大类资产配置

专题报告

证券研究报告

2021.06.18

Black-Litterman 模型的理论应用与拓展

--精品文献解读系列（十六）

报告作者

李祥文(分析师)
021-38031560
lixiangwen@gtjas.com
证书编号 S0880520100001

王瑞韬(研究助理)
021-38038208
wangruitao@gtjas.com
证书编号 S0880121010024

相关报告

本报告导读：

本篇报告解读的文献从理论基础、应用要点以及关键拓展的角度对 Black-Litterman 模型进行了总结介绍。

摘要：

- 投资学是一门学术界与业界紧密结合的学科，其中大类资产配置是这种紧密结合的代表。从 Markowitz（1952）开创现代投资组合理论开始，学术界为业界提供了丰富的理论参考和方法模型，推动了大类资产配置实践的繁荣发展。为了帮助读者及时跟踪学术前沿，我们推出了“精品文献解读”系列报告，从大量学术文献中挑选出精品论文进行剖析解读，为读者呈现大类资产配置领域最新的思路和方法。
- 本期为读者解读的文章为 Kolm, Ritter & Simonian 于 2021 年发布于期刊 The Journal of Portfolio Management 的文章：“Black-Litterman and Beyond: The Bayesian Paradigm in Investment Management”。
- 传统均值方差框架下的组合构建方法依赖于对于资产预期收益率以及协方差矩阵的有效预测。其中资产协方差矩阵相对稳定，基于历史数据可以获得协方差矩阵稳健的预测。而单纯依赖于历史数据无法获得对资产预期收益的有效预测。Black-Litterman 模型是用于解决这一问题的最为成功的模型之一。作者从贝叶斯概率模型的角度出发，介绍了 Black-Litterman 模型的理论基础。它以**均衡状态下的市场组合蕴含的预期收益信息作为锚点**，使用**贝叶斯的方法**将其与**投资者对资产收益的观点**结合以获得更为稳健的预期收益预测。
- 作者同样对 Black-Litterman 模型的应用要点进行了讨论。首先，投资者可以**根据需求灵活选取市场组合外的其他先验假设来源**。也因此 Black-Litterman 模型可以应用于多空组合等非传统的投资组合构建。其次，对投资观点不确定性的估计是 Black-Litterman 模型最为关键的应用要点，作者推荐**对主观观点使用试错的方法估计观点不确定性**，而**对量化观点则以再抽样等方法估计观点不确定性**。最后，作者发现仅需对目标函数简单修改，投资者就可以在 Black-Litterman 模型中纳入对交易成本的考虑。
- 作者还介绍了如何对 Black-Litterman 模型的形式进行拓展调整以便于使用多因子模型设定先验分布以及放松投资观点的线性约束。

目 录

1. 文献概述

文献来源：

Kolm, Ritter, & Simonian(2021). **Black-Litterman and Beyond: The Bayesian Paradigm in Investment Management**. The Journal of Portfolio Management, 47(5), 91-113.

文献摘要:

Black-Litterman 模型是近年来最为广泛使用的量化配置模型。从投资理论的角度看，它创新性地将贝叶斯统计应用于投资组合优化中。而从投资实践的角度看，它给基金经理提供了纳入资产收益观点以避免过于依赖历史数据的工具。本文中，作者总结了 Black-Litterman 模型的理论基础以及应用要点，并介绍了多种 Black-Litterman 模型的拓展应用。

文献解读:

传统均值方差框架下的组合构建方法依赖于对于资产预期收益率以及协方差矩阵的有效预测。其中资产协方差矩阵相对稳定，基于历史数据可以获得协方差矩阵稳健的预测。而单纯依赖于历史数据无法获得对资产预期收益的有效预测。Black-Litterman 模型是用于解决这一问题的最为成功的模型之一。作者从贝叶斯概率模型的角度出发，介绍了 Black-Litterman 模型的理论基础。它以**均衡状态下的市场组合蕴含的预期收益信息作为锚点**，使用**贝叶斯的方法**将其与**投资者对资产收益的观点**结合以获得更为稳健的预期收益预测。

