定量研究

证券研究报告

兴业证券 INDUSTRIAL SECURITIES

分析师:
徐寅
xuyinsh@xyzq.com.cn
S0190514070004

【兴证金工】西学东渐--海外文献推荐系列之一百二十一

专题报告

2021年6月3日

报告关键点

近年来海内外的结构化产品规模持续扩张，投资者对结构化产品的模式以及定价方法非常关注，本文对加入自动赎回条款的结构化产品进行了分析，并构建了一个通用的偏微分方程框架分别对离散和连续观察日的自动赎回结构化产品定价，具有离散赎回观察日期的自动赎回结构化产品通常没有解析解，作者使用有限差分方法对这些产品定价，对于连续的自动赎回产品，作者推导了相应的解析解，在此基础上结合案例说明了文章提出的建模方法。通过对不同类型的自动赎回结构化产品进行对比，作者发现连续的自动赎回结构化产品更容易触发赎回，相较于离散情形下的结构化产品贴现价值更高。

相关报告

《西学东渐--海外文献推荐系列之一百二十》
《西学东渐--海外文献推荐系列之一百一十九》
《西学东渐--海外文献推荐系列之一百一十八》

投资要点

- 西学东渐，是指从明朝末年到近代，西方学术思想向中国传播的历史过程。西学东渐不仅推动了中国在科学技术和思想文化方面的发展，也有力地促进了社会与政治的大变革。在今天，西学东渐仍有其重要的现实意义。作为A股市场上以量化投资为研究方向的卖方金融工程团队，在平日的工作中，常常深感海外相关领域的研究水平之高、内容之新。而这也促使我们通过大量的材料阅读，去粗取精，将认为最有价值的海外文献呈现在您的面前！
- 近年来海内外的结构化产品规模持续扩张，投资者对结构化产品的模式以及定价方法非常关注，本文对加入自动赎回条款的结构化产品进行了分析，并构建了一个通用的偏微分方程框架分别对离散和连续观察日的自动赎回结构化产品定价，具有离散赎回观察日期的自动赎回结构化产品通常没有解析解，作者使用有限差分方法对这些产品定价，对于连续的自动赎回产品，作者推导了相应的解析解，在此基础上结合案例说明了文章提出的建模方法。通过对不同类型的自动赎回结构化产品进行对比，作者发现连续的自动赎回结构化产品更容易触发赎回，相较于离散情形下的结构化产品贴现价值更高。

风险提示：文献中的结果均由相应作者通过历史数据统计、建模和测算完成，在政策、市场环境发生变化时模型存在失效的风险。

目录

报告正文

对自动赎回的结构化产品定价

文献来源：

Deng G , Mallett J , Mccann C .Modeling autocallable structured products[J]. Journal of Derivatives & Hedge Funds, 2011.

推荐原因：

近年来海内外的结构化产品规模持续扩张，投资者对结构化产品的模式以及定价方法非常关注，本文对加入自动赎回条款的结构化产品进行了分析，并构建了一个通用的偏微分方程框架分别对离散和连续观察日的自动赎回结构化产品定价，具有离散赎回观察日期的自动赎回结构化产品通常没有解析解，作者使用有限差分方法对这些产品定价，对于连续的自动赎回产品，作者推导了相应的解析解，在此基础上结合案例说明了文章提出的建模方法。通过对不同类型的自动赎回结构化产品进行对比，作者发现连续的自动赎回结构化产品更容易触发赎回，相较于离散情形下的结构化产品贴现价值更高。

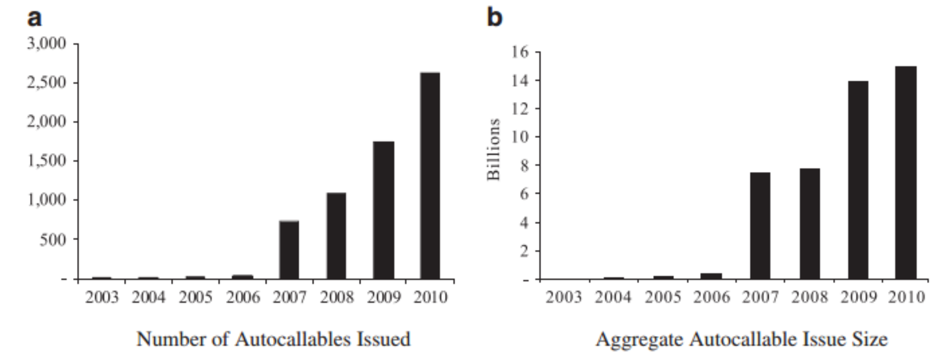
我们的思考：

结构化产品是指运用现代金融工程技术，对债券、期货、期权、互换等基础性金融产品进行重新设计组合后创造出来的复杂的金融衍生产品，近期市场关注度非常高的雪球结构也属于自动赎回结构化产品的一种。由于自动赎回结构化产品的定价较为复杂，本文介绍了简单的自动赎回结构化产品的定价方式，有助于投资者更深入地理解此类型产品的结构和原理。

1、引言

近年来自动赎回的结构化产品变得越来越普遍，根据美国的记录，法国巴黎银行于 2003 年 8 月 15 日发行了首只可赎回结构化产品。图表 1（a）和（b）绘制了 2003 年至 2010 年期间发行的可赎回结构化产品的数量和总面值，正如下图所展示的，可赎回的结构化产品数量在 2007 年急剧增加，而且以 40%的年增长率一直持续到 2010 年，2010 年前 6 个月发行的自动赎回产品超过了 2500 只；从产品面值来看，近年来可赎回结构化产品的总面值也呈现相同的发展规律，在 2007 年激增后持续增长。

