公開 2024.6.18
いくつかの誤字脱字を修正 2024.6.19

平面 2 次元非線形長波方程式を用いた津波の数値計算の概要

１．支配方程式と各パラメータ

津波を計算する支配方程式は以下の(1)～(3)である．

$$\frac{\partial \eta}{\partial t}+\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial y}=0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial M}{\partial t}+\frac{\partial (uM)}{\partial x}+\frac{\partial (vM)}{\partial y}+g(h+\eta)\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\tau_{bx}}{\rho}-fN=0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial N}{\partial t}+\frac{\partial (uN)}{\partial x}+\frac{\partial (vN)}{\partial y}+g(h+\eta)\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\tau_{by}}{\rho}+fM=0 \tag{3}$$

ここで，h は平均水面からの水位差[m]，M と N は東西方向，南北方向の単位幅流量[m^3/s]，u と v は東西方向，南北方向の水深平均流速[m/s]，τ_{bx}，τ_{by} は東西方向，南北方向の底面せん断応力[Pa]，f はコリオリ係数[1/s]，g は重力加速度[m/s^2]，ρは海水の密度（1013kg/m^3），h は水深[m]である．

なお，水深平均流速は以下の式に従う．

$$u=M/D_m,\ \ v=N/D_n \tag{4}$$

ここで，D_m，D_n は M と N の計算点における全水深（$\eta + h$）を表す．よって(2)式と(3)式は以下のようになる．

$$\frac{\partial M}{\partial t}+\frac{\partial (M^2/D_m)}{\partial x}+\frac{\partial (MN/D_m)}{\partial y}+g(h+\eta)\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\tau_{bx}}{\rho}-fN=0 \tag{5}$$

$$\frac{\partial N}{\partial t}+\frac{\partial (MN/D_n)}{\partial x}+\frac{\partial (N^2/D_n)}{\partial y}+g(h+\eta)\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\tau_{by}}{\rho}+fM=0 \tag{6}$$

座標系として，x 軸は東向きを正とした東西方向，y 軸は北向きを正とした南北方向を表す．水深は下向きを正とし陸上はゼロとする．一方，ηは鉛直向きを正，下向きを負とする．t は時間[s]を表す．

公開 2024.6.18
いくつかの誤字脱字を修正 2024.6.19

２．計算格子に対するパラメータの配置

計算格子はスタッガード格子配置とし，各パラメータの配置を図-1 に示す．

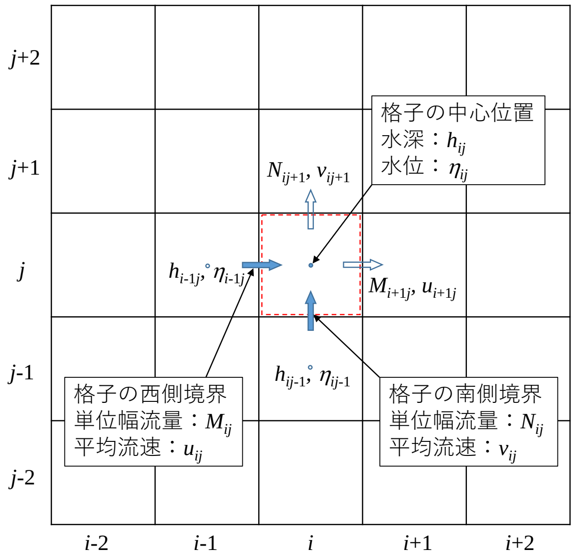

図-1 スタッガード格子とパラメータ配置

３．支配方程式の差分

(1) 連続式の差分

式(1)の差分は以下の通りである．

$$\frac{\eta_{ij}^{n+1}-\eta_{ij}^{n}}{\Delta t}+\frac{M_{i+1j}^{n}-M_{ij}^{n}}{\Delta x}+\frac{N_{ij+1}^{n}-N_{ij}^{n}}{\Delta y}=0 \tag{7}$$

$$\eta_{ij}^{n+1}=\eta_{ij}^{n}+\Delta t\left(\frac{M_{i+1j}^{n}-M_{ij}^{n}}{\Delta x}+\frac{N_{ij+1}^{n}-N_{ij}^{n}}{\Delta y}\right) \tag{8}$$

