

ROBÔS MÓVEIS

Tipos de Robôs Móveis:

Robôs Terrestres:

- Robôs com rodas.
- Robôs com esteiras.
- Robôs com pernas.

Robôs Aéreos (UAV's – *Unmanned Aerial Vehicles*):

- Robôs mais leves do que o ar: Dirigíveis e *Blimps*.
- Robôs mais pesados do que o ar: Asa fixa (Aviões) e Asa Rotativa (Helicópteros), Asa móvel (Ornitópteros).

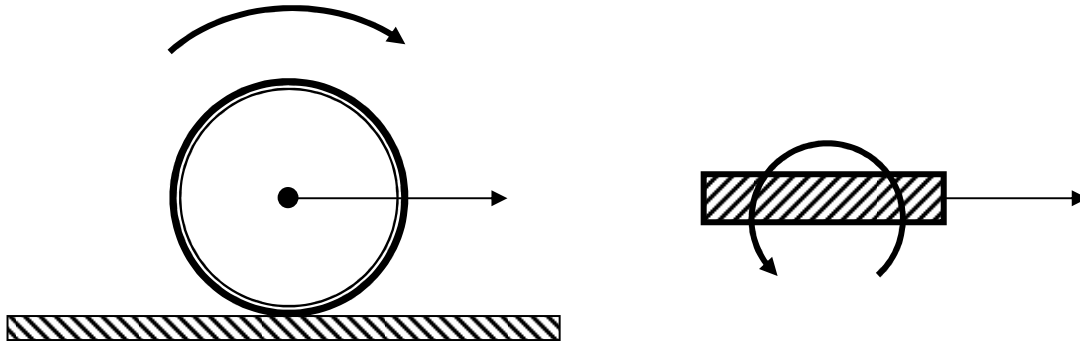
Robôs Aquáticos:

- Robôs submersíveis (AUV's – *Autonomous Underwater Vehicles*): mergulho hidrodinâmico ou por lastro.
- Robôs de superfície (ASV's – *Autonomous Surface Vehicles*).

Outros tipos de locomoção:

- Robôs bracejadores.
- Robôs escaladores.
- Robôs rastejantes.
- Espaçonaves robóticas.
- Etc.

Roda Padrão Ideal:



Pressupostos:

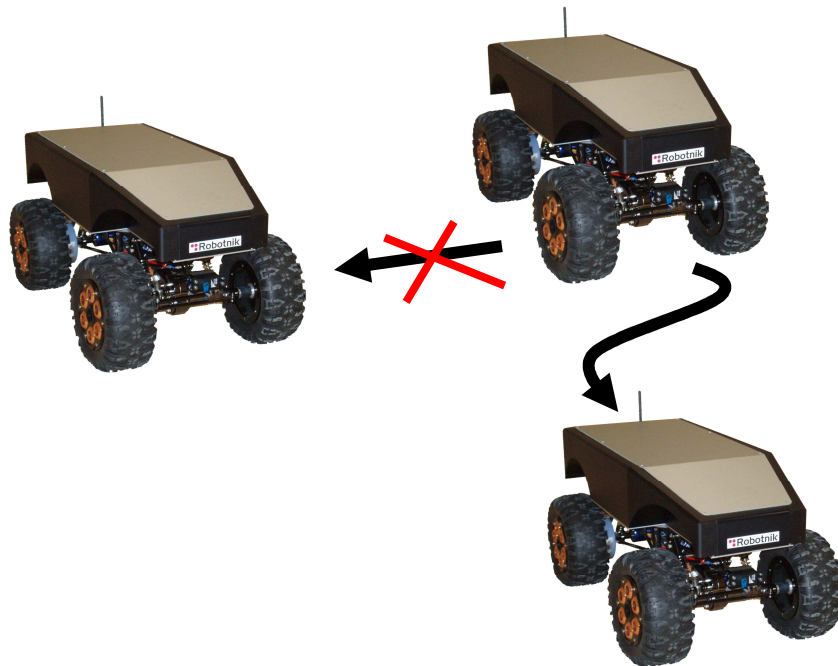
- Não ocorre derrapagem lateral (sem escorregamento na direção perpendicular à roda).
- Ponto de contato pontual com o chão.
- Não ocorre escorregamento do ponto de contato em relação ao chão (rolamento ideal).

⇒ A roda pode movimentar-se na direção em que está orientada.





⇒ A roda pode girar em torno de um eixo vertical passando pelo ponto de contato.


Restrição Não Holonômica:

- Devida à restrição no deslocamento lateral das rodas.
- Restrição nas velocidades do robô.
- O robô só pode se deslocar na direção em que está orientado.

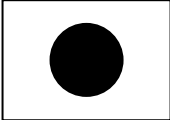


Tipos Básicos de Rodas:

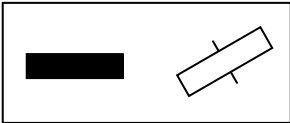
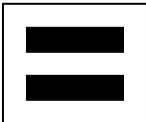
Roda Padrão	2 Graus de Liberdade
	Rotação em torno do eixo (motorizado ou não) e rotação em torno do ponto de contato.
Roda Castor	2 Graus de Liberdade
	Rotação em torno do eixo da roda e em torno do eixo vertical excêntrico da junta de direção.
Roda Suíça (onidirecional)	3 Graus de Liberdade
  <div style="display: flex; justify-content: space-around; width: 100%;"> 90° 45° </div>	Rotação em torno do eixo da roda (motorizado ou não), em torno dos roletes e em torno do ponto de contato.

Roda Esférica	3 Graus de Liberdade
	Rotação em torno dos eixos dos eixos x e y e em torno do ponto de contato.



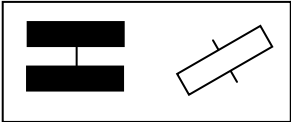
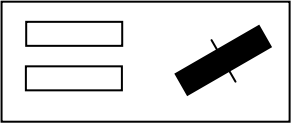
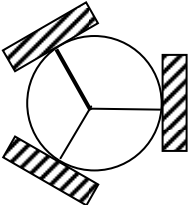
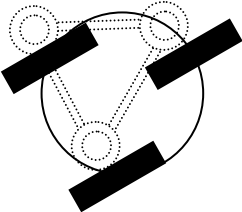
Configurações de Robôs com Rodas:

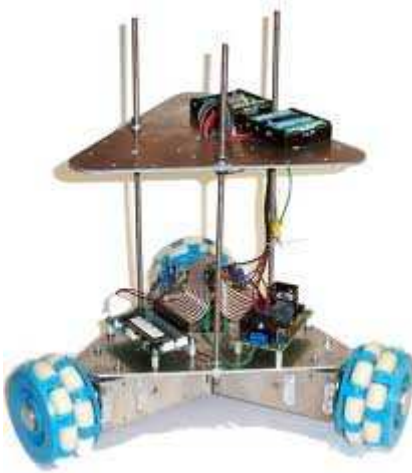
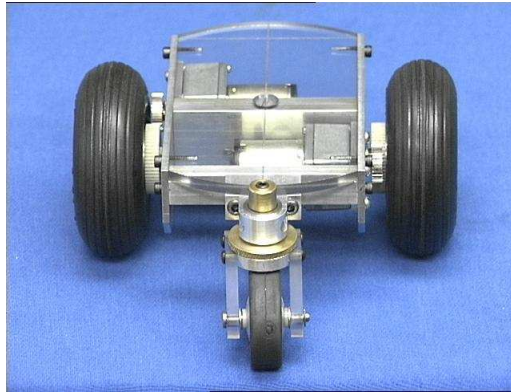
1 roda	Configuração
	Uma roda tratora esférica.

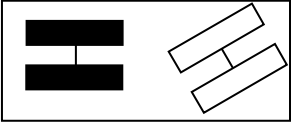
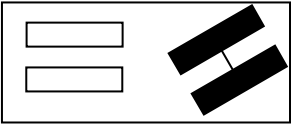
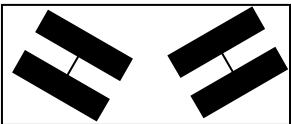
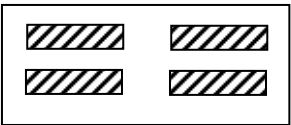
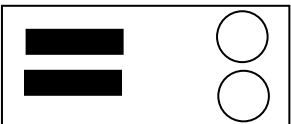
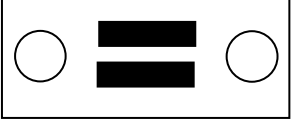
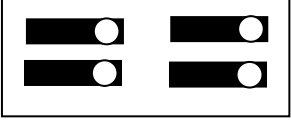


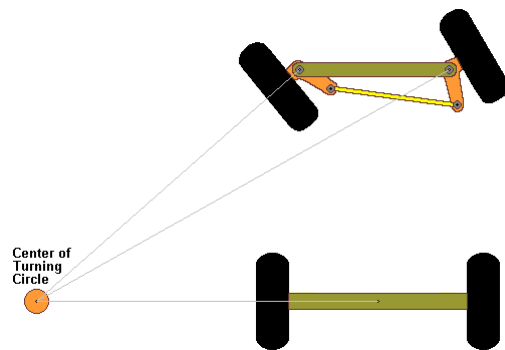
2 rodas	Configuração
	Uma roda dianteira direcional e uma roda tratora tratora. Exemplo: bicicleta.
	Duas rodas tratoras com acionamento diferencial, centro de massa centrado sob ou sobre o eixo.



