高等数学

Ch1 函数与极限

§ 1 函数

例 1　符号函数　$$y = sgn\,x = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

例 2　取整函数　$y=[x]$——表示不超过 x 的最大整数

例 3　Dirichlet 函数 $D(x)=\begin{cases}1 & x\text{为有理数}\\0 & x\text{为无理数}\end{cases}$

例 1 判断下列函数是否有界？

（1）$y=\frac{lg\,x}{x}$　$(x\geq 1)$

（2）$y=\frac{x}{1+x^2}$ $(-\infty<x<+\infty)$

（3）$y=2^{\frac{1}{x}}$ $(0<x<1)$

（4）$y=2^{\frac{1}{x}}$ $(-1<x<0)$

例2　判断：若函数在[a,b]上有定义，则必于其上有界

~反函数

例 1 求$y=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)\quad(x\geq 1)$的反函数

例 2 求$y=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$ 的反函数

~基本初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为基本初等函数。

补充公式

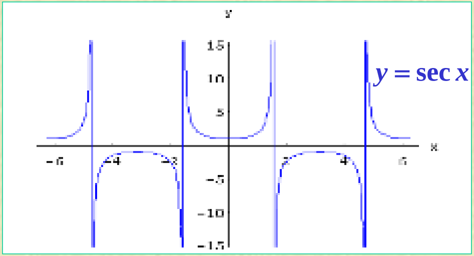
$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}\ ,\qquad \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

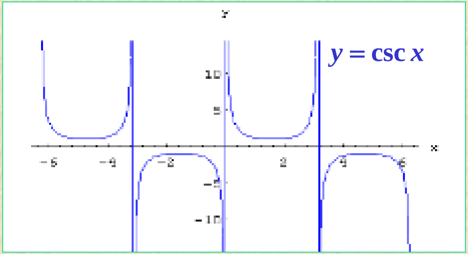
$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

$$1 + \cot^2 x = \csc^2 x$$

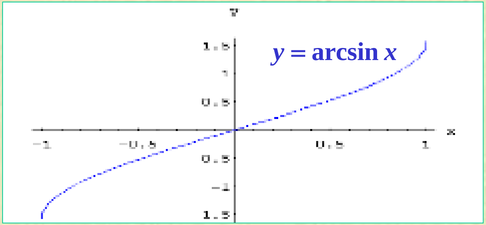
正割函数 $y=\sec x$



余割函数 $y = \csc x$



5.反三角函数 反正弦函数 $y = \arcsin x$

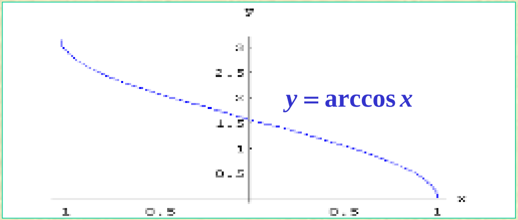


$$y = arcsin\, x$$

定义域 $x \in [-1, 1]$，值域 $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

奇函数，增函数

反余弦函数 $y = \arccos x$

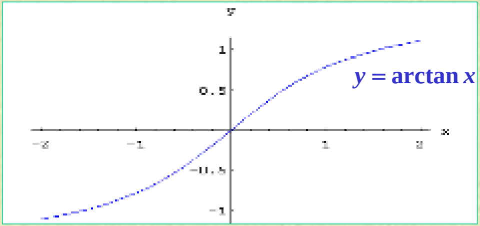


$$\boldsymbol{y = arccos\,x}$$

定义域 $\boldsymbol{x} \in [-\mathbf{1}, \mathbf{1}]$**，值域** $\boldsymbol{y} \in [\mathbf{0}, \boldsymbol{\pi}]$

非奇非偶函数，减函数

反正切函数 $y = \arctan x$

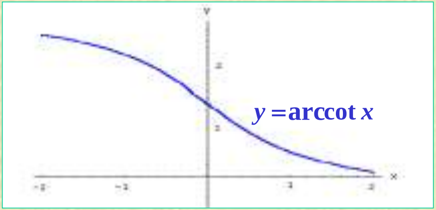


$$y = arctan\, x$$

定义域 $x \in$（$-\infty$，$+\infty$），值域 $y \in$（$-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$）

奇函数，增函数

反余切函数 $y = \operatorname{arccot} x$



幂函数,指数函数,对数函数,三角函数和反三角函数统称为基本初等函数.

