

最小安全判据生成器 G_{safe} ——形式化规范

1. 状态空间

定义系统状态空间为有限集：

$$X := \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \quad (1.1)$$

2. 判据语言

2.1 原子判据

对任意 $i \in X$, 定义原子判据函数：

$$a_i(x) := \begin{cases} 1, & x = i \\ 0, & x \neq i \end{cases} \quad (2.1)$$

2.2 判据语言 L

判据语言定义为原子判据在布尔运算下的闭包：

$$L := \text{Bool}(\{a_i \mid i \in X\}) \quad (2.2)$$

其中允许的运算符为： \neg, \wedge, \vee 。

3. 判据集合与编码

3.1 判据集合

设当前系统采用的判据集合为有限集：

$$P := \{p_1, p_2, \dots, p_m\}, p_i \in L \quad (3.1)$$

3.2 判据编码映射

定义状态在判据集合 P 下的编码向量：

$$\phi_P(x) := (p_1(x), p_2(x), \dots, p_m(x)) \in \{0,1\}^m \quad (3.2)$$

3.3 判据等价关系

定义判据诱导的状态等价关系：

$$x \sim_P y \Leftrightarrow \phi_P(x) = \phi_P(y) \quad (3.3)$$

由此得到状态划分：

$$X / \sim_P \quad (3.4)$$

4. 候选判据复杂度

4.1 句法复杂度

定义判据的句法复杂度为其语法树节点数：

$$\mathcal{C}(p) := \#(\text{syntax nodes of } p) \quad (4.1)$$

4.2 复杂度上界

给定全局复杂度上界 $b \in \mathbb{N}$, 允许的候选判据集合为：

$$L_{\leq b} := \{p \in L \mid \mathcal{C}(p) \leq b\} \quad (4.2)$$

5. 责任域约束

5.1 责任映射

定义状态到责任域的映射：

$$\rho: X \rightarrow \mathcal{R} \quad (5.1)$$

其中 \mathcal{R} 为有限责任域集合。

5.2 判据依赖集

定义判据的原子依赖集：

$$\text{Dep}(p) := \{i \in X \mid a_i \text{ 出现在 } p \text{ 的语法树中}\} \quad (5.2)$$

5.3 判据责任集

$$\text{Resp}(p) := \{\rho(i) \mid i \in \text{Dep}(p)\} \quad (5.3)$$

5.4 责任域上界

给定责任域上界 $r \in \mathbb{N}$, 要求:

$$|\text{Resp}(p)| \leq r \quad (5.4)$$

6. 非扩张（细分）约束

6.1 等价类内二分

对任意等价类 $c \in X/\sim_P$, 定义:

$$c_0 := \{x \in c \mid p(x) = 0\}, c_1 := \{x \in c \mid p(x) = 1\} \quad (6.1)$$

singleton 等价类被视为最大不稳定分裂

6.2 类内偏置度量

定义判据在等价类上的偏置:

$$\beta(c, p) := \frac{|c_1| - |c_0|}{|c|} \quad (6.2)$$

6.3 全局最大偏置

$$\text{B}(P, p) := \max_{c \in X/\sim_P} \beta(c, p) \quad (6.3)$$

6.4 偏置上界

给定偏置阈值 $\varepsilon \in [0,1]$, 要求:

$$B(P, p) \leq \varepsilon \quad (6.4)$$

7. 可回滚约束

7.1 判据增量原则

判据集合的演化仅允许单元素增量:

$$P' := P \cup \{p\} \quad (7.1)$$

7.2 回滚算子

定义回滚算子:

$$R(P', p) := P' \setminus \{p\} \quad (7.2)$$

7.3 回滚一致性

要求:

$$R(P \cup \{p\}, p) = P \quad (7.3)$$

8. 判据接受条件

定义判据接受谓词:

$$Accept(P, p) := 1[p \in L_-(\leq b) \wedge |Resp(p)| \leq r \wedge B(P, p) \leq \varepsilon] \quad (8.1)$$

9. 判据生成算子

9.1 判据生成算子定义

定义最小安全判据生成算子：

$$G_{\text{safe}}(P) := \begin{cases} P \cup \{p^*\}, & p^* = \arg \min_{\substack{p \in L_{\leq b} \\ \text{Accept}(P,p)=1}} J(P,p) \\ P, & \text{若不存在可接受 } p \end{cases} \quad (9.1)$$

9.2 评分函数

定义评分函数为字典序目标：

$$J(P,p) := (\mathcal{C}(p), |\text{Resp}(p)|, B(P,p)) \quad (9.2)$$

10. 停机性与可判定性

由于 X 、 $L_{\leq b}$ 、 \mathcal{R} 均为有限集合，

上述所有谓词、算子与最优化过程均为可判定、必停机。
