教书育人、不忘初心，《数理统计》本科课程

— 课程思政 20 讲

田国梁　　统计学教授

南方科技大学 • 统计与数据科学系

Email: tiangl@sustech.edu.cn

中国 • 广东 • 深圳

2024 年 03 月 14 日

提纲 (Outline) Part I

第 1 讲 **South**与**Southern**之区别

第 2 讲 用**14 年创新编写**《数理统计》英文教材

第 3 讲 **Bayes**如何译成中文名? 英文名如何读?

第 4 讲 全概率公式 (**Law of Total Probability**) 和 Bayes 公式

第 5 讲 自然常数 (**Natural Constant**) $\mathrm{e} = 2.718282\cdots$ 的起源

第 6 讲 从矩母函数与密度函数的关系出发, 深度理解**国王函数** e^x

第 7 讲 从对数似然函数出发, 深度理解**王后函数** $\log(x)$

第 8 讲 **标准正态分布密度**和**蛇吞象公式**

第 9 讲 从函数的**一阶泰勒展开式**到**线段中/外**任何一点之数学表达式

第 10 讲 函数的一阶泰勒展开之**四种形式**

提纲 (Outline) Part II

第 11 讲 **指数分布**与**几何分布**的**无记忆性**

第 12 讲 **二项分布**的**生存函数**与**贝塔分布**的**累积分布函数**之恒等式

第 13 讲 深度理解**中心极限定理**

第 14 讲 **二项分布**的**正态近似**和**泊松近似**

第 15 讲 从**矩估计量**到**Monte Carlo 积分**

第 16 讲 从**KL 散度**的角度来理解**极大似然估计**之定义

第 17 讲 从**Laplace**提出问题到**Gauss**解决问题：正态分布的发现过程

第 18 讲 度量**点估计量好坏**的指标：**均方误差**

第 19 讲 克拉默–拉奥 (**Cramér–Rao**) 不等式

第 20 讲 建立参数的置信区间过程中的**枢轴量**(**Pivotal Quantity**)

第 6 讲　从矩母函数与密度函数的关系出发，深度理解国王函数 e^x

南科商学大楼起，金融信管携手行

6.1 矩母函数与密度函数

1° 两个矩母函数相等 $\Leftrightarrow$ 两个密度函数相等

- 设随机变量 $X \sim g_1(\cdot)$ 且 $Y \sim g_2(\cdot)$，其中 $g_1(\cdot)$ 和 $g_2(\cdot)$ 是两个密度函数，则 X 的矩母函数 (moment generating function, mgf)

$$M_X(t) \triangleq \int \mathrm{e}^{tx} g_1(x)\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^{ty} g_2(y)\,\mathrm{d}y \triangleq M_Y(t),$$

充分必要 $g_1(x) = g_2(x)$，只要这两个积分存在。

2° 如果没有 $\exp(\cdot)$ 的参与，情况就不同了，why?

- 如果$g_1(x) = g_2(x)$，其中 $g_1(\cdot)$ and $g_2(\cdot)$ 不必要是密度函数，则

$$\int g_1(x)\,\mathrm{d}x = \int g_2(x)\,\mathrm{d}x.$$

- 反过来，如果上述两个积分相等，则$g_1(x) \neq g_2(x)$是可能的。

6.2 函数的位阶或分层

$\int G_1(x)\,\mathrm{d}x$ $\triangleq G_2(x)$	$\int g(x)\,\mathrm{d}x$ $\triangleq G_1(x)$	$g(x)$	$g'(x)$	$g''(x)$
外空 祖爷爷	月亮 爷爷	地球 父亲	近海 儿子	深海 孙子
e^x	e^x	e^x, $(x \in \mathbb{R})$	e^x	e^x
$\int \log(x)\,\mathrm{d}x$ $= x\log(x) - x$	$\log(x)$	x^{-1}, $(x > 0)$	$-x^{-2}$	$2x^{-3}$
$\frac{1}{12}x^4$	$\frac{1}{3}x^3$	x^2, $(x \in \mathbb{R})$	$2x$	2
$[\log(b)]^{-2}b^x$	$[\log(b)]^{-1}b^x$	b^x, $(x > 0)$	$[\log(b)]\,b^x$	$[\log(b)]^2 b^x$

注：$\mathbb{R} \triangleq (-\infty, \infty)$，$b > 0$，$b \neq 1$，$b \neq \mathrm{e}$

3° e^x 是穿越时空的函数，它像一束激光 (Laser)

- 它处处连续、处处光滑、处处可导。
- 它的 1 阶导数、2 阶导数、直到无穷阶导数，存在且等于它自己。
- 它的 1 重积分、2 重积分、直到无穷重积分，存在且等于它自己。
- e^x 是所有数学函数中**唯一的最美函数**。

4° 从 e^x 的泰勒展开 ⇒ e^x is the King function

- e^x 的泰勒展开 (Taylor expansion or Maclaurin's expansion) 为:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

是一系列**公民/老百姓函数** **(Citizen function)** x^r 之和。

— 《诗经・小雅・北山之什・北山》,"溥 (pǔ) 天之下,莫非王土,率土之滨,莫非王臣"。

— 整句话意思是:**普天之下,皆是王土,四海之内,皆是王臣。**

— "溥天之下"指的不是土地,所谓"王土"实质上是指对于土地上生活的人"。

— "普天之下莫非王土,率土之滨莫非王臣"亦可解释为:"普天之下皆是王的土地,**四海之民皆是王的臣民**"。

5° 1 阶导数等于自己的正函数是 Ke^x 的一个刻画

- 对任何存在 1 阶导数的正函数 $g(\cdot)$, 则

$$g'(x) = g(x), \quad \textbf{i.e.,} \quad \frac{g'(x)}{g(x)} = \Big\{\log[g(x)]\Big\}' = 1$$

$$\Leftrightarrow \log[g(x)] = x + c, \quad \textbf{i.e.,} \quad g(x) = Ke^x,$$

其中 $K = e^c > 0$, c 为一个任意常数。

- 我们知道

$$[e^{B(x)}]' = e^{B(x)} B'(x) \quad \text{或} \quad \frac{[e^{B(x)}]'}{e^{B(x)}} = B'(x).$$

- 反过来, 如果

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = \Big\{\log[g(x)]\Big\}' = b(x),$$

且定义 $b(x) \triangleq B'(x)$, 则可以证明:

$$\log[g(x)] = B(x) + c \quad \text{或} \quad g(x) = e^{B(x)+c} = \exp\left\{\int b(x)\,dx\right\}.$$

6.4 所包含的思政元素

- **联想思维**: 从**函数是分层**的观点，可以联想到 **(高等) 教育是用来将人重新分层**的观点 (例如: 985、211、双一流大学)。让学生们了解到: 在大学里要认真刻苦学习，将来更好地服务与回馈社会。

- **学术精神**之**学无止境**: 在学习中，要求真，要刨根问底，要追求卓越。e^x 是所有数学函数中**唯一的最美函数**，这个发现让我们看到了**特殊函数**与**一般函数**的相互联系与辩证统一。

- "<u>1 阶导数等于自己的正函数是 Ke^x 的一个刻画</u>" 之证明，说明了 e^x 的独特性、唯一性、与不可替代性。

- 将 e^x 称为国王函数 (King Function)，是**创新教学方法的一种尝试**，使同学们在学习的过程中，增加趣味性，增强记忆性。