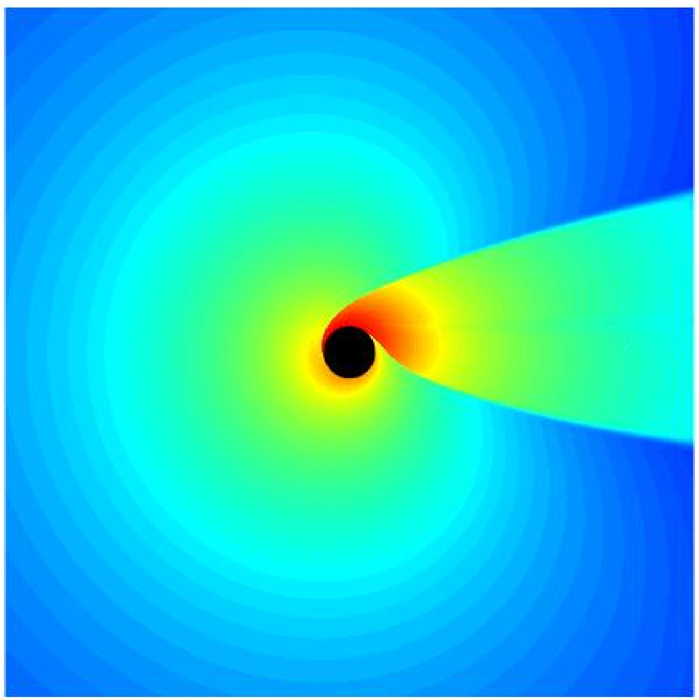
数学实验
Mathematical Experiments



实验十：
最优化实验
Optimization

本实验的背景与目的

◆ 最优化的背景与目的

问题背景

在生产实践中，研究某个具体问题，往往会提出多个可行方案。如何从众多可行方案中选择最好的或最优的方案，数学上把这类问题称为最优化问题。

最优化问题遍布人们生活的方方面面，例如：安排生产计划时，如何利用现有资源（人力、物力）安排生产，使得产品总产值最高；安排物资调运方案时，如何组织运输使得运输总费用最小；制定进货计划时，在保证一定的生产或销售前提下，如何进货使得平均费用最小；制定项目资金分配方案时，如何分配资金使得单位资金平均利润最大化。

◆ 最优化的背景与目的

目前，最优化方法在工业生产、运输调度、库存管理、经济规划、自动控制等领域发挥重要作用，取得了显著的经济和社会效益。

实验目的

(1) 理解最优化的基本概念和对实际优化问题的建模。

(2) 熟悉MATLAB无约束优化函数及用法。

(3) 理解线性规划和非线性规划模型，会使用MATLAB求解线性规划和非线性规划问题。

(4) 能够使用MATLAB解决一些最优化方法应用问题。

◆ 最优化的背景与目的

目前，最优化方法在工业生产、运输调度、库存管理、经济规划、自动控制等领域发挥重要作用，取得了显著的经济和社会效益。

实验目的

- “最”的思想贯彻到生活之中
- “最”的严格数学描述 -> 最优化模型
- “最”的求解方法

实验1：什么是最优化?

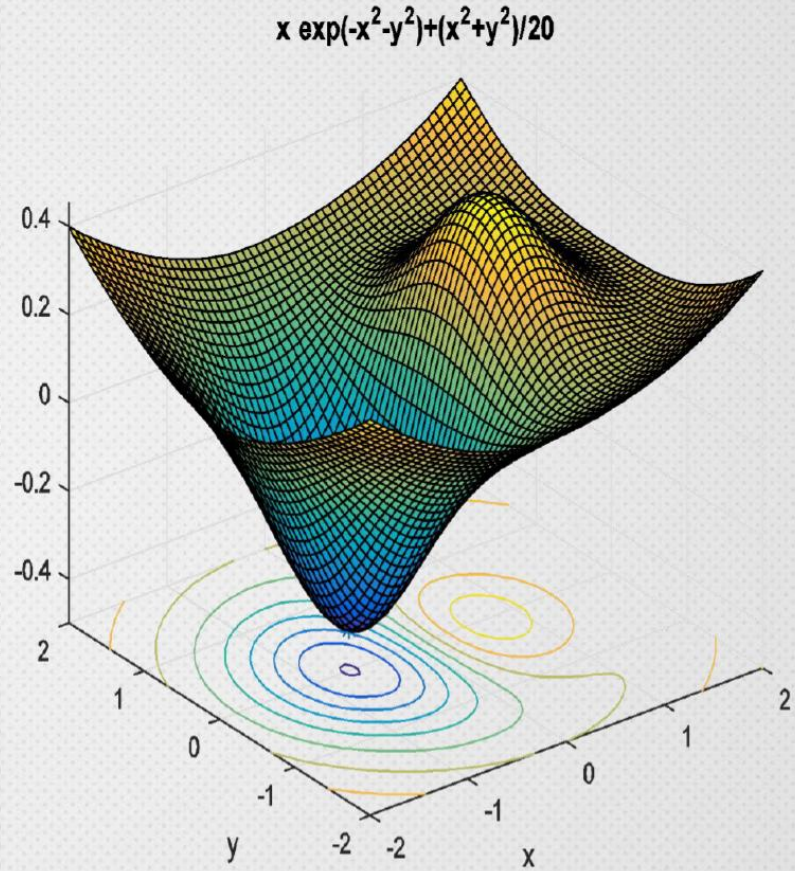
◆ 实验1：什么是最优化？

最优化问题的例子。

闭区域上连续函数的最值定理：函数$f(x)$在闭区域D上连续，则存在D上的点x_0、函数f在该点取得最大（小）值。

例1 $\min \quad f(x,y)=xe^{(-x^2-y^2)}+\dfrac{(x^2+y^2)}{20}$

$s.t. \quad (x,y)\in D=[-2,2]\times[-2,2]$



◆ 实验1：什么是最优化？

最优化问题的例子。

拉格朗日乘数法求解等式约束条件极值问题。

例2 在椭球上找已知直线距离最大和最小的点的坐标。

$$\max(\min)\quad \sqrt{(x-X)^2+(y-Y)^2+(z-Z)^2}$$

$$s.t.$$

$$\frac{(x-x_0)}{A}=\frac{(y-y_0)}{B}=\frac{(z-z_0)}{C}$$

$$\frac{(X^2-X_0^2)}{a^2}+\frac{(Y^2-Y_0^2)}{b^2}+\frac{(Z^2-Z_0^2)}{c^2}=1$$

◆实验1：什么是最优化？

问题的一般形式：

$$\max(\min) \quad f(x)$$
$$s.t.$$
$$x \in X$$

其中x是一个n维向量，也称决策变量；X是一个集合，可以简单区域，也可以用一系列的等式和不等式甚至其他形式表示，称为可行集。

◆实验1：什么是最优化？

$$
\begin{aligned}
&\max(\min) \quad f(x) \\
&s.t. \\
&\qquad\qquad x \in X
\end{aligned}
$$

根据问题的结构，可以进行下面的一些分类

（1）线性规划：目标函数和约束是线性的

（2）非线性规划：目标函数或约束是非线性的

（3）整数规划：决策变量是离散的，只能取整数值

（4）多目标规划：目标函数有多个

（5）……

实验2：最优化建模概述

◆ 实验2：最优化建模概述

问题的一般形式：

$$\max(\min) \quad f(x)$$
$$s.t.$$
$$x \in X$$

其中x是一个n维向量，也称决策变量；X是一个集合，可以简单区域，也可以用一系列的等式和不等式甚至其他形式表示，称为可行集。

◆ 实验2：最优化建模概述

极小化

目标函数

$$\min\ f(x_1,\cdots,x_n)$$

受限制于 (subject to)

$s.t.$

等式约束

$$h_i(x_1,\cdots,x_n)=0,\ i=1,\cdots,m;$$

$$g_j(x_1,\cdots,x_n)\geq 0,\ j=1,\cdots,n.$$

不等式约束

◆ 实验2：最优化建模概述

建立一个最优化问题的数学模型，应明确三个基本要素：

(1) 决策变量$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$。

(2) 约束条件$h_i(x) = 0$, $g_j(x)\geq 0$。

(3) 目标函数$f(x)$。

- 无约束优化
- 约束优化：若目标函数f(x)与约束条件都是线性函数，该模型称为线性规划，否则称为非线性规划。

实验3　由简入繁：最佳水槽断面问题的推广

◆ 实验3 最佳水槽断面问题

由简入繁：最佳水槽断面问题的推广

最优化问题广泛出现在自然科学、工程技术以及社会生活中. 在高等数学中一个常见的例题是：

问题1（矩形断面）用宽$l = 24cm$的长方铁板折成一个断面为矩形的水槽，问怎样的折法可使水槽的断面面积达到最大（图1）？

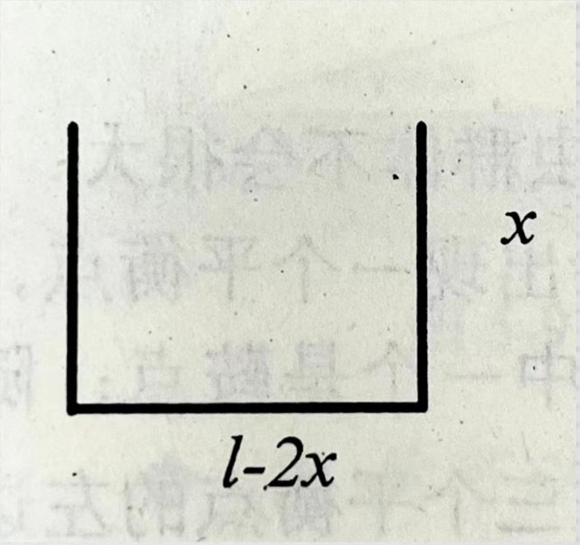


图1 梯形水槽

◆ 实验3 最佳水槽断面问题

设x为矩形两边的长度，则由图1易知，水槽断面面积为

$S(x) = x(l - 2x),\ 0 \le x \le l$ （6. 1）

于是由$S'_4(x) = l - 4x = 0$得$x = l/4 = 6cm$为驻点，且易知水槽有最大断面面积$72cm^2$，这一问题为求一元函数极值的问题.

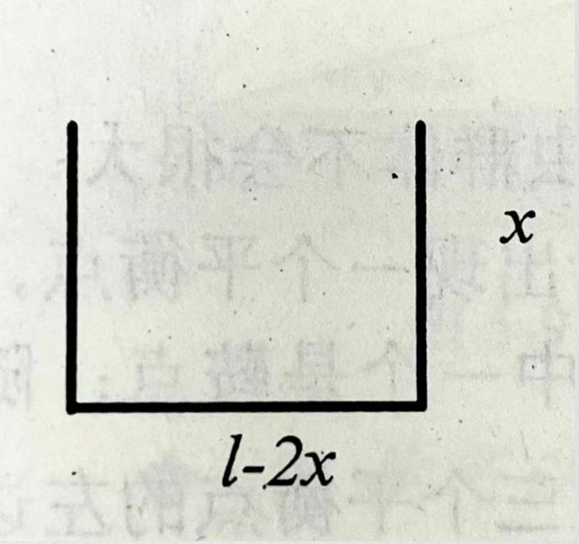


图1 梯形水槽

◆ 实验3 最佳水槽断面问题

问题2（梯形断面）将问题1推广，考虑稍复杂一些的情况，用宽$l = 24cm$的长方铁板折成断面为等腰梯形的水槽（图2），问怎样折法可使水槽断面面积达到最大？

这一问题也并不难，但却是二元函数极值问题.

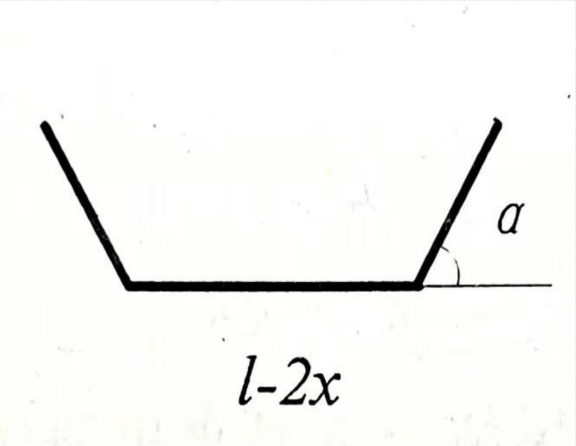


图2 梯形水槽

◆ 实验3 最佳水槽断面问题

将如图2所示，设折起来的两边长度为x，倾角为α，则断面面积为

$$S(x,\alpha)=\frac{1}{2}(l-2x+l-2x+2x cos(\alpha))x\sin(\alpha)$$

通过求$S(x,\alpha)$的偏导数可得最大值点是$\alpha^*=60°$,$x^*=8cm$, 最大面积为$S=83.14cm^2$.

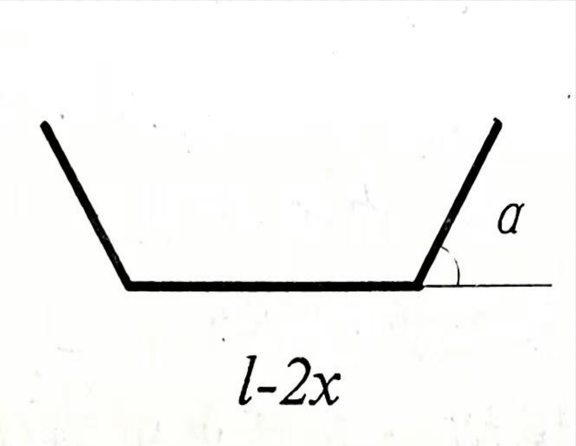


图2 梯形水槽

◆ 实验3 最佳水槽断面问题

问题3（对称五边形断面）考虑更复杂的情形：要求将铁板折成如图3所示的形状（对称五边形），问怎样的折法可使水槽的断面面积达到最大？

在这种情形下，断面面积是如图3所示的两个梯形面积之和，可以断言同问题2相比，这时最大断面面积应增加. 面积函数有四个自变量，问题3为四元函数的极值问题.

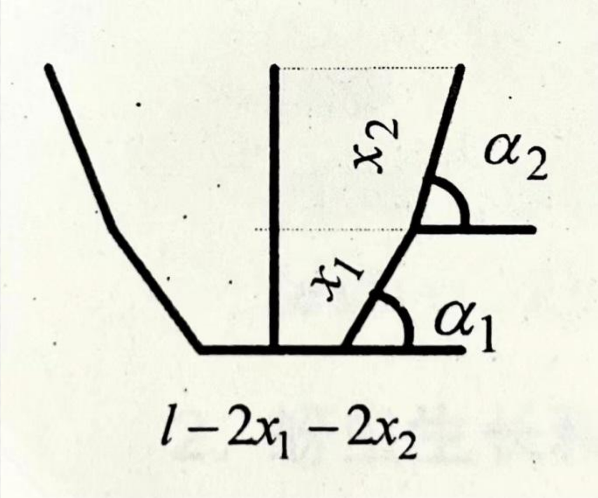


图3 对称5边形水槽

◆ 实验3 最佳水槽断面问题

图形是对称的，所以只要计算其一半面积再乘以2. 按图3中所示的记号，断面面积为两个梯形面积之和×2，即

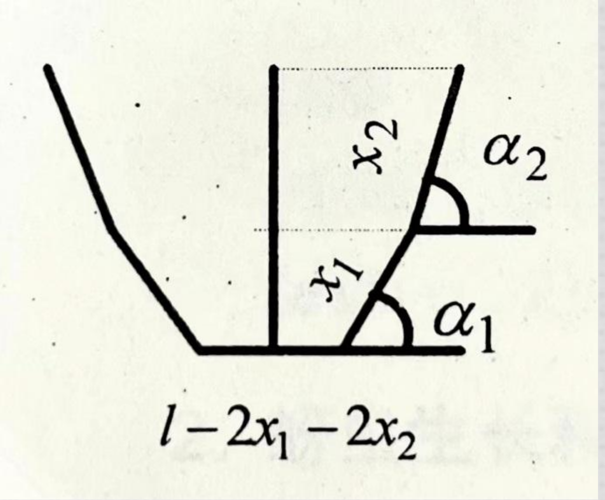


图3 对称5边形水槽

$$S(x_1,x_2,\alpha_1,\alpha_2)=2\{0.5[(0.5l-x_1-x_2)$$
$$+(0.5l-x_1-x_2)+x_1\cos(\alpha_1)]\cdot x_1\sin(\alpha_1)$$
$$+0.5[(0.5l-x_1-x_2)+x_1\cos(\alpha_1)$$
$$+(0.5l-x_1-x_2)+x_2\cos(\alpha_2)]\cdot x_1\sin(\alpha_2)\}$$

◆实验3 最佳水槽断面问题

求最大断面面积就是求下面最优化问题的解：

$$\max\ S(x_1,x_2,\alpha_1,\alpha_2)$$

$$\text{s.t.}\ \ 0\le x_1+x_2\le 0.5l,$$

$$x_i\ge 0,0\le\alpha_i\le\frac{\pi}{2},i=1,2$$

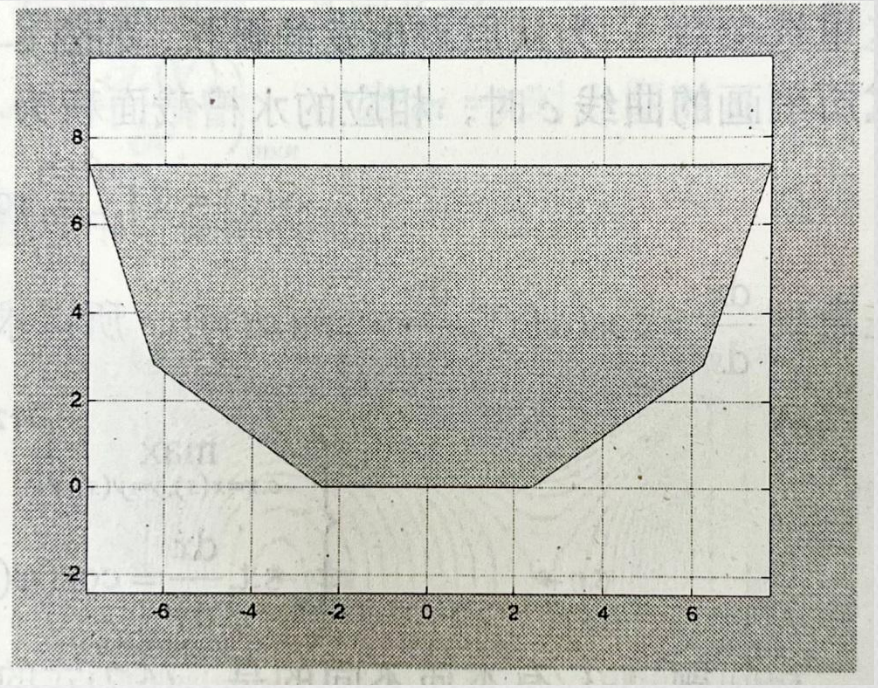


图4 对称5边形最优断面

可见，求对称五边形的最佳断面面积比前面的求解要困难多了，用Matlab优化工具箱的指令可以算得各边长相等时(此时边长为4.8cm)的最大面积S=88.637.

