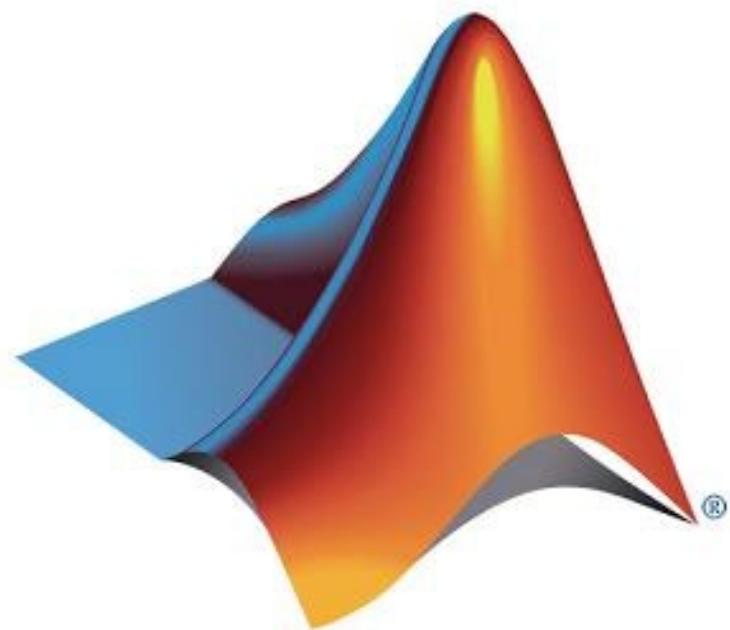
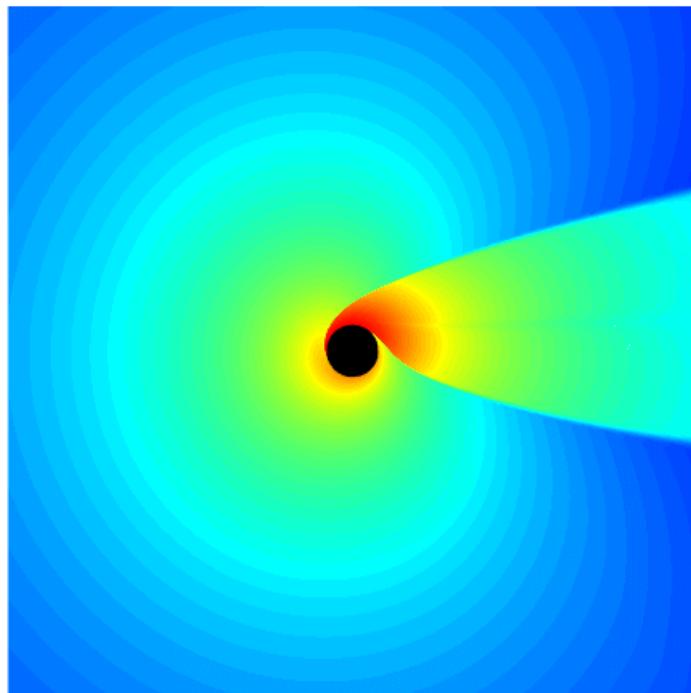


数学实验

Mathematical Experiments



实验五：π的计算实验

Calculate π

- 3月14日“国际圆周率日”，也是国际数学日。
- 有人在 π 日到来，有人在 π 日离开。
- 爱因斯坦在 π 日出生，霍金在 π 日离世。

实验5.1泰勒级数(Taylor series)法

思考:

如何利用反正切函数的泰勒级数

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{3} - \cdots + (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} + \cdots \quad (1)$$

计算 π .

实验5.1泰勒级数法

实验(1)

将x=1代入上面的级数得到

$$\frac{\pi}{4} = \arctan 1 \approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1}. \quad (2)$$

在上面的级数中取n=20000计算元的近似值.观察所得的结果和所花的时间.

