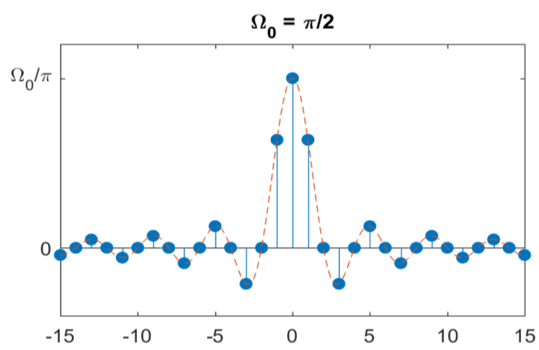
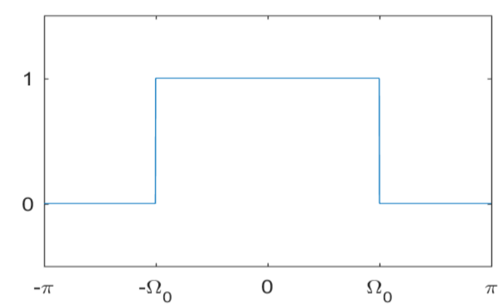
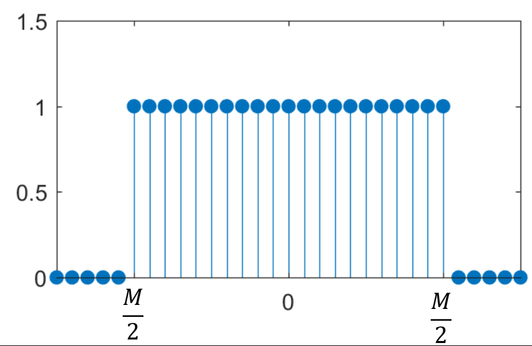
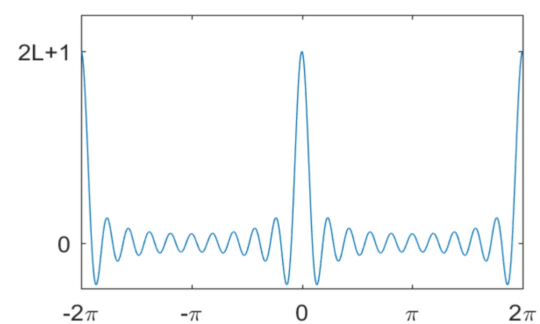
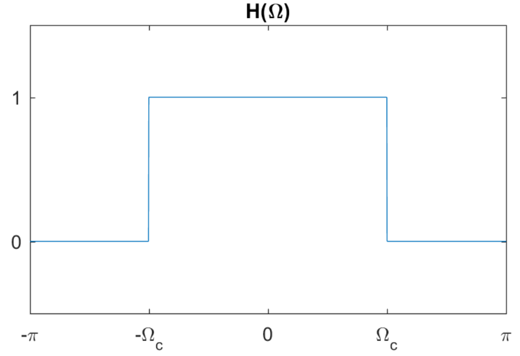
Sentrale Fouriertransformasjonspar

Tidsdomene	***Frekvensdomene (DTFT)***
$x[n] = \dfrac{\sin(\hat{\omega}_0 n)}{\pi n}$	$X(\hat{\omega}) = \begin{cases} 1, \lvert\hat{\omega}\rvert \leq \hat{\omega}_0 \\ 0, \lvert\hat{\omega}\rvert > \hat{\omega}_0 \end{cases}$
	
$x[n] = \begin{cases} 1, & \lvert n\rvert \leq M/2 \\ 0, & \lvert n\rvert > M/2 \end{cases}$	$X(\hat{\omega}) = \dfrac{\sin(\hat{\omega}(M+1)/2)}{\sin(\hat{\omega}/2)}$
	

