uma *sentença* de \mathcal{L} , ou uma \mathcal{L} -*sentença*, é uma \mathcal{L} -fórmula que não possui variáveis livres.

Definição 2.5 (Substituição). Sejam \mathcal{L} uma linguagem de primeira ordem, t um termo e x uma variável.

- (a) Seja u um termo. O termo u_t^x , que resulta da substituição de todas as ocorrências de x em u por t , é definido recursivamente do seguinte modo:
 - i. se u é uma variável diferente de x , então u_t^x é u ;
 - ii. se u é a variável x , então u_t^x é t ;
 - iii. se u é uma constante, então u_t^x é u ;
 - iv. se u é da forma $ft_1 \dots t_n$, então u_t^x é $ft_1^x \dots t_n^x$.
- (b) Seja φ uma fórmula. A fórmula φ_t^x , que resulta da substituição de todas as ocorrências de x em φ por t , é definida recursivamente do seguinte modo:
 - i. se φ é da forma $(t_1 = t_2)$, então φ_t^x é $(t_1^x = t_2^x)$;
 - ii. se φ é da forma $Rt_1 \dots t_n$, então φ_t^x é $Rt_1^x \dots t_n^x$;
 - iii. se φ é da forma $(\neg\alpha)$, então φ_t^x é $(\neg\alpha_t^x)$;
 - iv. se φ é da forma $(\alpha \vee \beta)$, então φ_t^x é $(\alpha_t^x \vee \beta_t^x)$;
 - v. se φ é da forma $(\forall y)(\alpha)$, então φ_t^x é

$$\begin{cases} \varphi, & \text{se } y \text{ é } x; \text{ ou} \\ (\forall y)(\alpha_t^x), & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Definição 2.6 (Substituibilidade). Sejam \mathcal{L} uma linguagem de primeira ordem, φ uma fórmula, t um termo e x uma variável. Dizemos que x é *substituível* por t em φ se

- i. φ é atômica; ou
- ii. φ é da forma $(\neg\alpha)$ e x é substituível por t em α ;
- iii. φ é da forma $(\alpha \vee \beta)$ e x é substituível por t em α e em β ;
- iv. φ é da forma $(\forall y)(\alpha)$ e, exclusivamente, ou x é ligada em φ , ou y não ocorre em t e x é substituível por t em α .

2.2 Estruturas

Definição 2.7. Seja \mathcal{L} uma linguagem de primeira ordem. Uma \mathcal{L} -estrutura \mathfrak{A} consiste num conjunto A , chamado de *universo* de \mathfrak{A} , tal que

- i. para cada símbolo de constante c de \mathcal{L} , há um elemento $c^{\mathfrak{A}}$ em A ;
- ii. para cada símbolo de função n -ário f de \mathcal{L} , há uma função $f^{\mathfrak{A}} : A^n \rightarrow A$;
- iii. para cada símbolo de relação n -ário R de \mathcal{L} , há uma relação $R^{\mathfrak{A}}$ em A (isto é, $R^{\mathfrak{A}} \subseteq A^n$).

Definição 2.8. Seja \mathfrak{A} uma \mathcal{L} -estrutura de universo A .

- (a) Uma *valoração* é qualquer função $s : \text{Vars} \rightarrow A$.
- (b) Sejam s uma valoração, x uma variável e a um elemento de A . Uma *x-modificação* de s é definida como

$$s[x|a](v) := \begin{cases} s(v) & \text{se } v \text{ é uma variável diferente de } x \\ a & \text{se } v \text{ é a variável } x \end{cases}.$$

- (c) Seja $s : \text{Vars} \rightarrow A$ uma valoração. Uma *valoração de termos gerada por s* é uma função $\bar{s} : \text{Term} \rightarrow A$ definida recursivamente do seguinte modo:

- i. se t é uma variável, então $\bar{s}(t) = s(t)$;
 - ii. se t é um símbolo de constante c , então $\bar{s}(t) = c^{\mathfrak{A}}$;
 - iii. se t é da forma $ft_1 \dots t_n$, onde f é um símbolo funcional n -ário e t_1, \dots, t_n são termos, então $\bar{s}(t) = f^{\mathfrak{A}}(\bar{s}(t_1), \dots, \bar{s}(t_n))$.
- (d) Sejam φ uma \mathcal{L} -fórmula e $s : \text{Vars} \rightarrow A$ uma valoração. Dizemos que \mathfrak{A} *satisfaz* φ com relação a s , denotando isso por $\mathfrak{A} \models \varphi[s]$, se

- i. φ é da forma $= t_1 t_2$ e $\bar{s}(t_1)$ coincide com $\bar{s}(t_2)$; ou
- ii. φ é da forma $Rt_1 \dots t_n$ e $(\bar{s}(t_1), \dots, \bar{s}(t_n))$ é um elemento de $R^{\mathfrak{A}}$; ou
- iii. φ é da forma $(\neg\alpha)$ e $\mathfrak{A} \not\models \alpha[s]$; ou
- iv. φ é da forma $(\alpha \vee \beta)$ e $\mathfrak{A} \models \alpha[s]$ ou $\mathfrak{A} \models \beta[s]$; ou
- v. φ é da forma $(\forall x)(\alpha)$ e $\mathfrak{A} \models \alpha[s[x|a]]$ para cada elemento a de A .

Se Γ é um conjunto de \mathcal{L} -fórmulas, dizemos que \mathfrak{A} satisfaz Γ com relação a s , escrevendo $\mathfrak{A} \models \Gamma[s]$, se $\mathfrak{A} \models \gamma[s]$ para cada fórmula γ em Γ .

Teorema 2.9. Seja \mathfrak{A} uma \mathcal{L} -estrutura.

- (a) Se s_1 e s_2 são valorações tais que $s_1(v) = s_2(v)$ para toda variável v que ocorre num termo t , então $\bar{s}_1(t) = \bar{s}_2(t)$.
- (b) Se s_1 e s_2 são valorações tais que $s_1(v) = s_2(v)$ para toda variável livre v que ocorre na fórmula φ , então $\mathfrak{A} \models \varphi[s_1]$ se, e somente se, $\mathfrak{A} \models \varphi[s_2]$.
- (c) Se ψ é uma sentença, então ou $\mathfrak{A} \models \psi[s]$ para todas as valorações s , ou $\mathfrak{A} \models \psi[s]$ para nenhuma valoração s .

Prova. Ver [15], seção 1.7.

Definição 2.10. Seja \mathfrak{A} uma \mathcal{L} -estrutura.

- (a) Seja φ uma fórmula. Diremos que \mathfrak{A} é um *modelo* de φ , denotando isso por $\mathfrak{A} \models \varphi$, se $\mathfrak{A} \models \varphi[s]$ para toda função de atribuição de variável s .
- (b) Seja Φ um conjunto de fórmulas. Diremos que \mathfrak{A} *modela* Φ , denotando isso por $\mathfrak{A} \models \Phi$, se $\mathfrak{A} \models \varphi$ para cada fórmula φ de Φ .

Capítulo 3

O sistema ZFC

A linguagem (de primeira ordem) da teoria dos conjuntos, denotada por \mathcal{L}_{ST} , consiste em somente um símbolo de predicado binário dito de *pertencimento* \in . A seguir apresentamos os axiomas de ZFC que constituem a teoria de primeira ordem da teoria dos conjuntos. Na primeira seção apresentamos e discutimos os axiomas básicos, deixando os axiomas do infinito (que garante a existência do conjunto dos números naturais ω), da escolha (que tem muitas equivalências) e da substituição (fundamental para a teoria dos ordinais), os mais importantes, e mais complicados, para serem tratados nas próximas seções.

3.1 Primeiros Axiomas

3.1.1 O Axioma da Extensão

Axioma 3.1 (da Extensão). Dois conjuntos são iguais se, e somente se, eles têm os mesmos elementos.

$$\boxed{\forall x \forall y ((x = y) \leftrightarrow \forall z ((z \in x) \leftrightarrow (z \in y)))}$$

Definição 3.2 (Inclusão). Um conjunto x está *contido* num conjunto y , ou é um *subconjunto* de y , se todo elemento de x é um elemento de y :

$$(x \subseteq y) \stackrel{\text{def}}{\leftrightarrow} \forall z ((z \in x) \rightarrow (z \in y)).$$

Observação 3.3. De maneira análoga podemos definir \subsetneq , $\not\subseteq$, \supseteq , etc. Além disso, com a definição de \subseteq , o axioma da extensão pode ser enunciado assim:

$$\forall x \forall y ((x = y) \leftrightarrow ((x \subseteq y) \wedge (y \subseteq x))).$$

Proposição 3.4.¹

- (a) $\forall x(x \subseteq x)$.
- (b) $\forall x \forall y((x \subseteq y) \wedge (y \subseteq x) \rightarrow (x = y))$.
- (c) $\forall x \forall y \forall z(((x \subseteq y) \wedge (y \subseteq z)) \rightarrow (x \subseteq z))$.

Prova.

■

3.1.2 O Axioma do Vazio**Definição 3.5.** Um conjunto x é *vazio* se $\forall y(y \notin x)$.**Axioma 3.6** (do Vazio). Existe um conjunto vazio.

$$\boxed{\exists x \forall y(y \notin x)}$$

Onde $(y \notin x) \stackrel{\text{def}}{\leftrightarrow} (\neg(y \in x))$.**Proposição 3.7.** Quaisquer dois conjuntos vazios são iguais.

$$\forall x_1 \forall x_2 ((\forall y(y \notin x_1) \wedge \forall y(y \notin x_2)) \rightarrow (x_1 = x_2)).$$

Prova. Se $x_1 \neq x_2$, então ou existe $z \in x_1$ tal que $z \notin x_2$, ou existe $z \in x_2$ tal que $z \notin x_1$. Em ambos os casos, x_1 e x_2 não são vazios, uma contradição. Logo $x_1 = x_2$. ■**Observação 3.8.** O axioma do vazio (3.6), junto com a proposição (3.7), nos permite estabelecer que existe um único conjunto vazio:

$$\exists x(\forall y(y \notin x) \wedge \forall z(\forall y(y \notin z) \rightarrow (z = x))).$$

Podemos então falar *do* conjunto vazio (em vez de *de um*). Ele é denotado por \emptyset .**Proposição 3.9.** O conjunto vazio está contido em qualquer conjunto.

$$\forall x(\emptyset \subseteq x)$$

Prova. Suponha que existe x tal que $\emptyset \not\subseteq x$. Então existe $y \in \emptyset$ tal que $y \notin x$, uma contradição pois $\forall y(y \notin \emptyset)$. Logo $\forall x(\emptyset \subseteq x)$. ■**Prova.** Pela definição de \subseteq , precisamos provar que $\forall x(\forall y((y \in \emptyset) \rightarrow (y \in x)))$. Como a fórmula $y \in \emptyset$ é sempre falsa, $(y \in \emptyset) \rightarrow (y \in x)$ é sempre verdadeira,

¹Conforme a definição (3.45), isso significa que a relação \subseteq é uma relação de ordem parcial.

onde $\forall y((y \in \emptyset) \rightarrow (y \in x))$ é sempre verdadeira, donde $\forall x(\forall y((y \in \emptyset) \rightarrow (y \in x)))$ é sempre verdadeira. Isto prova que a fórmula $\forall x(\emptyset \subseteq x)$ é sempre verdadeira. ■

3.1.3 O Axioma do Par

Axioma 3.10 (do Par). Para quaisquer conjuntos x e y , existe um conjunto cujos elementos são x e y .

$$\boxed{\forall x \forall y \exists z \forall w ((w \in z) \leftrightarrow ((w = x) \vee (w = y)))}$$

Proposição 3.11. O conjunto z do axioma do par é único. Notação: $z := \{x, y\}$.

Prova. Pelo axioma do par, z é tal que

$$\forall w((w \in z) \leftrightarrow ((w = x) \vee (w = y))).$$

Se z' é tal que

$$\forall w((w \in z') \leftrightarrow ((w = x) \vee (w = y))),$$

então $\forall w((w \in z') \leftrightarrow (w \in z))$, de modo que $z' = z$ pelo axioma da extensão. ■

Proposição 3.12. $\forall x \forall y ((x \in y) \leftrightarrow \{x\} \subseteq y)$.

3.1.4 O Axioma da União

Axioma 3.13 (da União). Para todo conjunto x existe o conjunto de todos os conjuntos que pertencem a algum elemento de x .

$$\boxed{\forall x \exists y \forall z ((z \in y) \leftrightarrow \exists w ((z \in w) \wedge (w \in x)))}$$

Proposição 3.14. O conjunto y do axioma da união é único. Notação: $y := \bigcup x$.

Prova. Pelo axioma da união, y é tal que

$$\forall z((z \in y) \leftrightarrow \exists w ((z \in w) \wedge (w \in x))).$$

Se y' é tal que

$$\forall z((z \in y') \leftrightarrow \exists w ((z \in w) \wedge (w \in x))),$$

então $\forall z((z \in y') \leftrightarrow (z \in y))$, donde $y' = y$ pelo axioma da extensão. ■

Teorema 3.15. Para quaisquer conjuntos x e y , existe o conjunto dos conjuntos que pertencem a x ou a y .

$$\forall x \forall y \exists z \forall w ((w \in z) \leftrightarrow ((w \in x) \vee (w \in y)))$$

Ademais, esse conjunto é único, sendo denotado por $x \cup y$.

Prova. Provemos que $z := \bigcup\{x, y\}$, que existe pelos axiomas do par e da união, funciona. De fato, para todo w , temos $w \in z$ se, e somente se, existe $u \in \{x, y\}$ tal que $w \in u$. Mas $u \in \{x, y\}$ se, e somente se, $u = x$ ou $u = y$, de modo que $w \in x$ ou $w \in y$, como queríamos. A unicidade de z segue do axioma da extensão, de modo que podemos denotar $x \cup y := z$. ■

Prova. Uma prova alternativa é a seguinte. Precisamos provar que

$$\forall w \left(\left(w \in \bigcup\{x, y\} \right) \leftrightarrow ((w \in x) \vee (w \in y)) \right). \quad (\diamond)$$

Pelos axiomas do par e da união, temos

$$\begin{aligned} w \in \bigcup\{x, y\} &\leftrightarrow \exists u((u \in \{x, y\}) \wedge (w \in u)) \\ &\leftrightarrow \exists u(((u = x) \vee (u = y)) \wedge (w \in u)) \\ &\leftrightarrow \exists u(((u = x) \wedge (w \in u)) \vee ((u = y) \wedge (w \in u))) \\ &\leftrightarrow \exists u((w \in x) \vee (w \in y)) \\ &\leftrightarrow (w \in x) \vee (w \in y). \end{aligned}$$

Com isso, temos \diamond , como queríamos. ■

3.1.5 O Axioma das Partes

Axioma 3.16 (das Partes). Para todo conjunto x , existe o conjunto dos subconjuntos de x .

$$\boxed{\forall x \exists y \forall z ((z \in y) \leftrightarrow (z \subseteq x))}$$

Proposição 3.17. O conjunto y do axioma das partes é único. Notação: $y := \mathcal{P}(x)$.

Prova. Pelo axioma das partes, o conjunto y cumpre $\forall z ((z \in y) \leftrightarrow (z \subseteq x))$. Se y' cumpre $\forall z ((z \in y') \leftrightarrow (z \subseteq x))$, então $\forall z ((z \in y') \leftrightarrow (z \in y))$, de modo que $y' = y$ pelo axioma da extensão. ■

3.1.6 O Esquema de Axiomas da Separação

Axioma 3.18 (da Separação). Para cada fórmula P em que z não ocorre livre, a fórmula

$$\boxed{\forall y \exists z \forall x((x \in z) \leftrightarrow ((x \in y) \wedge P))}$$

é um axioma.

Observação 3.19. O conjunto y é o “universo” da discussão. O axioma da separação também é chamado de axioma da compreensão ou axioma da especificação.

Proposição 3.20. O conjunto z do axioma da separação (3.18) é único. Notação: $z := \{x \in y : P(x)\}$.

Prova. Segue do axioma da extensão. ■

Teorema 3.21 (Paradoxo de Russell). Não existe o conjunto de todos os conjuntos.

$$\forall x \exists y(y \notin x)$$

Prova. Suponha que $\exists x \forall y(y \in x)$. Pelo axioma da separação com universo x e a fórmula $y \notin y$, existe z tal que $\forall y((y \in z) \leftrightarrow ((y \in x) \wedge (y \notin y)))$ (note que z não ocorre livre em $y \notin y$). Como $\forall y(y \in x)$, temos $\forall y((y \in z) \leftrightarrow (y \notin y))$. Particularmente para $y = z$, temos $((z \in z) \leftrightarrow (z \notin z))$, uma contradição. Logo $\forall x \exists y(y \notin x)$. ■

Teorema 3.22. Para todo conjunto $x \neq \emptyset$ existe o conjunto de todos os conjuntos que pertencem simultaneamente a todos os elementos de x .

$$\forall x((x \neq \emptyset) \rightarrow \exists y \forall z((z \in y) \leftrightarrow \forall w((w \in x) \rightarrow (z \in w))))$$

Ademais, esse conjunto é único, sendo denotado por $\bigcap x$.

Prova. Precisamos provar que existe y tal que

$$\forall z((z \in y) \leftrightarrow \forall w((w \in x) \rightarrow (z \in w))). \quad (\diamond)$$

Observe inicialmente que o axioma da separação pode ser escrito como

$$\forall x \exists y \forall z((z \in y) \leftrightarrow ((z \in x) \wedge P)),$$

onde P é uma fórmula em que y não ocorre livre. Agora, como $x \neq \emptyset$, tome $v \in x$. Pelo axioma da separação com universo v e a fórmula $\forall w((w \in x) \rightarrow (z \in w))$, onde y não ocorre livre, existe y tal que

$$\forall z((z \in y) \leftrightarrow ((z \in v) \wedge (\forall w((w \in x) \rightarrow (z \in w))))),$$

isto é, existe

$$y := \{z \in v : \forall w((w \in x) \rightarrow (z \in w))\}.$$

Afirmamos que vale (\Diamond) nesse y . De fato,

- por um lado (\Rightarrow), se $z \in y$, então trivialmente $\forall w((w \in x) \rightarrow (z \in w))$;
- por outro lado (\Leftarrow), se z é tal que $\forall w((w \in x) \rightarrow (z \in w))$, então, particularmente para $w = v$, temos $v \in x \rightarrow z \in v$, e como $v \in x$, temos $z \in v$. Como $z \in v$ e $\forall w((w \in x) \rightarrow (z \in w))$, temos que $z \in y$.

Logo, existe y tal que \Diamond . A unicidade de y segue do axioma da extensão, de modo que podemos denotar $\bigcap x := y$. ■

Definição 3.23. Sejam x e y conjuntos.

(a) A *interseção* entre x e y é definida como

$$x \cap y := \{z \in x : z \in y\}.$$

Dizemos que x e y são *disjuntos* se $x \cap y = \emptyset$.

(b) A *diferença* entre x e y é definida como

$$x \setminus y := \{z \in x : z \notin y\}.$$

Dizemos que $x \setminus y$ é o *complementar* de y relativo a x se $y \subseteq x$. Nesse caso, denotamos $x \setminus y$ por y^C .

(c) A *diferença simétrica* entre x e y é definida como

$$x \Delta y := \{z \in x \cup y : z \notin x \cap y\}.$$

Observação 3.24. As definições (3.23) se dão pelo axioma da separação. Vejamos como isso é feito, por exemplo, na definição de $x \cap y$. Sendo x o universo, o axioma da separação é a fórmula $\forall x \exists w \forall z((z \in w) \leftrightarrow ((z \in x) \wedge P))$, onde P é uma fórmula em que w não ocorre livre. Se P é a fórmula $z \in y$, então existe w que cumpre $\forall z((z \in w) \leftrightarrow (z \in x) \wedge (z \in y))$, isto é, $w = \{z \in x : z \in y\}$. Denotamos esse w por $x \cap y$.

3.1.7 Propriedades Algébricas

Proposição 3.25 (Propriedades da União).

- (a) $\forall x(x \cup x = x)$.
- (b) $\forall x(x \cup \emptyset = x)$.

- (c) $\forall x \forall y (x \cup y = y \cup x)$.
- (d) $\forall x \forall y \forall z (x \cup (y \cup z) = (x \cup y) \cup z)$.
- (e) $\forall x \forall y (x \cup y = y \leftrightarrow x \subseteq y)$.
- (f) $\forall x \forall y ((x \subseteq x \cup y) \wedge (y \subseteq x \cup y))$.
- (g) $\forall x \forall y \forall z (x \subseteq y \rightarrow x \cup z \subseteq y \cup z)$.
- (h) $\forall x \forall y (x \subseteq y \rightarrow \bigcup x \subseteq \bigcup y)$.

Prova. Trivial. ■

Proposição 3.26 (Propriedades da Interseção).

- (a) $\forall x (x \cap x = x)$.
- (b) $\forall x (x \cap \emptyset = \emptyset)$.
- (c) $\forall x \forall y (x \cap y = y \cap x)$.
- (d) $\forall x \forall y \forall z (x \cap (y \cap z) = (x \cap y) \cap z)$.
- (e) $\forall x \forall y (x \cap y = x \leftrightarrow x \subseteq y)$.
- (f) $\forall x \forall y ((x \cap y \subseteq x) \wedge (x \cap y \subseteq y))$.
- (g) $\forall x \forall y \forall z (x \subseteq y \rightarrow x \cap z \subseteq y \cap z)$.
- (h) $\forall x \forall y (x \subseteq y \wedge x \neq \emptyset \rightarrow \bigcap y \subseteq \bigcap x)$.

Prova. Trivial. ■

Proposição 3.27 (Distributividade).

- (a) $\forall x \forall y \forall z (x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z))$.
- (b) $\forall x \forall y \forall z (x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z))$.

Prova. Trivial. ■

Proposição 3.28 (Propriedades da Diferença).

- (a) (Imediatas).
 - i. $\forall x (x \setminus \emptyset = x)$;
 - ii. $\forall x (x \setminus x = \emptyset)$;
 - iii. $\forall x (\emptyset \setminus x = \emptyset)$.
- (b)
 - (a) $\forall x \forall y (x \setminus y = x \leftrightarrow x \cap y = \emptyset)$;
 - (b) $\forall x \forall y (x \setminus y = \emptyset \leftrightarrow x \subseteq y)$.
- (c) (Leis de De Morgan).

- i. $\forall x \forall y \forall z (x \setminus (y \cup z) = (x \setminus y) \cap (x \setminus z));$
 - ii. $\forall x \forall y \forall z (x \setminus (y \cap z) = (x \setminus y) \cup (x \setminus z)).$
- (d) $\forall x \forall y \forall z (x \setminus (y \setminus z) = (x \setminus y) \cup (x \cap z)).$
- (e) (Diferenças entre interseções).
- i. $\forall x \forall y \forall z (x \cap (y \setminus z) = (x \cap y) \setminus (x \cap z));$
 - ii. $\forall x \forall y \forall z ((x \setminus y) \cap z = (x \cap z) \setminus y).$
- (f) (Monotonocidade da diferença).
- i. $\forall x \forall y \forall z (x \subseteq y \rightarrow x \setminus z \subseteq y \setminus z).$
 - ii. $\forall x \forall y \forall z (y \subseteq z \rightarrow x \setminus z \subseteq x \setminus y).$

Prova. Trivial. ■

Proposição 3.29 (Propriedades do Complemento Relativo).

- (a) $\forall x \forall y (y \subseteq x \rightarrow (y^C)^C = y).$
- (b) $\forall x \forall y (y \subseteq x \rightarrow (y \cup y^C = x) \wedge (y \cap y^C = \emptyset)).$
- (c) $\forall x \forall y \forall z (z \subseteq y \subseteq x \rightarrow y^C \subseteq z^C).$
- (d) $\forall x \forall y \forall z (y \subseteq x \wedge z \subseteq x \rightarrow y \setminus z = y \cap z^C).$
- (e) (Leis de De Morgan para complementos).
- i. $\forall x \forall y \forall z (y \subseteq x \wedge z \subseteq x \rightarrow (y \cup z)^C = y^C \cap z^C).$
 - ii. $\forall x \forall y \forall z (y \subseteq x \wedge z \subseteq x \rightarrow (y \cap z)^C = y^C \cup z^C).$

Prova. Trivial. ■

Proposição 3.30.

- (a) $\forall x \forall y \forall z (((x \in y) \wedge (y \in z)) \rightarrow ((x \in \bigcup z) \wedge (y \subseteq \bigcup z))).$

Proposição 3.31. $\forall A (\bigcup \mathcal{P}(A) = A).$

3.1.8 O Axioma da Regularidade

Axioma 3.32 (da Regularidade). Para todo conjunto $x \neq \emptyset$ existe $y \in x$ tal que $x \cap y = \emptyset$.

$$\boxed{\forall x ((x \neq \emptyset) \rightarrow \exists y ((y \in x) \wedge (x \cap y = \emptyset)))}$$

Proposição 3.33. Não existem conjuntos x e y tais que $x \in y$ e $y \in x$.

$$\neg(\exists x \exists y ((x \in y) \wedge (y \in x)))$$

Prova. Basta provar que $\forall x \forall y((x \notin y) \vee (y \notin x))$. Pelo axioma do par, tome $z := \{x, y\}$. Como $z \neq \emptyset$, pelo axioma da regularidade existe $w \in z$ tal que $w \cap z = \emptyset$. Se $w = x$, então $y \notin x$, porque se fosse $y \in x$ teríamos $x \cap z = \{y\} \neq \emptyset$, uma contradição. Analogamente, se $w = y$, então $x \notin y$. ■

Corolário 3.34. Não existe x tal que $x \in x$.

$$\forall x(x \notin x)$$

Prova. Segue do teorema anterior com $y = x$. ■

3.2 Relações e Funções

3.2.1 Produto Cartesiano

Definição 3.35 (Par ordenado). Sejam a e b conjuntos. O *par ordenado* (a, b) é definido como o conjunto $\{\{a\}, \{a, b\}\}$, isto é,

$$(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

Proposição 3.36. Dois pares ordenados (a, b) e (c, d) são iguais se, e somente se, $a = c$ e $b = d$.

$$\forall a \forall b \forall c \forall d (((a, b) = (c, d)) \leftrightarrow ((a = c) \wedge (b = d)))$$

Prova. Ver [5], teorema 4.2, página 95. Ver [7], teorema 4.2, página 50. ■

Teorema 3.37. Para quaisquer conjuntos A e B existe o conjunto de todos os pares ordenados (a, b) tais que $a \in A$ e $b \in B$.

$$\forall A \forall B \exists C \forall x (x \in C \leftrightarrow \exists a \exists b (a \in A \wedge b \in B \wedge x = (a, b)))$$

Ademais, esse conjunto é único, sendo denotado por $A \times B$.

Prova. Pelos axiomas da união e das partes, considere o conjunto $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$; pelo axioma da separação, considere o conjunto

$$C := \{x \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B)) : \exists a \exists b (a \in A \wedge b \in B \wedge x = (a, b))\}.$$

Afirmamos que C cumpre as condições do enunciado. Se $x \in C$, então pela definição de C existem $a \in A$ e $b \in B$ tais que $x = (a, b)$. Provemos então que se

existem $a \in A$ e $b \in B$ tais que $x = (a, b)$, então $x \in C$. Para isso, basta provar que $x \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$. Qualquer que seja o par ordenado (a, b) , onde $a \in A$ e $b \in B$,

$$\begin{aligned} (a, b) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B)) &\leftrightarrow \{\{a\}, \{a, b\}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B)) \\ &\leftrightarrow \{\{a\}, \{a, b\}\} \subseteq \mathcal{P}(A \cup B) \\ &\leftrightarrow \{a\} \in \mathcal{P}(A \cup B) \wedge \{a, b\} \in \mathcal{P}(A \cup B) \\ &\leftrightarrow \{a\} \subseteq (A \cup B) \wedge \{a, b\} \subseteq (A \cup B), \end{aligned}$$

o que sabemos ser verdade. A unicidade de C segue do axioma da extensão, de modo que podemos denotar $A \times B := C$. \blacksquare

Definição 3.38. O *produto cartesiano* dos conjuntos A e B é definido como $A \times B$.

3.2.2 Relações

Definição 3.39.

- (a) Uma *relação binária*, ou simplesmente uma *relação*, é um conjunto de pares ordenados.
- (b) Um símbolo de predicado para “ R é relação”, onde R ocorre livre, é

$$\text{Rel}(R) \stackrel{\text{def}}{\leftrightarrow} \forall x (x \in R \rightarrow \exists a \exists b (x = (a, b))).$$

Denotamos $(a, b) \in R$ por aRb .

- (c) Dizemos que R é uma relação de A em B se $R \subseteq A \times B$. Dizemos que R é uma relação em A se $R \subseteq A \times A$.

Teorema 3.40. Um conjunto R é uma relação se, e somente se, existem conjuntos A e B tais que $R \subseteq A \times B$.

$$\forall R (\text{Rel}(R) \leftrightarrow \exists A \exists B (R \subseteq A \times B))$$

Prova. (\Rightarrow) Sendo R uma relação, usando os axiomas da união e da separação, defina

$$\begin{aligned} A &:= \left\{ a \in \bigcup \bigcup R : \exists b \left(b \in \bigcup \bigcup R \wedge aRb \right) \right\} \\ B &:= \left\{ b \in \bigcup \bigcup R : \exists a \left(a \in \bigcup \bigcup R \wedge aRb \right) \right\} \end{aligned}$$

Seja $x \in R$. Então existem a e b tais que $x = (a, b)$. Se $\{\{a\}, \{a, b\}\} \in R$, então $\{\{a\}, \{a, b\}\} \subseteq \bigcup R$, donde $\{a, b\} \in \bigcup R$, donde $\{a, b\} \subseteq \bigcup \bigcup R$, donde

$a, b \in \bigcup \bigcup R$. Como aRb , pelas definições de A e B , temos $a \in A$ e $b \in B$. Como $x = (a, b)$ e $a \in A$ e $b \in B$, pelo teorema (3.37) temos $x \in A \times B$, donde, por fim, segue que $R \subseteq A \times B$.

(\Leftarrow) Os elementos de $A \times B$ são pares ordenados; logo, qualquer subconjunto de $A \times B$ terá pares ordenados como elementos. \blacksquare

Definição 3.41. Seja R uma relação.

(a) O domínio de R é definido como

$$\text{Dom}(R) := \left\{ a \in \bigcup \bigcup R : \exists b((a, b) \in R) \right\}.$$

(b) A imagem de R é definida como

$$\text{Im}(R) := \left\{ b \in \bigcup \bigcup R : \exists a((a, b) \in R) \right\}.$$

(c) A relação inversa de R é definida como

$$R^{-1} := \{(b, a) \in \text{Im}(R) \times \text{Dom}(R) : (a, b) \in R\}.$$

(d) A imagem de um conjunto X por R é definida como

$$R[X] := \{b \in \bigcup \bigcup R : \exists a(a \in X \wedge (a, b) \in R)\}.$$

(e) A imagem inversa de um conjunto Y por R é definida como

$$R^{-1}[Y] := \left\{ a \in \bigcup \bigcup R : \exists b(b \in Y \wedge (a, b) \in R) \right\}$$

Equivalentemente, $R^{-1}[Y]$ é a imagem de Y pela relação R^{-1} .

(f) A restrição de R a X é definida como

$$R|_X := \{(a, b) \in R : a \in X\}.$$

(g) A composição de R e S é definida como

$$S \circ R := \{(a, c) \in \text{Dom}(R) \times \text{Im}(S) : \exists b(b \in \text{Im}(R) \cap \text{Dom}(S) \wedge (aRb \wedge bSc))\}.$$

Proposição 3.42. Sejam R e S relações e A, B, C e D conjuntos tais que $R \subseteq A \times B$ e $S \subseteq C \times D$.

(a) $\text{Dom}(R) = \{x \in A : \exists y(y \in B \wedge xRy)\}.$

- (b) $\text{Im}(R) = \{y \in B : \exists x(x \in A \wedge xRy)\}.$
(c) $S \circ R \subseteq A \times D.$

Prova.

- (a)
(b)
(c)

Proposição 3.43. Sejam R , S e T relações. Valem as seguintes afirmações.

- (a) $\text{Dom } R^{-1} = \text{Im}(R)$, $\text{Im}(R^{-1}) = \text{Dom}(R)$ e $(R^{-1})^{-1} = R$.
(b) $T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R$.
(c) $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$.
(d) Se $\text{Im}(R) \subseteq \text{Dom}(S)$, então $\text{Dom}(S \circ R) = \text{Dom}(R)$.
(e) Se $\text{Dom}(S) \subseteq \text{Im}(R)$, então $\text{Im}(S \circ R) = \text{Im}(S)$.

Prova.

- (a) Temos $(a, b) \in R$ se, e somente se, $(b, a) \in R^{-1}$, o que é equivalente a $(a, b) \in (R^{-1})^{-1}$. Logo $R = (R^{-1})^{-1}$. ■
(b) Se $(a, d) \in T \circ (S \circ R)$, então $a \in \text{Dom}(S \circ R)$, $d \in \text{Im}(T)$ e existe $c \in \text{Im}(S \circ R) \cap \text{Dom}(T)$ tal que $(a, c) \in S \circ R$ e $(c, d) \in T$. De $(a, c) \in S \circ R$ segue que $a \in \text{Dom}(R)$, $c \in \text{Im}(S)$ e existe $b \in \text{Im}(R) \cap \text{Dom}(S)$ tal que $(a, b) \in R$ e $(b, c) \in S$. Como $b \in \text{Dom}(S)$, $d \in \text{Im}(T)$ e existe $c \in \text{Dom}(T) \cap \text{Im}(S)$ tal que $(b, c) \in S$ e $(c, d) \in T$, temos que $(b, d) \in T \circ S$. Com isso, $b \in \text{Dom}(T \circ S)$ e $d \in \text{Im}(T \circ S)$. Como $a \in \text{Dom}(R)$, $d \in \text{Im}(T \circ S)$ e existe $b \in \text{Dom}(T \circ S) \cap \text{Im}(R)$ tal que $(a, b) \in R$ e $(b, d) \in T \circ S$, temos que $(a, d) \in (T \circ S) \circ R$. Com isso, $T \circ (S \circ R) \subseteq (T \circ S) \circ R$. A prova de que $(T \circ S) \circ R \subseteq T \circ (S \circ R)$ é completamente análoga, de modo que $T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R$. ■
(c) Se $(c, a) \in (S \circ R)^{-1}$, então $(a, c) \in S \circ R$, $a \in \text{Dom}(R)$, $c \in \text{Im}(S)$ e existe $b \in \text{Im}(R) \cap \text{Dom}(S)$ tal que $(a, b) \in R$ e $(b, c) \in S$ isto é, $(c, b) \in S^{-1}$, $(b, a) \in R^{-1}$, com $c \in \text{Dom}(S^{-1})$, $a \in \text{Im}(R^{-1})$ e $b \in \text{Im}(S^{-1}) \cap \text{Dom}(R^{-1})$. Com isso, $(c, a) \in R^{-1} \circ S^{-1}$, de modo que $(S \circ R)^{-1} \subseteq R^{-1} \circ S^{-1}$. A prova de que $R^{-1} \circ S^{-1} \subseteq (S \circ R)^{-1}$ é completamente análoga, de modo que $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$. ■
(d) Se $a \in \text{Dom}(R)$, então existe $b \in \text{Im}(R)$ tal que $(a, b) \in R$. Se $\text{Im}(R) \subseteq \text{Dom}(S)$, então $b \in \text{Dom}(S)$, de modo que existe $c \in \text{Im}(S)$ tal que $(b, c) \in S$. Assim, $(a, c) \in S \circ R$, de modo que $a \in \text{Dom}(S \circ R)$. Com

isso, $\text{Dom}(R) \subseteq \text{Dom}(S \circ R)$. Agora, se $a \in \text{Dom}(S \circ R)$, então existe $c \in \text{Im}(S \circ R)$ tal que $(a, c) \in S \circ R$, donde $a \in \text{Dom}(R)$ e $\text{Dom}(S \circ R) \subseteq \text{Dom}(R)$. Com isso, $\text{Dom}(R) = \text{Dom}(S \circ R)$. \blacksquare

- (e)** Se $c \in \text{Im}(S)$, então existe $b \in \text{Dom}(S)$ tal que $(b, c) \in S$. Se $\text{Dom}(S) \subseteq \text{Im}(R)$, então $b \in \text{Im}(R)$, de modo que existe $a \in \text{Dom}(R)$ tal que $(a, b) \in R$. Assim, $(a, c) \in S \circ R$, de modo que $c \in \text{Im}(S \circ R)$. Com isso, $\text{Im}(S) \subseteq \text{Im}(S \circ R)$. Agora, se $c \in \text{Im}(S \circ R)$, então existe $a \in \text{Dom}(S \circ R)$ tal que $(a, c) \in S \circ R$, donde $c \in \text{Im}(S)$ e $\text{Im}(S \circ R) \subseteq \text{Im}(S)$. Com isso, $\text{Im}(S) = \text{Im}(S \circ R)$. \blacksquare

3.2.3 Relações de Ordem

Definição 3.44. Seja R uma relação em X .

- (a)** Dizemos que R é *reflexiva* se

$$\forall x(x \in X \rightarrow (x, x) \in R).$$

- (b)** Dizemos que R é *irreflexiva* se

$$\forall x(x \in X \rightarrow (x, x) \notin R).$$

- (c)** Dizemos que R é *simétrica* se

$$\forall x \forall y(x, y \in X \rightarrow (xRy \rightarrow yRx)).$$

- (d)** Dizemos que R é *antissimétrica* se

$$\forall x \forall y(x, y \in X \rightarrow (xRy \wedge yRx \rightarrow x = y)).$$

- (e)** Dizemos que R é *transitiva* se

$$\forall x \forall y \forall z(x, y, z \in X \rightarrow (xRy \wedge yRz \rightarrow xRz)).$$

Definição 3.45 (Ordem parcial).

- (a)** Uma *relação de ordem parcial* em X é uma relação $\leq \subseteq X \times X$ que tem as seguintes propriedades.
- Reflexividade: $\forall x(x \in X \rightarrow x \leq x)$;
 - Antissimetria: $\forall x \forall y(x, y \in X \rightarrow (x \leq y \wedge y \leq x \rightarrow x = y))$;
 - Transitividade: $\forall x \forall y \forall z(x, y, z \in X \rightarrow (x \leq y \wedge y \leq z \rightarrow x \leq z))$.

Dizemos que X é o *domínio* de \leq .

- (b) Um *conjunto parcialmente ordenado* é um par (X, \leq) onde $\leq \subseteq X \times X$ é uma relação de ordem parcial.

Notação 3.46. Sendo \leq uma ordem parcial, abreviaremos $y \leq x$ por $x \geq y$, $x \leq y$ e $x \neq y$ por $x < y$ e $x < y$ por $y > x$. Quando não houver perigo de confusão, podemos escrever somente *ordem* em vez de ordem parcial.

Exemplo 3.47. A relação de inclusão \subseteq é uma relação de ordem parcial (3.4).

Definição 3.48. Dois conjuntos parcialmente ordenados (X_1, \leq_1) e (X_2, \leq_2) são *ordem-isomorfos* se existe uma bijeção $f : X_1 \rightarrow X_2$ tal que

$$\forall x \forall y (x, y \in X_1 \rightarrow (x \leq_1 y \leftrightarrow f(x) \leq_2 f(y))).$$

Dizemos que a função f é um *isomorfismo de ordens parciais*.

Teorema 3.49. Se (X, \leq) é um conjunto ordenado, então existe um conjunto ordenado (Y, \preceq) ordem-isomorfo a (X, \leq) tal que

$$\preceq = \{(x, y) \in Y \times Y : x \subseteq y\}.$$

Prova. Definindo $f : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ por $f(x) := \{y \in X : y \leq x\}$, temos que f é bijetiva em relação a $Y := \text{Im}(f)$. De fato, se $f(x) = f(y)$, então $x \in f(y)$ e $y \in f(x)$ já que $x \in f(x)$ e $y \in f(y)$; daí, pela definição de f , vem $x \leq y$ e $y \leq x$, de modo que $x = y$ e f é injetiva. Provemos então que $x \leq y$ se, e somente se, $f(x) \subseteq f(y)$, para quaisquer $x, y \in X$. Se $z \in f(x)$, então $z \leq x$, e se $x \leq y$, então $z \leq y$, de modo que $z \in f(y)$ e $f(x) \subseteq f(y)$. Agora, se $x \in f(x) \subseteq f(y)$, então $x \in f(y)$, donde $x \leq y$. Com isso, (X, \leq) é ordem-isomorfo a (Y, \subseteq) , como havíamos afirmado. ■

Definição 3.50. Sejam (X, \leq) um conjunto parcialmente ordenado e $S \in \mathcal{P}(X)_{\neq \emptyset}$.

- (a) Dizemos que $x \in X$ é um *limitante superior* de S se $y \leq x$ para todo $y \in S$.
- (b) Dizemos que $x \in X$ é um *limitante inferior* de S se $x \leq y$ para todo $y \in S$.
- (c) Dizemos que S é *limitado superiormente* se existe $x \in X$ que é um limitante superior de S .
- (d) Dizemos que S é *limitado inferiormente* se existe $x \in X$ que é limitante inferior de S .
- (e) Dizemos que $x \in S$ é o *elemento máximo* de S se $y \leq x$ para todo $y \in S$.
- (f) Dizemos que $x \in S$ é o *elemento mínimo* de S se $x \leq y$ para todo $y \in S$.
- (g) Dizemos que $x \in S$ é *maximal* em S se não existe $y \in S$ tal que $x < y$.

- (h) Dizemos que $x \in S$ é *minimal* em S se não existe $y \in S$ tal que $y < x$.
- (i) Dizemos que $x \in X$ é o *supremo* de S se S é limitado superiormente e $x \leq y$ para todo limitante superior $y \in X$ de S .
- (j) Dizemos que $x \in X$ é o *ínfimo* de S se S é limitado inferiormente e $y \leq x$ para todo limitante inferior $y \in X$ de S .

Observação 3.51. É fácil ver que o máximo de S , quando existe, é único. De fato, se $x, y \in S$ são máximos de S , então $x \leq y$ e $y \leq x$, de modo que $x = y$. Essa unicidade também vale para o mínimo, o ínfimo e o supremo de S , quando existem. Isso justifica o uso do artigo “o” (em *o* máximo, em vez de *um* máximo, por exemplo) e nos permite denotar esses elementos por $\max S$, $\min S$, $\inf S$ e $\sup S$, respectivamente.

Definição 3.52. Seja (X, \leq) um conjunto parcialmente ordenado.