上页 下页 返回

$$\boldsymbol{y = arc\cot x}$$

定义域 $x \in$ （$-\infty$，$+\infty$）, 值域 $y \in$ （$0, \pi$）

非奇非偶函数，减函数

运算公式

1） $\boldsymbol{arcsin(sinx) = x,\ x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$

$\boldsymbol{\sin(arcsinx) = x,\ x \in [-1, 1]}$

2) $\boldsymbol{arccos(cosx) = x,\ x \in [0, \pi]}$

$\boldsymbol{\cos(arccosx) = x,\ x \in [-1, 1]}$

3) $\boldsymbol{arctan(tanx) = x,\ x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}$

$$\tan(arctanx) = x,\ x \in R$$

4） $$arc\,cot(cotx) = x,\ x \in (0, \pi)$$

$$\cot(arccotx) = x,\ x \in R$$

负值公式

1）$\boldsymbol{arcsin(-x)=-arcsinx}$ ，$\boldsymbol{x\in[-1,1]}$

2）$\boldsymbol{arccos(-x)=\pi-arccosx}$，$\boldsymbol{x\in[-1,1]}$

3）$\boldsymbol{arctan(-x)=-arctanx}$，$\boldsymbol{x\in R}$

4）$\boldsymbol{arc\,cot(-x)=\pi-arccotx}$，$\boldsymbol{x\in R}$

~初等函数

由常数及基本初等函数经过有限次四则运算及有限次的复合步骤而成的并且可以用一个式子表示的函数，称为初等函数。

四、双曲函数与反双曲函数

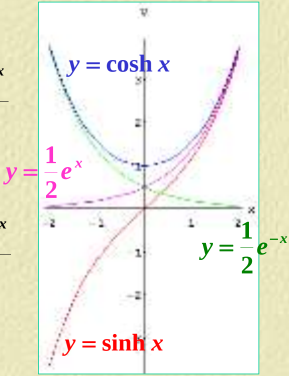
1.双曲函数

双曲正弦 $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

$D:(-\infty,+\infty)$,　　奇函数.

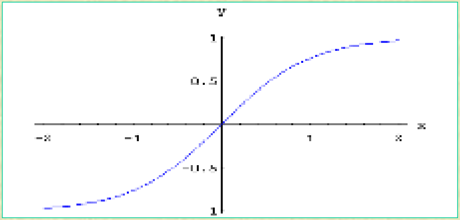
双曲余弦 $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

$D:(-\infty,+\infty)$,　　偶函数.



双曲正切 $\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

$D:(-\infty,+\infty)$　　奇函数,　　有界函数,



上面　下面　返回

双曲函数常用公式

$$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y;$$

$$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y;$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1;$$

$$\sinh 2x = 2\sinh x \cosh x;$$

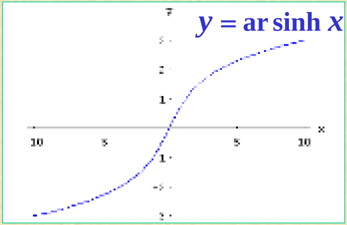
$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x.$$

2.反双曲函数

反双曲正弦 $y = \operatorname{arsinh} x$;

$$y = \operatorname{arsinh} x$$

$$= \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$



$D: (-\infty, +\infty)$

奇函数,

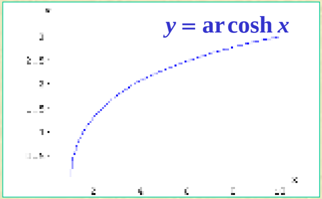
在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调增加.

反双曲余弦 $y = \operatorname{ar}\cosh x$

$$y = \operatorname{arcosh} x$$

$$= \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

$D: [1, +\infty)$

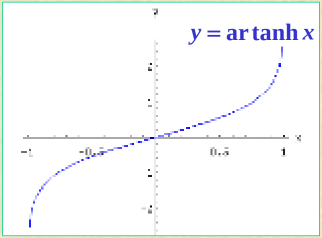


在 $[1, +\infty)$ 内单调增加.