实验5.1泰勒级数法

思考：

- 发现花费的时间很长，所得的结果的准确度却很差.其原因是由于当x=1时得到的 $\arctan 1$ 的展开式(2)收敛得太慢.
- 怎样才能使泰勒级数

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} + \cdots$$

收敛得快？

实验5.1泰勒级数法

思考：

- 发现花费的时间很长，所得的结果的准确度却很差.其原因是由于当x=1时得到的 $\arctan 1$ 的展开式(2)收敛得太慢.
- 怎样才能使泰勒级数

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} + \cdots$$

收敛得快？

容易想到，应当使x的绝对值小于1，最好是远比1小，这样，随着指数的增加，x的幂快速接近于0，泰勒级数就会快速收敛。比如，取 $x = \frac{1}{2}$ 得到的 $\arctan \frac{1}{2}$ 就收敛得快.

插个小故事

同学们大概听说过国际象棋发明者向印度国王试求奖赏的故事。

在古印度有个大臣，他聪明过人，发明了一种棋，国王百玩不厌，于是决定重赏他。他说：“陛下，我只要一点麦子。请您让人将麦子放在我发明的棋盘的六十四个格子内，第一格放一粒，第二格放二粒，第三格放四粒，第四格放八粒，第五格放十六粒.....照这样放下去，每格比前一格多放一倍麦粒，直到把六十四个棋格放满就行了。”

插个小故事

这表面上看起来不多，实际上所要的麦粒数 $2^{64} - 1$ 是一个天文数字，无比巨大，国王根本不可能给出这么多麦子。

其中的原因在于：随着指数的增加， 2 的幂上升得越来越快， 2^{64} 就已经是一个巨大的天文数字。

将这个故事反其意而用之，就可以想像 2^{64} 的倒数 $(\frac{1}{2})^{64}$ 是一个非常微小的正数，在

$$\arctan \frac{1}{2} \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}$$

中取 $2n-1=63$ 得到的 $\arctan \frac{1}{2}$ 的近似值的误差就小于 $\frac{1}{2^{65}}$ ，准确度已经非常高。

实验5.1泰勒级数法

思考：

但是，得到的 $\arctan \frac{1}{2}$ 与 π 有什么关系？对于计算 π 有何帮助？

实验5.1泰勒级数法

思考：

但是，得到的 $\arctan \frac{1}{2}$ 与 π 有什么关系？对于计算 π 有何帮助？

我们并不知道 $\arctan \frac{1}{2}$ 是 π 的多少倍，但是却能计算出 $\alpha = \arctan \frac{1}{2}$ 与 $\frac{\pi}{4}$ 相差多少.记 $\alpha = \arctan \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{\pi}{4} - \alpha$, 则

$$\tan \beta = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{\tan \frac{\pi}{4} - \tan \alpha}{1 + \tan \frac{\pi}{4} \tan \alpha} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + 1 \times \frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$$

因此, $\beta = \arctan \frac{1}{3}$, 即 $\frac{\pi}{4} - \arctan \frac{1}{2} = \arctan \frac{1}{3}$, 从而
得到 $\frac{\pi}{4} = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}$.

实验5.1泰勒级数法

分析：

$$\frac{\pi}{4} = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}.$$

$\arctan \frac{1}{3}$ 比 $\arctan \frac{1}{2}$ 收敛得更快.利用泰勒级数计算出
 $\arctan \frac{1}{2}$ 与 $\arctan \frac{1}{3}$ 的近似值再相加， 然后再乘以4， 就得到 π 的近似值.

