

# 教书育人、不忘初心,《数理统计》本科课程

## — 课程思政 20 讲

田国梁 统计学教授

南方科技大学 ● 统计与数据科学系

Email: [tiangl@sustech.edu.cn](mailto:tiangl@sustech.edu.cn)

中国 ● 广东 ● 深圳

2025 年 03 月 03 日

# 提纲 (Outline) Part I

第 1 讲 **South**与**Southern**之区别

第 2 讲 用**14 年创新编写**《数理统计》英文教材

第 3 讲 **Bayes**如何译成中文名? 英文名如何读?

第 4 讲 全概率公式 (**Law of Total Probability**) 和 Bayes 公式

第 5 讲 自然常数 (**Natural Constant**)  $e = 2.718282 \dots$  的起源

第 6 讲 从矩母函数与密度函数的关系出发, 深度理解**国王函数**  $e^x$

第 7 讲 从对数似然函数出发, 深度理解**王后函数**  $\log(x)$

第 8 讲 **标准正态分布密度**和**蛇吞象公式**

第 9 讲 从函数的一阶泰勒展开式到**线段中/外**任何一点之数学表达式

第 10 讲 函数的一阶泰勒展开之**四种形式**

# 提纲 (Outline) Part II

- 第 11 讲 指数分布与几何分布的无记忆性
- 第 12 讲 二项分布的生存函数与贝塔分布的累积分布函数之恒等式
- 第 13 讲 深度理解中心极限定理
- 第 14 讲 二项分布的正态近似和泊松近似
- 第 15 讲 从矩估计量到 Monte Carlo 积分
- 第 16 讲 从 KL 散度的角度来理解极大似然估计之定义
- 第 17 讲 从 Laplace 提出问题到 Gauss 解决问题: 正态分布的发现过程
- 第 18 讲 度量点估计量好坏的指标: 均方误差
- 第 19 讲 克拉默-拉奥 (Cramér-Rao) 不等式
- 第 20 讲 三参数 Student's  $t$ -分布及其推广

## 第 4 讲 全概率公式和 Bayes 公式

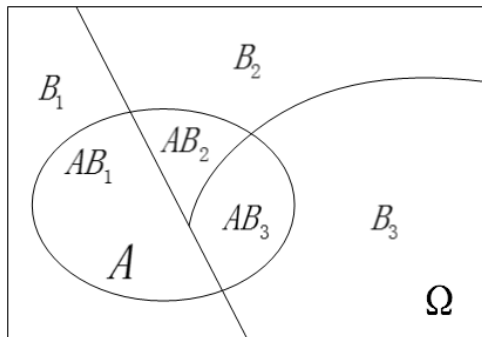


蓝穹云霞宝能城，华灯璀璨人社院

## 4.1 理解全概率公式

### 1• 剖分 (Partition)

- 如果两两互不相容 (即  $B_i \cap B_j = \emptyset$  for all  $i \neq j$ ) 的事件  $B_1, \dots, B_n$  满足  $\bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega$ , 则称  $B_1, \dots, B_n$  是样本空间  $\Omega$  的一个剖分。



## 2\* 全概率公式与证明

- ◆ 假设  $\mathbb{B}_1, \dots, \mathbb{B}_n$  是样本空间  $\Omega = \mathbb{B}_1 + \dots + \mathbb{B}_n$  的一个剖分,  $\mathbb{A}$  是一个事件 (Event)。则全概率公式可叙述为

$$\Pr(\mathbb{A}) = \Pr(\mathbb{A} \cap \Omega) \stackrel{(\text{Partition})}{=} \sum_{i=1}^n \Pr(\mathbb{A} \cap \mathbb{B}_i) \stackrel{(1.8)}{=} \sum_{i=1}^n \Pr(\mathbb{A} | \mathbb{B}_i) \Pr(\mathbb{B}_i). \quad (4.1)$$

- ◆ 这种写法等于证明了 (4.1), 易于理解全概率公式。

## 3\* 本质内涵: 由因到果

- 现实中, 我们可以把事件  $\mathbb{A}$  看成是**结果**, 把事件  $\mathbb{B}_1, \dots, \mathbb{B}_n$  看成是导致这个结果的各种可能的**原因**。
- 则全概率公式 (4.1), 就是由各种原因推理出结果事件发生的概率, 是**由因到果**。

## 4.2 理解 Bayes 公式

### 4\* Bayes 公式

- ◆ 假设  $\mathbb{B}_1, \dots, \mathbb{B}_n$  是样本空间  $\Omega = \mathbb{B}_1 + \dots + \mathbb{B}_n$  的一个剖分,  $\mathbb{A}$  是一个事件 (Even)。对  $i = 1, \dots, n$ , 则 Bayes 公式可叙述为

$$\Pr(\mathbb{B}_i|\mathbb{A}) = \frac{\Pr(\mathbb{B}_i \cap \mathbb{A})}{\Pr(\mathbb{A})} \stackrel{(4.1)}{=} \frac{\Pr(\mathbb{A}|\mathbb{B}_i) \Pr(\mathbb{B}_i)}{\sum_{j=1}^n \Pr(\mathbb{A}|\mathbb{B}_j) \Pr(\mathbb{B}_j)}. \quad (4.2)$$

### 5\* 本质内涵：由果推因

- 更重要、更实际的应用场景是，我们在日常生活中常常是观察到某种 **结果**，然后去反推造成这种结果的各种原因的概率。简单点说，就是**由果推因**。
- Bayes 公式 (4.2), 就是在观察到结果  $\mathbb{A}$  已经发生的情况下，推断是由原因  $\mathbb{B}_i$  所造成的概率的大小，以支撑我们后续的判断。

## 6\* 先验概率

- ◆ 概率 $\Pr(\mathbb{B}_i)$ 被称为**先验概率**，指的是在没有别的前提信息情况下的概率值。
- ◆ 这个概率值一般需要借助我们的**经验**，由估计而得到。

## 7\* 后验概率

- 条件概率 $\Pr(\mathbb{B}_i|\mathbb{A})$ 被称为**后验概率**，它代表在获得了结果  $\mathbb{A}$  之后， $\mathbb{B}_i$  发生的概率。
- 可以说后验概率是先验概率在获取了新信息之后的一种**修正** (Update)。



## 4.3 所包含的思政元素

### 8\* 从全概率公式中的启示

- ◆ 求复杂事件  $A$  的概率, 可转化为: 求  $n$  个两两互不相容事件的概率之和的简单问题。
- ◆ **做事方法**: 复杂问题简单化、化繁为简、一步一个脚印。
- ◆ **发散与联想思维**: 通过流水线组装生产大飞机与运载火箭; 将出国留学分解为若干部分 (绩点 GPA、托福或雅思、科研、实习); 建深圳特区将土地分块后, 由各省承包开发; 扶贫包干; 各省对口支援湖北抗疫。

### 9\* 从 Bayes 公式中的启示

- 我们的某些行为会不断地修正其他人对我们的看法。