Modelagem e Análise de Sistemas Dinâmicos – DCA0110

Prof. Anderson Cavalcanti

Slide 03 – Modelos Discretos de Sistemas

“E disse ao homem: Eis que o temor do Senhor é a sabedoria, e apartar-se do mal é a inteligência.” Jó:29-28

Sumário da Apresentação

- Equações de Diferenças
- Transformada Z
- Função de Transferência Discreta
- Sistemas amostrados
- Função de Transferência Discreta de sistemas amostrados
- Característica de sistemas amostrados
- Modelos discretos em espaço de estados
- Relação entre polos e zeros contínuos e discretos

Visão Geral dos Sistemas Discretos

- O uso de computadores digitais como controladores cresceu de forma significativa a partir dos anos 80;
- Em dispositivos digitais, o ferramental matemático já apresentado nesse curso não é suficiente pois os sinais são conhecidos apenas em determinados instantes de tempo (amostras do sinal);
- A transformada Z e a função de transferência discreta consistem no ferramental matemático adequado para tratar sistemas discretos.

Notação Adotada

- A notação $y(k)$ ou y_k será adotada nessas notas de aula e significa o valor do sinal y no instante atual de amostragem k;
- A notação $y(k-i)$ ou y_{k-i} será adotada nessas notas de aula e significa o valor do sinal y i-passos atrasados em relação a k.

Equações de Diferenças

- São equações que relacionam a saída de um determinado sinal no instante de tempo atual $y(k)$ como uma função de valores passados desse sinal $[y(k-1)\ ,\ y(k-2), \ldots]$ bem como de valores passados do sinal de entrada $[u(k-1)\ ,\ u(k-2), \ldots]$;
- Vejamos:

$$y(k) + a_1 y(k-1) + \cdots + a_n y(k-n) = b_1 u(k-1) + \cdots + b_m u(k-m)$$

- Os valores passados e atuais dos sinais são possíveis de obtenção por amostragem. A teoria dos sistemas amostrados serão discutidos posteriormente.

Transformada Z

- Quando lidamos com sinais em computadores, estes precisam passar por um processo de amostragem;
- Amostrar um sinal, em linhas gerais, significa medir e guardar esse sinal periodicamente em um tempo fixo e definido chamado de período ou tempo de amostragem;
- Esse processo gera uma sequência discreta de valores que usualmente podem ser escritos por equações recursivas. A Transformada Z é a ferramenta que vai nos permitir resolver equações recursivas e definir a noção de função de transferência discreta.

Transformada Z

- Definição: Definiremos uma sequência de um determinado sinal como sendo $x(kT)$ em que T é o período de amostragem do sinal e k é a variável de tempo discreto $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
- A transformada Z de uma sequência $x(kT)$ que satisfaz $x(kT) = 0$ para $k < 0$, é definida pela expressão:

$$X(z) = \mathcal{Z}[x(kT)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) z^{-k} \quad ; \quad x(kT) = 0, \quad \forall\, k < 0$$

- em que $z = \alpha + j\beta$ é uma variável complexa similar à variável s da Transformada de Laplace. Assim, a transformada Z transforma uma sequência $x(kT)$ em uma função $X(z)$ da variável complexa z.

Transformada Z

- Em alguns casos, quando a série é geométrica e de razão r conhecida, podemos calcular o resultado da soma através da fórmula:

$$x(z) = x(0) + x(T)z^{-1} + x(2T)z^{-2} + \cdots = \frac{x(0)}{1-r}$$

- Para que o resultado da soma da série seja dado pela expressão acima, é preciso que a série seja convergente, ou seja, a razão deve possui razão com módulo menor que 1 ($|r| < 1$).

Exemplo Ilustrativo 1

- Calcule a transformada Z para a sequência degrau unitário definida como sendo $u(kT) = 1$ para $k \geq 0$ e $u(kT) = 0$ para $k < 0$.
- Solução: Aplicando a definição:

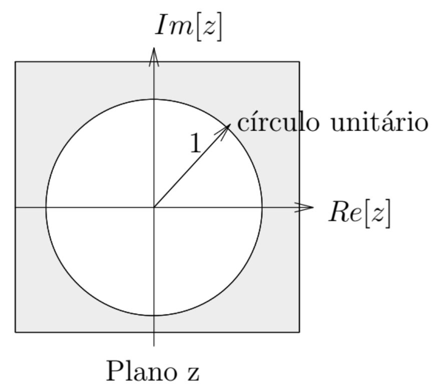
$$\mathcal{Z}[u(kT)] = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \ldots$$

- A série possui razão $r = z^{-1}$, assim é possível usar a expressão da soma da série se a variável complexa z está na região onde $|r| = |z^{-1}| < 1$. Assim, teremos que:

$$U(z) = \mathcal{Z}[u(t)] = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}$$

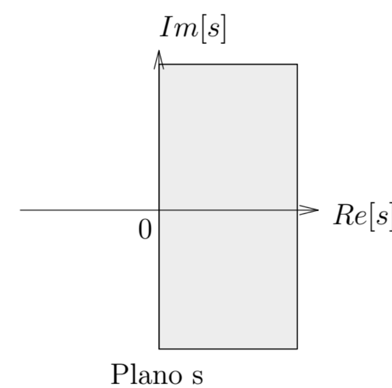
Exemplo Ilustrativo 1– Região de Convergência

- De forma semelhante à transformada de Laplace, a transformada Z também possui uma região de convergência. Conforme já mencionado, uma série é convergente quando sua razão é menor que a unidade. Para o caso específico do sinal degrau, a região de convergência $|z^{-1}| < 1$ é definida como a área externa a um círculo unitário no plano complexo z.



transformada Z

$U(z) = \frac{z}{z-1}$



transformada de Laplace

$U(s) = \frac{1}{s}$

Transformada Z

- Dentro da região de convergência existe uma relação biunívoca entre a sequência $x(kT)$ e sua transformada Z.

$$\begin{tikzcd} x(kT) \arrow[r, bend left, "\mathcal{Z}[x(kT)]"] & X(z) \arrow[l, bend left, "\mathcal{Z}^{-1}[X(z)]"] \\ (k \geq 0) & z \in R_{conv} \end{tikzcd}$$

Função de Transferência Discreta

- É a relação entre a transformada Z do sinal de saída amostrado e do sinal discreto de entrada;
- Para uma compreensão do significado da FT discreta, consideremos o exemplo que modela o método trapezoidal de integração numérica:

$$y_k = y_{k-1} + \frac{T}{2}(u_k + u_{k-1})$$

- Multiplicando os dois lados da igualdade por z^{-k} e fazendo o somatório de $k = 0$ até $k = \infty$ teremos:

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} y_k z^{-k}}_{A} = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} y_{k-1} z^{-k}}_{B} + \frac{T}{2}\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} u_k z^{-k}}_{C} + \frac{T}{2}\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} u_{k-1} z^{-k}}_{D}$$

Função de Transferência Discreta

- Os termos A e C são as transformadas Z (ver definição) de y e de u respectivamente;
- No termo B, fazendo $j = k - 1$ temos:

$$\sum_{k=0}^{\infty} y_{k-1} z^{-k} = \sum_{j=-1}^{\infty} y_j z^{-(j+1)} = y_{-1} + \sum_{j=0}^{\infty} y_j z^{-j} z^{-1}$$

- Supondo que o sinal é nulo para instantes anteriores a $k = 0$, então $y_{-1} = 0$, o que significa que:

$$\sum_{k=0}^{\infty} y_{k-1} z^{-k} = z^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} y_j z^{-j} = z^{-1} Y(z)$$

Função de Transferência Discreta

- Um procedimento semelhante pode ser aplicado ao termo D:

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_{k-1} z^{-k} = z^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} u_j z^{-j} = z^{-1} U(z)$$

- Com isso, a equação original que contém os termo A, B, C e D pode ser reescrita como:

$$Y(z) = z^{-1} Y(z) + \frac{T}{2} [U(z) + z^{-1} U(z)] \quad \Rightarrow$$

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \left(\frac{T}{2}\right) \frac{z+1}{z-1}$$

Quando as condições iniciais são nulas, essa é a função de transferência discreta da equação de diferenças.

