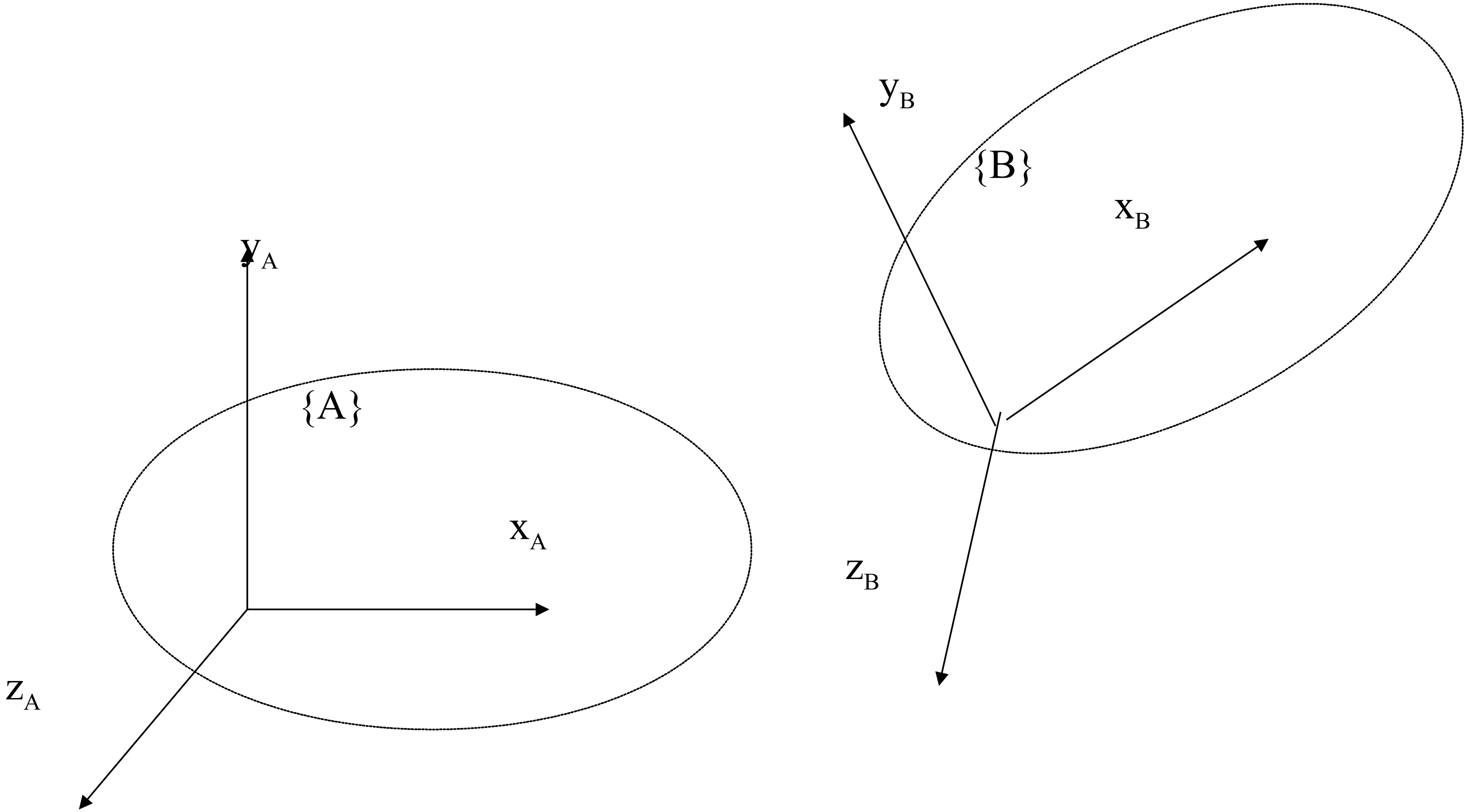
CINEMÁTICA

DESCRIÇÃO DE POSIÇÃO E ORIENTAÇÃO

Sistemas Referenciais:

- Para localizar um corpo rígido no espaço tridimensional, um sistema referencial é associado ao mesmo.
- Um referencial associado a um corpo rígido é fixo no mesmo.
- Qualquer ponto do corpo rígido possuirá coordenadas invariantes no seu referencial associado.
- referencial será identificado por uma letra entre chaves. Exemplo: {A}, {i}, etc.
- Os referenciais são definidos por três vetores unitários ortogonais.



{A}
y_A
x_A
z_A
{B}
y_B
x_B
z_B

Localização de um corpo relativa a um Referencial:

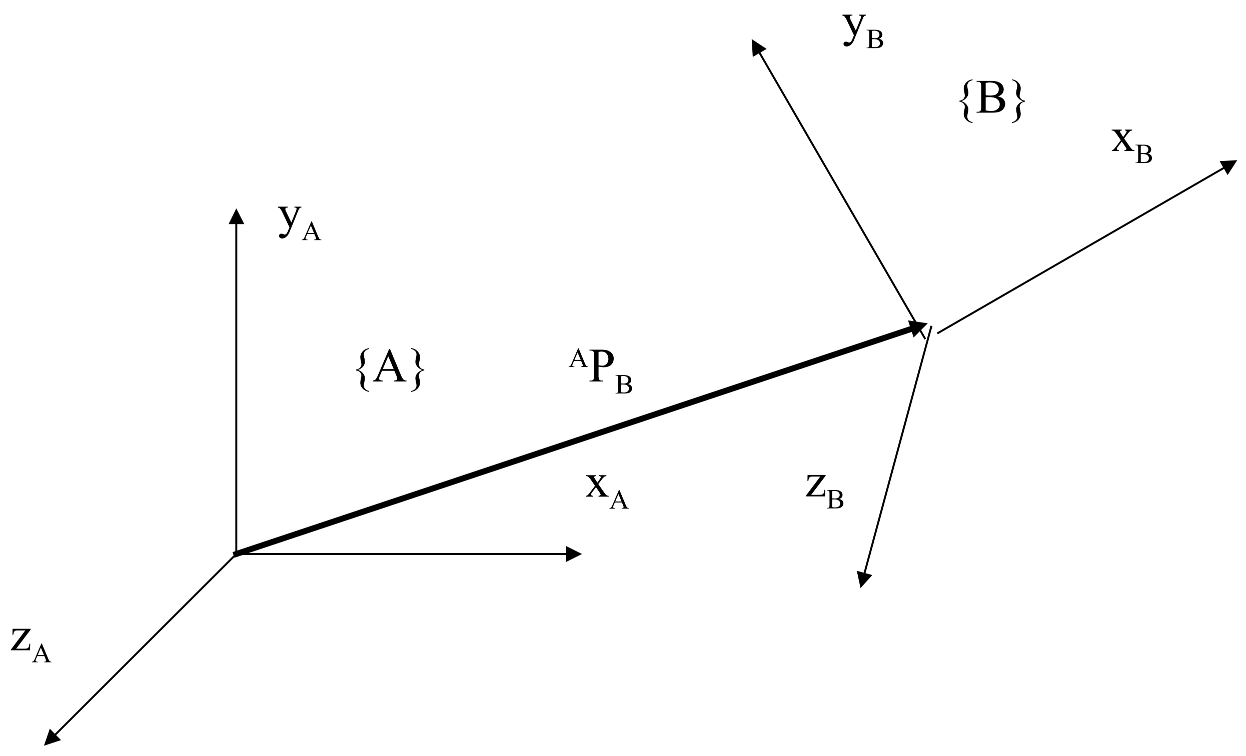
- A localização de um corpo rígido B em relação a um referencial qualquer {A} é definida pela localização do seu referencial associado {B} em relação a {A}.

- A localização de {B} em relação a {A} é definida especificando:
  - a posição de {B} em relação a {A}
  - a orientação dos eixos de {B} em relação a os eixos de {A}.

Representação de posição de {B} relativa a {A}:

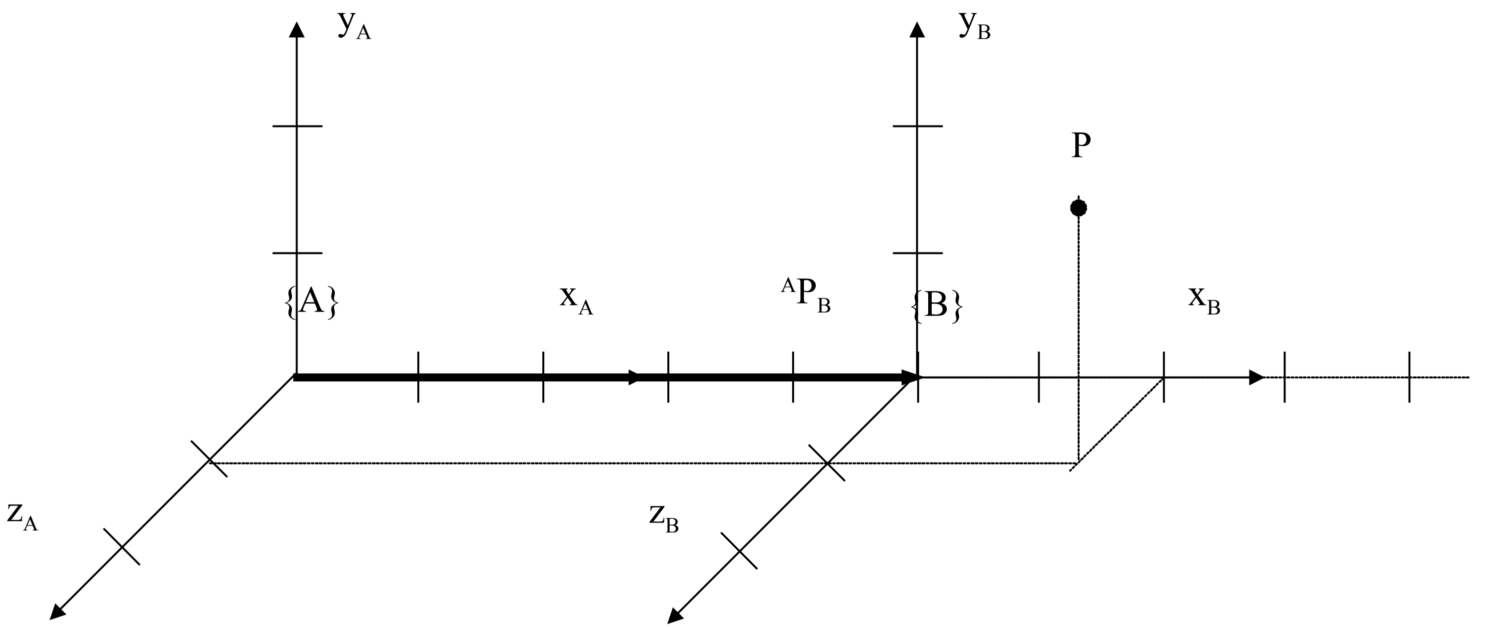
- A posição de {B} em relação a {A} é definida pelo vetor de posição ${}^{A}P_{B}$ ligando a origem de {A} à origem de {B}, expresso em coordenadas de {A}:

$$ {}^{A}P_{B} = \begin{bmatrix} {}^{A}p_{Bx} \\ {}^{A}p_{By} \\ {}^{A}p_{Bz} \end{bmatrix} $$


y_B
$\{B\}$
x_B
y_A
$\{A\}$
${}^AP_B$
x_A
z_B
z_A

Exemplo:

- considere dois referenciais {A} e {B} com a mesma orientação, com a origem de {B} localizada a 5 unidades ao longo do eixo x_A. Considere um ponto P, expresso em {B} como $^{B}P = [2 \quad 2 \quad 1]^T$. Determine a posição de {B} em relação a {A} bem como a representação do ponto P em {A}.



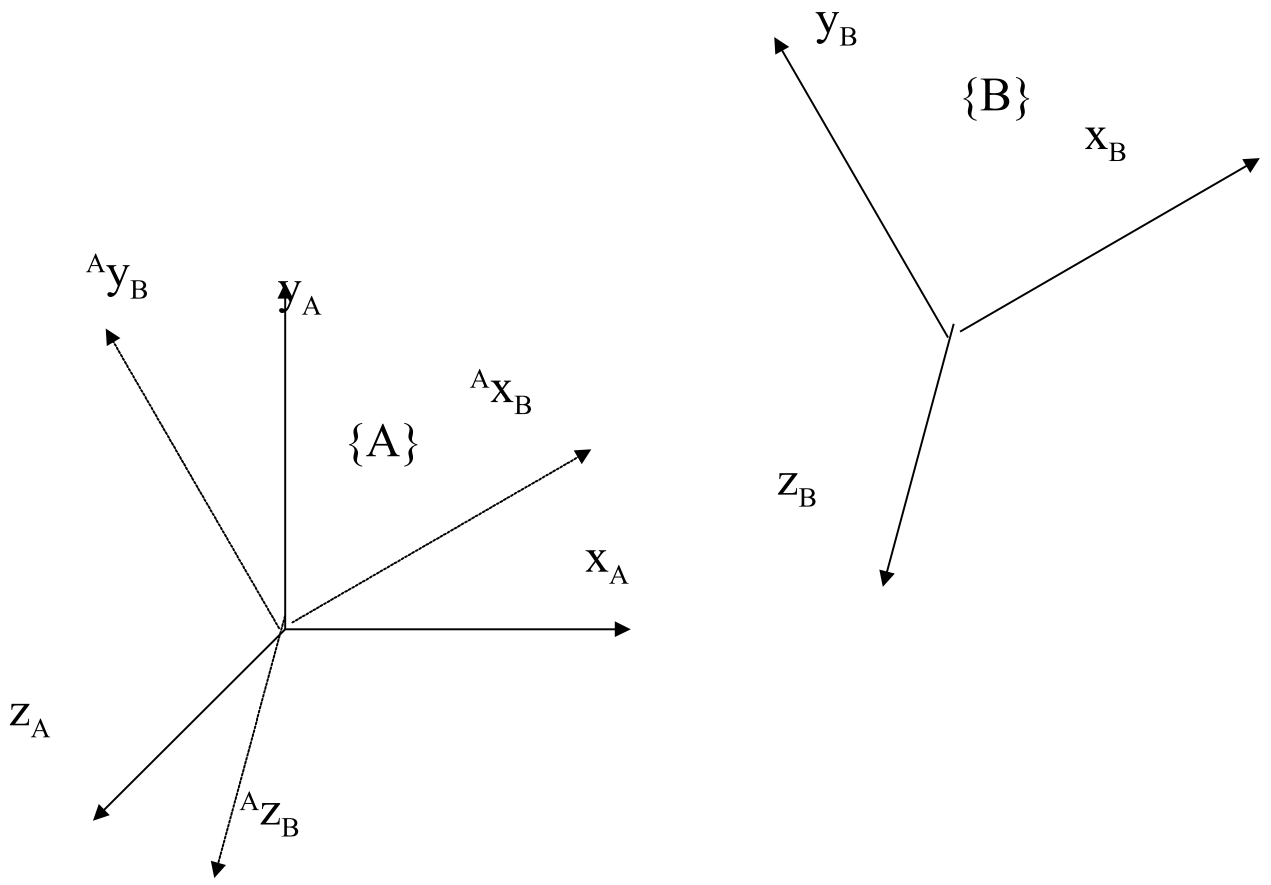
$$ {}^{A}P_{B} = [5 \quad 0 \quad 0]^{T} $$

$$ {}^{A}P = {}^{A}P_{B} + {}^{B}P = [5 \quad 0 \quad 0]^{T} + [2 \quad 2 \quad 1]^{T} = [7 \quad 2 \quad 1]^{T} $$

Representação de orientação de {B} relativa a {A}:

- A orientação de {B} em relação a {A} é definida pela matriz de rotação ${}^{A}R_{B}$ de dimensão 3x3, ortogonal, cujos vetores colunas são os eixos unitários de {B} expressos em coordenadas de {A}:

$$ {}^{A}R_{B} = \begin{bmatrix} {}^{A}x_{B} & {}^{A}y_{B} & {}^{A}z_{B} \end{bmatrix} $$