编写程序实现

实验5.1泰勒级数法

还可以考慮用 $\alpha = \arctan \frac{1}{5}$ 来计算 π , 它收敛得更快. 由

$\tan \alpha = \frac{1}{5}$ 易算出

$$\tan 2\alpha = \frac{5}{12}, \tan 4\alpha = \frac{120}{119},$$

$$\tan(4\alpha - \frac{\pi}{4}) = \frac{\tan 4\alpha - \tan \frac{\pi}{4}}{1 + \tan \frac{\pi}{4} \tan 4\alpha} = \frac{\frac{120}{119} - 1}{1 + \frac{120}{119}} = \frac{1}{239}.$$

$$4\alpha - \frac{\pi}{4} = \arctan \frac{1}{239}.$$

从而得到

$$\frac{\pi}{4} = 4\alpha - \arctan \frac{1}{239} = 4\arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}.$$

即

$$\pi = 16\arctan \frac{1}{5} - 4\arctan \frac{1}{239}. \quad (4)$$

称为Maqin公式.

实验5.1泰勒级数法

我们是通过计算

$$T_n(x) = x - \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$$

来得到 $\arctan x$ 的近似值的. 当 $0 \leq x \leq 1$ 时, 这个近似值的误差

$$e = |\arctan x - T_n(x)| < \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

由此可以估算出, 对于 $x = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{239}$, 为了使 $\arctan x$ 的近似值 $T_n(x)$ 达到所需的精确度, n 至少应当取到多大.

实验5.1泰勒级数法

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4k)! (1103 + 26390k)}{(k!)^4 396^{4k}}$$

斯里尼瓦瑟·拉马努金
(1914)

$$\pi = \frac{426880\sqrt{10005}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(6n)!(13591409 + 545140134n)}{(3n)!(n!)^3(-640320)^n}}$$

- 1985 年，美国数学家 Bill Gosper 用 Ramanujan 的一个公式计算圆周率精确到了小数点后 17500000 位。
- 1994 年，苏联裔美国数学家 David 和 Gregory Chudnovsky 兄弟在同一个公式的基础上计算 π 到了 4044000000 位。
- 1995 年以后，日本数学家金田康正（Yasumasa Kanada）及其团队更在世界上遥遥领先，在 2003 年把对 π 的计算提高到了 1.24 万亿位。

- 这个纪录在 2010 年 1 月 8 日由法国一位程序员 Fabrice Bellard 打破。他改进了 Chudnovsky 兄弟的公式，用了 131 天在一部台式计算机上成功地把 π 计算到 2.7 万亿位。
- 这个数字有多长呢？如果你平均用一秒钟来报出一个数字的话，那么需要 8.5 万年才能读完它的所有数字。
- 厉害吧？可是，这个世界纪录到 8 月份就被打破了：日本工程师近藤茂（Shigeru Kondo）与美国西北大学计算机系的香港学生余智恒合作，把 π 值算到了 5 万亿位。

- 谁知道，9月17日英国广播公司BBC又作出了惊人的报道，说雅虎科技公司的研究员、原香港科技大学毕业生施子和（Nicholas Tse-Wo Sze）采用“云计算”技术，利用1000台计算机同时计算，历时23天，将 π 计算到小数点后2千万亿位，为8个月前法国人Bellard记录的近一千倍。
- 他发现了“ π 的小数点后第两千兆位是0！”

3.14

**159265358979323846264338327
950288419716939937510582097
49445923078164062862089986
28034825342117067982148086513282
30664709384460955058223172535940812848
1117450284102701938521105559644622948954
9303819644288109756659334461284756482337867831652712
01909145648566923460348610454326648213393607260249
141273724587006606315588174881520920962892540917153
6436789259036001133053054882046652138414695194151160
9433057270365759591953092186117381932611793105118548074462379962749
567351885752724891227938183011949129833673362440656643086021394946
39522473719070217986094370277053921717629317675238467481846766940
513200056812714526356082778577134275778960917363717872146844090122
4953430146549585371050792279689258923542019956112129021960864034
4181598136297747713099605187072113499999837297804995105973173281609631859
50244594553469083026425223082533446850352619311881710100031378387528865875332083814206
17177669147303598253490428755468731159562863882353787593751957781857780532
1712268066130019278766111959092164201989380952572010654858632788659...**

