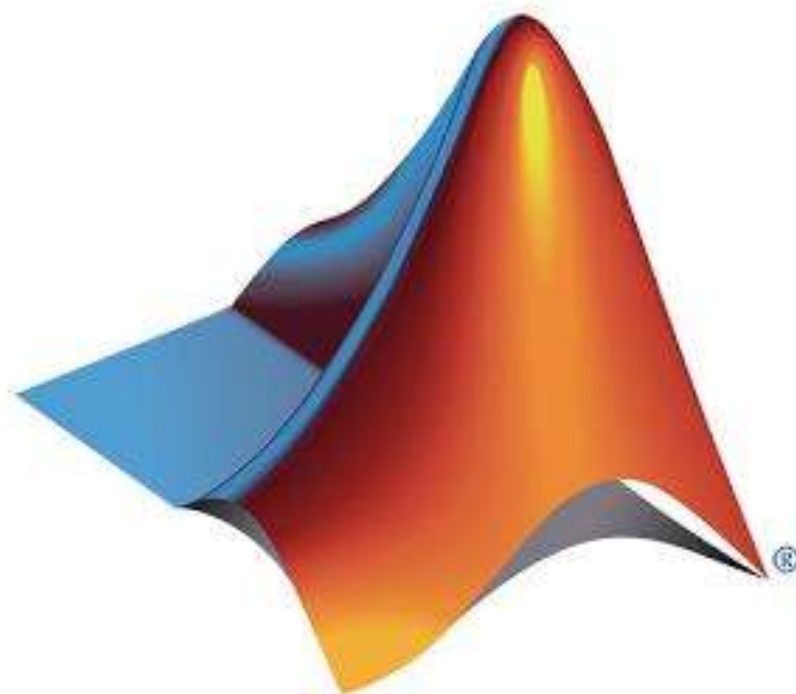
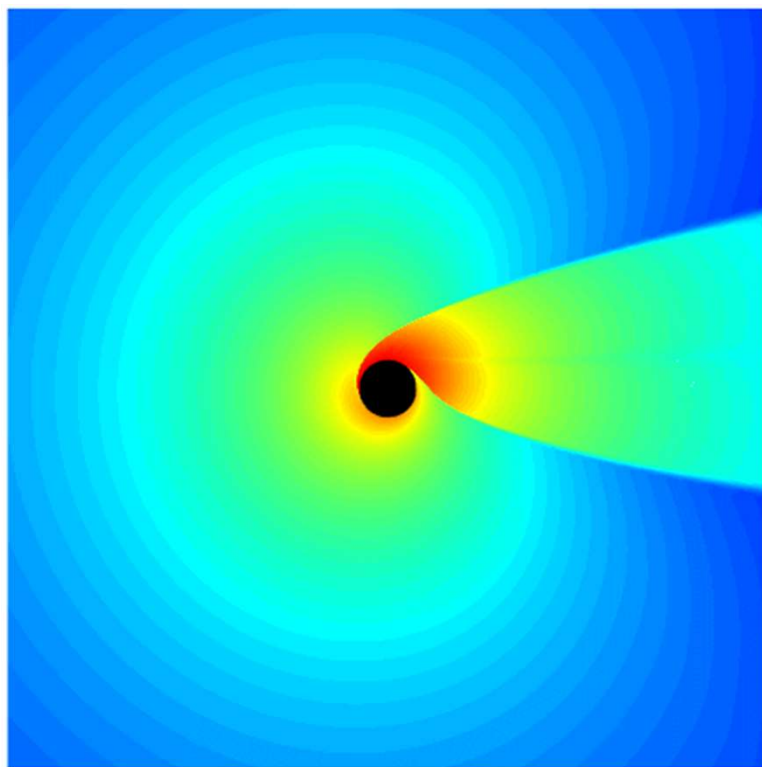


数学实验

Mathematical Experiments



实验七：
代数方程求根实验
Solutions to algebraic
equations

实验背景

- 在科学研究和工程实践中，常常会遇到非线性方程或非线性方程组的问题

例如

1

在光的衍射理论 (the theory of diffraction of light)中,需要求 $x - \tan x = 0$ 的根

2

在行星轨道 (planetary orbits) 的计算中,对任意的 a 和 b , 需要求 $x - a \sin x = b$ 的根

3

在数学中 , 需要求 n 次多项式 $x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$ 的根

实验背景

- 若干个世纪以来，工程师和数学家花了大量时间用于探索求解方程（组），研究各种各样的方程求解方法。对于方程

$$f(x) = 0 \quad (1)$$

当 $f(x)$ 为线性函数时，称式(2.1)为线性方程；当 $f(x)$ 为非线性函数时，称式(2.1)为非线性方程。对于线性方程（组）的求解，理论与数值求解方法的研究成果较为丰富，我们已在线性代数实验部分介绍求解方法；对于非线性方程求解，由于 $f(x)$ 的多样性，尚无一般的解析解法。例如，当 $f(x)$ 为 n ($n \geq 2$) 次代数多项式时，式(1)称为 n 次代数方程，即

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (2)$$

实验背景

- 寻找代数方程的解一直是个重要的数学问题。
- 由代数基本定理知，一元 n 次代数方程一定有 n 个根(含复根)。
- 计算上：
 - 一元一次方程和二次方程很早就找到了公式解。经过努力，16世纪时，意大利数学家塔塔利亚和卡当等人，发现了一元三次方程的求根公式，费拉里找到了四次方程的求根公式。当时数学家们非常乐观，以为马上就可以写出五次方程、六次方程，甚至更高次方程的求根公式了。然而，时光流逝了几百年，谁也找不出这样的求根公式。
 - 大约三百年之后，在1825年，挪威学者阿贝尔（Abel）终于证明了：一般的一个代数方程，如果方程的次数 $n \geq 5$ ，那么此方程不存在统一的根式解（即由方程的系数通过有限次的四则运算及根号组合而成的公式解）。这就是著名的阿贝尔定理。

实验背景

- 寻找代数方程的解一直是个重要的数学问题。
- 而当 $f(x)$ 包含三角函数、指数函数、对数函数等类型时，式(1)称为超越方程，例如

$$\ln x - x \sin \frac{\pi}{2} x + 1 = 0 \quad (3)$$

此类方程不仅很难求得解析解，有时连解的存在性、解的个数也难以判断。

- 前面我们学习了：符号计算解析地求根（只解决少部分问题）

`S=solve(eqn1,eqn2,...,eqnM,var1,var2,...,varN)`

本次实验我们学习如何用Matlab求代数方程（组）的数值解。

实验目的

1. 理解迭代法原理，并利用迭代法求非线性方程的根。
2. 熟悉MATLAB软件中非线性方程（组）的求解命令及用法。
3. 使用MATLAB解决一些非线性方程问题。

实验的理论基础

1. 迭代格式

将方程 $f(x)=0$ 转化为等价的方程 $x = \varphi(x)$, 并据此构造迭代格式:

$$x_{n+1} = \varphi(x_n)$$

对某个选定的初值 x_0 进行迭代, 得到一个迭代数列 $\{x_n\}$ 。如果数列 $\{x_n\}$ 存在极限, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$

称迭代收敛, x^* 就是 $x = \varphi(x)$ 的根(不动点), 亦是 $f(x)=0$ 的根。

2. 零点定理

将若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a)f(b) < 0$, 则至少存在一点 $c \in (a, b)$, 使得 $f(c)=0$ 。

实验的理论基础

3. 压缩映射原理

设定义在 $[a, b]$ 上的函数 $f(x)$ 满足：对任意 $x \in [a, b]$, 有 $f(x) \in [a, b]$, 且存在一个常数 $L > 0$, 使得

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|, x, y \in [a, b]$$

成立。则当 $L < 1$ 时, 称 f 为 $[a, b]$ 上的一个压缩映射, 且函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有唯一的不动点。

实验1：迭代法之二分法

1、基本架设：设 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续、有单根，且 $f(a)f(b) < 0$ 。

2、二分法原理：将区域二分，根据零点定理，判断根在某个分段内，再进行二分，依次推，重复进行，直到满足精度为止。算法流程如下：

Step 1：赋初值 a, b 及 $k = 0, a_k = a, b_k = b$ 。

Step 2：令 $x_k = \frac{a_k + b_k}{2}$ ，计算 $f(x_k)$ 。

Step 3：若 $f(x_k) = 0$ ，则 x_k 是 $f(x_k) = 0$ 的根，停止计算，输出结果 $x = x_k$ ；若 $f(a_k)f(x_k) < 0$ ，则令 $a_{k+1} = a_k, b_{k+1} = x_k$ ；若 $f(a_k)f(x_k) > 0$ ，则令 $a_{k+1} = x_k, b_{k+1} = b_k$ 。

实验1：迭代法之二分法

Step 4: 令 $k=k+1$, $x_k = \frac{a_k+b_k}{2}$, 若 $|f(x_k)| \leq \varepsilon$ (ε 为精度要求), 退出计算, 输出结果 x_k ; 若 $|f(x_k)| > \varepsilon$, 则转入Step 3。