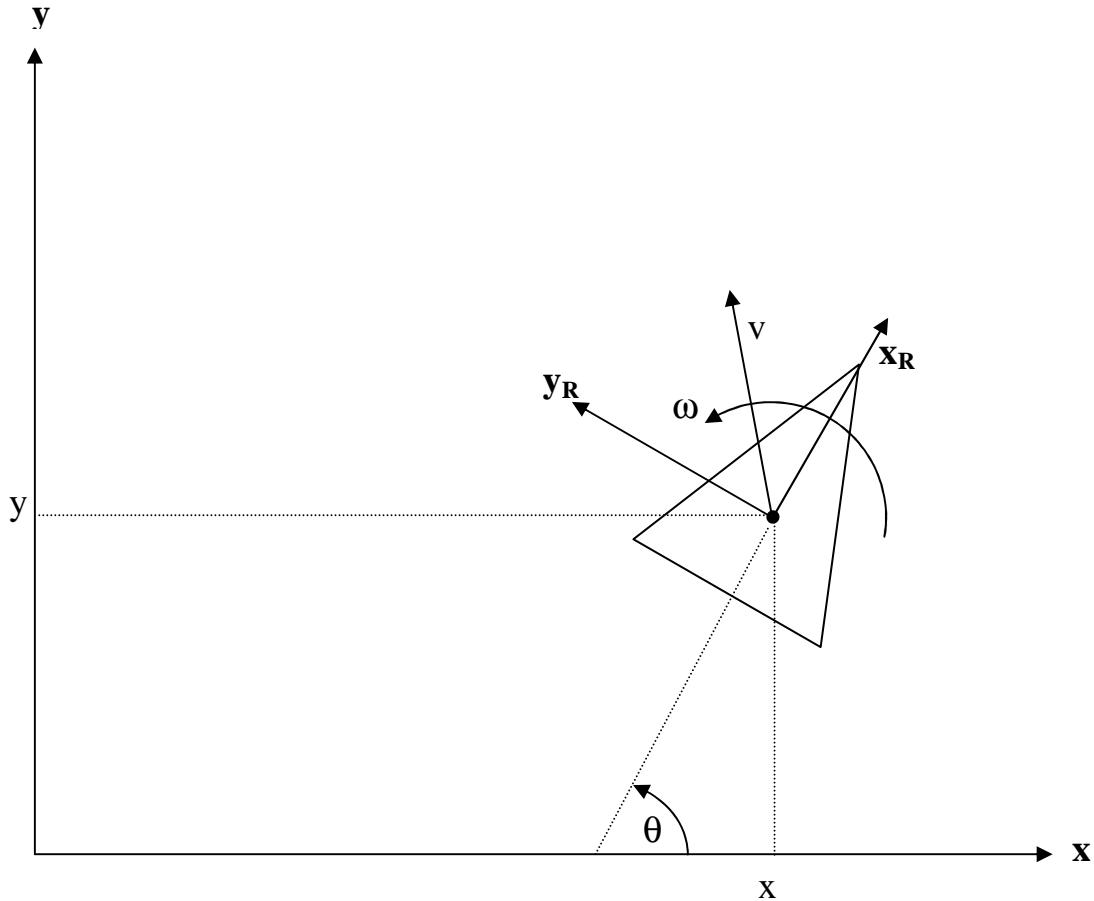
3 rodas	Configuração
	<p>Duas rodas tratoras com acionamento diferencial centradas, com um terceiro ponto de apoio.</p>
	<p>Duas rodas tratoras com acionamento diferencial (traseiras ou frontais), com uma terceira roda onidirecional (suíça, castor ou esférica), frontal ou traseira, não motorizada.</p>
	<p>Uma roda dianteira direcional sem tração e duas rodas traseiras tratoras conectadas (diferenciais).</p>
	<p>Duas rodas traseiras sem tração e uma roda dianteira tratora direcional.</p>
	<p>Três rodas suíças tratoras arranjadas a 120°. Movimentos onidirecionais.</p>
	<p>“Synchro drive”. Três rodas tratoras e direcionais sincronizadas. A orientação não é controlada.</p>



4 rodas	Configuração
	<p>Duas rodas tratoras traseiras e duas rodas dianteiras direcionais. O ângulo de direção deve ser diferente nas duas rodas para evitar derrapagem e deslizamento. (Direção “Ackerman”).</p>
	<p>Duas rodas dianteiras tratoras e direcionais e duas rodas traseiras livres. O ângulo de direção deve ser diferente nas duas rodas para evitar derrapagem e deslizamento.</p>
	<p>Quatro rodas tratoras e direcionais.</p>
	<p>Quatro rodas suíças onidirecionais.</p>
	<p>Duas rodas traseiras tratoras com acionamento diferencial e duas rodas dianteiras onidirecionais de apoio.</p>
	<p>Duas rodas centrais tratoras com acionamento diferencial e dois apoios adicionais.</p>
	<p>Quatro rodas castor tratoras e direcionais.</p>



Relação de velocidades no referencial fixo no robô e no referencial inercial global:



A localização do robô é definida em um referencial inercial global pelo Vetor de Variáveis de Configuração, ou, simplesmente, configuração $\mathbf{q} = [x \ y \ \theta]^T$.

A velocidade em espaço de configuração $\mathbf{q}' = [x' \ y' \ \theta']^T$, dada pela derivada temporal do vetor \mathbf{q} , expressa no referencial global, relaciona-se com a sua representação ${}^R\mathbf{q}' = [{}^R x' \ {}^R y' \ \theta']^T$ no referencial móvel, fixo no robô, através da transformação:

$$\mathbf{q}' = {}^I\mathbf{R}_R \cdot {}^R\mathbf{q}'$$

onde:

$${}^I\mathbf{R}_R = {}^I\mathbf{R}_R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De tal forma que:

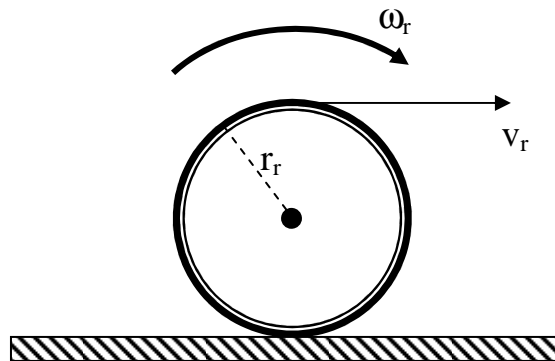
$${}^R\mathbf{q}' = {}^R\mathbf{R}_I \cdot \mathbf{q}' = ({}^I\mathbf{R}_R)^{-1} \cdot \mathbf{q}'$$

onde,

$${}^R\mathbf{R}_I = ({}^I\mathbf{R}_R)^{-1} = ({}^I\mathbf{R}_R)^T = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Restrições Cinemáticas nas Rodas:

Dada uma roda de raio r girando a uma velocidade angular ω_r em torno do seu eixo, um ponto na sua borda se movimenta com uma velocidade em relação ao eixo igual a $v_r = \omega_r \cdot r_r$.



Pressupostos:

- O plano da roda permanece sempre na vertical.
- O contato com o chão é pontual (um único ponto de contato).
- Não há deslizamento do ponto de contato com o chão: a roda efetua rolamento puro em torno do seu eixo e/ou rotação em torno do seu eixo vertical, através do ponto de contato.

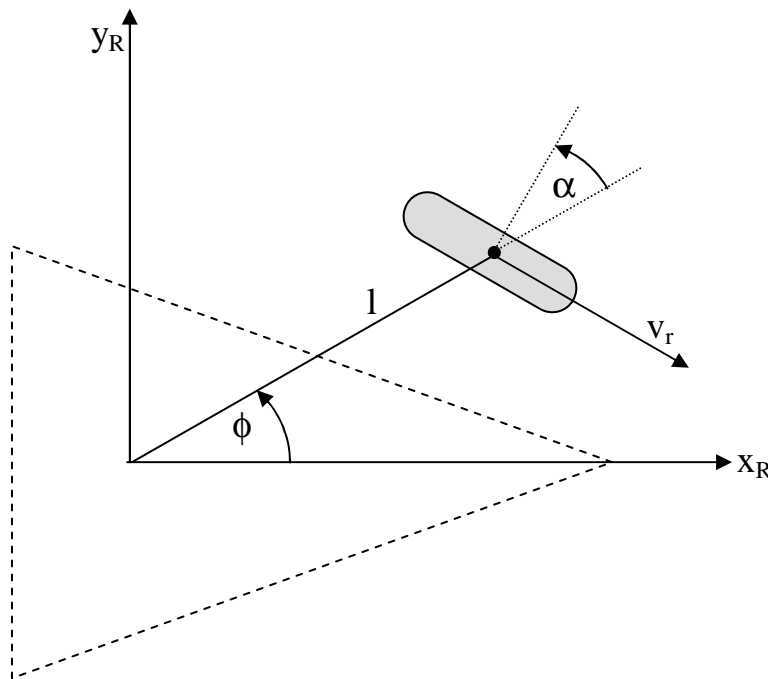
Parâmetros e Restrições da Roda Padrão Fixa:

Dada uma roda padrão fixa de raio r_r , define-se a sua localização em relação ao chassi do robô em coordenadas polares:

l = distância do eixo de giro vertical passando pelo ponto de apoio da roda em relação à origem do referencial fixo no robô.

ϕ = ângulo de azimuth do centro da roda em relação ao referencial fixo no robô.

α = ângulo de orientação (fixo) entre o eixo da roda e o eixo no qual é medida a distância l



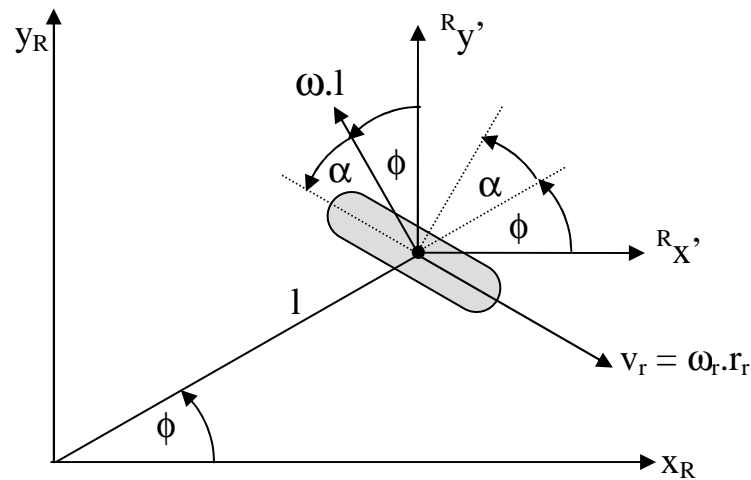
A velocidade do robô no próprio referencial fixo no seu chassi, possui componentes ${}^R\mathbf{q}' = [{}^R x', {}^R y', \theta']$, onde $\theta' = \omega$, de tal forma que, como já visto,

$$[{}^R x', {}^R y', \theta']^T = {}^R\mathbf{R}_I(\theta) \cdot \mathbf{q}' = ({}^I\mathbf{R}_R(\theta))^T \cdot \mathbf{q}'$$

A roda padrão fixa ideal possui as seguintes restrições:

- i. Restrição de derrapagem lateral: todo movimento está restrito ao plano da roda. A roda não pode movimentar-se na direção do seu eixo
- ii. Restrição de rolamento puro (sem escorregamento): todo movimento no plano da roda deve ser acompanhado por uma rotação correspondente da roda.

Desta forma, deve-se analisar a contribuição de três componentes na velocidade linear da roda: as projeções das componentes x_R' e y_R' ao longo do eixo da roda e da sua direção normal, assim como a componente de velocidade linear do ponto de apoio devida à distância l deste à origem referencial do robô e à velocidade angular do mesmo, $\omega.l$, horizontal, na direção perpendicular ao eixo z_R . A velocidade linear da roda na direção do seu plano de movimento é $v_r = \omega_r.r$.



