9 Programação não-linear com restrições

9.1 Introdução

Os problemas tratados neste capítulo têm a forma:

$$\begin{cases} \min f(\mathbf{x}) \ , \ \mathbf{x} \in \Re^n \\ \text{s.a} \begin{cases} g_i(\mathbf{x}) = 0, \ i = 1, \ldots, m < n \\ h_j(\mathbf{x}) \le 0, \ j = 1, \ldots, p \end{cases} \end{cases} \tag{9.1}$$

onde as funções *f*, g e h são contínuas. Em geral, essas funções são não-linares. Entretanto, muitos problemas práticos se apresentam com restrições de desigualdade impostas apenas sobre as variáveis **x**, de maneira que a inclusão dessas restrições se dá pela simples fixação de uma variável no seu valor limite, quando esse limite é violado no decorrer de um processo de busca.

Definição 9.1:
Diz-se que uma restrição h_j está ativa, se $h_j(x) = 0$; diz-se que está inativa, se $h_j(x) < 0$.

9.2 Otimização com restrições de igualdade

Definição 9.2:

Um vetor $\mathbf{x}^r$ é dito regular, com relação às restrições ***g***, se os vetores $\nabla g_i(\mathbf{x}^r)$, para $i = 1, \ldots, m,$ são L.I., i.e.,:

$$\lambda_1 \nabla g_1(\mathbf{x}^r) + \ldots + \lambda_m \nabla g_m(\mathbf{x}^r) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0 \tag{9.2}$$

Teorema 9.1 (condição necessária de 1ª ordem):

Seja $\mathbf{x}^* \in \Re^n$ um minimizador local de *f*, s.a $g_i(\mathbf{x}^*) = 0, \ i = 1, \ldots, m$. Seja ainda $\mathbf{x}^*$ um ponto regular das restrições ***g***. Então existe $\boldsymbol{\lambda}^* \in \Re^m$ tal que:

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* . \nabla g_i(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0} \tag{9.3}$$

Demonstração:

Desenvolvendo f em série de Taylor, em torno de $\mathbf{x}^*$, tem-se:

$$f(\mathbf{x}^* + \delta\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^*) + \nabla^{\mathrm{T}} f(\mathbf{x}^*)\delta\mathbf{x} + \sigma_f, \sigma_f \to 0 \qquad (9.4)$$

Como $\mathbf{x}^*$ é um ponto extremo, é necessário que:

$$\nabla^{\mathrm{T}} f(\mathbf{x}^*)\delta\mathbf{x} = 0 \qquad (9.5)$$

Desenvolvendo agora a i-ésima restrição g_i em série de Taylor, tem-se:

$$g_i(\mathbf{x}^* + \delta\mathbf{x}) = g_i(\mathbf{x}^*) + \nabla^{\mathrm{T}} g_i(\mathbf{x}^*)\delta\mathbf{x} + \sigma_{g_i}, \sigma_{g_i} \to 0 \qquad (9.6)$$

Como $(\mathbf{x}^* + \delta\mathbf{x})$ e $\mathbf{x}^*$ devem ser soluções factíveis, i.e., $g_i(\mathbf{x}^* + \delta\mathbf{x}) = 0$ e $g_i(\mathbf{x}^*) = 0$, é necessário que:

$$\nabla^{\mathrm{T}} g_i(\mathbf{x}^*)\delta\mathbf{x} = 0 \quad \text{, para } i = 1,\ldots,m \qquad (9.7)$$

De acordo com as equações (9.5) e (9.7), os vetores $\nabla f(\mathbf{x}^*)$ e $\nabla g_i(\mathbf{x}^*)$ pertencem ao mesmo subespaço; como $\mathbf{x}^*$ é regular de $\boldsymbol{g}$, i.e., como os vetores $\nabla g_i(\mathbf{x}^*)$, para $i = 1,\ldots,m$ são L.I., então $\nabla f(\mathbf{x}^*)$ pode ser escrito como uma combinação linear desses vetores:

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla g_i(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$$

As equações (9.7) podem ser escritas em forma matricial, como segue:

$$\begin{bmatrix} \nabla^{\mathrm{T}} g_1(\mathbf{x}^*) \\ \vdots \\ \nabla^{\mathrm{T}} g_m(\mathbf{x}^*) \end{bmatrix} \delta\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

A matriz $\mathbf{J}_{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \nabla^{\mathrm{T}} g_1(\mathbf{x}^*) \\ \vdots \\ \nabla^{\mathrm{T}} g_m(\mathbf{x}^*) \end{bmatrix}$ é chamada de matriz Jacobiana. O seu rank é m e a sua dimensão é mxn. Os parâmetros $\boldsymbol{\lambda}$ são chamados de multiplicadores de Lagrange.

