DINÂMICA DOS CORPOS RÍGIDOS

Medidas de Distribuição de Massa:

Momentos:

Considere um corpo rígido de massa m e volume V, com um referencial {A} fixo nele. Seja a função de densidade $\rho = \rho({}^{A}P) = dm({}^{A}P)/dV$, que descreve a quantidade infinitesimal de massa dm que é contida em um volume infinitesimal dV localizado na posição ${}^{A}P$ do corpo. Para caracterizar quantitativamente, de modo mais simples, a maneira como a massa está distribuída no corpo, definem-se as seguintes medidas de distribuição de massa:

Momento de ordem 0 – massa do corpo:

$$ {}^{A}m^{(0)} = \int_V \rho({}^{A}P).dV = m $$

Momento de ordem 1 – massa × centro de massa do corpo:

$$ {}^{A}m^{(1)} = \int_V {}^{A}P.\rho({}^{A}P).dV = m.{}^{A}P_G $$

Onde, ${}^{A}P_G$ é a posição do centro de massa do corpo expressa no referencial {A}.

Momento de ordem 2 – tensor de inércia do corpo:

$$ {}^{A}m^{(2)} = \int_V [{}^{A}P\times].[{}^{A}P\times]^T.\rho({}^{A}P).dV = \int_V [({}^{A}P^T.{}^{A}P).I - ({}^{A}P.{}^{A}P^T)].\rho({}^{A}P).dV = {}^{A}I $$

Onde, a matriz simétrica ${}^{A}I$, de dimensões 3×3, é o tensor de inércia do corpo expresso no referencial {A}.

Os elementos da diagonal de ${}^{A}I$ são denominados <u>momentos de inércia</u> em torno dos eixos x_A, y_A e z_A, respectivamente:

$${}^{A}I_{xx} = \int_V ({}^{A}P_y^2 + {}^{A}P_z^2).\rho({}^{A}P).dV$$

$${}^{A}I_{yy} = \int_V ({}^{A}P_z^2 + {}^{A}P_x^2).\rho({}^{A}P).dV$$

$${}^{A}I_{zz} = \int_V ({}^{A}P_x^2 + {}^{A}P_y^2).\rho({}^{A}P).dV$$

Os elementos fora da diagonal de ${}^{A}I$, (desconsiderando o sinal negativo), são denominados <u>produtos de inércia</u> em relação aos pares de eixos (x_A,y_A), (y_A,z_A), (z_A,x_A), respectivamente:

$${}^{A}I_{xy} = -\int_V ({}^{A}P_x.{}^{A}P_y).\rho({}^{A}P).dV$$

$${}^{A}I_{yz} = -\int_V ({}^{A}P_y.{}^{A}P_z).\rho({}^{A}P).dV$$

$${}^{A}I_{zx} = -\int_V ({}^{A}P_z.{}^{A}P_y).\rho({}^{A}P).dV$$

<u>Teorema dos eixos paralelos (Teorema de Steiner)</u>:

Considere um corpo de massa m, cujo centro de massa está localizado na posição ${}^{U}P_G$ relativa a um referencial {U}. Seja {G} um referencial com origem no centro de massa ${}^{U}P_G$ do corpo e com a mesma orientação de {U}, de modo que os eixos de {G} são paralelos aos eixos de {U}. Então, o teorema dos eixos paralelos estabelece que:

$${}^{U}I = {}^{G}I + m.[{}^{U}P_G\times].[{}^{U}P_G\times]^T = {}^{G}I + m.[({}^{U}P_G^T.{}^{U}P_G).I - ({}^{U}P_G.{}^{U}P_G^T)]$$

Exemplo: dado o paralelepípedo de densidade ρ constante e dimensões L_x, L_y e L_z, mostrado na figura abaixo, determine a sua massa, a posição do seu centro de massa ${}^{A}P_G$ em relação a um referencial {A} fixo na quina do paralelepípedo e o tensor de inércia expresso em {A} e em um referencial {G} paralelo a {A}, com origem em ${}^{A}P_G$.