Exemplo Ilustrativo 2

- Considerando condições iniciais nulas, determina a FT discreta do sistema descrito pela seguinte equação de diferenças:

$$y_k + 2y_{k-1} + 1.5y_{k-2} = u_{k-1} - 0.5u_{k-2}$$

- Considerando as propriedades de aditividade, homogeneidade e atraso no tempo da transformada Z, teremos que:

$$\begin{gathered}
\mathcal{Z}(y_k + 2y_{k-1} + 1.5y_{k-2}) = \mathcal{Z}(u_{k-1} - 0.5u_{k-2}) \quad \Rightarrow \\
\mathcal{Z}(y_k) + 2\mathcal{Z}(y_{k-1}) + 1.5\mathcal{Z}(y_{k-2}) = \mathcal{Z}(u_{k-1}) - 0.5\mathcal{Z}(u_{k-2}) \quad \Rightarrow \\
Y(z) + 2z^{-1}Y(z) + 1.5z^{-2}Y(z) = z^{-1}U(z) - 0.5z^{-2}U(z) \quad \Rightarrow \\
[1 + 2z^{-1} + 1.5z^{-2}]Y(z) = [z^{-1} - 0.5z^{-2}]U(z) \quad \Rightarrow \\
G(z) = \frac{Y(z)}{G(z)} = \frac{z^{-1} - 0.5z^{-2}}{1 + 2z^{-1} + 1.5z^{-2}} = \frac{z - 0.5}{z^2 + 2z + 1.5}
\end{gathered}$$

Função de Transferência Discreta

- A FT discreta $G(z)$ de um sistema é uma expressão em z tal que $Y(z) = G(z)U(z)$ em que $u(z)$ é a transformada Z do sinal de entrada u_k e $Y(z)$ é a transformada Z do sinal de saída y_k;
- Excitando o sistema com um sinal do tipo pulso unitário δ_k, cuja transformada Z é $\mathcal{Z}[\delta_k] = 1$, a transformada Z do sinal de saída obtido é a propria função de transferência discrete do sistema:

$$u_k = \delta_k \quad \Rightarrow \quad U(z) = 1$$

$$Y(z) = G(z)U(z) = G(z) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{Z}(y_k) = G(z)$$

Exemplo Ilustrativo 3

- Mostre que para a equação de diferenças do sistema:

$$y_k = y_{k-1} + \frac{T}{2}(u_k + u_{k-1})$$

a transformada Z do sinal de saída equivalente à função de transferência do sistema quando o sinal de entrada aplicado é um pulso unitário:

$$u_k = \delta_k \quad \Rightarrow \quad u_k = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

Exemplo Ilustrativo 3

- Supondo que $y_k = 0, k < 0$:

$$y_k = y_{k-1} + \frac{T}{2}(u_k + u_{k-1}) \quad \Rightarrow \quad y_0 = y_{-1} + \frac{T}{2}(u_0 + u_{-1}) = 0 + \frac{T}{2}(1+0) = \frac{T}{2} \quad \Rightarrow$$

$$y_1 = y_0 + \frac{T}{2}(u_1 + u_0) = \frac{T}{2} + \frac{T}{2}(0+1) = T \quad \Rightarrow$$

$$y_2 = y_1 + \frac{T}{2}(u_2 + u_1) = T + \frac{T}{2}(0+0) = T \quad \Rightarrow$$

$$y_3 = y_4 = y_5 = \cdots = T$$

- Aplicando a definição da transformada Z na equação acima:

$$G(z) = \mathcal{Z}(y_k) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k z^{-k} = \frac{T}{2} + Tz^{-1} + Tz^{-2} + \cdots = -\frac{T}{2} + T + Tz^{-1} + Tz^{-2} + \cdots =$$

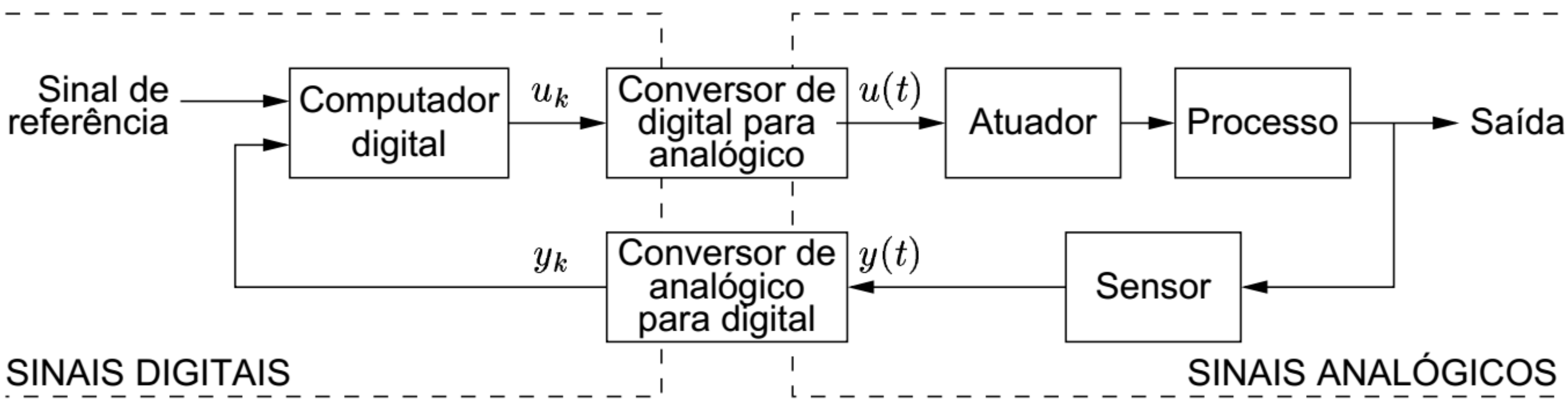
$$= -\frac{T}{2} + T\sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = -\frac{T}{2} + \frac{T}{1-z^{-1}} = -\frac{T}{2} + \frac{Tz}{z-1} = \left(\frac{T}{2}\right)\frac{z+1}{z-1}$$

Sistemas Amostrados

- Sistemas de controle digitais utiliza sinais digitais e um computador digital para controlar um processo;
- Os computadores digitais recebem e manipulam sinais de forma digital em contraste com sinais contínuos;
- Apesar de a natureza dos processos ser contínua, o controlador só tem acesso a dados do processo e só pode atuar sobre ele em determinados instantes de tempo pré-estabelecidos;
- Esses dados do processo obtidos em instantes pré-estabelecidos são denominados dados amostrados e são um sinal discreto;
- O período T entre dois instantes consecutivos de obtenção de dados é denominado de período de amostragem.

Sistemas Amostrados

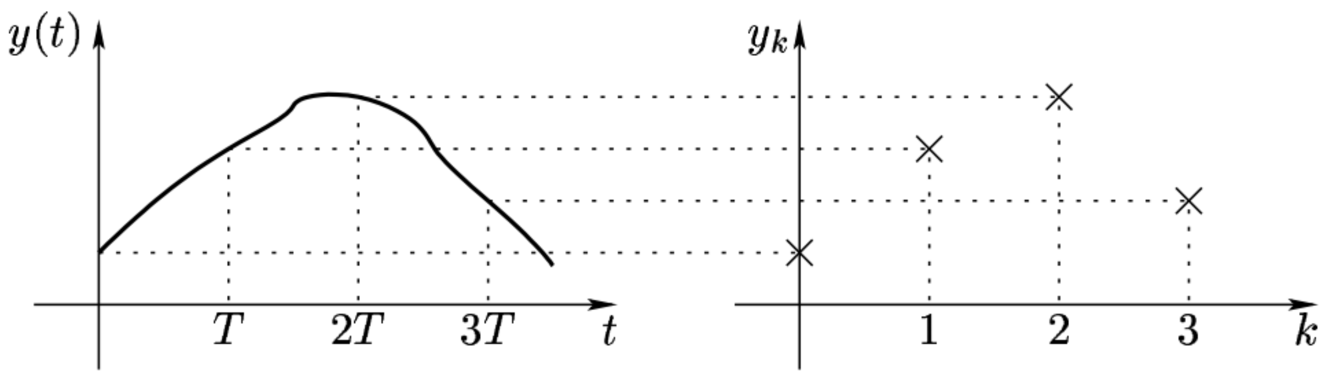
- Diagrama de Blocos de um sistema de controle digital



