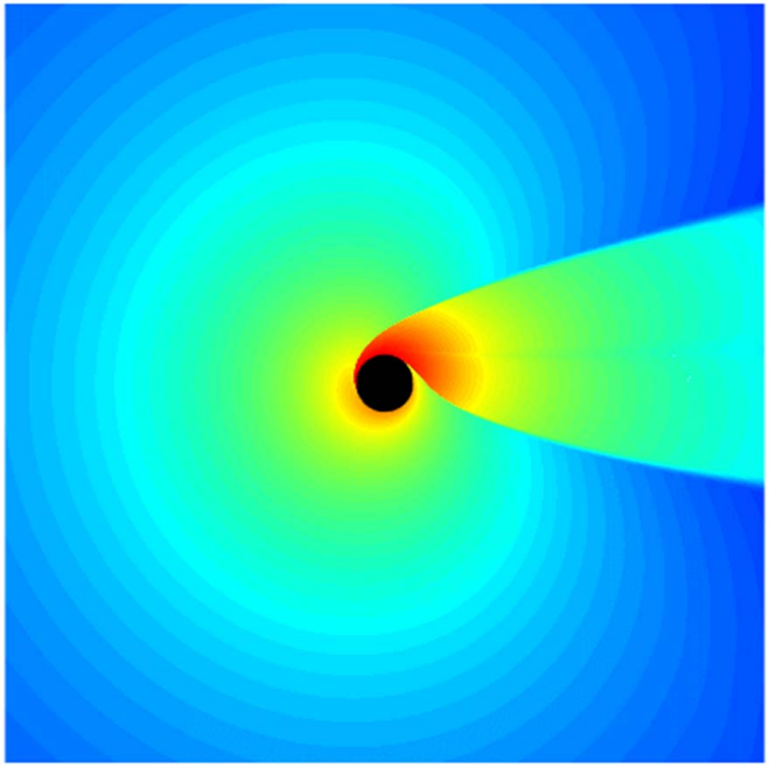
数学实验
Mathematical Experiments



实验二：
应用微积分实验
Applied calculus

实验2.1 线性p周期函数

- **回顾**

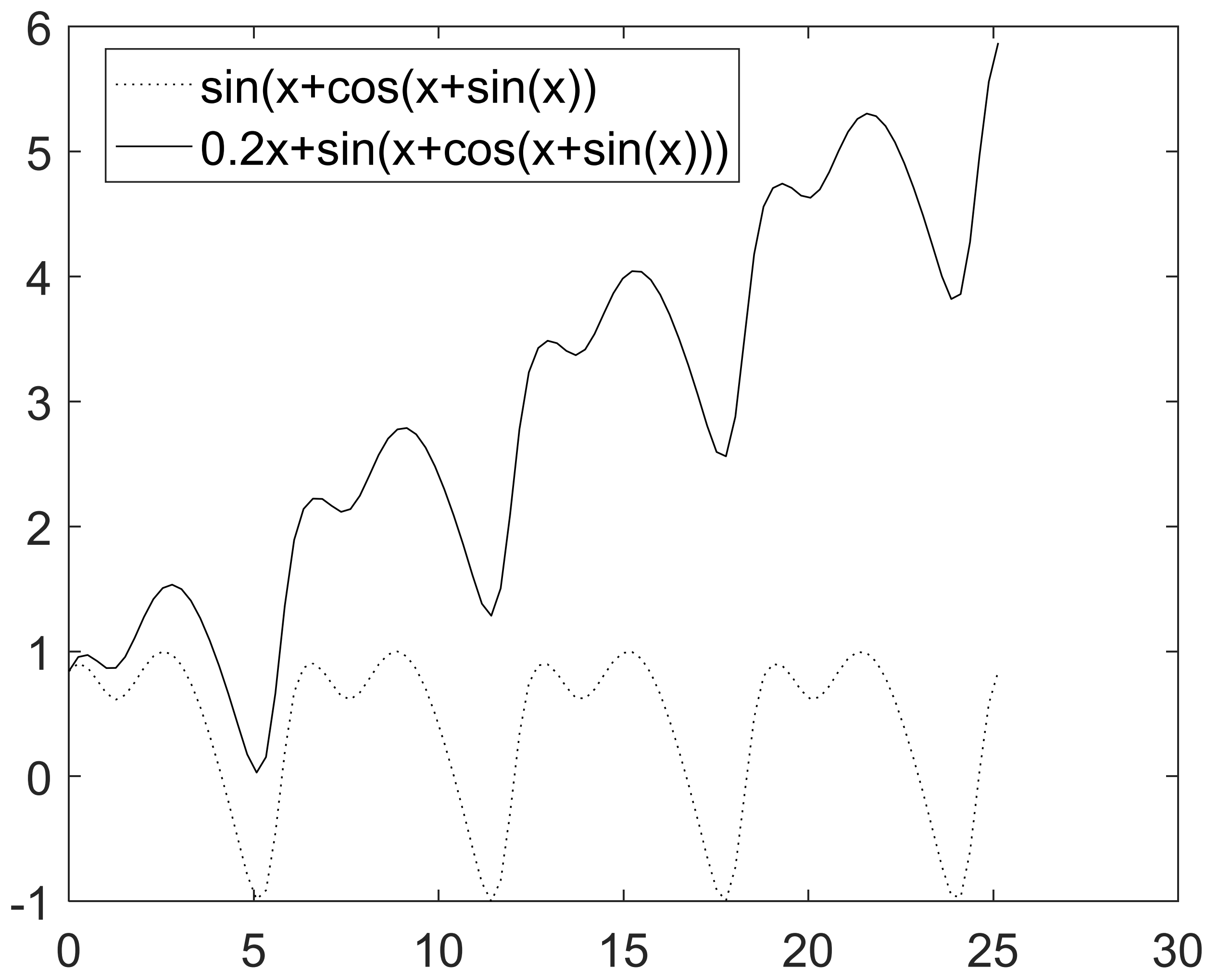
$$f(x) = \sin(x + \cos(x + \sin(x))$$

$$g(x) = 0.2x + \sin(x + \cos(x + \sin(x)))$$

- f (x), g (x)是周期函数吗？观察它们的图象。
- 程序

```
clf, x=linspace(0,8*pi,100);
y1=sin(x+cos(x+sin(x)));
y2=0.2*x+sin(x+cos(x+sin(x)));
plot(x,y1,'k:',x,y2,'k-');
legend('sin(x+cos(x+sin(x))','0.2x+sin(x+cos(x+sin(x)))')
```

思考1: 在图中，显然$f(x)$=sin(x+cos(x+sin(x))是周期函数，它的周期p=2π，而另一个函$g(x)$=0.2x+sin(x+cos(x+sin(x)))则好像是一个倾斜的周期函数，我们的问题是：**如何刻画这种“倾斜的拟周期函数”？**



回顾:

如果一个函数的周期是p，那么$f(x+p)=f(x)$，换一种写法：

$$f(x+p)-f(x)=0$$

即$f(x+p)-f(x)$的差值永远是0.

