



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE  
CENTRO DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE COMPUTAÇÃO E AUTOMAÇÃO  
CURSO DE ENGENHARIA DE COMPUTAÇÃO E AUTOMAÇÃO**

## **MODELO MATEMÁTICO DA CINEMÁTICA INVERSA DO BRAÇO MANIPULADOR LYNXMOTION AL5D**

Deborah Victória Lima Moreira: 20170036030

Kaike Castro Carvalho: 20170097976

Marcos Henrique Fernandes Marcone: 20170034054

# 1 INTRODUÇÃO

Robôs podem ser definidos como um grupo de dispositivos eletromecânicos ou biomecânicos, que são capazes de realizar tarefas pré-programadas de maneira autônoma ou por meio do controle humano. Nos últimos anos, nota-se um crescente investimento por parte das indústrias na área de automatização com robôs, visando assim cada vez mais a otimização dos seus processos (PIMENTA, 2009).

No mercado e na indústria, um dos principais tipos de robôs comercializados e utilizados são os braços manipuladores robóticos. Esses dispositivos são caracterizados por emular a função de um braço humano, isto é, por meio do seu movimento eles conseguem manipular diferentes objetos, como ferramentas e peças, que estão contidos no seu espaço de trabalho (PIMENTA, 2009).

Basicamente, um braço manipulador possui como componentes: uma base fixa, elos, juntas, que são rotacionais ou prismáticas, e um órgão terminal, que pode ser um efetuador, uma garra ou uma ferramenta. Esses elementos são combinados da seguinte forma: os elos (corpos rígidos) são interligados em uma cadeia cinemática através das juntas, as quais são acionadas de modo a posicionar a extremidade livre da cadeia (órgão terminal) em relação à outra extremidade, que é a base fixa (ALSINA, 2019).

Na indústria, os braços manipuladores robóticos são usados em diferentes aplicações, como por exemplo: na carga e descarga de objetos; no processo de paletização; no armazenamento automático de produtos; na montagem automatizada de veículos; na soldagem; na pintura; e na usinagem. Assim como, é preciso ressaltar que, além das aplicações industriais, existem também kits educacionais com braços robóticos para que os estudantes possam desenvolver suas habilidades em robótica, como é o caso, por exemplo, do braço Lynxmotion AL5D.

Ao manipular um desses dispositivos existem importantes propriedades que precisam ser determinadas, uma delas é a cinemática direta do robô. O problema da cinemática direta consiste em determinar a localização (posição e orientação) do órgão terminal e de cada elo do manipulador a partir do valor atual das variáveis de junta, que são os ângulos ou descolamentos de cada junta (ALSINA, 2019).

Assim, dentro desse contexto, o objetivo deste trabalho foi desenvolver um modelo matemático de cinemática direta para um braço manipulador robótico Lynxmotion AL5D. Para isso, foi utilizado como base a Notação de Denavit Hartenberg, assim como o conceito de Transformações Homogêneas para representar a localização de cada elemento do manipulador.

O trabalho está organizado da seguinte forma. Na Seção 2, é apresentado o referencial teórico que possui a definição de Transformações Homogêneas e o que elas representam, assim como é mostrada a Notação de Denavit Hartenberg e as suas convenções. Já a Seção 3 contém a metodologia do trabalho que consiste na descrição do braço manipulador Lynxmotion AL5D. Na Seção 4, são apresentados os resultados que é o processo de obtenção do modelo de cinemática direta para o manipulador Lynxmotion AL5D. Por fim, na Seção 5, são feitas as considerações finais.

## 2 REFERENCIAL TEÓRICO

Essa seção apresenta o conceito de Transformações Homogêneas e as suas propriedades. Assim como, é mostrada a Notação de Denavit Hartenberg e os seus parâmetros. Essas ferramentas foram a base para determinar a cinemática direta do manipulador Lynxmotion AL5D.

### 2.1 TRANSFORMAÇÕES HOMOGÊNEAS

Na Figura 1, A matriz  ${}^A T_B$  é uma transformação homogênea que estabelece uma relação entre a localização de um referencial  $\{B\}$  para outro referencial  $\{A\}$ . A matriz rotação  ${}^A R_B$  3x3, que representa a orientação de  $\{B\}$  em relação a  $\{A\}$ , e o vetor posição  ${}^A P_B$  fazem parte do conjunto da transformação, pois gera um mapeamento geral entre os dois referenciais.

