有限非自治系统中的残差窗口诱导演化

——KFX-R 的不可约形式化定义

摘要

本文提出 **KFX-R（Residual KFX）**，一种有限离散系统，其动力学**不定义在状态本身上**，而仅通过**固定长度滑动窗口诱导的残差演化算子**给出。
系统由最小局部规则集、有限状态空间及轨道残差投影构成。我们证明：**不存在任何仅基于残差态的自治演化算子**；残差演化必然是**非自治、非马尔可夫且由窗口边界驱动**的。
进一步证明：原 KFX 系统等价于 KFX-R 中的**零残差切片**。
该形式化从结构上阻断了由宏观量反推微观历史的可能性，严格区分了轨道动力与残差演化，为自动机理论、控制论与非平衡系统中的粗粒化动力学提供了一个**不可叙事化、不可还原**的模板。

---

1. 引言

在大量离散动力系统中，宏观变量常被用作系统的低维描述。然而在多数情形下，这些宏观量最终被**提升为自治状态**，从而隐式引入对微观历史的重构与叙事性因果。

本文提出的 **KFX-R** 刻意避免这一做法，其设计原则是：

- 残差（宏观量）**不是状态**；
- 所谓“动力”只允许作为**滑动窗口诱导的演化算子**存在；
- 任何试图将残差闭合为自治动力系统的行为，在形式上都是不可能的。

本文目标不是提高表达能力，而是实现**结构不可约性**。

---

2. 状态空间与局部规则

2.1 状态空间

记

$$\mathbb{Z}_n := \{0,1,\dots,n-1\}，\textit{其上的运算按模}\ n\ \textit{解释。}$$

定义：

- $B = \{0,1\}$

- $P = \mathbb{Z}_5$

状态空间：

$$S = B \times P$$

单个状态写作 $s = (b, p)$。

2.2 位移算子

定义：

$$\sigma(p) = p + 1(\mathrm{mod} 5), \sigma^{-1}(p) = p - 1(\mathrm{mod} 5)$$

2.3 局部转移规则

一步转移关系 $\rightarrow \subseteq S \times S$**允许且仅允许**以下两条规则：

- **R_1（前进步）**

$$(b, p) \rightarrow (b, \sigma(p))$$

- **R_2（回退翻转步）**

$$(b, p) \rightarrow (\neg b, \sigma^{-1}(p))$$

不存在任何其他合法转移。

---

3. 轨道与滑动窗口

3.1 有限轨道

长度为 10 的轨道定义为序列：

$$\gamma = (s_0, s_1, \ldots, s_{10})$$

满足对所有 $i < 10$，有 $s_i \rightarrow s_{i+1}$。

3.2 无限轨道与窗口

设

$$\Gamma = (s_0, s_1, s_2, \dots)$$

为一条无限合法轨道。

定义时间 t的滑动窗口:

$$\gamma^{(t)} = (s_t, s_{t+1}, \dots, s_{t+10})$$

---

4. 残差定义

记 $s_i = (b_i, p_i)$。

4.1 五步残差

$$\varepsilon_5(\gamma^{(t)}) = (\varepsilon_{5,b}^{(t)}, \varepsilon_{5,p}^{(t)})$$

$$\varepsilon_{5,b}^{(t)} = b_{t+5} \oplus \neg b_t$$

$$\varepsilon_{5,p}^{(t)} = (p_{t+5} - p_t)(\mathrm{mod} 5)$$

4.2 十步残差

$$\varepsilon_{10}(\gamma^{(t)}) = (\varepsilon_{10,b}^{(t)}, \varepsilon_{10,p}^{(t)})$$

$$\varepsilon_{10,b}^{(t)} = b_{t+10} \oplus b_t$$

$$\varepsilon_{10,p}^{(t)} = (p_{t+10} - p_t)(\mathrm{mod} 5)$$

4.3 总残差

$$\varepsilon(\gamma^{(t)}) = (\varepsilon_5(\gamma^{(t)}), \varepsilon_{10}(\gamma^{(t)})) \in (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5)^2$$

---

5. 世界定义与零残差切片

定义 KFX-R 的世界:

$$\mathcal{W}_{\mathrm{KFX\text{-}R}} = \{(\gamma, \varepsilon(\gamma)) \mid \gamma \text{ 为长度 10 的合法轨道}\}$$