基于这种理解，可以把周期函数的定义进行扩充：假定这个差值不是0而是非零的常数，我们就可以把这个函数称为“线性周期的”，也就是说，可以提出下面的定义.

定义 假设$p>0$，当且仅当存在一个实常数M，使得对所有的x都有

$$f(x+p)=f(x)+M,$$

则称$f(x)$是线性p周期的，常数M被称为f的p变换常数.

思考:

由这一定义，p周期函数是一种特殊的线性p周期函数，为M=0的情形.

容易验证$g(x)=0.2x+\sin(x+\cos(x+\sin(x)))$是线性$2\pi$周期函数，g(x)的第一项0.2x是线性函数，第二项$\sin(x+\cos(x+\sin(x)))$是$p=2\pi$的周期函数，这是不是线性p周期函数的一般特征呢?也就是说，线性p周期函数是一个线性函数同一个p周期函数之和吗?（理论分析留作思考）它与周期函数有何关系?

为考察线性周期函数的性质，我们可以选择一些特殊的函数进行观察，归纳出某些结论，然后进行必要的理论证明.（通过数学实验探索规律的常规思路）

实验探索:

让我们给定一个p周期函数**h(x)**，考察下面的问题.

问题1：若**h(x)**是一个**p**周期函数，其原函数**(antiderivative)**

$$\mathbf{S}(\boldsymbol{x}) := \int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{h}(\boldsymbol{t}) \boldsymbol{dt}$$

的图象有什么特点?

