

## 约束影响探析

### 投资组合优化系列（一）

#### 量化研究报告

证券分析师：徐玉宁

电话：021-58502206-8028

E-MAIL: xuyuning@tpyzq.com

执业资格证书编码：S1190519090003

证券分析师：王西之

电话：021-58502206-8037

E-MAIL: wangxz@tpyzq.com

执业资格证书编码：S1190521040001

#### 报告摘要

本篇报告主要讨论约束对组合产生的影响。前两章为方法论，介绍如何反映约束集整体影响（转化效率），以及如何拆分个体影响（约束归因）。第三章利用相关方法并结合具体约束展开分析，剖析约束作用于阿尔法和协方差矩阵的实际调整、约束之间交互影响以及组合次优性的程度，以便更好理解约束在优化层面的实际意义。

**组合转化效率：**组合转化效率是对主动管理基本定律的有效补充，拓展为能力、广度和效率的三维体系。转移系数是组合层面转化效率的衡量指标，反映组合受约束的影响程度，可依据事前绩效、优化过程和优化结果三种不同视角得出不同的度量方法；而隐含预期是资产层面转化效果的体现，利用逆向优化从配置反推出隐含阿尔法，打通预期与配置的双向联通。以五个股优化的案例，详细展示组合受约束影响的具体结果。

**约束归因方法论：**约束归因是一种“细粒度+过程”的归因方法，核心是利用拉格朗日乘子与 KKT 条件对各个约束的影响做逐一拆分。此外，建议在优化前制定“投资+求解”双维考量的约束层级结构，不仅是为了反映投资层面的相对优先级，也便于制定易于求解的约束调整规则。

**约束影响分析：**借助前文介绍的指标和方法论，以不同的阿尔法源、股票池、约束集构建不同的优化组合，从约束的整体、个体、交互等多方面分析组合受到的影响。

**风险提示：**报告内容可能存在数据偏差、模型失效的风险。

## 目录

一、组合转化效率 .....	4
(一)、主动管理基本定律.....	4
(二)、组合层转化——转移系数.....	4
(三)、资产层转化——隐含预期.....	6
(四)、解析转化效率.....	7
二、约束归因方法论.....	9
(一)、“细粒度+过程”的归因 .....	9
(二)、约束层次结构.....	10
(三)、分解思路.....	11
三、约束影响分析 .....	13
(一)、约束集的影响.....	13
(二)、全额约束的影响.....	14
(三)、做多约束的影响.....	14
(四)、主动上限约束的影响.....	16
(五)、风格中性约束的影响.....	19
四、总结 .....	21
五、附录 .....	23
(一)、FLAM 拓展公式的推导 .....	23
(二)、附加值之比的推导.....	24
六、参考文献.....	25

## 图表目录

图 1 相关性三角 .....	5
图 2 预期 $\leftrightarrow$ 配置的概念示意图 .....	7
图 3 样例优化组合的风险调整权重与阿尔法 .....	8
图 4 样例优化组合的优化权重分布（阿尔法升序排列） .....	8
图 5 约束归因的“细粒度+过程”示意图 .....	9
图 6 约束的层次结构 .....	11
图 7 全额约束下的阿尔法分布 .....	14
图 8 做多约束对阿尔法的修正 .....	15
图 9 做多约束下的累积权重曲线（不同协方差矩阵） .....	15
图 10 协方差矩阵调整值的热力图（按优化权重降序） .....	17
图 11 反转与估值因子的 QQ 图（组合构建的样本期） .....	19
表 1 TC 度量方法的分类 .....	5
表 2 TC 度量公式 .....	6
表 3 样例优化组合的阿尔法信息 .....	7
表 4 各优化组合的转化效率（依次叠加） .....	13
表 5 各优化组合的转化效率（遍历约束集） .....	14
表 6 各优化组合的转化效率（不同宽基指数） .....	17
表 7 300 内各因子前 N% 的市值平均偏分位（降序） .....	18
表 8 各因子与波动的相关性（组合构建的样本期） .....	19
表 9 市值中性约束下的持仓置换情况统计 .....	19
表 10 市值中性约束下的持仓置换成本统计 .....	20
表 11 标普 500 内优化组合的信息比率 .....	21

## 一、组合转化效率

### (一)、主动管理基本定律

主动管理基本定律(The Fundamental Law of Active Management, FLAM)表述了投资绩效的决定因素,即普遍考量的交易信号和交易范畴。对应到公式,Grinold 和 Kahn(1999)将信息比率表示为广度(Breadth)和能力(Skill)的二维体系。

$$IR \approx IC \cdot \sqrt{BR}$$

*IR*: 信息比率

*IC*: 投资经理的信息系数,衡量能力

*BR*: 投资策略的独立预测,衡量广度

FLAM 主要为投资者提供概念性的战略指导,实操层面可借鉴的不多。其一是能力和广度往往难以估计,譬如广度并非是单纯的资产或信号数量,还需要纳入相关性  $BR = f(N_{\text{资产}}, N_{\text{信号}}, \rho_{\text{信号}}, \rho_{\text{资产}}, \sigma_{\text{信号}}, \sigma_{\text{资产}})$ ; 其二是考量因素的局限性,譬如聚焦到组合构建的过程,若施加有效的约束条件必会偏离无约束最优组合,造成信息损失。

针对后一情况,Clarke 等(2002)将 FLAM 从二维体系拓展为广度、能力和效率(Efficiency)的三维体系,其核心是打破原有的无约束假设,并以效率衡量组合受约束影响的程度。对于 FLAM 拓展形式的推导过程可参见附录章节。

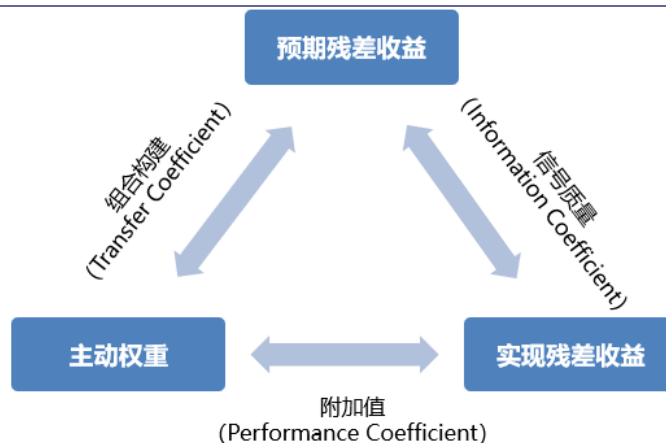
$$IR \approx TC \cdot IC \cdot \sqrt{BR}$$

*TC*: 投资组合的转移系数,衡量效率

### (二)、组合层转化——转移系数

具化到主动管理流程,将各阶段的主要成果联系起来形成相关性三角,以体现两两之间的联系。如图 1 所示:三角底部的 PC 体现主动管理结果,两边的 IC 和 TC 则体现主动管理过程,事前绩效可看作是过程的叠加  $PC \approx IC \cdot TC$ 。不过,两个过程扮演着不同的角色,投资者往往将研究重心放在信号挖掘上,因其是提升附加值的核心理驱动力;而组合构建更侧重将资产预期转化为组合持仓,转化过程中纳入投资者在收益、风险和成本之间的权衡,尤其是利用风控来提升组合下限以应对不可知的未来。

图 1 相关性三角



资料来源：Clarke, Harindra 和 Thorley (2002), 太平洋证券研究院

转移系数(Transfer Coefficient, TC) 是衡量组合构建过程中的约束条件对组合持仓、绩效的影响程度，也是组合层面转化效率的体现方法。实际组合构建中必定会存在刚性约束（如卖空限制）和柔性约束（如风格偏离限制），只要约束起作用就会影响阿尔法兑现为持仓的潜力，继而得到次优结果。若完全不受影响，则 TC 值为 1；若受影响，随影响程度加剧，TC 值会由 1 趋向于 0。具体的度量有几种视角，核心是比对实际与理想的差距：1) 事前绩效视角：无约束组合绩效与有约束组合绩效间的相关性(或比值)；2) 优化过程视角：输入阿尔法与输出权重间的相关性；3) 优化结果视角：无约束与有约束输出权重间的相关性。