定义零残差集合:

$$W^0_{\mathrm{KFX}} = \{\gamma \mid \varepsilon_5(\gamma) = (0,0) \ \land \ \varepsilon_{10}(\gamma) = (0,0)\}$$

定义：本文中将原 KFX 系统的合法轨道世界定义为 KFX-R 的零残差切片。
在此定义下，任何不能表述为零残差切片的形式化，均与原 KFX 不等价

---

6. 残差窗口诱导动力学（RSID）

6.1 边界规则指示量

定义第 t步的规则指示函数:

$$r_2(t) = \begin{cases} 1, & \text{若第 } t \text{ 步使用 } R_2 \\ 0, & \text{若第 } t \text{ 步使用 } R_1 \end{cases}$$

定义位移增量:

$$\Delta p(t) = \begin{cases} +1, & r_2(t) = 0 \\ -1, & r_2(t) = 1 \end{cases} (mod 5)$$

Δp(t) 在残差更新中按模 5 解释。

6.2 诱导演化算子

记:

$$\varepsilon^{(t)} = \varepsilon(\gamma^{(t)})$$

残差的**唯一允许的动力学**为滑动窗口诱导更新:

十步残差：

$$\varepsilon^{(t+1)}_{10,b} = \varepsilon^{(t)}_{10,b} \oplus r_2(t) \oplus r_2(t+10)$$

$$\varepsilon^{(t+1)}_{10,p} = \varepsilon^{(t)}_{10,p} + \Delta p(t+10) - \Delta p(t) (\mathrm{mod} 5)$$

五步残差：

$$\varepsilon_{5,b}^{(t+1)} = \varepsilon_{5,b}^{(t)} \oplus r_2(t) \oplus r_2(t+5)$$

$$\varepsilon_{5,p}^{(t+1)} = \varepsilon_{5,p}^{(t)} + \Delta p(t+5) - \Delta p(t) (\mathrm{mod} 5)$$

---

7. 反还原定理

定理 1（残差不可自治）

不存在函数

$$F: (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5)^2 \to (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5)^2$$

使得对所有无限合法轨道 Γ及所有 t，恒有：

$$\varepsilon^{(t+1)} = F(\varepsilon^{(t)})$$

证明

固定任意 t，考虑任一合法窗口 $\gamma^{(t)}$。

由于任意状态均同时允许规则 R_1与 R_2，可构造两条无限轨道 Γ与 Γ'，满足：

- 对所有 $i \leq t+10$，有 $s_i = s_i'$，故

$$\varepsilon^{(t)}(\Gamma) = \varepsilon^{(t)}(\Gamma')$$

- 在第 $t+10$步，Γ 使用 R_1，Γ' 使用 R_2

由第 6.2 节更新律可得：

$$\varepsilon^{(t+1)}(\Gamma) \neq \varepsilon^{(t+1)}(\Gamma')$$

从而 $\varepsilon^{(t)}$相同却得到不同的 $\varepsilon^{(t+1)}$，矛盾。

故不存在仅依赖残差态的自治演化函数 F。证毕。

---

8. 结构性结论

- 残差不是状态
- 残差动力学必然非自治
- 系统在残差层面非马尔可夫
- 微观历史不可由残差重构
- 任意自治闭合均定义了**不同系统**

---

9. 命名与继承条件

只有同时满足以下条件的系统，方可声明与 **KFX-R 等价**：

1. 使用相同的局部规则 R_1, R_2
2. 使用相同的残差定义 $\varepsilon_5, \varepsilon_{10}$
3. 仅允许滑动窗口诱导演化
4. 接受定理 1（残差不可自治）

否则，必须明确声明：**与 KFX-R 不等价**。

---

10. 结论

KFX-R 表明：
一个系统可以拥有清晰、可分析的宏观演化，而**不必**将宏观量提升为自治状态。
通过结构性约束，系统在形式上阻断了叙事性因果与历史回溯，为不可还原的粗粒化动力学提供了一个最小、可复用的范式。

状态声明

本文档构成 **KFX-R 的完整、权威定义**。