Otimização de Sistemas

1. Revisão de Álgebra Linear

1.1 Matrizes

1.1.1. Definição

Conjunto de elementos ordenados em forma retangular.

Ex : $\mathbf{A}_{(mxn)}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 8 \\ 1 & 7 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

1.1.2. Notação :

Ex:.

$$\mathbf{A}_{(m \text{ x } n)} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

1.1.3. Matrizes Especiais

a) *Matriz nula* : $a_{ij} = 0, \forall i, j (i \leq m; j \leq n)$.

b) *Matriz quadrada* : $m = n$ (ordem n).

c) *Matriz diagonal* : $m = n$, $a_{ij} = 0, \forall i \neq j$.

d) *Matriz identidade* (**E** *ou* **I**) : matriz diagonal com $a_{i,i} = 1$.

e) *Matriz simétrica* : $m = n$, $a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j$.

f) *Matriz transposta* de $\mathbf{A}_{(mxn)}$: $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}{}_{(nxm)}, a_{ij}^{\mathrm{T}} = a_{ji}$

g) *Matriz triangular*:

$a_{ij} = 0 \forall i > j$ (superior)

$a_{ij} = 0 \forall i < j$ (inferior).

h) *Matriz vetor*: matriz $(nx1)$.

1.1.4. Operações com matrizes

---

a) Igualdade : $\mathbf{A}_{(mxn)} = \mathbf{B}_{(mxn)}$, se $a_{ij} = b_{ij}, \forall i, j$.

b) Adição : $\mathbf{C}_{(mxn)} = \mathbf{A}_{(mxn)} + \mathbf{B}_{(mxn)} \Rightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \forall i, j$.

c) Multiplicação por uma constante λ:

$$\mathbf{B}_{(mxn)} = \lambda.\mathbf{A}_{(mxn)} \Rightarrow b_{ij} = \lambda.a_{ij}, \forall i, j \, .$$

d) Multiplicação de matrizes :

$$\mathbf{A}_{(mxn)}.\mathbf{B}_{(nxp)} = \mathbf{C}_{(mxp)}$$

onde

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.b_{jk}, \forall i,k$$

Notas : i) $\mathbf{A}.\mathbf{B} \neq \mathbf{B}.\mathbf{A}$

ii) $\mathbf{A}.\mathbf{I} = \mathbf{I}.\mathbf{A} = \mathbf{A}$, onde $(\mathbf{A}, \mathbf{I}_{(nxn)})$

e) Propriedades das operações com matrizes:

1. $(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$

2. $\alpha.(\lambda\mathbf{A})=\lambda.(\alpha\mathbf{A})=(\alpha\lambda)\mathbf{A}$

3. $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$

4. $\mathbf{A}(\lambda.\mathbf{B})=(\lambda.\mathbf{A})\mathbf{B}=\lambda.(\mathbf{AB})$

5. $(\alpha+\lambda)\mathbf{A}=\alpha\mathbf{A}+\lambda\mathbf{A}$

6. $\lambda(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\lambda\mathbf{A}+\lambda\mathbf{B}$

7. $\mathbf{A}(\mathbf{BC})=(\mathbf{AB})\mathbf{C}$

8. $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{AB}+\mathbf{AC}$

9. $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C}=\mathbf{AC}+\mathbf{BC}$

1.1.5. Determinantes

$$\mathrm{p}=\mathrm{a}_{\alpha 1,1}.\mathrm{a}_{\alpha 2,2}....\mathrm{a}_{\alpha n,n}$$

$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ são números distintos, $\alpha_i \neq \alpha_k$. Essa seqüência é uma permutação do conjunto $\{1,2,...,n\}$. Uma "inversão" na seqüência $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ acontece cada vez que $\alpha_i > \alpha_k$, para $i<k$.

Ex :

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4=2,3,1,4$ possui 2 inversões.

O n° de inversões de uma seqüência é designado por $N(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$.