图表 1、自动赎回的数量和总规模（2003/1-2010/6）



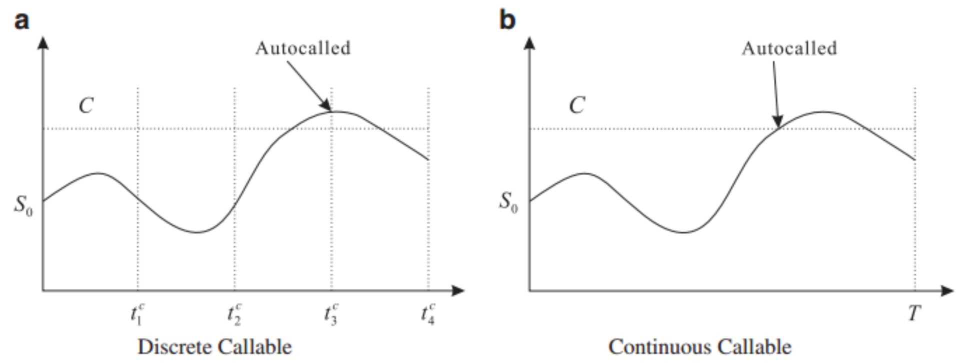
资料来源：Journal of Derivatives & Hedge Funds，兴业证券经济与金融研究院整理

自动赎回的结构化产品快速扩张的原因之一是产品将赎回条款附加到现有类型的结构化产品上。如果挂钩资产的价格在观察日期（call date）达到事先约定的赎回水平（the call price），将触发结构化产品的赎回条款。

在本文中我们介绍了产品的可赎回特征，解释了如何对产品定价并给出了定价方法的案例。文章使用偏微分方程（PDE）来对自动赎回的结构化产品定价，我们根据 Black-Scholes 公式建立了偏微分方程，并根据产品可自动赎回等特征设置了相应的边界条件。

我们将自动赎回的结构化产品分为两类：赎回观察日是离散日期的产品与赎回观察日是连续时间的产品。图 2（a）和（b）用作图的方式直观地展示了离散和连续自动赎回产品的区别。在相同的挂钩资产下，这两图展示了资产价格随时间的变化趋势，可以看到连续的自动赎回结构化产品在越过赎回价格 C 时立即被赎回，而离散的自动赎回结构必须等到观察日 t_3^c 才能触发产品赎回条款，如果股票价格在 t_3^c 时跌落至 C 以下，该离散的自动赎回结构化产品不会触发赎回条款。因此，在其他条件相同的情况下，连续的自动赎回结构化产品比离散情形下的产品更容易触发赎回。

图表 2、自动赎回情况展示



资料来源：Journal of Derivatives & Hedge Funds，兴业证券经济与金融研究院整理

尽管我们在本文中仅考虑恒定的触发价格，但是我们的方法可以拓展到指数增长的触发价格中，这种拓展方法与敲出价格呈指数变化的障碍期权定价类似。

自动赎回结构化产品本质上类似于反向可转换债券，该反向转换债券要支付高额息票，以换取使投资者承受挂钩资产的下行风险。尽管自动赎回结构化产品的发行期限通常比反向可转换债券更长，但由于产品嵌入了可赎回属性，因此自动赎回结构化产品的有效期限可能更短，具体可以参阅 Arzac，Chemmanur 等以及 Chemmanur 和 Simonyan 的研究，以了解投资银行为何发行反向可转换债券以及投资者为何购买它们。

举例而言，一种常见的自动赎回的结构化产品的收益结构如下：如果挂钩资产的价格在某个在观察日高于赎回价格，它将被赎回并支付预先指定的固定利率收益；如果挂钩资产在每个观察日的价格都低于赎回价格，则不会触发赎回条款。在这种情况下，如果挂钩资产的到期价格高于预定阈值，则投资者将在到期时获得产品的面值，如果最终价格低于阈值，投资者将获得与挂钩资产相同的收益率。

本文的内容安排如下：在下一部分中，我们将介绍产品定价的框架，并分别讨论观察日为离散型和连续型的自动赎回结构化产品；接着将我们的定价框架应用于示例的结构化产品中，最后是本文的总结。

2、 自动赎回的结构化产品定价模型

赎回条款中的以下三个条件会影响结构化产品的价值：赎回观察时间，每个观察日被赎回的概率以及到期时刻的收益。在本节中，我们将观察日为离散型和连续型的自动赎回结构化产品的定价问题转换为 PDE 问题。

2.1、使用 PDE 对自动赎回结构化产品建模

我们的定价模型是在风险中性的假设条件下根据 Black-Scholes 框架建立的，且认为资产价格服从广义的布朗运动。

$$dS_t = (\mathrm{r}-\mathrm{q})S_t\, d_{\mathrm{t}} + \sigma S_t\, dW_t \qquad (1)$$

其中 r 表示无风险利率，q 表示分红率，σ 表示标的资产的波动率。（在本文中我们假设 r，q 和 σ 是常数，为了简便我们省略了 S_t 中的下标 t。）如果假设结构化产品的价格 $\mathrm{V(S,t)}$ 是时间 $t\in[0,\mathrm{T}]$ 和挂钩资产价格 $\mathrm{S}\in[0,\infty)$ 的函数，结构化产品的价值可以用下式表示：

$$\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2\mathrm{S}^2\frac{\partial^2\mathrm{V}}{\partial \mathrm{S}^2}+(\mathrm{r}-\mathrm{q})\,\mathrm{S}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{S}}-(\mathrm{r}+\mathrm{C\bar{D}S})\,\mathrm{V}=0 \qquad (2)$$

