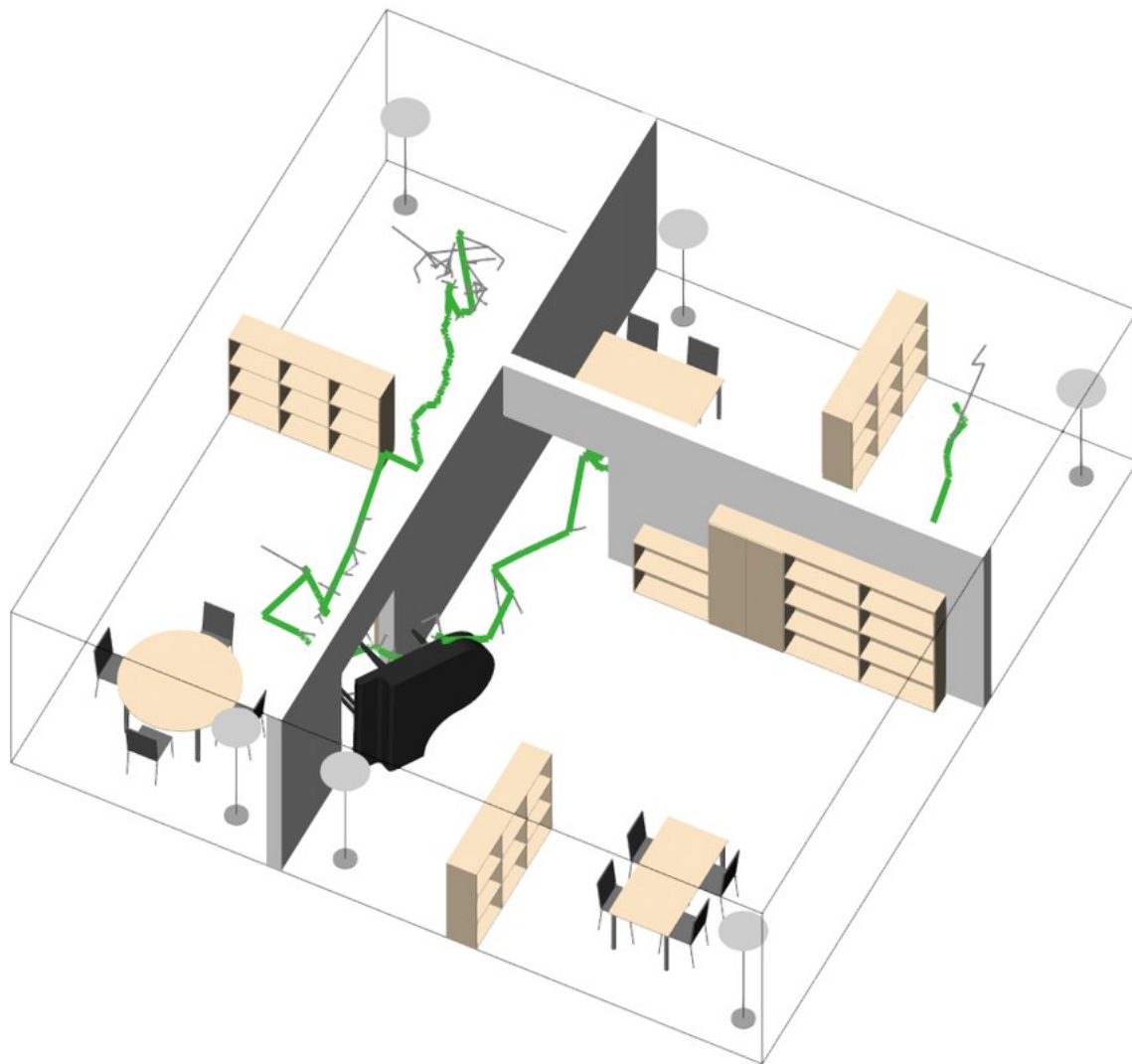


Sistemas Robóticos Autônomos

ESPAÇO DE CONFIGURAÇÃO

O Problema do Carregador de Piano



Espaço de Configuração

Tomás Lozano-Pérez. Spatial Planning: A Configuration Space Approach.
IEEE Transactions on Computers, Vol. c-32, No. 2, February 1983, pp. 108-120.

- O problema de planejamento é originalmente especificado em espaço de trabalho (W - subconjunto de \mathbf{R}^2 ou \mathbf{R}^3).
- Planejar movimento de um corpo extenso (robô A) em espaço povoado por obstáculos extensos B_i 's é um problema complexo.

Espaço de Configuração

Tomás Lozano-Pérez. Spatial Planning: A Configuration Space Approach.
IEEE Transactions on Computers, Vol. c-32, No. 2, February 1983, pp. 108-120.

Solução: mapeamento do problema de trabalho (W - subconjunto de \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3) para espaço de configuração (C).

- Obstáculos B_i 's mapeados em C-Obstáculos CB_i 's, robô mapeado em um ponto \Rightarrow Problema simplificado.
- Padronização do problema de planejamento. Os métodos podem ser aplicados a aplicações robóticas as mais diversas cujas representações em C são semelhantes.

Espaço de Configuração

- $\{A\}$ = Referencial fixo em um robô A .
- $\{W\}$ = Referencial fixo no espaço de trabalho W .
- Configuração q de A = especificação da localização (posição + orientação = pose) de $\{A\}$ em relação a $\{W\}$.
- Exemplo: robô móvel em $R^2 \Rightarrow q = (x, y, \theta)$
- C = Espaço de todas as possíveis configurações de $A \Rightarrow q \in C \ \forall \ q$.
- $A(q)$ = subconjunto de W ocupado por A em q .

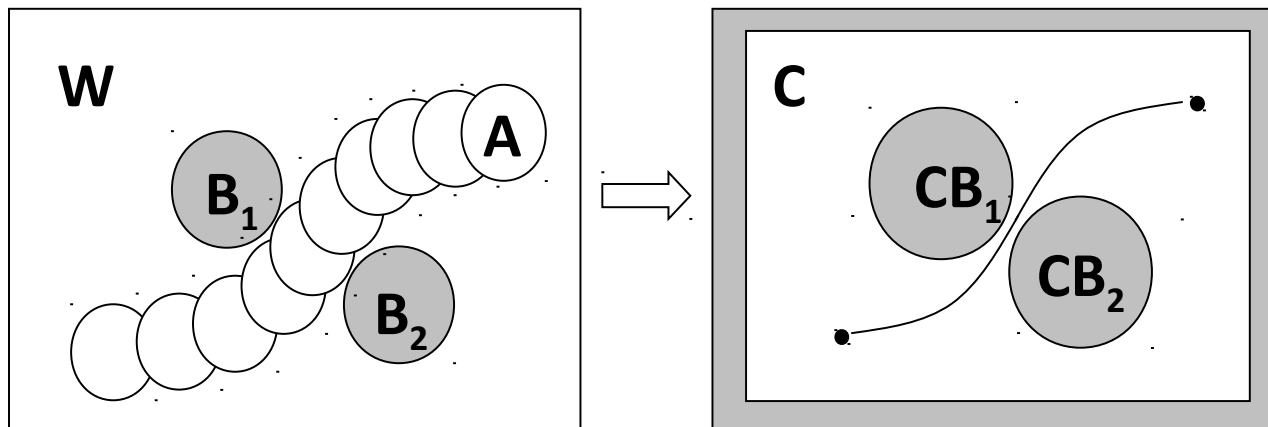
Obstáculos em Espaço de Configuração

- **CB** = conjunto de todas as configurações em que o robô se superpõe parcial ou totalmente à região de obstáculos **B**.
- Região **B** em **W** é representada de forma equivalente por **CB** em **C**.