Figura 1. Relações de Transformação Homogênea.

$$\begin{bmatrix} {}^A P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^A R_B & {}^A P_B \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} {}^B P \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{onde,} \quad {}^A T_B = \begin{bmatrix} {}^A R_B & {}^A P_B \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Fonte: Alsina, 2019.

#### 2.1.1 Propriedades das Transformações

Os três primeiros vetores colunas da  ${}^A T_B$  são definidos pelos vetores ortogonais  ${}^A X_B$ ,  ${}^A Y_B$ ,  ${}^A Z_B$  e a quarta coluna representada pelo vetor posição de  ${}^A P_B$ . A quarta linha da matriz é adicionada para que ela seja uma matriz quadrada 4x4 e que exista uma matriz inversa. A Figura 2 exemplifica a transformação inversa de  ${}^A T_B$ .

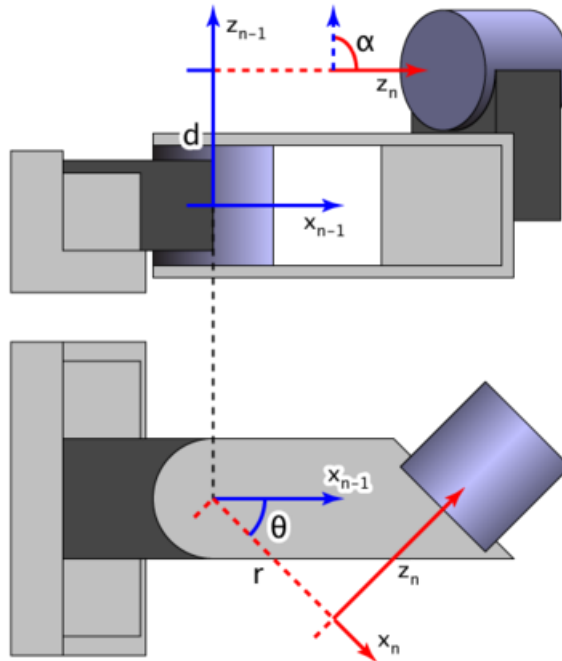
Figura 2. Transformação Inversa Homogênea.

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z & -\mathbf{n}^T \mathbf{p} \\ s_x & s_y & s_z & -\mathbf{s}^T \mathbf{p} \\ a_x & a_y & a_z & -\mathbf{a}^T \mathbf{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{3 \times 3}^T & \begin{bmatrix} -\mathbf{n}^T \mathbf{p} \\ -\mathbf{s}^T \mathbf{p} \\ -\mathbf{a}^T \mathbf{p} \end{bmatrix} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## 2.2 NOTAÇÃO DENAVIT-HARTENBERG

A descrição das relações de translação e de rotação entre dois ou mais elos foram desenvolvidas por Jacques Denavit e Richard Hartenberg em meados da década de 50. Eles introduziram o conceito para a padronização de referências e elos para que braços robóticos fossem programados conforme na Figura 3.

Figura 3. Elementos de Denavit Hartenberg.



A conversão de referência entre os elos segue abaixo:

- Os elos são enumerados partindo da base do robô;
- As juntas correspondentes são enumeradas da mesma maneira;
- O eixo  $\mathbf{z}_i$  é coincidente com o eixo de movimento da junta  $i$ ;

- A origem de  $\{i\}$  é estabelecida na interseção entre o eixo  $z_i$  e a reta normal a  $z_i$  e  $z_{i+1}$ ;
- O eixo  $x_i$  é estabelecido sobre a reta normal a  $z_i$  e  $z_{i+1}$ ;
- O eixo  $y_i$  é definido pela regra da mão direita;

### 2.2.1 Parâmetros Denavit Hartenberg

Há quatro parâmetros de transformações que descreve a cinemática de elos:

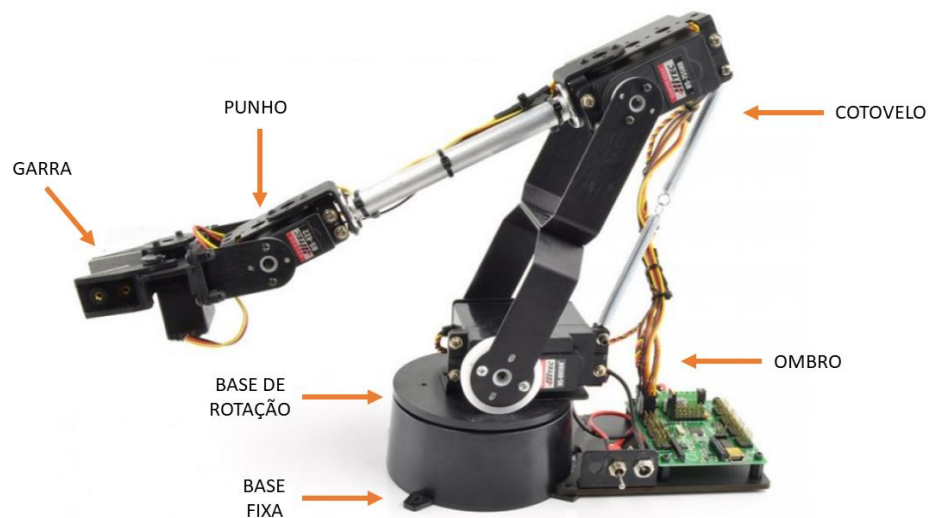
1. Comprimento do elo  $i$  ( $a_i$ ): é a distância entre  $z_i$  e  $z_{i+1}$  medida ao longo do eixo  $x_i$ ;
2. Ângulo de torção do elo  $i$  ( $\alpha_i$ ): é o ângulo entre  $z_i$  e  $z_{i+1}$  medido em torno do eixo  $x_i$ ;
3. Deslocamento da junta  $i$  ( $d_i$ ): é a distância entre  $x_{i+1}$  e  $x_i$  ao longo do eixo  $z_i$ ;
4. Ângulo da junta  $i$  ( $\theta_i$ ): é o ângulo entre  $x_{i-1}$  e  $x_i$  em torno do eixo  $z_i$ ;

## 3 METODOLOGIA

Essa seção apresenta o braço manipulador robótico Lynxmotion AL5D, que foi o objeto de estudo do trabalho. A partir das suas configurações estruturais possível determinar um modelo de cinemática direta utilizando Transformações Homogêneas e a Notação de Denavit Hartenberg.

Segundo a empresa Lynxmotion (2018), o braço manipulador robótico Lynxmotion AL5D é um robô que oferece rapidez, precisão e repetibilidade nos movimentos. Como mostra a Figura 4, esse manipulador possui como composição uma base de rotação, um ombro que se movimenta em um único plano, um cotovelo, um punho e uma garra funcional.

Figura 4. Braço manipulador robótico Lynxmotion AL5D



Fonte: Lynxmotion, 2018.

O braço Lynxmotion AL5D é um robô com quatro graus de liberdades, pois possui ao todo quatro juntas rotacionais: 1x HS-645MG Servo Motor (punho); 1x HS-755HB Giant Scale Servo Motor (cotovelo); 1x HS-805BB Giant Scale Servo Motor (ombro) e 1x HS-485HB Servo Motor (base rotacional).

Segundo o fabricante, o braço Lynxmotion AL5D possui as seguintes propriedades:

- A distância,  $L_0$ , da base fixa até a base de rotação é de 4,3 cm;
- A distância,  $L_1$ , da base de rotação até o ombro é de 2,5 cm;
- A distância,  $L_2$ , do ombro até o cotovelo é de 14,605 cm;
- A distância,  $L_3$ , do cotovelo até o punho é de 18,325 cm
- A distância,  $L_4$ , do punho até a ponta da garra é de 8,5725 cm;
- Cada junta possui uma faixa de variação angular de  $0^\circ$  a  $180^\circ$ ;