{A}
{B}
y_A
x_A
z_A
${}^A y_B$
${}^A x_B$
${}^A z_B$
y_B
x_B
z_B

- ${}^{A}R_{B}$ = representação redundante de orientação.
- Nove elementos com seis restrições:

$({}^{A}x_{B})^{T}.{}^{A}x_{B} = 1$ $({}^{A}y_{B})^{T}.{}^{A}y_{B} = 1$ $({}^{A}z_{B})^{T}.{}^{A}z_{B} = 1$

$({}^{A}x_{B})^{T}.{}^{A}y_{B} = 0$ $({}^{A}y_{B})^{T}.{}^{A}z_{B} = 0$ $({}^{A}z_{B})^{T}.{}^{A}x_{B} = 0$

${}^{A}R_{B}$ é ortogonal:

$({}^{A}R_{B})^{-1} = ({}^{A}R_{B})^{T}$

Rotação Inversa

Dados {A} e {B} com mesma origem e P expresso {A} e {B}:

$^{A}P = [^{A}p_x \;\; ^{A}p_y \;\; ^{A}p_z]^T$ $\qquad\qquad$ $^{B}P = [^{B}p_x \;\; ^{B}p_y \;\; ^{B}p_z]^T$

Conhecendo ^{B}P e $^{A}R_B$, pode-se achar ^{A}P:

$$^{A}P = [^{B}x_A{}^T.{}^{B}P \;\; ^{B}y_A{}^T.{}^{B}P \;\; ^{B}z_A{}^T.{}^{B}P]^T = [^{B}x_A \;\; ^{B}y_A \;\; ^{B}z_A]^T.{}^{B}P$$

$$\Rightarrow \qquad ^{A}P = {}^{B}R_A{}^T.{}^{B}P = {}^{A}R_B.{}^{B}P$$

De forma equivalente, $^{B}P = {}^{B}R_A.{}^{A}P$:

$$\Rightarrow \qquad ^{A}P = {}^{A}R_B.{}^{B}P = {}^{A}R_B.{}^{B}R_A.{}^{A}P \qquad \Rightarrow \qquad ^{A}R_B.{}^{B}R_A = I$$

$$\Rightarrow \qquad ^{B}R_A = ({}^{A}R_B)^{-1} = ({}^{A}R_B)^T$$

Concatenação de Rotações

Dados {A}, {B} e {C} com origens coincidentes:

$^{A}P = {}^{A}R_{B}.{}^{B}P,$

$^{B}P = {}^{B}R_{C}.{}^{C}P,$

$^{A}P = {}^{A}R_{C}.{}^{C}P$

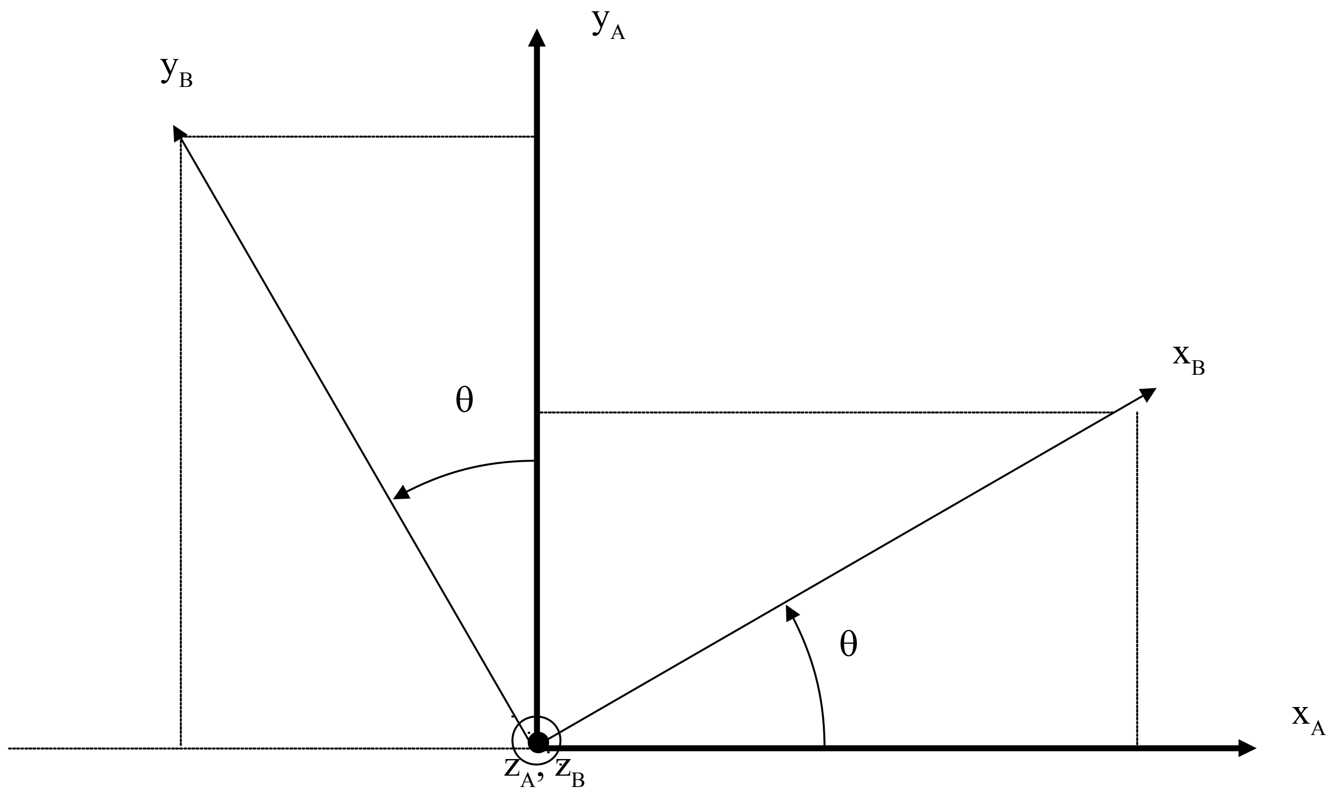
$\Rightarrow \quad {}^{A}P = {}^{A}R_{B}.{}^{B}R_{C}.{}^{C}P \;\Rightarrow\; {}^{A}R_{C} = {}^{A}R_{B}.{}^{B}R_{C}$

Matriz de cossenos diretores

$$^{A}R_{B} = {}^{A}R_{C}.{}^{C}R_{B} = ({}^{C}R_{A})^{T}.{}^{C}R_{B}:$$

$$^{A}R_{B} = \begin{bmatrix} ({}^{C}x_{A})^{T}.{}^{C}x_{B} & ({}^{C}x_{A})^{T}.{}^{C}y_{B} & ({}^{C}x_{A})^{T}.{}^{C}z_{B} \\ ({}^{C}y_{A})^{T}.{}^{C}x_{B} & ({}^{C}y_{A})^{T}.{}^{C}y_{B} & ({}^{C}y_{A})^{T}.{}^{C}z_{B} \\ ({}^{C}z_{A})^{T}.{}^{C}x_{B} & ({}^{C}z_{A})^{T}.{}^{C}y_{B} & ({}^{C}z_{A})^{T}.{}^{C}z_{B} \end{bmatrix}$$

Exemplo: sejam {A} e {B} coincidentes. Suponha que {B} gira um ângulo θ em torno ${}^{A}z_B$. Encontre ${}^{A}R_B = R(z,\theta)$:



$${}^{A}x_B = [\cos(\theta) \quad \mathrm{sen}(\theta) \quad 0]^T$$

$${}^{A}y_B = [-\mathrm{sen}(\theta) \quad \cos(\theta) \quad 0]^T$$

$${}^{A}z_B = [0 \quad 0 \quad 1]^T$$

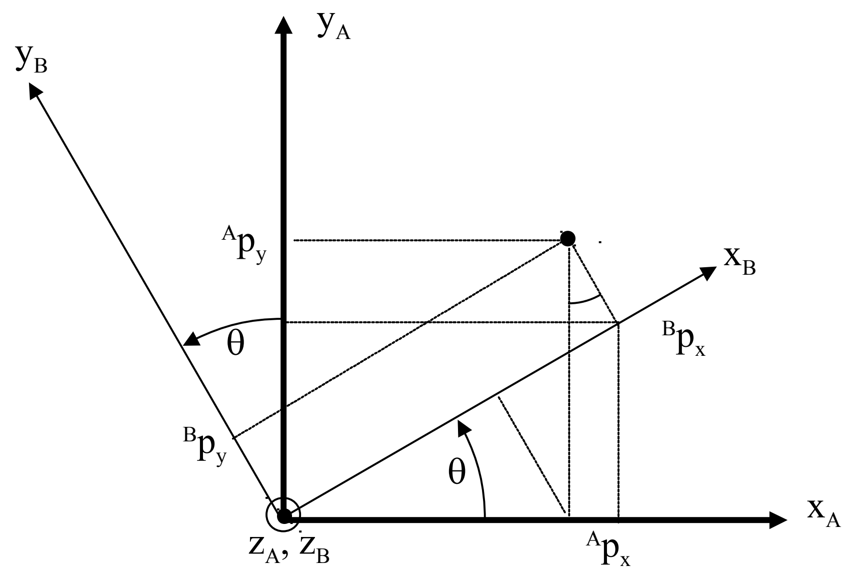
Rotações em torno dos eixos x, y, z

$$ {}^{A}R_{B} = R(z,\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta) & 0 \\ \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{A}R_{B} = R(x,\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta) \\ 0 & \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} $$

$$ {}^{A}R_{B} = R(y,\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \mathrm{sen}(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\mathrm{sen}(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} $$

Exemplo: sejam {A} e {B} coincidentes, . Suponha que {B} gira θ em torno de ${}^{A}z_{B}$. Dado P expresso em {B}, (${}^{B}P$), Ache ${}^{A}P$:



$$^{A}p_x = {}^{B}p_x.\cos(\theta) - {}^{B}p_y.\text{sen}(\theta)$$

$$^{A}p_y = {}^{B}p_x.\text{sen}(\theta) + {}^{B}p_y.\cos(\theta)$$

$$^{A}p_z = {}^{B}p_z$$

<u>**Outras representações de orientação**</u>:

- ${}^{A}R_{B}$ = representação redundante da orientação.

- Nove elementos e seis relações de dependência.

$\Rightarrow$ Três parâmetros são suficientes para especificar orientação.

- Vários esquemas:

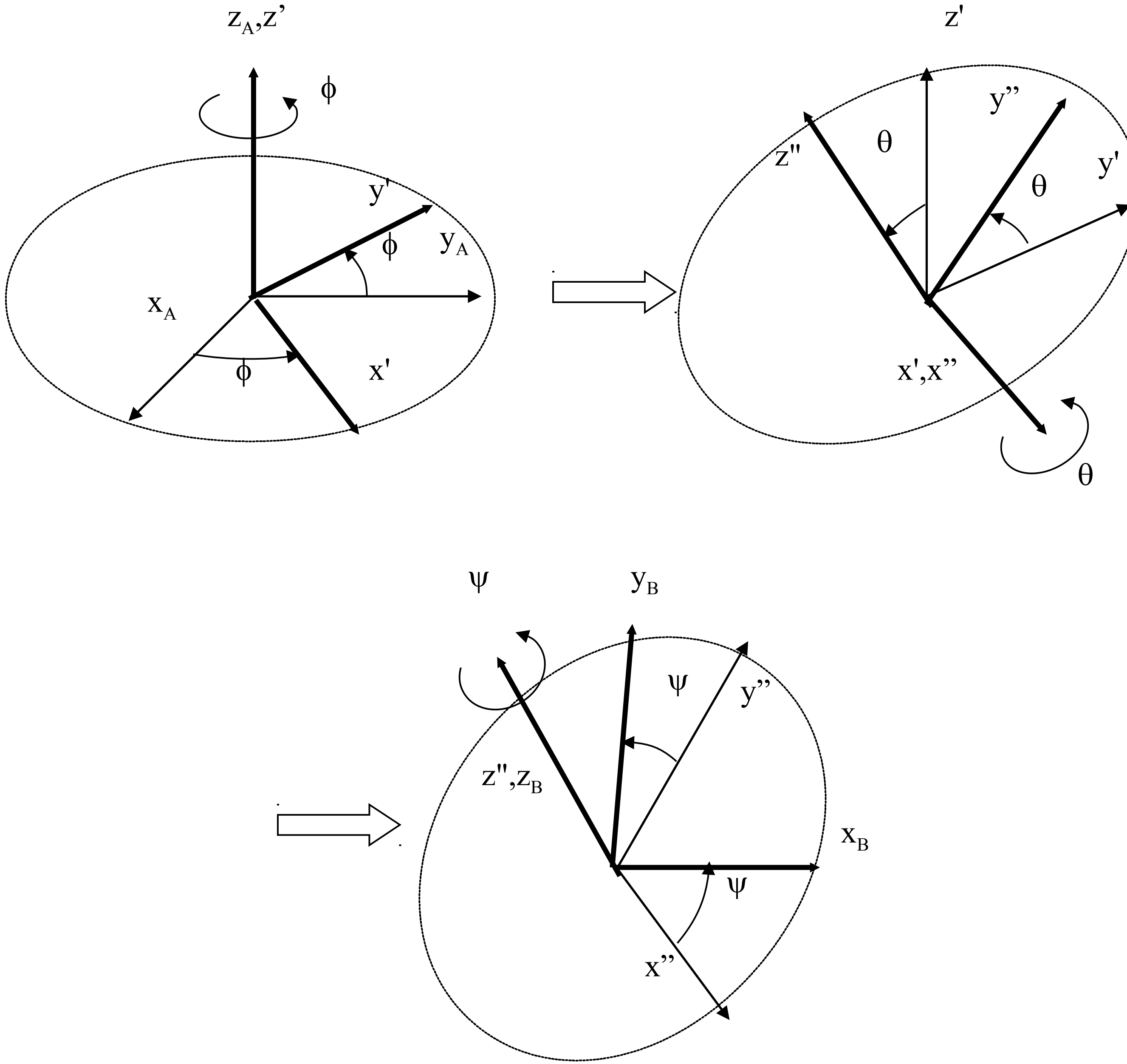
    - Ângulos de Euler.
    - Ângulos (*Roll, Pitch, Yaw*).
    - Ângulo-Eixo equivalente.

Ângulos de Euler ZXZ:

- Ângulos de rotação (ϕ, θ, ψ) em torno de z, x e z de um referencial móvel, inicialmente coincidente com {A} e alinhado com {B} após as três rotações.

- Matriz de rotação equivalente:

$$R_{\phi\theta\psi} = R(z,\phi).R(x,\theta).R(z,\psi)$$



z_A, z'
ϕ
y'
ϕ
y_A
x_A
ϕ
x'
z'
y''
θ
z''
y'
θ
x', x''
θ
ψ
y_B
ψ
y''
z'', z_B
x_B
ψ
x''

$$R_{\phi\theta\psi} = \begin{bmatrix} c\phi & -s\phi & 0 \\ s\phi & c\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta & -s\theta \\ 0 & s\theta & c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\psi & -s\psi & 0 \\ s\psi & c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow R_{\phi\theta\psi} = \begin{bmatrix} (c\phi.c\psi - s\phi.c\theta.s\psi) & (-c\phi.s\psi - s\phi.c\theta.c\psi) & (s\phi.s\theta) \\ (s\phi.c\psi + c\phi.c\theta.s\psi) & (-s\phi.s\psi + c\phi.c\theta.c\psi) & (-c\phi.s\theta) \\ (s\theta.s\psi) & (s\theta.c\psi) & (c\theta) \end{bmatrix}$$

Dada $R_{\phi\theta\psi}$, encontrar os ângulos de Euler ZXZ:

$$\theta = \text{atan2}(\pm[R_{31}{}^2+R_{32}{}^2]^{1/2} , R_{33})$$

$$\phi = \text{atan2}(R_{13}/\text{sen}(\theta),-R_{23}/\text{sen}(\theta))$$

$$\psi = \text{atan2}(R_{31},/\text{sen}(\theta),R_{32} /\text{sen}(\theta))$$

Onde: $\text{atan2}(b, a) = \arg(a + j.b)$

$\theta = \text{atan2}(\text{sen}(\theta), \cos(\theta)) = \text{atan2}(k.\text{sen}(\theta), k.\cos(\theta))$, com $k > 0$.