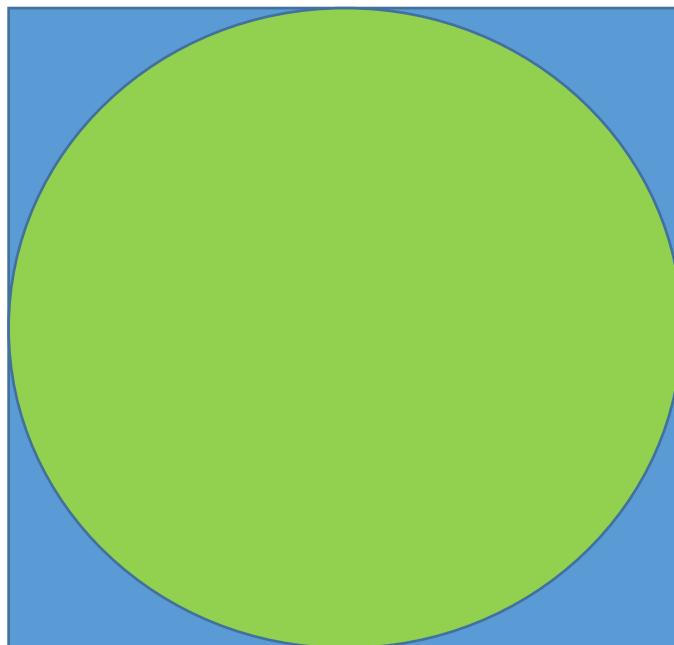
你能记住 π 小数点后多少位？

- 一直有着凭人脑记忆来背诵 π 的数值的吉尼斯世界纪录（Guinness World Records），目前领先的是中国人吕超。2005 年 11 月 20 日，当时是西北农林科技大学研究生的吕超用了 24 小时零 4 分的时间，连续背诵出 π 的值到小数点后 67890 位。

实验5.2 圆内随机投点法

思考：

能否通过蒙特卡罗方法计算 π ？

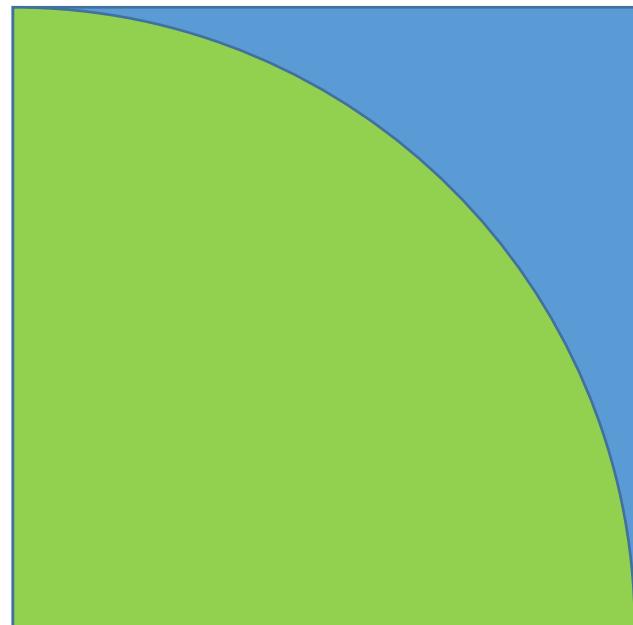


实验5.2 圆内随机投点法

思考：

能否通过蒙特卡罗方法计算 π ？

利用求单位圆的 $\frac{1}{4}$ 的面积来得到 $\frac{\pi}{4}$,
从而得到 π . 单位圆的一是一个扇形 G , 它是边长为1的单位正方形 G_1 的一部分, 如图?. 单位正方形 G_1 的面积 $S_1 = 1$. 只要能够求出扇形 G 的面积 S 在正方形 G_1 的面积 S_1 中所占的比例 $k = \frac{S}{S_1}$, 就能立即得到 S , 从而得到 π 的值.