我们可取一个周期函数来进行观察，例如取

h(x)=sin(x+cos(x))，并在区间**[a,b]=[-8,30]**上计算

$\mathbf{S}(\boldsymbol{x}) := \int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{h}(\boldsymbol{t}) \boldsymbol{dt}$并作出上限积分函数的图象

数值积分可用**Matlab**指令（后面实验9会专门介绍数值积分）

quad('f',积分下限，积分上限)

来计算，其中**f**是被积函数，需编制下面函数子程序.

（程序讲解）

实验探索:

让我们给定一个p周期函数**h(x)**，考察下面的问题.

问题**1**：若**h(x)**是一个**p**周期函数，其原函数**(antiderivative)**

$$\mathbf{S}(x) := \int_a^x h(t)\,dt$$

的图象有什么特点?

我们可取一个周期函数来进行观察，例如取 **h(x)=sin(x+cos(x))**，并在区间**[a,b]=[-8,12]**上计算 $\mathbf{S}(x) := \int_a^x h(t)\,dt$并作出上限积分函数的图象

数值积分可用**Matlab**指令（后面实验9会专门介绍数值积分）

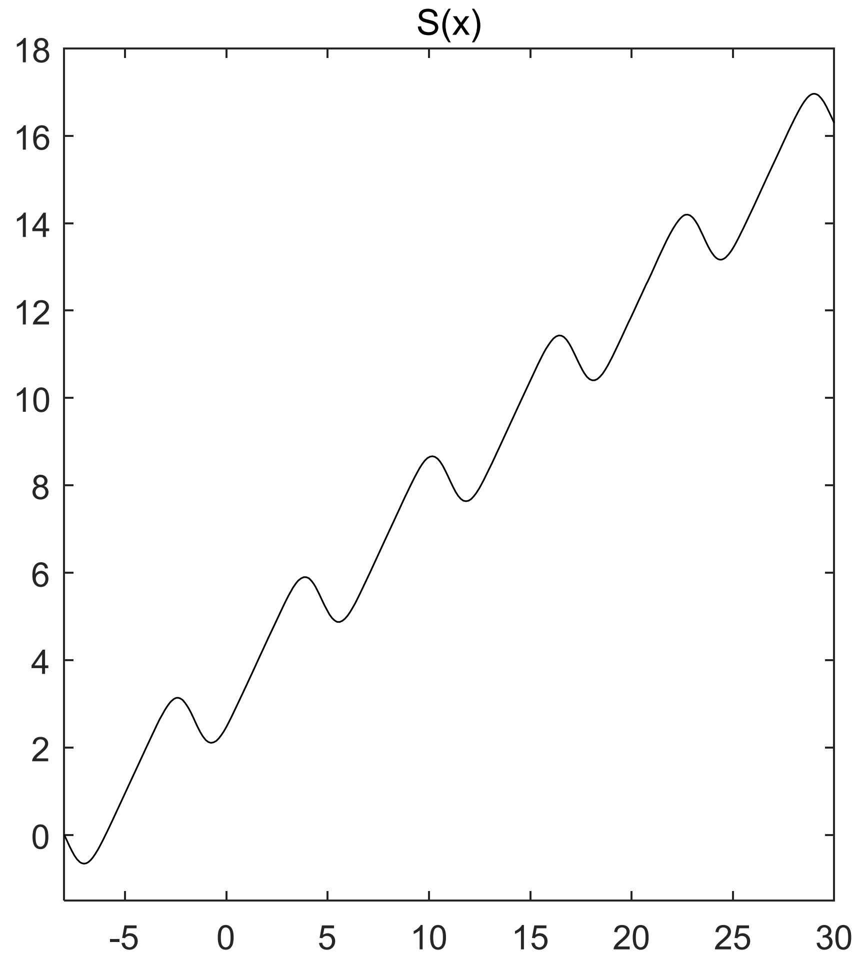
quad('f',积分下限，积分上限**)**

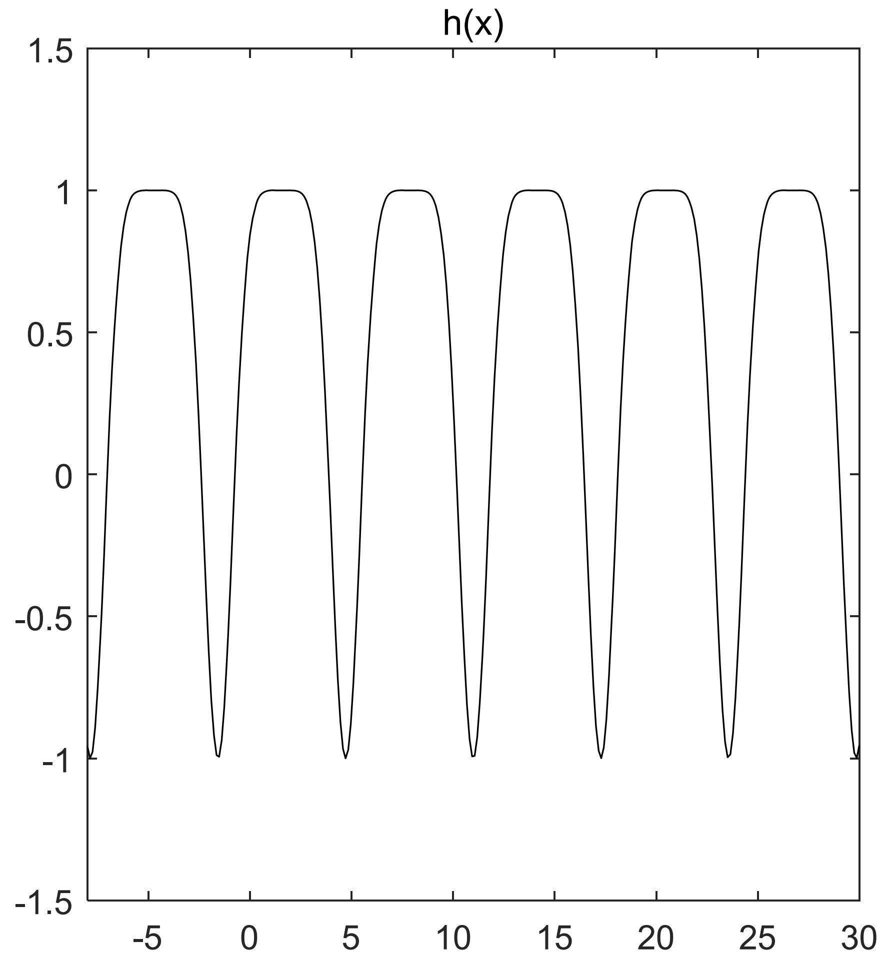
来计算，其中**f**是被积函数，需编制下面函数子程序.

（程序讲解）

实验探索:

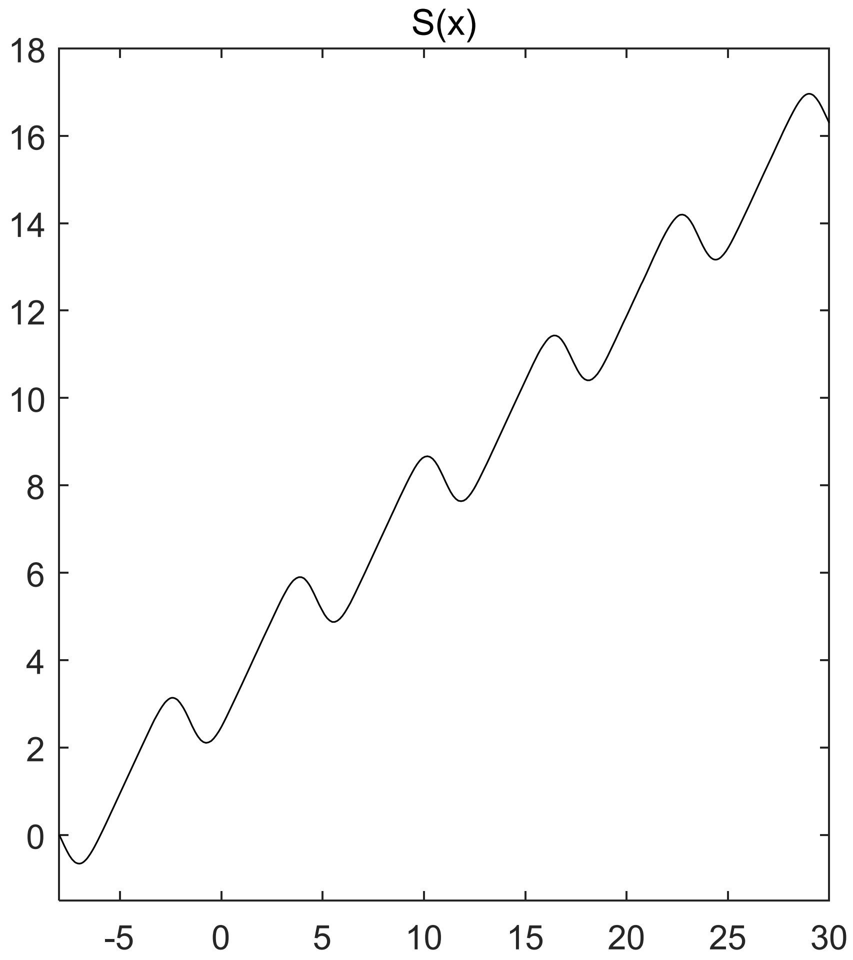
程序运行结果如下图，观察：**S(x)的曲线向上倾斜，似乎沿着一条倾斜的直线方向进行周期波动**





