

Modelagem e Análise de Sistemas Dinâmicos – DCA0110

Prof. Anderson Cavalcanti

Slide 04 – Modelagem de Sistemas Dinâmicos

Sumário da Apresentação

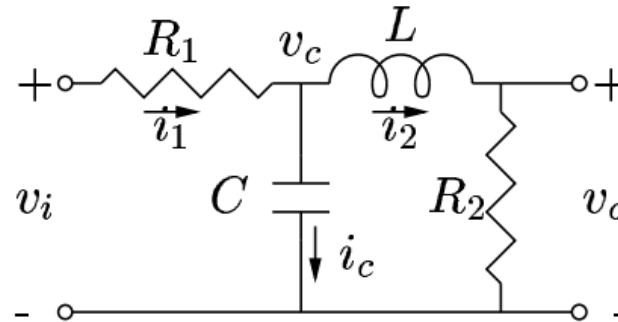
- Introdução à modelagem de sistemas dinâmicos;
- Sistemas elétricos;
- Sistemas mecânicos translacionais;
- Sistemas mecânicos rotacionais;
- Sistemas eletromecânicos;
- Sistemas fluídicos;
- Sistemas térmicos.

Introdução

- A escolha da representação matemática de um sistema é um passo muito importante para a obtenção do seu modelo e a consequente análise do mesmo;
- Serão estudadas as modelagens dos tipos de sistemas físicos mais usuais em Engenharia de Controle:
 - Sistemas elétricos;
 - Sistemas mecânicos;
 - Sistemas eletromecânicos;
 - Sistemas fluídicos;
 - Sistemas térmicos.
- A metodologia será baseada nas equivalências existentes entre os sistemas, principalmente os elétricos, tendo em vista a familiaridade com este tipo de sistema.

Sistemas elétricos

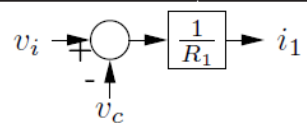
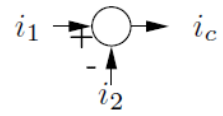
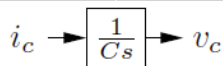
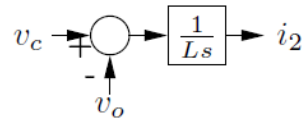
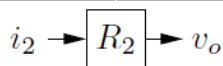
- Modelagem por diagrama de blocos



- Represente cada componente do sistema como um bloco elementar. Calcule, em seguida, a função de transferência usando a fórmula de Mason.

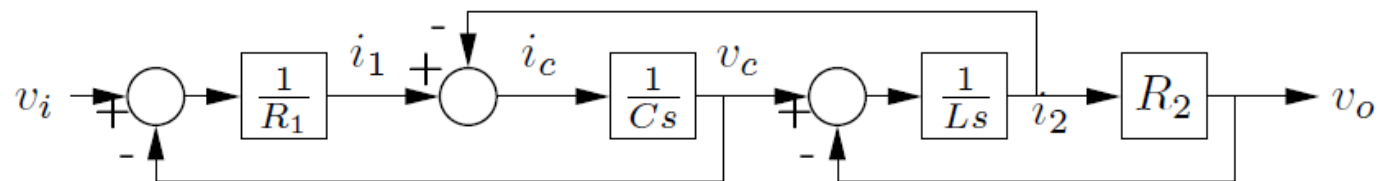
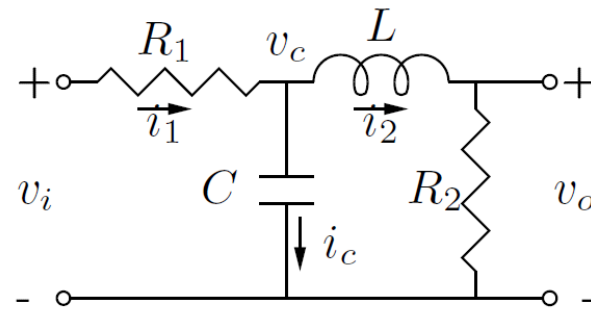
Sistemas elétricos

- Diagramas de blocos de componentes de circuitos elétricos

Elemento	Equação	Diagrama de bloco
Resistor R_1	$v_i - v_c = R_1 i_1 \Rightarrow i_1 = \left(\frac{1}{R_1} \right) (v_i - v_c)$	
Nó	$i_1 = i_c + i_2 \Rightarrow i_c = i_1 - i_2$	
Capacitor C	$i_c = C \frac{dv_c}{dt} \Rightarrow v_c = \frac{1}{C} \int i_c dt$	
Indutor L	$v_c - v_o = L \frac{di_2}{dt} \Rightarrow i_2 = \frac{1}{L} \int (v_c - v_o) dt$	
Resistor R_2	$v_o = R_2 i_2$	

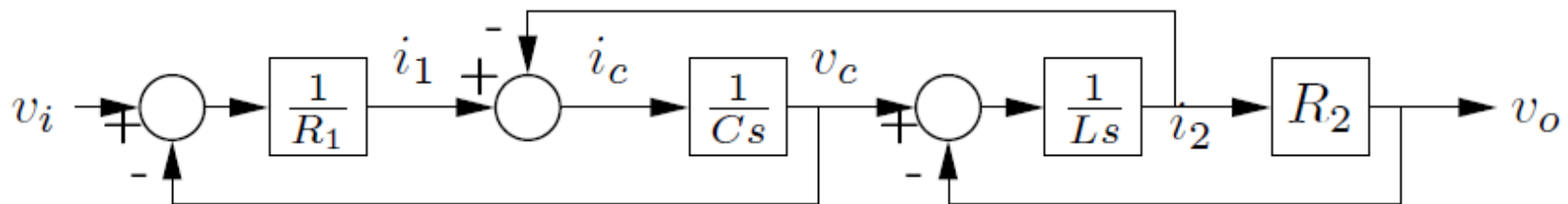
Sistemas elétricos

- Modelagem de circuito elétrico por diagrama de blocos



Sistemas elétricos

- Modelagem de circuito elétrico por diagrama de blocos

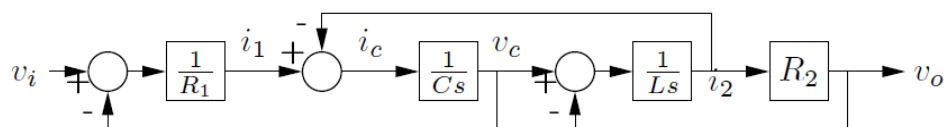


Há um único caminho direto entre v_i e v_o , cujo ganho é:

$$G_1 = \frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{C_s} \cdot \frac{1}{L_s} \cdot R_2 = \frac{R_2}{R_1 L C s^2}$$

Sistemas elétricos

- Modelagem de circuito elétrico por diagrama de blocos



$$G_1 = \frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{C_s} \cdot \frac{1}{L_s} \cdot R_2 = \frac{R_2}{R_1 L C s^2}$$

Há três laços, cujos ganhos são:

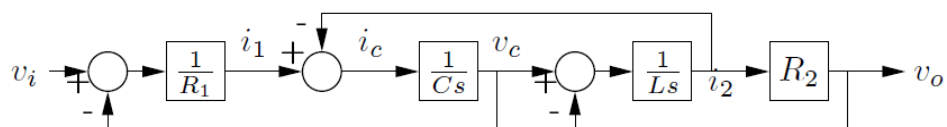
$$L_1 = -\frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{C_s} = -\frac{1}{R_1 C_s}$$

$$L_2 = -\frac{1}{C_s} \cdot \frac{1}{L_s} = -\frac{1}{L C s^2}$$

$$L_3 = -\frac{1}{L_s} \cdot R_2 = -\frac{R_2}{L_s}$$

Sistemas elétricos

- Modelagem de circuito elétrico por diagrama de blocos



Os laços 1 e 3 não se tocam. Com isso, o determinante do grafo é dado por:

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3) + (L_1 L_3) =$$

$$\frac{R_1 L C s^2 + (L + R_1 R_2 C) s + (R_1 + R_2)}{R_1 L C s^2}$$

$$G_1 = \frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{C s} \cdot \frac{1}{L s} \cdot R_2 = \frac{R_2}{R_1 L C s^2}$$

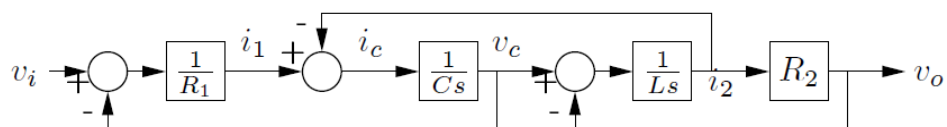
$$L_1 = -\frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{C s} = -\frac{1}{R_1 C s}$$

$$L_2 = -\frac{1}{C s} \cdot \frac{1}{L s} = -\frac{1}{L C s^2}$$

$$L_3 = -\frac{1}{L s} \cdot R_2 = -\frac{R_2}{L s}$$

Sistemas elétricos

- Modelagem de circuito elétrico por diagrama de blocos



Como o caminho direto toca todos os três laços, $\Delta_1 = 1$. Logo:

$$G = \frac{G_1 \Delta_1}{\Delta} = \frac{R_2}{R_1 L C s^2 + (L + R_1 R_2 C) s + (R_1 + R_2)}$$

$$G_1 = \frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{C s} \cdot \frac{1}{L s} \cdot R_2 = \frac{R_2}{R_1 L C s^2}$$

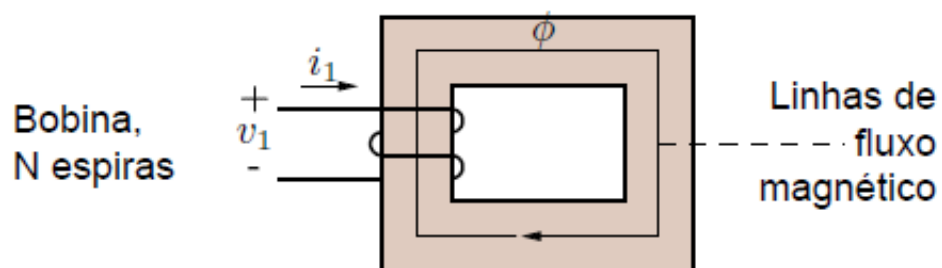
$$L_1 = -\frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{C s} = -\frac{1}{R_1 C s}$$

$$L_2 = -\frac{1}{C s} \cdot \frac{1}{L s} = -\frac{1}{L C s^2}$$

$$L_3 = -\frac{1}{L s} \cdot R_2 = -\frac{R_2}{L s}$$

$$\Delta = \frac{R_1 L C s^2 + (L + R_1 R_2 C) s + (R_1 + R_2)}{R_1 L C s^2}$$

Transformador elétrico



$$v = -N \frac{d\phi}{dt}$$

$$\phi = \frac{\mu N A}{l} i$$

onde:

ϕ : fluxo magnético no núcleo (Wb);

μ : permeabilidade do material do núcleo (H/m);

N : número de espiras;

A : área da seção transversal do núcleo (m^2);

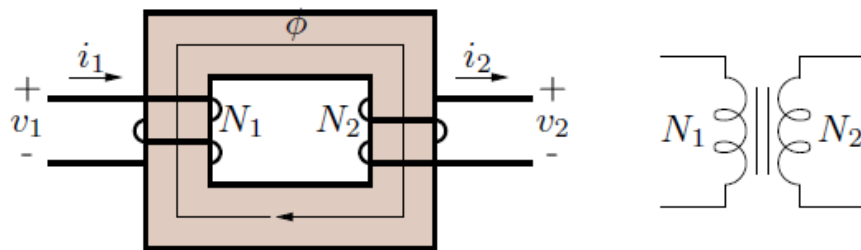
l : comprimento médio do núcleo (m);

i : corrente na bobina (A);

v : tensão induzida no núcleo (V)

Transformador elétrico

Relação das tensões v_1 e v_2 :



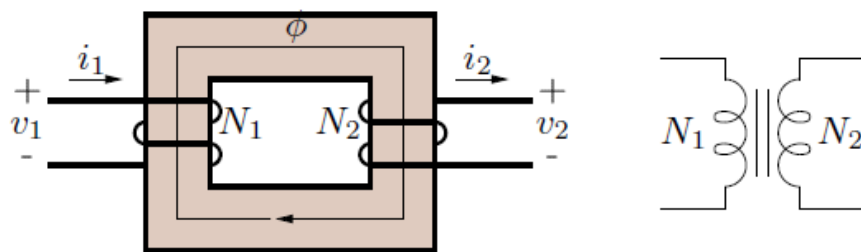
$$v_1 = -N_1 \frac{d\phi_1}{dt} = -N_1 \frac{d\phi}{dt}$$

$$v_2 = -N_2 \frac{d\phi_2}{dt} = -N_2 \frac{d\phi}{dt}$$

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{N_1}{N_2} \Rightarrow v_2 = \left(\frac{N_2}{N_1} \right) v_1$$

Transformador elétrico

Relação das correntes i_1 e i_2 :



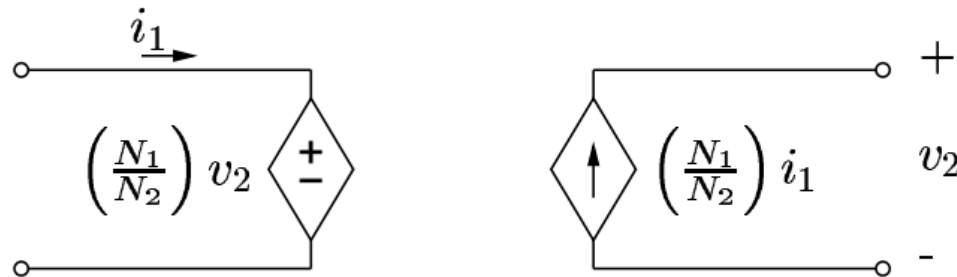
$$\phi_1 = \phi_2$$

$$\frac{\mu N_1 A}{l} i_1 = \frac{\mu N_2 A}{l} i_2$$

$$i_2 = \left(\frac{N_1}{N_2} \right) i_1$$

Transformador elétrico

- Para efeito de análise, o transformador pode ser modelado por duas fontes dependentes:



Transformador elétrico

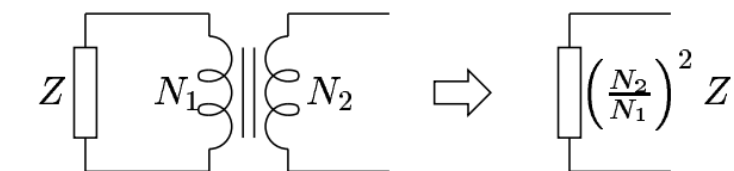
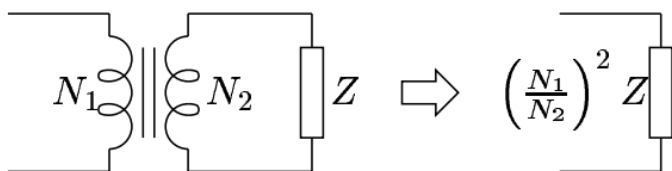
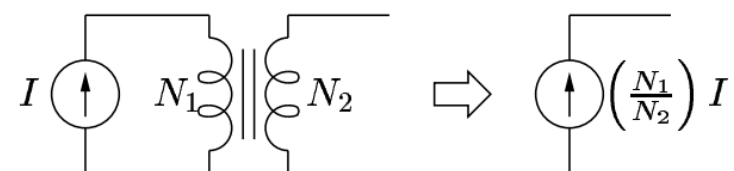
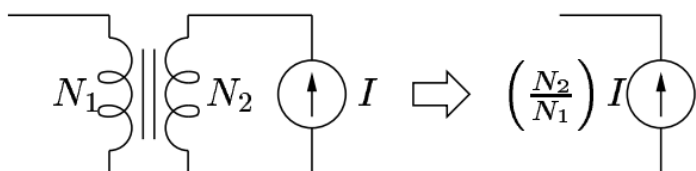
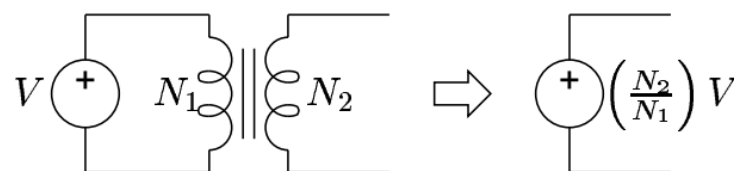
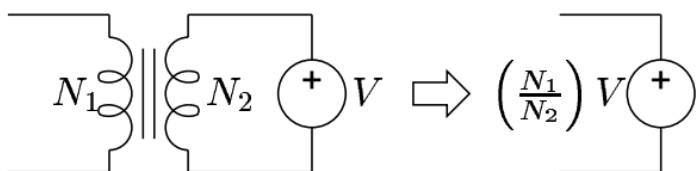
- A análise de circuitos com transformadores pode ser, em alguns casos, facilitada movendo-se componentes do primário para o secundário e vice-versa. Para fontes, a determinação da equivalência é feita com as equações já apresentadas. Quanto às impedâncias, se uma impedância Z está conectada ao secundário teremos:

$$V_2(s) = Z I_2(s)$$

$$\left(\frac{N_2}{N_1}\right) V_1 = Z \left(\frac{N_1}{N_2}\right) I_1 \quad \Rightarrow \quad V_1(s) = \left[\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 Z \right] I_1(s)$$

Transformador elétrico

- Resumo de procedimentos de transferência de dispositivos do primário para os secundário e vice-versa:



Diodo

- O diodo ideal é um dispositivo não linear que permite a passagem elétrica em um único sentido. Comporta-se como um resistor de resistência nula ou infinita, de acordo com a polaridade da tensão aplicada.



