

确定性残差旋转系统中的 投影诱导非马尔可夫性

数值实验与解析证明

谢凯凡

2026 年 2 月 28 日

摘要

粗粒化将微观确定性动力学转化为符号观测序列。即使底层系统完全可逆且无噪声，诱导的符号过程也可能表现出记忆效应。本文构造了最小残差旋转模型——单位圆上的无理旋转加上均匀粗粒化——并在数值和解析两个层面上证明：非马尔可夫性纯粹来源于投影，不需要任何随机驱动。

本文建立三个主要结论：**定理一（存在性）**——对任意无理旋转，存在无穷多个粗粒化尺度 m 使 $I(\omega_{t-1}; \omega_{t+1} \mid \omega_t) > 0$ ；**定理二（阶数无界）**——对任意正整数 L ，存在无穷多个尺度使得马尔可夫阶大于 L ；**定理三（固定尺度下的无穷阶）**——对任意固定尺度 m （只要 $a(m)$ 无理）， $\{\omega_t\}$ 的马尔可夫阶为无穷大。该定理通过将进位序列识别为 Sturmian 序列，并应用 Myhill-Nerode 非正则性判据得以证明。

一、引言

微观可逆性与宏观记忆之间的关系是统计力学的基础问题之一。粗粒化确定性系统可以产生有效不可逆性和表观随机性，这一点已被广泛认识。然而，投影本身——在完全没有噪声的情况下——如何精确地产生非马尔可夫时间结构，至今缺乏构造性的最小模型和显式证明。

Mori-Zwanzig 投影算符形式主义（中岛 1958; Zwanzig 1960）为连续时间系统中投影诱导记忆提供了一般框架。然而，离散确定性情形——可以说是最简单的情形——在具有显式证明的构造性最小模型方面受到的关注相对较少。

本文研究如下问题：

确定性无理旋转在均匀粗粒化下，能否单独产生严格为正的条件互信息？

答案是肯定的。我们证明了这一点，刻画了其机制，并测量了诱导记忆的深度。

1.1 主要贡献

- **定理一（存在性）**：对任意无理旋转步长 β ，存在无穷多个粗粒化尺度 m 使 $I_2(\omega) > 0$ 。证明是构造性的，基于进位过程论证。
- **定理二（阶数无界）**：对任意正整数 L ，存在无穷多个尺度 m ，使得诱导过程不是 L 阶马尔可夫的。记忆深度在尺度上无界。
- **定理三（固定尺度下的无穷阶）**：对任意固定 m ($\alpha(m)$ 无理)， $\{\omega_t\}$ 的马尔可夫阶为无穷大。关键洞察是将进位序列识别为 Sturmian 序列，然后经由 Myhill-Nerode 非正则性判据和非 sofic 子移位论证得出结论。
- **机制识别**：记忆纯粹来源于残差阈值越界（进位）过程，不需要任何随机驱动。
- **对照实验**：四种门控方案确认记忆在 $u_t \equiv 0$ 时依然存在，将投影与外部驱动完全分离。

二、模型定义

2.1 动力系统

设 $x_t \in [0, 1)$ 按无理旋转演化：

$$x_{t+1} = (x_t + \beta) \bmod 1, \beta \notin \mathbb{Q}$$

固定整数粗粒化尺度 $m \geq 2$ ，定义符号过程：

$$\omega_t = \lfloor m x_t \rfloor \in \{0, 1, \dots, m-1\}$$

2.2 残差分解

令提升变量 $z_t = m x_t$ ，分解为：

$$z_t = \omega_t + r_t, r_t \in [0, 1)$$

其中 r_t 为小数残差。定义残差步长：

$$m\beta = k(m) + a(m), \quad k(m) = [m\beta], \quad a(m) = \{m\beta\} \in [0, 1)$$