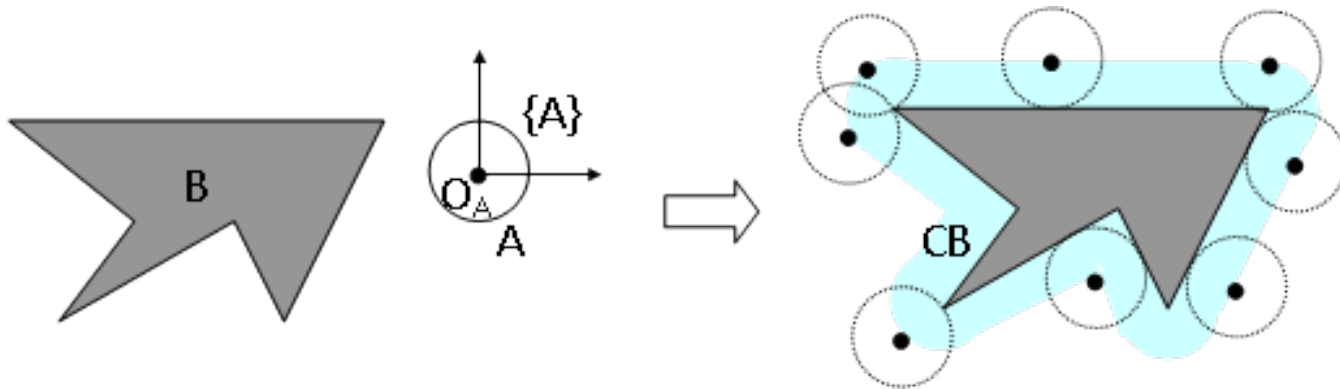
$$\Rightarrow \mathbf{CB}_i = \{q \in \mathbf{C} / A(q) \cap \mathbf{B}_i \neq \emptyset\}$$

- **Espaço de Configuração Livre** $\mathbf{C}_L = \sim \mathbf{CB}_i$ = conjunto de todas as configurações em que o robô não colide com obstáculos \mathbf{B}_i 's.

Espaço de Configuração



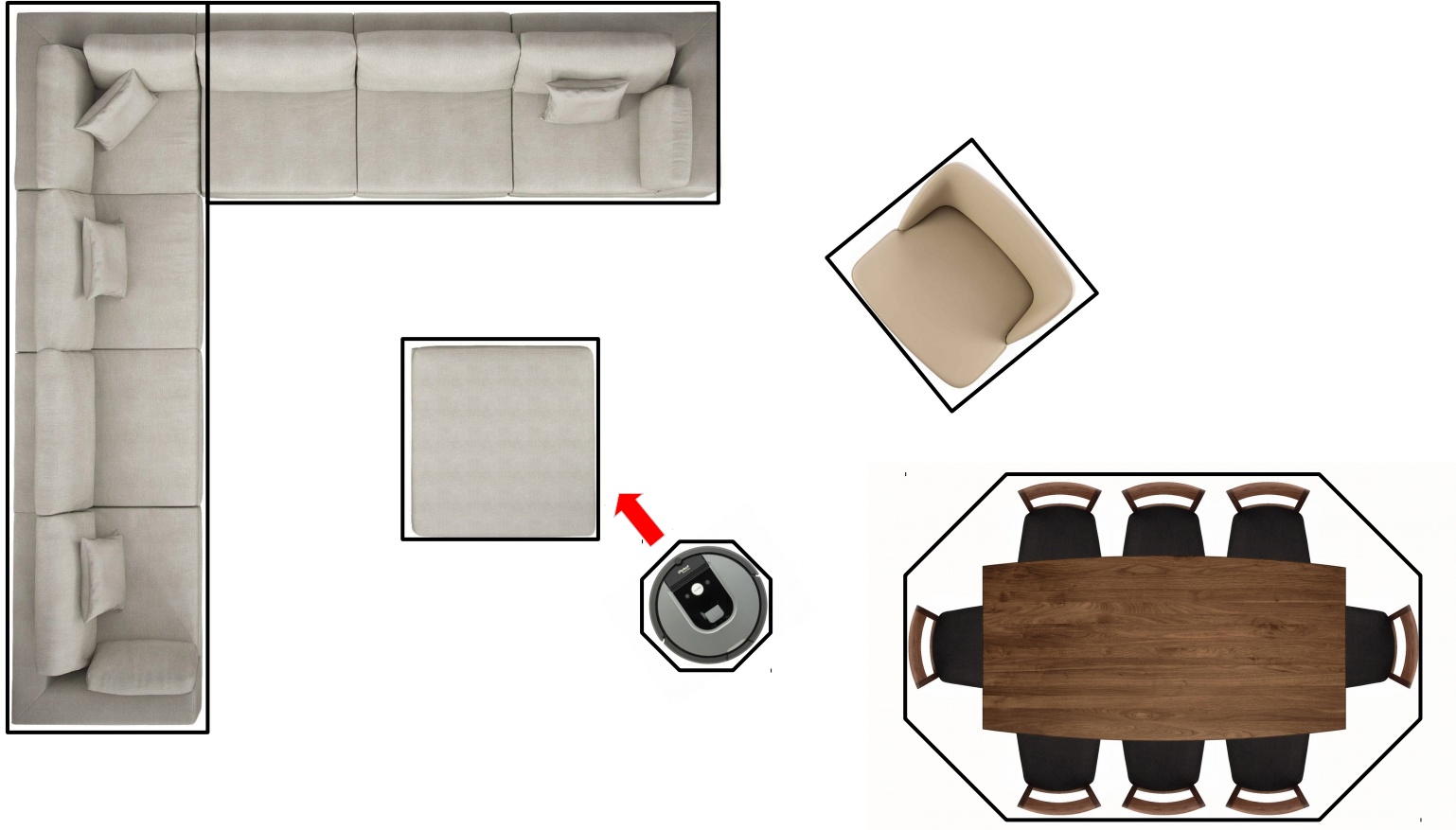
Obstáculos em Espaço de Configuração



Caso: $W = \text{Espaço Poligonal}$

- Caso: $\mathbf{W} = \text{Espaço poligonal} \Rightarrow \mathbf{B} = \text{Região Poligonal em } \mathbf{W}$.
- Região poligonal convexa em $\mathbf{R}^2 = \text{subconjunto de } \mathbf{R}^2 \text{ obtido pela interseção de um número finito de semiplanos fechados.}$
- Região poligonal $P = \text{União de regiões poligonais convexas.}$
- Polígono = Região poligonal homeomórfica com o disco unitário fechado.