其中 $\mathrm{C\bar{D}S}$ 是发行人信用违约互换（CDS）的费率（结构化产品是无担保债务证券，如果发行人违约其价值就会损失，因此必须将发行人的信用风险 $\mathrm{C\bar{D}S}$ 包括在微分方程中来计算结构化产品当前的价值）。

许多不同的结构化产品都可以表达为公式（2）的变化形式；例如当结构化产品没有触发赎回时，到期收益 $f(\mathrm{S_T})$ 通常是挂钩资产在到期时刻价值的函数：

$$V(S_T, T) = f(S_T).$$

简单起见且为了不失一般性，我们假设结构化产品的初始本金等于挂钩资产的初始价值S_0，嵌入的看涨和看跌期权以及赎回条件可以被可以作为边界条件建模:

$$V(C,t) = P_t，其中 t \in \tau_c， \qquad (3)$$

其中 C 是与时间无关的赎回价格，P_t是当产品触发赎回时的最终收益，τ_c是离散或者连续的触发赎回的时间集合，即当结构化产品触发赎回后，结构化产品将立即到期，最终收益为P_t。结构化产品通常会提供一个固定的回报率，因此收益可以表示为:

$$P_t = He^{Bt},$$

其中 B 是产品触发赎回的回报率，H 是常数。

2.2、对观察日是离散型的自动赎回结构化产品定价

赎回观察日为离散型的产品大多数都没有解析解（closed-form solution），取而代之的是求解 PDE，并通过数值方法（例如有限差分法）对产品进行定价。

对于离散型的自动赎回结构化产品，PDE 的边界条件表示如下:

$$V(C,t) = P_t \text{ ，对于 } t \in \tau_c$$

$$V(0,t) = f(0)\,e^{-(r+C\bar{D}S)(T-t)}.$$

第一个条件要求产品的价值不得超过触发赎回日期的收益；第二个条件说明如果挂钩资产的价格达到 0，产品价值将保持为 0。为了简便，我们设定 $f(0)=0$。这个边界条件是必要的，如果参考资产变得一文不值，它可以确保结构化产品永远无法触发赎回。

解该偏微分方程的第一步是简化上述复杂的符号并将方程式转换为标准热方程。使用类似于 Wilmott 等和 Hui 的“dimensionless”变化，将变量$\{S,t,V(S,t)\}$转换为$\{x,\tau,u(x,\tau)\}$,如下所示。

$$S=Ce^{x}, t=T-\frac{2\tau}{\sigma^2},$$

$$V(S,t)=Ce^{\alpha x+\beta\tau}u(x,\tau)+f(0)e^{-(r+C\bar{D}S)(T-t)},$$

其中常数表示为:

$$k_1=\frac{2(r-q)}{\sigma^2}, \quad \alpha=-\frac{1}{2}(k_1-1),$$

$$\beta=-\alpha^2-\frac{2(r+C\bar{D}S)}{\sigma^2}.$$

对变量进行替换后，我们可以将 Black-Scholes 方程简化为热方程:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}，对于 -\infty<x<0,\tau>0, \qquad (4)$$

边界条件则相应表示为:

$$u(-\infty,\tau)=0,$$

$$u(0,\tau)=C^{-1}e^{-\beta\tau}(P_t-f(0)e^{-(r+C\bar{D}S)\frac{2\tau}{\sigma^2}}),对于\ \mathrm{T}-\frac{2\tau}{\sigma^2}\in\tau_c$$

初始条件变换为:

$$u(x,0)=C^{-1}e^{-\alpha x}(f(Ce^x)-f(0)),对于 -\infty<x<0,$$

为了进一步简化表达式，我们有:

$$h_1(\tau)=C^{-1}e^{-\beta\tau}(P_t-f(0)e^{-(r-C\bar{D}S)\frac{2\tau}{\sigma^2}})$$

$$h_2(x)=C^{-1}e^{-\alpha x}(f(Ce^x)-f(0)),$$

并将边界条件和初始条件化简为:

$$u(-\infty,\tau)=0,\ u(0,\tau)=h_1(\tau)$$

$$对于\ \mathrm{T}-\frac{2\tau}{\sigma^2}\in\tau_c，\ u(x,0)=h_2(x). \qquad (5)$$

有限差分法可以将函数 $u(x,\tau)$ 所在的定义域进行网格剖分，函数的定义域为 $(x,\tau)\in(-\infty,0]\times[0,\mathrm{T}\sigma^2/2]$,我们将定义域划分为 N*M 的网格，每一个网格的步长分别为 $\delta x\times\delta\tau$。因为 x 没有下限，所以我们可以给 x 分配一个绝对值任意大的最小值 $-N\delta x$， τ 的界限要求 $\delta\tau$ 满足

$$M\delta\tau=\frac{T\sigma^2}{2}.$$

一般而言，随着 δx 和 $\delta\tau$ 的缩小，定价的准确性会提高。通常将 $\delta\tau$ 设置为一个交易日，使得 $\delta t=2\delta\tau/\sigma^2$=一年的 1/250。

有限差分方法共有三种：显式有限差分方法，隐式有限差分方法和 Crank-Nicolson 方法，这些方法的不同之处在于它们如何近似 $\partial u/\tau$ 和 $\partial^2 u/x^2$，在此例中，我们使用显式有限差分方法，该方法将衍生品近似表达为:

$$\frac{\partial u}{\tau}\sim\frac{u_n^{m+1}-u_n^m}{\delta\tau},$$

$$\frac{\partial^2 u}{x^2}\sim\frac{u_{n+1}^m-2u_n^m+u_{n-1}^m}{(\delta x)^2}.$$

用公式（5）中的条件求解方程式（4）等同于求解

$$\frac{u_n^{m+1}-u_n^m}{\delta\tau}=\frac{u_{n+1}^m-2u_n^m+u_{n-1}^m}{(\delta x)^2},\ 0<n<N,0<m<M$$