Considerações:

- A solução não é única (depende do sinal da raiz).
- Dois conjuntos de soluções:

  - Sinal positivo $\Rightarrow \quad 0 \le \theta \le \pi$.
  - Sinal negativo $\Rightarrow - \pi \le \theta \le 0$.

- Para $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$, a solução degenera (divisão por zero).
- Infinitas soluções $\Rightarrow$ rotações ϕ e ψ em torno do mesmo eixo.

$$\text{Para } \theta = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \phi + \psi = \operatorname{atan2}(R_{21},R_{11})$$

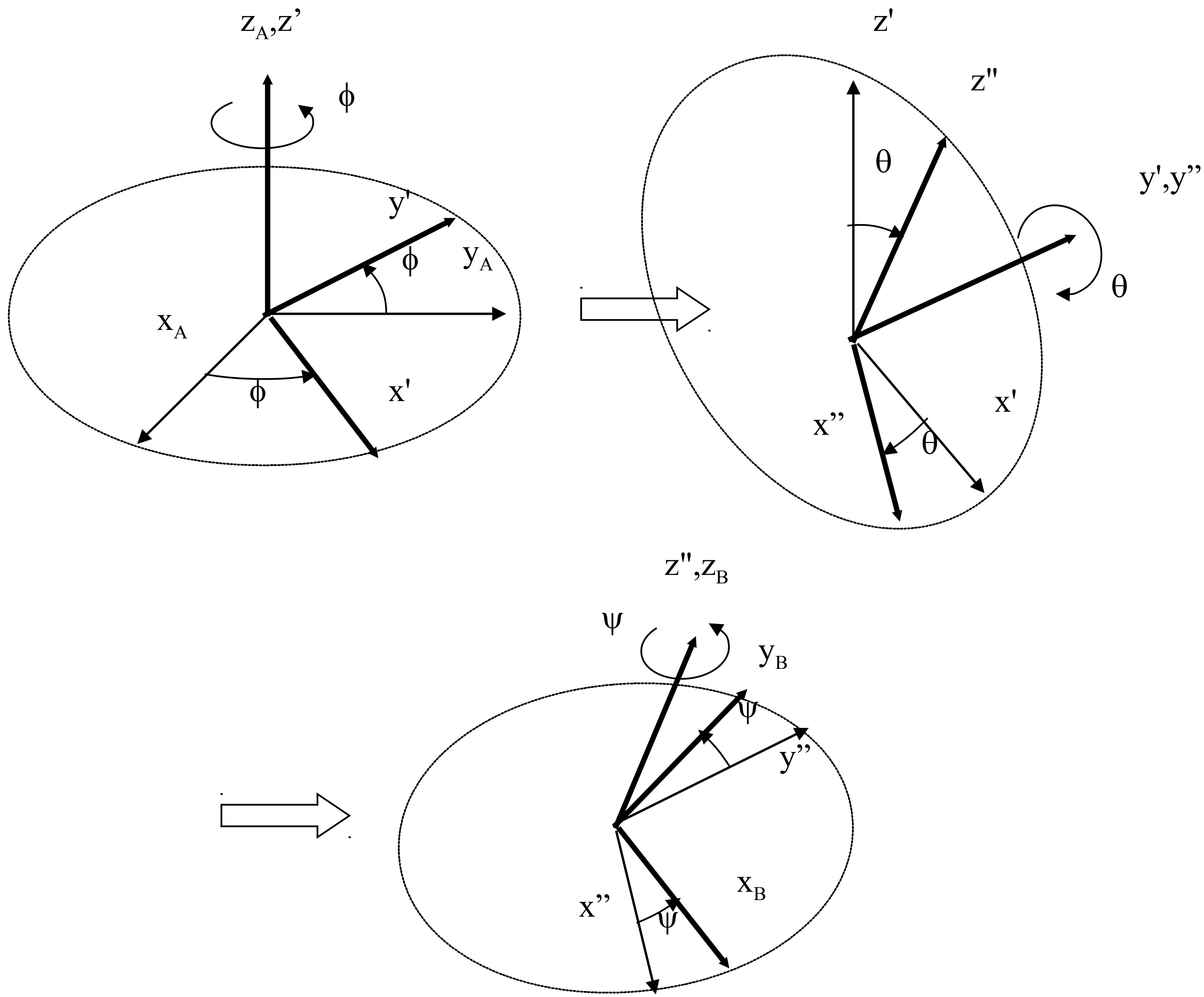
$$\text{Para } \theta = \pi \qquad \Rightarrow \qquad \phi - \psi = \operatorname{atan2}(R_{21},R_{11})$$

Ângulos de Euler ZYZ:

- Ângulos de rotação (ϕ, θ, ψ) em torno de z, y e z de um referencial móvel, inicialmente coincidente com {A} e alinhado com {B} após as três rotações.

- Matriz de rotação equivalente:

$$R_{\phi\theta\psi} = R(z,\phi).R(y,\theta).R(z,\psi)$$



z_A,z'
φ
y'
φ
y_A
x_A
φ
x'
z'
z''
θ
y',y''
θ
x''
θ
x'
z'',z_B
ψ
y_B
ψ
y''
x''
ψ
x_B

$$R_{\phi\theta\psi} = \begin{bmatrix} c\phi & -s\phi & 0 \\ s\phi & c\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta & 0 & s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\psi & -s\psi & 0 \\ s\psi & c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \; R_{\phi\theta\psi} = \begin{bmatrix} (c\phi.c\theta.c\psi - s\phi.s\psi) & (-c\phi.c\theta.s\psi - s\phi.c\psi) & (c\phi.s\theta) \\ (s\phi.c\theta.c\psi + c\phi.s\psi) & (-s\phi.c\theta.s\psi + c\phi.c\psi) & (s\phi.s\theta) \\ (-s\theta.c\psi) & (s\theta.s\psi) & (c\theta) \end{bmatrix}$$

Dada $R_{\phi\theta\psi}$, encontrar os ângulos de Euler ZYZ:

$$\theta = \operatorname{atan2}(\pm[R_{31}{}^2+R_{32}{}^2]^{1/2} , R_{33})$$

$$\phi = \operatorname{atan2}(R_{23}/\operatorname{sen}(\theta),R_{13}/\operatorname{sen}(\theta))$$

$$\psi= \operatorname{atan2}(R_{32}/\operatorname{sen}(\theta),-R_{31}/\operatorname{sen}(\theta))$$

Considerações:

- A solução não é única (depende do sinal da raiz).
- Dois conjuntos de soluções:

    - Sinal positivo $\Rightarrow \quad 0 \leq \theta \leq \pi$.
    - Sinal negativo $\Rightarrow - \pi \leq \theta \leq 0$.

- Para $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$, a solução degenera (divisão por zero).
- Infinitas soluções $\Rightarrow$ rotações ϕ e ψ em torno do mesmo eixo.

$$\text{Para } \theta = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \psi + \phi = \operatorname{atan2}(R_{21}, R_{11})$$

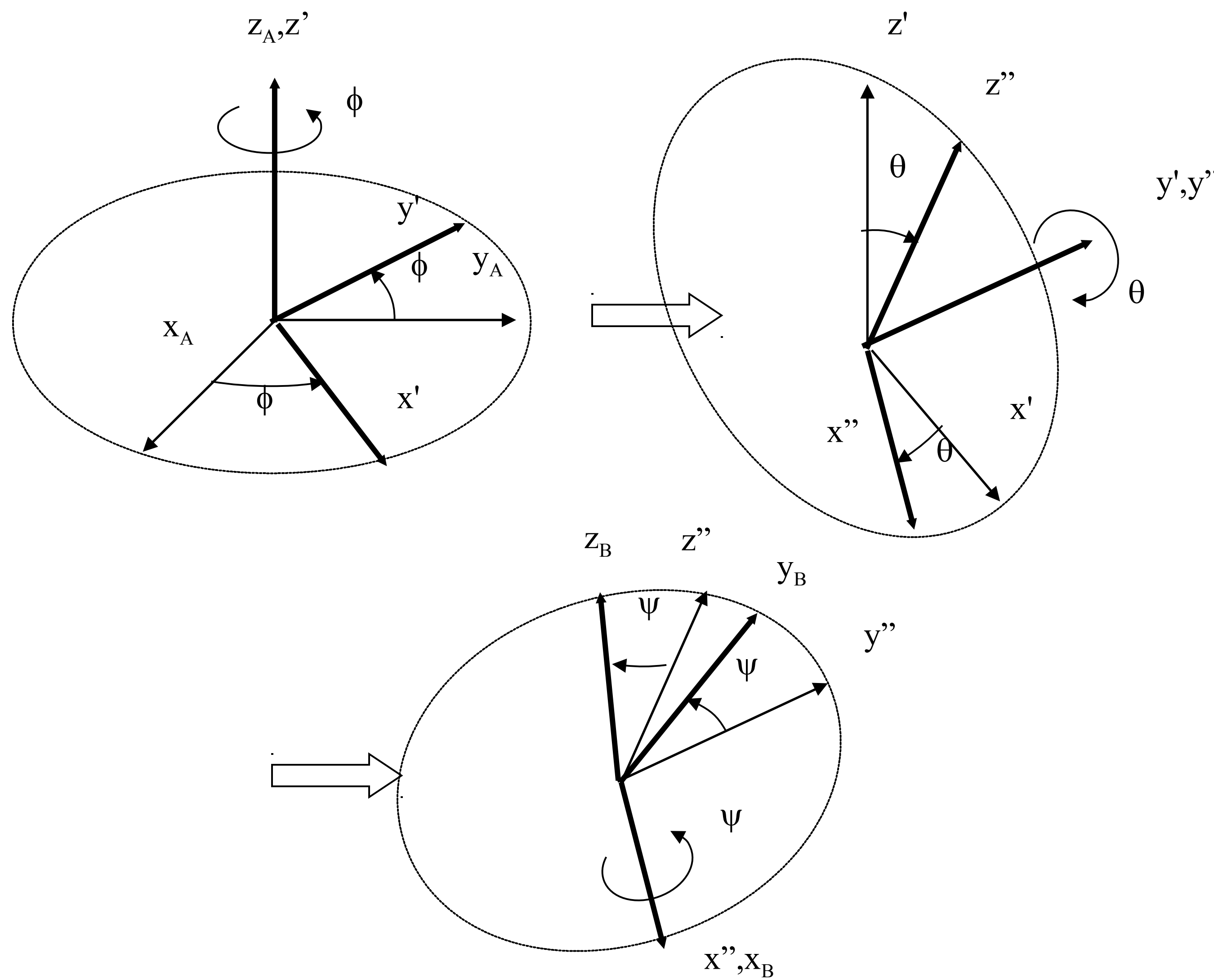
$$\text{Para } \theta = \pi \qquad \Rightarrow \qquad \psi - \phi = \operatorname{atan2}(R_{21}, -R_{11})$$

Ângulos de Euler ZYX:

- Ângulos de rotação (ϕ, θ, ψ) em torno de z, y e x de um referencial móvel, inicialmente coincidente com {A} e alinhado com {B} após as três rotações.

- Matriz de rotação equivalente:

$$R_{\phi\theta\psi} = R(z,\phi).R(y,\theta).R(x,\psi)$$



zA,z'
ϕ
y'
ϕ
yA
xA
ϕ
x'
z'
z''
θ
y',y''
θ
x''
θ
x'
zB
z''
yB
ψ
y''
ψ
ψ
x'',xB

$$R_{\phi\theta\psi} = \begin{bmatrix} c\phi & -s\phi & 0 \\ s\phi & c\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta & 0 & s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\psi & -s\psi \\ 0 & s\psi & c\psi \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow R_{\phi\theta\psi} = \begin{bmatrix} (c\phi.c\theta) & (c\phi.s\theta.s\psi - s\phi.c\psi) & (c\phi.s\theta.c\psi + s\phi.s\psi) \\ (s\phi.c\theta) & (s\phi.s\theta.s\psi + c\phi.c\psi) & (s\phi.s\theta.c\psi - c\phi.s\psi) \\ (-s\theta) & (c\theta.s\psi) & (c\theta.c\psi) \end{bmatrix}$$

Dada $R_{\phi\theta\psi}$, encontrar os ângulos de Euler ZYX:

$$\theta = \mathrm{atan2}(-R_{31}, \pm[R_{32}{}^2+R_{33}{}^2]^{1/2})$$

$$\phi = \mathrm{atan2}(R_{21}/\cos(\theta), R_{11}/\cos(\theta))$$

$$\psi = \mathrm{atan2}(R_{32}/\cos(\theta), R_{33}/\cos(\theta))$$

Considerações:

- A solução não é única (depende do sinal da raiz).
- Dois conjuntos de soluções:

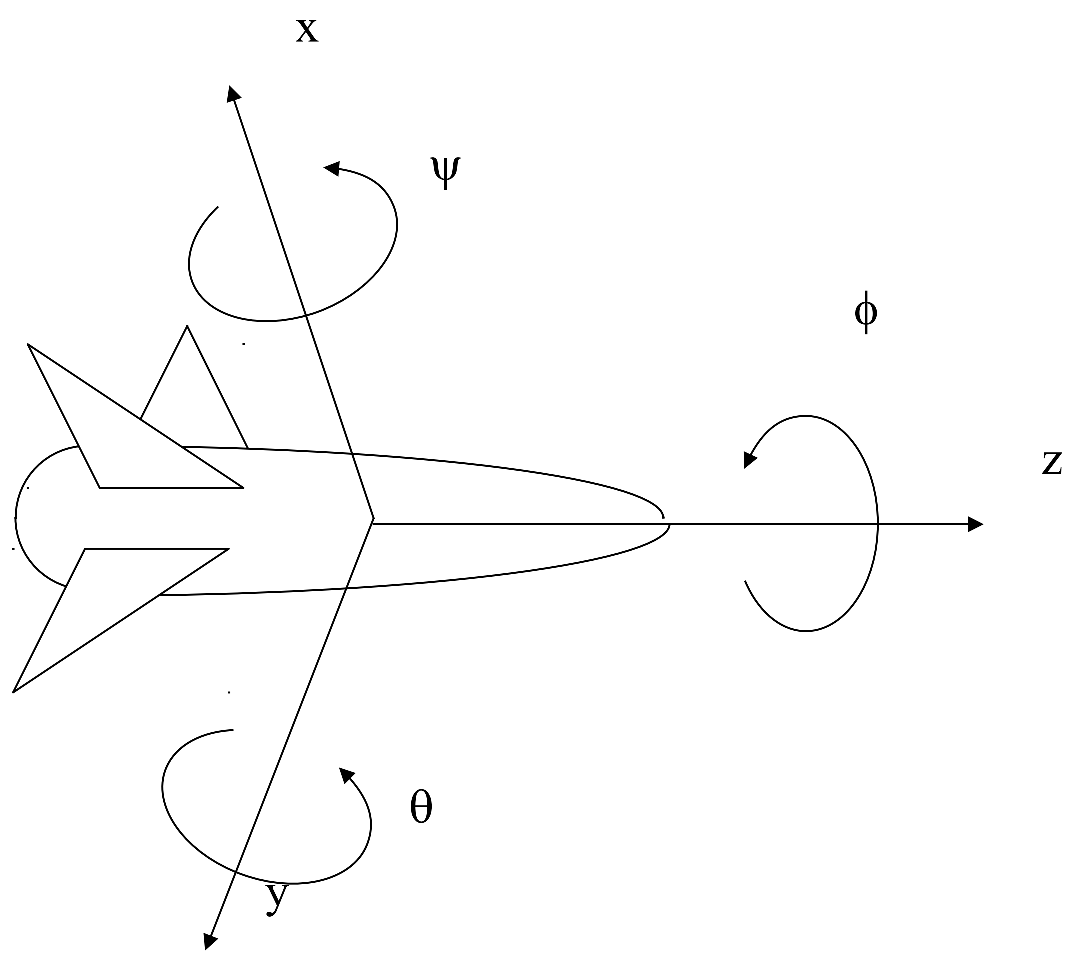
  - Sinal positivo $\Rightarrow$ $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$.
  - Sinal negativo $\Rightarrow$ $\pi/2 \leq \theta \leq 3\pi/2$.

