数学分析III习题课 | 期中复习

第13章 场的数学

1. 梯度：$\nabla : f \to \nabla f$

$\nabla(fg) = \nabla f \cdot g + f \cdot \nabla g$; $\nabla(\varphi \circ f) = \varphi' \circ f \nabla f$ (φ为单变量函数)

$\S 13.1$ 例1：设径向量$\vec{p} = (x, y, z)$, 令$p = ||\vec{p}||$, 求∇p

解： $\nabla p^2 = 2p\nabla p = 2(x, y, z) = 2\vec{p} \to \nabla p = \frac{\vec{p}}{p}$

2. 旋度：$rot : \vec{F} \to \nabla \times \vec{F}$

$\nabla \times (\vec{F_1} + \vec{F_2}) = \nabla \times \vec{F_1} + \nabla \times \vec{F_2}$; $\nabla \times (\varphi\vec{F}) = \varphi\nabla \times \vec{F} + \nabla\varphi \times \vec{F}$（$\varphi$是数量函数）；
$\nabla(\vec{F_1} \times \vec{F_2}) = (\nabla \times \vec{F_1}) \cdot \vec{F_x} - (\nabla\vec{F_2}) \cdot \vec{F_1}$

有心场：$\vec{F}(\vec{p}) = f(p)\vec{p} \to rot\vec{F} = 0$
$rot\vec{F} = rotf(p)\vec{p} = f\nabla \times \vec{p} + \nabla f \times \vec{p} = 0 + f'\nabla p \times \vec{p} = f'\frac{\vec{p}}{p} \times \vec{p} = 0$

3. 散度：$\nabla : \vec{F} \to \nabla \cdot \vec{F}$ 即div$\vec{F}$

$Laplace$算子 : $\Delta = \nabla \cdot \nabla$; 调和函数：$\Delta u = 0$

$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = \iint_{\partial\Omega} \nabla u \cdot \vec{n} d\sigma = \iiint_\Omega \Delta u d\mu$(方向导数+***Gauss***公式)

4. 无旋场：$\nabla \times \vec{F} = 0$

有势场：$grad\,\varphi(\vec{p}) = \vec{F}(\vec{p})$

Theorem 13.4.1：有势场、保守场、无旋场等价

$\nabla \times \vec{F} = 0 \to \text{无旋场} \to \text{有势场} \to \exists\text{势函数}\varphi \to \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{p} = \varphi(b) - \varphi(a)$

由*Theorem13.4.1*我们得到了求出有势场的势函数的办法：

令$\vec{F} = (P, Q, R)$, 那么有
$\varphi(x, y, z) = \int_{(0,0,0)}^{x,y,z} \vec{F} d\vec{p} = \int_{(0,0,0)}^{(0,0,z)} R(0, 0, t)dt + \int_{(0,0,z)}^{(0,y,z)} Q(0, t, z)dt + \int_{(0,y,z)}^{(x,y,z)} P(t, y, z)dt$ (起点与终点可依据情况取)（注：除去常数项，势函数唯一）。

恰当微分形式： $d\varphi = Pdx + Qdy + Rdz$

恰当微分方程： $\vec{F} = (P, Q) : P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \to \varphi(x, y) = \int \vec{F} \cdot d\vec{p}$

5. 旋度场：$\vec{F} = \nabla \times \vec{G}$

Theorem13.5.1：星形域上，$\vec{F}$为旋度场和$\nabla \cdot \vec{F} = 0$等价，即散度为0$\Longleftrightarrow$ 旋度场。

$\nabla \cdot \vec{F} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{G}) = 0$(展开后显然为0)

Theorem13.5.2：$\vec{G}$是$\vec{F}$的向量势，对于任意连续可微函数φ, $\vec{G} + \nabla\varphi$也是$\vec{F}$的一个向量势。

$\nabla \times (\vec{G} + \nabla\varphi) = \nabla \times \vec{G} + \nabla \times (\nabla\varphi) = \nabla \times \vec{G}$

***Theorem13.5.1*给出了向量势的求法：**

$\nabla \cdot \vec{F} = 0 \to$ 旋度场 $\to$ 存在向量势$\vec{G} = (G_1, G_2, G_3) \to \nabla \times \vec{G} = \vec{F}$一一对应