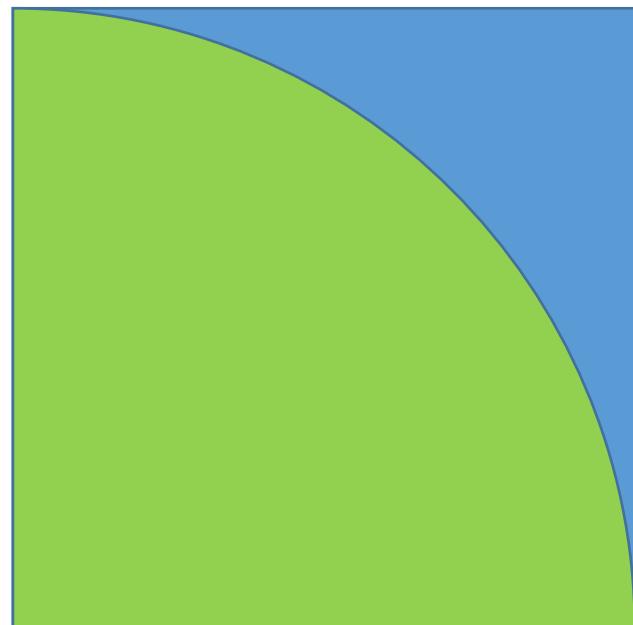


实验5.2 圆内随机投点法

思考：

能否通过蒙特卡罗方法计算 π ？

怎样求出扇形面积在正方形面积中所占的比例 k ? 一个办法是在正方形中随机地投入很多点，使所投的每个点落在正方形中每一个位置的机会均等，看其中有多少个点落在扇形内.将落在扇形内的点的个数 m 与所投点的总数 n 的比 $\frac{m}{n}$ 可以作为 k 的近似值.



实验5.2 圆内随机投点法

随机模拟实验设计：产生随机数 $(x_i, y_i)(i = 1, 2, \dots, m)$, 其中
 $0 \leq x_i \leq 1, 0 \leq y_i \leq 1$ (正方形, 记为 Ω) , 当 $\sqrt{x_i^2 + y_i^2} \leq 1$ 时表示落入单位圆的第一象限部分 (扇形, 记为 A) , 此时记为实验成功, 统计实验成功次数m与实验总次数n, 则 $\pi \approx \frac{4m}{n}$ 。

编写并讲解MATLAB程序Exp5_2.m

演示动画程序

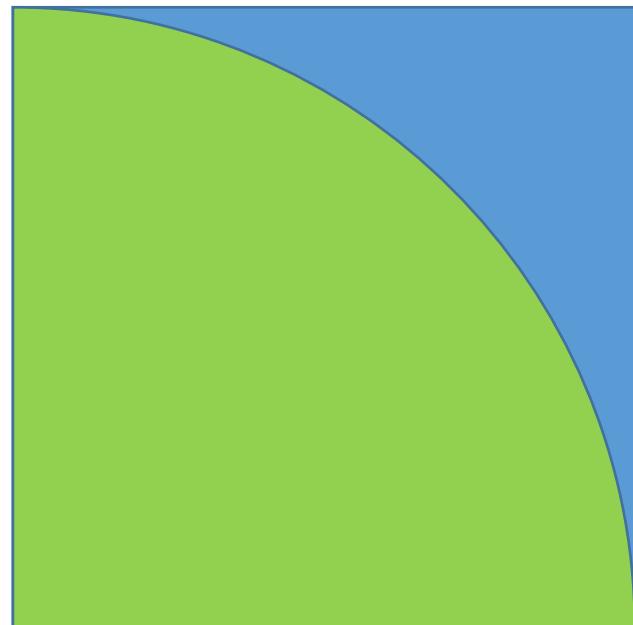
实验5.2 圆内随机投点法

编程实验：

(1)取 $n=1000, 10000, 50000$, 按上面所说的随机投点的方法来计算圆的近似值。

(2)对不同的 n , 观察所得结果的精确度.你发现什么规律?