Sistemas Amostrados

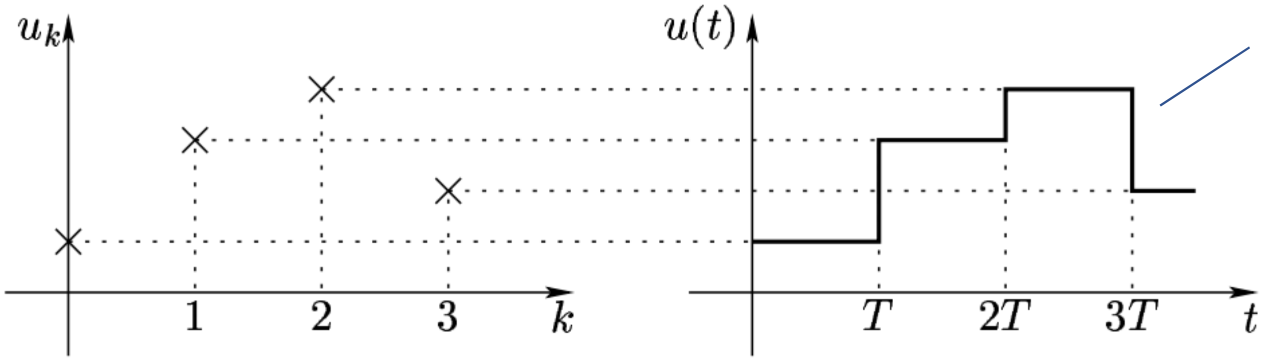
- Conversão Analógico-Digital (AD): o computador recebe uma sequência de valores representando os valores do sinal de saída $y(t)$:

$$y(t) \xrightarrow{\text{AD}} y_k$$



Sistemas Amostrados

- Conversão Digital-Analógica (DA): O conversor DA recebe a cada T unidades de tempo um valor numérico digital do computador e gera (instantaneamente, para um conversor ideal) um sinal analógico proporcional a este valor, geralmente sob a forma de uma tensão elétrica.



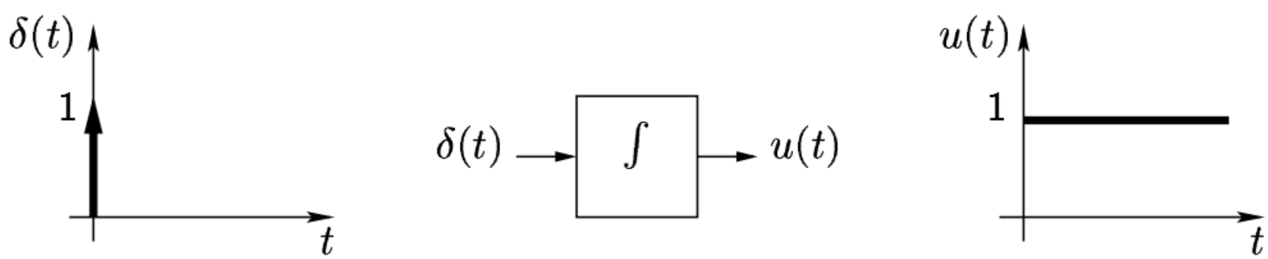
Entre os instantes de amostragem, o conversor não recebe nenhuma informação do computador. Usualmente ele gera este valor de saída. A maioria dos conversores DA mantém constante o último valor recebido (segurador de ordem zero ou *zero order hold*).

Sistemas Amostrados

- Modelo do Amostrador: considerando uma função impulso unitário $\delta(t)$ definida como:

$$\delta(t) = \lim_{h \to 0} \Delta(t), \qquad \text{onde} \quad \Delta(t) = \begin{cases} 1/h, & 0 \leq t < h \\ 0, & t \geq h \text{ ou } t < 0 \end{cases}$$

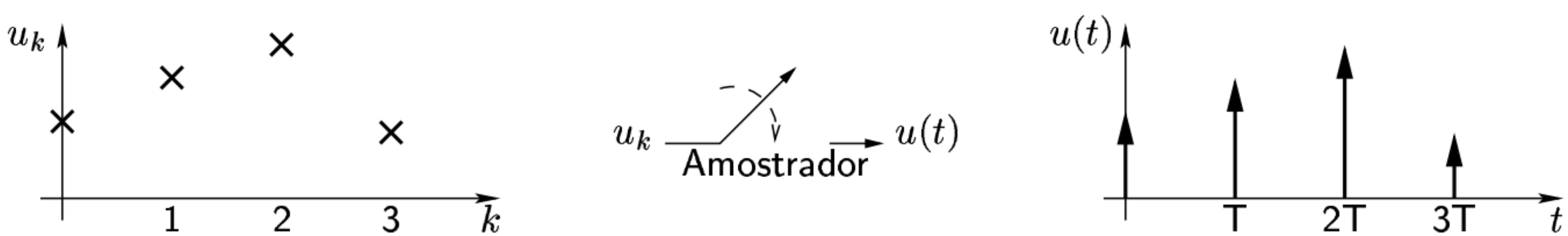
- A integral de $\delta(t)$ é um degrau unitário:



Sistemas Amostrados

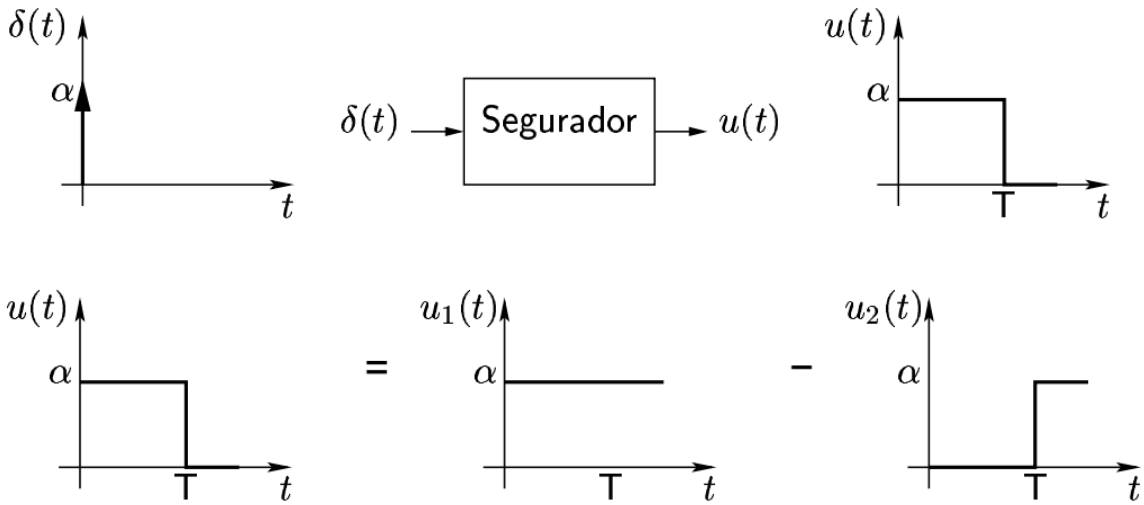
- Modelo do Amostrador: um amostrador seria um dispositivo que recebe na entrada uma sequência de valores u_k e gerasse na saída um sinal $u^*(t)$ formado por um trem de impulsos de periodicidade T com cada impulso multiplicado pelo valor correspondente na sequência.

$$\overset{*}{u}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \delta(t - kT)$$