实验探索:

程序运行结果如下图，观察：**S(x)的曲线向上倾斜，似乎沿着一条倾斜的直线方向进行周期波动**



猜想：能否找到一条直线，使函数**S(x)**与该直线的差恰为某个周期函数**?**

思考：你能通过实验把这条直线找出来吗**?**（假设只有数据）

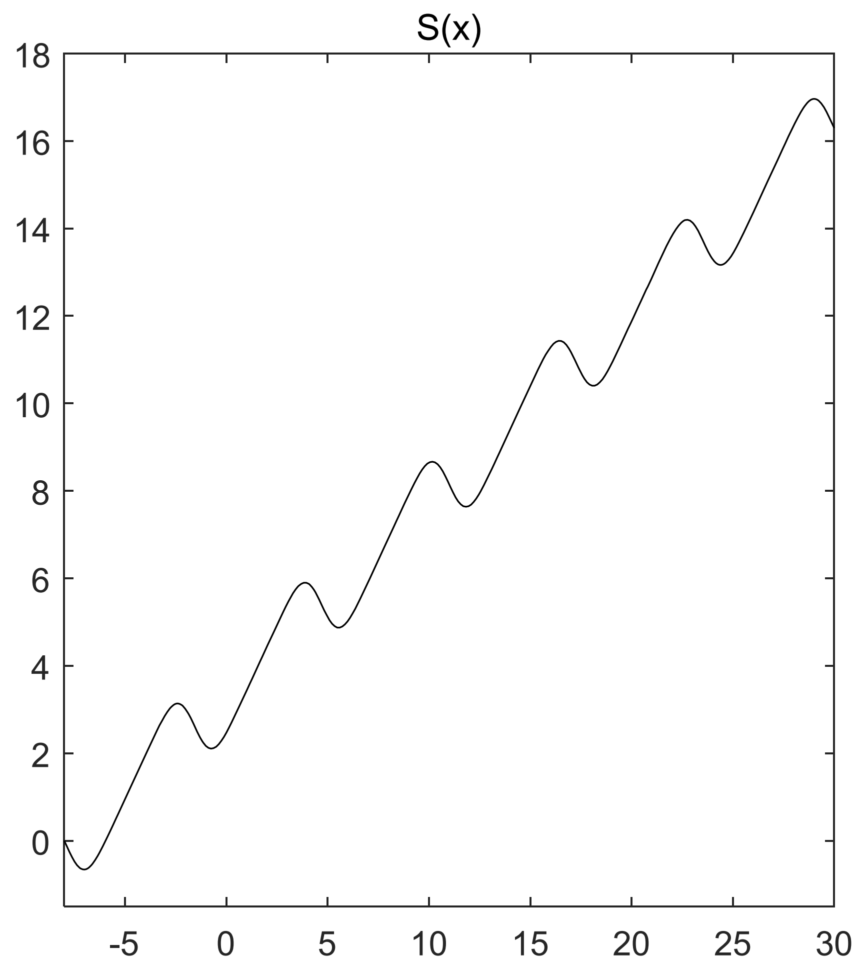
如果找到了这一条直线，则

S(x)—该直线

的图形应该是水平的周期函数，就是说我们把图中的倾斜函数变成水平的了，试用图形把这种情形反映出来.