(3)将这个方法的精确度与泰勒级数法相比较。



实验5.2 圆内随机投点法

总结与思考：

通过上面的实验，我们发现：当 $n=1000$ 时精确度很低.取更大的n，精确度会高一些.但总的来说，蒙特卡罗法的精确度比泰勒级数法低.

既然如此，为什么还要用蒙特卡罗法呢？

实验5.2 圆内随机投点法

总结与思考：

如果只是为了计算 π ，当然可以不用它。

但是，假如不是求一个扇形的面积，而是求100个已知圆
 $G_i: (x - a_i)^2 + (y - b_i)^2 = r_i^2 (1 \leq i \leq 100)$ 的公共部分G的面积，

你怎么办？用定积分吗？

我们会发现要确定公共部分G的边界就是一个很困难的问题，很难用定积分或数值积分法计算.

实验5.2 圆内随机投点法

总结与思考：

但用蒙特卡罗法就没有多大困难：仍然可以用一个正方形（或长方形） Q 将图形 G 包含在内，仍然可以通过产生随机数在 Q 内随机投点 $P(x,y)$.怎样判断每一点 $P(x,y)$ 是否落在 G 内部？不需知道 G 的边界，只要对每一个圆 G_i 判断 $P(x,y)$ 是否落在 G_i 内,也就是判断 $(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2 = r_i^2$ 是否成立.

如果 P 落在每一个圆 G_i 的内部，那么它就落在所有这些圆的公共部分 G 的内部.而让计算机作100次这样的判断是轻而易举的事情.

因此，蒙特卡罗法在很多场合下，特别是在对精确度要求不太高的情况下是大有用武之地的.

实验5.2 圆内随机投点法

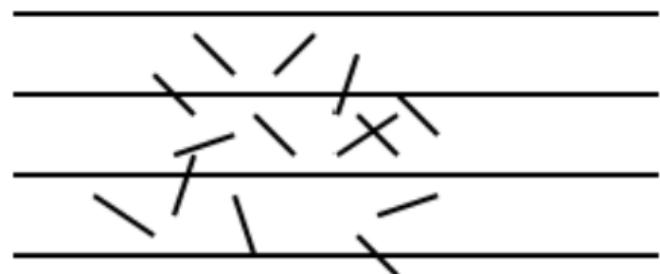
练习：

在三维空间中，由三个圆柱面 $x^2 + y^2 = 1, x^2 + z^2 = 1, y^2 + z^2 = 1$ 围成一个立体，利用蒙特卡罗法求它的体积。
(试与理论值进行比较？)