- i. Restrição de derrapagem lateral:

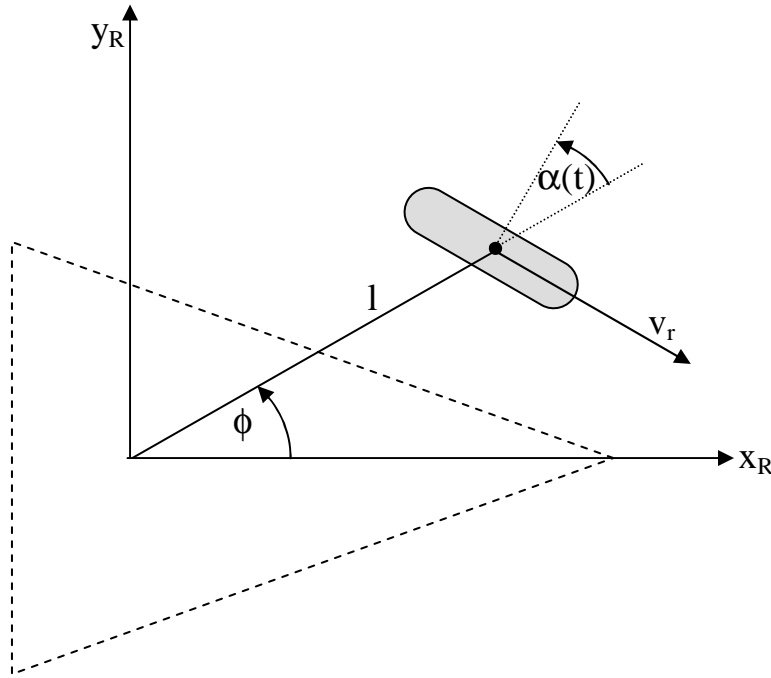
$$[\cos(\phi+\alpha) \quad \sin(\phi+\alpha) \quad l.\sin(\alpha)].({}^I\mathbf{R}_R(\theta))^T.\mathbf{q}' = 0$$

- ii. Restrição de rolamento:

$$[\sin(\phi+\alpha) \quad -\cos(\phi+\alpha) \quad -l.\cos(\alpha)].({}^I\mathbf{R}_R(\theta))^T.\mathbf{q}' - \omega_r.r_r = 0$$

Parâmetros e Restrições da Roda Padrão Direcional:

A roda padrão direcional assemelha-se à roda padrão fixa, mas apresenta um grau de liberdade adicional. O seu ângulo de direção, não é fixo, mas pode-ser controlado, de modo que pode variar ao longo do tempo. Assim, $\alpha = \alpha(t)$.



Desta forma, as restrições cinemáticas da roda padrão direcional são idênticos às restrições da roda padrão fixa, mas a orientação da roda não é um valor fixo α , mas sim variante no tempo $\alpha(t)$.

i. Restrição de derrapagem lateral:

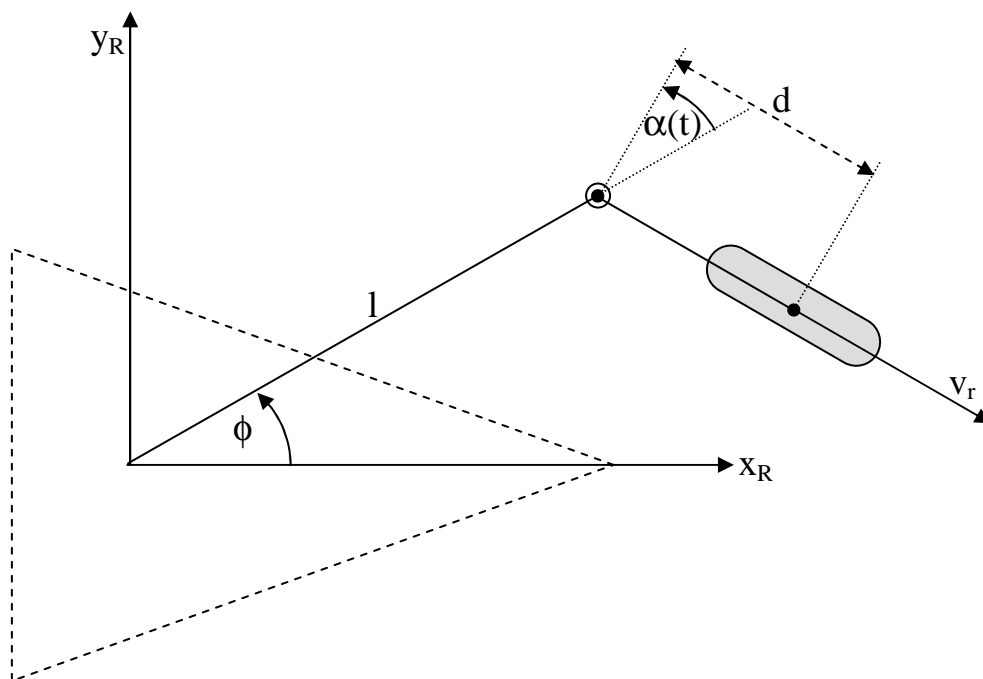
$$[\cos(\phi+\alpha(t)) \quad \sin(\phi+\alpha(t)) \quad l.\sin(\alpha(t))].({}^I\mathbf{R}_R(\theta))^T.\mathbf{q}' = 0$$

ii. Restrição de rolamento:

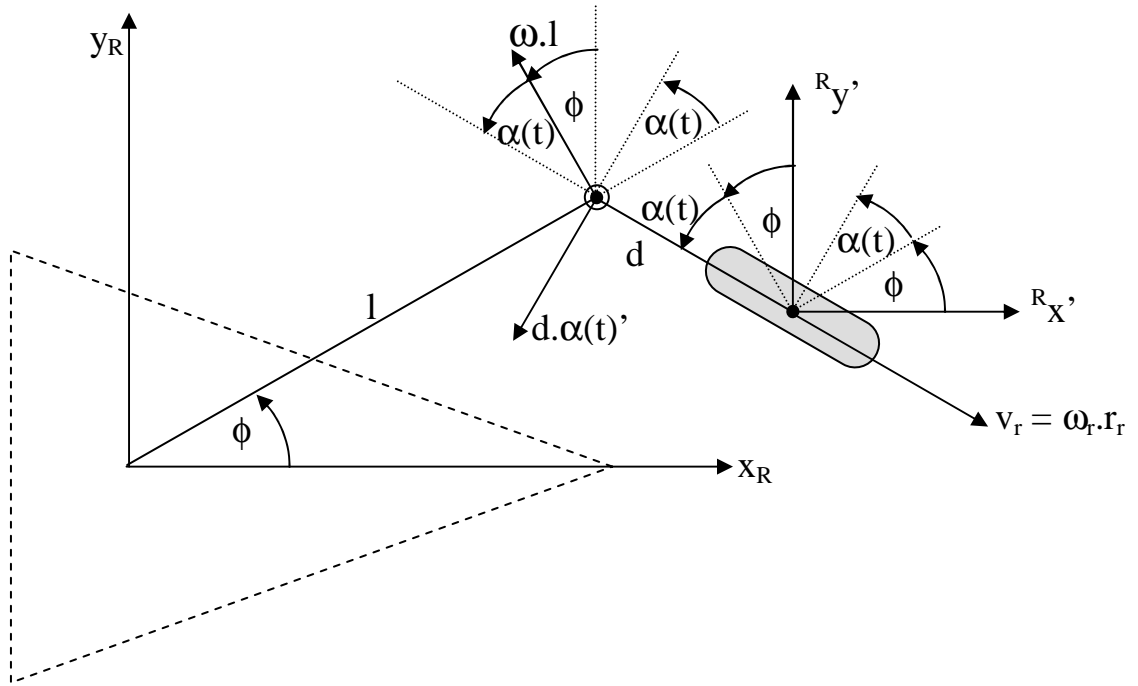
$$[\sin(\phi+\alpha(t)) \quad -\cos(\phi+\alpha(t)) \quad -l.\cos(\alpha(t))].({}^I\mathbf{R}_R(\theta))^T.\mathbf{q}' - \omega_r.r_r = 0$$

Parâmetros e Restrições da Roda Castor:

A roda castor possui um parâmetro a mais do que a roda padrão direcional. A roda se conecta ao chassi através de uma barra rígida horizontal de comprimento d . Assim, existe um deslocamento horizontal d entre o eixo vertical que passa pelo ponto de contato e o eixo vertical de rotação no qual a barra se conecta ao chassi.



O deslocamento d do ponto de apoio em relação ao ponto de rotação no chassi implica que quando a roda muda de direção, existe uma velocidade linear relativa entre estes dois pontos correspondente à velocidade angular resultante da variação do ângulo de direção $\alpha(t)$, (igual à sua derivada temporal $\alpha(t)'$), e do raio de giro correspondente ao deslocamento d . Ou seja, uma componente de velocidade linear $d \cdot \alpha(t)'$ na direção do eixo de giro da roda precisa ser compensada para evitar derrapagem lateral nessa direção perpendicular ao plano de movimento da roda.



Assim, a restrição de rolamento da roda castor é idêntica à restrição correspondente da roda padrão, mas a restrição de derrapagem lateral inclui um termo adicional de velocidade $d.\alpha(t)'$ devido ao direcionamento da roda e ao afastamento entre os eixos verticais.

i. Restrição de derrapagem lateral:

$$[\cos(\phi+\alpha) \quad \sin(\phi+\alpha) \quad l.\sin(\alpha)].({}^I\mathbf{R}_R(\theta))^T.\mathbf{q}' + d.\alpha(t)' = 0$$

ii. Restrição de rolamento:

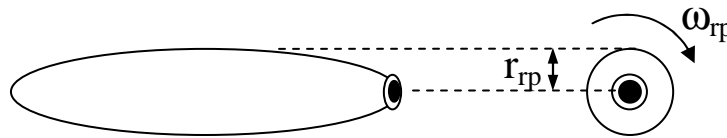
$$[\sin(\phi+\alpha) \quad -\cos(\phi+\alpha) \quad -l.\cos(\alpha)].({}^I\mathbf{R}_R(\theta))^T.\mathbf{q}' - \omega_r.r_r = 0$$

Em uma roda padrão direcional, o direcionamento da roda não altera a posição do chassi do robô, uma vez que o eixo de giro vertical em relação ao chassi e o eixo vertical no ponto de contato coincidem. Por outro lado, em uma roda castor, o deslocamento entre estes dois eixos resulta em que um direcionamento da roda implica que o chassi deve deslocar-se, uma vez que o ponto de contato permanece fixo para satisfazer a restrição de derrapagem lateral.

