数学实验课后作业7

上交截止日期:

2024年12月25日16:00

满分14分

实验1

设$\{\phi_j(x)\}$为$[-1,1]$上的标准化的Legendre多项式，即$\phi_j(x)$的次数为j，且

$$\int_{-1}^{1}\phi_i(x)\phi_j(x)dx=\begin{cases}1, & \text{if } i=j. \\ 0, & \text{if } i\neq j.\end{cases}$$

设$\{w_i\}_{i=1}^{n+1}$为(n+1)个点的Gauss求积公式的权重，$\{x_i\}_{i=1}^{n+1}$为多项式$\phi_{n+1}(x)$的根.

[1]. 记$P_i=\frac{w_i\sum_{j=0}^{n}\phi_j{}^2(x_i)}{n+1}$, $1\le i\le n+1$, 试验通过实验观察$\sum_{i=1}^{n+1}P_i$与1之间的关系；并结合Gauss求积公式，给出严格的数学证明，证明你的猜想. (1分)

[2]. 设$f(x)$为一个定义$[-1,1]$上的函数，记向量

$$\hat{\boldsymbol{c}} = \underset{c\in R^{n+1}}{argmin} \sum_{i=1}^{n+1} \left|\sum_{j=0}^{n} c_j \phi_j(x_i) - f(x_i)\right|^2,$$

试取若干不同的$f(x)$，通过实验观察探索$\hat{\boldsymbol{c}}$的第k个分量，记为$\hat{c}_k$，与$f(x_i)\ w_i\phi_k(x_i)$之间的关系；并给出严格的数学证明证明你的猜想. (2分)

[3]. 定义向量$\boldsymbol{\Phi}_i=(\phi_0(x_i),\phi_1(x_i),\cdots,\phi_n(x_i))$。任意取初始向量$\boldsymbol{c}^{(1)}\in[-1,1]^{n+1}$，进行下面的迭代：

$$\boldsymbol{c}^{(i+1)}=\boldsymbol{c}^{(i)}+\frac{f(x_i)-\boldsymbol{c}^{(i)}\cdot\boldsymbol{\Phi}_i}{\|\boldsymbol{\Phi}_i\|_2^2}\boldsymbol{\Phi}_i,\quad i=1,2,\cdots,n+1,$$

分别取若干不同的$f(x)$，例如$f(x)=sin(\pi x),f(x)=e^x$，请用MATLAB编程进行数学实验，观察上述迭代的误差$e_i=\left\|\boldsymbol{c}^{(i)}-\hat{\boldsymbol{c}}\right\|_2$随$i$的变化规律和收敛性，并请从数学上严格证明你的观察结果或猜想。(3分)

实验2

寻找一类非线性Dirac方程的球对称孤波解可归结为求解下面的常微分方程

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}r} + f + \left(f^2 - g^2\right) f = 0, \\ \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r} + \frac{2f}{r} + \nu g + \left(f^2 - g^2\right) g = 0, \\ f\left(0\right) = 0, g\left(0\right) = g_0. \end{cases} \tag{1}$$

其中ν为一个正的常数，g_0为$g(r)$的初值，r取值为$[0,+\infty)$。显然，不同的初值g_0对应这不同的解。物理学家感兴趣的非平凡孤波解满足以下条件

$$\begin{cases} g\left(r\right) > 0, f\left(r\right) \geq 0, \\ \lim\limits_{r\to\infty} g\left(r\right) = \lim\limits_{r\to\infty} f\left(r\right) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

由于方程(1)是非线性的，我们无法得到其解析解。下面我们通过数值方法来探寻满足条件(2)的物理解。

[1] 考虑如下的数值方法求解方程(1)：

$$\begin{cases} \frac{g_{n+1}-g_n}{\Delta r} + f_n + (f_n^2 - g_n^2) f_n = 0, \\ \frac{r_{n+1}^2 f_{n+1} - r_n^2 f_n}{r_{n+\frac{1}{2}}^2 \Delta r} + \nu g_n + (f_n^2 - g_n^2) g_n = 0. \end{cases} , n = 0, 1, 2, \cdots$$

取充分小的步长，取ν=0.032，取不同的初值g_0，编程实现上述数值格式求解方程(1)；并分析该数值方法的优点。(2分)

[2] 取不同的初值g_0，取ν=0.032，观察f(r)和g(r)在r很大时（即r逐渐接近远处）的规律与g_0的关系，将该观察结果总结提炼成猜想。(2分)

[3] (0.5分)证明方程（1）的解关于初值的连续依赖性：即考虑如下扰动的初值问题

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}g^{\varepsilon}}{\mathrm{d}r} + f^{\varepsilon} + \left(\left(f^{\varepsilon}\right)^{2} - \left(g^{\varepsilon}\right)^{2}\right) f^{\varepsilon} = 0, \\ \frac{\mathrm{d}f^{\varepsilon}}{\mathrm{d}r} + \frac{2f^{\varepsilon}}{r} + \nu g^{\varepsilon} + \left(\left(f^{\varepsilon}\right)^{2} - \left(g^{\varepsilon}\right)^{2}\right) g^{\varepsilon} = 0, \\ f^{\varepsilon}(0) = 0, g^{\varepsilon}(0) = g_{0} + \varepsilon. \end{cases} \tag{3}$$

任意给定$A>0$，对任意$w>0$，存在$\delta(A,w)>0$，当$|\varepsilon|<\delta(A,w)$时

$$\sup_{r\in[0,A]} \left|g^{\varepsilon}(r) - g(r)\right| < \omega,\ \sup_{r\in[0,A]} \left|f^{\varepsilon}(r) - f(r)\right| < \omega.$$

[4] (3分)取ν=0.032。结合第[1]问中的数值方法、第[2]问中的观察和第[3]中的结论、以及数学实验课上学过的所有知识，请设计一个算法寻找方程(1)满足条件(2)的解；用MATLAB编程实验，并画出数值解f(r)、g(r)的图像。

[5](0.5分)取ν=0.7，重复第[4]问的实验，并画出数值解f(r)、g(r)的图像。