

KFX: 最小内核 (约束轨道形式系统)

0. 概述

我们定义一个有限状态形式系统 **KFX**, 其“世界”不是由单一演化函数生成, 而是由局部步规则生成候选轨道, 再由全局约束筛选合法轨道所定义。系统满足:

(1) 状态空间最小规模之一 (10 状态); (2) 局部规则极简 (2 条); (3) 全局闭约束严格 (5/10 步约束); (4) 合法轨道集合可完全刻画。

1. 基础对象

1.1 集合

$$B = \{0,1\}, P = \mathbb{Z}_5 = \{0,1,2,3,4\}$$
$$S = B \times P$$

状态记为:

$$s = (b, p), b \in B, p \in P$$

1.2 运算

翻转:

$$\neg: B \rightarrow B, \neg b = 1 - b$$

周期前进与后退:

$$\sigma(p) = p + 1 \pmod{5}, \quad \sigma^{-1}(p) = p - 1 \pmod{5}$$

2. 局部步规则 (允许的原子步)

系统允许且仅允许两种一步关系, 记作 $\rightarrow \subseteq S \times S$:

- R1 (前进步)

$$(b, p) \rightarrow (b, \sigma(p))$$

- R2 (回退翻转步)

$$(b, p) \rightarrow (\neg b, \sigma^{-1}(p))$$

3. 轨道与合法性

3.1 轨道

长度为 n 的轨道是序列：

$$\gamma = (s_0, s_1, \dots, s_n)$$

满足对所有 $i < n$ ，都有 $s_i \rightarrow s_{i+1}$ 。

3.2 合法轨道（全局约束）

长度为 10 的轨道 $\gamma = (s_0, \dots, s_{10})$ 被称为合法，当且仅当满足：

- C1（五步翻转归位）

若 $s_0 = (b, p)$ ，则

$$s_5 = (\neg b, p)$$

- C2（十步闭合）

$$s_{10} = s_0$$

定义 KFX 的“世界”为所有合法轨道集合：

$$\mathcal{W}_{\text{KFX}} = \{\gamma \mid \gamma \text{ 长度 10 且满足 C1, C2}\}$$

4. 主要结果（完全刻画）

定理 1（存在性）

$$\mathcal{W}_{\text{KFX}} \neq \emptyset$$

构造：对任意初态 $s_0 = (b, p)$ ，取步序列 $R2^{10}$ 即得合法轨道。

定理 2（前五步刚性）

对任意合法轨道 $\gamma \in \mathcal{W}_{\text{KFX}}$ ，其前五步必为：

$$R2, R2, R2, R2, R2$$

因此后五步也必为 $R2^5$ 。

证明要点（简洁版）：

设前五步中 $R1$ 次数为 m ， $R2$ 次数为 $5 - m$ 。

- 由 $C1$ 的 p 归位：相位净位移为 $m - (5 - m) = 2m - 5 \equiv 0(\text{mod}5)$ ，故 $2m \equiv 5(\text{mod}5) \Rightarrow m \equiv 0(\text{mod}5) \Rightarrow m \in \{0,5\}$ 。
- 由 $C1$ 的二值翻转：前五步翻转次数等于 $R2$ 次数 $5 - m$ 必为奇数，排除 $m = 5$ ，故 $m = 0$ 。
于是前五步只能全为 $R2$ 。后五步由 $C2$ 同理锁定。

定理 3（唯一性：合法轨道集合的基数）

$$|\mathcal{W}_{\text{KFX}}| = 1$$

即唯一合法步模式为：

$$R2^{10}$$

（不同初态只产生同一模式在状态标签上的平移，不产生不同的步模式。）

5. 最小内核的解释（纯结构）

KFX 给出一个最小形式核：

- 状态空间： 2×5
- 局部规则： 2 条
- 全局约束： 2 条
- 结果： 合法轨道集合可完全解析并呈刚性唯一解

它可以作为更大系统的“核约束模板”：在扩展状态维度或弱化约束时，合法轨道空间将从单点坍缩态释放为可调的解空间。

6. 可直接引用的定义块

KFX：令 $S = \{0,1\} \times \mathbb{Z}_5$ 。定义一步关系 \rightarrow 由两条规则给出： $(b,p) \rightarrow (b,p+1)$ 与

$(b, p) \rightarrow (1 - b, p - 1)$ (模 5)。长度 10 的轨道 (s_0, \dots, s_{10}) 称为合法, 当且仅当若 $s_0 = (b, p)$ 则 $s_5 = (1 - b, p)$ 且 $s_{10} = s_0$ 。定义世界 \mathcal{W}_{KFX} 为所有合法轨道集合。则 $\mathcal{W}_{\text{KFX}} \models 1$, 唯一合法步模式为 $R2^{10}$ 。

Kaifanxie_03022026_Sydney
 谢凯凡_20260203_悉尼