FKX：约束驱动离散形式系统

谢凯凡

2026-02-11

1 目的与立场

本文给出一类约束驱动的离散形式系统（FKX 系列）的最小定义，并给出可复用的结构性结论：系统的有效自由度（维度）由合法解集合（世界）决定，而非由状态表示维度、状态规模或局部操作的数量决定。同时给出三种最小反例模板，用于展示：只要对系统做极小改变，即可破坏“零维刚性”。

2 FKX 基本系统：FKX_H

2.1 系统四元组

定义 1 (FKX 系统)**.** 定义一个离散形式系统为四元组

$$\mathrm{FKX\_H} = \langle \Sigma, S, \mathcal{I}, \mathcal{R} \rangle,$$

其中：

- Σ 为符号表（元素、位置、关系等的集合）；
- S 为状态空间；
- $\mathcal{I} = \{I_1, I_2, \dots\}$ 为不变量/约束集合；
- $\mathcal{R}$ 为状态转移关系（或转移规则集合）。

2.2 一个具体实例（3×3 双射状态）

定义 2 (符号与邻接)**.** 令元素集 $\Sigma_e = \{1, 2, \dots, 9\}$，位置集

$$\Sigma_p = \{(x, y) \mid x, y \in \{-1, 0, 1\}\},$$

邻接关系 $\sim$ 定义为

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \iff |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| = 1.$$

定义 3 (状态空间)**.** 一个状态是双射映射

$$s : \Sigma_p \to \Sigma_e$$

且满足对任意 $e \in \Sigma_e$，存在唯一位置 $p \in \Sigma_p$ 使得 $s(p) = e$。所有满足该条件的 s 构成状态空间 S。

定义 4 (不变量集合 $\mathcal{I}$（示例）)**.** 给定约束集合 $\mathcal{I} = \{I_1, I_2, I_3\}$：

(I1) **直线求和不变量：** 设 L 为所有长度为 3 的水平、垂直与对角直线集合，则

$$\forall \ell \in L, \quad \sum_{p\in\ell} s(p) = 15.$$

(I2) **中心锚定约束：** $s(0,0) = 5$。

(I3) **奇偶对称约束：**

$$\forall p \in \Sigma_p \setminus \{(0,0)\}, \quad \mathrm{parity}(s(p)) \neq \mathrm{parity}(s(-p)).$$

定义 5 (转移关系 $\mathcal{R}$（约束驱动）)**.** 一次转移记为 $s \xrightarrow{r} s'$，满足：

(R1) 存在有限位置子集 $P \subset \Sigma_p$；

(R2) 转移仅在 P 上发生：$\forall p \notin P,\ s'(p) = s(p)$；

(R3) **合法性保持：** s' 仍满足全部不变量 $\mathcal{I}$。

允许的全部此类转移构成 $\mathcal{R}$。

2.3 合法集合、可达性与世界

定义 6 (合法状态集合)**.** 定义合法集合（约束解集）

$$\mathcal{L} := \{s \in S \mid s \models \mathcal{I}\}.$$

定义 7 (可达关系)**.** 定义可达关系 $\Rightarrow$：

$$s \Rightarrow s' \iff \exists r_1, \dots, r_n \in \mathcal{R} : \ s \xrightarrow{r_1} \cdots \xrightarrow{r_n} s'.$$

定义 8 (世界（连通分支）)**.** 若 $s, s' \in \mathcal{L}$ 且互相可达，则它们属于同一连通分支。定义一个世界为 $\mathcal{L}$ 在 $\Rightarrow$ 下的一个连通分支，记为 $\mathcal{W}$。所有世界的集合记为 $\{\mathcal{W}\}$。

3 FKX 结构性结论：零维刚性（可复用）

3.1 闭合性

引理 1 (合法集合对转移闭合)**.** 对任意 $s \in \mathcal{L}$，若 $s \xrightarrow{r} s'$ 为允许转移，则 $s' \in \mathcal{L}$。

证明. 由转移定义的 (R3)，每一步转移都要求 $s' \models \mathcal{I}$，故 $s' \in \mathcal{L}$。 □

3.2 维度（有效自由度）的工作定义

定义 9 (FKX 的工作维度：解空间参数维数)**.** 在 *FKX* 语境下，将“维度/自由度”理解为：

> 索引一个世界 $\mathcal{W}$ 所需的独立参数的最小数量。

若 $\mathcal{W}$ 为有限集合且不存在可调连续参数或外加自由参数，则记为

$$\dim(\mathcal{W}) = 0.$$

定理 1 (FKX 零维刚性: 世界无自由参数). *在 FKX_H 中, 每个世界 $\mathcal{W}$ 是零维的, 即 $\dim(\mathcal{W}) = 0$。*