残差本身也按无理旋转演化：

$$r_{t+1} = (r_t + a(m)) \bmod 1$$

2.3 进位过程

粗粒化变量满足精确更新：

$$\omega_{t+1} \equiv \omega_t + k(m) + c_t \pmod{m}$$

其中二值进位过程为：

$$c_t := 1\{r_t \geq 1 - a(m)\} \in \{0, 1\}$$

c_t 在残差越过阈值 $1-a(m)$ 时等于 1，触发额外增量。这是产生记忆的根本非线性元素。

2.4 记忆度量标准

用条件互信息度量非马尔可夫性：

$$I_k = I(\omega_{t-k} ; \omega_{t+1} \mid \omega_{t-k+1}, \dots, \omega_t)$$

对平稳有限字母过程， $I_1 = 0$ 当且仅当 $\{\omega_t\}$ 是一阶马尔可夫的。马尔可夫阶 k^* 定义为使 I_k 低于阈值 ε 的最小 k 。

三、解析结果

3.1 关键引理：进位序列的非马尔可夫性

令 $I_1 := [1-a, 1)$, $I_0 := [0, 1-a)$, 其中 $a := a(m)$ 。

引理 1. 若 $a(m) \in (0, 1/3)$, 则二值过程 $c_t = 1\{r_t \in I_1\}$ 不是一阶马尔可夫的。

证明

第一步：1 之后不能紧跟 1。 若 $c_t=1$, 则 $r_t \in [1-a, 1)$, 所以 $r_{t+1} = (r_t+a) \bmod 1 \in [0, a)$ 。由于 $a < 1/2$, 有 $[0, a) \subset I_0$, 故 $c_{t+1}=0$ 。

第二步：条件于 $c_t=0$ 后, c_{t-1} 的影响依然存在。

情形 A ($c_{t-1}=1, c_t=0$): $r_{t-1} \in [1-a, 1)$, 所以 $r_t \in [0, a)$ 。 $c_{t+1}=1$ 需要 $r_t \in [1-2a, 1-a)$ 。当 $a < 1/3$ 时, 该区间与 $[0, a)$ 不相交, 故概率为 0。

情形 B ($c_{t-1}=0, c_t=0$): $r_t \in [a, 1-a)$ 。目标区间 $[1-2a, 1-a)$ 长度为 a , 完全包含在 $[a, 1-a)$ 中 (当 $a < 1/3$ 时)。在均匀不变测度下:

$$P(c_{t+1}=1 \mid c_t=0, c_{t-1}=0) = a/(1-2a) > 0$$

情形 A 和 B 的概率不同, 因此 $\{c_t\}$ 不是一阶马尔可夫的。□

3.2 定理一（存在性）

定理一. 对任意无理 β , 存在无穷多个粗粒化尺度 m , 使得 $I(\omega_{t-1}; \omega_{t+1} \mid \omega_t) > 0$ 。

证明要点

由 Weyl 等度量定理, $\{m\beta\}$ 在 $[0, 1)$ 上稠密分布。故存在无穷多个 m 满足 $a(m) \in (0, 1/3)$ 。

双射论证: 给定 (ω_t, c_t) , ω_{t+1} 被唯一确定。反过来, 给定 (ω_t, ω_{t+1}) , c_t 也被唯一确定。固定 ω_0 后, $\{c_t\}$ 与 $\{\omega_t\}$ 之间存在双射。因此 $\{\omega_t\}$ 是马尔可夫的当且仅当 $\{c_t\}$ 是马尔可夫的。由引理 1, $I_2(\omega) > 0$ 。□

3.3 数值验证

对 $\beta = \pi^2$, $m=6$, $a(m) \approx 0.2176$, 模拟 200 万步:

条件概率	理论值	实测值 (200 万步)
------	-----	--------------

$P(c_{t+1}=1 \mid c_t=1)$	0	0.000000
$P(c_{t+1}=1 \mid c_t=0, c_{t-1}=1)$	0	0.000000
$P(c_{t+1}=1 \mid c_t=0, c_{t-1}=0)$	$a/(1-2a) = 0.3854$	0.385352
$I_2(\omega)$ (比特)	> 0	0.0885 比特