实验5.3 蒲丰投针实验

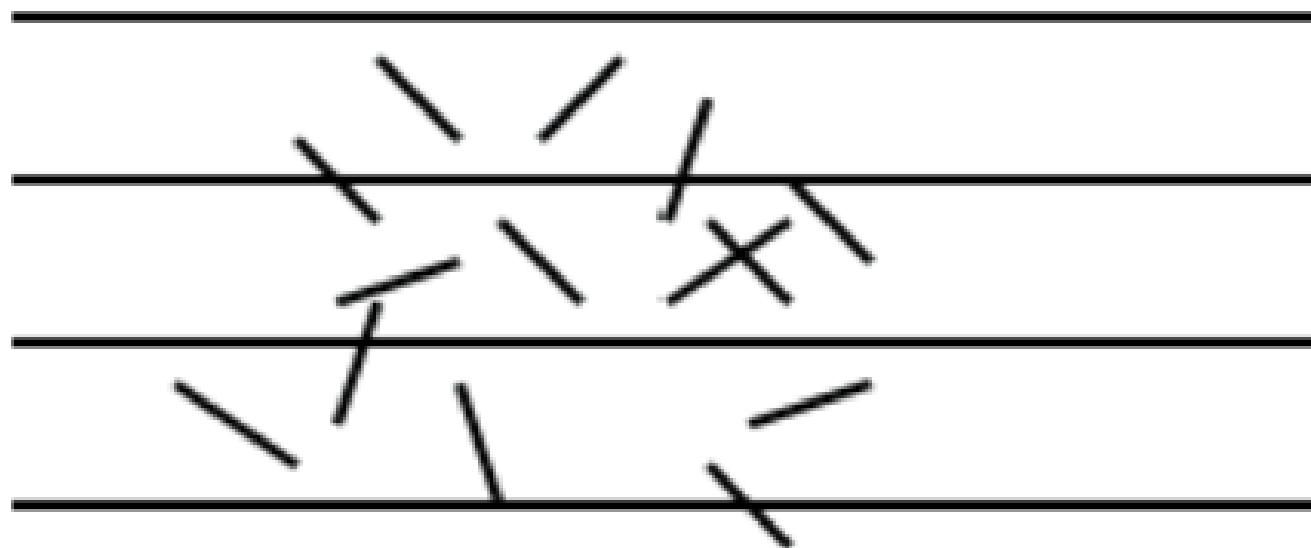
Buffon's Needle Problem

- 1777年法国数学家蒲丰(Buffon)，在晚年的时侯，他又一次举行了一个家庭宴会，邀请了一大堆他的朋友来他家，干啥呢？---“做实验”！
- 一共投了 $n=2212$ 次，与平行线相交的有多少呢？数了一下共 $m=704$ 次。
- 然后他说：“我现在就可以计算圆周率了”



实验5.3 蒲丰投针实验

- 取一张白纸，在上面画许多间距为 d 的等距平行线；
- 取一根长度为 $l(l < d)$ 的均匀直针，随机地向画有平行线的纸上投去；
- 试分析针和直线相交的概率



实验5.3 蒲丰投针实验

- 由于投针是随机的，所以用二维随机变量 (X, Y) 来确定它在桌上的具体位置。设 X 表示针的中点到平行线的距离， Y 表示针与平行线的夹角，满足：

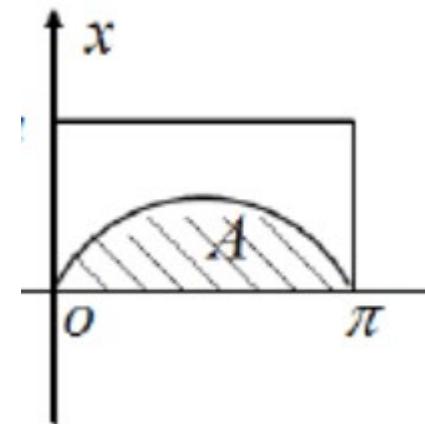
$$0 \leq X \leq \frac{d}{2}, \quad 0 \leq Y \leq \pi$$

- 如果

$$X \leq \frac{l}{2} \sin Y$$

则针和直线相交。

$$p = \frac{2l}{\pi d}$$



实验5.3 蒲丰投针实验

一种用蒙特卡罗法来计算 π 的方法是1777年法国数学家蒲丰(Buffon)提出的随机掷针实验.其步骤如下:

- (1)取一张白纸，在上面画许多间距为d的等距平行线；
- (2)取一根长度为 $l(l < d)$ 的均匀直针，随机地向画有平行线的纸上掷去，一共投掷n次(n是一个很大的整数).观察针和直线相交的次数m；
- (3)由分析知道针和直线相交的概率 $p=2/\pi d$.取m/n为p的近似值，则 $\pi \approx 2l/md$.特别取针的长度 $l=d/2$ 时， $\pi \approx n/m$

实验5.3 蒲丰投针实验

下面是利用这个公式，用概率的方法得到圆周率的近似值的一些资料。

试验者	时间	投掷次数	相交次数	圆周率估计值
Wolf	1850年	5000	2532	3.1596
<u>Smith</u>	1855年	3204	1218.5	3.1554
C.De Morgan	1860年	600	382.5	3.137
<u>Fox</u>	1884年	1030	489	3.1595
Lazzerini	1901年	3408	1808	3.1415929
<u>Reina</u>	1925年	2520	859	3.1795

公元1901年，意大利数学家拉兹瑞尼宣称进行了多次的投针试验，每次投针数为3408次，平均相交数为1808次，给出 π 的值为3.1415929——准确到小数后6位。

实验5.3 蒲丰投针实验

真正去做大量掷针的实验是很费时间的.请尝试设计一个方案，用计算机模拟蒲丰掷针实验，得出 π 的近似值.