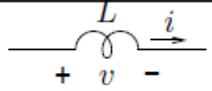
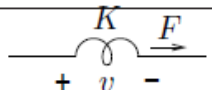
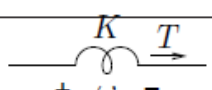
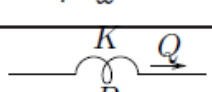
Estado	Polarização	Circuito equivalente
Condução		
Bloqueio		

Sistemas mecânicos translacionais

- Os elementos básicos de um sistema mecânico translacional são:
 - Massas
 - Elastâncias (molas)
 - Amortecimentos (atritos)

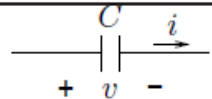
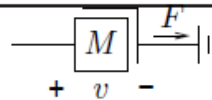
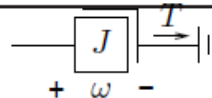
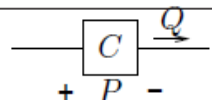
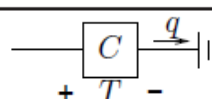
Sistemas mecânicos translacionais

- Elementos indutivos

Tipo de elemento	Elemento físico	Equação descritiva	Energia E ou Potência P	Símbolo
Indutivo	Indutância elétrica	$v = L \frac{di}{dt}$	$E = \frac{1}{2} Li^2$	
	Mola translacional	$v = \frac{1}{K} \frac{dF}{dt}$	$E = \frac{1}{2} \frac{F^2}{K}$	
	Mola rotacional	$\omega = \frac{1}{K} \frac{dT}{dt}$	$E = \frac{1}{2} \frac{T^2}{K}$	
	Inércia fluida	$P = I \frac{dQ}{dt}$	$E = \frac{1}{2} IQ^2$	

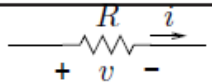
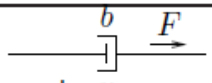
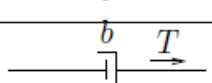
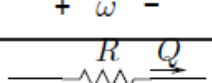
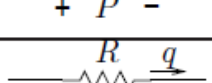
Sistemas mecânicos translacionais

- Elementos capacitivos

Tipo de elemento	Elemento físico	Equação descritiva	Energia E ou Potência P	Símbolo
Capacitivo	Capacitância elétrica	$i = C \frac{dv}{dt}$	$E = \frac{1}{2} C v^2$	
	Massa (inércia)	$F = M \frac{dv}{dt}$	$E = \frac{1}{2} M v^2$	
	Momento de inércia	$T = J \frac{d\omega}{dt}$	$E = \frac{1}{2} J \omega^2$	
	Capacitância fluida	$Q = C \frac{dP}{dt}$	$E = \frac{1}{2} C P^2$	
	Capacitância térmica	$q = C \frac{dT}{dt}$	$E = C T$	

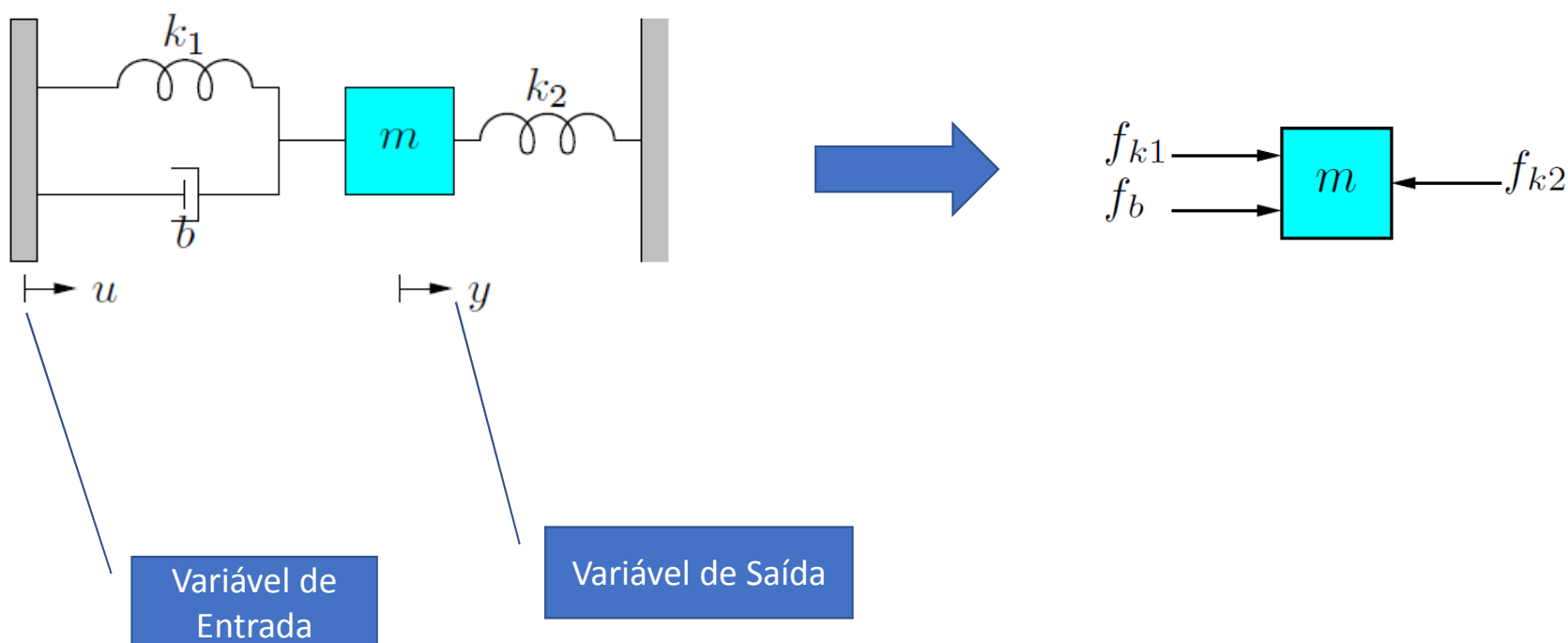
Sistemas mecânicos translacionais

- Elementos dissipadores

Tipo de elemento	Elemento físico	Equação descritiva	Energia E ou Potência P	Símbolo
Dissipadores	Resistência elétrica	$i = \frac{1}{R}v$	$P = \frac{1}{R}v^2$	
	Amortecedor translacional	$F = bv$	$P = bv^2$	
	Amortecedor rotacional	$T = b\omega$	$P = b\omega^2$	
	Resistência fluida	$Q = \frac{1}{R}P$	$P = \frac{1}{R}P^2$	
	Resistência térmica	$q = \frac{1}{R}T$	$P = \frac{1}{R}T$	

Exemplo Ilustrativo 1

- Escrever as equações do movimento y do sistema mecânico abaixo, excitado pelo movimento u da barra móvel.



Exemplo Ilustrativo 1

- Aplicando a segunda lei de Newton:

$$F = m\ddot{y}$$



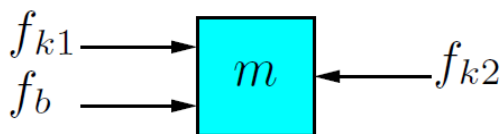
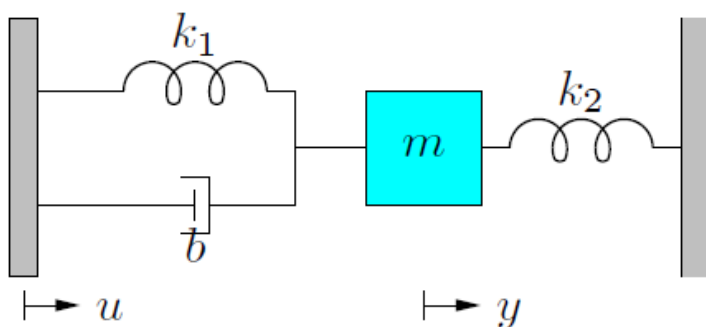
$$f_{k1} + f_b - f_{k2} = m\ddot{y}$$



$$k_1(u - y) + b(\dot{u} - \dot{y}) - k_2y = m\ddot{y}$$

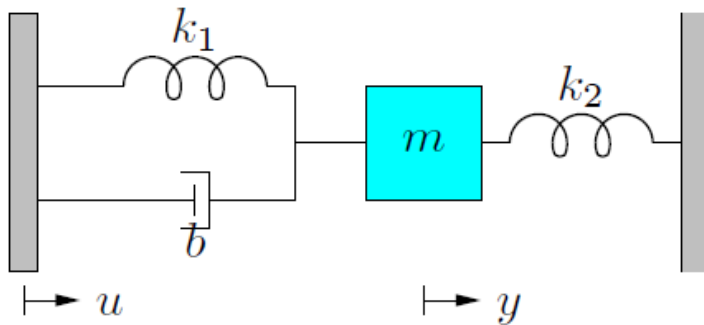


$$m\ddot{y} + b\dot{y} + (k_1 + k_2)y = b\dot{u} + k_1u$$

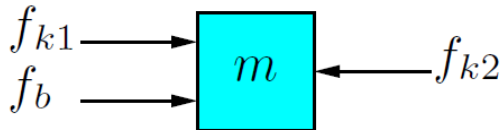


Exemplo Ilustrativo 1

- Aplicando-se a transformada de Laplace:



$$m\ddot{y} + b\dot{y} + (k_1 + k_2)y = b\dot{u} + k_1u$$



$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{bs + k_1}{ms^2 + bs + (k_1 + k_2)}$$

Equivalência com circuitos elétricos

O procedimento para a geração do análogo elétrico de um sistema mecânico pode ser decomposto nos seguintes passos:

1. Estabelecer as analogias entre os componentes e grandezas nos dois sistemas, respeitando as equivalências da tabela a seguir:

Sistema mecânico translacional	Sistema elétrico
Velocidade linear v	Tensão v
Força F	Corrente i
Massa M	Capacitor C
Amortecedor b	Resistor $\frac{1}{b}$
Mola k	Indutor $\frac{1}{k}$

Equivalência com circuitos elétricos

O procedimento para a geração do análogo elétrico de um sistema mecânico pode ser decomposto nos seguintes passos:

2. Todos os capacitores representando massas têm um dos seus terminais aterrados.
3. A tensão no nó não aterrado em cada capacitor representa a velocidade nas massas correspondentes.
4. Os outros componentes são conectados entre os nós em um arranjo que respeita as conexões existentes no sistema mecânico.

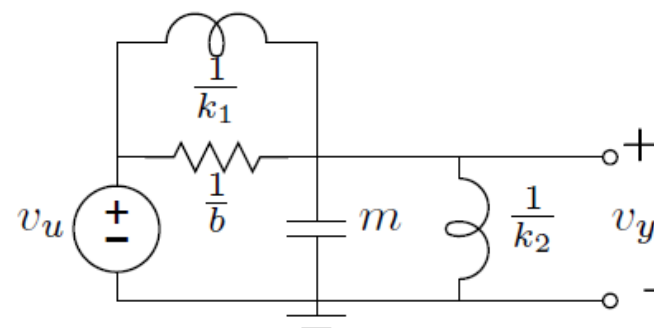
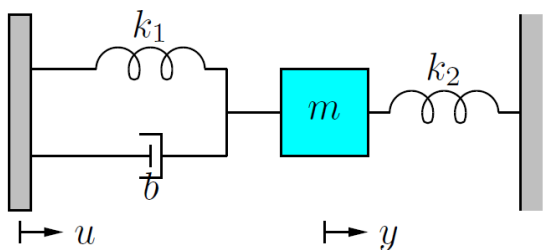
Equivalência com circuitos elétricos

O procedimento para a geração do análogo elétrico de um sistema mecânico pode ser decomposto nos seguintes passos:

5. Inserir as fontes de corrente aterradas representando as forças aplicadas.
6. Inserir as fontes de tensão representando as velocidades impostas.

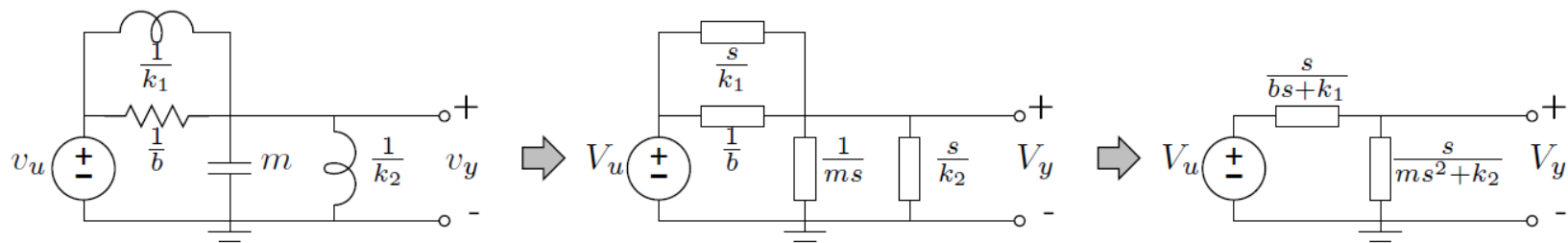
Exemplo ilustrativo 2

- Equivalente elétrico de um sistema mecânico translacional



Exemplo ilustrativo 2

- Equivalente elétrico de um sistema mecânico translacional

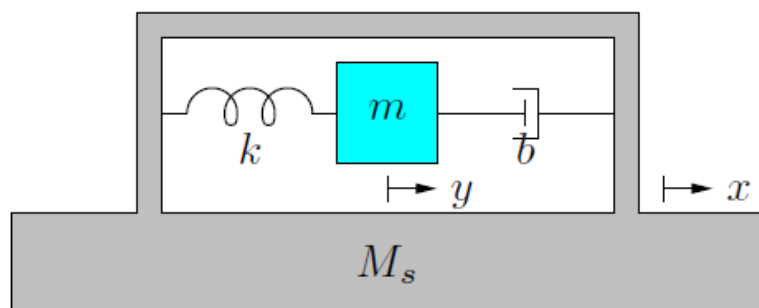


A relação entre V_y e V_u se caracteriza como um divisor de tensão:

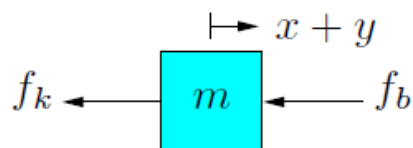
$$V_y(s) = \frac{\frac{s}{ms^2+k_2}}{\frac{s}{bs+k_1} + sms^2 + k_2} V_u \quad \Rightarrow \quad \frac{V_y(s)}{V_u(s)} = \frac{bs + k_1}{ms^2 + bs + (k_1 + k_2)}$$

Exemplo ilustrativo 3

- Modelo do acelerômetro
 - Medidor de aceleração linear, utilizado em foguetes e aviões.

