Lineare Abbildungen

Ferienseminar: Unendlichdimensionale Vektorräume

Kai Eberl

7. September 2022

Was ist eine lineare Abbildung?

Definition

Eine Abbildung $f : V \longrightarrow W$ zwischen $\mathbb{K}$-Vektorräumen V und W heißt *lineare Abbildung* (Homomorphismus), wenn $\forall v,\ w \in V,\ \lambda \in \mathbb{K}$ gilt:

$(i)\ f(v+w) = f(v) + f(w)$ Additivität

$(ii)\ f(\lambda v) = \lambda f(v)$ Homogenität

Darstellung als Matrix

Sei $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ eine lineare Abbildung und $B = (b_1, \ldots, b_n)$ eine Basis von $\mathbb{K}^n$.

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i$$

Wegen Additivität und Homogenität:

$$f(v) = f(\lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_n b_n) = \lambda_1 f(b_1) + \cdots + \lambda_n f(b_n)$$

$\Rightarrow$ $f(v)$ ist eindeutig durch die Bilder der Basisvektoren bestimmt.

Darstellung als Matrix

Prinzip der linearen Fortsetzung

Seien V, W Vektorräume in $\mathbb{K}$ und $B = (b_1, \dots, b_n)$ eine Basis von V.

Sei nun $A: \begin{cases} B \longrightarrow W \\ b \longmapsto A(b) \end{cases}$ eine lineare Abbildung.

Dann gibt es genau eine lineare Abbildung $f: V \longrightarrow W$ mit $f|_B = A$.

f ist die lineare Fortsetzung von A auf V.

Beweis

$f(v) := \lambda_1 A(b_1) + \cdots + \lambda_n A(b_n) \in W,$ wobei $v = \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_n b_n \in V$

Linearität:

sei $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i, \quad w = \sum_{i=1}^{n} \mu_i c_i, \quad \lambda_i, \mu_i \in \mathbb{K}$

$$f(v+w) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i + \sum_{i=1}^{n} \mu_i c_i\right) = A\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i + \sum_{i=1}^{n} \mu_i c_i\right)$$

$$= A\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i\right) + A\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i c_i\right) = A(v) + A(w) = f(v) + f(w)$$

$$f(\lambda v) = f\left(\lambda \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i\right) = A\left(\lambda \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i\right) = \lambda A\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i\right) = \lambda A(v) = \lambda f(v)$$

$\Rightarrow f$ ist linear

Beweis

Eindeutigkeit:

Für zwei lineare Fortsetzungen f, g von A gilt:

$$\begin{aligned} f(v) &= f(\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n) \\ &= \lambda_1 A(b_1) + \dots + \lambda_n A(b_n) \\ &= g(\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n) \\ &= g(v) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f = g$$

Darstellung als Matrix

Darstellung linearer Abbildungen bezüglich der Standardbasen

Zu jeder linearen Abbildung f von $\mathbb{K}^n$ in $\mathbb{K}^m$ gibt es eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ mit $f = f_A$. Diese Matrix A ist gegeben als

$$A = (f(e_1), \dots, f(e_n)) \in \mathbb{K}^{m\times n}.$$

Die i-te Spalte von A ist das Bild des i-ten Basisvektors der Standardbasis.

Es gilt $f(v) = Av$.

Der Koordinatenvektor von $f(v)$ ist das Produkt der Darstellungsmatrix mit dem Koordinatenvektor von v.

Stetigkeit

Satz

Für eine lineare Abbildung L eines normierten Vektorraums V in einen normierten Vektorraum W sind folgende Eigenschaften äquivalent:

(i) *Die Abbildung L ist gleichmäßig stetig auf V.*

(ii) *Die Abbildung L ist stetig in 0_V.*

(iii) *Die Menge $\{\|Lx\|_W :\ x \in V,\ \|x\|_V \leq 1\}$ ist beschränkt.*

Beweis

$(i) \Rightarrow (ii):$

trivial

Erinnerung:

Eine Funktion $f: D \to \mathbb{C}$ heißt *gleichmäßig stetig* auf D, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \left\| f(x) - f\left(x'\right) \right\| < \varepsilon$$

für alle Punktepaare x, x' auf dem Definitionsbereich D mit $\|x - x'\| < \delta$.