作者同样对 Black-Litterman 模型的应用要点进行了讨论。首先，投资者可以**根据需求灵活选取市场组合外的其他先验假设来源**。也因此 Black-Litterman 模型可以应用于多空组合等非传统的投资组合构建。其次，对投资观点不确定性的估计是 Black-Litterman 模型最为关键的应用要点之一，作者推荐**对主观观点使用试错的方法估计观点不确定性**，而**对量化观点则以再抽样等方法估计观点不确定性**。最后，作者发现仅需对目标函数简单修改，投资者就可以在 Black-Litterman 模型中纳入对交易成本的考虑。

作者还介绍了如何对 Black-Litterman 模型的形式进行拓展调整以便于使用多因子模型设定先验分布以及放松投资观点的线性约束。

2. 前言

近年来，基于贝叶斯统计模型的组合构建方法越发流行，投资者广泛地借助贝叶斯统计的方法在投资组合构建中纳入对资产收益的观点。2020 年新冠疫情的冲击尤其突出了纳入投资者前瞻性观点的重要性，没有任何基于历史数据的统计模型可以有效预测新冠疫情的冲击。在组合构建的过程中，投资者需要依赖历史数据之外的信息源进行投资组合构建。一个严谨且稳健的用于混合历史数据以及前瞻性观点的贝叶斯组合构建方法显得尤为重要。

当下最为流行的贝叶斯组合构建方法由 Black & Litterman(1990, 1991)提出。Black-Litterman 模型（下称 BL 模型）以传统均值方差模型为基础，提供了贝叶斯统计框架下的组合优化扩展，并因其直观简约的模型形式而为投资者所普遍使用。BL 模型的核心假设在于，投资者对市场并无明确观点时，组合优化的预期收益输入应当来自资本资产定价模型(CAPM)下的均衡状态，没有投资观点的投资者应当持有市场组合。简单来说，**BL 模型的本质在于利用贝叶斯统计方法将市场隐含预期收益与投资者的前瞻收益观点进行结合**，它为投资者提供了一个严谨且系统化的收益预测建模方法。

本文对 BL 模型以及相关拓展进行了总结与介绍。后文由四个部分组成。第三章介绍最初的 BL 模型，并从贝叶斯的角度对其进行解读。第四章对 BL 模型的实际应用要点进行讨论，具体讨论了先验观点的选择、投资观点的产生以及交易成本的纳入。第五章介绍了 BL 模型的拓展应用，包括因子模型以及非线性假设下的 BL 模型。最后一章总结全文。本文的目标并不仅仅在于对 BL 模型的历史进行介绍，更在于介绍我们认为对投资者有实际应用价值的 BL 模型扩展。

3. Black-Litterman 模型

3.1. BL 模型概述

我们考虑由 n 个资产构成的金融市场，这些资产的收益向量 r 服从以 u 为预期收益向量，以Σ为协方差矩阵的多元正态分布:

$$r \sim N(u,\ \Sigma) \quad (1)$$

在经典现代组合理论（Markowitz, 1952）的框架下，一个均值方差的投资者通过均值方差优化来决定投资组合的权重$h = (h_1, h_2, \ldots, h_n)^T$:

$$\mathrm{Max}_{h\in C}\ u_p - \frac{\lambda}{2}\sigma_p^2 \quad (2)$$

其中$u_p := E[h^T r] = h^T u$，代表了组合预期收益，$\sigma_p^2 := V[h^T r] = h^T \Sigma h$，代表了组合方差，$\lambda$代表了投资者风险厌恶系数，C 代表了优化约束（可参考 Fabozzi et al., 2007; Kolm, Tutuncu, & Fabozzi, 2014 对于基金经理常用投资约束的讨论）。对于一个没有投资约束的投资者，最优的组合权重是:

$$h^* = \frac{1}{\lambda}\Sigma^{-1}u \quad (3)$$

在 BL 模型中，投资者以线性组合的方式表达收益观点（公式 4）。一个投资观点可能是类似“德国股票的收益比欧洲市值加权股票的收益高 5%”的表述（Litterman & He, 1999）。为了将这一表述转化为数学语言，投资者可以使用$p = (p_1, \ldots, p_n)^T$声明一个在德国股票市场权重为 1，在欧洲