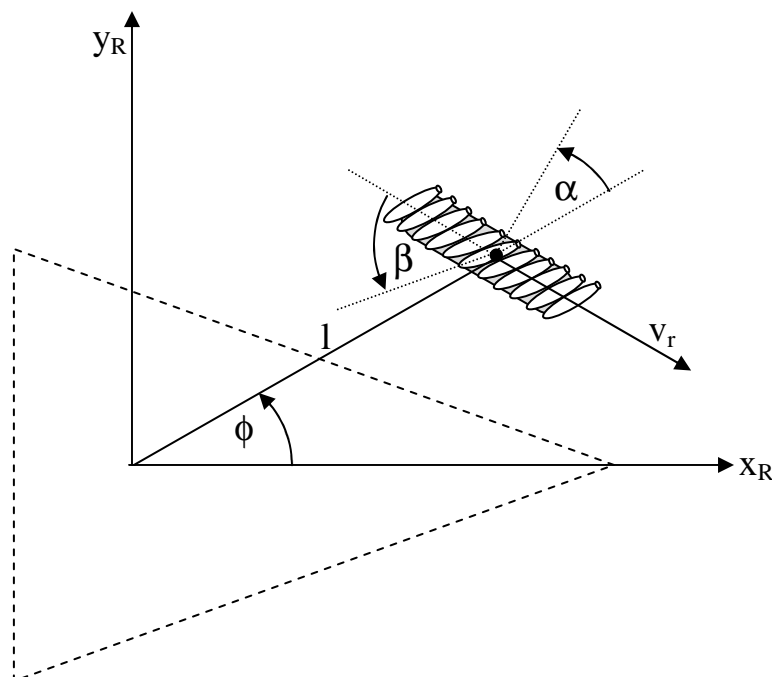
As restrições de derrapagem lateral e de rolamento da roda castor permitem deduzir que, para qualquer movimento do chassi (${}^R x'$, ${}^R y'$), existem valores de giro da roda ω_r e direcionamento da roda $\alpha(t)'$ que satisfazem as equações de restrição. Desta forma, um robô dotado apenas de rodas castor é onidirecional (pode deslocar-se com qualquer velocidade dentro do conjunto de velocidades possíveis).

Parâmetros e Restrições da Roda Suíça:

Uma roda suíça apresenta um grau de liberdade adicional em relação à roda fixa padrão. Este grau de liberdade adicional é resultante de pequenos roletes posicionados na borda externa da roda. Os eixos destes roletes devem ter uma direção diferente do eixo principal da roda, para garantir o grau de liberdade adicional. Este parâmetro adicional é caracterizado pelo ângulo fixo β entre o eixo do rolete e o plano da roda. Cada rolete funciona como uma roda pequena, com raio r_{rp} , girando a uma velocidade ω_{rp} .



Como o eixo principal e o eixo do rolete não são paralelos, a roda pode se movimentar na direção do seu plano de movimento ou na direção de rolamento do rolete em contato com o chão. Assim, qualquer direção de movimento é possível combinando estes dois graus de liberdade. A roda suíça é, portanto, onidirecional. Na roda suíça a 90° (eixo principal e eixo de rolete perpendiculares, ou $\beta = 0^\circ$), os movimentos em relação aos dois eixos são desacoplados.



As restrições cinemáticas da roda suíça são determinadas pelo rolete em contato com o chão, que se comporta como uma roda padrão fixa. Na sua direção de rolamento, o movimento é livre. Na direção do seu eixo de rolamento, o movimento sem derrapagem somente é possível através de uma rotação em torno do eixo principal da roda. Assim, a restrição de rolamento é similar à de uma roda fixa padrão, mas adicionando o ângulo β , de modo que esta restrição aconteça na direção de derrapagem do rolete. Na direção perpendicular a esta, o movimento é livre, graças à velocidade de rotação do rolete ω_{rp} .

i. Restrição de derrapagem lateral:

$$[\cos(\phi+\alpha+\beta) \quad \sin(\phi+\alpha+\beta) \quad 1.\sin(\alpha+\beta)].({}^I\mathbf{R}_R(\theta))^T.\mathbf{q}' + \\ - \omega_r.r_r.\sin(\beta) - r_{rp}.\omega_{rp} = 0$$

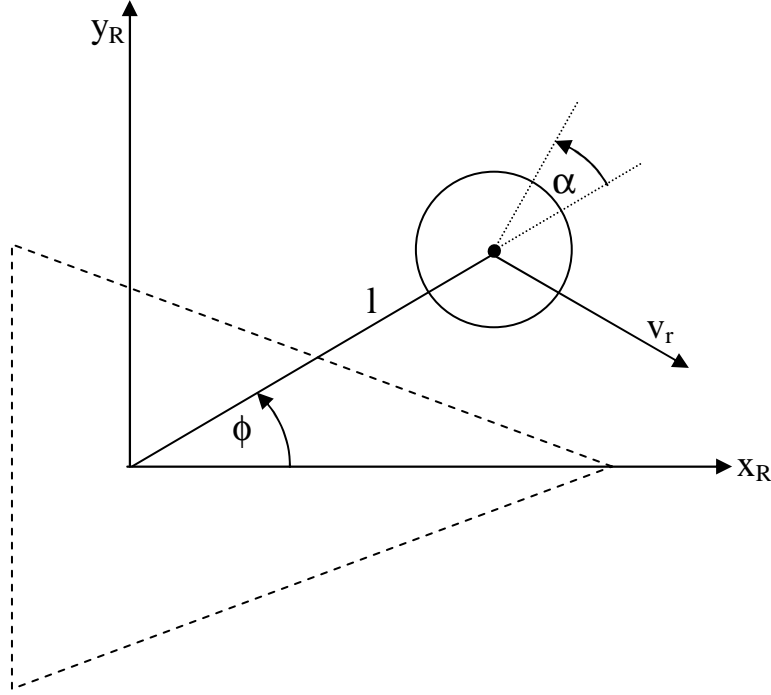
ii. Restrição de rolamento:

$$[\sin(\phi+\alpha+\beta) \quad -\cos(\phi+\alpha+\beta) \quad -1.\cos(\alpha+\beta)].({}^I\mathbf{R}_R(\theta))^T.\mathbf{q}' + \\ - \omega_r.r_r.\cos(\beta) = 0$$

Assim, dependendo do ângulo dos roletes (parâmetro β), o comportamento da roda varia. Para $\beta = 0^\circ$ (roda suíça com roletes a 90°), os movimentos ao longo do eixo principal e ao longo do eixo do rolete são totalmente desacoplados. Para $\beta = 90^\circ$, caso hipotético em que os dois eixos estão alinhados, a roda suíça se comporta como uma roda padrão fixa normal e os roletes não garantem um grau de liberdade adicional independente, não fazendo sentido a sua utilização.

Parâmetros e Restrições da Roda Esférica:

A roda esférica não possui direção preferencial de rolamento, de modo que é onidirecional, não apresentando restrições de derrapagem lateral ou de rolamento.



As equações de restrições são matematicamente idênticas à de uma roda padrão fixa, porém a sua interpretação é diferente.

i. Restrição de derrapagem lateral:

$$[\cos(\phi+\alpha) \quad \sin(\phi+\alpha) \quad 1.\sin(\alpha)].({}^I\mathbf{R}_R(\theta))^T.\mathbf{q}' = 0$$

ii. Restrição de rolamento:

$$[\sin(\phi+\alpha) \quad -\cos(\phi+\alpha) \quad -1.\cos(\alpha)].({}^I\mathbf{R}_R(\theta))^T.\mathbf{q}' - \omega_r.r_r = 0$$

Neste caso, o parâmetro α é livre. Assim, como a roda esférica pode rolar em qualquer direção, na direção em que estiver se movimentando instantaneamente, a restrição de rolamento é satisfeita. Na direção perpendicular ao movimento, por definição, não existe rotação e a restrição de derrapagem lateral é garantida pelo valor instantâneo de α .

Restrições Cinemáticas de um Robô:

Cada roda de um robô móvel impõe zero ou mais restrições ao movimento do seu chassi. Dos cinco tipos de rodas analisadas (roda padrão fixa, roda padrão direcional, roda castor, roda suíça e roda esférica), apenas a roda padrão fixa e a roda padrão direcional impõem restrições ao movimento do chassi. As outras três permitem movimentos onidirecionais do chassi.

Dado um robô com N rodas, tal que $N = N_f + N_d$, onde N_f é o número de rodas padrão fixas e N_d é o número de rodas padrão direcionais, denota-se α_f os ângulos de orientação das N_f rodas fixas, $\omega_{rf}(t)$ as velocidades de giro dessas mesmas rodas, $\alpha_d(t)$ os ângulos de orientação variável das N_d rodas direcionais e $\omega_{rd}(t)$ as velocidades de giro dessas mesmas rodas. O vetor $\omega_r(t)$ incorpora as velocidades de giro das rodas fixas e direcionais:

$$\omega_r(t) = \begin{bmatrix} \omega_{rf}(t) \\ \omega_{rd}(t) \end{bmatrix}$$

Agrupando as restrições de rolamento de cada roda, estas podem ser expressas matricialmente como:

$$J_q(\alpha_d) \cdot ({}^I R_R(\theta))^T \cdot q' - J_\omega \cdot \omega_r = 0$$

onde cada linha da equação matricial representa a restrição de rolamento de uma roda. Esta expressão representa as restrições que todas as N rodas padrão devem realizar um giro apropriado em torno do seu eixo, de acordo com seus movimentos ao longo dos seus planos, de forma que o rolamento sem deslizamento aconteça no ponto de contato com o chão.

J_ω é uma matriz diagonal $N \times N$ constante, cujos elementos são os raios das rodas.

$J_q(\alpha_d)$ é uma matriz $N \times 3$ com as projeções dos movimentos ao longo dos planos das N rodas, onde:

$$\mathbf{J}_q(\boldsymbol{\alpha}_d) = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{qf} \\ \mathbf{J}_{qd}(\boldsymbol{\alpha}_d) \end{bmatrix}$$

sendo \mathbf{J}_{qf} a matriz $N_f \times 3$ constante com as projeções dos movimentos ao longo dos planos das N_f rodas padrão fixas e $\mathbf{J}_{qd}(\boldsymbol{\alpha}_d)$ a matriz $N_d \times 3$ com as projeções dos movimentos ao longo dos planos das N_d rodas padrão direcionais.

Da mesma forma, agrupando as restrições de derrapagem lateral de cada roda, estas podem ser expressas matricialmente como:

$$\mathbf{C}_q(\boldsymbol{\alpha}_d) \cdot (\mathbf{R}_R(\theta))^T \cdot \mathbf{q}' = \mathbf{0}$$

onde a matriz $\mathbf{C}_q(\boldsymbol{\alpha}_d)$ $N \times 3$ é particionada como:

$$\mathbf{C}_q(\boldsymbol{\alpha}_d) = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{qf} \\ \mathbf{C}_{qd}(\boldsymbol{\alpha}_d) \end{bmatrix}$$

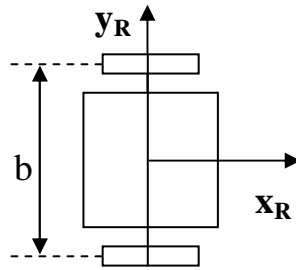
sendo \mathbf{C}_{qf} a matriz $N_f \times 3$ constante com as projeções dos movimentos ao longo dos eixos das N_f rodas padrão fixas e $\mathbf{C}_{qd}(\boldsymbol{\alpha}_d)$ a matriz $N_d \times 3$ com as projeções dos movimentos ao longo dos eixos das N_d rodas padrão direcionais.