其中:

$$u_n^0=h_2(-n\delta x),0\le n\le N,$$

$$u_0^m=0,0<m<M,$$

$$u_N^m=h_1(m\delta\tau)，对\ T-\frac{2(m\delta\tau)}{\sigma^2}\in\tau_c$$

表达式 $M\delta\tau$ 转化为 $(M+1)\delta\tau$ 为:

$$u_n^{m+1}=u_n^m+\frac{\delta\tau}{(\delta x)^2}(u_{n+1}^m-2u_n^m+u_{n-1}^m),\ 0<n<N,0<m<M.$$

将 m 从 0 迭代到 M（对应将 t 从 0 迭代到 T）就可以得到结果，为了有限差分法的收敛性和稳定性，我们要求 $\delta\tau/(\delta x)^2\le 1/2$，一旦得到了全部的 u_n^M（n=1,2,…,N），我们对每一个 x 就可以估计出 $u(x,T\sigma^2/2)$，我们可以使用 $u(x,T\sigma^2/2)$ 最终推导得到 t=0 时刻的原始方程 $V(S,t)$。

对离散型自动赎回结构化产品定价的另一种概率方法

对离散型自动赎回结构化产品定价的另一种方法是计算每个赎回观察日触发自动赎回的概率，然后使用每个日期的概率来对结构化产品进行定价。令 $p_i\ (i=1,...,n)$ 为在 t_i^c 时刻自动赎回的概率。自动赎回一直都不被触发的概率为 $1-\sum_{i=1}^{n}p_i$，其中每个 p_i 的条件是在此之前的任何一个观察日 $(t_1^c,...,t_{i-1}^c)$ 都未触发赎回，条件概率 $S_{t_i^c}\,|\,S_{t_{i-1}^c}$ 服从对数正态分布:

$$S_{t_i^c}=S_{t_{i-1}^c}\,e^{(r-q-\frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t_i^c+\sigma\Delta\sqrt{t_i^c}W_i},$$

其中 Δt_i^c 是观察日 $\Delta t_i^c=t_i^c-t_{i-1}^c$ 之间的时间间隔，$W_i\ ,i=1,...,n$ 服从正态分布且独立同分布。为了简化表达式，我们令 $X_i=(r-q-\frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t_i^c+\sigma\Delta\sqrt{t_i^c}W_i$，那么挂钩资产的到期价格可以表示为:

$$S_T=S_0\,e^{\sum_{i=1}^{n}(r-q-\frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t_i^c+\sigma\Delta\sqrt{t_i^c}W_i}=S_0\,e^{\sum_{i=1}^{n}X_i}$$

因为价格的马尔科夫特征，X_i's 是两两独立的。而且如果 Δt_i^c 是一个常数，那么 X_i's 将服从独立同分布，产品在 t_i^c 时刻自动赎回的概率为:

$$p_i = \mathrm{Prob}(S_{t_j^c} < C, j=1,2,...,i-1, \text{且} S_{t_i^c} \geq C)$$

$$= \mathrm{Prob}(\sum_{k=1}^{j} X_k < \log(\frac{C}{S_0}), j=1,2,...,i-1, \text{且} \sum_{k=1}^{i} X_k \geq \log(\frac{C}{S_0}))$$

$$= \iint\limits_{\substack{\sum_{k=1}^{j} x_k < \log(\frac{C}{S_0}), j=1,2,...,i-1, \\ \sum_{k=1}^{i} x_k \geq \log(\frac{C}{S_0})}} g(x_1,...,x_n)\, dx_1 dx_2 ... dx_n$$

其中 $g(x_1,...,x_n)$ 是 $x_1,...,x_n$ 的联合概率密度函数，因为 X_i's 是独立的，联合概率密度函数可以表达成单个概率密度函数的乘积。

现在，我们可以将产品的现值估算为预期现金流的折现，其中概率就是我们刚刚计算的 p_i。

$$V(S_0,0) = \sum_{i=1}^{n} e^{-(r+C\bar{D}S)t_i^c} p_i P_{t_i^c} + e^{-(r+C\bar{D}S)T} \iint\limits_{\sum_{k=1}^{j} x_k < \log\frac{C}{S_0}, j=1,2,...,n} f(S_T) g(x_1,...,x_n)\, dx_1 ... dx_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} e^{-(r+C\bar{D}S)t_i^c} p_i P_{t_i^c} + e^{-(r+C\bar{D}S)T} \iint\limits_{\sum_{k=1}^{j} x_k < \log\frac{C}{S_0}, j=1,2,...,n} f(S_0 e^{\sum_{i=1}^{n} x_i}) g(x_1,...,x_n)\, dx_1 ... dx_n \quad (6)$$

如果结构化产品的到期收益是恒定的 $f(S_T)=P_T$，以上表达式可以进一步简化为:

$$V(S_0,0) = \sum_{i=1}^{n} e^{-(r+C\bar{D}S)t_i^c} p_i P_{t_i^c} + e^{-(r+C\bar{D}S)T} (1 - \sum_{i=1}^{n} p_i) P_T . \quad (7)$$

2.3、对观察日是连续型的自动赎回结构化产品定价

对于连续的自动赎回结构化产品，PDE 的边界条件为连续方程。

$$V(C,t) = P_t \ , \ V(0,t) = f(0) e^{-(r+C\bar{D}S)(T-t)} .$$

我们应用上一部分（离散型）的变量和简化表达式，可以得到热方程:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \text{ 对于 } -\infty<x<0, \tau>0, \quad (8)$$