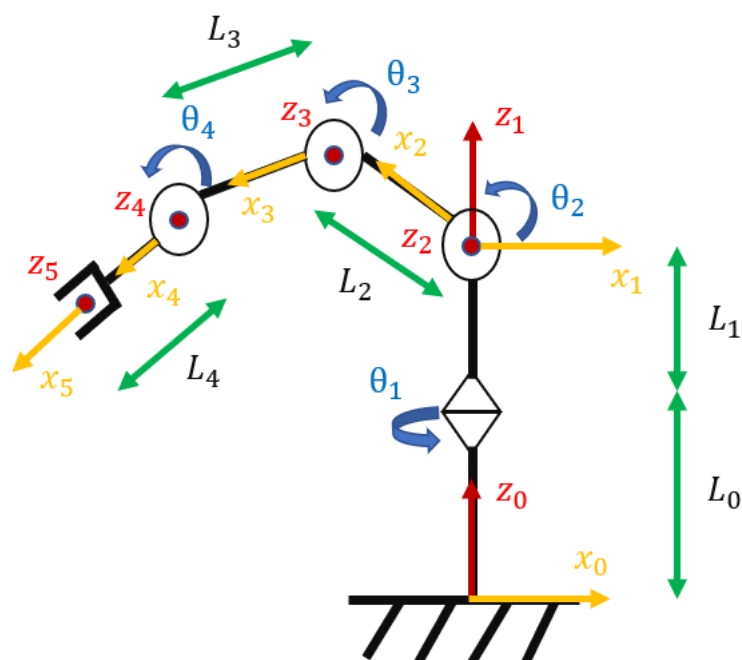
## 4 RESULTADOS

Essa seção mostra o passo a passo para a obtenção do modelo de cinemática direta para o braço manipulador robótico Lynxmotion AL5D.

### 4.1 ESPECIFICAÇÕES DOS EIXOS REFERENCIAIS PARA CADA JUNTA

A Figura 5 mostra a distribuição dos eixos referenciais de acordo com a Notação de Denavit Hatenberg:

Figura 5: Esquemático do manipulador Lynxmotion AL5D



Fonte: Acervo dos autores, 2019.

O eixo referencial para a base fixa está na origem dos eixos de índice 0, enquanto que a base de rotação está na origem dos eixos de índice 1, o ombro localiza-se na origem dos eixos de índice 2, o cotovelo na origem dos eixos de índice 3, o punho na origem dos eixos de índice 4 e, por fim, a garra na origem dos eixos de índice 5. As distâncias entre os eixos foram especificadas na Metodologia - Seção 3.

## 4.2 TABELA COM OS PARÂMETROS DE DENAVIT HATENBERG

A Tabela 1 mostra os valores para os parâmetros de Denavit Hatenberg obtidos através dos referenciais definidos na Figura 5.

Tabela 1. Parâmetros de Denavit Hatenberg.

	$a_{i-1}$	$\alpha_{i-1}$	$d_i$	$\theta_i$
<b>1</b>	0	0°	$L_1 + L_0$	$\theta_1$
<b>2</b>	0	90°	0	$\theta_2$
<b>3</b>	$L_2$	0°	0	$\theta_3$
<b>4</b>	$L_3$	0°	0	$\theta_4$
<b>5</b>	$L_4$	0°	0	0°

## 4.3 MATRIZES DE TRANSFORMAÇÕES DE ELOS

A partir dos parâmetros de Denavit Hatenberg foi possível determinar as Transformações Homogêneas  ${}^{i-1}T_i$ , em que  $i = 1, \dots, 5$  como é mostrado a seguir.

$${}^0T_1 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) & 0 & 0 \\ \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & (L_1 + L_0) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^1T_2 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) & -\sin(\theta_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \sin(\theta_2) & \cos(\theta_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2T_3 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_3) & -\sin(\theta_3) & 0 & L_2 \\ \sin(\theta_3) & \cos(\theta_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^3T_4 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_4) & -\sin(\theta_4) & 0 & L_3 \\ \sin(\theta_4) & \cos(\theta_4) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^4T_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & L_4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