表 1 TC 度量方法的分类

	视角	理想情况	实际情况
事前绩效	主动收益（无约束组合）	主动收益（有约束组合）	
	信息比率（无约束组合）	信息比率（有约束组合）	
优化过程	阿尔法	主动权重	
优化过程	阿尔法（风险调整后）	主动权重（风险调整后）	
优化过程	阿尔法（风险因子调整后）	主动权重（风险因子调整后）	
优化结果	主动权重（无约束组合）	主动权重（有约束组合）	

资料来源：太平洋证券研究院

不同度量方法有可能得到不同 TC 值，建议从实践角度出发选择形式简洁、通用性强、契合观察需求的计算方式。我们列举其中两个最具代表性的公式，如下表 2 所示：一是对比无约束和有约束情况下，两者的主动收益；二是对比风险调整后的

阿尔法与主动权重。直观上不难理解，但仍需注意对协方差矩阵的部分假设以及线性相关性刻画的局限性。

表 2 TC 度量公式

优化形式	
$Max_{\omega} \quad \alpha^T \omega - \frac{\lambda}{2} \omega^T \Sigma \omega$	
绩效法 无约束 VS 有约束	过程法 主动权重 VS 阿尔法
$corr(r, r^*)$	$corr(\Sigma^{-\frac{1}{2}} \alpha, \Sigma^{\frac{1}{2}} \omega)$
$\frac{\omega^T \Sigma \omega^*}{\sqrt{\omega^T \Sigma \omega} \sqrt{\omega^{*T} \Sigma \omega^*}}$	$\frac{\omega^T \alpha}{\sqrt{\omega^T \Sigma \omega} \sqrt{\alpha^T \Sigma^{-1} \alpha}}$

资料来源：太平洋证券研究院

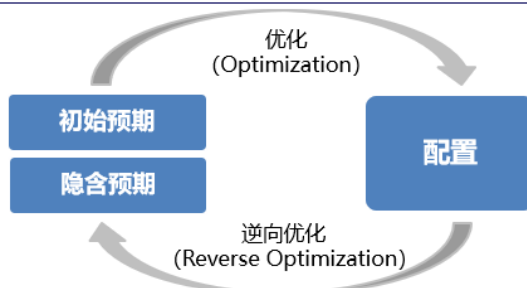
此外，基于 TC 值还可以大致估算事前附加值受影响程度。根据 Grinold(2005)的推导，譬如 TC 为 0.7，那么有约束附加值至少缩减为无约束附加值的 49%，具体推导可参见附录。

$$\begin{aligned}
 U_{\text{无}} &= \alpha^T \omega_{\text{无}} - \frac{\lambda}{2} \sigma_{\text{无}}^2 \\
 U_{\text{约}} &= \alpha^T \omega_{\text{约}} - \frac{\lambda}{2} \sigma_{\text{约}}^2 \\
 \frac{U_{\text{约}}}{U_{\text{无}}} &\leq TC^2
 \end{aligned}$$

### (三)、资产层转化——隐含预期

上述的转移系数是以整体视角衡量组合转化效率，细化到资产层面则要借助逆向优化(Reverse-Optimization)：假定在均值-方差框架下，以资产配置敞口反向推出隐含的资产预期。不同于从预期到配置的单向流程，逆向优化提供了双向的可能性，譬如隐含预期超出主观评估的合理区间，说明配置对初始预期的无效表征，投资者可以回头修正优化过程，从而避免直接采纳“无效配置”。

图 2 预期 $\leftrightarrow$ 配置的概念示意图



资料来源：太平洋证券研究院

#### (四)、解析转化效率

通常我们会比较原始阿尔法与隐含阿尔法之间的差异,关于隐含阿尔法的计算会在后文作具体阐述。从配置结果看,若施加约束,隐含阿尔法的无约束优化等价于原始阿尔法的有约束优化;若不施加约束,原始阿尔法与隐含阿尔法完全线性相关。为了具体展示,我们选取沪深 300 内 5 只权重股构建相应的组合,同时将 alpha 线性缩放至 0~1 之间。优化组合设定如下:

- 1、无约束组合:以均值-方差为优化目标,不施加约束;
- 2、基础约束组合:优化目标不变,施加全额、做多约束;
- 3、额外约束组合:在基础约束组合的基础上,施加个股上下限约束;

如表 3 所示,层层比较来看:无约束组合中,标准化后的隐含阿尔法与原始阿尔法数值保持一致;基础约束组合中,隐含阿尔法排名与原始阿尔法保持一致,但阿尔法间的相对距离发生变化;额外约束组合中,隐含阿尔法间的相对距离发生小幅变化,但中国平安与招商银行的排名出现对调。

表 3 样例优化组合的阿尔法信息

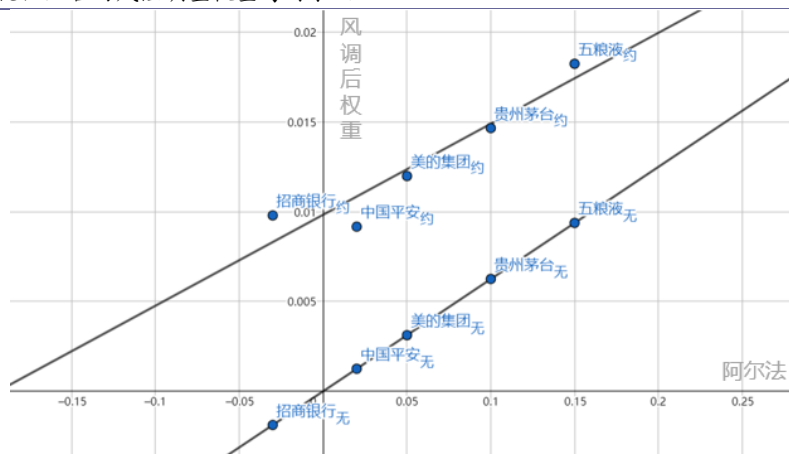
基础信息			无约束			基础约束			额外约束		
个股	阿尔法	阿尔法 标准化	优化权重	隐含阿尔法	隐含阿尔法 标准化	优化权重	隐含阿尔法	隐含阿尔法 标准化	优化权重	隐含阿尔法	隐含阿尔法 标准化
贵州茅台	10.0%	0.72	12.3%	0.63%	0.72	43.2%	1.44%	0.62	39.7%	1.47%	0.61
中国平安	2.0%	0.28	25.2%	0.13%	0.28	43.6%	0.94%	0.02	35.2%	0.92%	0.00
招商银行	-3.0%	0.00	-38.1%	-0.19%	0.00	0.0%	0.92%	0.00	7.1%	0.98%	0.07
五粮液	15.0%	1.00	21.5%	0.94%	1.00	6.1%	1.75%	1.00	9.1%	1.82%	1.00
美的集团	5.0%	0.44	-3.1%	0.31%	0.44	7.1%	1.13%	0.25	8.9%	1.20%	0.31

资料来源：太平洋证券研究院



另外，比较施加约束前后的组合转化效率，可以观察各资产的优化权重与阿尔法之间的关系。如图 3 所示，转换效率由 100% 降为 83%、两变量回归的调整 R 方由 100% 下降为 62%。