◆ 实验3 最佳水槽断面问题

上图4是用Matlab画出的具有最大断面积的对称五边形的图形.

在上面的三个问题中，随着断面边数的增加，断面面积函数的自变量个数随之增加，这意味着优化变量个数增多，求解难度加大，但是却可得到更大的最佳断面面积，表1显示了优化变量数和最大断面面积的关系.

表1 优化变量数与最大断面面积的关系

断面形状	优化变量数	最大断面积/cm^2
矩形断面	1	72
梯形断面	2	83.14
对称五边形	4	88.637

◆ 实验3 最佳水槽断面问题

最大断面面积增加是必然的，因为矩形断面是梯形断面的特殊情况；梯形断面显然也是对称五边形的特例.因此可以进一步增加边数，例如将铁板折成对称7边形，9边形等等，一般地是对称2n+1边形.在这种情形下可以期望最大断面面积得到进一步的增加，当然计算代价也随之增加.

最大断面面积是n的单调递增数列（你有兴趣证明这一猜想吗？），它应该有上界（为什么？），所以极限应该存在（为什么？）.

◆ 实验3 最佳水槽断面问题

增加多边形的边，变量的个数越来越多，面积公式越来越复杂，计算量越来越大，一个简单的问题变成了很复杂的问题. 如果只是采用有限边的话，所面临的总是有限个变量（2n个变量）. 当$n\to\infty$，意味着水槽底面将越来越接近于一条弧线，也就是说，在考虑了极限的情形下，问题将产生质的变化，我们要确定一条关于y轴对称的弧线，使之在定长l下所对应的水槽具有最大断面面积. 你能猜测这条弧线具有什么样的形状吗？为什么？

◆ 实验3 最佳水槽断面问题

一条弧线是由无穷个点所构成，所以这时求最优断面问题不再是只处理有限个变量，而是需要处理具有无穷个变量的最优化问题了. 前者在数学上称为有限维问题，而后者则是无穷维的.

让我们来表述上面具有对称形状的定长曲线弧的最优断面问题.

◆ 实验3 最佳水槽断面问题

求建立坐标系如图5所示，由于图形关于y轴是对称的，所以仅需计算在第一象限内的面积. 将曲线c表为参数方程的形式

$$c:\begin{cases} x = x(s), \\ y = y(s), \end{cases} 0 \le s \le 0.5l,$$

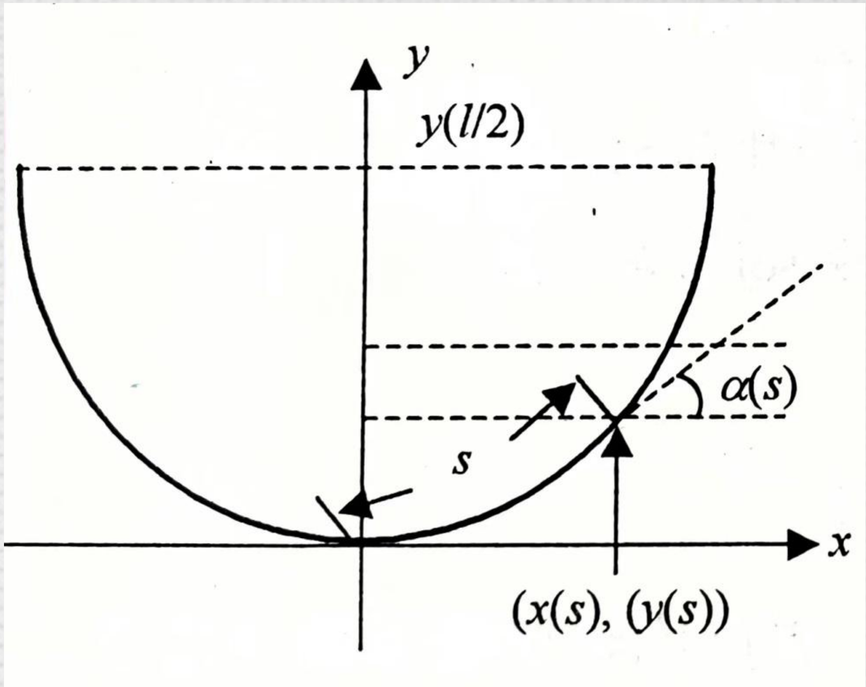


图5 对称曲线弧围成的水槽

◆ 实验3 最佳水槽断面问题

这里选参数s为从原点出发的弧长，如图5所示. 总弧长为$0.5l$，相应的水槽截面积为

$$S(c)=2\int_0^{y(l/2)} x\,dy=\int_0^{l/2} x(s)\frac{dy(s)}{ds}ds.$$

注意到$\frac{dx}{ds}=\cos(\alpha(s)),\frac{dy}{ds}=\sin(\alpha(s))$，所以求解对称定长曲线弧的最大断面问题为

$$\begin{cases} max\int_0^{l/2} x(s)\frac{dy(s)}{ds}ds,\ \ c: x=x(s), y=y(s), \\ s.t. \frac{dx}{ds}=\cos(\alpha(s)), \frac{dy}{ds}=\sin(\alpha(s)). \end{cases}$$

◆ 实验3 最佳水槽断面问题

和问题1-3有本质不同的是，上式的最优化问题是所谓泛函极值问题，即需要在无穷条曲线c中选取一条曲线c^*，使其具有最大断面面积. 解决这一问题需用到变分法. 变分法是最优控制理论的基础，而后者所处理的对象在工程实践中是大量遇到的，有兴趣的同学可以参阅相关的参考书.

实验4：最优化的求解概述

◆ 实验4 最优化的求解概述

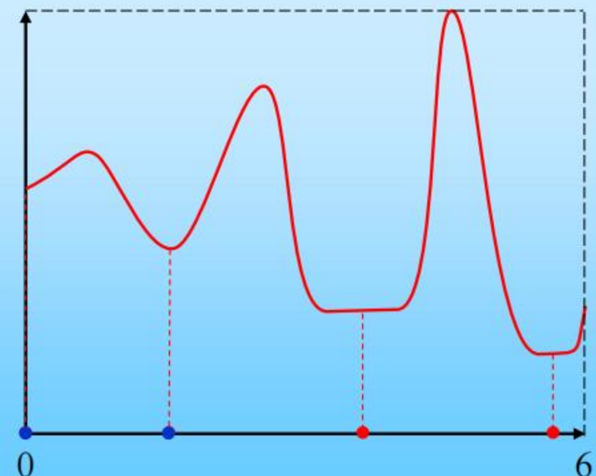
最优化问题的求解就是：在约束条件下，找出目标函数达到最大值或最小值时决策变量的取值。

- 求解方法非常多样化
- 不同类型的最优化问题，求解的方法也不同
- 例如（但不限于）：
  - 无约束规划：梯度下降法
  - 线性规划：George B. Dantzig1947年，单纯型算法
  - 非线性规划：1951 年 Kuhn 和Tucker，最优性条件
  - 整数规划： 1958年R.E.GoMory，割平面法
  - 多目标规划：化多为少；分层序列法...

◆ 实验4 最优化的求解概述

局部极小点和全局极小点

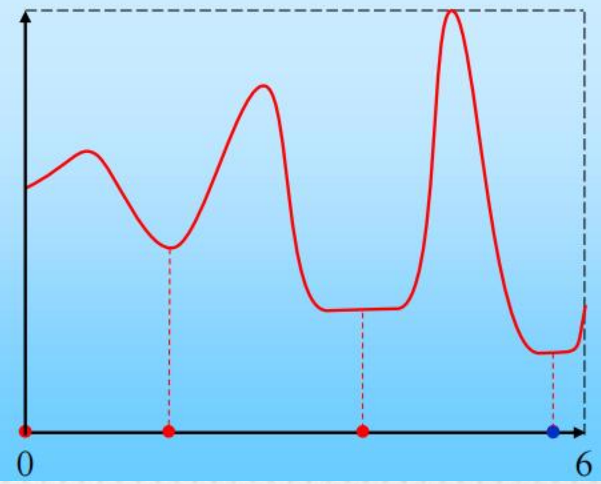
设 $f: D \subset R^n \rightarrow R$，若存在 $X^* \in D$ 及实数 $\delta > 0$，使得 $\forall X \in N^o(X^*, \delta) \cap D$ 都有 $f(X^*) \quad f(X)$，则称 X^* 为 $f(X)$ 的**局部极小点**；若 $f(X^*) < f(X)$ ，则称 X^* 为 $f(X)$ 的**局部严格极小点**。



◆ 实验4 最优化的求解概述

局部极小点和全局极小点

设 $f: D \subset R^n \to R$，若存在 $X^* \in D$，若对 $\forall X \in D$，都有 $f(X^*) \le f(X)$，则称 X^* 为 $f(X)$ 的全局极小点；若 $f(X^*) < f(X)$，则称 X^* 为 $f(X)$ 的全局严格极小点。



注：

极小点处的函数值称为极小值。

极小点(值)也称为最优解(值)。

◆ 实验4 最优化的求解概述

微分法求最大和最小

在高等数学中，求函数的最值问题是一类综合典型题，这类问题的求解步骤是：

(1) 求函数f(x, y)在区域D内部的所有驻点和导数不存在的点，这些点称为**受检点（critical points）**；

(2) 求函数f(x, y)在边界上的最大值M_1和最小值m_1;

(3) 设$P_1,\cdots,P_n$是受检点全体，则$M = \max\{M_1,f(P_1),\cdots,f(P_n)\}$和$m = \min\{m_1,f(P_1),\cdots,f(P_n)\}$分别为最大值和最小值.

◆ 实验4 无约束优化的背景知识

例：求函数$\boldsymbol{z} = x_1{}^3 - x_2{}^3 + 3x_1{}^2 + 3x_2{}^2 - 9x_1$的极值点.

(1) 求受检点：令$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 3x_1{}^2 + 6x_1 - 9 = 0, \frac{\partial f}{\partial x_2} = -3x_2{}^2 + 6x_2 = 0$，由此得四个驻点(−3, 0)，(1, 0)，(−3, 2)， (1, 2)，

这可用Matlab计算：

```
syms x1 x2  %定义符号变量。
f=x1^3-x2^3+3*x1^2+3*x2^2-9*x1;   % 函数z。
v=[x1 x2];df=jacobian(f,v)      %计算雅可比。
[X,Y]=solve(df(1),df(2));[X,Y] %用指令solve求驻点。
```

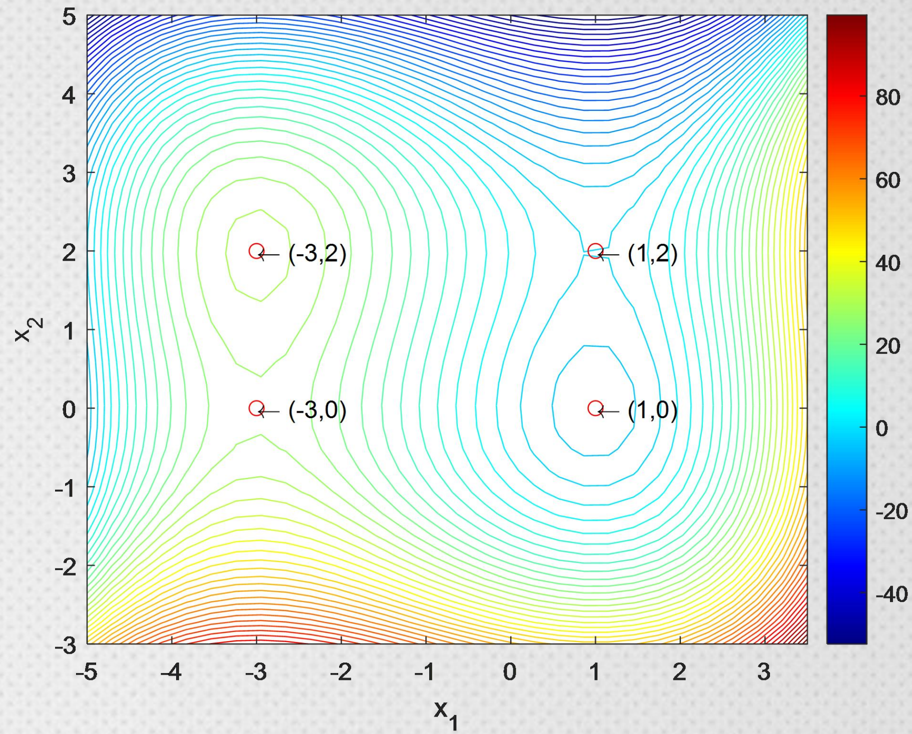
◆ 实验4 无约束优化的背景知识

设$f(v)=(f_1(v),f_2(v),\cdots,f_m(v))$为一个m维向量函数，其中$v=(v_1,\cdots,v_n)$为n元变量，雅可比矩阵是一个m×n阶矩阵，定义为$J=(\frac{\partial f_i(v)}{\partial v_j})_{m\times n}$，当m=1时，即对n元标量函数，它的雅可比就是该函数的梯度，如上面程序中所做的那样.

- solve指令：格式为solve('eqn1','eqn2',⋯,'eqnn')求n个方程$\mathrm{eqn}_1,\mathrm{eqn}_2,\cdots,\mathrm{eqn}_n$所构成的方程组的根（符号解）.

◆ 实验4 无约束优化的背景知识

(2) **可视化**：尽管函数是无界的，但可以判定以上四个驻点的极值性质，用Matlab的绘制函数图形，并将四个驻点标于等值线图中.



图形右边的colorbar用颜色指示了函数值的大小，由此可以判定(-3, 0), (1, 2)是两个鞍点, (1, 0)是极小点(-3, 2)是极大点. 程序如下：Exp10_4a.m

◆ 实验4 无约束优化的背景知识

可用二阶条件判定极值点. 在高等数学中对二元函数的情况给出了判别条件. 用线性代数的观点重新讨论这一问题是有益的. 将二元函数在驻点附近进行Taylor展开至二阶项并写成矩阵的形式,得到

$$f(x_1,x_2)=f({x_1}^0,{x_2}^0)+\left(f_{x_1}({x_1}^0,{x_2}^0),f_{x_2}({x_1}^0,{x_2}^0)\right)\begin{bmatrix}x_1-{x_1}^0\\x_2-{x_2}^0\end{bmatrix}$$

$$+\frac{1}{2!}(x_1-{x_1}^0,x_2-{x_2}^0)\begin{bmatrix}f_{x_1x_1}({x_1}^0,{x_2}^0) & f_{x_1x_2}({x_1}^0,{x_2}^0)\\ f_{x_1x_2}({x_1}^0,{x_2}^0) & f_{x_2x_2}({x_1}^0,{x_2}^0)\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x_1-{x_1}^0\\x_2-{x_2}^0\end{bmatrix}+o\left(\sum||x-x^0||^2\right),$$

◆ 实验4 无约束优化的背景知识

这里$\nabla f(x_1{}^0, x_2{}^0) = (f_{x_1}(x_1{}^0, x_2{}^0), f_{x_2}(x_1{}^0, x_2{}^0))'$为梯度向量，称

$$\nabla^2 f(x_1{}^0, x_2{}^0) = \begin{bmatrix} f_{x1x1}(x_1{}^0, x_2{}^0) & f_{x1x2}(x_1{}^0, x_2{}^0) \\ f_{x1x2}(x_1{}^0, x_2{}^0) & f_{x2x2}(x_1{}^0, x_2{}^0) \end{bmatrix}$$

为函数f在点$(x_1{}^0, x_2{}^0)$处的Hessen矩阵.

◆ 实验4 无约束优化的背景知识

由于$(x_1{}^0, x_2{}^0)$为驻点，所以展开式中右边的第二项等于0，略去高阶无穷小项得到在驻点$(x_1{}^0, x_2{}^0)$附近成立下面的近似等式

$$f(x_1, x_2) \approx f(x_1{}^0, x_2{}^0) + \frac{1}{2!}(x - x_1{}^0, x - x_2{}^0)$$
$$\begin{bmatrix} f_{x_1x_1}(x_1{}^0, x_2{}^0) & f_{x_1x_2}(x_1{}^0, x_2{}^0) \\ f_{x_1x_2}(x_1{}^0, x_2{}^0) & f_{x_2x_2}(x_1{}^0, x_2{}^0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - x_1{}^0 \\ x - x_2{}^0 \end{bmatrix}$$

◆ 实验4 无约束优化的背景知识

这就是说，在驻点$(x_1{}^0, x_2{}^0)$附近的一个邻域内，$(x_1{}^0, x_2{}^0)$是否是极小、极大或鞍点取决于第二项的符号. 由线性代数的二次型理论，这归结于对Hessen 阵$\nabla^2 f(x_1{}^0, x_2{}^0)$的正定性、负定性和不定性的判断. 例如，若$\nabla^2 f(x_1{}^0, x_2{}^0)$是正定矩阵时，上式右边第二项$\geq 0$，所以$(x_1{}^0, x_2{}^0)$是局部严格极小点，由线性代数理论，当$\nabla^2 f(x_1{}^0, x_2{}^0)$所有的顺序主子式>0时，$\nabla^2 f(x_1{}^0, x_2{}^0)$是正定的.