- (a) Dizemos que \leq é uma relação de ordem *total*, ou que o par (X, \leq) é *totalmente ordenado*, se

$$\forall x \forall y (x, y \in X \rightarrow (x \leq y \vee y \leq x)).$$

- (b) Dizemos que \leq é uma *boa ordem* em X , ou que o par (X, \leq) é *bem-ordenado*, se todo subconjunto não vazio de X possui um elemento mínimo.
- (c) Dizemos que \leq é uma *árvore* se, para todo $x \in X$, o conjunto $S = \{y \in X : y \leq x\}$ é tal que $(S, \leq \cap S \times S)$ é bem-ordenado.
- (d) Dizemos que \leq é um *reticulado* se para quaisquer $x, y \in X$, o conjunto $\{x, y\}$ possui supremo e ínfimo.

Proposição 3.53.

- (a) Toda boa ordem é uma ordem total.
- (b) Toda boa ordem é uma árvore.
- (c) Toda ordem total é um reticulado.

Proposição 3.54. Se (X, \leq) é ordenado e $Y \subset X$, então $\leq \cap Y \times Y$ é uma relação de ordem e

- (a) se \leq é uma ordem total, então $\leq \cap Y \times Y$ é uma ordem total;
- (b) se \leq é uma boa ordem, então $\leq \cap Y \times Y$ é uma boa ordem;
- (c) se \leq é uma árvore, então $\leq \cap Y \times Y$ é uma árvore;

Definição 3.55. Seja (X, \leq) um conjunto ordenado. Sendo $Y \subset X$, dizemos que $\leq \cap Y \times Y$ é uma *subordem* de \leq . Dizemos que o conjunto ordenado $(Y, \leq \cap Y \times Y)$ é um *subconjunto ordenado* de (X, \leq) .

3.2.4 Relações de Equivalência

Definição 3.56. (Relações de equivalência)

- (a) Uma relação de equivalência em X é uma relação $\sim \subseteq X \times X$ que tem as seguintes propriedades.
 - i. Reflexividade: $\forall x(x \in X \rightarrow x \sim x)$;
 - ii. Simetria: $\forall x \forall y(x, y \in X \rightarrow (x \sim y \rightarrow y \sim x))$;
 - iii. Transitividade: $\forall x \forall y \forall z(x, y, z \in X \rightarrow (x \sim y \wedge y \sim z \rightarrow x \sim z))$.
- (b) A classe de equivalência de $a \in X$ por \sim é definida como

$$[a]_{\sim} := \{x \in X : x \sim a\}.$$

- (c) O conjunto das classes de equivalência de \sim é definido como

$$X/\sim := \{Y \in \mathcal{P}(X) : \exists x \forall y(y \in Y \leftrightarrow x \sim y)\} = \{[x]_{\sim} : x \in X\}.$$

Proposição 3.57. Seja \sim uma relação de equivalência num conjunto X . As seguintes afirmações são equivalentes.

- (a) $a \sim b$.
- (b) $a \in [b]$.
- (c) $b \in [a]$.
- (d) $[a] = [b]$.

Prova.

- (a) \Rightarrow (b): Por definição, $[b] = \{x \in X : x \sim b\}$, e como $a \sim b$, segue $a \in [b]$. ■
- (b) \Rightarrow (c): Se $a \in [b]$, então $a \sim b$, isto é, $b \in [a]$. ■
- (c) \Rightarrow (d): Se $b \in [a]$, então $b \sim a$. Se $x \in [a]$, então $x \sim a$, de modo que $x \sim b$, isto é, $x \in [b]$. Com isso, $[a] \subseteq [b]$. Analogamente temos $[b] \subseteq [a]$, de modo que $[a] = [b]$. ■
- (d) \Rightarrow (a): Se $a \in [a] = [b]$, então $a \sim b$. ■

Definição 3.58. Uma partição de um conjunto $X \neq \emptyset$ é um subconjunto $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}(X)$ que tem as seguintes propriedades.

- i. $\emptyset \notin \mathcal{P}$;
- ii. $\bigcup \mathcal{P} = X$;
- iii. $A \cap B = \emptyset$ para quaisquer $A, B \in \mathcal{P}$ tais que $A \neq B$.

Teorema 3.59. Se \sim é uma relação de equivalência num conjunto X , então X/\sim é uma partição de X , isto é, valem as seguintes afirmações.

- (a) $\emptyset \notin X/\sim$.
- (b) $\bigcup X/\sim = X$.
- (c) $\forall Y \forall Z ((Y, Z \in X/\sim) \rightarrow (Y = Z \vee Y \cap Z = \emptyset))$.

Prova.

- (a) Se $\emptyset \in X/\sim$, então existiria $x \in X$ tal que $\emptyset = [x]$, mas $x \in [x]$, uma contradição. ■
- (b) Se $y \in \bigcup X/\sim$, então existe $Y \in X/\sim$ tal que $y \in Y$. Como $Y \in X/\sim$, existe $x \in X$ tal que $Y = [x]$. Como $[x] \subseteq X$, vem $y \in X$, de modo que $\bigcup X/\sim \subseteq X$. Agora, se $x \in X$, então $x \sim x$ e $x \in [x]$, e como $[x] \in X/\sim$, vem $x \in \bigcup X/\sim$, de modo que $X \subseteq \bigcup X/\sim$. Logo $\bigcup X/\sim = X$. ■
- (c) Se $Y \cap Z = \emptyset$, nada há de ser provado. Se $Y \cap Z \neq \emptyset$, então existe $x \in X$ tal que $x \in Y \cap Z$. Sendo $y_0, z_0 \in X$ tais que $Y = [y_0]$ e $Z = [z_0]$, temos $x \sim y_0$ e $x \sim z_0$, de modo que $[y_0] = [z_0]$, isto é, $Y = Z$. ■

Teorema 3.60. Se \mathcal{P} é uma partição de um conjunto $X \neq \emptyset$, então existe uma relação de equivalência R em X tal que $X/R = \mathcal{P}$.

Prova. Pois tome $R := \{(x, y) \in X \times X : \exists A (A \in \mathcal{P} \wedge x, y \in A)\}$. ■

3.2.5 Funções

Definição 3.61 (Função).

- (a) Uma relação f é uma *função* se $(a, b) \in f$ e $(a, c) \in f$ implicam $b = c$. A *imagem* de $a \in \text{Dom}(f)$ por f é denotada por $f(a)$.
- (b) Uma *função parcial de A em B* é uma função f tal que $\text{Dom}(f) \subseteq A$ e $\text{Im}(f) \subseteq B$.
- (c) Uma *função total de A em B* é uma função f tal que $\text{Dom}(f) = A$ e $\text{Im}(f) \subseteq B$. Isso é denotado por $f : A \rightarrow B$.

Observação 3.62. Escrevemos apenas “função de A em B ”, omitindo o “total”.

Definição 3.63. A *função identidade* de um conjunto A é a função $\text{Id}_A : A \rightarrow A$ definida por $\text{Id}_A(x) = x$ para todo $x \in A$.

Proposição 3.64. Se $f : A \rightarrow B$ é uma função, então $\text{Id}_B \circ f = B$ e $f \circ \text{Id}_A = A$.

Prova. Teste só para ver se está funcionando. ■

Proposição 3.65. Sejam f e g funções e X um conjunto.

- (a) $f \circ f^{-1} = \text{Id}_{\text{Im}(f)}$.
- (b) $f|_X$ é uma função e seu domínio é $\text{Dom}(f) \cap X$.
- (c) $g \circ f$ é uma função.

Prova.

(a)

(b) Por definição, $f|_X = \{(a, b) \in f : a \in X\}$, isto é, f é um conjunto de pares ordenados e, portanto, uma relação. Se $(a, b) \in f|_X$ e $(a, c) \in f|_X$, então, pela definição de $f|_X$, $(a, b) \in f$, $(a, c) \in f$ e $a \in X$; como f é função, $b = c$, de modo que $f|_X$ é também uma função. Provemos, por fim, que $\text{Dom}(f|_X) = \text{Dom}(f) \cap X$. Se $a \in \text{Dom}(f|_X)$, então existe $b \in \text{Im}(f|_X)$ tal que $(a, b) \in f|_X$; pela definição de $f|_X$, vem $(a, b) \in f$ e $a \in X$, e de $(a, b) \in f$ vem $a \in \text{Dom}(f)$. Com isso, $a \in \text{Dom}(f) \cap X$, de modo que $\text{Dom}(f|_X) \subseteq \text{Dom}(f) \cap X$. Por outro lado, se $a \in \text{Dom}(f) \cap X$, então de $a \in \text{Dom}(f)$ segue que existe $b \in \text{Im}(f)$ tal que $(a, b) \in f$, e como $a \in X$, vem $(a, b) \in f|_X$, de modo que $\text{Dom}(f) \cap X \subseteq \text{Dom}(f|_X)$. Logo $\text{Dom}(f|_X) = \text{Dom}(f) \cap X$. Em particular, temos $f|_X = f|_{\text{Dom}(f) \cap X}$. ■

(c) Se $(a, x) \in g \circ f$ e $(a, y) \in g \circ f$, então, por definição, existe $b \in \text{Im}(f) \cap \text{Dom}(g)$ tal que $(a, b) \in f$ e $(b, x) \in g$ e existe $c \in \text{Im}(f) \cap \text{Dom}(g)$ tal que $(a, c) \in f$ e $(c, y) \in g$. Como f é função, vem $b = c$; daí, vem $(b, x) \in g$ e $(b, y) \in g$, e como g é função, vem $x = y$. ■

3.2.6 Bijeções e Funções Inversas

Injeções

Definição 3.66. Uma função f é *injetiva* se

$$\forall x \forall y (x, y \in \text{Dom}(f) \rightarrow (x \neq y \rightarrow f(x) \neq f(y))).$$

Proposição 3.67. Sejam f e g funções.

- (a) Se f e g são injetivas, então $g \circ f$ é injetiva.
- (b) Se $g \circ f$ é injetiva e $\text{Im}(f) \subseteq \text{Dom}(g)$, então f é injetiva.

Prova.

- (a) Sejam $x, y \in \text{Dom}(g \circ f)$. Se $g(f(x)) = g(f(y))$, então $f(x) = f(y)$ pela injetividade de g . Se $f(x) = f(y)$, então $x = y$ pela injetividade de f . Logo $g \circ f$ é injetiva. ■
- (b) Sejam $x, y \in \text{Dom}(f)$ tais que $f(x) = f(y)$. Se $\text{Im}(f) \subseteq \text{Dom}(g)$, então $f(x), f(y) \in \text{Dom}(g)$, e como $f(x) = f(y)$, temos $g(f(x)) = g(f(y))$. Daí, como $\text{Dom}(f) = \text{Dom}(g \circ f)$ (proposição (3.43)) e $g \circ f$ é injetiva, vem $x = y$, de modo que f é injetiva. ■

Teorema 3.68. Seja f uma função.

- (a) Se a relação f^{-1} é uma função, então f^{-1} é injetiva.
- (b) A relação f^{-1} é uma função se, e somente se,
- f é injetiva.
 - $f^{-1} \circ f = \text{Id}_{\text{Dom}(f)}$.

Prova.

- (a) Se $(y, x) \in f^{-1}$ e $(z, x) \in f^{-1}$, então $(x, y) \in f$ e $(x, z) \in f$, e como f é função vem $y = z$, de modo que f^{-1} é uma função injetiva. ■
- (b) A equivalência mais importante é com f ser injetiva.

- Se f^{-1} é uma função, então $(x, y) \in f^{-1}$ e $(x, z) \in f^{-1}$ implicam $y = z$. Daí, como $(y, x) \in f$ e $(z, x) \in f$, sendo $y = z$ segue que f é injetiva. Agora, se f é injetiva, então $(y, x) \in f$ e $(z, x) \in f$ implicam $y = z$, e como $(x, y) \in f^{-1}$ e $(x, z) \in f^{-1}$, segue que f^{-1} é uma função.

Provemos que f é injetiva se, e somente se, $f^{-1} \circ f = \text{Id}_{\text{Dom}(f)}$.

- (\Rightarrow) Se $(x, z) \in f^{-1} \circ f$, então existe $y \in \text{Im}(f) \cap \text{Dom}(f^{-1})$ tal que $(x, y) \in f$ e $(y, z) \in f^{-1}$. Com isso, $(z, y) \in f$, e como f é injetiva vem $z = x$, de modo que $(x, x) \in \text{Id}_{\text{Dom}(f)}$, isto é, $f^{-1} \circ f \subseteq \text{Id}_{\text{Dom}(f)}$. Agora, se $(x, x) \in \text{Id}_{\text{Dom}(f)}$, então existe $y \in \text{Im}(f)$ tal que $(x, y) \in f$, isto é, $(y, x) \in f^{-1}$. Com isso, $(x, x) \in f^{-1} \circ f$, de modo que $\text{Id}_{\text{Dom}(f)} \subseteq f^{-1} \circ f$. Com isso, vem $f^{-1} \circ f = \text{Id}_{\text{Dom}(f)}$.
(\Leftarrow) Sendo $(x, y) \in f$ e $(z, y) \in f$, temos $(y, x) \in f^{-1}$, de modo que $(z, x) \in f^{-1} \circ f$, e como $f^{-1} \circ f = \text{Id}_{\text{Dom}(f)}$, vem $x = z$, o que prova a injetividade de f .

Com isso, todas as equivalências foram provadas. ■

Definição 3.69. Uma função f é *invertível à esquerda* se existe uma função g tal que $g \circ f = \text{Id}_{\text{Dom}(f)}$. Dizemos que g é uma *inversa à esquerda* de f .

Teorema 3.70. Uma função f é invertível à esquerda se, e somente se, f é injetiva.

Prova. Se f é injetiva, então pelo teorema (3.68) f^{-1} é uma função tal que $f^{-1} \circ f = \text{Id}_{\text{Dom}(f)}$, isto é, f é invertível à esquerda. Agora, sendo $(x, y) \in f$ e $(z, y) \in f$, provemos que $x = z$. Como f é invertível à esquerda, existe uma função g tal que $g \circ f = \text{Id}_{\text{Dom}(f)}$. Como $(x, x) \in g \circ f$, existe $w \in \text{Im}(f) \cap \text{Dom}(g)$ tal que $(x, w) \in f$ e $(w, x) \in g$. Como f é uma função, vem $w = y$, de modo que $(y, x) \in g$. Analogamente temos $(y, z) \in g$, e como g é uma função vem $x = z$, de modo que f é injetiva. ■

Sobrejeções

Definição 3.71. Uma função $f : A \rightarrow B$ é *sobrejetiva em relação a B* se $\text{Im}(f) = B$.

Proposição 3.72. Uma função $f : A \rightarrow B$ é sobrejetiva em relação a B se, e somente se, para todo $y \in B$ existe $x \in A$ tal que $(x, y) \in f$.

Prova. Segue da proposição (3.42). ■

Lema 3.73. Sejam $f : A \rightarrow B$ e $g : C \rightarrow D$ funções.

- (a) $\text{Dom}(g \circ f) = \{x \in A : f(x) \in C\}$.
- (b) $\text{Dom}(g \circ f) = A$ se, e somente se, $f(A) \subseteq C$.

Prova.

- (a) Pela proposição (3.42), $\text{Dom}(g \circ f) = \{x \in A : \exists y(y \in D \wedge (x, y) \in g \circ f)\}$.
 - i. Se $x \in \text{Dom}(g \circ f)$, então existe $y \in D$ tal que $(x, y) \in g \circ f$. Logo existe $z \in \text{Im}(f) \cap \text{Dom}(g) \subseteq B \cap C$ tal que $(x, z) \in f$ e $(z, y) \in g$, isto é, $z = f(x)$ e $y = g(z)$. Com isso, $x \in A$ e $f(x) \in C$, de modo que $x \in \{x \in A : f(x) \in C\}$, isto é, $\text{Dom}(g \circ f) \subseteq \{x \in A : f(x) \in C\}$.
 - ii. Se $x \in \{x \in A : f(x) \in C\}$, então $x \in A$ e $f(x) \in C$, isto é, existe (um único) $z \in C$ tal que $(x, z) \in f$. Como $z \in C$, existe $y \in \text{Im } g \subseteq D$ tal que $(z, y) \in g$. Com isso, $x \in A$ e existe $y \in D$ tal que $(x, y) \in g \circ f$, de modo que $x \in \text{Dom}(g \circ f)$, isto é, $\{x \in A : f(x) \in C\} \subseteq \text{Dom}(g \circ f)$.

Logo $\text{Dom}(g \circ f) = \{x \in A : f(x) \in C\}$. ■

- (b) A volta (\Leftarrow) já foi provada (proposição (3.43)). Agora, se $y \in f(A)$, então existe $x \in A$ tal que $y = f(x)$, e como $A = \text{Dom}(g \circ f)$, vem $f(x) \in C$, isto é, $y \in C$. Logo $f(A) \subseteq C$. ■

Proposição 3.74. Sejam $f : A \rightarrow B$ e $g : C \rightarrow D$ funções.

- (a) Se f e g são sobrejetivas e $B = C$, então $g \circ f$ é sobrejetiva.
- (b) Se $g \circ f$ é sobrejetiva e $f(A) \subseteq C$, então g é sobrejetiva.

Prova.

■

Definição 3.75. Uma função $f : A \rightarrow B$ é *invertível à direita* se existe uma função $g : B \rightarrow A$ tal que $f \circ g = \text{Id}_B$. Dizemos que g é uma *inversa à direita* de f .

Teorema 3.76. Uma função $f : A \rightarrow B$ é invertível à direita se, e somente se, f é sobrejetiva em relação a B .

Observação 3.77. A prova deste teorema depende do axioma da escolha. Mais precisamente, de um enunciado equivalente ao axioma da escolha: para toda relação R existe uma função $f \subseteq R$ tal que $\text{Dom}(f) = \text{Dom}(R)$. Ainda assim, enunciamos este resultado aqui por uma questão de organização didática.

Prova.

■

Bijeções e Funções Inversas

Definição 3.78. Uma função $f : A \rightarrow B$ é *bijetiva em relação a B* se é injetiva e sobrejetiva em relação a B .

Proposição 3.79. Uma função $f : A \rightarrow B$ é bijetiva em relação a B se, e somente se, para todo $y \in B$ existe um único $x \in A$ tal que $(x, y) \in f$.

Prova.

■

Proposição 3.80. Se $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$ são funções bijetivas, então a função $g \circ f : A \rightarrow C$ é uma função bijetiva.

Prova. Segue como corolário imediato das proposições (3.67) e (3.74). ■

Teorema 3.81. Seja $f : A \rightarrow B$ uma função.

- (a) Se a relação f^{-1} é uma função de B em A , então f^{-1} bijetiva.
- (b) A relação f^{-1} é uma função de B em A se, e somente se,
 - i. f é bijetiva.
 - ii. $f^{-1} \circ f = \text{Id}_A$.

Prova.

■

- (a) Como f é função, para todo $x \in A$ existe um único $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$, isto é, $(y, x) \in f^{-1}$. Daí, pela proposição (3.79), f^{-1} é bijetiva em relação a A . ■

(b) A equivalência que mais importa é com f ser bijetiva.

- i. Se $f^{-1} \subseteq B \times A$ é uma função tal que $\text{Dom}(f^{-1}) = B$, então para todo $y \in B$ existe um único $x \in A$ tal que $(y, x) \in f^{-1}$, isto é, $(x, y) \in f$. Daí, pela proposição (3.79), temos que f é bijetiva. Agora, pela mesma proposição, se f é bijetiva, então para todo $y \in B$ existe um único $x \in A$ tal que $(x, y) \in f$, isto é, $(y, x) \in f^{-1}$. Daí, pela definição de função, f^{-1} é uma função de B em A . ■

Provemos que f é bijetiva se, e somente se, $f^{-1} \circ f = \text{Id}_A$.

- ii. Segue analogamente à prova do teorema (3.68). ■

Por fim, provemos que f é bijetiva se, e somente se, $f \circ f^{-1} = \text{Id}_B$.

- iii. Segue analogamente à prova do teorema (3.68). ■

Com isso, todas as equivalências foram provadas. ■

Definição 3.82. Uma função $f : A \rightarrow B$ é *invertível* se f é invertível à esquerda e à direita. A função $g : B \rightarrow A$ tal que $g \circ f = \text{Id}_A$ e $f \circ g = \text{Id}_B$ é chamada de *função inversa* de f .

Proposição 3.83. A função inversa de uma função invertível é única.

Prova. Sejam $f : A \rightarrow B$ uma função invertível e $g_1, g_2 : B \rightarrow A$ funções inversas de f . Provemos que $g_1 = g_2$. De fato,

$$g_1 = g_1 \circ \text{Id}_B = g_1 \circ (f \circ g_2) = (g_1 \circ f) \circ g_2 = \text{Id}_A \circ g_2 = g_2.$$

Logo, a inversa de f , quando existe, é única. ■

Teorema 3.84. Seja $f : A \rightarrow B$ uma função.

(a) f é invertível se, e somente se, f é bijetiva.

(b) Se f é invertível, então a função inversa de f é a relação inversa f^{-1} .

Prova.

(a) f é invertível se, e somente se, é invertível à esquerda e à direita. Pelo teorema (3.70), f é invertível à esquerda se, e somente se, f é injetiva. Pelo teorema (3.76), f é invertível à direita se, e somente se, f é sobrejetiva. Com isso, f é invertível se, e somente, f é bijetiva. ■

(b) Se f é invertível, então f é bijetiva. Se f é bijetiva, então pelo teorema (3.81) a relação $f^{-1} \subseteq B \times A$ é uma função de B em A , isto é, $f^{-1} : B \rightarrow A$. Naturalmente, f^{-1} (como relação inversa de f) é uma candidata para ser a função inversa de f , de sorte que teorema (3.81) temos $f^{-1} \circ f = \text{Id}_A$ e $f \circ f^{-1} = \text{Id}_B$, isto é, f^{-1} é, de fato, a função inversa de f . ■

Observação 3.85. Vamos resumir o que está acontecendo. O resultado mais importante é a equivalência entre $f : A \rightarrow B$ ser invertível e f ser bijetiva: por um lado, se f é bijetiva, então existe uma função inversa de f , que é única, e ela é dada pela relação inversa $f^{-1} \subseteq B \times A$, que pelo teorema (3.81) é uma função de B em A , que é ainda bijetiva. Por outro lado, se f é invertível, então existe $f^{-1} : B \rightarrow A$ (como função inversa de f), que coincide com f^{-1} (como relação inversa de f).

3.3 O Axioma do Infinito e os Números Naturais

Definição 3.86.

- (a) (Sucessor) Dado um conjunto x , o *sucessor* de x , denotado por x^+ , é definido como o conjunto $x \cup \{x\}$:

$$\forall x \forall y ((y \in x^+) \leftrightarrow ((y \in x) \vee (y = x)))$$

- (b) (Conjuntos indutivos) Um conjunto x é *indutivo* se $\emptyset \in x$ e $y \in x \rightarrow y^+ \in x$ para todo conjunto y . Isso é denotado por

$$\text{Ind}(x) \stackrel{\text{def}}{\leftrightarrow} ((\emptyset \in x) \wedge \forall y((y \in x) \rightarrow (y^+ \in x))).$$

Axioma 3.87 (Infinito). Existe um conjunto indutivo.

$$\boxed{\exists x((\emptyset \in x) \wedge \forall y((y \in x) \rightarrow (y^+ \in x)))}$$

Teorema 3.88. Para cada conjunto indutivo I , definindo

$$\omega(I) := \bigcap \{x \in \mathcal{P}(I) : \text{Ind}(x)\},$$

valem as seguintes afirmações para quaisquer conjuntos I e J indutivos.

- (a) $\omega(I)$ é um conjunto indutivo:

$$\forall I(\text{Ind}(I) \rightarrow \text{Ind}(\omega(I))).$$

- (b) $\omega(I) = \omega(J)$:

$$\forall I \forall J(\text{Ind}(I) \wedge \text{Ind}(J) \rightarrow \omega(I) = \omega(J)).$$

Prova. Provemos primeiramente que $\omega(I)$ está bem definido. Pelo axioma das partes, existe o conjunto $\mathcal{P}(I)$. Pelo axioma da separação com universo $\mathcal{P}(I)$ e a fórmula $(\emptyset \in x) \wedge \forall y((y \in x) \rightarrow (y^+ \in x))$ (que se abrevia por $\text{Ind}(x)$), existe $z(I) := \{x \in \mathcal{P}(I) : \text{Ind}(x)\}$. Pelo teorema (3.22), como $z(I) \neq \emptyset$ já que $I \in z(I)$, existe $\omega(I) := \bigcap z(I)$.

(a) Provemos primeiramente que $\emptyset \in \omega(I)$. Observe que, pelo teorema (3.22), $\omega(I) := \bigcap z(I)$ é o conjunto que satisfaz

$$\forall x \left(x \in \bigcap z(I) \leftrightarrow \forall y(y \in z(I) \rightarrow x \in y) \right). \quad (\diamondsuit_1)$$

Com isso, $\emptyset \in \bigcap z(I) \leftrightarrow \forall y(y \in z(I) \rightarrow \emptyset \in y)$. Agora, note que, por definição,

$$\forall y(y \in z(I) \leftrightarrow y \subset I \wedge \text{Ind}(y)); \quad (\diamondsuit_2)$$

daí, $\emptyset \in \bigcap z(I) \leftrightarrow \forall y(y \subset I \wedge \text{Ind}(y) \rightarrow \emptyset \in y)$, o que sabemos ser verdade: se $y \subset I$ é indutivo, então $\emptyset \in y$. Assim, $\emptyset \in \bigcap z(I) = \omega(I)$.

Agora provemos que $\forall x((x \in \omega(I)) \rightarrow (x^+ \in \omega(I)))$. Com (\diamondsuit_1) , precisamos provar que

$$\forall x(\forall y(y \in z(I) \rightarrow x \in y) \rightarrow \forall y(y \in z(I) \rightarrow x^+ \in y)),$$

isto é, precisamos provar que

$$\forall x(\forall y(y \in z(I) \rightarrow (x \in y \rightarrow x^+ \in y))).$$

Por (\diamondsuit_2) , ficamos com

$$\forall x(\forall y(y \subset I \wedge \text{Ind}(y) \rightarrow (x \in y \rightarrow x^+ \in y))),$$

o que sabemos ser verdade: se $y \subset I$ é indutivo, então $\forall x(x \in y \rightarrow x^+ \in y)$.

(b) Provemos inicialmente que, para quaisquer I e J indutivos, $\omega(I) \subset J$, isto é, que $\omega(I)$ é, de certo modo, o “menor” conjunto indutivo. Inicialmente, veja que o mesmo argumento do item (a) nos mostra que, se I e J são indutivos, então $I \cap J$ é indutivo. Como $I \cap J \subset I$, temos $I \cap J \in z(I)$. Agora, pelo teorema (3.22),

$$x \in \bigcap z(I) \leftrightarrow \forall w(w \in z(I) \rightarrow x \in w),$$

onde, particularmente para $w = I \cap J$, $x \in \bigcap z(I) \rightarrow x \in I \cap J$, isto é, $\omega(I) = \bigcap z(I) \subset I \cap J \subset J$. Para finalizar, como $\omega(I)$ é indutivo, vale $\omega(I) \subset \omega(J)$ e, por simetria, também vale $\omega(J) \subset \omega(I)$, donde $\omega(I) = \omega(J)$.

Observação 3.89. O teorema (3.88) nos diz que $\omega(I)$ é a interseção da família de todos os conjuntos indutivos e que o parâmetro I pode ser suprimido. A seguinte definição só é possível devido a esse teorema.

Definição 3.90. O conjunto dos números naturais, que será denotado por ω , é definido como a interseção de todos os conjuntos indutivos.

Teorema 3.91. O conjunto ω dos números naturais serve como modelo para os axiomas de Peano, a saber:

- (a) $\forall x \forall y (x, y \in \omega \rightarrow (\neg(x = y) \rightarrow \neg(x^+ = y^+)))$;
- (b) $\forall x (x \in \omega \rightarrow (\neg(x^+ = \emptyset)))$;
- (c) $(P(\emptyset) \wedge \forall x (x \in \omega \rightarrow (P(x) \rightarrow P(x^+)))) \rightarrow \forall x (x \in \omega \rightarrow P(x))$, para cada fórmula P .

Prova. (a) Suponha, por absurdo, que $x \neq y$ e $x^+ = y^+$. Sabemos que $x \in x^+$; sendo $x^+ = y^+ = y \cup \{y\}$, vemos que $x \in y$ ou $x \in \{y\}$. Esta última equivale a $x = y$, o que contraria a hipótese. Logo, só pode ser $x \in y$. Analogamente, obtemos $y \in x$, o que contraria a proposição (3.33). Logo, se $x \neq y$, só pode ser $x^+ \neq y^+$. ■

Note que não usamos a hipótese de ser $x, y \in \omega$, ou seja, vale a afirmação mais forte $\forall x \forall y (\neg(x = y) \rightarrow \neg(x^+ = y^+))$.

(b) Sabemos que $\forall x (x \in x^+)$. Se fosse $x^+ = \emptyset$ para algum x , seria $x \in \emptyset$, o que não é. ■

Novamente, não usamos a hipótese de ser $x \in \omega$, ou seja, vale a afirmação mais forte $\forall x (\neg(x^+ = \emptyset))$.

(c) Seja P uma fórmula em que x aparece livre tal que $P(\emptyset)$ e $\forall x (P(x) \rightarrow P(x^+))$. Pelo axioma da separação, defina $A := \{x \in \omega : P(x)\}$. Afirmamos que A é indutivo. De fato, isso segue imediatamente do fato de ser, por hipótese, $P(\emptyset)$ e $\forall x (P(x) \rightarrow P(x^+))$. Com o que provamos no item (b) do teorema (3.3), temos $\omega \subset A$, o que nos mostra que todo elemento de ω satisfaz $P(x)$.

Teorema 3.92. (ω, \subset) é bem ordenado.

Prova. Ver [5], teorema 4.26, página 111.

3.3.1 O Teorema da Recursão

Para definir funções de domínio ω recursivamente, precisamos

1. estabelecer o valor da função em 0;
2. estabelecer uma “regra” para definir o valor da função em n^+ uma vez que se conheça o seu valor em n .

Teorema 3.93 (da recursão finita). Sejam X um conjunto, $x_0 \in X$ e $g : X \rightarrow X$. Existe e é única a função $f : \omega \rightarrow X$ tal que

- $f(0) = x_0$;
- $f(n^+) = g(f(n))$, para todo $n \in \omega$.

Prova. A ideia é considerar todas as relações contidas em $\omega \times X$ que cumprem as condições desejadas e provar que a interseção de todas elas resulta em uma única função de domínio ω . Defina

$$\mathcal{C} := \{R \in \mathcal{P}(\omega \times X) : (0, x_0) \in R \wedge \forall n \forall y((n, y) \in R \rightarrow (n^+, g(y)) \in R)\}.$$

Como $\omega \times X \in \mathcal{C}$, temos $\mathcal{C} \neq \emptyset$, de modo que, pelo teorema (3.22) podemos tomar $f := \bigcap \mathcal{C}$. Temos $(0, x_0) \in f$ porque $(0, x_0) \in R$ para toda $R \in \mathcal{C}$. Analogamente, se $(n, y) \in f$, então $(n, y) \in R$ para toda $R \in \mathcal{C}$, de modo que $(n^+, g(y)) \in R$ para toda $R \in \mathcal{C}$, provando que $(n^+, g(y)) \in f$ e que $f \in \mathcal{C}$.

- i. $\text{Dom}(f) = \omega$. Claramente, $\text{Dom}(f) \subset \omega$. Como $(0, x_0) \in f$, temos $0 \in \text{Dom}(f)$. Agora, se $n \in \text{Dom}(f)$, então existe $y \in X$ tal que $(n, y) \in f$, já que f é uma relação. Com isso, vem $(n^+, g(y)) \in f$, donde $n^+ \in \text{Dom}(f)$. Assim, $\text{Dom}(f)$ é indutivo, e como $\text{Dom}(f) \subset \omega$, temos que $\text{Dom}(f) = \omega$.
- ii. f é função. Provaremos que $(n, y) \in f$ e $(n, z) \in f$ implicam $y = z$ por indução em n .
 - Base de indução. Como $(0, x_0) \in f$, provemos que se $(0, z) \in f$, então $z = x_0$. Equivalentemente, via contrapositiva, podemos provar que se $z \in X$ é tal que $z \neq x_0$, então $(0, z) \notin f$. Como $(0, z) \notin f$ equivale a $f \setminus \{(0, z)\} \in \mathcal{C}$, provemos isso para todo $z \in X$ tal que $z \neq x_0$. Sendo $z \neq x_0$, o par $(0, x_0)$ não foi “removido” de f , de modo que $(0, x_0) \in f \setminus \{(0, z)\}$. Agora, se $(n, y) \in f \setminus \{(0, z)\}$, então, como $f \in \mathcal{C}$, temos que $(n^+, g(y)) \in f$. Como, pelo teorema (3.91), $n^+ \neq 0$ para todo $n \in \omega$, temos $(n^+, g(y)) \in f \setminus \{(0, z)\}$. Isso prova que $f \setminus \{(0, z)\}$ é uma relação que satisfaz as condições do teorema e, portanto, $f \setminus \{(0, z)\} \in \mathcal{C}$. Com isso, se $(0, z) \in f$, então $z = x_0$.
 - Passo indutivo. Agora, tomando $n \in \text{Dom}(f)$, existe $y \in X$ tal que $(n, y) \in f$, e ainda, $(n^+, g(y)) \in f$. Supondo, por hipótese de indução, que $(n, z) \in f$ implica $y = z$, precisamos provar que $(n^+, z) \in f$ implica $z = g(y)$. Provemos, então, via contrapositiva, que se $z \in X$ é tal que $z \neq g(y)$, então $(n^+, z) \notin f$. Isso significa provar, assim como

fizemos no caso base da indução, que $f \setminus \{(n^+, z)\} \in \mathcal{C}$. De fato, como $n^+ \neq 0$, temos $(0, x_0) \in f \setminus \{(n^+, z)\}$ (o par $(0, x_0)$ não pode ter sido “removido”). Agora, se $m \in \text{Dom}(f)$, existe $t \in X$ tal que $(m, t) \in f$ e $(m^+, g(t)) \in f$. Se for $m^+ = n^+$, então $m = n$ (teorema (3.91)), de modo que, pela hipótese de indução, $t = y$, donde $g(t) = g(y) \neq z$. Assim, $f \setminus \{(n^+, z)\}$ satisfaz as condições do teorema e, portanto, $f \setminus \{(n^+, z)\} \in \mathcal{C}$. Com isso, se $(n^+, z) \in f$, então $z = g(y)$.

- iii. Unicidade de f . Se h é outra função satisfazendo as condições do teorema, então $h(0) = x_0 = f(0)$ e, se $h(n) = f(n)$, então

$$h(n^+) = g(h(n)) = g(f(n)) = f(n^+).$$

de modo que, por indução, $h = f$.

Com isso, vemos que existe uma relação f que é uma função, tem domínio ω , é única e satisfaz as condições do teorema.

Teorema 3.94 (da recursão com parâmetro). Sejam X um conjunto, $x_0 \in X$ e $g : \omega \times X \rightarrow X$. Existe e é única a função $f : \omega \rightarrow X$ tal que

- $f(0) = x_0$;
- $f(n^+) = g(n, f(n))$, para todo $n \in \omega$.

Prova. Defina $g' : \omega \times X \rightarrow \omega \times X$ por $g'(n, y) = (n^+, g(n, y))$. Pelo teorema da recursão finita (3.93), existe uma única função $f' : \omega \rightarrow \omega \times X$ tal que $f'(0) = (0, x_0)$ e $f'(n^+) = g'(f'(n))$ para todo $n \in \omega$.

Afirmamos que a primeira coordenada de $f'(n)$ é sempre n , isto é, que $f'(n) = (n, y_n)$ para todo $n \in \omega$ e algum $y_n \in X$. De fato, $f'(0) = (0, x_0)$ claramente cumpre a afirmação, e se $f'(n) = (n, y_n)$ para algum $y_n \in X$, então $f'(n^+) = g'(f'(n)) = (n^+, g(n, y_n)) = (n^+, g(n, f(n)))$, o que prova, via indução, a afirmação. Com isso, podemos definir $f : \omega \rightarrow X$ de modo que $f(n) = y_n$, para todo $n \in \omega$.

Provemos que f satisfaz as condições do teorema. Temos $f'(0) = (0, x_0)$, donde $f(0) = x_0$. Ainda pela definição de f , temos $f'(n) = (n, f(n))$ e $f'(n^+) = (n^+, f(n^+))$; por outro lado, $f'(n^+) = g'(f'(n)) = (n^+, g(n, f(n)))$, de modo que $f(n^+) = g(n, f(n))$ para todo $n \in \omega$.

Por fim, provemos a unicidade de f . Se $h : \omega \rightarrow X$ tal que $h(0) = x_0$ e $h(n^+) = g(n, h(n))$ para todo $n \in \omega$, definindo $h' : \omega \rightarrow \omega \times X$ por $h'(n) = (n, h(n))$, temos que $h'(0) = (0, x_0)$ e, para todo $n \in \omega$,

$$h(n^+) = (n^+, h(n^+)) = (n^+, g(n, h(n))) = g'(h(n)) = g'(h'(n)).$$

Com isso, h' é uma função que satisfaz as mesmas condições que f' ; como f' foi construída pelo teorema da recursão, segue que $h' = f'$.

Para a próxima versão do teorema da recursão, denotamos por $X^{<\omega}$ o conjunto de todas as funções de um certo $n \in \omega$ em X .

Teorema 3.95 (da recursão completa). Sejam X um conjunto e $g : X^{<\omega} \rightarrow X$ uma função. Existe e é única a função $f : \omega \rightarrow X$ tal que $f(n) = g(f|_n)$ para todo $n \in \omega$.

Prova. Ver [5], corolário 4.31, página 115. Observe que esse resultado, assim como (3.94), são corolários do teorema (3.93).

3.3.2 Aritmética dos Números Naturais

3.4 O Axioma da Escolha

Convém introduzir um símbolo predicado.

Observação 3.96. Um símbolo de predicado para “ f é função”, onde f ocorre livre, é

$$\text{Fun}(f) \stackrel{\text{def}}{\leftrightarrow} \text{Rel}(f) \wedge \forall a \forall b \forall c ((a, b) \in f \wedge (a, c) \in f \rightarrow b = c).$$

Um símbolo de predicado para “ f é função de A em B ”, onde f , A e B ocorrem livre, é

$$\text{Fun}(f, A, B) \stackrel{\text{def}}{\leftrightarrow} \text{Fun}(f) \wedge \text{Dom}(f) = A \wedge \text{Im}(f) \subseteq B,$$

ou ainda, de maneira mais explícita,

$$\text{Fun}(f, A, B) \stackrel{\text{def}}{\leftrightarrow} \text{Fun}(f) \wedge \forall x (x \in A \leftrightarrow \exists y ((x, y) \in f)) \wedge \forall x \forall y ((x, y) \in f \rightarrow y \in B).$$

Axioma 3.97 (da Escolha). Para todo conjunto x de conjuntos não vazios existe uma função $f : x \rightarrow \bigcup x$ tal que $f(y) \in y$ para todo $y \in x$.

$$\forall x (\emptyset \notin x \rightarrow \exists f (\text{Fun}(f, x, \bigcup x) \wedge \forall y (y \in x \rightarrow f(y) \in y))).$$

$$\forall x \exists f (\text{Fun}(f, x \setminus \{\emptyset\}, \bigcup x) \wedge \forall y (y \in x \setminus \{\emptyset\} \rightarrow f(y) \in y)).$$

Dizemos que f é uma *função escolha* em x .

Observação 3.98. Usamos a sigla AC (do inglês Axiom of Choice) para nos referir ao axioma da escolha. Por seu caráter não construtivo, o axioma da escolha é o axioma matemático mais controverso, evitado por uns e usado indiscriminadamente por outros. Desastres acontecem com e sem AC: por exemplo, sem AC, muitos resultados matemáticos fundamentais falham, sendo equivalentes em ZF a AC ou a alguma forma fraca de AC.

Definição 3.99. Uma *sequência* de elementos de um conjunto X *indexada* por elementos de um conjunto I é uma função $x : I \rightarrow X$.

- (a) Denotamos por x_i a imagem de $i \in I$ pela sequência $x : I \rightarrow X$, isto é, $x_i := x(i)$.
- (b) Denotamos por $(x_i)_{i \in I}$ a sequência $x : I \rightarrow X$.
- (c) Denotamos por $\{x_i : i \in I\}$ a imagem da sequência $(x_i)_{i \in I}$.
- (d) Denotamos por $\bigcup_{i \in I} x_i$ a união da imagem da sequência $(x_i)_{i \in I}$, isto é, $\bigcup_{i \in I} x_i := \bigcup \{x_i : i \in I\}$

Definição 3.100. O *produto cartesiano* de $(X_i)_{i \in I}$ é definido como

$$\prod_{i \in I} X_i := \left\{ f \in \mathcal{P} \left(I \times \bigcup_{i \in I} X_i \right) : \text{Fun} \left(f, I, \bigcup_{i \in I} X_i \right) \wedge \forall i (i \in I \rightarrow f(i) \in X_i) \right\},$$

isto é, $\prod_{i \in I} X_i$ é definido como o conjunto de todas as funções f de domínio I tais que $f(i) \in X_i$ para todo $i \in I$.

Proposição 3.101. O axioma da escolha é equivalente à seguinte afirmação: se $(X_i)_{i \in I}$ é uma sequência com $X_i \neq \emptyset$ para todo $i \in I$, então $\prod_{i \in I} X_i \neq \emptyset$.

Prova. (\Rightarrow) Usemos a notação usual de função escrevendo $g = (X_i)_{i \in I}$. Note que o conjunto imagem de g , denotado por $\{X_i : i \in I\}$, é, formalmente, o conjunto

$$\left\{ x \in \mathcal{P} \left(\bigcup_{j \in I} X_j \right) : \exists i (i \in I \wedge x = X_i) \right\}.$$

Como $X_i \neq \emptyset$ para todo $i \in I$, temos que $\emptyset \notin \text{Im}(g)$, de modo que, pelo axioma da escolha, existe uma função $f : \text{Im}(g) \rightarrow \bigcup \text{Im}(g)$ tal que $f(x) \in x$ para todo $x \in \text{Im}(g)$. Assim, existe uma função, $f \circ g : I \rightarrow \bigcup \text{Im}(g)$, tal que $(f \circ g)(i) = f(X_i) \in X_i$ para todo $i \in I$, de modo que $f \circ g \in \prod_{i \in I} X_i \neq \emptyset$.