反双曲正切 $y = \operatorname{ar\,tanh} x$

$$y = \operatorname{artanh} x$$

$$= \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}.$$



$D: (-1,1)$

奇函数,

在 $(-1,1)$ 内单调增加.

三角公式

和差化积公式

1. $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

2. $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

3. $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

4. $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

积化和差公式

1. $\sin\alpha \bullet \cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$

2. $\cos\alpha \bullet \sin\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$

3. $\cos\alpha \bullet \cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$

4. $\sin\alpha \bullet \sin\beta = -\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$

例 1　设$\varphi(x)=\begin{cases}3+x & x<0\\ 3 & x\geq 0\end{cases}$，求$\varphi[\varphi(x)]$

例 2　设$f(x)=\begin{cases}1 & |x|\leq 1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$，求$f[f(x)]$

例3　求$f(x)=\begin{cases}3x+1 & -3\leq x<0\\ 3^x & 0\leq x<1\\ x^2+2 & 1\leq x\leq 3\end{cases}$的反函数

答案

例 1 $\varphi[\varphi(x)]=\begin{cases} 6+x & x<-3 \\ 3 & x\ge -3 \end{cases}$

例 2 $f[f(x)] \equiv 1$

例 3 $f^{-1}(x)=\begin{cases} \frac{x-1}{2} & -8\le x<0 \\ log_3 x & 1\le x<3 \\ \sqrt{x-2} & 3\le x\le 11 \end{cases}$

§2　极限的定义

一．数列极限的定义

数列

1、2，4，8，…2^n…

2、$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{8}$，…$\frac{1}{2^n}$…

3、1，-1，1，…$(-1)^{n+1}$…

4、$\frac{1}{2}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{3}{4}$，…$\frac{n}{n+1}$…

5、2，$\frac{1}{2}$，$\frac{4}{3}$，$.\frac{3}{4}\ldots\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}$..

Def: 设数列$\{x_n\}$，a为常数，

若$\forall\varepsilon>0,\exists N.\ \ni.$当$n>N$时，总有$|x_n-a|<\varepsilon$，则称数列$\{x_n\}$的极限为$a$，或收敛于$a$，

记为 $\lim_{n\to\infty}x_n=a$

"$\varepsilon - N$" 定义的另几个形式:

1.$\forall \varepsilon > 0, \exists N. \ni.$当$n > N$时，有 $|x_n - a| < k\varepsilon$（k为正常数），则,$\lim_{n\to\infty} x_n = a$

2. .$\forall \varepsilon \in (0,1), \exists N. \ni.$当$n > N$时，有

$|x_n - a| \le \varepsilon$， 则$\lim_{n\to\infty} x_n = a$

3. .$\forall \varepsilon = \frac{1}{k}$（$k$为正整数），$\exists N$, ∍.当$n > N$时，有

$|x_n - a| < \varepsilon$，则$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

思考题：

“$\forall N, \exists \varepsilon > 0$. ∍.当$n > N$时，有 $|x_n - a| < \varepsilon$，

则$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$”,对吗？

用极限定义证明$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$的步骤：

①将$|x_n - a|$化简或适当放大为$|x_n - a| \le \varphi(n)$

②$\forall \varepsilon > 0$, 要使$|x_n - a| < \varepsilon$，只要$\varphi(n) < \varepsilon$，可得 $n > N_\varepsilon$

③取 $N = [N_\varepsilon]$

④则当$n > N$时，总有 $|x_n - a| < \varepsilon$，

⑤故$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

例 1　证明$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+(-1)^{n-1}}{n} = 1$

例 2　证明$\lim\limits_{n\to\infty} q^{n-1} = 0$　　　$(|q| < 1)$

例 3　证明$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2-1}}{n} = 1$

公式：1. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$ （$a>1$）

2.$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$

二．函数极限的定义

1．自变量趋于无穷大时函数的极限

Def: 设函数$f(x)$当$|x|$大于某一正数时有定义，

A为常数，

若$\forall \boldsymbol{\varepsilon} > \mathbf{0}, \exists \boldsymbol{X} > \mathbf{0}$，使得当$|x|$>X 时，总有

$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{A}| < \boldsymbol{\varepsilon}$,则称函数$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$当$\boldsymbol{x} \to \infty$时的