Lavpass FIR filter startpremiss

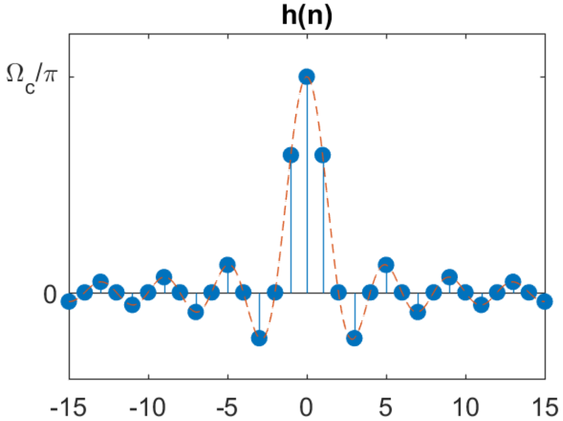
- IDTFT av ønsket ideell frekvensrespons $H_I(\hat{\omega})$ vil gi en impulsrespons $h_I[n]$ for det ønskede filteret.
  - Ideelt lavpassfilter:

$$H_I\left(e^{j\hat{\omega}}\right) = \begin{cases} 1, & |\hat{\omega}| \leq \hat{\omega}_c \\ 0, & |\hat{\omega}| > \hat{\omega}_c \end{cases}$$



  - IDTFT av ideelt lavpassfilter $H_I(\hat{\omega})$ gir:

$$IDTFT\left(H_I\left(e^{j\hat{\omega}}\right)\right) = \frac{\sin(\hat{\omega}_c n)}{\pi n} = h_I[n]$$



Realiserbare filter

- Det er to store problemer med filteret fra forrige side:
  1. Impulsresponsen har uendelig lengde
  2. Filteret er ikke kausalt ($h_I[n] \neq 0, \;\; n < 0$)
- Løsningen på punkt 1. er å avgrense $h_I[n]$ til et endelig antall sampler.

$$h_W[n] = \begin{cases} h_I[n], & |n| \leq \frac{M}{2} \\ 0, & |n| > \frac{M}{2} \end{cases}$$

  – $h_W[n]$ er da symmetrisk rundt $n = 0$, og har en lengde på $M + 1$

- Løsningen på punkt 2. er å tidsforskyve $h_W[n]$ med $M/2$ Sampler.

$$h_{LP}[n] = h_W\left[n - \frac{M}{2}\right]$$

Tilbake til frekvensplanet

- Det resulterene kausale FIR filteret kan skrives på følgende måte:

$$h_{LP}[n] = \delta\left[n - \frac{M}{2}\right] * (h_I[n] \cdot w[n])$$

  – Hvor $w[n]$ er en rektangulær vindusfunksjon gitt ved formelen

$$w[n] = \begin{cases} 1, & |n| \leq \frac{M}{2} \\ 0, & |n| > \frac{M}{2} \end{cases}.$$