实验探索:

程序运行结果如下图，观察：**S(x)的曲线向上倾斜，似乎沿着一条倾斜的直线方向进行周期波动**



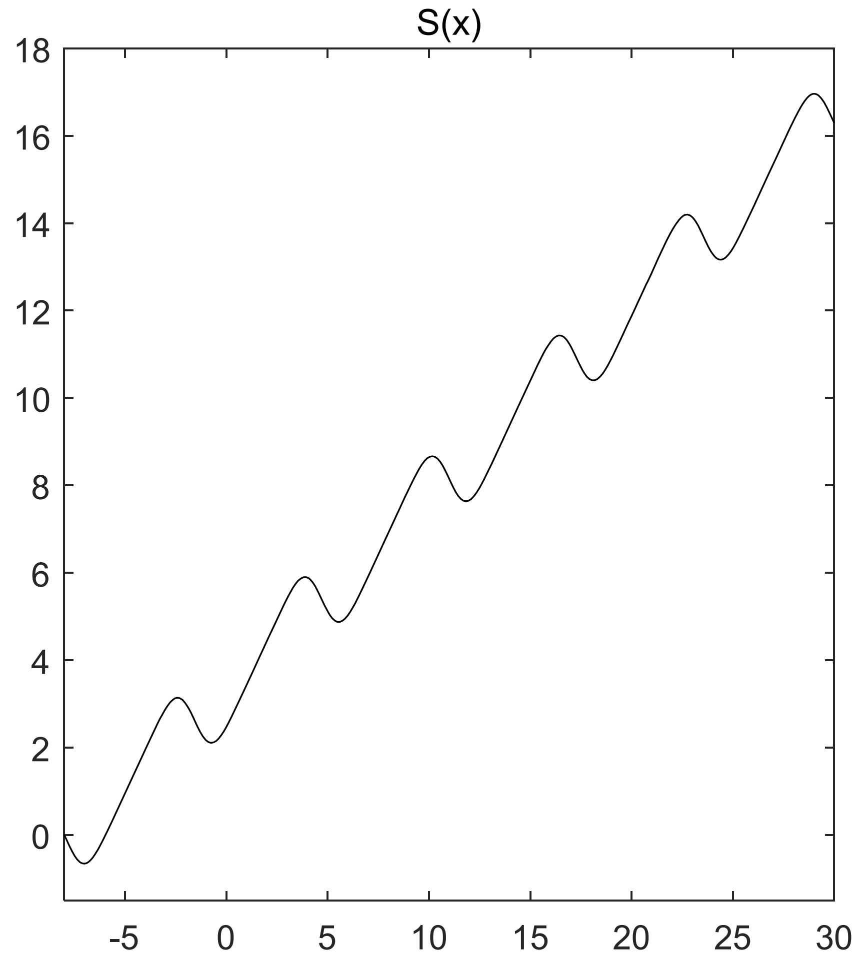
思路

(1)试探法：选取线性函数**y=k(x-a)**，调整**k**使差函数的图象变为水平；

请选择一个周期函数**(**例如**h(x)=sin(x+cos(x)))**，用**Matlab**计算它的原函数，并编制程序，用试探法找到这条直线**.**

实验探索:

程序运行结果如下图，观察：**S(x)的曲线向上倾斜，似乎沿着一条倾斜的直线方向进行周期波动**



思路

(1)试探法： 选取线性函数**y=k(x-a)**，调整**k**使差函数的图象变为水平；

请选择一个周期函数**(**例如**h(x)=sin(x+cos(x)))**，用**Matlab**计算它的原函数，并编制程序，用试探法找到这条直线.

(2)理论分析法： 取

$$\boldsymbol{k = \frac{1}{p}\int_0^p h(t)dt}$$

试试，观察其结果，**k**可以作为这条直线的斜率吗？请加以分析，给出一个合理的说明.

实验总结:

观察周期函数的原函数的曲线形状，猜测它与线性周期函数有密切的关系：

猜想　一个连续函数h(x)是p周期的充分必要条件是其原函数

$$S(x)=\int_a^x h(t)dt$$

是线性p周期的。

考虑$S(x+p)-S(x)=\int_x^{x+p} h(t)dt$

我们可以用Matlab观察函数$\int_x^{x+p} h(t)dt$的图象，发现它是常数（程序实验 + 理论思考）

- 线性p周期函数分解为线性函数和一个p周期函数之和。

- 对于连续可微的线性p周期函数S(x)，如果能够确定相应直线斜率k= $\frac{1}{p}\int_0^p S(t)dt$，则有

$$S(x) = k(x-a) + \int_a^x (S'(t) - k)dt$$

本实验告诉我们如何扩展自己的思维（扩充了周期函数的定义，线性p周期函数以周期函数作为特例），用Matlab可以帮助我们观察它应具有的图形.从这些观察中，归纳成某种猜想并加以分析论证，这种观察一猜想一论证的过程是数学实验的一种模式.当我们试图去发现某些规律时，特殊例子的观察往往能引导人们走向正确的研究途径，计算机可以帮助我们进行观察，但是却代替不了我们的思维，真正的成果还需要积极思考，大胆假设，小心求证.关键在于能否提出有意义的问题