(\Leftarrow) Agora, seja $x \neq \emptyset$ tal que $\emptyset \notin x$. Sendo g a função identidade em x e fazendo $I = x$ e $X_i = i$ para todo $i \in I$, temos que g é a sequência $(X_i)_{i \in I}$. Como $I \neq \emptyset$ e $X_i \neq \emptyset$ para todo $i \in I$, temos, por hipótese, que $\prod_{i \in I} X_i \neq \emptyset$. Com isso, toda função $f \in \prod_{i \in I} X_i$ é tal que $f(i) \in X_i$ para todo $i \in I$, isto é, $f(y) \in y$ para todo $y \in x$, como exige o axioma da escolha.

Parte II

Números Reais

Capítulo 4

Números Reais como na Análise

4.1 Corpos

Definição 4.1. Uma tripla $(\mathbb{F}, +, \cdot)$ é um *corpo* se no conjunto $\mathbb{F} \neq \emptyset$ existem duas operações, $+ : \mathbb{F} \times \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$ e $\cdot : \mathbb{F} \times \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$, para as quais

- A1: $x + (y + z) = (x + y) + z$ para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{F}$;
- A2: $x + y = y + x$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{F}$;
- A3: existe $0 \in \mathbb{F}$ tal que $x + 0 = x$ para todo $x \in \mathbb{F}$;
- A4: para cada $x \in \mathbb{F}$ existe $y \in \mathbb{F}$ tal que $x + y = 0$;
- M1: $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{F}$;
- M2: $x \cdot y = y \cdot x$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{F}$;
- M3: existe $1 \in \mathbb{F}_{\neq 0}$ tal que $x \cdot 1 = x$ para todo $x \in \mathbb{F}$;
- M4: para cada $x \in \mathbb{F}_{\neq 0}$ existe $y \in \mathbb{F}$ tal que $x \cdot y = 1$;
- D: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{F}$.

Para simplificar a notação, e quando não houver perigo de confusão, vamos nos referir ao corpo $(\mathbb{F}, +, \cdot)$ simplesmente como o conjunto \mathbb{F} .

Observação 4.2. As operações $+$ e \cdot são chamadas, respectivamente, de *adição* e *multiplicação*. As propriedades descritas em A1 e M1 são chamadas de *associatividade*; em A2 e M2, de *comutatividade*; em A3 e M3, de existência de *elementos neutros*; em A4, de existência de um *oposto aditivo*; em M4, de existência de um *inverso multiplicativo*; e em D, de *distributividade*.

Proposição 4.3. Seja $(\mathbb{F}, +, \cdot)$ um corpo. Valem as seguintes afirmações.

(a) (Unicidade)

- i. O elemento neutro 0 de $+$ é único.
- ii. O elemento neutro 1 de \cdot é único.
- iii. O inverso multiplicativo de cada elemento de $\mathbb{F}_{\neq 0}$ é único.

(b) (Leis do corte) Para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{F}$, temos

- i. $x + z = y + z \Rightarrow x = y;$
- ii. $x \cdot z = y \cdot z \text{ e } z \in \mathbb{F}_{\neq 0} \Rightarrow x = y.$

(c) (Integridade) Para quaisquer $x, y \in \mathbb{F}$, temos

- i. $x \cdot 0 = 0;$
- ii. $x \cdot y = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } y = 0;$

(d) (Regras dos sinais) Para quaisquer $x, y \in \mathbb{F}$, temos

- i. $(-1) \cdot x = -x;$
- ii. $-(-x) = x;$
- iii. $(-x) \cdot y = x \cdot (-y) = -(x \cdot y);$
- iv. $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y.$

(e) Para quaisquer $x, y \in \mathbb{F}$, temos

$$x^2 = y^2 \Leftrightarrow x = y \text{ ou } x = -y.$$

Prova.

■

Definição 4.4. Um corpo $(\mathbb{F}, +, \cdot)$ é *ordenado* se existe uma relação $\leq \subseteq \mathbb{F} \times \mathbb{F}$ tal que (\mathbb{F}, \leq) é um conjunto totalmente ordenado e

- i. para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{F}$, se $x \leq y$, então $x + z \leq y + z$;
- ii. para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{F}$, se $x \leq y$ e $0 \leq z$, então $x \cdot z \leq y \cdot z$.

Isso é denotado por $(\mathbb{F}, +, \cdot, \leq)$.

Proposição 4.5. Seja $(\mathbb{F}, +, \cdot, \leq)$ um corpo ordenado.

(a) A relação $< \subseteq \mathbb{F} \times \mathbb{F}$ definida como

$$< := \{(x, y) \in \mathbb{F} \times \mathbb{F} : x \leq y \wedge x \neq y\}$$

é de ordem estrita total.

(b) Existe um subconjunto $\mathbb{F}_{>0} \subseteq \mathbb{F}$ tal que

- i. se $x, y \in \mathbb{F}_{>0}$, então $x + y \in \mathbb{F}_{>0}$ e $x \cdot y \in \mathbb{F}_{>0}$;
- ii. se $x \in \mathbb{F}$, então ou $x = 0$, ou $x \in \mathbb{F}_{>0}$, ou $-x \in \mathbb{F}_{>0}$, exclusivamente.

Prova.

(a)

(b) Como a notação “ $\mathbb{F}_{>0}$ ” sugere, basta tomar $\mathbb{F}_{>0} := \{x \in \mathbb{F} : x > 0\}$, onde $y > x$ significa $x < y$.

Observação 4.6. Sendo \mathbb{F} um corpo ordenado, escrevemos $x < y$ quando $y > x$ e $x \leq y$ quando $y \geq x$.

Proposição 4.7. Propriedades cringe de ordem

Definição 4.8. Seja \mathbb{F} um corpo ordenado. A função $|\cdot| : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}_{\geq 0}$ definida por

$$|x| := \begin{cases} x & \text{se } x \in \mathbb{F}_{\geq 0} \\ -x & \text{se } x \in \mathbb{F}_{< 0} \end{cases}$$

é chamada de *função modular*. O *módulo*, ou o *valor absoluto*, de $x \in \mathbb{F}$, é a imagem de x pela função modular, isto é, $|x| \in \mathbb{F}_{\geq 0}$.

Proposição 4.9. Seja \mathbb{F} um corpo ordenado. Valem as seguintes afirmações.

- (a) $x \leq |x|$ para todo $x \in \mathbb{F}$;
- (b) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{F}$;
- (c) $|x + y| \leq |x| + |y|$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{F}$;
- (d) $|x| - |y| \leq ||x| - |y|| \leq |x - y|$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{F}$;
- (e) $|x - z| \leq |x - y| + |y - z|$;
- (f) $|x| \leq \epsilon \Leftrightarrow -\epsilon \leq x \leq \epsilon$ para quaisquer $x \in \mathbb{F}$ e $\epsilon \in \mathbb{F}_{>0}$.

Prova. Ver [14], teorema 4.5, página 14. ■

4.2 Números Naturais

Em toda esta seção, $(\mathbb{F}, +, \cdot, \leq)$ é um corpo ordenado qualquer.

Definição 4.10. Um subconjunto $I \subseteq \mathbb{F}$ é *indutivo* se $1 \in I$ e $n \in I \Rightarrow n + 1 \in I$. Isso é denotado por $\text{Ind } I$.

Exemplo 4.11. \mathbb{F} é um conjunto indutivo. Com isso, o conjunto de todos os subconjuntos indutivos de \mathbb{F} é não vazio, isto é, $\{I \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) : \text{Ind}(I)\} \neq \emptyset$. Em particular, isso nos permite considerar $\bigcap\{I \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) : \text{Ind}(I)\}$.

Proposição 4.12. Se \mathcal{A} é uma coleção não vazia de subconjuntos indutivos de \mathbb{F} , isto é, se

$$\mathcal{A} \in \mathcal{P}(\{I \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) : \text{Ind}(I)\})_{\neq \emptyset},$$

então $\bigcap \mathcal{A}$ é um conjunto indutivo.

Prova. Como $1 \in A$ para todo $A \in \mathcal{A}$, temos $1 \in \bigcap \mathcal{A}$. Agora, se $n \in \bigcap \mathcal{A}$, então $n \in A$ para todo $A \in \mathcal{A}$; como cada $A \in \mathcal{A}$ é indutivo, temos $n+1 \in A$, donde $n+1 \in \bigcap \mathcal{A}$. ■

Definição 4.13. O conjunto dos números naturais é definido como o menor subconjunto indutivo de \mathbb{F} :

$$\mathbb{N}_{\mathbb{F}} := \bigcap \{I \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) : \text{Ind}(I)\}.$$

Observação 4.14. Explicação

Teorema 4.15 (Indução).

- (a) Se um subconjunto $A \subseteq \mathbb{N}$ é indutivo, então $A = \mathbb{N}$.
- (b) Seja $s(n)$ uma proposição bem definida para cada $n \in \mathbb{N}$. Se $s(1)$ é verdadeira e se $s(n+1)$ é verdadeira sempre que $s(n)$ é verdadeira, então $s(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

Prova.

- (a) Se A é um conjunto indutivo, então, pela definição de \mathbb{N} , temos $\mathbb{N} \subseteq A$. Daí, se $A \subseteq \mathbb{N}$, então $A = \mathbb{N}$. ■
- (b) Definindo $A := \{n \in \mathbb{N} : s(n)\}$, temos $A \subseteq \mathbb{N}$. Além disso, $1 \in A$ e $n+1 \in A$ sempre que $n \in A$, de modo que A é indutivo. Com isso, $\mathbb{N} \subseteq A$, de modo que $A = \mathbb{N}$, isto é, vale $s(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Proposição 4.16.

- (a) Para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$ tem-se $m+n \in \mathbb{N}$.
- (b) Para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$ tem-se $m \cdot n \in \mathbb{N}$.
- (c) Para qualquer $n \in \mathbb{N}$, tem-se $n \geq 1$. Isso significa, em particular, que \mathbb{N} é limitado inferiormente.

Prova.

- (a) Fixe $m \in \mathbb{N}$ e defina $A := \{n \in \mathbb{N} : m+n \in \mathbb{N}\}$. Temos $1 \in A$ pois se $m \in \mathbb{N}$ então $m+1 \in \mathbb{N}$ já que \mathbb{N} é indutivo. Agora, se $n \in A$, então $m+n \in \mathbb{N}$, e como \mathbb{N} é indutivo vem $(m+n)+1 \in \mathbb{N}$, isto é, $m+(n+1) \in \mathbb{N}$, de modo que $n+1 \in A$. Com isso, A é indutivo, isto é, $\mathbb{N} \subseteq A$. Como $A \subseteq \mathbb{N}$

pela definição de A , segue que $A = \mathbb{N}$. Como m foi fixado arbitrariamente, segue que $m + n \in \mathbb{N}$ para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$. ■

- (b) Fixe $m \in \mathbb{N}$ e defina $A := \{n \in \mathbb{N} : m \cdot n \in \mathbb{N}\}$. Temos $1 \in A$ pois $m \cdot 1 = m \in \mathbb{N}$. Agora, se $n \in A$, então $m \cdot n \in \mathbb{N}$, e pelo item anterior $m \cdot n + m \in \mathbb{N}$, isto é, $m \cdot (n + 1) \in \mathbb{N}$, de modo que $n + 1 \in A$. Com isso, A é indutivo, isto é, $\mathbb{N} \subseteq A$. Como $A \subseteq \mathbb{N}$ pela definição de A , segue que $A = \mathbb{N}$. Como m foi fixado arbitrariamente, segue que $m \cdot n \in \mathbb{N}$ para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$. ■
- (c) Definindo $A := \{n \in \mathbb{N} : n \geq 1\}$, temos $A \subseteq \mathbb{N}$. Claramente $1 \in A$ pois $1 \geq 1$. Agora, se $n \in A$, então $1 > 0 \Rightarrow n + 1 > n \geq 1 \Rightarrow n + 1 \geq 1$, de modo que $n + 1 \in A$. Com isso $\mathbb{N} \subseteq A$, donde $A = \mathbb{N}$. ■

Lema 4.17.

- (a) Para qualquer $n \in \mathbb{N}$, se $n \neq 1$, então $n - 1 \in \mathbb{N}$.
- (b) Para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$, se $n < m$, então $m - n \in \mathbb{N}$.
- (c) Para qualquer $n \in \mathbb{N}$ não existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $n < m < n + 1$.

Prova.

- (a) Suponha que existe $p \in \mathbb{N}$ com $p \neq 1$ tal que $p - 1 \notin \mathbb{N}$, e seja $A = \mathbb{N} \setminus \{p\}$. Como $1 \in \mathbb{N}$ e $p \neq 1$, temos $1 \in A$. Agora, se $n \in A$, então $n \neq p$, e também $n + 1 \neq p$ (se fosse $n + 1 = p$, então $p - 1 = n \in \mathbb{N}$, mas supomos $p - 1 \notin \mathbb{N}$), de modo que A é indutivo. Assim, $\mathbb{N} \setminus \{p\} = \mathbb{N}$, uma clara contradição, de modo que não existe tal p . ■
- (b) Definindo $A := \{n \in \mathbb{N} : \forall m (m \in \mathbb{N} \wedge n < m \Rightarrow m - n \in \mathbb{N})\}$, temos $A \subseteq \mathbb{N}$. Para todo $m \in \mathbb{N}$ com $m > 1$, temos $m \neq 1$, de modo que $m - 1 \in \mathbb{N}$ pelo item anterior. Com isso, $1 \in A$. Agora, se $n \in A$, então para todo $m \in \mathbb{N}$ com $m > n$ tem-se $m - n \in \mathbb{N}$, e precisamos provar que $n + 1 \in A$, isto é, que para todo $m \in \mathbb{N}$ com $m > n + 1$ tem-se $m - (n + 1) \in \mathbb{N}$. Se $m > n + 1$, então $m > n + 1 > n$, de modo que, pela hipótese de indução, temos $m - n \in \mathbb{N}$. Agora, como $m > n + 1$, temos $m - n \neq 1$, e como $m - n \in \mathbb{N}$, pelo item anterior temos $(m - n) - 1 \in \mathbb{N}$, isto é, $m - (n + 1) \in \mathbb{N}$, de modo que $n + 1 \in A$. Com isso, A é indutivo, isto é, $\mathbb{N} \subseteq A$, de modo que $A = \mathbb{N}$. ■
- (c) Sendo $n \in \mathbb{N}$, suponha que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $n < m < n + 1$. Daí, $m - n < 1$ e, pelo item anterior, $m - n \in \mathbb{N}$, absurdo! Logo, tal m não pode existir. ■

Teorema 4.18 (Princípio da Boa Ordenação). Todo subconjunto não vazio de números naturais possui um elemento mínimo. Isto é, se $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})_{\neq \emptyset}$, então

existe $a \in A$ tal que $a \leq x$ para todo $x \in A$.

Prova. Suponha por contradição que existe um subconjunto $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})_{\neq \emptyset}$ que não tem um elemento mínimo. Definindo $[n] := \{x \in \mathbb{N} : x \leq n\}$ e $X := \{n \in \mathbb{N} : [n] \cap A = \emptyset\}$, temos $1 \in X$ (de fato, se $1 \notin X$, então $[1] \cap A \neq \emptyset$, de modo que $1 \in A$ seria o elemento mínimo de A , absurdo!). Agora, se $n \in X$, então $[n] \cap A = \emptyset$; daí, se fosse $n+1 \in A$, este seria o elemento mínimo de A , absurdo! Logo, só pode ser $n+1 \in X$, de modo que X é indutivo e $\mathbb{N} \subseteq X$. Como $X \subseteq \mathbb{N}$ por definição, temos que $X = \mathbb{N}$, donde $A = \emptyset$, uma contradição. ■

Prova. Suponha por contradição que existe um subconjunto $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})_{\neq \emptyset}$ que não tem um elemento mínimo. Definindo

$$X := \{n \in \mathbb{N} : \forall r \in \mathbb{N} (r \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq r \leq n \Rightarrow r \in \mathbb{N} \setminus A)\},$$

temos $1 \in X$. De fato, se fosse $1 \notin X$, então existiria $r \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq r \leq 1$ e $r \notin \mathbb{N} \setminus A$, isto é, teríamos $1 \in A$, de modo que A teria um elemento mínimo, uma contradição. Agora, provemos que se $n \in X$ então $n+1 \in X$. Se fosse $n+1 \notin X$, então teríamos $n+1 \in A$, e como A não tem um elemento mínimo existiria $p \in A$ tal que $p < n+1$. Como $p \in \mathbb{N}$, pelo lema (4.17) teríamos $1 \leq p \leq n$ (não poderia ser $n < p < n+1$ justamente pelo lema), mas como $n \in X$ teríamos $p \in \mathbb{N} \setminus A$, uma contradição pois $p \in A$. Com isso, $n+1 \in X$ e X é indutivo, de modo que, $X = \mathbb{N}$. Logo, para todo $n \in \mathbb{N}$ temos $n \in \mathbb{N} \setminus A$, isto é, $A = \emptyset$, de modo que não existe um subconjunto não vazio de \mathbb{N} que não tenha um elemento mínimo. ■

Prova. Defina $X := \{n \in \mathbb{N} : [n] \subseteq \mathbb{N} \setminus A\}$. Se $1 \in A$, então $1 = \min A$. Se $1 \notin A$, então $[1] = \{1\} \subset \mathbb{N} \setminus A$, de modo que $1 \in X$. Agora, como $A \neq \emptyset$, temos que $X \neq \mathbb{N}$. Se $1 \in X$ e $X \neq \mathbb{N}$, então existe $n_0 \in X$ tal que $n_0 + 1 \notin X$ (se um tal n_0 não existisse, X seria indutivo e teríamos $X = \mathbb{N}$), isto é, $[n_0] \cap A = \emptyset$ e $[n_0 + 1] \cap A \neq \emptyset$. Com isso, temos $n_0 + 1 \in A$, sendo este o elemento mínimo de A (pois, pelo lema (4.17), não existe um natural entre n_0 e $n_0 + 1$). ■

Corolário 4.19. Todo subconjunto não vazio de números naturais limitado superiormente possui um elemento máximo. Isto é, se $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})_{\neq \emptyset}$ é limitado superiormente, então existe $a \in A$ tal que $x \leq a$ para todo $x \in A$.

Prova.

Teorema 4.20 (Indução forte). Se $A \subseteq \mathbb{N}$ é tal que $n \in A$ sempre que $m \in A$ para todo $m < n$, então $A = \mathbb{N}$.

Prova. Provemos que $X := \mathbb{N} - A$ é vazio. De fato, se $X \neq \emptyset$, então pela Boa Ordenação existiria $p \in X$ mínimo; daí, todo $m < p$ seria $m \in A$, de modo que, pela definição de A , $p \in A$, absurdo! Logo, $X = \emptyset$. ■

Definição 4.21. Um corpo ordenado \mathbb{F} é *arquimédiano* se para quaisquer $a \in \mathbb{F}_{>0}$ e $b \in \mathbb{F}$ existe $n \in \mathbb{N}_\mathbb{F}$ tal que $n \cdot a > b$.

Teorema 4.22. $\mathbb{N}_\mathbb{F}$ é ilimitado superiormente em \mathbb{F} se, e somente se,

- i. \mathbb{F} é arquimédiano;
- ii. para todo $\epsilon \in \mathbb{F}_{>0}$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{n} < \epsilon$.

Prova. Ver [18], teorema 3 do capítulo 3. ■

4.2.1 A Unicidade dos Números Naturais

Teorema 4.23 (da Recursão). Sejam $(\mathbb{F}, +_\mathbb{F}, \cdot_\mathbb{F}, \leq_\mathbb{F})$ um corpo ordenado, X um conjunto, $a \in X$ e $f : X \rightarrow X$ uma função. Existe e é única a função $\varphi : \mathbb{N}_\mathbb{F} \rightarrow X$ tal que

- $\varphi(1_\mathbb{F}) = a$;
- $\varphi(n +_\mathbb{F} 1_\mathbb{F}) = f(\varphi(n))$, para todo $n \in \mathbb{N}_\mathbb{F}$.

Prova. Para simplificar a notação vamos omitir o índice $_\mathbb{F}$. Sendo \mathcal{C} o conjunto de todos as relações de \mathbb{N} em X que tem as propriedades desejadas, deve existir um único elemento de \mathcal{C} que seja uma função de domínio \mathbb{N} . Formalmente,

$$\mathcal{C} := \{R \in \mathcal{P}(\mathbb{N} \times X) : (1, a) \in R \wedge \forall n \forall x((n, x) \in R \Rightarrow (n + 1, f(x)) \in R)\}.$$

Como $\mathbb{N} \times X \in \mathcal{C}$, temos $\mathcal{C} \neq \emptyset$, logo existe $\varphi := \bigcap \mathcal{C} \in \mathcal{C}$. Afirmamos que φ é esse único elemento procurado. Provemos então que φ é uma função de domínio \mathbb{N} . Para tanto, φ deve ter as seguintes propriedades:

- A relação φ tem domínio \mathbb{N} : $\forall n(n \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists x(x \in X \wedge (n, x) \in \varphi))$.
- A relação φ é funcional: $\forall n \forall x \forall y((n, x) \in \varphi \wedge (n, y) \in \varphi \Rightarrow x = y)$.

Sendo $S := \{n \in \mathbb{N} : \exists x((n, x) \in \varphi \wedge \forall y((n, y) \in \varphi \Rightarrow y = x))\}$, se $S = \mathbb{N}$, então φ terá essas propriedades. Como $S \subseteq \mathbb{N}$, basta provar que $\mathbb{N} \subseteq S$, e para isso basta provar que S é um conjunto indutivo.

- i. Como $(1, a) \in \varphi$, provemos a unicidade de a como imagem de 1 por φ . Se existisse $b \in X$ tal que $(1, b) \in \varphi$ e $b \neq a$, então $(1, a) \in \varphi \setminus \{(1, b)\}$, e se $(n, x) \in \varphi \setminus \{(1, b)\}$, então $(n, x) \in \varphi$, de modo que $(n + 1, f(x)) \in \varphi$; como $n + 1 \neq 1$, teríamos $(n + 1, f(x)) \in \varphi \setminus \{(1, b)\}$, de modo que $\varphi \setminus \{(1, b)\} \in \mathcal{C}$, uma contradição. Com isso, $1 \in S$.
- ii. Se $n \in S$, então existe um único $x \in X$ tal que $(n, x) \in \varphi$. Com isso, vem $(n + 1, f(x)) \in \varphi$; provemos então a unicidade de $f(x)$ como imagem de

$n + 1$ por φ . Suponha que exista $b \in X$ tal que $(n + 1, b) \in \varphi$ e $b \neq f(x)$. Temos $(1, a) \in \varphi \setminus \{(n + 1, b)\}$ pois $n + 1 \neq 1$. Se $(m, y) \in \varphi \setminus \{(n + 1, b)\}$, então $(m, y) \in \varphi$ e $(m + 1, f(y)) \in \varphi$. Se $m = n$, então $y = x$, $m + 1 = n + 1$ e $f(y) = f(x) \neq b$, de modo que $(m + 1, f(x)) \in \varphi \setminus \{(n + 1, b)\}$. Se $m \neq n$, então $m + 1 \neq n + 1$, de modo que $(m + 1, f(x)) \in \varphi \setminus \{(n + 1, b)\}$. Com isso, vem $\varphi \setminus \{(n + 1, b)\} \in \mathcal{C}$, uma contradição. Logo, se $n \in S$, então $n + 1 \in S$, de modo que $S = \mathbb{N}$.

Com isso, fica provada a existência de uma função $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow X$ com as propriedades desejadas. Provemos, por fim, sua unicidade. Sendo $\psi : \mathbb{N} \rightarrow X$ uma função com essas mesmas propriedades e definindo $T := \{n \in \mathbb{N} : \psi(n) = \varphi(n)\}$, claramente $1 \in T$, e se $n \in T$, então $\psi(n) = \varphi(n)$, de modo que $\psi(n + 1) = f(\psi(n)) = f(\varphi(n)) = \varphi(n + 1)$, isto é, $n + 1 \in T$. Com isso, vem $T = \mathbb{N}$, o que prova a unicidade de φ . ■

Teorema 4.24. Sejam $(\mathbb{F}_1, +_1, \cdot_1, \leq_1)$ e $(\mathbb{F}_2, +_2, \cdot_2, \leq_2)$ corpos ordenados. Existe uma única bijeção $\varphi : \mathbb{N}_{\mathbb{F}_1} \rightarrow \mathbb{N}_{\mathbb{F}_2}$ tal que, para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}_{\mathbb{F}_1}$, valem as seguintes propriedades.

- i. $\varphi(m +_1 n) = \varphi(m) +_2 \varphi(n)$.
- ii. $\varphi(m \cdot_1 n) = \varphi(m) \cdot_2 \varphi(n)$.
- iii. $m \leq_1 n \Leftrightarrow \varphi(m) \leq_2 \varphi(n)$.

Prova. Tomando $X = \mathbb{N}_{\mathbb{F}_2}$, $a = 1_{\mathbb{F}_2}$ e $f : \mathbb{N}_{\mathbb{F}_2} \rightarrow \mathbb{N}_{\mathbb{F}_2}$ dada por $f(n) = n +_2 1_{\mathbb{F}_2}$ no teorema da recursão (4.23), existe uma única função $\varphi : \mathbb{N}_{\mathbb{F}_1} \rightarrow \mathbb{N}_{\mathbb{F}_2}$ tal que $\varphi(1_{\mathbb{F}_1}) = 1_{\mathbb{F}_2}$ e $\varphi(n +_1 1_{\mathbb{F}_1}) = f[\varphi(n)] = \varphi(n) +_2 1_{\mathbb{F}_2}$. Provemos a bijetividade de φ construindo explicitamente sua função inversa. Tomando $X = \mathbb{N}_{\mathbb{F}_1}$, $a = 1_{\mathbb{F}_1}$ e $g : \mathbb{N}_{\mathbb{F}_1} \rightarrow \mathbb{N}_{\mathbb{F}_1}$ dada por $g(n) = n +_1 1_{\mathbb{F}_1}$ no teorema da recursão (4.23), existe uma única função $\psi : \mathbb{N}_{\mathbb{F}_2} \rightarrow \mathbb{N}_{\mathbb{F}_1}$ tal que $\psi(1_{\mathbb{F}_2}) = 1_{\mathbb{F}_1}$ e $\psi(n +_2 1_{\mathbb{F}_2}) = g[\psi(n)] = \psi(n) +_1 1_{\mathbb{F}_1}$. Vamos provar que $\psi \circ \varphi = \text{Id}_{\mathbb{N}_{\mathbb{F}_1}}$ e $\varphi \circ \psi = \text{Id}_{\mathbb{N}_{\mathbb{F}_2}}$. Sendo $F := \psi \circ \varphi : \mathbb{N}_{\mathbb{F}_1} \rightarrow \mathbb{N}_{\mathbb{F}_1}$, temos

$$F(1_{\mathbb{F}_1}) = \psi[\varphi(1_{\mathbb{F}_1})] = \psi(1_{\mathbb{F}_2}) = 1_{\mathbb{F}_1},$$

e ainda,

$$F(n +_1 1_{\mathbb{F}_1}) = \psi[\varphi(n +_1 1_{\mathbb{F}_1})] = \psi[\varphi(n) +_2 1_{\mathbb{F}_2}] = F(n) +_1 1_{\mathbb{F}_1}.$$

Agora, como $\text{Id}_{\mathbb{N}_{\mathbb{F}_1}}(1_{\mathbb{F}_1}) = 1_{\mathbb{F}_1}$ e $\text{Id}_{\mathbb{N}_{\mathbb{F}_1}}(n +_1 1_{\mathbb{F}_1}) = \text{Id}_{\mathbb{N}_{\mathbb{F}_1}}(n) +_1 1_{\mathbb{F}_1}$, e como só existe uma função com essas propriedades, vem $F = \text{Id}_{\mathbb{N}_{\mathbb{F}_1}}$. A prova de que $\varphi \circ \psi = \text{Id}_{\mathbb{N}_{\mathbb{F}_2}}$ é completamente análoga, de modo que ψ é a função inversa de φ e, portanto, φ é bijetiva.

- i. Fixe $m \in \mathbb{N}_{\mathbb{F}_1}$ e defina $A := \{n \in \mathbb{N}_{\mathbb{F}_1} : \varphi(m +_1 n) = \varphi(m) +_2 \varphi(n)\}$. Como $\varphi(m +_1 1_{\mathbb{F}_1}) = \varphi(m) +_2 1_{\mathbb{F}_2}$, temos $1_{\mathbb{F}_1} \in A$ pois φ foi obtida pelo teorema da recursão. Agora, se $n \in A$, então $\varphi(m +_1 n) = \varphi(m) +_2 \varphi(n)$ e

$$\begin{aligned}\varphi[m +_1 (n +_1 1_{\mathbb{F}_1})] &= \varphi[(m +_1 n) +_1 1_{\mathbb{F}_1}] \\ &= \varphi[(m +_1 n)] +_2 1_{\mathbb{F}_2} \\ &= [\varphi(m) +_2 \varphi(n)] +_2 1_{\mathbb{F}_2} \\ &= \varphi(m) +_2 [\varphi(n) +_2 1_{\mathbb{F}_2}] \\ &= \varphi(m) +_2 \varphi(n +_1 1_{\mathbb{F}_1}),\end{aligned}$$

de modo que $n +_1 1_{\mathbb{F}_1} \in A$, isto é, A é indutivo. Logo $A = \mathbb{N}$.

- ii. Fixe $m \in \mathbb{N}_{\mathbb{F}_1}$ e defina $A := \{n \in \mathbb{N}_{\mathbb{F}_1} : \varphi(m \cdot_1 n) = \varphi(m) \cdot_2 \varphi(n)\}$. Como

$$\varphi(m \cdot_1 1_{\mathbb{F}_1}) = \varphi(m) = \varphi(m) \cdot_2 1_{\mathbb{F}_2} = \varphi(m) \cdot_2 \varphi(1_{\mathbb{F}_1}),$$

temos $1_{\mathbb{F}_1} \in A$. Agora, se $n \in A$, então $\varphi(m \cdot_1 n) = \varphi(m) \cdot_2 \varphi(n)$ e

$$\begin{aligned}\varphi[m \cdot_1 (n +_1 1_{\mathbb{F}_1})] &= \varphi(m \cdot_1 n +_1 m \cdot_1 1_{\mathbb{F}_1}) \\ &= \varphi(m \cdot_1 n) +_2 \varphi(m) \\ &= \varphi(m) \cdot_2 \varphi(n) +_2 \varphi(m) \\ &= \varphi(m) \cdot_2 (\varphi(n) +_2 1_{\mathbb{F}_2}) \\ &= \varphi(m) \cdot_2 [\varphi(n +_1 1_{\mathbb{F}_1})],\end{aligned}$$

de modo que $n +_1 1_{\mathbb{F}_1} \in A$, isto é, A é indutivo. Logo $A = \mathbb{N}$.

- iii. Se $m = n$, então $\varphi(m) = \varphi(n)$, e se $\varphi(m) = \varphi(n)$, então $m = n$ pela injetividade de φ . Com isso, basta provarmos $m <_1 n \Leftrightarrow \varphi(m) <_2 \varphi(n)$. Se $m <_1 n$, então pelo lema (4.17) existe $k \in \mathbb{N}_{\mathbb{F}_1}$ tal que $n = m +_1 k$. Com isso, $\varphi(n) = \varphi(m) +_2 \varphi(k)$, e se fosse $\varphi(m) \geq_2 \varphi(n)$, teríamos $\varphi(k) \leq_2 0_{\mathbb{F}_2}$, um absurdo. Agora, se $\varphi(m) <_2 \varphi(n)$, então $m \neq n$ pela injetividade de φ , e se fosse $m >_1 n$ existiria $k \in \mathbb{N}_{\mathbb{F}_1}$ tal que $m = n +_1 k$, de modo que $\varphi(n +_1 k) <_2 \varphi(n)$, uma contradição.

Com isso, vemos que a função $\varphi : \mathbb{N}_{\mathbb{F}_1} \rightarrow \mathbb{N}_{\mathbb{F}_2}$, obtida pelo teorema da recursão, é bijetiva, preserva a adição, a multiplicação e a ordem, como queríamos. ■

4.2.2 Definições recursivas

O objetivo desta subseção é usar o teorema da recursão (4.23) para fazermos definições recursivas.

4.3 Conjuntos Finitos

Seguimos [18] e [17] de perto.

Definição 4.25. Um conjunto $X \neq \emptyset$ é *finito* se existem um natural $n \in \mathbb{N}$ e uma bijeção $f : [n] \rightarrow X$. Isso é denotado por $|X| = n$. O natural n é o *número de elementos* de X , enquanto f é uma *contagem dos elementos* de X . Em particular, o conjunto vazio \emptyset é finito e tem 0 elementos.

Teorema 4.26.

- (a) Para todo $n \in \mathbb{N}$, não existe uma bijeção $f : A \subsetneq [n] \rightarrow [n]$.
- (b) Para todo $n \in \mathbb{N}$, se existe uma bijeção $f : [n] \rightarrow A \subseteq [n]$, então $A = [n]$.

Prova.

- (a) Comecemos com um lema: se existe uma bijeção $f : X \rightarrow Y$, então, dados $a \in X$ e $b \in Y$, existe também uma bijeção $g : X \rightarrow Y$ tal que $g(a) = b$. De fato, como f é sobrejetora, então existe $a' \in X$ tal que $f(a') = b$; sendo $b' = f(a)$, definamos $g : X \rightarrow Y$ pondo $g(a) = b$, $g(a') = b'$ e $g(x) = f(x)$ para todo $x \neq a, a'$ em X . É fácil ver que g é uma bijeção. Agora, seja n_0 o menor natural para o qual existe uma bijeção $f : A \subsetneq [n_0] \rightarrow [n_0]$. Se $n_0 \in A$, então, pelo lema, existe uma bijeção $g : A \subsetneq [n_0] \rightarrow [n_0]$ com $g(n_0) = n_0$; daí, a restrição $\tilde{g} : A \setminus \{n_0\} \subsetneq [n_0 - 1] \rightarrow [n_0 - 1]$ é uma bijeção, o que contraria a minimalidade de n_0 . Por outro lado, se $n_0 \notin A$, então $A \subsetneq [n_0 - 1]$; tomando $a \in A$ com $f(a) = n_0$, a restrição $\tilde{f} : A \setminus \{a\} \subsetneq A \subseteq [n_0 - 1] \rightarrow [n_0 - 1]$ é uma bijeção, o que, novamente, contraria a minimalidade de n_0 . ■
- (b) Basta ver que esse enunciado é a contrapositiva do item anterior. No entanto, ainda assim, daremos uma outra prova, que se dará por indução em n . Evidentemente, o resultado vale para $n = 1$. Agora, supondo que o resultado vale para $n \in \mathbb{N}$, tomando uma bijeção $f : [n+1] \rightarrow A \subseteq [n+1]$ provaremos que $A = [n+1]$. Sendo $a := f(n+1)$, a restrição $\tilde{f} : [n] \rightarrow A \setminus \{a\}$ é uma bijeção.
 - Se for $A \setminus \{a\} \subseteq [n]$, então, pela hipótese de indução, $A \setminus \{a\} = [n]$, donde $a = n+1$ e $A = [n+1]$.
 - Se for $A \setminus \{a\} \not\subseteq [n]$, então $n+1 \in A \setminus \{a\}$ e existe $p \in [n]$ tal que $f(p) = n+1$. Agora, definindo a bijeção $g : [n+1] \rightarrow A \subseteq [n+1]$ por

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \neq p \text{ e } x \neq n+1 \\ a, & \text{se } x = p \\ n+1, & \text{se } x = n+1 \end{cases},$$

a restrição $\tilde{g} : [n] \rightarrow A \setminus \{n+1\}$ é uma bijeção; daí, como $A \setminus \{n+1\} \subseteq [n]$, pela hipótese de indução $A \setminus \{n+1\} = [n]$, donde $A = [n+1]$.

Com isso, temos $A = [n+1]$ em ambos os casos, como queríamos provar. ■

Corolário 4.27.

- (a) O número de elementos de um conjunto finito está bem definido. Isto é, se $f : [m] \rightarrow X$ e $g : [n] \rightarrow X$ são bijeções, então $m = n$.
- (b) (Princípio bijetivo) Sejam $A, B \neq \emptyset$ conjuntos finitos. Temos $|A| = |B|$ se, e somente se, existe uma bijeção $f : A \rightarrow B$.

Prova.

- (a) Se fosse $m < n$, teríamos $[m] \subsetneq [n]$, donde existiria uma bijeção $g^{-1} \circ f : [m] \rightarrow [n]$, o que contradiz o teorema (4.26). Analogamente, se fosse $n < m$, teríamos $[n] \subsetneq [m]$, donde existiria uma bijeção $f^{-1} \circ g : [n] \rightarrow [m]$, o que novamente contradiz o teorema (4.26)! Logo, só pode ser $m = n$.

Uma outra prova é o que segue. Se $h = g^{-1} \circ f : [m] \rightarrow [n]$ é uma bijeção, então $m = n$. De fato, se $m \leq n$, então $[m] \subseteq [n]$, e como $h^{-1} : [n] \rightarrow [m] \subseteq [n]$, pelo teorema (4.26) só pode ser $[m] = [n]$, donde $m = n$. ■

- (b) Como $A, B \neq \emptyset$ são finitos, existem $n, m \in \mathbb{N}$ e bijeções $g : [n] \rightarrow A$ e $h : [m] \rightarrow B$.

(\Rightarrow) Sendo $|B| = n$, existe uma bijeção $\varphi : [n] \rightarrow B$, donde $g^{-1} \circ \varphi : A \rightarrow B$ é uma bijeção.

(\Leftarrow) Existindo uma bijeção $f : A \rightarrow B$, temos que $g^{-1} \circ f^{-1} \circ h : [m] \rightarrow [n]$ é também uma bijeção, donde $m = n$, isto é, $|A| = |B|$. ■

4.3.1 Resultadinhos

Proposição 4.28. Seja X um conjunto finito.

- (a) Para todo subconjunto próprio $Y \subsetneq X$ não existe uma bijeção $f : X \rightarrow Y$.
- (b) Todo subconjunto $Y \subseteq X$ também é finito. Se $Y \subsetneq X$, então $|Y| < |X|$, sendo $|Y| = |X|$ somente quando $Y = X$.

Prova.

- (a) Suponha que existe uma tal bijeção. Se X é finito, então existe uma bijeção $h : [n] \rightarrow X$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Definindo $A := h^{-1}(Y)$, temos $A \subsetneq [n]$ e, além disso, a restrição de h a A é uma bijeção $h_A : A \rightarrow Y$. Com isso, a

composta $h^{-1} \circ f^{-1} \circ h_A : A \rightarrow [n]$ é uma bijeção de $A \subsetneq [n]$ em $[n]$, o que contraria o teorema (4.26)! Logo, não pode existir uma bijeção $f : X \rightarrow Y$ onde X é finito e $Y \subsetneq X$. \blacksquare

Observe que esse item é uma mera reformulação do teorema (4.26).

- (b) Ver [18], página 31, teorema 4. Ver [17], página 5, teorema 2.

Corolário 4.29.

- (a) Se X é um conjunto finito, então uma função $f : X \rightarrow X$ será injetora se, e somente se, for sobrejetora.
- (b) Seja $f : X \rightarrow Y$ uma função injetora. Se Y é finito, então X é finito e $|X| \leq |Y|$.
- (c) Seja $f : X \rightarrow Y$ uma função sobrejetora. Se X é finito, então Y é finito e $|Y| \leq |X|$.

Prova.

- (a) Ver [17], página 4, corolário 2.
- (b) Ver [17], página 5, corolário 1. Ver [18], página 31, corolário 1.
- (c) Ver [17], página 5, corolário 1. Ver [18], página 31, corolário 2.

Definição 4.30.

- (a) Um conjunto $X \subseteq \mathbb{N}$ é *limitado* se existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \leq n$ para todo $x \in X$.
- (b) (Maior elemento)

Teorema 4.31. Dado $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{N}$, as seguintes afirmações são equivalentes.

1. X é finito;
2. X é limitado;
3. X possui um maior elemento.

Prova. Ver [18], página 32, teorema 5. Para finito sse limitado, ver [17], página 5, corolário 2.

4.4 Conjuntos Infinitos

Definição 4.32.

- (a) Um conjunto X é *infinito* quando ele não é finito, isto é, quando $X \neq \emptyset$ e quando não existe uma bijeção $f : [n] \rightarrow X$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- (b) Um subconjunto $X \subseteq \mathbb{N}$ é *ilimitado* se ele não é limitado, isto é, se para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $p \in X$ tal que $p > n$.

Corolário 4.33. \mathbb{N} é infinito.

Proposição 4.34. Segue como contrapositiva do teorema (4.31): um conjunto $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{N}$ é infinito se, e somente se, não é limitado. Como \mathbb{N} não é limitado, ele é infinito.

Teorema 4.35. Se X é um conjunto infinito, então existe uma função $f : \mathbb{N} \rightarrow X$ injetora.

Prova.

Corolário 4.36. Um conjunto X é infinito se, e somente se, existe uma bijeção $f : X \rightarrow Y \subsetneq X$.

Prova.

Corolário 4.37.

- (a) Seja $f : X \rightarrow Y$ uma função injetora. Se X é infinito, então Y é infinito.
- (b) Seja $f : X \rightarrow Y$ uma função sobrejetora. Se Y é infinito, então X é infinito.

Prova. Basta ver que essas afirmações são equivalentes às afirmações do resultado (4.29) por contrapositiva.

Proposição 4.38. Se X é um conjunto finito e Y é um conjunto infinito, então existem funções $f : X \rightarrow Y$ injetora e $g : Y \rightarrow X$ sobrejetora.

Prova.

4.5 Conjuntos Enumeráveis e Não-Enumeráveis

Definição 4.39. Um conjunto X é *enumerável* se é finito ou se existe uma bijeção $f : \mathbb{N} \rightarrow X$. A função f é uma *enumeração* de X .

Teorema 4.40. Todo subconjunto de \mathbb{N} é enumerável.

Prova. Seja $X \subseteq \mathbb{N}$. Se X é finito, nada há de ser provado.

Corolário 4.41. (a) Seja $f : X \rightarrow Y$ uma função injetora. Se Y é enumerável, então X é enumerável.

(b) Seja $f : X \rightarrow Y$ uma função sobrejetora. Se X é enumerável, então Y é enumerável.

Prova.

Corolário 4.42. (a) O produto cartesiano de um número finito de conjuntos enumeráveis é enumerável.

(b) A união de uma família enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável.

4.6 Números Inteiros

Definição 4.43. O conjunto dos números inteiros é definido como

$$\mathbb{Z}_{\mathbb{F}} := \mathbb{N}_{\mathbb{F}} \cup \{0\} \cup -\mathbb{N}_{\mathbb{F}}.$$

Proposição 4.44.