Caso: W = Espaço Poligonal



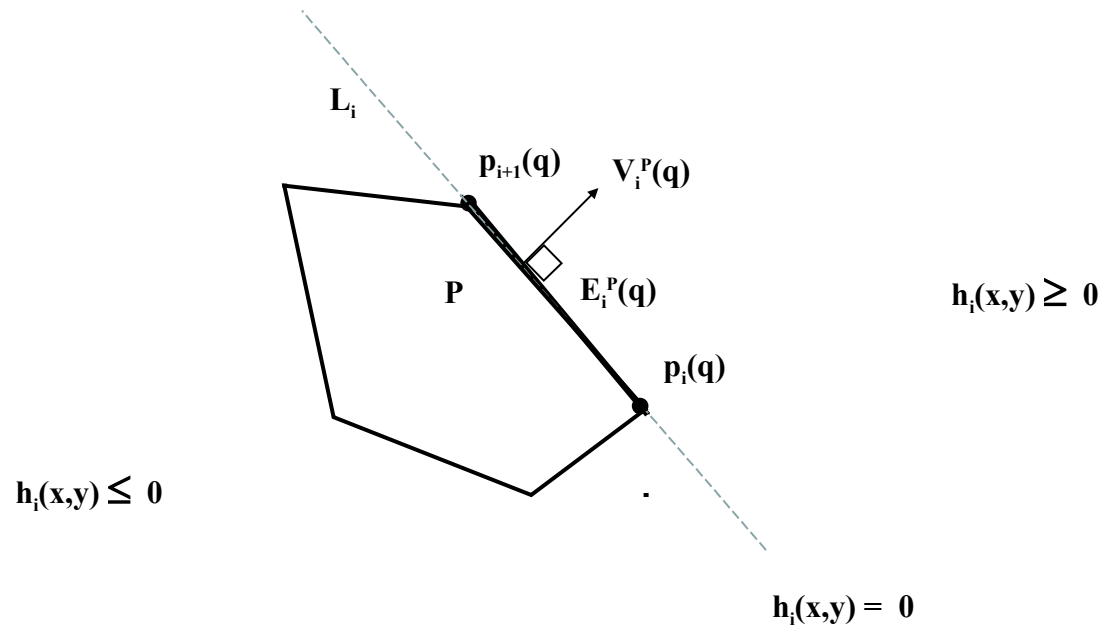
Caso: $W = \text{Espaço Poligonal}$

- Se A e B_i 's são polígonos \Rightarrow CB representado como:
- **Predicado:** $CB(q) = \text{verdadeiro se } q \in CB$.
- **Forma explícita:** em termo de eixos e vértices, incluindo as suas relações de adjacência.
- A complexidade de região poligonal definida como o número de seus eixos e vértices.

Caso: $W = \text{Espaço Poligonal}$

- **Eixo E_i :** segmento de reta máximo no limite de P , que não intersecta o resto do limite (exceto nos vértices). Se inclui vértices é **fechado**, se não, é **aberto**.
- **Linha Suporte L_i ,** contém o eixo E_i : $h_i(x, y) = 0$.
- **Semi-plano externo h_i^+ de E_i :** $h_i(x, y) \geq 0$
- **Semi-plano interno h_i^- de E_i :** $h_i(x, y) \leq 0$
- **Normal externa de E_i :** vetor unitário normal a E_i apontando para o interior de h_i^+ , V_i .
- **Normal interna de E_i :** vetor unitário normal a E_i apontando para o interior de h_i^- , $-V_i$.