实验2.2 Fibonacci Sequence

给定如下的数列

1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,…,

其递推关系式由

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n,\ n = 1,2,\cdots, F_1 = 1, F_2 = 1$$

给出.该数列被称为Fibonacci数列.

Fibonacci数列经常以著名的养兔问题提出来.某人养了一对兔子(公母各一只).一月后，这对兔子生了一对小兔.以后每月，每对成熟(即一月以上）的兔子都生育一对小兔.假设兔子不会死亡，问一年后总共有多少对兔子?显然，问题的答案就是数列的第十二项.

实验2.2 Fibonacci Sequence

为考察**Fibonacci** 数列的极限与规律，我们用计算机计算出**Fibonacci**数列每一项的值，并在二维平面上画出顺次连接点**(n,F_n),n=1,2,...,N**的折线图：其中**N**是一个大整数。

探索实验 1

分别取N=20,50,100,200,500,观察Fibonacci数列的折线图.Fibonacci数列是否单调增?它是否趋于无穷?它增加的速度是快还是慢?你能否证实你的观察?

设计程序、实验观察

（不同的实现方法）

实验2.2 Fibonacci Sequence

不难发现

$$\frac{3}{2}F_{n+1} < F_{n+2} = F_{n+1} + F_n < 2F_{n+1}.$$

因此， F_n的阶应该在**(3/2)^n**与**2^**n之间**.**

为进一步研究**Fabonacci**数列F_n的特性，我们将F_n取对数**(**本实验中的对数均指自然对数），在直角坐标系中画出顺次连接点**(n,log(**F_n**))**，**n=1,2,…, N**的折线图**.**此时的折线图近乎于一条直线**.**因此，我们猜测**log(**F_n**)**是**n**的线性函数**.**取**N=1000**，对上述数据进行拟合可得

$$\log(F_n) \approx 0.803\,903 + 0.481211\text{n},$$

故

$$F_n \approx 0.447\,567 \cdot 1.618\,03^n.$$

实验2.2 Fibonacci Sequence

探索实验2

分别取N=2000，5000，10000，用直线去拟合数据(n,log(F_n))，n=1，2，…，N，由此求数列F_n的近似表示.注意观察log(F_n)的线性项的系数，它与黄金分割数有何联系?

实验2.2 Fibonacci Sequence

由计算机观察到的上述结果我们似乎可以猜测数列F，的通项具有形式

$F_n = cr^n$,

将上式代人递推公式得 $r^2 = r + 1$，

从而$\mathrm{r} = (1 \pm \sqrt{5})/2$.因为数列趋于无穷.故取

$$\mathrm{r} = (1 + \sqrt{5})/2.$$

于是

$$F_n = c(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n.$$

然而，该公式并不满足$F_1 = F_2 = 1$ ，即并非数列F_n的通项公式.不过，它仍然是数列F_n的主项.

实验的猜想未必总是可靠的（大胆猜测，小心求证）

为进一步得到Fibonacci数列的通项，我们构造数列

$$b_n = F_n - cr^n,$$

可得数列b_n仍然满足同样的递推公式. 因而我们猜测，数列b_n的通项也具有形式

$$b_n = \bar{c}\,\bar{r}^n$$

其中$\bar{r}$也满足方程$\bar{r}^2 = \bar{r} + 1$，故$\bar{r}$=(1—$\sqrt{5}$)/2.这样，我们得到Fibonacci数列的通项的一个新的猜测

$$F_n = cr^n + \bar{c}\bar{r}^n.$$

由条件$F_1 = F_2 = 1$确定出c=1/$\sqrt{5}$，c=—1/$\sqrt{5}$，从而我们得到

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n).$$

这样，Fibonacci数列趋于无穷的阶为$\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n$.