极限为$\boldsymbol{A}$ ，或收敛于$\boldsymbol{A}$,

记为 $\lim\limits_{x \to \infty} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}$

用极限定义证明$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$的步骤：

1）将$|f(x)-A|$化简或适当放大为$|f(x)-A|\le \varphi(|x|)$

2）$\forall\varepsilon>0$,要使$|f(x)-A|<\varepsilon$，只要$\varphi(|x|)<\varepsilon$,

可得 $|x|>X_{\varepsilon}$

3） 取 $X=X_{\varepsilon}$,

4）　则当$|x|$>X 时，总有$|f(x)-A|<\varepsilon$，

5) 故$\lim_{x\to\infty} f(x)=A$

例 1　用定义证明$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$

例2　证明：$\lim_{x\to\infty}\frac{x-2}{x+1}=1$

例3　证明：$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$

小结：

一般地，若$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$，则函数$\mathbf{y}=f(x)$的图形有水平渐近线$\mathbf{y}=A$

2．自变量趋于有限值时函数的极限

Def: 设函数$f(x)$在点x_0的某一去心邻域内有

定义，A为常数，

若$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$，使得

当$0 < |x - x_0| < \delta$时，总有$|f(x) - A| < \varepsilon$,

则称函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的

极限为A ，或收敛于A,

记为 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$

N.B.函数在某点的极限与函数在该点是否有定义无关

用极限定义证明$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$的步骤：

1）将$|f(x)-A|$化简或适当放大为$|f(x)-A| \le \varphi(|x-x_0|)$

2）$\forall \varepsilon > 0$,要使$|f(x) - A| < \varepsilon$，

只要 $\varphi(|x - x_0|) < \varepsilon$, 可得 $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$

3) 取$\delta = \delta_\varepsilon$,

4) 则当$|x - x_0| < \delta$ 时，总有$|f(x) - A| < \varepsilon$，

5) 故$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$

例 1　证明：$\lim_{x \to 1}(2x-1)=1$

例 2　证明：$\lim_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0 \qquad x_0 \in R$

例 3　证明：$\lim_{x \to 2} x^2 = 4$

单侧极限

例 1 已知$f(x)=\begin{cases} x-1 & x<0 \\ 0 & x=0 \\ x+1 & x>0 \end{cases}$　求$\lim_{x \to 0} f(x)$

例 2 已知$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & x\neq 1\\ 0 & x=1\end{cases}$

求$\lim\limits_{x\to 1}f(x)$

N.B.函数在某点的极限与函数在该点

是否有定义无关

例 3 求 $\lim\limits_{x \to 0} e^{\frac{1}{x}}$

例4 求 $\lim\limits_{x \to 0} \arctan \frac{1}{x}$

§3　极限的性质以及运算法则

一．极限的性质：

收敛数列的性质

Th1：收敛数列的极限是唯一的（唯一性）

Th2：收敛数列必有界（有界性）

Th3：设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$　　且　$a > 0$　　，

则$\exists N$,当$n > N$时，有$x_n > 0$　（保号性）

coro：设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

若$x_n \le 0$ （$n \to \infty$），则$a \le 0$

Th4：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \{x_n\}$的任一子数列都收敛于 a,

Coro $\{x_n\}$, 若$x_{2k-1} \to a$, $x_{2k} \to a$, 则$x_n \to a$

函数极限的性质

Th1：（唯一性）若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，则该极限唯一

Th2：（局部有界性），若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，

则$\exists M>0,\delta>0$,

使得当$0<|x-x_0|<\delta$*时*，*有*$|f(x)|<M$

Th3：（局部保号性）若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，

且$A > 0 \quad (A < 0)$

则$\exists \delta > 0$, 当$0 < |x - x_0| < \delta$时，

有$f(x) > 0 \quad (f(x) < 0)$

Coro 若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ ， 在 $0 < |x - x_0| < \delta$内有$f(x) \geq 0$, $(f(x) \leq 0)$

则$A \geq 0 \quad (A \leq 0)$

Th4：（函数极限与数列极限的关系）

若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，有数列$\{x_n\}$，$x_n\in D$，($D$为$f(x)$的定义域)，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$（$x_n\neq x_0$），则有$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$