As restrições de rolamento e as restrições de derrapagem lateral podem ser agrupadas em uma única expressão matricial de restrições:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{J}_q(\boldsymbol{\alpha}_d) \\ \mathbf{C}_q(\boldsymbol{\alpha}_d) \end{bmatrix} \cdot (\mathbf{R}_R(\theta))^T \cdot \mathbf{q}' = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_\omega \cdot \boldsymbol{\omega}_r \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Exemplo:

Considere um robô móvel com acionamento diferencial, com duas rodas padrão fixas de raio r_D e r_E girando a velocidades ω_D e ω_E , respectivamente, (acionadas independentemente). O eixo de ambas rodas coincide com o eixo y_R e os seus planos de movimento são paralelos, afastados entre si de uma distância b , simetricamente em relação à origem do referencial fixo no robô. A configuração do robô em referencial inercial global é especificada pela sua posição e orientação no plano como $q = [x \ y \ \theta]^T$. A velocidade linear do robô é v e a velocidade angular é ω . Pela restrição de derrapagem lateral a velocidade linear do robô deve estar ocorrendo na direção do plano de movimento das rodas do robô (direção x_R , no referencial fixo no robô).



Assim, para a roda direita e esquerda obtém-se, respectivamente, os seguintes parâmetros:

$$\phi_D = -90^\circ \quad \alpha_D = 180^\circ \quad l_D = b/2$$

$$\phi_E = 90^\circ \quad \alpha_E = 0^\circ \quad l_E = b/2$$

Substituindo estes parâmetros na restrição de derrapagem lateral, resulta em:

$$[\cos(-90^\circ+180^\circ) \ \sin(-90^\circ+180^\circ) \ (b/2).\sin(180^\circ)].({}^I\mathbf{R}_R(\theta))^T.\mathbf{q}' = 0$$

$$[\cos(90^\circ+0^\circ) \ \sin(90^\circ+0^\circ) \ (b/2).\sin(0^\circ)].({}^I\mathbf{R}_R(\theta))^T.\mathbf{q}' = 0$$

Verifica-se que as equações de restrição de derrapagem lateral são idênticas para ambas as rodas (uma vez que os seus eixos são colineares e os planos de movimento das rodas são paralelos e igualmente afastados da origem), assim sendo, reduzidas a uma única expressão:

$$[0 \quad 1 \quad 0].({}^I\mathbf{R}_R(\theta))^T.\mathbf{q}' = 0$$

Substituindo os parâmetros das rodas direita e esquerda na expressão de restrição de rolamento, resulta, respectivamente, em:

$$[\sin(-90^\circ+180^\circ) \quad -\cos(-90^\circ+180^\circ) \quad -(b/2).\cos(180^\circ)].({}^I\mathbf{R}_R(\theta))^T.\mathbf{q}' - \omega_D.r_D = 0$$

$$[\sin(90^\circ+0^\circ) \quad -\cos(90^\circ+0^\circ) \quad -(b/2).\cos(0)].({}^I\mathbf{R}_R(\theta))^T.\mathbf{q}' - \omega_E.r_E = 0$$

Assim:

$$[1 \quad 0 \quad (b/2)].({}^I\mathbf{R}_R(\theta))^T.\mathbf{q}' = \omega_D.r_D$$

$$[1 \quad 0 \quad -(b/2)].({}^I\mathbf{R}_R(\theta))^T.\mathbf{q}' = \omega_E.r_E$$

Agrupando as restrições de rolamento e derrapagem lateral, obtém-se a expressão de restrições cinemáticas do robô móvel com acionamento diferencial:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & b/2 \\ 1 & 0 & -b/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.({}^I\mathbf{R}_R(\theta))^T.\mathbf{q}' = \begin{bmatrix} r_D & 0 \\ 0 & r_E \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} \omega_D \\ \omega_E \end{bmatrix}$$

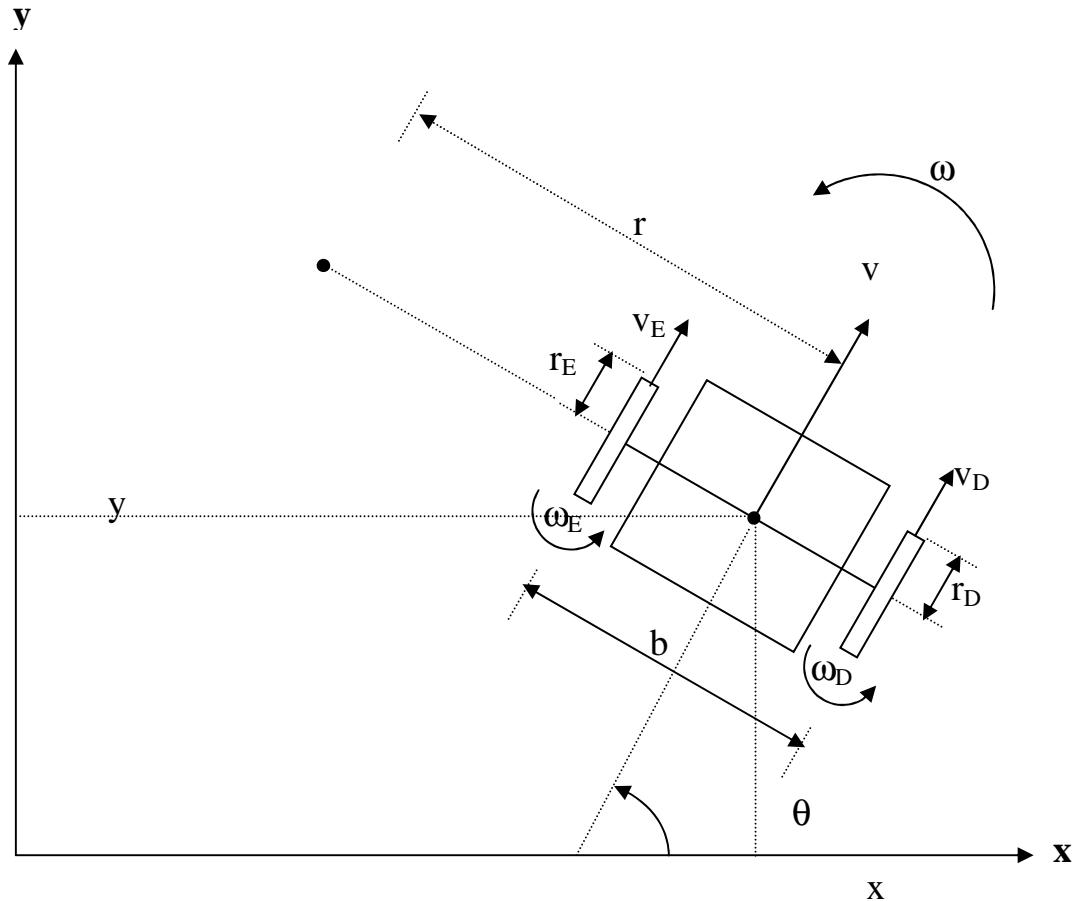
Onde:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & b/2 \\ 1 & 0 & -b/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/b & -1/b & 0 \end{bmatrix}$$

Assim, multiplicando à esquerda os dois lados da equação por esta inversa e pela inversa de $({}^I\mathbf{R}_R(\theta))^T$, obtém-se a função de cinemática direta do robô móvel com acionamento diferencial:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}' \\ \dot{y}' \\ \dot{\theta}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta(r_D\omega_D + r_E\omega_E)/2 \\ \sin\theta(r_D\omega_D + r_E\omega_E)/2 \\ (r_D\omega_D - r_E\omega_E)/b \end{bmatrix}$$

MODELO CINEMÁTICO DE UM ROBÔ MÓVEL COM ACIONAMENTO DIFERENCIAL



(x,y) = Posição do referencial fixo no robô em relação ao referencial fixo no espaço de trabalho.

θ = Ângulo de orientação do robô em relação ao referencial fixo no espaço de trabalho.

b = Comprimento do eixo.

r = Raio de giro do robô.

r_D (r_E) = Raio da roda direita (esquerda)

ω = Velocidade angular do robô.

ω_D (ω_E) = Velocidade angular da roda direita (esquerda).

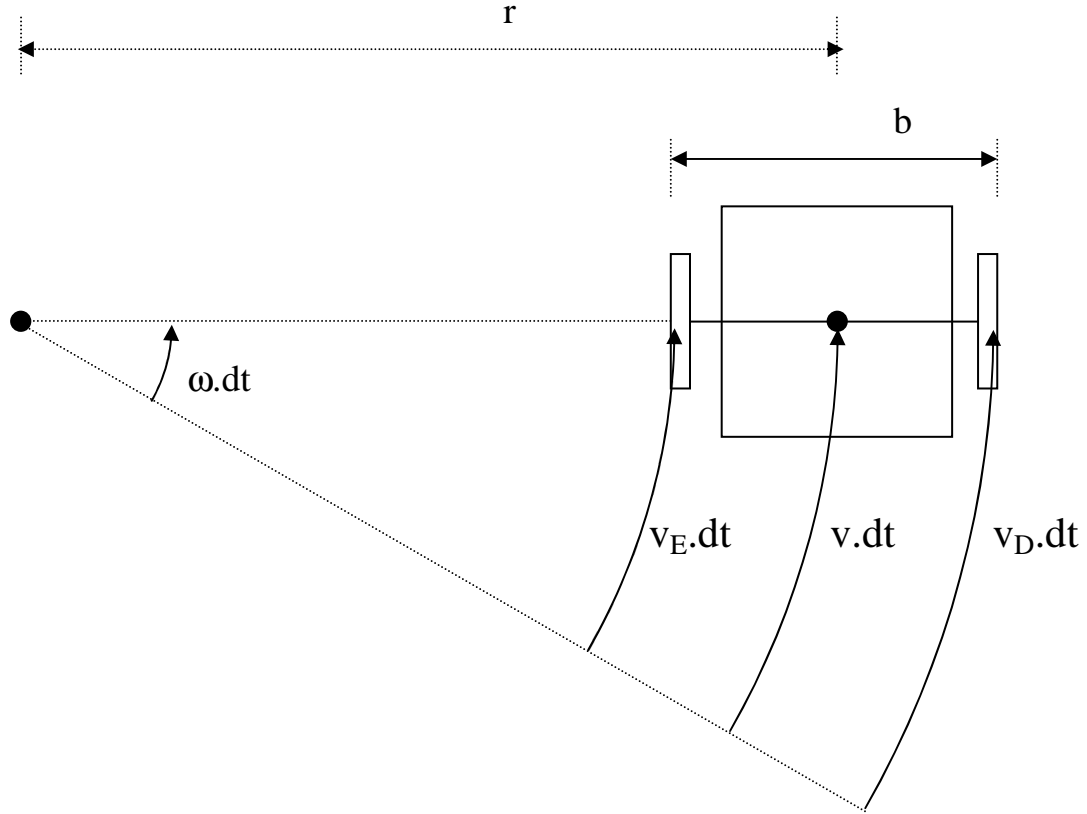
v = Velocidade linear do robô $\Rightarrow v = \omega \cdot r$

v_D (v_E) = Velocidade linear da borda da roda direita (esquerda).