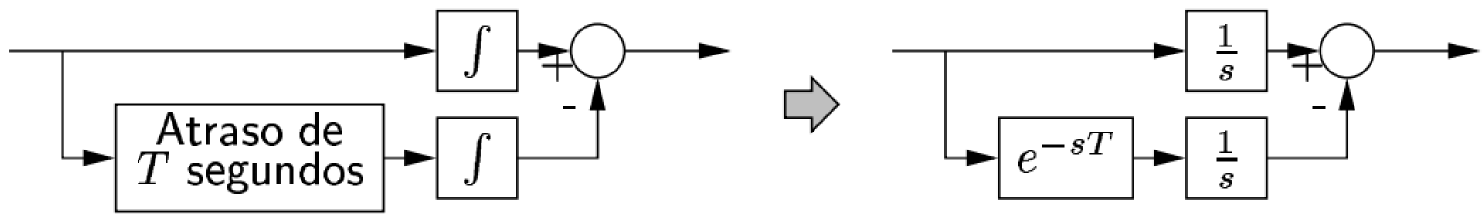
Sistemas Amostrados

- Modelo do segurador: Um segurador de ordem zero é um dispositivo que, ao receber um impulso de magnitude α na entrada durante T unidades de tempo e com valor 0 após isso;
- Este sinal pode ser obtido pela decomposição de dois degraus unitários, sendo um com atraso de T segundos em relação ao outro;



Sistemas Amostrados

- Modelo do segurador:

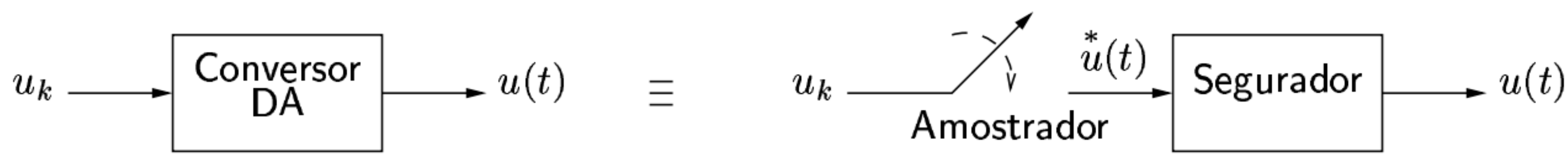


- A função de transferência do segurador de ordem zero é então:

$$G(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s}$$

Sistemas Amostrados

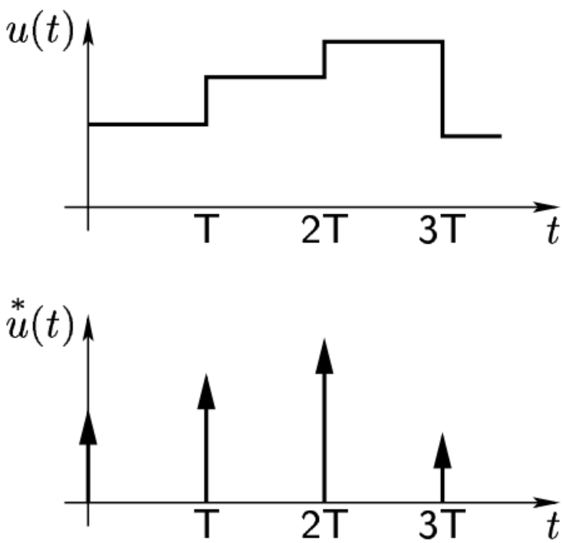
- Modelo do conversor DA: o modelo pode ser obtido a partir da conexão em série de um amostrador e de um segurador de ordem zero;

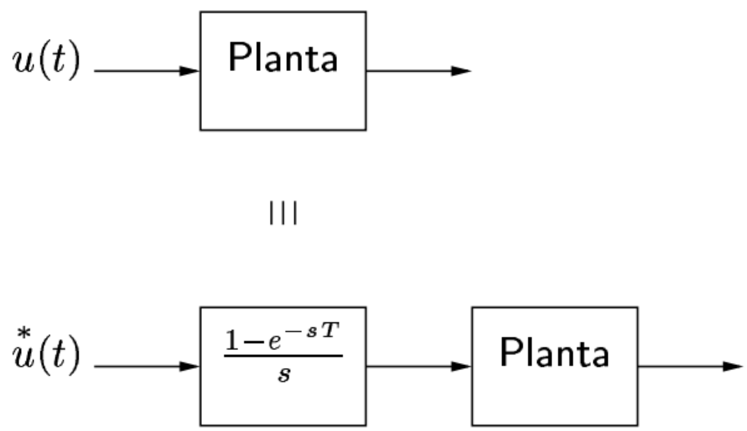


- Plantas que recebem sinal advindo de um conversor DA, o conversor é decomposto em um amostrador e um segurador e o segurador é incorporado à planta;

Sistemas Amostrados

- Assim, ao invés de ter o sinal "real" $u(t)$ gerado pelo conversor aplicado à planta "real", teremos um trem de pulsos $u^*(t)$ gerado por um amostrador aplicado a uma planta "virtual" (segurador em série com a planta "real").





Sistemas Amostrados - FT discreta de sistemas amostrados

- A FT para sistemas amostrados pode ser obtida aplicando-se um pulso unitário ao sistema;
- Portanto, o procedimento para a sua obtenção é o seguinte:
  - Aplica-se na entrada do sistema a sequência $u_k = \begin{cases} 1, k = 0 \\ 0, k \neq 0 \end{cases}$
  - Faz-se $G(z) = \mathcal{Z}[y_k]$, onde y_k é a sequência obtida na saída do sistema;
- Aplicar um pulso unitário a um sistema amostrado equivale a aplicar um único impulso unitário à planta precedida de um segurador:

$$u_k = \delta_k \quad \Rightarrow \quad \overset{*}{u}(t) = \delta(t)$$

Sistemas Amostrados - FT discreta de sistemas amostrados

- Ao aplicar o único impulso unitário, se a planta tem FT contínua $G(s)$, a transformada de Laplace do sinal de saída $Y(s)$ é dada por:

$$Y(s) = G(s)U(s) = \left(\frac{1 - e^{-Ts}}{s}\right) G(s)\overset{*}{U}(s)$$

- Como $u^*(t) = \delta(t) \; \rightarrow U^*(s) = 1$ então:

$$Y(s) = \left(\frac{1 - e^{-Ts}}{s}\right) G(s) \quad \Rightarrow \quad y(t) = \pounds^{-1}[Y(s)] \quad \Rightarrow \quad y_k = y(kT)$$

Sistemas Amostrados - FT discreta de sistemas amostrados

- A FT discreta é portanto dada por:

$$G(z) = \mathcal{Z}\left[Y(s)\right] = \mathcal{Z}\left[\left(\frac{1-e^{-Ts}}{s}\right)G(s)\right] = \mathcal{Z}\left[\frac{G(s)}{s}\right] - \mathcal{Z}\left[\frac{e^{-Ts}G(s)}{s}\right]$$

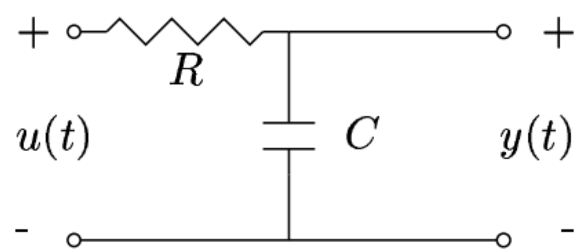
- O termo e^{-Ts} corresponde a um atraso de um período de amostragem:

$$\mathcal{Z}\left[\frac{e^{-Ts}G(s)}{s}\right] = z^{-1}\mathcal{Z}\left[\frac{G(s)}{s}\right] \quad \Rightarrow$$

$$G(z) = (1-z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{G(s)}{s}\right] = \left(\frac{z-1}{z}\right)\mathcal{Z}\left[\frac{G(s)}{s}\right]$$

Exemplo Ilustrativo 4

- Considere o seguinte circuito elétrico com $R = 100k\Omega$ e $C = 1\mu F$:



- Obtenha a FT contínua $G(s)$ e obtenha a resposta do sistema para uma entrada degrau unitário e uma entrada rampa unitária;
- Obtenha a FT discreta $G(z)$ supondo um período de amostragem de $T = 30ms$ e obtenha a resposta amostrada do sistema para uma entrada degrau unitário e uma entrada rampa unitária;
- Compare os valores obtidos fazendo $k = 1,2, \ldots$ nas soluções encontradas com os valores obtidos fazendo $t = 0,0.03, ..$ no sistema contínuo.