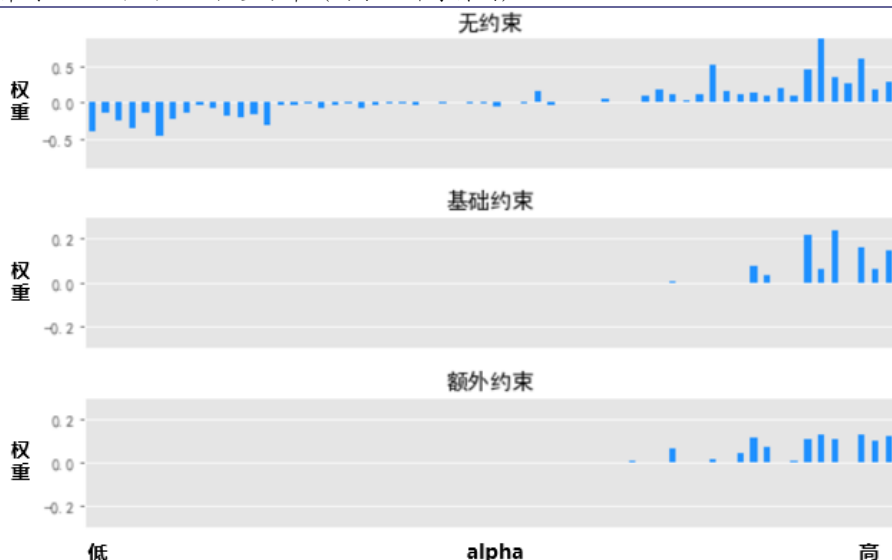
图 3 样例优化组合的风险调整权重与阿尔法



资料来源：太平洋证券研究院

将股票池做一定扩充，以观察约束对权重分布影响。如图 4 所示：无约束下，多空端均有头寸且两端更突出；基础约束下，权重极差缩小但更聚集，大都集中于头部阿尔法个股；额外约束下，权重变动较平稳，但受个股上下限约束影响，头部个股的权重分布更平均。

图 4 样例优化组合的优化权重分布（阿尔法升序排列）



资料来源：太平洋证券研究院



## 二、约束归因方法论

### (一)、“细粒度+过程”的归因

若是为了反映全部约束对优化结果的整体影响，转化效率便已足矣。但无论如何全面、精细地刻画效率，终究未触及优化本身，也意味着不具备对优化过程的掌控力。

做个不太恰当的比喻：优化好比烹调、阿尔法如同食材、权重如同菜肴，只需放入食材调料并简单设定步骤就能借助炒菜机轻松完成菜肴，但有时味道和预想不太一样，或许是需要更精细的设定、又或许是要更复杂的食材搭配，究竟怎样产生奇妙化学反应无法轻易得知，但如果能给予明确反馈（譬如调料量对口味影响、油温对口感影响等）至少对最终的成品会增添几分把握。

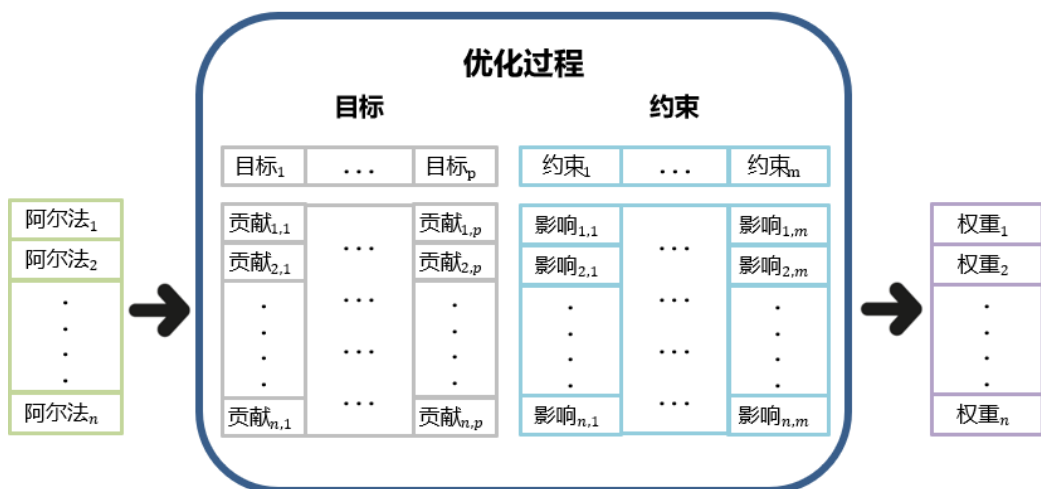
约束归因便是承担这种反馈功能，明确优化结果受各个约束的影响程度。从原先的整体影响下钻到个体影响，对影响源头（约束）和受影响对象（阿尔法、权重、预期收益等）均做细粒度拆分，由此可将单一约束影响与单一资产的对应特征关联起来。

从归因的性质来看，约束归因属于基于优化过程的内部视角归因，而非 TM、Brinson、Campisi 等基于组合持仓或绩效的外部视角归因。后者会涉及解释模型，可能存在残差项或非精确拆分；而前者使用分解模型，明确影响量的具体归属。

---

图 5 约束归因的“细粒度+过程”示意图

---



资料来源：太平洋证券研究院

## (二)、约束层次结构

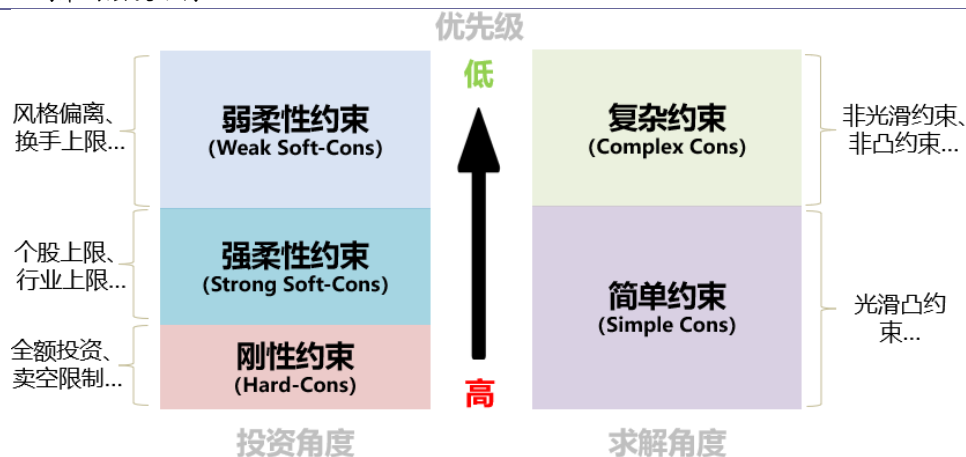
在探讨事后约束归因之前，我们可以对约束做些事前准备。制定约束层次结构 (Constraint Hierarchy) 可以反映约束间的相对优先级，具有潜在好处：一方面，有助于明确投资思路，并使优化结果更能体现投资偏好；另一方面，若约束间产生冲突容易出现非可行解，可以参考优先级从低到高逐步放松。后者类似于解决约束规划问题 (Constraint Programming)，投资者可以根据约束候选集的数量、优先级、变动区间制定简单的调整规则。

关于如何制定优先级，我们建议从投资层面和求解层面做双重考量。此外，在具备可行解的条件下，以投资因素占主导，即投资优先级相同的情形下再考虑求解优先级；而如果导致非可行解，则以求解为优先。

从优化求解角度而言，光滑凸约束相对易于求解，反之非光滑、非连续、非凸约束会加大运算负荷甚至难以求解。

从实际投资角度而言，刚性约束是因交易规则、风控合规等做出的强制限制，譬如卖空限制、社保基金的投资品种及比例等；强柔性约束多以策略类型而因地制宜，并且调整空间有限，譬如指数增强策略对个股、行业的权重有较明确上限要求；弱柔性约束更偏重策略绩效的考量，可以更灵活调节，譬如投资者预判成长风格走强便可适当向其倾斜，再譬如组合换仓频繁、低效则可以限制最高换手率。