边界条件为:

$$u(-\infty,\tau)=0, u(0,\tau)=h_1(\tau), \text{ 对于 } \tau>0$$

初始条件为:

$$u(x,0)=h_2(x), \text{对于 } -\infty<x<0$$

下一步是转换边界条件，为此我们引入了变换 $v(x,\tau)=u(x,\tau)-\gamma(x,\tau)$，其中 $\gamma(x,\tau)=e^x h_1(\tau)$，使用这个变换后 Black-Scholes 方程可以变成:

$$\frac{\partial v}{\partial \tau}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+e^x(h_1(\tau)-h_1'(\tau)), 对于 -\infty<x<0,\tau>0. \quad (9)$$

新的零边界条件为:

$$v(-\infty,\tau)=0, v(0,\tau)=0，对于 \tau>0$$

新的初始条件为:

$$v(x,0)=h_2(x)-e^x h_1(0), 对于 -\infty<x<0$$

经过上述的变换后，通过进一步简化可以使用 Evans 中的方法解决这个 PDE 问题。具体而言，令 $h_3(x)=h_2(x)-e^x h_1(0)$ 且 $h_4(x)=e^x(h_1(\tau)-h_1'(\tau))$，可以转换成一般形式:

$$\frac{\partial v}{\partial \tau}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+h_4(x,\tau), 对于 -\infty<x<0,\tau>0,$$

$$v(-\infty,\tau)=0, v(0,\tau)=0, 且 v(x,0)=h_3(x),$$

这个 PDE 的解为:

$$v(x,\tau)=\frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}\int_{-\infty}^{0} h_3(s)(e^{-(x-s)^2/4\tau}-e^{-(x+s)^2/4\tau})ds + \int_0^{\tau}\int_{-\infty}^{0}\frac{h_4(s,r)}{2\sqrt{\pi(\tau-r)}}(e^{-(x-s)^2/4(\tau-r)}-e^{-(x+s)^2/4(\tau-r)})dsdr \quad (10)$$

一旦得到了 $v(x,\tau)$ 的解，我们就可以解决转换问题 $u(x,\tau)=v(x,\tau)+e^x h_1(x)$，从而可以推导得到 $V(S,t)$。

3、自动赎回的结构化产品案例

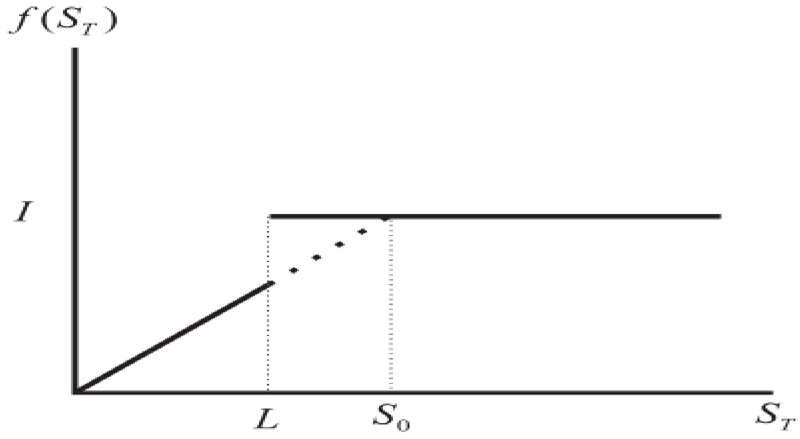
我们介绍一个简单的自动赎回结构化产品案例作为定价方法的实践，此案例特点与最受欢迎之一的“具有应急保护功能的可自动赎回证券”相似，在 2009 年产品的面值超过 14 亿美元。如果挂钩资产在任何赎回观察日具有正的累计收益，结构化产品触发赎回，投资者将获得预先设定的正收益。

$$V(S,T)=f(S)=\begin{cases} I=S_0, S>L \\ S, 其他 \end{cases} \quad (11)$$

其中 I 是结构化产品的面值，S_0 是参考资产的初始值，S 是参考资产的最终值，L 是价格的阈值。

如果结构性产品没有被赎回，投资者将获得 0%或者负的回报。图表 3 展示了自动赎回的结构化产品在未赎回时的到期收益。

图表 3、自动赎回的结构化产品到期收益（未触发赎回）



资料来源：Journal of Derivatives & Hedge Funds，兴业证券经济与金融研究院整理

为了展示定价模型的应用，我们对三种类型的自动赎回结构化产品进行了定价。第一个例子中（基准案例）没有自动赎回功能，产品具有一个固定的票息，产品的收益结构类似普通的反向可转换结构性产品。第二种类型的产品每月（离散）具有自动赎回功能，第三种类型具有连续的自动赎回功能。

在三个例子中我们均假设挂钩资产的初始价格 S_0 和产品票面面值 I 都是 100 美元，赎回价格为 102 美元，无风险利率 r 为 5%，挂钩资产的波动率 σ 为 20%，股息率 q 为 1%，发行人信用违约互换的费率 $C\bar{D}S$ 为 1%，合约期限 T 为 1 年，阈值 L 为 80 美元。如果资产价格在赎回观察日的价格高于赎回价格（即 $S_t \geq C = 102$ ），该产品将被赎回并支付投资者 9.2%的年化收益率（即 $P_t = He^{Bt} = 100e^{0.092t}$ ）。（这个案例是我们的基准案例，我们使用 9.2%的票面利率），许多自动赎回产品的赎回价格与股票价格相同（$C = S_0$），然而我们的假设 $C > S_0$ 也不失一般性。（在连续的情况下，如果赎回价格与股票价格相同，则该产品可能会在发行时被立即赎回，从而违背了此类赎回条款的要求）。