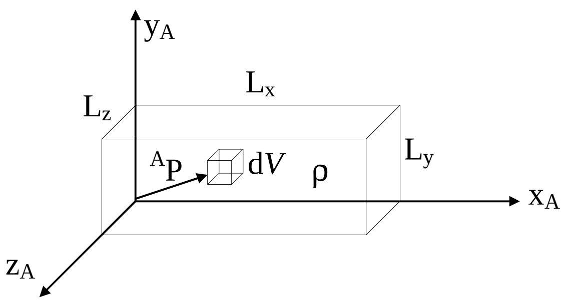

Figura 4.3. Distribuição de massa em um paralelepípedo.

$$m = {}^{A}m^{(0)} = \int_V \rho({}^{A}P).dV = \rho.\int_V dV = \rho.V = \rho.L_x.L_y.L_z$$

$${}^{A}m^{(1)} = \int_V {}^{A}P.\rho({}^{A}P).dV = \rho.[(L_y.L_z.\ L_x^2)/2 \quad (L_z.L_x.\ L_y^2)/2 \quad (L_y.L_z.\ L_x^2)/2]^T$$

Mas, ${}^{A}P_G = {}^{A}m^{(1)}/m \quad \Rightarrow \quad {}^{A}P_G = [L_x/2 \quad L_y/2 \quad L_z/2]^T$

$${}^{A}I = {}^{A}m^{(2)} = \int_V [{}^{A}P\times].[{}^{A}P\times]^T.\rho({}^{A}P).dV = \rho.\int_V [{}^{A}P\times].[{}^{A}P\times]^T.dV$$

$$\Rightarrow {}^{A}I = \rho\int_V \begin{bmatrix} (y^2+z^2) & -x.y & -x.z \\ -y.x & (z^2+x^2) & -y.z \\ -z.x & -z.y & (x^2+y^2) \end{bmatrix} dV$$

$$\Rightarrow {}^{A}I = m.\begin{bmatrix} (L_y^2+L_z^2)/3 & -L_x.L_y/4 & -L_x.L_z/4 \\ -L_y.L_x/4 & (L_z^2+L_x^2)/3 & -L_y.L_z/4 \\ -L_z.L_x/4 & -L_z.L_y/4 & (L_x^2+L_y^2)/3 \end{bmatrix}$$

$${}^{A}I = {}^{G}I + m.[{}^{A}P_G\times].[{}^{A}P_G\times]^T \quad \Rightarrow \quad {}^{G}I = {}^{A}I - m.[{}^{A}P_G\times].[{}^{A}P_G\times]^T$$

$$\Rightarrow {}^{G}I = m.\begin{bmatrix} (L_y^2+L_z^2)/12 & 0 & 0 \\ 0 & (L_z^2+L_x^2)/12 & 0 \\ 0 & 0 & (L_x^2+L_y^2)/12 \end{bmatrix}$$

Dinâmica:

<u>Equações de movimento</u>:

Um corpo rígido movimentando-se livremente no espaço possui seis graus de liberdade de movimento, três de posição e três de orientação. Assim, seis equações independentes são necessárias para descrever o seu movimento. Considere um corpo rígido cuja posição em relação a um referencial inercial {U}é descrita pelo vetor ${}^{U}P_G$ ligando a origem de {U} à origem do referencial {G} fixo no corpo e com origem no centro de massa do mesmo. Considere um referencial {UG} paralelo a {U}, mas com a mesma origem de {G}, (ou seja, no centro de massa do corpo), conforme mostra a figura abaixo. Assumindo que o corpo rígido possui um momento linear M_L e um momento angular M_A, então, o corpo é submetido a uma força resultante externa ${}^{U}f_G$ e a um conjugado resultante externo em torno de {G} ${}^{U}n_G$ dados pela Segunda Lei do movimento de Newton:

$${}^{U}f_G = d(M_L)/dt$$

$${}^{U}n_G = d(M_A)/dt$$

Assumindo que a massa do corpo é constante e igual a m, o momento linear é:

$$M_L = m.d({}^{U}P_G)/dt = m.{}^{U}v_G$$

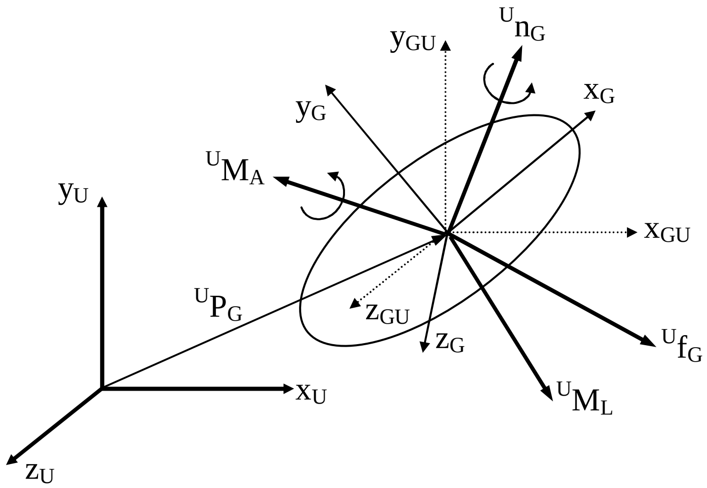

Figura 4.4. Momentos e esforços resultantes em um corpo rígido.

Assim, a força resultante sobre o corpo é dada pela Equação de Newton:

$^{U}f_G = m.d^2(^{U}P_G)/dt^2 = m.d(^{U}v_G)/dt = m.^{U}v_G'$

Considerando que $^{U}f_G = {}^{U}R_G.{}^{G}f_G$ e $^{U}v_G' = {}^{U}R_G.{}^{G}v_G'$, então, a equação de Newton no referencial {G} fixo no corpo é dada por:

$^{G}f_G = m.^{G}v_G'$

Considere que o corpo gira com uma velocidade angular $^{UG}\omega_G = {}^{U}\omega_G$, conforme mostrado na figura abaixo. Seja d*V* o volume de uma partícula infinitesimal do mesmo, então, sua massa é dada por dm = ρ.d*V*, onde ρ é a densidade da partícula. Sejam ^{U}P o vetor de posição da partícula em relação a {U}e ^{UG}P o vetor de posição da partícula em relação a {UG}, tal que $^{U}P = {}^{U}P_G + {}^{UG}P$. A velocidade linear com que a partícula se desloca em relação ao eixo de rotação é dada por $d(^{UG}P)/dt = {}^{UG}\omega_G \times {}^{UG}P$. Então, o momento angular da partícula infinitesimal é dado por:

$dM_A = {}^{UG}P \times [(\rho.dV).d(^{UG}P)/dt] = {}^{UG}P \times [(\rho.dV).(^{UG}\omega_G \times {}^{UG}P)]$

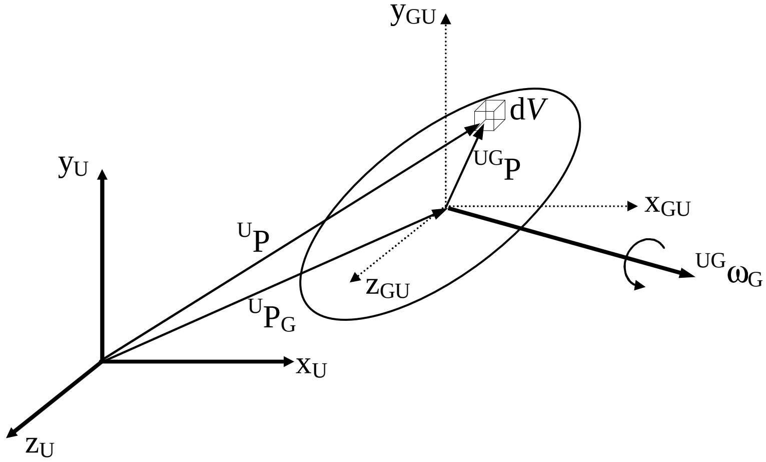

Figura 4.5. Rotação de um corpo rígido.

