第一章《函数与极限》测试题

1．（1）$e^{\frac{1-x}{1+x}}$；　（2）$\left[\frac{a+1}{2},\frac{b+1}{2}\right]$；　（3）$-4$；　（4）$0$；　（5）$[-4,-1)\cup(1,2]$.

2．D　C　B　D

3．（1）解：原式=$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{\sin x}{x^2}}}=1$

（2）解：原式=$\lim\limits_{x\to1}\left[\left(1+\dfrac{-(x-1)^2}{x^2+1}\right)^{\frac{x^2+1}{-(x-1)^2}}\right]^{\frac{-2x}{x^2+1}}=e^{-1}$

（3）解：原式=$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+\mathrm{e}^{-x}\sin^2x)}{\ln(1-\mathrm{e}^{-2x}x^2)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^{-x}\sin^2x}{-\mathrm{e}^{-2x}x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{-x^2}=-1$

（4）解：原式=$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x\ln(1+x)}-1}{\ln(1+\cos x-1)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\ln(1+x)}{\cos x-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{-\frac{x^2}{2}}=-2$

（5）解：原式=$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x^4}-1+1-\sqrt[3]{1-x^2}}{4x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x^4}-1}{4x^2}-\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1-x^2}-1}{4x^2}=\dfrac{1}{12}$

（6）解：原式=$\lim\limits_{x\to1}e^{\frac{\ln x}{1-x}}=\lim\limits_{x\to1}e^{\frac{\ln(1+x-1)}{1-x}}=\lim\limits_{x\to1}e^{\frac{x-1}{1-x}}=e^{-1}$

4．解：$f(0+0)=\lim\limits_{x\to0+0}\dfrac{1}{x}\ln\left(1+\dfrac{-2x}{1+x+x^2}\right)=\lim\limits_{x\to0+0}\dfrac{1}{x}\dfrac{-2x}{1+x+x^2}=-2$

$f(0-0)=\lim\limits_{x\to0-0}\dfrac{ax^3\left(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}\right)}{\tan x\left(1-\cos x\right)}=\lim\limits_{x\to0-0}\dfrac{ax^3\left(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}\right)}{\frac{1}{2}x^3}=4a$ 由连续性 $f(0)=f(0+0)=f(0-0)$ 知，$b=-2=4a,,a=-\dfrac{1}{2},b=-2$

5．（1）解：该初等函数函数孤立的没定义的点 $x_1=0,x_2=-1$ 均为间断点，

$\because f(0-0)=\lim\limits_{x\to -0}\dfrac{e^{x}-e^{\frac{1}{x}}}{e^{-1}-e^{\frac{1}{x}}}=e,\ f(0+0)=\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{e^{x}e^{-\frac{1}{x}}-1}{e^{-1}e^{-\frac{1}{x}}-1}=1$

$\lim\limits_{x\to -1}f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{e^{x-\frac{1}{x}}-1}{e^{-1-\frac{1}{x}}-1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x-\dfrac{1}{x}}{-1-\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{-x-1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x-1}{-1}=2$

从而 $x_1=0$ 为第一类跳跃间断点， $x_2=-1$ 为第一类可去间断点

（2）解：该初等函数函数孤立的没定义的点 $x_1=0,x_2=1,x_3=-1$ 均为间断点，

$\because f(0-0)=\lim\limits_{x\to -0}\dfrac{x^2-x}{-x(x^2-1)}=-1,\ f(0+0)=\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{x^2-x}{x(x^2-1)}=1,$

$f(1-0)=\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{x^2-x}{x(x^2-1)}=\dfrac{1}{2},\ f(1+0)=\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{x^2-x}{x(x^2-1)}=\dfrac{1}{2},$

$f(-1-0)=\lim\limits_{x\to -1-0}\dfrac{x(x-1)}{-x(x-1)(x+1)}=+\infty,\ f(-1+0)=\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{x^2-x}{-x(x^2-1)}=-\infty,$

从而 $x_1=0$ 为第一类跳跃间断点， $x_2=1$ 为第一类可去间断点， $x_3=-1$ 为第二类无穷型间断点

6. 解：$\because x\to 0$ 时， $2^x-1\sim x\ln 2,\therefore \lim\limits_{x\to 0}\ln[1+\dfrac{f(x)}{\sin x}]=0,\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sin x}=0,$

从而 $3=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln[1+\dfrac{f(x)}{\sin x}]}{2^x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2\ln 2}$，因此 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=3\ln 2$

7. 证：通分后知，分子为零才是方程的根。令

$f(x)=a_1(x-1)(x-2)(x-3)+a_2x(x-2)(x-3)+a_3x(x-1)(x-3)+a_4x(x-1)(x-2)$ 则有 $f(x)$ 在

$(-\infty,+\infty)$ 上连续，且 $f(0)=-6a_1<0$， $f(1)=2a_2>0$， $f(2)=-2a_3<0$， $f(3)=6a_4>0$

由闭区间连续函数的零点定理，$\exists\xi_1\in(0,1),f(\xi_1)=0$，$\exists\xi_2\in(1,2),f(\xi_2)=0$，$\exists\xi_3\in(2,3),f(\xi_3)=0$，

而一元三次函数最多有三个不同的零点，因而方程 $\dfrac{a_1}{x}+\dfrac{a_2}{x-1}+\dfrac{a_3}{x-2}+\dfrac{a_4}{x-3}=0$ 有且仅有三个实根.