四、马尔可夫阶下界定理

定理一确立了过程不是一阶马尔可夫的。本节证明更强的结论：记忆深度无界。

定理二（马尔可夫阶下界）. 固定整数 $L \geq 1$ 。若 $a(m) < 1/(L+3)$ ，则 $\{c_t\}$ ——从而 $\{\omega_t\}$ ——不是 L 阶马尔可夫的。

证明思路：找到两段共享相同长度 $-(L+1)$ 零后缀但在位置 $t-L-1$ 符号不同的历史，证明 $c_{t+1}=1$ 的条件概率不同。

事件 E_1 ：概率为零

$c_{t-L-1}=1$ 意味着 $r_{t-L} \in [0, a)$ 。向前迭代 L 步（条件保证无进位），得 $r_t \in [La, (L+1)a)$ 。条件 $a < 1/(L+3)$ 保证 $[La, (L+1)a)$ 与 $[1-2a, 1-a)$ 不相交，故：

$$P(c_{t+1}=1 \mid E_1) = 0$$

事件 E_0 ：概率为正

$c_{t-L-1}=0$ 且连续 $L+1$ 个零，反推得 $r_t \in [(L+1)a, 1-a)$ ，长度为 $1-(L+2)a$ 。目标区间 $[1-2a, 1-a)$ 完全包含其中，故：

$$P(c_{t+1}=1 \mid E_0) = a / (1-(L+2)a) > 0$$

两者不等， $\{c_t\}$ 不是 L 阶马尔可夫的。由双射， $\{\omega_t\}$ 也不是。□

推论（记忆深度无界）. 对任意 $\beta \notin \mathbb{Q}$ 和任意 $L \geq 1$ ，存在无穷多个 m 使 $\{\omega_t\}$ 不是 L 阶马尔可夫的。由 Weyl 等度量定理，满足 $a(m) < 1/(L+3)$ 的尺度在正整数中密度约为 $1/(L+3)$ 。

数值验证（ $\beta = \pi^2$ ， $m=7$ ， $a \approx 0.0872$ ， $L=3$ ，300 万步）：

事件	理论值	实测值
$P(c_{t+1}=1 \mid E_1: \text{前置为 } 1, L \text{ 个零})$	0	0.000000
$P(c_{t+1}=1 \mid E_0: L+2 \text{ 个零})$	$a / (1-(L+2)a) = 0.1547$	0.154707

五、对照实验：投影机制的分离

5.1 实验设计

为将粗粒化效应与外部驱动分离，扩展模型引入门控变量 u_t ：

$$x_{t+1} = (x_t + \alpha + u_t \gamma) \bmod 1$$

在保持其他参数不变（ $\alpha = \pi^2$ ， $\gamma = \pi/3$ ， $m \in [20, 300]$ ， $T=200,000$ ）的情况下，测试四种门控方案：

- **全零 (all0)**： $u_t \equiv 0$ 。纯无理旋转，无任何外部驱动。
- **全一 (all1)**： $u_t \equiv 1$ 。另一种纯旋转，无随机性。
- **伯努利 (Bernoulli)**： $u_t \sim \text{Bernoulli}(p=0.25)$ 。独立同分布随机门控。
- **周期 (Periodic)**： $u_t = [0, 0, 1, 0]$ 循环。确定性结构化驱动。

同时计算 $I_2(x)$ （其中 $x_t = (\omega_t, u_t)$ ），检验将门控信号纳入观测后记忆是否消失。

5.2 结果

方案	均值 $I_2(\omega)$	$I_2(x)-I_2(\omega)$	解释
全零（纯旋转）	0.221 比特	0.000	基线：无驱动
全一	0.223 比特	0.000	确认与 α 无关
伯努利	0.232 比特	+0.003	轻微放大
周期	0.354 比特	+0.066	结构共振