3、误差估计: 若执行以上过程, 可得到每次缩小1/2的区间序列 $\{[a_k, b_k]\}$, 在 (a_k, b_k) 中含有方程的根 x^* 。当区间长度 $b_k - a_k$ 很小时, 取其中点 $x_k = \frac{a_k+b_k}{2}$ 为根的近似值。因此:

$$\begin{aligned} |x_k - x^*| &\leq \frac{1}{2}(b_k - a_k) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times (b_{k-1} - a_{k-1}) = \cdots \\ &= \frac{1}{2^{k+1}}(b - a) \end{aligned}$$

实际问题计算时, 根据 ε 的数值, 利用上式可估计二分次数 k 。

实验1：迭代法之二分法

小实验：

编写MATLAB程序，使用二分法求方程 $x^3 + x - 1 = 0$ 在 $[0, 1]$ 内的根的近似值(误差 $< 10^{-5}$)。

实验2：迭代法之不动点迭代

基本思想

将方程 $f(x)=0$ 转化为等价的方程 $x = g(x)$, 并据此构造迭代格式:

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

对某个选定的初值 x_0 进行迭代, 得到一个迭代数列 $\{x_n\}$ 。如果数列 $\{x_n\}$ 存在极限, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$

称迭代收敛, x^* 就是 $x = g(x)$ 的根(不动点), 亦是 $f(x)=0$ 的根

实验2：迭代法之不动点迭代

一个简单的例子

设计不同迭代算法求方程 $x^2 = 2$ 的正根。

方法1: $x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{x}$, 从而设置迭代格式 $x_{n+1} = \frac{2}{x_n}$ 。

方法2: $x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{x} \Leftrightarrow x + x = x + \frac{2}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$, 从而设置迭代格式 $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{2}{x_n})$ 。

方法3: $x^2 = 2 \Leftrightarrow x^3 = 2x$, 所以 $x^3 = 2x - x^2 + 2$, 故 $x = \sqrt[3]{2x - x^2 + 2}$, 从而设置迭代格式 $x_{n+1} = \sqrt[3]{2x_n - x_n^2 + 2}$ 。

方法4: $x^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 + x = 2 + x$, 所以 $x = \frac{2+x}{1+x}$, 故 $x = 1 + \frac{1}{1+x}$, 从而设置迭代格式 $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+x_n}$ 。

实验2：迭代法之不动点迭代

一个简单的例子

设计不同迭代算法求方程 $x^2 = 2$ 的正根。

选用初值 $x=1$ ，同时按以上四种格式进行迭代计算。

编程实现

实验2：迭代法之不动点迭代

一个简单的例子

序号	1	2	3	4
方法1	1.0000000000000000	2.0000000000000000	1.0000000000000000	2.0000000000000000
方法2	1.0000000000000000	1.5000000000000000	1.4166666666666667	1.414215686274510
方法3	1.0000000000000000	1.442249570307408	1.410200215949785	1.414764790503810
方法4	1.0000000000000000	1.5000000000000000	1.4000000000000000	1.4166666666666667
序号	5	6	7	8
方法1	1.0000000000000000	2.0000000000000000	1.0000000000000000	2.0000000000000000
方法2	1.414213562374690	1.414213562373095	1.414213562373095	1.414213562373095
方法3	1.414137398906688	1.414224077308350	1.414212110543581	1.414213762828541
方法4	1.413793103448276	1.414285714285714	1.414201183431953	1.414215686274510
序号	9	10	11	...
方法1	1.0000000000000000	2.0000000000000000	1.0000000000000000	...
方法2	1.414213562373095	1.414213562373095	1.414213562373095	...
方法3	1.414213534695966	1.414213566194509	1.414213561845468	...
方法4	1.414213197969543	1.414213624894870	1.414213551646055	...

实验2：迭代法之不动点迭代

如何设计收敛的不动点迭代法？

迭代收敛判别

如果在区间 $[a, b]$ 上, g 为 $[a, b]$ 上的一个压缩映射, 则迭代格式 $x_{n+1} = g(x_n)$ 收敛。

特殊地, 如果在区间 $[a, b]$ 上, $g(x)$ 连续可导, 且满足 $|g'(x)| \leq q \leq 1$, 则迭代格式 $x_{n+1} = g(x_n)$ 收敛。

实验2：迭代法之不动点迭代

如何设计收敛的不动点迭代法？

根据上述四种迭代格式，也可以从理论分析的方式判别收敛性。

对于方法1，令 $\varphi_1(x) = \frac{2}{x}$ ，则 $\varphi_1'(x) = -\frac{2}{x^2}$ ；

对于方法2，令 $\varphi_2(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$ ， $\varphi_2'(x) = \frac{1}{2}(1 - \frac{2}{x^2})$ ；

对于方法3，令 $\varphi_3(x) = \sqrt[3]{2x - x^2 + 2}$ ， $\varphi_3'(x) = \frac{1}{3}(2x - x^2 + 2)^{-\frac{2}{3}}(2 - 2x)$ ；

对于方法4，令 $\varphi_4(x) = 1 + \frac{1}{1+x}$ ， $\varphi_4'(x) = 1 - \frac{1}{(1+x)^2}$ 。当 $1 \leq x \leq 2$ 时， $|\varphi_i'(x)| < 1 (i = 2, 3, 4)$ 成立，即满足迭代收敛条件，而对于方法1中情形不满足要求。

实验2：迭代法之不动点迭代

用蛛网图观察不动点迭代

实验问题：用求不动点的方法求方程 $f(x) = 0$ 的根，这里方程为 $f(x) = x^2 + x - 4 = 0$. 对这一方程，构造如下三个函数：

$$g_1(x) = 4 - x^2, g_2(x) = \frac{4}{1+x}, g_3(x) = x - \frac{x^2+x-4}{2x+1}, \quad (3)$$

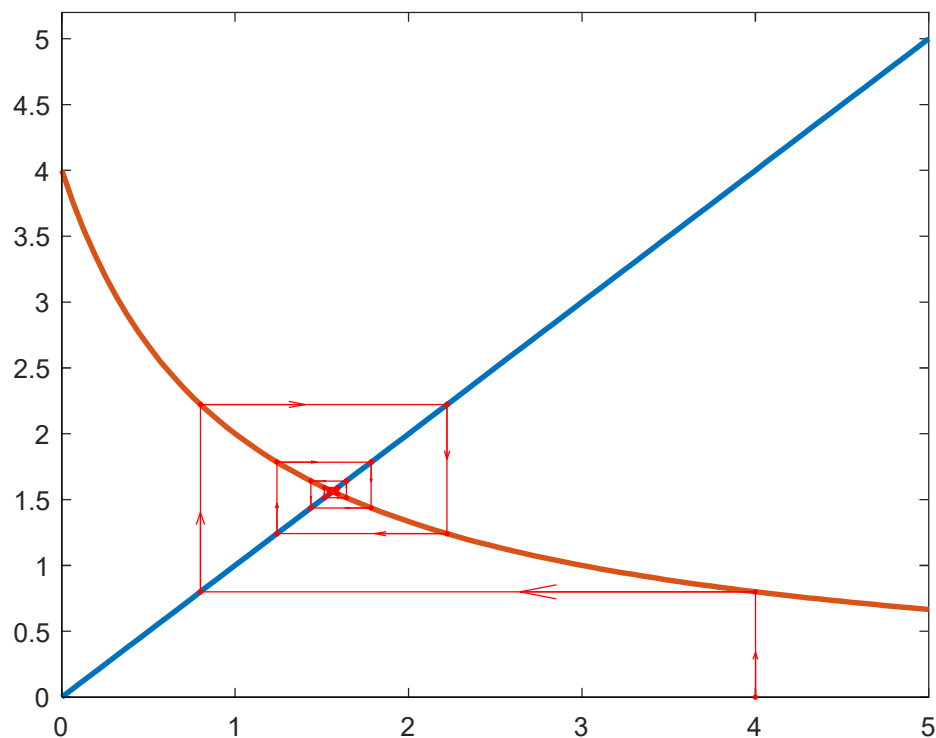
容易验证 $f(x) = 0 \Leftrightarrow g_i(x) = x (i = 1, 2, 3)$ ，于是求根转化为求不动点问题，试用如下给出的迭代法观察它们的收敛性和收敛快慢.