所有股票市场权重之和为-1 的观点组合。并令这一组合的预期收益率 q=0.05。如公式 4，k 个等式对应了 k 个资产收益观点。而p_i与q_i分别对应了相应的观点组合的权重以及观点组合的预期收益。

$$E[p_i^T r] = q_i, i = 1, \dots, k \tag{4}$$

值得一提的是，公式 4 并没有考虑投资者对收益观点的信心水平(观点不确定性)。为了纳入对收益观点信心水平的考虑，在 BL 模型以残差分布的形式对收益观点的信心水平进行描述:

$$q = Pu + \varepsilon_q, \varepsilon_q \sim N(0, \Omega) \tag{5}$$

总结而言，**投资者的收益观点以观点组合的收益均值以及协方差矩阵的形式定义**。观点组合收益的分布包含了资产收益分布的部分信息，并且包含了观点的不确定性ε_q。

BL 模型的核心假设在于，当投资者并不具有收益观点时，均值方差的最优组合应当与 CAPM 下的均衡组合h_{eq}一致。在没有收益观点时，投资者使用如下的预期收益建模:

$$u \sim N(\pi, C) \tag{6}$$

其中π代表了 CAPM 模型的预期收益预测，C 代表了投资者对 CAPM 模型预测的信心。公式 6 被称作 CAPM 先验假设。将资产收益分布(公式 1)、CAPM 先验假设(公式 6)以及投资者观点(公式 5)结合，就可以得到 BL 模型的后验预期收益预测:

$$u_{BL} := (P^T \Omega^{-1} P + C^{-1})^{-1} (P^T \Omega^{-1} q + C^{-1} \pi) \tag{7}$$

以及 BL 模型的后验预期收益协方差矩阵的预测:

$$\Sigma_{BL} := V[u_{BL}] = (P^T \Omega^{-1} P + C^{-1})^{-1} \tag{8}$$

基于 BL 模型后验预期收益与协方差矩阵的最优组合如下:

$$h_{BL}^* = \lambda^{-1} (\Sigma_{BL} + \Sigma)^{-1} \Sigma_{BL} (P^T \Omega^{-1} q + C^{-1} \pi) \tag{9}$$

读者可以参考 Satchell & Scowcroft(2000), Fabozzi, Focardi, & Kolm(2006) 以及 Idzorek(2007)中对 BL 模型的非贝叶斯推导。尽管 BL 模型经常被称作基于贝叶斯的组合构建方法，作者最初并未建立 BL 模型与贝叶斯统计之间的直接关系。

BL 模型的一个重要特征在于，**即使投资者仅对少数几个资产收益具有观点，BL 模型仍会对所有资产的预期收益进行调整**。这是由于资产间相关性所导致的。当资产间相关性更高时，这一现象也会更为明显。这一现象的存在对稳健的预期收益估计至关重要。若不涉及对所有预期收益的调整，对任意资产预期收益预测的更改都会被均值方差优化器视作

套利机会的出现，从而导致投资组合向少数资产过分集中。

BL 的后验预期收益预测同样可以视作隐含预期收益与投资者收益观点的加权平均（$u_{BL} = W_\pi \pi + W_q \breve{q}$），其中权重矩阵为：

$$W_\pi = (P^T \Omega^{-1} P + C^{-1})^{-1} C^{-1} \quad (10)$$

$$W_q = (P^T \Omega^{-1} P + C^{-1})^{-1} P^T \Omega^{-1} P \quad (11)$$

换而言之，当投资者对收益观点信心不高时，最终预测更接近于市场均衡组合隐含的预期收益。反之当投资者对收益观点有较高信心时，最终预测会更多偏离市场均衡组合的隐含预期收益。

