Gabarito – Lista 1 – Modelos Contínuos de Sistemas Dinâmicos

Questão 1)

Como essa questão pairou certa dúvida, vou mostrar a solução passo-a-passo.

$$\ddot{y} + sin\dot{y} + (1 + \dot{y})y = u^2$$

a) O ponto de operação é dado por (considerando todas as derivadas nulas):

$y_{PO} = u_{PO}^2$

Definindo as variáveis:

$z = \ddot{y} \rightarrow z_{PO} = 0$

$u_1 = \dot{y} \rightarrow u_{1_{PO}} = 0$

$u_2 = y \rightarrow u_{2_{PO}} = y_{PO} = u_{PO}^2$

$u_3 = u \rightarrow u_{3_{PO}} = u_{PO}$

Então:

$z = g(u_1, u_2, u_3) = -\sin u_1 - (1 + u_1)u_2 + u_3^2$

Aplicando a série de Taylor:

$$z = z_{PO} + \left.\frac{\partial g}{\partial u_1}\right|_{PO} (u_1 - u_{1_{PO}}) + \left.\frac{\partial g}{\partial u_2}\right|_{PO} (u_2 - u_{2_{PO}}) + \left.\frac{\partial g}{\partial u_3}\right|_{PO} (u_3 - u_{1_{PO}})$$

Resolvendo as derivadas parciais e aplicando ao ponto de operação:

$$z = (-\cos u_1 - u_2)|_{PO}(u_1 - u_{1_{PO}}) + (-1 - u_1)|_{PO}(u_2 - u_{2_{PO}}) + 2u_3|_{PO}(u_3 - u_{1_{PO}})$$

$$z = (-1 - u_{PO}^2)(u_1 - u_{1_{PO}}) - (u_2 - u_{2_{PO}}) + 2u_{PO}(u_3 - u_{1_{PO}})$$

Definindo:

$\Delta y = y - y_{PO}$

$\Delta \dot{y} = \dot{y} - \dot{y}_{PO}$

$\Delta\ddot{y} = \ddot{y} - \ddot{y}_{PO}$

$\Delta u = u - u_{PO}$

Teremos que:

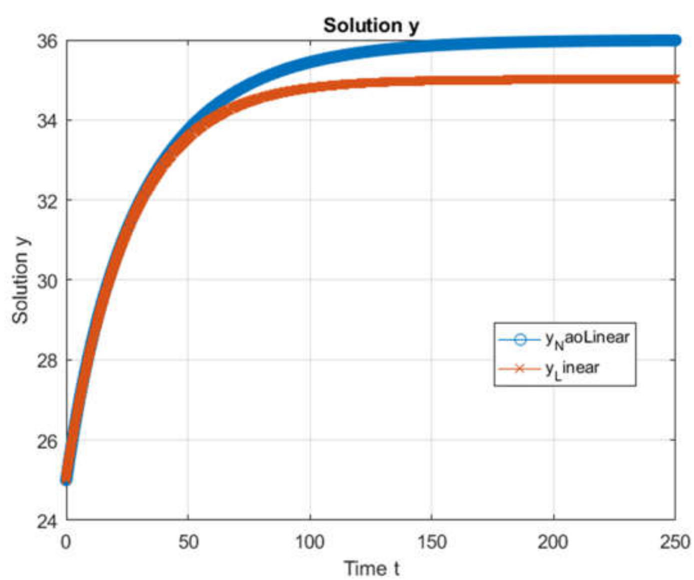
$$\Delta\ddot{y} + (1 + u_{PO}^2)\Delta\dot{y} + \Delta y = 2u_{PO}\Delta u$$

Esta solução é válida para qualquer ponto $y_{PO} = u_{PO}^2$.

b) Para aplicarmos a entrada degrau no sistema linear, precisamos definir qual ponto será escolhido. Como a questão pede que apliquemos um degrau no modelo linearizado, é indiferente o ponto escolhido para a linearização. No entanto, se formos comparar a saída do sistema não linear com a saída do sistema linearizado, precisamos estar atentos ao ponto escolhido. A questão não pede essa comparação, mas faremos aqui por questões didáticas. Linearizaremos em $y_{PO} = 25$ e $u_{PO} = 5$. Assim, temos que:

$$\Delta\ddot{y} + 26\Delta\dot{y} + \Delta y = 10\Delta u$$

Vamos iniciar o sistema não linear com condições iniciais $y(0) = 25$ e $\dot{y}(0) = 0$ (que equivale a origem do sistema linearizado) e aplicar uma entrada $u = 6$. Isso equivale a iniciar o sistema linear na sua origem e aplicar um degrau unitário. Para efeitos de comparação, mostraremos os gráficos das saídas de $y(t)$ tanto para o sistema linear quanto para o não linear gerados a partir das soluções numéricas das EDOs.