图 6 约束的层次结构



资料来源：太平洋证券研究院

### (三)、分解思路

约束归因的核心是利用拉格朗日乘子与 KKT 条件，对于一般的 QP 或 QCQP 的组合优化问题较容易拆分，诸如卖空限制、个股权重限制等均为仿射函数，跟踪误差约束则为二次函数。但对于不可微的约束形式会比较棘手，例如换手约束为 L1 范数形式、股票数量约束涉及整型变量等。后续着重探讨一般形式的拆分，而不可微形式的处理难度较高，仅给出大致思路。

#### 1) 一般形式分解

考虑一般化的组合优化问题并转为标准形式，目标函数包含二次项、等式约束与不等式约束均为仿射：

$$\begin{aligned}
 \underset{\omega}{\text{Max}} \quad & \alpha^T \omega - \frac{\lambda}{2} \omega^T \Sigma \omega \\
 \text{s.t.} \quad & A\omega \leq b \\
 & C\omega = d
 \end{aligned}
 \quad \rightarrow \quad
 \begin{aligned}
 \underset{\omega}{\text{Min}} \quad & \frac{\lambda}{2} \omega^T \Sigma \omega - \alpha^T \omega \\
 \text{s.t.} \quad & A\omega - b \leq 0 \\
 & C\omega - d = 0
 \end{aligned}$$

可得拉格朗日函数，其中  $\gamma$  和  $\eta$  分别对应不等式约束和等式约束的拉格朗日乘子：

$$L(\omega, \gamma, \eta) = \frac{\lambda}{2} \omega^T \Sigma \omega - \alpha^T \omega + \gamma^T (A\omega - b) + \eta^T (C\omega - d)$$

对于最优解需满足 KKT 条件中的稳定性 (Stationary)，即一阶最优性条件：

$$\left. \frac{\partial L(\omega, \gamma^*, \eta^*)}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega^*} = 0$$

经整理可得：

$$\begin{aligned}\alpha^c &= \lambda \Sigma \omega^* = \alpha - A^T \gamma^* - C^T \eta^* \\ \omega^* &= \lambda^{-1} \Sigma^{-1} (\alpha - A^T \gamma^* - C^T \eta^*)\end{aligned}$$

上式的 $\alpha^c$ 即为隐含阿尔法，可从两种角度解释：从等式第一项看，相当于边际风险贡献与风险厌恶系数的乘积；从等式第二项看，亦等同原始阿尔法受到各约束影响后的扭曲结果，影响总量是各约束的加权之和、各项乘积为对应约束对阿尔法的影响贡献、权重为约束对应的最优拉格朗日乘子。

若是观察某个约束产生的效果，需要着重关注其乘子的数值，尤其是不等式约束的 $\gamma^*$ 。根据 KKT 的互补松弛性(Complementary Slackness)，不等式与乘子之间必有一为 0，同时根据 KKT 的对偶问题可行性(Dual Feasibility)，乘子必定非负。由此说明：当约束起效时，满足严格不等式、乘子大于 0，削弱原始阿尔法；当约束无效时，满足等式、乘子为 0，对原始阿尔法无影响。

从经济学角度直观理解，乘子即为影子价格。影子价格表明当资源量受到约束时，单位资源变动所能提供的边际收益，价格越大、资源越稀缺、对收益的推动作用越明显，类比于优化问题中的约束越紧。

## 2) 附加值分解

进一步地，对附加值的约束影响亦作拆分，方括号中的各分项即为对应约束的影响贡献：

$$\begin{aligned}U - U^c &= \left( \alpha^T \omega^* - \frac{\lambda}{2} \omega^{*T} \Sigma \omega^* \right) - \left( \alpha^T \omega^{c*} - \frac{\lambda}{2} \omega^{c*T} \Sigma \omega^{c*} \right) \\ &= \frac{\lambda}{2} (\omega^* - \omega^{c*})^T \Sigma (\omega^* - \omega^{c*}) \\ &= \frac{1}{2\lambda} (A^T \gamma^* + C^T \eta^*)^T \Sigma^{-1} (A^T \gamma^* + C^T \eta^*) \\ &= \frac{1}{2\lambda} [\gamma^{*T} A \Sigma^{-1} (A^T \gamma^* + C^T \eta^*) + \eta^{*T} C \Sigma^{-1} (A^T \gamma^* + C^T \eta^*)]\end{aligned}$$

### 3) 特殊约束分解

对于不可微的特殊约束，难以直接求解拉格朗日乘子，可以考虑使用次梯度算法。对于复杂的约束形式，需要进行算法迭代才能求解出对应乘子，而简单形式可以直接得到次梯度值。

以 L1-Norm 形式的换手约束为例：

$$\text{换手约束: } \|\omega - \omega^0\|_1 \leq \tau$$

$$\text{拉格朗日乘子: } \begin{cases} \gamma & \omega_i > \omega_i^0 \\ [-\gamma, \gamma] & \omega_i = \omega_i^0 \\ -\gamma, & \omega_i < \omega_i^0 \end{cases}$$

## 三、约束影响分析

参考前文介绍的分析指标和分解思路，尝试解析具体约束对组合产生的实际影响。为便于分析，做如下设定：

- 1) 股票池可选沪深 300(大市值)、中证 500(中小市值)及中证 1000(小市值)；
- 2) 阿尔法源为单因子、等权多因子及正态随机因子，默认中性化处理；
- 3) 约束层级为全额约束、做多约束、个股主动权重上限约束及市值中性约束；

### (一)、约束集的影响

如表 4 所示，以转化效率而言，各组合对依次叠加的约束表现出相似变动模式。全额约束基本无影响；叠加做多约束后，转化效率骤降为 30%左右；再叠加个股主动上限约束，转化效率回弹至 50%左右；最后叠加市值中性约束，变动幅度有限。

表 4 各优化组合的转化效率（依次叠加）

转化效率						约束设定			
组合	组合1	组合2	组合3	组合4	组合5	约束1	约束2	约束3	约束4
阿尔法源	反转因子	估值因子	盈利因子	多因子	随机因子	全额	做多	主动上限	风格中性
无约束	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%				
叠加1	99.6%	99.2%	99.9%	99.8%	100.0%	✓			
叠加2	32.0%	35.1%	27.6%	25.7%	31.0%	✓	✓		
叠加3	49.2%	57.9%	49.7%	51.7%	52.9%	✓	✓	✓	
叠加4	48.8%	55.4%	49.3%	48.0%	52.8%	✓	✓	✓	✓

资料来源：太平洋证券研究院

如表 5 所示，打破约束层级限制、遍历不同的约束集：1) 影响程度由高到低依次为做多、主动上限和风格中性；2) 因中性化弱化因子特性，也削弱彼此间差异；

3) 做多与主动上限会产生反向影响，两者会抵消部分影响；4) 风格中性对随机因子影响最弱，但对其它阿尔法源会产生不定的小幅影响。

表 5 各优化组合的转化效率（遍历约束集）

组合	转化效率					约束设定			
	组合1	组合2	组合3	组合4	组合5	约束1	约束2	约束3	约束4
阿尔法源	反转因子	估值因子	盈利因子	多因子	随机因子	全额	做多	主动上限	风格中性
两约束	32.0%	35.1%	27.6%	25.7%	31.0%	✓	✓		
	40.5%	41.5%	41.8%	37.6%	43.4%	✓		✓	
	99.2%	99.1%	97.3%	99.0%	99.6%	✓			✓
三约束	49.2%	57.9%	49.7%	51.7%	52.9%	✓	✓	✓	
	31.3%	40.6%	28.4%	26.5%	31.2%	✓	✓		✓
	41.2%	40.8%	41.9%	37.7%	44.5%	✓		✓	✓
四约束	48.8%	55.4%	49.3%	48.0%	52.8%	✓	✓	✓	✓