- (a)** Para quaisquer $m, n \in \mathbb{Z}$ tem-se $m + n \in \mathbb{Z}$.
- (b)** Para quaisquer $m, n \in \mathbb{Z}$ tem-se $m - n \in \mathbb{Z}$ e $n - m \in \mathbb{Z}$.
- (c)** Para quaisquer $m, n \in \mathbb{Z}$ tem-se $m \cdot n \in \mathbb{Z}$.

Prova.

Proposição 4.45. Para todo $x \in \mathbb{F}$ existe um único $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n \leq x < n + 1$.

4.6.1 Teoria Elementar dos Números

4.7 Números Racionais

(Racionais) Sendo $y, w \neq 0$, temos que $x \cdot w = y \cdot z \Leftrightarrow x \cdot y^{-1} = z \cdot w^{-1}$.

Definição 4.46. O conjunto dos números racionais é definido como

$$\mathbb{Q}_{\mathbb{F}} := \{x \in \mathbb{F} : \exists a \exists b (a \in \mathbb{Z}_{\mathbb{F}} \wedge b \in \mathbb{Z}_{\mathbb{F}} \wedge b \neq 0 \wedge x = a \cdot b^{-1})\}.$$

Proposição 4.47. Para quaisquer $p, q \in \mathbb{Q}$, temos $p + q \in \mathbb{Q}$ e $p \cdot q \in \mathbb{Q}$.

Prova.

Definição 4.48. Dado $x \in \mathbb{R}$, definimos, para cada $n \in \mathbb{N}$, $x^1 := x$ e $x^{n+1} := x^n \cdot x$, e sendo $x \neq 0$, definimos, para cada $n \in \mathbb{N}_0$, $x^0 := 1$ e $x^{-n} := \frac{1}{x^n}$.

Teorema 4.49. (a) Seja $n \in \mathbb{N}$. Para todo $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ existe um único $b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que $b^n = a$. Notação: $b := \sqrt[n]{a}$

(b) Seja $n \in \mathbb{N}$ ímpar. Para todo $a \in \mathbb{R}$ existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $b^n = a$. Notação: $b := \sqrt[n]{a}$.

Prova.

Definição 4.50. (a) Seja $n \in \mathbb{N}$. Dado $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, definimos $x^{\frac{1}{n}} := \sqrt[n]{x}$. Se n for ímpar, dado $x \in \mathbb{R}$, definimos $x^{\frac{1}{n}} := \sqrt[n]{|x|}$.

(b) Seja $n \in \mathbb{N}$. Dado $x \in \mathbb{R}$, definimos $x^{-\frac{1}{n}} := \frac{1}{x^{\frac{1}{n}}}$, desde que $x^{\frac{1}{n}} \neq 0$ esteja definido.

(c) Seja $r := \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}_{\neq 0}$. Dado $x \in \mathbb{R}$, definimos $x^r := \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p$, desde que $x^{\frac{1}{q}}$ esteja definido.

Teorema 4.51. (a) Se $a, b \in \mathbb{R}$ cumprem $a < b$, então existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $a < r < b$.

(b) Se $a, b \in \mathbb{R}$ cumprem $a < b$, então existe $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tal que $a < s < b$.

Prova.

4.8 Números Reais

Definição 4.52. Sejam $(\mathbb{F}, +, \cdot, \leq)$ um corpo ordenado e $S \in \mathcal{P}(\mathbb{F})_{\neq \emptyset}$.

(a) Dizemos que S é

- i. *limitado superiormente* se existe $M \in \mathbb{F}$ tal que $x \leq M$ para todo $x \in S$. Nesse caso, dizemos que M é uma *cota superior* de S .
- ii. *limitado inferiormente* se existe $m \in \mathbb{F}$ tal que $m \leq x$ para todo $x \in S$. Nesse caso, dizemos que m é uma *cota inferior* de S .
- iii. *limitado* se S é limitado superiormente e inferiormente.

(b) Dizemos que $\alpha \in \mathbb{F}$ é o

- i. *supremo* de S se α é uma cota superior de S e $\alpha \leq x$ para toda cota superior $x \in \mathbb{F}$ de S . Denotamos α por $\sup S$.
- ii. *ínfimo* de S se α é uma cota inferior de S e $x \leq \alpha$ para toda cota inferior $x \in \mathbb{F}$ de S . Denotamos α por $\inf S$.

Proposição 4.53. Sejam $(\mathbb{F}, +, \cdot, \leq)$ um corpo ordenado e $S \in \mathcal{P}(\mathbb{F})_{\neq \emptyset}$.

- (a) O supremo de S , quando existe, é único.
- (b) O ínfimo de S , quando existe, é único.

Prova.

- (a) Sejam α e β supremos de S . Como α é a menor das cotas superiores de S e β é uma cota superior de S , temos $\alpha \leq \beta$. Como β é a menor das cotas superiores de S e α é uma cota superior de S , temos $\beta \leq \alpha$. Logo $\alpha = \beta$. ■
- (b) Segue analogamente. ■

Teorema 4.54. Sejam $(\mathbb{F}, +, \cdot, \leq)$ um corpo ordenado e $S \in \mathcal{P}(\mathbb{F})_{\neq \emptyset}$.

- (a) Suponha que existe $\sup S$.
 - i. Se $\beta \in \mathbb{F}$ e $\beta < \sup S$, então existe $x \in S$ tal que $x > \beta$.
 - ii. Para todo $\epsilon \in \mathbb{F}_{>0}$ existe $x \in S$ tal que $\sup S - \epsilon < x$.
- (b) Suponha que existe $\inf S$.
 - i. Se $\beta \in \mathbb{F}$ e $\inf S < \beta$, então existe $x \in S$ tal que $x < \beta$.
 - ii. Para todo $\epsilon \in \mathbb{F}_{>0}$ existe $x \in S$ tal que $x < \inf S + \epsilon$.

Prova.

- (a) Segue facilmente por contradição.
 - i. Do contrário, seria $x \leq \beta < \sup S$ para todo $x \in S$, de modo que β seria uma cota superior de S menor que $\sup S$, um absurdo. ■
 - ii. Do contrário, existiria $\epsilon \in \mathbb{F}_{>0}$ tal que $x \leq \sup S - \epsilon < \sup S$ para todo $x \in S$, de modo que $\sup S - \epsilon$ seria uma cota superior de S menor que $\sup S$, um absurdo. ■
- (b) Segue analogamente. ■

Definição 4.55. Um corpo ordenado \mathbb{F} é *completo* se todo subconjunto não vazio de \mathbb{F} limitado superiormente possui supremo em \mathbb{F} .

Corolário 4.56. Um corpo ordenado \mathbb{F} é *completo* se, e somente se, todo subconjunto não vazio de \mathbb{F} limitado inferiormente possui ínfimo em \mathbb{F} .

Prova. Ver [22], teorema 1-10, página 32. Ver [21], corolário 1.12, página 13. ■

Proposição 4.57. Todo corpo ordenado completo é arquimediano.

Prova. Provemos que em todo corpo ordenado completo \mathbb{F} o conjunto $\mathbb{N}_{\mathbb{F}}$ é ilimitado superiormente. Daí, pelo teorema (4.22), seguirá que \mathbb{F} é arquimediano.

Suponha que $\mathbb{N}_{\mathbb{F}}$ seja limitado superiormente. Como $\mathbb{N}_{\mathbb{F}} \in \mathcal{P}(\mathbb{F})_{\neq \emptyset}$, existe $a :=$

$\sup \mathbb{N}_{\mathbb{F}}$. Por (4.54), para $\epsilon = 1$ existe $n \in \mathbb{N}_{\mathbb{F}}$ tal que $a - 1 < n$, isto é, $a < n + 1$, e como $n + 1 \in \mathbb{N}_{\mathbb{F}}$, temos uma contradição. ■

Teorema 4.58. Existe um corpo ordenado completo.

Observação 4.59. Veremos mais a frente que, a menos de isomorfismos, existe um único corpo ordenado completo. Ele é denotado por \mathbb{R} e seus elementos são chamados de *números reais*.

Propriedades do Supremo e do Ínfimo

Prova.

Capítulo 5

Números Reais como na Álgebra

Definição 5.1 (Grupo).

- (a) Um par $(G, *)$ é um *grupo* se no conjunto $G \neq \emptyset$ existe uma operação $* : G \times G \rightarrow G$ para a qual
- G1: $x * (y * z) = (x * y) * z$ para quaisquer $x, y, z \in G$;
 - G3: existe $e \in G$ tal que $x * e = x = e * x$ para todo $x \in G$;
 - G4: para cada $x \in G$ existe $y \in G$ tal que $x * y = e = y * x$.
- (b) Um grupo $(G, *)$ é *comutativo*, ou *abeliano*, se
- G2: $x * y = y * x$ para quaisquer $x, y \in G$,

Observação 5.2. As propriedades descritas em G1–G4 se chamam, respectivamente, *associatividade*, *comutatividade*, existência de um *elemento neutro* e *inversibilidade* (ou existência de *inversos operativos*).

Proposição 5.3. Seja $(G, *)$ um grupo.

- (a) O elemento neutro de $*$ é único.
(b) O inverso de cada elemento de G é único.

Prova.

- (a) Se $e' \in G$ é um elemento neutro de $*$, então

$$e = e * e' = e' * e = e',$$

como havíamos afirmado. ■

- (b) Segue analogamente. ■

Anéis

Definição 5.4. Uma tripla $(A, +, \cdot)$ é um *anel* se no conjunto $A \neq \emptyset$ existem duas operações, $+ : A \times A \rightarrow A$ e $\cdot : A \times A \rightarrow A$, para as quais

- A1: $a + (b + c) = (a + b) + c$ para quaisquer $a, b, c \in A$;
- A2: $a + b = b + a$ para quaisquer $a, b \in A$;
- A3: existe $0 \in A$ tal que $a + 0 = a$ para todo $a \in A$;
- A4: para cada $a \in A$ existe $b \in A$ tal que $a + b = 0$;
- M1: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ para quaisquer $a, b, c \in A$;
- AM: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ e $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ para quaisquer $a, b, c \in A$.

Proposição 5.5. Seja $(A, +, \cdot)$ um anel.

- (a) O elemento neutro 0 de $+$ é único.
- (b) (Lei do corte) Para quaisquer $a, b, c \in A$, vale
 - i. $a + c = b + c \Rightarrow a = b$;
 - ii. $a + b = a \Rightarrow b = 0$.
- (c) $a \cdot 0 = 0$ para todo $a \in A$.

Prova.

- (a) Se $0' \in A$ é um elemento neutro de $+$, então

$$0' = 0' + 0 = 0 + 0' = 0,$$

conforme afirmado. ■

- (b)

- (c) Observando que $a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$, somando $-(a \cdot 0)$ aos dois lados de $a \cdot 0 = a \cdot 0 + a \cdot 0$, segue que $0 \cdot a = 0$. ■

Definição 5.6. Um anel $(A, +, \cdot)$ é um *anel comutativo* se

- M2: $a \cdot b = b \cdot a$ para quaisquer $a, b \in A$.

Definição 5.7. Um anel $(A, +, \cdot)$ é um *anel com unidade* se

- M3: existe $1 \in A_{\neq 0}$ tal que $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ para todo $a \in A$.

Proposição 5.8. Seja $(A, +, \cdot)$ um anel com unidade.

- (a) O elemento neutro 1 de \cdot é único.

(b) (Regras dos sinais) Para quaisquer $a, b \in A$, vale

- i. $(-1) \cdot a = -a$;
- ii. $-(-a) = a$;
- iii. $(-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$;
- iv. $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$.

Prova.



Definição 5.9. Um anel comutativo com unidade $(A, +, \cdot)$ é um *domínio de integridade* se

- M4: $a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$ para quaisquer $a, b \in A$.

Proposição 5.10. Seja $(A, +, \cdot)$ um domínio de integridade.

(a) (Leis do corte) Para quaisquer $a, b, c \in A$, com $c \neq 0$,

- i. $a \cdot c = b \cdot c \Rightarrow a = b$;
- ii. $a \cdot b = a \Rightarrow a = 0 \vee b = 1$;
- iii. $a^2 = \begin{cases} 0 & \Leftrightarrow a = 0 \\ 1 & \Leftrightarrow a = 1 \text{ ou } a = -1 \\ a & \Leftrightarrow a = 0 \text{ ou } a = 1 \end{cases}$.

Prova.



Definição 5.11. Um anel comutativo com unidade $(A, +, \cdot)$ é um *corpo* se

- M5: para cada $a \in A_{\neq 0}$ existe $b \in A$ tal que $a \cdot b = 1$.

Proposição 5.12. Todo corpo é um domínio de integridade.

Prova.



Observação 5.13. Para simplificar a linguagem, um anel comutativo com unidade será chamado simplesmente de anel.

Definição 5.14. Um anel $(A, +, \cdot)$ é um *anel ordenado* se existe uma relação de ordem total $\leq \subseteq A \times A$ tal que

- OA: $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$ para quaisquer $a, b, c \in A$;
- OM: $a \leq b \Rightarrow a \cdot c \leq b \cdot c$ para quaisquer $a, b, c \in A$ com $0 \leq c$.

Proposição 5.15. Se $(A, +, \cdot, \leq)$ é um anel ordenado e $a, b, c, d \in A$, então

- (a)** $a \geq 0 \Rightarrow -a \leq 0$ e $a \leq 0 \Rightarrow -a \geq 0$;
- (b)** $a + c \leq b + c \Rightarrow a \leq b$;

- (c) $a \leq b, c \leq d \Rightarrow a + c \leq b + d;$
- (d) $a \leq b, c \leq 0 \Rightarrow a \cdot c \geq b \cdot c;$
- (e) $a \geq 0, b \leq 0 \Rightarrow a \cdot b \leq 0$ e $a \leq 0, b \leq 0 \Rightarrow a \cdot b \geq 0;$
- (f) $a^2 \geq 0, 1 > 0$ e $-1 < 0.$

Prova.

Definição 5.16. Seja $(A, +, \cdot, \leq)$ um anel ordenado. O *valor absoluto* de $a \in A$ é definido como

$$|a| := \begin{cases} a, & \text{se } a \geq 0 \\ -a, & \text{se } a < 0 \end{cases}.$$

Proposição 5.17. Seja $(A, +, \cdot, \leq)$ um anel ordenado. Para quaisquer $a, b \in A$, vale

- (a) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|.$
- (b) $-|a| \leq a \leq |a|.$
- (c) $|a| \leq b \Leftrightarrow -b \leq a \leq b.$
- (d) $||a| - |b|| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|.$

Prova.

■

Definição 5.18. Seja $(A, +, \cdot, \leq)$ um anel ordenado.

- (a) Um subconjunto $X \subseteq A$ é
 - i. *limitado inferiormente* se existe $a \in A$ tal que $a \leq x$ para todo $x \in X$;
 - ii. *limitado superiormente* se existe $a \in A$ tal que $a \geq x$ para todo $x \in X$.
- (b) Um subconjunto $X \subseteq A$ tem um
 - i. *menor elemento* se existe $a \in X$ tal que $a \leq x$ para todo $x \in X$;
 - ii. *maior elemento* se existe $a \in X$ tal que $a \geq x$ para todo $x \in X$.

Proposição 5.19. Seja $(A, +, \cdot, \leq)$ um domínio ordenado. Todo subconjunto não vazio de A , limitado inferiormente, possui um menor elemento se, e somente se, todo subconjunto não vazio de A , limitado superiormente, possui um maior elemento.

Prova.

■

Definição 5.20. Um domínio ordenado $(A, +, \cdot, \leq)$ é um *domínio bem ordenado* se

- PBO: todo subconjunto não vazio de A , limitado inferiormente, possui um menor elemento.

Teorema 5.21. Existe um único domínio bem ordenado.

Teorema 5.22. Seja $(A, +, \cdot, \leq)$ um domínio bem ordenado.

(a) Para quaisquer $a, b \in A$, vale

- $a > 0 \Rightarrow a \geq 1$;
- $a > b \Rightarrow a \geq b + 1$;
- $b \neq 0 \Rightarrow |a \cdot b| \geq |a|$.

(b) Para quaisquer $a, b \in A$, com $b \neq 0$, existe $n \in A$ tal que $n \cdot b \geq a$.

Prova.

■

5.1 Homomorfismos

Definição 5.23.

- Um *homomorfismo de anéis* $(A, +, \cdot)$ e $(B, +, \cdot)$ é uma função $f : A \rightarrow B$ tal que $f(a + b) = f(a) + f(b)$ e $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$ para quaisquer $a, b \in A$.
- Um *homomorfismo de anéis com unidade* $(A, +, \cdot)$ e $(B, +, \cdot)$ é um homomorfismo $f : A \rightarrow B$ tal que $f(1_A) = 1_B$.
- Um *homomorfismo de anéis ordenados* $(A, +, \cdot, \leq)$ e $(B, +, \cdot, \leq)$ é um homomorfismo $f : A \rightarrow B$ tal que $a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$ para quaisquer $a, b \in A$.

Isso é denotado por $A \cong B$.

Parte III

Análise Real I

Capítulo 6

Sequências

Definição 6.1. Uma *sequência numérica* é qualquer função $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada número natural n um número real $x_n := x(n)$ (isto é, $n \mapsto x_n$), que será chamado de *n-ésimo termo* da sequência. Escreveremos $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou (x_n) para indicar a sequência $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ cujo *n-ésimo termo* é $x_n \in \mathbb{R}$.

Definição 6.2. Uma sequência (x_n) é

- i. *crescente* se $n > m \Rightarrow x_n \geq x_m$;
- ii. *decrescente* se $n > m \Rightarrow x_n \leq x_m$;
- iii. *estritamente crescente* se $n > m \Rightarrow x_n > x_m$;
- iv. *estritamente decrescente* se $n > m \Rightarrow x_n < x_m$;
- v. *monótona* se cumprir exatamente uma das condições acima.

Definição 6.3. Uma sequência (x_n) é

- i. *limitada superiormente* se existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$;
- ii. *limitada inferiormente* se existe $m \in \mathbb{R}$ tal que $m \leq x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$;
- iii. *limitada* se é limitada superiormente e limitada inferiormente.
- iv. *ilimitada* se não é limitada.

Proposição 6.4. Uma sequência (x_n) é limitada se, e somente se, existe $L \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $|x_n| \leq L$ para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Prova. Absolutamente trivial.

Exemplo 6.5. A sequência (x_n) é limitada se, e somente se, a sequência $\{|x_n|\}$ é limitada.

Prova. Elão, início da seção 4.1.

Definição 6.6.

- (a) Uma sequência (x_n) é *convergente* e *converge* para $a \in \mathbb{R}$ se para todo $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \epsilon$. Isso é denotado por

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a.$$

- (b) Uma sequência (x_n) é *divergente* se não for convergente.

Observação 6.7. As notações “ $\lim_{n \in \mathbb{N}} x_n = a$ ”, “ $\lim x_n = a$ ”, “ $x_n \rightarrow a$ quando $n \rightarrow +\infty$ ” e “ $x_n \rightarrow a$ ” também são frequentemente usadas para indicar que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$.

Proposição 6.8 (Unicidade). Uma sequência convergente converge para um único limite.

Prova. Provemos que se a sequência (x_n) converge para $a \in \mathbb{R}$ e para $b \in \mathbb{R}$, então $a = b$.

Proposição 6.9. Toda sequência convergente é limitada.

Prova.

Teorema 6.10 (Convergência monótona).

- (a) Toda sequência crescente e limitada superiormente é convergente.
- (b) Toda sequência decrescente e limitada inferiormente é convergente.
- (c) Toda sequência monótona e limitada é convergente.

Prova. (a) Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência crescente e limitada superiormente. Como o conjunto $X := \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ é, por hipótese, não vazio e limitado superiormente, pela propriedade do supremo existe $\sup X$. Como, para todo $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, $\sup X - \epsilon$ não é uma cota superior de X , existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sup X - \epsilon < x_{n_0} \leq \sup X$. Como $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é crescente, para todo $n \in \mathbb{N}$, se $n > n_0$, então $\sup X - \epsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq \sup X < \sup X + \epsilon$. Temos então que $x_n \rightarrow \sup X$, isto é, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para $\sup X$. ■

(b) Segue analogamente: sendo $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência decrescente e limitada inferiormente, basta provar que $x_n \rightarrow \inf \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Definição 6.11. Uma *subsequência* de uma sequência $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $n \mapsto x_n$ é qualquer composição $x \circ n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, onde $n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ dada por $k \mapsto n_k$ é

uma sequência estritamente crescente de números naturais. A subsequência de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida por $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ será denotada por $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$.

Proposição 6.12. Se uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para $a \in \mathbb{R}$, então toda subsequência $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ converge para a .

Prova.

Teorema 6.13. (Bolzano-Weierstrass) Toda sequência limitada possui uma subsequência convergente.

Prova. Pelo teorema (6.10), basta mostrar que toda sequência possui uma subsequência monótona. Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência limitada. Um índice $k \in \mathbb{N}$ é dito *básico* quando $x_p \geq x_k$ para todo $p > k$, isto é, x_k é menor ou igual aos termos que o sucedem.

- Se existem infinitos índices básicos $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$, então $x_{n_1} \leq x_{n_2} \leq x_{n_3} \leq \dots$, de modo que a subsequência $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ é crescente; como ela é limitada, pelo teorema (6.10), ela é convergente.
- Por outro lado, se o número de índices básicos é finito, seja $n_1 \in \mathbb{N}$ maior que todos eles (se o número de índices básicos for 0, qualquer n_1 funciona). Como n_1 não é um índice básico, existe um índice $n_2 \in \mathbb{N}_{>n_1}$ tal que $x_{n_2} < x_{n_1}$. Como n_2 não é um índice básico, existe um índice $n_3 \in \mathbb{N}_{>n_2}$ tal que $x_{n_3} < x_{n_2}$. Prosseguindo deste modo, obtemos uma subsequência $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ estritamente decrescente; como ela é limitada, pelo teorema (6.10), ela é convergente.

Com isso, vemos que toda sequência possui uma subsequência monótona, e como a sequência original é limitada, a subsequência monótona também é (proposição (6.12)), sendo, portanto, convergente.

Capítulo 7

Limites e Continuidade

7.1 Topologia da Reta

Definição 7.1. Uma vizinhança de um ponto $a \in \mathbb{R}$ com raio $r \in \mathbb{R}_{>0}$ é definida como

$$V_r(a) := \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < r\}.$$

Corolário 7.2. Para quaisquer $a \in \mathbb{R}$ e $r \in \mathbb{R}_{>0}$, temos $V_r(a) = (a - r, a + r)$.

Definição 7.3. Um ponto de acumulação de um subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ é um ponto $a \in \mathbb{R}$ tal que

$$V_\delta(a) \cap A_{\neq a} \neq \emptyset$$

para todo $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$. O conjunto de todos os pontos de acumulação de A é denotado por A' .

Proposição 7.4. Seja $A \subseteq \mathbb{R}$.

- (a) $a \in A'$ se, e somente se, para todo $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ existe $x \in A$ tal que $0 < |x - a| < \delta$.
- (b) $a \in A'$ se, e somente se, $0 \in B'$, onde $B := \{h \in \mathbb{R}_{\neq 0} : a + h \in A\}$.

Prova.

- (a) (\Rightarrow) blabla.
(\Leftarrow) blabla. ■
- (b) (\Rightarrow) Para que 0 seja um ponto de acumulação de B , para todo $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ deve existir $h \in B$ tal que $0 < |h - 0| < \delta$. Bem, como a é um ponto de acumulação de A , para todo $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ existe $x \in A$ tal que $0 < |x - a| < \delta$.

Pois tomando $h := x - a$, temos que $x = a + h$, e como $x \in A$, temos $a + h \in A$, de modo que $h \in B$. Daí, segue a conclusão.

(\Leftarrow) Para que a seja um ponto de acumulação de A , para todo $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ deve existir $x \in A$ tal que $0 < |x - a| < \delta$. Bem, como 0 é ponto de acumulação de B , para todo $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ existe $h \in B$ tal que $0 < |h| < \delta$. Pois tome $x := a + h$: como $h \in B$, temos que $a + h \in A$, de modo que $x \in A$. Daí, segue a conclusão. ■

Definição 7.5.

- (a) Diremos que $a \in \mathbb{R}$ é um *ponto de acumulação à direita* de $A \subseteq \mathbb{R}$ se $(a, a + \delta) \cap A \neq \emptyset$ para todo $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$.
- (b) Diremos que $a \in \mathbb{R}$ é um *ponto de acumulação à esquerda* de $A \subseteq \mathbb{R}$ se $(a - \delta, a) \cap A \neq \emptyset$ para todo $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$.

7.2 Limites

Definição 7.6 (Limite). Uma função $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tem *limite* $L \in \mathbb{R}$ quando x *tende* a $a \in A'$ se para todo $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existe $\delta = \delta(\epsilon, a) \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

para todo $x \in A$. Isso é denotado por

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L.$$

Proposição 7.7 (Unicidade).

Prova.

Definição 7.8 (Limites laterais).

- (a) Diremos que uma função $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tem *limite lateral à direita* $L \in \mathbb{R}$ quando x *tende* ao ponto de acumulação à direita $a \in \mathbb{R}$ de A , indicando isso por

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L,$$

se para todo $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existir $\delta = \delta(\epsilon, a) \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que

$$a < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

para todo $x \in A$.

- (b) Diremos que uma função $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tem *limite lateral à esquerda* $L \in \mathbb{R}$ quando x *tende* ao ponto de acumulação à esquerda $a \in \mathbb{R}$ de A , indicando isso por

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L,$$

se para todo $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existir $\delta = \delta(\epsilon, a) \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que

$$a - \delta < x < a \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

para todo $x \in A$.

Proposição 7.9 (Unicidade).

Prova.

Teorema 7.10 (Bilateral \Leftrightarrow Laterais).

Prova.

Definição 7.11. (Limites no infinito)

- (a) Diremos que uma função $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, onde A é ilimitado superiormente, tem limite $L \in \mathbb{R}$ quando x cresce *indefinidamente*, ou *tende ao infinito positivo*, indicando isso por

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L,$$

se para todo $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existir $\delta = \delta(\epsilon) \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que

$$x > \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

para todo $x \in A$.

- (b) Diremos que uma função $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, onde A é ilimitado inferiormente, tem limite $L \in \mathbb{R}$ quando x decresce *indefinidamente*, ou *tende ao infinito negativo*, indicando isso por

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L,$$

se para todo $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existir $\delta = \delta(\epsilon) \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que

$$x < -\delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

para todo $x \in A$.

Teorema 7.12. (a) (Unicidade do Limite) Seja f uma função. O limite de f quando $x \rightarrow p, p^\pm, \pm\infty$, quando existe, é único, isto é, se $\lim f(x) = L_1$ e $\lim f(x) = L_2$, então $L_1 = L_2$.

(b) (Bilateral \Leftrightarrow Laterais) Sejam f uma função e p um número real. Se existem números reais a e b , com $a < p < b$, tais que $]a, p[\cup]p, b[\subset D_f$, então

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow p^+} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow p^-} f(x).$$

(c) (Cálculo de Limites) Sejam f e g funções para as quais existe $r > 0$ tal que $f(x) = g(x)$ sempre que $0 < |x - p| < r$ (caso $x \rightarrow p$), ou $p < x < p + r$ (caso $x \rightarrow p^+$), ou $p - r < x < p$ (caso $x \rightarrow p^-$), ou $x > r$ (caso $x \rightarrow +\infty$), ou $x < -r$ (caso $x \rightarrow -\infty$). Nestas condições, se $\lim f(x) = L \in \mathbb{R}$, então $\lim g(x) = L$.

(d) (do Confronto) Sejam f , g e h funções para as quais existe $r > 0$ tal que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ sempre que $0 < |x - p| < r$ (caso $x \rightarrow p$), ou $p < x < p + r$ (caso $x \rightarrow p^+$), ou $p - r < x < p$ (caso $x \rightarrow p^-$), ou $x > r$ (caso $x \rightarrow +\infty$), ou $x < -r$ (caso $x \rightarrow -\infty$). Nestas condições, se $\lim f(x) = \lim h(x) = L \in \mathbb{R}$, então $\lim g(x) = L$.

(e) (Limites Básicos) Dados $a, p \in \mathbb{R}$, temos que

$$\lim_{x \rightarrow p} a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a = a; \quad \lim_{x \rightarrow p} x = p; \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Prova. **(a)** Consideremos o caso em que $x \rightarrow p$. Como $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L_2$, temos por definição que para todo $\epsilon > 0$ existem $\delta_1, \delta_2 > 0$ para os quais

$$\begin{aligned} 0 < |x - p| < \delta_1 &\Rightarrow |f(x) - L_1| < \frac{\epsilon}{2}; \\ 0 < |x - p| < \delta_2 &\Rightarrow |f(x) - L_2| < \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Tomando $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$, temos que para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - L_1| + |f(x) - L_2| < \epsilon.$$

Com isso, temos que, para todo $\epsilon > 0$,

$$\begin{aligned} |L_1 - L_2| &= |L_1 - f(x) + f(x) - L_2| \\ &\leq |L_1 - f(x)| + |f(x) - L_2| \\ &= |f(x) - L_1| + |f(x) - L_2| \\ &< \epsilon, \end{aligned}$$

onde $L_1 = L_2$. ■

(b)

(c)

(d) Consideremos o caso em que $x \rightarrow p$. Como, por hipótese, $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow p} h(x)$, temos

$$\begin{aligned}\forall \epsilon > 0, \exists \delta_1 > 0 : 0 < |x - p| < \delta_1 \Rightarrow L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon; \\ \forall \epsilon > 0, \exists \delta_2 > 0 : 0 < |x - p| < \delta_2 \Rightarrow L - \epsilon < h(x) < L + \epsilon.\end{aligned}$$

Pois tome $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, r\}$; daí, vem

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < |x - p| < \delta \Rightarrow L - \epsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < L + \epsilon,$$

e então

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < |x - p| < \delta \Rightarrow L - \epsilon < g(x) < L + \epsilon,$$

onde $\lim_{x \rightarrow p} g(x) = L$.

Teorema 7.13. (Propriedades Operatórias) Se f_1, f_2, \dots, f_n são funções tais que $\lim f_1(x) = L_1$, $\lim f_2(x) = L_2, \dots$, $\lim f_n(x) = L_n$, em que $x \rightarrow p, p^\pm, \pm\infty$, então:

(a) O limite da soma é igual à soma dos limites:

$$\lim \left[\sum_{i=1}^n f_i(x) \right] = \sum_{i=1}^n [\lim f_i(x)] = \sum_{i=1}^n L_i = L_1 + L_2 + \dots + L_n.$$

(b) O limite do produto é igual ao produto dos limites:

$$\lim \left[\prod_{i=1}^n f_i(x) \right] = \prod_{i=1}^n [\lim f_i(x)] = \prod_{i=1}^n L_i = L_1 \cdot L_2 \cdot \dots \cdot L_n.$$

(c) O limite do quociente é igual ao quociente dos limites, desde que o denominador seja diferente de 0:

$$\lim \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim f_1(x)}{\lim f_2(x)} = \frac{L_1}{L_2}. \quad (L_2 \neq 0)$$

Prova.

Teorema 7.14. (Composição de Limites) Sejam f e g funções tais que $Im_f \subset D_g$ e $\lim f(x) := a$, com $x \rightarrow p, \pm\infty$.

(a) Se $\lim_{u \rightarrow a} g(u) = g(a)$, então

$$\lim g[f(x)] = \lim_{u \rightarrow a} g(u),$$

sendo $u := f(x)$.

(b) Se $\lim_{u \rightarrow a} g(u) := L$ e $a \notin D_g$, então

$$\lim g[f(x)] = \lim_{u \rightarrow a} g(u),$$

sendo $u := f(x)$.

Prova.

Observação 7.15. Para o item (a) do teorema acima, como, por hipótese, $\lim_{u \rightarrow a} g(u) = g(a)$, podemos expressar o teorema como $\lim g[f(x)] = g[\lim f(x)]$.

Corolário 7.16. (a) (Conservação do sinal) Se $\lim_{x \rightarrow p} f(x) := L \neq 0$, então existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in D_f$, temos $0 < |x - p| < \delta \Rightarrow f(x) \neq 0$.

(b) Temos

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow p} f(x) = L &\Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} f(p + h) = L \\ &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow p} [f(x) - L] = 0 \\ &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow p} |f(x) - L| = 0. \end{aligned}$$

Prova. (a) Basta tomar $\epsilon = L$. ■

(b)

7.3 Continuidade

Definição 7.17 (Continuidade). Seja $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função.

(a) f é *contínua* em $a \in A$ se para todo $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existe $\delta = \delta(\epsilon, a) \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que

$$\forall x(x \in A \cap V_\delta(a) \Rightarrow f(x) \in V_\epsilon(f(a))),$$

ou ainda, equivalentemente,

$$\forall x(x \in A \wedge |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon).$$

- (b) f é contínua em $X \subseteq A$ se f é contínua em todos os pontos de X , isto é, se para cada $a \in X$ e todo $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon, a) > 0$ tal que

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

para todo $x \in A$.

- (c) f é uniformemente contínua em A se para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

para quaisquer $x, y \in A$.

Teorema 7.18. Uma função $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em $a \in A \cap A'$ se, e somente se, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Prova.

Teorema 7.19. Se f e g são funções contínuas em p , então as funções $f + g$ e $f \cdot g$ são contínuas em p ; e se $g(p) \neq 0$, então a função $\frac{f}{g}$ é contínua em p .

Prova. Segue como corolário do Teorema (7.13).

Proposição 7.20. (a) Seja $a \in \mathbb{R}$. A função constante $f(x) := a$ é contínua.

(b) A função identidade $f(x) := x$ é contínua.

(c) Toda função polinomial é contínua. E ainda, toda função racional é contínua.

Prova.

Teorema 7.21. Sejam $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : B \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções tais que $f(A) \subseteq B$. Se f é contínua em $a \in A$ e se g é contínua em $f(a) \in B$, então a função composta $g \circ f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em a .

Teorema 7.22. Sejam f e g funções tais que $Im_f \subset D_g$. Se f é contínua em p e g é contínua em $f(p)$, então a função composta $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$ é contínua em p .

Prova. Pois tome: $\lim_{x \rightarrow p} g[f(x)] = g\left[\lim_{x \rightarrow p} f(x)\right] = g[f(p)]$.

Teorema 7.23. (Intervalos) Sejam f uma função e $p \in D_f$ um número real.

(a) Se para todo $\epsilon > 0$ existir um intervalo aberto $]a, b[$, com $p \in]a, b[$, tal que $\forall x \in D_f : x \in]a, b[\Rightarrow |f(x) - f(p)| < \epsilon$, então f é contínua em p .

(b) Seja $r > 0$. Se para todo $0 < \epsilon < r$ existir um intervalo aberto I (como no

item anterior, com $p \in I$) tal que $\forall x \in D_f : x \in I \Rightarrow |f(x) - f(p)| < \epsilon$, então f é contínua em p .

Prova. (a) Segue imediatamente do seguinte fato: para todo intervalo $]a, b[$, existe $\delta > 0$ tal que $]p - \delta, p + \delta[\subset]a, b[$. Com efeito, basta tomar $\delta = \min\{b - p, p - a\}$. Com isso, escolhendo esse δ , temos que

$$x \in]p - \delta, p + \delta[\Rightarrow x \in]a, b[.$$

Como, por hipótese, $x \in]a, b[\Rightarrow |f(x) - f(p)| < \epsilon$, temos então que

$$x \in]p - \delta, p + \delta[\Rightarrow |f(x) - f(p)| < \epsilon.$$

Como $x \in]p - \delta, p + \delta[\Leftrightarrow |x - p| < \delta$, vemos que para todo $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que $|x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(p)| < \epsilon$, isto é, f é contínua em p . ■

(b) Pelo item anterior, se $\epsilon < r$, então nada há de ser provado. Temos que provar o resultado para todos os ϵ 's, isto é, falta provar o caso $\epsilon \geq r$.

Pois tome $\epsilon_1 < r$. Para esse ϵ_1 , existe (por hipótese) um intervalo aberto I tal que $x \in I \Rightarrow |f(x) - f(p)| < \epsilon_1$. Como $\epsilon_1 < \epsilon$, também vale

$$x \in I \Rightarrow |f(x) - f(p)| < \epsilon,$$

o que completa a prova.

Proposição 7.24 (Conservação do sinal). Seja $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em $a \in A$.

- (a) Se $f(a) > 0$, então existe $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in V_\delta(a) \cap A$.
- (b) Se $f(a) < 0$, então existe $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $f(x) < 0$ para todo $x \in V_\delta(a) \cap A$.

Prova.

- (a) Para $\epsilon = f(a)$ na definição de continuidade, existe $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que

$$\forall x (x \in V_\delta(a) \cap A \Rightarrow |f(x) - f(a)| < f(a)).$$

Observando que

$$|f(x) - f(a)| < f(a) \Leftrightarrow 0 = f(a) - f(a) < f(x) < 2f(a),$$

a conclusão segue. ■

- (b) Tomando $\epsilon = -f(a)$, segue analogamente. ■

7.4 Limites Infinitos

Definição 7.25. (Limites infinitos quando $x \rightarrow \pm\infty$) Seja f uma função.

(a) Suponha que existe um número real a tal que $]a, +\infty[\subset D_f$.

- i. Diremos que f cresce indefinidamente, ou tende ao infinito positivo, quando x tende ao infinito positivo, indicando $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, se para todo $\epsilon > 0$ existir $\delta > 0$, com $\delta > a$, tal que $x > \delta \Rightarrow f(x) > \epsilon$.
- ii. Diremos que f decresce indefinidamente, ou tende ao infinito negativo, quando x tende ao infinito positivo, indicando $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, se para todo $\epsilon > 0$ existir $\delta > 0$, com $\delta > a$, tal que $x > \delta \Rightarrow f(x) < -\epsilon$.

(b) Suponha que existe um número real a tal que $]-\infty, a[\subset D_f$.

- i. Diremos que f tende ao infinito positivo, quando x tende ao infinito negativo, indicando $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, se para todo $\epsilon > 0$ existir $\delta > 0$, com $-a < -\delta$, tal que $x < -\delta \Rightarrow f(x) > \epsilon$.
- ii. Diremos que f tende ao infinito negativo, quando x tende ao infinito negativo, indicando $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, se para todo $\epsilon > 0$ existir $\delta > 0$, com $-a < -\delta$, tal que $x < -\delta \Rightarrow f(x) < -\epsilon$.

Definição 7.26. (Limites infinitos quando $x \rightarrow p^\pm$) Seja f uma função e p um número real.

(a) Suponha que existe um número real b tal que $]p, b[\subset D_f$.

- i. Diremos que f tende ao infinito positivo, quando x tende a p , pela direita, indicando $\lim_{x \rightarrow p^+} f(x) = +\infty$, se para todo $\epsilon > 0$ existir $\delta > 0$, com $p + \delta < b$, tal que $p < x < p + \delta \Rightarrow f(x) > \epsilon$.
- ii. Diremos que f tende ao infinito negativo, quando x tende a p , pela direita, indicando $\lim_{x \rightarrow p^+} f(x) = -\infty$, se para todo $\epsilon > 0$ existir $\delta > 0$, com $p + \delta < b$, tal que $p < x < p + \delta \Rightarrow f(x) < -\epsilon$.

(b) Suponha que existe um número real a tal que $]a, p[\subset D_f$.

- i. Diremos que f tende ao infinito positivo, quando x tende a p , pela esquerda, indicando $\lim_{x \rightarrow p^-} f(x) = +\infty$, se para todo $\epsilon > 0$ existir $\delta > 0$, com $a < p - \delta$, tal que $p - \delta < x < p \Rightarrow f(x) > \epsilon$.

- ii. Diremos que f tende ao infinito negativo, quando x tende a p , pela esquerda, indicando $\lim_{x \rightarrow p^-} f(x) = -\infty$, se para todo $\epsilon > 0$ existir $\delta > 0$, com $a < p - \delta$, tal que $p - \delta < x < p \Rightarrow f(x) < -\epsilon$.

Definição 7.27. (Limites infinitos quando $x \rightarrow p$) Seja f uma função e p um número real. Suponha que existem números reais a e b , com $a < p < b$, tais que $]a, p[,]p, b[\subset D_f$.

- i. Diremos que f tende ao infinito positivo, quando x tende a p , indicando $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = +\infty$, se para todo $\epsilon > 0$ existir $\delta > 0$, com $a < p - \delta$ e $p + \delta < b$, tal que $0 < |x - p| < \delta \Rightarrow f(x) > \epsilon$.
- ii. Diremos que f tende ao infinito negativo, quando x tende a p , indicando $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = -\infty$, se para todo $\epsilon > 0$ existir $\delta > 0$, com $a < p - \delta$ e $p + \delta < b$, tal que $0 < |x - p| < \delta \Rightarrow f(x) < -\epsilon$.

Teorema 7.28. Seja f uma função e p um número real. Se existem números reais a e b , com $a < p < b$, tais que $]a, p[,]p, b[\subset D_f$, então

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \pm\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow p^+} f(x) = \pm\infty = \lim_{x \rightarrow p^-} f(x).$$

Prova.

Teorema 7.29. Os resultados a seguir valem para $x \rightarrow p$, $x \rightarrow p^\pm$ e $x \rightarrow \pm\infty$.

- (a) Se $\lim f(x) = \lim g(x) = \pm\infty$, então $\lim[f(x) + g(x)] = \pm\infty$ e $\lim[f(x)g(x)] = +\infty$.
- (b) Se $\lim f(x) = -\infty$ e $\lim g(x) = +\infty$, então $\lim[f(x)g(x)] = -\infty$.
- (c) Seja $\lim f(x) = L$. Se $\lim g(x) = \pm\infty$, então $\lim[f(x) + g(x)] = \pm\infty$.
- (d) Seja $\lim f(x) = L > 0$. Se $\lim g(x) = \pm\infty$, então $\lim[f(x)g(x)] = \pm\infty$.
- (e) Seja $\lim f(x) = L < 0$. Se $\lim g(x) = \pm\infty$, então $\lim[f(x)g(x)] = \mp\infty$.

Prova.

Proposição 7.30. (a) Seja $\lim f(x) = 0$, com $x \rightarrow p^\pm$. Se existe $r > 0$ tal que $f(x) > 0$ sempre que $p < x < p + r$, se $x \rightarrow p^+$, ou $p - r < x < p$, se $x \rightarrow p^-$, então $\lim \frac{1}{f(x)} = +\infty$.

(b) Sejam $\lim f(x) = L \neq 0$ e $\lim g(x) = 0$, com $x \rightarrow p^\pm$. Se existe $r > 0$ tal que $f(x) > 0$ sempre que $p < x < p + r$, se $x \rightarrow p^+$, ou $p - r < x < p$, se $x \rightarrow p^-$,

então ou $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$, ou $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$, ou $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ não existe.