O problema de otimização pode agora ser resolvido através da solução simultânea das $m + n$ equações definidas por:

$$g_i\left(\mathbf{x}^*\right)=0\,,\; i=1,\ldots,m$$
$$\nabla_k f\left(\mathbf{x}^*\right)+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j^*\nabla_k g_j\left(\mathbf{x}^*\right)=0\,,\; k=1,\ldots,n \qquad (9.8)$$

ou em forma matricial:

$$\boldsymbol{g}\left(\mathbf{x}^*\right)=\mathbf{0}$$
$$\nabla f\left(\mathbf{x}^*\right)+\mathbf{J}_{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}^*=\mathbf{0}$$

cujas incógnitas são as n coordenadas de $\mathbf{x}^*$ e os m multiplicadores de Lagrange.

Observação: A condição expressa pelas $m+n$ equações acima equivale à condição de estacionaridade do seguinte problema de otimização, sem restrições:

$$\left\{\mathrm{Min}\,£(\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda})=f(\mathbf{x})+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(\mathbf{x})=f(\mathbf{x})+\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\mathbf{g}(\mathbf{x})\right. \qquad (9.9)$$

que resulta em:

$$\nabla_{\boldsymbol{\lambda}}£(\mathbf{x},\,)=\begin{bmatrix} g_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ g_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix}=\mathbf{0}$$

e

$$\nabla_{\mathbf{x}}£(\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda})=\nabla f(\mathbf{x})+\mathbf{J}_{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\lambda}=\mathbf{0}$$

<u>Teorema 9.2</u> (condição necessária de 2ª ordem)

A condição necessária para que o ponto regular $\mathbf{x}^*$ seja um mínimo local é que:

$$\nabla_{\mathbf{x}}^2£\left(\mathbf{x}^*,\boldsymbol{\lambda}\right)=\nabla^2 f\left(\mathbf{x}^*\right)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\nabla^2 g_i\left(\mathbf{x}^*\right) \qquad (9.10)$$

seja semi-definida positiva no subespaço definido por $\mathbf{J}_{\mathbf{x}}\left(\mathbf{x}^*\right)\delta\mathbf{x}=\mathbf{0}$.

Demonstração:

Expandindo £ $(\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda})$ em série de Taylor em torno de $\mathbf{x}^*$, tem-se:

$$
\begin{aligned}
£\left(\mathbf{x}^* + \delta\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}\right) &= £\left(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}\right) + \nabla_{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}} £(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})\delta\mathbf{x} + \left\{\frac{1}{2}\delta\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\nabla_{\mathbf{x}}^2 £(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})\delta\mathbf{x}\right\} + (\sigma \to 0) = \\
&= f\left(\mathbf{x}^*\right) + \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}\left(\mathbf{x}^*\right) + \nabla^{\mathrm{T}} f\left(\mathbf{x}^*\right)\delta\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\mathbf{J}_{\mathbf{x}}\delta\mathbf{x} + \left\{\frac{1}{2}\delta\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\nabla_{\mathbf{x}}^2 £(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})\delta\mathbf{x}\right\}
\end{aligned}
\quad (9.11)
$$

que, eliminando os termos nulos, fica:

$$
£\left(\mathbf{x}^* + \delta\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}\right) = f\left(\mathbf{x}^*\right) + \frac{1}{2}\delta\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\nabla_{\mathbf{x}}^2 £(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})\delta\mathbf{x} \qquad (9.12)
$$

Como :

$$
£\left(\mathbf{x}^* + \delta\mathbf{x}, \lambda\right) = f\left(\mathbf{x}^* + \delta\mathbf{x}\right) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i\left(\mathbf{x}^* + \delta\mathbf{x}\right) = f\left(\mathbf{x}^* + \delta\mathbf{x}\right) \qquad (9.13)
$$

então:

$f\left(\mathbf{x}^* + \delta\mathbf{x}\right) - f\left(\mathbf{x}^*\right) = \frac{1}{2}\delta\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\nabla_{\mathbf{x}}^2 £\left(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}\right)\delta\mathbf{x} \geq 0$, o que comprova a hipótese definida na eq. (9.10), i.e., se $\mathbf{x}^*$ é um minimizador local, então $\delta\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\nabla_{\mathbf{x}}^2 £\left(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}\right)\delta\mathbf{x} \geq 0$ para todo $\delta\mathbf{x}$ pertencente ao subespaço definido por $\mathbf{J}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}^*)\,\delta\,\mathbf{x} = 0$, com $\mathbf{x}^* + \delta\mathbf{x}$ factível.