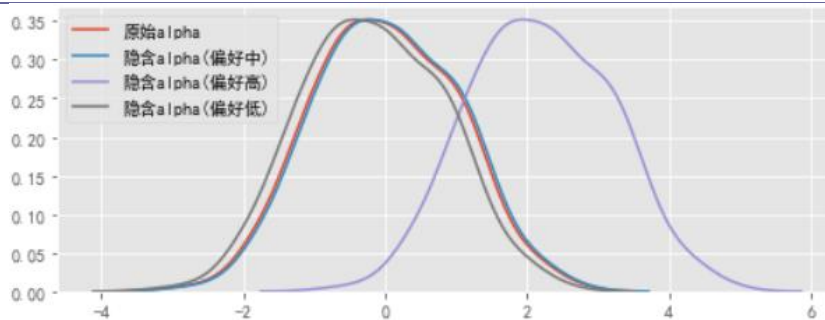
资料来源：太平洋证券研究院

## （二）、全额约束的影响

遵循上节的分解思路，全额约束对所有个股施加无偏向的等额影响，即隐含阿尔法实际与原始阿尔法完全线性相关。不过，两者取值范围有所不同，会间接更改原设的风险偏好系数，导致最优权重和转化效率稍有不同。因此，若风险偏好设置合理，全额约束基本可设为默认约束。

如图 6 所示，不同风险偏好系数设定，对应不同隐含阿尔法分布及转换效率。中偏好下，原始阿尔法与隐含阿尔法分布几乎重合，转换效率 100.0%；低偏好下，隐含分布稍向左移，转换效率 99.9%；高偏好下，隐含分布向右移，转换效率 90.5%。

图 7 全额约束下的阿尔法分布



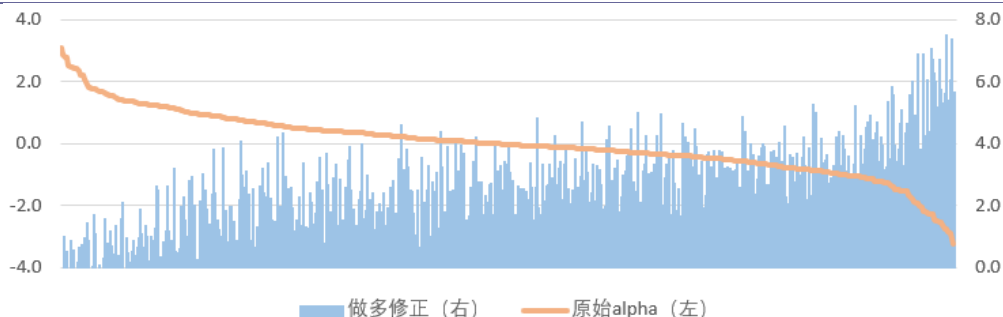
资料来源：太平洋证券研究院

## （三）、做多约束的影响

### 1) 阿尔法视角

禁止卖空会限制负阿尔法对预期收益贡献、无效化尾部阿尔法的个股。如图 8 所示，将原始阿尔法由高到低、由左至右排列，根据阿尔法归因结果，做多约束对大部分个股有正向修正，尤其是强行大幅拉高尾部个股，以避免给予负权。

图 8 做多约束对阿尔法的修正

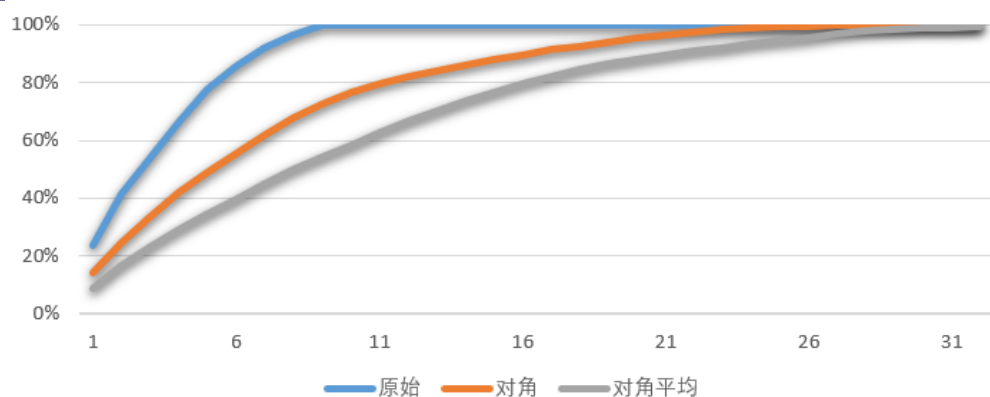


资料来源：太平洋证券研究院

## 2) 风险视角

此外，仅施加做多约束会使得优化持仓相当集中，个股间风险差异在其中起到重要作用。为了简要说明，以随机因子为阿尔法源，分别使用原始协方差、对角协方差、对角均值协方差进行优化，体现为风险差异逐步递减。如图 9 所示，原始协方差下，持仓高度集中，仅持仓 9 只个股且前 3 只累计占比已超 50%；对角协方差下，持仓趋于分散化，持仓 28 只且前 6 只累计占比超半；对角均值协方差下，头部持仓更平均、累计权重曲线进一步趋缓，持仓 35 只且前 9 只累计占比超半。

图 9 做多约束下的累积权重曲线（不同协方差矩阵）



资料来源：太平洋证券研究院



为了对协方差矩阵做更一般化的分析，假定 1) 目标：对各资产具有相同预期，即忽略阿尔法源的考量，等同于从均值-方差模型转化为最小方差模型；2) 约束：涉及全额约束和个股上下限约束，其中前者为基础约束。

当仅存在全额约束时，需满足  $\Sigma\omega = \eta_0 \mathbf{1}$ ，即为了使各资产对组合风险的边际贡献一致会削减高协方差资产的权重，甚至出现负权资产。而加入个股上下限约束后，可以得到约束调整后的协方差矩阵  $\tilde{\Sigma} = \Sigma + (\gamma^U - \gamma^L) \mathbf{1}^T + \mathbf{1}(\gamma^U - \gamma^L)^T$ ，类似于“隐含协方差”，能使原协方差矩阵的有约束优化等价于调整协方差矩阵的无约束优化。需要说明的是，满足等价条件的协方差矩阵并不唯一，但该协方差的形式却是最易于理解的。

$$\begin{array}{ll} \underset{\omega}{Min} & \frac{1}{2} \omega^T \Sigma \omega \\ \text{s.t.} & \mathbf{1}^T \omega = 1 \\ & \omega \geq \omega^L \\ & \omega \leq \omega^U \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{ll} \underset{\omega}{Min} & \frac{1}{2} \omega^T \tilde{\Sigma} \omega \\ \text{s.t.} & \mathbf{1}^T \omega = 1 \end{array}$$