实验2：迭代法之不动点迭代

用蛛网图观察不动点迭代

观察：运行观察程序Exp7_3.m，在程序中选择参数 $s=2$ ，观察函数 $g_2(x) = 4/(1+x)$ 的迭代蛛网图

理解蛛网图的原理



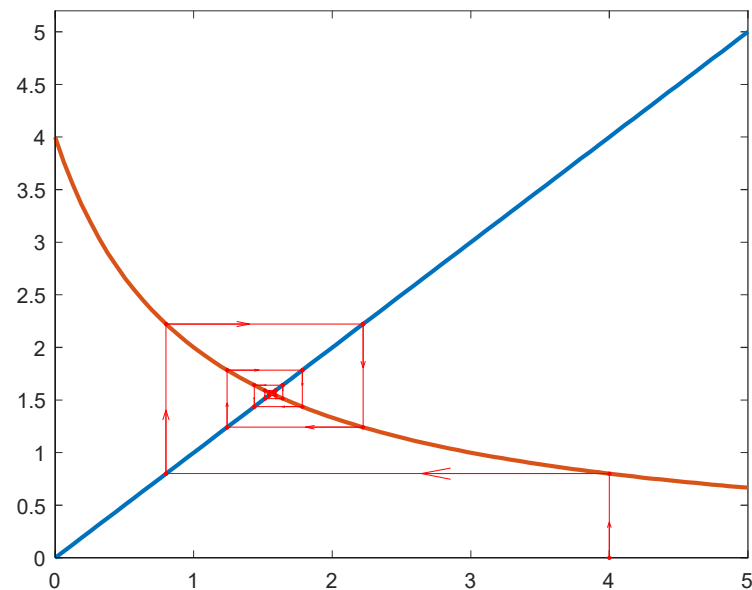
实验2：迭代法之不动点迭代

用蛛网图观察不动点迭代

如图所示，不动点 $x^* = g(x^*)$ 是直线 $y = x$ 和曲线 $y = g(x)$ 交点的横坐标. 选定初始点 $x_0 = 4$ 后，迭代 $x_1 = f(x_0)$ 可以看成如下两个步骤的合成：

(1) 计算 $y_1 = g(x_0) = 0.8$ ，在图中以一条自 $x_0 = 4$ 出发，并与y轴平行的有向线段表示这一过程，箭头指向曲线 $y = g(x)$ ，线段的终点位于点 $(x_0, g(x_0)) = (4, 0.8)$ ；

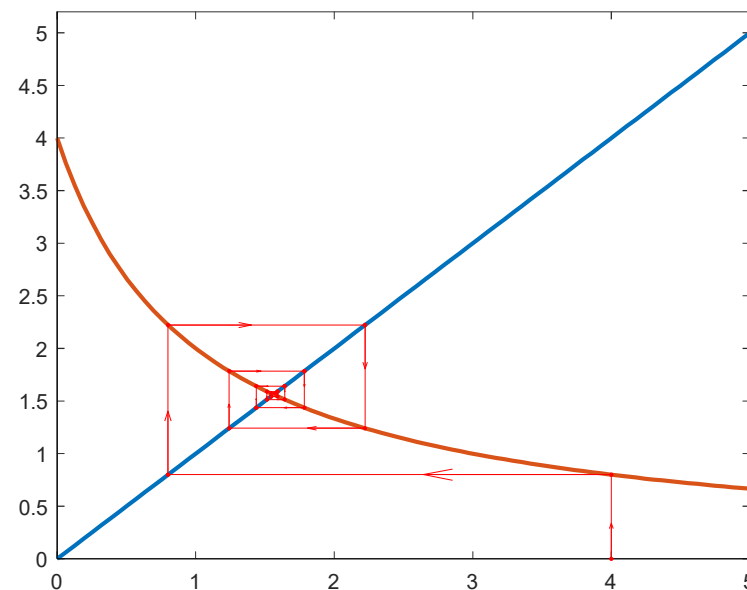
(2) 由 $(x_0, g(x_0)) = (4, 0.8)$ 出发，作平行于x轴的有向线段（如图所示），其终点位于直线 $y = x$ 之上，这时由于终点的横坐标与纵坐标相等，即得 $x_1 = y_1 = g(x_1) = 0.8$ ，也就完成了第一次迭代，在横轴上用箭头指示了 $x_1 = 0.8$ 的位置.



实验2：迭代法之不动点迭代

用蛛网图观察不动点迭代

于是可以如图那样用两条垂直的有向线段表示一次迭代过程. 当迭代继续时, 这种表示也随之跟进, 最终形成了一个类似于蛛网的迭代过程图, 这个用来形象表示迭代过程的图形叫做蛛网图.



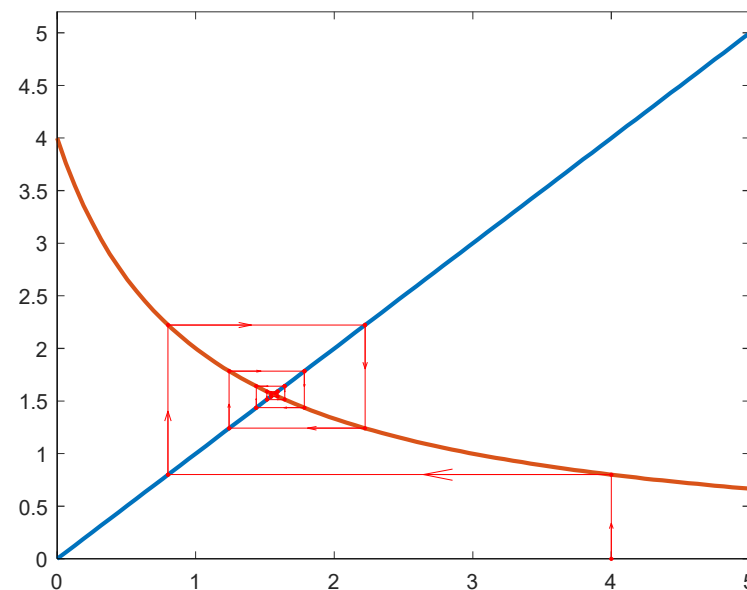
实验2：迭代法之不动点迭代

用蛛网图观察不动点迭代

- 在程序中令参数 $s=1$ ，即对函数 $g_1(x) = 4 - x^2$ 进行迭代(初始点为 $x_0 = 4$)，观察结果，这时迭代发散到负无穷.

- 再选取控制参数 $s=3$, 对函数 $g_3(x) = x - (x^2 + x - 4)/(2x + 1)$ 进行迭代，仍取初始点为 $x_0 = 4$ ，并控制坐标系范围和右图一致，以便与 $f_2(x) = 4/(1 + x)$ 的迭代过程进行比较.

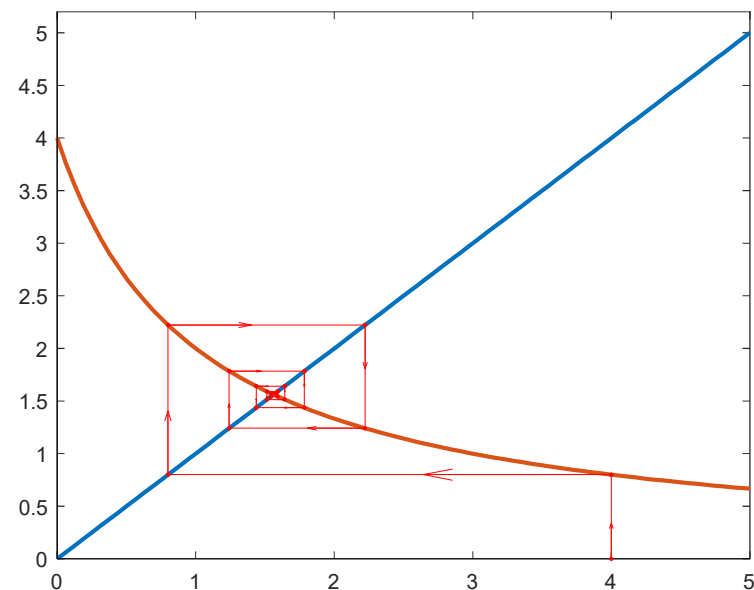
比较，在两种情况下，蛛网图的箭头一直指向点 (x^*, x^*) ，这里 $y^* = x^*$ ，迭代均收敛到不动点 x^* .



实验2：迭代法之不动点迭代

用蛛网图观察不动点迭代

• 思考：虽然两者均收敛到不动点，但它们收敛速度有快慢之分，从相同的初始点出发，图?的收敛速度显然要比图?的快. 前者在两次迭代后便十分接近不动点了，而后者经过了6次迭代才到达前者的精度. 是什么因素决定了收敛速度的快慢？仔细观察图形，你能够洞察到其中的原因吗？



实验2：迭代法之不动点迭代

简单和复杂：二次函数的迭代和混沌

二次函数是非常简单的，如果将它进行迭代，它还会简单吗？让我们进行如下的观察：观察：对二次函数进行迭代：

$$x_{n+1} = f(x_n) = rx_n(1 - x_n), n = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

