UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE COMPUTAÇÃO E AUTOMAÇÃO - DCA/CT
DISCIPLINA: DCA0115 - Otimização de Sistemas
PROFESSOR: Manoel Firmino de Medeiros Jr.

Lista de Exercícios da 3ª. Avaliação

1) Encontre a solução do problema abaixo, através dos métodos especificados em seguida:

$$\text{Min } f(x,y) = -x - y$$
$$\text{s.a} \quad x^2 + y^2 = 1$$

   a) Graficamente, representando no plano, curvas de nível da função f e a região de factibilidade;
   b) Eliminando a variável x, a partir da restrição de igualdade. Verifique ainda o que acontece se o sinal da raiz for adotado como negativo.

2) Resolva o problema de otimização $\text{Min}\left(x^2 + y^2\right)$, sujeita à restrição $(x-1)^3 = y^2$, tanto graficamente, quanto por eliminação da variável y. Neste último caso, mostre que a função resultante não possui minizador e explique essa contradição aparente.

3) Desenhando um diagrama da região factível e dos contornos de $f(x)$, determine a solução do problema:

$$\text{Min } f(x) = -x_1 + x_2$$
$$\text{s.a} \begin{cases} 0 \le x_1 \le a \\ 0 \le x_2 \le 1 \\ x_2 \ge x_1^2 \end{cases}$$

O parâmetro a é assumido como sendo um número positivo. Mostre que o conjunto de restrições ativas se modifica, se $a > \bar{a}$ e determine o valor de $\bar{a}$. Obtenha os multiplicadores de Lagrange das restrições ativas, em ambos os casos.

4) Verifique que os pontos $x' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ e $x'' = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}^T$ satisfazem às condições de Kuhn-Tucker (necessárias de 1ª. ordem) para o problema:

$$\text{Min } f(x) = x_2 + x_3$$
$$\text{s.a} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \end{cases}$$

Calcule os multiplicadores de Lagrange correspondentes.

5) Deseja-se construir um galpão de largura x_1, altura x_2 e comprimento x_3 (dimensões em m), com capacidade para 1.500m³. Os custos de construção por m² são: paredes → R\$10,00; teto → R\$15,00; piso (incluindo terreno) → R\$30,00. Por razões estéticas, a largura deve medir o dobro da altura.
Formule o problema que determina o galpão de custo mínimo e estabeleça as condições de KT. Eliminando x_1 e x_3, mostre que $x_2 = 10$ é o valor inteiro mais

próximo de x_2 que minimiza o custo e, daí, encontre x_1 e x_3. Determine os multiplicadores ótimos e as condições de KT.

6) Resolva o problema:
Min $f(x,y) = x^2 + y^2 + 3xy + 6x + 19y$

s.a $3y + x = 5$

7) Determine os pontos estacionários da função $f(x) = -x_1^2 - 4x^2 - 16x_3^2$, sujeita à restrição $c(x) = 0$, para as seguintes funções c:

(i) $c(x) = x_1 - 1$
(ii) $c(x) = x_1x_2 - 1$
(iii) $c(x) = x_1 x_2 x_3 - 1$

8) Determine o ponto da elipse definida pela interseção das superfícies $x + y = 1$ e $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$, que se encontra mais próximo da origem. Use (i) o método dos multiplicadores de Lagrange; (ii) eliminação direta.

9) Os parâmetros a, b e c da equação abaixo são constantes positivas. Encontre o menor valor da soma de três números positivos x, y e z, sujeito à restrição:

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=1$$

Use o método dos multiplicadores de Lagrange, assumindo que as condições de positividade não estão ativas.

10) Resolva o problema (2) pelo método dos multiplicadores de Lagrange. Mostre que, tanto $y = 0$ quanto $\lambda = -1$ (isoladamente ou em conjunto) implicam em uma contradição, de maneira que não há uma solução factível. Explique esse fato em termos da hipótese de regularidade.

11) Examinando condições de 2ª ordem, determine se os pontos x^i e x^{ii} são (ou não) soluções locais do problema da questão (4).

12) Examinando condições de 2ª ordem, determine a natureza (maximizador, minimizador, ponto de sela) de cada um dos pontos estacionários obtidos na questão (7).