对于协方差矩阵中的每个元素而言，若行列对应资产的最优权重均在上下界之内，则不做调整；若其一资产的最优权重低于下界，则减去对应约束的最优乘子；若其一资产的最优权重高于上界，则加上对应约束的最优乘子。以做多约束为例，负权资产对应乘子向量的分量会大于 0，施加约束后会削弱该资产相关的协方差数值，调整效果类似于收缩处理。

$$\tilde{\Sigma}_{i,j} = \Sigma_{i,j} + \Delta_{i,j}$$

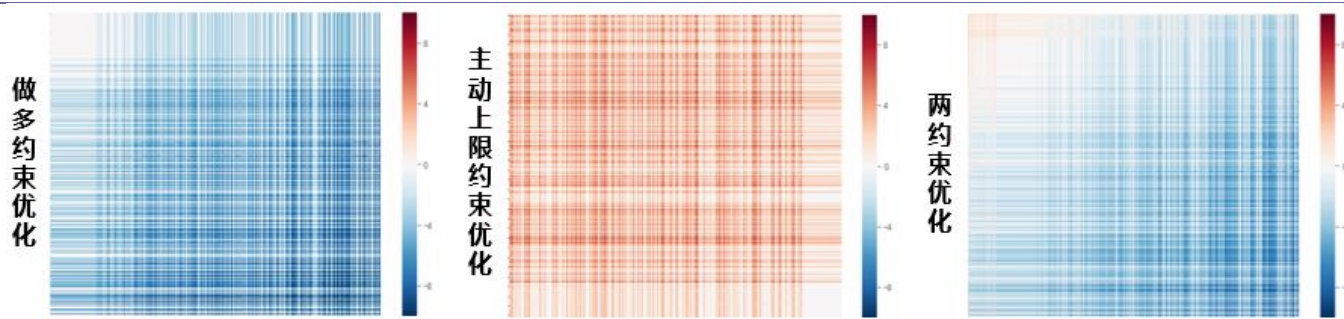
$(\Delta)_{i,j}$	$\omega_i^L$	$]\omega_i^L, \omega_i^U[$	$\omega_i^U$
$\omega_j^L$	$-\gamma_i^L - \gamma_j^L$	$-\gamma_j^L$	$\gamma_i^U - \gamma_j^L$
$]\omega_j^L, \omega_j^U[$	$-\gamma_i^L$	0	$\gamma_i^U$
$\omega_j^U$	$\gamma_j^U - \gamma_i^L$	$\gamma_j^U$	$\gamma_i^U + \gamma_j^U$

#### (四)、主动上限约束的影响

主动上限约束也为个股权重上下限的一类，但在基准选择和限制方向上与做多约束不同。前文提到，任意施加其一约束均会骤降转化效率，而同时施加二者反倒

起到抵消作用。如下图 10 所示，以协方差矩阵角度观察影响程度，以下为随机因子在三种约束下调整值的热力图，单约束结果下调整幅度和广度明显强于两约束，更偏离原始信息。

图 10 协方差矩阵调整值的热力图（按优化权重降序）



资料来源：太平洋证券研究院

另一要素是选定的基准，做空限制以零为单一基准，而主动上限以指数内对应成份股为基准，类似于相对指数的做多限制。我们选择沪深 300、中证 500 和中证 1000 为标的指数并设定不同主动上限做参数测试；另外重新将阿尔法源纳入考量范围，同时为了避免模糊化因子本身特性，仅对其做标准化处理。

如下表 5 所示，1) 从不同因子来看，反转因子效率偏低，估值因子效率偏高；2) 以仅做多而言，反转与估值间效率差异的幅度、变动最明显；3) 以仅主动上限而言，效率随约束上限的下移而递减，300 内盈利受影响较大、多因子受影响较小；4) 两个约束间比较，组合受做多约束影响更多；5) 以两约束而言，300 内效率随约束上限的下移而递减，但 1000 内效率随约束上限的下移而递增；6) 从不同指数来看，相较于大市值组合，中小市值组合对多头信息表达更充分但也损失较多空头信息。

表 6 各优化组合的转化效率（不同宽基指数）

转化效率					约束与基准					
组合	组合1	组合2	组合3	组合4	指数1	指数2	指数3	约束1	约束2	约束程度
阿尔法源	反转因子	估值因子	盈利因子	多因子	沪深300	中证500	中证1000	做多	主动上限	主动上限
300_做多	16.5%	55.5%	39.6%	35.2%	✓			✓		
300_主上1	36.3%	45.8%	33.6%	48.2%	✓				✓	3.0%
300_主上2	34.3%	42.4%	30.5%	44.1%	✓				✓	2.5%
300_主上3	32.4%	36.8%	26.2%	38.2%	✓				✓	2.0%
300_两约1	15.6%	55.0%	36.6%	32.0%	✓			✓	✓	3.0%
300_两约2	11.5%	54.2%	32.3%	29.3%	✓			✓	✓	2.5%
300_两约3	11.8%	50.5%	30.5%	28.8%	✓			✓	✓	2.0%
500_做多	20.5%	20.0%	31.1%	29.5%		✓		✓		
500_主上1	46.3%	53.0%	48.3%	46.0%		✓			✓	2.5%
500_主上2	42.8%	50.6%	44.1%	43.9%		✓			✓	2.0%
500_主上3	37.9%	47.4%	38.8%	40.4%		✓			✓	1.5%
500_两约1	32.0%	46.6%	48.5%	43.0%		✓		✓	✓	2.5%
500_两约2	32.4%	45.8%	48.9%	45.1%		✓		✓	✓	2.0%
500_两约3	35.4%	46.3%	48.9%	46.8%		✓		✓	✓	1.5%
1000_做多	12.9%	21.9%	25.3%	22.5%			✓	✓		
1000_主上1	56.8%	58.8%	53.5%	50.2%			✓		✓	2.0%
1000_主上2	52.5%	55.8%	50.8%	46.4%			✓		✓	1.5%
1000_主上3	44.9%	51.4%	46.6%	40.4%			✓		✓	1.0%
1000_两约1	25.2%	42.2%	39.2%	36.5%			✓	✓	✓	2.0%
1000_两约2	26.6%	42.3%	39.2%	39.6%			✓	✓	✓	1.5%
1000_两约3	26.8%	42.4%	40.1%	43.0%			✓	✓	✓	1.0%

资料来源：太平洋证券研究院

在样本期内，比较阿尔法源的统计信息：1) 如表 7 所示，盈利因子前 n%更偏大市值，而多因子前 n%更偏中市值；2) 如表 8 所示，波动与反转明显高相关、与估值明显负相关、与多因子低相关；3) 如图 11 所示，估值和反转在 300 内基本呈正态分布，而在 500 和 1000 内呈左端厚尾分布。

结合表 6 不难理解：1) 组合优化必倾向头部阿尔法，若个股偏大市值则更易受主动上限约束影响，尤其 300 内大票占比高，更会制约效率；2) 300 内反转与估值相差悬殊可能是因波动相关性差异所致，估值对收益-风险目标的同向优化，要显然比反转的反向优化更高效；3) 500 和 1000 内反转与估值的低转化率可能是因额外补偿阿尔法所致。

表 7 300 内各因子前 n%的市值平均偏分位（降序）

	沪深300内	市值偏分位			
		反转	估值	盈利	多因子
前5%		54%	56%	36%	51%
前10%		48%	44%	33%	51%
前15%		47%	47%	40%	49%
前20%		52%	47%	41%	48%

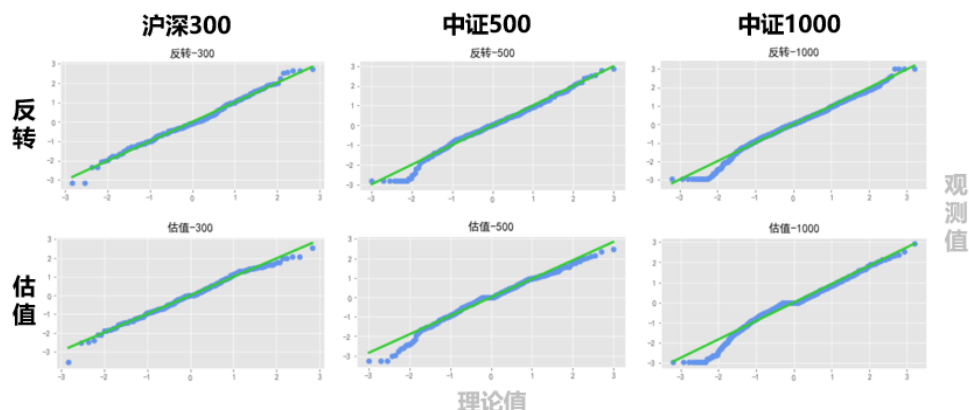
资料来源：太平洋证券研究院

表 8 各因子与波动的相关性（组合构建的样本期）

Corr(波动,因子)	反转	估值	盈利	多因子	市值
沪深300	44%	-60%	24%	5%	-13%
中证500	30%	-42%	1%	-6%	28%
中证1000	27%	-32%	3%	1%	31%