Determinante de uma matriz **A** de ordem *n* é a soma dos termos *p* obtidos por todas as permutações possíveis da seqüência $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$, multiplicados por (-1) elevado ao número de inversões das respectivas seqüências:

$$|\mathbf{A}|=\det(\mathbf{A})=\sum(-1)^{\mathrm{N}(\alpha 1,...,\alpha n)}.\mathrm{a}_{\alpha 1,1}.\mathrm{a}_{\alpha 2,2}...\mathrm{a}_{\alpha n,n}$$

$$\text{Ex}: |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$(-1)^0 a_{11}.a_{22}.a_{33} + (-1)^2 a_{21}a_{32}.a_{13} + (-1)^2 a_{31}.a_{12}.a_{23} + (-1)^1 a_{21}.a_{12}.a_{33} + (-1)^3 a_{31}.a_{22}.a_{13} + (-1)^1 a_{11}.a_{32}.a_{23}.$$

1.1.5.1. Propriedades dos determinantes

---

a) Se $a_{ij} = 0 \forall i$ ou $a_{ij} = 0 \forall j \Rightarrow \det \mathbf{A} = 0$ (singular).

b) $b_{ij} = \lambda.a_{ij}$, $j = 1,2,\ldots,n$ ou $i = 1,2,\ldots,n \Rightarrow \det \mathbf{B} = \lambda.\det \mathbf{A}$.

c) **B** é obtida pela permuta de duas linhas ou duas colunas de **A** $\Rightarrow$ det **B** = - det **A**.

d) Se $a_{ij} = \lambda.a_{kj}$, $j = 1,2,\ldots,n$ ou $a_{ij} = \lambda.a_{ik}$, $i = 1,2,..,n \Rightarrow \det \mathbf{A} = 0$.

e) Se $b_{ij} = a_{ij} + \lambda.a_{kj}$, $j = 1,2,\ldots,n$; $i \neq k$ ou $b_{ij} = a_{ij} + \lambda.a_{ik}$ $i = 1,2,\ldots,n;$; $j \neq k \Rightarrow \det \mathbf{A} = \det \mathbf{B}$.

1.1.5.2. Co-fator, menor complementar

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}.M_{ij}$$

1.1.5.3. Expansão do determinante em co-fatores

$$\det \mathbf{A} = a_{i1}.A_{i1} + a_{i2}.A_{i2} + \ldots + a_{in}.A_{in} = a_{1j}.A_{1j} + a_{2j}.A_{2j} + \ldots + a_{nj}.A_{nj}$$

1.1.6. Determinante de uma matriz triangular

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}.\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22}.\begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{44} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22}...a_{nn}$$

1.1.7. "Rank" de uma matriz, r :

Seja $\mathbf{A}_{(mxn)}$. Se:

a) Existe pelo menos uma submatriz **S** de **A**, de ordem r, com $\det \mathbf{S} \neq 0$;

b) Toda submatriz **T** de **A**, de ordem $r_l > r$, possui $\det \mathbf{T} = 0$;

então r é o "rank".

1.1.8. Matriz inversa

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1} \Leftrightarrow \mathbf{BA} = \mathbf{AB} = \mathbf{I}$$

Notas : i) $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$

ii) $\mathbf{A}^{-1} = (cof\ \mathbf{A})^{T} / \det \mathbf{A}$

1.2. Sistemas de equações lineares - tratamento matricial

1.2.1. Conversão

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & + & \cdots & + & a_{in}x_n & = & b_i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases}$$

A i-ésima equação: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} x_1 + \cdots + \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix} x_n = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_1.x_1 + \mathbf{A}_2.x_2 + \ldots + \mathbf{A}_n x_n = \mathbf{b} \text{ ou } \mathbf{A}.\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

1.2.2. Regra de Cramer

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta};\, \Delta = \det \mathbf{A}$$

$$\Delta_i = \det \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1\ \mathbf{A}_2 \cdots \overset{\overset{i}{\downarrow}}{\mathbf{b}} \cdots \mathbf{A}_n \end{bmatrix}$$

1.2.3. Método de Eliminação de Gauss - Jordan

Consiste em diagonalizar a matriz dos coeficientes, através de operações elementares na matriz aumentada: $\bar{\mathbf{A}} \overset{\Delta}{=} [\mathbf{A} \ \vdots \ \mathbf{b}]$.

As operações elementares são:

a) permuta de linhas;

b) multiplicação de uma linha por uma constante;

c) substituição de uma linha por seu conteúdo adicionado a outra linha, multiplicada por uma constante.

Ex : Resolva:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 10 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 &= 9 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 17 \end{aligned}$$

A matriz aumentada é:

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 & \vdots & 10 \\ 1 & 1 & 3 & \vdots & 9 \\ 1 & 3 & 4 & \vdots & 17 \end{bmatrix} \begin{matrix} \to 1/2\mathrm{L}_1 \\ \to \mathrm{L}_2 - 1/2\mathrm{L}_1 \\ \to \mathrm{L}_3 - 1/2\mathrm{L}_1 \end{matrix}$$

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & \vdots & 5 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 4 \\ 0 & 2 & 2 & \vdots & 12 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \to \mathrm{L}_3 / 2 \\ \to \mathrm{L}_2 \end{matrix}$$

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & \vdots & 5 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 6 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -5 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 4 \end{cases}$$

1.3. Espaços Vetoriais

1.3.1. Conceitos e Notação

Espaço vetorial é o conjunto de todos os vetores com número de coordenadas igual à dimensão do espaço. Ex : O espaço vetorial $\Re^m$ é o conjunto de todos os vetores (pontos) e *m* coordenadas reais.