二．极限的运算法则

Th1：极限的四则运算法则

若$\lim f(x) = A$　　　　$\lim g(x) = B$

则 **1º** $\lim[f(x) \pm g(x)]$

$$= \lim f(x) \pm \lim g(x) = A \pm B$$

Coro： $\lim[f_1(x) + f_2(x) + \cdots f_n(x)]$

$$= \lim f_1(x) + \cdots + \lim f_n(x) \qquad ,$$

（当$\boldsymbol{lim\, f_i\,(x)}$存在$\boldsymbol{i=1,2,\cdots n}$）

2º $\boldsymbol{lim[\,f(x)\cdot g(x)]}$

$$\boldsymbol{=lim\, f\,(x)\cdot lim\, g\,(x)=A\cdot B}$$

Coro1： $\boldsymbol{lim\, c\, f(x)=c\, lim\, f\,(x)}$

Coro2： $\boldsymbol{lim[\,f_1(x)\cdots f_n(x)]}$

$$\boldsymbol{=lim\, f_1\,(x)\cdots lim\, f_n\,(x)}$$

（当$\lim f_i(x)$存在，$i = 1, 2 \cdots n$）

3° $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{A}{B}$ （当$B \neq 0$时）

Th2：复合函数的极限运算法则（证明略）

设函数$y = f(u)$, $u = \varphi(x)$复合为函数

$y = f[\varphi(x)]$

复合函数在点x_0的某去心邻域内有定义，

$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x) = u_0$ $\lim\limits_{u\to u_0}f(u) = A$，且

$\exists\delta > 0$, 当$0 < |x - x_0| < \delta$时，有$\varphi(x) \neq u_0$

则 $\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)] = \lim\limits_{u\to u_0}f(u) = A$

例1　求（1）$\lim_{x\to 2}(x^2-3x+4)$

（2）$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3+4n^2+2}{7n^3+5n^2-3n+1}$

N.B.教材 P22 结论

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a^m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_n}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & n=m,\ \text{等高}\\ 0, & n>m,\ \text{下高}\\ \infty, & n<m,\ \text{上高}\end{cases}$$

其中$a_0 \neq 0$，$b_0 \neq 0$，n, m为非负整数

例 2　求$\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}$

例 3 (1) 求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$

(2) 求$\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$

例 4　求$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{2-\sin x-\sin^2 x}$

例 5　求$\lim\limits_{x\to-1}(\frac{1}{x+1}-\frac{3}{x^3+1})$

例 6　求（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$

（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\arctan x}{x}$

例 7　求$\lim\limits_{x\to\pi^+}\frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x}$

例 8 求（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+(n-1)}{n^2}$

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}[(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})\cdots(1-\frac{1}{n^2})]$

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}$

例 9 设$|x|<1$，

求$\lim\limits_{n\to\infty}(1+x)\cdot(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n})$

例 10 求$\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}+\dfrac{x}{|x|}\right]$

例11　求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2x-3}}{2x-5}$

例12　求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^{10}(2x-1)^{20}}{(3x+2)^{30}}$

例 13 求曲线 $f(x)=e^{x^{-2}}arctan\frac{x+1}{x-1}$ 的渐近线

例 14 设$\lim\limits_{x\to 1}f(x)$存在，$f(x)=3x^2+2x\lim\limits_{x\to 1}f(x)$，

求$f(x)$。

§ 4　极限存在准则，两个重要极限

准则Ⅰ——夹逼准则：

Th1：数列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$\{z_n\}$

若 1° $y_n \le x_n \le z_n \quad (n \to \infty)$

2° $\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} z_n = a$

则 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$

Th2： 函数$f(x)$， $g(x)$， $h(x)$

若1^{o} 当$x \in U(\hat{x}_0, \delta)$时(或$|x| > X$)

$$g(x) \le f(x) \le h(x)$$

2^{o} $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} h(x) = A$

则 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x) = A$

例 1　利用夹逼准则证明：

① $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}=0$

② $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{n!}=0$

例 2　证明

① $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+\sqrt{2}}+\cdots+\dfrac{1}{n+\sqrt{n}}\right)=1$