3.2. BL 模型优缺点

正如前文所讨论的，BL 模型依赖于几个关键假设。首先，BL 模型**假设资产收益服从正态分布**。正态分布的假设有利于数学性质的推导。但其缺点也非常明显，现实世界中资产收益存在着尖峰肥尾的现象，与正态分布有着显著的差异。其次，BL 模型假设**投资者观点以线性组合的形式存在**。线性组合的假设同样简化了模型的推导，然而却不利于期权、对冲基金等策略观点的纳入。这类资产通常有着难以以线性组合表达的收益分布。最后，BL 模型假设 **CAPM 下的均衡市场组合作为先验分布**。但是资产定价的实证结果发现，除了市场组合外，存在其他重要的因子对先验分布有着显著的影响。这一问题在多元资产的配置中更为明显。

BL 模型的主要优点在于其简约性。简约性是任何应用于现实投资活动中的模型的重要考虑因素，也是 BL 模型被广泛接受使用的原因之一。但是在现实投资活动中投资者需要对模型的简约性与准确性进行取舍。BL 模型并未能充分考虑现实投资活动的需求。为了适应这些现实的投资需求，我们需要对 BL 模型进行扩展。

3.3. BL 模型是贝叶斯框架下的特殊情况

此后的文章中，我们讨论对 BL 模型的改善与拓展。我们使用一个更一般的贝叶斯框架（Black-Litterman-Bayes, BLB）进行后续的分析。参考 Kolm & Ritter(2017)，我们定义一个 BLB 模型由以下成分组成：

1. 资产收益 $p(r|\theta)$ 的参数分布，其中 $r := (r_1, \ldots, r_n)^T$ 与 $\theta := (\theta_1, \ldots, \theta_m)^T$ 分别代表了资产的收益以及参数分布中的参数；
2. 先验分布 $\pi(\theta)$；
3. 似然函数 $f(q|\theta)$，其中 q 是代表投资者收益观点的 k 维向量；
4. 最终财富 W_T 的效用函数 $U(W_T)$

在统计学的相关文献中，1 与 2 被称作一个贝叶斯概率模型。在贝叶斯统计中，所有的统计推断都依赖于后验分布进行。结合最优决策理论对效用函数进行优化（Robert, 2007），可以得到 BLB 模型下最优组合的权重：

$$h^* = \operatorname{argmax}_{h \in C} E[U(w_0 + h^T r | q)] \quad (12)$$

其中 E[|q]代表了相对后验分布的期望计算，w_0代表了初始财富值。后验分布则可以通过如下积分获得:

$$p(r|q) = \int p(r|\theta)\, p(\theta|q) d\theta \tag{13}$$

$$p(\theta|q) = \frac{f(q|\theta)\pi(\theta)}{\int p(q|\theta)\pi(\theta)d\theta} \tag{14}$$

当我们有业绩基准h_b时，先验分布$\pi(\theta)$是使得业绩基准h_b最优的收益分布。

$$h_b = \mathrm{argmax}_{h\in C} \int U(w_0 + h^T r) p(r|\theta)\, d\theta \tag{15}$$

BLB 模型的意义不仅在于理论角度，它同样在后续 BL 模型的拓展开发中起重要作用。BLB 模型的核心在于基于后验分布的预测推断(公式 13)以及后续的组合优化(公式 12)。大多数情况下，这一优化流程并没有解析解，需要通过数值计算的方式获取最优组合。

BL 模型是 BLB 模型的一种特殊情况。当$(r|\theta)$服从多元正态分布，$f(\theta|q)$是代表投资者观点的正态分布，且存在一个唯一的先验观点时，BLB 模型与 BL 模型等价。值得一提的是，在 BL 模型中，$p(r|\theta)$与$f(q|\theta)$同时起到了似然函数的作用。类似的，随机变量(r, q, θ)之间并不独立，但是$r|\theta$与$q|\theta$之间相互独立。这是贝叶斯统计模型下的一种常见设定。在这样的设计定下，BL 模型起到了正则化资产协方差矩阵以避免过分集中持仓的作用。