3.1、情形 1：基准—无自动赎回

在这种情况下，自动赎回结构性产品的定价相对简单。因为挂钩资产的到期价格服从对数正态分布：

$$S_T = S_0 e^{(r-q-\frac{1}{2}\sigma^2)T+\sigma\sqrt{T}W}$$

结构化产品的价值为未来现金流的贴现：

$$V(S_0,0)=e^{-(r+C\bar{D}S)T}\left(\int_0^{\infty} f(S_T)g(S_T)dS_T + S_0 TB\right).$$

其中 $g()$ 为 S_T 的概率密度函数（PDF），通过参数设置，我们将产品在发行日的价值设置为 100 美元（产品面值也为 100 美元）。许多研究表明（例如 Henderson

和 Pearson）反向可转换结构产品往往定价过高，也就是说它们的平均发行价格超过了其未来预期现金流的贴现价值。我们将情形作为基准案例，同时根据面值为其定价。

3.2、情形 2：观察日为离散型

通常，自动赎回的结构化产品具有离散的自动赎回观察日，在本案例中我们假设每月观察产品是否触发赎回，我们首先使用显式有限差分法来为产品定价。我们将 x 的范围设置为[-5,0]，将 t 的范围设置为$[0, T\sigma^2/2]$。由此产生的 n*m 网格数量为 1000*500=500000。根据公式（6），面值 100 美元的产品的贴现价值为 98.39 美元，我们还计算了产品每个月触发赎回的概率，结果展示在下表中。

图表 4、产品在每月赎回观察日触发赎回的概率（前提条件是没有在更早的日期被赎回）

Month i	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*
p_i	0.3767	0.1435	0.0781	0.0506	0.0361	0.0275	0.0218	0.0178	0.0149	0.0127	0.0110	0.0096

资料来源：Journal of Derivatives & Hedge Funds，兴业证券经济与金融研究院整理

3.3、情形 3：观察日为连续型

如果赎回观察日期是连续的，我们可以按照 2.3 部分的方法获得产品定价公式的解析解。

对变量进行变换后，我们得到齐次热方程：

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\text{，对于 } -\infty<x<0, \tau>0,$$

$$u(-\infty,\tau)=0,\ u(0,\tau)=C^{-1}e^{-\beta\tau}P_t,$$

$$u(x,0)=C^{-1}e^{-\alpha x}f(Ce^x),$$

利用我们的表示符号，$h_1(\tau)=C^{-1}e^{-\beta x}P_t$，$h_2(x)=C^{-1}e^{-\alpha x}f(Ce^x)$，再次进行变量替换后使得方程的边界条件为 0。令 $r(x,\tau)=e^x h_1(\tau)=C^{-1}e^{x-\beta\tau}P_t$，$v(x,\tau)=u(x,\tau)+r(x,\tau)$，方程变换成非齐次方程。

$$\frac{\partial v}{\partial \tau}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+C^{-1}e^{x-\beta\tau}P_t 1+\beta+\frac{2\beta}{\sigma^2}\text{，对于 } -\infty<x<0, \tau>0,$$

$$v(-\infty,\tau)=0,\ v(0,\tau)=0,$$

$$v(x,0)=C^{-1}e^{-\alpha x}f(Ce^x)-\frac{H}{C}e^{x+BT}.$$

其中：

$$h_3(x)=C^{-1}e^{-\alpha x}f(Ce^x)-(H/C)e^{x+BT},$$

$$h_4(x,\tau)=C^{-1}e^{x-\beta\tau}P_t(1+\beta+(2B/\sigma^2)).$$

将公式（10）代入，可以得到：

$$
\begin{aligned}
v(x,\tau)=&\frac{S_0}{C}e^{\alpha^2\tau-\alpha x}[N(\frac{-x+2\alpha\tau}{\sqrt{2\tau}})-N(D_1-\frac{x}{\sqrt{2\tau}})]\\
&-\frac{S_0}{C}e^{\alpha^2\tau+\alpha x}[N(\frac{x+2\alpha\tau}{\sqrt{2\tau}})-N(D_1+\frac{x}{\sqrt{2\tau}})]\\
&+e^{D_2+(1-\alpha)x}N(D_3-\frac{x}{\sqrt{2\tau}})-e^{D_2-(1-\alpha)x}N(D_3+\frac{x}{\sqrt{2\tau}})\\
&-\frac{H}{C}e^{BT+x+\tau}N(\frac{-x-2\tau}{\sqrt{2\tau}})+\frac{H}{C}e^{BT-x+\tau}N(\frac{x-2\tau}{\sqrt{2\tau}})\\
&+\frac{H}{C}(1+\beta+\frac{2B}{\sigma^2})\int_0^\tau e^{D_4+x}N(D_5-\frac{x}{\sqrt{2(\tau-r)}})-\frac{H}{C}e^{D_4-x}N(D_5+\frac{x}{\sqrt{2(\tau-r)}})\,dr
\end{aligned}
$$