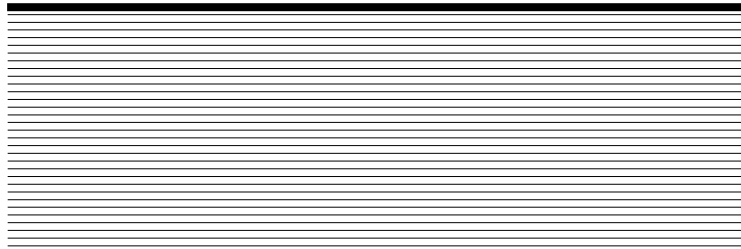
Caso: W = Espaço Poligonal

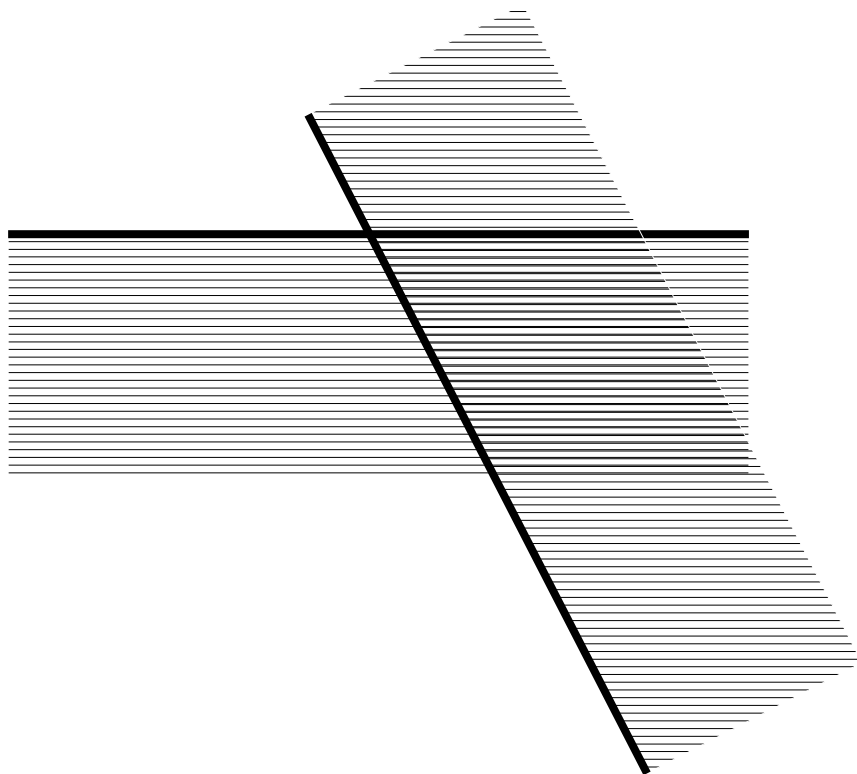


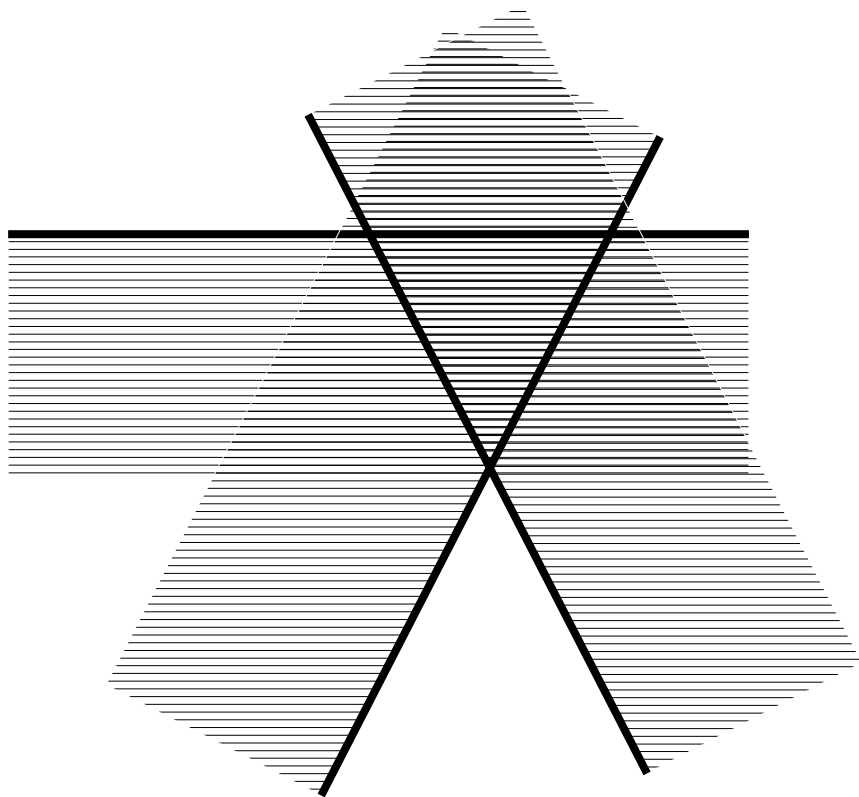
Caso: $W = \text{Espaço Poligonal}$

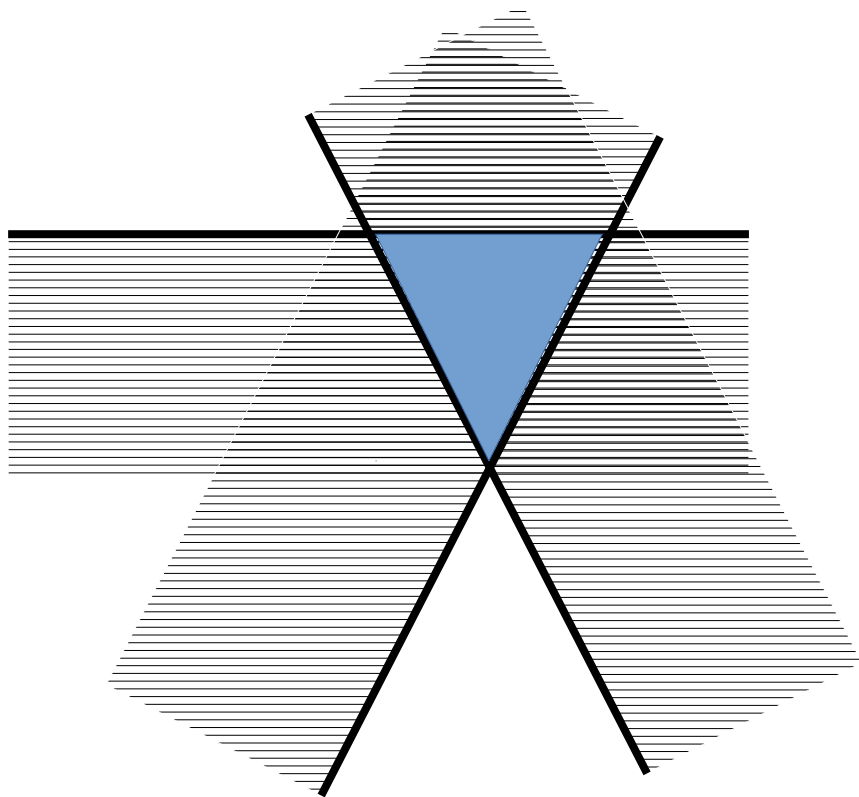
Representação de um Polígono:

- Conjunto de inequações: $\cap h_i^-$.
- Lista ordenada de vértices enumerados em sentido anti-horário. Cada vértice representado por suas coordenadas.









Representação do Robô

- Lista de n_A vértices a_i , com $i = 1, \dots, n_A$, enumerados em sentido anti-horário, usando aritmética módulo n_A , ($a_{n_A+1} = a_1$).
- Eixo conectando a_i e $a_{i+1} = \mathbf{E}_i^A$.
- Normal externa ao eixo $\mathbf{E}_i^A = \mathbf{V}_i^A(\mathbf{q})$, função da orientação.

Representação do Obstáculo

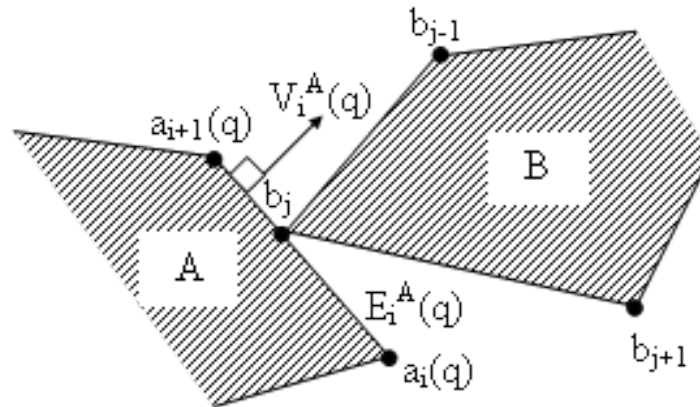
- Lista de n_B vértices b_j , com $j = 1, \dots, n_B$, enumerados em sentido anti-horário, usando aritmética módulo n_B . ($b_{n_B+1} = b_1$).
- Eixo conectando b_j e $b_{j+1} = \mathbf{E}_j^B$.
- Normal externa ao eixo $\mathbf{E}_j^B = \mathbf{V}_j^B$.

Tipos de Contato

- **A** e **B** em contato: $A(q) \cap B \neq \emptyset$ e $\text{int}(A(q)) \cap \text{int}(B) = \emptyset$.
- Contato **tipo A**: eixo E_i^A de **A** contém um vértice b_j de **B**.
- Contato **tipo B**: eixo E_j^B de **B** contém um vértice a_i de **A**.
- Quando $A(q) \cap B$ contém um vértice de **A** e um vértice de **B**, o contato é de ambos os tipos: **tipo A** e **tipo B**.

Contato tipo A

- Contato tipo A: Eixo \mathbf{E}_i^A de \mathbf{A} contém um vértice \mathbf{b}_j de \mathbf{B} .



Contato tipo A

- O contato entre \mathbf{E}_i^A e \mathbf{b}_j , sem superposição de \mathbf{A} e \mathbf{B} , é possível para certa faixa de orientações de \mathbf{A} , tal que:

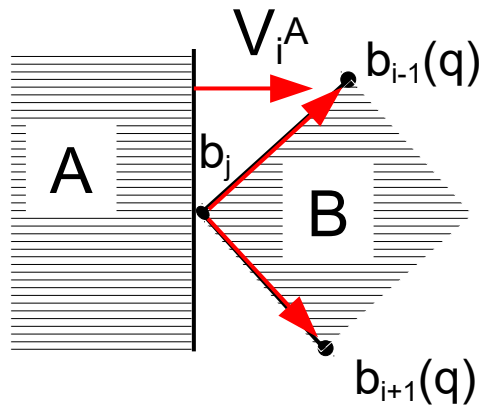
$$V_i^A(q) \cdot (b_{j-1} - b_j) \geq 0$$

$$V_i^A(q) \cdot (b_{j+1} - b_j) \geq 0$$

\Rightarrow Condição de Aplicação de Contato tipo A entre \mathbf{E}_i^A e \mathbf{b}_j
(depende somente da orientação):

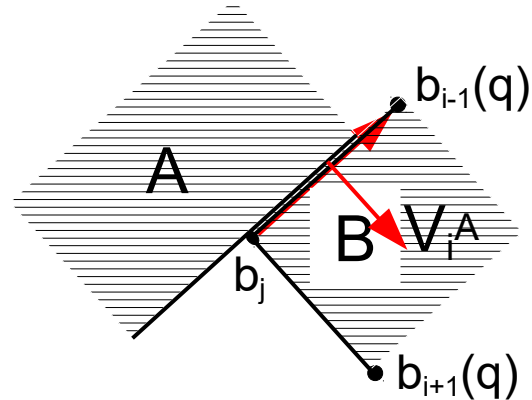
$$APL_{ij}^A(q) = [V_i^A(q) \cdot (b_{j-1} - b_j) \geq 0] \wedge [V_i^A(q) \cdot (b_{j+1} - b_j) \geq 0]$$

