KFX-R：Residual KFX（残差轨道形式系统）

0. 记号

- $\mathbb{Z}_n := \{0,1,\dots,n-1\}$（模 n运算）
- $\oplus$表示 $\mathbb{Z}_2$上异或（XOR /ˌɛksˈɔː/）
- $\neg b := 1 - b$

---

1. 基础对象

1.1 集合

$$B = \{0,1\}, P = \mathbb{Z}_5$$
$$S = B \times P$$

状态记为 $s = (b,p) \in S$。

1.2 运算

$$\sigma(p) = p + 1(\mathrm{mod} 5), \sigma^{-1}(p) = p - 1(\mathrm{mod} 5)$$

---

2. 局部步规则（原子步）

一步关系 $\rightarrow \subseteq S \times S$允许且仅允许两条规则：

- R_1（前进步）

$$(b,p) \rightarrow (b, \sigma(p))$$

- R_2（回退翻转步）

$$(b,p) \rightarrow (\neg b, \sigma^{-1}(p))$$

---

3. 轨道（历史）

长度 10 的轨道定义为序列：

$$\gamma = (s_0, s_1, \dots, s_{10})$$

满足对所有 $i < 10$，有 $s_i \to s_{i+1}$。

记 $s_i = (b_i, p_i)$。

---

4. 残差（Residual）

对任意长度 10 轨道 γ，定义：

4.1 五步残差

$$\varepsilon_5(\gamma) = (\varepsilon_5^b(\gamma), \varepsilon_5^p(\gamma)) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5$$

其中

$$\begin{aligned} \varepsilon_5^b(\gamma) &= b_5 \oplus \neg b_0 \\ \varepsilon_5^p(\gamma) &= (p_5 - p_0)(\mathrm{mod} 5) \end{aligned}$$

4.2 十步残差

$$\varepsilon_{10}(\gamma) = \left(\varepsilon_{10}^b(\gamma), \varepsilon_{10}^p(\gamma)\right) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5$$

其中

$$\begin{aligned} \varepsilon_{10}^b(\gamma) &= b_{10} \oplus b_0 \\ \varepsilon_{10}^p(\gamma) &= (p_{10} - p_0)(\mathrm{mod} 5) \end{aligned}$$

4.3 总残差

$$\varepsilon(\gamma) = (\varepsilon_5(\gamma), \varepsilon_{10}(\gamma)) \in (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5)^2$$

---

5. 世界（World）

Residual KFX 的“世界”定义为**所有长度 10 轨道及其残差的对**:

$$\mathcal{W}_{\text{KFX-R}} = \{(\gamma, \varepsilon(\gamma)) \mid \gamma \text{ 为长度 10 轨道}\}$$

---

6. 与原 KFX 的关系（零残差切片）

定义零残差集合:

$$W_{KFX}^{0} = \{\gamma \mid \varepsilon_5(\gamma) = (0,0) \wedge \varepsilon_{10}(\gamma) = (0,0)\}$$

则原 KFX 的合法轨道世界等同于上述零残差切片（同一对象集合，只是表述不同）。