Exemplo Ilustrativo 4

- Como se trata de um divisor de tensão:

$$Y(s) = \frac{Z_C(s)}{Z_R(s) + Z_C(s)} U(s) \quad \Rightarrow \quad G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\frac{10^6}{s}}{10^5 + \frac{10^6}{s}} = \frac{10}{s+10}$$

- Para uma entrada degrau unitário:

$$U(s) = \frac{1}{s} \quad \Rightarrow \quad Y(s) = \frac{10}{s(s+10)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+10} \quad \Rightarrow \quad y(t) = 1 - e^{-10t}$$

Exemplo Ilustrativo 4

- Para uma entrada rampa unitária:

$$U(s) = \frac{1}{s^2} \quad \Rightarrow \quad Y(s) = \frac{10}{s^2(s+10)} = \frac{1}{s^2} - \frac{0.1}{s} + \frac{0.1}{s+10} \quad \Rightarrow$$

$$y(t) = t - 0.1 + 0.1e^{-10t}$$

- A FT discreta é obtida da seguinte forma:

$$\frac{G(s)}{s} = \frac{10}{s(s+10)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+10} \quad \Rightarrow$$

$$\mathcal{Z}\left[\frac{G(s)}{s}\right] = \mathcal{Z}\left(\frac{1}{s}\right) - \mathcal{Z}\left(\frac{1}{s+10}\right) = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-0.3}} = \frac{0.26z}{(z-1)(z-0.74)} \quad \Rightarrow$$

$$G(z) = \left(\frac{z-1}{z}\right)\mathcal{Z}\left[\frac{G(s)}{s}\right] = \frac{0.26}{z-0.74}$$

Exemplo Ilustrativo 4

- Podemos ainda escrever a equação de diferenças:

$$G(z) = \frac{0.26}{z-0.74} \rightarrow G(z^{-1}) = \frac{y(z^{-1})}{u(z^{-1})} = \frac{0.26z^{-1}}{1-0.74z^{-1}} \rightarrow$$

$$y_k = 0.74y_{k-1} + 0.26u_{k-1}$$

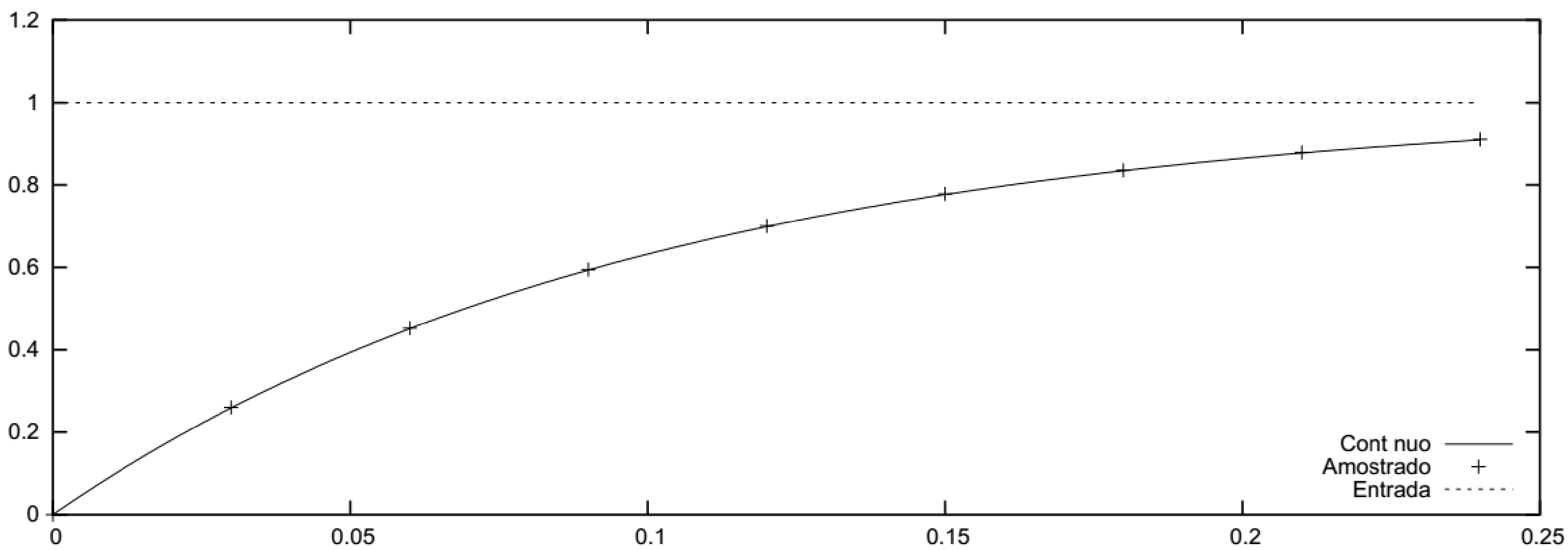
- Para uma entrada degrau aplicada na FT discreta:

$$U(z) = \frac{z}{z-1} \quad \Rightarrow \quad Y(z) = G(z)U(z) = \frac{0.26z}{(z-1)(z-0.74)} = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-0.74}$$

$$y_k = 1 - e^{-10Tk} = 1 - e^{-0.3k}$$

Exemplo Ilustrativo 4

- Comparação Gráfica:



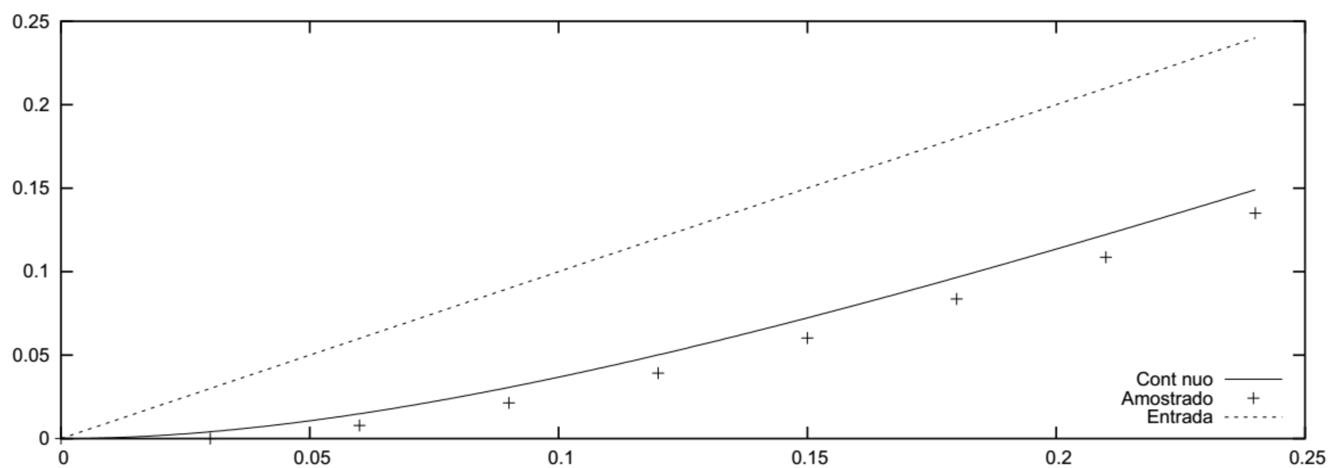
Exemplo Ilustrativo 4

- Para uma entrada do tipo rampa unitária temos:

$$U(z) = \frac{0.03z}{(z-1)^2} \quad \Rightarrow \quad Y(z) = \frac{0.0078z}{(z-1)^2(z-0.74)} = \frac{0.03z}{(z-1)^2} - \frac{0.116z}{z-1} + \frac{0.116z}{z-0.74}$$

$$y_k = Tk - 0.116 + 0.116 \cdot e^{-10Tk} = 0.03k - 0.116 + 0.116 \cdot e^{-0.3k}$$

- Comparação gráfica:



Exemplo Ilustrativo 4

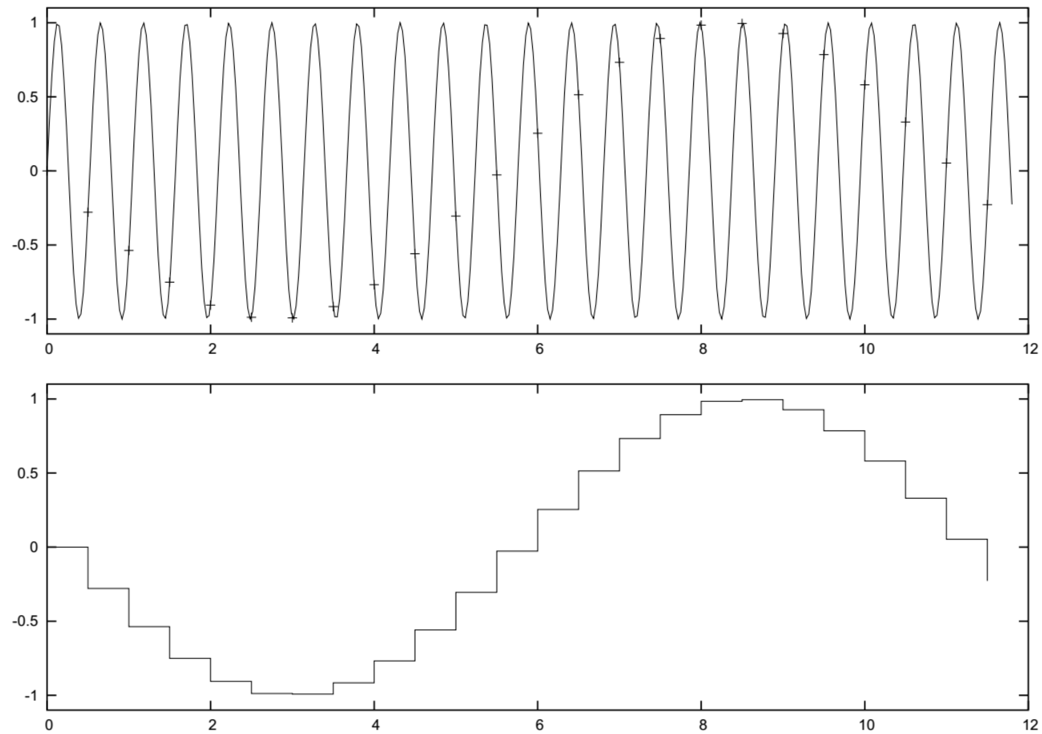
- A explicação para a diferença obtida na resposta à rampa contínua e discreta se dá pela passagem do sinal rampa no conversor DA.

Aliasing em Sistemas Amostrados

- Em SLIT contínuos quando a entrada é senoidal, o sistemas responde com saída senoidal de mesma frequência;
- Sistemas amostrados, no entanto, comportam-se de forma mais complicada pois o processo de amostragem gera sinais com novas frequências. Esse efeito é conhecido como **aliasing**;
- Para ilustrar o aliasing, imaginemos um sistema com sinal de excitação senoidal com frequência $\omega = 12\ rad/s$. Considerando um período de amostragem de $T = 0.5s$, teremos uma frequência de amostragem de $\omega_s = \frac{2\pi}{T} = 12.57\frac{rad}{s}$.

Alisasing em Sistemas Amostrados

- Efeito do aliasing sobre a amostragem da senóide.



Alisasing em Sistemas Amostrados

- Pelo gráfico, notamos que a amostragem fez surgir um sinal com nova frequência. Um sinal de frequência ω, ao ser amostrado com frequência ω_s, pode gerar componentes com frequências ω_a dadas por:

$$\omega_a = n\omega_s \pm \omega, \qquad \text{onde } n = 0, 1, 2, \cdots$$

- No nosso exemplo, a amostragem criou uma componente de sinal com frequência $\omega_a = 12.57 - 12 = 0.57\frac{rad}{s}$. O período desse sinal é, portanto, de $11s$.

Alisasing em Sistemas Amostrados

- É possível perceber que o processo de amostragem criará componentes de baixa frequência se o sinal a ser amostrado contiver frequências maiores que a metade da frequência de amostragem;
- A frequência $\omega_N = \omega_s/2$ é a chamada de frequência de Nyquist e é um parâmetro importante em sistemas amostrados. O teorema de amostragem de Shannon afirma que um sinal contínuo que não possua componentes de frequência superiores a ω_0 pode ser reconstruído a partir de suas amostras se a frequência for superior a $2\omega_0$.

Alisasing em Sistemas Amostrados

- Para evitar o aliasing, é essencial que todas as componentes de sinal com frequência de Nyquist sejam removidas antes que o sinal seja amostrado, através do emprego de filtros;
- Os filtros que removem os componentes de alta frequência dos sinais são chamados de filtros anti-aliasing;
- A escolha do período de amostragem é um aspecto muito importante. Em Engenharia de Controle, usualmente, a escolha do período de amostragem está relacionada a aspectos temporais do sistema.

Modelos discretos no espaço de estados

- Seja o sistema descrito pelo modelo contínuo no espaço de estados:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathsf{A}\mathbf{x} + \mathsf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathsf{C}\mathbf{x} + \mathsf{D}\mathbf{u} \end{cases}$$

- Considerando o tempo $t_k = kT$ e que o sinal de entrada é constante e igual a u_k até o próximo período de amostragem. Durante o período $t_k \leq t \leq t_{k+1}$, então o vetor de estado é dado por:

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t - t_k)\mathbf{x}(t_k) + \int_{t_k}^{t} \Phi(t - \tau) d\tau \mathrm{B}\mathbf{u}(t_k), \qquad t_k \leq t < t_{k+1}$$

Modelos discretos no espaço de estados

- Fazendo $\sigma = t - \tau$ de forma que $d\tau = -d\sigma$ então:

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t - t_k)\mathbf{x}(t_k) + \int_{t-t_k}^{0} \Phi(\sigma)(-d\sigma)\mathrm{B}\mathbf{u}(t_k) = \Phi(t - t_k)\mathbf{x}(t_k) + \int_{0}^{t-t_k} \Phi(\sigma)d\sigma\mathrm{B}\mathbf{u}(t_k)$$

- Para o próximo período de amostragem, em que $t = t_{k+1}$:

$$\mathbf{x}(t_{k+1}) = \Phi(t_{k+1} - t_k)\mathbf{x}(t_k) + \int_{0}^{t_{k+1}-t_k} \Phi(\sigma)d\sigma\mathrm{B}\mathbf{u}(t_k)$$

Modelos discretos no espaço de estados

- Se os instantes são periódicos, de forma que t_{k+1}- $t_k = T$, então:

$$\mathbf{x}(t_{k+1}) = \Phi(T)\mathbf{x}(t_k) + \int_0^T \Phi(\sigma)d\sigma \mathsf{B}\mathbf{u}(t_k)$$

- ou então:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \bar{\mathsf{A}}\mathbf{x}_k + \bar{\mathsf{B}}\mathbf{u}_k \\ \mathbf{y}_k = \mathsf{C}\mathbf{x}_k + \mathsf{D}\mathbf{u}_k \end{cases} \quad \text{onde} \quad \begin{array}{l} \bar{\mathsf{A}} = \Phi(T) = e^{AT} \\ \bar{\mathsf{B}} = \int_0^T \Phi(\sigma)d\sigma\mathsf{B} = \int_0^T e^{\mathsf{A}\sigma}d\sigma\mathsf{B} \end{array}$$

Exemplo Ilustrativo 5

- Considere o modelo contínuo em espaço de estados:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} \end{cases}$$

- Discretize o modelo para um período de amostragem T.