◆ 实验4 无约束优化的背景知识

因此若

$$f_{x_1x_1}({x_1}^0,{x_2}^0)>0,$$

$$\begin{bmatrix} f_{x_1x_1}({x_1}^0,{x_2}^0) & f_{x_1x_2}({x_1}^0,{x_2}^0) \\ f_{x_1x_2}({x_1}^0,{x_2}^0) & f_{x_2x_2}({x_1}^0,{x_2}^0) \end{bmatrix}$$

$$=f_{x_1x_1}({x_1}^0,{x_2}^0)f_{x_2x_2}({x_1}^0,{x_2}^0)-{f_{x_1x_2}}^2>0,$$

则$\nabla^2 f({x_1}^0,{x_2}^0)$为正定矩阵，故$({x_1}^0,{x_2}^0)$为局部严格极小点. 而上面的判别条件正是在高等数学教材中给出的判别极小点的充分条件. 用线性代数的观点易将上面的结论平推到一般的n元函数f(x)的情形. 这里$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$为n元向量.

实验5 无约束优化的算法:从盲人下山谈起

◆ 实验5 模拟盲人下山的迭代寻优法

对n元函数$f(x) = f(x_1, \cdots, x_n)$的无约束优化问题，最优解是梯度方程$\nabla f(x) = 0$的根, 其中$\nabla f(x) = \left[\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\right]^T$为f (x) 的梯度. 所以用微分方法求局部极值，就必须求解其中非线性方程组的根，而实际上直接求解非线性方程组常会遭遇到失败的情况.

◆ 实验5 模拟盲人下山的迭代寻优法

迭代寻优算法的基本思想（以极小化问题为例）

(1) 首先给出目标函数 $f(X)$ 的一个初始迭代点 X^k, 置 $k=0$;

(2) 然后按照一定规则产生 X^k 处的一个下降方向 P^k;

(3) 再沿方向 P^k 搜索得到下一个迭代点 X^{k+1}，使得 $f(X^{k+1}) < f(X^k)$;

(4) 若满足停机条件则算法终止迭代，并输出X^k；否则置 $k=k+1$，转步骤(2)。

按照上面的过程，一般会产生一个收敛的迭代序列 $\{X^k\}$。在实际计算中，若满足停机条件，则将当前迭代点当作准确解的近似值。

◆ 实验5 模拟盲人下山的迭代寻优法

有许多求极值的数值方法，这些方法根据极值问题的自身特点，从一个初始点出发，采用迭代方式，一步步地逼近极值点，这种迭代寻优的方法与盲人下山的情形是十分类似的.

- 模拟盲人下山：一个盲人处于山上的某一点x_0，要下到谷底，他应如何做？由于盲人看不见山势的变化，因此他只能根据脚下局部区域的变化选择一个前进方向，然后做探测性移动.

◆ 实验5 模拟盲人下山的迭代寻优法

很自然地，这一方向应是下降方向，盲人沿着该方向探测移动，走到山在该方向的最低点并停止于该点，然后在新的位置重新寻找方向，继续进行探测性移动. 按这种方式，可以期望盲人最终能达到某一个山谷的最低点.

我们可以选择一个函数，例如用

$$f(x_1,x_2)=8{x_1}^2+9{x_2}^2-8x_1x_2-12x_1-6x_2$$

来模拟一座山峰, 于是盲人下山就是一个最优化问题

$$\min_{(x_1,x_2)} f(x_1,x_2)$$

◆ 实验5 模拟盲人下山的迭代寻优法

下面用Matlab模拟盲人下山：

步骤1. 运行观察程序

Exp10_5a.m，图形窗口中将出现函数$f(x_1,x_2)$的等值线图，最小点已标在图中. 运行程序后，图形窗口将出现一个交叉十字线，移动十字线确定

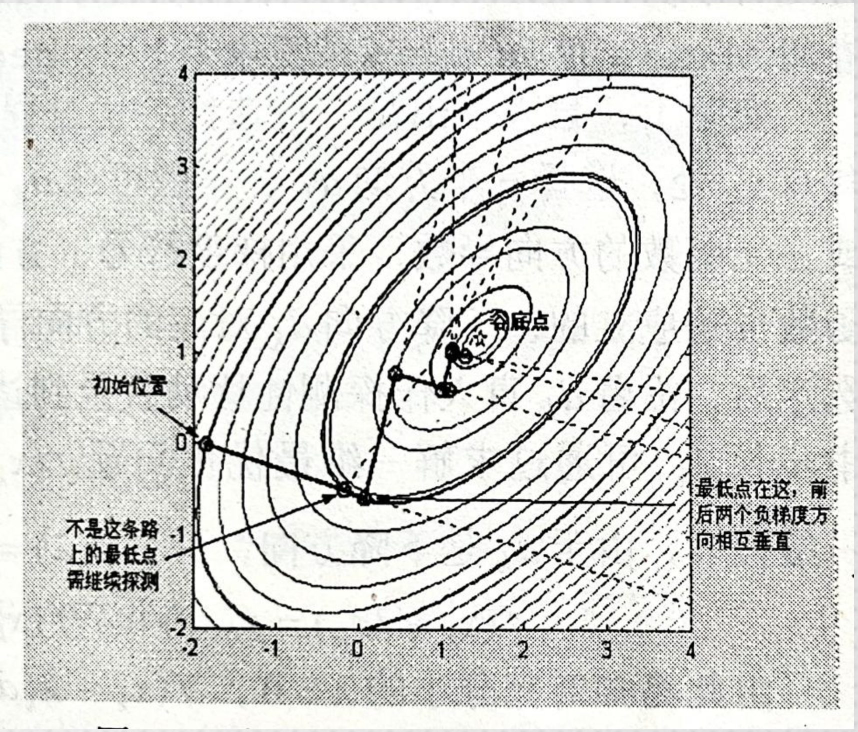


图7 盲人下山模拟(沿最速下降方向)

点的位置，按鼠标左键便选择了一个点. 用这种方法可连续选点，直至按下鼠标右键终止选点过程.

◆ 实验5 模拟盲人下山的迭代寻优法

步骤2. 用鼠标在等值线图上选取一点$x_0=(x_1{}^0, x_2{}^0)$，这一点就是盲人所在的初始位置. 在x_0处计算函数值$f(x_0)$(山的高度)并绘制一条过该点的等值线. 同时计算该点的负梯度方向$-\nabla f(x_0)$，将该方向用一条过x_0点的半射线表示出来，代表盲人下山的一条路径.

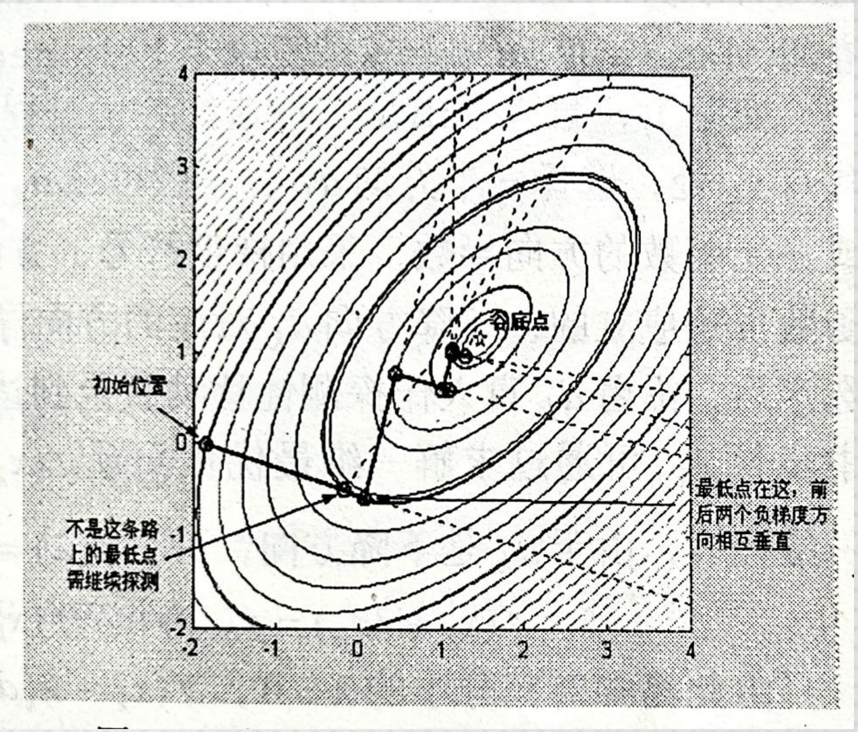


图7 盲人下山模拟(沿最速下降方向)

◆ 实验5 模拟盲人下山的迭代寻优法

步骤3. 如果盲人按下降最陡的方向(负梯度方向)前进，则他将沿着这条半射线做探测性移动，最后在这条射线上选择一个最低点. 用鼠标在等值线图上进行这种探测，找到这个最低点x_1.

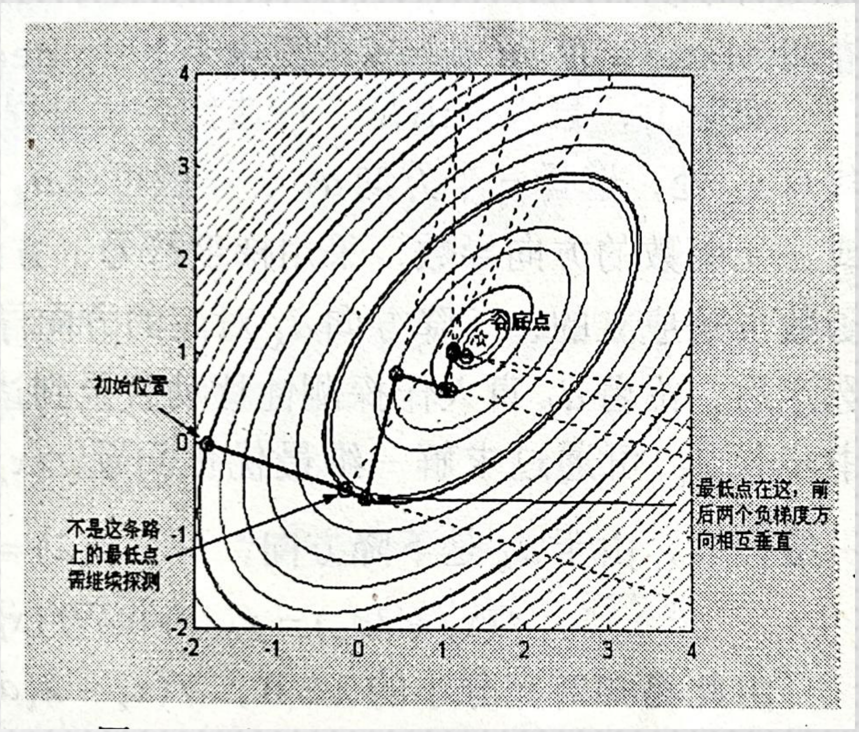


图7 盲人下山模拟(沿最速下降方向)

步骤4. 从x出发重复上面的步骤，将盲人行进的路线用红线标出，观察他是否逼近谷底，即最终是否会到达最优点(1.468, 1.1490)？

◆ 实验5 模拟盲人下山的迭代寻优法

实际上，盲人下山是一种迭代寻优过程，迭代格式为$x_{k+1}=x_k+\lambda_k d_k$，在每一个迭代点$x_k$处，选择一个方向$d_k$，一般可选$d_k$为下降方向. 在高等数学中，我们学习了二元或三元函数的方向导数. 采用梯度符号，方向导数可写成$\nabla f(x_k)^T d_k$的形式，这对于n元函数也是成立的. 下降方向d_k对应的方向导数满足条件$\nabla f(x_k)^T d_k<0$. 当下降方向d_k被选定后，沿着d_k盲人作探测性移动直至到达函数在该方向的最低点$x_{k+1}=x_k+\lambda_k d_k$，其中步长$\lambda_k$可通过求解一维最优化问题$f(x_k+\lambda_k d_k)=\min(\lambda)f(x_k+\lambda d_k)$确

◆ 实验5 模拟盲人下山的迭代寻优法

定，这一步骤称一维搜索．由于d_k是下降方向，可将

$\phi(\lambda)=f(x_k+\lambda d_k)$在$x_k$点作Taylor展开$f(x_k+\lambda d_k)=$

$f(x_k)+\lambda\nabla f(x_k)^T d_k+o(\lambda^2)<f(x_k)+o(\lambda^2)$,

由此易知对充分小的$\lambda>0, f(x_k+\lambda_k d_k)=$

$\min(\lambda)f(x_k+\lambda d_k)$的解是存在的，故沿着下降方向$d_k$盲

人可以找到一个最低点.

◆ 实验5 模拟盲人下山的迭代寻优法

数值迭代法的基本步骤是:

(1) 选初始点x_0;

(2) 对于第k次迭代解x_k，确定搜索方向d_k和步长λ_k，$x_{k+1} = x_k + \lambda_k d_k$使$f(x_{k+1}) < f(x_k)$;

(3) 若x_{k+1}符合给定迭代终止准则，停止迭代，最优解为$x^* \approx x_{k+1}$，否则转步骤(2). 用鼠标选点的过程实际上是手动实现上述算法的过程，下面是模拟盲人下山的程序.

Exp10_5a.m(盲人下山的模拟)

◆ 实验5 模拟盲人下山的迭代寻优法

算法步骤总结：

第 1 步　选取初始点 x^0，给定终止误差 $\varepsilon > 0$，令 $k := 0$；

第 2 步　计算 $\nabla f(x^k)$，若 $\|\nabla f(x^k)\| \le \varepsilon$，停止迭代.输出 x^k .否则进行第三步；

第 3 步　取 $p^k = -\nabla f(x^k)$；

第 4 步　进行一维搜索，求 t_k，使得

$$f(x^k + t_k p^k) = \min_{t \ge 0} f(x^k + t p^k)$$

令 $x^{k+1} = x^k + t_k p^k$，$k := k+1$，转第 **2** 步。

◆ 实验5 模拟盲人下山的迭代寻优法

思考

(1) 图7是按最速下降方向下山的过程. 我们看到，盲人行走的路径基本上是正交的. 这是必然的吗? 即如果盲人试图走到最速下降方向的最低点，

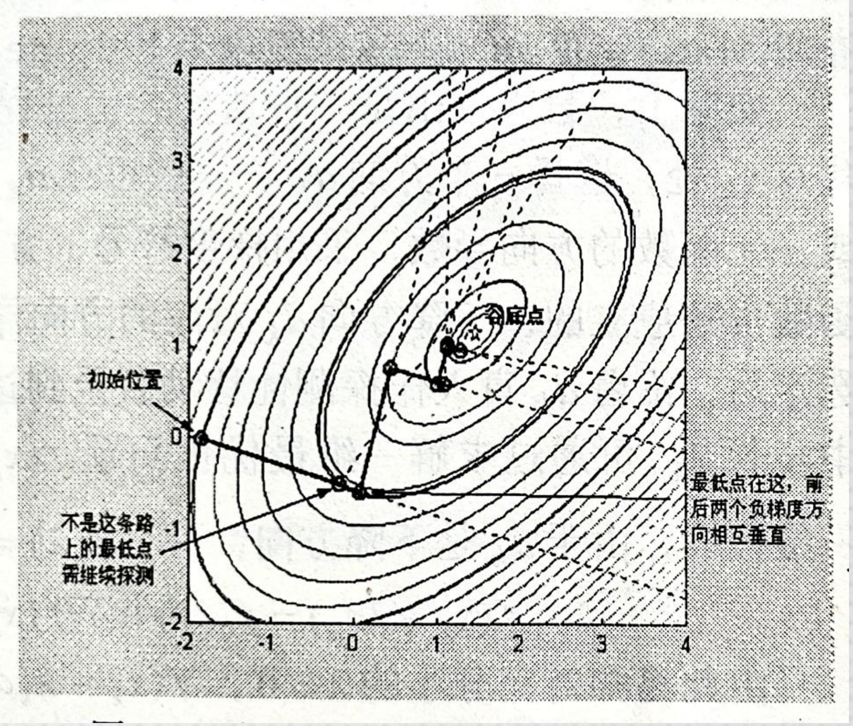


图7 盲人下山模拟(沿最速下降方向)

则最低点处的负梯度方向一定和原来的路径方向是垂直的吗? 你可否用方向导数的概念对此进行证明?