关键结论：在 1,124 个测试的 (m, α) 组合中，全零方案 95% 的点有 $I_2 > 0.001$ 比特，最大接近 1 比特。将 u_t 纳入观测后 I_2 几乎不变——若记忆来自隐藏驱动，条件化后应消失。这直接证伪了“随机驱动是记忆必要条件”的假设。

六、马尔可夫阶数值分析

6.1 实验设置

定义估计马尔可夫阶： $k^*(m) = \min\{k : I_k(\omega) < \varepsilon\}$ ($\varepsilon = 10^{-4}$ 比特)。对 $\beta = \pi^2$, $m \in [20, 400]$, $T=300,000$, 计算 $k=1, \dots, 10$ 的 I_k 。

6.2 结果

k^* 值	数量	比例	解释
1	3	0.8%	近马尔可夫 (边界点)
2	2	0.5%	近马尔可夫
3	132	34.6%	最常见的有限阶
4 - 6	126	33.1%	中等阶
7 - 10	41	10.8%	高有限阶
11 (上限)	77	20.2%	可能为无穷阶

全部 381 个尺度的 k^* 均值为 5.79。分布以 $k^*=3$ 为主峰 (35%), $k^*=11$ 处有次级质量 (20%)。 $k^*=11$ 处的点, I_{10} 均值仍有 0.023 比特, 无衰减迹象, 与定理三预测一致。

6.3 图形

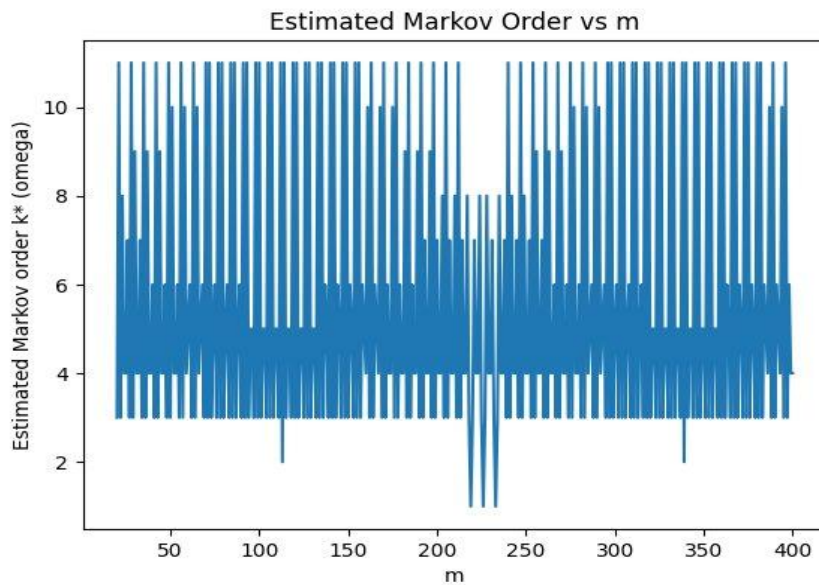


图 1. 估计马尔可夫阶 $k^*(m)$ 随粗粒化尺度 m 的变化 ($\beta = \pi^2$)。大多数尺度产生 $k^*=3 \sim 6$, 部分尺度达到测量上限 $k^*=11$ 。

