无目标演化形式系统的极限结构：从单轨道核到目标不可避免性定理

Kaifan XIE

2026.02.08

1 研究动机

本文研究一类有限状态形式系统，其演化过程由局部步规则生成，而“合法性”并非由目标态、吸引态或最优准则定义，而是通过对完整轨道（或路径）的结构性约束加以筛选。我们称此类系统为**无目标演化系统**。

核心问题是：

> 在不引入任何目标态的前提下，一个有限系统在结构上最多可以复杂到什么程度？

本文给出一个逐层放宽结构约束的构造路径，并最终证明：**无目标演化在允许的结构自由度上存在一个不可逾越的极限**。

2 基本范式：轨道约束形式系统

定义 1 (轨道约束形式系统). *一个轨道约束形式系统由以下数据构成：*

1. *有限状态集合 S；*
2. *一组局部一步规则 $\mathcal{R} \subseteq S \times S$；*
3. *对有限长度路径的全局合法性判定规则。*

系统的“世界”定义为所有满足合法性约束的路径集合。

在本文中，**合法性判定不允许引用任何指定目标态或状态子集**，只能依赖路径整体的结构性质。

3 KFX-β：单轨道、二层覆盖的最小非唯一核

3.1 结构定义

定义 2 (KFX-β). 令

$$S = \{0,1\} \times \mathbb{Z}_4,$$

定义相位推进算子

$$\sigma(b,p) = (b, p+1 \bmod 4).$$

允许两条局部规则：

$$\begin{aligned} R_0 &: (b,p) \mapsto (b, p+1), \\ R_1 &: (b,p) \mapsto (1-b, p+1). \end{aligned}$$

定义长度为 4 的轨道 $\gamma = (s_0, \ldots, s_4)$ 为合法，当且仅当：

1. $s_4 = s_0$；

2. 使用 R_1 的次数为偶数。

3.2 性质

定理 1. *KFX-β 的合法步模式数量为 8，且不存在任何目标态或吸引结构。*

该系统是：

- 非唯一的；

- 无目标的；

- 在上述结构约束下状态数最小。

4 KFX-δ：有限群覆盖的一般化

4.1 结构推广

定义 3 (群覆盖无目标核). 设 G 为有限群，$\Gamma \subseteq G$ 为生成集。定义有限集合 S，以及映射

$$\pi : S \to G, \quad \sigma : S \to S,$$

满足：

1. σ 生成一个相位循环：$\sigma^n = \mathrm{id}$；

2. 对每个 $g \in \Gamma$，存在局部规则 R_g，使得

$$(s,t) \in R_g \Rightarrow \begin{cases} t = \sigma(s), \\ \pi(t) = \pi(s) \cdot g. \end{cases}$$

4.2 合法性

长度为 n 的轨道合法，当且仅当

$$\prod_{i=1}^{n} g_i = e_G.$$

定理 2. 合法步模式数量为

$$|\Omega| = |\Gamma|^{n-1}.$$

此结论完全独立于 S 的具体表示，仅依赖群覆盖结构。

5 KFX-ε：多相位轨道的直和

5.1 轨道分解

定义 4. 设

$$S = \bigsqcup_{j=1}^{m} S_j,$$

其中每个 S_j 是 σ 的一个不交循环轨道，周期为 n_j。

局部规则与群覆盖在每个轨道上独立作用。

5.2 世界分解

定理 3. 系统的世界严格分解为各轨道世界的直和：

$$\mathcal{W} = \bigsqcup_{j=1}^{m} \mathcal{W}_j.$$

合法路径数满足：

$$|\Omega| = \sum_{j=1}^{m} |\Gamma|^{n_j-1}.$$

6 KFX-ζ：稀疏跨轨道跳跃

6.1 跳跃规则

定义 5. *允许跨轨道跳跃 $J \subseteq S \times S$，满足：*

1. $\sigma(t) = \sigma(s)$;
2. $\pi(t) = \pi(s)$;
3. s, t *属于不同轨道。*

跳跃不改变相位与群值，仅改变轨道标签。

6.2 结果

定理 4. *若存在非平凡跳跃规则，则：*

- *轨道标签不再是不变量；*
- *世界不再可分解；*
- *系统仍保持无目标性。*

7 KFX-ω：无目标演化的极限

7.1 三种等价的结构破坏

考虑以下任一修改：

1. 跳跃改变群覆盖值；
2. 跳跃改变相位；
3. 不同步规则对应不同相位推进。

7.2 目标不可避免性定理

定理 5 (目标不可避免性)**.** *在有限状态系统中，若：*

1. *路径由局部规则生成；*
2. *合法性需要筛选；*
3. *上述任一结构破坏被允许；*

则存在不可约状态子集 $T \subseteq S$，使合法路径被结构性偏置为必须经过或趋向 T。

该 T 在形式上等价于目标态或吸引集。

8 结论

无目标演化并非“什么都不加”，而是一组高度精细且脆弱的结构条件。本文刻画了其从最小非唯一核到结构崩塌的完整路径，并给出了无目标演化存在的严格极限。