Contato tipo A

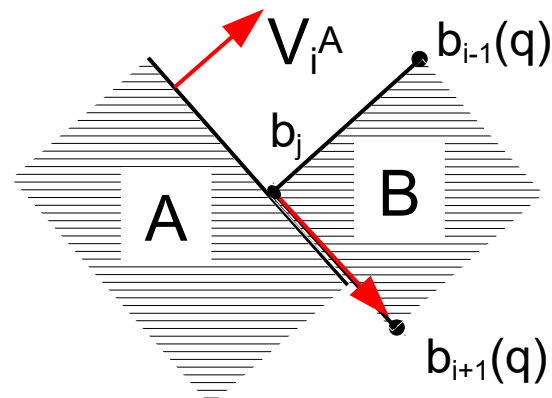


$$V_i^A(q) \cdot (b_{j-1} - b_j) \geq 0$$

$$V_i^A(q) \cdot (b_{j+1} - b_j) \geq 0$$



$$V_i^A(q) \cdot (b_{j-1} - b_j) = 0$$



$$V_i^A(q) \cdot (b_{j+1} - b_j) = 0$$

Contato tipo A

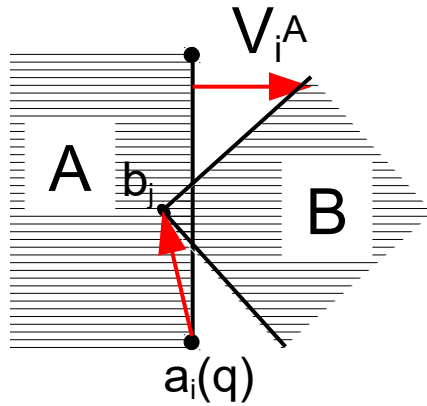
- Deslocamento em contato tipo A \Rightarrow a configuração do robô restrita a superfície em C (**C-Superfície tipo A**):

$$\mathbf{f}_{ij}^A(\mathbf{q}) = V_i^A \cdot (b_j - a_i(\mathbf{q})) = 0$$

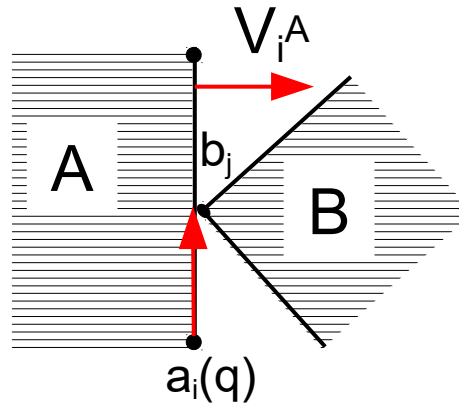
- A C-superfície tipo A separa C em dois semi-espacos, com CB contido completamente no semi-espaço $\mathbf{f}_{ij}^A \leq 0$.
- **C-Restrição tipo A:**

$$\text{RESTR}_{ij}^A(\mathbf{q}) = \text{APL}_{ij}^A(\mathbf{q}) \Rightarrow [\mathbf{f}_{ij}^A \leq 0]$$

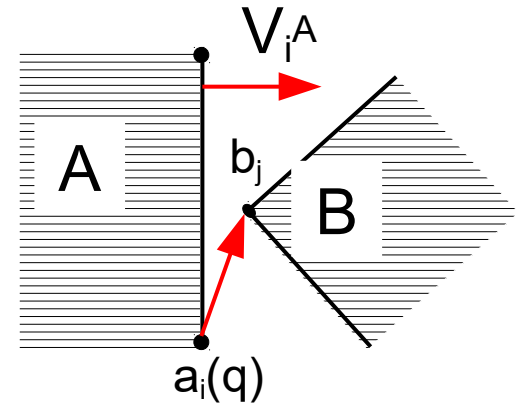
Contato tipo A



$$V_i^A \cdot (b_j - a_i(q)) < 0$$



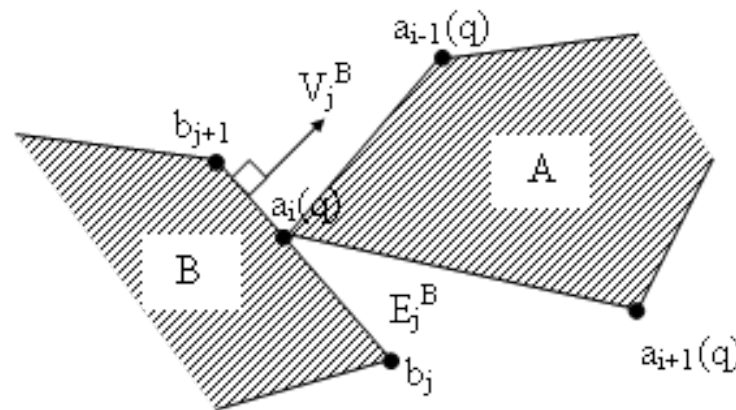
$$V_i^A \cdot (b_j - a_i(q)) = 0$$



$$V_i^A \cdot (b_j - a_i(q)) > 0$$

Contato tipo B

- Contato tipo B: Eixo E_j^B de **B** contém um vértice a_i de **A**.



Contato tipo B

- O contato entre \mathbf{E}_j^B e \mathbf{a}_i , sem superposição de \mathbf{A} e \mathbf{B} , é possível para certa faixa de orientações de \mathbf{A} , tal que:

$$(a_{i-1}(q) - a_j(q)) \cdot V_j^B \geq 0$$

$$(a_{i+1}(q) - a_j(q)) \cdot V_j^B \geq 0$$

\Rightarrow Condição de Aplicação de Contato tipo B entre \mathbf{E}_j^B e \mathbf{a}_i
(depende somente da orientação):

$$APL_{ij}^B(q) = [(a_{i-1}(q) - a_j(q)) \cdot V_j^B \geq 0] \wedge [(a_{i+1}(q) - a_j(q)) \cdot V_j^B \geq 0]$$

Contato tipo B

- Deslocamento em contato tipo B \Rightarrow a configuração do robô restrita a superfície em C (**C-Superfície tipo B**):

$$\mathbf{f}_{ij}^B(\mathbf{q}) = V_j^B \cdot (a_i(\mathbf{q}) - b_j) = 0$$

- A C-superfície tipo B separa C em dois semi-espacos, com CB contido completamente no semi-espaço $\mathbf{f}_{ij}^B \leq 0$.
- **C-Restrição tipo B:**

$$\mathbf{RESTR}_{ij}^B(\mathbf{q}) = \mathbf{APL}_{ij}^B(\mathbf{q}) \Rightarrow [\mathbf{f}_{ij}^B \leq 0]$$

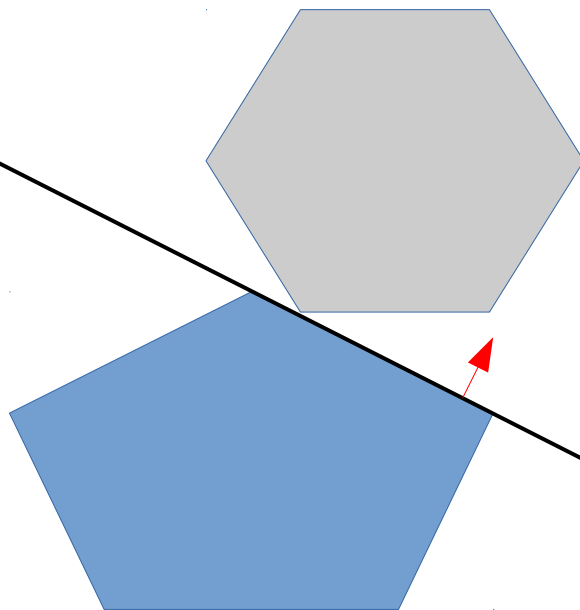
Representação de CB por C-Restrições

- **Lema:** Dois polígonos convexos não se intersectam se e somente se um deles contém um eixo **E** tal que o outro polígono está contido no semiplano externo aberto de **E**.

