姓 名　　　　　　　　　　　　　序号

第一章《函数与极限》测试题

1．填空题

（1）若 $f\left(\frac{1+\ln x}{1-\ln x}\right)=\frac{1}{x}$，则 $f(x)=$______________________；

（2）函数 $f(x)$ 的定义域为$[a,b]$，则 $f(2x-1)$ 的定义域是______________________；

（3）若 $x\to 0$ 时，无穷小 $\ln\frac{1-x^2}{1+x^2}$ 与 $a\sin^2\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$ 等价，则常数 $a=$______________________；

（4）设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n-1)x}{nx^2+1}$，则 $f(x)$ 的间断点为 $x=$______________________；

（5）函数 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}-\arcsin\frac{x+1}{3}$ 的定义域为______________________.

2．单选题：

（1）当 $x\to 0$ 时时，变量 $\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$ 是（　　　　）

（A）无穷小；　（B）无穷大；（C）有界的，但不是无穷小；　　（D）无界的，但不是无穷大.

（2）设函数 $f(x)=\frac{x}{a+e^{bx}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$，则常数 a,b 满足（　　　　）

（A）$a<0,b<0$；　（B）$a>0,b>0$；　（C）$a\ge 0,b<0$；　（D）$a\le 0,b>0$.

（3）设 $f(x)=2^x+3^x-2$，则当 $x\to 0$ 时（　　　　）

（A）$f(x)$ 与 x 是等价无穷小；　（B）$f(x)$ 与 x 是同阶但非等价无穷小；

（C）$f(x)$ 比 x 高阶无穷小；　（D）$f(x)$ 比 x 低阶无穷小.

（4）设对任意的 x，总有 $\varphi(x)\le f(x)\le g(x)$ 且 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 为（　　　　）

（A）存在且等于零；　（B）存在但不一定等于零；　（C）一定不存在；　（D）不一定存在.

3．求下列极限

（1）$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$；

（2）$\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{2x}{x^2+1}\right)^{\frac{2x}{(x-1)^2}}$

（3）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(\mathrm{e}^x+\sin^2 x)-x}{\ln(\mathrm{e}^{2x}-x^2)-2x}$；

（4）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^x-1}{\ln(\cos x)}$；

（5）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x^4}-\sqrt[3]{1-x^2}}{4x^2-3x^3}$；

（6）$\lim\limits_{x\to1}x^{\frac{1}{1-x}}$；

4．确定 a,b 的值，使 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+ax^3)}{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}, & -\dfrac{\pi}{4}<x<0\\ b, & x=0\\ \dfrac{1}{x}\ln\dfrac{1-x+x^2}{1+x+x^2}, & x>0\end{cases}$ 在 $(-\dfrac{\pi}{4},+\infty)$ 内连续.

5. 指出函数的间断点及其类型.

（1） $f(x)=\dfrac{e^{x}-e^{\frac{1}{x}}}{e^{-1}-e^{\frac{1}{x}}}$

（2） $f(x)=\dfrac{x^{2}-x}{|x|(x^{2}-1)}$；

6. 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln[1+\dfrac{f(x)}{\sin x}]}{2^{x}-1}=3$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^{2}}$.

7. 设 a_1,a_2,a_3,a_4 为正常数，证明方程 $\dfrac{a_1}{x}+\dfrac{a_2}{x-1}+\dfrac{a_3}{x-2}+\dfrac{a_4}{x-3}=0$ 有且仅有三个实根.

8. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)=f(b)$，证明：存在点 $c\in(a,b)$ 使得 $f(c)=f(c+\dfrac{b-a}{2})$.

9. 求函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+2}-x^{-n}}{x^n+x^{-n-1}}\,(x>0)$ 的连续区间.

10. 设 $f(x)=\dfrac{(\sqrt{1+3x}-b)(x-b)}{(x-a)(x-1)}$ 同时满足以下两个条件

（1）$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\infty$，（2）$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=A$（$A\neq 0$ 为常数）；试确定常数 a,b 的值.

11. 设 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ 存在，且 $f(x)=3x^2+2x\lim\limits_{x\to 1}f(x)$，求 $f(x)$。

12. 设 $\boldsymbol{a_1=2}$，$\boldsymbol{a_{n+1}=\dfrac{1}{2}(a_n+\dfrac{1}{a_n})\ (n=1,2,\Lambda\ )}$,证明：$\boldsymbol{\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1}$.

13. 设 $\boldsymbol{x_1=1}$，$\boldsymbol{x_2=1+\dfrac{x_1}{1+x_1}}$，$\boldsymbol{x_n=1+\dfrac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}}$，求 $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}$.