实验6

（课后作业，课程项目）

需要提交**程序代码和实验报告**

截止日期**2024年11月6日下午16:00**

本次作业满分**12**分。

探索性实验

回顾： 设C为一个大于或等于2的常数。设三个自变量ρ, p, v的变化范围为

$$\Omega = \{(\rho, p, v)\colon\ \rho > 0,\ \ p > 0,\ \ |v| < 1\} \tag{1}$$

我们定义以下三个因变量

$$D = \frac{\rho}{\sqrt{1-v^2}},\quad m = \frac{(\rho+Cp)\,v}{1-v^2},\quad E = \frac{\rho+Cp}{1-v^2} - p. \tag{2}$$

我们在课上做过一个相关数学实验，结果表明：

$$D > 0, E > \sqrt{D^2 + m^2}. \tag{3}$$

问题1（4分）： 对任意给定的$-1 < t < 1$，定义

$$\widetilde{D} = D(1+tv),\qquad \widetilde{m} = m(1+tv) + tp,\qquad \widetilde{E} = E + tm,$$

<u>首先请通过随机实验</u>探索以下不等式是否恒成立（1.5分）

$$\widetilde{E} > \sqrt{\widetilde{D}^2 + \widetilde{m}^2}.$$

然后根据你探索的结果：若成立，请尝试给出<u>**严格的数学证明**</u>；若不成立，请尝试给出<u>**严格的解析的反例**</u>（2.5分）。

探索性实验

回顾： 设C为一个大于或等于2的常数。设三个自变量ρ, p, v的变化范围为

$$\Omega = \{(\rho, p, v):\ \rho > 0,\ \ p > 0,\ \ |v| < 1\} \tag{1}$$

我们定义以下三个因变量

$$D = \frac{\rho}{\sqrt{1-v^2}}, \quad m = \frac{(\rho + Cp)\, v}{1-v^2}, \quad E = \frac{\rho + Cp}{1-v^2} - p. \tag{2}$$

我们在课上做过一个相关数学实验，结果表明：

$$D > 0, E > \sqrt{D^2 + m^2}. \tag{3}$$

问题2（3.5分）：随机生成很多组满足(3)式的(D, m, E)，通过<u>数学实验探索</u>如下关于x的非线性方程

$$Cx + \frac{m^2}{E+x} + D\sqrt{1 - \frac{m^2}{(E+x)^2}} = E + x$$

<u>是否一定总是</u>有<u>唯一的正根</u>（正解）？（2分）

然后，结合实验观察，然后<u>严格证明你的结论</u>（1.5分）。

探索性实验

回顾： 设C为一个大于或等于2的常数。设三个自变量ρ, p, v的变化范围为

$$\Omega = \{(\rho, p, v):\ \rho > 0,\ \ p > 0,\ \ |v| < 1\} \tag{1}$$

我们定义以下三个因变量

$$D = \frac{\rho}{\sqrt{1-v^2}}, \quad m = \frac{(\rho + Cp)\, v}{1-v^2}, \quad E = \frac{\rho + Cp}{1-v^2} - p. \tag{2}$$

我们在课上做过一个相关数学实验，结果表明：

$$D > 0, E > \sqrt{D^2 + m^2}. \tag{3}$$

问题3（3分）：随机生成大量的不同组(ρ, p, v)，根据(2)式计算(D, m, E)，通过数学实验，猜想(2)式定义的(D, m, E)是否满足如下恒等式

$$Cp + \frac{m^2}{E+p} + D\sqrt{1 - \frac{m^2}{(E+p)^2}} = E + p.$$

<u>**然后证明你的结论**</u>。再结合问题2的观察结果，由此你总结到什么规律？

探索性实验

回顾： 设C为一个大于或等于2的常数。设三个自变量ρ, p, v的变化范围为

$$\Omega = \{(\rho, p, v):\ \rho > 0,\ \ p > 0,\ \ |v| < 1\} \tag{1}$$

我们定义以下三个因变量

$$D = \frac{\rho}{\sqrt{1-v^2}},\quad m = \frac{(\rho+Cp)\,v}{1-v^2},\quad E = \frac{\rho+Cp}{1-v^2} - p. \tag{2}$$

我们在课上做过一个相关数学实验，结果表明：

$$D > 0, E > \sqrt{D^2 + m^2}. \tag{3}$$

问题4（1.5分）：事实上，(2)式定义了从自变量(ρ, p, v)到因变量(D, m, E)的一个多元向量值函数，而(3)式表明该函数的值域为

$$\mathrm{A}=\{(D, m, E):\ D > 0, E > \sqrt{D^2 + m^2}\}$$

请结合问题2-3的实验观察结果，尝试证明：对任意给定$(D, m, E) \in A$，存在唯一的满足(1)式的(ρ, p, v)使得(2)成立。（1分）

综合问题1（t=0的结果）和问题2、3、4的探索结果，是否表明该多元向量值函数是一个双射？请说明理由（0.5分）