◆ 实验5 模拟盲人下山的迭代寻优法

思考

(2) 你可以沿一条等值线选择多个初始点，按最速下降方向前进，观察行进的路径. 按这种最速下降法行走效果好吗？你可以换一个香蕉函数模拟山，

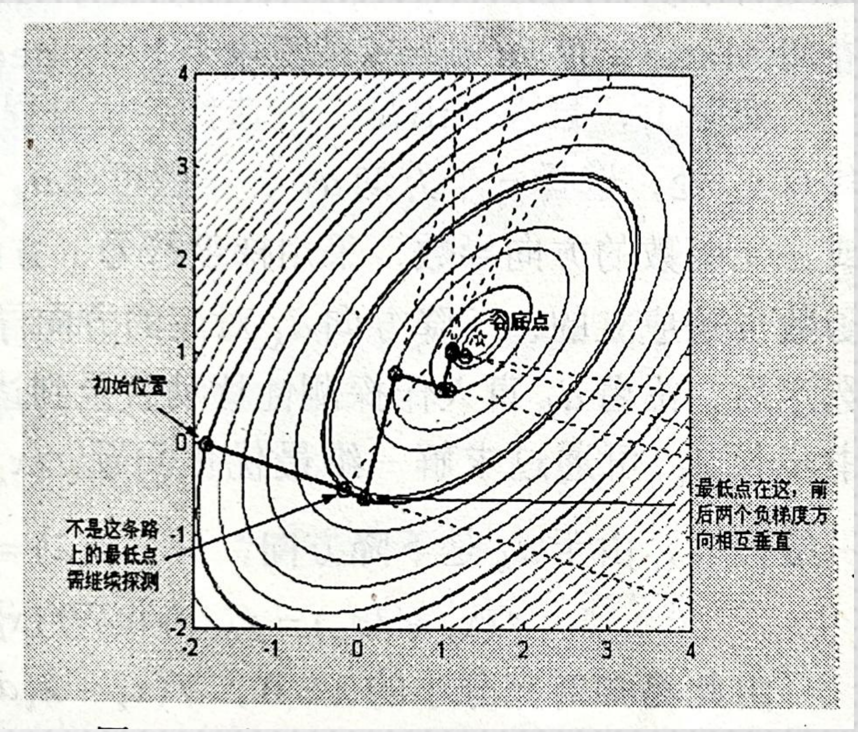


图7 盲人下山模拟(沿最速下降方向)

下面是一个香蕉函数的例子$f(x_1, x_2) = 100(x_2 - {x_1}^2)^2 + (1 - x_1)^2$，它的极小值点为(1, 1).

◆ 实验5 模拟盲人下山的迭代寻优法

注：

负梯度方向与等值线是正交的，负梯度方向是一个下降方向，与负梯度夹角为锐角的所有方向也是下降方向. 下降方向等价于方向导数$\nabla f(x_k)^T d_k < 0$. 所以盲人可以选取其它的下降方向行进，变尺度方向$-H_k \nabla f(x_k)$是常用的一种，其中H_k是一个正定矩阵. 拟牛顿方法就是采用这种方向的一类优化算法，实际应用中是比较有效的. 此外随机梯度下降(SGD, stochastic gradient descent)也很受欢迎。

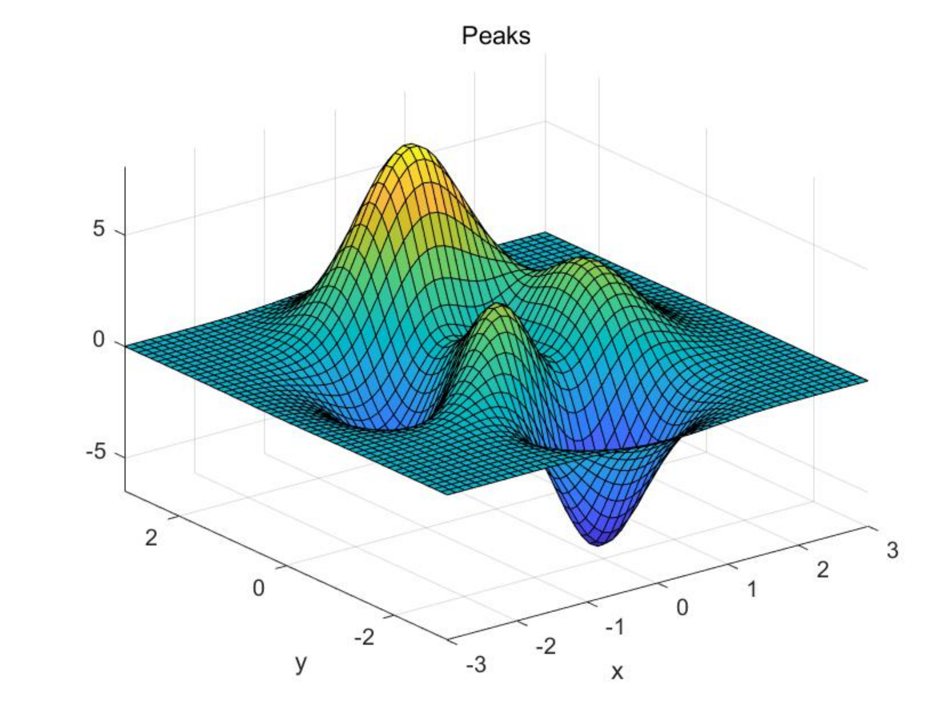
◆ 实验5 模拟盲人下山的迭代寻优法

思考

(3) 局部极值和全局极值.

Matlab提供了一个函数Peaks, 其定义为

$$z = 3(1-x)^2 \cdot e^{-x^2-(y+1)^2} - 10\left(\frac{x}{5} - x^3 - y^5\right) \cdot e^{-x^2-y^2} - \frac{1}{3} \cdot e^{-(x+1)^2-y^2}.$$



这是一个多峰函数,盲人在这样的环境下能走到最低点吗？关于Peaks函数指令的用法可查阅Matlab帮助(例如可使用命令help peaks),局部极值和全局极值有何区别？

实验6：求解无约束优化的Matlab内置函数

◆实验6 Matlab内置的最优化函数

1. 无约束一元函数最值

命令：

fminbnd( )

解释：

求单变量无约束（箱约束，边界约束）最优化问题

数学模型：

$$\min_{x_1 \le x \le x_2} f(x)$$

算法：

黄金分割法，抛物线插值法

◆ 实验6 Matlab内置的最优化函数

1. 无约束一元函数最值

标准模型：

$$\min(x) \quad f(x), \quad x \in [a,b]$$

fminbnd 函数：

fminbnd函数用于求一元函数的最小值

使用格式：

x=fminbnd('fun',x1,x2):表示求目标函数fun在x1<x<x2内的最小值, x为最优解;

◆ 实验6 Matlab内置的最优化函数

x=fminbnd('fun',x1,x2,options):表示求最优解,options为指定最小化参数;

[x,fval]=fminbnd(…):表示求最优解, fval为最优值;

[x,fval,exitflag]=fminbnd(…):exitflag表示返回函数计算退出条件;

[x,fval,exitflag,output]=fminbnd(…):output表示返回优化信息输出变量。

◆实验6 Matlab内置的最优化函数

例3 求$f(x)=3x^2-10x+1$在(1, 5)的最小值。

```
>>format rat
>>[x,z]=fminbnd('3*x^2-10*x+1',1,5)
x=
5/3
z=
-22/3
```

◆实验6 Matlab内置的最优化函数

例4 求$f(x)=\frac{x^3+\cos x+x\ln x}{e^x}$在(0, 2)的最小值。

```
>>[x,z]=fminbnd('(x^3+cos(x)+x*log(x))/exp(x)',0,2)
x=
0.5223
z=
0.3974
```

◆实验6 Matlab内置的最优化函数

对于目标函数的调用，可以先编写程序文件后调用：

```
function f=fun7_10(x)
f=(x^3+cos(x)+x*log(x))/exp(x);
>>[x,z]=fminbnd(@fun7_10,0,2)
x=
0.5223
z=
0.3974
```

◆ 实验6 Matlab内置的最优化函数

2. 无约束多元函数最值

命令：

fminunc( )

解释：

求解多变量无约束最优化问题

数学模型：

$$\min f(x_1,\cdots,x_n)$$

算法：

基于导数的算法：拟牛顿方法、信赖域方法

◆实验6 Matlab内置的最优化函数

2. 无约束多元函数最值

标准模型：

$$\min_{(x)} f(x), \qquad x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

fminunc 函数：

fminunc函数可用于求无约束多元函数最优解问题，

使用格式：

x=fminunc('fun',x0):fun表示求目标函数，x0为迭代初值，x为最优解；

◆实验6 Matlab内置的最优化函数

x=fminunc('fun',x0,options):options为指定最小化化参数;

[x,fval]=fminunc('fun',x0,options):fval为最优值。

[x,fval]=fminunc(…):表示求最优解，fval为最优值;

[x,fval,exitflag]=fminunc(…):exitflag表示返回函数计算退出条件;

[x,fval,exitflag,output]=fminunc(…):output表示返回优化信息输出变量;

◆实验6 Matlab内置的最优化函数

[x,fval,exitflag,output,grad]=fminunc(…):grad 表示目标函数梯度参数;

[x,fval,exitflag,output,grad,hessian]=fminunc(…):hessian表示目标函数Hessian参数。

◆实验6 Matlab内置的最优化函数

例5 求$f(x,y)=x^3+y^3-3xy$的最小值。

编写函数文件：

```
function f=fun7_11(x)
f=x(1)^3+x(2)^3-3*x(1)*x(2);
```

命令窗口下执行：

```
>>[x,z]=fminunc(@fun7_11,[0.5,3])
x=
1.0000 1.0000
z=-1.0000
```

◆ 实验6 Matlab内置的最优化函数

3. fminsearch 函数

命令：

fminsearch( )

解释：

求解多变量无约束最优化问题

数学模型：

$$\min f(x_1,\cdots,x_n)$$

算法：

基于免导数的算法：**Nelder-Mead**单纯形方法

◆实验6 Matlab内置的最优化函数

3. fminsearch 函数

fminsearch函数可用于求无约束多元函数最优解问题，使用格式:

x=fminsearch('fun',x0):fun表示求目标函数,x0为迭代初值,x为最优解;

x=fminsearch('fun',x0,options):options为指定最小化化参数;

[x,fval]=fminsearch('fun',x0,options):fval为最优值。

◆实验6 Matlab内置的最优化函数

[x,fval]=fminsearch(…):fval为最优值;

[x,fval,exitflag]=fminsearch(…):exitflag表示返回函数计算退出条件;

[x,fval,exitflag,output]=fminsearch(…):output 表示返回优化信息输出变量。

说明:当目标函数可导的阶数大于2时,fminunc函数比fminsearch函数更有效;当目标函数高度不连续时,fminsearch函数更具稳健性。

◆实验6 Matlab内置的最优化函数

例6 求Rosebrock函数$f(x_1,x_2)=100(x_2-{x_1}^2)^2+(1-x_1)^2$的最小值(迭代初值$x_0=(-1,3)$)。

编写函数文件：

```
function f=fun7_12(x);
f=100*(x(2)-x(1)^2)^2+(1-x(1))^2;
```

命令窗口下执行：

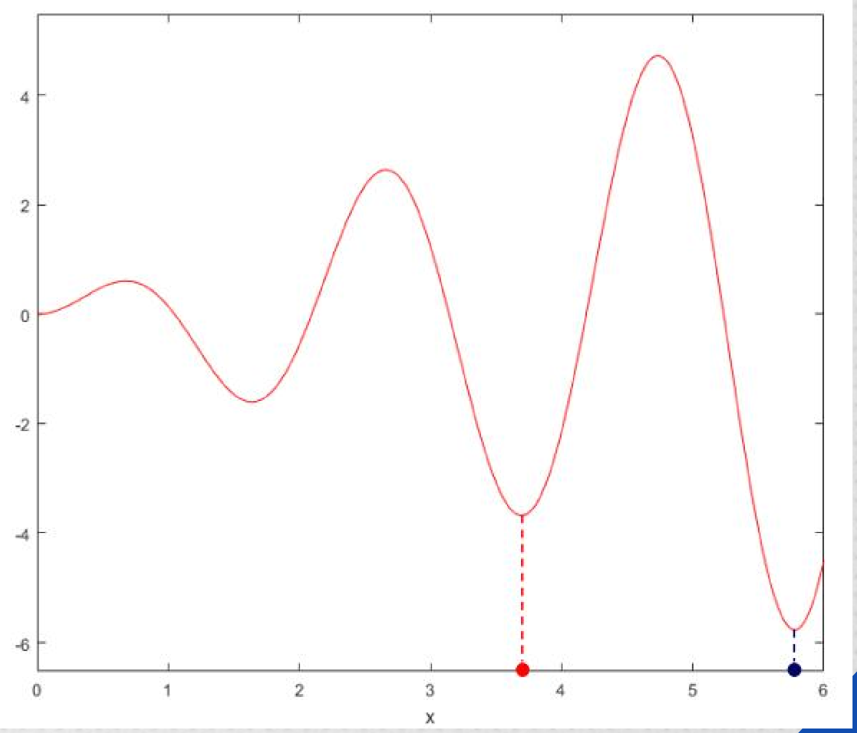
```
>>[x,z]=fminsearch(@fun7_12,[-1,3])
x=1.0000 1.0000
z=1.4253e-010
```

◆实验6 Matlab内置的最优化函数

例7 非线性优化问题不能确保算出全局最优解

求一元函数 f (x)=xsin(3x) 在区间[0, 6]内的极小值。

```
[xmin, ymin] = fminbnd('sin(3*x)*x', 0, 6)
ezplot('sin(3*x)*x', [0, 6])
```



实验7 无约束优化的应用性问题：选址问题

◆实验7 应用性问题：选址问题

(**选址问题**)某镇为推进新农村建设，准备引入两个环保项目:①筹建天然气输送中心，通过管道由输送中心直接向各村输送天然气(此处只考虑各管道相互独立情形，若管道不相互独立，可用图与网络方法)；②筹建垃圾处理站，集中处理各村清扫的垃圾。

该镇有9个自然村，各村坐标如下(km)：

(1.8,2.3),(2.1,8.5),(3.2,4.5),(3.8,,1.6),(4.2,5.5),(5.3,4.0),(6.8,0.7),(7.8,9),(9.2,3);各村平均每天产生的垃圾车数为6,7,2,9,5,3,6,5,6。

◆ 实验7 应用性问题：选址问题

求解以下问题：

(1) 对于天然气输送中心，如何选址使所需管道总长度最短？所需管道总长度为多少？

(2) 对于垃圾处理站，如何选址使得垃圾车运输总路程最短？垃圾车运输总路程为多少？

解: (1) 设各村坐标为$(x_i, y_i)(i = 1,2, \ldots, 9)$, 天然气输送中心的坐标为(x, y)，则目标函数为

$$\min z = \sum_{i=1}^{9} \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}$$

◆实验7 应用性问题：选址问题

编写函数文件：

```
function f=fun7_13a(x)
xi=[1.8 2.1 3.2 3.8 4.2 5.3 6.8 7.8 9.2];
yi=[2.38.54.51.65.54.00.7 9.0 3.0];
f=sum(sgrt((x(1)-xi).^2+(x(2)-yi).^2));
```

命令窗口下执行：

```
>>[x,z]=fminsearch(@fun7_13a,[5,3])
x=4.6846 4.1682
z=29.2493
```

◆ 实验7 应用性问题：选址问题

计算结果表明:天然气输送中心应选址在(4.6846, 4.1682)处(图9)，所需管道总长度为29.2493km。

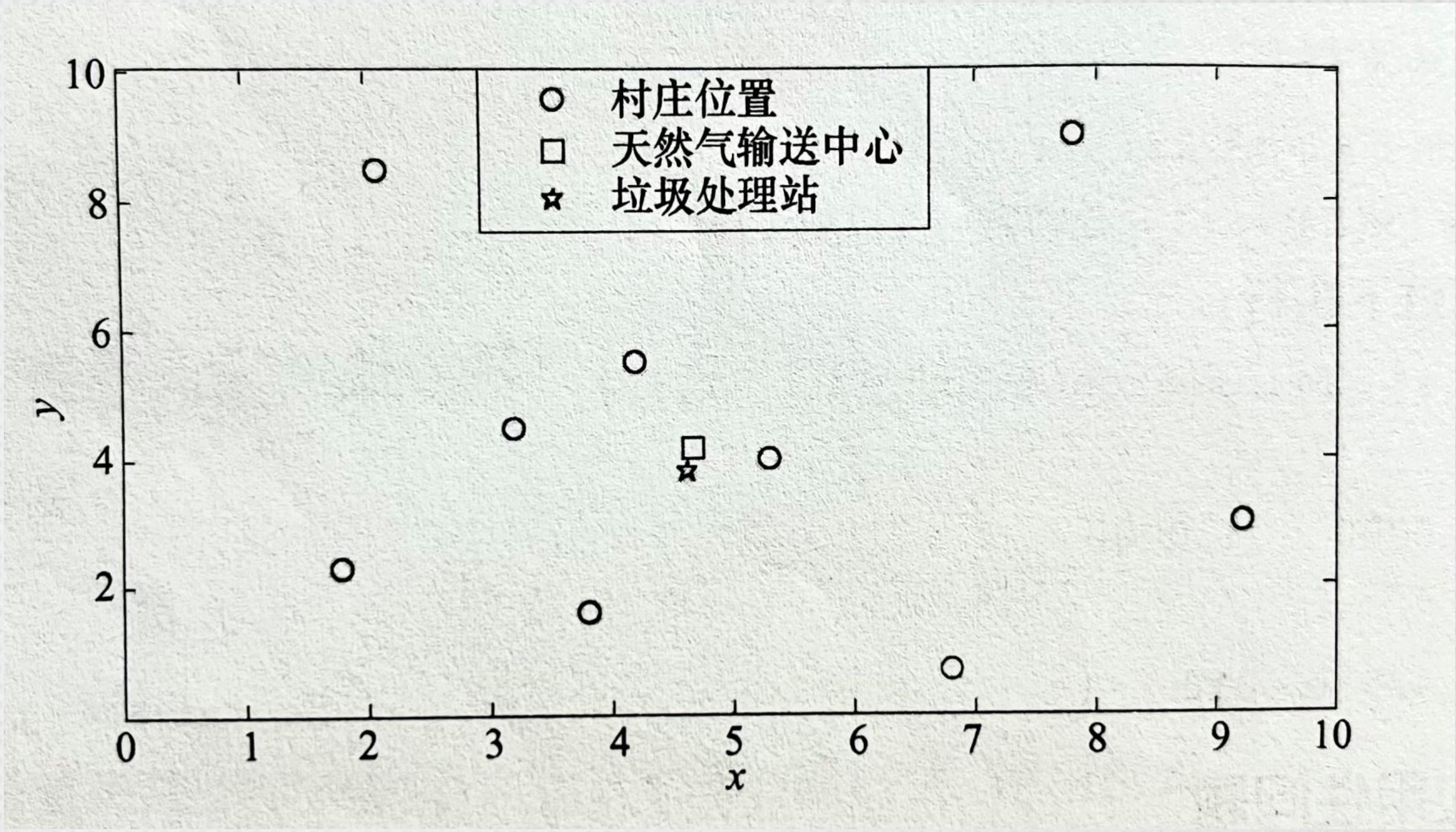


图9 选址问题坐标图

◆ 实验7 应用性问题：选址问题

(2) 设各村坐标为$(x_i, y_i)(i=1,2,\ldots,9)$，天然气输送中心的坐标为(x, y)，$d_i(i=1,2,\ldots,9)$表示各村平均每天产生的垃圾车数，则目标函数为

$$\min z=\sum_{i=1}^{9} d_i\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}$$