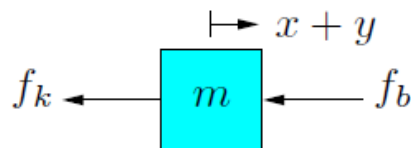
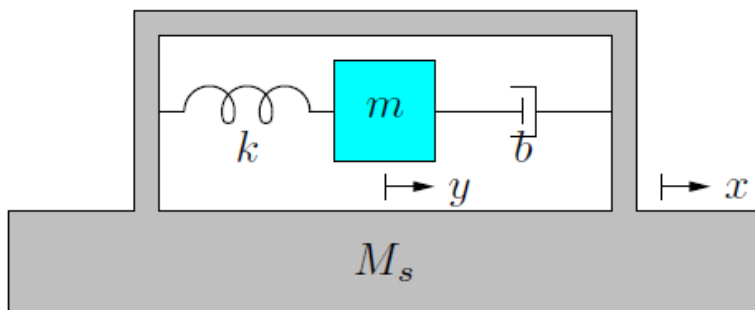


- x é o deslocamento absoluto da massa M_s em relação ao referencial inercial
- y é o deslocamento relativo da massa m em relação à massa M_s



Exemplo ilustrativo 3

- Modelo do acelerômetro



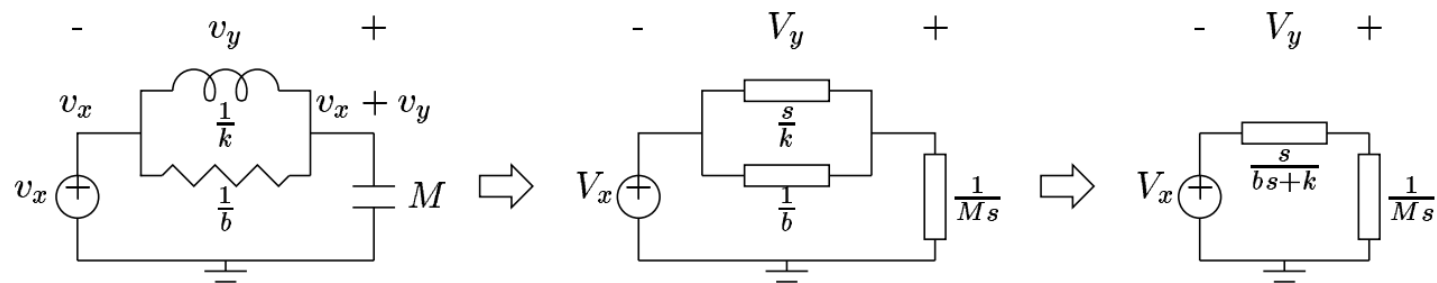
$$F = m \cdot a \Rightarrow -(f_k + b\dot{y}) = M \cdot (\ddot{x} + \ddot{y}) \Rightarrow$$

$$-(ky + b\dot{y}) = M\ddot{x} + M\ddot{y} \Rightarrow$$

$$\ddot{y} + \left(\frac{b}{M}\right)\dot{y} + \left(\frac{k}{M}\right)y = -\ddot{x}$$

Exemplo ilustrativo 3

- Este mesmo resultado poderia ser obtido utilizando-se o circuito elétrico equivalente ao acelerômetro:



$$V_y(s) = -\frac{\frac{s}{bs+k}}{\frac{s}{bs+k} + \frac{1}{Ms}} V_x(s) \Rightarrow V_y(s) = -\frac{Ms^2}{Ms^2 + bs + k} V_x(s) \Rightarrow$$

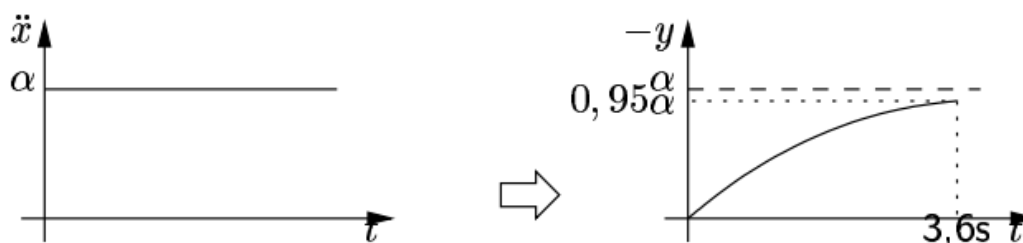
$$Y(s) = -\frac{s^2}{s^2 + \left(\frac{b}{M}\right)s + \left(\frac{k}{M}\right)} X(s) \Rightarrow \ddot{y} + \left(\frac{b}{M}\right)\dot{y} + \left(\frac{k}{M}\right)y = -\ddot{x}$$

Exemplo ilustrativo 3

- Fazendo $b/M=3$ e $k/M=1$, a EDO que rege o acelerômetro é:

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + y = -\ddot{x}.$$

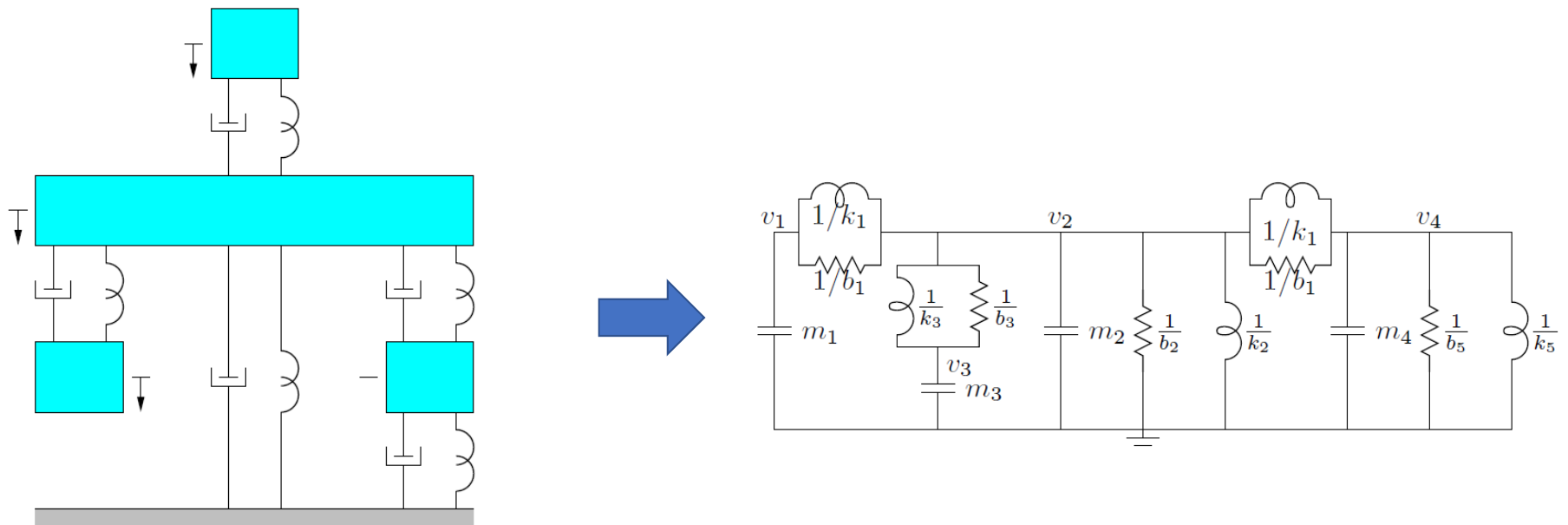
- Para essa situação, se o sistema for submetido a uma aceleração constante $\ddot{x} = \alpha$, a saída do sistema está indicada abaixo:



- Após um certo tempo de estabilização (4s no exemplo), o deslocamento relativo y do acelerômetro é diretamente proporcional à aceleração \ddot{x} .

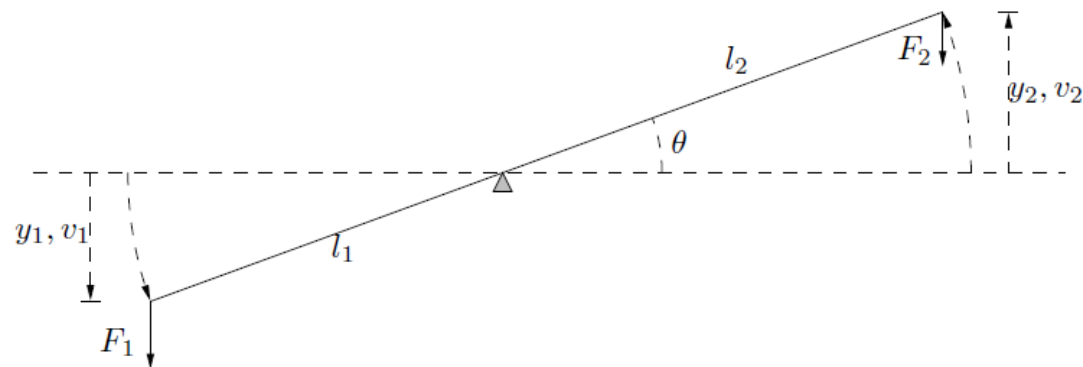
Exemplo ilustrativo 4

- Equivalente elétrico do modelo mecânico do corpo humano



Alavanca ideal

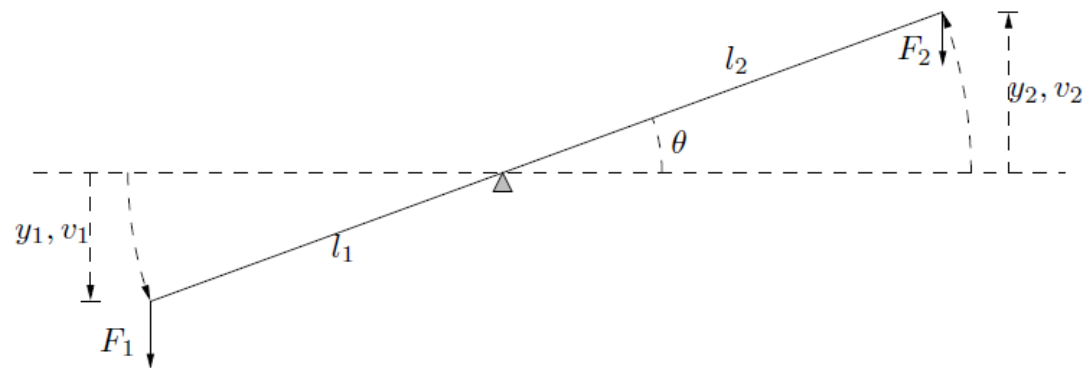
- Corpo rígido linear de massa desprezível
- Gira em torno de um ponto de apoio
- Força F_2 é a reação da força aplicada F_1 , ou vice-versa
- Deslocamentos lineares : y_1 e y_2
- Velocidades lineares : v_1 e v_2



Alavanca ideal

Por trigonometria:

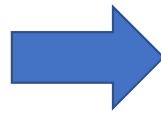
$$\begin{aligned} y_2 &= l_2 \sin \theta \\ y_1 &= l_1 \sin \theta \end{aligned} \Rightarrow y_2 = \left(\frac{l_2}{l_1} \right) y_1$$



Alavanca ideal

Derivando-se ambos os lados:

$$y_2 = \left(\frac{l_2}{l_1} \right) y_1$$



$$v_2 = \left(\frac{l_2}{l_1} \right) v_1$$

Como a alavanca não tem massa, o trabalho da força F_1 é igual ao trabalho da força F_2 :

$$\tau_1 = \tau_2 \quad \Rightarrow \quad l_1 F_1 \cos \theta = l_2 F_2 \cos \theta \quad \Rightarrow$$

$$F_2 = \left(\frac{l_1}{l_2} \right) F_1$$

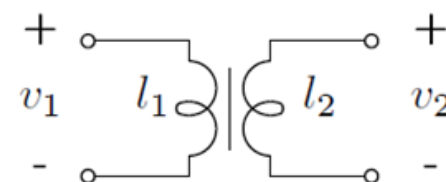
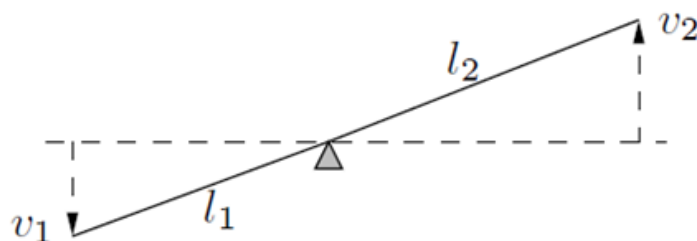
Alavanca ideal

$$v_2 = \left(\frac{l_2}{l_1} \right) v_1$$

$$F_2 = \left(\frac{l_1}{l_2} \right) F_1$$

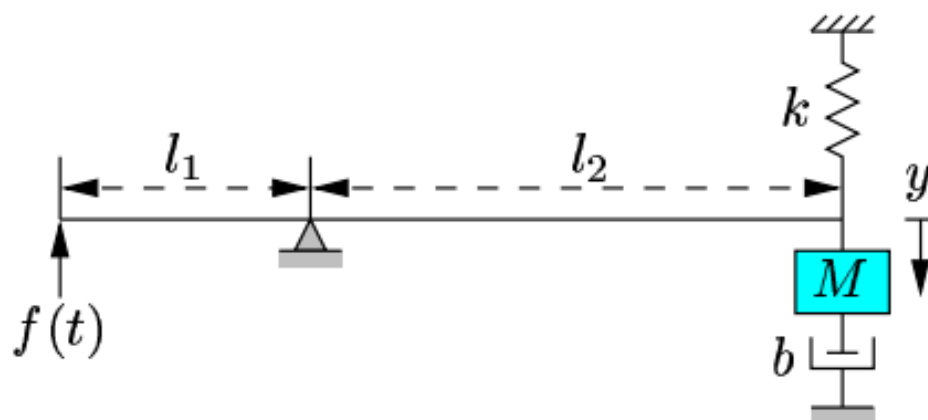
$$v_2 = \left(\frac{N_2}{N_1} \right) v_1$$

$$i_2 = \left(\frac{N_1}{N_2} \right) i_1$$



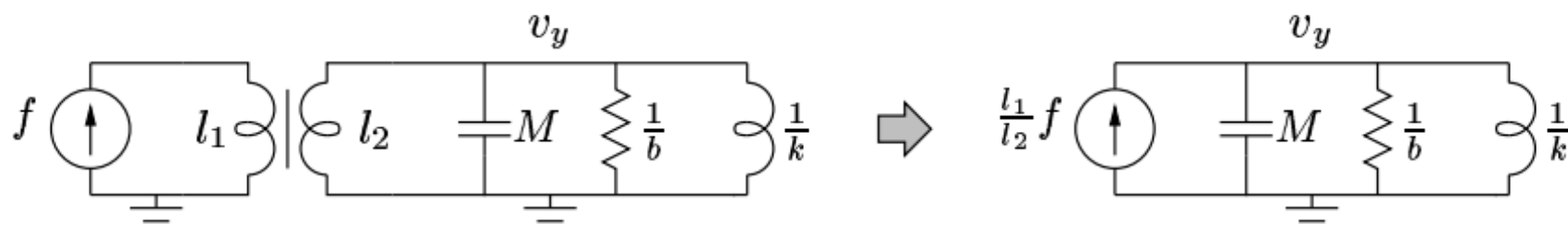
Exemplo ilustrativo 5

- Determine o circuito elétrico equivalente. Assuma que os ângulos de rotação são pequenos e que, para $f=0$, tem-se o equilíbrio estático com $y=0$.



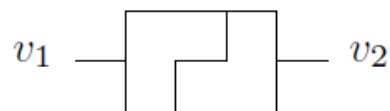
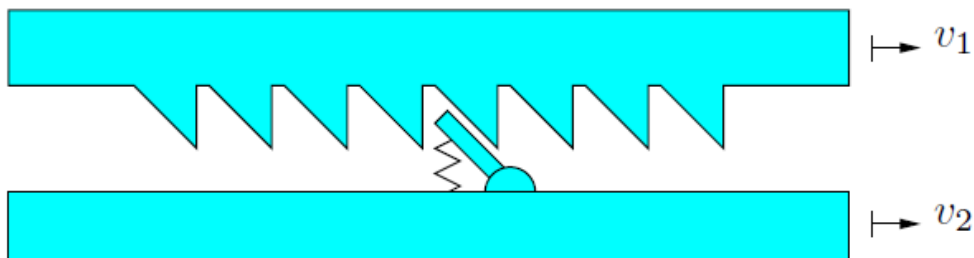
Exemplo ilustrativo 5

- Circuito elétrico Equivalente



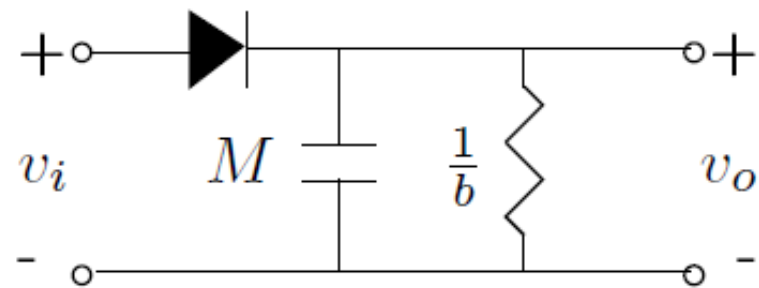
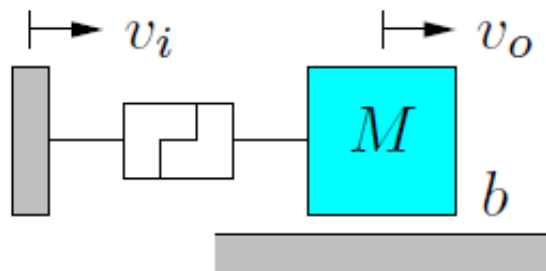
Deslizador unidirecional

- Permite movimentos lineares em uma única direção.
- É o equivalente mecânico do diodo elétrico.



- Caso $v_2 > v_1$, as duas velocidades são completamente independentes.
- Caso $v_2 < v_1$, a lingueta trava os dentes e as duas velocidades se tornam iguais.

Deslizador unidirecional



Sistemas mecânicos rotacionais

- Envolvem corpos girando em torno de um eixo fixo
- Seus elementos básicos consistem de:
 - Momento de inércia
 - Elastâncias (molas rotacionais)
 - Amortecimentos (atritos rotacionais)

Equivalência com circuitos elétricos

- As equações são semelhantes às dos sistemas mecânicos translacionais
- Consequentemente, podem ser modelados através de circuitos equivalentes elétricos, respeitando-se as equivalências indicadas na tabela a seguir:

Sistema mecânico rotacional	Sistema elétrico
Velocidade angular v	Tensão v
Torque τ	Corrente i
Momento de inércia J	Capacitor C
Amortecedor angular b	Resistor $\frac{1}{b}$
Mola angular k	Indutor $\frac{1}{k}$

Momento de Inércia

- O momento de inércia J para um corpo de massa m girando em torno de um eixo fixo com raio de giração r é dado por?