#### 4.4 A FUNÇÃO DA CINEMÁTICA DIRETA

A partir das Transformações dos elos podemos determinar o modelo matemático de cinemática direta para o robô Lynxmotion AL5D. Basta obter a matriz  ${}^0T_5$ , que consiste em:

$${}^0T_5 = {}^0T_1 * {}^1T_2 * {}^2T_3 * {}^3T_4 * {}^4T_5$$

Multiplicando as matrizes obtidas na Seção 4.3, temos os seguintes resultados:

$${}^0T_2 = \begin{bmatrix} c_1c_2 & -c_1s_2 & s_1 & 0 \\ s_1c_2 & -s_1s_2 & -c_1 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 & (L_1 + L_0) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0T_3 = \begin{bmatrix} c_1c_{23} & -c_1s_{23} & s_1 & c_1c_2L_2 \\ s_1c_{23} & -s_1s_{23} & -c_1 & s_1c_2L_2 \\ s_{23} & c_{23} & 0 & (s_2L_2 + L_1 + L_0) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0T_4 = \begin{bmatrix} c_1c_{234} & -c_1s_{234} & s_1 & c_1(c_{23}L_3 + c_2L_2) \\ s_1c_{234} & -s_1s_{234} & -c_1 & s_1(c_{23}L_3 + c_2L_2) \\ s_{234} & c_{234} & 0 & (s_{23}L_3 + s_2L_2 + L_1 + L_0) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por fim, temos que o modelo de cinemática direta para o braço manipulador robótico Lynxmotion AL5D é:

$${}^0T_5 = {}^0T_4 * {}^4T_5 = \begin{bmatrix} c_1c_{234} & -c_1s_{234} & s_1 & c_1(c_{234}L_4 + c_{23}L_3 + c_2L_2) \\ s_1c_{234} & -s_1s_{234} & -c_1 & s_1(c_{234}L_4 + c_{23}L_3 + c_2L_2) \\ s_{234} & c_{234} & 0 & (s_{234}L_4 + s_{23}L_3 + s_2L_2 + L_1 + L_0) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Notações:

$$s_1 = \text{sen}(\theta_1) \quad c_2 = \text{cos}(\theta_2) \quad s_{234} = \text{sen}(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4)$$

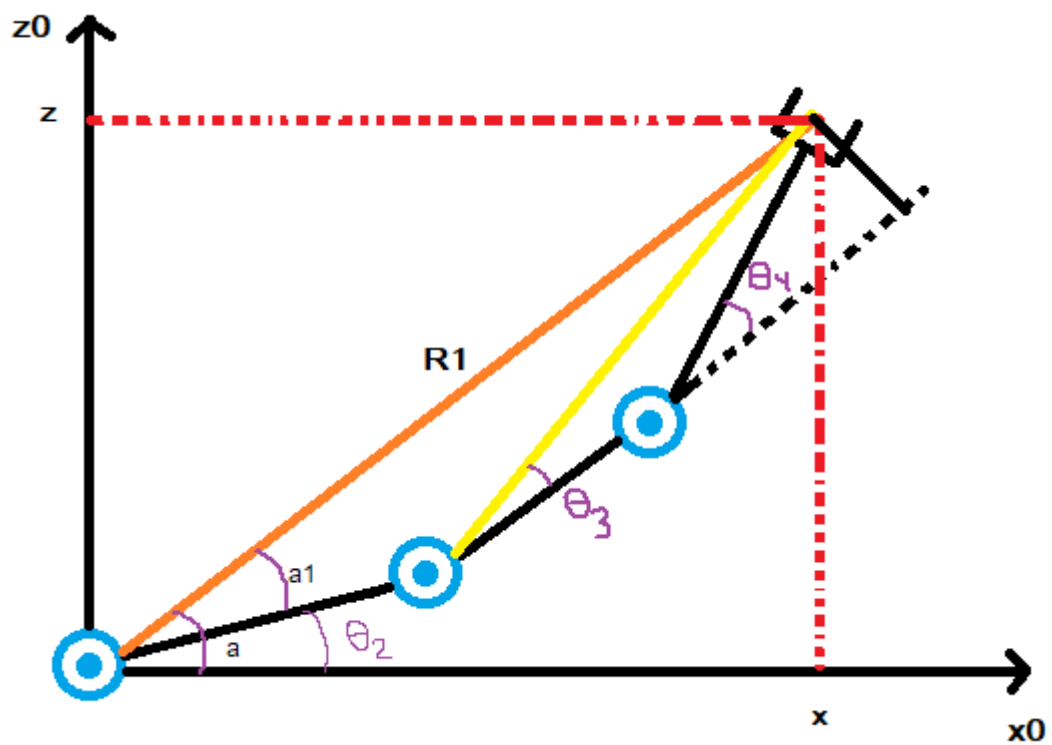
$$c_1 = \text{cos}(\theta_1) \quad c_{23} = \text{cos}(\theta_2 + \theta_3) \quad c_{234} = \text{cos}(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4)$$