Prova.

7.5 Limites e Sequências

Definição 7.31. (c) Diremos que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$

1. *diverge para $+\infty$* , indicando

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty,$$

se para todo $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n > \epsilon$.

2. *diverge para $-\infty$* , indicando

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = -\infty,$$

se para todo $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n < -\epsilon$.

Observação 7.32. (a) Note que as definições acima são análogas àquelas que demos aos limites no infinito de funções. Assim, os resultados sobre os limites da forma $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ também são válidos para os limites da forma $\lim_{x \rightarrow +\infty} x_n$.

(b) A notação “ $x_n \rightarrow a$ quando $n \rightarrow +\infty$ ” também é frequentemente usada para indicar $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$. Quando não houver confusão, podemos escrever simplesmente $x_n \rightarrow a$. Analogamente, também podemos escrever $x_n \rightarrow \pm\infty$ quando $n \rightarrow \infty$ ou, simplesmente, $x_n \rightarrow \pm\infty$.

Teorema 7.33. (Convergência Monótona)

(a) Toda sequência crescente e limitada superiormente é convergente.

(b) Toda sequência decrescente e limitada inferiormente é convergente.

Prova. **(a)** Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência crescente e limitada superiormente. Como o conjunto $X := \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ é, por hipótese, não vazio e limitado superiormente, pela propriedade do supremo existe $\sup X$. Como, para todo $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, $\sup X - \epsilon$ não é uma cota superior de X , existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sup X - \epsilon < x_{n_0} \leq \sup X$. Como $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é crescente, para todo $n \in \mathbb{N}$, se $n > n_0$, então $\sup X - \epsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq \sup X < \sup X + \epsilon$. Temos então que $x_n \rightarrow \sup X$, isto é, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para $\sup X$. ■

(b) Segue analogamente: sendo $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência decrescente e limitada inferiormente, basta provar que $x_n \rightarrow \inf \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Teorema 7.34. (Bolzano-Weierstrass) Toda sequência limitada possui uma subsequência convergente.

Prova. Pelo teorema (7.33), basta mostrar que toda sequência possui uma subsequência monótona. Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência limitada. Um índice $k \in \mathbb{N}$ é dito *básico* quando $x_p \geq x_k$ para todo $p > k$, isto é, x_k é menor ou igual aos termos que o sucedem.

- Se existem infinitos índices básicos $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$, então $x_{n_1} \leq x_{n_2} \leq x_{n_3} \leq \dots$, de modo que a subsequência $(x_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ é crescente; como ela é limitada, pelo teorema (7.33), ela é convergente.
- Por outro lado, se o número de índices básicos é finito, seja $n_1 \in \mathbb{N}$ maior que todos eles (se o número de índices básicos for 0, qualquer n_1 funciona). Como n_1 não é um índice básico, existe um índice $n_2 \in \mathbb{N}_{>n_1}$ tal que $x_{n_2} < x_{n_1}$. Como n_2 não é um índice básico, existe um índice $n_3 \in \mathbb{N}_{>n_2}$ tal que $x_{n_3} < x_{n_2}$. Prosseguindo deste modo, obtemos uma subsequência $(x_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ estritamente decrescente; como ela é limitada, pelo teorema (7.33), ela é convergente.

Com isso, toda sequência possui uma subsequência monótona, e como a sequência original é limitada, a subsequência monótona também é, sendo, portanto, convergente.

Teorema 7.35. Seja $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e $a \in A$. As seguintes afirmações são equivalentes:

- f é contínua em a ;
- toda sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, com $x_n \in A$ para todo $n \in \mathbb{N}$, satisfaz

$$x_n \rightarrow a \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(a).$$

Prova.

Teorema 7.36. Toda função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua em $[a, b]$ é uniformemente contínua em $[a, b]$.

Prova. Suponha que exista uma função f contínua em $[a, b]$ que não seja uniformemente contínua em $[a, b]$. Negando a definição de continuidade uniforme (7.17), isso significa que existe $\epsilon_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que, para todo $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$, existem $x, y \in [a, b]$ tais que $|x - y| < \delta$ e $|f(x) - f(y)| \geq \epsilon_0$. Em particular, escolhendo $\delta_n = \frac{1}{n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, existem $x_n, y_n \in [a, b]$ tais que $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ e

$|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon_0$; definimos, assim, duas sequências $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Como $x_n \in [a, b]$ para todo $n \in \mathbb{N}$, a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada, de modo que, pelo teorema de Bolzano-Weierstrass (7.34), existe uma subsequência $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ que converge para algum $L \in [a, b]$, isto é, $x_{n_k} \rightarrow L$. Considerando a subsequência correspondente $(y_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, temos, para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$|x_{n_k} - y_{n_k}| < \frac{1}{n_k}.$$

Como $n_k \rightarrow +\infty$ (pois $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de índices), temos que $\frac{1}{n_k} \rightarrow 0$, de modo que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} |x_{n_k} - y_{n_k}| = 0.$$

Com isso, sendo $x_{n_k} \rightarrow L$, só pode ser $y_{n_k} \rightarrow L$. Como f é contínua em $L \in [a, b]$, pelo teorema (7.35) temos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(L) \quad \text{e} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} f(y_{n_k}) = f(L),$$

de modo que $\lim_{k \rightarrow +\infty} |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| = 0$, o que contraria a hipótese de ser $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \epsilon_0 > 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Assim, uma tal função f não pode existir.

Teorema 7.37. Se $(a_n)_{n \geq 0}$ e $(b_n)_{n \geq 0}$ são sequências tais que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (b_n - a_n) = 0$ e, para todo $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$, então existe um único $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq \alpha \leq b_n$.

Prova. (Existência) A segunda condição nos diz que $(a_n)_{n \geq 0}$ é crescente (pois $a_n \leq a_{n+1}$) e limitada superiormente (pois todo b_n é uma cota superior dessa sequência). Analogamente, $(b_n)_{n \geq 0}$ é decrescente e limitada inferiormente. Assim, pelo Teorema (7.33), existem $\alpha := \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ e $\beta := \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$, e então $0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} (b_n - a_n) = \alpha - \beta$, donde $\alpha = \beta$. Ainda pelo Teorema (7.33), $\alpha = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, e então, para todo $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq \alpha$. Analogamente, $\alpha = \beta = \inf\{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, e então, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $\alpha \leq b_n$. Logo, existe um $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq \alpha \leq b_n$.

(Unicidade) Suponha que existe $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ para o qual também vale $a_n \leq \alpha_1 \leq b_n$. Daí, $0 \leq \alpha_1 - a_n \leq b_n - a_n$; observando que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} (b_n - a_n) = 0$, temos, pelo Teorema do Confronto, que $0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha_1 - a_n) = \alpha_1 - \alpha$, isto é, $\alpha_1 = \alpha$. Logo, é único o $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq \alpha \leq b_n$.

Corolário 7.38. (Intervalos Encaixantes) Se $([a_n, b_n])_{n \geq 0}$ for uma sequência de intervalos fechados em que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$, e $\lim_{n \rightarrow +\infty} (b_n - a_n) = 0$, então o conjunto $\bigcap_{n=0}^{\infty} [a_n, b_n]$ é unitário.

Prova. Este enunciado é equivalente ao enunciado do Teorema (7.37).

Corolário 7.39. Se $([a_n, b_n])_{n \geq 0}$ for uma sequência de intervalos encaixantes, com $a_n, b_n \geq 0$, então $([a_n^m, b_n^m])_{n \geq 0}$, com $m \geq 2$ natural, também será uma sequência de intervalos encaixantes.

Prova. Basta ver que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} [a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}] &\Leftrightarrow a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \\ &\Leftrightarrow a_n^m \leq a_{n+1}^m \leq b_{n+1}^m \leq b_n^m \\ &\Leftrightarrow [a_n^m, b_n^m] \supset [a_{n+1}^m, b_{n+1}^m], \end{aligned}$$

e ainda,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} (b_n^m - a_n^m) &= \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n \right)^m - \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \right)^m \\ &= \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \right)^m - \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \right)^m = 0. \end{aligned}$$

Logo, $([a_n^m, b_n^m])_{n \geq 0}$ é de intervalos encaixantes.

Ademais, se α é o real que satisfaz, para todo $k \in \mathbb{N}$, $a_k \leq \alpha \leq b_k$, então α^m é o real que satisfaz, para todo $k \in \mathbb{N}$, $a_k^m \leq \alpha^m \leq b_k^m$.¹

7.6 Teoremas do Valor Intermediário e de Weierstrass

Teorema 7.40 (Bolzano). Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a, b]$. Se $f(a) \cdot f(b) < 0$, então existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Prova. Suponha, sem perda de generalidade, que $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$. Pois tome

$$S := \{x \in [a, b] : f(x) \leq 0\}.$$

Temos $S \neq \emptyset$ pois $a \in S$ já que $f(a) < 0$. S é limitado pois $S \subsetneq [a, b]$. Assim, existe $p := \sup S$. Provemos que $f(p) = 0$. De fato, pela tricotomia de $<$ em \mathbb{R} , ou $f(p) > 0$, ou $f(p) < 0$, ou $f(p) = 0$.

- Se fosse $f(p) > 0$, pela conservação do sinal existiria $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in (p - \delta, p + \delta) \cap [a, b]$. Com isso, se $x \in S$, então $x \leq p - \delta$, de modo que $p - \delta$ é uma cota superior de S , uma contradição pois $p - \delta < p = \sup S$.

¹Prove! O argumento é semelhante ao argumento da unicidade no Teorema (7.37).

- Se fosse $f(p) < 0$, pela conservação do sinal existiria $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $f(x) < 0$ para todo $x \in (p - \delta, p + \delta) \cap [a, b]$. Em particular, se $x \in (p, p + \delta) \cap [a, b]$, então $f(x) > 0$ e $x \in S$, uma contradição pois $x > p = \sup S$.

Logo, só pode ser $f(p) = 0$. Além disso, como $p \in [a, b]$ e $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$, temos que $p \in (a, b)$. ■

Prova. Suponha, sem perda de generalidade, que $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$. Construamos uma sequência de intervalos $([a_n, b_n])_{n \geq 0}$ recursivamente do seguinte modo: $a_0 := a$, $b_0 := b$ e

$$\begin{cases} a_{n+1} := \frac{a_n + b_n}{2} \text{ e } b_{n+1} := b_n, & \text{se } f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) < 0 \\ a_{n+1} := a_n \text{ e } b_{n+1} := \frac{a_n + b_n}{2}, & \text{se } f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) \geq 0. \end{cases}$$

É fácil ver que, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} (b_n - a_n) = 0$. Com isso, $([a_n, b_n])_{n \geq 0}$ é uma sequência de intervalos encaixantes, de modo que existe um único $c \in [a, b]$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq c \leq b_n$. Em particular, temos que $f(a_n) < 0 \leq f(b_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Pela continuidade de f , $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = f(c)$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n) = f(c)$, e como $f(a_n) < 0 \leq f(b_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos, pelo Teorema do Confronto, que $f(c) = 0$.

Teorema 7.41 (Valor Intermediário). Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a, b]$.

- Se $f(a) \leq f(b)$, então para todo $\gamma \in [f(a), f(b)]$ existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = \gamma$.
- Se $f(b) \leq f(a)$, então para todo $\gamma \in [f(b), f(a)]$ existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = \gamma$.
- Para todo $\gamma \in [\min\{f(a), f(b)\}, \max\{f(a), f(b)\}]$ existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = \gamma$.

Prova. Pois tome $g(x) := f(x) - \alpha$, com $x \in [a, b]$. Como f é contínua em $[a, b]$, g também o é. Em particular, $g(a) = f(a) - \alpha < 0$ e $g(b) = f(b) - \alpha > 0$, de modo que, pelo Teorema do Anulamento, existe $c \in [a, b]$ tal que $g(c) = 0$, isto é, $f(c) = \alpha$.

Teorema 7.42. (Limitação) Se uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em $[a, b]$, então f é limitada em $[a, b]$.

Prova. Suponhamos, por absurdo, que f não seja limitada em $[a, b]$. Colocando

$a_0 := a$ e $b_0 := b$, existe $x_0 \in [a_0, b_0]$ tal que $|f(x_0)| > 0$. Suponha, indutivamente, que $[a_n, b_n] \subset [a_0, b_0]$ esteja bem definido, sendo f não limitada em $[a_n, b_n]$. Em particular, existe $x_n \in [a_n, b_n]$ tal que $|f(x_n)| > n$. Agora, defina $a_{n+1} := a_n$ e $b_{n+1} := \frac{a_n + b_n}{2}$, se f não for limitada em $\left[a_n, \frac{a_n + b_n}{2}\right]$, ou $a_{n+1} := \frac{a_n + b_n}{2}$ e $b_{n+1} := b_n$ se f não for limitada em $\left[\frac{a_n + b_n}{2}, b_n\right]$. No intervalo em que f não for limitada, existirá x_{n+1} nesse intervalo tal que $|f(x_{n+1})| > n + 1$.

Assim, fica construída uma sequência $([a_n, b_n])_{n \geq 0}$ de intervalos encaixantes tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in [a_n, b_n]$ com $|f(x_n)| > n$. Em particular, isso significa que $\lim_{n \rightarrow +\infty} |f(x_n)| = +\infty$. Agora, sendo c o único real tal que $a_n \leq c \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, pelo Teorema do Confronto temos que $x_n \rightarrow c$, e sendo f contínua em c , temos que $\lim_{n \rightarrow +\infty} |f(x_n)| = |f(c)|$, absurdo! Logo, f não ser limitada em $[a, b]$ nos leva a uma contradição, de modo que f é, então, limitada em $[a, b]$.

Teorema 7.43 (Valor Extremo, ou Weierstrass). Se uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em $[a, b]$, então existem $x_1, x_2 \in [a, b]$ tais que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ para todo $x \in [a, b]$.

Prova. Pelo teorema da limitação (7.42), f é limitada em $[a, b]$, de modo que o conjunto $A := \{f(x) : x \in [a, b]\}$ admite $M := \sup A$ e $m := \inf A$. Isto significa que $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in [a, b]$. Afirmamos que existe $x_2 \in [a, b]$ para o qual $M = f(x_2)$. De fato, se um tal x_2 não existisse, seria $f(x) < M$ para todo $x \in [a, b]$, de modo que a função $g(x) := \frac{1}{M - f(x)}$, com $x \in [a, b]$, seria contínua, mas não limitada, em $[a, b]$, o que é uma contradição (se g fosse limitada, então existiria $\gamma > 0$ tal que $0 < \frac{1}{M - f(x)} < \gamma$, donde $f(x) < M - \frac{1}{\gamma}$, de modo que M não seria supremo de A). Assim, não pode ser $f(x) < M$, e como $f(x) \leq M$, existirá $x_2 \in [a, b]$ para o qual $f(x_2) = M$. Analogamente, prova-se que existe $x_1 \in [a, b]$ para o qual $f(x_1) = m$.

7.7 Algumas Funções Transcendentais

7.7.1 Trigonometria, parte I

Teorema 7.44. Existe um único par de funções, $s, c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, para as quais

- $s(0) = 0$ e $c(0) = 1$;
- $\forall x \forall y : s(x - y) = s(x)c(y) - s(y)c(x)$ e $c(x - y) = c(x)c(y) + s(x)s(y)$;
- $\exists r > 0 : 0 < x < r \Rightarrow 0 < s(x) < x < \frac{s(x)}{c(x)}$.

A função s é chamada de *seno* e será indicada por $\sin x$, enquanto c é chamada de *cosseno* e será indicada por $\cos x$.

Prova.

Proposição 7.45. (a) (Identidade Fundamental) Temos $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(b) \sin é uma função ímpar, isto é, $\sin -x = -\sin x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, enquanto \cos é uma função par, isto é, $\cos -x = \cos x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(c) Temos, para todos $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\sin(x + y) &= \sin x \cos y + \sin y \cos x \\ \cos(x + y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y\end{aligned}$$

(d) Temos $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ e $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(e) Temos $\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x$ e $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Prova.

Teorema 7.46. As funções \sin e \cos são contínuas em \mathbb{R} .

Prova. Pelo terceiro item no resultado (7.44), existe $r > 0$ tal que $|x| < r \Rightarrow |\sin x| \leq |x|$. Usaremos isso para provar que $|x - p| < 2r \Rightarrow |\sin x - \sin p| \leq |x - p|$. Pois tome:

$$\begin{aligned}|\sin x - \sin p| &= \left| 2 \sin \left(\frac{x - p}{2} \right) \cos \left(\frac{x + p}{2} \right) \right| \\ &= 2 \left| \sin \left(\frac{x - p}{2} \right) \right| \left| \cos \left(\frac{x + p}{2} \right) \right|;\end{aligned}$$

como $\left| \cos \left(\frac{x + p}{2} \right) \right| \leq 1$, temos que

$$|\sin x - \sin p| \leq 2 \left| \sin \left(\frac{x - p}{2} \right) \right|,$$

e então, pelo fato mencionado acima, vem

$$|x - p| < 2r \Rightarrow \left| \sin \left(\frac{x - p}{2} \right) \right| \leq \left| \frac{x - p}{2} \right|,$$

onde $|x - p| < 2r \Rightarrow |\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} p| \leq |x - p|$. De maneira completamente análoga, prova-se que $|x - p| < 2r \Rightarrow |\cos x - \cos p| \leq |x - p|$.

Com isso, $|x - p| < 2r \Rightarrow 0 \leq |\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} p| \leq |x - p|$, e como $\lim_{x \rightarrow p} |x - p| = 0$, pelo Teorema do Confronto vem $\lim_{x \rightarrow p} |\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} p| = 0$, donde $\lim_{x \rightarrow p} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} p$. De modo completamente análogo, prova-se que $\lim_{x \rightarrow p} \cos x = \cos p$. Logo, sen e cos são contínuas em todo $p \in \mathbb{R}$.

Teorema 7.47. Temos $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ e $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$.

Prova.

7.7.2 Exponencial e Logaritmo

Exponentes Racionais

O intuito aqui é definir a^x quando $x \in \mathbb{Q}$. A referência é [9].

Teorema 7.48.

- (a) Para quaisquer $a \in \mathbb{R}_{>0}$ e $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ existe um único $x \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $x^n = a$.
- (b) Para quaisquer $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ ímpar existe um único $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^n = a$.

Prova. (a) Iremos construir duas sequências, $(a_k)_{k \geq 0}$ e $(b_k)_{k \geq 0}$, no sentido dos Teoremas (7.37) e (7.38).

Seja A_0 o maior natural tal que $A_0^n \leq a < (A_0 + 1)^n$. Em particular, isso nos diz que, se o real $x > 0$ existe, então ele satisfaz $A_0 \leq x < A_0 + 1$. Agora, para cada $k \geq 1$, seja A_k um elemento do conjunto $\{0, 1, \dots, 9\}$ (isto é, A_k é um *dígito*, ou *algarismo*), e defina $(a_k)_{k \geq 0}$ e $(b_k)_{k \geq 0}$ por

$$a_k := \max \left\{ \sum_{i=0}^k \frac{A_k}{10^k} \mid \left(\sum_{i=0}^k \frac{A_k}{10^k} \right)^n \leq a \right\}, \forall k \geq 0$$

$$b_k := \begin{cases} A_0 + 1, & \text{se } k = 0 \\ a_{k-1} + \frac{A_k + 1}{10^k}, & \text{se } k \geq 1 \end{cases}$$

É imediato que, para todo $k \in \mathbb{N}$, $a_k^n \leq a < b_k^n$. Em particular, isso nos diz que, se o real $x > 0$ existe, então ele satisfaz $a_k \leq x < b_k$. Provemos agora que $a_k \leq a_{k+1} \leq b_{k+1} \leq b_k$:

i. $a_k \leq a_{k+1}$: para ver isso, basta ver que

$$a_{k+1} = \sum_{i=0}^{k+1} \frac{A_k}{10^k} = \sum_{i=0}^k \frac{A_k}{10^k} + \frac{A_{k+1}}{10^k} = a_k + \frac{A_{k+1}}{10^k}.$$

Daí, $a_{k+1} - a_k = \frac{A_{k+1}}{10^k} \geq 0 \Rightarrow a_k \leq a_{k+1}$.

ii. $a_{k+1} \leq b_{k+1}$: releia uma das afirmações ditas acima.

iii. $b_{k+1} \leq b_k$: basta ver que

$$\begin{aligned} b_k - b_{k+1} &= \left(a_{k-1} + \frac{A_k + 1}{10^k} \right) - \left(a_k + \frac{A_{k+1} + 1}{10^{k+1}} \right) \\ &= \left(a_{k-1} + \frac{A_k + 1}{10^k} \right) - \left(a_{k-1} + \frac{A_k}{10^k} + \frac{A_{k+1} + 1}{10^{k+1}} \right) \\ &= \frac{A_k + 1}{10^k} - \frac{A_k}{10^k} - \frac{A_{k+1} + 1}{10^{k+1}} \\ &= \frac{1}{10^k} - \frac{A_{k+1} + 1}{10^{k+1}} = \frac{9 - A_{k+1}}{10^{k+1}}. \end{aligned}$$

Como $A_{k+1} \in \{1, 2, \dots, 9\}$, temos que $\frac{9 - A_{k+1}}{10^{k+1}} \geq 0$, donde $b_{k+1} \leq b_k$.

Por fim, provemos que $\lim_{k \rightarrow +\infty} (b_k - a_k) = 0$. De fato, veja que

$$\begin{aligned} b_k - a_k &= a_{k-1} + \frac{A_k + 1}{10^k} - \sum_{i=0}^k \frac{A_k}{10^k} \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \frac{A_k}{10^k} + \frac{A_k}{10^k} + \frac{1}{10^k} - \sum_{i=0}^k \frac{A_k}{10^k} \\ &= \sum_{i=0}^k \frac{A_k}{10^k} + \frac{1}{10^k} - \sum_{i=0}^k \frac{A_k}{10^k} = \frac{1}{10^k}, \end{aligned}$$

e então $\lim_{k \rightarrow +\infty} (b_k - a_k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{10^k} = 0$.

Com isso, a sequência $([a_k, b_k])_{k \geq 0}$ é de intervalos encaixantes, e então existe um único $x \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $k \in \mathbb{N}$, $a_k \leq x \leq b_k$. Pelo resultado (7.39), a sequência $([a_k^n, b_k^n])_{k \geq 0}$ também é de intervalos encaixantes; temos então que, para todo $k \in \mathbb{N}$, $a_k^n \leq x^n \leq b_k^n$. No entanto, vimos isso também vale para o real $a > 0$: para todo $k \in \mathbb{N}$, $a_k^n \leq a \leq b_k^n$. Daí, $x^n = a$.

(b) Se $a > 0$, então, pelo item (a), existe $x > 0$ tal que $x^n = a$. Por outro lado, se $a < 0$, então $-a > 0$, e pelo item (a) existe $x > 0$ tal que $x^n = -a$; daí, $(-x)^n = a$.

Definição 7.49. Seja $n \geq 1$ um natural.

(a) Para cada real a , o único real x tal que $x^n = a$ será chamado de *raiz n-ésima* de a e será denotado por $\sqrt[n]{a}$. Assim, temos que $(\sqrt[n]{a})^n = a$.

(b) Como para todo $x \in \mathbb{R}_+$ existe um único $\sqrt[n]{x} \in \mathbb{R}_+$, a relação $\{(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ : y = \sqrt[n]{x}\}$ é uma função, que será chamada de *função raiz*.

Corolário 7.50. Se $a, b > 0$ são reais, $m, n \geq 1$ são naturais e p é um inteiro, então

$$(a) \sqrt[n]{a^p} = \sqrt[nm]{a^{pm}};$$

$$(b) \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a};$$

$$(c) \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab};$$

$$(d) a < b \Leftrightarrow \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}.$$

Prova.

Proposição 7.51. A função $f(x) := \sqrt[n]{x}$ é contínua em todo seu domínio.

Prova.

Definição 7.52. (Expoente Racional) Seja $a > 0$ um real. Para cada racional r (isto é, $r := m/n$, com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), definimos $a^r = a^{\frac{m}{n}} := \sqrt[n]{a^m}$.²

Proposição 7.53. Para quaisquer $a, b > 0$ reais e r, s racionais, temos que

$$(a) a^r \cdot a^s = a^{r+s};$$

$$(b) (a^r)^s = a^{rs};$$

$$(c) (ab)^r = a^r b^r;$$

$$(d) \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s};$$

$$(e) \left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r};$$

$$(f) \text{Se } 1 < a \text{ e } r < s, \text{ então } a^r < a^s;$$

²Como $\sqrt[n]{a^p} = \sqrt[nm]{a^{pm}}$, a definição acima não depende da escolha da fração m/n . Em particular, $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ tal que $f(r) = a^r$ fica bem definida como função.

(g) Se $0 < a < 1$ e $r < s$, então $a^s < a^r$.

Prova.

Exponentes Reais

O intuito aqui é definir a^x quando $x \in \mathbb{R}$.

Teorema 7.54. (a) Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em \mathbb{R} e $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{Q}$, então $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(b) Se $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são contínuas em \mathbb{R} e $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{Q}$, então $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.³

(c) Se $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são contínuas em \mathbb{R} e existe $0 < a \neq 1$ tal que $f(x) = a^x$ e $g(x) = a^x$ para todo $x \in \mathbb{Q}$, então $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.⁴

Prova. (a) Segue como corolário da conservação do sinal (7.24). ■

(b) Basta aplicar o resultado do item (a) na função $h(x) := f(x) - g(x)$. ■

(c) Segue como corolário do item (b) acima.

Teorema 7.55. (a) Se $a > 1$ é um real, então para todo $\epsilon > 0$ existe um natural n tal que $a^{\frac{1}{n}} - 1 < \epsilon$.

(b) Se $a > 1$ e x são reais, então para todo $\epsilon > 0$ existem racionais r e s tais que $r < x < s$ e $a^s - a^r < \epsilon$.

(c) Se $a > 1$ é um real, então para todo x real existe um único real γ tal que $a^r < \gamma < a^s$ para todos os racionais r e s com $r < x < s$.

(d) Se $0 < a \neq 1$ é um real, então existe uma única função definida e contínua em \mathbb{R} tal que $f(r) = a^r$ para todo $x \in \mathbb{Q}$.

Prova. (a) Sabemos que $(1 + \epsilon)^n \geq 1 + n\epsilon$ para todo natural $n \geq 1$. Pois tome n tal que $1 + n\epsilon > a$ (basta que $n > \frac{a-1}{\epsilon}$); daí, $(1 + \epsilon)^n > a$, donde $a^{\frac{1}{n}} - 1 < \epsilon$. ■

(b) Para racionais $t > x$ temos $a^r < a^t$ para todo racional $r < x$. Pelo item anterior, existe um natural n para o qual $a^{\frac{1}{n}} - 1 < \epsilon \cdot a^{-t}$, donde $a^t(a^{\frac{1}{n}} - 1) < \epsilon$. Tomando racionais r e s , com $r < x < s$, para os quais $s - r < 1/n$, temos $a^s - a^r = a^r(a^{s-r} - 1) < a^r(a^{\frac{1}{n}} - 1) < \epsilon$. ■

³Isto nos diz que se duas funções contínuas em \mathbb{R} coincidem em \mathbb{Q} , então elas são iguais.

⁴Isto significa que poderá existir no máximo uma função definida e contínua em \mathbb{R} que coincide com a^x para todo $x \in \mathbb{Q}$.

(c) O conjunto $A := \{a^r : r \in \mathbb{Q} \wedge r < x\}$ é não vazio e limitado superiormente (por todo a^s , com $s > x$). Assim, existe $\gamma := \sup A$. Claramente, $a^r \leq \gamma \leq a^s$, mas, mais geralmente, $a^r < \lambda < a^s$ (prove!). Provemos, agora, a unicidade de γ . Se γ' for tal que $a^r < \gamma' < a^s$ para quaisquer racionais r e s , com $r < x < s$, então $|\gamma - \gamma'| < a^s - a^r$. Pelo item anterior, para todo $\epsilon > 0$ existem r_0 e s_0 , com $r_0 < x < s_0$, para os quais $a^{s_0} - a^{r_0} < \epsilon$; logo, temos $|\gamma - \gamma'| < \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$, donde $\gamma = \gamma'$. ■

(d) Pelo item anterior, para quaisquer $a > 1$ e x reais existe um único γ ; assim, basta tomar $f(x) := \gamma$. Antes de provar a continuidade de f , provemos que f é estritamente crescente. De fato, tomando reais $x_1 < x_2$ temos que $a^{x_1} < f(x_1) < a^{x_2}$ e $a^{x_2} < f(x_2) < a^{x_1}$ para todos os racionais x_1 , x_2 , s_1 e s_2 tais que $x_1 < s_1 < x_2$ e $x_2 < s_2 < x_1$. Como existe s racional tal que $x_1 < s < x_2$, temos $f(x_1) < a^s < f(x_2)$, donde f é estritamente crescente.

Agora, sendo $p \in \mathbb{R}$, pelo item (b) deste teorema, para todo $\epsilon > 0$ existem racionais r e s , com $r < x < s$, para os quais $a^s - a^r < \epsilon$. Em particular, para todo $x \in]r, s[$, temos $a^r < f(x) < a^s$, e como também $a^r < f(p) < a^s$, temos $|f(x) - f(p)| < a^s - a^r < \epsilon$. Assim, pelo Teorema (7.23), f é contínua em p . Como p foi tomado de modo arbitrário, segue que f é contínua em \mathbb{R} .

Por outro lado, se $0 < a < 1$, então $f(x) := (\frac{1}{a})^{-x}$ está bem definida em \mathbb{R} , é contínua em \mathbb{R} e coincide com a^r nos racionais.

Definição 7.56. Seja $0 < a \neq 1$ um real. Para todo $x \in \mathbb{R}$, definimos $a^x := f(x)$, em que f é a função a que se refere o item (d) do Teorema (7.55).

Proposição 7.57. Para quaisquer $0 < a, b \neq 1$ reais e x, y reais, temos que

(a) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$;

(b) $(a^x)^y = a^{xy}$;

(c) $(ab)^x = a^x b^x$;

(d) $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$;

(e) $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$;

(f) Se $1 < a$ e $x < y$, então $a^x < a^y$;

(g) Se $0 < a < 1$ e $x < y$, então $a^y < a^x$.

Prova.

Logaritmos

Teorema 7.58. Para quaisquer reais $0 < a \neq 1$ e $b > 0$, existe um único real $\gamma := \log_a b$ tal que $a^\gamma = a^{\log_a b} = b$. Em particular, $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) := \log_a x$ fica bem definida.

Prova.

Teorema 7.59. Para quaisquer $0 < a, b \neq 1$ e $x, y > 0$, temos que

$$\begin{aligned}\log_a xy &= \log_a x + \log_a y \\ \log_a x^y &= y \log_a x \\ \log_a \frac{x}{y} &= \log_a x - \log_a y \\ \log_a x &= \frac{\log_b x}{\log_b a}\end{aligned}$$

E ainda, se $a > 1$ e $x < y$, então $\log_a x < \log_a y$ (isto é, se $a > 1$ então $f(x) := \log_a x$ é crescente), e se $0 < a < 1$ e $x < y$, então $\log_a y < \log_a x$ (isto é, se $0 < a < 1$, então $f(x) := \log_a x$ é decrescente).

Prova.

Teorema 7.60. Se $a > 1$, então $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = \infty$ e $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty$; se $0 < a < 1$, então $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = +\infty$.

Prova.

Teorema 7.61. A função logarítmica $f(x) := \log_a x$ é contínua em todo seu domínio.

Prova.

Capítulo 8

Derivadas

8.1 Definições e Resultados Iniciais

Definição 8.1. Uma função $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é *derivável* em $a \in A \cap A'$, se existe o limite

$$f'(a) := \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Noutros termos, f é derivável em a se existe o limite $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\Delta f}{\Delta x}(a)$, onde $\frac{\Delta f}{\Delta x}(a) : A \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ é a *função quociente de diferenças*, definida por

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}(a) := \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Sendo f derivável em a , o limite $f'(a)$ é a *derivada* de f em a .

Observação 8.2. O objetivo das proposições seguintes é estabelecer precisamente a equivalência

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = L \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = L,$$

por vezes assumida sem mais explicações.

Proposição 8.3. Sejam $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in A'$. Tem-se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ para algum $L \in \mathbb{R}$ se, e somente se, $\lim_{h \rightarrow 0} g(h) = L$, onde $g : \{h \in \mathbb{R}_{\neq 0} : a + h \in A\} \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por $g(h) := f(a + h)$.

Prova. A proposição (???) estabelece que $a \in A' \Leftrightarrow 0 \in \{h \in \mathbb{R}_{\neq 0} : a + h \in A\}'$.

Daí, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ se, e somente se, para todo $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existe $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$ para todo $x \in A$. Tomando $h := x - a$, temos $x = a + h \in A$, de modo que $h \in B$. Assim, para todo $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existe $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $0 < |h| < \delta \Rightarrow |f(a + h) - L| < \epsilon$ para todo $h \in B$, de modo que $\lim_{h \rightarrow 0} g(h) = L$.

Corolário 8.4. Uma função $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é derivável em $a \in A \cap A'$, com derivada $L \in \mathbb{R}$, se, e somente se, $\lim_{h \rightarrow 0} g(h) = L$, onde $g : \{h \in \mathbb{R}_{\neq 0} : a + h \in A \setminus \{a\}\} \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por $g(h) := \frac{\Delta f}{\Delta x}(a + h)$.

Prova. Por definição, f ser derivável em a com derivada L significa que $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$. Definindo $\varphi : \{h \in \mathbb{R}_{\neq 0} : a + h \in A \setminus \{a\}\} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\varphi(h) = g(a + h) = \frac{f(a + h) - f(a)}{(a + h) - a} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h},$$

pela proposição (8.3) temos $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = L$, como havíamos afirmado.

Definição 8.5. Seja f uma função e $A \subseteq D_f$ o conjunto dos $x \in D_f$ para os quais existe $f'(x)$. A função $f' : A \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $x \rightarrow f'(x)$ denomina-se *função derivada* ou, simplesmente, *derivada* de f . Diremos, ainda, que f' é a *derivada de 1ª ordem* de f , que também pode ser denotada por $f^{(1)}$. Por fim, definimos, indutivamente, $f^{(n+1)} := [f^{(n)}]'$.

Definição 8.6. Seja f uma função, sendo $y := f(x)$. O símbolo $\frac{dy}{dx}$, que se lê “derivada de y em relação a x ”, denota a derivada de f em x , isto é, $\frac{dy}{dx} := f'(x)$. Já $\frac{d^n y}{dx^n}$ denota a n -ésima derivada de f em x : $\frac{d^n y}{dx^n} := f^{(n)}(x)$. E ainda, $\frac{df}{dx}$ denota a função derivada de $y = f(x)$: $\frac{df}{dx} := f'$. Naturalmente, então, $\frac{df}{dx}(x) := f'(x)$. A derivada de $y = f(x)$ no ponto p é denotada por $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=p}$.

Teorema 8.7. Se f for derivável em p , então f será contínua em p .

Prova.

Teorema 8.8. Se f e g são funções deriváveis em p , então

(a) a função $f + g$ é derivável em p e

$$(f + g)'(p) = f(p) + g(p);$$

(b) a função $f \cdot g$ é derivável em p e

$$(f \cdot g)'(p) = f'(p) \cdot g(p) + g'(p) \cdot f(p);$$

(c) a função $\frac{f}{g}$ é derivável em p , desde que $g(p) \neq 0$, sendo

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(p) = \frac{f'(p) \cdot g(p) - g'(p) \cdot f(p)}{[g(p)]^2}.$$

Prova.

Corolário 8.9. derivada de n funções, derivada de kf.

Lema 8.10. Seja $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável em $p \in D_f$. Definindo $\rho : D_f \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{R}$ de modo que

$$f(x) = f(p) + f'(p)(x - p) + \rho(x)(x - p),$$

temos que $\lim_{x \rightarrow p} \rho(x) = 0$.

Prova.

Teorema 8.11. (Regra da Cadeia) Se $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : D_g \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são funções deriváveis, com $Im_g \subseteq D_f$, então a função composta $h : D_g \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $h(x) = f(g(x))$ é derivável e

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Sendo $y = f(u)$ e $u = g(x)$, a regra da cadeia nos diz que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx},$$

em que $\frac{dy}{du}$ deve ser calculada em $u = g(x)$.

Prova.

Teorema 8.12. (Derivada de Função Inversa) Seja f uma função inversível e g a função inversa de f . Se f for derivável em $q = g(p)$, com $f'(q) \neq 0$, e se g for contínua em p , então g será derivável em p e

$$g'(p) = \frac{1}{f'(g(p))}.$$

Prova.

8.2 Teoremas de Rolle, do Valor Médio e de Cauchy

Definição 8.13. Sejam $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e $p \in D_f$ um ponto no domínio de f .

(a) Diremos que $f(p)$ é o *valor máximo global* de f , ou que p é um *ponto de máximo global* de f , se $f(x) \leq f(p)$ para todo $x \in D_f$. Diremos que $f(p)$ é o *valor mínimo global* de f , ou que p é um *ponto de mínimo global* de f , se $f(x) \geq f(p)$ para todo $x \in D_f$.

(b) Suponha ainda que $p \in A \subseteq D_f$. Diremos que $f(p)$ é o *valor máximo* de f em A , ou que p é um *ponto de máximo* de f em A , se $f(x) \leq f(p)$ para todo $x \in A$. Diremos que $f(p)$ é o *valor mínimo* de f em A , ou que p é um *ponto de mínimo* de f em A , se $f(x) \geq f(p)$ para todo $x \in A$.

(c) Diremos que $f(p)$ é o *valor máximo local* de f , ou que p é um *ponto de máximo local* de f , se existir $r > 0$ tal que $f(x) \leq f(p)$ para todo $x \in]p - r, p + r[\cap D_f$. Diremos que $f(p)$ é o *valor mínimo local* de f , ou que p é um *ponto de mínimo local* de f , se existir $r > 0$ tal que $f(x) \geq f(p)$ para todo $x \in]p - r, p + r[\cap D_f$.

Definição 8.14. Dada uma função f , diremos que o ponto p é *interior* a D_f se existir um intervalo aberto $I \subset D_f$ tal que $p \in I$.

Teorema 8.15. Seja $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável no ponto interior $p \in D_f$. Se p é ponto de máximo (mínimo) local de f , então $f'(p) = 0$.

Prova. Como p é ponto de máximo local de f , existe $r_1 > 0$ tal que $f(x) \leq f(p)$ para todo $x \in]p - r_1, p + r_1[\cap D_f$. Como p é um interior a D_f , existe $r_2 > 0$ tal que $]p - r_2, p + r_2[\subseteq D_f$. Sendo $r := \min\{r_1, r_2\}$, temos $f(x) \leq f(p)$ para todo $x \in]p - r, p + r[$. Como f é derivável em p , temos que $f'(p) = \lim_{x \rightarrow p^+} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{x \rightarrow p^-} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$. Sendo $p < x < p + r$, temos $\frac{f(x) - f(p)}{x - p} \leq 0$; daí, pela conservação do sinal, $\lim_{x \rightarrow p^+} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \leq 0$. Analogamente, sendo $p - r < x < p$, temos $\frac{f(x) - f(p)}{x - p} \geq 0$; daí, pela conservação do sinal, $\lim_{x \rightarrow p^+} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \geq 0$. Com isso, temos $f'(p) \leq 0$ e $f'(p) \geq 0$, donde, $f'(p) = 0$. O caso em que p é ponto de mínimo local de f segue de forma completamente análoga.

$\subseteq D_f$ e derivável em $]a, b[$.

Teorema 8.16. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua em $[a, b]$ e derivável em $]a, b[$.

- (a) (Rolle) Se $f(a) = f(b)$, então existe $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$.
- (b) (Valor Médio) Existe $c \in]a, b[$ tal que

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a).$$

Prova. (a) Se f for constante em $[a, b]$, então $f'(x) = 0$ para todo $x \in]a, b[$. Suponha, então, que f não seja constante em $[a, b]$. Sendo f contínua em $[a, b]$, pelo Teorema de Weierstrass (7.43), existem $x_1, x_2 \in [a, b]$ tais que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ para todo $x \in [a, b]$. Se fosse $f(x_1) = f(x_2)$, então f seria constante; logo, $f(x_1) \neq f(x_2)$. E como, por hipótese, $f(a) = f(b)$, temos que x_1 ou x_2 estão em $]a, b[$. O $x_i \in]a, b[$ é um ponto de máximo local de f ; daí, pelo Teorema (8.15), $f'(x_i) = 0$. ■

- (b) Defina $S : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$S(x) := f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Observe que o gráfico de S é a reta que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$. Agora, defina $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ por $g(x) := f(x) - S(x)$. Note que g é contínua em $[a, b]$ e derivável em $]a, b[$; daí, pelo Teorema de Rolle, existe $c \in]a, b[$ tal que $g'(c) = 0$. Como

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

temos que

$$g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0,$$

onde $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Teorema 8.17. (Cauchy) Se $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : D_g \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas em $[a, b] \subseteq D_f \cap D_g$ e deriváveis em $]a, b[$, então existe pelo menos um ponto $c \in]a, b[$ tal que

$$[f(b) - f(a)]g'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c).$$

Em particular, se $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in]a, b[$, então

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Prova. Defina $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$h(x) := [f(b) - f(a)]g(x) - [g(b) - g(a)]f(x).$$

É fácil ver que h é contínua em $[a, b]$, derivável em $]a, b[$ e $h(a) = h(b)$. Daí, pelo Teorema de Rolle (8.16), existe $c \in]a, b[$ tal que

$$[f(b) - f(a)]g(c) - [g(b) - g(a)]f(c) = 0,$$

onde

$$[f(b) - f(a)]g'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c).$$

Em particular, se $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in]a, b[$, então

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

pois o Teorema do Valor Médio (8.16) aplicado à função g nos diz que existe $\tilde{c} \in]a, b[$ tal que $g(b) - g(a) = g'(\tilde{c})(b - a)$; como $g'(\tilde{c}) \neq 0$ e $b \neq a$, temos $g(b) - g(a) \neq 0$.

8.3 Gráficos de Funções

Teorema 8.18. Seja $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável no intervalo aberto $I \subset D_f$.

(a) Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$ interior, então f será estritamente crescente em I .

(b) Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in I$ interior, então f será estritamente decrescente em I .

Prova. (a) Provemos que para quaisquer $a, b \in I$ temos $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$. Sejam, então, $a, b \in I$ com $a < b$. Evidentemente, temos que f é contínua em $[a, b]$ e derivável em $]a, b[$; daí, pelo Teorema do Valor Médio (8.16), existe $c \in]a, b[$ tal que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$. Como $f'(c) > 0$ e $b > a$, temos que $f(b) - f(a) > 0$, donde $f(a) < f(b)$. ■

(b) Segue analogamente.