② $\lim\limits_{n\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1$

③ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\right)=\frac{1}{2}$

例 3　证明

① $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n}$

② $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1^n+2^n+3^n}$

③ $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^{2n}}$

例 4　证明 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}=0$

重要极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

推广 $$\lim_{\varphi(x)\to 0}\frac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}=1$$

例 1　求极限

① $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}$

② $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

③ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin x}{x^3}$

④ $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}$　　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$　　$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$

⑤ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cdot\cos 2x}{x^2}$

⑥ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2 \sin\frac{2}{x^2} + \frac{\operatorname{arc}\cot x}{x}\right)$

准则Ⅱ：单调有界数列必有极限。

重要极限

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n}=e$$

推广

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

$$\lim_{\varphi(x)\to\infty}(1+\frac{1}{\varphi(x)})^{\varphi(x)}=e$$

例 1　求极限

①$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}$　　②$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}$

③$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{x}$　　④$\lim\limits_{x\to 0}(1+nx)^{\frac{1}{x}}$

⑤$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{1+2x}\right)^{\frac{1}{x}}$　　⑥$\lim\limits_{x\to 0}(\cos^2 x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$

例 2 判断下列极限是否存在

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$

（3）$\lim\limits_{x\to 0}(x+[x])$　　（4）$\lim\limits_{x\to 0^+}[x]\cdot\frac{1}{x}$

（5）$\lim\limits_{x\to 0^+}x\cdot[\frac{1}{x}]$

例 3 设$x_0=\sqrt{2}$，$x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}$（$n\geq 0$）

求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

§5　无穷小以及无穷小的比较

一．无穷小与无穷大

无穷小的运算性质

Th1：若α，β为无穷小，则$\alpha+\beta$仍为无穷小

Coro：有限个无穷小的和仍为无穷小

Th2：有界量与无穷小的积仍为无穷小。

Coro1：若$\alpha\to 0$，则$C\cdot\alpha\to 0$

Coro2：若$\boldsymbol{\alpha} \to 0$，$\boldsymbol{\beta} \to 0$，则$\boldsymbol{\alpha\beta} \to 0$

Coro3：有限个无穷小的积仍为无穷小

例 1 求极限

1）$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$

2）$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\arctan x}{x}$

3） $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin n}{\sqrt{n}}$

4） $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1}$

Th3：(函数的极限与无穷小的关系)

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=A \Leftrightarrow \exists \lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} \alpha(x)=0$$

$$使得f(x) = A + \alpha(x)$$

例 1 求极限 $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x+1}{x-1}$

无穷大的定义

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} f(x) = \infty$$

例 1：证明 $\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1} = \infty$

小结：

一般地，若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$，

则函数$\mathbf{y} = f(x)$的图形有铅直渐近线 $x = x_0$

例 1 求曲线$y = \frac{x^2+x}{x^2-1}$的渐近线

例 2 求曲线 $f(x) = e^{x^{-2}} arctan \frac{x+1}{x-1}$ 的渐近线

无穷大与无穷小的关系：

Th：若$\boldsymbol{\lim f(x)=\infty}$，则$\boldsymbol{\lim \frac{1}{f(x)}=0}$。

若$\boldsymbol{\lim g(x)=0,(g(x)\neq 0)}$，则$\boldsymbol{\lim \frac{1}{g(x)}=\infty}$。

无穷大与无界函数的关系

Th: 若$\boldsymbol{\lim f(x)=\infty}$，则$\boldsymbol{f(x)}$无界。但反之不然。

例 1 证明：$f(x) = x \sin x$在$(-\infty, +\infty)$内是无界函数，但当$x \to +\infty$时，函数不是无穷大

二．无穷小的比较

等价无穷小的性质

Th1（等价替换原理）若$\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，且

$$\lim\frac{\beta'}{\alpha'}\text{存在，则}\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\frac{\beta'}{\alpha'}$$

Coro1：若$\lim\frac{\beta'}{\alpha'}\cdot f(x)$存在，

$$\text{则}\lim\frac{\beta}{\alpha}f(x)=\lim\frac{\beta'}{\alpha'}\cdot f(x)$$

Coro2： 若$\boldsymbol{lim\,\alpha' f(x)}$存在，

则$\boldsymbol{lim\,\alpha f(x) = lim\,\alpha' f(x)}$

公式

$x \to 0$：$\sin x \sim x$ $\tan x \sim x$

$\arcsin x \sim x$ $\arctan x \sim x$

$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$ $e^x - 1 \sim x$

$a^x - 1 \sim x \ln a$ $\ln(1 + x) \sim x$

$(1 + x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$ （$\alpha \in \mathrm{R}$）