编写函数文件：

```
function f=fun7_13b(x)
xi=[1.8 2.1 3.2 3.8 4.2 5.36.8 7.8 9.2];
yi=[2.3 8.5 4.5 1.6 5.5 4.0 0.7 9.0 3.0];
d=[6 7 2 9 5 3 6 5 6];
```

◆ 实验7 应用性问题：选址问题

```
f=sum(d.*sqrt((x(1)-xi).^2+(x(2)-yi).^2));
```

命令窗口下执行：

```
>>[x,z]=fminsearch(@fun7_13b,[5,3])
x=4.6293 3.7825
z=172.7834
```

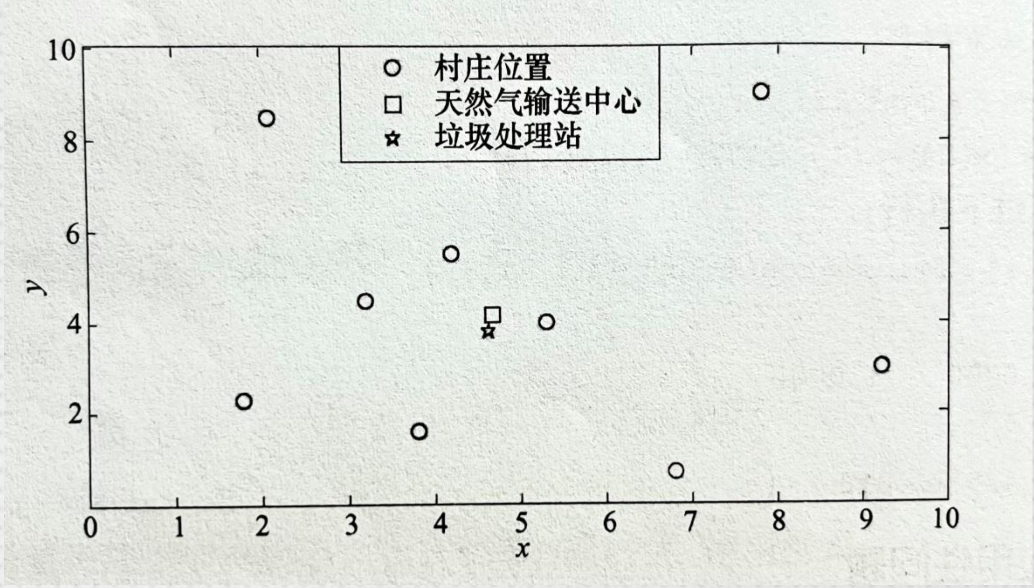


图9 选址问题坐标图

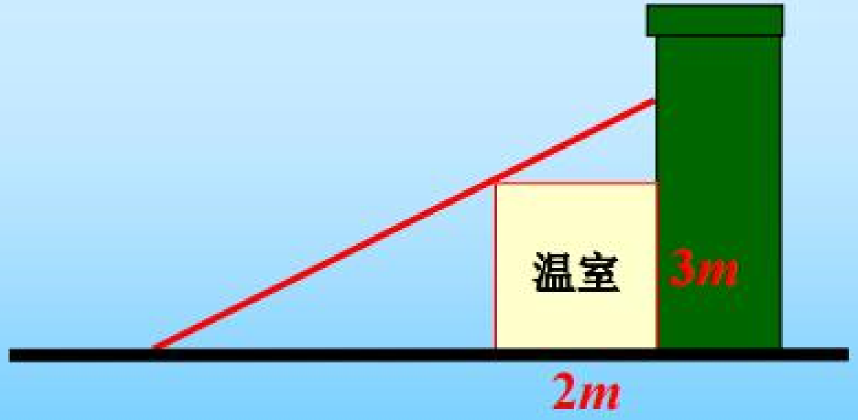
计算结果表明：垃圾处理站应选址在(4.6293,3.7825)处(图9)，垃圾车运输总路程为173km。

实验8 无约束优化的应用性问题：梯子问题

◆ 实验8 应用性问题：梯子问题

梯子问题

花园靠楼房处有一温室，温室伸入花园 2 米，高3米。温室上方是楼房窗台，要将梯子从花园地上放靠在楼房墙上不损坏温室，梯子长度至少应该为多少米?



◆ 实验8 应用性问题：梯子问题

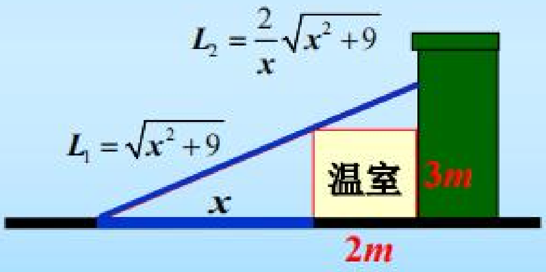
梯子问题 花园靠楼房处有一温室，温室伸入花园 2 米，高3米。温室上方是楼房窗台，要将梯子从花园地上放靠在楼房墙上不损坏温室，梯子长度至少应该为多少米？

模型一：设梯子的长度为L，梯子与温室的距离为 x，

则有

$$L(x)=(1+\frac{2}{x})\sqrt{x^2+9}$$

$$x\in(0,+\infty)$$




```
syms x
L = (1+2/x)*sqrt(x^2+9);
g = diff(L);
xmin = solve(g, 'x')
Lmin = subs(L, x, xmin)
```

注：

xmin的解析解为 18^(1/3).

◆ 实验8 应用性问题：梯子问题

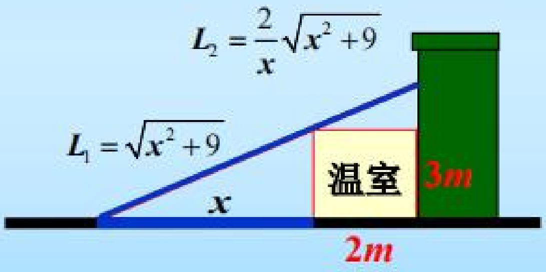
梯子问题 花园靠楼房处有一温室，温室伸入花园 2 米，高3米。温室上方是楼房窗台，要将梯子从花园地上放靠在楼房墙上不损坏温室，梯子长度至少应该为多少米?

模型一： 设梯子的长度为L，梯子与温室的距离为 x，

则有

$$L(x)=(1+\frac{2}{x})\sqrt{x^2+9}$$

$$x\in(0,+\infty)$$




```
L = inline('(1+2/x)*sqrt(x^2+9)')
[xmin, Lmin] = fminbnd(L, 0, 500)
```

```
xmin = 2.6207
Lmin = 7.0235
```

◆实验8 应用性问题：梯子问题

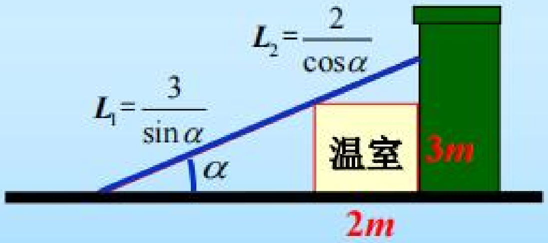
梯子问题 花园靠楼房处有一温室，温室伸入花园 2 米，高3米。温室上方是楼房窗台，要将梯子从花园地上放靠在楼房墙上不损坏温室，梯子长度至少应该为多少米？

模型二： 设梯子的长度为L，梯子与地面的夹角为α，

则有

$$L(\alpha)=\frac{3}{\sin\alpha}+\frac{2}{\cos\alpha}$$

$$\alpha\in(0,\pi/2)$$




```
L = inline('3/sin(alpha)+2/cos(alpha)')
[alpha, Lmin] = fminbnd(L, 0, pi/2)
```

```
alpha = 0.8528
Lmin = 7.0235
```

实验9 线性规划：
标准形式与MATLAB求解

◆ 实验9 线性规划

9.1 一个简单的例子

某建筑公司承建办公楼和住宅楼。建办公楼将获利润500元/平方米，建住宅楼获利润600元/平方米。总建筑面积不少于5000m^2，办公楼的面积不能大于5000m^2，住宅楼不能大于3000m^2。根据招标单位的要求，为建筑公司设计盈利最多的建筑方案。

◆ 实验9 线性规划

9.1 一个简单的例子

某建筑公司承建办公楼和住宅楼。建办公楼将获利润500元/平方米，建住宅楼获利润600元/平方米。总建筑面积不少于5000m²，办公楼的面积不能大于5000m²，住宅楼不能大于3000m²。根据招标单位的要求，为建筑公司设计盈利最多的建筑方案。

假定公司当年建办公楼x_1平方米，建住宅楼x_2平方米。以所得利润最大为目标，得目标函数

$$z = 500x_1 + 600x_2$$

根据招标单位的要求,约束条件

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 5000 \\ x_1 &\leq 5000 \\ x_2 &\leq 3000 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

◆ 实验9 线性规划

9.2 线性规划的MATLAB求解

标准形式

$$\min\ z = c^T x$$

$$s.t.\quad Ax \le b$$

$$Aeq \cdot x = beq$$

$$lb \le x \le ub$$

式中:x为决策变量; c、x、b、beq、lb、ub均为列向量;

A、Aeq为矩阵。

◆ 实验9 线性规划

MATLAB中线性规划问题标准形式

$$\min \ C^T X$$

$$s.t. \ AX \le b$$

$$Aeq.X = beq$$

$$e_0 \le X \le e_1$$

C——目标函数系数向量

A——约束条件系数矩阵

b——约束条件常数向量

求解线性规划命令使用格式

(1) x=linprog(C, A, b)

[x,fval]=linprog(C, A, b)

(2) x=linprog(c,A,b,Aeq,beq)

[x,fval]=linprog(c,A,b,Aeq,beq)

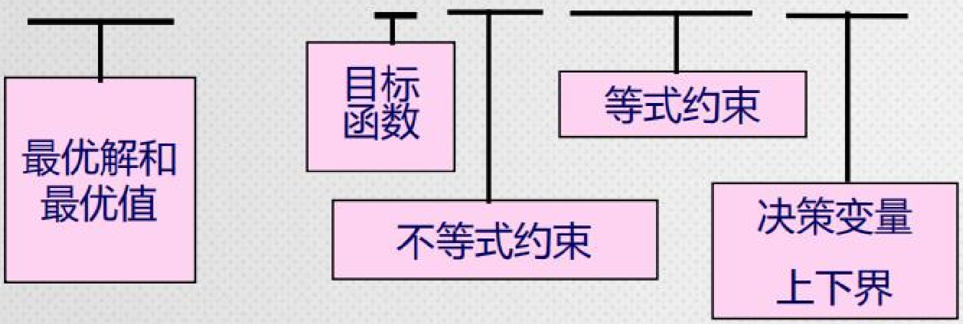
(3) x=linprog(c,A,b,Aeq,beq,e0,e1)

[x, fval]=linprog(c,A,b,Aeq,beq,e0,e1)

◆ 实验9 线性规划

命令linprog的调用格式

[x ,fval]= linprog(c, A, b, Aeq,beq ,LB, UB)



如果没有等式约束，就在相应位置输入空矩阵[ ]， 不等式约束和上下界也类似，最后的输入项若没有,则可省略。

◆ 实验9 线性规划

求解线性规划问题

$$\min Z = cX$$
$$s.t. \quad AX \le b$$

Matlab命令：x=linprog(c,A,b)

例1. 求解线性规划问题

$$\begin{aligned} \min Z &= x + 2y \\ \text{s.t. } 2x + 3y &\le 4, \\ x - y &\le -5 \end{aligned}$$

```
>>c=[1,2];
>>A=[2,3;1,-1];
>>b=[4;-5];
>>x=linprog(c,A,b)
```

◆ 实验9 线性规划

$$\min Z = cX$$
$$s.t.\quad AX \le b,$$
$$BX = d$$

Matlab命令：x=linprog(c,A,b,B,d)

若没有不等式约束条件，令A=[], b=[]即可.

例2. 求解线性规划问题

$$\min Z = x + 2y$$
$$\text{s.t.}\ 2x + 3y \le 4,$$
$$x - y \le -5,$$
$$9x + 17y = 20$$

```
>>c=[1,2];
>>A=[2,3;1,-1];
>>b=[4;-5];
>>B=[9,17];
>>d=[20];
>>x=linprog(c,A,b,B,d)
```

◆ 实验9 线性规划

$$\min Z = cX$$

$$\begin{aligned} s.t.\quad & AX \le b, \\ & BX = d, \\ & VLB \le X \le VUB \end{aligned}$$

Matlab命令：x=linprog(c,A,b,B,d,VLB,VUB)

Matlab命令：[x,fval]=linprog(…)

返回最优解x及x处的目标函数值fval.

◆ 实验9 线性规划

例3. 求解线性规划问题

$$\min z = 13x_1 + 9x_2 + 10x_3 + 11x_4 + 12x_5 + 8x_6$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + x_4 = 400 \\ x_2 + x_5 = 600 \\ x_3 + x_6 = 500 \\ 0.4x_1 + 1.1x_2 + x_3 \le 800 \\ 0.5x_4 + 1.2x_5 + 1.3x_6 \le 900 \\ x_i \ge 0, i = 1,2,\cdots,6 \end{cases}$$

$$minZ = cX$$

$$s.t. \quad AX \le b, \quad BX = d, \quad VLB \le X \le VUB$$

```
>>x=linprog(c,A,b,B,d,VLB,VUB)
```

◆ 实验9 线性规划

例3. 求解线性规划问题

$$\min z = 13x_1 + 9x_2 + 10x_3 + 11x_4 + 12x_5 + 8x_6$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + x_4 = 400 \\ x_2 + x_5 = 600 \\ x_3 + x_6 = 500 \\ 0.4x_1 + 1.1x_2 + x_3 \le 800 \\ 0.5x_4 + 1.2x_5 + 1.3x_6 \le 900 \\ x_i \ge 0, i = 1,2,\cdots,6 \end{cases}$$

[x,fval]=linprog(c,A,b,B,d,VLB,VUB)

$c = [13, 9, 10, 11, 12, 8]$

$A = [0.4, 1.1, 1, 0, 0, 0;$
$\quad 0, 0, 0, 0.5, 1.2, 1.3]$

$b = [800; 900]$

$B = [1, 0, 0, 1, 0, 0;$
$\quad 0, 1, 0, 0, 1;$
$\quad 0, 0, 1, 0, 0, 1]$

$d = [400; 600; 500]$

$VLB = [0; 0; 0; 0; 0; 0]$

$VUB = []$

计算结果:

```
x =
    0.0000
  600.0000
    0.0000
  400.0000
    0.0000
  500.0000
fval =1.3800e+004
```

◆ 实验9 线性规划

x=linprog(c,A,b,Aeq,beq,lb,ub,x0)：表示设置初值x0求解标准模型；

x=linprog(c,A,b,Aeq,beq,lb,ub,x0,options)：表示使用options指定的参数最小化；

[x,fval,exitflag]=linprog(…)：exitflag表示返回函数计算退出条件(若为正值，表示目标函数收敛于解x处；若为负值，表示目标函数不收敛；若为零值，表示已经达到函数评价或迭代的最大次数)；

[x,fval,exitflag,output]=linprog(…)：output表示返回优化信息输出变量；

[x,fval,exitflag,output,lambda]=linprog(…)：lambda表示返回拉格朗日乘子。

◆ 实验9 线性规划

回到前面的应用例子

某建筑公司承建办公楼和住宅楼。建办公楼将获利润500元/平方米，建住宅楼获利润600元/平方米。总建筑面积不少于5000m²，办公楼的面积不能大于5000m²，住宅楼不能大于3000m²。根据招标单位的要求，为建筑公司设计盈利最多的建筑方案。

假定公司当年建办公楼x_1平方米，建住宅楼x_2平方米。以所得利润最大为目标，得目标函数

$$z = 500x_1 + 600x_2$$

根据招标单位的要求,约束条件

$$x_1+x_2 \geq 5000$$
$$x_1 \leq 5000$$
$$x_2 \leq 3000$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

x=linprog(c,A,b,B,d,VLB,VUB)

◆ 实验9 线性规划

解线性规划问题标准形式

$$\min \quad -(500x_1+600x_2)$$

$$\text{s. t.} \quad \begin{aligned} -x_1-x_2 &\le -5000 \\ x_1 \quad &\le 5000 \\ x_2 &\le 3000 \\ x_1\ge 0,\ x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

→

C=[-500, -600]

$$A=\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b=\begin{bmatrix} -5000 \\ 5000 \\ 3000 \end{bmatrix}$$

```
C=-[500,600];
A=[-1,-1;1,0;0,1;];
b=[-5000;5000;3000];
e0=[0;0];e1=[];
x=linprog(C,A,b,[],[],e0,e1)
z=C*x
```

实验10 线性规划：建模与应用

◆ 实验10 线性规划：建模与应用

建立线性规划问题数学模型：

①一组决策变量$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$表示某套方案；
②以决策变量的线性函数作为目标函数；
③一组线性不等式或线性等式为约束条件。

- 明确问题的目标
- 假设一组决策变量
- 考虑目标函数
- 考虑约束条件

◆ 实验10 线性规划：建模与应用

应用实验10.1 动物饲养问题

一家现代化兔子饲养场饲养一种兔子。根据兔子在不同时期的体重计算出兔子每周营养物质的数量。简单起见，这里考虑三种对生长其重要作用的营养成分，蛋白质、矿物质和维生素。

