教书育人、不忘初心，《数理统计》本科课程

— 课程思政 20 讲

田国梁　统计学教授

南方科技大学 • 统计与数据科学系

Email: tiangl@sustech.edu.cn

中国 • 广东 • 深圳

2024 年 03 月 28 日

提纲 (Outline) Part I

提纲 (Outline) Part II

第 11 讲 **指数分布**与**几何分布**的**无记忆性**

第 12 讲 **二项分布**的**生存函数**与**贝塔分布**的**累积分布函数**之恒等式

第 13 讲 深度理解**中心极限定理**

第 14 讲 **二项分布**的**正态近似**和**泊松近似**

第 15 讲 从**矩估计量**到**Monte Carlo 积分**

第 16 讲 从**KL 散度**的角度来理解**极大似然估计**之定义

第 17 讲 从**Laplace**提出问题到**Gauss**解决问题：正态分布的发现过程

第 18 讲 度量**点估计量好坏**的指标：**均方误差**

第 19 讲 克拉默–拉奥 (**Cramér–Rao**) 不等式

第 20 讲 建立参数的置信区间过程中的**枢轴量**(**Pivotal Quantity**)

第 9 讲　从函数的一阶泰勒展开式到 线段中/外任何一点之数学表达式

树仁远眺塘朗山，碧水翠绿荔枝园

9.1 函数的一阶泰勒展开式

$1^\bullet$ 均值定理 (mean value theorem)

- 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且在 (a,b) 上可导。则存在一点 $c \in (a,b)$ 使得

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(c).$$

$2^\bullet$ 单变量函数的一阶泰勒展开 (first–order Taylor expansion)

- 设 $f(x)$ 定义在 $\mathbb{R}$ 上, 连续且一阶导数存在。对任意一点 $x_0 \in \mathbb{R}$, 则存在一点 x^*, **在 x 和 x_0 之间** (x_0 可以大于 x, 也可以小于 x), 使得

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x^*).$$

3° 线段中任何一点之数学表达式

- 设x^* **是 x 与 x_0 的中间点**，则

$$x^* = x + \frac{1}{2}(x_0 - x) = \frac{x + x_0}{2}.$$

- 设x^* **是 x 与 x_0 之中间的任意一点**，见图 9.1(a)，则

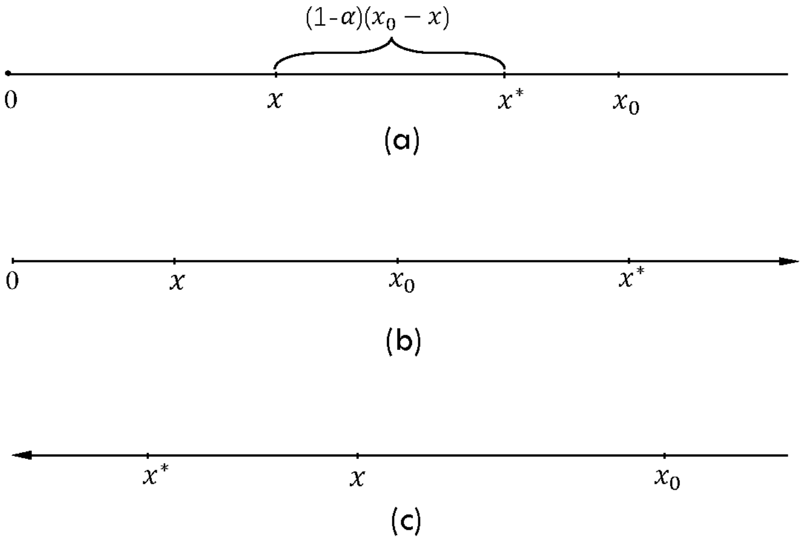
$$x^* = x + (1-\alpha)(x_0 - x) = \alpha x + (1-\alpha)x_0, \qquad (9.1)$$

其中 $\alpha \in [0,1]$。

- 特别地，当 $\alpha = 0$, $x^* = x_0$;　而当 $\alpha = 1$, $x^* = x$.

- 一般地，我们写$\alpha \in (0,1)$。

4• 图 9.1: (a) 线段; (b) 右射线; (c) 左射线



$5^\bullet$ 右射线上任何一点之数学表达式

- 设 x^* **是联结 x 与 x_0 之右射线上的任意一点**，见图 9.1(b)。
- 用公式 (9.1)，则有

$$x_0 = \alpha x + (1-\alpha)x^*,$$

其中 $\alpha \in (0,1)$.

- 因此

$$x^* = -\frac{\alpha}{1-\alpha}x + \frac{1}{1-\alpha}x_0 \triangleq \beta x + (1-\beta)x_0, \tag{9.2}$$

其中 $\beta \triangleq -\alpha/(1-\alpha) < 0$。

$6^\bullet$ 左射线上任何一点之数学表达式

- 设x^* **是联结 x 与 x_0 之左射线上的任意一点**, 见图 9.1(c)。
- 用公式 (9.1), 则有
$$x = \alpha x^* + (1-\alpha)x_0,$$
其中 $\alpha \in (0,1)$.
- 因此
$$x^* = \frac{1}{\alpha}x + \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)x_0 \triangleq \gamma x + (1-\gamma)x_0, \tag{9.3}$$
其中 $\gamma \triangleq 1/\alpha > 1$。

7° 一个统一的表达式

$$x^* = \alpha x + (1-\alpha)x_0 \begin{cases} > x_0 & \textbf{if} \quad \alpha < 0, \\ \in [x, x_0] & \textbf{if} \quad \alpha \in [0,1], \\ < x & \textbf{if} \quad \alpha > 1. \end{cases} \tag{9.4}$$

8° 多变量函数的一阶泰勒展开

- 设 $f(\boldsymbol{x})$ 定义在 $\mathbb{R}^n$ 上，连续且一阶偏导数存在。对任意一点 $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$，则存在一点 $\boldsymbol{x}^* = \alpha \boldsymbol{x} + (1-\alpha)\boldsymbol{x}_0$，使得

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0) + (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)^\top \nabla f(\boldsymbol{x}^*),$$

其中 $\nabla f(\boldsymbol{x}^*) \triangleq \nabla f(\boldsymbol{x})|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^*}$,

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

9.3 所包含的思政元素

- **联想思维**: 从**均值定理**就联想到**单变量**函数的一阶泰勒展开, 并推广到**多变量**函数的一阶泰勒展开。从**线段中**任何一点之数学表达式, 就联想到**线段外**任何一点之数学表达式。
- **转换思维**: 得到了公式 (9.1) 之后, 将求公式 (9.2) 和 (9.3) 转换为利用 (9.1) 作为中间步骤, 最后得到一个统一的结果 (9.4)。