Teorema: Dados dois polígonos convexos **A** e **B**, então, o C-Obstáculo $CB = \{q \in C / A(q) \cap B \neq \emptyset\}$ é tal que,

$$q \in CB \Leftrightarrow CB(q) = (\wedge \mathbf{RESTR}_{ij}^A(q)) \wedge (\wedge \mathbf{RESTR}_{ij}^B(q))$$

$$h_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$$



$$h_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$$

$$h_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq 0$$

Representação de CB por C-Restrições

- Avaliando sucessivamente as C-Restrições, pode-se verificar se a configuração q está ou não no C-Obstáculo:

- Se todas são verdadeiras, $q \in \text{CB}$.
- Se ao menos uma é falsa, $q \notin \text{CB}$. Assim:

$$q \in C_L \Leftrightarrow \neg \text{CB}(q)$$

- No pior caso, o número de C-restrições a serem avaliadas (complexidade computacional é $2.n_A.n_B$).

Representação de CB por C-Restrições

- A configuração q está no limite de CB se e somente se:
 - $\exists i, j$ tais que $APL_{ij}^A(q)$ (ou $APL_{ij}^B(q)$) é verdadeira e $f_{ij}^A(q) = 0$ (ou $f_{ij}^B(q) = 0$)
 - $\forall i', j'$ tais que $APL_{i'j'}^A(q)$ é verdadeira, $f_{i'j'}^A(q) \leq 0$
 - $\forall i', j'$ tais que $APL_{i'j'}^B(q)$ é verdadeira, $f_{i'j'}^B(q) \leq 0$

Representação de CB por C-Restrições

- Se A e B são não convexos, podem ser decompostos em um conjunto de polígonos convexos:

$$A = \cup A_k$$

$$B = \cup B_l$$

- Definindo: $CB_{kl} = \{q \in C / A_k(q) \cap B_l \neq \emptyset\}$

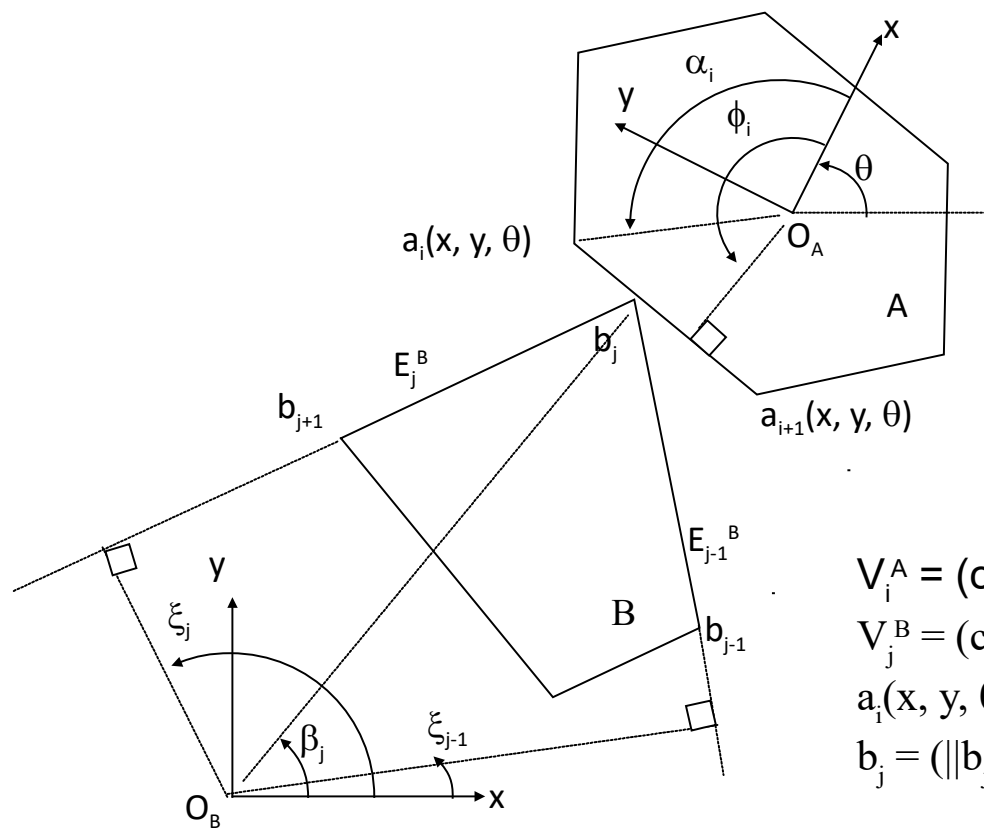
$$\Rightarrow CB = \cup CB_{kl}$$

$$\Rightarrow CB(q) = \vee CB_{kl}(q)$$

- Espaço de Configuração Livre: $q \in C_L \Leftrightarrow \neg CB(q).$

Parametrização das C-Restrições: $q = (x, y, \theta)$

Contato tipo A



$$V_i^A = (\cos(\phi_i + \theta), \sin(\phi_i + \theta))$$

$$V_j^B = (\cos \xi_j, \sin \xi_j)$$

$$a_i(x, y, \theta) = (x + \|a_i\| \cdot \cos(\alpha_i + \theta), y + \|a_i\| \cdot \sin(\alpha_i + \theta))$$

$$b_j = (\|b_j\| \cdot \cos(\beta_j), \|b_j\| \cdot \sin(\beta_j))$$

Parametrização das C-Restrições: $q = (x, y, \theta)$

Contato tipo A

- Condição de Aplicabilidade:

$$APL_{ij}^A(q) = [V_i^A(q) \cdot (b_{j-1} - b_j) \geq 0] \wedge [V_i^A(q) \cdot (b_{j+1} - b_j) \geq 0]$$

$$\Rightarrow APL_{ij}^A(q) = \theta \in [\xi_{j-1} - \phi_i - \pi, \xi_j - \phi_i + \pi] \quad (\text{mod } 2\pi)$$