Exemplo Ilustrativo 5

- Usando o teorema de Cayley-Hamilton podemos determinar $\bar{A}$ e $\bar{B}$:

$$\det(\lambda \mathsf{I} - \mathsf{A}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm j$$

- A determinação de $\bar{A}$ e $\bar{B}$ envolve o cálculo de duas funções matriciais f e g:

$$\bar{\mathsf{A}} = f(\mathsf{A}) = e^{\mathsf{A}T} = a_1\mathsf{A} + a_2\mathsf{I} \qquad \Rightarrow \quad f(\lambda) = e^{\lambda T}$$

$$\bar{\mathsf{B}} = g(\mathsf{A})\mathsf{B} = \int_0^T e^{\mathsf{A}\sigma} d\sigma \cdot \mathsf{B} = (b_1\mathsf{A} + b_2\mathsf{I})\mathsf{B} \quad \Rightarrow \quad g(\lambda) = \int_0^T e^{\lambda\sigma} d\sigma = \frac{1}{\lambda}\left(e^{\lambda T} - 1\right)$$

Exemplo Ilustrativo 5

$$\begin{cases} a_1 j + a_2 = f(j) = e^{jT} \\ a_1(-j) + a_2 = f(-j) = e^{-jT} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \dfrac{e^{jT} - e^{-jT}}{2j} = \sin T \\ a_2 = \dfrac{e^{jT} + e^{-jT}}{2} = \cos T \end{cases}$$

$$\bar{\mathsf{A}} = a_1 \mathsf{A} + a_2 \mathsf{I} = \sin T \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \cos T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos T & \sin T \\ -\sin T & \cos T \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} b_1 j + b_2 = g(j) = \dfrac{1}{j}\left(e^{jT} - 1\right) \\ b_1(-j) + b_2 = g(-j) = -\dfrac{1}{j}\left(e^{-jT} - 1\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = 1 - \dfrac{e^{jT} + e^{-jT}}{2} = 1 - \cos T \\ b_2 = \dfrac{e^{jT} - e^{-jT}}{2j} = \sin T \end{cases}$$

$$\bar{\mathsf{B}} = (b_1 \mathsf{A} + b_2 \mathsf{I})\mathsf{B} = \left((1 - \cos T)\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \sin T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \cos T \\ \sin T \end{bmatrix}$$

Exemplo Ilustrativo 5

- O modelo discreto é, portanto, o seguinte:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} \cos T & \sin T \\ -\sin T & \cos T \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 1 - \cos T \\ \sin T \end{bmatrix} \mathbf{u}_k \\ \mathbf{y}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k \end{cases}$$

É de se notar que, para todo período de amostragem $T = T_0 + 2\pi k,\ k = 0, 1, 2, \cdots$, o modelo discreto é o mesmo. Ou seja, diferentes sistemas amostrados podem ter a mesma representação discreta, em razão do fenômeno de mascaramento. ■

Modelos discretos no espaço de estados

- As duas matrizes $\bar{A}$ e $\bar{B}$ podem ser determinadas calculando-se uma única função exponencial matricial de uma matriz de ordem maior:

$$\bar{\mathsf{A}}(t) = e^{At} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d\bar{\mathsf{A}}(t)}{dt} = \bar{\mathsf{A}}(t)\mathsf{A}$$

$$\bar{\mathsf{B}}(t) = \int_0^t e^{\mathsf{A}\sigma} d\sigma \mathsf{B} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d\bar{\mathsf{B}}(t)}{dt} = \bar{\mathsf{A}}(t)\mathsf{B}$$

- Se definirmos as matrizes:

$$\Gamma(t) = \begin{bmatrix} \bar{\mathsf{A}}(t) & \bar{\mathsf{B}}(t) \\ 0 & \mathsf{I} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \Delta = \begin{bmatrix} \mathsf{A} & \mathsf{B} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Modelos discretos no espaço de estados

- Então teremos:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ 0 & I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\Gamma}{dt} = \Gamma \cdot \Delta \quad \Rightarrow \quad \Gamma(t) = e^{\Delta t}$$

- Portanto, para se calcular $\bar{A}$ e $\bar{B}$, basta que se calcule a matriz:

$$\Gamma(T) = e^{\Delta T}$$

Modelos discretos no espaço de estados

- Para ser obter um modelo contínuo em espaço de estados a partir do discreto (inverso da amostragem), consideraremos o seguinte:

$$\Delta = \begin{bmatrix} \mathsf{A} & \mathsf{B} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{T} \ln \begin{bmatrix} \bar{\mathsf{A}} & \bar{\mathsf{B}} \\ 0 & \mathsf{I} \end{bmatrix} = \frac{1}{T} \ln \Gamma$$

Exemplo Ilustrativo 6

- Considere o sistema discreto com de período de amostragem de $T = 0.1s$:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0.995 & 0.0998 \\ -0.0998 & 0.995 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 0.005 \\ 0.0998 \end{bmatrix} \mathbf{u}_k \\ \mathbf{y}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k \end{cases}$$

- Determine o sistema contínuo correspondente, verificando se o resultado obtido equivale ao sistema contínuo original.

Exemplo Ilustrativo 6

- A matriz Γ é dada por:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \bar{\mathsf{A}} & \bar{\mathsf{B}} \\ 0 & \mathsf{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.995 & 0.0998 & 0.005 \\ -0.0998 & 0.995 & 0.0998 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- cujos autovalores são:

$$\lambda_{1,2} = 0.995 \pm 0.0998j \qquad \lambda_3 = 1$$

- Usando o teorema de Cayley-Hamilton:

$$f(\Gamma) = \ln(\Gamma) = a_1\Gamma^2 + a_2\Gamma + a_3\mathsf{I}$$

Exemplo Ilustrativo 6

- Sabemos que $e^{jx} = \sin x + j\cos x$, todos número complexo $a + bj$ pode ser escrito como $Me^{j\theta}$ em que $M = \sqrt{a^2 + b^2}$ e $\theta = \tan^{-1}(b/a) + 2\pi k$. Portanto:

$$\ln(a + jb) = \ln(Me^{j\theta}) = \ln(M) + \ln(e^{j\theta}) = \ln(M) + j\theta$$
$$= \ln(\sqrt{a^2 + b^2}) + j\left[\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) \pm 2\pi k\right], \quad k = 0, 1, 2, \cdots$$

$$\begin{aligned} f(\lambda_1) &= \ln(0.995 + 0.0998j) = j(0.1 + 2\pi k_1) \\ f(\lambda_2) &= \ln(0.995 - 0.0998j) = -j(0.1 + 2\pi k_2) \\ f(\lambda_3) &= \ln(1) = j2\pi k_3 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} a_1\lambda_1^2 + a_2\lambda_1 + a_3 &= f(\lambda_1) \\ a_1\lambda_2^2 + a_2\lambda_2 + a_3 &= f(\lambda_2) \\ a_1\lambda_3^2 + a_2\lambda_3 + a_3 &= f(\lambda_3) \end{aligned}$$

Exemplo Ilustrativo 6

- Este sistema tem infinitas soluções: Fazendo $k_1 = k_2 = k_3 = 0$:

$$\begin{cases} a_1 = -0.5008 \\ a_2 = 1.9983 \\ a_3 = -1.4975 \end{cases} \Rightarrow \quad \ln \Gamma = a_1 \Gamma^2 + a_2 \Gamma + a_3 \mathsf{I} = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 0 \\ -0.1 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Com isso:

$$\Delta = \begin{bmatrix} \mathsf{A} & \mathsf{B} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{\ln \Gamma}{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \mathsf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathsf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Exemplo Ilustrativo 6

- Se adotarmos $k_1 = k_2 = 1$ e $k_3 = 0$:

$$\begin{cases} a_1 = -31.9692 \\ a_2 = 127.5573 \\ a_3 = -95.5881 \end{cases} \Rightarrow \quad \ln\Gamma = a_1\Gamma^2 + a_2\Gamma + a_3\mathsf{I} = \begin{bmatrix} 0 & 6.3832 & 0 \\ -6.3832 & 0 & 6.3832 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Com isso:

$$\Delta = \begin{bmatrix} \mathsf{A} & \mathsf{B} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{\ln\Gamma}{T} = \begin{bmatrix} 0 & 63.832 & 0 \\ -63.832 & 0 & 63.832 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \mathsf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 63.832 \\ -63.832 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathsf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 63.832 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Exemplo Ilustrativo 6

- Esse outro sistema contínuo, que tem autovalores $\pm j63.832$, também é modelado pelo mesmo sistema discreto se discretizado com $T = 0.1s$. Uma frequência angula de $\omega = 63.832\, rad/s$ corresponde a uma frequência de oscilação de $f = \frac{\omega}{2\pi} = 10.159Hz$ e a um período de $t = \frac{1}{f} = 0.098s$. Portanto, o período de amostragem de $T = 0.1s$ é claramente insuficiente.

