

# 教书育人、不忘初心,《数理统计》本科课程 — 课程思政 20 讲

田国梁 统计学教授

南方科技大学 • 统计与数据科学系

Email: [tiangl@sustech.edu.cn](mailto:tiangl@sustech.edu.cn)

中国 • 广东 • 深圳

2024 年 04 月 22 日

# 提纲 (Outline) Part I

第 1 讲 **South**与**Southern**之区别

第 2 讲 用**14 年创新编写**《数理统计》英文教材

第 3 讲 **Bayes**如何译成中文名? 英文名如何读?

第 4 讲 全概率公式 (**Law of Total Probability**) 和 Bayes 公式

第 5 讲 自然常数 (**Natural Constant**)  $e = 2.718282 \dots$  的起源

第 6 讲 从矩母函数与密度函数的关系出发, 深度理解**国王函数**  $e^x$

第 7 讲 从对数似然函数出发, 深度理解**王后函数**  $\log(x)$

第 8 讲 **标准正态分布密度**和**蛇吞象公式**

第 9 讲 从函数的一阶泰勒展开式到**线段中/外**任何一点之数学表达式

第 10 讲 函数的一阶泰勒展开之**四种形式**

# 提纲 (Outline) Part II

- 第 11 讲 指数分布与几何分布的无记忆性
- 第 12 讲 二项分布的生存函数与贝塔分布的累积分布函数之恒等式
- 第 13 讲 深度理解中心极限定理
- 第 14 讲 二项分布的正态近似和泊松近似
- 第 15 讲 从矩估计量到 Monte Carlo 积分
- 第 16 讲 从 KL 散度的角度来理解极大似然估计之定义
- 第 17 讲 从 Laplace 提出问题到 Gauss 解决问题: 正态分布的发现过程
- 第 18 讲 度量点估计量好坏的指标: 均方误差
- 第 19 讲 克拉默-拉奥 (Cramér-Rao) 不等式
- 第 20 讲 建立参数的置信区间过程中的枢轴量(Pivotal Quantity)

## 第 14 讲 二项分布的正态近似和泊松近似



理院耸立五百尺，飞云腾空三千丈，南才翱翔十万里

## 14.1 二项分布的两个近似

### 1\* 二项分布的正态近似

- 设  $X_1, \dots, X_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{Bernoulli}(p)$ ,  $0 < p < 1$ , 定义  $Z_n \triangleq \sum_{i=1}^n X_i$ , 则

$$Z_n \sim \text{Binomial}(n, p) \quad \text{和} \quad \frac{Z_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow{L} N(0, 1) \quad (14.1)$$

as  $n \rightarrow \infty$ .

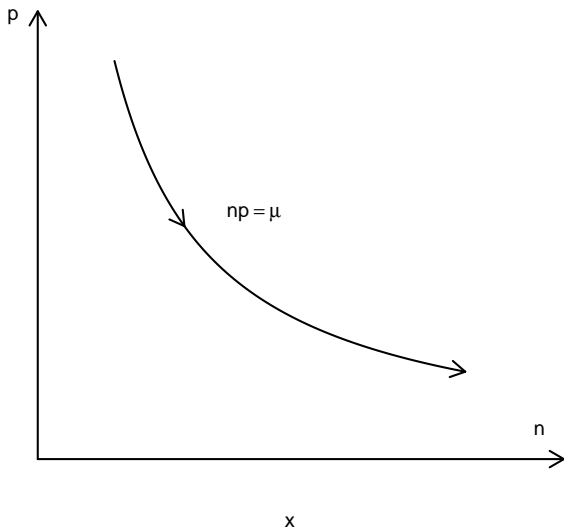
### 2\* 二项分布的泊松近似

- 设  $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$  是随机变量序列,  $Z_n \sim \text{Binomial}(n, p)$  且  $np = \mu$ , 则

$$Z_n \xrightarrow{L} \text{Poisson}(\mu), \quad (14.2)$$

as  $n \rightarrow \infty$ . 见图 14.1。

图 14.1: 当  $(n, p)$  在二维平面上变化时,  $np = \mu$  保持为一个常数



## 14.2 所包含的思政元素

- 结论 (14.1) 表明, 当  $n \rightarrow \infty$  (个人的刻苦学习, 个人的奋斗拼搏),  $Z_n \triangleq \sum_{i=1}^n X_i$  就服从正态分布(就能实现人生的理想和奋斗目标), 但  $Z_n$  是  $X_1, \dots, X_n$  之和, 是离不开  $X_i$  的 (离不开父母、家庭、老师、同学、学校、社会、国家的支持与帮助), 所以我们要孝敬父母尊敬师长 (传统文化), 爱家爱校爱国 (家校国情怀), 贡献社会 (使命担当), 造福人类 (胸怀天下、世界观)。
- 结论 (14.2) 和图 14.1 表明,  $Z_n \triangleq \sum_{i=1}^n X_i$  想要收敛到 泊松分布 (合乎党和国家所需要的人才), 只有  $n \rightarrow \infty$  (个人的奋斗拼搏) 这一个条件还不够, 还要加上另一个条件  $np = \mu$  (沿着党和祖国所指引的道路前进), 其中  $\mu$  是固定不变的 (爱党爱国爱人民的初心不变)。
- 虽然  $n \rightarrow \infty$ , 如果  $(n, p)$  在二维平面上随机向右侧游动, 则  $Z_n$  不能收敛到 泊松分布, 也不知道收敛到什么分布, 很大可能发散了。