- Para $\theta = -\pi/2$ ou $\theta = \pi/2$, a solução degenera (divisão por zero).
- Infinitas soluções $\Rightarrow$ rotações ϕ e ψ em torno do mesmo eixo.

$$\text{Para } \theta = -\pi/2 \quad \Rightarrow \quad \psi + \phi = \mathrm{atan2}(-R_{12}, R_{22})$$

$$\text{Para } \theta = \pi/2 \quad \Rightarrow \quad (\psi - \phi) = \mathrm{atan2}(R_{12}, R_{22})$$

Ângulos de Euler ZYX:
Ângulos de Rolamento, Lançamento e Guinada
(*Roll*, *Pitch*, *Yaw*)



Representação equivalente Ângulo/Eixo :

- Representação redundante de orientação.

- Quatro parâmetros:
  - Componentes (k_x, k_y, k_z) de um eixo unitário k.
  - Ângulo de rotação θ em torno do eixo k.

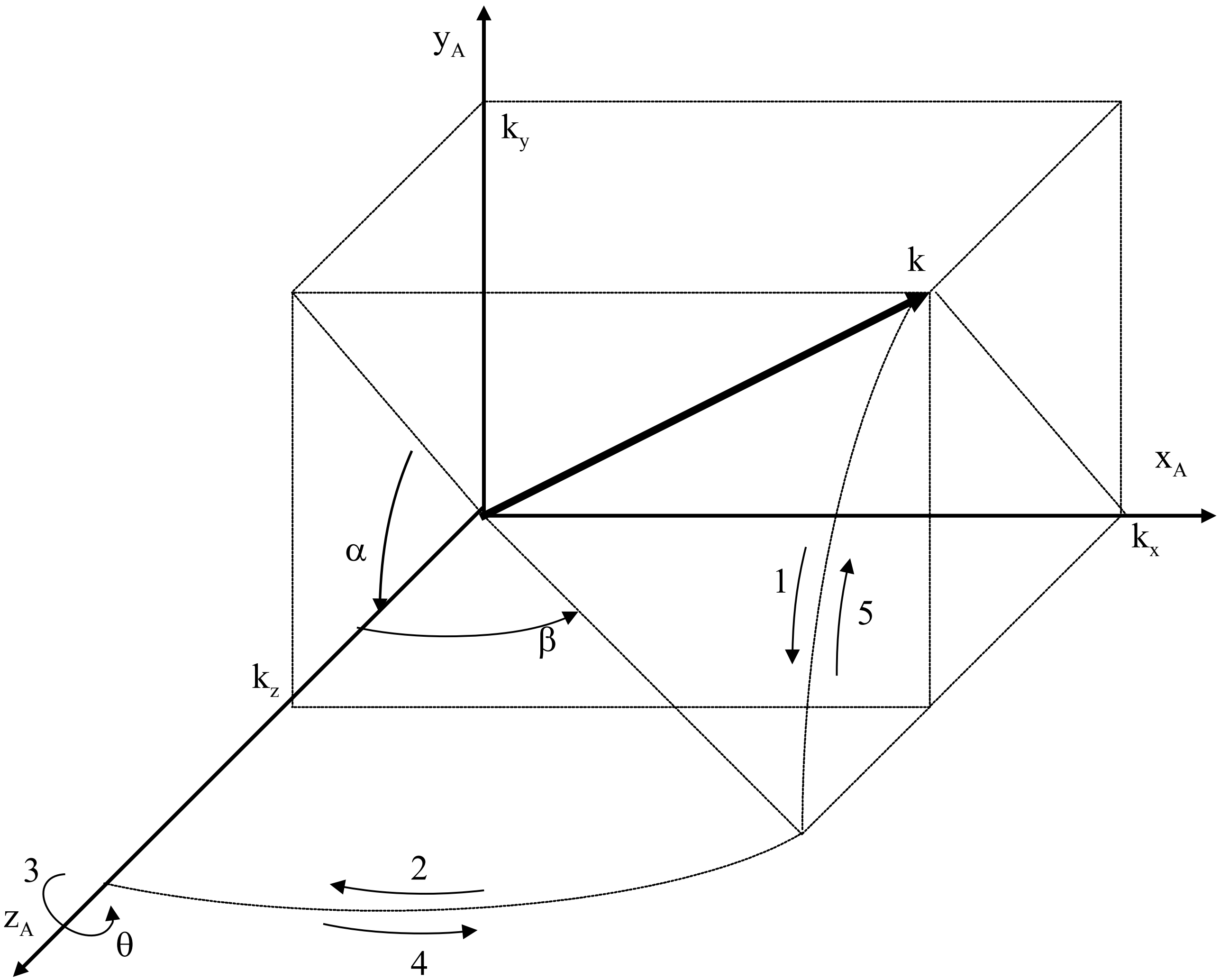
$\forall\theta$ pode ser codificado no módulo do vetor k (não unitário)
$\Rightarrow$ três parâmetros (representação não redundante).

$R_{k\theta}$ equivalente obtida a partir de (k_x, k_y, k_z, θ):

•Alinhar k com z_A girando α em torno de x_A e $-\beta$ em torno do y_A.

•Girar θ em torno de z_A (coincidente com k).

•Retornar k ao seu alinhamento original girando β em torno de y_A e α em torno de x_A.



y_A
k_y
k
x_A
k_x
α
β
1
5
k_z
3
z_A
2
θ
4

Matriz de Rotação Equivalente a Ângulo/Eixo

$$R_{k\theta} = R(x,-\alpha).R(y,\beta).R(z,\theta).R(y,-\beta).R(x,\alpha)$$

$$\Rightarrow R_{k\theta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha & s\alpha \\ 0 & -s\alpha & c\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\beta & 0 & s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta & -s\theta & 0 \\ c\theta & s\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\beta & 0 & -s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ s\beta & 0 & c\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha & -s\alpha \\ 0 & s\alpha & c\alpha \end{bmatrix}$$

Definindo $v\theta = \text{vers}(\theta) = 1 - \cos(\theta)$

Substituindo os termos em α e β por:

$$s\alpha = k_y/[k_y^2 + k_z^2]^{1/2} \qquad c\alpha = k_z/[k_y^2 + k_z^2]^{1/2}$$

$$s\beta = k_x \qquad c\beta = [k_y^2 + k_z^2]^{1/2}$$

$$\Rightarrow R_{k\theta} = \begin{bmatrix} (k_x^2.v\theta + c\theta) & (k_x.k_y.v\theta - k_z.s\theta) & (k_x.k_z.v\theta + k_y.s\theta) \\ (k_x.k_y.v\theta + k_z.s\theta) & (k_y^2.v\theta + c\theta) & (k_y.k_z.v\theta - k_x.s\theta) \\ (k_x.k_z.v\theta - k_y.s\theta) & (k_y.k_z.v\theta + k_x.s\theta) & (k_z^2.v\theta + c\theta) \end{bmatrix}$$

- A partir dos elementos da $R_{k\theta}$, pode-se obter k e θ.

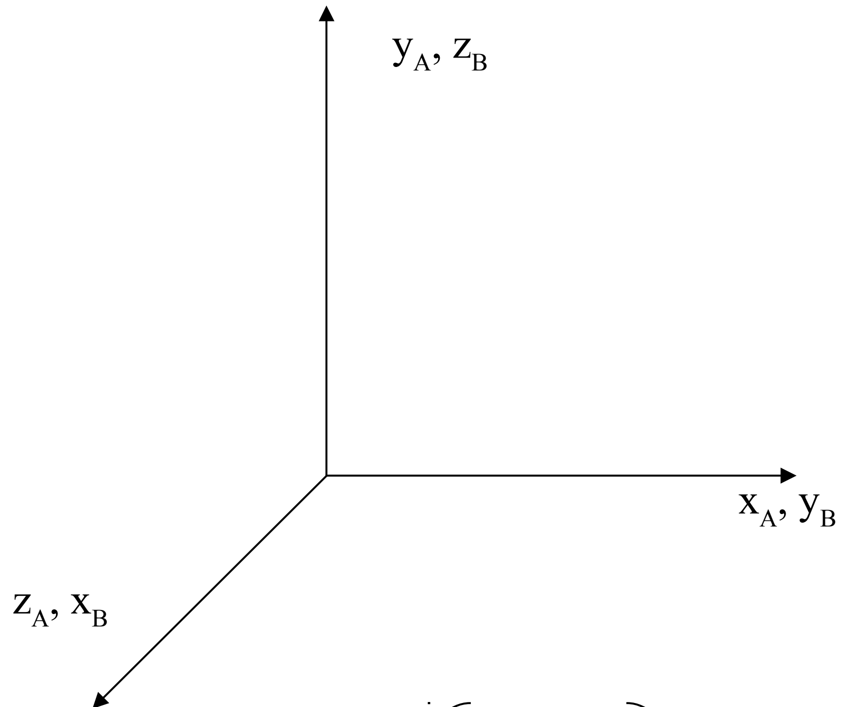
- Duas soluções possíveis: (k, θ) e $(-k, -\theta)$.
- Para $0 \leq \theta \leq \pi$:

$$\theta = \cos^{-1}((R_{11}+R_{22}+R_{33}-1)/2)$$
$$k_x = (R_{32}-R_{23})/(2.s\theta)$$
$$k_y = (R_{13}-R_{31})/(2.s\theta)$$
$$k_z = (R_{21}-R_{12})/(2.s\theta)$$

- Para $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$, a solução degenera (divisão por zero).

$\Rightarrow$ infinitas soluções (k torna-se indefinido).

Exemplo: dados {A} e {B}, obtenha ${}^{A}R_{B}$, os ângulos de Euler ZXZ, ZYZ, ZYX e a representação em ângulo/eixo.



$$
{}^{A}R_{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

Os ângulos de Euler ZXZ são dados por:

$\phi = \text{atan2}(R_{13},-R_{23}) = \text{atan2}(0,-1) = \pi$
$\theta = \text{atan2}([R_{31}{}^2+R_{32}{}^2]^{1/2} , R_{33}) = \text{atan2}(1,0) = \pi/2$
$\psi = \text{atan2}(R_{31},R_{32}) = \pi/2$

Os ângulos de Euler ZYZ são dados por:

$\phi = \text{atan2}(R_{23},R_{13}) = \text{atan2}(1,0) = \pi/2$
$\theta = \text{atan2}([R_{31}{}^2+R_{32}{}^2]^{1/2} , R_{33}) = \text{atan2}(1,0) = \pi/2$
$\psi = \text{atan2}(R_{32},-R_{31}) = \text{atan2}(0,-1) = \pi$

Para os ângulos de Euler ZYX, $\phi = \text{atan2}(R_{21},R_{11}) = \text{atan2}(0,0)$ (indefinido):

$\theta = \text{atan2}(-R_{31},[R_{32}{}^2+R_{33}{}^2]^{1/2}) = \text{atan2}(-1,0)= -\pi/2$
$\psi + \phi = \text{atan2}(-R_{12},R_{22}) = \text{atan2}(-1,0) = -\pi/2$

A representação equivalente Ângulo/Eixo é dada por:

$\theta = \cos^{-1}((R_{11}+R_{22}+R_{33}-1)/2) = \cos^{-1}(-1/2) = 2\pi/3$
$k_x = (R_{32}-R_{23})/(2.s\theta) = -(1/3)^{1/2}$
$k_y = (R_{13}-R_{31})/(2.s\theta) = -(1/3)^{1/2}$
$k_z = (R_{21}-R_{12})/(2.s\theta) = -(1/3)^{1/2}$

Transformações Homogêneas:

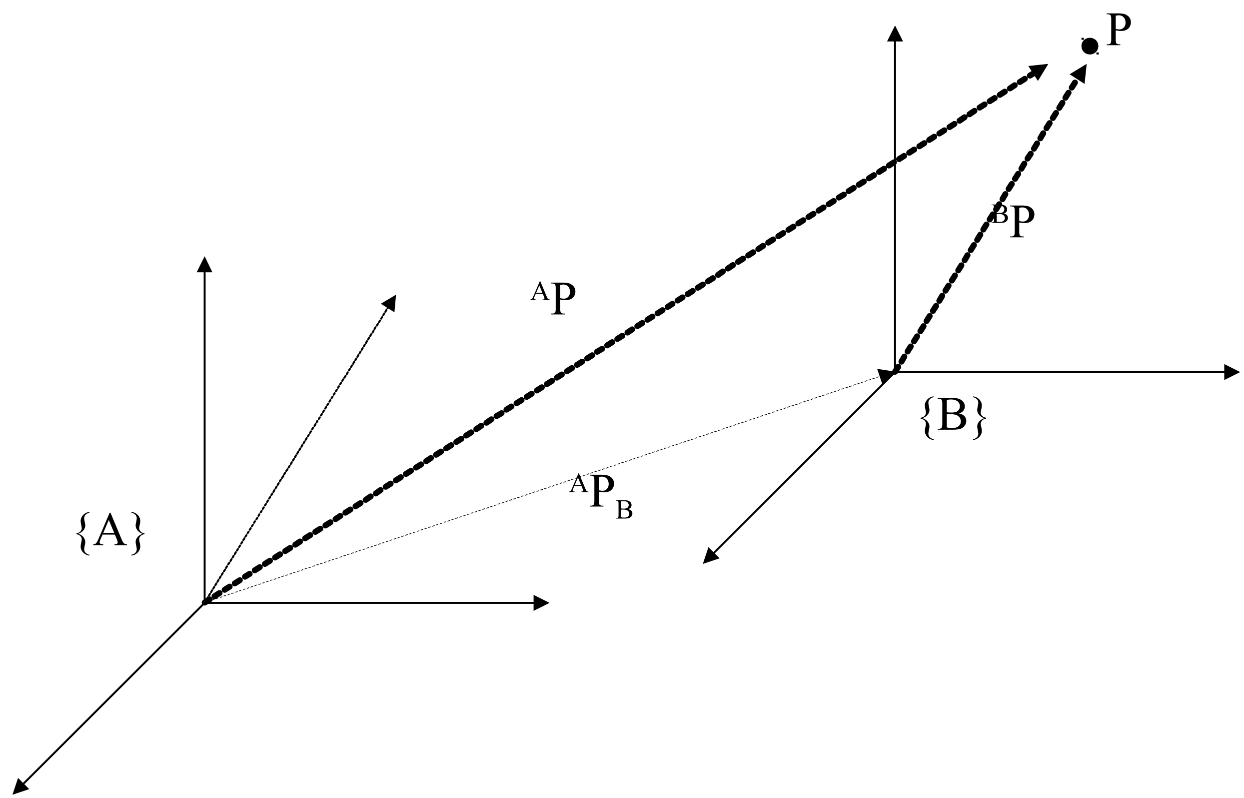
Mapeamentos:

- Dados {A} e {B} e um ponto P, conhecendo ${}^{B}P$ em {B}, conhecendo ${}^{A}P_{B}$ e ${}^{A}R_{B}$, pode-se obter ${}^{A}P$ em {A} através de um mapeamento de ${}^{B}P$ para ${}^{A}P$.