4. Black-Litterman 模型应用要点

本章中，我们对 BL 模型以及更一般的 BLB 模型的应用要点进行讨论。具体而言，我们讨论如何选择先验观点，如何估计观点不确定性以及如何纳入对交易成本的考虑。

4.1. 先验观点的选择

正如前文讨论的，BL 模型假设投资者对资产收益不具有观点时，均值方差最优组合应当是 CAPM 下的均衡组合。这一先验假设对应了市值组合h_{eq}作为最优组合。

$$h_{eq} = \frac{1}{\lambda}(\Sigma + C)^{-1}\pi \tag{16}$$

值得一提的是，在 BL 模型下，如公式 16 的先验分布与似然函数是共轭分布，也因此，由 BL 模型所得的后验分布也将服从正态分布(可参考: Robert, 2007)。假设$C = \tau\Sigma, \tau > 0$，我们可以对公式 16 进行化简，从而得到$\pi = \lambda(1 + \tau)\Sigma h_{eq}$。

由于 BL 模型使用 CAPM 作为先验假设，有些投资者认为它只能应用于

充分分散的投资组合。我们希望指出，**投资者可以选取各类多元正态分布作为先验分布**。对于主动管理的基金经理而言，均值为 0 向量的多元正态分布是一个常见选择(Herold, 2003; Da Silva, Lee, & Pornrojnangkool, 2009)。使用这种先验假设可以得到可叠加于任何投资组合的便携的超额收益(portable alpha)，这一组合并不依赖于任何业绩基准的存在。

BL 模型对于以多空组合为投资方式的投资者同样有借鉴意义，这类投资者同样可以使用基于市值权重的信息获取先验分布假设。此外，对于以现金为业绩基准的绝对收益策略而言，另一个可能的选择是使用数据驱动的方法确定先验假设，使用其他统计分析的结果作为先验分布假设。后续我们给出了使用线性因子模型作为先验分布假设的情况以供参考。

4.2. 资产收益观点的确定

投资者可以基于主观判断或量化框架形成资产收益观点。传统的计量模型以及机器学习的方法都属于量化框架的范畴。由于机器学习相比传统计量模型在预测能力上的优势，这一节中我们更多专注于由机器学习模型所产生的投资观点。投资行业使用的大多数机器学习方法属于统计机器学习方法(statistical machine learning)，通过历史数据拟合一个统计模型，并用于对未来资产进行预测。

在机器学习逐渐被业界认可使用的近 20 年间，如何利用机器学习的成果进行投资组合构建成了一个关键问题。我们认为 BL 模型天然提供了可以结合机器学习模型(尤其是统计机器学习模型)预测结果的组合构建流程。这是因为 BL 模型假设输入的投资观点是并不完整且伴随着噪音的。

早期对 BL 模型的应用多使用投资者主观判断作为资产收益观点输入(Black & Litterman, 1991)。这带来了如何确定观点不确定性的问题。很多情况下，投资者使用观点组合的方差估计观点不确定性:

$$\Omega := \mathrm{const}\ P\Sigma P^{T}$$

需要指出的是，虽然这样的方法简单且易于计算，投资者观点的不确定性和资产协方差矩阵在概念上存在差异。Black & Litterman(1991)指出投资观点的不确定性确实难以精确确认，他们**建议使用不断试错直到得到合理最优组合的方式确认这一参数**。

而当投资观点来源于量化框架时，观点不确定性的估计变得更为直观，可以参考参数的估计误差进行估计。在前文提及的 BLB 模型中，存在一个资产收益的参数分布$p(r|\theta)$，一个参数的先验分布$\pi(\theta)$，以及一个似然函数$f(q|\theta)$。参数θ与资产收益以及投资观点都直接相关。此时对于投资观点不确定性Ω的估计变得非常直观。当投资观点向量 q 是以多元正态分布进行建模时，投资者可以直接使用 q 的协方差矩阵作为投资观点不确定性。而即使投资者使用神经网络模型或支持向量机等方式获取点估计，也能**通过再抽样的方式获取对投资观点不确定性的估计**(Fabozzi, Focardi, & Kolm, 2006）。