例 1　求极限

①$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\sin 5x}$　　②$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\tan 2x}$

③$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{\sin 2x}$　　④$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arctan 2x}{\sqrt{1+x}-1}$

例 2　求极限

①$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$　　②$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-1-x}{x^2}$

③$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x\cdot(\sqrt{\cos x}-1)}$　　④$\lim\limits_{x\to \infty}(x\sin\frac{2}{x}+\frac{2}{x}\sin x)$

例 3　求极限

①$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos\alpha x}{\ln\cos\beta x}$　　②$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$

③$\lim\limits_{x\to +\infty}\ln(1+2^x)\cdot\ln(1+\dfrac{3}{x})$

④$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{e^x-e^{\frac{1}{x}}}{e^{-1}-e^{\frac{1}{x}}}$

Th2 设 $\lim \alpha = 0$, $\lim \beta = 0$, 则

1. $\alpha \sim \beta \Leftrightarrow \alpha = \beta + 0(\beta)$

2.和取大原理：若 $\alpha = 0(\beta)$ **则** $\alpha + \beta \sim \beta$

例 1 求极限

①$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\sin^2 x}{\sqrt{1+x}-1}$

②（考研）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}$

③$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\tan x}}{x^3+5x^2+x}$

例 2 已知当$x \to 0$时，$(1+\alpha x^2)^{\frac{1}{3}} - 1$与$1 - \cos x$是等价无穷小，求常数$\alpha$

例 3 求$\lim\limits_{x \to 1} \frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\dots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}$

利用等价无穷小的性质求极限小结：

1. 等价替换原理，熟记 9 个等价无穷小公式。

2. 乘积因子才可替换，“加项”不要贸然进行。

3. “加项”的处理方法：

a.提取公因子，化为乘积形式。

b.大拆成小。当小式的极限不存在时，不能

拆开

c.和取大原理。

例　求下列极限式中的待定常数

1. 若$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$，求常数 a、b。

2．已知$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin^2(x-1)}{x^2+ax+b}=1$，求 a、b

3．设$b=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+a\cos x-2}{\ln(1+x)}$为常数，求 a、b

4．设$\lim\limits_{n\to\infty}(3n-\sqrt{an^2+bn+1})=2$，求 a、b

5．设$P(x)$是多项式，且$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{P(x)-2x^3}{x^2}=1$，

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{P(x)}{x} = 3$，求$P(x)$

6．设$\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n^{\alpha}}{n^{\beta}-(n-1)^{\beta}} = 1987$，求$\alpha, \beta$的值

§6　函数的连续性与连续函数的运算

一．函数的连续性

二．函数的间断点

间断点分类：

第一类间断点（可去、跳跃）：左右极限都存在的间断点

第二类间断点（无穷、震荡、其它）：

例 1 指出下列函数在指定点处的连续性

① $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ ， $x=1$

② $f(x)=\begin{cases} x-1 & x<0 \\ 0 & x=0 \\ x+1 & x>0 \end{cases}$ ， $x=0$,

③ $f(x)=\tan x$ ， $x=\frac{\pi}{2}$

④ $f(x)=sin\frac{1}{x}$ ，$x=0$,

⑤ $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$ ，$x=0$,

例 2 设$f(x)=x^2+arc\,cot\frac{1}{x-1}$，则 $x=1$是 $f(x)$的（ ）

A. 可去间断点　　B. 跳跃间断点

C. 无穷间断点　　D. 振荡间断点

例 1 讨论函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}, & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性

例 2 讨论函数$f(x)=\dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}$在$x=0$，$x=1$的

连续性，若是间断点，请指明间断点的类型

例 3　求函数$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$的间断点，并指明类型

例 4　求函数$f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{x+e^{xt}}{1+e^{xt}}$的间断点，并指明类型