证明. 首先，S 是有限集（双射数量有限），因此 $\mathcal{L} \subseteq S$ 亦有限，世界 $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{L}$ 有限。其次，系统定义未引入任何外加自由参数（权重、概率、阈值等），且转移被约束 (R3) 投影回 $\mathcal{L}$，因此“世界结构”不依赖额外参数族。故 $\mathcal{W}$ 无独立可调参数，按工作定义得 $\dim(\mathcal{W}) = 0$。 □

推论 1 (演化不蕴含自由度). *即便存在非平凡转移（系统“在走”），只要世界为有限解簇且无外加自由参数，仍有 $\dim(\mathcal{W}) = 0$。*

4 最小反例模板（破坏零维刚性）

下面给出三种最小改动，每一种都只破坏关键条件中的一条，从而使“零维刚性”失效。

4.1 反例 A：加 1 bit 世界参数（最锋利）

定义 10 (FKX_A：约束模式位). *引入外加参数 $c \in \{0, 1\}$，定义一族系统*

$$\text{FKX\_A}(c) = \langle \Sigma, S, \mathcal{I}_c, \mathcal{R} \rangle,$$

其中

$$\mathcal{I}_c := \begin{cases} \{I_1, I_2, I_3\} & c = 0, \\ \{I_1, I_2\} & c = 1. \end{cases}$$

其余定义不变。

定理 2 (反例 A：维度至少为 1（离散参数）). *在 FKX_A 中，系统族的世界结构依赖 c，因此需至少一个独立参数索引，故“零维刚性”被破坏。*

证明. c 不可由系统内部状态推导（它是外加模式位），且不同 c 导致不同的合法集合 $\mathcal{L}(c)$。因此要指定“处于哪一类世界”，必须给出 c。这引入了不可消去的独立参数，故不再是零维刚性。 □

4.2 反例 B：加 1 条“泄漏”转移（破坏闭合性）

定义 11 (FKX_B：允许一次短暂违规并修复). *在原系统基础上新增一种转移 r_ϵ，允许*

$$s \xrightarrow{r_\epsilon} s' \quad \text{且} \quad s' \text{最多违反} \mathcal{I} \text{ 中的一条约束一次},$$

并要求存在固定步数 k，使得从 s' 出发在 $\leq k$ 步内可回到合法集合 $\mathcal{L}$。

定理 3 (反例 B：合法集合不再对转移闭合). *在 FKX_B 中，存在 $s \in \mathcal{L}$ 与转移使得 $s' \notin \mathcal{L}$，因此闭合性引理失效，零维刚性结论不再可直接成立。*

证明. 由定义，r_ϵ 明确允许 s' 短暂违反约束，即 $s' \not\models \mathcal{I}$，因此 $s' \notin \mathcal{L}$。故 $\mathcal{L}$ 不再对转移闭合。 □

4.3 反例 C：把不变量改为软约束（引入能量景观）

定义 12 (FKX_C：能量函数与单调转移)**.** 定义违约代价（示例）：

$$E(s) = w_1 \cdot \mathrm{viol}(I_1, s) + w_2 \cdot \mathrm{viol}(I_2, s) + w_3 \cdot \mathrm{viol}(I_3, s),$$

其中 $w_i > 0$ 为权重，$\mathrm{viol}(\cdot)$ 为非负违约度量。定义转移为：

$$s \to s' \iff s' \text{ 与} s \text{ 仅差有限位置且} E(s') \le E(s).$$

定理 4 (反例 C：引入外加参数族与多盆地结构)**.** 在 FKX_C 中，权重向量 (w_1, w_2, w_3) 是外加参数族，且系统结构随权重变化，形成能量景观与多盆地，可视为破坏零维刚性。

证明. 不同权重会改变可接受的转移集合与吸引域结构（哪些路径单调可行、哪些极小点成为稳定点等）。因此世界结构依赖外加参数 (w_1, w_2, w_3)，不再是零维刚性。 □

5 FKX 家族关系（简述）

FKX 家族可理解为一类“**候选空间巨大但世界由约束决定**”的系统原型：

- 若全局约束/不变量足够强，合法世界可坍缩为零维（刚性解簇）；
- 增加坐标或扩大状态表示维度，不必然增加自由度；
- 自由度真正增加通常来自：外加世界参数、破坏闭合性、或将硬约束软化为可调景观。

6 备注：如何使用本文

1. 若你要“证明系统没自由度/不值得搜索”，用 FKX_H 的零维刚性结论。
2. 若你要“展示最小改动如何立刻产生自由度”，用反例 A/B/C 中任一模板。
3. 若你要把 FKX 用作“模型免疫测试器”，就把你关心的系统抽象成 $\langle \Sigma, S, \mathcal{I}, \mathcal{R} \rangle$，检查它是否满足闭合性与无外加参数。