Assim, o momento angular total do corpo pode ser obtido integrando dM_A ao longo de todo o volume *V* do mesmo:

$$M_A = \int_V dM_A = \int_V {}^{UG}P\times({}^{UG}\omega_G\times{}^{UG}P).\rho.dV$$

$$\Rightarrow M_A = \left(\int_V [{}^{UG}P\times][{}^{UG}P\times]^T.\rho.dV\right).{}^{UG}\omega_G = {}^{UG}I.{}^{UG}\omega_G$$

Assim, o conjugado resultante externo sobre o corpo rígido é dado por:

$${}^{U}n_G = d({}^{UG}I.{}^{UG}\omega_G)/dt$$

Como o referencial {UG} é paralelo ao referencial inercial {U}, o tensor de inércia ${}^{UG}I$ não será constante, variando de acordo com a orientação relativa entre {G} e {UG}. Por outro lado, expressando o momento angular no referencial {G}, temos $M_A = {}^{U}R_G.{}^{G}M_A$, ou ${}^{G}M_A = {}^{U}R_G{}^{T}.M_A$. Como ${}^{UG}\omega_G = {}^{U}\omega_G = {}^{U}R_G.{}^{G}\omega_G$, temos:

$${}^{G}M_A = {}^{U}R_G{}^{T}.{}^{UG}I.{}^{U}R_G.{}^{G}\omega_G = {}^{G}I.{}^{G}\omega_G$$

onde ${}^{G}I = [{}^{U}R_G{}^{T}.{}^{UG}I.{}^{U}R_G]$ é o tensor de inércia no referencial {G}. Expressando ${}^{UG}I$ em função de ${}^{G}I$, temos:

$${}^{UG}I = [{}^{U}R_G.{}^{G}I.{}^{U}R_G{}^{T}]$$

Como o referencial {G} é fixo no corpo, ${}^{G}I$ é um tensor constante. Assim,

$${}^{U}n_G = d(M_A)/dt = d({}^{U}R_G.{}^{G}M_A)/dt = {}^{U}R_G.d({}^{G}M_A)/dt + {}^{U}\omega_G\times({}^{U}R_G.{}^{G}M_A)$$

$$\Rightarrow {}^{U}n_G = {}^{U}R_G.d({}^{G}I.{}^{G}\omega_G)/dt + ({}^{U}R_G.{}^{G}\omega_G)\times({}^{U}R_G.{}^{G}I.{}^{G}\omega_G)$$

$$\Rightarrow {}^{U}n_G = {}^{U}R_G.[{}^{G}I.d({}^{G}\omega_G)/dt + {}^{G}\omega_G\times({}^{G}I.{}^{G}\omega_G)]$$

Mas, como ${}^{U}n_G = {}^{U}R_G.{}^{G}n_G$ e $d({}^{G}\omega_G)/dt = {}^{G}\omega_G'$, temos:

$${}^{G}n_G = {}^{G}I.{}^{G}\omega_G' + {}^{G}\omega_G\times({}^{G}I.{}^{G}\omega_G)$$

A expressão acima é a Equação de Euler descrita no referencial {G}. Para representar a Equação de Euler no referencial {U}, é necessário converter a aceleração angular para este sistema de eixos:

$$d({}^{U}\omega_G)/dt = d({}^{U}R_G.{}^{G}\omega_G)/dt = {}^{U}R_G.d({}^{G}\omega_G)/dt + {}^{U}\omega_G\times{}^{U}\omega_G = {}^{U}R_G.{}^{G}\omega_G'$$

$$\Rightarrow {}^{U}n_G = {}^{U}R_G.{}^{G}I.{}^{G}\omega_G' + ({}^{U}\omega_G)\times({}^{U}R_G.{}^{G}I.{}^{G}\omega_G) =$$

$$\Rightarrow {}^{U}n_G = {}^{U}R_G.{}^{G}I.\,{}^{U}R_G{}^{T}.{}^{U}\omega_G' + ({}^{U}\omega_G)\times({}^{U}R_G.{}^{G}I.\,{}^{U}R_G{}^{T}.{}^{U}\omega_G)$$

$$\Rightarrow {}^{U}n_G = {}^{UG}I.{}^{U}\omega_G' + ({}^{U}\omega_G)\times({}^{UG}I.{}^{U}\omega_G)$$