资料来源：太平洋证券研究院

图 11 反转与估值因子的 QQ 图（组合构建的样本期）



资料来源：太平洋证券研究院

### (五)、风格中性约束的影响

风格中性约束对转化效率的影响有限，更多体现的是局部个股置换。在 300 内，设定全额、做多、主动上限为基础约束，比较添加市值中性约束前后的持仓变动情况。在无风格约束下，各组合不同程度地偏向大市值，市值中性均起到实际约束作用。如下表 9 所示，表现出清晰的置换模式：1) 以多换少，数量上建仓明显高于清仓；2) 以中小暴露换大暴露，清仓市值暴露处于极度高位；3) 倾向彻底换仓，建仓、清仓的数量及占比明显高于加仓、减仓。

表 9 市值中性约束下的持仓置换情况统计

置换情况												
统计指标	数量				权重				平均市值暴露			
仓位变动	建仓	清仓	加仓	减仓	建仓	清仓	加仓	减仓	建仓	清仓	加仓	减仓
反转因子	13	9	4	5	13.1%	-11.9%	1.4%	-2.6%	0.94	2.07	-0.25	1.29
估值因子	11	6	2	3	10.5%	-10.1%	0.6%	-1.0%	1.02	1.35	-0.66	0.46
盈利因子	19	6	2	5	18.8%	-10.0%	1.2%	-9.9%	0.76	2.20	0.13	2.39
多因子	20	8	1	2	19.9%	-18.5%	0.4%	-1.8%	0.78	2.27	-0.84	2.03

资料来源：太平洋证券研究院

然而，这样的置换可能会以牺牲阿尔法为代价才能进行。如下表 10 所示，1) 不同组合的阿尔法变动率存在差异，估值最低，盈利和多因子较高；2) 原始阿尔法中，清仓个股普遍高于建仓个股，说明置换会一定程度削弱阿尔法，其中估值的阿尔法差异相近、盈利和多因子差异悬殊；3) 约束修正阿尔法中，清仓个股显著低于建仓个股，即约束会让两者的阿尔法此消彼长，来强制调转相对吸引力，以达到风格中性的目的。

表 10 市值中性约束下的持仓置换成本统计

置换成本									
统计指标	原始阿尔法(平均)				约束修正阿尔法(平均)				组合阿尔法变动率
仓位变动	建仓	清仓	加仓	减仓	建仓	清仓	加仓	减仓	-
反转因子	↓-0.10	↗0.12	↓-0.10	↑0.31	↑0.28	↓-0.61	↑0.07	↘-0.38	-6.1%
估值因子	↑0.71	↑0.78	↓-0.03	↓0.09	↑0.37	↓-0.49	↑0.24	↘-0.17	-1.7%
盈利因子	↓0.04	↑0.69	↘0.25	↗0.40	↑0.34	↓-0.97	↘-0.06	↓-1.05	-19.7%
多因子	↓0.18	↗0.80	↑0.94	↑1.15	↑0.36	↓-1.04	↑0.38	↓-0.93	-14.7%

资料来源：太平洋证券研究院

同时，我们也援引 Lam 等(2005)的研究成果，进一步揭示风格中性约束的影响。假定：1) 个股阿尔法可拆分为对风格收益预期和个股特质收益预期；2) 投资者对风格收益和特质收益有各自的信息强度。可推导出无约束下和施加风格中性约束后的信息比率，同时可计算出因风格中性导致的损失比率。原文对相关公式有详细推导，下文不再详述。

$X$ 为风格暴露,  $f$ 为风格预期收益,  $\epsilon$ 为个股特质预期收益

$\alpha^*$ 为经风格中性约束调整后的阿尔法

$$\begin{aligned}\alpha &= Xf + \epsilon \\ \alpha^* &= (I - X(X^T \Sigma^{-1} X)^{-1} X^T \Sigma^{-1}) \alpha \\ IR_{\text{无约束}} &= \sqrt{\alpha^T \Sigma^{-1} \alpha} \\ IR_{\text{风格中性}} &= \sqrt{\alpha^{*T} \Sigma^{-1} \alpha^*} \\ \text{损失比率} &= 1 - \frac{IR_{\text{风格中性}}}{IR_{\text{无约束}}}\end{aligned}$$

通过多次蒙特卡洛模拟实验, 得到实验结果。如下表 11 所示, 当个股特质信息强度固定为 0.05 时, 1) 随风格信息强度提升, 风格中性组合的损失比率也逐步提升; 2) 随候选股范围缩小, 优化持仓更趋集中, 风格中性组合的损失比率也会提升。

表 11 标普 500 内优化组合的信息比率

风格信息强度	组合信息比率								
	全部 500			Top 100			Top 50		
	无约束 R	风格中性 R	损失比率	无约束 R	风格中性 R	损失比率	无约束 R	风格中性 R	损失比率
0.00	1.07	1.04	3.3%	0.45	0.32	29.0%	0.31	0.12	62.2%
0.05	1.12	1.04	7.0%	0.50	0.32	35.3%	0.35	0.12	66.6%
0.10	1.24	1.04	15.9%	0.62	0.32	47.5%	0.45	0.12	73.8%
0.15	1.41	1.04	26.2%	0.77	0.32	57.8%	0.58	0.12	79.2%
0.20	1.63	1.04	35.9%	0.94	0.32	65.6%	0.72	0.12	83.2%
0.25	1.86	1.04	44.0%	1.13	0.32	71.2%	0.87	0.12	86.2%

资料来源: Lee 等(2005), 太平洋证券研究院

风格中性约束源于管理者对该风格的低信息优势, 及其对蕴含风险的极度厌恶。如果将其认定为柔性约束, 允许一定程度的偏离是更折衷的方法。至于具体如何设定, 关乎市场以及管理者自身的信念和预期, 这仍旧是个见仁见智的问题。

#### 四、总结

本篇报告主要围绕约束对组合产生的影响展开, 先介绍相关的方法论作为铺垫, 而后应用于具体约束分析。通过分析可以观察到更多细节与内在联系, 譬如全额约

束与风险偏好对优化结果的共同影响、做多约束对尾部个股强制修正、个股权重约束对协方差矩阵的收缩放大作用、不同阿尔法对多头空头体现的充分性、风格中性约束的仓位变动模式、持股集中加剧约束影响等等。我们期望后续能探析约束在更多方面、更深层次、更本质的影响，以帮助读者更好理解约束在优化层面的实际意义。



## 五、附录

### (一)、FLAM 拓展公式的推导

参考 Clarke 等(2002)的推导过程:

#### 1、相关变量

$\Delta\omega_i$ 为主动权重,  $\Delta\omega_i^*$ 为无约束主动权重,  $\Delta\omega_i^c$ 为有约束主动权重

$\alpha_i$ 为预期残差收益,  $r_i$ 为已实现残差收益

$\alpha$ 形式:  $\alpha_i = IC \cdot \sigma_i \cdot S_i$

#### 2、假定 1) 无约束、2) 残差收益间不相关

最大化效用函数  $U = E(R_A) - \lambda \sigma_A^2 = \sum^N \Delta\omega_i \cdot \alpha_i - \lambda \cdot \sum^N \Delta\omega_i^2 \cdot \sigma_i^2$

可得最优权重  $\Delta\omega_i^* = \frac{\alpha_i}{\sigma_i^2} \cdot \frac{1}{2\lambda} = \frac{\alpha_i}{\sigma_i^2} \cdot \frac{\sigma_A}{\sqrt{\sum^N (\alpha_i/\sigma_i)^2}}$