Equivalência com Funções de Transferência

- A função de transferência discreta $G(z)$ de um sistema é a relação entre as transformadas Z dos sinais de saída e de entrada com condições iniciais nulas. A aplicação da transformada Z no modelo discreto para $\boldsymbol{x}_0 = \mathbf{0}$ leva a:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \bar{\mathsf{A}}\mathbf{x}_k + \bar{\mathsf{B}}\mathbf{u}_k \quad \Rightarrow \quad z\mathbf{X}(z) = \bar{\mathsf{A}}\mathbf{X}(z) + \bar{\mathsf{B}}\mathbf{U}(z) \quad \Rightarrow$$

$$\mathbf{X}(z) = (z\mathsf{I} - \bar{\mathsf{A}})^{-1}\bar{\mathsf{B}}\mathbf{U}(z) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{X}(z) = \Phi(z)\bar{\mathsf{B}}\mathbf{U}(z) \qquad \text{onde} \quad \Phi(z) = (z\mathsf{I} - \bar{\mathsf{A}})^{-1}$$

$$\mathbf{Y}(z) = \mathsf{C}\mathbf{X}(z) + \mathsf{D}\mathbf{U}(z) \quad \Rightarrow \quad Y(z) = \mathsf{C}\left[\Phi(z)\bar{\mathsf{B}}U(z)\right] + DU(z) \quad \Rightarrow$$

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \mathsf{C}\Phi(z)\bar{\mathsf{B}} + D = \mathsf{C}(z\mathsf{I} - \bar{\mathsf{A}})^{-1}\bar{\mathsf{B}} + D$$

Exemplo Ilustrativo 7

- Determine a função de transferência discreta do sistema:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} u_k \\ y_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k \end{cases}$$

- Solução:

$$\Phi(z) = \left(\begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} z & -1 \\ 2 & z+3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{z^2+3z+2} \begin{bmatrix} z+3 & 1 \\ -2 & z \end{bmatrix}$$

$$G(z) = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z+3 & 1 \\ -2 & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}}{z^2+3z+2} = \frac{0.5z+2}{z^2+3z+2}$$

Conversão da FT discreta para espaço de estados

- A conversão de FT discreta para o espaço de estados é semelhante ao caso contínuo e a representação em espaço de estados não é única;
- Consideraremos, através de um exemplo, a conversão para as formas canônicas controlável, observável e de Jordan.

Exemplo Ilustrativo 8

- Para o sistema descrito pela FT discreta:

$$G(z) = \frac{0.5z^3 + 3z^2 + 2.5z + 4}{z^3 + 4z^2 + 5z + 2}$$

- Determine modelos equivalentes no espaço de estados utilizando as formas canônicas controlável, observável e de Jordan;
- Fazendo a divisão polinomial e a expansão em frações parciais teremos:

$$G(z) = 0.5 + \frac{z^2 + 3}{z^3 + 4z^2 + 5z + 2} = 0.5 + \frac{z^2 + 3}{(z+1)^2(z+2)} = 0.5 + \frac{4}{(z+1)^2} - \frac{6}{z+1} + \frac{7}{z+2}$$

Exemplo Ilustrativo 8

- Os modelos equivalentes em espaço de estados são:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -5 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k \\ y_k = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 0.5 \end{bmatrix} u_k \end{cases}$$

Forma canônica controlável

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k \\ y_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 0.5 \end{bmatrix} u_k \end{cases}$$

Forma canônica observável

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u_k \\ y_k = \begin{bmatrix} 4 & -6 & 7 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 0.5 \end{bmatrix} u_k \end{cases}$$

Forma canônica de Jordan

Relação entre Pólos e Zeros contínuos e discretos

- Considere um sistema contínuo de *n*-ésima ordem descrito por:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathrm{A}\mathbf{x} + \mathrm{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathrm{C}\mathbf{x} + \mathrm{D}\mathbf{u} \end{cases}$$

- Os pólos desse sistema são os autovalores de A, que indicaremos por $\lambda_i(A), i = 1, \dots, n$. A amostragem com um segurador de ordem zero leva ao modelo discreto:

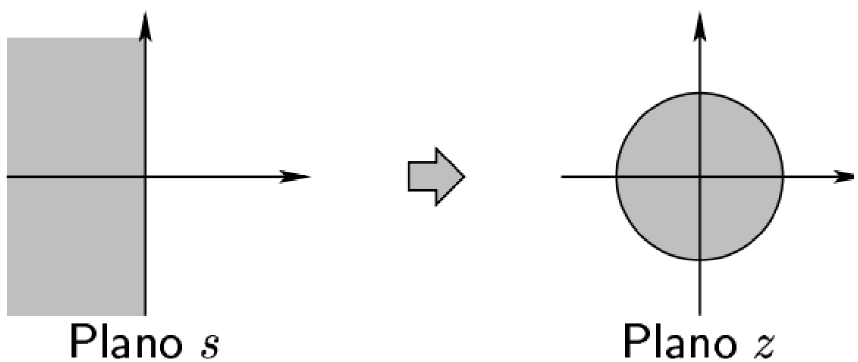
$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \bar{\mathrm{A}}\mathbf{x}_k + \bar{\mathrm{B}}\mathbf{u}_k \\ \mathbf{y}_k = \mathrm{C}\mathbf{x}_k + \mathrm{D}\mathbf{u}_k \end{cases}$$

Relação entre Pólos e Zeros contínuos e discretos

- Os pólos discretos são os autovalores de $\bar{A}$ que indicaremos por $\lambda_i(\bar{A})$. Como $\bar{A} = e^{AT}$ concluimos que:

$$\lambda_i(\bar{\mathsf{A}}) = e^{\lambda_i(\mathsf{A})T} \quad \Rightarrow \quad p_z = e^{p_s T}$$

- Em que p_z e p_s são os valores dos pólos nos planos *z* e *s* respectivamente. O semi-plano esquerdo em *s*, por exemplo, é mapeado no círculo de raio unitário no plano *z*.



Relação entre Pólos e Zeros contínuos e discretos

- Este mapeamento não é bijetivo, pois vários pontos em *s* são mapeados no mesmo ponto no plano *z* (justificativa teórica do efeito do mascaramento);
- O mapeamento dos zeros não é dado de forma simples como nos pólos. Uma FT contínua tem, via de regra, número de zeros (n_z) inferior ao número de pólos (n_p), sendo a diferença expressa por $d = n_p - n_z$. Em sistemas discretos, via de regra, o número de zeros geralmente é $n_z = n_p - 1$;
- Portanto, quando $d > 1$, percebemos que o processo de amostragem cria zeros adicionais.

Relação entre Pólos e Zeros contínuos e discretos

- Para pequenos períodos de amostragem, um sistema contínuo com zeros em s_i gerará um sistema discreto com zeros z_i aproximadamente em:

$$z_i \simeq e^{s_i T}$$

- Os $d - 1$ zeros adicionais tenderão para as raízes dos polinômios Z_s da tabela abaixo:

d	Z_d	zeros
1	1	—
2	$z + 1$	-1
3	$z^2 + 4z + 1$	-0.268, -3.732
4	$z^3 + 11z^2 + 11z + 1$	-0.101, -1, -9.899
5	$z^4 + 26z^3 + 66z^2 + 26z + 1$	-0.043, -0.431, -2.322, -23.204

Referências

- Adelardo Medeiros. *Apostila de Modelagem e Análise de Sistemas Dinâmicos*, UFRN, 2003;
- Katsuhiko Ogata, *Engenharia de Controle Moderno*, Prentice Hall, 3ª ed., 1997.