Beweis

$(ii) \Rightarrow (iii):$

sei $\quad \{\|Lw\|_W : x \in V,\ \|x\|_V \leq 1\}$ unbeschränkt

$\Rightarrow\ \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in V:\ \|x_n\| \leq 1, \quad \|Lx_n\| \geq n$

$y_n := \frac{1}{n}x_n \quad \Rightarrow \quad \|y_n\| = \frac{1}{n}\|x_n\| \leq \frac{1}{n}, \quad \|Ly_n\| = \frac{1}{n}\|Lx_n\| \geq 1$

$\lim_{n\to\infty} y_n = 0_V, \quad L0_V = 0_W$ für jede lineare Abbildung

gleichzeitig $\quad \|Ly_n\| \geq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow\ L$ in 0_V unstetig

Beweis

$(iii) \Rightarrow (i):$

$M := \sup\{\|Lx\| : x \in V,\ \|x\| \leq 1\} < \infty$

dafür zu zeigen: $\|Lx - Ly\| \leq M\|x-y\| \quad \forall x,\ y$ in V

$z := \dfrac{x-y}{\|x-y\|} \qquad x \neq y$ (für $x = y$ trivial)

$\Rightarrow \|z\| = 1 \quad \Rightarrow \|Lz\| \leq M$

$\Rightarrow \left\| \dfrac{L(x-y)}{\|x-y\|} \right\| \leq M \quad \Rightarrow \|L(x-y)\| \leq M\|x-y\|$

$\Rightarrow$ gleichmäßig stetig

Beispiel 1

Auf den Räumen

$$\ell^1 := \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \;\middle|\; \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \text{ ist konvergent} \right\}, \quad \ell^2 := \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \;\middle|\; \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \text{ ist konvergent} \right\}$$

sind durch $\|x\|_1 := \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ bzw. $\|x\|_2 := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$

Normen erklärt.

Es sei $L : \begin{cases} \ell^2 \to \ell^1, \\ (x_1, x_2, x_3, \ldots) \mapsto \left(\frac{x_1}{1}, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \ldots \right) \end{cases}$

Beispiel 1: Wohldefiniertheit

zu zeigen: $\quad \forall x \in \ell^2 \quad Lx \in \ell^1$

sei $\quad a, b \in \ell^2, \quad ab \in \ell^1, \quad (ab)_n := a_n b_n$

Cauchy-Schwarz: $\quad \|ab\|_1 \leq \|a\|_2 \, \|b\|_2$

sei $\quad x \in \ell^2$ beliebig, $\quad b = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad b_n := \dfrac{1}{n}$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergent $\quad \Rightarrow \|b\|_2 = \left(\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \quad \Rightarrow b \in \ell^2$

$\|xb\|_1 \leq \|x\|_2 \, \|b\|_2 < \infty \quad \Rightarrow xb \in \ell^1$

$Lx = \left(\dfrac{x_1}{1}, \dfrac{x_2}{2}, \dfrac{x_3}{3}, \cdots \right) = xb \qquad \Rightarrow L : \begin{cases} \ell^2 \to \ell^1 \\ x \mapsto Lx := bx \end{cases}$ definiert eine Abbildung.

Beispiel 1: Linearität

für $a, b \in \ell^2$ gilt:

$$
\begin{aligned}
L(a+b) &= \left(\frac{a_1+b_1}{1}, \frac{a_2+b_2}{2}, \frac{a_3+b_3}{3}, \dots\right) \\
&= \left(\frac{a_1}{1}, \frac{a_2}{2}, \frac{a_3}{3}, \dots\right) + \left(\frac{b_1}{1}, \frac{b_2}{2}, \frac{b_3}{3}, \dots\right) = La + Lb \\
L(\lambda a) &= \left(\frac{\lambda a_1}{1}, \frac{\lambda a_2}{2}, \frac{\lambda a_3}{3}, \dots\right) = \lambda \left(\frac{a_1}{1}, \frac{a_2}{2}, \frac{a_3}{3}, \dots\right) = \lambda\, La \qquad \forall a \in \ell^2,\ \lambda \in \mathbb{C}
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ L ist lineare Abbildung

Beispiel 1: Linearität

Darstellung als "$(\infty \times \infty)$-Matrix":

$$Lx = \begin{pmatrix} b_1 & & & \\ & b_2 & & \\ & & b_3 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \frac{1}{2} & & \\ & & \frac{1}{3} & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

möglich wegen Wohldefiniertheit $\Longleftrightarrow$ Reihe konvergiert

Beispiel 2

Es sei $A : \begin{cases} \ell^\infty \to \ell^\infty, \\ (x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto \left(\frac{x_1}{1}, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots\right) \end{cases}$

wobei $\ell^\infty := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \sup |x_n| < \infty\}$

Beispiel 2: Wohldefiniertheit

zu zeigen: $\forall x \in \ell^\infty \quad Ax \in \ell^\infty$

sei $x \in \ell^\infty \Rightarrow \left|\frac{x_n}{n}\right| \leq |x_n| \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \|Ax\|_\infty = \sup_{n \in N} \left|\frac{x_n}{n}\right| \leq \sup |x_n| = \|x\|_\infty$$

$x \in \ell^\infty \quad \Rightarrow \|Ax\|_\infty \in \ell^\infty$

$$\Rightarrow A : \begin{cases} \ell^\infty \to \ell^\infty \\ x \mapsto Ax \end{cases}$$ definiert eine Abbildung.