Observação: A condição correspondente à matriz $\nabla_{\mathbf{x}}^2 £$ ser semi-definida positiva, no sub-espaço acima especificado, corresponde à condição de $\nabla_{\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda}}^2 £$ ser, também, semi-definida positiva, conforme se demonstra a seguir.

A Hessiana da função objetivo aumentada é dada por:

$$
\nabla_{\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda}}^2 £ = \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{x}}^2 £ & \mathbf{J}_{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{J}_{\mathbf{x}} & \mathbf{0} \end{bmatrix}
$$

A condição de que essa matriz seja semi-definida positiva, nas imediações do ponto de interesse, é definida como:

$$
\begin{bmatrix} \mathbf{x}^{\mathrm{T}} & \vdots & \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{x}}^2 £ & \vdots & \mathbf{J}_{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}} \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ \mathbf{J}_{\mathbf{x}} & \vdots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \ldots \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} \geq 0
$$

Efetuando os produtos, têm-se a relação:

$$
\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\left(\nabla_{\mathbf{x}}^2 £(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) \cdot \mathbf{x} + \mathbf{J}_{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{\lambda}\right) + \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\mathbf{J}_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{x} \geq 0
$$

Eliminando os parêntesis e considerando $\mathbf{J}_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ ($\mathbf{x}$ viável), tem-se:

$$
\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\nabla_{\mathbf{x}}^2 £(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) \cdot \mathbf{x} \geq 0
$$

O desenvolvimento a seguir permite adotar um procedimento que garante a condição acima, para vetores viáveis.

Os autovetores da matriz $\nabla^2_{\mathbf{x},\lambda}\pounds$ são definidos através da equação:

$$\begin{bmatrix} \nabla^2_{\mathbf{x}}\pounds & \vdots & \mathbf{J}^{\mathrm{T}}_{\mathbf{x}} \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ \mathbf{J}_{\mathbf{x}} & \vdots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{v_1} \\ \cdots \\ \mathbf{v_2} \end{bmatrix} = \omega \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{v_1} \\ \cdots \\ \mathbf{v_2} \end{bmatrix}$$

Notar que o vetor representativo dos autovetores está particionado em $\mathbf{v_1}$ (nx1) e $\mathbf{v_2}$ (mx1). Efetuando o produto relativo à partição inferior da equação, tem-se:

$$\mathbf{J_x} \cdot \mathbf{v_1} = \omega \cdot \mathbf{v_2}$$

Considerando que $\mathbf{v_1}$ é um vetor viável, no espaço de busca, é necessário que $\mathbf{J_x} \cdot \mathbf{v_1} = \mathbf{0}$, o que corresponde a $\mathbf{v_2} = \mathbf{0}$. Assim:

$$\begin{bmatrix} \nabla^2_{\mathbf{x}}\pounds & \vdots & \mathbf{J}^{\mathrm{T}}_{\mathbf{x}} \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ \mathbf{J}_{\mathbf{x}} & \vdots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{v_1} \\ \cdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \omega \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{v_1} \\ \cdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Essa equação pode ainda ser escrita como:

$$\begin{bmatrix} \nabla^2_{\mathbf{x}}\pounds & \vdots & \mathbf{J}^{\mathrm{T}}_{\mathbf{x}} \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ \mathbf{J}_{\mathbf{x}} & \vdots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{v_1} \\ \cdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \omega \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{(n\mathrm{x}n)} & \vdots & \mathbf{0} \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ \mathbf{0} & \vdots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v_1} \\ \cdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Dessa forma, para calcular os autovalores da matriz $\nabla^2_{\mathbf{x},\lambda}\pounds$, correspondentes a vetores viáveis, determinam-se as raízes do polinômio em ω, definido por:

$$\det \begin{bmatrix} \nabla^2_{\mathbf{x}}\pounds - \omega\mathbf{I} & \mathbf{J}^{\mathrm{T}}_{\mathbf{x}} \\ \mathbf{J}_{\mathbf{x}} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = 0$$

Se essas raízes forem não-negativas, então $\nabla^2_{\mathbf{x}}\pounds$ também será semi-definida positiva, para vetores viáveis.