其中 $r \in (0, 1)$ 是一个可变的参数，观察不同的 r 值对迭代点列的影响。

实验2：迭代法之不动点迭代

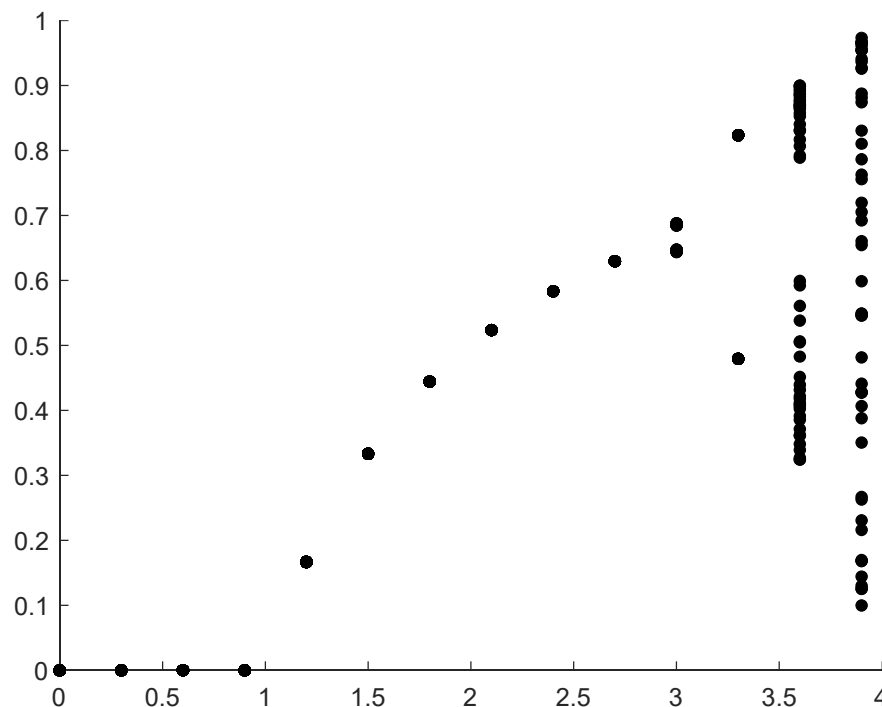
简单和复杂：二次函数的迭代和混沌

步骤1. 固定若干个不同的r的值，观察迭代序列(5)的极限；

$$x_{n+1} = f(x_n) = rx_n(1 - x_n), n = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

可采用下面的方法：如果对固定的r，极限 $x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在，则n充分大时有 $x_n \approx x^*$ 。所以按(5)迭代N次，略去前n个迭代值，并将后N-n个迭代值画在以r为横坐标，x为纵坐标的图形窗口中，即可观察迭代序列(5)的极限性态。

取 $r = [0 \ 0.3 \ 0.6 \ 0.9 \ 1.2 \ 1.5 \ 1.8 \ 2.1 \ 2.4 \ 2.7 \ 3.0 \ 3.3 \ 3.6 \ 3.9]$ ，运行观察程序Exp7_4a.m，结果显示在图中。



实验2：迭代法之不动点迭代

简单和复杂：二次函数的迭代和混沌

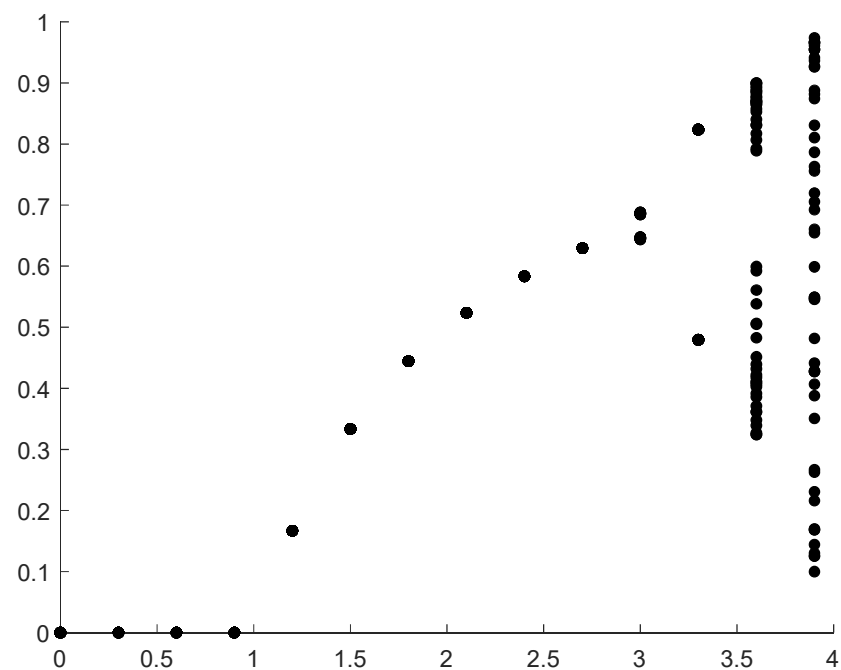
步骤2. 用蛛网图观察三种不同类型的迭代。

上面的运算取了14个 r 值，每一个 r 值所对应迭代序列的“极限”如图所示，注意在本次计算中，对每个 r 值做了 $N=150$ 次代，仅画出了最后的50个代值。由图可见：

(1) 当 r 分别等于0, 0.3, 0.6, 0.9, 1.2, 1.5, 1.8, 2.1, 2.4时，每个 r 对应的这50个迭代值均重合为一占，这说明对这些 r 值极限存在；

(2) 当 r 分别等于3.0和3.3时，迭代值对应着两个点，这说明极限不存在；

(3) 当 r 等于3.6和3.9时，出来更多的点，这种情况显然有别于情形(1)和(2)。分别选取代表这三种类型的 r 值用蛛网图进行观察。

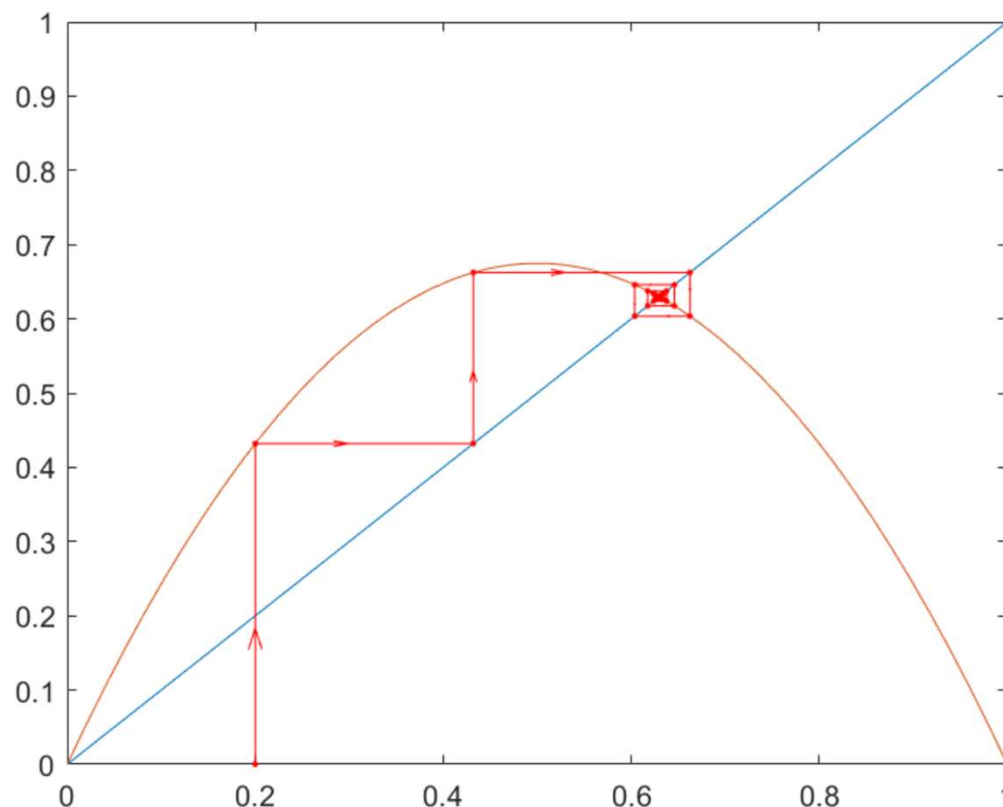


实验2：迭代法之不动点迭代

简单和复杂：二次函数的迭代和混沌

步骤2. 用蛛网图观察三种不同类型的迭代。

在图 (a) 中，迭代序列收敛到一个不动点 $x = f(x)$ ，我们用 $x \rightarrow x$ 来表示这件事情；



实验2：迭代法之不动点迭代

简单和复杂：二次函数的迭代和混沌

步骤2. 用蛛网图观察三种不同类型的迭代。

在图 (b) 的情况，迭代序列呈现出周期性：

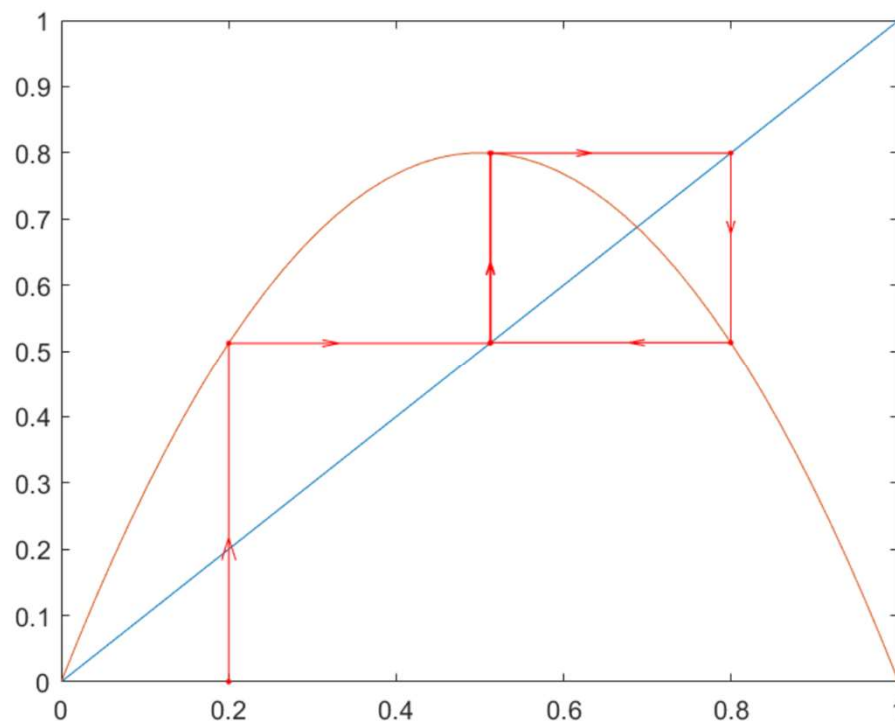
$$x_{2k+1} \rightarrow x_1^*, x_{2k} \rightarrow x_2^*;$$