$$\Rightarrow v_D = \omega_D \cdot r_D$$

$$\Rightarrow v_E = \omega_E \cdot r_E$$

Para movimentos infinitesimais:



$$\begin{cases} v_D \cdot dt = \omega(r+b/2)dt \\ v_E \cdot dt = \omega(r-b/2)dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_D + v_E = \omega_D \cdot r_D + \omega_E \cdot r_E = 2 \cdot \omega \cdot r = 2 \cdot v \\ v_D - v_E = \omega_D \cdot r_D - \omega_E \cdot r_E = \omega \cdot b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (r_D/2) & (r_E/2) \\ (r_D/b) & -(r_E/b) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_D \\ \omega_E \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{V} = {}^V\mathbf{T}_W \cdot \mathbf{W}$$

$$\text{onde: } \mathbf{V} = [v \quad \omega]^T \quad \mathbf{W} = [\omega_D \quad \omega_E]^T \quad {}^V\mathbf{T}_W = \begin{bmatrix} (r_D/2) & (r_E/2) \\ (r_D/b) & -(r_E/b) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{W} = ({}^V\mathbf{T}_W)^{-1} \cdot \mathbf{V} = {}^W\mathbf{T}_V \cdot \mathbf{V} \quad \text{onde, } {}^W\mathbf{T}_V = ({}^V\mathbf{T}_W)^{-1}$$

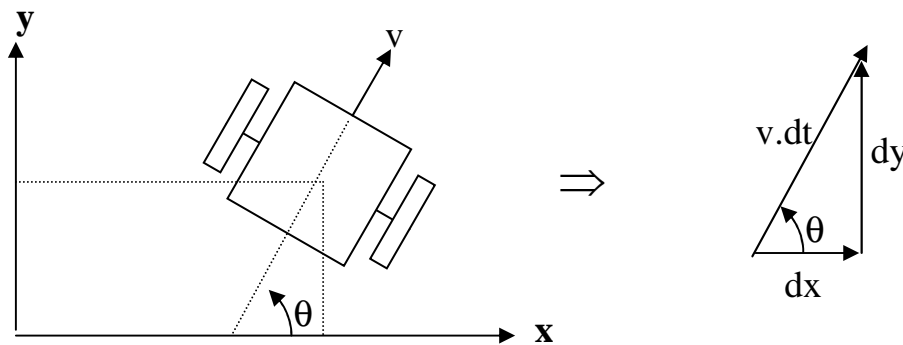
Relação entre velocidades das rodas (ω_E/ω_D) para mover-se com raio de giro r :

$$(2.\omega.r)/(\omega.b) = (2.r/b) = (\omega_D.r_D + \omega_E.r_E)/(\omega_D.r_D - \omega_E.r_E)$$

$$\Rightarrow (\omega_E/\omega_D) = [(r-b/2).r_D]/[(r+b/2).r_E]$$

• **Restrições não holonômicas:**

- Restrições não holonômicas atuam nas velocidades do robô.
- Devido ao atrito das rodas, o robô não pode se deslocar lateralmente (na direção do eixo).
- A velocidade linear sempre aponta na direção definida pela orientação θ do robô.



Para deslocamentos infinitesimais:

$$dx = v.dt.\cos\theta \Rightarrow dx/dt = x' = v.\cos\theta$$

$$dy = v.dt.\sin\theta \Rightarrow dy/dt = y' = v.\sin\theta$$

$$d\theta = \omega.dt \Rightarrow d\theta/dt = \theta' = \omega$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (dy/dx) = \tan(\theta) = \sin\theta/\cos\theta & \Rightarrow dy.\cos\theta - dx.\sin\theta = 0 \\ v.dt = dx.\cos\theta + dy.\sin\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ 0 \end{bmatrix}$$

- **Modelo cinemático:**

Definindo o Vetor de Variáveis de Configuração, ou, simplesmente, configuração $\mathbf{q} = [x \ y \ \theta]^T$, lembrando que:

$$x' = v \cdot \cos\theta; \quad y' = v \cdot \sin\theta; \quad \theta' = \omega;$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ \theta' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} \quad \text{onde,} \quad \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = {}^qT_V$$

$$\Rightarrow \mathbf{q}' = {}^qT_V \cdot \mathbf{V}$$

$$\Rightarrow \mathbf{q}' = {}^qT_V \cdot {}^V T_W \cdot \mathbf{W}$$

- **Propriedades da matriz qT_V :**

$$\text{i)} \quad ({}^qT_V)^T \cdot ({}^qT_V) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow ({}^qT_V)^T \cdot \mathbf{q}' = ({}^qT_V)^T \cdot ({}^qT_V) \cdot \mathbf{V} = \mathbf{V} \quad \Rightarrow \mathbf{V} = ({}^qT_V)^T \cdot \mathbf{q}'$$

$$\text{ii)} \quad ({}^qT_V) \cdot ({}^qT_V)^T = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow ({}^qT_V) \cdot ({}^qT_V)^T = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta \cdot \sin\theta & 0 \\ \cos\theta \cdot \sin\theta & \sin^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

onde, a matriz $({}^qT_V) \cdot ({}^qT_V)^T$ é singular. Apesar disto,

$$\mathbf{q}' = ({}^qT_V) \cdot ({}^qT_V)^T \cdot \mathbf{q}'$$

visto que, de (i): $({}^qT_V) \cdot ({}^qT_V)^T \cdot \mathbf{q}' = ({}^qT_V) \cdot \mathbf{V} = \mathbf{q}'$

$$\text{iii)} \quad ({}^q\mathbf{T}_V)^T.({}^q\mathbf{T}_V)' = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\sin\theta & 0 \\ \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \theta' = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{q}'' = (\mathbf{q}')' = (({}^q\mathbf{T}_V) \cdot \mathbf{V})' = {}^q\mathbf{T}_V \cdot \mathbf{V}' + ({}^q\mathbf{T}_V)' \cdot \mathbf{V} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ({}^q\mathbf{T}_V)^T \cdot \mathbf{q}'' = ({}^q\mathbf{T}_V)^T \cdot {}^q\mathbf{T}_V \cdot \mathbf{V}'' + ({}^q\mathbf{T}_V)^T \cdot ({}^q\mathbf{T}_V)' \cdot \mathbf{V}$$

$$\Rightarrow ({}^q\mathbf{T}_V)^T \cdot \mathbf{q}'' = \mathbf{V}''$$

$$\text{iv)} \quad ({}^q\mathbf{T}_V).(({}^q\mathbf{T}_V)^T)' = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \theta'$$

$$\Rightarrow ({}^q\mathbf{T}_V).(({}^q\mathbf{T}_V)^T)' = \begin{bmatrix} -\cos\theta.\sin\theta & \cos^2\theta & 0 \\ -\sin^2\theta & \cos\theta.\sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \theta'$$

onde, a matriz $({}^q\mathbf{T}_V).(({}^q\mathbf{T}_V)^T)'$ é singular.

$$\Rightarrow \mathbf{V}' = (({}^q\mathbf{T}_V)^T \cdot \mathbf{q}')' = ({}^q\mathbf{T}_V)^T \cdot \mathbf{q}'' + (({}^q\mathbf{T}_V)^T)' \cdot \mathbf{q}'$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow ({}^q\mathbf{T}_V) \cdot \mathbf{V}' &= ({}^q\mathbf{T}_V).(({}^q\mathbf{T}_V)^T \cdot \mathbf{q}')' \\ &= ({}^q\mathbf{T}_V).({}^q\mathbf{T}_V)^T \cdot \mathbf{q}'' + ({}^q\mathbf{T}_V).(({}^q\mathbf{T}_V)^T)' \cdot \mathbf{q}' \end{aligned}$$

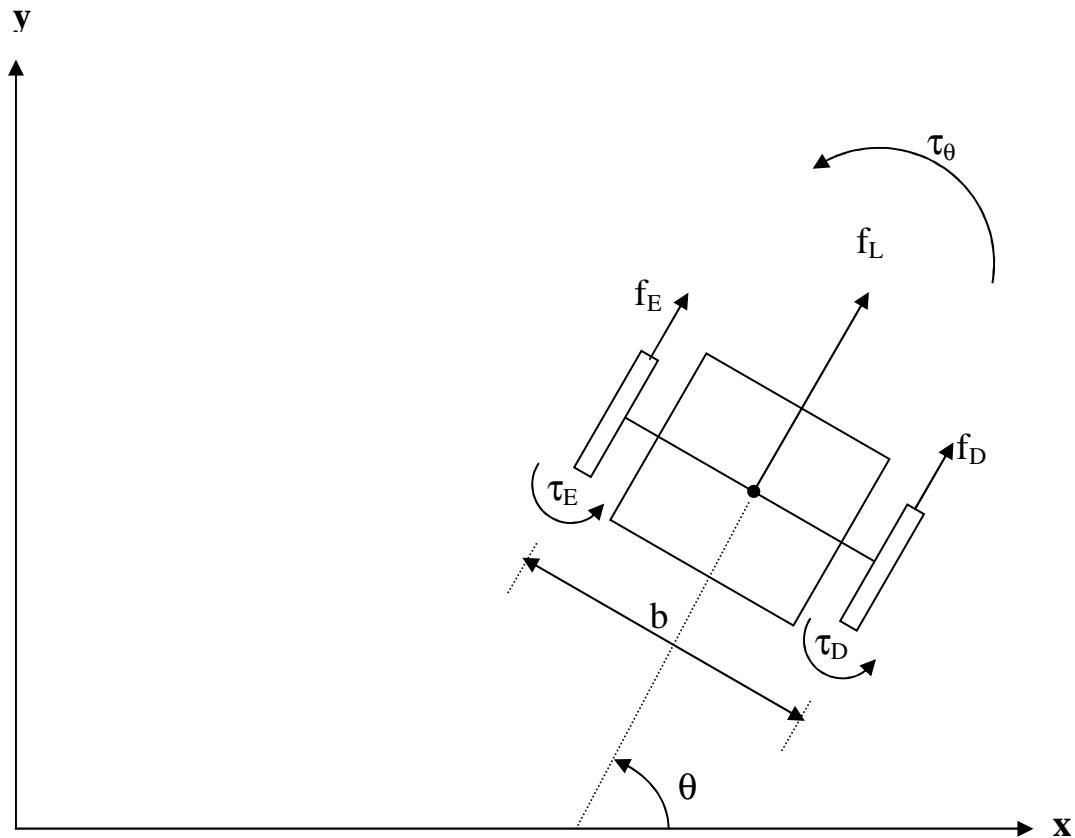
$$\text{Mas, } (({}^q\mathbf{T}_V)^T)' \cdot \mathbf{q}' = \theta' \cdot \begin{bmatrix} -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ \theta' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow ({}^q\mathbf{T}_V) \cdot \mathbf{V}' = ({}^q\mathbf{T}_V).({}^q\mathbf{T}_V)^T \cdot \mathbf{q}''$$

$$\text{multiplicando por } ({}^q\mathbf{T}_V)^T \Rightarrow \mathbf{V}' = ({}^q\mathbf{T}_V)^T \cdot \mathbf{q}''$$

ESFORÇOS MOTORES

- Esforços nas rodas,



$f_L =$ Força resultante no robô.

f_D (f_E) = Força na borda da roda direita (esquerda).