1.3.2. Combinação Linear

Sejam $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, ..., \mathbf{A}_n \in \Re^m$ e $x_1, ..., x_n \in \Re$. Então $\mathbf{b} = x_1.\mathbf{A}_1 + x_2.\mathbf{A}_2 + \ldots + x_n.\mathbf{A}_n$ é um vetor do $\Re^m$, chamado *combinação linear* dos vetores $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, ..., \mathbf{A}_n$.

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} x_1 + \cdots + \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} x_n = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

1.3.3. Vetores Linearmente Independentes (L.I.)

Se a equação vetorial:

$$\mathbf{A}_1.x_1 + \mathbf{A}_2.x_2 + \ldots + \mathbf{A}_n.x_n = \mathbf{0}$$

for satisfeita apenas quando $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, então os vetores $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$ são *L.I.* Caso contrário, diz-se que os eles são *linearmente dependentes* (*L.D.*), isto é, algum vetor $\mathbf{A}_i$ pode ser obtido a partir de uma combinação linear dos demais vetores.

Ex:

$$\mathrm{m} = 3, \mathrm{n} = 2, \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.x_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = 0 \; e \; x_2 = 0$$

Logo, $\mathbf{A}_1$ e $\mathbf{A}_2$ são *L.I.*.

1.3.4. Dimensão de um espaço vetorial

É o número igual à quantidade máxima obtenível de vetores *L.I.*, pertencentes ao espaço vetorial.

1.3.5. Base

Um conjunto de vetores $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n \in \Re^m$ constitui-se em uma base do $\Re^m$ se:

a) Eles forem *L.I.*

b) Qualquer vetor $\mathbf{x} \in \Re^m$ puder ser obtido por uma combinação linear de $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n \in \Re^m$, isto é:

$$\mathbf{x} = x_1.\mathbf{e}_1 + x_2.\mathbf{e}_2 + \ldots + x_n.\mathbf{e}_n \, .$$

Pode-se provar que qualquer base de $\Re^m$ possui *m* vetores.

Ex : $\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ constituem-se em uma base do $\Re^3$, pois:

$$x_1.\mathbf{e}_1 + x_2.\mathbf{e}_2 + \ldots + x_n.\mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0 \text{ (L.I.).}$$

Se $\mathbf{x} \in \Re^3 \Rightarrow \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1.\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2.\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3.\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, isto é, $\mathbf{x}$ é uma combinação linear de $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ e $\mathbf{e}_3$.

1.3.6. Rank de uma Matriz

Através da expansão do determinante em cofatores, pode-se mostrar que o "*rank*" de uma matriz (*m* x *n*) é igual ao n° máximo de colunas (ou de linhas) L.I.

1.3.7. Teorema

Para $\mathbf{A}_{(mxn)}$, são equivalentes as afirmações:

a) Existe $\mathbf{A}^{-1}$.

b) Rank de **A** é *n*.

c) det $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$.

1.4. Solução do sistema $\mathbf{A.x} = \mathbf{b}$, sendo $\mathbf{A}_{(mxn)}, \mathbf{x}_{(nx1)}, \mathbf{b}_{(mx1)}$ e $m < n$.

Considere o sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & + & \cdots & + & a_{in}x_n & = & b_i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

onde $m < n$. Considere $\text{rank}(\mathbf{A}) = m$. Então, arbitrando-se os valores de $(n-m)$ variáveis, pode-se obter uma solução. Para cada conjunto de valores arbitrado, obtém-se uma solução distinta.

