

教书育人、不忘初心,《数理统计》本科课程

— 课程思政 20 讲

田国梁 统计学教授

南方科技大学 ● 统计与数据科学系

Email: tiangl@sustech.edu.cn

中国 ● 广东 ● 深圳

2024 年 05 月 09 日

提纲 (Outline) Part I

第 1 讲 **South**与**Southern**之区别

第 2 讲 用**14 年创新编写**《数理统计》英文教材

第 3 讲 **Bayes**如何译成中文名? 英文名如何读?

第 4 讲 全概率公式 (**Law of Total Probability**) 和 Bayes 公式

第 5 讲 自然常数 (**Natural Constant**) $e = 2.718282 \dots$ 的起源

第 6 讲 从矩母函数与密度函数的关系出发, 深度理解**国王函数** e^x

第 7 讲 从对数似然函数出发, 深度理解**王后函数** $\log(x)$

第 8 讲 **标准正态分布密度**和**蛇吞象公式**

第 9 讲 从函数的一阶泰勒展开式到**线段中/外**任何一点之数学表达式

第 10 讲 函数的一阶泰勒展开之**四种形式**

提纲 (Outline) Part II

- 第 11 讲 指数分布与几何分布的无记忆性
- 第 12 讲 二项分布的生存函数与贝塔分布的累积分布函数之恒等式
- 第 13 讲 深度理解中心极限定理
- 第 14 讲 二项分布的正态近似和泊松近似
- 第 15 讲 从矩估计量到 Monte Carlo 积分
- 第 16 讲 从 KL 散度的角度来理解极大似然估计之定义
- 第 17 讲 从 Laplace 提出问题到 Gauss 解决问题: 正态分布的发现过程
- 第 18 讲 度量点估计量好坏的指标: 均方误差
- 第 19 讲 克拉默-拉奥 (Cramér-Rao) 不等式
- 第 20 讲 建立参数的置信区间过程中的枢轴量(Pivotal Quantity)

第 18 讲 度量点估计量好坏的指标: 均方误差



彩虹飞架长岭陂，荔山环绕体育场

18.1 无偏性和均方误差 (Mean Square Error)

1* 无偏性 (Unbiasedness)

- 设 $\mathbf{x} = (X_1, \dots, X_n)^\top$. 估计量 $\varphi(\mathbf{x})$ 称为参数 θ 的无偏估计量 (Unbiased Estimator), 如果

$$E\{\varphi(\mathbf{x})\} = \theta, \quad \text{对所有的 } \theta \in \Theta.$$

- 偏差 (Bias) 定义为

$$b(\theta) \triangleq E\{\varphi(\mathbf{x})\} - \theta. \quad (18.1)$$

2* 均方误差 (MSE)

- 给定 θ 的一个估计量 $\varphi(\mathbf{x})$, 则该估计量的 MSE 定义为

$$\mathbf{MSE} = E\{\varphi(\mathbf{x}) - \theta\}^2 = \mathbf{Var}\{\varphi(\mathbf{x})\} + \{b(\theta)\}^2. \quad (18.2)$$

- 如果 $\varphi(\mathbf{x})$ 是 θ 的无偏估计量, 则 $\mathbf{MSE} = \mathbf{Var}\{\varphi(\mathbf{x})\}$.
- MSE 越小, 则该估计量的估计精度越高。

3* 在评价一个点估计量的好与坏时, 要看两个方面, 不能只看一个方面

- 从 (18.2) 可以看出, 使得 MSE 达到最小的充要条件是:

$$\text{Var}\{\varphi(\mathbf{x})\} + \{b(\theta)\}^2 \rightarrow \min.$$

- 即, 一方面需要方差 $\text{Var}\{\varphi(\mathbf{x})\}$ 较小; 另一方面需要偏差 $b(\theta)$ 的绝对值较小 (最小为零)。
- 也就是说, 我们在评价一个点估计量的好与坏时, 不仅要看它的方差, 也要看它的偏差。

4* $\text{Var}\{\varphi(\mathbf{x})\}$ 和 $b(\theta)$ 是相互联系的

- 从

$$\text{Var}\{\varphi(\mathbf{x})\} = E[\varphi(\mathbf{x}) - E\{\varphi(\mathbf{x})\}]^2 \quad \text{和} \quad b(\theta) = E\{\varphi(\mathbf{x})\} - \theta,$$

我们可以看到, 二者是通过 $E\{\varphi(\mathbf{x})\}$ 相联系的。

18.2 所包含的思政元素 (I)

- ◆ 用唯物辩证法的**全面的观点**进行评价,而不是用**片面的观点**。
- ◆ 用唯物辩证法的**联系的观点**进行评价,而不是用**孤立的观点**。
- ◆ 学校在为党育人,为国育才时,育人的标准是**又红又专**,要看两个方面。

18.2 所包含的思政元素 (II)

- ▶ 在一个大学里, 我们在评价一个**本科生**的培养质量时, 既要看到 TA 的**学业成绩**(即绩点或 GPA), 又要看到 TA 的**综合素质**。
- ▶ 在一个大学里, 我们在评价一个**科研教学型教师**时, 既要看到 TA 的**科研成果**, 又要看到 TA 的**教学水平**。
- ▶ 在国考招收**硕士研究生**时, 我们不仅要看 TA 的**初试成绩**(即 4 门课的笔试成绩), 也要看 TA 的**复试成绩**(即 4 门课以外的知识与能力)。
- ▶ 国家在**建高铁**时, 既要看到**经济效益**, 又要看到**社会效益**。
- ▶ 老百姓在**购买商品**时, 既要看到**商品价格**, 又要看到**商品质量**。
- ▶ 在城里工作的人们, 在**租房**时, 既要看到**房子的价格**, 又要看到**房子到工作单位的通勤时间**。