$\tau_\theta =$ Torque resultante no robô.

τ_D (τ_E) = Torque na roda direita (esquerda).

$$\Rightarrow \tau_D = f_D \cdot r_D \quad \Rightarrow f_D = \tau_D / r_D$$

$$\Rightarrow \tau_E = f_E \cdot r_E \quad \Rightarrow f_E = \tau_E / r_E$$

- **Esforços resultantes no robô, $\mathbf{F}_V = [f_L \quad \tau_\theta]^T$:**

$$\begin{cases} f_L = f_D + f_E = (\tau_D/r_D) + (\tau_E/r_E) \\ \tau_\theta = (f_D \cdot b/2) - (f_E \cdot b/2) = (\tau_D \cdot b/2r_D) - (\tau_E \cdot b/2r_E) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} f_L \\ \tau_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1/r_D) & (1/r_E) \\ (b/2r_D) & (-b/2r_E) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tau_D \\ \tau_E \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{F}_V = (({}^V\mathbf{T}_W)^T)^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau}$$

$$\text{onde,} \quad \mathbf{F}_V = [f_L \quad \tau_\theta]^T \quad \boldsymbol{\tau} = [\tau_D \quad \tau_E]^T$$

$$\begin{bmatrix} (1/r_D) & (1/r_E) \\ (b/2r_D) & (-b/2r_E) \end{bmatrix} = ({}^W\mathbf{T}_V)^T = (({}^V\mathbf{T}_W)^T)^{-1} \Rightarrow \boldsymbol{\tau} = ({}^V\mathbf{T}_W)^T \cdot \mathbf{F}_V$$

- **Esforços em espaço de configuração, $\mathbf{F} = [f_x \quad f_y \quad \tau_\theta]^T$:**

$$\begin{cases} f_x = f_L \cdot \cos\theta \\ f_y = f_L \cdot \sin\theta \\ \tau_\theta = \tau_\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ \tau_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_L \\ \tau_\theta \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{F} = {}^q\mathbf{T}_V \cdot \mathbf{F}_V \Rightarrow ({}^q\mathbf{T}_V)^T \cdot \mathbf{F} = ({}^q\mathbf{T}_V)^T \cdot {}^q\mathbf{T}_V \cdot \mathbf{F}_V \Rightarrow \mathbf{F}_V = ({}^q\mathbf{T}_V)^T \cdot \mathbf{F}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathbf{F} = {}^q\mathbf{T}_V \cdot (({}^V\mathbf{T}_W)^T)^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau} \\ \boldsymbol{\tau} = ({}^V\mathbf{T}_W)^T \cdot ({}^q\mathbf{T}_V)^T \cdot \mathbf{F} \end{cases}$$

- **Conservação de Potência:**

$$\begin{aligned} \text{Sejam:} \quad \text{potência em espaço de configuração} &= P_q = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{q}' \\ \text{potência em espaço de atuadores} &= P_W = \boldsymbol{\tau}^T \cdot \mathbf{W} \end{aligned}$$

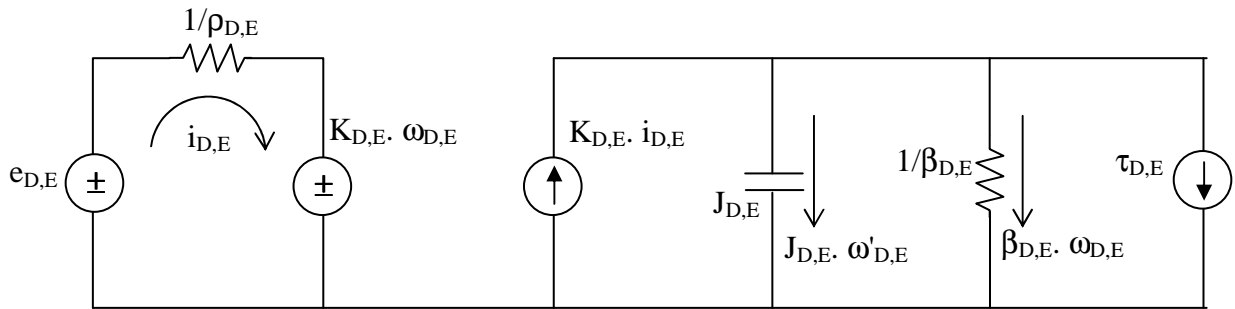
$$\Rightarrow P_q = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{q}' = [{}^q\mathbf{T}_V \cdot (({}^V\mathbf{T}_W)^T)^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau}]^T \cdot [{}^q\mathbf{T}_V \cdot {}^V\mathbf{T}_W \cdot \mathbf{W}]$$

$$= \boldsymbol{\tau}^T \cdot ({}^V\mathbf{T}_W)^{-1} \cdot ({}^q\mathbf{T}_V)^T \cdot {}^q\mathbf{T}_V \cdot {}^V\mathbf{T}_W \cdot \mathbf{W} = \boldsymbol{\tau}^T \cdot ({}^V\mathbf{T}_W)^{-1} \cdot {}^V\mathbf{T}_W \cdot \mathbf{W} = \boldsymbol{\tau}^T \cdot \mathbf{W}$$

$$= P_W \quad \Rightarrow P_q = P_W$$

MODELO DINÂMICO DE UM ROBÔ MÓVEL

- **Robô Móvel:** duas rodas, com acionamento diferencial através de motores CC.
- **Dinâmica de Atuadores (Motores CC):**



- $e_{D,E}$ = Tensão de armadura do motor (Direito, Esquerdo).
 $i_{D,E}$ = Corrente de armadura do motor (Direito, Esquerdo).
 $1/\rho_{D,E}$ = Resistência de armadura (Direita, Esquerda).
 $K_{D,E}$ = Constante de força contra-eletromotriz / torque do motor (Direito, Esquerdo).
 $J_{D,E}$ = Momento de inércia do rotor (Direito, Esquerdo).
 $\beta_{D,E}$ = Coeficiente de atrito do motor (Direito, Esquerdo).
 $\tau_{D,E}$ = Carga mecânica no motor (Direito, Esquerdo).

Equação Elétrica do Motor:

$$\mathbf{E} = \boldsymbol{\rho}^{-1} \cdot \mathbf{i} + \mathbf{K}_W \cdot \mathbf{W} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{i} = -\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{K}_W \cdot \mathbf{W} + \boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{E}$$

onde: $\mathbf{E} = [e_D \ e_E]^T$ $\mathbf{i} = [i_D \ i_E]^T$ $\mathbf{W} = [\omega_D \ \omega_E]^T$

$$\boldsymbol{\rho} = \begin{bmatrix} \rho_D & 0 \\ 0 & \rho_E \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}_W = \begin{bmatrix} K_D & 0 \\ 0 & K_E \end{bmatrix}$$

Equação Mecânica do Motor:

$$\mathbf{K}_W.\mathbf{i} = \mathbf{J}_W.\mathbf{W}' + \boldsymbol{\beta}_W.\mathbf{W} + \boldsymbol{\tau}$$

onde: $\boldsymbol{\tau} = [\tau_D \ \tau_E]^T$

$$\mathbf{J}_W = \begin{bmatrix} J_D & 0 \\ 0 & J_E \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\beta}_W = \begin{bmatrix} \beta_D & 0 \\ 0 & \beta_E \end{bmatrix}$$

Substituindo a equação elétrica na equação mecânica do motor:

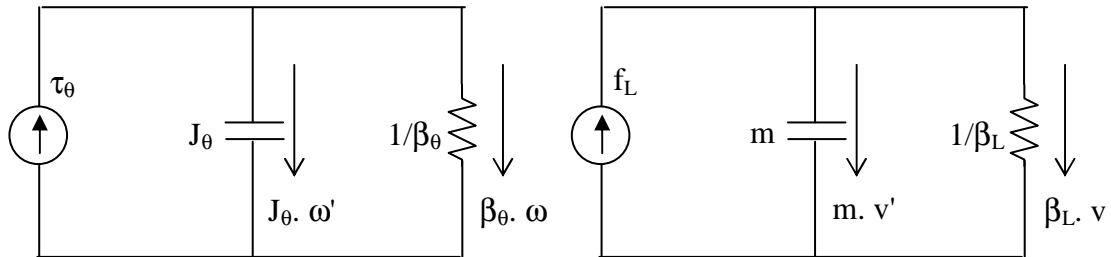
$$\boldsymbol{\tau} = -\mathbf{J}_W.\mathbf{W}' - (\rho.\mathbf{K}_W^2 + \boldsymbol{\beta}_W).\mathbf{W} + \rho.\mathbf{K}_W.\mathbf{E}$$

lembrando que: $\mathbf{W} = {}^W\mathbf{T}_V.\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}' = {}^W\mathbf{T}_V.\mathbf{V}'$,

$$\Rightarrow \boldsymbol{\tau} = -\mathbf{J}_W.{}^W\mathbf{T}_V.\mathbf{V}' - (\rho.\mathbf{K}_W^2 + \boldsymbol{\beta}_W).{}^W\mathbf{T}_V.\mathbf{V} + \rho.\mathbf{K}_W.\mathbf{E}$$

• Dinâmica do Robô:

Equação Mecânica do Robô:



onde,

m = Massa do robô.

J_θ = Momento de inércia do robô.

β_L = Coeficiente de atrito das rodas em movimento linear.

β_θ = Coeficiente de atrito das rodas em movimento rotacional.