Mapeamento de Translação: $({}^{U}P_{A} \neq {}^{U}P_{B},\ {}^{U}R_{A} = {}^{U}R_{B})$

- Como {A} e {B} possuem a mesma orientação, as coordenadas de P em {A} podem ser expressas diretamente como a soma vetorial:

$${}^{A}P = {}^{B}P + {}^{A}P_{B}$$



Mapeamento de Rotação: $({}^{U}P_{A} = {}^{U}P_{B}, {}^{U}R_{A} \neq {}^{U}R_{B})$

- Como {A} e {B} possuem a mesma origem, as coordenadas de P em {A} podem ser expressas como a projeção de ${}^{B}P$ nos eixos de {A}:

$${}^{A}p_{x} = {}^{B}x_{A}{}^{T}.{}^{B}P \qquad {}^{A}p_{y} = {}^{B}y_{A}{}^{T}.{}^{B}P \qquad {}^{A}p_{z} = {}^{B}z_{A}{}^{T}.{}^{B}P$$

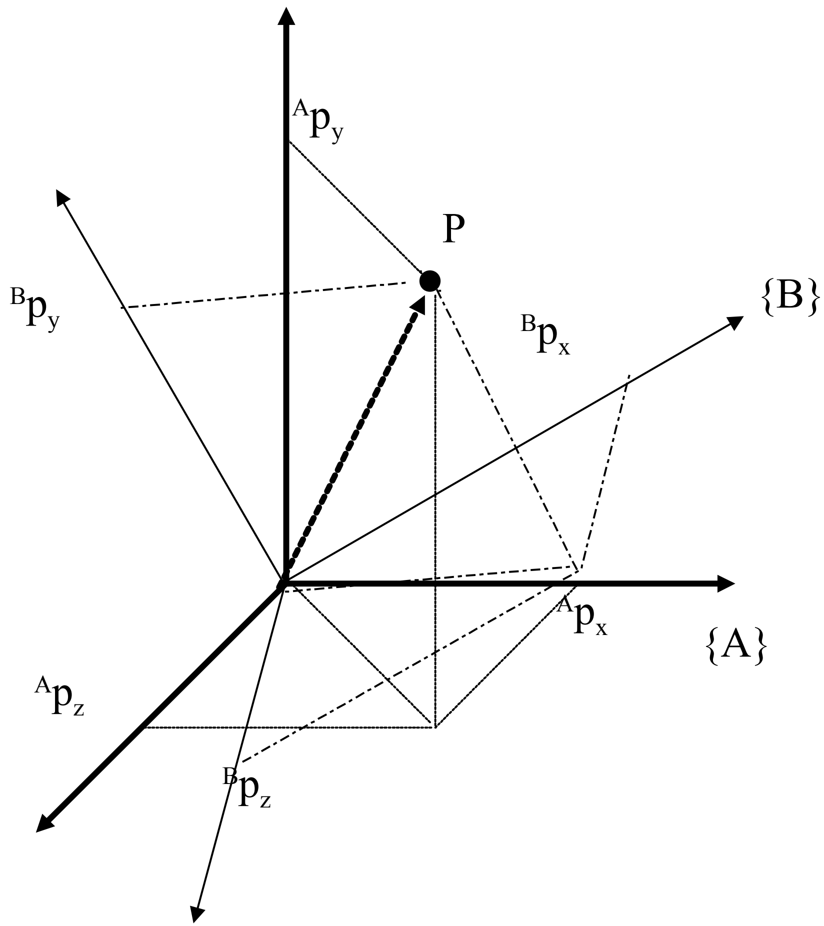
ou, matricialmente,

$${}^{A}P = [{}^{B}x_{A}{}^{T}.{}^{B}P \quad {}^{B}y_{A}{}^{T}.{}^{B}P \quad {}^{B}z_{A}{}^{T}.{}^{B}P]^{T} = [{}^{B}x_{A} \quad {}^{B}y_{A} \quad {}^{B}z_{A}]^{T}.{}^{B}P \Rightarrow {}^{A}P = {}^{B}R_{A}{}^{T}.{}^{B}P$$

Mas, como ${}^{B}R_{A}$ é uma matriz ortogonal, ${}^{B}R_{A}{}^{T} = {}^{B}R_{A}{}^{-1} = {}^{A}R_{B}$

$$\Rightarrow \; {}^{A}P = {}^{A}R_{B}.\, {}^{B}P$$

Mapeamento de Rotação



Mapeamento Geral: $({}^{U}P_A \neq {}^{U}P_B, {}^{U}R_A \neq {}^{U}R_B)$

- Composição de rotação e translação.

- Rotação: $\{B\} \Rightarrow \{I\}$ (tal que ${}^{U}P_I = {}^{U}P_B$ e ${}^{U}R_I = {}^{U}R_A$).

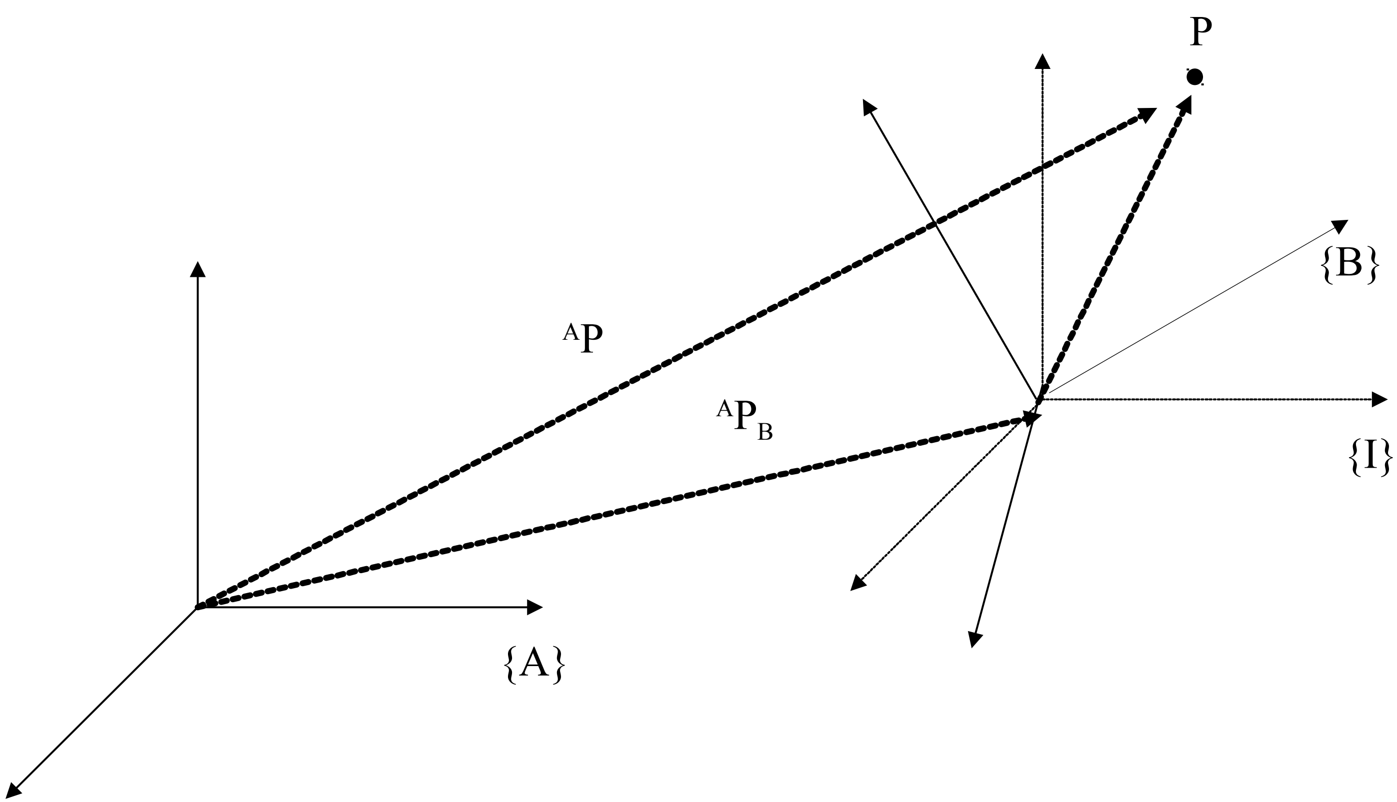
$\Rightarrow {}^{I}P = {}^{I}R_B.{}^{B}P = {}^{A}R_B.{}^{B}P$

- Translação: $\{I\} \Rightarrow \{A\}$

$\Rightarrow {}^{A}P = {}^{I}P + {}^{I}P_B = {}^{I}P + {}^{A}P_B$

- Mapeamento geral: ${}^{A}P = {}^{A}R_B.{}^{B}P + {}^{A}P_B$

Mapeamento Geral



Transformação Homogênea:

- O mapeamento geral pode ser representado matricialmente:

$$\begin{bmatrix} {}^{A}P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{A}R_{B} & & & {}^{A}P_{B} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} {}^{B}P \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{onde,} \quad {}^{A}T_{B} = \begin{bmatrix} {}^{A}R_{B} & & & {}^{A}P_{B} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- ${}^{A}T_{B}$ é a <u>Matriz de Transformação Homogênea</u> que representa a posição e orientação de {B} em relação a {A}.

- A linha inferior da equação matricial foi acrescentada de modo a resultar numa matriz ${}^{A}T_{B}$ quadrada 4x4 para a qual exista matriz inversa.

Operadores de Movimento:

- O movimento de um referencial em relação a outro pode ser descrito usando transformações homogêneas apropriadas que definam as mudanças de posição e orientação relativas ao se passar de um referencial para outro.

Operadores de Translação:

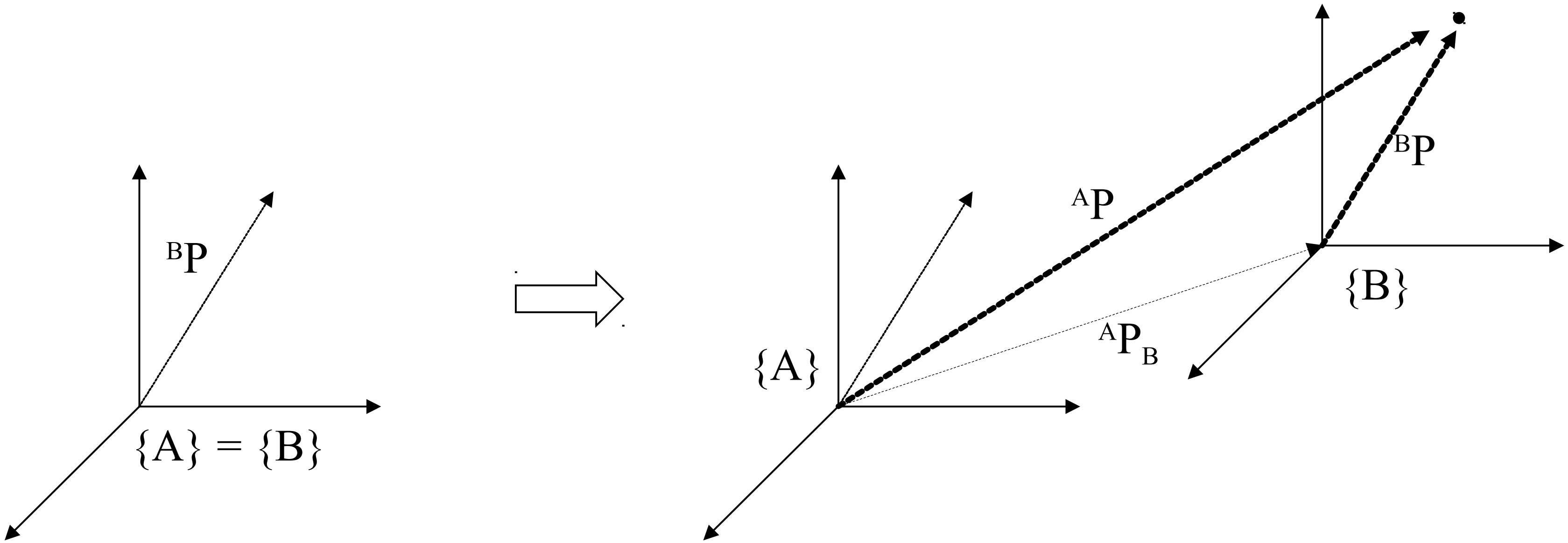
- Dado um vetor ${}^{A}P_{B,}$ o <u>Operador de Translação</u> $T({}^{A}p_{B}, |\,{}^{A}P_{B}|)$ aplicado sobre um vetor ${}^{B}P$ o translada ao longo da direção do vetor unitário ${}^{A}p_{B}$ por uma distância $|\,{}^{A}P_{B}|$, resultando num vetor ${}^{A}P$:

- ${}^{A}P = T({}^{A}p_{B}/\,|\,{}^{A}P_{B}\,|,\,|\,{}^{A}P_{B}|).{}^{B}P$

- onde, sendo I a matriz identidade 3x3:

- $T({}^{A}p_{B}/\,|\,{}^{A}P_{B}\,|,\,|\,{}^{A}P_{B}|) = \begin{bmatrix} & I & & {}^{A}P_{B} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow {}^{A}P = {}^{B}P + {}^{A}P_{B}$

Operador de Translação:



- Assim, deslocamentos de uma distância d ao longo dos eixos x, y, e z são respectivamente:

$$T(x,d) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T(y,d) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T(z,d) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Operadores de Rotação:

- O Operador de Rotação R(k, θ) aplicado sobre um vetor ${}^{B}P$ o rotaciona em torno do vetor unitário k por um ângulo θ, resultando num vetor ${}^{A}P$:

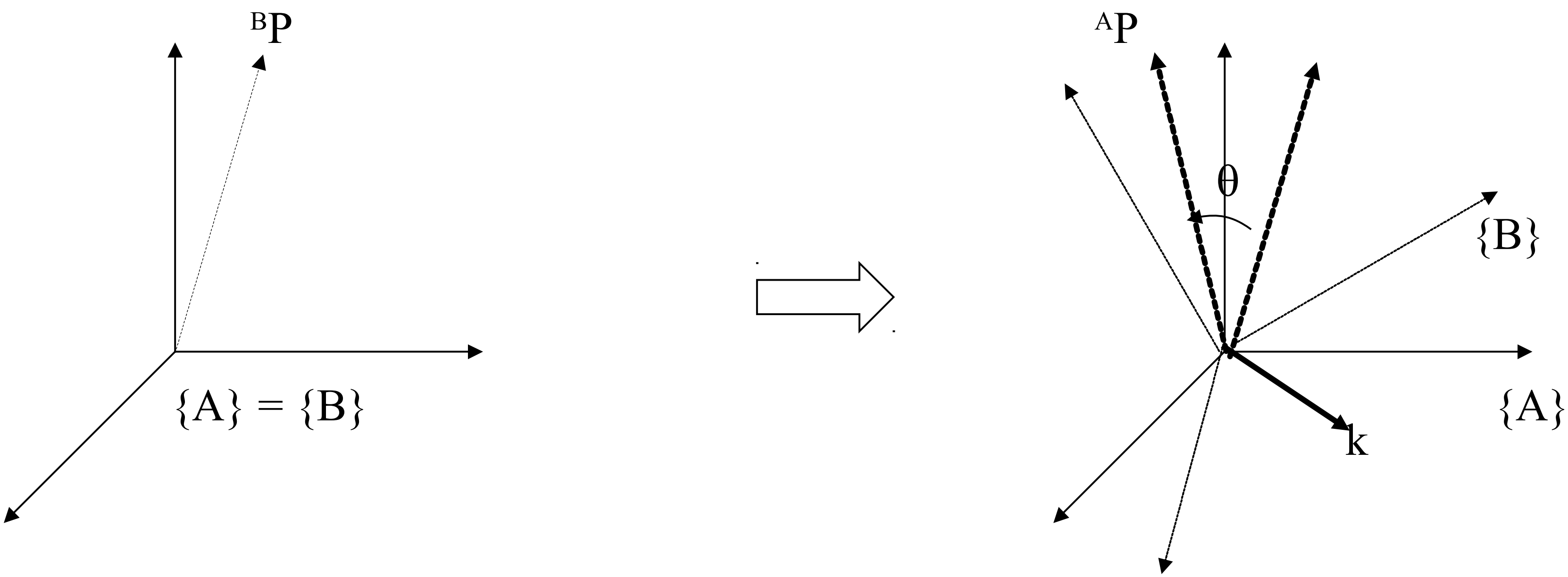
$${}^{A}P = R(k,\theta).{}^{B}P$$

$$R(k, \theta) = \begin{bmatrix} & & & 0 \\ & {}^{A}R_{B} & & 0 \\ & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Onde ${}^{A}R_{B}(\theta)$ = matriz de rotação 3x3 apropriada que representa a orientação de {B} em relação a {A} quando {B} gira um ângulo θ em torno do vetor k:.