其中：

$$D_1=\frac{log(L/C)+2\alpha\tau}{\sqrt{2\tau}},$$

$$D_2=\tau(\alpha-1)^2,$$

$$D_3=\frac{log(L/C)+2\tau(\alpha-1)}{\sqrt{2\tau}},$$

$$D_4=BT-(\beta+\frac{2B}{\sigma^2}+\tau-r),$$

$$D_5=-\sqrt{2(\tau-r)}.$$

结构化产品 V(S, t)在(S0, 0)处的价值为：

$$V(S,t)=Ce^{\alpha x+\beta\tau}(v(x,\tau)+r(x,\tau))$$

根据我们设置的条件，产品贴现价值 V(S, 0)为 99.54 美元。

3.4、以上三种情形的比较

我们现在可以比较三种不同情形下的产品价值：分别为 100.00 美元、98.39 美元和 99.54 美元。自动赎回结构化产品的投资价值低于其基准水平（不设置自动赎回条款），原因是非常直观的：不可赎回的产品保证在到期前支付息票，具有自动赎回功能的产品可能会在较短的时间内支付或根本不支付票息，由于两种投资具有相同的下行风险，因此增加产品的自动赎回功能（在不调整产品价格或票息的情况下）会降低投资价值。

在以上的例子中，连续的自动赎回结构化产品比离散情形下的结构化产品贴现价值更高，尽管不一定总是如此。若普通反向可转换债券的息票支付被自动赎回功能替代，如果被赎回投资的价值就更高，而且被赎回所需的时间也越长，具有离散观察日的结构化产品不太可能被赎回。因此连续的条件下比离散情形的产品更具有价值，但情况也并非总是如此。

3.5、真实案例

我们计算了瑞银发行的“具有保护功能的可自动赎回证券”票据的产品价值。（该产品代码为 90267C136，产品相关补充资料的网址为 http://www.sec.gov/Archives/edgar/data/1114446/000139340110000136/c178916_690465-424b2.htm）该票据与美国银行的股票挂钩，它于 2010 年 3 月 26 日发行，期限为 1 年，挂钩资产在发行日的价格为 17.90 美元，标的股票的股息收益率 q 和隐含波动率分别为 0.2235%和 35.21%，瑞银(UBS)的 1 年期 CDS 利率为 0.4531%，在发行日 1 年期连续复合无风险利率为 0.4951%，赎回价格为标的股票的初始价格。如果票据被赎回，投资者将获得 16.1%的回报，如果没有被赎回，产品的价格保护水平为 $L = 0.7S_0$。应用我们的方法定价，每投资 100.00 美元可以得到 97.73 美元的产品贴现价值。

4、总结

如果挂钩资产在观察日的价格超过了赎回价格，自动赎回的结构化产品的发行人就会赎回该产品，该功能已嵌入到许多不同类型的结构化产品中，包括绝对收益债券和具有保护功能的证券。

我们提供了一个通用的 PDE 框架对自动赎回的结构化产品构建定价模型，我们使用有限差分方法求解具有离散赎回观察日期的自动赎回结构化产品的定价方程，但是这些产品通常没有解析解。对于连续的自动赎回产品，我们推导了相应的解析解，并结合案例说明了我们的建模方法。然后，我们将自动赎回功能添加到普通反向可转换债的成本中进行了量化。我们还展示了具有连续赎回观察时间的产品价值与离散赎回功能的价值差异。

参考文献

[1] Fries, C. and Joshi, M. (2008) Conditional Analytic Monte-Carlo Pricing Scheme of Auto-callable Products. Working paper. Available at SSRN: http://ssrn.com/abstract=1125725.

[2] Georgieva, A. (2005) The Use of Structured Products: Applications, Benefits and Limitations for the Institutional Investor. Working paper.

[3] Baule, R., Entrop, O. and Wilkens, M. (2008) Credit risk and bank margins in structured financial products: Evidence from the German secondary market for discount certificates. Journal of Futures Markets 28(4): 376–397.

[4]Bergstresser, D.B. (2008) The Retail Market for Structured Notes: Issurance Patterns and Performance, 1995–2008. http://people.brandeis.edu/~dberg/.

[5] Henderson, B. and Pearson, N. (2010) The dark side of financial innovation: A case study of the pricing of a retail financial product. The Journal of Financial Economics 100(2): 227–247.

[6] Deng, G., Mallett, J. and McCann, C. (2010) On the Valuations of Structured Products. SLCG working paper.

[7] Black, F. and Schole, M. (1973) The pricing of options and corporate liabilities. Journal of Political Economy 81(3): 637–654.

[8] Wilmott, P., Dewynne, J. and Howison, S. (1994) Option Pricing: Mathematical Models and Computation. Oxford: Oxford Financial Press.

[9] Kunitomo, N. and Ikeda, M. (1992) Pricing options with curved boundaries. Mathematical Finance 2(4): 275–298.

[10] Li, A. (1999) The pricing of double barrier options and their variations. Advances in Futures and Options Research 10: 17–41.

[11] Herna ́ndez, R., Lee, W.Y. and Liu, P. (2007) An Economic Analysis of Reverse Exchangeable Securities: An Option-pricing Approach. University of Arkansas. Working Paper.

[12]Arzac, E.R. (1997) PERCS, DECS, and other mandatory convertibles. Journal of Applied Corporate Finance 10(1): 54–63.

[13] Chemmanur, T.J., Nandy, D. and Yan, A. (2006) Why Issue Mandatory Convertibles? Theory and Empirical Evidence. EFA 2003 Glasgow. Available at SSRN: http://ssrn.com/abstract=417601.

[14] Chemmanur, T.J. and Simonyan, K. (2010) What drives the issuance of putable convertibles: Risk-shifting, asymmetric information, or taxes? Financial Management 39(3): 1027–1068.

[15] Hull, J. (2011) Options, Futures and Other Derivatives, 8th edn. New York: Prentice-Hall.

[16] Zvan, R., Vetzal, K.R. and Frosyth, P.A. (2000) PDE methods for pricing barrier options. Journal of Economic Dynamics & Control 24(11): 1563–1590.

