Deep Learning for Computer Vision

Homework 1

蘇楷鈞 電機碩一 r06921062

Problem 1

$$P(x|w_1) = \frac{1}{5} \qquad P(w_1) = \frac{3}{4}$$

$$P(x|w_2) = \frac{1}{3} \qquad P(w_2) = \frac{1}{4}$$

$$P_e = \int_T^5 P(x|w_1)P(w_1)\,dx + \int_3^T P(x|w_2)P(w_2)\,dx$$

$$= \int_T^5 \frac{1}{5}\times\frac{3}{4}\,dx + \int_3^T \frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\,dx$$

$$= \frac{15-3T}{20} + \frac{T-3}{12}$$

$$= \frac{30-4T}{60} = \frac{1}{2} - \frac{T}{15}$$

$$\min P_e = \underset{3\le T\le 5}{m}\left(\frac{1}{2} - \frac{T}{15}\right)$$

$\therefore$ 當 $T=5$ 時 $P_e = \frac{1}{6}$ 為最小值

R_1 為 $0\le x\le 5$

R_2 為 $5\le x\le 6$

Problem 2

a) 左圖(Fig.1)為 mean face ， 右圖(Fig.2)為前三大特徵值的 eigenface。

Fig.1

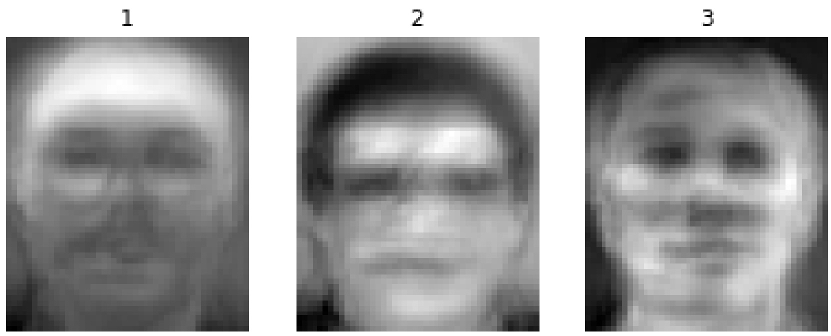

Fig.2

b) 下圖(Fig.3)由左至右為 : person$_1$_image$_1$.png 原圖，依序分別為用 n 個 eigenfaces 所還原的，下方為重建後與原圖的 MSE。

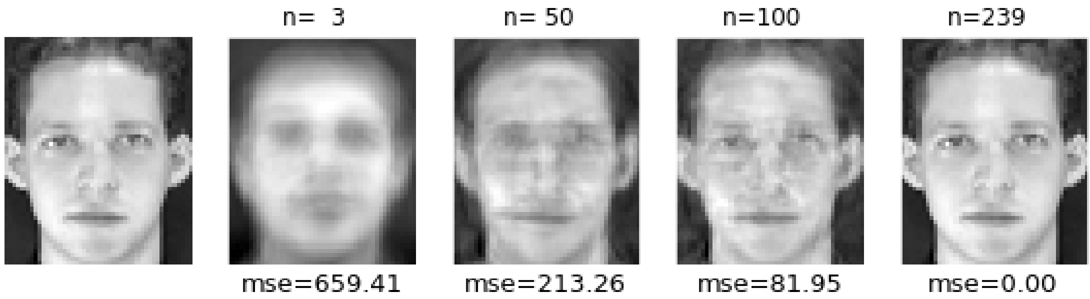

Fig.3

c) 使用 sklearn 中 KNeighborsClassifier 來訓練模型，結果如右圖(Fig.4)，每兩行為一次實驗，其中第一行為 KNeighborsClassifier 參數(n-dim 為使用多少個特 eigenface)，第二行前三個值為 3-fold cross-validation 的實驗結果，最後直接取平均來比較。經多次實驗後發現使用 cross-validation 在每輪 fold 中大部分都不會 overfit，因此直接以平均準確率來選擇最佳模型，又在 n=50 和 159 時效果不相上下，因此選擇少的 eigenface 來時做較為省空間成本，因此 hyperparameter 將用 k=1、n=50、使用歐式距離來訓練模型，而以此模型去測試測試集時，準確率為 0.8875。

```
k-neighbor : 1 , n-dim : 3
['0.600', '0.650', '0.662'] 0.6375
k-neighbor : 1 , n-dim : 50
['0.900', '0.900', '0.900'] 0.9000
k-neighbor : 1 , n-dim : 159
['0.900', '0.875', '0.900'] 0.8917
k-neighbor : 3 , n-dim : 3
['0.600', '0.650', '0.625'] 0.6250
k-neighbor : 3 , n-dim : 50
['0.838', '0.825', '0.775'] 0.8125
k-neighbor : 3 , n-dim : 159
['0.812', '0.812', '0.775'] 0.8000
k-neighbor : 5 , n-dim : 3
['0.600', '0.613', '0.575'] 0.5958
k-neighbor : 5 , n-dim : 50
['0.713', '0.787', '0.762'] 0.7542
k-neighbor : 5 , n-dim : 159
['0.700', '0.713', '0.700'] 0.7042
```

