Lineare Abbildungen

Ferienseminar: Unendlichdimensionale Vektorräume

Kai Eberl

Definition: Lineare Abbildung

Eine Abbildung $f : V \to W$ zwischen $\mathbb{K}$-Vektorräumen V und W heißt *lineare Abbildung* (Homomorphismus), wenn $\forall v,\ w \in V,\ \lambda \in \mathbb{K}$ gilt:

(i) $f(v+w) = f(v) + f(w)$ Additivität

(ii) $f(\lambda v) = \lambda f(v)$ Homogenität

Darstellung als Matrix

Sei $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ eine lineare Abbildung und $B = (b_1, \ldots, b_n)$ eine Basis von $\mathbb{K}^n$.

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i$$

Wegen Additivität und Homogenität:

$$f(v) = f(\lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_n b_n) = \lambda_1 f(b_1) + \cdots + \lambda_n f(b_n)$$

$\Rightarrow$ $f(v)$ ist eindeutig durch die Bilder der Basisvektoren bestimmt.

Darstellung einer linearen Abbildung bezüglich der Standardbasen
Zu jeder linearen Abbildung f von $\mathbb{K}^n$ in $\mathbb{K}^m$ gibt es eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ mit $f = f_A$. Diese Matrix A ist gegeben als

$$A = (f(e_1), \ldots, f(e_n)) \in \mathbb{K}^{m \times n}.$$

Die i-te Spalte von A ist das Bild des i-ten Basisvektors der Standardbasis. Es gilt $f(v) = Av$.
Der Koordinatenvektor von $f(v)$ ist das Produkt der Darstellungsmatrix mit dem Koordinatenvektor von v.

Stetigkeit

Satz:
Für eine lineare Abbildung L eines normierten Vektorraums V in einen normierten Vektorraum W sind folgende Eigenschaften äquivalent:

(i) Die Abbildung L ist gleichmäßig stetig auf V.

(ii) Die Abbildung L ist stetig in 0_V.

(iii) Die Menge $\{\|Lx\|_W :\ x \in V,\ \|x\|_V \leq 1\}$ ist beschränkt.

Beweis
$(i) \Rightarrow (ii)$: trivial

$(ii) \Rightarrow (iii):$
sei $\quad \{\|Lw\|_W : x \in V,\ \|x\|_V \leq 1\}$ unbeschränkt
$\Rightarrow\ \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in V:\ \|x_n\| \leq 1, \quad \|Lx_n\| \geq n$
$y_n := \frac{1}{n} x_n \quad \Rightarrow \quad \|y_n\| = \frac{1}{n}\|x_n\| \leq \frac{1}{n}, \quad \|Ly_n\| = \frac{1}{n}\|Lx_n\| \geq 1$
$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0_V, \quad L0_V = 0_W$ für jede lineare Abbildung
gleichzeitig $\quad \|Ly_n\| \geq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow\ L$ in 0_V unstetig

$(iii) \Rightarrow (i):$
$M := \sup\{\|Lx\| : x \in V,\ \|x\| \leq 1\} < \infty$
dafür zu zeigen: $\quad \|Lx - Ly\| \leq M\|x - y\| \quad \forall x,\ y$ in V
$z := \dfrac{x-y}{\|x-y\|} \qquad x \neq y \quad$ (für $x = y$ trivial)
$\Rightarrow\ \|z\| = 1 \quad \Rightarrow \|Lz\| \leq M$
$\Rightarrow\ \left\| \dfrac{L(x-y)}{\|x-y\|} \right\| \leq M \quad \Rightarrow\ \|L(x-y)\| \leq M\|x-y\|$
Damit gilt für jedes Punktepaar, das einen Abstand von höchstens δ hat, dass $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$.
$\Rightarrow$ gleichmäßig stetig

Eigenschaften von linearen Abbildungen in unendlichdimensionalen Vektorräumen

In endlichdimensionalen Vektorräumen gilt für eine lineare Abbildung f:
Haben Definitions- und Wertemenge die gleiche Mächtigkeit, sind folgende Aussagen äquivalent:
f ist injektiv $\iff$ f ist surjektiv $\iff$ f ist bijektiv.
Dass dies in unendlichdimensionalen Vektorräumen nicht unbedingt gelten muss, zeigen die folgenden Beispiele.

Beispiel 1

Es sei $\quad A: \begin{cases} \ell^\infty \to \ell^\infty, \\ (x_1, x_2, x_3, \dots) \ \mapsto \ \left(\frac{x_1}{1}, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots\right) \end{cases}$

Diese Abbildung ist linear und wohldefiniert, die Bildfolgen konvergieren also auf der l^∞ Norm. Daher kann A als "$(\infty \times \infty)$-Matrix"dargestellt werden:

$$Lx = \begin{pmatrix} b_1 & & & \\ & b_2 & & \\ & & b_3 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \frac{1}{2} & & \\ & & \frac{1}{3} & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Es lässt sich zeigen, dass diese Abbildung injektiv, aber nicht surjektiv ist.

Beispiel 2 Gegeben ist die lineare Abbildung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X} : \begin{cases} \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X], \\ p \ \mapsto \ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X} p, \end{cases} , \qquad \text{wobei} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}\left(\sum_{j=0}^{n} a_n X^n\right) = \sum_{j=1}^{n} n a_n X^{n-1}$$

Diese lineare Abbildung ist surjektiv, aber nicht injektiv (mehrere Polynome mit unterschiedlichen Konstanten können dieselbe Ableitung haben).