Exemplo 9.1: Determinar os pontos extremos da função:

$$f\left(x_1, x_2\right) = 4 - x_1^2 - x_2^2$$

sujeita à restrição:

$$g(x_1, x_2) = 1 - x_1^2 + x_2 = 0$$

Solução:

A matriz Jacobiana e os vetores gradientes são:

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_1 \\ -2x_2 \end{bmatrix}$$

$$\nabla g(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -2x_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J_x} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_1 & 1 \end{bmatrix} = \nabla^{\mathrm{T}} g(\mathbf{x})$$

i.e.,

$$\mathbf{J}_{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}} = \nabla g(\mathbf{x})$$

A função objetivo aumentada é:

$$£(\mathbf{x},\ \boldsymbol{\lambda}) = \left(4 - x_1^2 - x_2^2\right) + \lambda\left(1 - x_1^2 + x_2\right)$$

cuja hessiana, relativa a **x**, é:

$$\nabla_{\mathbf{x}}^2 £ = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 £}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 £}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 £}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 £}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2(1+\lambda) & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

A condição necessária de 1ª ordem estabelece que:

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) + \lambda\, \nabla g(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -2x_1 \\ -2x_2 \end{bmatrix} + \lambda \cdot \begin{bmatrix} -2x_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{cases} x_1(1+\lambda) = 0 \\ \lambda - 2x_2 = 0 \end{cases}$$

Combinando essas duas equações com a restrição $g(x) = 0$, fica:

$$\begin{cases} x_1(1+2x_2) = 0 \\ 1 - x_1^2 + x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x_1^3 - x_1 = 0$$

cujas soluções são:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 0 \\ x_1^{(2)} = \sqrt{2}/2 \\ x_1^{(3)} = -\sqrt{2}/2 \end{cases} \rightarrow \left\langle \begin{matrix} x_2^{(1)} = -1 \\ x_2^{(2)} = -1/2 \\ x_2^{(3)} = -1/2 \end{matrix} \right. \rightarrow \left\langle \begin{matrix} \lambda^{(1)} = -2 \\ \lambda^{(2)} = -1 \\ \lambda^{(3)} = -1 \end{matrix} \right.$$

Para verificar a condição de 2ª ordem, faz-se:

$$\det \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -2(1+\lambda) & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} - \omega \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -2x_1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -2x_1 & 1 \end{bmatrix} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = det \begin{bmatrix} -\omega - 2(1+\lambda) & 0 & -2x_1 \\ 0 & -\omega - 2 & 1 \\ -2x_1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

ou seja:

$$\left(4x_1^2+1\right)\cdot\omega+8x_1^2+2\left(1+\lambda\right)=0$$

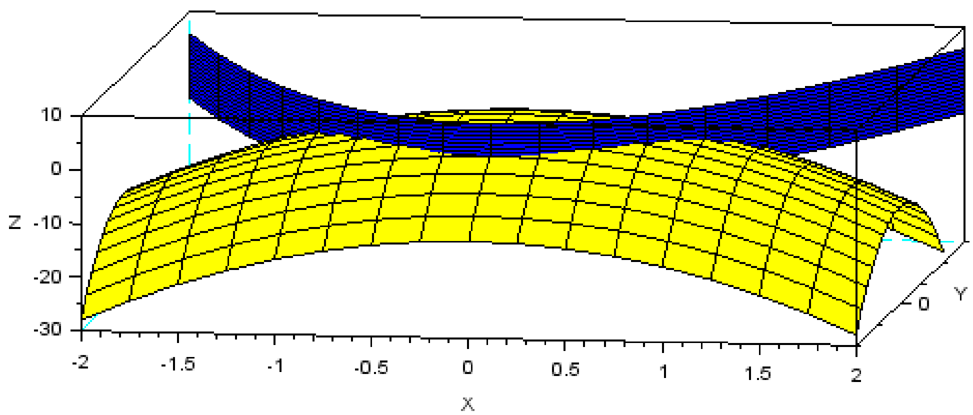
Para o vetor solução:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \lambda \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

tem-se $\omega=2$; portanto, um ponto de mínimo local. Para:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \lambda \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \pm\sqrt{2}/2 \\ -1/2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

tem-se $\omega=-4/3$; portanto, pontos de máximos locais.