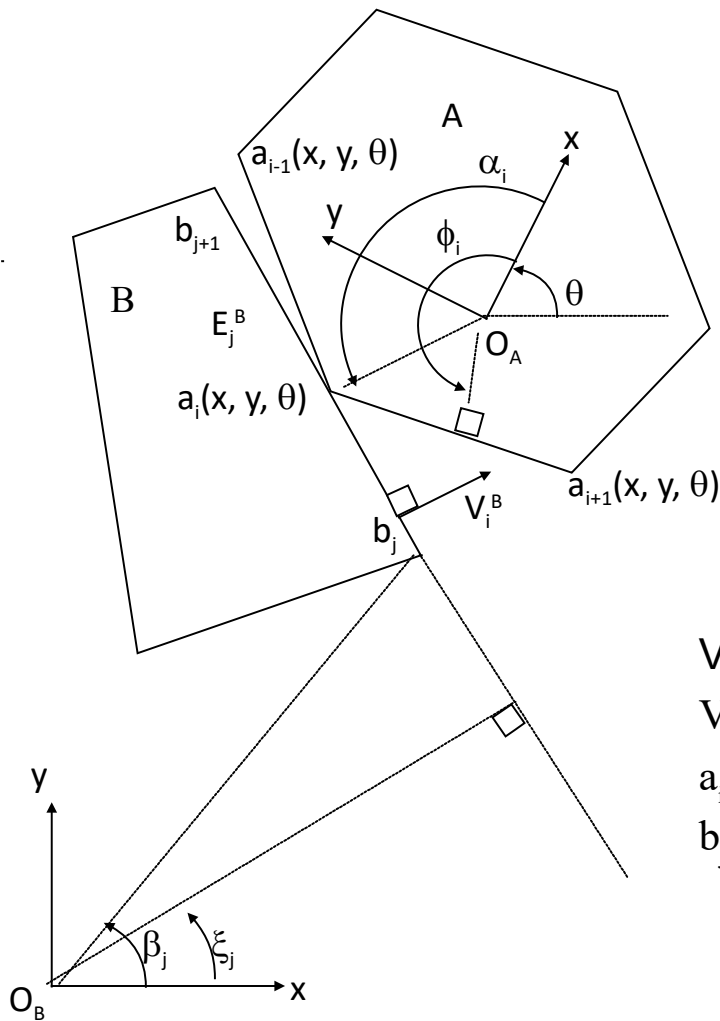
- Inequação do C-Obstáculo:

$$f_{ij}^A(q) = V_i^A \cdot (b_j - a_i(q)) \leq 0$$

$$\Rightarrow -x \cdot \cos(\phi_i + \theta) - y \cdot \sin(\phi_i + \theta) + \|b_j\| \cdot \cos(\phi_i + \theta - \beta_j) - \|a_i\| \cdot \cos(\phi_i - \alpha_i) \leq 0$$

Parametrização das C-Restrições: $q = (x, y, \theta)$

Contato tipo B



$$V_i^A = (\cos(\phi_i + \theta), \sin(\phi_i + \theta))$$

$$V_j^B = (\cos \xi_j, \sin \xi_j)$$

$$a_i(x, y, \theta) = (x + \|a_i\| \cdot \cos(\alpha_i + \theta), y + \|a_i\| \cdot \sin(\alpha_i + \theta))$$

$$b_j = (\|b_j\| \cdot \cos(\beta_j), \|b_j\| \cdot \sin(\beta_j))$$

Parametrização das C-Restrições: $q = (x, y, \theta)$

Contato tipo B

- Condição de Aplicabilidade:

$$APL_{ij}^B(q) = [(a_{i-1}(x,y,\theta) - a_i(x,y,\theta)).V_j^B \geq 0] \wedge [(a_{i+1}(x,y,\theta) - a_i(x,y,\theta)).V_j^B \geq 0]$$

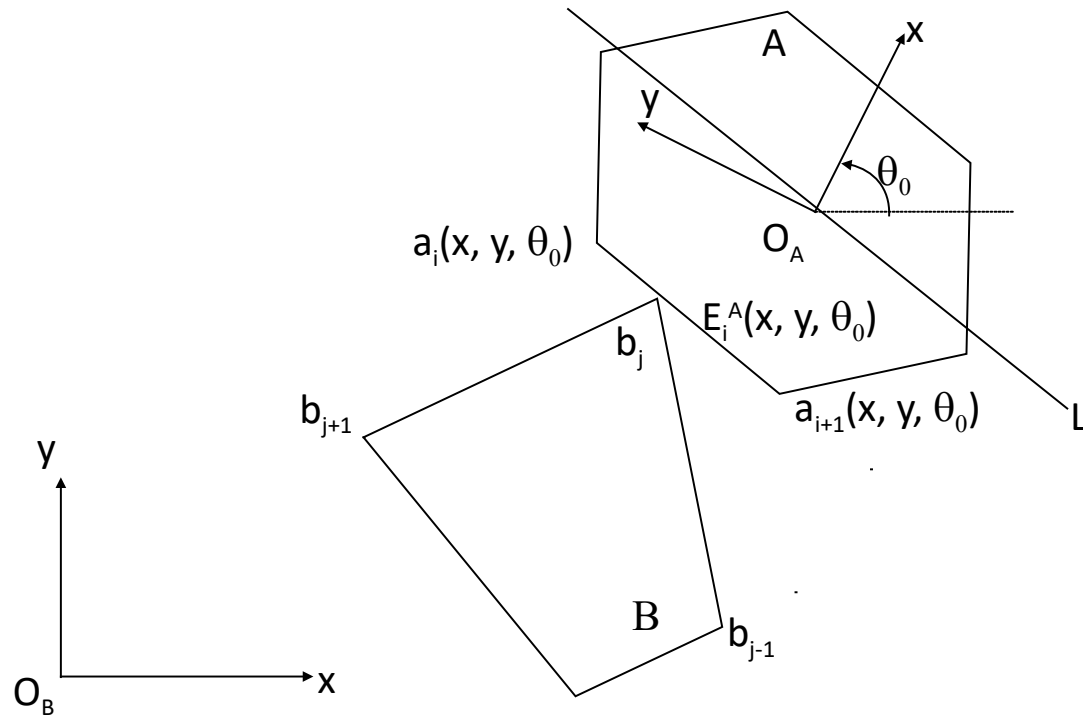
$$\Rightarrow APL_{ij}^B(q) = \theta \in [\xi_j - \phi_i - \pi, \xi_j - \phi_{i-1} - \pi] \quad (\text{mod } 2\pi)$$

- Inequação do C-Obstáculo:

$$f_{ij}^B(q) = V_j^B.(a_i(x,y,\theta) - b_j) \leq 0$$

$$\Rightarrow x.\cos(\xi_j) + y.\sin(\xi_j) + \|a_i\|.\cos(\alpha_i + \theta - \xi_j) - \|b_j\|.\cos(\beta_j - \xi_j) \leq 0$$

Interpretação Geométrica - Contato tipo A



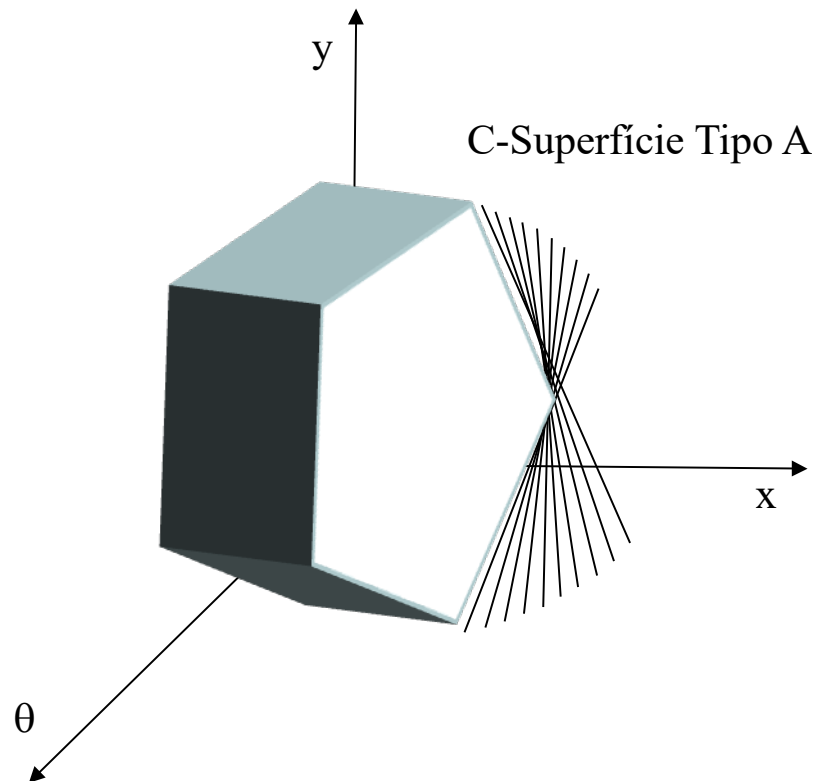
Interpretação Geométrica - Contato tipo A

