教书育人、不忘初心，《数理统计》本科课程

— 课程思政 20 讲

田国梁 **统计学教授**

南方科技大学 • 统计与数据科学系

Email: tiangl@sustech.edu.cn

中国 • 广东 • 深圳

2024 年 04 月 08 日

提纲 (Outline) Part I

第 1 讲 **South**与**Southern**之区别

第 2 讲 用**14 年创新编写**《数理统计》英文教材

第 3 讲 **Bayes**如何译成中文名? 英文名如何读?

第 4 讲 全概率公式 (**Law of Total Probability**) 和 Bayes 公式

第 5 讲 自然常数 (**Natural Constant**) $\mathrm{e} = 2.718282\cdots$ 的起源

第 6 讲 从矩母函数与密度函数的关系出发, 深度理解**国王函数** e^x

第 7 讲 从对数似然函数出发, 深度理解**王后函数** $\log(x)$

第 8 讲 **标准正态分布密度**和**蛇吞象公式**

第 9 讲 从函数的**一阶泰勒展开式**到**线段中/外**任何一点之数学表达式

第 10 讲 函数的一阶泰勒展开之**四种形式**

提纲 (Outline) Part II

第 11 讲 指数分布与几何分布的无记忆性

第 12 讲 二项分布的生存函数与贝塔分布的累积分布函数之恒等式

第 13 讲 深度理解中心极限定理

第 14 讲 二项分布的正态近似和泊松近似

第 15 讲 从矩估计量到Monte Carlo 积分

第 16 讲 从KL 散度的角度来理解极大似然估计之定义

第 17 讲 从Laplace提出问题到Gauss解决问题：正态分布的发现过程

第 18 讲 度量点估计量好坏的指标：均方误差

第 19 讲 克拉默–拉奥 (Cramér–Rao) 不等式

第 20 讲 建立参数的置信区间过程中的枢轴量(Pivotal Quantity)

第 11 讲 指数分布与几何分布的无记忆性

华灯璀璨商学院，流光溢彩理学楼

11.1 指数分布的无记忆性 (Memoryless Property)

1° 指数分布的密度函数、累积分布函数和生存函数

- 设 $X \sim \text{Exponential}(\theta)$, 则它的 pdf, cdf 和生存函数分别定义为

$$f(x) = \theta \exp(-\theta x), \quad x \geqslant 0, \quad \theta > 0,$$

$$F(x) = \Pr(X \leqslant x) = \int_0^X f(t)\,\mathrm{d}t = 1 - \exp(-\theta x),$$

$$S(x) = \Pr(X > x) = 1 - F(x) = \exp(-\theta x).$$

2° 指数分布的无记忆性

- 对指数随机变量 X(例如它是某一元件的寿命), 当 $s, t > 0$, 我们有

$$\Pr(X > t + s | X > t) = \Pr(X > s) = \exp(-\theta s). \tag{11.1}$$

- **注释**: 在所有的连续分布中, 指数分布是**唯一的**具有无记忆性的连续分布。

3° 几何分布的概率密度函数和生存函数分别

- 设 $X \sim \text{Geometric}(p)$, 则它的 pmf 和生存函数分别定义为

$$\Pr(X = x) = (1-p)^x p, \quad x = 0, 1, \ldots, \infty; \quad p \in (0, 1),$$

$$\Pr(X > m) = \sum_{x=m+1}^{\infty} \Pr(X = x) = (1-p)^{m+1}.$$

4° 几何分布的无记忆性

- 对几何随机变量 X, 当 n, m 为两个正整数, 我们有

$$\Pr(X > n + m | X > n) = \Pr(X > m) = (1-p)^{m+1}. \qquad (11.2)$$

- **注释**: 在所有的离散分布中, 几何分布是**唯一的**具有无记忆性的离散分布。

5° 连续分布的离散影像 (Discrete Analogues of Continuous Distributions)

- 设 Y 是一个正的连续的 r.v. with cdf $F_Y(\cdot)$, 定义一个离散的 r.v. $X = \lfloor Y \rfloor$ 为小于或等于 Y 的最大整数 (the largest integer less than or equal to Y), 则 X 的 pmf 为 (for $x = 0, 1, \ldots, \infty$)

$$\Pr(X = x) = \Pr(x \leqslant Y < x + 1) = F_Y(x + 1) - F_Y(x). \tag{11.3}$$

6° 几何分布是指数分布的离散影像

- 设 $Y \sim \text{Exponential}(\theta)$ with $\theta > 0$, 且$X = \lfloor Y \rfloor$, 我们有

$$\Pr(X = x) = \exp[-\theta(x + 1)] - \exp(-\theta x) = (1 - p)^x p, \tag{11.4}$$

其中 $x = 0, 1, \ldots, \infty$, $p \triangleq 1 - \mathrm{e}^{-\theta} = F_Y(1) \in (0, 1)$。

11.4 所包含的思政元素

- **辩证统一**，是唯物主义辩证法的基本观点，是指人们在认识事物的时候，既要看到事物**相互区别**的一面，又要看到事物**相互联系**的一面。

- **联系的观点**和**发展的观点**是唯物辩证法的两大观点。唯物辩证法用**普遍联系的观点**看待世界和历史，指出：世界是一个有机整体，世界上的一切事物都处于相互影响、相互作用、相互制约的过程中。它反对片面或孤立的观点。

- 离散与连续是辩证统一的。

- 指数分布与几何分布是相互区别的，又是通过随机表示$X = \lfloor Y \rfloor$而相互联系的。