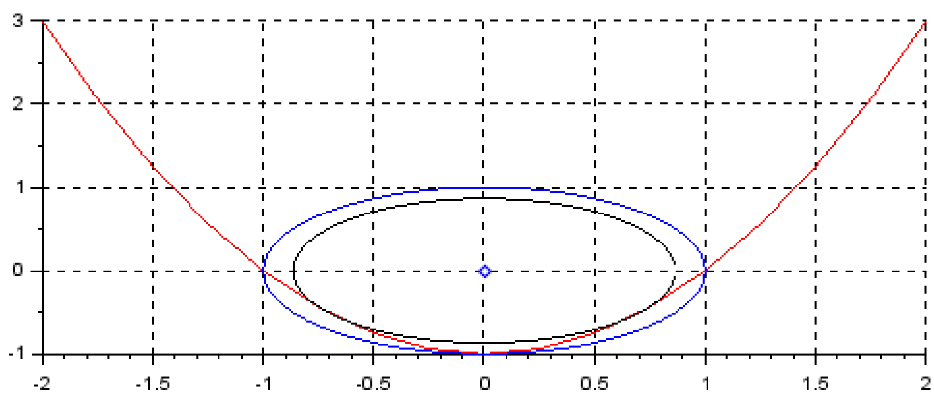


Figura 9.1: (superior) Esboço 3D das funções do exemplo 9.1; (inferior) Curvas de nível para as soluções encontradas.

9.3 <u>Otimização com restrições de desigualdade</u>

Considere, inicialmente, o problema definido por:

$$\begin{cases} \min\ f(\mathbf{x}),\ \mathbf{x} \in \Re^n \\ \text{s.a } g_i(\mathbf{x}) \le 0\ i = 1,\dots,m \end{cases} \qquad (9.14)$$

Esse problema é idêntico ao definido pelas condições (9.1), caso se considere que a função *f* de (9.14) já é aumentada das restrições de igualdade, caso estas existam. Não há, portanto, perda de generalidade, nas conclusões obtidas nesta seção, relativamente às restrições de desigualdade.

Assim como no problema de Programação Linear, as sentenças de desigualdade podem ser transformadas em igualdades, por meio da introdução de variáveis de folga. Uma vez que o domínio deste problema é o $\Re^n$, as variáveis de folga costumam ser elevadas ao quadrado, para garantir a compensação do primeiro membro. Assim, a *i-ésima* restrição fica:

$$g_i(\mathbf{x}) + s_i^2 = 0 \qquad (9.15)$$

A função objetivo aumentada, por sua vez, fica:

$$\pounds(\mathbf{x},\boldsymbol{\mu},\mathbf{s}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i \left[g_i(\mathbf{x}) + s_i^2 \right] \qquad (9.16)$$

Aplicando as condições de primeira ordem, obtêm-se:

$$\nabla_{\mathbf{x}} \pounds\left(\mathbf{x}^*,\boldsymbol{\mu}^*,\mathbf{s}\right) = \nabla f\left(\mathbf{x}^*\right) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i^* \nabla g_i\left(\mathbf{x}^*\right) = \mathbf{0} \qquad (9.17)$$

$$\nabla_{\boldsymbol{\mu}} \pounds\left(\mathbf{x}^*,\boldsymbol{\mu}^*,\mathbf{s}\right) = \mathbf{g}\left(\mathbf{x}^*\right) + \operatorname{diag}(\mathbf{s}) \cdot \mathbf{s} = \mathbf{0} \qquad (9.18)$$

$$\nabla_{\mathbf{s}} \pounds\left(\mathbf{x}^*,\boldsymbol{\mu}^*,\mathbf{s}\right) = 2 \cdot \operatorname{diag}\left(\boldsymbol{\mu}^*\right) \cdot \mathbf{s} = \mathbf{0} \qquad (9.19)$$

De acordo com as equações (9.19), se a *k-ésima* restrição de desigualdade está ***inativa*** ($s_k \ne 0$), então o parâmetro μ correspondente, $\mu_k = 0$. Dessa forma, garante-se que em (9.17) estejam presentes restrições ativas, apenas. Se *p* restrições estiverem ativas, as *n* equações de (9.17) apresentarão (*n*+*p*) incógnitas. As *p* equações correspondentes, presentes em (9.18), completam o sistema (*n*+*p*) x (*n*+*p*).