随机模拟实验设计：设定针的长度 l 与平行线间的距离 d ，产生随机数 $(x_i, \alpha_i)(i = 1, 2, \dots, m)$, 其中 $0 \leq x_i \leq \frac{d}{2}$, $0 \leq \alpha_i \leq \pi$ ，在每次实验中若 $x_i \leq \frac{l}{2} \sin \alpha_i$ ，记为实验成功，统计实验成功次数 k 与实验总次数 m ，则 $\pi \approx \frac{2lm}{kd}$ 。

讲解MATLAB程序Exp5_3.m

演示动画程序

实验5.4 随机整数互素实验

随机整数互素的概率：

取一个大的整数 N .在1到 N 之间随机地取一对整数 a,b ，找出它们的最大公约数 (a,b) .当 $(a,b)=1$ 时称 a,b 互素.做 n 次这样的实验，记录其中 $(a,b)=1$ 的情况出现的次数 m .算出 $p=m/n$ 的值.

实验5.4 随机整数互素实验

随机整数互素的概率：

取一个大的整数N.在1到N之间随机地取一对整数a,b，找出它们的最大公约数(a,b).当(a,b)=1时称a,b互素.做n次这样的实验，记录其中(a,b)=1的情况出现的次数m.算出p=m/n的值.

可证明：当N充分大时，随机整数互素的概率接近

$$p = \frac{1}{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots} = \frac{6}{\pi^2}$$

实验5.4 随机整数互素实验

随机整数互素的概率：

取一个大的整数 N .在1到 N 之间随机地取一对整数 a,b ，找出它们的最大公约数 (a,b) .当 $(a,b)=1$ 时称 a,b 互素.做 n 次这样的实验，记录其中 $(a,b)=1$ 的情况出现的次数 m .算出 $p=m/n$ 的值.

思考：如何用**MATLAB**判断两个正整数是否互素？

编写**MATLAB**程序**Exp5_4.m**

实验5.4 随机整数互素实验

随机整数互素的概率：

取一个大的整数N.在1到N之间随机地取一对整数a,b，找出它们的最大公约数(a,b).当(a,b)=1时称a,b互素.做n次这样的实验，记录其中(a,b)=1的情况出现的次数m.算出p=m/n的值.

思考：如何证明当N充分大时，随机整数互素的概率接近

$$p = \frac{1}{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots} = \frac{6}{\pi^2}$$

实验课实验题

上交截止日期:
2024年10月23日23:00

实验课实验1：限定区域的随机投点实验

问题1（2分）：

- (0.5分) 请在矩形区域 $U=\{(x, y) | 0 \leq x \leq e, 0 \leq y \leq 1\}$ 中随机产生10000个点

的坐标，仅绘制落在区域D内的点。D为曲线 $y=x/e$, $y=\ln x$, $y=0$ 所围区域。

- (0.5分) 通过实验，统计点落在D中的个数，从而计算点落在区域D中的频率P。
- (1分) 探索如何利用本实验估算区域D的面积、并将实验估算结果和理论推导的结果进行比较。

实验课实验2

问题2（4分）：小明通过理论分析作出以下猜想：

猜想 在单位圆内以均匀分布随机（独立地）生成3个点，这3个点所形成的三角形的面积的期望值为：

$$S = \frac{35}{48\pi}$$

- 试通过随机模拟实验（蒙特卡洛方法）检验小明的猜想是否合理？
1.5分
- 能否由此猜想设计一种计算 π 的随机模拟方法、用动画展示实验过程？
（2分）
- 请尝试证明上述猜想，可查阅资料，但需注明参考文献来源（0.5分）