需要的营养量

- 蛋白质：70克
- 矿物质：3克
- 维生素：10毫克

◆ 实验10 线性规划：建模与应用

应用实验10.1 动物饲养问题

现有五种饲料，公司希望找出满足动物营养需要使成本达到最低的混合饲料配置。

◆ 实验10 线性规划：建模与应用

应用实验10.1 动物饲养问题

每一种饲料每斤所含的营养成分

	饲料1	饲料2	饲料3	饲料4	饲料5	需要量
蛋白质(克)	0.30	2.00	1.00	0.60	1.80	70
矿物质(克)	0.10	0.05	0.02	0.20	0.05	3
维生素(毫克)	0.05	0.10	0.02	0.20	0.08	10
成本(元)	0.02	0.07	0.04	0.03	0.05	

◆ 实验10 线性规划：建模与应用

应用实验10.1 动物饲养问题

每一种饲料每斤所含的营养成分

	饲料1	饲料2	饲料3	饲料4	饲料5	需要量
蛋白质（克）	0.30	2.00	1.00	0.60	1.80	70
矿物质（克）	0.10	0.05	0.02	0.20	0.05	3
维生素（毫克）	0.05	0.10	0.02	0.20	0.08	10
成本（元）	0.02	0.07	0.04	0.03	0.05	

① **决策变量：**在混合饲料中，每周所需第j种饲料的斤数x_j，j = 1，2，3，4，5；

② **约束条件：**

- 蛋白质：$0.30x_1+2x_2+x_3+0.6x_4+1.8x_5\geq 70$
- 矿物质：$0.10x_1+0.05x_2+0.02x_3+0.2x_4+0.05x_5\geq 3$
- 维生素：$0.05x_1+0.1x_2+0.02x_3+0.2x_4+0.08x_5\geq 10$
- 非负约束：$x_i\geq 0$

③ **确定目标：**混合饲料的成本最低

$$0.02x_1+0.07x_2+0.04x_3+0.03x_4+0.05x_5\to \min$$

◆ 实验10 线性规划：建模与应用

应用实验10.1 动物饲养问题

线性规划模型：

min $0.02x_1+0.07x_2+0.04x_3+0.03x_4+0.05x_5$

s.t. $0.30x_1+2x_2+x_3+0.6x_4+1.8x_5\geq 70$

$0.10x_1+0.05x_2+0.02x_3+0.2x_4+0.05x_5\geq 3$

$0.05x_1+0.1x_2+0.02x_3+0.2x_4+0.08x_5\geq 10$

$x_j\geq 0$ j = 1,2,3,4,5;

$$c^T=[0.02,\ 0.07,\ 0.04,\ 0.03,\ 0.05]$$

$$A=\begin{bmatrix} 0.3 & 2 & 1 & 0.6 & 1.8 \\ 0.1 & 0.05 & 0.02 & 0.2 & 0.05 \\ 0.05 & 0.1 & 0.02 & 0.2 & 0.08 \end{bmatrix}, b=\begin{bmatrix} 70 \\ 3 \\ 10 \end{bmatrix}$$

min $\mathbf{c}^T\boldsymbol{x}$

s.t. $\mathbf{A}\boldsymbol{x}\geq \mathrm{b}$

$\boldsymbol{x}\geq 0$

◆ 实验10 线性规划：建模与应用

应用实验10.1 动物饲养问题

由于linprog要求所有的不等式约束是“≤”的形式，所以将模型转化成为标准形式。

$$\min\ 0.02x_1+0.07x_2+0.04x_3+0.03x_4+0.05x_5$$

$$\text{s.t.}\quad -0.30x_1-2x_2-x_3-0.6x_4-1.8x_5\le -70$$

$$-0.10x_1-0.05x_2-0.02x_3-0.2x_4-0.05x_5\le -3$$

$$-0.05x_1-0.1x_2-0.02x_3-0.2x_4-0.08x_5\le -10$$

$$x_j\ge 0\quad j=1,2,3,4,5;$$

◆ 实验10 线性规划：建模与应用

应用实验10.1 动物饲养问题

$$\min\ 0.02x_1+0.07x_2+0.04x_3+0.03x_4+0.05x_5$$

$$\begin{aligned}
\text{s.t.}\ & -0.30x_1-2x_2-x_3-0.6x_4-1.8x_5\le -70\\
& -0.10x_1-0.05x_2-0.02x_3-0.2x_4-0.05x_5\le -3\\
& -0.05x_1-0.1x_2-0.02x_3-0.2x_4-0.08x_5\le -10\\
& x_j\ge 0\ \ j=1,2,3,4,5;
\end{aligned}$$

```
c=0.01*[2 7 4 3 5]’；
A=-[0.3 2 1 0.6 1.8;
0.1 0.05 0.02 0.2 0.05;
0.05 0.1 0.02 0.2 0.08];
b=-[70;3;10];
Lb=zeros(5,1);
[x,fval]=linprog(c,A,b,[],[],Lb)
```

计算结果：x=[0;0;0;39.7436;25.6410]

fval=2.4744

应用实验10.2 下料问题

现要做100套钢架，每套用长为2.9m、2.1m和1.5m的元钢各一根。已知原料长7.4m，每根原料套裁方案有5种，问应如何下料，才能达到原材料用料最省。

◆ 实验10 线性规划：建模与应用

应用实验10.2 下料问题

现要做100套钢架，每套用长为2.9m、2.1m和1.5m的元钢各一根。已知原料长7.4m，每根原料套裁方案有5种，问应如何下料，才能达到原材料用料最省。

		方案1	方案2	方案3	方案4	方案5
套裁/根	2.9m	1	2	0	1	0
	2.1m	0	0	2	2	1
	1.5m	3	1	2	0	3
合计使用		7.4	7.3	7.2	7.1	6.6
余料		0	0.1	0.2	0.3	0.8

◆ 实验10 线性规划：建模与应用

应用实验10.2 下料问题

解： 设$x_i(i = 1,2,3,4,5)$分别为第 i 种方案下料的原材料根数，则目标函数(余料最少)与约束条件：

$$\min f = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 \geq 100 \\ 2x_3 + 2x_4 + x_5 \geq 100 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_5 \geq 100 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

◆ 实验10 线性规划：建模与应用

应用实验10.2 下料问题

编程：

```
c=[1,1,1,1,1];

a=[1,2,0,1,0;0,0,2,2,1;3,1,2,0,3];

b=[100,100,100]';

lb=zeros(5,1);

ub=[];

[x,z]=linprog(c, -a,-b, [],[],lb,ub)
```

应用实验10.2 下料问题

x=

0 40 30 20 0.0000

z=

90.0000

由于所求问题要得到整数解。是否为真正的最优解，需要用整数规划。

应用实验10.3 投资问题

某公司拟将8000万元的资金用于国债、地方债权及基金三种类型证券投资，每类各有两种. 每种债权的评级、到期年限及每年税后收益见下表. 决策者希望：国债投资额不少于2000万元，平均到期年限不超过5年，平均评级不超过2. 问每种证券投资各多少使总收益最大？

序号	证券类型	评级	到期年限	每年税后收益率/%
1	国债1	1	8	5.2
2	国债2	1	10	5.8
3	地方债1	2	4	6.0
4	地方债2	3	6	6.5
5	基金1	4	3	6.2
6	基金2	5	4	7.0

◆ 实验10 线性规划：建模与应用

应用实验10.3 投资问题

解：设$x_i(i=1,2,3,4,5,6)$分别为第 i 种债权投资额，则收益函数：

$z=(8\times 5.2x_1+10\times 5.8x_2+4\times 6.0x_3+6\times 6.5x_4+6.2\times 3x_5+7.0\times 4x_6)/100$

资金约束： $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6\le 8000$

国债投资额约束：$x_1+x_2\ge 2000$

平均评级约束：$\frac{x_1+x_2+2x_3+3x_4+4x_5+5x_6}{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6}\le 2$

平均年限约束：$\frac{8x_1+10x_2+4x_3+6x_4+3x_5+4x_6}{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6}\le 5$

◆ 实验10 线性规划：建模与应用

应用实验10.3 投资问题

整理后，得到线性规划模型：

$$\max z = 0.416x_1 + 0.58x_2 + 0.24x_3 + 0.39x_4 + 0.186x_5 + 0.28x_6$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \le 8000 \\ x_1 + x_2 \ge 2000 \\ -x_1 - x_2 + x_4 + 2x_5 + 3x_6 \le 0 \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 - x_6 \le 0 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \ge 0 \end{cases}$$

将上述模型转化成标准形式：

$$\max z = -0.416x_1 - 0.58x_2 - 0.24x_3 - 0.39x_4 - 0.186x_5 - 0.28x_6$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \le 8000 \\ -x_1 - x_2 \le -2000 \\ -x_1 - x_2 + x_4 + 2x_5 + 3x_6 \le 0 \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 - x_6 \le 0 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \ge 0 \end{cases}$$

◆ 实验10 线性规划：建模与应用

应用实验10.3 投资问题

编写MATLAB程序：

```
c=[-0.416,-0.58,-0.24,-0.39,-0.186,-0.28];
A=[1,1,1,1,1,1;-1,-1,0,0,0,0;
-1,-1,0,1,2,3;3,5,-1,1,-2,-1];
b=[8000,-2000,0,0]';
lb=zeros(6,1);
ub=[];
[x,z]=linprog(c,A,b,[],[],lb,ub)
```

应用实验10.3 投资问题

x=1. 0e+003*

1. 5000 0. 5000 5. 0000 0. 0000 1. 0000 0. 0000

z=-2. 3000e+003

上述计算结果表明：x_1=1500、x_2=500、x_3=5000、x_4=0、x_5=1000、x_6=0（单位万元）时，能够达到最优值，收益函数z=2300万元。

◆ 实验10 线性规划：建模与应用

应用实验10.4 蔬菜运输问题

有5个蔬菜基地每天向3家超市供应蔬菜，其相关数据如下：

	基地1	基地2	基地3	基地4	基地5
横坐标(km)	2.1	8	5	1.3	7.7
纵坐标(km)	9	7.5	5.2	1.7	0.9
供应量(t)	7	14	5	9	19

蔬菜基地情况表

◆ 实验10 线性规划：建模与应用

应用实验10.4 蔬菜运输问题

	超市1	超市2	超市3
横坐标(km)	5	2	8
纵坐标(km)	8	4	2.5
需求量(t)	28	15	9

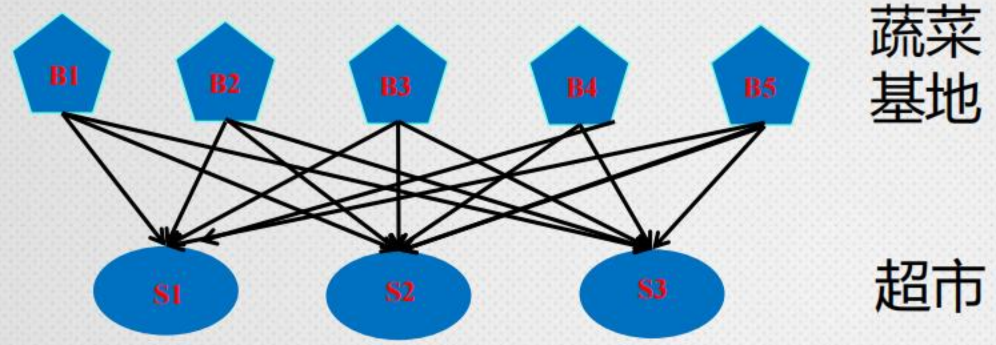
超市情况表

应用实验10.4 蔬菜运输问题

如何制定调运方案，既可以满足供需关系，又使运输的吨公里数达到最小。

◆ 实验10 线性规划：建模与应用

应用实验10.4 蔬菜运输问题



记号说明:(x_i, y_i)表示蔬菜基地i 的坐标；(a_j, b_j)表示超市j的坐标；C_{ij}表示基地i到超市j的距离；s_i表示蔬菜基地i的产量； d_j表示超市j的需求量。

应用实验10.4 蔬菜运输问题

① 决策变量： 基地i到超市j的运量x_{ij}作为决策变量（i = 1, 2, ..., 5, j = 1, 2, 3）。

② 约束条件：

- 关于蔬菜基地的约束，对每一个基地，从该基地运出的蔬菜量不超过其产量：$\sum_{j=1}^{3} X_{ij} \le s_i, i = 1,2,\cdots,5$
- 关于超市的约束，对于每一个超市，运往该超市的蔬菜量等于其需求量：$\sum_{i=1}^{5} X_{ij} = d_j, j = 1,2,3$

③目标函数： 总运费最小 $\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{3} C_{ij} X_{ij}$

应用实验10.4 蔬菜运输问题

线性规划模型：

$$\min \quad \sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{3} C_{ij} X_{ij}$$

$$s.t. \quad \sum_{j=1}^{3} X_{ij} \le s_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, 5$$

$$\sum_{i=1}^{5} X_{ij} = d_j \qquad j = 1, 2, 3$$

$$X_{ij} \ge 0, i = 1, \cdots, 5, \quad j = 1, 2, 3$$

◆ 实验10 线性规划：建模与应用

应用实验10.4 蔬菜运输问题

线性规划模型：

$$\min \quad \sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{3} C_{ij}X_{ij}$$

$$s.t. \quad \sum_{j=1}^{3} X_{ij} \le s_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, 5$$

$$\sum_{i=1}^{5} X_{ij} = d_j \qquad j = 1, 2, 3$$

$$X_{ij} \ge 0, i = 1, \cdots, 5, \quad j = 1, 2, 3$$

因为在linprog命令中决策变量和价格向量是向量，因此应该将对应的矩阵C和 X拉直变成向量形式。

◆ 实验10 线性规划：建模与应用

应用实验10.4 蔬菜运输问题

```
A=[1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
   0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
   0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0;
   0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0;
   0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1];
Aeq=[1 0 0 1 0 0 1 0 0 1 0 0 1 0 0;
     0 1 0 0 1 0 0 1 0 0 1 0 0 1 0;
     0 0 1 0 0 1 0 0 1 0 0 1 0 0 1];
C=reshape(C',15,1);
 Lb=zeros(15,1);
[X,fval]=linprog(C,A,s,Aeq,d,Lb)
```

使用代码生成左边的矩阵A,Aeq：

```
A=zeros(5,15); Aeq =zeros(3,15);
for i =1:5
   A(i,3*(i-1)+1:3*(i-1)+3)= ones(1,3);
end
for j=1:3
   Aeq (j,j:3:15)=ones(1,5)
end
```

```
x=[2.1 8 5 1.3 7.7];
y=[9 7.5 5.2 1.7 0.9];
a=[5 2 8];
b=[8 4 2.5];
s=[7 14 5 9 19];
d=[28 15 9]’ ;
C=zeros(5,3);
X=zeros(15,1);
for i=1:5
      for j=1:3
            C(i,j)=sqrt((x(i)-a( j))^2+(y(i)-b( j))^2);
      end
end
```

◆ 实验10 线性规划：建模与应用

应用实验10.4 蔬菜运输问题

```
A=[1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
   0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
   0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0;
   0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0;
   0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1];
Aeq=[1 0 0 1 0 0 1 0 0 1 0 0 1 0 0;
     0 1 0 0 1 0 0 1 0 0 1 0 0 1 0;
     0 0 1 0 0 1 0 0 1 0 0 1 0 0 1];
C=reshape(C',15,1);
 Lb=zeros(15,1);
[X,fval]=linprog(C,A,s,Aeq,d,Lb)
```

使用代码生成左边的矩阵A,Aeq：

```
A=zeros(5,15); Aeq =zeros(3,15);
for i =1:5
   A(i,3*(i-1)+1:3*(i-1)+3)= ones(1,3);
end
for j=1:3
   Aeq (j,j:3:15)=ones(1,5)
end
```

```
x=[2.1 8 5 1.3 7.7];
y=[9 7.5 5.2 1.7 0.9];
a=[5 2 8];
b=[8 4 2.5];
s=[7 14 5 9 19];
d=[28 15 9]’ ;
C=zeros(5,3);
X=zeros(15,1);
for i=1:5
    for j=1:3
        C(i,j)=sqrt((x(i)-a( j))^2+(y(i)-b( j))^2);
    end
end
```

实验11 二次规划：
建模、求解与应用

◆ 实验11 二次规划

二次规划模型与MATLAB求解

1. 标准模型

$$\min z = \frac{1}{2}x^T H x + f^T x \quad (1)$$

$$s.t.\ \ Ax \le b \quad (2)$$

$$Aeq \cdot x = beq \quad (3)$$

$$lb \le x \le ub \quad (4)$$

式中：f、x、b、beq、lb、ub均为列向量；A、Aeg为矩阵;H为二次型（对称正定矩阵）。

◆实验11 二次规划

2.MATLAB 函数

在MATLAB软件中，函数quadprog用于求解二次规划问题，调用格式：

x=quadprog(H,f,A,b)：表示求满足式(1)、式(2)两者的最优解；

x=quadprog(H,f,A,b,Aeq,beq)：表示求满足式(1)-式(3)三者的最优解；

x=quadprog(H,f,A,b,Aeq,beq,lb,ub)：表示求标准模型的最优解，若无等式约束条件，Aeq=[],beq=[]；

◆ 实验11 二次规划

x=quadprog(H, f, A, b, Aeq, beq, lb, ub, x0)：表示设置初值x0求解标准模型；

x=quadprog(H, f, A, b, Aeq, beq, lb, ub, x0, options)：表示使用options指定的参数最小化；

[x, fval]=quadprog(…)：fval表示返回目标函数值；

[x, fval, exitflag]=quadprog(…)：exitflag表示返回函数计算退出条件；

[x, fval, exitflag, output]=quadprog(…)：output表示返回优化信息输出变量；

[x, fval, exitflag, output, lambda]=quadprog(…)：lambda表示返回拉格朗日乘子。

◆ 实验11 二次规划

例 求解二次规划问题

$$\min f(x)=2{x_1}^2+{x_2}^2+x_1x_2-3x_1-5x_2+4$$

$$s.t.\begin{cases}x_1+x_2\le 5\\x_1-2x_2\ge -4\\x_1,x_2\ge 0\end{cases}$$

解： 将二次规划转化为标准形式：

$$\min f(x)=\frac{1}{2}(x_1,x_2)\begin{pmatrix}4&-1\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+(-3,-5)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$$

$$s.t.\begin{cases}x_1+x_2\le 5\\-x_1+2x_2\le 4\\0\le x_1,x_2\end{cases}$$

◆ 实验11 二次规划

编写MATLAB程序：

```
H=[4,-1;-1,2];
c=[-3,-5];
A=[1,1;-1,2];
b=[5;4];
lb=[0;0];
ub=[];
[x,z]=quadprog(H,c,A,b,[],[],1b,ub)
```

