教书育人、不忘初心,《数理统计》本科课程

— 课程思政 20 讲

田国梁　**统计学教授**

南方科技大学 • 统计与数据科学系

Email: tiangl@sustech.edu.cn

中国 • 广东 • 深圳

2024 年 04 月 11 日

提纲 (Outline) Part I

第 1 讲 **South**与**Southern**之区别

第 2 讲 用**14 年创新编写**《数理统计》英文教材

第 3 讲 **Bayes**如何译成中文名? 英文名如何读?

第 4 讲 全概率公式 (**Law of Total Probability**) 和 Bayes 公式

第 5 讲 自然常数 (**Natural Constant**) $\mathrm{e} = 2.718282\cdots$ 的起源

第 6 讲 从矩母函数与密度函数的关系出发, 深度理解**国王函数** e^x

第 7 讲 从对数似然函数出发, 深度理解**王后函数** $\log(x)$

第 8 讲 **标准正态分布密度**和**蛇吞象公式**

第 9 讲 从函数的**一阶泰勒展开式**到**线段中/外**任何一点之数学表达式

第 10 讲 函数的一阶泰勒展开之**四种形式**

提纲 (Outline) Part II

第 11 讲 **指数分布**与**几何分布**的**无记忆性**

第 12 讲 **二项分布**的**生存函数**与**贝塔分布**的**累积分布函数**之恒等式

第 13 讲 深度理解**中心极限定理**

第 14 讲 **二项分布**的**正态近似**和**泊松近似**

第 15 讲 从**矩估计量**到**Monte Carlo 积分**

第 16 讲 从**KL 散度**的角度来理解**极大似然估计**之定义

第 17 讲 从**Laplace**提出问题到**Gauss**解决问题：正态分布的发现过程

第 18 讲 度量**点估计量好坏**的指标：**均方误差**

第 19 讲 克拉默–拉奥 (**Cramér–Rao**) 不等式

第 20 讲 建立参数的置信区间过程中的**枢轴量**(**Pivotal Quantity**)

第 12 讲　二项分布的生存函数与贝塔分布的累积分布函数之恒等式

绿草如茵三教近，繁花似锦智园远

12.1 恒等式及证明思路

1° 二项分布的生存函数与贝塔分布的 cdf 之恒等式

- 设 $p \in [0,1]$，则

$$f(p) \triangleq \sum_{i=r}^{n} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = \frac{\int_0^p t^{r-1}(1-t)^{n-r}\,\mathrm{d}t}{B(r, n-r+1)} \triangleq g(p). \quad (12.1)$$

2° 证明思路

- 先证明

$$f'(p) = g'(p) \Leftrightarrow f(p) = g(p) + c, \quad (12.2)$$

对任意 $p \in [0,1]$ 均正确，其中 c 是一个常数。

- 让 $p = 0$，则 $c = f(0) - g(0) = 0$。

3• 泊松分布的生存函数与伽玛分布的 cdf 之恒等式

- 设 $\lambda > 0$, 则

$$\sum_{i=r}^{\infty} \textbf{Poisson}(i|\lambda) = \int_0^{\lambda} \textbf{Gamma}(t|r,1)\,\mathrm{d}t$$

$$= \sum_{i=r}^{\infty} \frac{\lambda^i \mathrm{e}^{-\lambda}}{i!} = \int_0^{\lambda} \frac{t^{r-1}\mathrm{e}^{-t}}{\Gamma(r)}\,\mathrm{d}t. \tag{12.3}$$

4• 负二项分布的生存函数与贝塔分布的 cdf 之恒等式

- 设 $p \in [0,1]$, 则

$$\sum_{i=r}^{\infty} \binom{m+i-1}{i} p^i (1-p)^m = \frac{\int_0^p t^{r-1}(1-t)^{m-1}\,\mathrm{d}t}{B(r,m)}. \tag{12.4}$$

12.3 所包含的思政元素

- **积分就是求和，求和就是积分**，二者是辩证统一的，是相互联系的。
- **联系 1**: 设 $X|p \sim \text{Binomial}(n,p)$。如果 $p \sim \text{Beta}(a,b)$，则 $p|(X=r) \sim \text{Beta}(r+a, n-r+b)$。

— 特别地令 $a=0, b=1$，则 $p|(X=r) \sim \text{Beta}(r, n-r+1)$。

- **联系 2**: 设 $X|\lambda \sim \text{Poisson}(\lambda)$。如果 $\lambda \sim \text{Gamma}(a,b)$，则 $p|(X=r) \sim \text{Gamma}(r+a, 1+b)$。

— 特别地令 $a=0, b=0$，则 $\lambda|(X=r) \sim \text{Gamma}(r,1)$。

- **困难转换的思维方式**: (12.2) 告诉我们，对一个困难问题，直接解决很难时，需要找一个等价的简单方式来解决，以规避困难点。