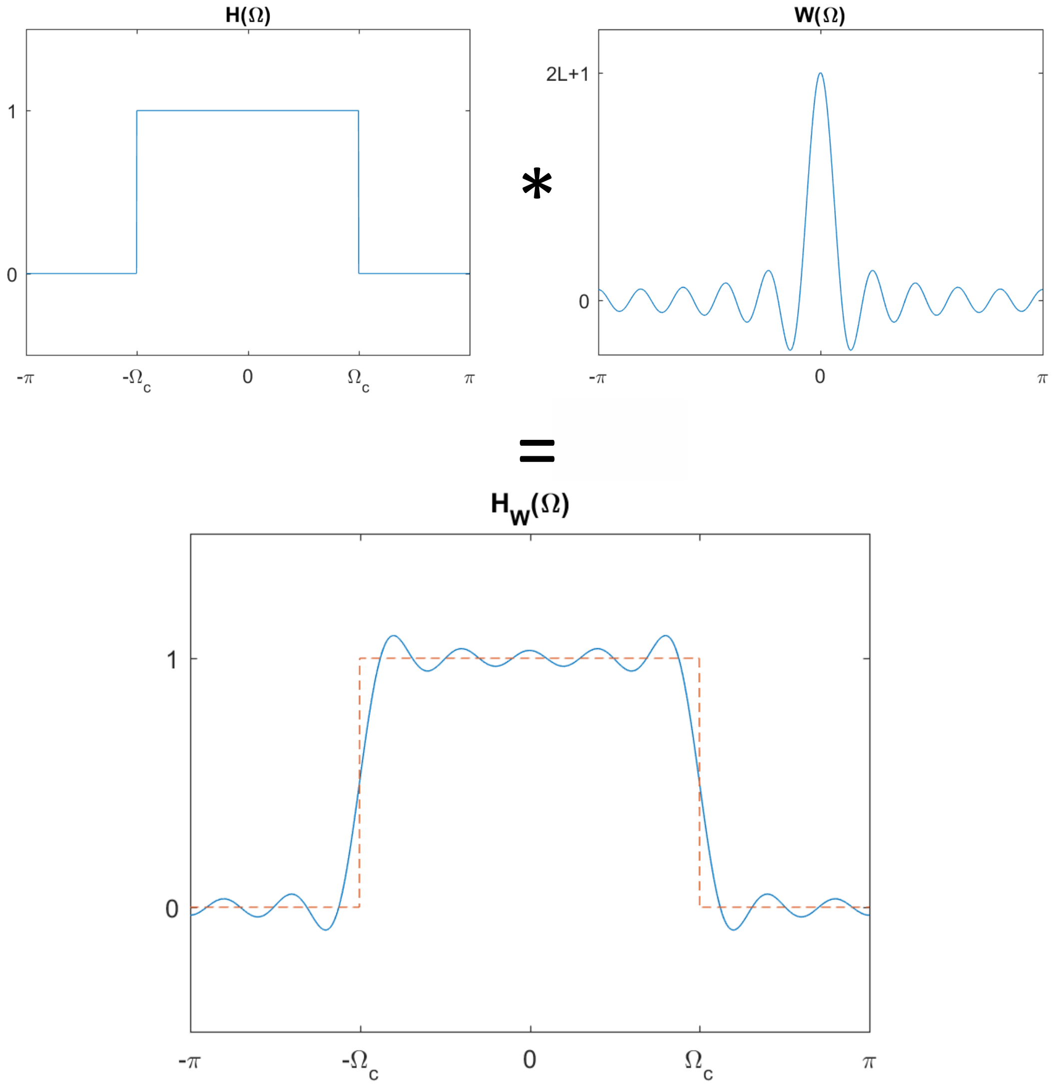
- DTFT av

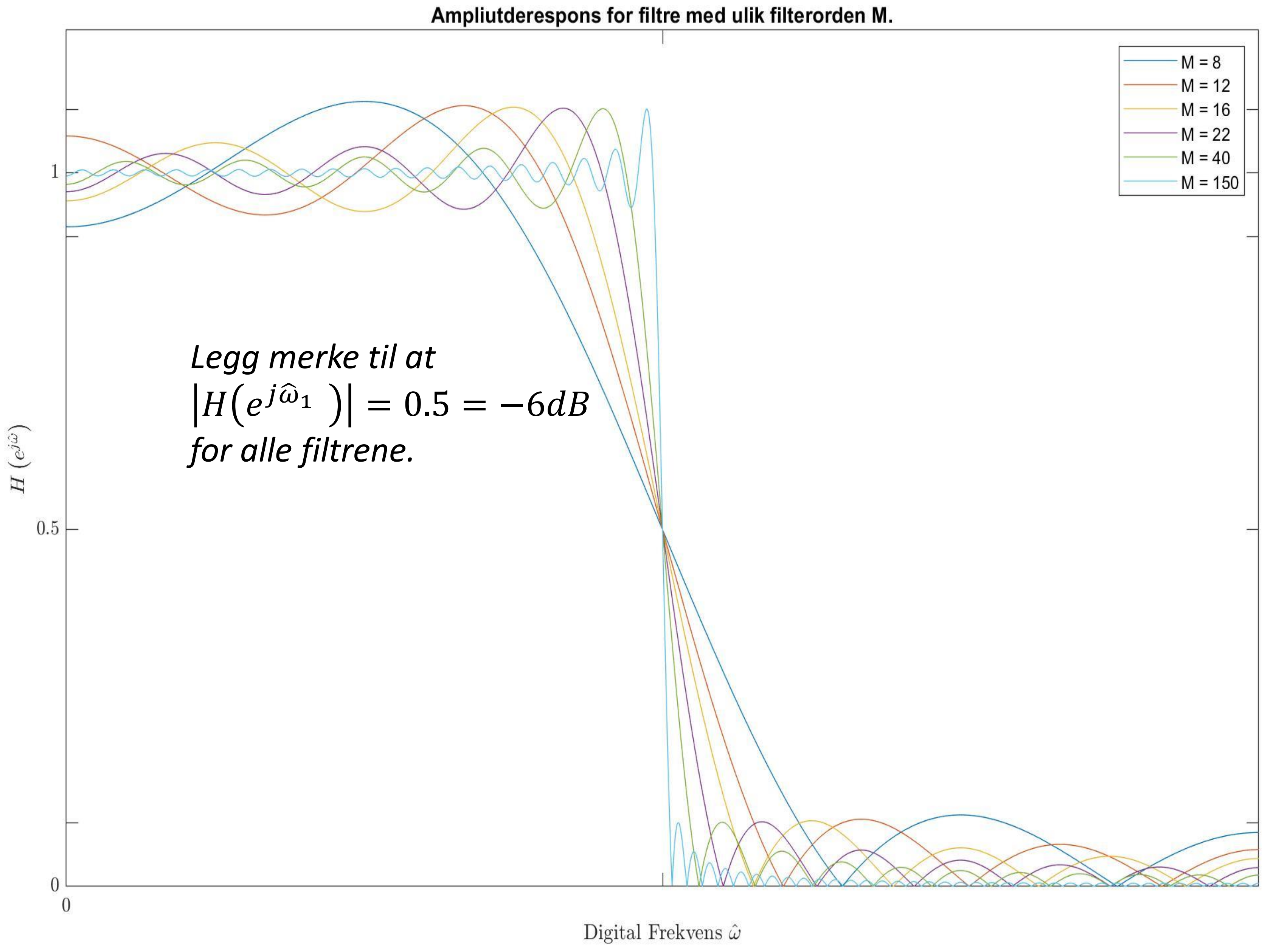
$$H_{LP}\left(e^{j\hat{\omega}}\right) = F(h_{LP}[n]) = e^{-j\hat{\omega}L} \cdot \left(H_I\left(e^{j\hat{\omega}}\right) * W\left(e^{j\hat{\omega}}\right)\right)$$

$$der$$

$$W\left(e^{j\hat{\omega}}\right) = \frac{\sin(\hat{\omega}(M+1)/2)}{\sin(\hat{\omega}/2)}$$

$H_I(\hat{\omega}) * \mathrm{W}(\hat{\omega})$ Grafisk, $M = 10$:

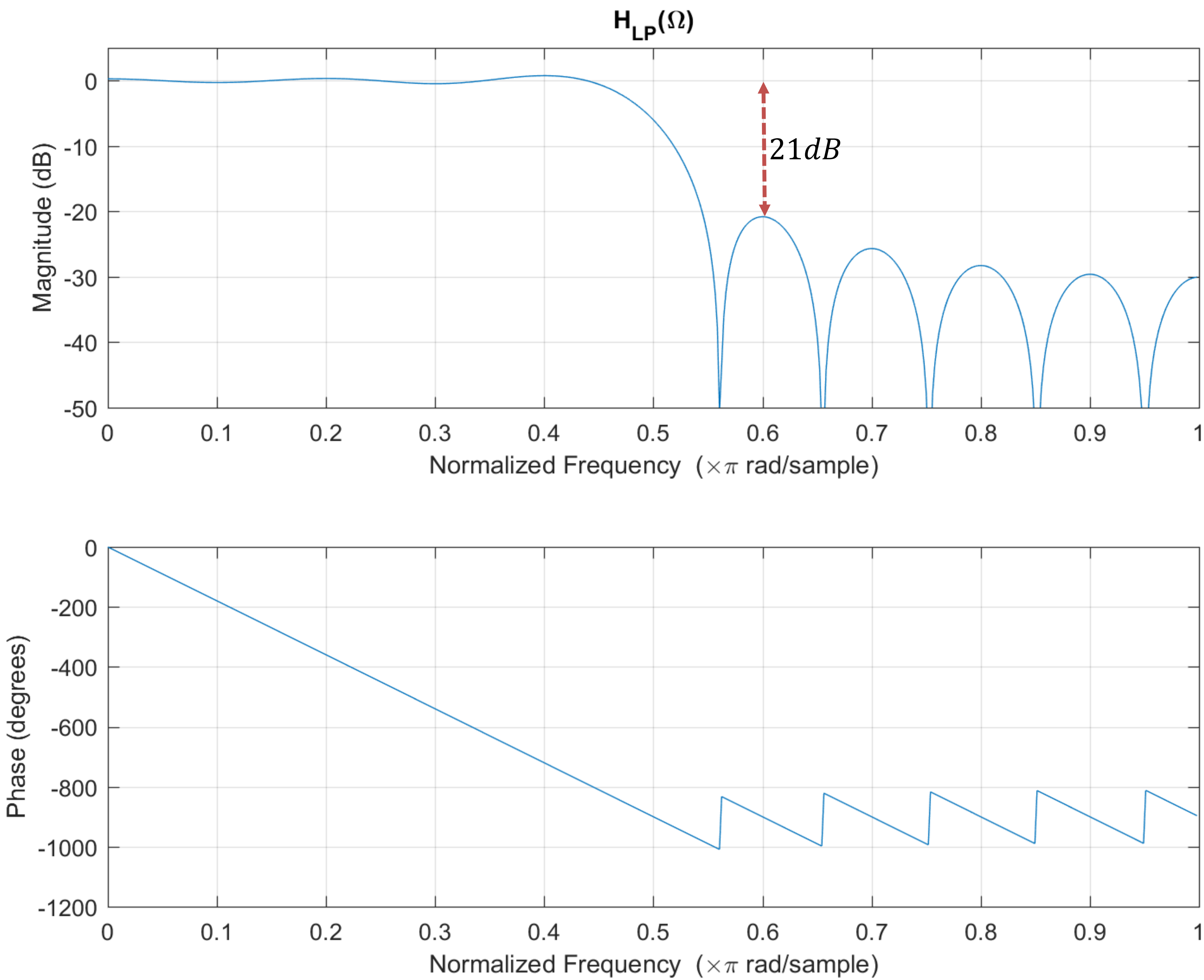




Legg merke til at

$$\left|H\left(e^{j\widehat{\omega}_1}\right)\right| = 0.5 = -6dB$$

for alle filtrene.


$H_{LP}(\Omega)$
Magnitude (dB)
0
-10
-20
-30
-40
-50
21dB
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
Normalized Frequency (×π rad/sample)
Phase (degrees)
0
-200
-400
-600
-800
-1000
-1200
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
Normalized Frequency (×π rad/sample)

