

Lineare Abbildungen

Ferienseminar: Unendlichdimensionale Vektorräume

Kai Eberl

7. September 2022

Was ist eine lineare Abbildung?

Definition

Eine Abbildung $f : V \rightarrow W$ zwischen \mathbb{K} -Vektorräumen V und W heißt *lineare Abbildung* (Homomorphismus), wenn $\forall v, w \in V, \lambda \in \mathbb{K}$ gilt:

$$(i) f(v + w) = f(v) + f(w) \quad \text{Additivität}$$

$$(ii) f(\lambda v) = \lambda f(v) \quad \text{Homogenität}$$

Darstellung als Matrix

Sei $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ eine lineare Abbildung und $B = (b_1, \dots, b_n)$ eine Basis von \mathbb{K}^n .

$$v = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i$$

Wegen Additivität und Homogenität:

$$f(v) = f(\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n) = \lambda_1 f(b_1) + \dots + \lambda_n f(b_n)$$

$\Rightarrow f(v)$ ist eindeutig durch die Bilder der Basisvektoren bestimmt.

Darstellung als Matrix

Prinzip der linearen Fortsetzung

Seien V, W Vektorräume in \mathbb{K} und $B = (b_1, \dots, b_n)$ eine Basis von V .

Sei nun $A : \begin{cases} B \rightarrow W \\ b \mapsto A(b) \end{cases}$ eine lineare Abbildung.

Dann gibt es genau eine lineare Abbildung $f : V \rightarrow W$ mit $f|_B = A$.

f ist die lineare Fortsetzung von A auf V .

Beweis

$$f(v) := \lambda_1 A(b_1) + \cdots + \lambda_n A(b_n) \in W, \quad \text{wobei } v = \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_n b_n \in V$$

Linearität:

$$\text{sei } v = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i, \quad w = \sum_{i=1}^n \mu_i b_i, \quad \lambda_i, \mu_i \in \mathbb{K}$$

$$\begin{aligned} f(v+w) &= f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i b_i + \sum_{i=1}^n \mu_i b_i\right) = A\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i b_i + \sum_{i=1}^n \mu_i b_i\right) \\ &= A\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i b_i\right) + A\left(\sum_{i=1}^n \mu_i b_i\right) = A(v) + A(w) = f(v) + f(w) \\ f(\lambda v) &= f\left(\lambda \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i\right) = A\left(\lambda \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i\right) = \lambda A\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i b_i\right) = \lambda A(v) = \lambda f(v) \end{aligned}$$

$\Rightarrow f$ ist linear
Kai Eberl | Lineare Abbildungen

Beweis

Eindeutigkeit:

Für zwei lineare Fortsetzungen f, g von A gilt:

$$\begin{aligned} f(v) &= f(\lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_n b_n) \\ &= \lambda_1 A(b_1) + \cdots + \lambda_n A(b_n) \\ &= g(\lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_n b_n) \\ &= g(v) \\ \Rightarrow f &= g \end{aligned}$$

Darstellung als Matrix

Darstellung linearer Abbildungen bezüglich der Standardbasen

Zu jeder linearen Abbildung f von \mathbb{K}^n in \mathbb{K}^m gibt es eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ mit $f = f_A$. Diese Matrix A ist gegeben als

$$A = (f(e_1), \dots, f(e_n)) \in \mathbb{K}^{m \times n}.$$

Die i -te Spalte von A ist das Bild des i -ten Basisvektors der Standardbasis.

Es gilt $f(v) = Av$.

Der Koordinatenvektor von $f(v)$ ist das Produkt der Darstellungsmatrix mit dem Koordinatenvektor von v .

Stetigkeit

Satz

Für eine lineare Abbildung L eines normierten Vektorraums V in einen normierten Vektorraum W sind folgende Eigenschaften äquivalent:

- (i) Die Abbildung L ist gleichmäßig stetig auf V .*
- (ii) Die Abbildung L ist stetig in 0_V .*
- (iii) Die Menge $\{\|Lx\|_W : x \in V, \|x\|_V \leq 1\}$ ist beschränkt.*

Beweis

(i) \Rightarrow (ii) :

trivial

Erinnerung:

Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *gleichmäßig stetig* auf D , wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \|f(x) - f(x')\| < \varepsilon$$

für alle Punktepaaire x, x' auf dem Definitionsbereich D mit $\|x - x'\| < \delta$.