Corolário 8.19. Seja $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável até a 2ª ordem em $]a, b[\subseteq D_f$. Se $f''(x) > 0$ para todo $x \in]a, b[$ e se existe $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$, então f é estritamente decrescente em $]a, c[$ e estritamente crescente em $]c, b[$.

Prova. Se $f''(x) > 0$ para todo $x \in]a, b[$, então f' é estritamente crescente em $]a, b[$. Com isso, $f'(x) < f'(c) = 0$ para todo $x \in]a, c[$ e $f'(x) > f'(c) = 0$ para todo $x \in]c, b[$. Com isso, f é estritamente decrescente em $]a, c[$ e estritamente crescente em $]c, b[$.

Definição 8.20. Seja $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável no intervalo aberto $I \subseteq D_f$.

(a) Se $f(x) > f(p) + f'(p)(x - p)$ para todos $x, p \in I$, com $x \neq p$, diremos que f tem a *concavidade para cima* em I , ou que f é *convexa* em I .

(b) Se $f(x) < f(p) + f'(p)(x - p)$ para todos $x, p \in I$, com $x \neq p$, diremos que f tem a *concavidade para baixo* em I , ou que f é *côncava* em I .

Teorema 8.21. Seja $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável até a 2^a ordem no intervalo aberto $I \subseteq D_f$.

(a) Se $f''(x) > 0$ em I , então f terá a concavidade para cima em I .

(b) Se $f''(x) < 0$ em I , então f terá a concavidade para baixo em I .

Prova. (a) Sendo $p \in I$, provemos que para todo $x \in I$, com $x \neq p$, temos $f(x) > f(p) + f'(p)(x - p)$. Definindo $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ por $g(x) := f(x) - f(p) - f'(p)(x - p)$, basta provar que $g(x) > 0$ para todo $x \in I$, com $x \neq p$. É fácil ver que $g'(x) = f'(x) - f'(p)$. Como $f''(x) > 0$ em I , temos que f' é estritamente crescente em I . Com isso, $g'(x) > 0$ para $x > p$ e $g'(x) < 0$ para $x < p$. Com isso, g é estritamente decrescente em $\{x \in I : x < p\}$ e estritamente crescente em $\{x \in I : x > p\}$. Com isso, sendo $g(p) = 0$, temos $g(x) > 0$ para todo $x \in I$, com $x \neq p$. ■

(b) Segue analogamente.

Definição 8.22. Seja $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em $p \in D_f$. Diremos que p é um *ponto de inflexão* de f se existirem $a, b \in \mathbb{R}$, com $p \in]a, b[\subseteq D_f$, para os quais a concavidade de f em $]a, p[$ é diferente da concavidade de f em $]p, b[$.

Proposição 8.23. (a) Seja $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável até a 3^a ordem no intervalo aberto $]a, b[\subseteq D_f$. Se f''' é contínua em $p \in]a, b[$, $f'''(p) \neq 0$ e $f''(p) = 0$, então p é um ponto de inflexão de f .

(b) Seja $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável até a 2^a ordem no intervalo aberto $I \subseteq D_f$. Se f'' é contínua em $p \in I$ e p é um ponto de inflexão de f , então $f''(p) = 0$.

Prova. (a) Suponha, sem perda de generalidade, que $f'''(p) > 0$. Como f''' é contínua em p , pela conservação do sinal (7.24) existe $r_1 > 0$ tal que $f'''(x) > 0$ para

todo $x \in]p - r_1, p + r_1[$. Por outro lado, existe $r_2 > 0$ tal que $]p - r_2, p + r_2[\subseteq]a, b[$ (de fato, basta tomar $r_2 = \min\{b - p, p - a\}$). Sendo, então, $r := \min\{r_1, r_2\}$, temos que $f'''(x) > 0$ para todo $x \in]p - r, p + r[\subseteq]a, b[$. Com isso, f'' é estritamente crescente em $]p - r, p + r[$, e como $f''(p) = 0$, só pode ser $f''(x) < 0$ para todo $x \in]p - r, p + r[$ e $f''(x) > 0$ para todo $x \in]p, p + r[$. Logo, p é um ponto de inflexão de f .

(b) Se fosse $f''(p) \neq 0$, como f'' é contínua em p , pela conservação do sinal existiria $r > 0$ tal que $f''(p)$ e $f''(x)$ teriam o mesmo sinal em $]p - r, p + r[$, donde p não seria ponto de inflexão de f , absurdo. Logo, $f''(p) = 0$.

8.4 Regras de L'Hospital

Teorema 8.24. (Regra de L'Hospital para indeterminações do tipo 0/0)

(a) Sejam $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : D_g \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções para as quais existe $r \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que f e g são deriváveis e $g'(x) \neq 0$ em

- $I :=]p, p + r[\subseteq D_f \cap D_g$ (caso $x \rightarrow p^+$); ou
- $I :=]p - r, p[\subseteq D_f \cap D_g$ (caso $x \rightarrow p^-$); ou
- $I :=]p - r, p + r[\setminus \{p\} \subseteq D_f \cap D_g$ (caso $x \rightarrow p$).

Se $\lim f(x) = \lim g(x) = 0$ e $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, então

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

(b) Sejam $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : D_g \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções para as quais existe $r \in \mathbb{R}$ tal que f e g são deriváveis e $g'(x) \neq 0$ em

- $I :=]r, +\infty[\subseteq D_f \cap D_g$ (caso $x \rightarrow +\infty$); ou
- $I :=]-\infty, r[\subseteq D_f \cap D_g$ (caso $x \rightarrow -\infty$).

Se $\lim f(x) = \lim g(x) = 0$ e $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, então

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Prova. (a) Suponha $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R}$. Façamos o caso $x \rightarrow p^+$, isto é,

$$\lim_{x \rightarrow p^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow p^+} g(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow p^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L.$$

Defina $F, G : I \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$F(x) := \begin{cases} f(x) & x \in I \\ 0 & x = p \end{cases} \quad \text{e} \quad G(x) := \begin{cases} g(x) & x \in I \\ 0 & x = p \end{cases}$$

Afirmamos que $G'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$ e $G(p) = 0$ resultam em $G(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. De fato, se não fosse $G(x) \neq 0$ para todo $x \in I$, então existiria $a \in I$ com $G(a) = 0$; pelo Teorema do Valor Médio, existiria $b \in]p, a[$ tal que

$$\underbrace{G(a) - G(p)}_{=0} = G'(b) \underbrace{(a - p)}_{\neq 0},$$

onde $G'(b) = 0$, contrariando a hipótese de ser $G'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Agora, sendo $\lim_{x \rightarrow p^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, para todo $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existe $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$, com $\delta < r$, tal que

$$p < x < p + \delta \Rightarrow \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - L \right| < \epsilon,$$

isto é, $\left| \frac{F'(x)}{G'(x)} - L \right| < \epsilon$. Por outro lado, o Teorema de Cauchy aplicado às funções F e G no intervalo $[p, x]$ nos diz que existe $q \in]p, x[$ tal que

$$\frac{F(x) - F(p)}{G(x) - G(p)} = \frac{F'(q)}{G'(q)};$$

daí,

$$\left| \frac{F(x)}{G(x)} - L \right| = \left| \frac{F(x) - F(p)}{G(x) - G(p)} - L \right| = \left| \frac{F'(q)}{G'(q)} - L \right| < \epsilon,$$

pois $p < q < x < p + \delta$. Com isso, $\lim_{x \rightarrow p^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$, como queríamos provar.

(b)

Teorema 8.25. (Regra de L'Hospital para indeterminações do tipo ∞/∞)

(a) Sejam $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : D_g \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções para as quais existe $r \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que f e g são deriváveis e $g'(x) \neq 0$ em

- $I :=]p, p + r[\subseteq D_f \cap D_g$ (caso $x \rightarrow p^+$); ou
- $I :=]p - r, p[\subseteq D_f \cap D_g$ (caso $x \rightarrow p^-$); ou
- $I :=]p - r, p + r[\setminus \{p\} \subseteq D_f \cap D_g$ (caso $x \rightarrow p$).

Se $\lim f(x) = \lim g(x) = \pm\infty$ e $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, então

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

(b) Sejam $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : D_g \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções para as quais existe $r \in \mathbb{R}$ tal que f e g são deriváveis e $g'(x) \neq 0$ em

- $I :=]r, +\infty[\subseteq D_f \cap D_g$ (caso $x \rightarrow +\infty$); ou
- $I :=]-\infty, r[\subseteq D_f \cap D_g$ (caso $x \rightarrow -\infty$).

Se $\lim f(x) = \lim g(x) = \pm\infty$ e $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, então

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Prova.

8.5 Trigonometria, parte II

Teorema 8.26. Existe um menor real $a > 0$ tal que $\cos a = 0$ e $\sin a = 1$.

Prova.

Definição 8.27. Definimos $\pi := 2a$, em que a é o menor real a que se refere o Teorema (8.26). Assim, $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ e $\sin \frac{\pi}{2} = 1$.

Teorema 8.28. As funções sen e cos são periódicas com período 2π , isto é, $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ e $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

8.6 Polinômio de Taylor

Definição 8.29. Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função n vezes diferenciável e $x_0 \in I$ um ponto de I . O polinômio

$$P_n(x) := \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

chama-se *polinômio de Taylor de ordem n de f centrado, ou em volta, de x_0* .

Proposição 8.30. Nas condições da definição (8.29), $P_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$ para todo $k \leq n$.

Prova.

Capítulo 9

Integrais

9.1 A integral de Darboux

Definição 9.1.

- (a) Uma *partição* de um intervalo $[a, b]$ é um conjunto finito $P := \{x_0, \dots, x_n\}$ tal que $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Isso é denotado por

$$P : a = x_0 < \dots < x_n = b.$$

O conjunto de todas as partições de $[a, b]$ é denotado por $\mathcal{P}[a, b]$.

- (b) A *amplitude* do i -ésimo intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, para cada $i \in [n]$, é definida como $\Delta x_i := x_i - x_{i-1}$.
- (c) Um *refinamento* de uma partição $P \in \mathcal{P}[a, b]$ é uma partição $Q \in \mathcal{P}[a, b]$ tal que $P \subseteq Q$.

Definição 9.2. Sejam $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada e $P : a = x_0 < \dots < x_n = b$ uma partição de $[a, b]$.

- (a) A *soma superior* de f com relação à P é definida como

$$U(f, P) := \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i,$$

onde $M_i := \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f$ para cada $i \in [n]$.

- (b) A *soma inferior* de f com relação à P é definida como

$$L(f, P) := \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i,$$

onde $m_i := \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f$ para cada $i \in [n]$.

Proposição 9.3. Sejam $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada e $P : a = x_0 < \dots < x_n = b$ uma partição de $[a, b]$.

- (a) Tem-se $L(f, P) \leq U(f, P)$.
- (b) Se Q é um refinamento de P , então $U(f, Q) \leq U(f, P)$ e $L(f, Q) \geq L(f, P)$.
- (c) Se Q é uma qualquer outra partição de $[a, b]$, então $L(f, P) \leq U(f, Q)$.

Prova.

- (a) Para todo $i \in [n]$ temos $m_i \leq M_i$ e $\Delta x_i > 0$. Logo $m_i \Delta x_i \leq M_i \Delta x_i$ para todo $i \in [n]$. Tomando a soma, temos que

$$\sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i,$$

de modo que $L(f, P) \leq U(f, P)$, como havíamos afirmado. ■

- (b) Façamos indução em $|Q \setminus P|$. Se $|Q \setminus P| = 1$, então Q só tem um ponto a mais que P , isto é, existe $\bar{x} \in Q$ tal que $\bar{x} \notin P$. Em particular, existe um único índice $j \in [n]$ tal que $x_{j-1} < \bar{x} < x_j$. Com isso, tomindo

$$M'_j := \sup_{[x_{j-1}, \bar{x}]} f \quad \text{e} \quad M''_j := \sup_{[\bar{x}, x_j]} f,$$

temos $M'_j, M''_j \leq M_j$, donde

$$\begin{aligned} U(f, Q) &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n M_i \Delta x_i + M'_j(\bar{x} - x_{j-1}) + M''_j(x_j - \bar{x}) \\ &\leq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n M_i \Delta x_i + M_j(\bar{x} - x_{j-1}) + M_j(x_j - \bar{x}) \\ &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n M_i \Delta x_i + M_j(x_j - x_{j-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i = U(f, P). \end{aligned}$$

Isso completa a base da indução. Agora, suponha que se $|Q \setminus P| = k > 1$, então $U(f, Q) \leq U(f, P)$. Tomando Q' com só um ponto a mais que Q ,

temos que $U(f, Q') \leq U(f, Q)$, de modo que se $|Q' \setminus P| = k + 1$ então $U(f, Q') \leq U(f, P)$. Isso completa o passo induutivo e, portanto, completa a prova. A prova de que $L(f, P') \geq L(f, P)$ segue de modo completamente análogo. ■

- (c) Para quaisquer partições P e Q de $[a, b]$, sempre existe um refinamento comum a ambas. De fato, basta tomar a união $P \cup Q$ e reindexar os índices conforme a definição. Assim, pelos itens anteriores,

$$L(f, P) \leq L(f, P \cup Q) \leq U(f, P \cup Q) \leq U(f, Q),$$

como havíamos afirmado. ■

Definição 9.4. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada.

- (a) A *integral inferior* de f é definida como

$$\int_a^b f(x) dx := \sup_{P \in \mathcal{P}[a,b]} L(f, P).$$

- (b) A *integral superior* de f é definida como

$$\int_a^b f(x) dx := \inf_{P \in \mathcal{P}[a,b]} U(f, P).$$

Observação 9.5. A proposição (9.3) garante que $\{L(f, P) \in \mathbb{R} : P \in \mathcal{P}[a, b]\}$ é limitado superiormente; logo, pela propriedade do supremo, existe $\sup_{P \in \mathcal{P}[a,b]} L(f, P)$.

Analogamente, existe $\inf_{P \in \mathcal{P}[a,b]} U(f, P)$. Isso garante que as definições de integral superior e inferior são consistentes (estão bem definidas).

Proposição 9.6. Se uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é limitada, então

$$\int_a^b f(x) dx \leq \bar{\int}_a^b f(x) dx.$$

Prova. Vimos que $L(f, P) \leq U(f, Q)$ para quaisquer partições $P, Q \in \mathcal{P}[a, b]$. Fixando Q , temos que $U(f, Q)$ é uma cota superior de $L(f, P)$, para qualquer $P \in \mathcal{P}[a, b]$, de modo que

$$\int_a^b f(x) dx \leq U(f, Q).$$

Com isso, $\int_a^b f(x) dx$ é uma cota inferior de $U(f, Q)$, para qualquer $Q \in \mathcal{P}[a, b]$, de modo que

$$\int_a^b f(x) dx \leq \bar{\int}_a^b f(x) dx,$$

como havíamos afirmado. ■

Definição 9.7. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada.

(a) f é integrável em $[a, b]$ segundo Darboux se

$$\underline{\int}_a^b f(x) dx = \bar{\int}_a^b f(x) dx.$$

(b) Seja f Darboux-integrável em $[a, b]$. A integral de Darboux de f em $[a, b]$ é definida como

$$\int_a^b f(x) dx := \underline{\int}_a^b f(x) dx = \bar{\int}_a^b f(x) dx.$$

(c) Se f está definida em $c \in \mathbb{R}$, estendemos a definição dizendo que f é integrável em c colocando

$$\int_c^c f(x) dx = 0.$$

(d) Se f é integrável, estendemos a definição colocando

$$\int_b^a f(x) dx := - \int_a^b f(x) dx.$$

Observação 9.8. Decorre das definições que, sendo $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrável, vale

$$L(f, P) \leq \int_a^b f(x) dx = \underline{\int}_a^b f(x) dx = \bar{\int}_a^b f(x) dx \leq U(f, P),$$

para qualquer $P \in \mathcal{P}[a, b]$.

Teorema 9.9 (Critério de integrabilidade). Uma função limitada $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável em $[a, b]$ se, e somente se, para todo $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existe $P \in \mathcal{P}[a, b]$ tal que $U(f, P) - L(f, P) < \epsilon$.

Prova. (a) (\Rightarrow)¹ Sendo f integrável, para todo $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existem partições $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$ tais que

$$S(P_2, f) - \int_a^b f(x) dx < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{e} \quad \int_a^b f(x) dx - s(P_1, f) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Com isso, sendo P uma partição comum à P_1 e P_2 , temos que

$$S^+(f, P) \leq S(P_2, f) < \int_a^b f(x) dx + \frac{\epsilon}{2} < s(P_1, f) + \epsilon \leq S^-(f, P) + \epsilon,$$

de modo que $S^+(f, P) - S^-(f, P) < \epsilon$.

(\Leftarrow) Agora, suponha que para todo $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existe uma partição P de $[a, b]$ tal que $S^+(f, P) - S^-(f, P) < \epsilon$. Como

$$S^-(f, P) \leq \underline{\int}_a^b f(x) dx \leq \bar{\int}_a^b f(x) dx \leq S^+(f, P),$$

temos que $0 \leq \bar{\int}_a^b f(x) dx - \underline{\int}_a^b f(x) dx \leq S^+(f, P) - S^-(f, P) < \epsilon$, de modo que $\bar{\int}_a^b f(x) dx - \underline{\int}_a^b f(x) dx < \epsilon$ para todo $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, donde $\bar{\int}_a^b f(x) dx = \underline{\int}_a^b f(x) dx$. Assim, f é integrável.

9.1.1 Estendendo a definição

Proposição 9.10. (a) Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função tal que $f(x) = 0$ para todo $x \in [a, b] \setminus \{c\}$, onde $c \in [a, b]$ e $f(c) \neq 0$, então f é integrável em $[a, b]$ e

$$\int_a^b f(x) dx = 0.$$

(b) Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função tal que $f(x) = 0$ para todo $x \in [a, b] \setminus \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$, onde $c_i \in [a, b]$ e $f(c_i) \neq 0$ para todo $i \in [n]$, então f é integrável em $[a, b]$ e

$$\int_a^b f(x) dx = 0.$$

¹Esta prova depende de um resultado sobre supremos e ínfimos.

(c) Sejam $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funções tais que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in [a, b] \setminus \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$, onde $c_i \in [a, b]$ e $f(c_i) \neq g(c_i)$ para todo $i \in [n]$. Se f é integrável, então g é integrável e

$$\int_a^b g(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Prova. Táboas, observação 4.1.16, página 171.

Definição 9.11. Seja $f : [a, b] \setminus \{c_1, c_2, \dots, c_n\} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função, $c_i \in [a, b]$ para todo $i \in [n]$. Diremos que f é integrável em $[a, b]$ se qualquer extensão g de f a $[a, b]$ o for, pondo

$$\int_a^b f(x) dx := \int_a^b g(x) dx.$$

9.2 Resultados

Teorema 9.12. (a) Toda função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua é integrável.

(b) Se a função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é limitada e tem apenas um número finito de pontos de descontinuidade, então f é integrável.

Prova. (a) Pelo teorema da limitação (7.42), f é limitada. Pelo teorema (7.36), f é uniformemente contínua, de modo que para todo $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existe $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{b - a}.$$

Escolha uma partição $P : a = x_0 < \dots < x_n = b$ tal que $\Delta x_i < \delta$ para todo $i \in [n]$. Uma tal partição existe: tomando $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \frac{b-a}{\delta}$, é fácil ver que definindo $x_i = a + i \cdot \frac{b-a}{n}$ para cada $i \in [n]$ temos $\Delta x_i < \delta$ para cada $i \in [n]$. Agora, f é contínua em cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, de modo que, pelo teorema de Weierstrass (7.43), existem $a_i, b_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tais que $f(a_i) = m_i$ e $f(b_i) = M_i$, onde

$$M_i := \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x);$$

$$m_i := \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x).$$

Como $|b_i - a_i| \leq \Delta x_i < \delta$ para todo $i \in [n]$, pela continuidade uniforme de f

temos $M_i - m_i = |f(b_i) - f(a_i)| < \frac{\epsilon}{b-a}$ para todo $i \in [n]$, de modo que

$$S^+(f, P) - S_-(f, P) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta x_i < \frac{\epsilon}{b-a} \sum_{i=1}^n \Delta x_i = \epsilon.$$

Assim, pelo critério de integrabilidade, f é integrável. ■

(b) Como f é limitada, existe $M \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in [a, b]$. Se f tem, digamos $p \in \mathbb{N}$ pontos de descontinuidade, sejam eles $x_j \in [a, b]$, para cada $j \in [p]$. Agora, seja $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ arbitrário. Para cada $j \in [p]$, tome $[c_j, d_j]$ centrado em x_j tal que $[c_i, d_i] \cap [c_j, d_j] = \emptyset$ se $i \neq j$ e $\sum_{j=1}^p (d_j - c_j) < \epsilon$. Tomando $[a_j, b_j] = [c_j, d_j] \cap [a, b]$ para cada $j \in [p]$, sendo $A := [a, b] \setminus \bigcup_{j=1}^p [a_j, b_j]$ temos que f é uniformemente contínua em A .

Teorema 9.13. (a) Toda função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monótona é integrável.

(b) Se a função $f : [a, b] \rightarrow [m, M]$ é integrável e a função $g : [m, M] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, então a função $g \circ f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável.

Prova. (a) Suponha, num primeiro caso, que f seja crescente. Com isso, $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ para todo $x \in [a, b]$ e f é limitada em $[a, b]$. Para todo $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existe $n = n(\epsilon) \in \mathbb{N}$ suficientemente grande de modo que

$$n > \frac{(b-a)[f(b) - f(a)]}{\epsilon}.$$

Agora, a partição $P : a = x_0 < \dots < x_n = b$ definida por $x_i = a + i \cdot \frac{b-a}{n}$ para todo $i \in [n] \cup \{0\}$ é tal que $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$, $M_i = f(x_i)$ e $m_i = f(x_{i-1})$ (pois f é crescente), donde

$$\begin{aligned} S^+(f, P) - S_-(f, P) &= \sum_{i=1}^n \left[M_i \frac{b-a}{n} \right] - \sum_{i=1}^n \left[m_i \frac{b-a}{n} \right] \\ &= \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^n [f(x_i) - f(x_{i-1})] \\ &= \frac{b-a}{n} [f(b) - f(a)] \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

Assim, pelo critério de integrabilidade, f é integrável. No caso em que f é decrescente, a demonstração é análoga. ■

(b)

Teorema 9.14. Se $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ são funções integráveis em $[a, b]$, então

- (a) $f + g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável em $[a, b]$ e

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

- (b) $c \cdot f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (onde $c \in \mathbb{R}$ é uma constante) é integrável em $[a, b]$ e

$$\int_a^b [c \cdot f(x)] dx = c \cdot \int_a^b f(x) dx.$$

- (c) $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$ sempre que $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$.

- (d) $f \cdot g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável em $[a, b]$.

- (e) $|f| : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável em $[a, b]$ e

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Prova. Táboas, página 173.

Proposição 9.15. Se $I \subseteq \mathbb{R}$ é um intervalo fechado e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função integrável em I , então

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

para quaisquer $a, b, c \in I$.

Prova.

9.3 O Teorema Fundamental do Cálculo

Teorema 9.16. Sejam $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo e $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas.

- (a) Se $f'(x) = 0$ para todo $x \in I$ interior, então existe uma constante $C \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = C$ para todo $x \in I$.
- (b) Se $f'(x) = g'(x)$ para todo $x \in I$ interior, então existe uma constante $C \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = g(x) + C$ para todo $x \in I$.

Prova.

Definição 9.17. Seja $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo. Diremos que a função $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma *primitiva* da função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ se $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$.

Teorema 9.18. (Fundamental do Cálculo, parte I) Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável.

(a) A função $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) := \int_a^x f(t) dt$$

é uniformemente contínua em $[a, b]$.

(b) Se f é contínua em $x_0 \in [a, b]$, então F é derivável em x_0 e $F'(x_0) = f(x_0)$.

Prova.

(a) Precisamos provar que para todo $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existe $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |F(x) - F(y)| < \epsilon$$

para quaisquer $x, y \in [a, b]$. Como f é integrável, f é limitada, de modo que existe $M \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in [a, b]$. Como, para quaisquer $x, y \in [a, b]$, temos

$$|F(x) - F(y)| = \left| \int_x^y f(t) dt \right| \leq |M(y - x)| = M|x - y|,$$

basta tomar $\delta \leq \frac{\epsilon}{M}$. De fato, se $\delta = \frac{\epsilon}{M}$ e $x, y \in [a, b]$ são tais que $|x - y| < \frac{\epsilon}{M}$, então $|F(x) - F(y)| \leq M|x - y| < M \cdot \frac{\epsilon}{M} = \epsilon$, como queríamos.

(b) Para provar que F é derivável em x_0 e $F'(x_0) = f(x_0)$, basta provar que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right] = 0.$$

Mais precisamente, basta provar que para todo $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existe $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que

$$0 < |h| < \delta \Rightarrow \left| \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| < \epsilon$$

para todo $h \in \mathbb{R}_{\neq 0}$ tal que $x_0 + h \in [a, b]$. Da continuidade de f em x_0 , para todo $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existe $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que

$$|t - x_0| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(x_0)| < \epsilon$$

para todo $t \in [a, b]$. Veja que todo $h \in \mathbb{R}_{\neq 0}$ com $0 < |h| < \delta$ e $x_0 + h \in [a, b]$ é tal que $|t - x_0| \leq |h| < \delta$ para todo t no intervalo definido por x_0 e $x_0 + h$ (especificamente, $t \in [x_0, x_0 + h]$ se $h > 0$ ou $t \in [x_0 + h, x_0]$ se $h < 0$), de modo que $|f(t) - f(x_0)| < \epsilon$ para todo t no intervalo definido por x_0 e $x_0 + h$. Com isso,

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| &= \left| \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} [f(t) - f(x_0)] dt \right| \\ &\leq \frac{1}{|h|} \left| \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)| dt \right| \\ &< \frac{1}{|h|} \left| \int_{x_0}^{x_0+h} \epsilon dt \right| = \frac{1}{|h|} \epsilon |h| = \epsilon, \end{aligned}$$

o que prova que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right] = 0,$$

como havíamos afirmado. ■

(a)

(b)

Corolário 9.19. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a, b]$.

(a) A função $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) := \int_a^x f(t) dt$$

é uma primitiva de f em $[a, b]$.

(b) Se $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é qualquer outra primitiva de f , então

$$G(x) = G(a) + \int_a^x f(t) dt$$

para todo $x \in [a, b]$. Particularmente para $x = b$, temos

$$\int_a^b f(t) dt = G(b) - G(a).$$

Prova.

Teorema 9.20 (Fundamental do Cálculo, parte II). Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função integrável e $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma primitiva qualquer de f , então

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(t) dt$$

para todo $x \in [a, b]$. Particularmente para $x = b$, temos

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a).$$

Prova.

9.4 A Integral de Riemann

Definição 9.21. Seja $P : a < x_0 < \dots < x_n = b$ uma partição do intervalo $[a, b]$.

- (a) Definimos $\max \Delta x_i$ como a *norma* de P , a qual denotaremos por $\|P\|$, isto é, $\|P\| := \max \Delta x_i$.
- (b) (Partição marcada)
- (c) (Soma de Riemann)

Definição 9.22. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Diremos que a soma de Riemann $S(f, P, \xi)$ tem limite $L \in \mathbb{R}$ quando $\|P\|$ tende a 0, denotando isso por

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} S(f, P, \xi) = L,$$

se para todo $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existir $\delta = \delta(\epsilon) \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que

$$|S(f, P, \xi) - L| < \epsilon$$

para toda partição marcada (P, ξ) de $[a, b]$ com $\|P\| < \delta$.

Proposição 9.23. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. O limite das somas de Riemann, quando existe, é único, isto é, se

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} S(f, P, \xi) = L_1 \quad \text{e} \quad \lim_{\|P\| \rightarrow 0} S(f, P, \xi) = L_2,$$

então $L_1 = L_2$.

Prova.

Definição 9.24. Diremos que uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é *integrável em $[a, b]$ segundo Riemann* se $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} S(f, P, \xi)$ existir. Nesse caso, esse número real será chamado de *integral de f em $[a, b]$ segundo Riemann*, o qual será denotado por

$$\int_a^b f(x) dx,$$

isto é,

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{\|P\| \rightarrow 0} S(f, P, \xi).$$

Proposição 9.25. Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função integrável segundo Riemann, então f é limitada em $[a, b]$.

Prova.

Teorema 9.26. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função.

- (a) f é integrável segundo Riemann se, e somente se, é integrável segundo Darboux.
- (b) Sendo f integrável, as integrais de Riemann e Darboux coincidem.

Prova.

9.5 Integrais Impróprias

Definição 9.27. Seja

Capítulo 10

Demonstrações

Prova. (a) Consideremos o caso em que $x \rightarrow p$. Como $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L_2$, temos por definição que para todo $\epsilon > 0$ existem $\delta_1, \delta_2 > 0$ para os quais

$$0 < |x - p| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L_1| < \frac{\epsilon}{2};$$
$$0 < |x - p| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - L_2| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Tomando $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$, temos que para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - L_1| + |f(x) - L_2| < \epsilon.$$

Com isso, temos que, para todo $\epsilon > 0$,

$$\begin{aligned} |L_1 - L_2| &= |L_1 - f(x) + f(x) - L_2| \\ &\leq |L_1 - f(x)| + |f(x) - L_2| \\ &= |f(x) - L_1| + |f(x) - L_2| \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

Daí, $L_1 = L_2$. ■

(b) ■

(c) ■

(d) (Verificar) Como, por hipótese, $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow p} h(x)$, temos

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta_1 > 0 : 0 < |x - p| < \delta_1 \Rightarrow L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon;$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta_2 > 0 : 0 < |x - p| < \delta_1 \Rightarrow L - \epsilon < h(x) < L + \epsilon.$$

Pois tome $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, r\}$; daí, vem

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < |x - p| < \delta \Rightarrow L - \epsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < L + \epsilon,$$

e então

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < |x - p| < \delta \Rightarrow L - \epsilon < g(x) < L + \epsilon,$$

isto é, $\lim_{x \rightarrow p} g(x) = L$.

Prova. (a) (Verificar) Consideremos o caso em que $x \rightarrow p$. Precisamos provar que

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < |x - p| < \delta \Rightarrow \lim_{u \rightarrow a} g(u) - \epsilon < g[f(x)] < \lim_{u \rightarrow a} g(u) + \epsilon.$$

Como $\lim_{u \rightarrow a} g(u) = g(a)$, temos que provar que

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < |x - p| < \delta \Rightarrow g(a) - \epsilon < g[f(x)] < g(a) + \epsilon. \quad (1)$$

Por definição,

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow a} g(u) = g(a) \Leftrightarrow & \forall \epsilon > 0, \exists \delta_1 > 0 : \\ & a - \delta_1 < u < a + \delta_1 \Rightarrow g(a) - \epsilon < g(u) < g(a) + \epsilon, \end{aligned}$$

sendo esta última parte equivalente a

$$a - \delta_1 < f(x) < a + \delta_1 \Rightarrow g(a) - \epsilon < g[f(x)] < g(a) + \epsilon. \quad (2)$$

Como, por hipótese, $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = a$, temos que

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < |x - p| < \delta \Rightarrow a - \epsilon < f(x) < a + \epsilon. \quad (3)$$

Para $\epsilon = \delta_1$ em (3), existe um $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - p| < \delta \Rightarrow a - \delta_1 < f(x) < a + \delta_1. \quad (4)$$

Daí, (4), com (2), resulta que

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < |x - p| < \delta \Rightarrow g(a) - \epsilon < g[f(x)] < g(a) + \epsilon,$$

como queríamos provar. ■

(b) (Verificar) Precisamos provar que

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < |x - p| < \delta \Rightarrow \left| g[f(x)] - \lim_{u \rightarrow a} g(u) \right| < \epsilon,$$

isto é,

$$0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |g[f(x)] - L| < \epsilon.$$

Bem, por definição,

$$\lim_{u \rightarrow a} g(u) = g(a) \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta_1 > 0 : 0 < |u - a| < \delta_1 \Rightarrow |g(u) - L| < \epsilon.$$

Lembrando que $u := f(x)$, temos então

$$0 < |f(x) - a| < \delta_1 \Rightarrow |g[f(x)] - L| < \epsilon.$$

Por outro lado,

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = a \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta_2 > 0 : 0 < |x - p| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - a| < \epsilon,$$

e então, tomando $\epsilon = \delta_1$, $0 < |x - p| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - a| < \delta_1$.

Pois tome $\delta = \{\delta_2, r\}$; teremos $0 < |x - p| < \delta \Rightarrow 0 < |f(x) - a| < \delta_1$.

Prova.

Um *designador* é uma expressão que é um termo ou uma fórmula. Como se vê na definição de termo e fórmula, todo designador tem a forma $uv_1 \dots v_n$, onde u é um símbolo, v_1, \dots, v_n são designadores, e n é um número natural determinado por u . Por exemplo, se u é uma variável, então $n = 0$; se u é um símbolo funcional k -ário, então $n = k$; se u é \exists , então $n = 2$. Chamamos n de *índice* de u .

Dizemos que duas expressões são *compatíveis* se uma delas pode ser obtida adicionando alguma expressão (possivelmente a expressão vazia) ao final da outra.

- Se uv e $u'v'$ são compatíveis, então u e u' são compatíveis;
- se uv e uv' são compatíveis, então v e v' são compatíveis.

Lema. Seja n um natural fixo. Se u_1, \dots, u_n e u'_1, \dots, u'_n são designadores, e $u_1 \dots u_n$ e $u'_1 \dots u'_n$ são compatíveis, então u'_i é u_i , para $i = 1, \dots, n$.

Prova. Façamos indução no comprimento de $u_1 \dots u_n$, isto é, no número de símbolos totais dessa expressão. Sendo $|u_1 \dots u_n| = L$, provemos que se o resultado vale para toda sequência de designadores de comprimento menor que L , então vale para as sequências de designadores de comprimento L . Escrevendo u_1 como $vv_1 \dots v_k$, onde v é um símbolo e v_1, \dots, v_k são designadores, vemos que u'_1 é da forma $vv'_1 \dots v'_k$, onde v'_1, \dots, v'_k são designadores. Agora, como u_1 é compatível com u'_1 (isso segue do primeiro bullet point, fazendo u ser u_1 , v ser $u_2 \dots u_n$, u' ser u'_1 e v' ser $u'_2 \dots u'_n$), temos que $vv_1 \dots v_k$ é compatível com $vv'_1 \dots v'_k$, de modo que $v_1 \dots v_k$ é compatível com $v'_1 \dots v'_k$ (isso segue do segundo bullet point). Como, evidentemente, $|v_1 \dots v_k| < L$, pela hipótese de indução concluímos que v_i é v'_i para cada $i = 1, \dots, k$. Com isso, temos que u_1 é u'_1 , de modo que $u_2 \dots u_n$ é compatível com $u'_2 \dots u'_n$ (pela segunda observação), e como $|u_2 \dots u_n| < L$, pela hipótese de indução concluímos que u_i é u'_i para $i = 2, \dots, n$. Isso nos dá a tese de indução, já que já sabemos que u_1 é u'_1 .

Prova. Façamos indução forte no comprimento de $u_1 \dots u_n$, isto é, no número de símbolos totais dessa expressão. Sendo $|u_1 \dots u_n| = L$, provemos que se o resultado vale para toda sequência de designadores de comprimento menor que L , então vale para as sequências de designadores de comprimento L . Escrevendo u_1 como $vv_1 \dots v_k$, onde v é um símbolo e v_1, \dots, v_k são designadores, vemos que u'_1 é da forma $vv'_1 \dots v'_k$, onde v'_1, \dots, v'_k são designadores. Agora, como u_1 é compatível com u'_1 (isso segue da primeira observação “se uv e $u'v'$ são compatíveis, então u e u' são compatíveis”, fazendo u ser u_1 , v ser $u_2 \dots u_n$, u' ser u'_1 e v' ser $u'_2 \dots u'_n$), temos que $vv_1 \dots v_k$ é compatível com $vv'_1 \dots v'_k$, de modo que $v_1 \dots v_k$ é compatível com $v'_1 \dots v'_k$ (isso segue da segunda observação “se uv e uv' são compatíveis, então v e v' são compatíveis”). Como, evidentemente, $|v_1 \dots v_k| < L$, pela hipótese de indução concluímos que v_i é v'_i para cada

$i = 1, \dots, k$. Com isso, temos que \mathbf{u}_1 é \mathbf{u}'_1 , de modo que $\mathbf{u}_2 \dots \mathbf{u}_n$ é compatível com $\mathbf{u}'_2 \dots \mathbf{u}'_n$ (pela segunda observação), e como $|\mathbf{u}_2 \dots \mathbf{u}_n| < L$, pela hipótese de indução concluímos que \mathbf{u}_i é \mathbf{u}'_i para $i = 2, \dots, n$. Isso nos dá a tese de indução, já que já sabemos que \mathbf{u}_1 é \mathbf{u}'_1 .

Consideremos um conjunto enumerável correspondente aos símbolos do alfabeto e X o conjunto de todas as sequências finitas de símbolos. Seja Z o conjunto de todos os subconjuntos Y de X tais que

- as variáveis proposicionais pertencem a Y ;
- se A pertence a Y , então $(\neg A)$ pertence a Y ;
- se A e B pertencem a Y , então $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$ e $(A \leftrightarrow B)$ pertencem a Y .

Teorema 10.1. Suponha que uma propriedade vale para toda fórmula atômica e que, se vale para as fórmulas A e B , também vale para $(\neg A)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$ e $(A \leftrightarrow B)$. Então essa propriedade vale para todas as fórmulas da lógica proposicional.

Prova. Tomando F a interseção de Z , temos que F satisfaz as condições acima (isto é, pertence à família Z) e é o menor conjunto (na ordem da inclusão) que pertence a Z . Isto é, se $Y \in Z$, então $F \subset Y$. Segue facilmente, daí, o teorema. Deixamos os detalhes ao leitor.

Parte IV

Álgebra Linear

Capítulo 11

Matrizes e Sistemas Lineares

11.1 Definições Iniciais e Operações Matriciais

Definição 11.1. (a) Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ é uma função $A : \{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada par (i, j) , com $i \in [m]$ e $j \in [n]$, um elemento $a_{ij} \in \mathbb{R}$. A representação canônica de uma matriz é uma tabela com m linhas e n colunas

$$A := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Dizemos que a matriz A definida acima tem *tamanho*, ou *tipo*, $m \times n$ (lê-se m por n). Dizemos que a_{ij} , ou $[A]_{ij}$, é o *elemento*, ou a *entrada*, de posição i, j . O conjunto de todas as matrizes de tamanho $m \times n$ com entradas reais será denotado por $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$.

(b) Duas matrizes são ditas *iguais* se elas são do mesmo tipo e se os elementos correspondentes forem iguais. Mais especificamente, as matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{p \times q}$ são iguais se $m = p$, $n = q$ e $a_{ij} = b_{ij}$ para todos $i \in [m]$ e $j \in [n]$.

Definição 11.2. Dada uma matriz $A := (a_{ij})_{m \times n}$, definimos

$$L_i(A) := [a_{i1} \ a_{i2} \ \cdots \ a_{in}]$$

como a i -ésima linha da matriz A , com $i \in [m]$. Definimos, ainda,

$$C_j(A) := \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

como a j -ésima coluna da matriz A , com $j \in [n]$.

Operações Matriciais

Definição 11.3. A *soma*, ou *adição*, de duas matrizes do mesmo tipo $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$ é definida como a matriz $C = (c_{ij})_{m \times n}$ em que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ para todos $i \in [m]$ e $j \in [n]$. Denotamos isso com $C = A + B$.

Proposição 11.4. Para quaisquer matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{m \times n}$ e $C = (c_{ij})_{m \times n}$, valem

- (a) a associatividade da adição, isto é, $A + (B + C) = (A + B) + C$;
- (b) a comutatividade da adição, isto é, $A + B = B + A$;
- (c) a existência de um elemento neutro, isto é, $A + 0 = A$;
- (d) a existência de um oposto aditivo, isto é, $A + (-A) = 0$.

Prova.

Definição 11.5. A multiplicação de uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ por um *escalar* α é definida como a matriz $B = (b_{ij})_{m \times n}$ em que $b_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$ para todos $i \in [m]$ e $j \in [n]$. Denotamos isso com $B = \alpha \cdot A = \alpha A$.

Proposição 11.6. Para quaisquer matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$ e escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, temos que

- (a) $\alpha \cdot (\beta \cdot A) = (\alpha \cdot \beta) \cdot A$;
- (b) $\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$;
- (c) $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$;
- (d) $1 \cdot A = A$.

Prova.

Definição 11.7. (a) O *produto*, ou *multiplicação*, de duas matrizes, em que o número de colunas da primeira matriz é igual ao número de linhas da segunda,

$A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{n \times p}$, é definido como a matriz $C = (c_{ij})_{m \times p}$ em que

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj},$$

para todos $i \in [m]$ e $j \in [p]$. Denotamos isso por $C = A \cdot B = AB$.

(b) O produto de duas matrizes, em que o número de colunas da primeira matriz é igual ao número de linhas da segunda, $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{jk})_{n \times p}$ também pode ser definido como a matriz $C = (c_{ik})_{m \times p}$ em que

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk},$$

para todos $i \in [m]$, $k \in [p]$ e $j \in [n]$. Essa definição pode ser útil para evitar confusões com os índices.

Proposição 11.8. Para quaisquer matrizes A , B e C , de tamanhos compatíveis, e escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, valem

- (a)** a associatividade do produto, isto é, $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$;
- (b)** a existência de um elemento neutro, isto é $A \cdot I = I \cdot A = A$;
- (c)** a distributividade da multiplicação com relação à adição, isto é, $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ e $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$;
- (d)** a associatividade do produto de matrizes com relação ao produto por escalar, isto é, $(\alpha \cdot A) \cdot B = \alpha \cdot (A \cdot B) = A \cdot (\alpha \cdot B)$;

Prova.

Matrizes Especiais

Definição 11.9. Uma matriz $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ é dita

1. *invertível à esquerda* se existir uma matriz $B \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$ tal que $BA = I_n$;
2. *invertível à direita* se existir uma matriz $C \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$ tal que $AC = I_m$;
3. *invertível*, ou ainda, *não singular*, se for invertível à esquerda e à direita;
4. *singular* se não for invertível.

Proposição 11.10. Se uma matriz possui uma matriz inversa, então ela é única.

