实验课实验题

上交截止日期:2024年11月1日下午5点

- 实验课实验题1 （1分）：

借助MATLAB，设法检验并证明以下不等式

$$\frac{(1+a_1)^2(1-b_1^2-b_2^2)}{(1+b_1)^2(1-a_1^2-a_2^2)} \le 2\frac{(1-a_1b_1-a_2b_2)(1+a_1)}{(1+b_1)(1-a_1^2-a_2^2)}-1$$

其中a1,a2,b1,b2为实数且满足

a1*a1+a2*a2<1， b1*b1+b2*b2<1.

实验课实验题2 （6分）：

设 $\rho > 0$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$ 且 $|\mathbf{v}| < 1$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$ 为常数。定义:

$$\mathbf{U} = (D, \mathbf{m}, \mathbf{B}, E)$$

$$D = \frac{\rho}{\sqrt{1 - |\mathbf{v}|^2}},$$

$$\mathbf{m} = \frac{\rho \mathbf{v}}{1 - |\mathbf{v}|^2} + |\mathbf{B}|^2 \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B})\mathbf{B},$$

$$E = \frac{\rho}{1 - |\mathbf{v}|^2} + \frac{1 + |\mathbf{v}|^2}{2} |\mathbf{B}|^2 - \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B})^2}{2}.$$

设 $\rho_* > 0$, $\mathbf{v}_* \in \mathbb{R}^d$ 且 $|\mathbf{v}_*| < 1$, $\mathbf{B}_* \in \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$ 为常数。定义:

$$\mathbf{U}_* = (D_*, \mathbf{m}_*, \mathbf{B}_*, E_*),$$

$$\mathbf{n}_* = (-\sqrt{1 - |\mathbf{v}_*|^2}, -\mathbf{v}_*, -(1 - |\mathbf{v}_*|^2)\mathbf{B}_* - (\mathbf{v}_* \cdot \mathbf{B}_*)\mathbf{v}_*, 1),$$

$$D_* = \frac{\rho_*}{\sqrt{1 - |\mathbf{v}_*|^2}},$$

$$\mathbf{m}_* = \frac{\rho_* \mathbf{v}_*}{1 - |\mathbf{v}_*|^2} + |\mathbf{B}_*|^2 \mathbf{v}_* - (\mathbf{v}_* \cdot \mathbf{B}_*)\mathbf{B}_*,$$

$$E_* = \frac{\rho_*}{1 - |\mathbf{v}_*|^2} + \frac{1 + |\mathbf{v}_*|^2}{2} |\mathbf{B}_*|^2 - \frac{(\mathbf{v}_* \cdot \mathbf{B}_*)^2}{2}.$$

实验课实验题2 （6分）：

令 $F=(\mathbf{U}-\mathbf{U}_*)\cdot\mathbf{n}_*$.

(1) (0.5 分)　若 $d=1$, 证明 $\frac{\partial F}{\partial\rho}>0,\quad \frac{\partial^2 F}{\partial\rho^2}=0.$

(2) (1 分)　若 $d=1$, 证明 $F|_{\rho=0}\geq 0.$

(3) (0.5 分)　若 $d=1$, 证明 $F\geq 0.$

(4) (4 分)　若 $d=3$, 尝试证明 (1)、(2) 和 (3).　(建议先使用随机模拟进行检验，再通过符号计算观察，最后给出严格证明)