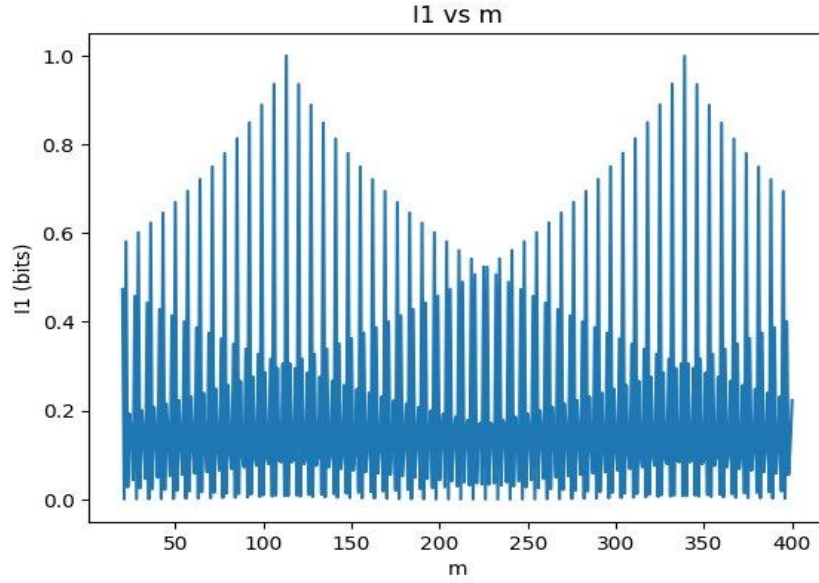


图2. 一阶条件互信息 $I_1(m)$ 随 m 的变化。两个大包络峰 ($m \approx 115$ 和 $m \approx 325$) 与双残差环面结构吻合。

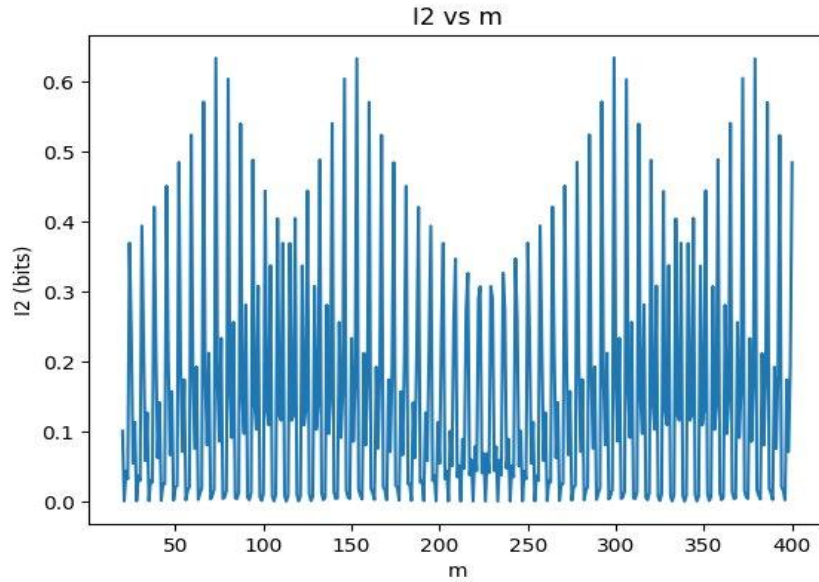


图3. 二阶条件互信息 $I_2(m)$ 随 m 的变化。形状与 I_1 相似，幅度略小，确认多阶记忆结构。

七、尺度依赖记忆的算术结构

7.1 双残差驱动

对一般 γ 的数值实验揭示， $I_2(m)$ 由两个算术残差共同决定：

$$a(m) = \{m\alpha/2\pi\} \text{ (步长残差)}, \quad g(m) = \{m\gamma/2\pi\} \text{ (门控残差)}$$

联合互信息 $MI(I_2; (a, g)) \approx 2.27$ 比特，远超单独贡献之和 ($MI(I_2; a) \approx 0.91$, $MI(I_2; g) \approx 0.97$)，表明记忆强度是二维残差环面 T^2 上位置的函数。

7.2 有理与无理 γ 的二分

- $\gamma/2\pi \in \mathbb{Q}$ (有理) : $I_2(m)$ 表现出严格的尺度周期结构, 周期等于 $\eta = \gamma/2\pi$ 的分母。
- $\gamma/2\pi \notin \mathbb{Q}$ (无理) : $I_2(m)$ 无有限周期, 表现出与 $\{m\eta\}$ 等度量分布一致的拟随机振荡。