[17] Hui, C.H. (1996) One-touch double barrier binary option values. Applied Financial Economics 6(4): 343–346.

[18] Evans, L.C. (2010) Partial Differential Equations: Second Edition. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society.

[19] Deng, G., Guedj, I., Mallett, J. and McCann, C. (2011) The Anatomy of Absolute Return Barrier Note. SLCG. Forthcoming in the Journal of Derivatives, www.slcg.com.

风险提示：文献中的结果均由相应作者通过历史数据统计、建模和测算完成，在政策、市场环境发生变化时模型存在失效的风险。

分析师声明

本人具有中国证券业协会授予的证券投资咨询执业资格并注册为证券分析师，以勤勉的职业态度，独立、客观地出具本报告。本报告清晰准确地反映了本人的研究观点。本人不曾因，不因，也将不会因本报告中的具体推荐意见或观点而直接或间接收到任何形式的补偿。

投资评级说明

投资建议的评级标准	类别	评级	说明
报告中投资建议所涉及的评级分为股票评级和行业评级(另有说明的除外)。评级标准为报告发布日后的12个月内公司股价(或行业指数)相对同期相关证券市场代表性指数的涨跌幅。其中：A股市场以上证综指或深圳成指为基准，香港市场以恒生指数为基准；美国市场以标普500或纳斯达克综合指数为基准。	股票评级	买入	相对同期相关证券市场代表性指数涨幅大于15%
		审慎增持	相对同期相关证券市场代表性指数涨幅在5%～15%之间
		中性	相对同期相关证券市场代表性指数涨幅在-5%～5%之间
		减持	相对同期相关证券市场代表性指数涨幅小于-5%
		无评级	由于我们无法获取必要的资料，或者公司面临无法预见结果的重大不确定性事件，或者其他原因，致使我们无法给出明确的投资评级
	行业评级	推荐	相对表现优于同期相关证券市场代表性指数
		中性	相对表现与同期相关证券市场代表性指数持平
		回避	相对表现弱于同期相关证券市场代表性指数

信息披露

本公司在知晓的范围内履行信息披露义务。客户可登录 www.xyzq.com.cn 内幕交易防控栏内查询静默期安排和关联公司持股情况。

使用本研究报告的风险提示及法律声明

兴业证券股份有限公司经中国证券监督管理委员会批准，已具备证券投资咨询业务资格。

，本公司不会因接收人收到本报告而视其为客户。本报告中的信息、意见等均仅供客户参考，不构成所述证券买卖的出价或征价邀请或要约。该等信息、意见并未考虑到获取本报告人员的具体投资目的、财务状况以及特定需求，在任何时候均不构成对任何人的个人推荐。客户应当对本报告中的信息和意见进行独立评估，并应同时考量各自的投资目的、财务状况和特定需求，必要时就法律、商业、财务、税收等方面咨询专家的意见。对依据或者使用本报告所造成的一切后果，本公司及/或其关联人员均不承担任何法律责任。

本报告所载资料的来源被认为是可靠的，但本公司不保证其准确性或完整性，也不保证所包含的信息和建议不会发生任何变更。本公司并不对使用本报告所包含的材料产生的任何直接或间接损失或与此相关的其他任何损失承担任何责任。

本报告所载的资料、意见及推测仅反映本公司于发布本报告当日的判断，本报告所指的证券或投资标的的价格、价值及投资收入可升可跌，过往表现不应作为日后的表现依据；在不同时期，本公司可发出与本报告所载资料、意见及推测不一致的报告；本公司不保证本报告所含信息保持在最新状态。同时，本公司对本报告所含信息可在不发出通知的情形下做出修改，投资者应当自行关注相应的更新或修改。

除非另行说明，本报告中所引用的关于业绩的数据代表过往表现。过往的业绩表现亦不应作为日后回报的预示。我们不承诺也不保证，任何所预示的回报会得以实现。分析中所做的回报预测可能是基于相应的假设。任何假设的变化可能会显著地影响所预测的回报。

本公司的销售人员、交易人员以及其他专业人士可能会依据不同假设和标准、采用不同的分析方法而口头或书面发表与本报告意见及建议不一致的市场评论和/或交易观点。本公司没有将此意见及建议向报告所有接收者进行更新的义务。本公司的资产管理部门、自营部门以及其他投资业务部门可能独立做出与本报告中的意见或建议不一致的投资决策。

本报告并非针对或意图发送予或为任何就发送、发布、可得到或使用此报告而使兴业证券股份有限公司及其关联子公司等违反当地的法律或法规或可致使兴业证券股份有限公司受制于相关法律或法规的任何地区、国家或其他管辖区域的公民或居民，包括但不限于美国及美国公民（1934 年美国《证券交易所》第 15a-6 条例定义为本「主要美国机构投资者」除外）。

特别声明

在法律许可的情况下，兴业证券股份有限公司可能会利差本报告中提及公司所发行的证券头寸并进行交易，也可能为这些公司提供或争取提供投资银行业务服务。因此，投资者应当考虑到兴业证券股份有限公司及/或其相关人员可能存在影响本报告观点客观性的潜在利益冲突。投资者请勿将本报告视为投资或其他决定的唯一信赖依据。

兴业证券研究

上海	北京	深圳
地址：上海浦东新区长柳路36号兴业证券大厦15层	地址：北京西城区锦什坊街35号北楼601-605	地址：深圳市福田区皇岗路5001号深业上城T2座52楼
邮编：200135	邮编：100033	邮编：518035
邮箱：research@xyzq.com.cn	邮箱：research@xyzq.com.cn	邮箱：research@xyzq.com.cn