Beweis

(ii) \Rightarrow (iii) :

sei $\{\|Lx\|_W : x \in V, \|x\|_V \leq 1\}$ unbeschränkt

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in V : \|x_n\| \leq 1, \quad \|Lx_n\| \geq n$$

$$y_n := \frac{1}{n}x_n \quad \Rightarrow \quad \|y_n\| = \frac{1}{n}\|x_n\| \leq \frac{1}{n}, \quad \|Ly_n\| = \frac{1}{n}\|Lx_n\| \geq 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0_V, \quad L0_V = 0_W \quad \text{für jede lineare Abbildung}$$

$$\text{gleichzeitig} \quad \|Ly_n\| \geq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow L \text{ in } 0_V \text{ unstetig}$$

Beweis

(iii) \Rightarrow (i) :

$$M := \sup\{\|Lx\| : x \in V, \|x\| \leq 1\} < \infty$$

dafür zu zeigen: $\|Lx - Ly\| \leq M\|x - y\| \quad \forall x, y \text{ in } V$

$$z := \frac{x - y}{\|x - y\|} \quad x \neq y \quad (\text{für } x = y \text{ trivial})$$

$$\Rightarrow \|z\| = 1 \quad \Rightarrow \|Lz\| \leq M$$

$$\Rightarrow \left\| \frac{L(x - y)}{\|x - y\|} \right\| \leq M \quad \Rightarrow \|L(x - y)\| \leq M\|x - y\|$$

\Rightarrow gleichmäßig stetig

Beispiel 1

Auf den Räumen

$$\ell^1 := \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \left| \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \text{ ist konvergent} \right. \right\}, \quad \ell^2 := \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \left| \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \text{ ist konvergent} \right. \right\}$$

sind durch $\|x\|_1 := \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ bzw. $\|x\|_2 := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$

Normen erklärt.

Es sei $L : \begin{cases} \ell^2 \rightarrow \ell^1, \\ (x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto \left(\frac{x_1}{1}, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots \right) \end{cases}$

Beispiel 1: Wohldefiniertheit

zu zeigen: $\forall x \in \ell^2 \quad Lx \in \ell^1$

sei $a, b \in \ell^2$, $ab \in \ell^1$, $(ab)_n := a_n b_n$

Hölder-Ungleichung: $\|ab\|_1 \leq \|a\|_2 \|b\|_2$

sei $x \in \ell^2$ beliebig, $b = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $b_n := \frac{1}{n}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ konvergent} \Rightarrow \|b\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \Rightarrow b \in \ell^2$$

$$\|xb\|_1 \leq \|x\|_2 \|b\|_2 < \infty \Rightarrow xb \in \ell^1$$

$$Lx = \left(\frac{x_1}{1}, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots \right) = xb \quad \Rightarrow \quad L : \begin{cases} \ell^2 \rightarrow \ell^1 \\ x \mapsto Lx := bx \end{cases} \text{ definiert eine Abbildung.}$$

Beispiel 1: Linearität

für $a, b \in \ell^2$ gilt:

$$\begin{aligned} L(a + b) &= \left(\frac{a_1 + b_1}{1}, \frac{a_2 + b_2}{2}, \frac{a_3 + b_3}{3}, \dots \right) \\ &= \left(\frac{a_1}{1}, \frac{a_2}{2}, \frac{a_3}{3}, \dots \right) + \left(\frac{b_1}{1}, \frac{b_2}{2}, \frac{b_3}{3}, \dots \right) = La + Lb \\ L(\lambda a) &= \left(\frac{\lambda a_1}{1}, \frac{\lambda a_2}{2}, \frac{\lambda a_3}{3}, \dots \right) = \lambda \left(\frac{a_1}{1}, \frac{a_2}{2}, \frac{a_3}{3}, \dots \right) = \lambda La \quad \forall a \in \ell^2, \lambda \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

$\Rightarrow L$ ist lineare Abbildung

Beispiel 1: Linearität

Darstellung als " $(\infty \times \infty)$ -Matrix":

$$Lx = \begin{pmatrix} b_1 & & & \\ & b_2 & & \\ & & b_3 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \frac{1}{2} & & \\ & & \frac{1}{3} & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

möglich wegen Wohldefiniertheit \iff Reihe konvergiert

Beispiel 2

$$\text{Es sei } A : \begin{cases} \ell^\infty \rightarrow \ell^\infty, \\ (x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto \left(\frac{x_1}{1}, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots\right) \end{cases}$$

wobei $\ell^\infty := \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \sup |x_n| < \infty\}$

Beispiel 2: Wohldefiniertheit

zu zeigen: $\forall x \in \ell^\infty \quad Ax \in \ell^\infty$

sei $x \in \ell^\infty \Rightarrow \left| \frac{x_n}{n} \right| \leq |x_n| \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \|Ax\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \frac{x_n}{n} \right| \leq \sup |x_n| = \|x\|_\infty$$

$x \in \ell^\infty \Rightarrow \|Ax\|_\infty \in \ell^\infty$

$\Rightarrow A : \begin{cases} \ell^\infty \rightarrow \ell^\infty \\ x \mapsto Ax \end{cases}$ definiert eine Abbildung.