$\Rightarrow {}^{A}P = {}^{A}R_{B}.{}^{B}P$ (coordenadas cartesianas)

Operador de Rotação:



- Os operadores de rotação de um ângulo θ em torno dos eixos x, y, e z são:

$$R(x,\theta)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta) & 0\\ 0 & \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$R(y,\theta)=\begin{bmatrix}\cos(\theta) & 0 & \mathrm{sen}(\theta) & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -\mathrm{sen}(\theta) & 0 & \cos(\theta) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$R(z,\theta)=\begin{bmatrix}\cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta) & 0 & 0\\ \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Operadores de Transformação:

- Um <u>Operador de Transformação</u> aplicado sobre um vetor ^{B}P resulta num vetor ^{A}P, movimentado para uma localização genérica em relação à sua localização inicial. ^{A}P = combinação de:

  - uma rotação de um ângulo θ em torno de um eixo k (representada por $^{A}R_{B}$).
  - seguida de uma translação por uma distância $|^{A}P_{B}|$ ao longo de um eixo $^{A}p_{B}$:

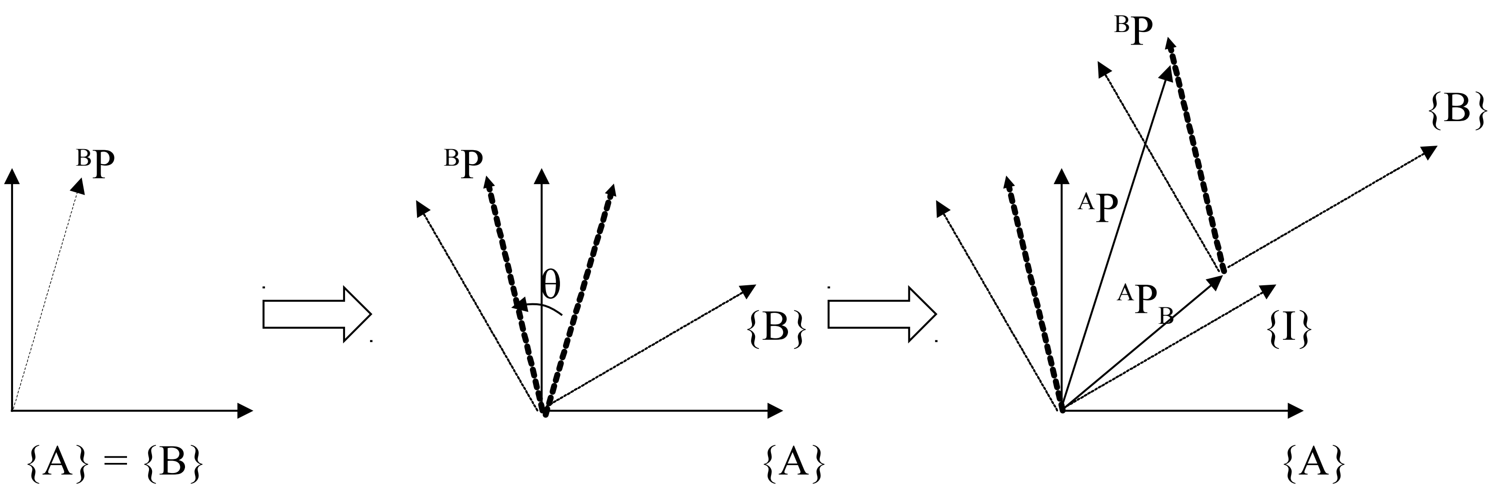
$^{A}P = {}^{A}R_{B}.{}^{B}P + {}^{A}P_{B}$ (coordenadas cartesianas)

$\Rightarrow$ $^{A}P = {}^{A}T_{B}.{}^{B}P$ (coordenadas homogêneas)

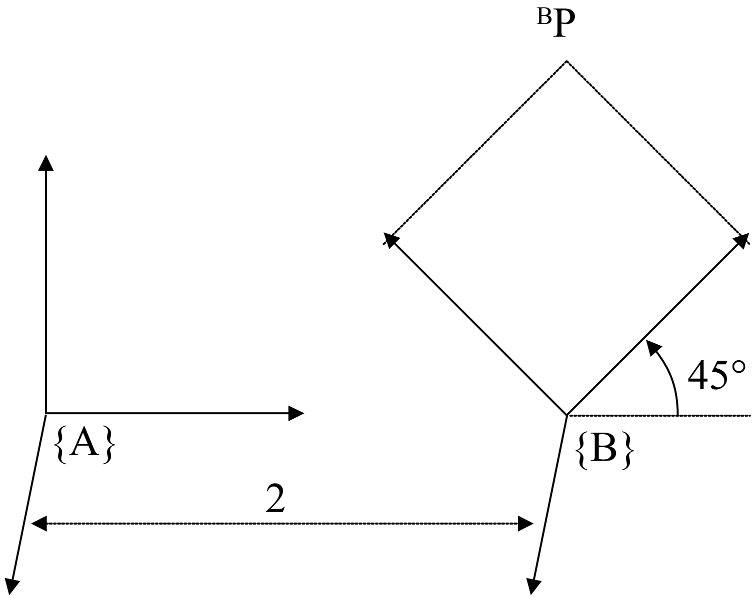
onde,

$$^{A}T_{B} = T\left({}^{A}P_{B}/|{}^{A}P_{B}|, |{}^{A}P_{B}|\right).R\left(k,\theta\right) = \begin{bmatrix} & {}^{A}R_{B} & & {}^{A}P_{B} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Operador de Transformação



Exemplo: Dado {B} rotacionado 45° em torno de z_A e transladado 2 unidades ao longo de x_A, conhecendo ${}^BP = [1 \quad 1 \quad 0]^T$, determine ${}^AP$.



$$ {}^AR_B = \begin{pmatrix} \cos(45^o) & -\mathrm{sen}(45^o) & 0 \\ \mathrm{sen}(45^o) & \cos(45^o) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} $$

$$ {}^AP_B = [2 \quad 0 \quad 0]^T $$

$$ \begin{pmatrix} {}^AP \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^AR_B & {}^AP_B \\ 0\ 0\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^BP \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1/2)^{1/2} & -(1/2)^{1/2} & 0 & 2 \\ (1/2)^{1/2} & (1/2)^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} $$

$\Rightarrow {}^AP = [2 \quad (1/2)^{1/2} \quad 0]^T$

<u>Aritmética de Transformações</u>:

- **Transformação Composta**:
  Problema: conhecendo a localização de {C} em relação a {B}, ${}^{B}T_{C}$ e a localização de {B} em relação a {A}, ${}^{A}T_{B}$, determinar a localização de {C} em relação a {A}, ${}^{A}T_{C}$.

${}^{B}P = {}^{B}T_{C}.{}^{C}P$, ${}^{A}P = {}^{A}T_{B}.{}^{B}P$, ${}^{A}P = {}^{A}T_{C}.{}^{C}P$

$${}^{A}P = {}^{A}T_{B}.{}^{B}P = {}^{A}P = {}^{A}T_{B}.({}^{B}T_{C}.{}^{C}P) = ({}^{A}T_{B}.{}^{B}T_{C}).{}^{C}P \Rightarrow {}^{A}T_{C} = {}^{A}T_{B}.{}^{B}T_{C}$$

$${}^{A}T_{C} = {}^{A}T_{B}.{}^{B}T_{C} \quad \Rightarrow \quad {}^{A}T_{C} = \begin{bmatrix} \left({}^{A}R_{B}.{}^{B}R_{C}\right) & \left({}^{A}P_{B} + {}^{A}R_{B}.{}^{B}P_{C}\right) \\ 0 \quad 0 \quad 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Aritmética de Transformações:

- **Transformação Inversa**:

  Problema: conhecendo a localização de {B} em relação a {A}, ${}^{A}T_{B}$, determinar a localização de {A} em relação a {B} }, ${}^{B}T_{A}$.

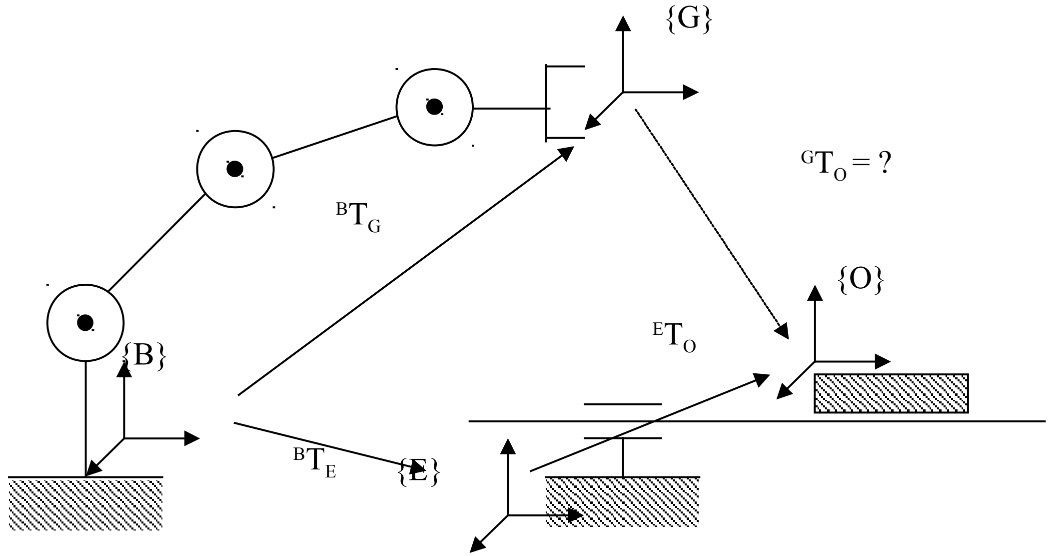
$${}^{A}P = {}^{A}R_{B}.{}^{B}P + {}^{A}P_{B} \qquad \Rightarrow \qquad {}^{B}P = {}^{A}R_{B}^{-1}.({}^{A}P - {}^{A}P_{B}) = {}^{A}R_{B}^{T}.{}^{A}P - {}^{A}R_{B}^{T}.{}^{A}P_{B}$$

Então, o operador matricial que relaciona ${}^{A}P$ a ${}^{B}P$ é:

$${}^{B}T_{A} = {}^{A}T_{B}^{-1} = \begin{pmatrix} ({}^{A}R_{B}^{T}) & (-{}^{A}R_{B}^{T}.{}^{A}P_{B}) \\ 0\ \ 0\ \ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Equações de Transformação:

- Exemplo: conhecendo ${}^{B}T_{G}$, ${}^{B}T_{E}$, ${}^{E}T_{O}$, determinar ${}^{G}T_{O}$.



- Solução: ${}^{G}T_{O} = \quad {}^{G}T_{B}.\,{}^{B}T_{O} = {}^{G}T_{B}.({}^{B}T_{E}.{}^{E}T_{O}) = {}^{B}T_{G}^{-1}.({}^{B}T_{E}.{}^{E}T_{O})$

O Problema da Cinemática Direta:

- Determinar a localização (posição e orientação) da garra e de cada elo do manipulador a partir do valor atual das variáveis de junta (ângulos ou deslocamentos de junta).

- **Elo**: corpo rígido que define a relação geométrica entre dois eixos de juntas vizinhas na cadeia cinemática.

- **Junta**: conexão entre dois elos vizinhos na cadeia cinemática. A partir do seu eixo se dá a movimentação relativa entre dois elos vizinhos.

- **Variável da Junta i**: (q_i) grandeza que mede o deslocamento relativo entre dois elos vizinhos {i-1} e {i} interligados pela junta i.
  - Se a junta i for rotacional, a variável da junta θ_i é o ângulo de junta.
  - Se a junta i for prismática, a variável da junta d_i é o deslocamento de junta.
  - Um robô de N graus de liberdade possui N variáveis de junta, que são representadas pelo vetor de variáveis de junta q de dimensão Nx1.

A Notação Denavit Hartenberg:

Convenção para atribuição de Referenciais de Elo:

- Os elos são numerados partindo da base do robô, à qual associa-se o referencial {0},
- As juntas correspondentes são numeradas da mesma maneira,
- O eixo z_i é coincidente com o eixo de movimento da junta i.
- A origem de {i} é estabelecida na interseção entre o eixo z_i e a reta normal a z_i e z_{i+1}.
- O eixo x_i é estabelecido sobre a reta normal a z_i e z_{i+1}.
- O eixo y_i é definido pela regra da mão direita.

Casos especiais:

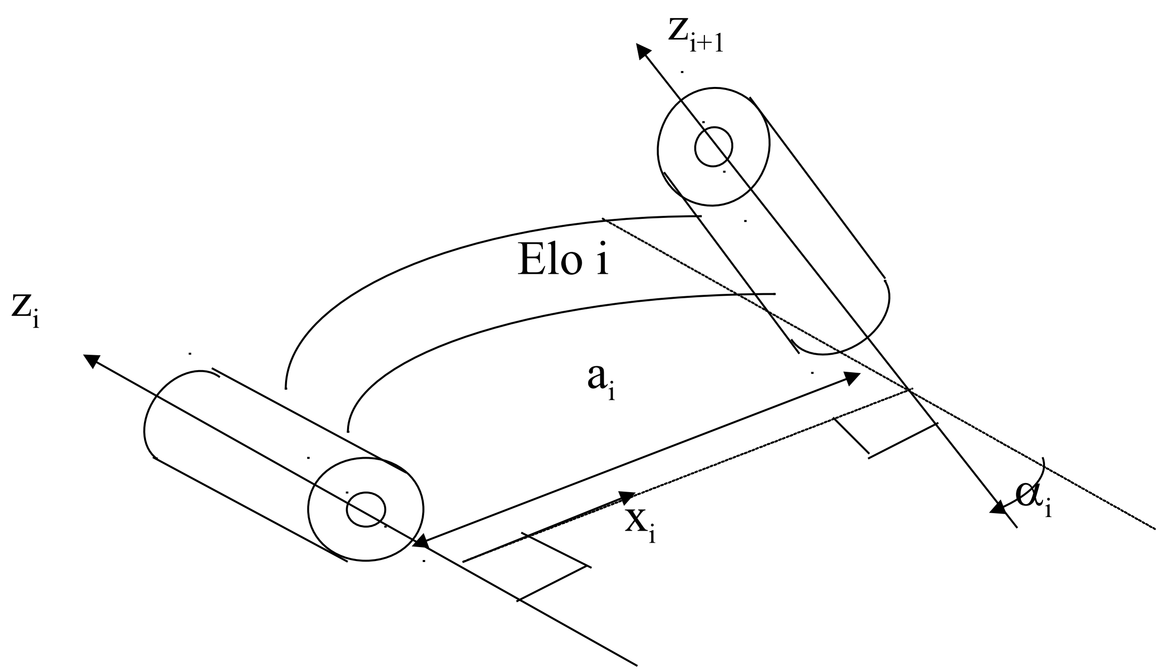
- z_i intersecta z_{i+1}: x_i sobre a reta normal ao plano formado por z_i e z_{i+1}.

- Extremidades da cadeia cinemática:
  - O referencial da base {0} é atribuído de maneira a ser coincidente com o referencial de elo {1} quando a variável da junta 1, q_1, for igual a zero.
  - Ao último elo (no qual está fixa a ferramenta) são fixos dois referenciais: um na junta associada (referencial {N}} e outro na ponta da ferramenta {N+1}.
  - O referencial {N} é atribuído de maneira a ser coincidente com o referencial de elo {N-1} quando a variável da junta N, q_N, for igual a zero.
  - O referencial {N+1) é posicionado na ponta da ferramenta e com a mesma orientação do referencial {N}.

Descrição Cinemática de Elos:

- Comprimento do elo i: a_i, distância entre z_i e z_{i+1} medida ao longo do eixo x_i.