如果迭代点具有性质： $f(x_1) = x_2, f(x_2) = x_3, \dots, f(x_{k-1}) = x_k, f(x_k) = x_1$ ，则

x_1, x_2, \dots, x_k 形成了一个 k 循环. 我们用 $x_1 \rightarrow x \rightarrow \dots \rightarrow x_k$ 来表示这件事，并说 x_1 是一个 k 周期点， x_1, x_2, \dots, x_k 为一个周期轨道. 在图中，迭代点列的前18个值为

0.5120 0.7995 0.5129 0.7995 0.5130
0.7995 0.5130 0.7995 0.5130 0.7995
0.5130 0.7995 0.5130 0.7995 0.5130
0.7995 0.5130 0.7995

显然 $0.5130 \rightarrow 0.7995 \rightarrow 0.5130$ 构成了一个2循环. 所以迭代序列形成了一个2周期轨道.

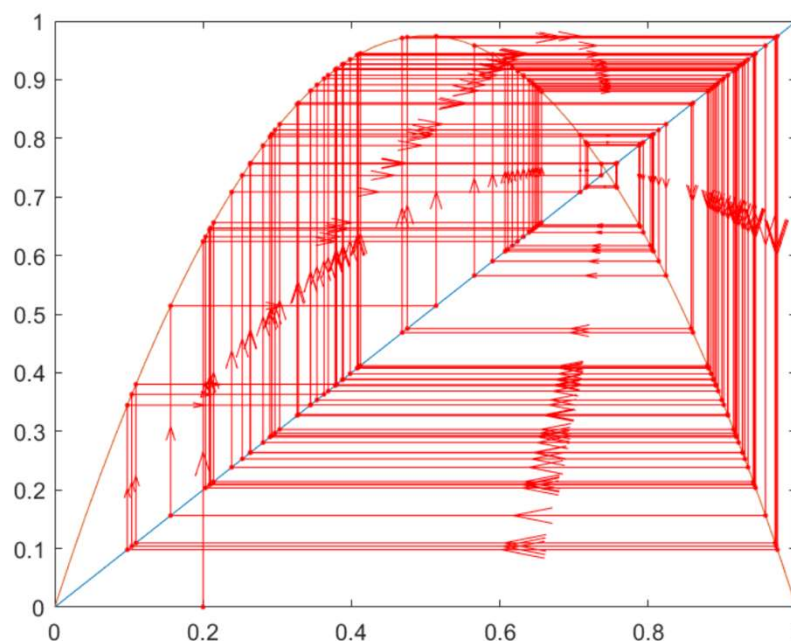
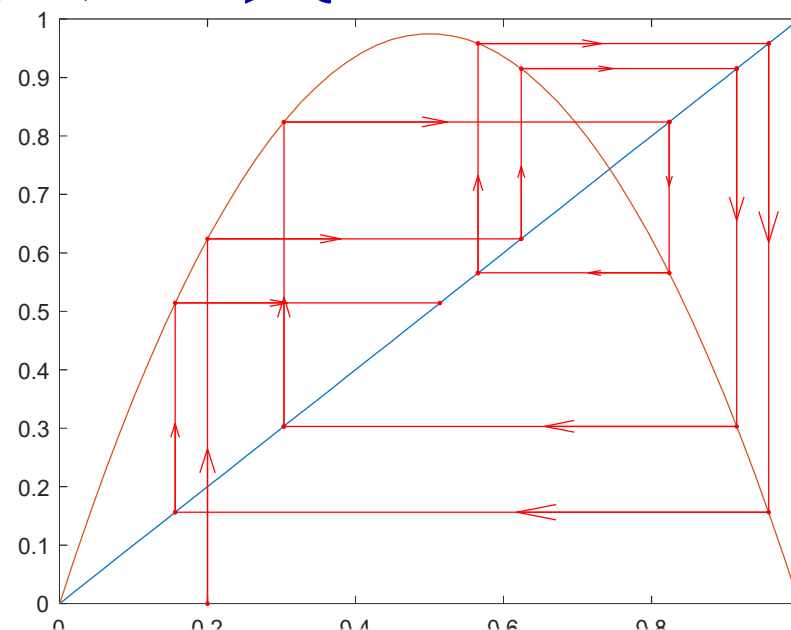


实验2：迭代法之不动点迭代

简单和复杂：二次函数的迭代和混沌

步骤2. 用蛛网图观察三种不同类型的迭代。

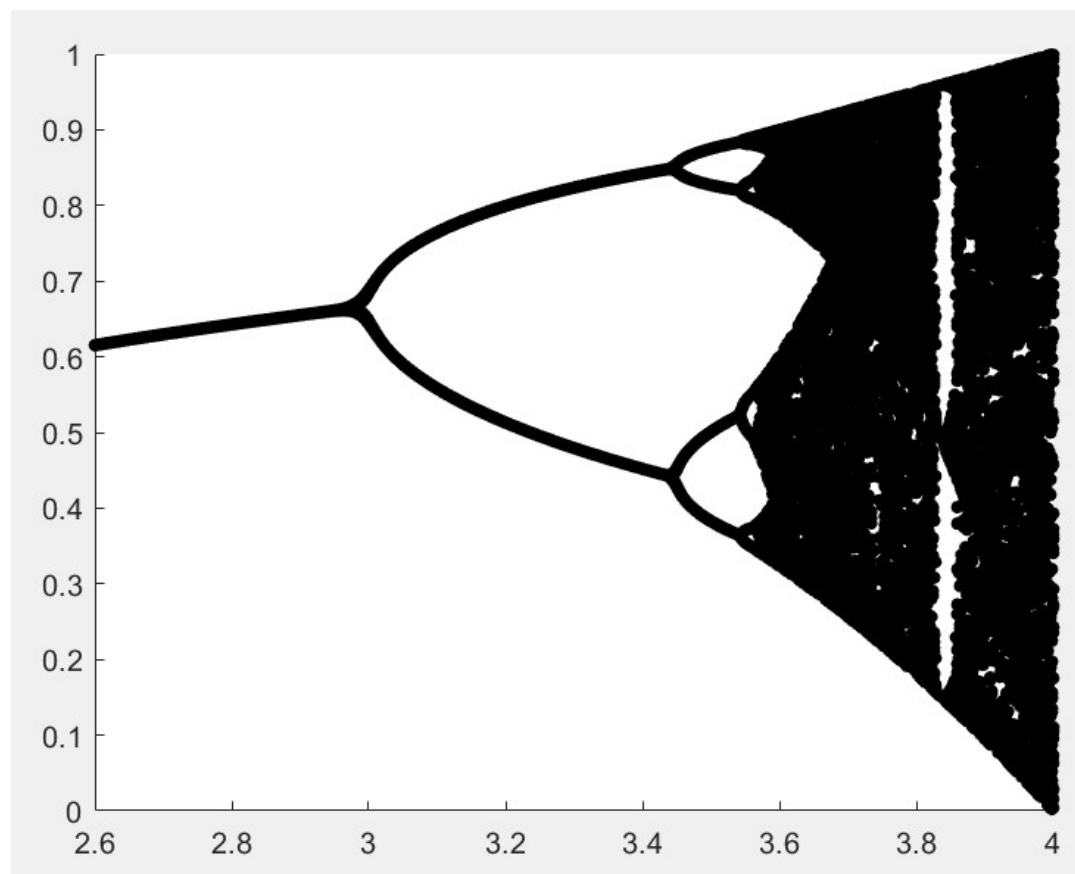
在图(c)和(d)的情况，迭代序列既不收敛也不呈现出周期性，而是反映出一种十分混乱的混沌现象：轨道不再是趋向任何稳定的周期轨道，而似乎随机的在 $(0, 1)$ 区间(或在其中的某些子区间)中跳来跳去，但这一轨道在这些区间内的任何一个子区间 (a, b) 内都会出现无数次，这就是混沌的遍历性。



实验2：迭代法之不动点迭代

简单和复杂：二次函数的迭代和混沌

步骤3. 加密 r 的取值，得到Feigenbaum（费根鲍姆）图，在Feigenbaum图中你看到了什么？上面说的三种情况是怎样表现在这一图中的？适当修改观察程序Exp7_4.m中的参数和某些绘图属性值，对 $r=2.6:0.001:4$ 重新计算，运行结果显示在图中，这个图形叫做Feigenbaum图.