#### 3、无约束下推导 IR

$$\begin{aligned} E(R_A) &= \sum^N (\Delta\omega_i^* \cdot \sigma_i) \cdot \left( \frac{\alpha_i}{\sigma_i} \right) \\ &= N \cdot \text{Cov} \left( \Delta\omega_1^* \cdot \sigma_1, \frac{\alpha_1}{\sigma_1} \right) \\ &= N \cdot \rho_{\Delta\omega^*, \alpha} \cdot \text{Std} \left( \frac{\alpha_1}{\sigma_1} \cdot \frac{\sigma_A}{IC\sqrt{N}} \right) \cdot \text{Std} \left( \frac{\alpha_1}{\sigma_1} \right) \\ &= N \cdot \rho_{\Delta\omega^*, \alpha} \cdot \frac{\sigma_A}{\sqrt{N}} \cdot IC \\ &= \sigma_A \cdot \sqrt{N} \cdot IC \cdot \rho_{\Delta\omega^*, \alpha} \\ IR &= \frac{E(R_A)}{\sigma_A} \\ &= \sqrt{N} \cdot IC \quad (\rho_{\Delta\omega^*, \alpha} = 1) \end{aligned}$$

#### 4、有约束下推导 IR

$$\begin{aligned} E(R_A) &= N \cdot \text{Cov} \left( \Delta\omega_1^c \cdot \sigma_1, \frac{\alpha_1}{\sigma_1} \right) \\ &= N \cdot \rho_{\Delta\omega^c, \alpha} \cdot \text{Std}(\Delta\omega_1^c \cdot \sigma_1) \cdot \text{Std} \left( \frac{\alpha_1}{\sigma_1} \right) \\ &= N \cdot TC \cdot \sqrt{E(\Delta\omega_i^c \cdot \sigma_i)^2 - E(\Delta\omega_i^c \cdot \sigma_i)^2} \cdot IC \\ &= N \cdot TC \cdot IC \cdot \sqrt{\sigma_A^2/N - \text{mean}(\Delta\omega_1^c \cdot \sigma_1)^2} \\ &\approx N \cdot TC \cdot IC \cdot \frac{\sigma_A}{\sqrt{N}} \quad (\Delta\omega_i^c \cdot \sigma_i \text{ 均值近似为 } 0) \\ IR &= \frac{E(R_A)}{\sigma_A} \approx \sqrt{N} \cdot IC \cdot TC \end{aligned}$$

## (二)、附加值之比的推导

参考 Grinold(2005)的推导过程:

### 1、相关设定

无约束优化

- 最大化效用函数  $U_Q = \alpha_Q - \frac{\lambda}{2}\sigma_{Q,Q} = \alpha^T \omega_Q - \frac{\lambda}{2}\omega_Q^T \Sigma \omega_Q$

- 基础方程:  $\alpha = \lambda \Sigma \omega_Q$

有约束优化: 最大化效用函数  $U_P = \alpha_P - \frac{\lambda}{2}\sigma_{P,P} = \alpha^T \omega_P - \frac{\lambda}{2}\omega_P^T \Sigma \omega_P$

转移系数:  $TC = \tau_P = \rho_{P,Q}$

风险比率:  $\chi_P = \frac{\sigma_P}{\sigma_Q}$

### 2、效用函数之比

$$\begin{aligned} U_Q - U_P &= \frac{\lambda}{2}\sigma_{Q,Q} - \lambda\sigma_{P,Q} + \frac{\lambda}{2}\sigma_{P,P} \\ &= \frac{\lambda}{2}(\sigma_{Q,Q} - 2\sigma_{P,Q} + \sigma_{P,P}) \\ &= \frac{\lambda}{2}\sigma_{Q,Q}(1 + \chi_P^2 - 2\chi_P\tau_P) \\ &= U_Q(1 + \chi_P^2 - 2\chi_P\tau_P) \\ \frac{U_Q}{U_Q} &= 2\chi_P\tau_P - \chi_P^2 \leq \tau_P^2 \end{aligned}$$

## 六、参考文献

- Richard C. Grinold and Ronald N. Kahn (1999). Active Portfolio Management, 2<sup>nd</sup> edn. New York: McGraw-Hill/Irwin.
- Roger Clarke, Harindra de Silva and Steven Thorley (2002). Portfolio Constraints and the Fundamental Law of Active Management. Financial Analysts Journal, 58(5), 48-66.
- Jennifer Bender and Jyh Huei Lee (2008). Measuring the Efficiency of Portfolio Construction. MSCI Barra Research Insights.
- Richard Grinold (2005). Implementation Efficiency. Financial Analysts Journal, 62, 52-63.
- Bernd Scherer and Xiaodong Xu (2007). The Impact of Constraints on Value-Added. Journal of Portfolio Management, 33(4), 45-54.
- Robert A. Stubbs and Dieter Vandenbussche (2010). Constraint Contribution. Journal of Portfolio Management, 36(4), 48-59.
- Bruno Durin (2014). Signal-Wise Performance Attribution for Constrained Portfolio Optimization. Capital Fund Management.
- Ravi Jagannathan and Tongshu Ma (2003). Risk Reduction in Large Portfolios: Why Impose the Wrong Constraints Helps. Journal of Finance, 58(4), 1651-1684.
- Thierry Roncalli (2010). Understanding the Impact of Weights Constraints in Portfolio Theory. SSRN.
- Daniel Y. Lam and Wai Lee (2005). Factor Neutral. Journal of Portfolio Management, 32(1), 38-48.



## 销售团队

职务	姓名	手机	邮箱
全国销售总监	王均丽	13910596682	wangjl@tpyzq.com
华北销售副总监	成小勇	18519233712	chengxy@tpyzq.com
华北销售	孟超	13581759033	mengchao@tpyzq.com
华北销售	韦珂嘉	13701050353	weikj@tpyzq.com
华东销售总监	陈辉弥	13564966111	chenhm@tpyzq.com
华东销售副总监	梁金萍	15999569845	liangjp@tpyzq.com
华东销售	杨晶	18616086730	yangjinga@tpyzq.com
华东销售	秦娟娟	18717767929	qinjj@tpyzq.com
华东销售	王玉琪	17321189545	wangyq@tpyzq.com
华东销售	慈晓聪	18621268712	cixc@tpyzq.com
华东销售	郭瑜	18758280661	guoyu@tpyzq.com
华东销售	徐丽闵	17305260759	xulm@tpyzq.com
华南销售总监	张茜萍	13923766888	zhangqp@tpyzq.com
华南销售副总监	查方龙	18565481133	zhaf1@tpyzq.com
华南销售	张卓粤	13554982912	zhangzy@tpyzq.com
华南销售	张靖雯	18589058561	zhangjingwen@tpyzq.com
华南销售	何艺雯	13527560506	heyw@tpyzq.com



## 研究院

中国北京 100044

北京市西城区北展北街九号

华远·企业号 D 座

电话： (8610)88321761

传真： (8610) 88321566

## 重要声明

太平洋证券股份有限公司具有证券投资咨询业务资格，经营证券业务许可证编号 13480000。

本报告信息均来源于公开资料，我公司对这些信息的准确性和完整性不作任何保证。负责准备本报告以及撰写本报告的所有研究分析师或工作人员在此保证，本研究报告中关于任何发行商或证券所发表的观点均如实反映分析人员的个人观点。报告中的内容和意见仅供参考，并不构成对所述证券买卖的出价或询价。我公司及其雇员对使用本报告及其内容所引发的任何直接或间接损失概不负责。我公司或关联机构可能会持有报告中所提到的公司所发行的证券头寸并进行交易，还可能为这些公司提供或争取提供投资银行业务服务。本报告版权归太平洋证券股份有限公司所有，未经书面许可任何机构和个人不得以任何形式翻版、复制、刊登。任何人使用本报告，视为同意以上声明。