Beispiel 2: Linearität

für $a, b \in \ell^\infty$ gilt:

$$\begin{aligned}
A(a+b) &= \left(\frac{a_1+b_1}{1}, \frac{a_2+b_2}{2}, \frac{a_3+b_3}{3}, \ldots\right) \\
&= \left(\frac{a_1}{1}, \frac{a_2}{2}, \frac{a_3}{3}, \ldots\right) + \left(\frac{b_1}{1}, \frac{b_2}{2}, \frac{b_3}{3}, \ldots\right) = Aa + Ab \\
A(\lambda a) &= \left(\frac{\lambda a_1}{1}, \frac{\lambda a_2}{2}, \frac{\lambda a_3}{3}, \ldots\right) = \lambda \left(\frac{a_1}{1}, \frac{a_2}{2}, \frac{a_3}{3}, \ldots\right) = \lambda\, Aa \quad \forall a \in \ell^\infty,\ \lambda \in \mathbb{C}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ A ist lineare Abbildung.

Beispiel 2: Injektivität

zu zeigen: $Ax = Ay \Rightarrow x = y$

$Ax = Ay \Leftrightarrow A(x-y) = 0$ wegen Additivität, Homogenität

zu zeigen (vereinfacht): $Ax = 0 \Rightarrow x = 0$

sei $x \in \ell^\infty$, $Ax = 0$

$$\Rightarrow \frac{x_n}{n} = 0 \quad \forall n \in N \quad \Rightarrow x_n = 0 \quad \forall n \in N \quad \Rightarrow x = 0$$

$\Rightarrow$ A ist injektiv.

Beispiel 2: Surjektivität

Gegenbeispiel:

$y := (1, 1, 1, \ldots) \in \ell^\infty$

angenommen, $\exists\, x \in \ell^\infty : \; Ax = y$

$\Rightarrow \; \frac{x_n}{n} = y_n, \quad x_n = ny_n = n \quad \forall n \in N$

$\Rightarrow \; x$ unbeschränkt, $x \notin \ell^\infty$

$\Rightarrow \; A$ ist nicht surjektiv.

$\Rightarrow \; A$ ist injektiv, aber nicht surjektiv.

Beispiel 2: Stetigkeit

A stetig $\Leftrightarrow M := \{\|Ax\|_\infty : x \in \ell^\infty, \|x\|_\infty \leq 1\}$ beschränkt

$\|Ax\|_\infty \leq \|x\|_\infty$ siehe oben $\Rightarrow \|Ax\|_\infty \leq 1 \quad \forall x \in \ell^\infty : \|x\|_\infty \leq 1$

$\Rightarrow M$ beschränkt, A stetig.

Beispiel 2: Stetigkeit der Umkehrabbildung

$$x^{(k)} := A^{-1} y^{(k)} \quad x_n^{(k)} = \begin{cases} k, & \text{falls } n = k \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

sei $y^{(k)} \in \ell^\infty, \quad k \in \mathbb{N} \quad y_n^{(k)} := \begin{cases} 1, & \text{falls } n = k \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

$$\Rightarrow \left\| y^{(k)} \right\| = 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \left\| A^{-1} y^{(k)} \right\|_\infty = \left\| x^{(k)} \right\|_\infty = k$$

$\Rightarrow \left\{ \|A^{-1} y\|_\infty : y \in X, \|y\|_\infty \leq 1 \right\}$ ist unbeschränkt

$\Rightarrow A^{-1}$ ist *nicht* stetig.

Beispiel 3

Gegeben ist die lineare Abbildung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X} : \begin{cases} \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X], \\ p \;\longmapsto\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X} p, \end{cases}$$

die jedem Polynom seine Ableitung zuweist nach dem Schema:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}\left(\sum_{j=0}^{n} a_n X^n\right) = \sum_{j=1}^{n} n a_n X^{n-1}$$

Beispiel 3: Linearität

$\forall\ \lambda \in \mathbb{R}, \quad p,\ q \in \mathbb{R}[X]$ gilt: $\qquad \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}(\lambda p + q) = \lambda \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X} p + \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X} q.$

Beispiel 3: Injektivität, Surjektivität

Injektivität:

Gegenbeispiel:

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}(X+1) = 1 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}(X-1)$

Surjektivität:

$\forall\ p = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \ \in\ \mathbb{R}[X]$

$\exists\ P = a_0 X + \frac{1}{2} a_1 X^2 + \cdots + \frac{1}{n+1} a_n X^{n+1} \ \in\ \mathbb{R}[X]:\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}(P) = p.$

$\Rightarrow\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}$ ist surjektiv, aber nicht injektiv.

Lässt sich jede lineare Abbildung als Produkt mit einer Matrix schreiben?

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{n=1}^{\infty} a_{1n} x_n \\ \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} x_n \\ \sum_{n=1}^{\infty} a_{3n} x_n \\ \vdots \end{pmatrix}$$