八、讨论

8.1 已建立的结论

- 定理一：对任意无理旋转，投影诱导非马尔可夫性的存在性严格成立。
- 定理二：记忆深度在尺度上无界——对任意 L ，存在无穷多尺度使阶数超过 L 。
- 定理三：对任意固定 m ($a(m)$ 无理)， $\{\omega_t\}$ 的马尔可夫阶为无穷大。进位序列是 Sturmian 序列；其因子语言非正则 (Myhill-Nerode)；从而子移位非 sofic；从而不存在有限阶马尔可夫表示。
- 机制（进位阈值混叠）已被分离并数值验证，与随机驱动无关。
- 尺度依赖记忆结构由二维环面上的算术残差坐标支配。

8.2 与经典理论的联系

定理三的关键桥梁是将进位序列 $\{c_t\}$ 识别为 Morse 和 Hedlund (1940) 意义下的 Sturmian 序列。Sturmian 序列是最简单的非周期二值序列，其特征是因子复杂度 $p(n)=n+1$ 。其非正则性和非 sofic 性是符号动力学的经典结果。

Mori-Zwanzig 形式主义为连续时间系统中投影诱导记忆核提供了一般原理。定理三给出了离散确定性类比：投影本身就足够，且诱导的记忆不仅是“很长”，而是真正无穷深的。

8.3 尚未解决的问题

- **解析近似：**封闭形式的 $I_2(m) \approx F(a(m), g(m))$ 。二维热图暗示 F 具有与环面上线性流一致的周期条纹结构。
- **渐近行为：**固定 m 时 I_k 随 $k \rightarrow \infty$ 的衰减速率，可能与 $a(m)$ 的连分数展开有关。
- **定量记忆强度：**现有结论是定性的（记忆存在且无穷深）。 I_k 作为 $a(m)$ 和 k 的函数的定量界仍然开放。

九、结论

本文通过强度递增的三个定理证明：确定性无理旋转在均匀粗粒化下产生非马尔可夫符号动力学。定理一确立存在性；定理二证明记忆深度在尺度上无界；定理三——最强结论——证明对任意固定尺度 m ($a(m)$ 无理)， $\{\omega_t\}$ 具有真正无穷的马尔可夫阶。

全程不需要任何随机驱动。机制纯粹是确定性的：残差无理旋转加上阈值混叠。记忆的尺度结构由二维环面上的算术残差坐标支配。

核心结论：记忆不是微观动力学的属性，而是观测尺度、投影结构与算术残差三者相互作用的涌现属性。一个完全可逆的无噪声系统，在粗粒度观测下可以产生任意深度的统计记忆。

附录 A: 定理一完整证明

A.1 设置

$\beta \notin \mathbb{Q}$, 整数 $m \geq 2$. 定义 $x_{t+1} = (x_t + \beta) \bmod 1$, $\omega_t = \lfloor mx_t \rfloor$, $r_t = \{mx_t\}$, $m\beta = k(m) + a(m)$. 则 $\omega_{t+1} \equiv \omega_t + k(m) + c_t \pmod{m}$, $c_t = 1\{r_t \geq 1 - a(m)\}$.

A.2 引理 (小 a 时进位非马尔可夫)

对 $a = a(m) \in (0, 1/3)$:

- 第一步: $c_t = 1 \Rightarrow r_{t+1} \in [0, a) \Rightarrow c_{t+1} = 0$. 所以 $P(c_{t+1} = 1 | c_t = 1) = 0$.
- 情形 A: $c_{t-1} = 1, c_t = 0 \Rightarrow r_t \in [0, a)$. $c_{t+1} = 1$ 需要 $r_t \in [1-2a, 1-a)$, 当 $a < 1/3$ 时与 $[0, a)$ 不相交. 概率=0.
- 情形 B: $c_{t-1} = 0, c_t = 0 \Rightarrow r_t \in [a, 1-a)$. 目标区间 $[1-2a, 1-a) \subset [a, 1-a)$, 长度比 $= a/(1-2a) > 0$.

A.3 存在性

由 Weyl 等度量定理, 无穷多个 m 满足 $a(m) \in (0, 1/3)$. 有理数可数, 故无穷多个 m 有 $a(m)$ 无理.