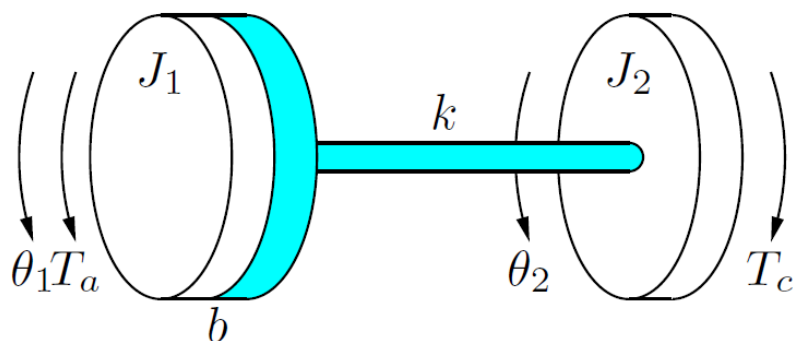
$$J = mr^2 \quad (\text{para massas pontuais})$$

$$J = \int r^2 dm \quad (\text{para massas distribuídas})$$

- O torque τ exercido por uma força F perpendicular ao movimento, aplicada a uma distância d do eixo de rotação é?

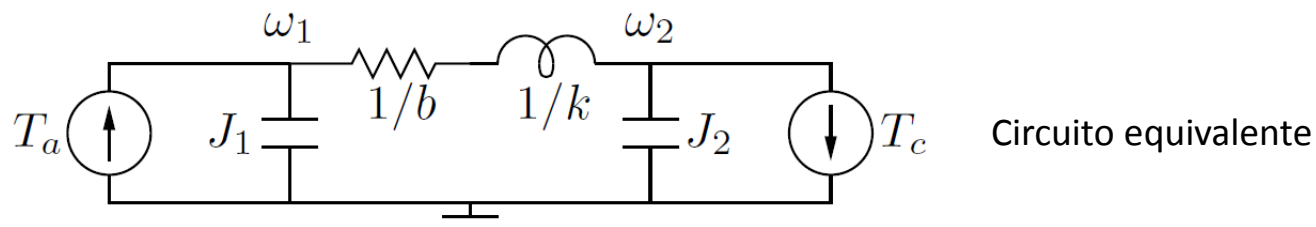
$$\tau = Fd$$

Exemplo ilustrativo 6



- Momentos de inércia J_1 e J_2
- Acoplamento viscoso com coeficiente de atrito b
- Eixo de torção com constante de mola k
- Torque acionador $T_a(t)$ exercido em J_1
- Torque de carga $T_c(t)$ exercido em J_2
- Calcular a equação do movimento $\theta_2(t)$ em função de $T_a(t)$ e $T_c(t)$

Exemplo ilustrativo 6



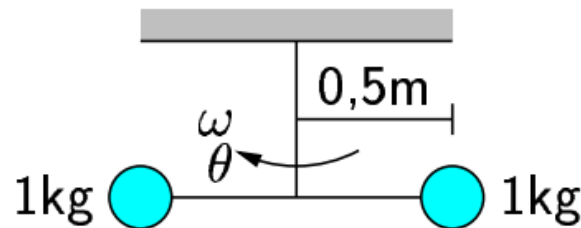
$$\omega_2 = \frac{bk}{bJ_1J_2s^3 + kJ_1J_2s^2 + kb(J_1 + J_2)s}T_a - \frac{bJ_1s^2 + kJ_1s + kb}{bJ_1J_2s^3 + kJ_1J_2s^2 + kb(J_1 + J_2)s}T_c$$

$$\theta_2 = \frac{\omega_2}{s}$$

$$= \frac{kb}{bJ_1J_2s^4 + kJ_1J_2s^3 + kb(J_1 + J_2)s^2}T_a - \frac{bJ_1s^2 + kJ_1s + kb}{bJ_1J_2s^4 + kJ_1J_2s^3 + kb(J_1 + J_2)s^2}T_c$$

Exemplo ilustrativo 7

Duas massas pontuais de 1kg cada uma estão presas às duas extremidades de uma haste de massa desprezível. Este conjunto está preso ao teto através de um cordão flexível, conforme mostra a figura 5.26. Torcicionando-se inicialmente o cordão de forma a impor ao conjunto um total de voltas equivalente a 4000° , deixa-se em seguida o conjunto girar de maneira autônoma, sem influências externas. Determine quanto tempo o sistema irá demorar até que a amplitude da oscilação seja menor que 4° , supondo que a constante rotacional elástica do cordão é de $2 \times 10^{-4} \text{ Nm/rad}$ e que o coeficiente de atrito viscoso entre as esferas e o ar é de $3 \times 10^{-4} \text{ Nms/rad}$.

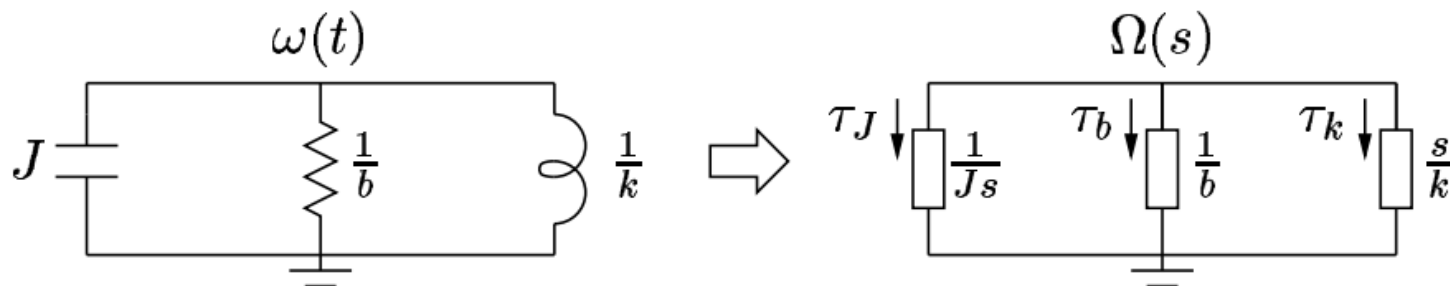


Exemplo ilustrativo 7

- Momento de inércia:

$$J = 2 \cdot m r^2 = 2 \cdot 1 \cdot 0.5^2 \Rightarrow J = 0.5 \text{kgm}^2$$

- Circuito elétrico equivalente:



Exemplo ilustrativo 7

- Resolução do circuito:

$$\tau_J + \tau_K + \tau_B = 0 \quad \Rightarrow \quad Js\Omega + \frac{k}{s}\Omega + b\Omega = 0 \quad \Rightarrow \quad (Js^2 + bs + k)\Omega = 0$$

Como $\omega(t) = \dot{\theta}(t)$, sabe-se que $\Omega(s) = s\theta(s)$:

$$\cancel{s}(Js^2 + bs + k)\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad J\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + k\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \left(\frac{b}{J}\right)\dot{\theta} + \left(\frac{k}{J}\right)\theta = 0$$

Exemplo ilustrativo 7

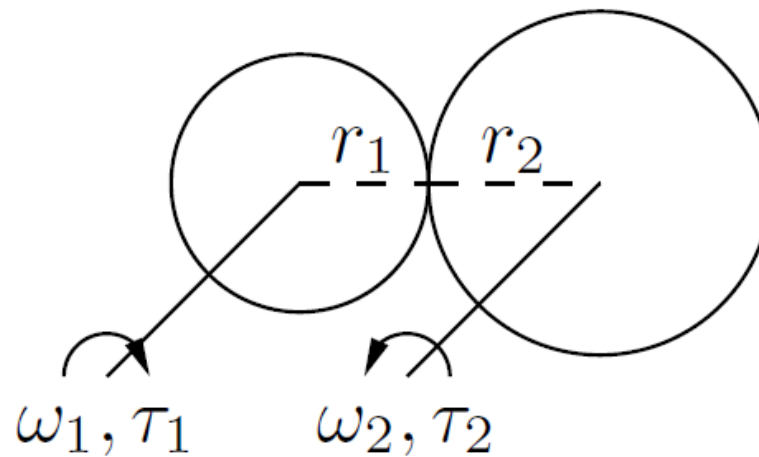
Esta equação deve ser resolvida para condições iniciais $\theta(0) = 4000^\circ = 69.8\text{rad}$ e $\dot{\theta}(0) = 0\text{rad/s}$. Substituindo-se os valores numéricos dos coeficientes e aplicando-se a transformada de Laplace, chega-se ao resultado:

$$\theta(t) = 69.8e^{-0.0003t} \sin(0.02t + 1.5558)$$

Para que a amplitude da oscilação seja menor que 4° , ou seja, menor que 0.07rad :

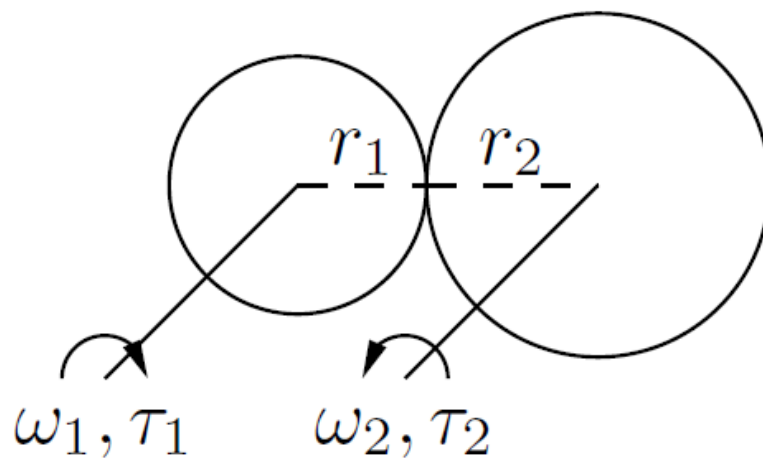
$$69.8e^{-0.0003t} < 0.07 \quad \Rightarrow \quad t > 2302s$$

Jogo ideal de engrenagens



- Discos de massa desprezível
- Escorregamento inexistente (discos dentados ou feitos de materiais de alto coeficiente de atrito)

Jogo ideal de engrenagens



- Como não há escorregamento, a velocidade linear é igual em módulo

$$v_1 = v_2 \Rightarrow \omega_1 r_1 = \omega_2 r_2 \Rightarrow$$

$$\omega_2 = \left(\frac{r_1}{r_2} \right) \omega_1$$

Jogo ideal de engrenagens

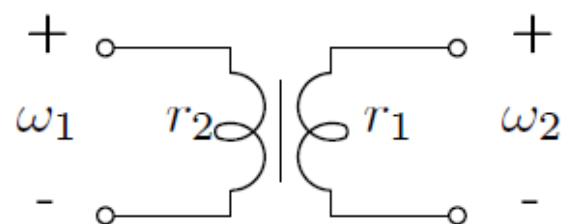
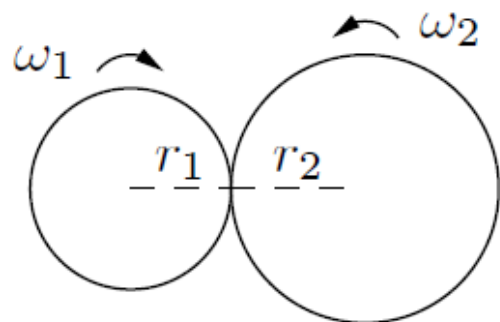
- O torque τ_1 corresponde a uma força F_1 no ponto de contato.
- F_2 é uma força de reação a F_1 de mesmo valor e sentido contrário.

$$F_1 = F_2 \Rightarrow$$

$$\frac{\tau_1}{r_1} = \frac{\tau_2}{r_2} \Rightarrow$$

$$\tau_2 = \left(\frac{r_2}{r_1} \right) \tau_1$$

Jogo ideal de engrenagens



$$\omega_2 = \left(\frac{r_1}{r_2} \right) \omega_1$$

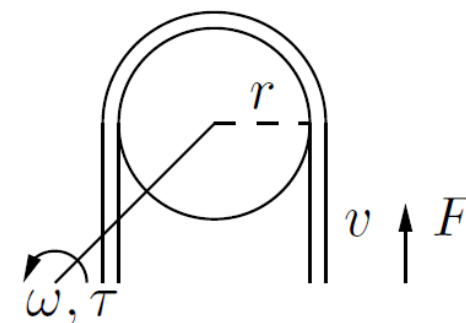
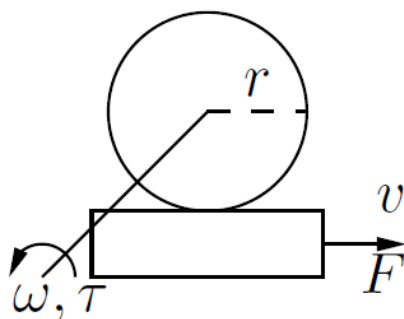
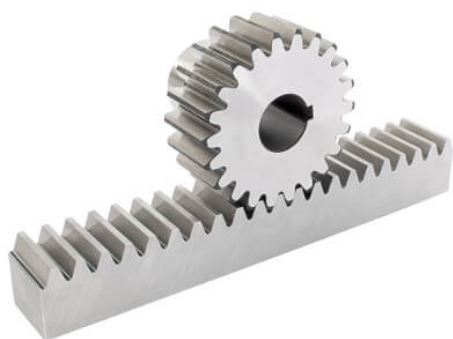
$$\tau_2 = \left(\frac{r_2}{r_1} \right) \tau_1$$

$$i_2 = \left(\frac{N_1}{N_2} \right) i_1$$

$$v_2 = \left(\frac{N_2}{N_1} \right) v_1$$

Pinhão-cremalheira e polias ideais

- Dispositivos que convertem movimentos rotacionais em translacionais e vice-versa.
- Consistem de um disco girante (pinhão ou polia) de massa desprezível em contato com um corpo (cremalheira ou correia) de massa também desprezível e em movimento linear.

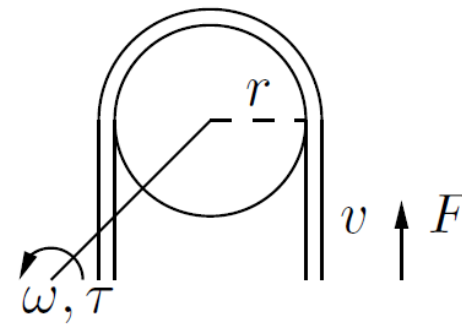
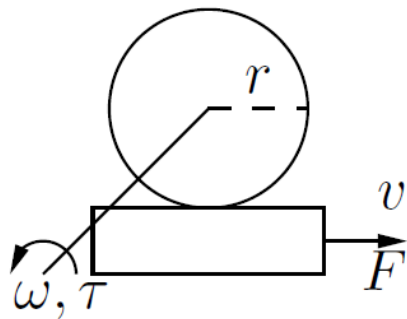


Pinhão-cremalheira e polias ideais

- As equações que regem a conversão entre grandezas rotacionais e translacionais são:

$$x = r\theta \Rightarrow v = r\omega$$

$$\tau = rF \Rightarrow F = \left(\frac{1}{r}\right) \tau$$



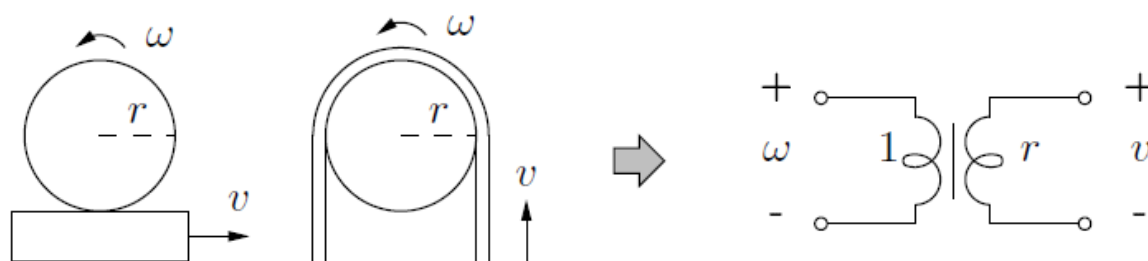
Pinhão-cremalheira e polias ideais

- Assim, podem ser representados por um transformador elétrico valendo as seguintes relações:

Grandezas elétricas no primário \leftrightarrow Grandezas mecânicas rotacionais

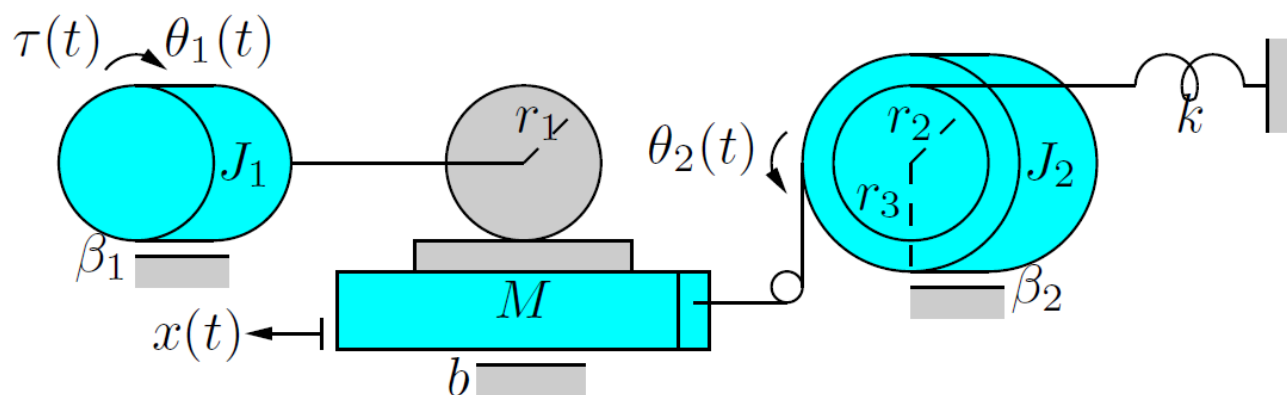
Grandezas elétricas no secundário \leftrightarrow Grandezas mecânicas translacionais

Raio do disco \leftrightarrow Razão do número de espiras

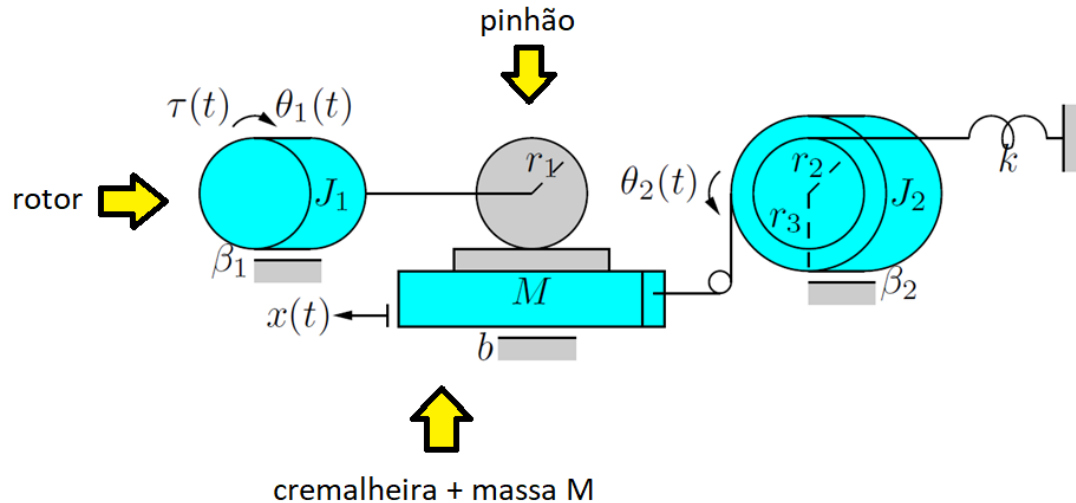


Exemplo ilustrativo 8

- Determinar o circuito elétrico equivalente do seguinte dispositivo:

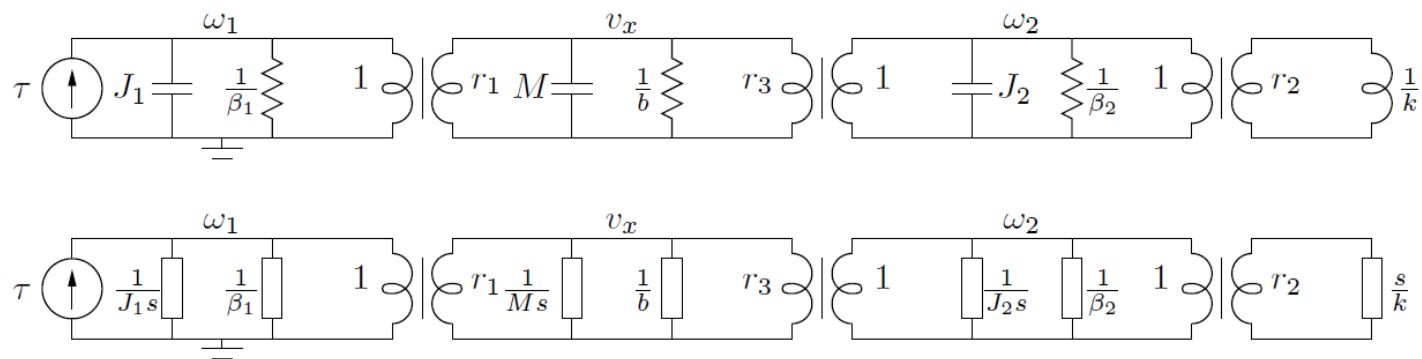
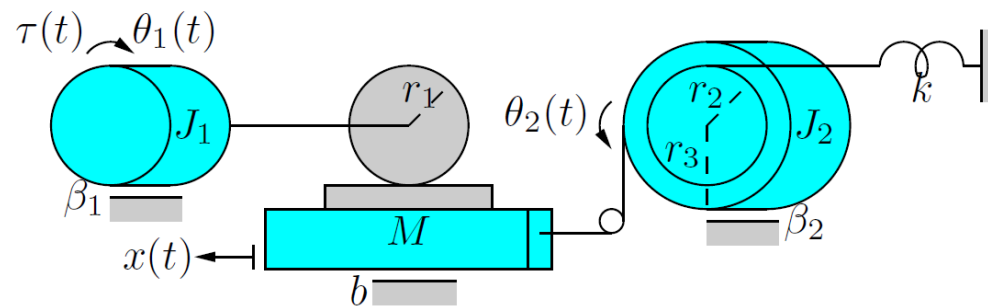


Exemplo ilustrativo 8



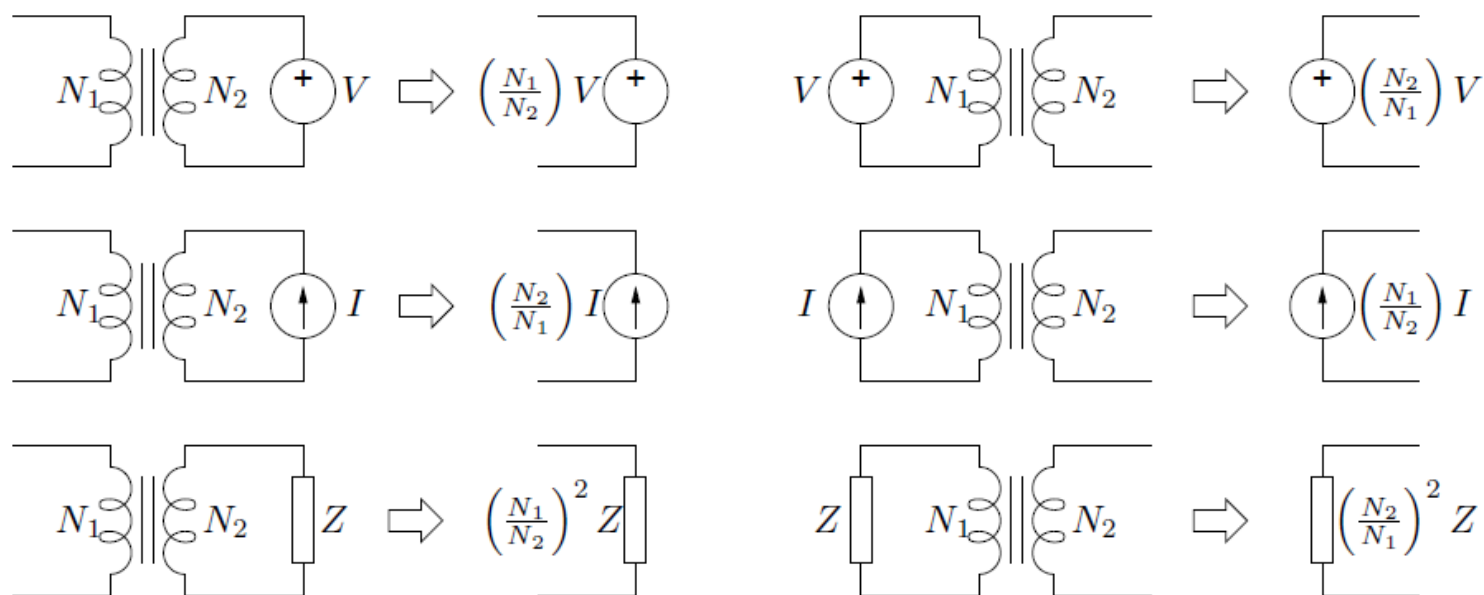
- $\tau(t) \rightarrow$ torque aplicado ao rotor que gira apoiado a um mancal
- $J_1, J_2 \rightarrow$ momentos de inércia
- $\beta_1, \beta_2, b \rightarrow$ atritos viscosos
- $M \rightarrow$ massa rigidamente acoplada à cremalheira
- Os cabos não se esticam
- Calcular a função de transferência entre o torque τ e o deslocamento da massa x

Exemplo ilustrativo 8



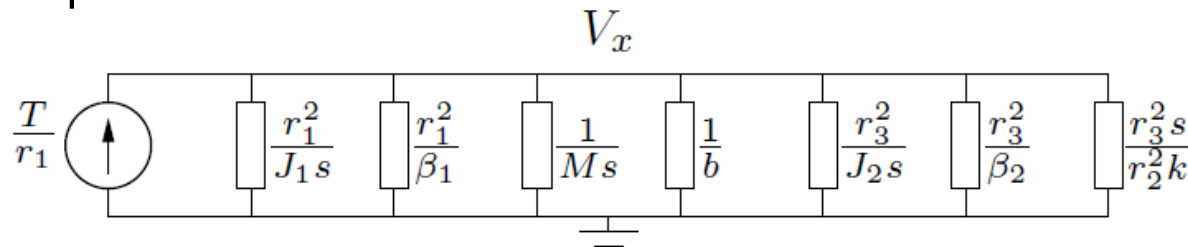
Exemplo ilustrativo 7

Os dispositivos podem ser transferidos de um lado para o outro do transformador usando-se as seguintes relações:



Exemplo ilustrativo 7

Eliminando-se os transformadores resulta no circuito elétrico com todas as impedâncias em paralelo:



Sabendo-se que $V_x(s) = sX(s)$, tem-se que:

$$H(s) = \frac{sX(s)}{T(s)} \Rightarrow G(s) = \frac{X(s)}{T(s)} = \frac{H(s)}{s} \Rightarrow$$

$$G(s) = \frac{r_1 r_3^2}{(r_3^2 J_1 + r_1^2 J_2 + r_1^2 r_3^2 M)s^2 + (r_3^2 \beta_1 + r_1^2 \beta_2 + r_1^2 r_3^2 b)s + r_1^2 r_2^2 k}$$

Sistemas eletromecânicos

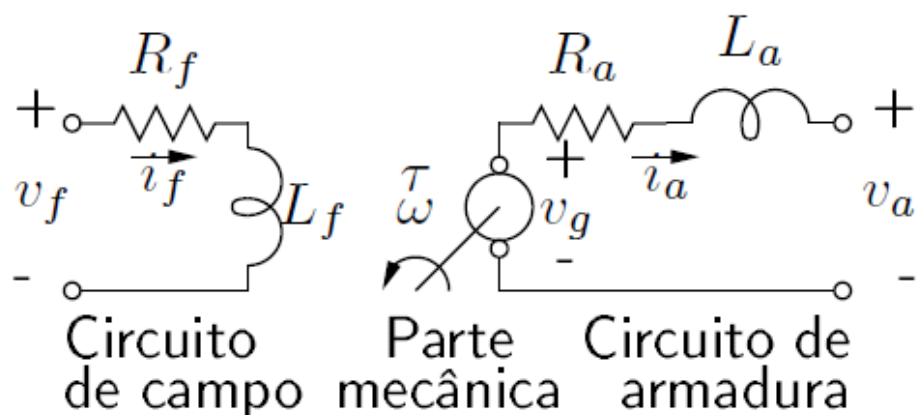
- Convertem energia elétrica em energia mecânica ou vice-versa. Exemplos: motores, geradores, alto-falantes, etc..
- Uma grande variedade de dispositivos eletromecânicos envolve o fluxo de correntes elétricas dentro de um campo magnético. Dessa forma, sabe-se que:
 - Um condutor em um campo magnético que carrega uma corrente terá uma força exercida sobre ele;
 - Uma tensão será induzida em um condutor que se move com relação a um campo magnético.

Sistemas eletromecânicos

- A lei de indução de *Faraday* $(e = -\frac{d\lambda}{dt})$ descreve a indução de tensões por um campo magnético variando no tempo.
- A conversão eletromecânica de energia ocorre quando a mudança no fluxo é associada com um movimento mecânico.
- Em máquinas rotativas, as tensões são geradas nas bobinas através das seguintes formas:
 - Girando as bobinas mecanicamente através de um campo magnético
 - Mecanicamente girando um campo magnético que atravessa as bobinas
 - Projetando o circuito magnético de forma que a relutância magnética varie com a rotação do motor.

Máquinas de corrente contínua

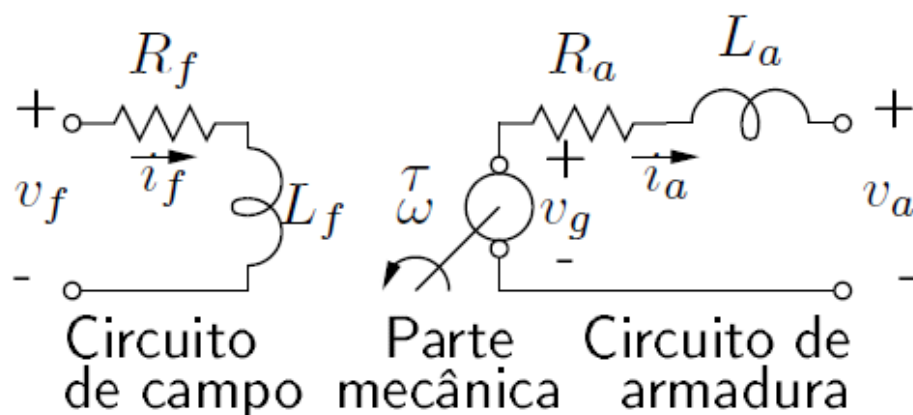
- São bastante utilizadas em sistemas de controle em razão de seu comportamento essencialmente linear.



- O enrolamento de campo tem resistência R_f e indutância L_f
- O enrolamento de armadura tem resistência R_a e indutância L_a
- As correntes e tensões nos enrolamentos de campo e armadura são i_f , v_f , i_a e v_a .

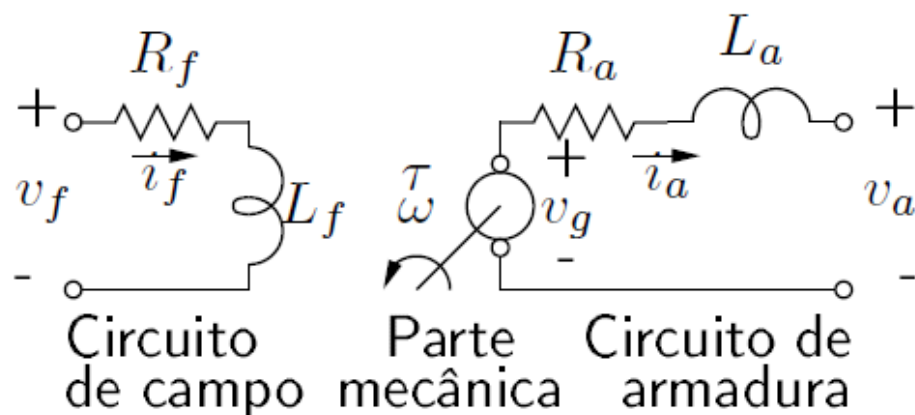
Máquinas de corrente contínua

- São bastante utilizadas em sistemas de controle em razão de seu comportamento essencialmente linear.



- A tensão induzida na armadura é v_g
- O torque e a velocidade angular no eixo do rotor são τ e ω , respectivamente.