Prova. Se $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ é invertível, então, por definição, existem $B \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$ e $C \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$ tais que $BA = I_n$ e $AC = I_m$. Com isso, basta ver que

$$B = BI_m = B(AC) = (BA)C = I_n C = C,$$

isto é, $B = C$.

11.2 Operações e Matrizes Elementares

Dada uma matriz, podemos

- trocar a posição de duas de suas linhas;
- multiplicar uma de suas linhas por um escalar;¹
- e somar a uma de suas linhas uma outra linha que foi multiplicada por um escalar.

Estas são as chamadas *operações elementares*. Elas estão formalizadas na próxima definição e serão úteis no nosso estudo dos sistemas de equações lineares.

Definição 11.11. Sejam $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ e $p, q \in [m]$, com $p < q$.

(a) Definimos $A_{L_p \leftrightarrow L_q}$ como a matriz, também $m \times n$, tal que

$$L_i(A_{L_p \leftrightarrow L_q}) := \begin{cases} L_q(A) & \text{se } i = p \\ L_p(A) & \text{se } i = q \\ L_i(A) & \text{se } i \neq p, q \end{cases}.$$

(b) Seja $\lambda \in \mathbb{R}^*$ um escalar. Definimos $A_{L_p \leftarrow \lambda L_p}$ como a matriz, também $m \times n$, tal que

$$L_i(A_{L_p \leftarrow \lambda L_p}) := \begin{cases} \lambda L_p(A), & \text{se } i = p \\ L_i(A), & \text{se } i \neq p \end{cases}.$$

(c) Seja $\lambda \in \mathbb{R}^*$ um escalar. Definimos $A_{L_p \leftarrow L_p + \lambda L_q}$ como a matriz, também $m \times n$, tal que

$$L_i(A_{L_p \leftarrow L_p + \lambda L_q}) := \begin{cases} L_p(A) + \lambda L_q(A), & \text{se } i = p \\ L_i(A), & \text{se } i \neq p \end{cases},$$

¹Esperamos ser evidente que nos referimos a uma multiplicação que ocorre em *cada entrada* da referida linha.

e definimos $A_{L_q \leftarrow L_q + \lambda L_p}$ como a matriz, também $m \times n$, tal que

$$L_i(A_{L_q \leftarrow L_q + \lambda L_p}) := \begin{cases} L_q(A) + \lambda L_p(A), & \text{se } i = q \\ L_i(A), & \text{se } i \neq q \end{cases}.$$

Na proposição a seguir, mostramos que cada operação elementar equivale à multiplicar a matriz A por uma matriz dita *elementar*, obtida pela aplicação de operações elementares na matriz identidade I_m .

Proposição 11.12. Sejam $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ e $p, q \in [m]$, com $p < q$.

(a) Temos $I_{L_p \leftrightarrow L_q} \cdot A = A_{L_p \leftrightarrow L_q}$.

(b) Temos $I_{L_p \leftarrow \lambda L_p} \cdot A = A_{L_p \leftarrow \lambda L_p}$.

(c) Temos $I_{L_p \leftarrow L_p + \lambda L_q} \cdot A = A_{L_p \leftarrow L_p + \lambda L_q}$ e $I_{L_q \leftarrow L_q + \lambda L_p} \cdot A = A_{L_q \leftarrow L_q + \lambda L_p}$.

Prova.

Proposição 11.13. As operações (matrizes) elementares são invertíveis.

Prova. A demonstração é feita exibindo-se, explicitamente, as inversas.

- A inversa de $I_{L_p \leftrightarrow L_q}$ é ela mesma, isto é, $I_{L_p \leftrightarrow L_q} \cdot I_{L_p \leftrightarrow L_q} = I$.
- A inversa de $I_{L_p \leftarrow \lambda L_p}$ é $I_{L_p \leftarrow \frac{1}{\lambda} L_p}$, isto é,

$$I_{L_p \leftarrow \lambda L_p} \cdot I_{L_p \leftarrow \frac{1}{\lambda} L_p} = I_{L_p \leftarrow \frac{1}{\lambda} L_p} \cdot I_{L_p \leftarrow \lambda L_p} = I.$$

- A inversa de $I_{L_q \leftarrow L_q + \lambda L_p}$ é $I_{L_q \leftarrow L_q - \lambda L_p}$, isto é,

$$I_{L_q \leftarrow L_q + \lambda L_p} \cdot I_{L_q \leftarrow L_q - \lambda L_p} = I_{L_q \leftarrow L_q - \lambda L_p} \cdot I_{L_q \leftarrow L_q + \lambda L_p} = I.$$

Definição 11.14. (a) (Informal) Uma matriz A é dita *equivalente por linhas* a uma matriz B , de mesmo tamanho, se existir uma sequência finita de operações elementares que, quando aplicadas em A , tem B como resultado. Denotamos isso por

$$E \cdot A = B, \text{ em que } E = E_k \cdot E_{k-1} \cdot \dots \cdot E_2 \cdot E_1,$$

em que E_i é uma matriz elementar para cada $i \in [k]$.

(b) Diremos que uma matriz $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ é dita *equivalente por linhas* a uma matriz $B \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$, denotando isso por $A \sim B$, se existir uma sequência finita de matrizes elementares $E_1, \dots, E_k \in \mathcal{M}_{m \times m}(\mathbb{R})$ tais que

$$E_k \cdot E_{k-1} \cdot \dots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = B.$$

Proposição 11.15. A equivalência por linhas definida em (11.14) é uma relação de equivalência.

11.3 Eliminação Gaussiana e Decomposição LU

Definição 11.16. (a) (Intuitiva) Uma matriz será dita *escalonada* se (i) o primeiro elemento não nulo de cada linha está à esquerda do primeiro elemento não nulo de cada uma das linhas seguintes e (ii) as linhas nulas (se houver) estão abaixo das demais.

(b) Uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ será dita *escalonada* se existir uma sequência de índices $1 \leq b_1 < b_2 < \dots < b_r \leq n$ tal que $a_{ib_i} \neq 0$ para todo $i = 1, 2, \dots, r$ e $a_{ij} = 0$ para todo $1 \leq j < b_i$. Os termos a_{ib_i} são chamados de *pivôs*, enquanto o número de pivôs, r , é chamado de *posto*.

Proposição 11.17. Toda matriz é equivalente por linhas a uma matriz escalonada.

Prova. Hefez, 32 e 44.

Definição 11.18. (a) (Intuitiva) Uma matriz escalonada será dita *reduzida* se todo pivô for unitário e se todos os outros elementos da coluna de um pivô forem iguais a 0.

(b) Uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ será dita *escalonada reduzida* se existir uma sequência de índices $1 \leq b_1 < b_2 < \dots < b_r \leq n$ tal que $a_{ib_i} = 1$ para todo $1 \leq i \leq r$, $a_{kb_i} = 0$ para todo $k \neq i$ e $a_{ij} = 0$ para todo $1 \leq j < b_i$.

Teorema 11.19. Toda matriz é equivalente por linhas a uma única matriz escalonada reduzida.

Prova. Hefez, 32 e 44. Reginaldo, 68.

Proposição 11.20. Se $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ é uma matriz escalonada reduzida e $A \neq I_n$, então A possui pelo menos uma linha nula.

Prova. Reginaldo, 47.

11.4 Sistemas Lineares

Definição 11.21. (a) Uma *equação linear* nas incógnitas x_1, x_2, \dots, x_n é qualquer equação do tipo

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b,$$

onde $a_1, a_2, \dots, a_n, b \in \mathbb{R}$. Cada a_i é chamado de *coeficiente*, enquanto b é chamado de *termo independente*.

(b) O conjunto das soluções de uma equação linear é

$$\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b\}.$$

Definição 11.22. **(a)** Definimos *sistema de equações lineares* como todo conjunto finito de equações lineares nas incógnitas x_1, x_2, \dots, x_n . Com m equações, a representação canônica é

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}.$$

Por simplicidade, diremos apenas *sistema linear*, ou ainda, apenas *sistema*, em vez de sistema de equações lineares.

(b) O conjunto das soluções de um sistema linear é

$$\bigcap_{i=1}^m \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = b_i\}.$$

Fato 11.23. Todo sistema linear

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}.$$

pode ser representado matricialmente como $Ax = b$, onde

$$A := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n} \quad x := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n \times 1} \quad b := \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}_{m \times 1}.$$

Observe que $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$, $x \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{R})$ e $b \in \mathcal{M}_{m \times 1}(\mathbb{R})$. Trabalharemos, preferencialmente, com a forma matricial dos sistemas lineares, tendo em mente que as abordagens são equivalentes.

Definição 11.24. Seja $Ax = b$ um sistema linear como acima.

(a) Denominamos a matriz A como a *matriz incompleta*, ou ainda, a *matriz*, desse sistema. Ela também é chamada de *matriz de coeficientes*.

(b) Denominamos a matriz

$$[A|b] := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}_{m \times (n+1)}$$

como a *matriz completa*, ou a *matriz aumentada*, desse sistema.

Definição 11.25. Um sistema linear é dito *possível* se ele tiver pelo menos uma solução. Se houver mais de uma solução, ele será dito *possível e indeterminado*, no sentido do resultado a seguir; se a solução for única, então ele será dito *possível e determinado*. Por fim, se não houver solução alguma, ele será dito *impossível*.

Teorema 11.26. Se um sistema linear $Ax = b$ tem (pelo menos) duas soluções distintas, então, na verdade, ele tem infinitas soluções distintas.

Prova. Se $x_1 \neq x_2$ são soluções, então $x_3 := \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$, para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$, também é uma solução. De fato, basta observar que $Ax_3 = A[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] = b$.

Definição 11.27. Diremos que dois sistemas de equações lineares são equivalentes se eles têm o mesmo conjunto solução.

Proposição 11.28. Os sistemas lineares $Ax = b$ e $Cx = d$ são equivalentes se, e somente se, as matrizes $[A|b]$ e $[C|d]$ são equivalentes por linhas.

Prova. Reginaldo, 32.

Definição 11.29. Um sistema de equações lineares em que todos os termos independentes são nulos, isto é,

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{array} \right.,$$

ou ainda, em notação matricial,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

é dito *homogêneo*.

Proposição 11.30. Todo sistema homogêneo é possível.

Prova. Basta ver que $x = 0_{n \times 1}$ é uma solução, dita *trivial*.

Teorema 11.31. Todo sistema linear homogêneo em que o número de incógnitas é maior que o número de equações possui uma solução não trivial (e, portanto, possui infinitas soluções).

Prova. Elon, 27

Capítulo 12

Espaços Vetoriais

12.1 Espaços e Subespaços Vetoriais

Definição 12.1. Uma tripla $(V, +, \cdot)$ é um *espaço vetorial real* se no conjunto $V \neq \emptyset$ existem duas operações, $+ : V \times V \rightarrow V$ e $\cdot : \mathbb{R} \times V \rightarrow V$, para as quais

- A1: $u + (v + w) = (u + v) + w$ para quaisquer $u, v, w \in V$;
- A2: $u + v = v + u$ para quaisquer $u, v \in V$;
- A3: existe $0_V \in V$ tal que $u + 0_V = u$ para todo $u \in V$;
- A4: para cada $u \in V$ existe $v \in V$ tal que $u + v = 0_V$;
- M1: $\lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot u) = (\lambda_1 \cdot \lambda_2) \cdot u$ para quaisquer $u \in V$ e $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$;
- M2: $(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot u = \lambda_1 \cdot u + \lambda_2 \cdot u$ para quaisquer $u \in V$ e $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$;
- M3: $\lambda_1 \cdot (u + v) = \lambda_1 \cdot u + \lambda_1 \cdot v$ para quaisquer $u, v \in V$ e $\lambda_1 \in \mathbb{R}$;
- M4: $1 \cdot u = u$ para todo $u \in V$.

Os elementos de V são chamados de *vetores*. Para simplificar a notação, e quando não houver perigo de confusão, pomos $0 := 0_V$, $\lambda v := \lambda \cdot v = v$ e $-v := w$ se $v + w = 0$. Vamos nos referir ao espaço vetorial $(V, +, \cdot)$ simplesmente como o conjunto V .

Exemplo 12.2.

- O espaço \mathbb{R}^n , com soma e produto por escalar usuais, é um espaço vetorial.
- O conjunto \mathbb{R}^X de todas as funções reais $f : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, com soma e produto por escalar usuais, é um espaço vetorial.

- (c) O conjunto $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ de todos os polinômios em x , com soma e multiplicação por escalar usuais, é um espaço vetorial.
- (d) O conjunto $\mathbb{R}_{>0}$ dos números reais positivos, com as operações $x \oplus y := x \cdot y$ e $\alpha \odot x := x^\alpha$, é um espaço vetorial.

Prova.

Proposição 12.3. Seja $(V, +, \cdot)$ um espaço vetorial. Valem as seguintes afirmações.

- (a) (Unicidade)
- (b) (Integridade) Para quaisquer $u \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos
- $\lambda \cdot 0_V = 0_V$;
 - $0 \cdot u = 0_V$;
 - se $\lambda \cdot u = 0_V$, então $\lambda = 0$ ou $u = 0_V$.
- (c) (Sinais) Para quaisquer $u \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos
- $(-1) \cdot u = -u$;
 - $-(-u) = u$;
 - $(-\lambda) \cdot u = \lambda(-u) = -(\lambda \cdot u)$.
- (d) (Lei do Corte) Para quaisquer $u, v, w \in V$ e $\lambda, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, vale
- $u + w = v + w \Rightarrow u = v$;
 - $\lambda \neq 0 \wedge \lambda \cdot u = \lambda \cdot v \Rightarrow u = v$;
 - $v \neq 0_V \wedge \lambda_1 u = \lambda_2 u \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2$.
- (e) Se $V \neq \{0\}$, então V é infinito.

Prova.

Definição 12.4. Um espaço vetorial $(W, +, \cdot)$ é um *subespaço vetorial* de um espaço vetorial $(V, +, \cdot)$ se $W \subseteq V$.

Teorema 12.5. Uma tripla $(W, +, \cdot)$ é um subespaço vetorial de $(V, +, \cdot)$ se $W \subseteq V$ e $u + v, \lambda \cdot v \in W$ para quaisquer $u, v \in W$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

Definição 12.6. Seja V um espaço vetorial. Um subconjunto $W \subseteq V$ é um *subespaço vetorial* de V se $u + v \in W$ e $\lambda u \in W$ para quaisquer $u, v \in W$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

Corolário 12.7. Sejam V um espaço vetorial. Se $u + \lambda \cdot v \in W$ para quaisquer $u, v \in W \subseteq V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então W é um subespaço vetorial de V .

Prova. Particularmente para $\lambda = 1$, temos $u + v \in W$. Particularmente para $v = 0_V$, temos $\lambda u \in W$. ■

Proposição 12.8. Se V é um espaço vetorial e $W \subseteq V$ é um subespaço, então W é um espaço vetorial.

Prova. Para provar que W é um espaço vetorial, precisamos verificar que (i) existem operações $+$ e \cdot bem definidas em W e que (ii) essas operações satisfazem as propriedades A1–A4 e M1–M4 de um espaço vetorial.

- i. Como esperado, as operações $+$ e \cdot de W serão as mesmas de V : como V é um espaço vetorial, as operações $+$ e \cdot , bem definidas em V , também estão bem definidas em qualquer subconjunto não vazio de V ; em particular, também em W . Por exemplo, podemos tomar $w_1, w_2 \in W$ e considerar sua soma, $w_1 + w_2$, porque $W \subset V \Rightarrow w_1, w_2 \in V$ e, em V , a operação $+$ está bem definida.
- ii. O fechamento das operações $+$ e \cdot em W garantem, de cara, A1–A2 e M1–M4. Falta, então, provar A3 e A4. Dado $w \in W$, temos que $0_V = 0 \cdot w \in W$; com isso, tomando $0_W := 0_V$, teremos um elemento neutro de $+$ em W porque $w + 0_W = w + 0_V = w$. Por fim, dado $w \in W$, $-w = (-1) \cdot w \in W$, e então o oposto aditivo de $w \in W$ está em W .

Logo, W é um espaço vetorial, como queríamos.

Exemplo 12.9.

- (a) Todo espaço vetorial V tem pelo menos dois subespaços vetoriais, dito *triviais*: $\{0_V\}$ e o próprio V .
- (b) O conjunto $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ dos polinômios de grau menor ou igual a n , juntamente com o polinômio nulo, é um subespaço de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Prova. (a) Elon, 10. Reginaldo, 26.

Proposição 12.10 (Interseção de subespaços). Se W_1 e W_2 são dois subespaços vetoriais de um espaço vetorial V , então

- (a) $W_1 \cap W_2$ é um subespaço vetorial;
- (b) $W_1 \cup W_2$ é um subespaço vetorial se, e somente se, $W_1 \subset W_2$ ou $W_2 \subset W_1$.

Prova.

- (a) Para quaisquer $u, v \in W_1 \cap W_2$, temos, em particular, $u, v \in W_1$ e $u, v \in W_2$. Como W_1 e W_2 são espaços vetoriais, temos que $u + \lambda v \in W_1$ e $u + \lambda v \in W_2$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, donde $u + \lambda v \in W_1 \cap W_2$. Logo $W_1 \cap W_2$ é um subespaço vetorial de V . ■
- (b) Por contradição, suponha que existam $w_1 \in W_1$ e $w_2 \in W_2$ tais que $w_1 \notin W_2$ e $w_2 \notin W_1$. Como, por hipótese, $W_1 \cup W_2$ é um subespaço vetorial,

$w := w_1 + w_2 \in W_1 \cup W_2$, isto é, $w \in W_1$ ou $w \in W_2$.

- Se $w \in W_1$, então $w + (-w_1) = w_2 \in W_1$, absurdo!
- Se $w \in W_2$, então $w + (-w_2) = w_1 \in W_2$, absurdo!

Logo, a prova da ida está completa. A volta é evidente. Logo, a prova está completa.

Corolário 12.11. Seja V um espaço vetorial e I um conjunto de índices. Se para cada $\lambda \in I$ o conjunto $W_\lambda \subseteq V$ for um subespaço vetorial de V , então $\bigcap_{\lambda \in I} W_\lambda$ é ainda um subespaço vetorial de V .

Prova. Elon, 10.

Definição 12.12. Sejam W_1 e W_2 subespaços vetoriais de um espaço vetorial V .

(a) (Soma de subespaços) Definimos $W_1 + W_2$ como sendo o conjunto de todos os vetores de V que são soma de um elemento de W_1 com um elemento de W_2 , isto é,

$$W_1 + W_2 := \{v \in V : \exists w_1 \exists w_2 (w_1 \in W_1 \wedge w_2 \in W_2 \wedge v = w_1 + w_2)\}.$$

(b) (Soma direta) Diremos que $W_1 \oplus W_2 := W_1 + W_2$ é a *soma direta* de W_1 e W_2 se $W_1 \cap W_2 = \{0_V\}$.

Proposição 12.13. Nos termos da definição acima, $W_1 + W_2$ é um subespaço vetorial de V .

Prova. Veja inicialmente que $W_1, W_2 \subset W_1 + W_2$.

i. Se $u, v \in W_1 + W_2$, então existem $u_1, v_1 \in W_1$ e $u_2, v_2 \in W_2$ tais que $u = u_1 + u_2$ e $v = v_1 + v_2$. Com isso,

$$u + v = (u_1 + u_2) + (v_1 + v_2) = \underbrace{(u_1 + v_1)}_{\in W_1} + \underbrace{(u_2 + v_2)}_{\in W_2},$$

de modo que $u + v$ é a soma de um vetor de W_1 com um vetor de W_2 , isto é, $u + v \in W_1 + W_2$.

ii. Se $u \in W_1 + W_2$, então existem $u_1 \in W_1$ e $u_2 \in W_2$ tais que $u = u_1 + u_2$. Com isso, para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\lambda u = \lambda(u_1 + u_2) = \underbrace{\lambda u_1}_{\in W_1} + \underbrace{\lambda u_2}_{\in W_2},$$

de modo que λu é a soma de um vetor de W_1 com um vetor de W_2 , isto é, $\lambda u \in W_1 + W_2$.

Assim, $W_1 + W_2$ é um subespaço vetorial de V .

Teorema 12.14. Sejam W_1 e W_2 dois subespaços vetoriais de um espaço vetorial V . Teremos $V = W_1 \oplus W_2$ se, e somente se, para cada $v \in V$ existirem únicos $w_1 \in W_1$ e $w_2 \in W_2$ tais que $v = w_1 + w_2$.

Prova. (\Rightarrow) Se $V = W_1 \oplus W_2$, então temos a existência da decomposição. Provemos, então, sua unicidade. Dado $v \in V$, sejam $v_1, w_1 \in W_1$ e $v_2, w_2 \in W_2$ tais que $v = v_1 + v_2 = w_1 + w_2$. Somando $[(-w_1) + (-v_2)]$, vem

$$\begin{aligned} v &= v_1 + v_2 = w_1 + w_2 \\ v_1 + v_2 + [(-w_1) + (-v_2)] &= w_1 + w_2 + [(-w_1) + (-v_2)] \\ \underbrace{v_1 + (-w_1)}_{\in W_1} &= \underbrace{w_2 + (-v_2)}_{\in W_2}. \end{aligned}$$

Como $W_1 \cap W_2 = \{0\}$, temos então que $v_1 = w_1$ e $v_2 = w_2$, como queríamos.

(\Leftarrow) Segue da hipótese que $V = W_1 + W_2$; provemos, então, que $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. Como $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$ (pelo menos $0 \in W_1 \cap W_2$), tome $v \in W_1 \cap W_2$, para o qual, por hipótese, existem únicos $w_1 \in W_1$ e $w_2 \in W_2$. Com isso, temos

$$v = \underbrace{w_1}_{\in W_1} + \underbrace{w_2}_{\in W_2} = \underbrace{(w_1 + v)}_{\in W_1} + \underbrace{(w_2 + (-v))}_{\in W_2},$$

e como a decomposição é única, temos $w_1 = w_1 + v$ e $w_2 = w_2 - v$, donde $v = 0$. Logo, $W_1 \cap W_2 = \{0\}$, como queríamos.

Exemplo 12.15. O conjunto das funções reais pares,

$$W_1 = \{f \in \mathbb{R}^{\mathcal{X}} : \forall x (x \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow f(-x) = f(x))\},$$

bem como o conjunto das funções reais ímpares,

$$W_2 = \{f \in \mathbb{R}^{\mathcal{X}} : \forall x (x \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow f(-x) = -f(x))\}$$

são subespaços de $\mathbb{R}^{\mathcal{X}}$. E ainda, temos que $\mathbb{R}^{\mathcal{X}} = W_1 \oplus W_2$.

Prova. Reginaldo, 35.

12.2 Combinações Lineares e Geradores

Definição 12.16. Seja $(V, +, \cdot)$ um espaço vetorial. Um vetor $u \in V$ é uma *combinação linear* dos vetores $u_1, u_2, \dots, u_n \in V$ se existem escalares $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in$

\mathbb{R} para os quais

$$u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i.$$

Teorema 12.17. Seja V um espaço vetorial e $\emptyset \neq S \subseteq V$ um subconjunto de vetores de V . O conjunto de todas as combinações lineares dos vetores de S , que denotaremos por $[S]$, é um subespaço vetorial de V .

Prova. Se $u, v \in [S]$, então, por definição, existem vetores e escalares

$$\begin{aligned} u_1, u_2, \dots, u_n, v_1, v_2, \dots, v_m &\in S \\ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

para os quais $u = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i$ e $v = \sum_{i=1}^m \alpha_i v_i$. Com isso, para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$u + \lambda v = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i + \sum_{i=1}^m (\lambda \alpha_i) v_i,$$

de modo que $u + \lambda v$ é uma combinação linear de vetores de S , isto é, $u + \lambda v \in [S]$. Logo, pelo resultado (12.7), $[S]$ é um subespaço vetorial de V .

Definição 12.18. Sejam V um espaço vetorial e $\emptyset \neq S \subseteq V$ um subconjunto de vetores de V .

- (a) Diremos que $[S]$ é o *subespaço gerado* por S , ou que S *gera* $[S]$. Diremos, ainda, que os elementos de S são *geradores* de $[S]$.
- (b) Se S é finito e $[S] = V$, diremos que V é *finitamente gerado* e que S é um *conjunto de geradores* para (ou de) V .
- (c) Convenciona-se pôr $[\emptyset] = \{0\}$.

Proposição 12.19. Sejam V um espaço vetorial e $\emptyset \neq S, T \subseteq V$ subconjuntos de vetores de V . Valem as seguintes afirmações.

- (a) $S \subseteq [S]$.
- (b) $[[S]] = [S]$.
- (c) Se S é um subespaço vetorial, então $[S] = S$.
- (d) $S \subset T \Rightarrow [S] \subset [T]$.
- (e) $[S \cup T] = [S] + [T]$.

Prova.

- (a) Se $u \in S$, então $u = 1u \in [S]$. ■
- (b) Pelo item anterior, $[S] \subseteq [[S]]$. Agora, se $u \in [[S]]$, então u é uma combinação linear de vetores de $[S]$, que por sua vez são combinações lineares de vetores de $[S]$, de modo que $u \in [S]$. Assim, $[[S]] \subseteq [S]$, de modo que $[[S]] = [S]$. ■
- (c) Se $u \in [S]$, então u é uma combinação linear de elementos de S ; como S é um subespaço vetorial, temos então $u \in S$, de modo que $[S] \subseteq S$. Como $S \subseteq [S]$, temos então $[S] = S$. ■
- (d) Se $u \in S$, então existem vetores $u_1, \dots, u_n \in S$ e escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tais que $u = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n$. Como $u_1, \dots, u_n \in S$, por ser $S \subseteq T$ vem $u_1, \dots, u_n \in T$, de modo que $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n \in T$. ■
- (e)

12.3 Dependência e Independência Linear

Definição 12.20. Seja $(V, +, \cdot)$ um espaço vetorial.

- (a) Os vetores $u_1, u_2, \dots, u_n \in V$ são *linearmente independentes* (L.I.) se a equação

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n = 0$$

possuir somente a solução trivial $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$. Caso contrário, ou seja, se existir pelo menos uma solução com pelo menos um $\lambda_i \neq 0$, diremos que os vetores $u_1, u_2, \dots, u_n \in V$ são *linearmente dependentes* (L.D.).

- (b) Um subconjunto finito $S \subseteq V^1$ é L.D. (L.I.) se os vetores de S são L.D. (L.I.).
- Um subconjunto infinito $S \subseteq V$ é L.D. se pelo menos um subconjunto finito de S é L.D..
 - Um subconjunto infinito $S \subseteq V$ é L.I. se todo subconjunto finito de S é L.I..

Proposição 12.21. Sejam $(V, +, \cdot)$ um espaço vetorial e $S \subseteq V$ não vazio. Valem as seguintes afirmações.

- (a) Se $|S| = 1$ e $0_V \notin S$, então S é L.I..
- (b) S é L.D. se, e somente se, pelo menos um vetor de S é combinação linear de outros vetores de S .

¹Sendo S finito, só pode ser $S = V$ se for $V = \{0\}$.

Equivalentemente, pela contrapositiva, S é L.I. se, e somente se, nenhum vetor de S é combinação linear de outros vetores de S .

- (c) Se $0_V \in S$, então S é L.D..

Equivalentemente, pela contrapositiva, se S é L.I., então $0_V \notin S$.

- (d) Suponha S L.I. e seja $u \in V$. Se $S \cup \{u\}$ é L.D., então $u \in [S]$.

Equivalentemente, pela contrapositiva, se $u \notin [S]$, então $S \cup \{u\}$ é L.I..

- (e) Sejam $S_1, S_2 \neq \emptyset$ subconjuntos de V tais que $S_1 \subseteq S_2$. Temos que

- i. se S_1 é L.D., então S_2 também é L.D..
- ii. se S_2 é L.I., então S_1 também é L.I..

- (f) Se S é finito e L.I., então cada vetor $u \in [S]$ se escreve de maneira única como combinação linear de vetores de S .

- (g) Se $u \in S$ é tal que $u \in [S \setminus \{u\}]$, então $[S] = [S \setminus \{u\}]$.

Prova.

- (a) Sendo $S = \{u\}$, se $\lambda \cdot u = 0_V$ então $\lambda \neq 0$ já que $u \neq 0_V$. Logo S é L.I.. ■

- (b) (\Rightarrow) Se S é L.D., então existem $v_1, v_2, \dots, v_n \in S$ para os quais vale

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = 0$$

com $\lambda_i \neq 0$ para pelo menos um $i \in [n]$. Suponha, sem perda de generalidade, que $i = 1$, isto é, que $\lambda_1 \neq 0$; com isso,

$$v_1 = \left(\frac{-\lambda_2}{\lambda_1} \right) v_2 + \left(\frac{-\lambda_3}{\lambda_1} \right) v_3 + \cdots + \left(\frac{-\lambda_n}{\lambda_1} \right) v_n,$$

de modo que $v_1 \in S$ é combinação linear de $v_2, v_3, \dots, v_n \in S$.

(\Leftarrow) Se $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$, com $v_1, \dots, v_n \in V$ e $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, então

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n + (-1)v = 0;$$

como $-1 \neq 0$, temos, por definição, que S é L.D.. ■

- (c) Basta ver que 0_V é combinação linear de quaisquer $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$: temos $0_V = 0v_1 + 0v_2 + \cdots + 0v_n$. Assim, pelo item anterior, S é L.D.. ■

- (d)

- (e)

- (f)

- (g) Esta afirmação nos diz que se um vetor de S é combinação linear de outros vetores de S , então ele pode ser removido do subespaço gerado por S sem alterá-lo.

12.4 Base e Dimensão

Lema 12.22. Seja $(V, +, \cdot)$ um espaço vetorial. Se um subconjunto finito $S \subseteq V$ é L.I., então todo subconjunto $T \subseteq [S]$ tal que $|T| = |S| + 1$ é L.D..

Prova. Façamos indução em $|S|$. Se $|S| = 1$, então $S = \{u_1\}$, com $u_1 \neq 0_V$ já que S é L.I.. Tomando $v_1, v_2 \in [S]$ distintos, existem escalares $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tais que $v_1 = \lambda_1 u_1$ e $v_2 = \lambda_2 u_1$. Multiplicando v_1 por λ_2 e v_2 por λ_1 , obtemos

$$\lambda_2 v_1 - \lambda_1 v_2 = 0_V,$$

isto é, uma combinação linear não trivial dos vetores de $T = \{v_1, v_2\}$, de modo que eles são L.D.. Isso completa a base de indução. Suponha então, por hipótese de indução, que o resultado vale para subconjuntos de V de $n - 1$ vetores. Agora, sejam $S = \{u_1, \dots, u_n\} \subsetneq V$ e $T = \{v_1, \dots, v_n, v_{n+1}\} \subseteq [S]$. Provemos que T é L.D.. Como $v_i \in [S]$ para todo $i \in [n + 1]$, existem escalares $a_{ij} \in \mathbb{R}$, com $i \in [n + 1]$ e $j \in [n]$, tais que

$$v_i = a_{i1} u_1 + \dots + a_{in} u_n$$

para todo $i \in [n + 1]$.

- $a_{i1} = 0$ para todo $i \in [n + 1]$. Nesse caso, temos

$$v_i = a_{i2} u_2 + \dots + a_{in} u_n$$

para todo $i \in [n + 1]$, donde $T \subsetneq [S \setminus \{u_1\}]$, e como $|S \setminus \{u_1\}| = n - 1$, segue da hipótese de indução que todo subconjunto de T com n vetores é L.D., de modo que T é L.D..

- $a_{i1} \neq 0$ para algum $i \in [n + 1]$. Nesse caso, suponha, sem perda de generalidade, que $a_{11} \neq 0$. Definindo

$$w_i := \frac{a_{i1}}{a_{11}} \cdot v_1 - v_i$$

para cada $i \in [n + 1] \setminus \{1\}$, fazendo as contas obtemos

$$w_i = \sum_{j=2}^n \left[\left(\frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1j} - a_{ij} \right) u_j \right].$$

Com isso, vemos que cada w_i é uma combinação linear dos vetores u_2, \dots, u_n , de modo que $T' := \{w_2, \dots, w_n, w_{n+1}\} \subsetneq [S \setminus \{u_1\}]$. Como $|S \setminus \{u_1\}| =$

$n - 1$ e $|T'| = n$, pela hipótese de indução temos que T' é L.D., de modo que existem n escalares, $\lambda_2, \dots, \lambda_{n+1} \in \mathbb{R}$, com algum $\lambda_i \neq 0$, tais que

$$\sum_{i=2}^{n+1} \lambda_i w_i = 0_V.$$

Daí, obtemos

$$\sum_{i=2}^{n+1} \left(\lambda_i \frac{a_{i1}}{a_{11}} \right) v_1 - \sum_{i=2}^{n+1} \lambda_i v_i = 0_V,$$

uma combinação linear não trivial de T , de modo que T é L.D..

Com isso, vemos que se o resultado vale para subconjuntos de V com $n - 1$ vetores, então ele também vale para subconjuntos de V com n vetores. Isso completa o passo indutivo e, portanto, completa a prova. ■

Corolário 12.23. Seja $(V, +, \cdot)$ um espaço vetorial. Se um subconjunto finito $S \subseteq V$ é L.I., então todo subconjunto $T \subseteq [S]$ tal que $|T| \geq |S| + 1$ é L.D..

Definição 12.24. Seja $(V, +, \cdot)$ um espaço vetorial. Um subconjunto $\mathcal{B} \subsetneq V$ é uma *base* de V se \mathcal{B} é L.I. e $[\mathcal{B}] = V$.

Teorema 12.25 (Completamento). Todo espaço vetorial finitamente gerado possui uma base.

Prova. Seja $(V, +, \cdot)$ um espaço vetorial finitamente gerado. Se $V = \{0\}$, então \emptyset é uma base de V , já que os vetores de \emptyset são L.I. por vacuidade e convencionamos pôr $[\emptyset] = \{0\}$. Suponha, então, $V \neq \{0\}$. Como V é finitamente gerado, existe um subconjunto finito $S := \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subsetneq V$ que gera V . Se S for L.I., então S será uma base de V . Se S for L.D., então vale

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = 0,$$

sendo $\lambda_i \neq 0$ para pelo menos um $i \in [n]$. Suponha, sem perda de generalidade, que $i = n$, isto é, que $\lambda_n \neq 0$; com isso,

$$v_n = \left(\frac{-\lambda_1}{\lambda_n} \right) v_1 + \left(\frac{-\lambda_2}{\lambda_n} \right) v_2 + \cdots + \left(\frac{-\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \right) v_{n-1},$$

de modo que v_n é uma combinação linear de $v_1, v_2, \dots, v_{n-1} \in S$. Pelo item (g) de (12.21), removemos v_n e obtemos $[S \setminus \{v_n\}] = [S] = V$. Repetindo esse processo (em um número finito de vezes, digamos, m , já que V é finitamente gerado) eventualmente obteremos um subconjunto L.I. de S com $n - m$ vetores que continua gerando V ; esse subconjunto vem a ser, então, a base de V . ■

Prova. Alternativamente, suponha que S é L.D.. Como $V \neq \{0\}$, existe $i \in [n]$ tal que $v_i \neq 0$. Suponha, sem perda de generalidade, que $i = 1$, isto é, que $v_1 \neq 0$; se todo v_i , com $i \in [n] \setminus \{1\}$, puder ser escrito como combinação linear de v_1 , então $V = [v_1]$ e $\{v_1\}$ é uma base de V . Se isso não ocorre, então existe algum v_i , com $i \in [n] \setminus \{1\}$, que não pode ser escrito como combinação linear de v_1 . Suponha, sem perda de generalidade, que $i = 2$; se todo v_i , com $i \in [n] \setminus \{1, 2\}$, puder ser escrito como combinação linear de v_1 e v_2 , então $V = [v_1, v_2]$ e $\{v_1, v_2\}$ é uma base de V . Repetindo esse processo (em um número finito de vezes, já que V é finitamente gerado) eventualmente obteremos um subconjunto L.I. de S que gera V ; esse subconjunto vem a ser, então, a base de V . ■

Teorema 12.26 (Invariância). Seja V um espaço vetorial finitamente gerado. Se \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_2 são bases de V , então $|\mathcal{B}_1| = |\mathcal{B}_2|$.

Prova. Como \mathcal{B}_1 é L.I. e $[\mathcal{B}_1] = V$, pelo lema (12.22) temos que $|\mathcal{B}_2| \leq |\mathcal{B}_1|$ já que $\mathcal{B}_2 \subsetneq V = [\mathcal{B}_1]$. De fato, se fosse $|\mathcal{B}_2| > |\mathcal{B}_1|$, pelo lema (12.22) \mathcal{B}_2 seria L.D., o que contradiz a hipótese. Analogamente, como \mathcal{B}_2 é L.I. e $[\mathcal{B}_2] = V$, temos que $|\mathcal{B}_1| \leq |\mathcal{B}_2|$. Sendo $|\mathcal{B}_2| \leq |\mathcal{B}_1|$ e $|\mathcal{B}_1| \leq |\mathcal{B}_2|$, temos que $|\mathcal{B}_1| = |\mathcal{B}_2|$, conforme afirmado. ■

Definição 12.27. A *dimensão* de um espaço vetorial finitamente gerado $(V, +, \cdot)$ é o número de vetores de qualquer uma de suas bases. Mais especificamente, se \mathcal{B} é uma base de V , a dimensão de V é definida como $\dim V := |\mathcal{B}|$.

Teorema 12.28. Seja $(V, +, \cdot)$ um espaço vetorial de dimensão finita $n > 0$.

- (a) Todo subconjunto de V com n vetores L.I. é uma base de V .
- (b) Todo subconjunto de V com n vetores que gera V é uma base de V .
- (c) Todo subconjunto de V que gera V tem pelo menos n elementos.
- (d) Todo subconjunto de V com $m < n$ vetores não é uma base de V .
- (e) Todo subconjunto de V com $m < n$ vetores L.I. pode ser completado para formar uma base de V .
- (f) Se W é um subespaço vetorial de V , então W tem dimensão finita e $\dim W \leq \dim V$. Em particular, se $\dim W = \dim V$, então $W = V$.
- (g) Se W_1 e W_2 são subespaços vetoriais de V , então

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2).$$

Prova. (a) Reginaldo, 88.

(b) Reginaldo, 88.

- (c) Reginaldo, 88.
- (d) Zani, 44.
- (e) Reginaldo, 88. Zani, 48.
- (f) Reginaldo, 87.
- (g) Reginaldo, 93. Zani, 49.

Definição 12.29. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita $n > 0$ e $\mathcal{B} := \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ uma base ordenada (indexada) de V . Para cada $v \in V$, diremos que os únicos $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tais que $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n$ são as *coordenadas* de v com relação à base \mathcal{B} e denotamos isso por

$$v := \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} := \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}_{v_1, v_2, \dots, v_n} .$$

Teorema 12.30. (Mudança de Base) Seja $(V, +, \cdot)$ um espaço vetorial de dimensão finita $n > 0$ e $v \in V$. Sejam \mathcal{B} e \mathcal{C} duas bases de um espaço vetorial de dimensão finita $(V, +, \cdot)$ e $v \in V$.

Capítulo 13

Transformações Lineares

Definição 13.1. Sejam $(V, +, \cdot)$ e $(W, +, \cdot)$ espaços vetoriais.

- (a) Uma *transformação linear* de $(V, +, \cdot)$ em $(W, +, \cdot)$ é uma função $T : V \rightarrow W$ tal que $T(u+v) = T(u)+T(v)$ e $T(\lambda \cdot u) = \lambda \cdot T(u)$ para quaisquer $u, v \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.
- (b) Um *operador linear* é uma transformação linear $T : V \rightarrow V$.

Exemplo 13.2. Sejam $(V, +, \cdot)$ e $(W, +, \cdot)$ espaços vetoriais.

- (a) A função $0 : V \rightarrow W$ definida por $0(v) = 0_W$ para todo $v \in V$ é uma transformação linear, chamada de *transformação nula*.
- (b) A função $I_V : V \rightarrow V$ definida por $I_V(v) = v$ para todo $v \in V$ é um operador linear, chamada de *transformação identidade*.

Proposição 13.3. Uma função $T : V \rightarrow W$ é uma transformação linear se, e somente se,

$$T\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i T(v_i)$$

para quaisquer $n \in \mathbb{N}$, $v_1, \dots, v_n \in V$ e $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.

Prova.

Proposição 13.4. Seja $T : V \rightarrow W$ uma transformação linear. Valem as seguintes afirmações.

- (a) $T(0_V) = 0_W$.

Definição 13.5. Sejam V e W espaços vetoriais. O conjunto de todas as transformações lineares de V em W é denotado por $\mathcal{L}(V, W)$

Definição 13.6. Seja $T : V \rightarrow W$ uma transformação linear.

(a) O *núcleo* de T é definido como

$$\ker T := \{v \in V : T(v) = 0_W\}.$$

(b) A *imagem* de T é definida como

$$\text{Im } T := \{w \in W : \exists v \in V \wedge T(v) = w\}.$$

Teorema 13.7. Seja $T : V \rightarrow W$ uma transformação linear.

(a) $\ker T$ é um subespaço vetorial de V .

(b) $\text{Im } T$ é um subespaço vetorial de W .

13.1 Matrizes

O conjunto $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ de todas as matrizes $m \times n$ com entradas reais, com soma e produto por escalar usuais (vistas no capítulo 1), é um espaço vetorial.

Exemplo 13.8. (a) Dado $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, temos que

$$W := \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0\}$$

é um subespaço de \mathbb{R}^n . No caso desinteressante em que $a_i = 0$ para todo $i \in [n]$, o subespaço W é todo o \mathbb{R}^n . Se, por outro lado, existe pelo menos um $i \in [n]$ tal que $a_i \neq 0$, diremos que W é um *hiperplano* que passa pela origem.

(b) Seja $m \in \mathbb{N}$. Para cada $i \in [m]$, sendo $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) \in \mathbb{R}^n$, pelo item anterior temos que cada

$$W_i := \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = 0\}$$

é um subespaço vetorial de V . Pela proposição (12.11), temos que $W := W_1 \cap W_2 \cap \cdots \cap W_m$ é ainda um subespaço vetorial de V , que é exatamente o conjunto das soluções do sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}.$$

Outra maneira de verificar que o conjunto das soluções de um sistema linear homogêneo é um espaço vetorial é a seguinte.

O conjunto das matrizes simétricas,

$$W_1 = \{A \in \mathcal{M}_{n \times n} : A^T = A\},$$

bem como o conjunto das matrizes antissimétricas,

$$W_2 = \{A \in \mathcal{M}_{n \times n} : A^T = -A\},$$

são subespaços de $\mathcal{M}_{n \times n}$. E ainda, temos que $\mathcal{M}_{n \times n} = W_1 \oplus W_2$.

