教书育人、不忘初心，《数理统计》本科课程
— 课程思政 20 讲

田国梁　**统计学教授**

南方科技大学 • 统计与数据科学系

Email: tiangl@sustech.edu.cn

中国 • 广东 • 深圳

2024 年 03 月 11 日

第 1 讲 South与Southern之区别

第 2 讲 用**14 年创新编写**《数理统计》英文教材

第 3 讲 Bayes如何译成中文名？英文名如何读？

第 4 讲 全概率公式 (**Law of Total Probability**) 和 Bayes 公式

第 5 讲 自然常数 (**Natural Constant**) $\mathrm{e} = 2.718282\cdots$ 的起源

第 6 讲 从矩母函数与密度函数的关系出发，深度理解**国王函数** e^x

第 7 讲 从对数似然函数出发，深度理解**王后函数** $\log(x)$

第 8 讲 **标准正态分布密度**和**蛇吞象公式**

第 9 讲 从函数的**一阶泰勒展开式**到**线段中/外**任何一点之数学表达式

第 10 讲 函数的一阶泰勒展开之**四种形式**

提纲 (Outline) Part II

第 11 讲 **指数分布**与**几何分布**的**无记忆性**

第 12 讲 **二项分布**的**生存函数**与**贝塔分布**的**累积分布函数**之恒等式

第 13 讲 深度理解**中心极限定理**

第 14 讲 **二项分布**的**正态近似**和**泊松近似**

第 15 讲 从**矩估计量**到**Monte Carlo 积分**

第 16 讲 从**KL 散度**的角度来理解**极大似然估计**之定义

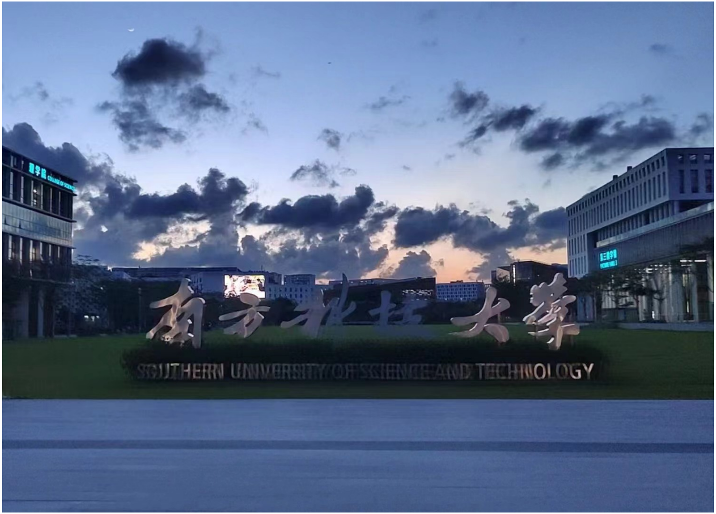
第 17 讲 从**Laplace**提出问题到**Gauss**解决问题：正态分布的发现过程

第 18 讲 度量**点估计量好坏**的指标：**均方误差**

第 19 讲 克拉默–拉奥 (**Cramér–Rao**) 不等式

第 20 讲 建立参数的置信区间过程中的**枢轴量**(**Pivotal Quantity**)

第 5 讲 自然常数 $\mathrm{e} = 2.718282\cdots$ 的起源



黑云压城天仙醉，气吞如虎天地广

5.1 欧拉数 (Euler Number)

- 设 $x = 1$, 则e^x成为 $\mathrm{e} = 2.718282\cdots$, 它是一个**无限不循环小数**。

- 在 18 世纪初，瑞士数学大师, 莱昂哈德・欧拉 (Leonard Euler) 发现了这个自然常数, 有时称它为**欧拉数 (Euler number)**。

- 当时，欧拉试图解决由另一位数学家, 雅各布・贝努利 (Jacob **Bernoulli**) 在半个世纪前提出的问题。

贝努利的问题与复利有关 (Part I)

- 假设你在银行里存了一笔钱，银行每年以 100% 的利率兑换这笔钱。一年后，你会得到$(1+100\%)^1 = 2$ 倍的收益，即 $M + M \times 100\% = 2M$。
- 现在假设银行每六个月结算一次利息，但只能提供利率的一半，即 50%。在这种情况下，一年后的收益为$(1+50\%)^2 = 2.25$ 倍。
- 假设银行每月提供 8.3%（100% 的 1/12）复利息，或每周 1.9%（100% 的 1/52）复利息。在这种情况下，一年后你会赚取投资的$(1+1/12)^{12} = 2.61$ 倍 和 $(1+1/52)^{52} = 2.69$ 倍。

贝努利的问题与复利有关 (Part II)

- 根据这个规律，可以得到一条通式。如果假设 n 为利息复利的次数，那么利率就是其倒数 $1/n$。一年后的收益公式为$(1+1/n)^n$。
- 那么，如果 n 变得很大，会怎样？如果 n 变得无限大，那$(1+1/n)^n$ 是否也会变得无限大？这就是贝努利试图回答的问题，但直到**50 年**后才由欧拉最终获得结果。
- 原来，当 n 趋于无穷大时，$(1+1/n)^n$并非也变得无穷大，而是等于2.718281828459·，这是一个类似于圆周率的无限不循环小数（即无理数），用字母 e 表示，被称为自然常数。

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}. \tag{5.1}$$

5.3 所包含的思政元素

- **学科发展史**: 让学生们了解数学中自然常数 $e = 2.718282\cdots$ 或欧拉数 (Euler number) 的起源。
- **科学思维**与**科学方法**: 在科研中, **能提出问题等于成功了一半; 有时候, 提出问题比解决问题更重要。** 贝努利提出了复利的问题, 欧拉在 50 年后解决了该问题, 即公式 (5.1), 见《数理统计》Textbook 中的公式 (2.34)。
- **大师成长之路**: 想要成为真正的大师, 起码应具备三个条件: **天才、痴迷、功夫**。抓住一个重要 (或基础) 问题不放, 持久攻关, 终破楼兰。