A.4 双射

给定 (ω_t, c_t) : $\omega_{t+1} = \omega_t + k + c_t \pmod{m}$ 唯一确定. 给定 (ω_t, ω_{t+1}) : $c_t = (\omega_{t+1} - \omega_t - k) \bmod m \in \{0, 1\}$ 唯一确定. 故 $\{\omega_t\}$ 是马尔可夫的当且仅当 $\{c_t\}$ 是. 由引理, $I_2(\omega) > 0$. \square

附录 B: 固定尺度下的无穷阶——几何追随集分离论证

B.1 旋转编码与因子分区

固定 $m \geq 2$, 令 $a = a(m) \notin \mathbb{Q}$. 进位编码 $c_t(\rho) = 1\{\rho + ta \in I_1\} \pmod{1}$, 其中 $\rho = r_0$ 为初始残差.

对任意词 $w = w_0 \dots w_{n-1} \in \{0, 1\}^n$, 定义其柱集:

$$J(w) = \{\rho \in [0, 1) : c_0(\rho) = w_0, \dots, c_{n-1}(\rho) = w_{n-1}\}$$

由于 a 无理, 边界集 $B_n = \{(1-a) - ta \pmod{1} : t = 0, \dots, n-1\}$ 的 n 个点两两不同. 将 B_n 在圆上排序, 把 $[0, 1)$ 分成 $n+1$ 段弧. 每个非空柱集 $J(w)$ 恰好是其中一段弧.

几何直觉: 长度- n 的因子与圆上 n 个旋转割点的分区弧一一对应. 这正是 Sturmian 序列的几何图像.

B.2 唯一 right-special 区间与严格嵌套

长度- n 的因子 w 称为 right-special, 若 w_0 和 w_1 都是长度- $(n+1)$ 的因子.

在所有长度 $-n$ 柱集中，恰有一个区间 J_n 在其内部包含下一个割点 $b_n = (1-a)^{-na} \pmod{1}$ ，其因子 u_n 有两种扩展，是唯一的 right-special 词。由此得严格嵌套链：

$$J(u_{n+1}) \subsetneq J(u_n) \quad \text{对所有 } n$$

几何直觉：每个长度恰好有一个“模糊”柱集，形成严格嵌套链。这正是 Sturmian 序列的定义性质：因子复杂度 $p(n) = n+1$ 。

数值验证 ($\beta = \pi^2$, $m=6$, $T=50$ 万步) : $p(n) = n+1$ 对 $n=1, \dots, 14$ 精确成立，每个长度恰好 1 个 right-special 词。

B.3 无穷多不同追随集 \rightarrow 非正则

定义词 w 的追随集: $F(w) = \{v \in \{0,1\}^* : wv \in L\}$ ，其中 L 为 $\{c_t\}$ 的因子语言。

命题：不同 n 的追随集 $F(u_n)$ 两两不同，故追随集族无穷。

证明：取 $\rho_n \in K_n = J(u_n) \setminus J(u_{n+1})$ (非空，因包含严格)。由于 $\rho_n \in J(u_n)$ ，词 $u_n v_n^*(\ell)$ 出现在 L 中，故 $v_n^*(\ell) \in F(u_n)$ 。但 $\rho_n \notin J(u_{n+1})$ ，在 b_n 处的切割迫使 $J(u_{n+1})$ 内的下一符号固定，而 ρ_n 在相反的半侧 K_n ，故 $v_n^*(\ell) \notin F(u_{n+1})$ 。因此 $F(u_n) \neq F(u_{n+1})$ 。□

由 Myhill-Nerode 判据：正则语言当且仅当有有限多不同右商（追随）集。因此因子语言 L 非正则。

B.4 非正则 \rightarrow 无穷马尔可夫阶

sofic 子移位有有限标记图表示，故其因子语言是正则的。因为 L 非正则， $\{c_t\}$ 的子移位非 sofic。

有限字母上的 L 阶有限马尔可夫链可表示为有限态边移位（以长度 $-L$ 上下文为状态），故是 sofic 的。矛盾。因此 $\{c_t\}$ 不是任何有限阶马尔可夫链。