Filteregenskaper

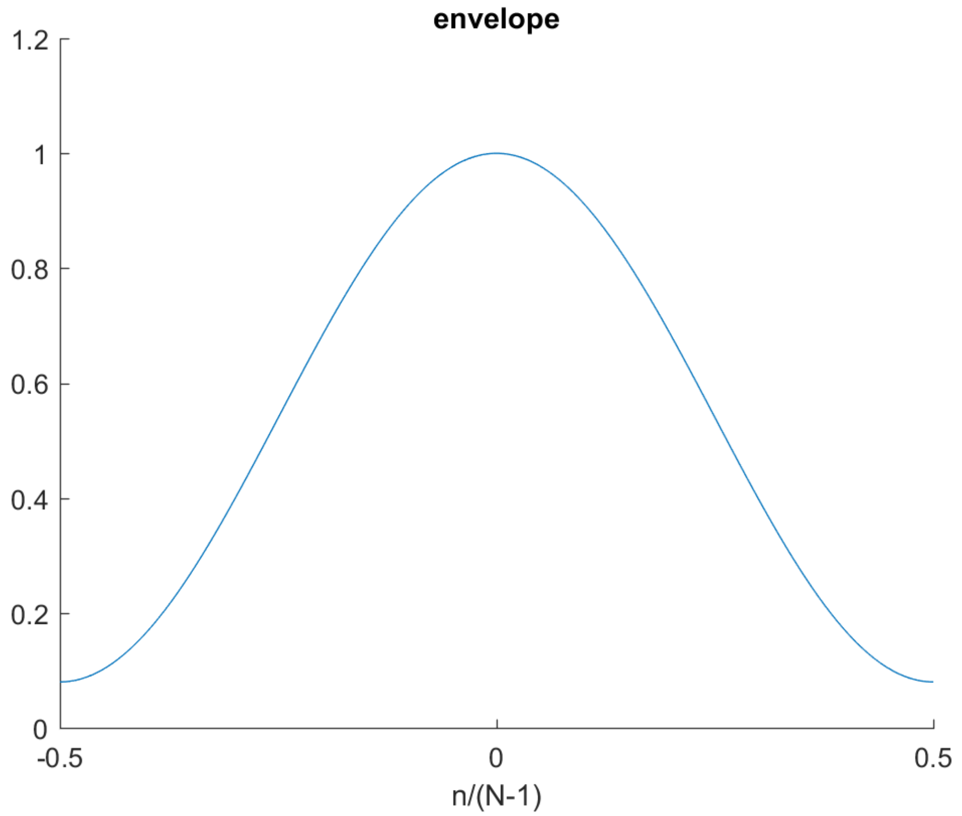
- Filteret har lineær fase med fast tidsforskyvning på $\frac{M}{2}$ sampler i passbåndet uansett frekvens.
- Dempingen i stoppbåndet er $\geq 21dB$, som tilsvarer en dempingsfaktor på ca. 11.
  - 21 dB stoppbåndsdemping (stopband attenuation) er fast for alle rektangulære vindu uavhengig av lengden.

- For å oppnå høyere stoppbåndsdemping er det nødvendig å finne en mer gunstig vindusfunksjon.
- Ser på vindu med oddetalls lengde.