$$s_2 = \text{sen}(\theta_2) \quad s_{23} = \text{sen}(\theta_2 + \theta_3)$$



## 4.5 A FUNÇÃO DA CINEMÁTICA INVERSA

Figura 6: Esquemático do manipulador Lynxmotion AL5D explicitado as relações para C.I.



Fonte: Acervo dos autores, 2019.

### 4.5.1 RELAÇÕES DOS ÂNGULOS COM AS POSIÇÕES (x, y, z)

$$\phi = \theta_2 + \theta_3 + \theta_4$$

$$x = x_4(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$$

$$y = y_4(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$$

$$z = z_4(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$$

Os ângulos abaixo foram calculados a partir de relações trigonométricas com forme a figura 6.

$$R1 = \sqrt{(z - L4 \cdot \sin \emptyset - L1)^2 + (\sqrt{x^2 + y^2} - L4 \cdot \cos \emptyset)^2}$$

$$\cos(\alpha1) = (L2^2 + R1^2 - L3)/(2 \cdot L2 \cdot R1)$$

$$\alpha1 = \text{atan2}\left(\sqrt{1 - (\cos \alpha1)^2}, \cos \alpha1\right)$$

$$\alpha = \text{atan2}\left(z - L4 \cdot \sin \emptyset - L1, \sqrt{x^2 + y^2} - L4 \cdot \cos(\emptyset)\right)$$

$$\theta1 = \text{atan2}(y, x)$$

$$\theta2 = \alpha - \alpha1$$

$$\theta3 = 90 - \alpha1 - \cos^{-1}(L2 \cdot \sin(\frac{\alpha1}{L3}))$$

$$\theta4 = \emptyset - \theta2 - \theta3$$

## 5 CONCLUSÃO

O objetivo deste trabalho foi desenvolver um modelo matemático de cinemática inversa para um braço manipulador robótico Lynxmotion AL5D. Para isso, foi utilizado como base a Notação de Denavit Hartenberg, assim como o conceito de Transformações Homogêneas para representar a localização de cada elemento do manipulador.

Podemos concluir que a orientação e a posição da garra em relação a base fixa dependem de 4 variáveis, que são os ângulos de juntas:  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\theta_3$  e  $\theta_4$ . Isto é, basta determinarmos valores entre  $0^\circ$  e  $180^\circ$  para cada ângulo que saberemos a localização da garra em relação ao referencial da base fixa de acordo sistemas de eixos adotados.

## **6 REFERÊNCIAS**

- ALSINA, Pablo Javier. **INTRODUÇÃO À ROBÓTICA**. Natal, 2019. 70 slides, P&B.
- PIMENTA, Thiago Tavares. **Controle de Manipuladores Robóticos**. 2009. 81 f. TCC (Graduação) - Curso de Engenharia de Controle e Automação, Departamento de Engenharia de Controle e Automação, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2009. Disponível em: <[http://meggi.usuarios.rdc.puc-rio.br/teses/TFC09\\_Thiago\\_Pimenta.pdf](http://meggi.usuarios.rdc.puc-rio.br/teses/TFC09_Thiago_Pimenta.pdf)>. Acesso em: 03 set. 2019.
- LYNXMOTION. **Assembly & User Guide for AL5D-PLTW Arm**. 2018. Disponível em: <<https://www.lynxmotion.com/images/document/PDF/PLTW%20-%20AL5D%20Guide.pdf>>. Acesso em: 03 set. 2019.