Máquinas de corrente contínua



A tensão induzida no enrolamento da armadura é dada por:

$$v_g = K_1 \phi \omega$$

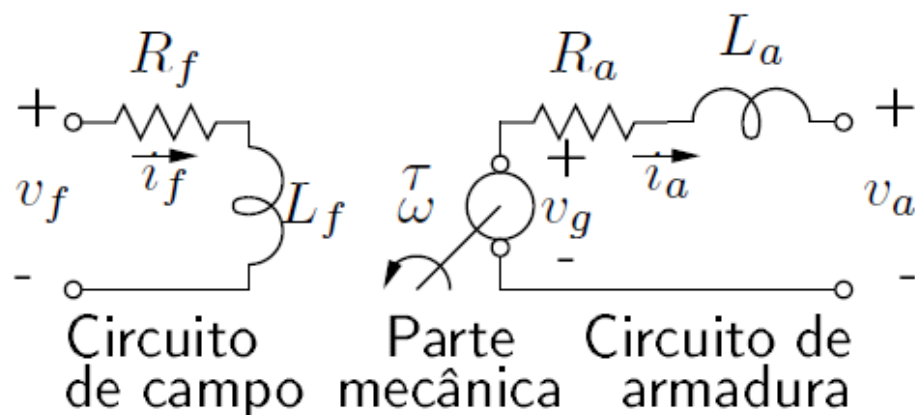
O torque da máquina é dado por:

$$\tau = K_1 \phi i_a$$

$K_1 \rightarrow$ parâmetro determinado pela estrutura física da máquina
 $\phi \rightarrow$ fluxo magnético

Máquinas de corrente contínua

Supondo que a máquina esteja operando na zona linear:

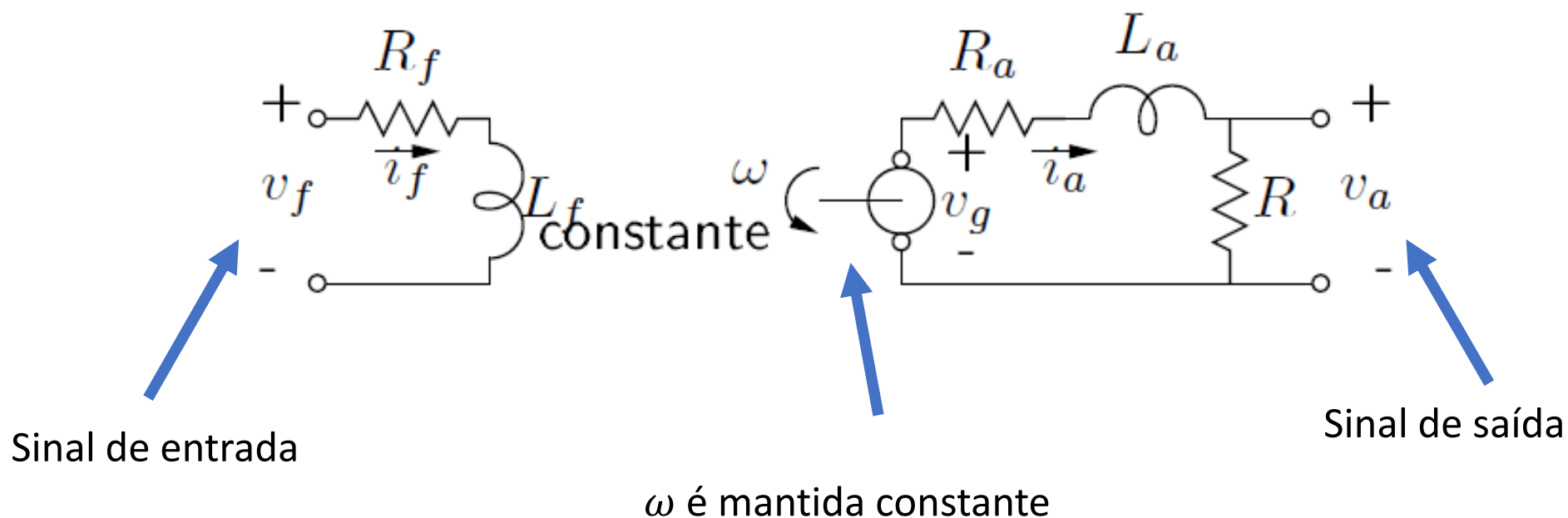


$$\phi = \frac{\mu N_f A}{l_f} = k_2 i_f$$

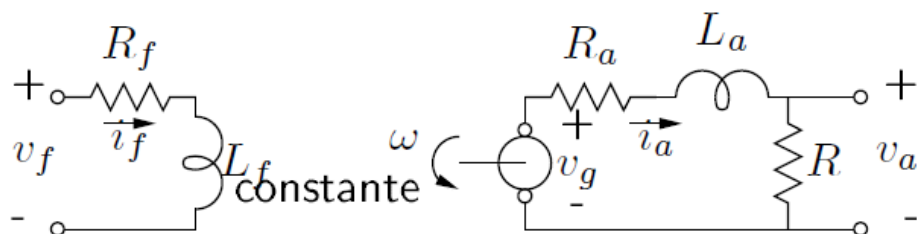
Em que K_2 depende das características magnéticas do núcleo e do enrolamento de campo.

Gerador CC

- Máquina que converte a potência mecânica em potência elétrica



Gerador CC



Equação para o circuito de campo:

$$v_f = R_f i_f + L_f \frac{di_f}{dt}$$

Equação da tensão induzida na armadura:

$$v_g = K_1 \phi \omega$$

$$\phi = \frac{\mu N_f A}{l_f} = k_2 i_f$$

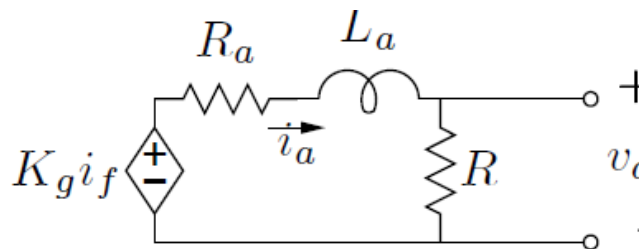
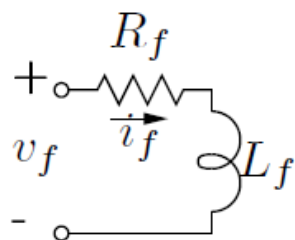
$$v_g = K_1 \phi \omega = \overbrace{K_1 K_2 \omega}^{\text{constante}} i_f = K_g i_f$$

Gerador CC

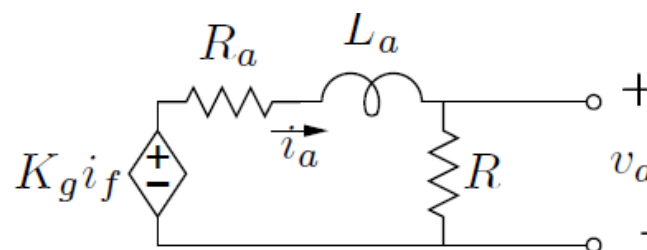
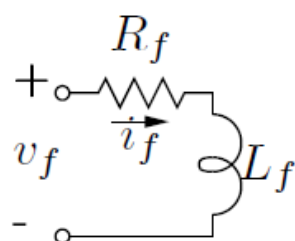
Aplicando-se a transformada de Laplace:

$$\begin{cases} V_f = (R_f + L_f s) I_f \\ V_g = K_g I_f \end{cases} \Rightarrow \boxed{\frac{V_g(s)}{V_f(s)} = \frac{K_g}{L_f s + R_f}}$$

Considerando-se que o gerador está alimentando uma carga resistiva de resistência R :



Gerador CC



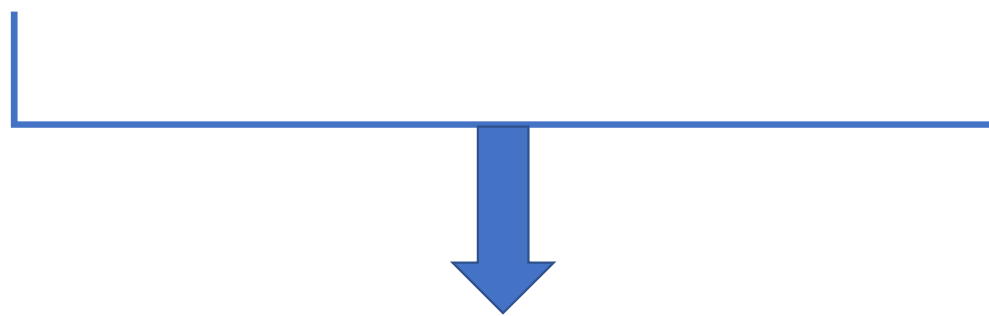
A partir do circuito equivalente:

$$\begin{cases} V_g = (R_a + L_a s + R)I_a \\ V_a = RI_a \end{cases} \Rightarrow \boxed{\frac{V_a(s)}{V_g(s)} = \frac{R}{L_a s + R_f + R}}$$

Gerador CC

$$\frac{V_g(s)}{V_f(s)} = \frac{K_g}{L_f s + R_f}$$

$$\frac{V_a(s)}{V_g(s)} = \frac{R}{L_a s + R_f + R}$$



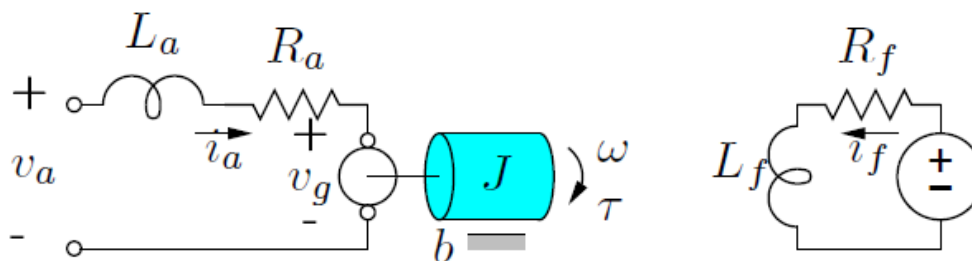
$$\frac{V_a(s)}{V_f(s)} = \frac{V_a(s)}{V_g(s)} \cdot \frac{V_g(s)}{V_f(s)} \Rightarrow \frac{V_a(s)}{V_f(s)} = \frac{K_g R}{(L_f s + R_f)(L_a s + R_a + R)}$$

Motor CC

- Nos motores CC, potência mecânica é gerada, de forma que a velocidade de rotação ω é o sinal de saída e a tensão aplicada é o sinal de entrada
- De acordo com o sinal elétrico de entrada, tem-se o motor CC controlado pela armadura ou o motor CC controlado pelo campo.

Motor CC controlado pela armadura

- Nesta situação, a corrente de campo i_f é mantida constante, a tensão de armadura v_a é o sinal de entrada e a velocidade de rotação ω é o sinal de saída



Motor CC controlado pela armadura

- Considerando-se as equações da tensão induzida na armadura v_g e o torque da máquina τ :

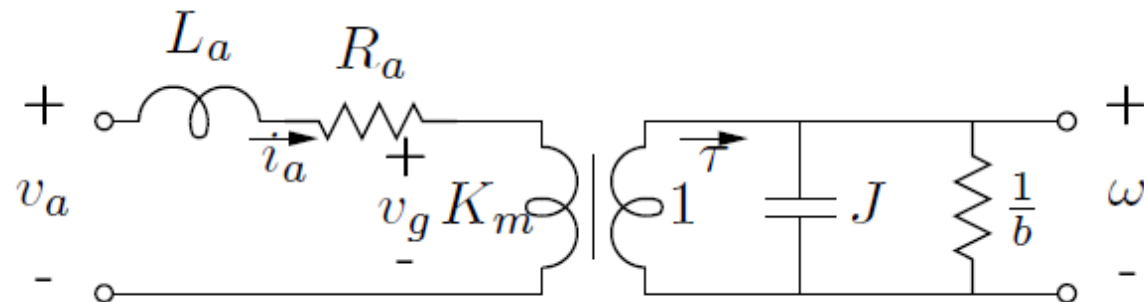
$$v_g = K_1 \phi \omega = \overbrace{K_1 K_2 i_f}^{\text{constante}} \omega = K_m \omega$$

$$\tau = K_1 \phi i_a = \overbrace{K_1 K_2 i_f}^{\text{constante}} i_a = K_m i_a$$

Pode-se observar que as equações são semelhantes às de um transformador elétrico, possibilitando-se a modelagem do motor CC controlado pela armadura através de um circuito equivalente

Motor CC controlado pela armadura

- Circuito equivalente



$$\frac{\Omega(s)}{V_a(s)} = \frac{K_m}{JL_a s^2 + (JR_a + BL_a)s + BR_a + K_m^2}$$

Motor CC controlado pela armadura

- Como na prática a impedância da armadura pode usualmente ser desprezada ($L_a \rightarrow 0$), tem-se que:

$$\frac{\Omega(s)}{V_a(s)} = \frac{K_m}{JL_a s^2 + (JR_a + BL_a)s + BR_a + K_m^2}$$



$$\frac{\Omega(s)}{V_a(s)} = \frac{K_m}{JR_a s + BR_a + K_m^2} = \frac{K}{T_m s + 1}$$

Motor CC controlado pela armadura

- Como na prática a impedância da armadura pode usualmente ser desprezada ($L_a \rightarrow 0$), tem-se que:

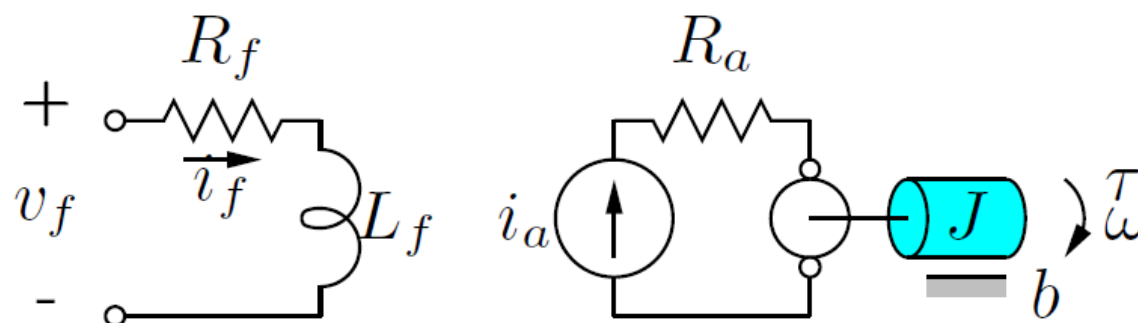
$$\frac{\Omega(s)}{V_a(s)} = \frac{K_m}{JL_a s^2 + (JR_a + BL_a)s + BR_a + K_m^2}$$



$$\frac{\Omega(s)}{V_a(s)} = \frac{K_m}{JR_a s + BR_a + K_m^2} = \frac{K}{T_m s + 1}$$

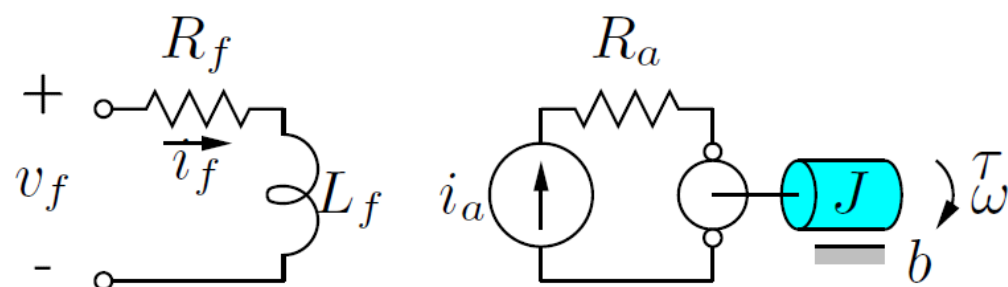
Motor CC controlado pelo campo

- Considera uma corrente de armadura constante
- Requer uma fonte de corrente para alimentar o circuito da armadura
- O sinal de entrada é a tensão de campo v_f .