实验2：迭代法之不动点迭代

简单和复杂：二次函数的迭代和混沌

我们看到，随着 r 的增加，图中从开始的一条曲线(不动点)分裂为两条曲线(2周期循环)、4条曲线(4周期循环)和8条曲线(8周期循环)，这种现象叫倍周期现象.

在8条曲线曲线之后是否是16条曲线→32条曲线等等，由于尺度很小的原因已经很难看清了.

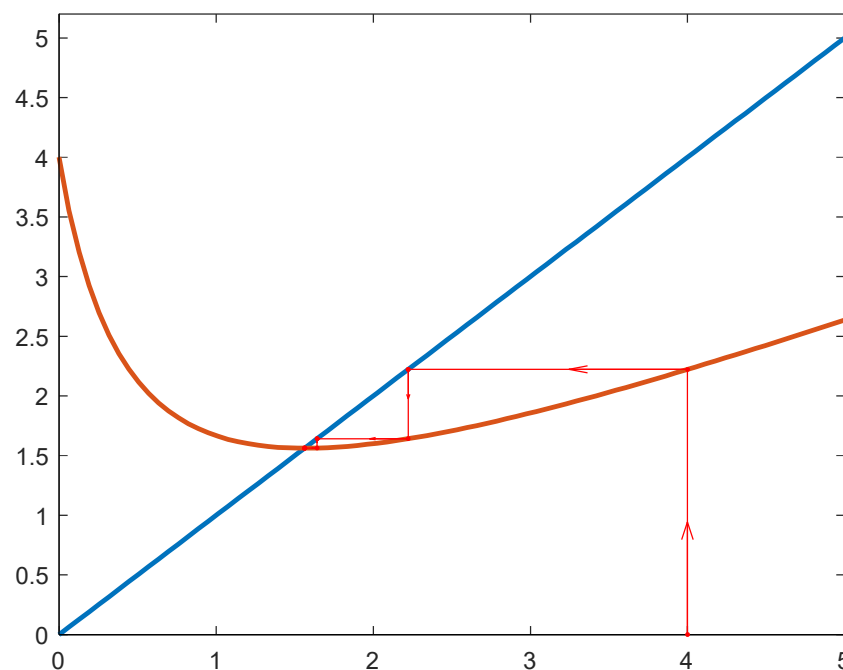
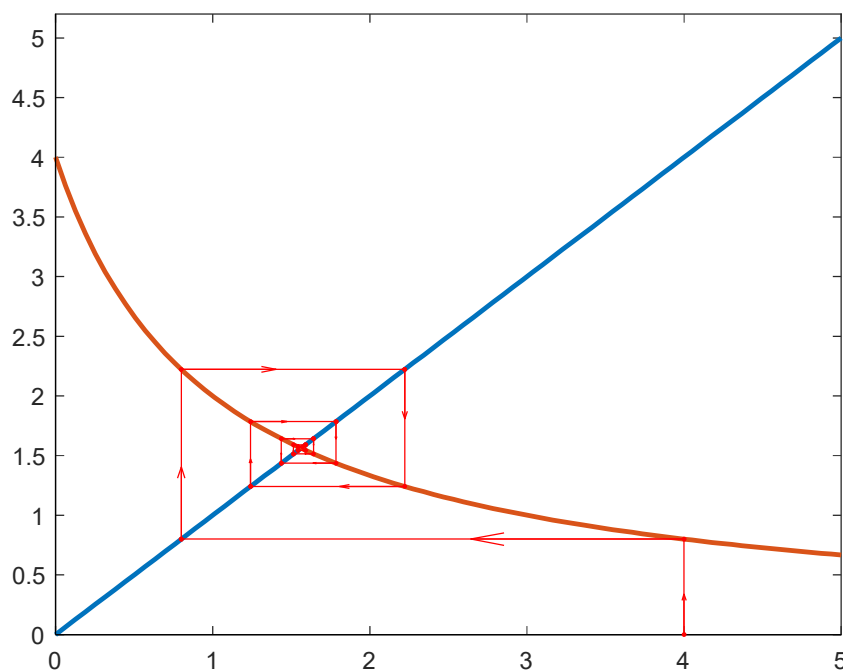
如果编制一个横向放大镜程序做进一步观察. 例如设定一个适当的横向放大比例 c , 使得可以在一个很小的 r 的取值区间段观察Feigenbaum图.
观察程序Exp7_4.m

实验2：迭代法之不动点迭代

如何直观的理解收敛快慢？

函数越平坦，迭代越快吗？

通过对实例观察和分析，找到问题的规律，是数学实验的重要方法之一。在上面的实验观察中，对比图g2(b)和图g3(c)，我们看到在不动点附近，后者的曲线图形要比前者平坦。这是否是影响迭代收敛速度的内在原因？你能否构造一些更为平坦的函数做进一步的观察呢？如果你想从理论上进行分析，首先需要考虑的问题是不是如何描述一个函数在某点附近的平坦性？



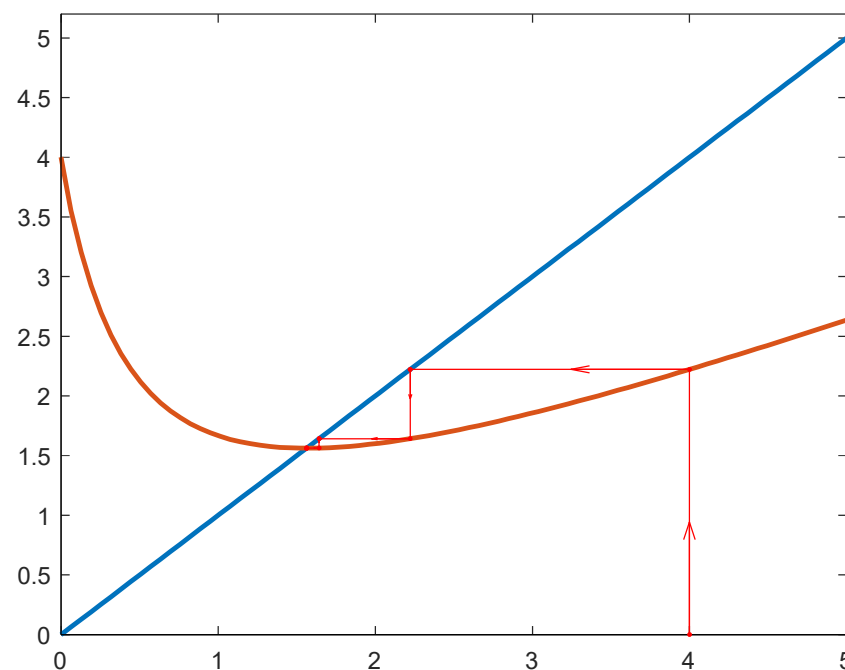
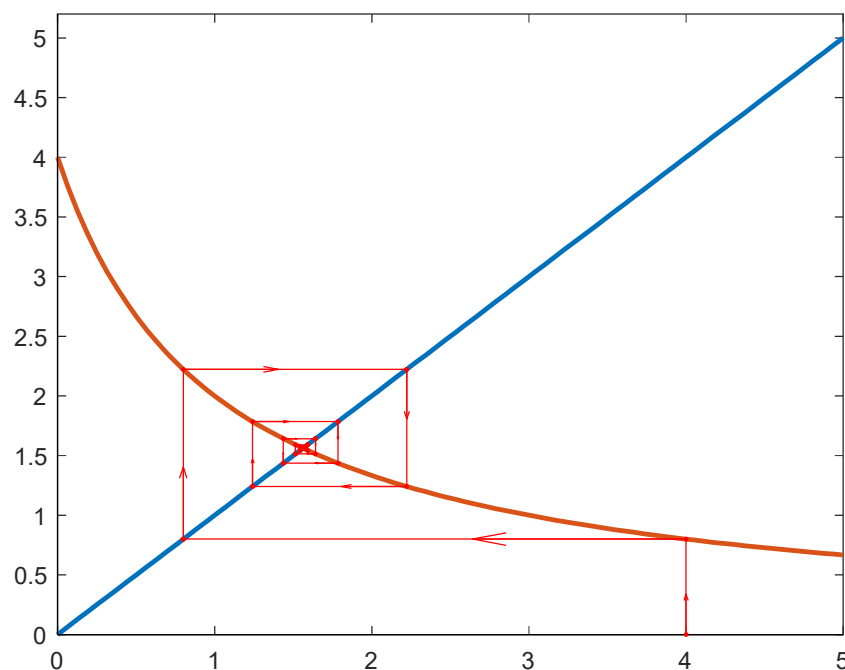
实验2：迭代法之不动点迭代

如何直观的理解收敛快慢？

函数越平坦，迭代越快吗？

切线的斜率也就是导数可以用来描述曲线的平坦程度，如果 $f'(x^*) = 0$ ，则函数 f 在 x^* 处有水平切线，也就是最平坦了。根据上面的观察，可以猜想到如下结论：一般，若函数 f 具有连续导数，则 $|f'(x^*)|$ 越小，函数 f 在不动点 x^* 附近就越平坦，从而收敛速度也就越快。

这与我们的理论分析相一致。



实验2：迭代法之不动点迭代

如何构造迭代函数使之具有较快的收敛速度？

通把方程 $f(x) = 0$ 的求根转化为求不动点问题来处理，可以从不动点方程 $g(x) = x$ 自然地引出迭代式 $x_{n+1} = g(x_n)$. 同时通过上面的讨论我们知道，函数 f 的构造是十分重要的，不同构造方法将导致不同的收敛性（收敛或发散）和收敛速度. 例如，对 g_1 的迭代是发散的；而对 g_2 、 g_3 的迭代是收敛的，但两者的收敛速度又不同. 当初始点靠近不动点时，如果迭代函数 f 在不动点附近的导数绝对值较小，收敛的可能性就较大，收敛的速度也就较快.