Beispiel 2: Linearität

für $a, b \in \ell^\infty$ gilt:

$$\begin{aligned} A(a+b) &= \left(\frac{a_1+b_1}{1}, \frac{a_2+b_2}{2}, \frac{a_3+b_3}{3}, \dots \right) \\ &= \left(\frac{a_1}{1}, \frac{a_2}{2}, \frac{a_3}{3}, \dots \right) + \left(\frac{b_1}{1}, \frac{b_2}{2}, \frac{b_3}{3}, \dots \right) = Aa + Ab \\ A(\lambda a) &= \left(\frac{\lambda a_1}{1}, \frac{\lambda a_2}{2}, \frac{\lambda a_3}{3}, \dots \right) = \lambda \left(\frac{a_1}{1}, \frac{a_2}{2}, \frac{a_3}{3}, \dots \right) = \lambda Aa \quad \forall a \in \ell^\infty, \lambda \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

$\Rightarrow A$ ist lineare Abbildung.

Beispiel 2: Injektivität

zu zeigen: $Ax = Ay \Rightarrow x = y$

$Ax = Ay \Leftrightarrow A(x - y) = 0$ wegen Additivität, Homogenität

zu zeigen (vereinfacht): $Ax = 0 \Rightarrow x = 0$

sei $x \in \ell^\infty$, $Ax = 0$

$$\Rightarrow \frac{x_n}{n} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow x_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow x = 0$$

$\Rightarrow A$ ist injektiv.

Beispiel 2: Surjektivität

Gegenbeispiel:

$$y := (1, 1, 1, \dots) \in \ell^\infty$$

angenommen, $\exists x \in \ell^\infty : Ax = y$

$$\Rightarrow \frac{x_n}{n} = y_n, \quad x_n = ny_n = n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$\Rightarrow x$ unbeschränkt, $x \notin \ell^\infty$

$\Rightarrow A$ ist nicht surjektiv.

$\Rightarrow A$ ist injektiv, aber nicht surjektiv.

Beispiel 2: Stetigkeit

A stetig $\Leftrightarrow M := \{\|Ax\|_\infty : x \in \ell^\infty, \|x\|_\infty \leq 1\}$ beschränkt

$\|Ax\|_\infty \leq \|x\|_\infty$ siehe oben $\Rightarrow \|Ax\|_\infty \leq 1 \quad \forall x \in \ell^\infty : \|x\|_\infty \leq 1$

$\Rightarrow M$ beschränkt, A stetig.

Beispiel 2: Stetigkeit der Umkehrabbildung

$$\text{sei } y^{(k)} \in \ell^\infty, \quad k \in \mathbb{N} \quad y_n^{(k)} := \begin{cases} 1, & \text{falls } n = k \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \|y^{(k)}\| = 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$x^{(k)} := A^{-1}y^{(k)} \quad x_n^{(k)} = \begin{cases} k, & \text{falls } n = k \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \|A^{-1}y^{(k)}\|_\infty = \|x^{(k)}\|_\infty = k$$

$$\Rightarrow \{\|A^{-1}y\|_\infty : y \in X, \|y\|_\infty \leq 1\} \text{ ist unbeschränkt}$$

$$\Rightarrow A^{-1} \text{ ist nicht stetig.}$$

Beispiel 3

Gegeben ist die lineare Abbildung

$$\frac{d}{dX} : \begin{cases} \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X], \\ p \mapsto \frac{d}{dX}p, \end{cases}$$

die jedem Polynom seine Ableitung zuweist nach dem Schema:

$$\frac{d}{dX} \left(\sum_{j=0}^n a_n X^n \right) = \sum_{j=1}^n n a_n X^{n-1}$$

Beispiel 3: Linearität

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad p, q \in \mathbb{R}[X] \text{ gilt: } \frac{d}{dX}(\lambda p + q) = \lambda \frac{d}{dX}p + \frac{d}{dX}q.$$

Beispiel 3: Injektivität, Surjektivität

Injektivität:

Gegenbeispiel:

$$\frac{d}{dX}(X + 1) = 1 = \frac{d}{dX}(X - 1)$$

Surjektivität:

$$\forall p = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \in \mathbb{R}[X]$$

$$\exists P = a_0X + \frac{1}{2}a_1X^2 + \cdots + \frac{1}{n+1}a_nX^{n+1} \in \mathbb{R}[X] : \frac{d}{dX}(P) = p.$$

$\Rightarrow \frac{d}{dX}$ ist surjektiv, aber nicht injektiv.

Lässt sich jede lineare Abbildung als Produkt mit einer Matrix schreiben?

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{n=1}^{\infty} a_{1n}x_n \\ \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}x_n \\ \sum_{n=1}^{\infty} a_{3n}x_n \\ \vdots \end{pmatrix}$$