Resolvendo a equação linear pela transformada de Laplace teremos:

$$s^2\Delta Y(s) + 26s\Delta Y(s) + \Delta y(s) = 10\Delta U(s)$$

Assim, aplicando uma entrada degrau $\Delta U(s) = 1/s$:

$$s^2\Delta Y(s) + 26s\Delta Y(s) + \Delta y(s) = \frac{10}{s}$$

Dessa forma:

$$\Delta Y(s) = \frac{10}{s(s^2 + 26s + 1)}$$

Expandindo em frações parciais teremos:

$$\Delta Y(s) = \frac{10.0048}{s} + \frac{0.01486}{s + 25.9615} - \frac{10.0197}{s + 0.0385}$$

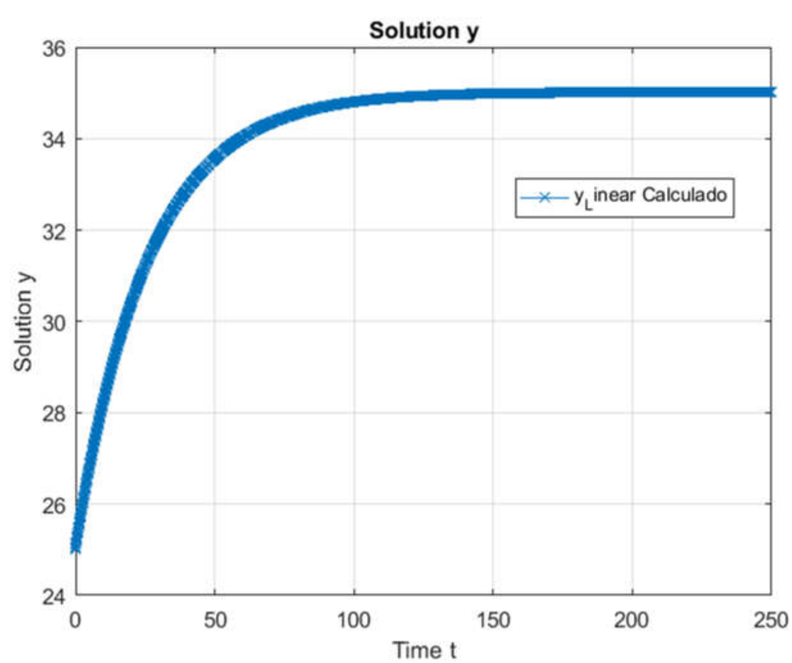
Aplicando a transformada inversa teremos:

$$\Delta y(t) = 10.0048 + 0.01486e^{-25.9615t} - 10.0197e^{-0.0385t}$$

Essa é a resposta considerando o modelo linearizado:

$$y(t) = 35.0048 + 0.01486e^{-25.9615t} - 10.0197e^{-0.0385t}$$

A figura a seguir mostra a saída do sistema gerada pela equação mostrada acima. Percebemos que a solução analítica tem correspondência com a solução numérica.



Questão 2)

$$y(t) = -\frac{3}{5} \cdot (e^{-t} \cos 2t) - \frac{3}{10}\,(e^{-t} \sin 2t) + 3/5$$

Questão 3)

a)

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta + \frac{k}{m}\dot{\theta} = 0$$

b)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{L} & -\frac{k}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Questão 4)

a) $\dfrac{Y(s)}{R(s)} = \dfrac{G_1G_2G_3G_4}{1+G_3G_4H_1+G_2G_3G_4H_3+G_1G_2G_3H_2}$

b) $\dfrac{Y(s)}{R(s)} = \dfrac{G_1G_2G_3G_4}{1+G_3G_4H_1+G_2G_3G_4H_3+G_1G_2G_3H_2}$

Questão 5)

a)

$$\frac{\Theta(s)}{R(s)} = \frac{10K_p}{2s^2 + (10K_v + 1)s + 10K_p}$$

b)

$$\frac{\Theta(s)}{R(s)} = \frac{10K_p}{2s^2 + (10K_v + 1)s + 10K_p}$$

Questão 6)

a) $y(t) = e^{-t}$

Questão 7)

$$\frac{di_L}{dt} = -\frac{R_1C}{L(R_1C + R_2C)}v_c - \frac{R_1R_2}{L(R_1C + R_2C)}i_L + \frac{R_2C}{L(R_1C + R_2C)}e$$

$$\frac{dv_c}{dt} = -\frac{1}{(R_1C + R_2C)}v_c + \frac{R_1}{(R_1C + R_2C)}i_L - \frac{1}{(R_1C + R_2C)}e$$

$$v_0 = -\frac{R_2C}{(R_1C + R_2C)}v_c + \frac{R_1R_2}{(R_1C + R_2C)}i_L - \frac{R_2C}{(R_1C + R_2C)}e$$

Questão 8)

a)

Forma Canônica Controlável $\begin{cases} \dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} U \\ Y = [4\ 0]X \end{cases}$

b)

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Questão 9)

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_1G_2G_3G_4(1 - G_6H_6 - G_7H_7) + G_5G_6G_7G_8(1 - G_2H_2 - G_3H_3)}{1 - G_2H_2 - G_3H_3 - G_6H_6 - G_7H_7 + G_2H_2G_6H_6 + G_2H_2G_7H_7 + G_3H_3G_6H_6 + G_3H_3G_7H_7}$$

Questão 10)

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_c \\ \dot{e}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-R}{L} & \frac{-1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ e_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} e$$