Gabarito – Lista 2 – Modelos Discretos de Sistemas Dinâmicos

Questão 1

a)

$$\frac{Y(z)}{U(z)} \to G(z) = \frac{1 - e^{-at}}{z - e^{-at}}$$

b)

$y_{1=}$ 0,183

$y_{2=}$ 0,3297

$y_{3=}$ 0,4512

Questão 2

a)

$$\overline{A} = e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$\overline{B} = \begin{bmatrix} (1 - e^{-t}) \\ \frac{1}{2}(1 - e^{-2t}) \end{bmatrix}$$

b)

$$G(z) = \frac{1 - e^{-t}}{z - e^{-2t}} = \frac{A}{z - B}$$

c)

$y(k+1) = B\,y(k) = Au(k)$

Degrau $u(k) = 1 \quad k \geq 0$

$y(0) = 0$

$y(1) = 0{,}1813$

$y(2) = 0{,}3297$

$y(3) = 0{,}4511$

Questão 3

x(0)=0, x(1)=10 e x(2)=17

Questão 4

a)

$$G(z) = \frac{0.01811\, z \;+\; 0.01639}{z^2 \;-\; 1.724\, z \;+\; 0.7408}$$

b)

Os polos de G(z) são as raízes de $z^2 \;-\; 1.724\, z \;+\; 0.7408$:

$p_1 = 0.9094$
$p_2 = 0.8146$

Genericamente, o denominador de G(z) é expresso em forma de T como sendo:

$$d(z) = (z - e^{-T})(z - e^{-2T})$$

O aumento o período de amostragem faz com que os polos do sistema tendam a zero. Polos mais próximos a zero representam sistemas mais lentos.

Questão 5

a) Considerando uma realização na forma canônica observável:

$$\text{Forma Canônica observável} \begin{cases} \dot{\mathrm{X}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \mathrm{X} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathrm{U} \\ \dot{\mathrm{Y}} = [0\ 1]\mathrm{X} \end{cases}$$

O modelo discretizado com um período T será:

$$\overline{\mathrm{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{T}} & \mathrm{e}^{-\mathrm{T}} \end{bmatrix} \quad \overline{\mathrm{B}} = \begin{bmatrix} \mathrm{T} \\ \mathrm{T} - 1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{T}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \vec{\mathrm{X}}_{\mathrm{K}+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{T}} & \mathrm{e}^{-\mathrm{T}} \end{bmatrix} \vec{\mathrm{X}}_{\mathrm{K}} + \begin{bmatrix} \mathrm{T} \\ \mathrm{T} - 1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{T}} \end{bmatrix} \mathrm{U} \\ \dot{\mathrm{Y}} = [0\ 1]\vec{\mathrm{X}}_{\mathrm{K}} \end{cases}$$

b)

$$\mathrm{G(Z)} = \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{Z} - 1} - \frac{1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{T}}}{\mathrm{Z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{T}}}$$

Questão 6

a)

$$G(z) = \frac{2T^2(z+1)}{2(z-1)^2}$$

b)

$$Y(z) = \frac{2T^2}{(z-1)^3} + \frac{3T^2}{(z-1)^2} + \frac{T^2}{(z-1)^1}$$

Questão 7

a)

$$G(z) = \frac{0.03516\,z\ +\ 0.03078}{z^2\ -\ 1.67\,z\ +\ 0.6703}$$

b)

$$G(z) = \frac{0.03516\,z\ +\ 0.03078}{z^2\ -\ 1.6348\,z\ +\ 0.7011}$$

c)

A sequência tende para aproximadamente 0.9946