1.4.1. Matriz Base

Se $\mathbf{A}_{(mxn)}$ possui *m* colunas *L.I.*, então a matriz quadrada

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\text{j1}} & \mathbf{A}_{\text{j2}} & \cdots & \mathbf{A}_{\text{jm}} \end{bmatrix}$$

é uma base de **A** e a equação $\mathbf{A}.\mathbf{x} = \mathbf{b}$ possui uma solução para qualquer $\mathbf{b} \in \Re^m$.

$$\text{Ex : } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} \text{possui uma base } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1.4.2. Solução básica

Sejam $\mathbf{A}_{(mxn)}$ e $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\text{j1}} & , & \mathbf{A}_{\text{j2}} & , & \ldots & , & \mathbf{A}_{\text{jm}} \end{bmatrix}$ uma base de **A**. Para qualquer $\mathbf{b} \in \Re^m$, uma solução **x** tal que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\text{j1}} & \mathbf{A}_{\text{j2}} & \ldots & \mathbf{A}_{\text{jm}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{x}_{\text{j1}} \\ \text{x}_{\text{j2}} \\ \vdots \\ \text{x}_{\text{jm}} \end{bmatrix} = \mathbf{b} \text{ e } x_i = 0 \text{ para } i \neq j_1, \ldots, j_m .$$

é chamada de *solução básica* do sistema. As variáveis x_{jk} são chamadas *básicas* e as demais *não-básicas*.

Ex : O sistema:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 4x_1 & + & 0x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & 0x_5 & = & -10 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 0x_3 & - & 2x_4 & + & 0x_5 & = & 6 \\ 2x_1 & + & 0x_2 & + & 0x_3 & + & 2x_4 & + & x_5 & = & 14 \end{array}$$

possui uma solução básica dada por :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} .x_2 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} .x_3 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} .x_5 = \begin{bmatrix} -10 \\ 6 \\ 14 \end{bmatrix}$$

e $x_1 = x_4 = 0$. Segue que $x_2 = 6$, $x_3 = -10$ e $x_5 = 14$. O conjunto das variáveis básicas, para esta solução, é $\{x_2, x_3, x_5\}$, cujos índices formam o conjunto Base $\{2,3,5\}$.

Outra solução básica pode ser obtida, através de operações (transformações) elementares na matriz aumentada do sistema, para se obter o conjunto Base $\{2,3,1\}$:

$$\bar{\mathbf{A}} = \left[\begin{array}{ccccc:c} 4 & 0 & 1 & 1 & 0 & -10 \\ 2 & 1 & 0 & -2 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 1 & 14 \end{array}\right] \begin{array}{l} \rightarrow L_1 - 2L_3 \\ \rightarrow L_2 - L_3 \\ \rightarrow 1/2 L_3 \end{array}$$

$$\bar{\mathbf{A}} = \left[\begin{array}{ccccc:c} 0 & 0 & 1 & -3 & -2 & -38 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -1 & -8 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & 7 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} \text{p/ } x_4 = x_5 = 0, \\ x_1 = 7, x_2 = -8, x_3 = -38 \end{array}$$

O número máximo de soluções básicas possíveis é:

$$C_3^5 = \frac{5!}{3!2!} = 10$$

1.4.3. Solução compatível básica

Considere que são impostas restrições às variáveis do sistema anterior, do tipo: $x_i \geq 0, \;\; i = 1,\ldots,5.$ As soluções básicas encontradas não são *compatíveis* com a restrição acima. Soluções básicas que atendem às restrições de desigualdade são chamadas de *soluções compatíveis básicas*.

De uma maneira geral, tem-se:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \; , \; i = 1, \ldots, m$$
$$x_j \geq 0 \, , \; j = 1, \ldots, n \, ; \; m < n$$

1.5. Sistemas de Inequações Lineares

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}.x_j \leq b_i \; , \; i=1,\ldots,m$$
$$\text{ou} \quad \mathbf{A.x} \leq \mathbf{b}$$

Esse sistema pode ser transformado em um sistema de equações lineares, através da introdução de novas variáveis:

$$\sum_{j=l}^{n} a_{ij}.x_j + x_{n+i} = b_i, i = 1,\ldots,m$$
$$x_{n+i} \geq 0$$

Para $\mathbf{A.x} \geq \mathbf{b}$, tem-se

$$\sum_{j=l}^{n} a_{ij}.x_j - x_{n+i} = b_i, i = 1,\ldots,m$$
$$x_{n+i} \geq 0$$

As variáveis x_{n+i}, $i = 1,\ldots,m$, são chamadas *variáveis de folga*.

1.6. Sistemas de Equações Lineares com variáveis não negativas

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & \geq & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & \leq & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & \leq & b_m \end{cases} \qquad \begin{array}{l} x_i \geq 0,\ i = 1,\ldots,n,\ i \neq k \\ \\ x_k \text{ qq} \end{array}$$

A introdução de *m* variáveis de folga transforma o sistema de inequações em um sistema de equações, conforme se mostrou na seção anterior. A fim de trabalhar com variáveis não negativas, substitui-se x_k por $x'_k - x''_k$, sendo $x'_k \geq 0$ e $x''_k \geq 0$.