ここで，Δは数値計算を行う際の有限の時間幅（1 ステップの時間幅），空間幅（各方向の計算格子サイズ）を表す．また，n+1 は予測するΔt 後の未来の値．n は現在の値を表す．

式(8)の右辺の差分は，式(8)が格子中央の水位を求める式であることから，格子中央を挟むように格子の両端の値の差を求める形で式をつくる．

(2) 東西方向の運動量方程式の差分

式(5)の差分は以下の通りである．

$$\frac{M_{ij}^{n+1}-M_{ij}^{n}}{\Delta t}+ADM_x+ADM_y+g\left(h_{mij}+\eta_{mij}^{n+1}\right)\frac{\eta_{i1j}^{n+1}-\eta_{i-1j}^{n+1}}{\Delta x}+\frac{\tau_{bx_{ij}}}{\rho}-fN_{m_{ij}}=0 \tag{9}$$

$$M_{ij}^{n+1}=M_{ij}^{n}+\Delta t\left(ADM_x+ADM_y+g\left(h_{mij}+\eta_{mij}^{n+1}\right)\frac{\eta_{ij}^{n+1}-\eta_{i-1j}^{n+1}}{\Delta x}+\frac{\tau_{bx_{ij}}}{\rho}-fN_{m_{ij}}\right) \tag{10}$$

ここで，ADM_x と ADM_y は(5)式の第 2 項と第 3 項の差分であり，移流項の差分である．ここ

では一次の風上差分を用いることから，流れの方向によって差分方向を変える必要があるため，後述する．
また，h_{mij}，η_{mij}，N_{mij} は，M の計算点における値を示し，以下のように計算点の周りで平均値を求める．

$$h_{mij} = \frac{h_{i-1j} + h_{ij}}{2}, \quad \eta_{mij}^{n+1} = \frac{\eta_{i-1j}^{n+1} + \eta_{ij}^{n+1}}{2} \tag{11}$$

$$N_{m_{ij}} = \frac{N_{i-1j} + N_{ij} + N_{i-1j+1} + N_{ij+1}}{4} \tag{12}$$

プログラム中では，運動量方程式を解く前に連続式（式(8)）を解くことから，水位の値は $n+1$ の時刻に更新されている．このため運動量方程式中では $n+1$ 時刻の水位を用いる．

式(10)における右辺第 4 項の水位の空間差分は，式(10)が流量 M を求める式であることから，M の計算点を挟むように水位の差を求める形で式を作る．

(3) 東西方向の運動量方程式の移流項の差分

移流項に風上差分を用いる場合，流れの方向によって差分方向を以下のように変える必要がある．

if $M_{ij} > 0$
$$ADM_x = \frac{{M_{ij}^n}^2 / D_{m_{ij}} - {M_{i-1j}^n}^2 / D_{m_{i-1j}}}{\Delta x} \tag{13}$$

if $M_{ij} < 0$
$$ADM_x = \frac{{M_{i+1j}^n}^2 / D_{m_{i+1j}} - {M_{ij}^n}^2 / D_{m_{ij}}}{\Delta x} \tag{14}$$

if $N_{mij} > 0$
$$ADM_y = \frac{M_{ij}^n N_{mij}^n / D_{m_{ij}} - M_{ij-1}^n N_{mij-1}^n / D_{m_{ij-1}}}{\Delta y} \tag{15}$$

if $N_{mij} < 0$
$$ADM_y = \frac{M_{ij+1}^n N_{mij+1}^n / D_{m_{ij+1}} - M_{ij}^n N_{mij}^n / D_{m_{ij}}}{\Delta y} \tag{16}$$