Capítulo 14

Geometria Analítica

Parte V

Cálculo II

Capítulo 15

Topologia do Espaço Euclidiano

Definição 15.1. A projeção de $A \in \mathbb{R}^n$ em $B \in \mathbb{R}_{\neq 0}^n$ é definida como

$$\text{proj}_B A := \left(\frac{A \cdot B}{\|B\|^2} \right) B.$$

Definição 15.2. Uma reta no \mathbb{R}^n que passa pelo ponto $P \in \mathbb{R}^n$ e é paralela ao vetor $A \in \mathbb{R}_{\neq 0}^n$ é a imagem da função $L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $L(t) = P + tA$. Denota-se $L(P, A) := \text{Im } L$, isto é,

$$L(P, A) := \{X \in \mathbb{R}^n : \exists t(t \in \mathbb{R} \wedge X = P + tA)\}.$$

Proposição 15.3. Sejam $P, Q, A, B \in \mathbb{R}^n$.

- (a) $L(P, A) = L(P, B) \Leftrightarrow A \parallel B$.
- (b) $L(P, A) = L(Q, B) \Leftrightarrow Q \in L(P, A) \vee P \in L(Q, B)$.
- (c) Se $P \neq Q$, então existe uma única reta $L \subsetneq \mathbb{R}^n$ tal que $P, Q \in L$.

Prova.

- (a)
- (b)
- (c) Pois tome $L = L(P, Q - P)$. Temos $P \in L$ pois $P = P + 0 \cdot (Q - P)$ e temos $Q \in L$ pois $Q = P + 1 \cdot (Q - P)$. Agora, seja L' uma reta tal que $P, Q \in L'$. Como $P \in L'$, temos por definição $L' = L(P, A)$ para algum vetor $A \in \mathbb{R}_{\neq 0}^n$. Como $Q \in L' = L(P, A)$, existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $Q = P + tA$. Daí, $Q - P = tA$, e como $Q - P \neq 0$, temos $t \neq 0$ e $Q - P \parallel A$, donde $L' = L$ pelo primeiro item. ■

Definição 15.4. Duas retas $L(P, A)$ e $L(Q, B)$ são *paralelas* se $A \parallel B$. Isso é denotado por $L(P, A) \parallel L(Q, B)$.

Teorema 15.5 (Paralelas). Seja $L \subsetneq \mathbb{R}^n$ uma reta. Para todo ponto $Q \notin L$ existe uma única reta $L' \subsetneq \mathbb{R}^n$ tal que $Q \in L'$ e $L' \parallel L$.

Prova. Seja $L = L(P, A)$ e tome $L' = L(Q, A)$. De cara, $Q \in L'$ e $L' \parallel L$. A unicidade segue imediatamente da proposição (15.3). ■

Teorema 15.6. Sejam $P, A \in \mathbb{R}^2$. Se $N \in \mathbb{R}^2$ é tal que $N \cdot A = 0$, então

- i. $\{X \in \mathbb{R}^2 : (X - P) \cdot N = 0\} = L(P, A);$

ii. vale

$$\|X\| \geq \frac{|P \cdot N|}{\|N\|}$$

para todo $X \in L(P, A)$, com igualdade somente se $X = \text{proj}_N P$;

iii. Se $Q \notin L(P, A)$, então

$$\|X - Q\| \geq \frac{|(P - Q) \cdot N|}{\|N\|}$$

para todo $X \in L(P, A)$, com igualdade somente se $Q = \text{proj}_N (P - Q)$;

Prova. Comecemos com um lema: se $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$ são tais que $(a, b) \cdot (c, d) = 0$, então $(c, d) = t \cdot (b, -a)$ para algum $t \in \mathbb{R}$.

Definição 15.7. Seja $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Um *plano* no \mathbb{R}^n que passa por um ponto $P \in \mathbb{R}^n$ e é gerado por vetores $u, v \in \mathbb{R}^n$, linearmente independentes, é a imagem da função $\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $\alpha(s, t) = P + su + tv$. Denota-se $\{P + su + tv\} := \text{Im } \alpha$, isto é,

$$\{P + su + tv\} = \{X \in \mathbb{R}^n : \exists s \exists t (s, t \in \mathbb{R} \wedge X = P + su + tv)\}.$$

Teorema 15.8.

- (a) Se $M = \{P + sA + tB\}$ e $M' = \{P + sC + tD\}$ são planos, então $M = M'$ se, e somente se, $[A, B] = [C, D]$.
- (b) Se $\alpha = \{P + su + tv\}$ e $\beta = \{Q + su + tv\}$ são planos, então $\alpha = \beta$ se, e somente se, $Q \in \alpha$ ou $P \in \beta$.
- (c) Se $P, Q, R \in \mathbb{R}^n$ não são colineares, então existe um único plano $\alpha \subsetneq \mathbb{R}^n$ tal que $P, Q, R \in \alpha$.

Prova.

(a) $\Rightarrow)$ bla bla

$\Leftarrow)$

(b) $\Rightarrow)$ bla bla

$\Leftarrow)$

(c)

Definição 15.9. Sejam $\alpha = \{P + sA + tB\}$ e $\beta = \{Q + sC + tD\}$ planos no \mathbb{R}^n .

(a) Um vetor $v \in \mathbb{R}^n$ é *paralelo ao plano* α se $v \in [A, B]$.

(b) Os planos α e β são *paralelos* se $[A, B] = [C, D]$.

Teorema 15.10 (Paralelas). Seja $\alpha \subsetneq \mathbb{R}^n$ um plano. Para todo ponto $Q \notin \alpha$ existe um único plano $\beta \subsetneq \mathbb{R}^n$ tal que $Q \in \beta$ e $\beta \parallel \alpha$. ■

Prova.

Teorema 15.11.

(a) Dois vetores $u, v \in \mathbb{R}^n$ são L.I. se, e somente se, existe uma reta $r \subsetneq \mathbb{R}^n$ tal que $u, v, 0 \in r$.

(b) Três vetores $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ são L.I. se, e somente se, existe um plano $\alpha \subsetneq \mathbb{R}^n$ tal que $u, v, w, 0 \in \alpha$.

Prova.

(a)

(b)

Definição 15.12. Uma *bola aberta de raio* $r \in \mathbb{R}_{>0}$ e *centro* $a \in \mathbb{R}^n$ é definida como

$$B_r(a) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| < r\}.$$

Definição 15.13.

(a) Um ponto $a \in \mathbb{R}^n$ é um *ponto interior* de $A \subseteq \mathbb{R}^n$ se existe $r \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $B_r(a) \subseteq A$.

(b) O *interior* de $A \subseteq \mathbb{R}^n$, denotado por $\text{int } A$, é definido como o conjunto de todos os pontos interiores de A , isto é,

$$\text{int } A = \{x \in A : \exists r \in \mathbb{R}_{>0} \wedge B_r(x) \subseteq A\}.$$

(c) Um subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ é *aberto* se $\text{int } A = A$.

Corolário 15.14. Toda bola aberta é um conjunto aberto.

Prova. Ver [10], página 113. ■

Definição 15.15. Um ponto $a \in \mathbb{R}^n$ é um *ponto de acumulação* de $A \subseteq \mathbb{R}^n$ se $B_r(a) \cap A_{\neq a} \neq \emptyset$ para todo $r \in \mathbb{R}_{>0}$.

Definição 15.16.

- (a) Um ponto $a \in \mathbb{R}^n$ é um *ponto exterior* de $A \subseteq \mathbb{R}^n$ se existe $r \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $B_r(a) \cap A = \emptyset$.
- (b) O *exterior* de $A \subseteq \mathbb{R}^n$, denotado por $\text{ext } A$, é definido como o conjunto de todos os pontos exteriores de A , isto é,

$$\text{ext } A = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists r (r \in \mathbb{R}_{>0} \wedge B_r(x) \cap A = \emptyset)\}.$$

Definição 15.17. Um ponto $a \in \mathbb{R}^n$ é um *ponto da fronteira* de $A \subseteq \mathbb{R}^n$ se $a \notin \text{int } A$ e $a \notin \text{ext } A$. O conjunto de todos os pontos da fronteira de A é denotado por ∂A .

Capítulo 16

Caminhos

Definição 16.1. Uma *função vetorial de variável real* é uma função $f : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$.

As funções vetoriais de variável real que nos interessam, nesse momento, são aquelas cujo domínio é um intervalo ou uma união de intervalos.

Proposição 16.2. Seja $f : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função. Existem e são únicas as funções $f_i : X \rightarrow \mathbb{R}$, com $i \in [n]$, tais que

$$f(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$$

para todo $t \in X$. Isso é denotado por $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$.

Prova. Trivial. ■

Definição 16.3. Uma função $f : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ tem limite $L \in \mathbb{R}^n$ quando t tende ao ponto $t_0 \in X'$ se para todo $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existe $\delta = \delta(\epsilon, t_0) \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que

$$0 < |t - t_0| < \delta \rightarrow \|f(t) - L\| < \epsilon$$

para todo $t \in X$. Isso é denotado por

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = L.$$

Proposição 16.4 (Unicidade do limite). Se uma função $f : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ tem limites $L_1, L_2 \in \mathbb{R}^n$, então $L_1 = L_2$.

Prova.

Proposição 16.5. Sejam $F : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $t_0 \in X'$ e $L \in \mathbb{R}^n$. Vale

$$\lim_{t \rightarrow t_0} F(t) = L \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow t_0} \|F(t) - L\| = 0.$$

Prova. Ver [10], p. 124. ■

Teorema 16.6. Sejam $f : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $t_0 \in X'$ e $L \in \mathbb{R}^n$, com $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ e $L = (L_1, L_2, \dots, L_n)$. Para todo $i \in [n]$, vale

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = L \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow t_0} f_i(t) = L_i.$$

Prova. Ver [10], p. 124. ■

Proposição 16.7 (Propriedades operatórias). Oi

Prova.

Definição 16.8 (Continuidade). Sejam $f : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $t_0 \in X \cap X'$.

(a) f é contínua em t_0 se

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = f(t_0).$$

(b) f é contínua em $Y \subseteq X$ se f for contínua em todo $t_0 \in Y$.

(c) f é contínua se f for contínua em X .

Corolário 16.9. Sejam $f : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função, com $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$, e $t_0 \in X \cap X'$. f é contínua em t_0 se, e somente se, f_i é contínua em t_0 , para todo $i \in [n]$.

Definição 16.10. Sejam $f : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $t_0 \in X \cap X'$.

(a) f é derivável, ou diferenciável, em t_0 , se existir o limite

$$f'(t_0) := \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}.$$

Mais precisamente, f é derivável em t_0 se existir o limite $\lim_{t \rightarrow t_0} g(t)$, onde $g : X \setminus \{t_0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é a função definida por

$$g(t) := \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}.$$

Sendo F derivável em t_0 , ou ainda, diferenciável em t_0 , dizemos que o limite $F'(t_0)$ é a derivada de F em t_0 .

(b) Diremos que F é derivável em $Y \subseteq X$ se F for derivável em todo $t \in Y$; se for $Y = X$, diremos que F é derivável.

Proposição 16.11. Sejam $F : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $t_0 \in X$. Sendo $F = (f_1, f_2, \dots, f_n)$, temos que F é derivável em t_0 se, e somente se, f_i é derivável em t_0 para todo $i \in [n]$. Sendo F derivável em t_0 , temos que

$$F'(t) = (f'_1(t), f'_2(t), \dots, f'_n(t)).$$

Prova.

Definição 16.12. Seja $F : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ derivável em $t_0 \in X$, com $F'(t_0) \neq 0$.

(a)

Proposição 16.13 (Propriedades operatórias).

Prova.

Proposição 16.14 (Regra da cadeia).

Proposição 16.15. Se $F : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função vetorial derivável em X tal que $\|F(t)\| = k \in \mathbb{R}$ para todo $t \in X$, então $F(t) \cdot F'(t) = 0$ para todo $t \in X$.

Prova.

Definição 16.16. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função. A soma de Riemann $S(f, P, \xi)$ tem limite $L \in \mathbb{R}^n$ quando $\|P\|$ tende a 0 se para todo $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existir $\delta = \delta(\epsilon) \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que

$$\|S(f, P, \xi) - L\| < \epsilon$$

para toda partição marcada (P, ξ) de $[a, b]$ com $\|P\| < \delta$. Isso é denotado por

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} S(f, P, \xi) = L.$$

Proposição 16.17. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função. O limite das somas de Riemann, quando existe, é único, isto é, se

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} S(f, P, \xi) = L_1 \quad \text{e} \quad \lim_{\|P\| \rightarrow 0} S(f, P, \xi) = L_2,$$

então $L_1 = L_2$.

Prova.

Definição 16.18. Uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é *integrável em $[a, b]$ segundo Riemann* se $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} S(f, P, \xi)$ existe. Nesse caso, esse número real é chamado de *integral de f em $[a, b]$ segundo Riemann* e é denotado por

$$\int_a^b F(x) dx,$$

isto é,

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{\|P\| \rightarrow 0} S(f, P, \xi).$$

Proposição 16.19. Seja $f : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função com $F = (f_1, f_2, \dots, f_n)$. f é integrável em $[a, b]$ se, e somente se, f_i é integrável em $[a, b]$ para todo $i \in [n]$, sendo nesse caso

$$\int_a^b F(t) dt = \left(\int_a^b f_1(t) dt, \int_a^b f_2(t) dt, \dots, \int_a^b f_n(t) dt \right).$$

Prova.

Proposição 16.20 (Propriedades operatórias).

Teorema 16.21. (Fundamental do Cálculo, parte I) Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função integrável.

(a) A função $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por

$$F(x) := \int_a^x f(t) dt$$

é uniformemente contínua em $[a, b]$.

(b) Se f é contínua em $x_0 \in [a, b]$, então F é derivável em x_0 e $F'(x_0) = f(x_0)$.

Prova.

Corolário 16.22. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função contínua em $[a, b]$.

(a) A função $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por

$$F(x) := \int_a^x f(t) dt$$

é uma primitiva de f em $[a, b]$.

(b) Se $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é qualquer outra primitiva de f , então

$$G(x) = G(a) + \int_a^x f(t) dt$$

para todo $x \in [a, b]$. Particularmente para $x = b$, temos

$$\int_a^b f(t) dt = G(b) - G(a).$$

Prova.

Teorema 16.23 (Fundamental do Cálculo, parte II). Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função integrável e $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma primitiva qualquer de f , então

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(t) dt$$

para todo $x \in [a, b]$. Particularmente para $x = b$, temos

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a).$$

Prova.

Proposição 16.24. Seja $C \in \mathbb{R}^n$. Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função integrável, então a função $C \cdot f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável e

$$C \cdot \left[\int_a^b f(t) dt \right] = \int_a^b [C \cdot f(t)] dt.$$

Prova.

Proposição 16.25. Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\|f\| : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ são funções integráveis em $[a, b]$, então

$$\left\| \int_a^b f(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\| dt.$$

16.1 Curvas

No que segue, $I, J \subseteq \mathbb{R}$ são intervalos.

Definição 16.26.

- (a) Uma *curva* no \mathbb{R}^n é uma função vetorial de variável real $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$.
- (b) Uma *curva paramétrica* é uma curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínua. O *traço* da curva é a imagem de I por α , isto é, o conjunto $\alpha(I)$.
- (c) Uma curva paramétrica $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é *regular* se α é derivável em I com $\alpha'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$.

Definição 16.27. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma curva paramétrica regular. Uma curva paramétrica $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma *reparametrização* de α se $\beta(J) = \alpha(I)$ e se existe uma *função de reparametrização* $\varphi : J \rightarrow I$ bijetora, derivável em J , com $\varphi'(t) \neq 0$, tal que $\beta(t) = \alpha(\varphi(t))$.

Proposição 16.28 (Reparametrização conserva regularidade). Se uma curva paramétrica $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma reparametrização de uma curva paramétrica regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, então é β regular. ■

Prova.

Definição 16.29. Sejam $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma curva paramétrica regular e $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma reparametrização de α por meio de uma função de reparametrização $\varphi : J \rightarrow I$.

- (a) β é uma reparametrização *positiva* se $\varphi'(t) > 0$ para todo $t \in J$.
- (b) β é uma reparametrização *negativa* se $\varphi'(t) < 0$ para todo $t \in J$.

Definição 16.30. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma curva paramétrica derivável e com derivada integrável.

- (a) O *comprimento do arco* de $a \in I$ até $b \in I$ é definido como

$$L_a^b(\alpha) := \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt.$$

- (b) Seja $t_0 \in I$. A *função comprimento de arco* de α é definida como

$$L(t) := \int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\| du.$$

Proposição 16.31. Se $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma curva paramétrica regular e $\beta : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma reparametrização de α , então $L_c^d(\beta) = L_a^b(\alpha)$.

Proposição 16.32. A função comprimento de arco de uma curva paramétrica $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função de reparametrização.

Definição 16.33. Uma curva paramétrica $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é *reparametrizada por comprimento de arco* se $\|\alpha'(t)\| = 1$ para todo $t \in I$.

Definição 16.34.

- (a) Um caminho $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é *retificável* se existe $M \in \mathbb{R}$ tal que

$$L_a^b(\alpha, P) \leq M$$

para toda partição $P : a = t_0 < \dots < t_k = b$ de $[a, b]$, onde

$$L_a^b(\alpha, P) := \sum_{i=1}^k \|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\|.$$

- (b) Seja $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ um caminho retificável. O *comprimento da curva* descrita por α é definido como

$$L_a^b(\alpha) := \sup \{L_a^b(\alpha, P) : P \in \mathcal{P}[a, b]\}.$$

Teorema 16.35. Se um caminho $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é de classe C^1 em $[a, b]$, então

$$L_a^b(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt.$$

Prova.

■

Capítulo 17

Campos Escalares e Vetoriais

Definição 17.1. Sejam $m, n \in \mathbb{N}$.

- (a) Um *campo* é uma função $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.
- (b) Um campo $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é um *campo escalar* se $m = 1$. Ou seja, um *campo escalar* é uma função $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.
- (c) Um campo $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é um *campo vetorial* se $m \geq 2$.

Teorema 17.2. Se $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é um campo, então existem e são únicas as funções $f_i : X \rightarrow \mathbb{R}$, com $i \in [m]$, tais que

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))$$

para todo $x \in X$. Isso é denotado por $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$.

Prova. ■

Definição 17.3. Uma função $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tem limite $L \in \mathbb{R}^m$ quando x tende a $a \in X'$ se para todo $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existe $\delta = \delta(\epsilon, a) \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que

$$0 < \|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - L\| < \epsilon$$

para todo $x \in X$. Isso é denotado por

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L.$$

Proposição 17.4. Sejam $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $L \in \mathbb{R}^m$ e $a \in X'$. Vale

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{\|x - a\| \rightarrow 0} \|f(x) - L\| = 0.$$

Prova.

■

Proposição 17.5 (Propriedades operatórias).

Definição 17.6 (Continuidade). Seja $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ um campo.

- (a) Dizemos que f é *contínua em $a \in A$* se para todo $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existe $\delta = \delta(\epsilon, a) \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que

$$\|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \epsilon$$

para todo $x \in A$.

- (b) Dizemos que f é *contínua em $X \subseteq A$* se f é contínua em todo ponto $a \in X$. Mais especificamente, f é contínua em X se para cada $a \in X$ e cada $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existe $\delta = \delta(\epsilon, a) \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que

$$\|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \epsilon$$

para todo $x \in A$.

Teorema 17.7. Uma função $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é contínua em $a \in A \cap A'$ se, e somente se, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Prova.

■

Teorema 17.8. Sejam $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $g : B \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ funções tais que $f(A) \subseteq B$. Se f é contínua em $a \in A$ e se g é contínua em $f(a) \in B$, então a função composta $g \circ f : X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ é contínua em a .

Prova.

■

Proposição 17.9. Sejam $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in X \cap X'$ tais que $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe. Se $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua em $t_0 \in I$, com $\alpha(t_0) = a$, e $\alpha(t) \in X$ para todo $t \in I$, com $t \neq t_0 \Rightarrow \alpha(t) \neq \alpha(t_0)$, então

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(\alpha(t)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x).$$

Prova. Ver [10], p. 165, exemplo 4.

■

Teorema 17.10 (Compostas).

- (a) Sejam $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : Y \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções tais que $f(X) \subseteq Y$. Se f é contínua em $a \in X$ e g é contínua em $f(a) \in Y$, então a função composta $g \circ f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em a .
- (b) Sejam $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma curva tais que $\alpha(t) \in X$ para todo $t \in I$. Se α é contínua em $a \in I$ e f é contínua em $f(a) \in X$, então a função composta $f \circ \alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em a .

- (c)** Sejam $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $f_1, \dots, f_n : Y \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funções tais que $(f_1(x), \dots, f_n(x)) \in X$ para todo $x \in Y$. Se f_1, \dots, f_n são contínuas em $a \in Y$, e se f é contínua em $(f_1(a), \dots, f_n(a))$, então a função composta $f((f_1(x), \dots, f_n(x)))$ é contínua em a .

Prova. Ver [10], pg. 170, Teorema 1. ■

Teorema 17.11. Sejam $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ tais que $\alpha(t) \in X$ para todo $t \in I$. Se α é contínua em $a \in I$ e f é contínua em $\alpha(a) \in X$, então a função composta $f \circ \alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em a .

Prova.

Definição 17.12. Sejam $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto, $a \in A$ e $y \in \mathbb{R}^n$.

- (a)** Um campo escalar $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ é *derivável* em a com respeito a y se existe o limite

$$f'_y(a) := \lim_{h \rightarrow 0} g(h),$$

onde $g : \{h \in \mathbb{R}_{\neq 0} : a + hy \in A\} \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por

$$g(h) := \frac{f(a + hy) - f(a)}{h}.$$

- (b)** Seja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ derivável em a com respeito a y .

- i. Se $\|y\| = 1$, então dizemos que $f'_y(a)$ é a *derivada direcional* de f na *direção* de y .
- ii. Se $y = e_k$ para algum $k \in [n]$, então dizemos que $f'_{e_k}(a)$ é a *derivada parcial* de f com respeito a e_k . Outras notações para $f'_{e_k}(a)$ são

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a), \quad D_k f(a) \quad \text{e} \quad f'_{x_k}(a).$$

Definição 17.13. Sejam $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ derivável em $a \in A$ com respeito a e_k para todo $k \in [n]$. O *gradiente* de f em a é definido como

$$\nabla f(a) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right).$$

Definição 17.14. Seja $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto. Um campo escalar $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ é *diferenciável* em $a \in A$ se existe uma transformação linear $T_a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ para a qual a função $r_a : \{h \in \mathbb{R}^n : a + h \in A\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$r_a(h) := f(a + h) - f(a) - T_a(h)$$

satisfaz $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|r_a(h)|}{\|h\|} = 0$. A transformação linear T_a é a *derivada total* de f em a .

Capítulo 18

Integrais de Linha

Definição 18.1.

- (a) Um *caminho* é uma função contínua $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$.
- (b) Um caminho $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é *suave* se γ é de classe C^1 em $]a, b[$.
- (c) Um caminho $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é *suave por partes* se existe uma partição

$$P : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b$$

tal que $\gamma_i := \gamma|_{[x_{i-1}, x_i]}$ é suave para todo $i \in [k]$.

Definição 18.2. Sejam $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ um caminho suave por partes e $f : \gamma([a, b]) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial limitado. A *integral de linha* de f com respeito a γ em $C := \gamma([a, b])$ é definida como

$$\int_C f \cdot d\gamma := \int_a^b f[\gamma(t)] \cdot \gamma'(t) dt.$$

Definição 18.3. Seja $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ um caminho. Um caminho $\beta : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma *reparametrização* de α se existe uma bijeção $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$, derivável em $[c, d]$, com $\varphi'(t) \neq 0$ para todo $t \in [c, d]$, tal que $\beta(t) = \alpha(\varphi(t))$ para todo $t \in [c, d]$. Os caminhos α e β são *equivalentes*, enquanto a bijeção φ é uma *mudança de parâmetro*.

Proposição 18.4. Dois caminhos equivalentes descrevem a mesma curva.

Definição 18.5. Sejam $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ um caminho e $\beta : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma reparametrização de α por meio de uma mudança de parâmetro $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$.

- (a) β é uma reparametrização *positiva* se $\varphi'(t) > 0$ para todo $t \in [c, d]$. Dizemos que os caminhos α e β têm o *mesmo sentido* e que a mudança de parâmetro *conserva a orientação* do traço.
- (b) β é uma reparametrização *negativa* se $\varphi'(t) < 0$ para todo $t \in [c, d]$. Dizemos que os caminhos α e β têm *sentidos opostos* e que a mudança de parâmetro *inverte a orientação* do traço.

Teorema 18.6. Sejam $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\gamma_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ caminhos suaves por partes equivalentes. Seja $f : C \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial limitado, onde C é o traço dos caminhos γ_1 e γ_2 .

- (a) Se γ_1 e γ_2 têm o mesmo sentido, então

$$\int_C f \cdot d\gamma_1 = \int_C f \cdot d\gamma_2.$$

- (b) Se γ_1 e γ_2 têm sentidos opostos, então

$$\int_C f \cdot d\gamma_1 = - \int_C f \cdot d\gamma_2.$$

Prova.

■

Definição 18.7. Sejam $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ um caminho de classe C^1 em $[a, b]$ e $f : \gamma([a, b]) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ um campo escalar limitado. A *integral de linha* de f com respeito a γ em $C := \gamma([a, b])$ é definida como

$$\int_C f \cdot ds := \int_a^b f[\gamma(t)] \cdot \|\gamma'(t)\| dt.$$

Parte VI

Probabilidade

Capítulo 19

Combinatória Finita

Proposição 19.1.

- (a) (Regra da soma) Se n conjuntos finitos X_1, X_2, \dots, X_n são conjuntos finitos dois a dois disjuntos, então o conjunto $\bigcup_{i=1}^n X_i$ é finito e

$$\left| \bigcup_{i=1}^n X_i \right| = \sum_{i=1}^n |X_i|.$$

- (b) (Regra do produto) Se X_1, X_2, \dots, X_n são conjuntos finitos, então o conjunto $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ é finito e

$$|X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n| = \prod_{i=1}^n |X_i|.$$

Prova.

- (a) Façamos indução em $n \geq 2$.

Para $n = 2$, ver [18], p. 32, teorema 6, [8], p. 14, [4], p. 2.

Para completar a indução, ver [18], p. 33, corolário 1, [8], p. 15, [4], p. 2.

- (b) Ver [18], p. 33, corolário 3.

Proposição 19.2.

- (a) Se X é um conjunto finito, então $\mathcal{P}(X)$ é finito e $|\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}$.

- (b) Se X e Y são conjuntos finitos, então o conjunto X^Y (de todas as funções $f : X \rightarrow Y$) é finito $|X^Y| = |Y|^{|X|}$.

Prova.

- (a)
- (b) Ver [18], p. 33, corolário 3.

Capítulo 20

Espaços de Probabilidade

Definição 20.1. Seja Ω um conjunto.

(a) Uma σ -álgebra é um subconjunto $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$, tal que

- i. $\Omega \in \mathcal{F}$;
- ii. se $A \in \mathcal{F}$, então $A^C \in \mathcal{F}$;
- iii. se $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$, então $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$.

(b) Um *espaço mensurável* é um par (Ω, \mathcal{F}) , onde \mathcal{F} é uma σ -álgebra em Ω .

Exemplo 20.2. Seja Ω um conjunto.

(a) $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ é um espaço mensurável.

(b) $(\Omega, \{\emptyset, \Omega\})$ é um espaço mensurável, dito *trivial*, pois $\{\emptyset, \Omega\}$ é uma σ -álgebra em Ω .

Corolário 20.3. Seja (Ω, \mathcal{F}) um espaço mensurável. Valem as seguintes afirmações.

(a) $\emptyset \in \mathcal{F}$.

(b) Se $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$, então $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$.

(c) Se $A, B \in \mathcal{F}$, então $A \setminus B \in \mathcal{F}$ e $B \setminus A \in \mathcal{F}$.

Prova.

(a) Temos $\Omega \in \mathcal{F}$, de modo que $\Omega^C \in \mathcal{F}$, isto é, $\emptyset \in \mathcal{F}$. ■

(b)

Definição 20.4. Seja (Ω, \mathcal{F}) um espaço mensurável com $\Omega \neq \emptyset$.

- (a) Uma *medida de probabilidade* em (Ω, \mathcal{F}) é uma função $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que
- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;
 - $\mathbb{P}(A) \geq 0$ para todo $A \in \mathcal{F}$;
 - se $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ e $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$, então

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n).$$

- (b) Um *espaço de probabilidade* é uma terna $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, onde $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma medida de probabilidade definida em (Ω, \mathcal{F}) . Neste contexto, dizemos que Ω é um *espaço amostral* e que os elementos de \mathcal{F} (subconjuntos de Ω) são *eventos aleatórios*, ou simplesmente *eventos*.

Proposição 20.5. Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade, $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ e $A, B \in \mathcal{F}$. Valem as seguintes afirmações.

- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$;
- $\mathbb{P}(A^C) = 1 - \mathbb{P}(A)$;
- se $A \subseteq B$, então $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A) \geq 0$;
- $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$;
- $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_i)$;
- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

Prova.

- (a) Temos $\mathbb{P}(\emptyset) \geq 0$. Notando que $\mathbb{P}(\emptyset) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \emptyset\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(\emptyset)$, só pode ser $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$. ■

Teorema 20.6. Seja Ω um conjunto enumerável. Se $p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função tal que $p(\omega) \geq 0$ para todo $\omega \in \Omega$ e

$$\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1,$$

então a tripla $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$, onde $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ é a função definida por

$$\mathbb{P}(A) := \sum_{\omega \in A} p(\omega)$$

para todo $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, é um espaço de probabilidade.

Prova.

Definição 20.7. Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade, $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ e $A \in \mathcal{F}$.

(a) Denota-se

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots \quad \text{e} \quad \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = A$$

por $A_n \uparrow A$.

(b) Denota-se

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots \quad \text{e} \quad \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = A$$

por $A_n \downarrow A$.

Proposição 20.8. Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade, $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ e $A \in \mathcal{F}$.

(a) Se $A_n \uparrow A$, então $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A)$.

(b) Se $A_n \downarrow A$, então $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A)$.

Prova.

(a) Pois tome $A_0 := \emptyset$ e defina $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ por $B_n := A_n \setminus A_{n-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. É fácil provar que $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é disjunto e que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Com isso,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k \setminus A_{k-1}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k \setminus A_{k-1}) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n [\mathbb{P}(A_k) - \mathbb{P}(A_{k-1})] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n), \end{aligned}$$

como queríamos. ■

(b) Se $A_n \downarrow A$, então $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots$ e $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = A$. Observando que

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots \Leftrightarrow A_1^C \subseteq A_2^C \subseteq A_3^C \subseteq \dots,$$

trivialmente temos $A_n^C \uparrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n^C = A^C$, donde $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n^C) = \mathbb{P}(A^C)$ pelo item anterior. Com isso,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} [1 - \mathbb{P}(A_n^C)] = 1 - \mathbb{P}(A^C) = \mathbb{P}(A),$$

como queríamos. ■

Definição 20.9. Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade. A *probabilidade condicional* de $A \in \mathcal{F}$ dado $B \in \mathcal{F}$ é definida como

$$\mathbb{P}(A|B) := \begin{cases} \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} & \text{se } \mathbb{P}(B) > 0; \\ \mathbb{P}(A) & \text{se } \mathbb{P}(B) = 0. \end{cases}$$

Proposição 20.10. Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade e $B \in \mathcal{F}$. A terna $(\Omega, \mathcal{F}, \bar{\mathbb{P}})$, onde $\bar{\mathbb{P}} : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por $\bar{\mathbb{P}}(A) := \mathbb{P}(A|B)$ para todo $A \in \mathcal{F}$, é um espaço de probabilidade.

Prova. Ver [19], proposição 2.2. ■

Teorema 20.11 (Regra do produto). Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade e $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$. Tem-se

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \prod_{i=2}^n \mathbb{P}\left(A_i \mid \bigcap_{j=1}^{i-1} A_j\right).$$

Prova. Basta fazer indução em n . Ver [19], teorema 2.5. ■

Teorema 20.12 (Probabilidade total). Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade e $A \in \mathcal{F}$. Se $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ é uma partição de Ω , então

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(B_n) \mathbb{P}(A|B_n).$$

Prova. ■

Corolário 20.13 (fórmula de Bayes). Sejam

(a) Oi

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B)}{\mathbb{P}(A)} \cdot \mathbb{P}(B).$$

(b) Se $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ é uma partição de Ω , então

$$\mathbb{P}(B_j|A) = \frac{\mathbb{P}(B_j)\mathbb{P}(B_j|A)}{\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(B_n)\mathbb{P}(A|B_n)}$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. ■

Prova.

Definição 20.14. Dois eventos $A, B \in \mathcal{F}$ são *independentes* se $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

Proposição 20.15. Dois eventos $A, B \in \mathcal{F}$ são independentes se, e somente se, $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$. ■

Prova.

Definição 20.16. Seja J um conjunto de índices.

- (a) Eventos independentes dois a dois.
- (b) Eventos independentes

20.1 Variáveis Aleatórias

Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade.

Definição 20.17. Uma *variável aleatória* é uma função $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $X^{-1}(I) \in \mathcal{F}$ para todo intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$.

Definição 20.18. Seja $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma variável aleatória. A *função de distribuição acumulada* de X é a função $F_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $F_X(x) = \mathbb{P}(X \in]-\infty, x])$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Proposição 20.19. Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade, $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma variável aleatória e $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ a FDA de X . Valem as seguintes afirmações.

- (a) F_X é crescente.
- (b) F_X é contínua à direita.
- (c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$.

Definição 20.20. Uma função $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma *função de distribuição* se é crescente, contínua à direita e $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$.

Definição 20.21. Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma *função de densidade* se $f \geq 0$ e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1.$$

Proposição 20.22. Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de densidade, então a função $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ é uma função de distribuição. ■

Prova.

Definição 20.23. Duas variáveis aleatórias $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ são *independentes* se os eventos $[X \in I_1], [Y \in I_2] \in \mathcal{F}$ são independentes para quaisquer intervalos $I_1, I_2 \subseteq \mathbb{R}$.

20.1.1 Distribuições Discretas

Definição 20.24. Uma variável aleatória $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é *discreta* se existe $A \subsetneq \mathbb{R}$ enumerável tal que $\mathbb{P}(X \in A) = 1$.

Definição 20.25. Seja $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma variável aleatória.

- (a) Dizemos que X tem distribuição *Bernoulli* de parâmetro $p \in]0, 1[$ se $\mathbb{P}(X = 1) = p$ e $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$. Isso é denotado por $X \sim \text{Bernoulli}(p)$.
- (b) Dizemos que X tem distribuição *geométrica* de parâmetro $p \in]0, 1[$ se $\mathbb{P}(X = k) = p(1 - p)^{k-1}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Isso é denotado por $X \sim \text{Geom}(p)$.
- (c) Dizemos que X tem distribuição *binomial* de parâmetros $n \in \mathbb{N}$ e $p \in]0, 1[$ se

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Isso é denotado por $X \sim \text{Binom}(n, p)$.

- (d) Dizemos que X tem distribuição *Poisson* de parâmetro $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ se

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Isso é denotado por $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$.

Proposição 20.26. As distribuições da definição (20.25) são discretas.

Prova.

(a)

20.1.2 Distribuições Absolutamente Contínuas

Definição 20.27. Uma variável aleatória $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é *absolutamente contínua* se existe uma função contínua por partes $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e

$$\mathbb{P}(X \in I) = \int_I f$$

para todo intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$.

Parte VII

Outros

Capítulo 21

Shoenfield

Definição 21.1 (Linguagens de Primeira Ordem).

(a) Um *alfabeto* é uma coleção infinita de símbolos distintos, nenhum deles propriamente contido em outro, separados nas seguintes categorias:

- i. Conectivos: \vee, \neg .
- ii. Quantificador existencial: \exists .
- iii. Variáveis, uma para cada inteiro positivo n : $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$
- iv. Símbolos de função: para cada natural n , uma coleção de símbolos de função n -ários. Os símbolos de função 0-ários são chamados de *constantes*.
- v. Símbolos de predicado: para cada natural n , uma coleção de símbolos de predicado n -ários.
- vi. Símbolo de predicado binário de igualdade $=$.

Símbolos de função e de predicado distintos de $=$ são chamados de símbolos *não lógicos*. Os demais são chamados de símbolos lógicos. Usamos x, y, z e w para denotar variáveis sintáticas que variam entre variáveis, f e g para denotar variáveis sintáticas que variam entre símbolos de funções, p e q para denotar variáveis sintáticas que variam entre símbolos de predicado e e para denotar uma variável sintática que varia entre constantes.

(b) Os *termos* de um alfabeto são definidos do seguinte modo:

- i. toda variável é um termo;
- ii. se u_1, \dots, u_n são termos e f é n -ário, então $f u_1 \dots u_n$ é um termo.

Termos são apenas expressões que denotam indivíduos. Note que constantes também são termos. Usamos a, b, c e d para denotar variáveis sintáticas que variam entre termos.

(c) As *fórmulas* de um alfabeto são definidas do seguinte modo:

- i. se u_1, \dots, u_n são termos e p é n -ário, então $p u_1 \dots u_n$ é uma fórmula;
- ii. se u é uma fórmula, então $\neg u$ é uma fórmula;
- iii. se u e v são fórmulas, então $\vee uv$ é uma fórmula;
- iv. se u é uma fórmula, então $\exists x u$ é uma fórmula.

As fórmulas do tipo i. são chamadas de *atômicas*.

(d) Uma *linguagem de primeira ordem* \mathcal{L} consiste num alfabeto como descrito no item (a) e termos (\mathcal{L} -termos) e fórmulas (\mathcal{L} -fórmulas) como descritos nos itens (b) e (c). Uma linguagem de primeira ordem fica então completamente determinada pelos seus símbolos não lógicos.

Definição 21.2. Um *designador* é uma expressão que é um termo ou uma fórmula.

Proposição 21.3. Todo designador tem a forma $uv_1 \dots v_n$, onde u é um símbolo do alfabeto, v_1, \dots, v_n são designadores e n é um natural determinado por u .

Prova. Se d é um designador, então d

Definição 21.4. Duas expressões são *compatíveis* se uma delas puder ser obtida adicionando alguma expressão (possivelmente a expressão vazia) ao final da outra.

Proposição 21.5. Sejam u, u', v e v' expressões.

- (a) Se uv e $u'v'$ são compatíveis, então u e u' são compatíveis;
- (b) se uv e uv' são compatíveis, então v e v' são compatíveis.

Prova.

Lema 21.6. Seja n um natural. Se u_1, \dots, u_n e u'_1, \dots, u'_n são designadores, e $u_1 \dots u_n$ e $u'_1 \dots u'_n$ são compatíveis, então u'_i é u_i , para $i = 1, \dots, n$.

Prova. Faremos indução no comprimento de $u_1 \dots u_n$. Escreva u_1 como $vv_1 \dots v_k$, onde v é um símbolo de índice k e v_1, \dots, v_k são designadores. Como u'_1 começa com v , ele tem a forma $vv'_1 \dots v'_k$, onde v'_1, \dots, v'_k são designadores. Com isso, temos que u_1 é compatível com u'_1 , donde $v_1 \dots v_k$ é compatível com $v'_1 \dots v'_k$. Daí, pela hipótese de indução, v_i é v'_i para $i = 1, \dots, k$, donde u_1 é u'_1 . Com isso, temos que $u_2 \dots u_n$ é compatível com $u'_2 \dots u'_n$; assim, pela hipótese de indução, u_i é u'_i para $i = 2, \dots, n$.

Teorema 21.7 (Formação).

Lema 21.8.

Teorema 21.9 (Ocorrência).

Bibliografia

- [1] APOSTOL, Tom Mike. *Calculus Volume I*. 2^a ed. John Wiley e Sons, Inc., 1969.
- [2] APOSTOL, Tom Mike. *Calculus Volume II*. 2^a ed. John Wiley e Sons, Inc., 1969.
- [3] AURICHI, Leandro F. *Cálculo não renal*. Notas de Aula, 2025.
- [4] CAMINHA, Antonio. *Tópicos de Matemática Elementar - volume 4: Combinatória*. 3^a ed. Editora da SBM, 2024.
- [5] FAJARDO, Rogério A. S. *A Teoria dos Conjuntos e os Fundamentos da Matemática*. 1^a ed. Edusp, 2024.
- [6] FAJARDO, Rogério A. S. *Lógica Matemática*. 1^a ed. Edusp, 2017.
- [7] FEITOSA, Hércules de Araújo; ALFONSO, Alexys Bruno; NASCIMENTO, Maria Cunho. *Teoria dos Conjuntos*. 1^a ed. Editora Ciência Moderna, 2010.
- [8] FRANCO, Tertuliano. *Princípios de Combinatória e Probabilidade*. 1^a ed. Editora do IMPA, 2020.
- [9] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. *Um Curso de Cálculo Volume 1*. 5^a ed. LTC, 2001.
- [10] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. *Um Curso de Cálculo Volume 2*. 5^a ed. LTC, 2001.
- [11] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. *Um Curso de Cálculo Volume 3*. 5^a ed. LTC, 2001.
- [12] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. *Um Curso de Cálculo Volume 4*. 5^a ed. LTC, 2001.
- [13] JECH, Thomas; HRBACEK, Karel. *Introduction to Set Theory*. 3^a ed. CRC Press, 1999.
- [14] JOHNSONBAUGH, Richard; PFAFFENBERGER, W. E. *Foundations of Mathematical Analysis*. 1^a ed. MARCEL DEKKER, INC., 1981.

- [15] LEARY, Christopher; KRISTIANSEN, Lars. *A Friendly Introduction to Mathematical Logic*. 2^a ed. Milne Library Publishing, 2015.
- [16] LIMA, Elon Lages. *Álgebra Linear*. 10^a ed. Editora do IMPA, 2020.
- [17] LIMA, Elon Lages. *Análise Real vol. 1*. 13^a ed. Editora do IMPA, 2024.
- [18] LIMA, Elon Lages. *Curso de Análise vol. 1*. 15^a ed. Editora do IMPA, 2022.
- [19] ROLLA, Leonardo T.; LIMA, Bernardo N. B. de. *Probabilidade*. 1^a ed. Editora do IMPA, 2026.
- [20] SHOENFIELD, Joseph R. *Mathematical Logic*. 1^a ed. Addison-Wesley Publishing Company, 1967.
- [21] STROMBERG, Karl R. *An Introduction to Classical Real Analysis*. 1^a ed. Wadsworth, Inc., 1981.
- [22] WHITE, A. J. *Real Analysis: an introduction*. 1^a ed. Addison-Wesley Publishing Company, 1968.