- Um deslocamento em contato tipo A, mantendo orientação constante θ_0 , corresponde à equação de uma reta L em \mathbf{R}^2 paralela ao eixo $E_i^A(x, y, \theta_0)$:

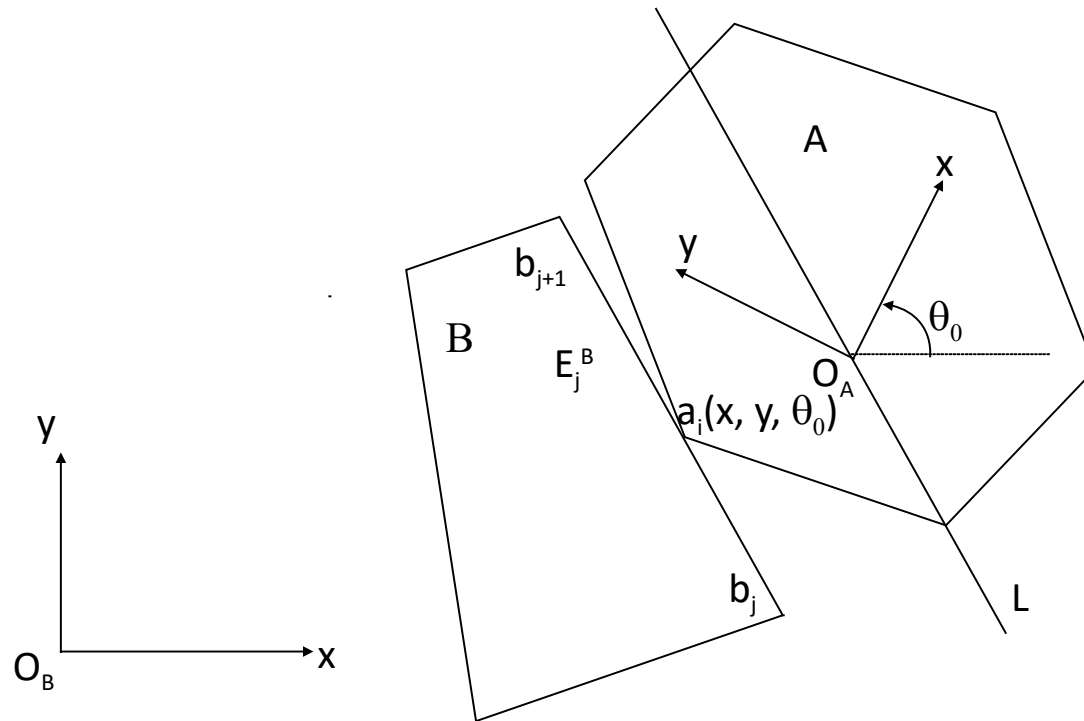
$$f_{ij}^A(x, y, \theta_0) = 0 \quad \Rightarrow$$
$$-x.\cos(\phi_i+\theta_0)-y.\sin(\phi_i+\theta_0)+\|b_j\|.\cos(\phi_i+\theta_0-\beta_j)-\|a_i\|.\cos(\phi_i-\alpha_i) = 0$$

- Quando o robô gira um ângulo $d\theta$, a reta L gira o mesmo ângulo tendo o vértice b_j como centro de rotação.
- As faces do C-Obstáculo correspondentes a deslocamentos em contato tipo A estão contidas em C-Superfícies helicoidais (C-Superfícies tipo A).

Interpretação Geométrica - Contato tipo A



Interpretação Geométrica - Contato tipo B



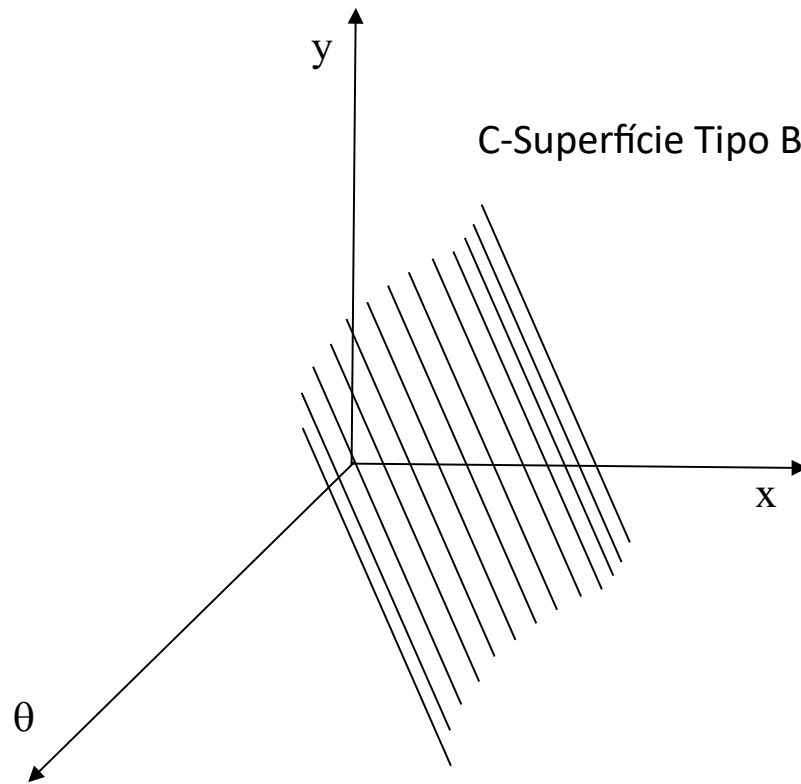
Interpretação Geométrica - Contato tipo B

- Um deslocamento em contato tipo B, mantendo orientação constante θ_0 , corresponde à equação de uma reta L em \mathbf{R}^2 paralela ao eixo E_j^B :

$$f_{ij}^B(x, y, \theta_0) = 0 \quad \Rightarrow$$
$$x.\cos(\xi_j) + y.\sin(\xi_j) + \|a_i\|.\cos(\alpha_i + \theta_0 - \xi_j) - \|b_j\|.\cos(\beta_j - \xi_j) = 0$$

- Quando o robô gira um ângulo $d\theta$, a reta L sofre uma translação, modificando a sua distância em relação ao eixo E_j^B , mas mantendo-se paralela ao mesmo.
- As faces do C-Obstáculo correspondentes a deslocamentos em contato tipo B estão contidas em C-Superfícies curvas em uma única dimensão (C-Superfícies tipo B).

Interpretação Geométrica - Contato tipo B



Assistir ao vídeo:

<http://www.youtube.com/watch?v=SBFwgR4K1Gk>

Sistemas Robóticos Autônomos

ESPAÇO DE CONFIGURAÇÃO