4.3. 交易成本的纳入

BL 模型在后验分布$f(r|q)$下最大化财富终值的期望效用。当后验分布 f 服从多元正态分布且效用函数$U(W_T)$是一个平滑单调增的凹函数时，对财富终值预期效用的优化等价于如下的简化形式：

$$\text{argmax}_h E[W_T|q] - \frac{\lambda}{2} V[W_T|q] \tag{17}$$

其中W_T代表了时间 T 的财富价值，E[|q]以及 V[|q]分别代表了在后验分布下的预期收益以及方差预测。在考虑投资成本的情况下：

$$W_T = W_0 + h^T r - c(h) \tag{18}$$

c(h)代表了换仓等投资决策带来的投资成本。当投资者的风险厌恶系数确定后，初始财富W_0将不再重要。将公式 18 插入公式 17 中可以得到：

$$\text{argmax}_h E[h^T r - c(h)|q] - \frac{\lambda}{2} V[h^T r - c(h)|q] \tag{19}$$

当投资组合的换手并不高时，大部分的投资组合收益波动来自于资产价值的变化，此时$V[h^T r - c(h)|q] \approx V[h^T r|q]$。利用这一假设，我们可以更进一步简化目标函数：

$$\text{argmax}_h E[h^T r - c(h)|q] - \frac{\lambda}{2} V[h^T r|q] \tag{20}$$

公式 20 代表了在 BL 以及 BLB 模型下把投资交易成本纳入组合优化的方法。在传统的 BL 模型下，E[r|q]以及 V[r|q]对应了公式 7 以及公式 8 中的 BL 均值以及协方差矩阵预测。而在 BLB 更一般的贝叶斯框架下，我们需要对后验分布的矩信息进行估计。

5. Black-Litterman 模型拓展

近年来，投资者不断开发 BL 模型的拓展形式以使其更加接近真实的投资需求。本章中我们重点讨论 BL 模型的因子模型拓展以及非线性建模拓展。

5.1. BL 的因子模型拓展

风险溢价以及因子模型因其简约、低成本的应用而吸引了大量投资者的注意。尽管已经有大量学者探索了如何在因子投资的框架下构建投资组合（Bass, Gladstone, & Ang, 2017; Bergeron, Kritzman, & Stivitsky, 2018; Dopfel & Lester 2018; Bender, Le Sun, & Thomas, 2018; Aliaga-Diaz et al.

2020)，这些研究并没有尝试从贝叶斯统计的角度对因子投资的组合构建进行研究。

在 BL 模型下，投资者的收益观点以资产组合的方式表达。然而因子并不是投资组合，而是代表特定风险来源的不可观测的隐变量，因子模型无法直接应用于 BL 模型。Kolm & Ritter(2017, 2020)提出的基于贝叶斯统计的纳入因子风险溢价的方法可供参考。本节我们对这种方法进行简要介绍。

以套利定价模型 (APT) 作为出发点，我们假设市场中存在 n 个资产以如下线性因子模型定义:

$$r_t = X_t f_t + \varepsilon_t,\ \varepsilon_t \sim N(0, D_t) \tag{21}$$

其中X_t代表了 n*k 的因子载荷矩阵，$\varepsilon_t := (\varepsilon_{t,1}, \dots, \varepsilon_{t,n})^T$代表 n 维的残差收益向量，$f_t := (f_{t,1}, \dots, f_{t,k})^T$代表 k 维的因子变量向量，$f_t$的期望以及方差分别为$u_f$以及 F。我们假设残差收益互不相关。

假设u_f以及 F 是常数，我们可以对因子收益f_t的先验分布进行估计。一个可行的选择是使用 OLS 回归计算因子收益值: $\hat{f}_t = (X_t^T X_t)^T X_t^T r_{t+1}$。通过更为复杂模型估计的因子收益也可使用(Gelman et al., 2003)。我们可以定义先验分布为:

$$\pi_f \sim N(\xi, V) \tag{22}$$

对于因子风险溢价的主观观点以类似 BL 模型的方式表达:

$$q = u_f + \varepsilon_q,\ \varepsilon_q \sim N(0, \Omega) \tag{23}$$

其中，$\Omega = \mathrm{diag}(w_1^2, \dots, w_k^2)$代表了因子风险溢价观点的不确定性。Kolm & Ritter(2017, 2020)证明了此时后验分布的预期收益与协方差矩阵分别为:

$$u_{BL-fac} = \Sigma_{BL-fac} \Sigma^{-1} X(\breve{V}^{-1} + X^T \Sigma^{-1})^{-1} \breve{V}^{-1} \breve{\xi} \tag{24}$$

$$\Sigma_{BL-fac} = \left(\Sigma^{-1} + \Sigma^{-1} X(\breve{V}^{-1} + X^T \Sigma^{-1})^{-1} X^T \Sigma^{-1}\right)^{-1} \tag{25}$$

其中$\breve{V} := (V^{-1} + \Omega^{-1})^{-1}$与$\breve{\xi} := \breve{V}(V^{-1}\xi + \Omega^{-1} q)$是后验分布的超参数，并且$\Sigma := D + XFX$是因子模型下资产收益的协方差矩阵。

5.2. BL 的非线性建模拓展

原始 BL 模型假设资产收益服从多元正态分布。从数学角度来说，正态分布因其共轭的特性可以得到同样服从多元正态分布的后验分布，计算上十分简约方便。但这一假设也限制了投资观点的形式，如何放松资产多元正态分布的假设同样是 BLB 模型尝试拓展解决的问题。

Chamberlain(1983)发现，当资产收益服从椭球分布时，任何凹预期效用函数最终都可以转化为资产组合期望收益与方差的函数。值得一提的是，椭球分布是一个涵盖广泛的分布类别，包含了学生 T 分布在内的多种尖峰厚尾分布。这意味着在 BLB 的框架下，只要后验分布是椭球分布，我们总能得到均值方差类型的目标函数。但需要注意的是，如果先验分布与似然分布并不共轭，那么后验分布的矩信息可能非常难以计算。

Meucci(2008)曾提出了一种变形以放松 BL 模型对线性假设的依赖（Entropy-based methods, 下称 EP）。他假设风险因子$\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_m)^T$服从如下先验分布:

$$\theta \sim \pi \tag{26}$$

其中，θ可以是资产收益、APT 模型中的隐因子、或者任何隐因子的线性以及非线性组合。与 BLB 模型下使用似然函数表达观点并不相同，EP 模型通过给未知的后验分布的参数加以约束的方式纳入投资观点。

$$p(\theta) \in V \tag{27}$$

V代表了由资产收益观点带来的这类约束。这样的建模可以有效纳入与风险因子有关的非线性观点。由于 EP 模型中并不包含似然函数，后验分布并不能直接以贝叶斯概率的方式获取。取而代之的是直接对 KL 散度进行优化:

$$p = \operatorname{argmax}_{p \in V} D_{KL}(p|\pi) \tag{28}$$

投资观点的信心水平可使用类似 BL 模型的方式获取。需要指出的是，公式 28 的计算复杂程度由投资观点函数的复杂程度确定。当资产收益的后验分布被确定后，投资者可以利用传统均值方差优化的方式获取最优组合。我们这里讨论的是参数模型形式的 EP 模型，EP 模型同样可以以非参的形式进行建模(Meucci, 2008; Meucci, Ardia, & Colasante, 2014)。

6. 总结

BL 模型是金融领域应用最为成功的模型之一。其对贝叶斯统计的整合给投资者提供了以严格数学工具纳入前瞻资产收益观点的方法。这一特性对面临快速市场变化的投资者而言尤为重要。自 20 世纪 90 年代 BL 模型被提出起，用于分析金融数据的复杂计量方法得到了显著的进步。在本文中，我们结合新兴的计量方法对 BL 模型应用与拓展进行了介绍。

本公司具有中国证监会核准的证券投资咨询业务资格

分析师声明

作者具有中国证券业协会授予的证券投资咨询执业资格或相当的专业胜任能力，保证报告所采用的数据均来自合规渠道，分析逻辑基于作者的职业理解，本报告清晰准确地反映了作者的研究观点，力求独立、客观和公正，结论不受任何第三方的授意或影响，特此声明。

免责声明