以上のことから，東西方向の運動量方程式の差分は，式(10)～(16)となる．

(4) 南北方向の運動量方程式の差分

考え方は東西方向と同じであるので，差分式のみを表示する．

$$N_{ij}^{n+1} = N_{ij}^n + \Delta t \left(ADN_x + ADN_y + g\left(h_{nij} + \eta_{nij}^{n+1}\right) \frac{\eta_{ij}^{n+1} - \eta_{ij-1}^{n+1}}{\Delta y} + \frac{\tau_{by_{ij}}}{\rho} + f M_{n_{ij}} \right) \tag{17}$$

$$h_{nij} = \frac{h_{ij-1} + h_{ij}}{2}, \quad \eta_{nij}^{n+1} = \frac{\eta_{ij-1}^{n+1} + \eta_{ij}^{n+1}}{2} \tag{18}$$

$$M_{n_{ij}} = \frac{M_{ij} + M_{i+1j} + M_{ij-1} + M_{i+1j-1}}{4} \tag{19}$$

if $M_{nij} > 0$
$$ADN_x = \frac{M_{nij}^n N_{ij}^n / D_{n_{ij}} - M_{ni-1j}^n N_{i-1j}^n / D_{n_{i-1j}}}{\Delta x} \tag{20}$$

if $M_{nij} < 0$ $$ADN_x = \frac{M^n_{ni+1j} N^n_{i+1j} / D_{n_{i+1j}} - M^n_{nij} N^n_{ij} / D_{n_{ij}}}{\Delta x} \tag{21}$$

if $N_{ij} > 0$ $$ADN_y = \frac{{N^n_{ij}}^2 / D_{n_{ij}} - {N^n_{ij-1}}^2 / D_{n_{ij-1}}}{\Delta y} \tag{22}$$

if $N_{ij} < 0$ $$ADN_y = \frac{{N^n_{ij+1}}^2 / D_{n_{ij+1}} - {N^n_{ij}}^2 / D_{n_{ij}}}{\Delta y} \tag{23}$$

4. 底面摩擦項

津波における底面摩擦モデルは一般的にマニング則に基づいたモデルが用いられる．底面摩擦モデルを以下に示す．

$$\frac{\tau_{bx_{ij}}}{\rho} = \frac{g n^2 M^n_{ij} \sqrt{{M^n_{ij}}^2 + {N^n_{mij}}^2}}{D^{7/3}_{mij}} \tag{24}$$

$$\frac{\tau_{by_{ij}}}{\rho} = \frac{g n^2 N^n_{ij} \sqrt{{M^n_{nij}}^2 + {N^n_{ij}}^2}}{D^{7/3}_{nij}} \tag{25}$$

ここで n はマニングの粗度係数であり，海域では一般に n=0.025 の値を用いる．

5. コリオリ力

大領域における津波伝播を計算する場合，コリオリ力を考慮する必要がある．運動量方程式における f の値はコリオリ係数であるが，以下の式で与えられる．

$$f = 2\Omega \sin\phi \tag{26}$$

ここで，Ωは地球の自転角速度（7.29×10^{-5}）（rad/s）であり，ϕは緯度である．

6. 境界条件

津波の計算は，地球の球面上海域をある計算領域で切り取ることから，水位と流量の変動を外海と自由に流出入させる必要がある．ここではゾンマーフェルトの放射境界条件を用いる．

ゾンマーフェルトの放射境界条件は，ある物理量 Q を保存式によって計算領域の外側に設定し，一つ内側の計算格子との間で物理量が保存される形をとる．保存式を以下に示す．

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + C \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \tag{27}$$

ここで，C は境界位置での波速であり，次式の線形長波の波速を与える．

$$C_{ij} = \sqrt{g h_{ij}} \tag{28}$$

式(27)，(28)を用いて，水位η，流量 M，N の境界の値を設定する．例えば，西側端の水位

の境界条件を設定する場合，以下のように境界の外側 i=0 の値を与える．

$$\frac{\eta_{0j}^{n+1}-\eta_{0j}^{n}}{\Delta t}+C_{1j}^{n}\frac{\eta_{0j}^{n}-\eta_{1j}^{n}}{\Delta x}=0 \tag{29}$$

$$\eta_{0j}^{n+1}=\eta_{0j}^{n}-\Delta t C_{1j}^{n}\frac{\eta_{0j}^{n}-\eta_{1j}^{n}}{\Delta x} \tag{30}$$

なお，海と陸との境界である汀線では波は全反射するものとして設定している．そのため，陸域に遡上する計算にはなっていない．

以上