◆ 实验11 二次规划

执行结果为：

x=

1. 5714

2. 7857

z=

-10. 3214

表示x_1=1. 5714、x_2=2. 7857时，标准形式目标函数取得最优值-10. 3214，从而原问题的最优值为-6. 3214。

◆ 实验11 二次规划

应用性问题

（进货策略问题） 按照合同约定甲公司需要向乙公司订购22万元原料，甲公司需要原料的种类有A、B、C(3种)，三种原料的定价分别为5、4、7(万元/吨)。设甲公司订购三种原料的数量分别为x_1, x_2, x_3(吨)，预估三种原料的利润函数为

$$5x_1 + 3x_2 + 6x_3 - {x_1}^2 - {x_2}^2 - {x_3}^2 - x_1x_2 - x_1x_3$$

问甲公司如何制定进货策略使得利润最大？

◆ 实验11 二次规划

解：该问题的二次规划模型为

$$\max 5x_1+3x_2+6x_3-{x_1}^2-{x_2}^2-{x_3}^2-x_1x_2-x_1x_3$$

$$s.t.\begin{cases}5x_1+4x_2+7x_3=22\\ \\ 0\le x_1,x_2,x_3\end{cases}$$

将该模型转化为标准形式:

$$\min\frac{1}{2}(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&0\\1&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}+(-5,-3,-6)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$$s.t.\begin{cases}5x_1+4x_2+7x_3=22\\ \\ 0\le x_1,x_2,x_3\end{cases}$$

◆ 实验11 二次规划

编写MATLAB程序：

```
H=[2,1,1;1,2,0;1,0,2];
c=[-5,-3,-6];
Aeg=[5,4,7];
beg=22;
lb=[0;0;0];
ub=[];
[x,z]=quadprog(H,c,[],[],Aeq,beq,1b,ub)
```

◆ 实验11 二次规划

程序执行结果：

x=

0.5725 0.9237 2.2061

z=

-11.0305

数值结果表明x_1=0.5725、x_2=0.9637、x_3=2.2061时，目标函数能够达到最大值z=11.0305。

实验12 一般非线性规划：建模、求解与应用

◆ 实验12 非线性规划

非线性规划模型与MATLAB求解

标准模型

$$\min z = F(x) \qquad (1)$$

$$\text{s.t.}\ \ Ax \le b \qquad (2)$$

$$Aeq \cdot x = beq \qquad (3)$$

$$C(x) \le 0 \qquad (4)$$

$$Ceq(x) = 0 \qquad (5)$$

$$lb \le x \le ub \qquad (6)$$

式中：F(x)为目标函数；x、b、beq、lb、ub均为列向量；

A、Aeg为矩阵；C(x)、Ceq(x)为非线性向量函数。

◆实验12 非线性规划

MATLAB 函数

在MATLAB软件中，函数fmincon用于求解非线性规划问题，调用格式：

x=fmincon('fun',x0、A,b)：表示求式(1)-(2)的最优解，其中fun为目标函数，x0为迭代初值；

x=fmincon('fun',x0,A,b,Aeq,beq)：表示求式(1)-(3)的最优解；

x=fmincon('fun',x0,A,b,Aeg,beg,lb,ub)：表示求式(1)、式(2)、式(3).式(6)的最优解，若无等式约束条件，Aeg=[]，beg=[]；

◆ 实验12 非线性规划

x=fmincon('fun',x0,A,b,Aeq,beq,lb,ub,nonlcon):表示求解标准模型,其中nonlcon用于表示非线性约束条件(式(4)、式(5));

x=fmincon('fun',x0,A,b,Aeg,beg,lb,ub,nonlcon,options):表示使用options指定的参数最小化;

[x.fval]=fmincon(…):fval表示返回目标函数值;

[x,fval,exitlag]=frmincon(…):exitlag表示返回函数计算退出条件;

◆ 实验12 非线性规划

[x,fval,exitlag,output]=fmincon(…):output表示返回优化信息输出变量;

[x,fval,exitlag,output,lambda]=fmincon(…):lambda表表示返回拉格朗日乘子;

[x,fval,exitlag,output,lambda,grad]=fmincon(…):grad表示返回在x处fun函数的梯度。

◆ 实验12 非线性规划

例 求解非线性规划问题

$$\min f(x) = e^{x_1}(x_1{}^2 + 2x_2{}^2 + 3x_1x_2 + 5x_1 + 4x_2 + 2)$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ 3 + x_1x_2 - x_1 - x_2 \leq 0 \\ -x_1x_2 - 12 \leq 0 \end{cases}$$

编写目标函数(fun10_12a):

```
function f=fun10_12a(x)
f=exp(x(1))*(x(1)^2+2*x(2)^2+3*x(1)*x(2)+5*x(1)+4*
x(2)+2);
```

◆ 实验12 非线性规划

编写非线性约束条件函数(fun10_12b)：

```
function[c,ceq]=fun10_12b(x)
c=[3+x(1)*x(2)-x(1)-x(2);-x(1)*x(2)-12];
ceq=[];
```

编写主程序文件：

```
x0=[-1,1]';
Aeq=[1,2];
beg=0;
[x,z]=fmincon(@fun10_12a,x0,[],[],Aeg,beg,[],[],@fun10_12b)
```

◆ 实验12 非线性规划

应用性问题举例

（储能飞轮的设计）下面的表达式用于设计储能用的飞轮，准则是储藏的能量最大，约束条件限定了直径、转速和厚度，这一问题可以表达为

$$\max U = \frac{0.201{x_1}^4 x_2 {x_3}^2}{10^7}$$

$$s.t.\begin{cases} 675 - {x_1}^2 x_2 \geq 0 \\ 0.419 - \dfrac{{x_1}^2 {x_3}^2}{10^7} \geq 0 \\ 0 \leq x_1 \leq 36 \\ 0 \leq x_2 \leq 5 \\ 0 \leq x_3 \leq 125 \end{cases}$$

式中x_1、x_2、x_3分别是飞轮的直径、厚度与转速，计算最优解。

◆ 实验12 非线性规划

解： 将问题模型转化为标准形式：

$$\max z = \frac{0.201{x_1}^4 x_2 {x_3}^2}{10^7}$$

$$s.t.\begin{cases} {x_1}^2 x_2 - 675 \le 0 \\ \dfrac{{x_1}^2 {x_3}^2}{10^7} - 0.419 \le 0 \\ 0 \le x_1 \le 36 \\ 0 \le x_2 \le 5 \\ 0 \le x_3 \le 125 \end{cases}$$

◆ 实验12 非线性规划

编写目标函数(fun10_12c)：

```
function f=fun10_12c(x)
f=-0.201*x(1)^4*x(2)*x(3)^2/10^7;
```

编写非线性约束条件函数(fun10_12d)：

```
function[c,ceq]=fun10_12d(x)
c=[x(1)^2*x(2)-675;x(1)^2*x(3)^2/10^7-0.419];
ceq=[];
```

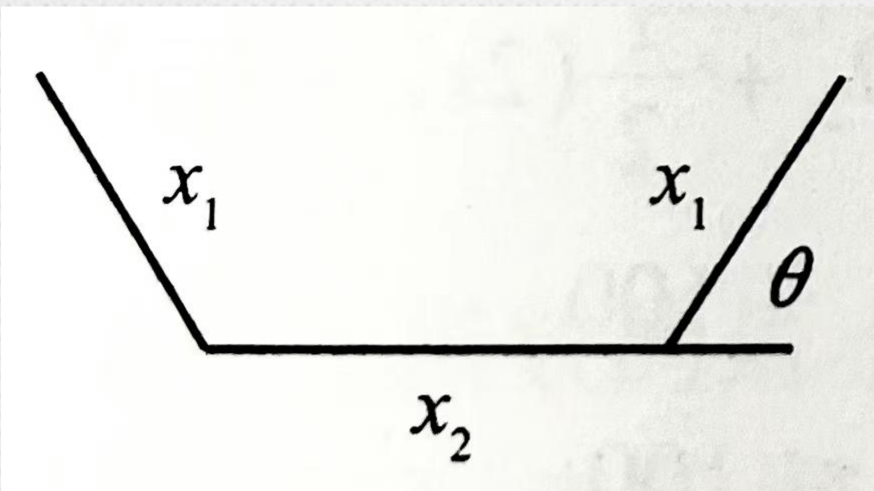
◆ 实验12 非线性规划

编写主程序文件:

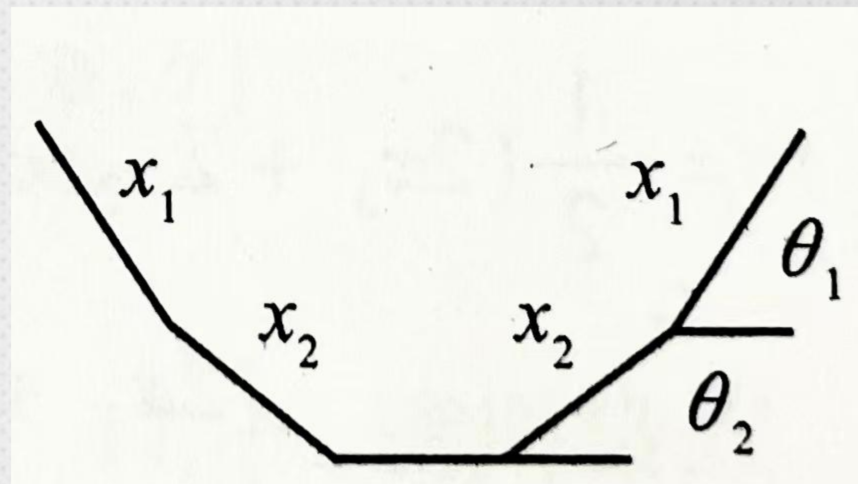
```
x0=[4,5,50]';
lb=[0;0;0];
ub=[36;5;125];
[x,z]=fmincon(@fun10_12c,x0,[],[],[],[],lb,ub,@fun10_12d)
```

◆ 实验12 非线性规划

（最佳水槽断面问题） 用宽100cm的长方形铁板折成以下特殊断面的水槽：（1）断面为对称梯形；（2）断面为对称五边形。问怎样折法可使水槽的面积达到最大？



(a)



(b)

图 水槽截面图
(a)对称梯形;(b)对称五边形

◆ 实验12 非线性规划

解：(1) 截面为对称梯形，则该问题的非线性规划模型为

$$\max S(x_1,x_2,\theta)=\frac{1}{2}(2x_2+2x_1\cos\theta)x_1\sin\theta$$

$$s.t.\begin{cases}2x_1+x_2=100\\ 0\le x_1,x_2\le 100\\ 0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

◆实验12 非线性规划

简化目标函数并转化为标准形式：

$$\min z = -(x_2 + x_1\cos\theta)x_1\sin\theta$$

$$s.t.\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 100 \\ 0 \le x_1, x_2 \le 100 \\ 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

编写目标函数(fun10_12e)：

```
function f=fun10_12e(x)

f=-(x(2)+x(1)*cos(x(3)))*x(1)*sin(x(3));
```

◆ 实验12 非线性规划

编写主程序文件:

```
Aeq=[2,1,0];
beq =100;
lb=[0;0;0];
ub=[100;100;pi/2];
x0=[25,20,1]';
[x,2]=fmincon(@fun10_12e,x0,[],[],Aeg,beg,lb,ub)
```

◆实验12 非线性规划

计算结果为：

x=

33.3333 33.3334 1.0472

z=

-1.4434e+003

计算结果表明x_1=x_2=100/3、θ=1.0472时，有最大截面积1443.4cm^2。

◆ 实验12 非线性规划

(2) 截面为对称五边形时，则该问题的非线性规划模型为

$$\max S(x_1,x_2,x_3,\theta_1,\theta_2)=\frac{1}{2}(2x_3+2x_2\cos\theta_2)x_2\sin\theta_2+\frac{1}{2}(2x_3+4x_2\cos\theta_2+2x_1\cos\theta_1)x_1\sin\theta_1$$

$$s.t.\begin{cases}2x_1+x_2+x_3=100\\ 0\le x_1,x_2,x_3\le 100\\ 0\le \theta_1,\theta_2\le \dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

◆ 实验12 非线性规划

简化目标函数并转化为标准形式：

$$\min z = -(x_3 + x_2\cos\theta_2)x_2\sin\theta_2 - (x_3 + x_2\cos\theta_2 + x_1\cos\theta_1)x_1\sin\theta_1$$

$$s.t.\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 100 \\ 0 \le x_1, x_2, x_3 \le 100 \\ 0 \le \theta_1, \theta_2 \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

编写目标函数(fun10_12f)：

```
function f=fun10_12f(x)
f=-(x(3)+x(2)*cos(x(5)))*x(2)*sin(x(5))-(x(3)+
2*x(2)*cos(x(5))+x(1)*cos(x(4)))*x(1)*sin(x(4));
```

◆ 实验12 非线性规划

编写主程序文件：

```
Aeq=[2,2,1,0,0];
beq=[100];
lb=[0;0;0;0;0];
ub=[100,100,100,pi/2,pi/2];
x0=[10,10,10,1/2,1/2]';
[x,2]=fmincon(@ fun10_12f,x0,[],[],Aeq,beq,lb,ub)
```

◆ 实验12 非线性规划

计算结果为：

20.0001 20.0001 19.9996 1.2566 0.6283

z=

-1.5388e+003

计算结果表明x_1=x_2=x_3=20、θ_1=1.2566、θ_2=0.6283时，有最大截面积1538.8 cm^2 。

◆ 实验12 非线性规划

某公司经营两种物品，第一种物品每吨售价30元，第二种物品每吨售价450元. 根据统计，售出每吨第一种物品所需要的营业时间平均是0. 5h，第二种物品是$(2 + 0.25x_2)h$，其中x_2是第二种物品售出的数量. 已知该公司在这段时间内的总营业时间为800h，试决定使其营业额最大的营业计划.

解 设该公司经营第一种物品x_1件，第二种物品x_2件，营业额为$f = 30x_1 + 450x_2$，则

◆实验12 非线性规划

$$maxf = 30x_1 + 450x_2$$

$$s.t.\begin{cases} 0.5x_1 + 2x_2 + 0.25{x_2}^2 \le 800, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

先写约束函数M函数：

%M函数fun10_12g.m

```
function[c,ceq]=fun10_12g(x) %约束函数
c=0.5*x(1)+2*x(2)+0.25*x(2)^2-800;ceq=[];
end
```

◆ 实验12 非线性规划

求解如下：

```
>>[x,fval]=fmincon(@(x)-30*x(1)-450*x(2),[0;0],
[],[],[],[],[0;0],[inf;inf],@fun10_12g)
X=
1.0e+003*
1.4955
0.0110
fval=-4.9815e+004
```

问题得解，最大营业额为$-f = 49815$.