Uma vez que as eqs. (9.19) indicam que todas as partições do conjunto de restrições (em um conjunto de restrições ativas e outro de restrições inativas) são, a princípio viáveis, todas as combinações possíveis precisam ser testadas, inclusive a alternativa em que todas as restrições estão ***inativas***. Se o resultado dessa análise indicar que nenhuma

restrição de desigualdade é violada, tem-se então a solução. Caso contrário, as restrições precisam ser testadas se *podem estar ativas*, uma a uma, e posteriormente, se necessário, as combinações possíveis.
Considerando que apenas a *i-ésima* restrição de desigualdade está ativa, resolve-se o sitema de (n+1) equações:

$$\begin{aligned} &\nabla f(\mathbf{x}) + \mu_i \nabla g_i(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\ &g_i(\mathbf{x}) = 0 \end{aligned} \qquad (9.20)$$

Observa-se de (9.20) que o sinal de μ_i define o sentido do vetor $\nabla g_i(\mathbf{x})$, com relação ao vetor $\nabla f(\mathbf{x})$. Um valor negativo para μ_i indica que ambos os vetores possuem o mesmo sentido, para os pontos em que $g_i(\mathbf{x}) = 0$. Isso significa que o valor da função objetivo pode ainda ser reduzido, admitindo $g_i(\mathbf{x}) < 0$. Essa restrição *não deve*, então, ser considerada ativa. Caso o valor de μ_i seja positivo, referidos gradientes possuem sinais contrários e uma redução em $g_i(\mathbf{x})$ implica em aumento no valor de f. Nesse caso, a restrição *deve* permanecer ativa. Verifica-se então se as demais restrições são respeitadas, para os pontos determinados pelo sitema (9.20).

Exemplo 9.2: Determinar os pontos extremos da função:

$$f(x_1, x_2) = (x_1 - 1{,}5)^2 + (2x_2 - 1)^2$$

sujeita às restrições:

$$\begin{aligned} g_1(x_1, x_2) &= 2x_1 + 5x_2 - 10 \le 0 \\ g_2(x_1, x_2) &= 2x_1 + 3x_2 - 12 \le 0 \\ g_3(x_1, x_2) &= x_1 + x_2 - 1 \le 0 \end{aligned}$$

Resolvendo, primeiramente, o problema irrestrito, tem-se $\mathbf{x}^*=[1{,}5 \quad 0{,}5]^T$. Esse ponto atende às restrições g_1 e g_2, mas não atende à restrição g_3. Portanto, passa-se ao teste de verificação, se cada uma deve ou não ser considerada como *ativa*.
Os vetores gradientes são:

$$\nabla f(\mathbf{x}) = [2(x_1 - 1{,}5) \quad 4(2x_2 - 1)]^T$$

$$\nabla g_1(\mathbf{x}) = [2 \quad 5]^T$$

$$\nabla g_2(\mathbf{x}) = [2 \quad 3]^T$$

$$\nabla g_3(\mathbf{x}) = [1 \quad 1]^T$$

Transformando as restrições de desigualdade em igualdades, por meio da introdução de variáveis de folga, tem-se:

$$2x_1 + 5x_2 - 10 + s_1^2 = 0$$
$$2x_1 + 3x_2 - 12 + s_2^2 = 0$$
$$x_1 + x_2 - 1 + s_3^2 = 0$$

A função objetivo aumentada, £, fica:

$$£(\mathbf{x},\boldsymbol{\mu},\mathbf{s}) = f(x_1, x_2) + \mu_1 g_1 + \mu_2 g_2 + \mu_3 g_3 + \mu_1 s_1^2 + \mu_2 s_2^2 + \mu_3 s_3^2$$

Considerando apenas g_1 ativa, tem-se: $s_1 = 0;\ \mu_2 = 0;\ \mu_3 = 0$. Assim:

$$£(\mathbf{x},\boldsymbol{\mu},\mathbf{s}) = f(x_1, x_2) + \mu_1 g_1$$

O sistema de equações resultante fica:

$$2(x_1 - 1{,}5) + 2\mu_1 = 0$$
$$4(2x_2 - 1) + 5\mu_1 = 0$$
$$2x_1 + 5x_2 - 10 = 0$$