实验2：迭代法之不动点迭代

如何构造迭代函数使之具有较快的收敛速度？

从前面的实验观察中知道，使得迭代序列收敛并尽快收敛到方程 $f(x)=0$ 的某一解的条件是迭代函数 $g(x)$ 在解的附近的导数的绝对值尽量小. 这启发我们将迭代方程修改成 $x = h(x) = \lambda g(x) + (1 - \lambda)x$. (4)

我们需要选取 λ 使得 $|h'(x)|$ 在解的附近尽量小. 为此，我们可以令 $h'(x) = \lambda g'(x) + 1 - \lambda = 0$,

$$\text{得 } \lambda = \frac{1}{1-g'(x)}.$$

$$\text{于是 } h(x) = x - \frac{g(x)-x}{g'(x)-1}.$$

特别地，如果取 $g(x) = f(x) + x$ ，则我们得到迭代公式

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, n = 0, 1, \dots, \quad (5)$$

实验3：迭代法之牛顿迭代

牛顿迭代公式

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, n = 0, 1, \dots, \quad (5)$$

能否给出上述改进公式的几何解释？使用改进的迭代公式求方程的根. 将它的收敛速度与你得到的其他的迭代公式相比较，哪个更快？

实验3：迭代法之牛顿迭代

牛顿迭代公式

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, n = 0, 1, \dots, \quad (5)$$

能否给出上述改进公式的几何解释？使用改进的迭代公式求方程的根。将它的收敛速度与你得到的其他的迭代公式相比较，哪个更快？

设 x_0 为 $f(x)$ 上一点，则过 x_0 的切线方程为

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

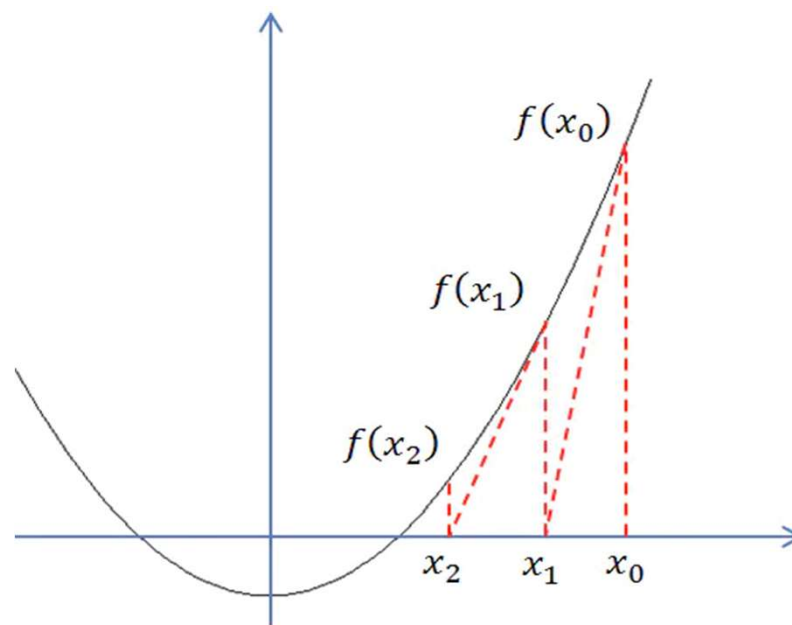
式中：令 $y=0$ ，得到切线与 x 轴交点为

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

根据式(2.9)构造迭代关系式

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

收敛的理论条件？



实验3：迭代法之牛顿迭代

牛顿迭代公式

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, n = 0, 1, \dots, \quad (5)$$

令 $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$, 则

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$$

在 $x = x^*$ 处, 有

$$\varphi'(x^*) = \frac{f(x^*)f''(x^*)}{(f'(x^*))^2} = 0$$

因此在 $x = x^*$ 充分小的邻域内有 $|\varphi'(x)| \leq q \leq 1$, 则牛顿迭代法收敛。

实验3：迭代法之牛顿迭代

对初值敏感性

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 11x + 12 = 0$$

2.35287527 converges to 4;

2.35284172 converges to -3;

2.35283735 converges to 4;

2.352836327 converges to -3;

2.352836323 converges to 1.

实验3：迭代法之牛顿迭代

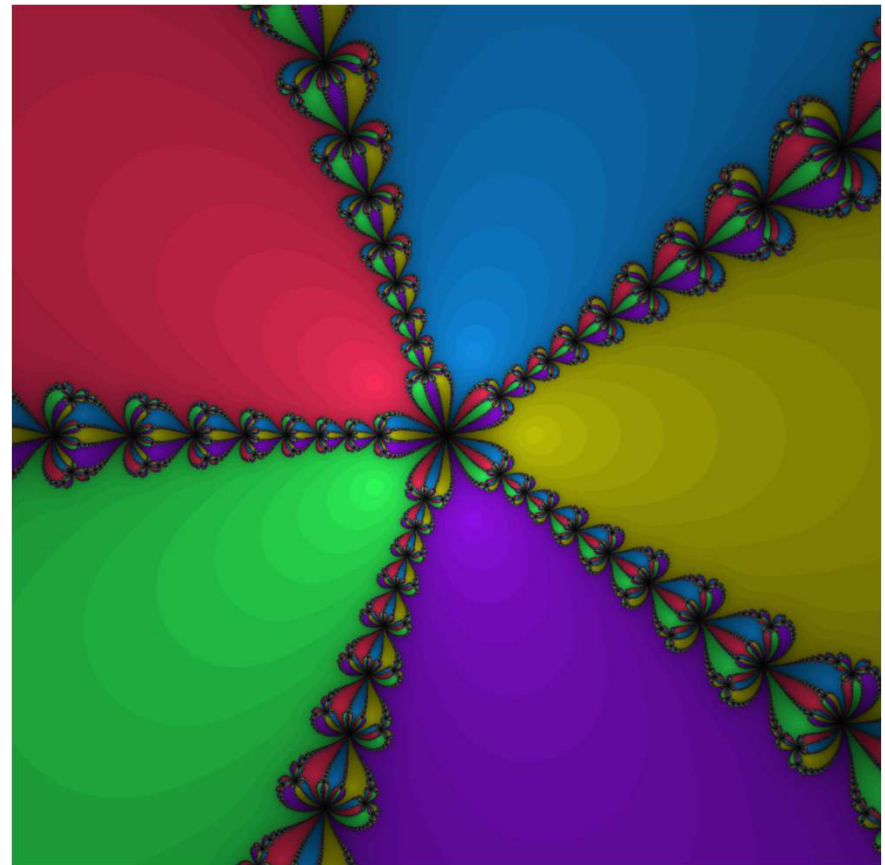
吸引域 (basin of attraction) :

When dealing with complex functions, Newton's method can be directly applied to find their zeroes. Each zero has a **basin of attraction** in the complex plane, the set of all starting values that cause the method to converge to that particular zero.

Basins of attraction for

$$x^5 - 1 = 0;$$

darker means more iterations
to converge.



实验3：迭代法之牛顿迭代

示例 使用牛顿迭代求方程 $x^3 + x - 1 = 0$ 在 $[0, 1]$ 内的近似根。

写出格式

程序Exp7_6.m

实验3：迭代法之牛顿迭代

讨论：比较优缺点

- 牛顿法
- 基本不动点迭代
- 二方法

实验4：迭代法之弦截法

牛顿迭代法的每一步不但要计算函数值，而且要计算导数值，在使用过程中有一定的局限性。特别是遇到以下情况：①导数计算比较困难；②在根的领域内导数值非常小；③方程有多重根，牛顿迭代法可能失效。
对

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, n = 0, 1, \dots,$$

使用割线代替切线，若取 $f'(x_n) = \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}$

可得单点弦截法： $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_0)}{f(x_n) - f(x_0)}$

若取 $f'(x_n) = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$

可得两点弦截法： $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$

实验4：迭代法之弦截法

实验练习：

使用两点弦截法求方程 $x^3 - 3x - 1 = 0$ 在 $x_0 = 2$ 内的近似根（误差 $< 10^{-5}$ ，取 $x_0 = 2, x_1 = 1.9$ ）。

分析，写出格式

程序Exp7_7.m

命令窗口执行：

```
>>format long
```

```
>>[result,n]=Exp7_7(1e-5,100,2,1.9)
```

```
result=
```

```
2.000000000000000 1.900000000000000 1.881093935790725
```

```
1.879411060169918 1.879385274283925 1.879385241572444
```