Fig.4

Bonus

當 A 為對稱矩陣，且各個特徵值都不一樣時，可採用 Power 迭代法去逼近最大特徵向量。右圖(Fig.5)為向量更新時，針對每次更新向量計算第 2 步驟的誤差圖。

Algorithm:

給定對稱矩陣A、初始向量v_0

1. For i = 0 to k:
   a) 計算$v_{i+1} = Av_i$
   b) $v_{i+1} = \frac{v_{i+1}}{||v_{i+1}||_2}$
   c) 計算$\lambda^* = v_{i+1}^T A v_{i+1}$
   d) End for
2. 檢查λ^*是否收斂，收斂時v_{i+1}即為第一個特徵值最大之特徵向量。如果沒收斂則回到步驟 1.
3. 判斷λ^*大於 0，則v_{i+1}即為所求。
   如果小於 0 則計算$A^* = A - \lambda^* I_d$,I_d為單位矩陣。

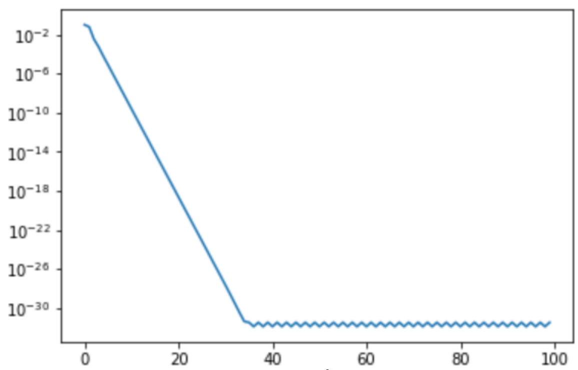

Fig.5

4. 將 A 替換成A^*再執行步驟 1.、2.，求得特徵向量即為所求

Proof

步驟(1, 2)

給定對稱矩陣A維度為$d*d$且其特徵值皆不同及隨機向量v_0，由於A為對稱矩陣，因此可正交對角化

$$\forall\ i=1\ldots d\ \ ,x_i\in Ax_i=\lambda x_i\rightarrow\ \ \forall i\neq j\ \ ,\ x_i\perp x_j$$

因此任意向量皆可分解為以特徵向量為基底的組合且假設$|\lambda_1|>|\lambda_2|>|\lambda_3|>\cdots$。

$$v_0=\sum_{i=1}^{d}a_ix_i$$

則 $$v_k=A^kv_0=\sum_{i=1}^{d}a_i\lambda_i^kx_i=\lambda_1^k\sum_{i=1}^{d}a_i\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^kx_i$$

隨著 k 增大$\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k$會趨近於 0，因此$v_k=\frac{Av_k}{||Av_k||_2}\approx\frac{\lambda^ka_1x_1}{||\lambda^ka_1x_1||_2}=\pm x_1$

步驟(3)

$A^*=A-\lambda^*I_d$

$det(A^*-xI_d)=det(A-\lambda^*I_d-xI_d)=det(A-(\lambda^*+x)I_d)$

令λ^p為A^*之特徵值，則$\lambda'=\lambda^p+\lambda^*$

$$\begin{aligned}N(A^*-\lambda^pI_d)&=N(A-\lambda^*I_d-\lambda^pI_d)=\mathrm{N}(A-(\lambda^*+\lambda^p)I_d)\\&=N(A-\lambda'I_d)\end{aligned}$$

因此A^*的特徵值都和 A 的特徵值相差λ^*，故如果 A 的最大特徵值λ^*小於 0，則將所有特徵值位移$-\lambda^*$，使得所有特徵值皆大於 0，即可由步驟(1, 2)找出A^*最大特徵值λ^p，A 的最大特徵值即為$\lambda'=\lambda^p+\lambda^*$，且$N(A^*-\lambda^pI_d)$和$N(A-\lambda'I_d)$相等，因此由$A^*$計算出的向量即為最大特徵值所對應的特徵向量。