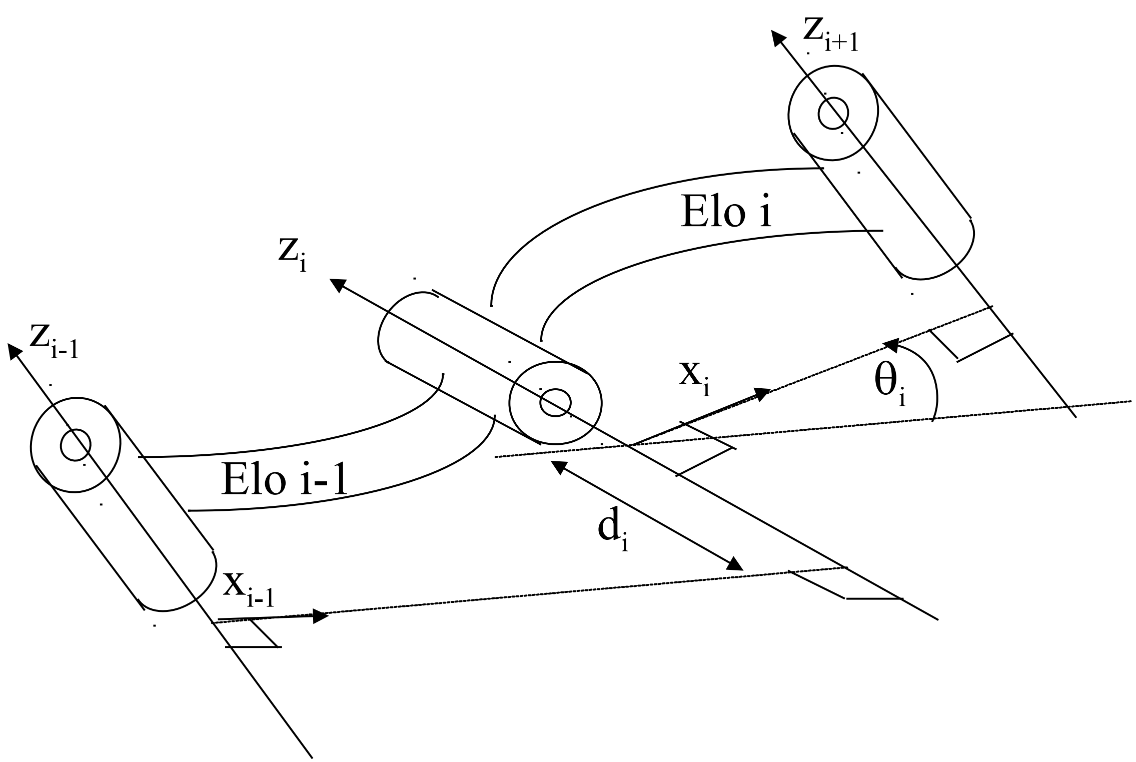
- ângulo de torção do elo i: α_i, ângulo entre z_i e z_{i+1} medido em torno do eixo x_i.



Descrição Cinemática de Juntas:

- <u>Deslocamento da junta i</u>: d_i, distância entre x_{i-1} e x_i medida ao longo do eixo z_i.

- <u>Ângulo da junta i</u>: θ_i, ângulo entre x_{i-1} e x_i medido em trono do eixo z_i.



Transformações de Elo:

$$^{i-1}T_i = T(x_{i-1}, a_{i-1}).R(x_{i-1}, \alpha_{i-1}).T(z_i, d_i).R(z_i, \theta_i)$$

$$^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} ^{i-1}R_i & & & ^{i-1}P_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i} & 0 & a_{i-1} \\ (c_{\alpha_{i-1}} s_{\theta_i}) & (c_{\alpha_{i-1}} c_{\theta_i}) & (-s_{\alpha_{i-1}}) & (-s_{\alpha_{i-1}}.d_i) \\ (s_{\alpha_{i-1}} s_{\theta_i}) & (s_{\alpha_{i-1}} c_{\theta_i}) & (c_{\alpha_{i-1}}) & (c_{\alpha_{i-1}}.d_i) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

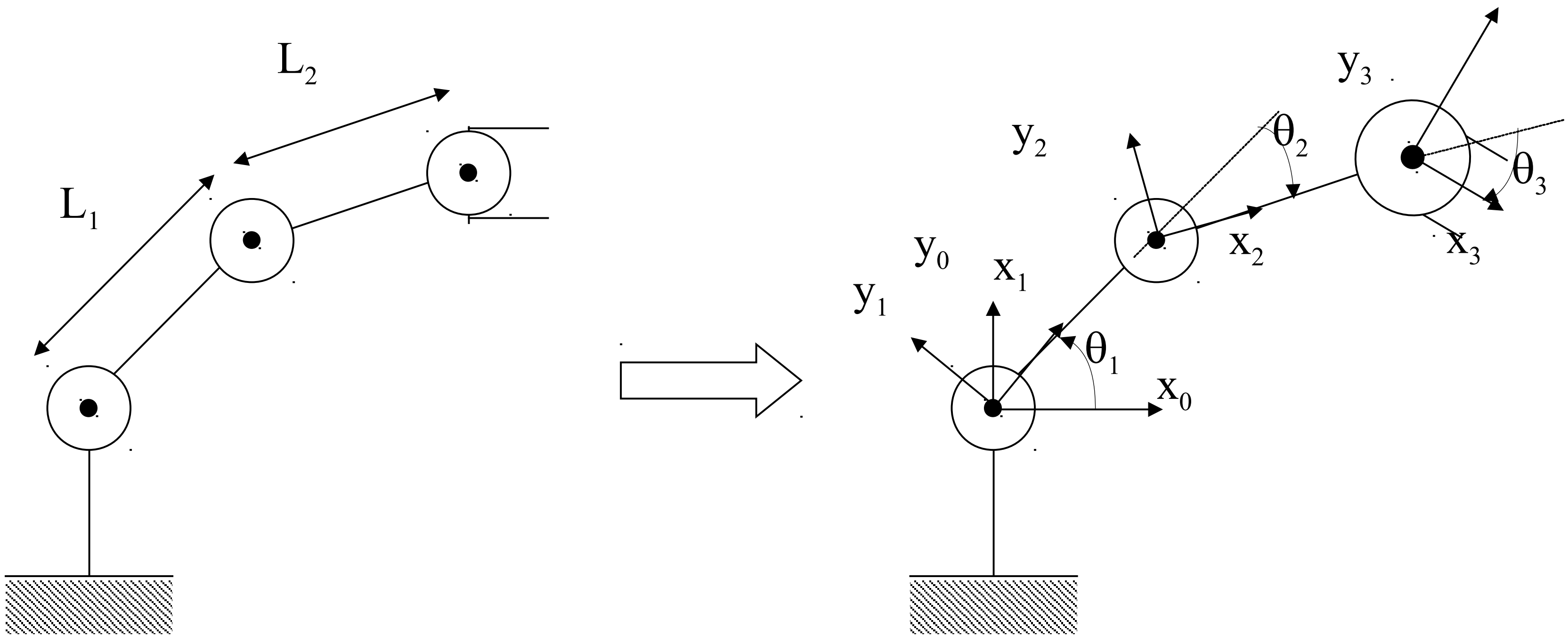
onde, $c_\theta = \cos(\theta)$, $s_\theta = \text{sen}(\theta)$, $c_\alpha = \cos(\alpha)$, $s_\alpha = \text{sen}(\alpha)$

Solução do Problema da Cinemática Direta:

$$^{0}T_{N} = {}^{0}T_{1}.{}^{1}T_{2}.{}^{2}T_{3}.\ldots\ldots{}^{N-2}T_{N-1}.{}^{N-1}T_{N}$$

Exemplo de cálculo de Cinemática Direta:

Manipulador Planar Articulado de três Graus de Liberdade



Parâmetros Denavit-Hartenberg:

i	a_{i-1}	α_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	L_1	0	0	θ_2
3	L_2	0	0	θ_3

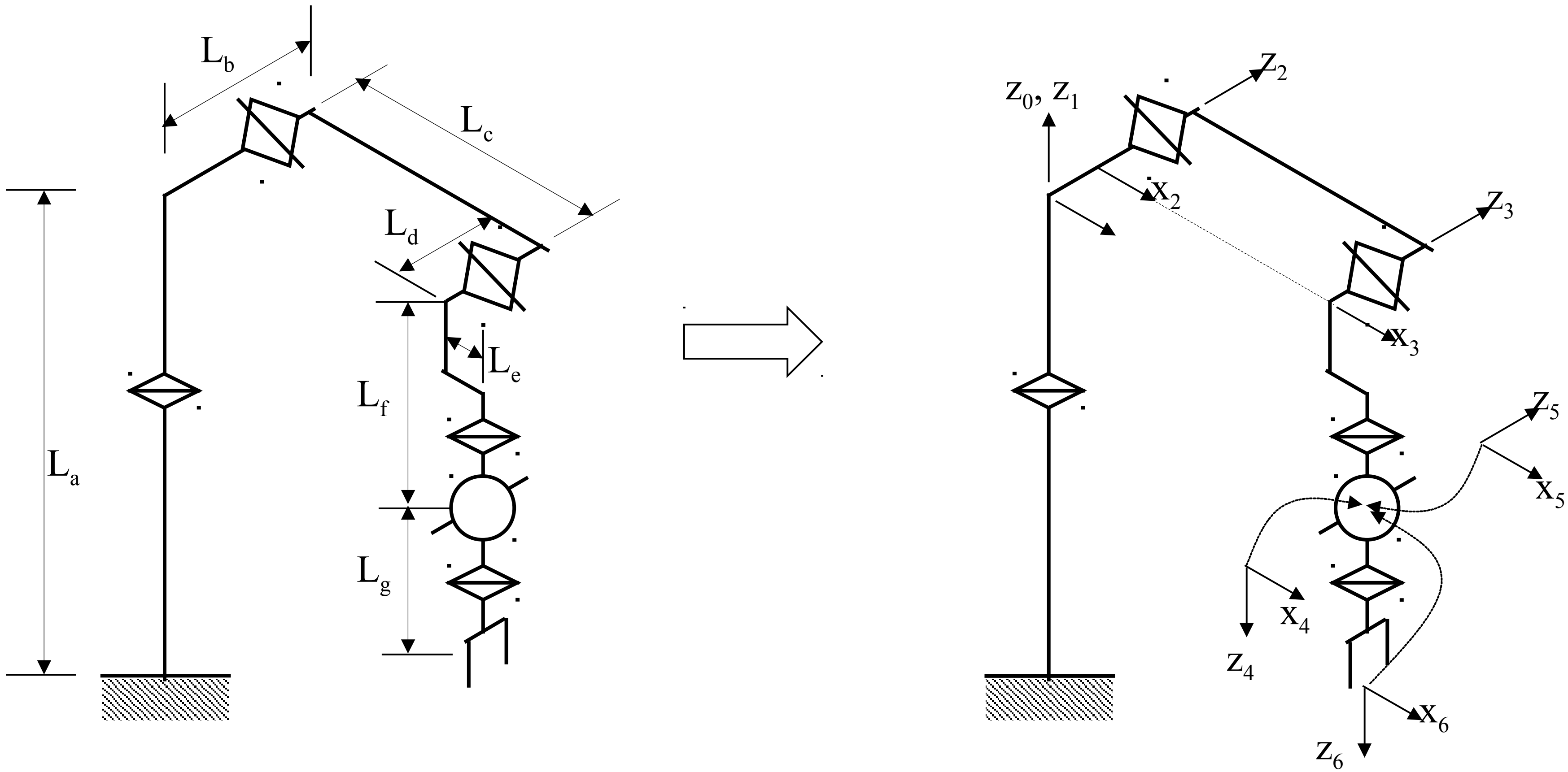
Transformações de Elo:

$$
{}^{0}T_{1} = \begin{bmatrix} c_{\theta_1} & -s_{\theta_1} & 0 & 0 \\ s_{\theta_1} & c_{\theta_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\quad
{}^{1}T_{2} = \begin{bmatrix} c_{\theta_2} & -s_{\theta_2} & 0 & L_1 \\ s_{\theta_2} & c_{\theta_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\quad
{}^{2}T_{3} = \begin{bmatrix} c_{\theta_3} & -s_{\theta_3} & 0 & L_2 \\ s_{\theta_3} & c_{\theta_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Cinemática Direta:

$$
{}^{0}T_{3} = \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 & L_1 c_1 + L_2 c_{12} \\ s_{123} & c_{123} & 0 & L_1 s_1 + L_2 s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Exemplo: Cinemática Direta do Manipulador PUMA



Parâmetros Denavit-Hartenberg:

i	a_{i-1}	α_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	0	$-\pi/2$	$L_b - L_d$	θ_2
3	L_c	0	0	θ_3
4	L_e	$-\pi/2$	L_f	θ_4
5	0	$\pi/2$	0	θ_5
6	0	$-\pi/2$	0	θ_6

Transformações de Elo:

$$
{}^{0}T_{1} = \begin{pmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\qquad
{}^{1}T_{2} = \begin{pmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_b-L_d \\ -s\theta_2 & -c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
{}^{2}T_{3} = \begin{pmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & L_c \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\qquad
{}^{3}T_{4} = \begin{pmatrix} c\theta_4 & -s\theta_4 & 0 & L_e \\ 0 & 0 & 1 & L_f \\ -s\theta_4 & -c\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
{}^{4}T_{5} = \begin{pmatrix} c\theta_5 & -s\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s\theta_5 & \theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\qquad
{}^{5}T_{6} = \begin{pmatrix} c\theta_6 & -s\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s\theta_6 & -c\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

Cinemática Direta:

$$R_{11} = c_1[c_{23}(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - s_{23}s_5c_6] + s_1[s_4c_5c_6 + c_4s_6]$$
$$R_{12} = c_1[-c_{23}(c_4c_5s_6 + s_4c_6) + s_{23}s_5s_6] - s_1[s_4c_5s_6 - c_4c_6]$$
$$R_{13} = -c_1[c_{23}c_4s_5 + s_{23}c_5] - s_1s_4s_5$$
$$R_{21} = s_1[c_{23}(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - s_{23}s_5c_6] - c_1[s_4c_5c_6 + c_4s_6]$$
$$R_{22} = s_1[-c_{23}(c_4c_5s_6 + s_4c_6) + s_{23}s_5s_6] + c_1[s_4c_5s_6 - c_4c_6]$$
$$R_{23} = -s_1[c_{23}c_4s_5 + s_{23}c_5] + c_1s_4s_5$$
$$R_{31} = -s_{23}(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - c_{23}s_5c_6$$
$$R_{32} = s_{23}(c_4c_5s_6 + s_4c_6) + c_{23}s_5s_6$$
$$R_{33} = s_{23}c_4s_5 - c_{23}c_5$$

$$P_x = c_1(c_2L_c + c_{23}L_e - s_{23}L_f) - s_1(L_b - L_d)$$
$$P_y = s_1(c_2L_c + c_{23}L_e - s_{23}L_f) + c_1(L_b - L_d)$$
$$P_z = -s_2L_c - s_{23}L_e - c_{23}L_f$$

Cinemática Inversa:

<u>O Problema da Cinemática Inversa</u>:

- Dada uma especificação da localização (posição e orientação) que se deseja que a garra alcance, determinar o valor das variáveis de junta (ângulos ou deslocamentos de junta) necessários para levar a garra a tal localização. Ou seja, a partir de uma especificação de ${}^{0}T_{N}^{*}$, determinar o vetor de variáveis de junta q.

Características do Problema da Cinemática Inversa:

- ${}^{0}T_N$ é uma função não linear transcende das N variáveis de junta:

$$ {}^{0}T_N^{*} = {}^{0}T_N(q) $$

  a sua solução, diferentemente da cinemática direta, não é um problema trivial.

- ${}^{0}T_N$ possui 16 elementos (quatro deles triviais) sendo que os nove elementos da matriz de rotação estão sujeitos a seis restrições (as suas colunas devem ser vetores unitários e ortogonais). Assim, têm-se ao todo seis equações linearmente independentes que devem ser resolvidas para as variáveis de junta.

- **Existência de soluções:**

Espaço de trabalho: conjunto de todas as localizações da ferramenta para as quais existe solução para a cinemática inversa. Podem existir especificações para ${}^{0}T_{N}^{*}$ para as quais não existe solução $\Rightarrow$ fora do espaço de trabalho.