8. 证：设 $g(x)=f(x)-f(x+\dfrac{b-a}{2})$，则 $g(x)$ 在 $\left[a,\dfrac{a+b}{2}\right]$ 上连续

且 $g(a)=f(a)-f(\dfrac{a+b}{2}),g\left(\dfrac{a+b}{2}\right)=f(\dfrac{a+b}{2})-f(b),$

$\because f(a)=f(b)$，若 $g\left(a\right)=0$，则 $g\left(\dfrac{a+b}{2}\right)=0, c=\dfrac{a+b}{2}\in\left(a,b\right)$

若 $g\left(a\right)\neq 0$，则 $g\left(a\right)g\left(\dfrac{a+b}{2}\right)<0$，由零点定理，$\exists c\in\left(a,b\right), g\left(c\right)=0,$

从而有 $c\in(a,b)$ 使得 $f(c)=f(c+\dfrac{b-a}{2})$.

9. 解：先讨论求出极限使函数分段表达式，

当 $0<x<1$ 时 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n+3}-x}{x^{2n+1}+1}=-x$

当 $x>1$ 时 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2-x^{-2n}}{1+x^{-2n-1}}=x^2$

当 $x=1$ 时 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-1}{1+1}=0$

从而 $f(x)=\begin{cases}-x, 0<x<1\\ 0, x=1\\ x^2, x>1\end{cases}$

由于 $f\left(1\right)=0\neq f\left(1+0\right)=1^2=1, f\left(1-0\right)=-1$

故 $x=1$ 为第一类跳跃间断点，该函数的连续区间为 $\left(0,1\right),\left(1,+\infty\right)$

10. 解：由 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\infty$ 知 $\lim\limits_{x\to 0}(x-a)(x-1)=0$, 从而 $a=0$,

又 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=A$（$A\neq 0$ 为常数），

分母 $\lim\limits_{x\to 1}x(x-1)=0$ 从而分子 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\sqrt{1+3x}-b\right)\left(x-b\right)=0$ 所以 $b=2$ 或 $b=-1$

把 $b=-1$，$a=0,$ 代入 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{1+3x}-1\right)\left(x-1\right)}{x\left(x-1\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{1+3x}-1\right)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{3}{2}x}{x}=\dfrac{3}{2}\neq\infty$,舍去

所以 $a=0, b=2$

11. 解：记 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=A$，则 $f(x)=3x^2+2xA$，在上式两边取极限(令 $x\to 1$)，得

$A=\lim\limits_{x\to 1}3x^2+\lim\limits_{x\to 1}2xA$，即 $A=3+2A$，所以 $A=-3$，所以 $f(x)=3x^2-6x$

12. 证明：（1）证 $\{a_n\}$ 有下界.

因为$a_1=2>1$，由均值不等式得$a_n=\frac{1}{2}(a_{n-1}+\frac{1}{a_{n-1}})\geq\sqrt{a_{n-1}\cdot\frac{1}{a_{n-1}}}=1\,(n=2,3,\Lambda)$

即$a_n\geq 1\,(n=1,2,3,\Lambda)$

（2）证$\{a_n\}$单调递减

由$a_n\geq 1\,(n=1,2,3,\Lambda)$得：$a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+\frac{1}{a_n})\leq\frac{1}{2}(a_n+\frac{1}{1})\leq\frac{1}{2}(a_n+a_n)=a_n$，

故$\{a_n\}$单调递减. 由单调有界准则知，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在

（3）求$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$

设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，则对等式$a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+\frac{1}{a_n})$两端取极限，得$A=\frac{1}{2}(A+\frac{1}{A})$，即$A=1$（$A=-1$不合题意，舍去），所以$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$.

13. 证明：（1）证$\{x_n\}$单调递增（归纳法）

$$x_n=1+\frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}=2-\frac{1}{1+x_{n-1}}$$

因为$x_1=1$，　$x_2=2-\frac{1}{1+1}=\frac{3}{2}$，所以$x_1<x_2$；假设有$x_{k-1}<x_k$，下面证$x_k<x_{k+1}$：

因$x_{k+1}=2-\frac{1}{1+x_k}>2-\frac{1}{1+x_{k-1}}=x_k$，由数学归纳法知$\{x_n\}$单调递增.

（2）证$\{x_n\}$有上界. 由$x_n=2-\frac{1}{1+x_{n-1}}$的表达式知$x_n<2$，由单调有界准则知，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在.

（3）求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，则对等式$x_n=2-\frac{1}{1+x_{n-1}}$两端取极限，得$A=2-\frac{1}{1+A}$，即$A=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$（$A=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$不合题意，舍去），所以$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$