Lei de Newton: $f_L = m.v' + \beta_L.v$
Lei de Euler: $\tau_\theta = J_\theta.\omega' + \beta_\theta.\omega$

$$\Rightarrow \mathbf{F}_V = \mathbf{J}_V.V' + \beta_V.V$$

onde: $\mathbf{F}_V = [f_L \ \tau_\theta]^T$

$$\mathbf{J}_V = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J_\theta \end{bmatrix} \quad \beta_V = \begin{bmatrix} \beta_L & 0 \\ 0 & \beta_\theta \end{bmatrix}$$

Em termos dos torques nas rodas ($\mathbf{F}_V = ({}^W\mathbf{T}_V)^T.\boldsymbol{\tau}$):

$$\Rightarrow ({}^W\mathbf{T}_V)^T.\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}_V.V' + \beta_V.V$$

Multiplicando a dinâmica de atuadores por $({}^W\mathbf{T}_V)^T$:

$$({}^W\mathbf{T}_V)^T.\boldsymbol{\tau} = -[({}^W\mathbf{T}_V)^T.\mathbf{J}_W.{}^W\mathbf{T}_V].V' - [({}^W\mathbf{T}_V)^T.(\rho.\mathbf{K}_W^2 + \beta_W).{}^W\mathbf{T}_V].V + ({}^W\mathbf{T}_V)^T.\rho.\mathbf{K}_W.E$$

Igualando as duas últimas equações e isolando o termo em E :

$$({}^W\mathbf{T}_V)^T.\rho.\mathbf{K}_W.E = [\mathbf{J}_V + ({}^W\mathbf{T}_V)^T.\mathbf{J}_W.{}^W\mathbf{T}_V].V' + [\beta_V + ({}^W\mathbf{T}_V)^T.(\rho.\mathbf{K}_W^2 + \beta_W).{}^W\mathbf{T}_V].V$$

Fazendo:

$\mathbf{M}_V = [\mathbf{J}_V + ({}^W\mathbf{T}_V)^T.\mathbf{J}_W.{}^W\mathbf{T}_V]$ = matriz de inércia, simétrica e definida positiva.

$\mathbf{B}_V = [\beta_V + ({}^W\mathbf{T}_V)^T.(\rho.\mathbf{K}_W^2 + \beta_W).{}^W\mathbf{T}_V]$ = matriz de coeficientes de atritos viscosos, simétrica e definida positiva. Fazendo:

$$\boldsymbol{\tau}_V = ({}^W\mathbf{T}_V)^T.\rho.\mathbf{K}_W.E \Rightarrow E = [({}^W\mathbf{T}_V)^T.\rho.\mathbf{K}_W]^{-1}.\boldsymbol{\tau}_V$$

Modelo Dinâmico em V: $\boldsymbol{\tau}_V = \mathbf{M}_V.V' + \mathbf{B}_V.V$

Substituindo $\mathbf{V} = ({}^q\mathbf{T}_V)^T \cdot \mathbf{q}'$ e $\mathbf{V}' = ({}^q\mathbf{T}_V)^T \cdot \mathbf{q}''$:

$$\boldsymbol{\tau}_V = \mathbf{M}_V \cdot ({}^q\mathbf{T}_V)^T \cdot \mathbf{q}'' + \mathbf{B}_V \cdot ({}^q\mathbf{T}_V)^T \cdot \mathbf{q}'$$

Multiplicando os dois lados por ${}^q\mathbf{T}_V$:

$${}^q\mathbf{T}_V \cdot \boldsymbol{\tau}_V = [{}^q\mathbf{T}_V \cdot \mathbf{M}_V \cdot ({}^q\mathbf{T}_V)^T] \cdot \mathbf{q}'' + [{}^q\mathbf{T}_V \cdot \mathbf{B}_V \cdot ({}^q\mathbf{T}_V)^T] \cdot \mathbf{q}'$$

Chamando:

$\mathbf{M}_q = [{}^q\mathbf{T}_V \cdot \mathbf{M}_V \cdot ({}^q\mathbf{T}_V)^T]$ = Matriz de inércia em espaço de configuração, simétrica e definida positiva.

$\mathbf{B}_q = [{}^q\mathbf{T}_V \cdot \mathbf{B}_V \cdot ({}^q\mathbf{T}_V)^T]$ = Matriz de coeficientes de atritos viscosos em espaço de configuração, simétrica e definida positiva.

$$\boldsymbol{\tau}_q = {}^q\mathbf{T}_V \cdot \boldsymbol{\tau}_V \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\tau}_V = ({}^q\mathbf{T}_V)^T \cdot \boldsymbol{\tau}_q$$

$$\text{Modelo Dinâmico em } \mathbf{q}: \quad \boldsymbol{\tau}_q = \mathbf{M}_q \cdot \mathbf{q}'' + \mathbf{B}_q \cdot \mathbf{q}'$$

- **Propriedade da Matriz de Inércia:**

$$\mathbf{M}_q' = {}^q\mathbf{T}_V \cdot \mathbf{M}_V \cdot (({}^q\mathbf{T}_V)^T)' + ({}^q\mathbf{T}_V)' \cdot \mathbf{M}_V \cdot ({}^q\mathbf{T}_V)^T$$

Dado um vetor \mathbf{e} , tomando a forma quadrática $[\mathbf{e}^T \cdot \mathbf{M}_q' \cdot \mathbf{e}]/2$:

$$\begin{aligned} [\mathbf{e}^T \cdot \mathbf{M}_q' \cdot \mathbf{e}]/2 &= \mathbf{e}^T \cdot [{}^q\mathbf{T}_V \cdot \mathbf{M}_V \cdot (({}^q\mathbf{T}_V)^T)' + ({}^q\mathbf{T}_V)' \cdot \mathbf{M}_V \cdot ({}^q\mathbf{T}_V)^T] \cdot \mathbf{e}/2 = \\ &= \mathbf{e}^T \cdot [{}^q\mathbf{T}_V \cdot \mathbf{M}_V \cdot (({}^q\mathbf{T}_V)^T)'] \cdot \mathbf{e}/2 + \mathbf{e}^T \cdot [({}^q\mathbf{T}_V)' \cdot \mathbf{M}_V \cdot ({}^q\mathbf{T}_V)^T] \cdot \mathbf{e}/2 = \\ &= \mathbf{e}^T \cdot [{}^q\mathbf{T}_V \cdot \mathbf{M}_V \cdot (({}^q\mathbf{T}_V)^T)'] \cdot \mathbf{e} \end{aligned}$$

- **Forma Linear em Parâmetros:**

Modelo Dinâmico em V Linear em Parâmetros:

$$\begin{aligned}
 \tau_V &= \mathbf{M}_V \cdot \mathbf{V}' + \mathbf{B}_V \cdot \mathbf{V} \\
 &= \begin{bmatrix} M_{V11} & M_{V12} \\ M_{V12} & M_{V22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v' \\ \omega' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{V11} & B_{V12} \\ B_{V12} & B_{V22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} M_{V11} \cdot v' + M_{V12} \cdot \omega' \\ M_{V12} \cdot v' + M_{V22} \cdot \omega' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{V11} \cdot v + B_{V12} \cdot \omega \\ B_{V12} \cdot v + B_{V22} \cdot \omega \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} v' & \omega' & 0 \\ 0 & v' & \omega' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_{V11} \\ M_{V12} \\ M_{V22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v & \omega & 0 \\ 0 & v & \omega \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_{V11} \\ B_{V12} \\ B_{V22} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$= \Phi_{Vm} \cdot \mathbf{m} + \Phi_{Vb} \cdot \mathbf{b} = \Phi_V \cdot \mathbf{P}$$

onde,

$$\Phi_{Vm} = \begin{bmatrix} v' & \omega' & 0 \\ 0 & v' & \omega' \end{bmatrix} \quad \Phi_{Vb} = \begin{bmatrix} v & \omega & 0 \\ 0 & v & \omega \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} M_{V11} \\ M_{V12} \\ M_{V22} \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} B_{V11} \\ B_{V12} \\ B_{V22} \end{bmatrix}$$

$$\Phi_V = [\Phi_{Vm} \quad \Phi_{Vb}]$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{m} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \tau_V = \Phi_V \cdot \mathbf{P}$$

Modelo Dinâmico em q Linear em Parâmetros:

Multiplicando o modelo em V pela matriz qT_V :

$${}^qT_V.\tau_V = {}^qT_V.\Phi_V.P \Rightarrow \tau_q = \Phi_q.P$$

$$\text{onde:} \quad \tau_q = {}^qT_V.\tau_V \quad \Phi_q = {}^qT_V.\Phi_V$$

$$\Rightarrow \Phi_q = [{}^qT_V.\Phi_{Vm} \quad {}^qT_V.\Phi_{Vb}] = [\Phi_{qm} \quad \Phi_{qb}]$$

onde:

$$\Phi_{qm} = {}^qT_V.\Phi_{Vm}$$

$$\Phi_{qb} = {}^qT_V.\Phi_{Vb}$$

As matrizes Φ_{Vm} e Φ_{Vb} podem ser expressas como:

$$\Phi_{Vm} = [(I^{11}.V') \quad (I^{12}.V') \quad (I^{22}.V')]$$

$$\Phi_{Vb} = [(I^{11}.V) \quad (I^{12}.V) \quad (I^{22}.V)]$$

onde:

$$I^{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad I^{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad I^{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim, lembrando que $V = ({}^qT_V)^T.q'$ e $V' = ({}^qT_V)^T.q''$:

$$\Phi_{qm} = [[{}^qT_V I^{11} ({}^qT_V)^T q''] \quad [{}^qT_V I^{12} ({}^qT_V)^T q''] \quad [{}^qT_V I^{22} ({}^qT_V)^T q'']]$$

$$\Phi_{qb} = [[{}^qT_V I^{11} ({}^qT_V)^T q'] \quad [{}^qT_V I^{12} ({}^qT_V)^T q'] \quad [{}^qT_V I^{22} ({}^qT_V)^T q']]$$

- **Modelo Dinâmico Completo:**

Lembrando que, do modelo dinâmico em \mathbf{V} , temos:

$$\boldsymbol{\tau}_V = \mathbf{M}_V \cdot \mathbf{V}' + \mathbf{B}_V \cdot \mathbf{V} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\tau}_V = ({}^W\mathbf{T}_V)^T \cdot \boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{K}_W \cdot \mathbf{E}$$

$$\Rightarrow \mathbf{V}' = (\mathbf{M}_V)^{-1} \cdot [-\mathbf{B}_V \cdot \mathbf{V} + ({}^W\mathbf{T}_V)^T \cdot \boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{K}_W \cdot \mathbf{E}]$$

Lembrando que o modelo cinemático é dado por:

$$\Rightarrow \mathbf{q}' = [{}^q\mathbf{T}_V] \cdot \mathbf{V}$$

Agrupando as duas equações acima obtemos o modelo dinâmico completo, incluindo dinâmica de atuadores, para o robô móvel:

Equação de Estado:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}' \\ \mathbf{q}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [-\mathbf{M}_V^{-1} \cdot \mathbf{B}_V] & \mathbf{0} \\ [{}^q\mathbf{T}_V] & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{V} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [\mathbf{M}_V^{-1} \cdot {}^W\mathbf{T}_V^T \cdot \boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{K}_W] \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{E} \end{bmatrix}$$

Equação de Saída:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{V} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix}$$

Características do Modelo:

- Modelo de quinta ordem.
- Não linear ($\cos(\theta)$ e $\sin(\theta)$ na matriz ${}^q\mathbf{T}_V$).
- Sistema MIMO (Vetor de entradas \mathbf{E} / Vetor de saídas, \mathbf{q})
- Sistema subatuado (duas entradas, \mathbf{E} para três saídas, \mathbf{q}).