1.7. Convexidade

1.7.1. Definição

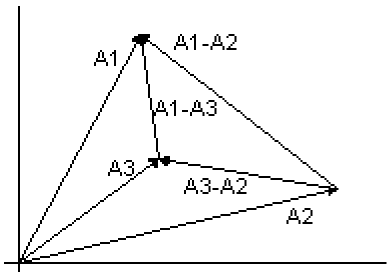
Diz-se que $\mathbf{b} \in \Re^m$ é uma combinação convexa dos vetores $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n \in \Re^m$ se:

$$\mathbf{b} = \alpha_1.\mathbf{A}_1 + \ldots + \alpha_n \mathbf{A}_n$$

com : $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ e $\alpha_i \geq 0$ para $i = 1,\ldots,n$

1.7.2. Interpretação geométrica

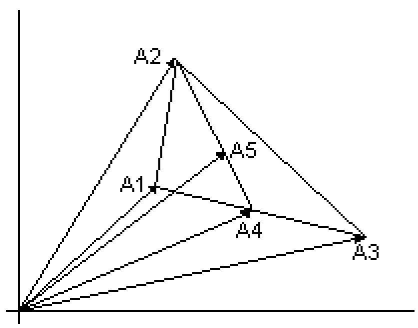
Ex₁: Se $\mathbf{A}_3$ é uma combinação convexa de $\mathbf{A}_1$ e $\mathbf{A}_2$, então:



$$\mathbf{A}_3 = \alpha.\mathbf{A}_1 + (1-\alpha).\mathbf{A}_2$$
$$\mathbf{A}_3 = \alpha.\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 - \alpha.\mathbf{A}_2$$
$$(\mathbf{A}_3 - \mathbf{A}_2) = \alpha(\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2).$$

Isto é : os vetores $(\mathbf{A}_3 - \mathbf{A}_2)$ e $(\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2)$ têm a mesma direção, já que $\alpha \in \Re$.

Ex$_2$:



$$\mathbf{A}_4 = \alpha.\mathbf{A}_1 + (1-\alpha).\mathbf{A}_3$$
$$\mathbf{A}_5 = (1-k).\mathbf{A}_2 + k.\mathbf{A}_4$$
$$= (1-k).\mathbf{A}_2 + k.\mathbf{A}_4$$
$$= (1-k).\mathbf{A}_2 + k.\alpha.\mathbf{A}_1 + k(1-\alpha).\mathbf{A}_3$$
$$= (k.\alpha).\mathbf{A}_1 + (1-k).\mathbf{A}_2 + [k(1-\alpha)].\mathbf{A}_3$$

$$\text{Se } 0 \le \alpha \le 1 \text{ e } 0 \le k \le 1 \Rightarrow \begin{cases} 0 \le k\alpha \le 1 \\ 0 \le 1-k \le 1 \\ 0 \le 1-\alpha \le 1 \\ 0 \le k(1-\alpha) \le 1 \end{cases}$$

Como $k\alpha + (1-k) + k(1-\alpha) = 1 \Rightarrow \mathbf{A}_5$ é uma combinação convexa de $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$ e $\mathbf{A}_3$.

1.7.3. Conjunto Convexo

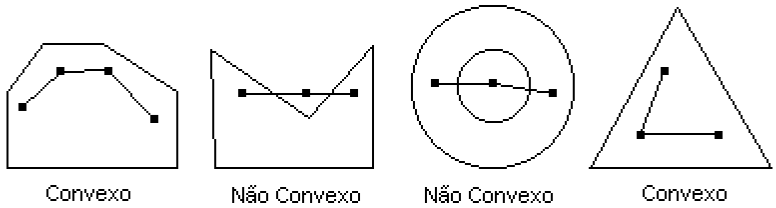
1.7.3.1. Definição

Seja $C \subset \Re^m$ e $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2 \in C$, quaisquer.

Seja $\mathbf{b} = \alpha_1\mathbf{A}_1 + \alpha_2\mathbf{A}_2$ uma combinação convexa de $\mathbf{A}_1$ e $\mathbf{A}_2$, com $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, $0 \le \alpha_1, \alpha_2 \le 1$.

Se $\mathbf{b} \in C \Rightarrow C$ é chamado de *conjunto convexo*.

Ex:



1.7.3.2. Ponto extremo

A é *ponto extremo* se para $\mathbf{A} = \alpha_1 \mathbf{A}_1 + \alpha_2 \mathbf{A}_2$, com α_1 e α_2 definidos na seção anterior, implicar, necessariamente, em $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1$ ou $\mathbf{A} = \mathbf{A}_2$.