- Espaço de trabalho alcançável: Volume do espaço que pode ser alcançado com, pelo menos uma orientação.

- Espaço de trabalho manipulável: Volume do espaço de trabalho que pode ser alcançado em qualquer orientação.

- **Múltiplas Soluções:**
- Para N = 6 juntas $\Rightarrow$ 6 equações e N = 6 incógnitas.
  - Existe um numero finito de soluções. (Até 16 soluções diferentes).
- Para N < 6 juntas $\Rightarrow$ 6 equações e N < 6 incógnitas.
  - Não é possível alcançar objetivos gerais no espaço 3D.
  - Localizações que têm solução formam <u>subespaço</u> do espaço 3D.
- Para N > 6 juntas $\Rightarrow$ 6 equações e N > 6 incógnitas
  - (manipuladores redundantes). Podem existir infinitas soluções.
  - É necessário escolher uma solução dentro do conjunto de soluções.
  - Deve-se definir algum critério de escolha:
  - Menor movimento em relação à localização atual.
  - Movimento das juntas mais leves.
  - Contorno de obstáculos.
  - etc.

Cinemática Inversa - Métodos de Solução:

- **Solução Numérica:**
  - As equações podem ser resolvidas por métodos iterativos.
  - Podem ter problemas de convergência.
  - Não são muito apropriados para implementação em tempo real.
- **Solução em fórmula fechada:**
  - As equações resolvidas algebricamente: expressão matemática computável.
  - São fáceis de implementar e envolvem pouco esforço computacional.
  - A cinemática inversa deve ser calculada a taxas elevadas (período de amostragem < 30 ms). Soluções fechadas são mais adequadas.
  - Robôs manipuladores de 6 graus de liberdade, com três eixos se intersectando num ponto possuem solução fechada (Solução de Pieper).
  - A grande maioria dos manipuladores industriais são construídos de modo a possuir solução em fórmula fechada.

Transformação da equação cinemática:

Dada equação cinemática original:

$^{0}T_{6}^{*} = {}^{0}T_{1}(q_1).{}^{1}T_{2}(q_2). \ldots .{}^{5}T_{6}(q_6)$

$\Rightarrow$12 equações algébricas, seis variáveis desconhecidas (q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6).

Transformando esta expressão:

$[{}^{0}T_{1}(q_1). \ldots .{}^{i-1}T_{i}(q_i)]^{-1}.{}^{0}T_{6}^{*}.[{}^{j}T_{j+1}(q_{j+1}). \ldots .{}^{5}T_{6}(q_6)]^{-1} = {}^{i}T_{i+1}(q_{i+1}). \ldots .{}^{j-1}T_{j}(q_j)$

obtemos outro conjunto equivalente de doze equações simultâneas para cada par (i,j) com $i < j$.

$\Rightarrow$Escolhendo as equações mais simples, freqüentemente é possível encontrar mais facilmente a solução.

Solução de Pieper:

- Aplicável a manipuladores de 6 juntas tendo {4}, {5} e {6} origem comum.

- A localização da garra determina a posição de {6} $\Rightarrow$posição de {4}, ${}^{0}P_{4}$.

- Se a orientação da garra for especificada através de um vetor de aproximação, com o ângulo de rolamento codificado em seu módulo, a origem de {6} estará localizada sobre o mesmo.

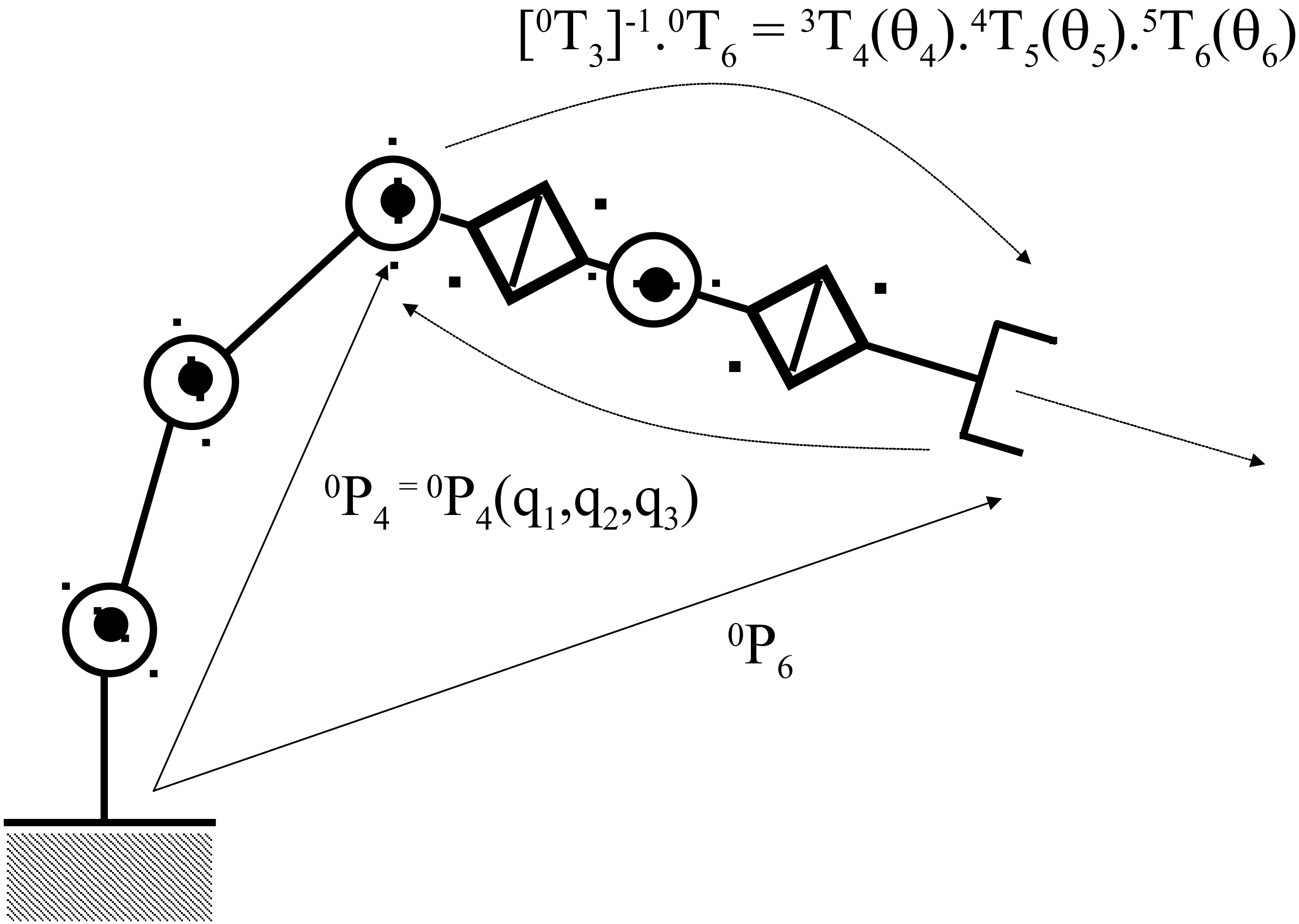
- Conhecendo a posição de {6}, determina-se conseqüentemente a posição de {4}, visto que suas origens são coincidentes.

- ${}^{0}P_{4} = ({}^{0}P_{4x},, {}^{0}P_{4y},, {}^{0}P_{4z},)$ é função de q_1, q_2 e q_3 $\Rightarrow$ podem ser determinadas por métodos algébricos e/ou geométricos a partir de ${}^{0}P_{4}$.

- A partir de q_1, q_2 e q_3, é possível determinar a posição e orientação de {3}, bem como ${}^{3}R_{6}$ (por transformação da equação cinemática).

- Como ${}^{3}R_{6}$ é função apenas de q_4, q_5 e q_6, estas três últimas variáveis desconhecidas podem ser obtidas facilmente da equação transformada.

Solução de Pieper:



Exemplo de cálculo de Cinemática Inversa:

Manipulador Planar Articulado de três Graus de Liberdade

Especificação da posição e orientação da garra: (x, y, ϕ).

$$
{}^{0}T_{3} = {}^{0}T_{3} \Rightarrow \begin{bmatrix} c_{\varphi} & -s_{\varphi} & 0 & x \\ s_{\varphi} & c_{\varphi} & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 & L_1 c_1 + L_2 c_{12} \\ s_{123} & c_{123} & 0 & L_1 s_1 + L_2 s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

De onde obtemos 4 equações (3 independentes):

$$c_{\phi} = c_{123}$$

$$s_{\phi} = s_{123}$$

$$x = L_1 c_1 + L_2 c_{12}$$

$$y = L_1 s_1 + L_2 s_{12}$$

Por meios algébricos, as equações podem ser resolvidas para θ_1, θ_2 e θ_3:

$$\theta_2 = \text{atan}(s_2 / c_2)$$

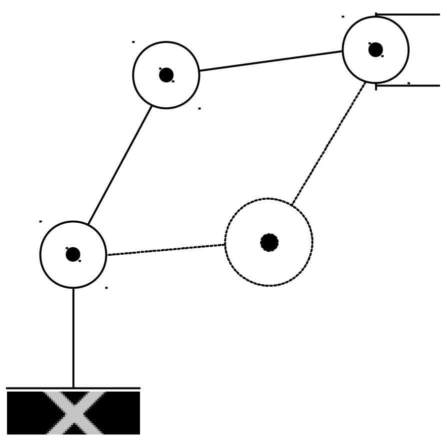
$$\theta_1 = \text{atan}(y, x) - \text{atan}(L_2.s_2/(L_1+L_2.c_2))$$

$$\theta_3 = \phi - \theta_1 - \theta_2$$

onde: $$c_2 = \frac{x^2 + y^2 - L_{1^2} - L_{2^2}}{2.L_1.L_2} \qquad s_2 = \pm\sqrt{1 - c_2^2}$$

Observações:

- Existência de solução: a expressão obtida deve obedecer à restrição $-1 \le c_2 \le 1$.
- Solução singular: se $x = y = 0$, a solução para θ_1 pode assumir qualquer valor.
- Múltiplas soluções - duas soluções são possíveis:
  - Solução $-s_2$: braço para cima.
  - Solução $+s_2$: braço para baixo.



Exemplo de cálculo de Cinemática Inversa para manipulador PUMA:

Abordagem de Pieper: θ_1, θ_2, θ_3 podem ser obtidos a partir da posição da garra P_x, P_y e P_z por procedimentos algébricos:

$$\theta_1 = \text{atan2}(-p_x, p_y) \pm \text{atan2}([P_x^2+P_y^2-(L_b-L_d)^2]^{1/2}, [L_b-L_d])$$
$$\theta_3 = \text{atan2}(-L_f, L_e) \pm \text{atan2}([L_c^2(L_e^2+L_f^2)-K_a^2]^{1/2}, K_a)$$

onde: $K_a = [P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 - L_c^2 - L_e^2 - L_f^2 -(L_b-L_d)^2]/2$

$$\theta_2 = \text{atan2}(K_b, K_c)$$

onde:

$$K_b = -(L_e s_3+L_f c_3)(c_1 P_x+s_1 P_y)-(L_e c_3-L_f s_3+L_c)P_z$$
$$K_c = (L_e c_3-L_f s_3+L_c)(c_1 P_x+s_1 P_y)-(L_e s_3+L_f c_3)P_z$$

A partir de θ_1, θ_2 e θ_3, transforma-se a equação cinemática, em equações em θ_4, θ_5 e θ_6:

$$[{}^0T_3]^{-1}.{}^0T_6 = {}^3T_4(\theta_4).{}^4T_5(\theta_5).{}^5T_6(\theta_6)$$

$$^3R_6 = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (c_4c_5c_6-s_4s_6) & (-c_4c_5s_6-s_4c_6) & (-c_4s_5) \\ (s_5c_6) & (-s_5c_6) & (c_5) \\ (-s_4c_5c_6-c_4s_6) & (s_4c_5s_6-c_4c_6) & (s_4s_5) \end{pmatrix}$$

De onde podemos obter θ_4, θ_5 e θ_6. Quando $r_{13} = r_{33} \neq 0$, temos:

$$\theta_4 = \text{atan2}(\pm r_{33}, \mp r_{13})$$
$$\theta_5 = \text{atan2}(\pm[r_{13}{}^2+r_{33}{}^2]^{1/2}, r_{23})$$
$$\theta_6 = \text{atan2}(\mp r_{22}, \pm r_{21})$$

Quando $r_{13} = r_{33} = 0$, significa que $s_5 = 0$, ou seja, $c_5 = r_{23} = \pm 1$. Assim:

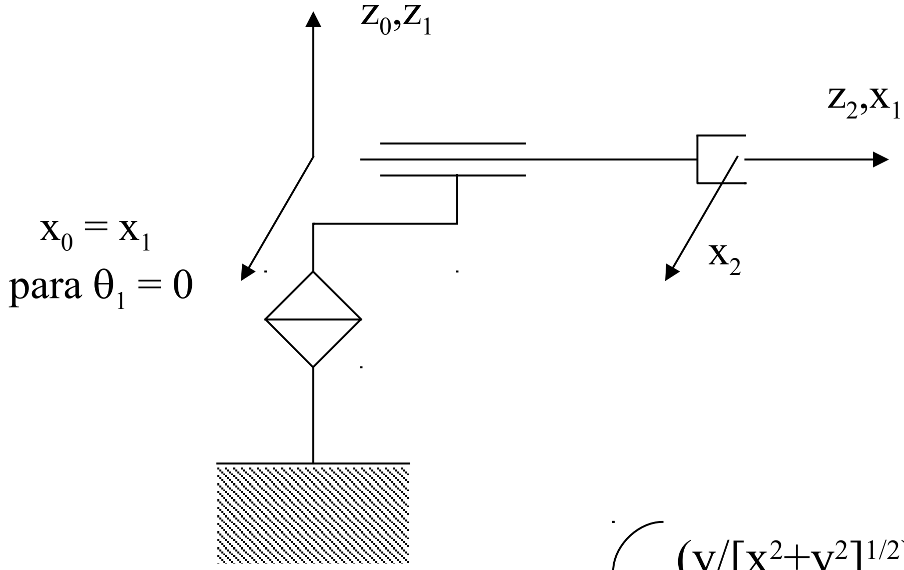
$$\theta_4 = \text{arbitrário.}$$
$$\theta_5 = (1 - r_{23})\,\pi/2$$
$$\theta_6 = \text{atan2}(-r_{31}, -r_{32}) - r_{32}.\theta_4$$

Solução para manipuladores com menos de seis juntas:

•Para N < 6, o espaço de trabalho é um subconjunto (subespaço) do espaço definido pro todas as possíveis posições e orientações no espaço tridimensional.

•Este subespaço possui dimensão igual ao número de graus de liberdade do robô manipulador.

Exemplo: robô manipulador polar



$$ {}^0P_2 = [x \;\; y \;\; 0]^T \qquad {}^0R_2 = [{}^0x_2 \;\; {}^0y_2 \;\; {}^0z_2] = \begin{pmatrix} (y/[x^2+y^2]^{1/2}) & 0 & (x/[x^2+y^2]^{1/2}) \\ (-x/[x^2+y^2]^{1/2}) & 0 & (y/[x^2+y^2]^{1/2}) \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} $$

- ${}^0R_2$ e ${}^0P_2$ definem um subespaço no qual a orientação da garra não é independente da sua posição, mas função de x e y.
- Para um número de juntas N menor do que seis, nem sempre é possível alcançar objetivos gerais de posição e orientação.

Procedimento quando ${}^{0}T_N^{*}$ está fora do subespaço alcançável pelo robô:

a) Definir um novo objetivo ${}^{0}T_N$' dentro do subespaço, o mais próximo possível da especificação inicial ${}^{0}T_N^{*}$.

$\Rightarrow$Alguma métrica deve ser utilizada para definir "o mais próximo possível".

b) A partir de ${}^{0}T_N$' encontrar as variáveis de junta correspondentes por cinemática inversa.