试验验证：

通过实验验证上面推导的公式

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

正是Fibonacci数列的通项公式

Fibonacci数列与自然界中的许多现象，如植物的枝干与叶子的生长有紧密的联系.它在纯数学领域的一个极为成功的应用是协助苏联数学家马蒂雅舍维奇解决了著名的Hilbert第十问题.此外，它在优化、运筹以及计算机科学与艺术领域都具有极大的应用价值.

实验2.3 Harmonic series

熟知，无穷级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}, \qquad (1)$$

当a>1时收敛，当a<=1时发散.特别地，当a=1时，级数（1)称为调和级数.

一个令人感兴趣的问题是，调和级数发散到无穷的速度有多快?或者说数列

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

趋于无穷的速度有多快?

一个直观的方法仍然是画出由点(n,S_n)，n=1，2，…，N构成的折线图. (编写程序，分析)

实验2.3 Harmonic series

实验探索1：

一个直观的方法仍然是画出由点(n,S_n)，n=1，2，…，N构成的折线图. (编写程序，分析)

取充分大的N，观察调和级数的折线图.你觉得它发散的速度是快还是慢?

将它的图形与y=x，y=$\sqrt{x}$以及y=$\sqrt[4]{x}$做比较，谁的发散速度快?

从上述实验的结果看出，调和级数发散的速度较慢，但是，它到底以什么样的速度发散到无穷?让我们再做下面的练习.

实验2.3 Harmonic series

实验探索2：

观察所画出的点组成的图形.假如将它们依次连接成光滑曲线，像是什么函数的图像？

好像是对数函数的图像？

为了验证这些点连成的曲线是否对数函数的图像，可以**将对数函数的图像与上述图像画在同一个坐标系中进行比较：**

观察发现点集t=(n, S_n)(1≤n≤100)连成的曲线与y=lnx的曲线并不重合，但趋向于“平行”：当n增大时S_n与ln$n$之差接近于常数.为了验证这是否是事实，**可将y=lnx的曲线向上平移适当的距离c成为y=lnx+c,看它是否与点集t连成的曲线重合.**

实验2.3 Harmonic series

实验探索3：

为了研究当n无穷增大时C(n)= S_n -lnn是否趋于一个常数，将坐标为(n, S_n -ln$n$)(1≤n≤100)的点依次连接成光滑曲线c1，再将坐标为(n, D(n) = S_n -ln(n+1))(1≤n≤100)的点依次连接成光滑曲线c2.在同一坐标系中画出曲线c1，c2.观察c1递减和c2递增以及二者相互接近的现象.

计算n = 10^m(m = 3,4,5,6)时C(n)= S_n -ln$n$和D(n)= S_n -ln(n+1)的值.观察C(n)递减、D(n)递增、二者趋于同一极限的现象.并求出这个极限C.

实验2.3 Harmonic series

实验探索4（换个角度）：

对充分大的一系列n,计算$S_{2n}-S_n$

- 你能否猜测出 $S_{2n}-S_n$,当n趋于无穷的极限?
- 更一般地，$S_{2^k n}-S_n$趋于无穷的极限是什么?
- 反过来，固定n，让k趋于无穷，$S_{2^k n}$趋于无穷的速度是什么?
- 你能否由此得出S_n当n趋于无穷的极限阶?

实验2.3 Harmonic series

总结:

- 从观察中，归纳某种猜想并加以分析论证，这种观察—猜想—论证的过程是数学实验的一种模式.
- 探索一些重要的特殊情况往往对理解一般的情况有帮助和启发。数学的探索很多时候是先从特殊的情况入手的。

实验课探索

实验探索1：

取定0<a<1，用前面类似的分析方法研究级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{a}} \qquad (1)$$

趋于无穷的阶。编写程序，观察实验结果，总结规律，形成定理，并尝试给出数学证明。

对a=0.5情形，给出精细的渐进估计。

即，找出如下的f(n)和常数c.

$$\lim\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{0.5}}-f(n)\right)=c$$

实验课探索

实验探索2：

有一个兔子想爬楼梯，每次可以跳1个或2个台阶。

- 若楼梯共5个台阶，一共有多少种跳法？请用MATLAB编程进行实验求解。
- 若楼梯共10个台阶，一共有多少种跳法？请用MATLAB编程进行实验求解。
- 若楼梯共n个台阶，一共有多少种跳法？请通过实验观察，总结规律，形成一般的数学结论。