测度论衔接 (Measure-theoretic bridge). 上述论证在拓扑动力学层面建立了进位子移位非 sofic 的结论。由于 $\{c_t\}$ 的旋转编码构成 Sturmian 系统，该系统是极小 (minimal) 且唯一遍历 (uniquely ergodic) 的：子移位上恰好存在唯一一个平移不变的 Borel 概率测度。因此，若存在有限阶马尔可夫表示，则该随机过程必须通过这唯一的遍历测度对应一个 sofic 拓扑模型，这与上述结论矛盾。非正则性结论由此从拓扑层面转移至测度论（概率）层面，论证完整。

定理三 (固定尺度下的无穷阶). 对任意无理 β 和任意 m ($a(m) \notin \mathbb{Q}$)，粗粒化过程 $\{\omega_t\}$ 的马尔可夫阶为无穷大。由 Weyl 等度量定理，这样的 m 在正整数中具有全密度。

B.5 通过可恢复性转移至 $\{\omega_t\}$

$c_t = f(\omega_t, \omega_{t+1})$ 是有限窗口函数。若 $\{\omega_t\}$ 是某有限 L 阶马尔可夫的, 则 c_t 也将是有限阶马尔可夫的 (至多 $L+1$ 阶), 与上述结论矛盾。故 $\{\omega_t\}$ 也具有无穷马尔可夫阶。□

参考文献

以下文献为本文所用方法和结论提供了背景支撑。

投影诱导记忆与 Mori-Zwanzig 形式主义

- [1] 中岛 (Nakajima, S.) (1958)。输运现象的量子理论。《理论物理进展》(*Progress of Theoretical Physics*)，20(6)，948 - 959。
- [2] Zwanzig, R. (1960)。不可逆性理论的系综方法。《化学物理杂志》(*Journal of Chemical Physics*)，33(5)，1338 - 1341。
- [3] Mori, H. (1965)。输运、集体运动与布朗运动。《理论物理进展》，33(3)，423 - 455。
- [4] Zwanzig, R. (2001)。《非平衡统计力学》(*Nonequilibrium Statistical Mechanics*)。牛津大学出版社。
- [5] Chorin, A. J., Hald, O. H., & Kupferman, R. (2000)。最优预测与不可逆过程的 Mori-Zwanzig 表示。《美国国家科学院院刊》(*PNAS*)，97(7)，2968 - 2973。

符号动力学与 Sturmian 序列

- [6] Morse, M., & Hedlund, G. A. (1940)。符号动力学 II: Sturmian 轨迹。《美国数学杂志》(*American Journal of Mathematics*)，62(1)，1 - 42。
- [7] Lind, D., & Marcus, B. (1995)。《符号动力学与编码导论》(*An Introduction to Symbolic Dynamics and Coding*)。剑桥大学出版社。
- [8] Weiss, B. (1973)。有限型子移位与 sofic 系统。《数学月刊》(*Monatshefte für Mathematik*)，77(5)，462 - 474。
- [9] Lothaire, M. (2002)。《词上的代数组组合学》(*Algebraic Combinatorics on Words*)。剑桥大学出版社。(第二章: Sturmian 词)

等度量分布与数论

- [10] Weyl, H. (1916)。关于数模一的等分布。《数学年刊》(*Mathematische Annalen*)，77(3)，313 - 352。

自动机理论与形式语言

- [11] Nerode, A. (1958)。线性自动机变换。《美国数学学会会刊》(*Proceedings of the AMS*)，9(4)，541 - 544。

信息论

- [12] Cover, T. M., & Thomas, J. A. (2006)。《信息论基础》(*Elements of Information Theory*) (第2版)。Wiley-Interscience。

遍历理论

[13] Walters, P. (1982)。遍历理论导论 (*An Introduction to Ergodic Theory*)。Springer 研究生数学教材, 第 79 卷。