实验13 整数规划：以背包问题为例

◆ 实验13 整数规划

背包问题

一个口袋容量为V，n件瓷器，每一件瓷器的体积v_i和价值p_i。将合适的瓷器放入口袋，使得袋中瓷器总价值最大。

◆ 实验13 整数规划

背包问题

决策变量：x_i，i=1,2,...,n，取值为0或1，表示口袋中第i件物品的数量。

约束条件：$\sum_{i=1}^{n} x_i v_i \le V$， $x_i \in \{0,1\}, i=1,\cdots,n$

目标函数：$\max \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$

因此，完整的数学规划模型为

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \\
s.t. \quad & \\
& \sum_{i=1}^{n} x_i v_i \le V \\
& x_i \in \{0,1\}, i=1,\cdots,n
\end{aligned}
$$

这是一个整数线性规划问题。

特点：部分或全部变量只能在整数范围取值。

◆ 实验13 整数规划

背包问题

整数线性规划问题，能用intlinprog求解。

Intlinprog的命令格式：
[x ,fval]=intlinprog(c,**intcon**, A, b, Aeq,beq ,Lb, Ub)
用法和linprog相似。intcon是一个数组，分量用于指定决策向量的哪些分量是整数类型。

例子和代码：

```
V=100; n=8;
v=[27, 21, 6, 32, 25, 17, 42, 15]';
p=[7, 9, 2, 7, 4, 10, 12, 7]';
Lb=zeros(n,1); Ub=ones(n,1);
intcon=1:n;
[x ,fval]= intlinprog(-p, intcon, v', V, [],[],Lb, Ub)
```

强调：这是一个最大化的问题，因此应该转化成为最小化。

输出结果：
x=[0 1 0 0 0 1 1 1]’, fval=-38

实验14 多目标规划简介

◆ 实验14 多目标规划

趣味性实验：快乐学习问题

（1）学习成绩。教学内容的掌握程度，考试分数f_1；

（2）其他能力。组织、社交、体育和文艺等，f_2；

（3）快乐每一天。快乐指数f_3。

◆ 实验14 多目标规划

趣味性实验：快乐学习问题

模型假设是简化的

决策变量和约束：

考虑最大工作时间T，学习时间为t_1，用来发展课外活动的时间为t_2，其中$t_1 + t_1 \le T$。

决策变量和目标函数：

学习成绩关于学习时间t_1是函数。如$f_1 = f_1(t_1) = \arctan(t_1)$。

其他能力关于时间t_2是增函数。如$f_2 = f_2(t_2) = a + b\ t_2$。

快乐指数与t_1和t_2都有关，如$f_3 = k_1/t_1 + k_2 t_2$。

◆ 实验14 多目标规划

趣味性实验：快乐学习问题

多目标规划问题：

$$\max \begin{pmatrix} f_1(t_1) \\ f_2(t_2) \\ f_3(t_1,t_2) \end{pmatrix}$$

$$s.t.$$

$$t_1+t_2 \le T$$

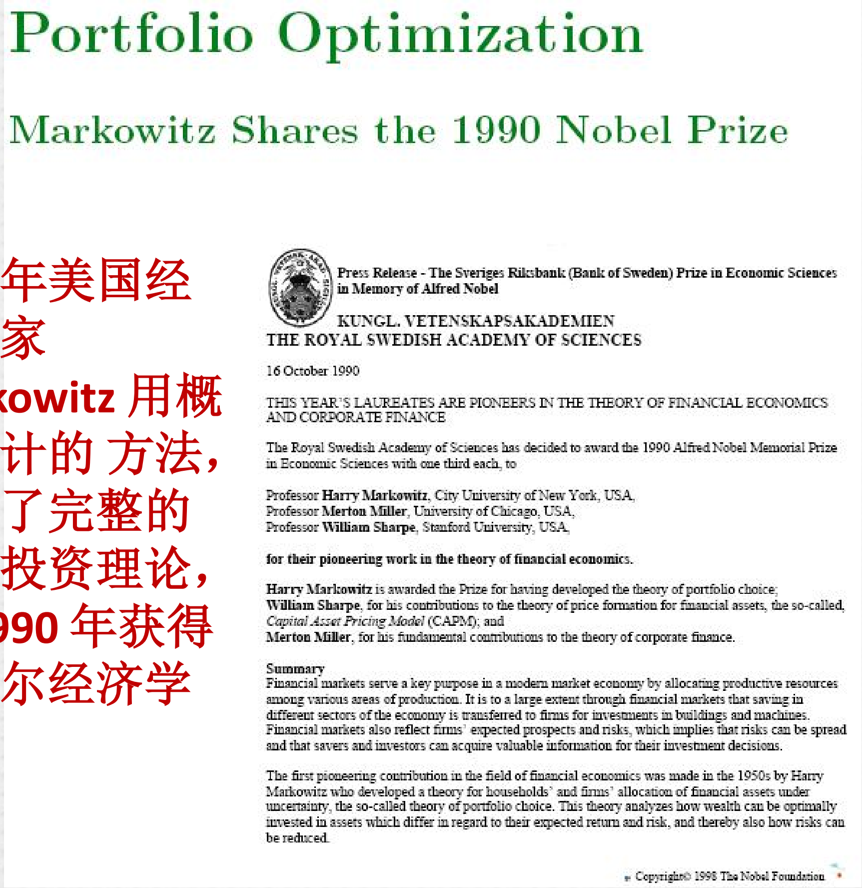
$$t_1,t_2 \ge 0$$

目标往往难以同时达到，因为他们有一些是相互矛盾的。

特点：目标函数是一个关于决策变量的向量值函数，也称为向量优化问题。

◆ 实验14 多目标规划

应用性实验：证券投资组合问题



Portfolio Optimization

Markowitz Shares the 1990 Nobel Prize

Press Release - The Sveriges Riksbank (Bank of Sweden) Prize in Economic Sciences in Memory of Alfred Nobel

KUNGL. VETENSKAPSAKADEMIEN
THE ROYAL SWEDISH ACADEMY OF SCIENCES

16 October 1990

THIS YEAR'S LAUREATES ARE PIONEERS IN THE THEORY OF FINANCIAL ECONOMICS AND CORPORATE FINANCE

The Royal Swedish Academy of Sciences has decided to award the 1990 Alfred Nobel Memorial Prize in Economic Sciences with one third each, to

Professor **Harry Markowitz**, City University of New York, USA,
Professor **Merton Miller**, University of Chicago, USA,
Professor **William Sharpe**, Stanford University, USA,

for their pioneering work in the theory of financial economics.

Harry Markowitz is awarded the Prize for having developed the theory of portfolio choice;
William Sharpe, for his contributions to the theory of price formation for financial assets, the so-called, *Capital Asset Pricing Model* (CAPM); and
Merton Miller, for his fundamental contributions to the theory of corporate finance.

Summary
Financial markets serve a key purpose in a modern market economy by allocating productive resources among various areas of production. It is to a large extent through financial markets that saving in different sectors of the economy is transferred to firms for investments in buildings and machines. Financial markets also reflect firms' expected prospects and risks, which implies that risks can be spread and that savers and investors can acquire valuable information for their investment decisions.

The first pioneering contribution in the field of financial economics was made in the 1950s by Harry Markowitz who developed a theory for households' and firms' allocation of financial assets under uncertainty, the so-called theory of portfolio choice. This theory analyzes how wealth can be optimally invested in assets which differ in regard to their expected return and risk, and thereby also how risks can be reduced.

1952年美国经济学家Markowitz 用概率统计的 方法，建立了完整的组合投资理论，于 1990 年获得诺贝尔经济学奖。

◆ 实验14 多目标规划

应用性实验：证券投资组合问题

问题描述： 8 种投资的年收益率的历史 数据如下表 投资者应如何分配他的投资资金 是使得收益尽可能大 风险尽可能小 。

项目 / 年份	股票1	股票2	股票3	股票4	股票5	股票6	股票7	股票8
1973	.075	-.058	-.148	-.185	-.302	.023	-.149	.677
1974	.084	.020	-.265	-.284	-.338	.002	-.232	.722
1975	.061	.056	.371	.385	.318	.123	.354	-.260
1976	.052	.175	.236	.266	.280	.156	.025	-.040
1977	.055	.002	-.074	-.026	.093	.030	.181	.200
1978	.077	-.018	.064	.093	.146	.012	.326	.295
1979	.109	-.022	.184	.256	.307	.023	.048	.212
1980	.127	-.053	.323	.337	.367	.031	.226	.296
1981	.156	.003	-.051	-.037	-.010	.073	-.023	-.312
1982	.117	.465	.215	.187	.213	.311	-.019	.084
1983	.092	-.015	.224	.235	.217	.080	.237	-.128
1984	.103	.159	.061	.030	-.097	.150	.074	-.175
1985	.080	.366	.316	.326	.333	.213	.562	.006
1986	.063	.309	.186	.161	.086	.156	.694	.216
1987	.061	-.075	.052	.023	-.041	.023	.246	.244
1988	.071	.086	.165	.179	.165	.076	.283	-.139
1989	.087	.212	.316	.292	.204	.142	.105	-.023
1990	.080	.054	-.032	-.062	-.170	.083	-.234	-.078
1991	.057	.193	.304	.342	.594	.161	.121	-.042
1992	.036	.079	.076	.090	.174	.076	-.122	-.064
1993	.031	.217	.100	.113	.162	.110	.326	.146
1994	.045	-.111	.012	-.001	-.032	-.035	.078	-.010

◆ 实验14 多目标规划

应用性实验：证券投资组合问题

分析：设投资的期限是一年，设投资总数为1个单位，用于第i项投资的资金比例为x_i，$x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$称为投资组合向量，即决策变量。问题的约束条件为

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=1,\ x_i\geq 0$$

◆ 实验14 多目标规划

应用性实验：证券投资组合问题

目标函数

根据Markowitz的理论，证券投资组合的平均收益可以写成

$$R(x)=\sum_{i=1}^{8}x_i\overline{r}_i$$

其中$\overline{r}_i$为第i种投资的历史平均收益率。

而投资组合的风险可以使用收益的波动程度加以度量，比如使用如下的定义

$$Q(x)=\frac{1}{2}x^TQx$$

其中Q为8种证券的协方差矩阵。

◆ 实验14 多目标规划

应用性实验：证券投资组合问题

双目标规划模型：

$$\max \quad \begin{pmatrix} R(x) \\ -Q(x) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} s.t. \quad & x_1+x_2+\ldots+x_8=1, \\ & x_i \geq 0,\ i=1,2,\ldots,8 \end{aligned}$$

◆ 实验14 多目标规划

应用性实验：证券投资组合问题

模型1: 控制风险最大化收益

$$\begin{aligned} \max \quad & R(x) \\ s.t. \quad & Q(x) \le \sigma \\ & x_1 + x_2 + \cdots + x_8 = 1, \\ & x_i \ge 0 \end{aligned}$$

控制值σ如何确定？

模型2: 控制赢利最小化风险

$$\begin{aligned} \min \quad & Q(x) \\ s.t. \quad & R(x) \ge \beta \\ & x_1 + x_2 + \cdots + x_8 = 1, \\ & x_i \ge 0 \end{aligned}$$

控制值β如何确定？

◆ 实验14 多目标规划

应用性实验：证券投资组合问题

模型3：收益和风险加权平均（0≤ρ≤1）

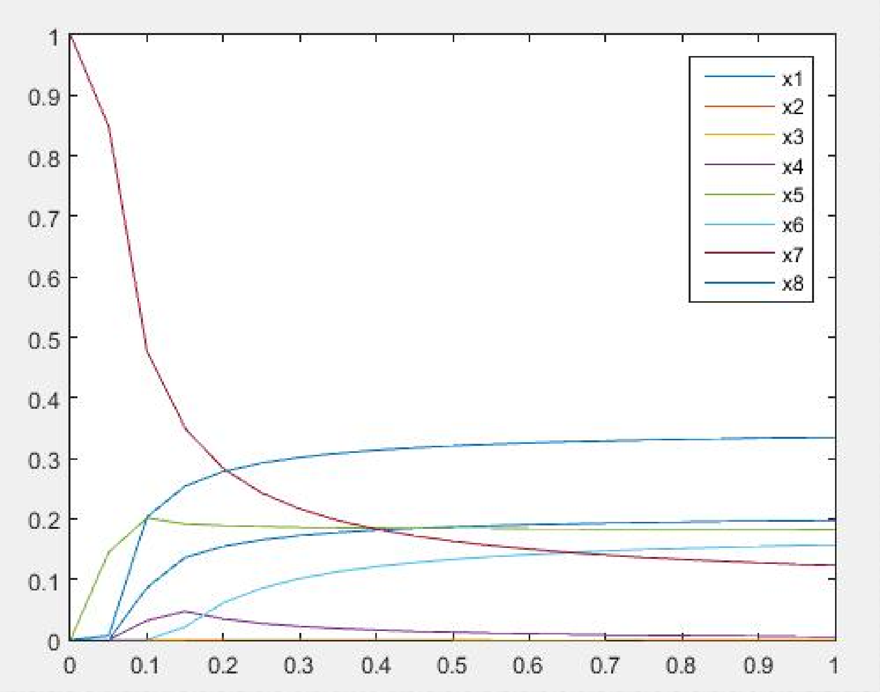
$$\begin{aligned} \max \quad & (1-\rho)R(x)-\rho Q(x), \\ s.t. \quad & x_1+x_2+\cdots+x_n=1 \\ & x_i \geq 0 \quad i=1,2,\cdots,n \end{aligned}$$

权系数ρ如何确定？

上述三种方法都能将多目标规划问题转化成为单目标规划问题。

◆ 实验14 多目标规划

应用性实验：证券投资组合问题



结果分析：

投资组合 随着权系数变化。权系数越大，表示越重视风险。

当取值 为 1 时，等价于风险最小化的单目标问题；

当取值 为 0 时，等价于收益极大化的单目标问题。

决策者可以根据自己的风险偏好程度选择投资组合。

实验14 飞行管理问题（建模竞赛题）

◆实验14 飞行管理问题

(1995年全国大学生数学建模竞赛A题)

在约10000m高空的某边长为160km的正方形区域内，经常有若干架飞机做水平飞行. 区域内每架飞机的位置、方向角和速度均由计算机记录其数据，以便进行飞行管理. 当一架欲进入该区域的飞机到达区域边缘时，记录其数据后，要立即计算并判断是否会与区域内的飞机发生碰撞. 如果会碰撞，那么应计算如何调整各架（包括新进入的）飞机飞行的方向角，以避免碰撞.

◆ 实验14 飞行管理问题

现假定条件如下:

(1) 不碰撞的标准为任意两架飞机的距离大于8km;

(2) 飞机飞行方向角调整的幅度不应超过30°;

(3) 所有飞机飞行速度均为每小时800km;

(4) 最多需考虑6架飞机;

(5) 不必考虑飞机离开此区域的状况

请对这个避免碰撞的飞行管理问题建立数学模型，列出计算步骤，对以下数据进行计算(方向角误差不超过0.01°)，要求飞机飞行方向角调整的幅度尽量小.

◆ 实验14 飞行管理问题

设该区域4个顶点的坐标为

(0, 0), (160, 0), (160, 160), (0, 160).

记录数据为

飞机编号	横坐标	纵坐标	方向角/(°)
1	150	140	243
2	85	85	236
3	150	155	220.5
4	145	50	159
5	130	150	230
新进入	0	0	52

注 方向角指飞行方向与x轴正向的夹角.

◆ 实验14 飞行管理问题

此问题很容易想到以各飞机调整的飞行角度平方和作为目标函数，而以每两架飞机之间的最小距离不超过8km、各飞机飞行角度调整的值不超过30°为约束条件，如此得出的是一个非线性模型。

以t表示时间，x_i与y_i分别表示第i架飞机的横纵坐标(问题中已经给出)θ_i表示第i架飞机的飞行方向角(问题中已经给出)，$d_{ij}(t)$表示t时刻第i架飞机与第j架飞机间的距离，v表示飞机的飞行速度(v=800km/h).

◆ 实验14 飞行管理问题

目标函数为

$$f = \sum_{i=1}^{6} \Delta\theta_i^{\ 2}.$$

$$d_{ij}^{\ 2}(t)$$

$$= \{x_i - x_j + vt[\cos(\theta_i + \Delta\theta_i) - \cos(\theta_j + \Delta\theta_j)]\}^2 +$$

$$\{y_i - y_j + vt[\sin(\theta_i + \Delta\theta_i) - \sin(\theta_j + \Delta\theta_j)]\}^2.$$

约束条件为

$$D_{ij} \overset{\text{def}}{=} \min_t d_{ij}^{\ 2}(t) > 64, i, j = 1,2,\cdots,6, i \neq j,$$

◆ 实验14 飞行管理问题

将t代入即可求出D_{ij}. 于是本问题的一个数学模型为

$$\min f=\sum_{i=1}^{6}\Delta\theta_i{}^2$$

$$s.t.\begin{cases} D_{ij}>64, \\ |\Delta\theta_i|\le\dfrac{\pi}{6}, i,j=1,2,\cdots,6, i\ne j. \end{cases}$$

◆ 实验14 飞行管理问题

调用MATLAB命令fmincon求解. 先写约束函数M 函数如下:

```
%M函数eg10_5con.m
function[c,ceq=eg10_5con(delta)
x0=[150 85 150 145 130 0];y0=[140 85 155 50 150 0];
alpha0=[243 236 220.5159 230 52]*pi/180;V=800;
co=cos(alpha0+delta);si=sin(alpha0+delta);
for i=2:6
for j=1:i-1
t(i,j)=(x0(i)-x0(j))*(co(i)-co(j));
```

◆ 实验14 飞行管理问题

```
t(i,j)=t(i,j)+(y0(i)-y0(j))*(si(i)-si(j));
t(i,j)=-t(i,j)/v;
t(i,j)=t(i,j)/((co(i)-co(j))^2+(si(i)-si(j))^2);
if t(i,j)<0,d(i,j)=1000;
else,
d(i,j)=(x0(i)-x0(j)+v*t(i,j)*(co(i)-co(j)))^2;
d(i,j)=(y0(i)-y0(j)+v*t(i,j)*(si(i)-
si(j)))^2+d(i,j);
end;end;end;
```

◆ 实验14 飞行管理问题

```
c=64-[d(2,1),d(3,1:2),d(4,1:3),d(5,1:4),d(6,1:5)];
ceq=[];
end
```

由于非线性规划求解对初值依赖性较大，我们可在零点随机生成若干个初值来获取可能的最优解. 为此可编写一个M文件如下：

%M函数eg10_5.m

```
clear;
deltaini=[1.1,1,1,1,1,1];dlini=[];
```

◆实验14 飞行管理问题

```
vlb=-10*ones(1,6);vub=10*ones(1,6);
%算法选择,并选择关闭计算信息显示
options=optimoptions(@
fmincon,'Algorithm','active-set',Display','off');
[d1,fval]=fmincon(@(delta)delta *
delta',deltaini,[],[],[],[],vlb,vub,@eg10_5con,opt
ions);
n=100; %随机取100个初值
for i=1:n-1
```

◆ 实验14 飞行管理问题

```
deltaini=[(rand(1,6)-0.5)*10];
[dt,feval]=fmincon(@(delta)delta*delta',deltaini,
[],[],[],[],vlb,vub,@eg10_5con,options);
if feval<fval,fval=feval;dl=dt;dlini=deltaini;
end;end;
%输出,d1ini是最优解的初值,d1和d分别是弧度和角度值的最优解
%fva1和f分别是弧度和角度值的最优函数值
dlini,dl,d=dl*180/pi,fval,f=d*d'
```

◆ 实验14 飞行管理问题

在MATLAB命令行窗口计算如下：

```
>>eg10_5
n=
100 %一百个初值
dlini=
9.2937 7.3570 -4.8857 2.5297 -0.9314 -12.3820
d1=
-0.0000 -0.0000 0.0360 -0.0086 0.0000 0.0273
```

◆ 实验14 飞行管理问题

d=

-0.0013 -0.0011 2.0637 -0.4942 0.0005 1.5657

fval=

0.0021 %按弧度

f=

6.9547 %按角度