O vetor solução é: $[x_1\ x_2\ \mu_1]^T$ = [2,38 1,05 -0,88]^T. Para esse vetor, tem-se g_2 = -4,1<0 (atendida) e g_3 = 2,43>0 (não atendida). Mesmo que não houvesse a restrição g_3, essa solução não seria admitida como válida, uma vez que μ_1<0, o que significa que g_1 pode ser reduzida, implicando em uma maior redução da função objetivo. Resultado idêntico é obtido, considerando g_2 como única restrição ativa (μ_2 = -2,4).
Por outro lado, se g_3 for considerada como única restrição ativa, tem-se:

$$s_3 = 0;\ \mu_1 = 0;\ \mu_2 = 0$$
$$£(\mathbf{x},\boldsymbol{\mu},\mathbf{s}) = f(x_1, x_2) + \mu_3 g_3$$
$$2(x_1 - 1{,}5) + \mu_3 = 0$$
$$4(2x_2 - 1) + \mu_3 = 0$$
$$x_1 + x_2 - 1 = 0$$

A solução desse sistema de equações resulta em $[x_1\ x_2\ \mu_3]^T$ = [0,7 0,3 1,6]^T. Para essa solução, tem-se g_1 = -7,1 e g_2 = -9,7, portanto, atendidas. A função objetivo, bem como as funções das restrições se encontram esboçadas no gráfico superior da figura 9.2. No gráfico inferior, encontram-se esboçadas as curvas de nível de todas as funções, para as proposições de solução apresentadas acima.

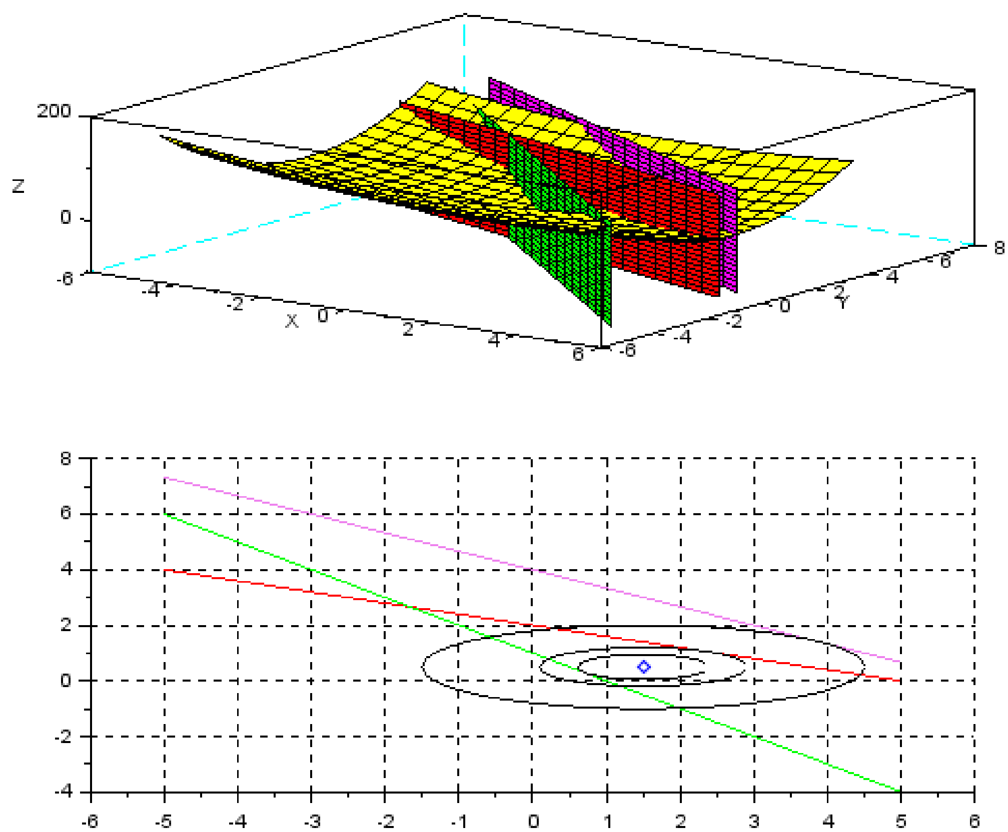


Figura 9.2: (superior) Esboço 3D das funções do exemplo 9.2; (inferior) Curvas de nível para as soluções testadas.