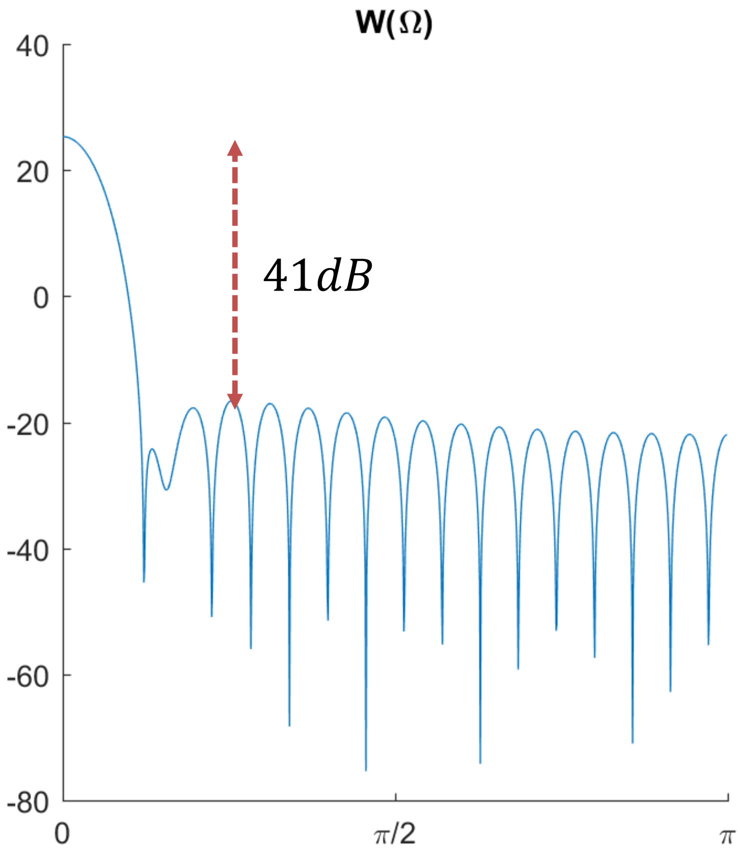
Hamming vindu

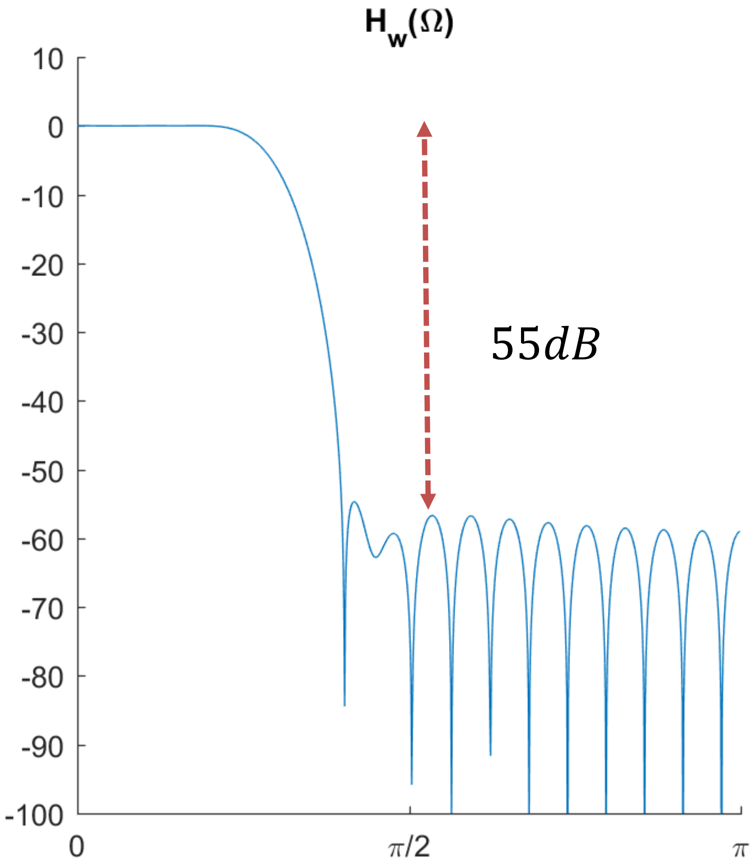
- Uttrykk:

$$w[n] = 0.54 + 0.46 \cdot \cos\left(\frac{2\pi n}{M}\right)$$



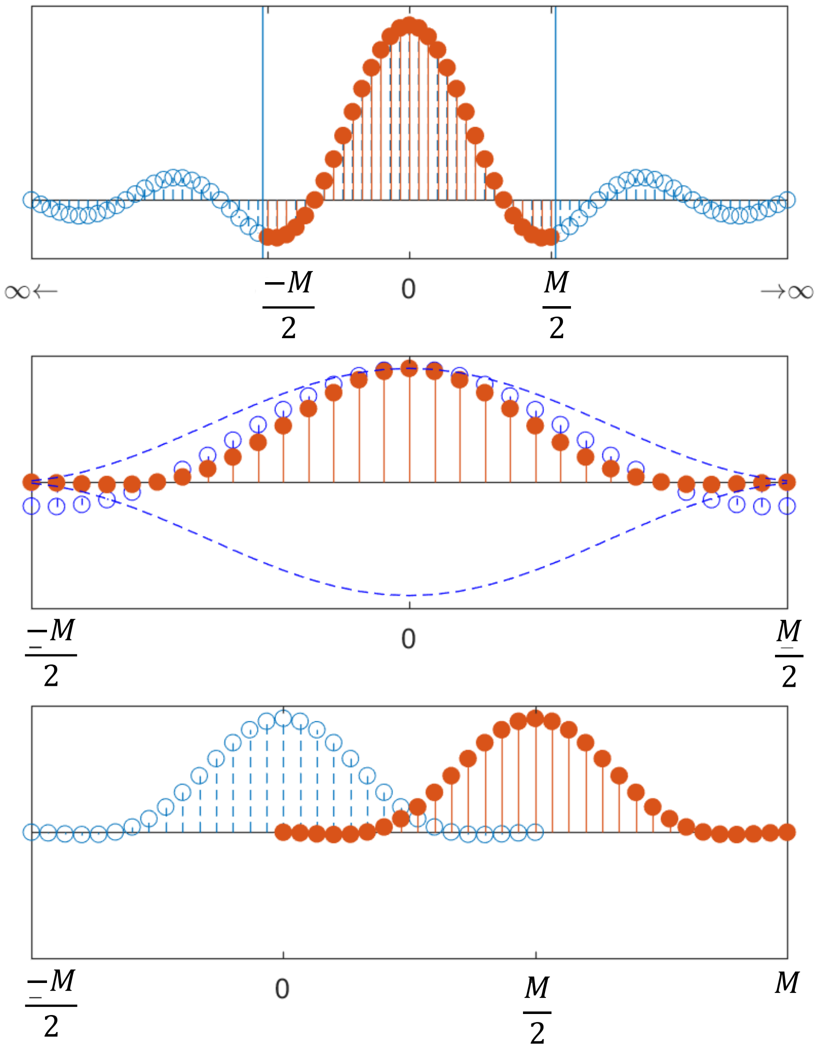
Frekvensrespons





Realising av FIR lavpassfilter (vindusmetoden)

1. Ta et utsnitt av impulsresponsen $h_I[n]$ i henhold til ønsket filterorden M.
   - $h_M[n] = \begin{cases} h_I[n], & |n| \leq \frac{M}{2} \\ 0, & |n| > \frac{M}{2} \end{cases}$
   - $h_M[n]$ har nå en total lengde på $N = M + 1$ sampler.
2. Multipliser med en vindusfunksjon for å få ønsket demping i stoppbåndet.
   - $h_W[n] = h_M[n] \cdot w[n]$
3. Tidsforskyv impulsresponsen $h_W[n]$ med $\frac{M}{2}$ sampler slik at filteret blir kausalt.
   - $h_{LP}[n] = h_W[n - L]$



Vindusmetoden i frekvensplanet

1. Ta et utsnitt av impulsresponsen $h_I[n]$ i henhold til ønsket filterorden M.
   – $H_{rect}\left(e^{j\hat{\omega}}\right) = H_I\left(e^{j\hat{\omega}}\right) * W_{rect}\left(e^{j\hat{\omega}}\right)$
2. Multipliser med en vindusfunksjon for å få ønsket demping i stoppbåndet.
   – $H_W\left(e^{j\hat{\omega}}\right) = H_I\left(e^{j\hat{\omega}}\right) * W\left(e^{j\hat{\omega}}\right)$
3. Tidsforskyv impulsresponsen $h_W[n]$ med $\frac{M}{2}$ sampler slik at filteret blir kausalt.
   – $H_{LP}\left(e^{j\hat{\omega}}\right) = H_W\left(e^{j\hat{\omega}}\right) \cdot e^{-j\hat{\omega}\cdot\frac{M}{2}}$