例 5 设$f(x) = x^2 + arc\cot\frac{1}{x-1}$，则 $x = 1$是

$f(x)$的（ ）

A.可去间断点　　B. 跳跃间断点

C. 无穷间断点　　D. 振荡间断点

三． 连续函数的运算

Th1： 若$f(x), g(x)$在x_0处连续

则 1° $f(x) \pm g(x)$在x_0处连续

2° $f(x) \cdot g(x)$在x_0处连续

3° 当$g(x) \neq 0$时，$\frac{f(x)}{g(x)}$在x_0处连续

Th2: 若$y = f(x)$在区间I_x上单值，单调增（减），连续，则它的反函数$x = \varphi(y)$在对应区间I_y上单值，单调增（减），连续

Th3：设$y = f(u)$, $u = \varphi(x)$

若 1° $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = a$

2° $y = f(u)$在$u = a$处连续

则复合函数$y = f[\varphi(x)]$有

$$\lim_{x \to x_0} f[\varphi(x)] = f[\lim_{x \to x_0} \varphi(x)] = f(a)$$

Th4： 设$y = f(u)$, $u = \varphi(x)$

若 1° $\varphi(x)$在$x = x_0$处连续

2° $f(u)$在$u = u_0$ $(u_0 = \varphi(x_0))$连续

则$f[\varphi(x)]$在$x = x_0$处连续

结论：

1. 基本初等函数在其定义域内连续。

2. 初等函数在其定义区间内连续。

小结：如何找间断点

1.对于初等函数：无定义的点是间断点

2.对于分段函数：分界点是可能的间断点，需进一步求极限判定

补充：重要公式

1． 若 $\lim u(x)$， $\lim v(x)$ 均存在，$u(x) > 0, u(x) \neq 1$

则$\lim u(x)^{v(x)} = [\lim u(x)]^{\lim v(x)}$

2．若$\lim u(x) = 1$ $\lim v(x) = \infty$

则$\lim u(x)^{v(x)} = e^{\lim[u(x)-1]\cdot v(x)}$

例 1　求$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$　　$(a,\ b,\ \ c>0)$

例2　求$\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt[x]{\cos x}$

例3　$\lim\limits_{x\to 0}(e^x-x)^{\frac{1}{\sin x}}$

例 4 证明下列等价无穷小

$$x \to 0 \quad ln(1+x) \sim x$$

$$e^x - 1 \sim x$$

$$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x \quad （\alpha \in R）$$

例 1　求极限$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+ln(2-x)}{4arctgx}$

例2　讨论$y=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$的连续性

例 3　试求常数 a,b，使函数

$f(x)=\begin{cases} 1+x^2, x<0 \\ ax+b, 0\leq x\leq 1 \\ x^3-2, x>1 \end{cases}$ 在$(-\infty,+\infty)$上连

续。

§7　闭区间上连续函数的性质

Th1:（最值定理）在闭区间上的连续函数一定有最大值和最小值

Th2:（有界定理）闭区间上的连续函数一定有界

Th3:（零点定理）若 1° $f(x)$在$[a,b]$上连续

2° $f(a)\cdot f(b)<0$

则至少$\exists\xi\in(a,b)$ $\ni$ $f(\xi)=0$

Th4:（介值定理）若　1° $f(x)$在$[a,b]$上连续

2° $f(a)=A\neq f(b)=B$

则 对 $\forall c\in(A,B)$ （$or\ \ c\in(B,A)$）至少 $\exists\xi\in(a,b)\ \ \ni\ \ f(\xi)=c$

Coro: 在闭区间上连续的函数必取得介于最大值 M 与最小值 m 之间的任何值

例 1　证明方程$x^3-4x^2+1=0$在区间（0,1）内至少有一个根

例 2　证明方程$\frac{a_1}{x-\lambda_1}+\frac{a_2}{x-\lambda_2}+\frac{a_3}{x-\lambda_3}=0$有分别包含在区间$(\lambda_1,\lambda_2),(\lambda_2,\lambda_3)$内的两个根，其中$a_i>0$，（$i=1,2,3$）且$\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3$

例 3　设$f(x)$在$[a,b]$上连，$x_1,x_2,\cdots x_n\in[a,b]$·

证明：$\exists\xi\in[a,b]$, 使得$f(\xi)=\frac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)}{n}$