$\to$ 令$G_3 = 0$, 积分用前两个式子求出$G_2 =$ 喵喵 $+ f(x, y), G_1 =$ 汪汪

再用最后一个式子($\frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} = 0$)决定$f(x, y)$的取值 $\to$ 得到了一个向量势$\vec{G} = (G_1, G_2, 0)$

因此，一般的向量势为$\vec{G} = (G_1, G_2, 0) + \varphi(x, y)$, 其中$\varphi$是$R^3$上任意连续可微函数

第14章 数项级数

一、正项级数（部分和有界）

核心：比较判别法（判断衰减速度）

1. 几何级数： *Cauchy*检根法，*D'Alembert*检比法
2. *p*-级数：比较审敛法，*Raabe*判别法
3. 与$\frac{1}{n(lnn)^q}$比较：*Cauchy*积分判别法（递减），*Gauss*判别法（与$\frac{1}{nlnn}$比较），*Bertrand*判别法

正项级数：估阶；注：除了*Cauchy*检根法以外都只能用于单调递减的情况（当n充分大时）

二、一般项级数

1. 不能比较！
2. 交错级数：*Leibniz*判别法 (现成的$\sum(-1)^n f(n)$，合并（***p***个交错级数））
3. 经典*Abel*判别法和*Dirichlet*判别法

三、常用的几个结论

1. 收敛级数任意加括号得到的新级数仍然收敛，和不变（定理14.1.3）；
2. 级数收敛的必要条件：$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$;
3. ***Cauchy***收敛原理证明发散更方便些：$|S_m - S_n| > \epsilon$;
4. 处理抽象的发散级数：***Cauchy***性。

四、绝对收敛&条件收敛

绝对收敛：正项与负项均收敛

条件收敛：正项与负项均发散，某种排序使其收敛（*Riemann*定理）

定理14.5.1：$\text{绝对收敛} \Rightarrow \text{条件收敛}$，做题先判断绝对收敛。

定理14.5.2：交换绝对收敛级数中的无穷多项的次序，所得的新级数仍然绝对收敛，其和也不变。

定理14.5.3(***Riemann***定理)：适当交换条件收敛级数中各项次序，可以使其收敛到任意事先指定的实数***S***，也可以使其发散到$+\infty$或$-\infty$。

五、*Cauchy*乘积

1. 判断是具体的数列还是抽象的(与幂级数联系起来);
2. 具体的$\to$正项级数/一般项级数；抽象的$\to$正项级数（比较判别法）或用不等式估计
3. (Cauchy)绝对收敛的级数的乘积，任意相加所得级数都绝对收敛；(Mertens)至少一个绝对收敛$\to$ Cauchy乘积收敛；(Abel) Cauchy乘积收敛$\to$ 乘积为AB
4. 两个发散级数的Cauchy乘积可以是绝对收敛的（上面几个定理的条件都是不必要的）

第15章 函数项级数

1. 函数列与函数项级数

$S_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}u_k(x)\to S(x)$（函数项级数收敛）

$\{f_(x)\}\to f(x)$（函数列收敛）

函数列$\{f_n(x)\}$在区间I上一致收敛于f的一个充要条件是：$\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|=0$

2. 逐点收敛&一致收敛

逐点收敛$\to N(x,\epsilon)$

一致收敛$\to N(\epsilon)$

需要做到：a. 熟知定义及其否定；b. 熟知***Cauchy***收敛原理描述及其否定（见教材$\S\,15.2$）

一致收敛与绝对收敛是两个毫不相关的概念

3. 一致收敛

1. 优级数法，即***Weierstrass***判别法、***M*** 判别法
2. 经典***Abel***和***Dirichlet***判别法
3. 一致收敛保 连续性、可积（逐项积分）、可微（逐项求导）(实质是在一定条件下两种极限运算交换的合理性)

   Uniform convergence preserves continuity: $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{x\to x_0}f_n(x)$

   Uniform convergence preserves integrability: $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx=\int_a^b\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)dx$

   Uniform convergence preserves differentiability: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{d}{dx}(f_n(x))=\frac{d}{dx}(\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x))$

4. 幂级数

1. 收敛半径、收敛区间、区间端点处的敛散性
2. ***Abel***第二定理：右端点收敛，右端点处和函数左连续；左端点收敛，左端点处和函数右连续
3. ***Tauber***定理：设幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径为1，且
   $\lim\limits_{x\to1^-}\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n=A$存在，如果$a_n=\circ(\frac{1}{n})$，那么$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n=A$
4. 利用幂级数做一些展开、求和