上述迭代过程表明：使用两点弦截法，迭代 $n-2=4$ 步，即可达到误差限内近似解 $x=1.879385241572444$ 。

实验5：求解方程组的迭代法

不动点迭代：

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \text{ 恰当地变形 } \rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{G}(\mathbf{x})$$

基本格式： $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{G}(\mathbf{x}_n)$

以线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 为例：

- Jacobi method:

Then A can be decomposed into a **diagonal** component D , a lower triangular part L and an upper triangular part U :

$$A = D + L + U \quad \text{where} \quad D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad L + U = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

The solution is then obtained iteratively via

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = D^{-1}(\mathbf{b} - (L + U)\mathbf{x}^{(k)}),$$

where $\mathbf{x}^{(k)}$ is the k th approximation or iteration of \mathbf{x} and $\mathbf{x}^{(k+1)}$ is the next or $k + 1$ iteration of \mathbf{x} . The element-based formula is thus:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j^{(k)} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

实验5：求解方程组的迭代法

不动点迭代：

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \text{恰当地变形} \rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{G}(\mathbf{x})$$

基本格式： $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{G}(\mathbf{x}_n)$

以线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 为例：

- Gauss-Seidel method:

Then the decomposition of A into its lower triangular component and its strictly upper triangular component is given by:

$$A = L_* + U \quad \text{where} \quad L_* = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

The system of linear equations may be rewritten as:

$$L_* \mathbf{x} = \mathbf{b} - U \mathbf{x}$$

The Gauss-Seidel method now solves the left hand side of this expression for \mathbf{x} , using previous value for \mathbf{x} on the right hand side. Analytically, this may be written as:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = L_*^{-1} (\mathbf{b} - U \mathbf{x}^{(k)}).$$

However, by taking advantage of the triangular form of L_* , the elements of $\mathbf{x}^{(k+1)}$ can be computed sequentially using [forward substitution](#):

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad [5]$$

实验5：求解方程组的迭代法

Newton' s method for Systems of equations

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n - J_F(\mathbf{x}_n)^{-1} F(\mathbf{x}_n)$$

Rather than actually computing the inverse of the Jacobian matrix, one may save time and increase numerical stability by solving the system of linear equations

$$J_F(\mathbf{x}_n)(\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n) = -F(\mathbf{x}_n)$$

实验6：求根有关的Matlab内置函数

在MATLAB中，主要有solve、fzero、fsolve、roots等函数用于方程（组）求解，下面介绍其详细用法。

1. solve函数solve函数可用来求解代数方程（组）与非线性方程（组），具体使用格式：`solve('F', 'var')`：用于求解单个方程情形，F表示求解方程，var表示求解变量，当求解变量省略时，表示对默认变量求解，若方程为符号方程，求解变量为符号变量时，上述格式中的单引号可省略；

`[x1, x2, ..., xn]=solve('F1', 'F2', ..., 'Fn', 'var11', 'var2', ..., 'varn')`：用于求解n个方程组成的方程组问题，F1、F2、...、Fn表示各个方程，var1, var2, ..., varn表示各个求解变量，[x1, x2, ..., xn]表示求解结果。

实验6：求根有关的Matlab内置函数

例 求一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的根。

```
>>syms x a b c
```

```
>>ff=a*x^2+b*x+c;
```

```
>>solve(ff)
```

```
ans=
```

```
-1/2*(b-(b^2-4*a*c)^(1/2))/a
```

```
-1/2*(b+(b^2-4*a*c)^(1/2))/a
```

实验6：求根有关的Matlab内置函数

2. fzero函数

fzero函数用于求非线性方程的最优解，使用格式：`fzero(F, [a, b])`：`F`表示求解的方程，一般通过子程序建立`F`，`[a, b]`表示求解区间，该格式寻求`F`在`[a, b]`内的根；

`fzero('F', x0)`：`F`表示解的方程建立方式同上，`x0`表示迭代初值。

实验6：求根有关的Matlab内置函数

例 求方程 $x + 2 \sin x e^x - 1 = 0$ 的根。

先在文件编辑窗口编写如下M文件，并保存在当前工作目录下。

```
function f=exam2_10(x)
```

```
f=x+2*sin(x)*exp(x)-1;
```

然后在命令窗口中执行：

```
>>fzero(@exam2_10,[0,1])
```

```
ans=0.2774
```

```
>>fzero(@exam2_10,0.8)
```

```
ans=
```

```
0.2774
```

实验6：求根有关的Matlab内置函数

例 求方程 $x + 2 \sin x e^x - 1 = 0$ 的根。

对于方程的建立，也可以通过@方式也可以建立函数，执行如下：

```
>>test=@(x)[x+2*sin(x)*exp(x)-1];
```

```
>>fzero(test,0.8)
```

```
ans=
```

```
0.2774
```

实验6：求根有关的Matlab内置函数

3. fsolve函数

fsolve函数用于求非线性方程组的最优解，使用格式：

`fsolve('F', x0)`: F表示求解的方程组，一般通过子程序建立F，x0表示迭代初值。

实验6：求根有关的Matlab内置函数

例 求方程组 $\begin{cases} x_1 - \sin x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - \cos x_2 = 0 \end{cases}$ 的解。

先在文件编辑窗口编写如下M文件，并保存在当前工作目录下。

```
function F=exam2_11(x)
```

```
F(1)=x(1)-sin(x(1))-5*x(2);
```

```
F(2)=2*x(1)+x(2)-cos(x(2));
```

然后在命令窗口中执行如下语句

```
>>fsolve(@exam2_11,[0,0])
```

```
Optimization terminated: first-order optimality is less than  
options.TolFun.
```

```
ans=
```

```
0.4980 0.0041
```

实验6：求根有关的Matlab内置函数

4. roots函数

roots函数用于求多项式方程的根，使用格式：

roots (A)：表示在复数范围内求多项式方程 $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0 = 0$ 的所有根，其中 $A=[a_n, a_{n-1}, \cdots a_1, a_0]$ 。

实验6：求根有关的Matlab内置函数

例 求方程 $x^5 - 6x^4 + 5x^3 - 3x + 8 = 0$ 的根。

```
>>a=[1, -6, 0, 5, -3, 8];
```

```
>>roots(a)
```

```
ans=
```

```
5.8626
```

```
-1.2901
```

```
1.2681
```

```
0.0797+0.9098i
```

```
0.0797-0.9098i
```

实验7：求根的可视化方法

图形放大法

在科学研究与工程计算过程中，有些问题只需要大致确定方程根的取值范围，并不需要计算精确解；有些问题需要求精确解，但无解析表达式，而设计的迭代方法对初值具有敏感性。对上述两个问题，可以通过图形放大的方法，确定根的取值范围或找到根值附近的初始迭代点，具体步骤如下：

- (1) 绘制函数曲线。
- (2) 图形放大，确定曲线与 x 轴的交点或两曲线的交点。

实验7：求根的可视化方法

例1 使用图形放大法确定方程 $x^5 - 6x^4 + 5x^3 - 3x + 8 = 0$ 各根的取值范围。

```
>>x=-2:0.01:6;
```

```
>>y=x.^5-6*x.^4+5*x.^2-3*x+8;
```

```
>>plot(x,y)
```

```
>>grid on
```

由图可知，三个实根大致取值范围为

$(-1.4, -1.2)$, $(1.25, 1.3)$, $(5.8, 5.9)$ 。

实验7：求根的可视化方法

例2 使用图形放大法确定方程组 $\begin{cases} 3x^2 - y^3 = 1 \\ e^{-x} - y = -2 \end{cases}$ 解的取值范围。

```
>>ezplot('3*x^2-y^3-1', [-7, 7, -7, 7])
```

```
>>hold on
```

```
>>ezplot('exp(-x)-y+2', [-7, 7, -7, 7])
```

```
>>grid on
```

由图可知，方程组的解的大致范围为 $1.8 < x < 2, 2.1 < y < 2.2$ 。

11月1日实验课实验题

随机模拟实验

上交截止日期:

2022年11月1日23:00

- 实验课实验题1:

用所给迭代法求方程 $x^3 - \sin x - 12x + 1 = 0$ 全部根。

(a) $x = \varphi(x) = \sqrt[3]{12x + \sin x - 1}, \quad -4 \leq x \leq 3.$

(b) $x = \varphi(x) = \frac{1}{12}(x^3 - \sin x + 1), \quad 0 \leq x \leq 0.1.$

(c) $x = \varphi(x) = \sqrt[3]{12x + \sin x - 1}, \quad 3 \leq x \leq 4.$

并绘制迭代过程可视化的蛛网图。

- 实验课实验题2:

设有方程组 $Ax = b$, $A \in R^{20 \times 20}$, 其中A是一个稀疏的五对角矩阵:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & & \\ 1 & 3 & 1 & \ddots & \\ 1 & 1 & \ddots & \ddots & 1 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

随机取一个非零的右端向量b。分别采用Jacobi迭代和Gauss-Seidel迭代两种方法求解上述线性方程组，画出误差的收敛历史图，观察和分析计算结果。