Motor CC controlado pelo campo

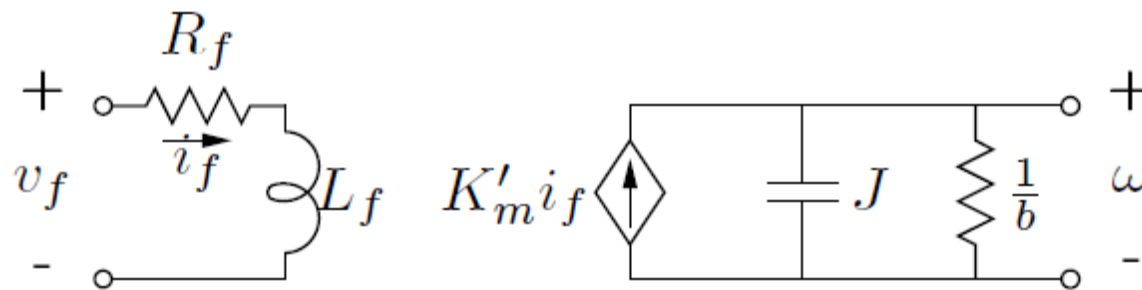
- Considera uma corrente de armadura constante
- Requer uma fonte de corrente para alimentar o circuito da armadura
- O sinal de entrada é a tensão de campo v_f .



$$\tau = K_1 \phi i_a = \overbrace{K_1 K_2 i_a}^{\text{constante}} i_f = K'_m i_f$$

Motor CC controlado pelo campo

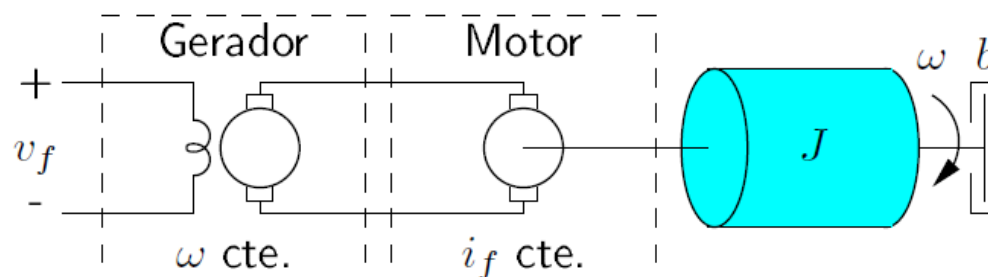
- Equivalente elétrico



$$\frac{\Omega(s)}{V_a(s)} = \frac{K'_m}{(L_f s + R_f)(J s + b)}$$

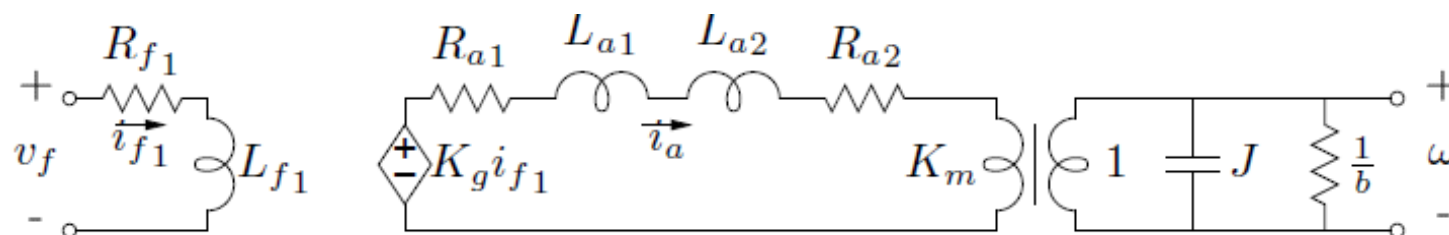
Exemplo ilustrativo 9

- Sistema Ward-Leonard para regular a velocidade de um motor de corrente contínua
- Consta de um gerador de corrente contínua de excitação independente acionado por um dispositivo que provê velocidade angular constante
- A saída do gerador alimenta a armadura de um motor de corrente contínua com corrente de campo constante
- A carga do motor é composta por um momento de inércia J e um amortecedor viscoso de coeficiente de atrito b
- A velocidade ω do motor é a grandeza controlada através da variação da tensão v_f aplicada ao campo gerador
- Deduzir a função de transferência entre ω e v_f



Exemplo ilustrativo 9

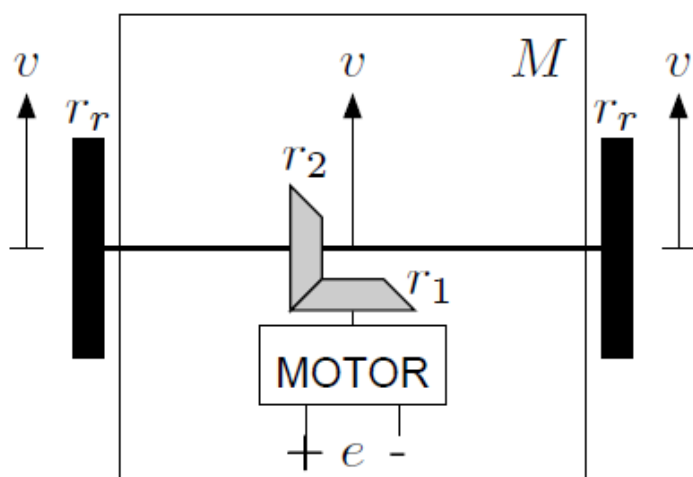
- Equivalente elétrico



Fazendo-se $R_a = R_{a1} + R_{a2}$ e $L_a = L_{a1} + L_{a2}$, aplicando-se a transformada de Laplace e percorrendo-se as malhas do circuito resulta em:

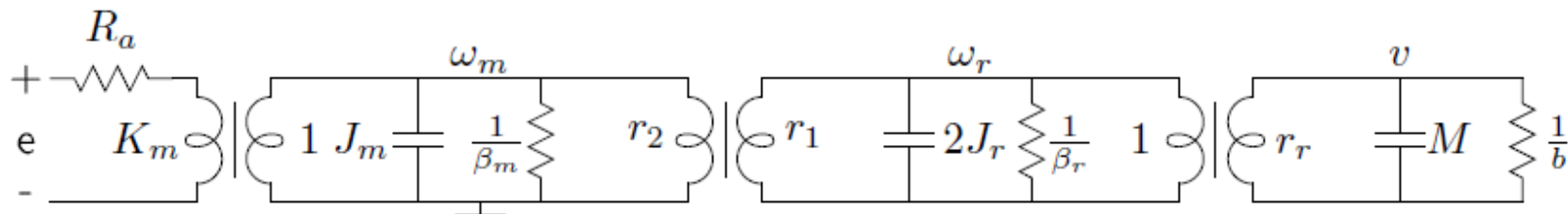
$$\begin{cases} V_f = (L_{f1}s + R_{f1})I_{f1} \\ K_g I_{f1} = (L_a s + R_a)I_a + K_m \Omega \\ K_m I_a = (Js + b)\Omega \end{cases} \Rightarrow \frac{\Omega(s)}{V_f(s)} = \frac{K_g K_m}{(L_{f1}s + R_{f1})[(L_a s + R_a)(Js + b) + K_m^2]}$$

Exemplo ilustrativo 9



- Robô móvel de massa M
- Rodas idênticas de raio r_r e momento de inércia J_r acopladas a um mesmo eixo
- O eixo é acionado, através de duas engrenagens de raios r_1 e r_2 , por uma tensão e aplicada em um motor CC de imã permanente com impedância de armadura desprezível, resistência de armadura R_a , constante de motor K_m e momento de inércia do rotor J_m .
- Os atritos do rotor e do eixo com seus mancais de apoio têm coeficientes de atrito viscoso β_m e β_r , respectivamente
- O arrasto do robô com o chão é modelado por um atrito viscoso de coeficiente b
- **Determinar o equivalente elétrico do robô**

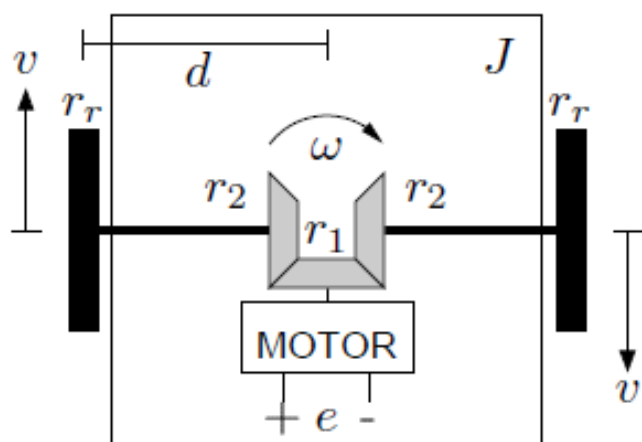
Exemplo ilustrativo 10



- O primeiro transformador modela a conversão eletromecânica de energia do motor
- O segundo transformador modela o jogo de engrenagens
- O terceiro transformador modela o efeito de transformação de movimento angular em linear feito pelas rodas
- As tensões ω_m e ω_r modelam as velocidades angulares de rotação do motor e do eixo das rodas, respectivamente
- A tensão v é equivalente à velocidade linear no raio externo das rodas

Exemplo ilustrativo 11

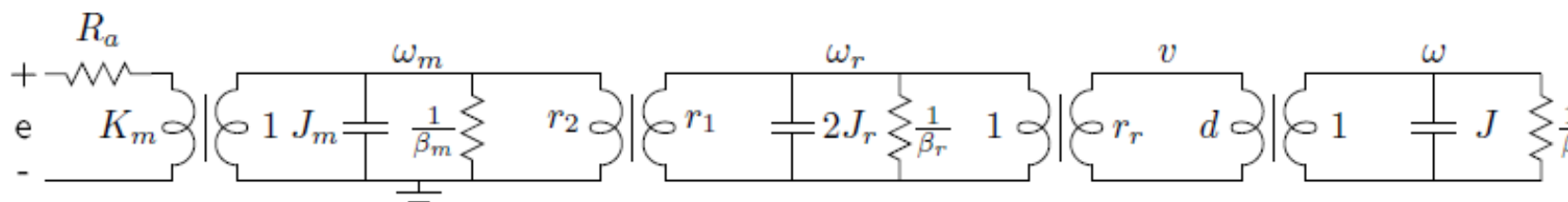
Robô móvel de movimento angular



- Repetir a modelagem do exemplo anterior, mas supondo que as duas rodas estão acopladas a eixos distintos acionados pelo mesmo motor através de engrenagens em contrafase
- O robô tem largura d do centro à roda, momento de inércia J e coeficiente angular de atrito β ao girar sobre o solo

Exemplo ilustrativo 11

Equivalente elétrico



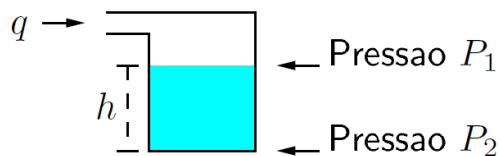
- O primeiro transformador modela a conversão eletromecânica de energia do motor
- O segundo transformador modela o jogo de engrenagens
- O terceiro transformador modela o efeito de transformação de movimento angular em linear feito pelas rodas
- As tensões ω_m e ω_r modelam as velocidades angulares de rotação do motor e do eixo das rodas, respectivamente
- A tensão v é equivalente à velocidade linear no raio externo das rodas, **porém com sentido diferente em cada uma delas**

Sistemas fluídicos

- Envolvem fluxos de líquidos e gases
- São amplamente utilizados na indústria principalmente em processos químicos e de automação de máquinas
- Análise restrita aos casos envolvendo líquidos incompressíveis escoando através de recipientes e tubulações de seção transversal constante
- Exibem dois tipos de propriedades importantes que podem ser aproximadas por parâmetros concentrados: **Resistência** e **capacitância**.

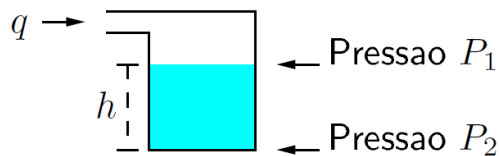
Capacitância fluídica

- Descreve a capacidade de um fluido de armazenar energia sob a forma de energia potencial
- Considerando-se um reservatório de secção transversal constante, supõe-se uma vazão $q(t)$. Durante um intervalo de tempo pequeno Δt esta vazão pode ser considerada constante, de forma que o volume adicional ΔV que entrou no reservatório é dado por:



$$\bullet \quad \Delta V \cong q(t)\Delta t \Rightarrow \frac{\Delta V}{\Delta t} \big|_{\Delta t \rightarrow 0} = q(t) \Rightarrow \frac{dV}{dt} = q(t)$$

Capacitância fluídica

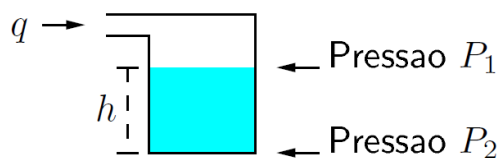


$$\Delta V \cong q(t)\Delta t \Rightarrow \left. \frac{\Delta V}{\Delta t} \right|_{\Delta t \rightarrow 0} = q(t) \Rightarrow \frac{dV}{dt} = q(t)$$

Se o recipiente tem secção transversal constante e de área A , o volume do fluido é:

$$V(t) = A \cdot h(t) \Rightarrow \frac{dV}{dt} = A \frac{dh}{dt} \Rightarrow q(t) = A \frac{dh}{dt}$$

Capacitância fluídica

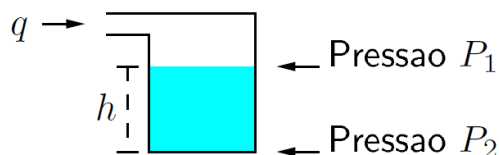


Em razão das pressões P_1 e P_2 são exercidas forças sobre o fluido no recipiente dadas por:

$$F_1 = A \cdot P_1$$

$$F_2 = A \cdot P_2$$

Capacitância fluídica



Também atua no fluido a força peso P , no mesmo sentido da força F_1 .
Se ρ é a massa específica do fluido, tem-se:

$$P = mg = \rho Vg = \rho Ahg$$

Como a massa líquida tem aceleração vertical nula, o somatório das forças deve ser nulo:

$$F_1 + P = F_2 \Rightarrow P_1 A + \rho Ahg = P_2 A \Rightarrow h(t) = \left(\frac{1}{\rho g} \right) (P_2 - P_1)$$

Capacitância fluídica

Substituindo-se a expressão de P na expressão de $h(t)$ resulta em:

$$P = \rho A h g$$



$$h(t) = \left(\frac{1}{\rho g} \right) (P_2 - P_1)$$



$$q(t) = C_f \frac{d(P_2 - P_1)}{dt}$$

capacitância fluídica $\rightarrow C_f = \frac{A}{\rho g}$

Capacitância fluídica

A grandeza C_f é denominada capacitância fluídica do reservatório, em razão da similaridade da expressão:

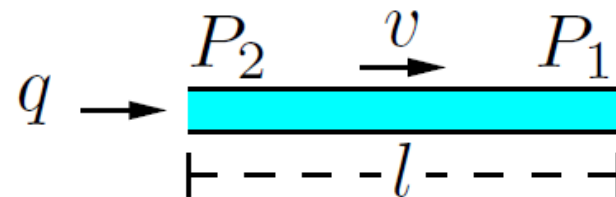
$$q(t) = C_f \frac{d(P_2 - P_1)}{dt}$$

E a equação de um capacitor elétrico:

$$i(t) = C \frac{dV}{dt}$$

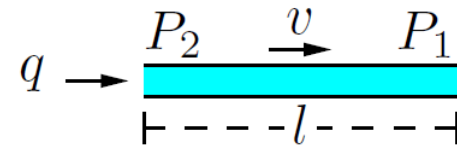
Indutância fluídica

Considerar um bloco de líquido em movimento, supondo todas as partículas do fluido com a mesma velocidade v e que a tubulação tem seção transversal constante de área A :



Em decorrência das pressões P_1 e P_2 , são exercidas forças sobre o fluido no recipiente.

Indutância fluídica



Sabe-se que a vazão q em uma tubulação é dada por:

$$q = Av \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dt} = \left(\frac{1}{A} \right) \frac{dq}{dt}$$

Substituindo-se $\frac{dv}{dt}$ na expressão de $P_{21} = \rho l \frac{dv}{dt}$ resulta em:

$$P_{21} = L_f \frac{dq}{dt}$$

Em que $L_f = \frac{\rho l}{A}$

Capacitância fluídica

A grandeza L_f é denominada indutância fluídica do reservatório, em razão da similaridade da expressão:

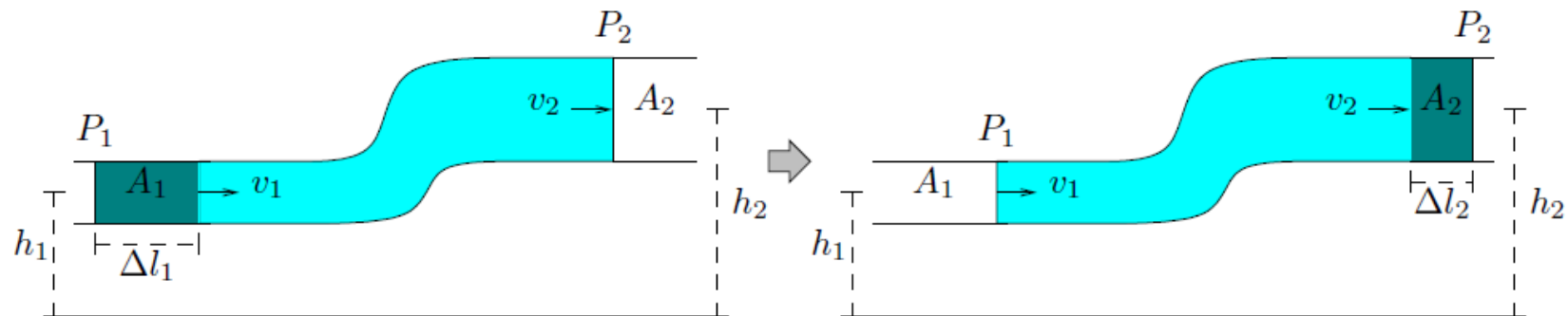
$$P_{21} = L_f \frac{dq}{dt}$$

E a equação de um capacitor elétrico:

$$v = L \frac{di}{dt}$$

Teorema de Bernoulli

- Antes de definir-se a resistência fluídica, faz-se necessária a compreensão do Teorema de Bernoulli
- Considera-se o escoamento em regime estacionário de um fluido não-viscoso e incompressível:



- A_1, A_2 : áreas das secções transversais
- h_1, h_2 : alturas do início e fim da tubulação
- $\Delta l_1, \Delta l_2$: distância percorrida pela massa d'água
- P_1, P_2 : pressões na entrada e saída da tubulação
- v_1, v_2 : velocidades da massa d'água

Teorema de Bernoulli

As forças F_1 e F_2 causadas pelas pressões P_1 e P_2 são dadas por:

$$F_1 = P_1 \cdot A_1$$

$$F_2 = P_2 \cdot A_2$$

O trabalho de uma força é igual ao produto da força pelo deslocamento realizado:

$$W = F \cdot d$$

O trabalho realizado pelas forças F_1 , F_2 e pela força peso é dado por:

$$W_1 = P_1 A_1 \Delta l_1$$

$$W_2 = -P_2 A_2 \Delta l_2$$

$$W_g = -mg(h_2 - h_1)$$

Teorema de Bernoulli

$$W = W_1 + W_2 + W_g = P_1 A_1 \Delta l_1 - P_2 A_2 \Delta l_2 - mg(h_2 - h_1)$$

Mas $\Delta l_1 A_1 = \Delta l_2 A_2$ equivale ao volume de fluido representado pela área hachurada, que pode ser representado por m/ρ . Dessa forma:

$$W = (P_1 - P_2) \frac{m}{\rho} - mg(h_2 - h_1)$$

O teorema do trabalho-energia estabelece que o trabalho realizado pela resultante das forças é igual à variação da energia cinética do sistema:

$$W = \Delta E_c = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}$$

Teorema de Bernoulli

Igualando-se as duas expressões de W :

$$W = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = (P_1 - P_2) \frac{m}{\rho} - mg(h_2 - h_1)$$

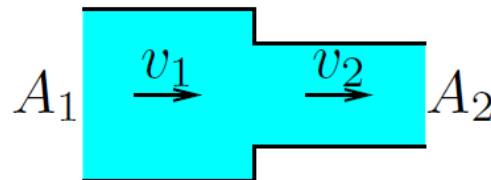
Multiplicando-se ambos os lados por ρ/m :

$$P_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} - \rho g h_1 = P_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} - \rho g h_2$$

Como os índices 1 e 2 referem-se a duas posições quaisquer, pode-se estender sua validade para toda a tubulação:

$$P + \rho v^2 - \rho g h = \textit{constante}$$

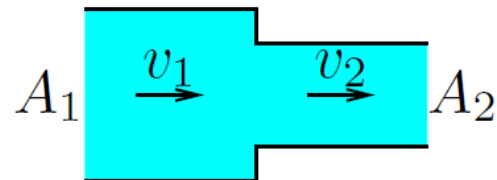
Resistência fluídica



Partindo-se da Equação de Bernoulli e assumindo-se que o estrangulamento está em posição horizontal ($h_1 = h_2$):

$$P_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = P_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} \quad \Rightarrow \quad v_2^2 - v_1^2 = \frac{2(P_1 - P_2)}{\rho} = \frac{2P_{12}}{\rho}$$

Resistência fluídica



A vazão q é igual nos dois lados da tubulação:

$$q = v_1 A_1 = v_2 A_2 \Rightarrow v_1 = \frac{q}{A_1}; v_2 = \frac{q}{A_2}$$

Substituindo-se v_1 e v_2 na equação original:

$$v_2^2 - v_1^2 = \frac{q^2}{A_2^2} - \frac{q^2}{A_1^2} = \frac{2P_{12}}{\rho} \Rightarrow P_{12} = \left[\rho \left(\frac{A_1^2 - A_2^2}{2A_1^2 A_2^2} \right) \right] q^2 \Rightarrow P_{12} = R_f q^2$$

Resistência fluídica

Acrescenta-se um coeficiente de descarga C a fim de aproximar o modelo à dinâmica real do sistema:

$$P_{12} = \frac{\left[\rho \left(\frac{A_1^2 - A_2^2}{2A_1^2 A_2^2} \right) \right] q^2}{C}$$

Dessa forma, a resistência fluídica R_f é dada por:

$$R_f = \frac{\left[\rho \left(\frac{A_1^2 - A_2^2}{2A_1^2 A_2^2} \right) \right]}{C}$$

Resistência fluídica

No entanto, essa expressão é não-linear, impedindo uma equivalência direta com a resistência elétrica. Dessa forma, lineariza-se a expressão de R_f em torno de uma vazão média q_{PO} :

$$\underbrace{P = R_f q^2}_{\text{NÃO-LINEAR}} \Rightarrow \Delta P = \overline{R_f} \Delta q$$

Em que:

$$\begin{cases} \Delta q = q - q_{PO} \\ \Delta P = P - P_{PO} = P - R_f q_{PO}^2 \\ R_f = 2R_f q_{PO} \end{cases}$$

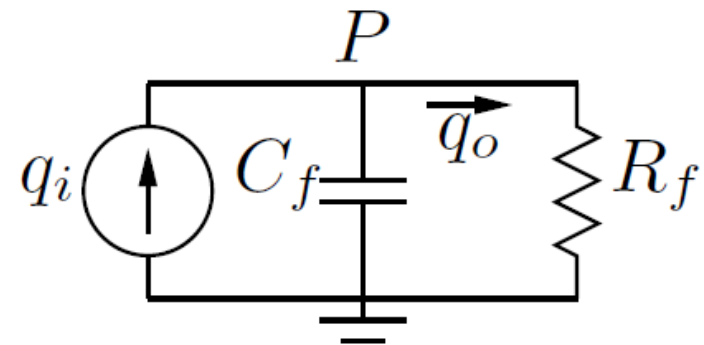
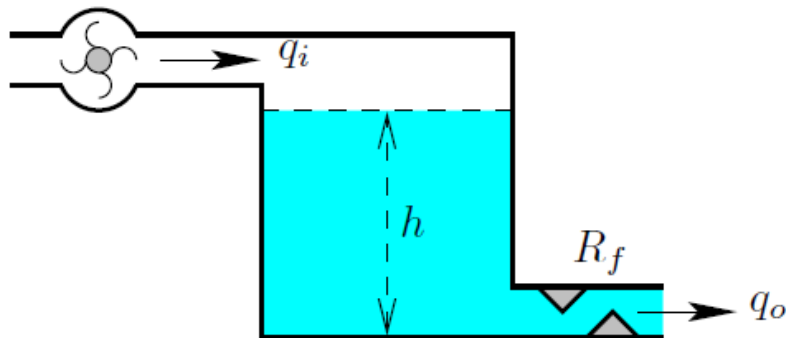
Equivalência com circuitos elétricos

Os circuitos elétricos correspondentes aos sistemas fluídicos linearizados podem ser obtidos respeitando-se as equivalências indicadas na tabela:

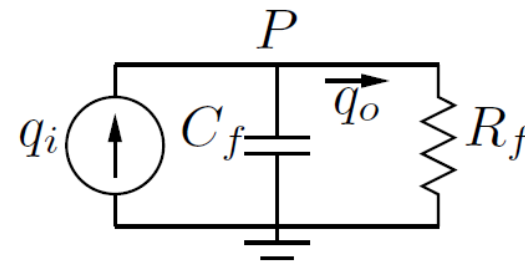
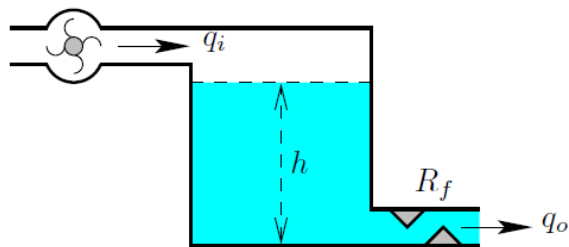
Sistema fluídico	Sistema elétrico
Pressão P	Tensão v
Vazão q	Corrente i
Capacitância fluídica C_f	Capacitor C_f
Resistência fluídica linearizada R_f	Resistor R_f
Indutância fluídica L_f	Indutor L_f

Exemplo ilustrativo 12

Determinar a relação entre a altura da coluna de fluido h e a vazão de entrada q_i :



Exemplo ilustrativo 12



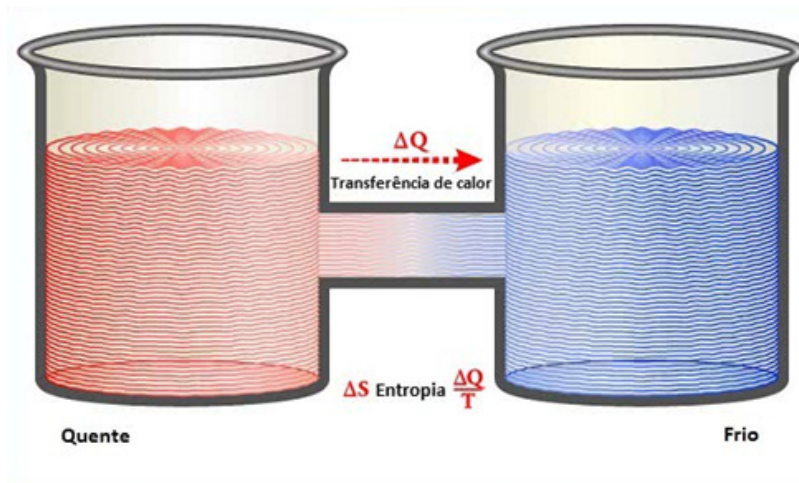
$$\begin{cases} q_i = q_c + q_o \\ q_c = C_f \dot{P} = \frac{A}{\rho g} \dot{P} \\ q_o = \sqrt{\frac{P}{R_f}} = \sqrt{\frac{\rho g h}{R_f}} \end{cases}$$



$$A\dot{h} + \left(\sqrt{\frac{\rho g}{R_f}} \right) \sqrt{h} = q_i$$

Sistemas térmicos

- São sistemas regidos pelas leis da termodinâmica
- 2ª lei da termodinâmica:



- Diferença de temperatura dos dois corpos causa um fluxo de energia térmica q ($J/s = W$)
- $T(K) \leftrightarrow U(V)$
- $q(W) \leftrightarrow i(A)$

Capacitância térmica

- A maneira como um corpo armazena calor depende de sua massa e do material de que é composto
- A capacitância térmica mede a dificuldade de se variar a temperatura de um corpo ao fornecer-lhe ou retirar-lhe calor
- É definida como a razão entre a quantidade de calor (ΔE_t) fornecida ao corpo pelo aumento da temperatura observada (ΔT):

$$C = \frac{\Delta E_t}{\Delta T}$$

Capacitância térmica

- Reescrevendo essa equação em formato diferencial:

$$C = \frac{\Delta E_t}{\Delta T} \rightarrow C = \frac{dE_t}{dT}$$

$$CdT = dE_t$$

- Dividindo-se os dois lados por dt :

$$C \frac{dT}{dt} = \frac{dE_t}{dt}$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{C} \frac{dE_t}{dt}$$

Capacitância térmica

- Pela definição de calor, $q = \frac{dE_t}{dt}$:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{C} \frac{dE_t}{dt} = \frac{1}{C} q$$

Por analogia com a fórmula para circuitos elétricos, em que a variação de tensão no tempo $\frac{dV}{dt}$ é dada por:

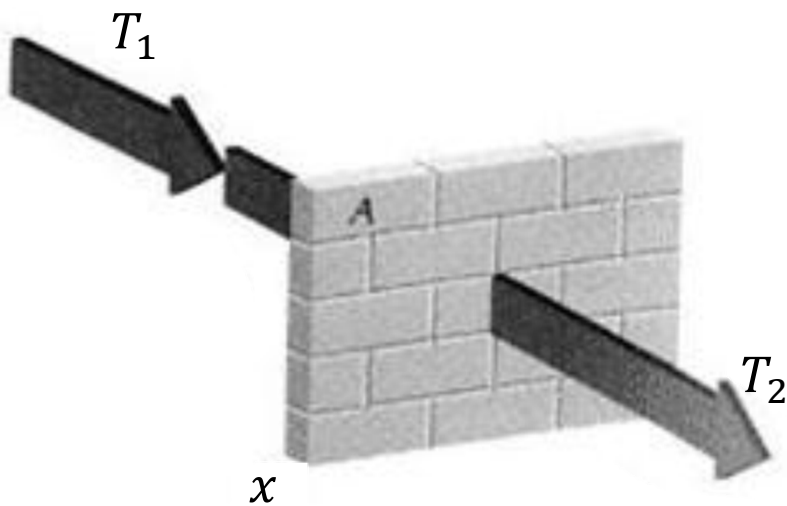
$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{C_e} i$$

pode-se inferir que a capacitância térmica C é equivalente à capacitância elétrica C_e .

Resistência térmica

- O cálculo da resistência térmica depende do tipo de transferência de calor envolvido no processo
- A transferência de calor entre dois corpos ocorre de três maneiras possíveis:
 - **Condução**
 - **Convecção**
 - **Radiação**

Lei de Fourier



- A transferência de calor no fenômeno da **condução** através de um corpo é regido pela lei de Fourier:

$$q = -kA \frac{dT}{dx}$$

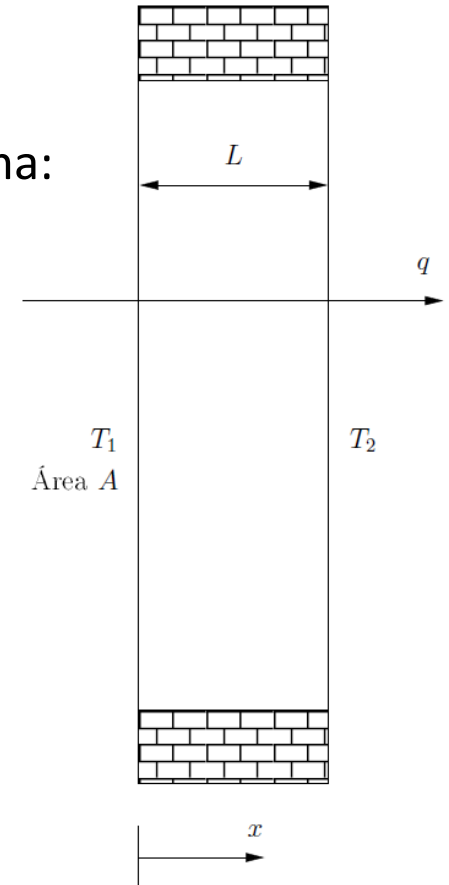
Em que k é a condutividade térmica $\left[\frac{W}{mK} \right]$, A é a área da seção no qual o calor flui e x é a largura do corpo.

Analogia com circuitos elétricos

- Inicialmente, escreve-se a lei de Fourier da seguinte forma:

$$q = -kA \frac{dT}{dx} \rightarrow$$

$$q \frac{1}{A} dx = -k \cdot dT$$



Analogia com circuitos elétricos

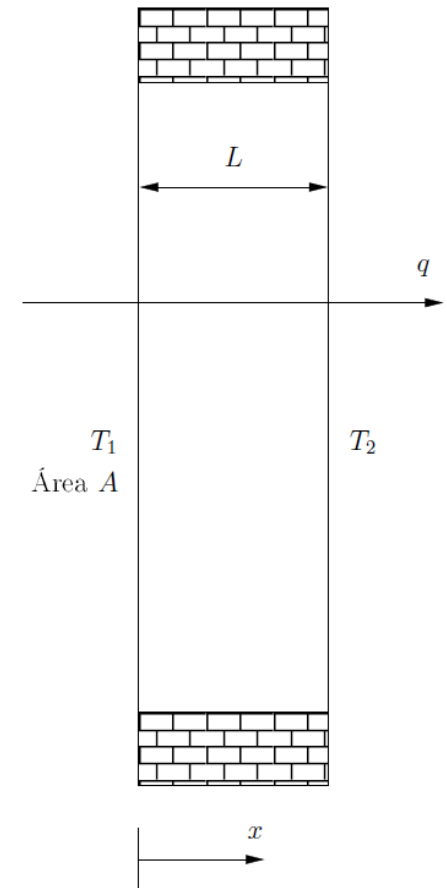
- Em seguida, integra-se os dois lados, sendo $T(x = 0) = T_1$ e $T(x = L) = T_2$:

$$\int_0^L q \frac{1}{A} dx = \int_{T_1}^{T_2} -k \cdot dT$$

$$q \frac{1}{A} \int_0^L dx = -k \int_{T_1}^{T_2} dT$$

$$q \frac{L}{A} = -k(T_2 - T_1) = k(T_1 - T_2)$$

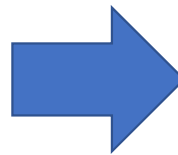
$$\Delta T = \frac{L}{k \cdot A} q$$



Analogia com circuitos elétricos

- Comparando a expressão obtida com a 1ª lei de Ohm, conclui-se que a resistência térmica R é dada por:

$$\Delta V = R \cdot i$$



$$\Delta T = \frac{L}{k \cdot A} q$$

$$R = \frac{L}{k \cdot A}$$

Exemplo ilustrativo 13

Considera-se um termômetro marcando uma temperatura inicial T_i deixado em uma sala com temperatura constante T_m . Pede-se a curva de evolução da temperatura marcada pelo termômetro em função do tempo:

Seja C a capacitância do termômetro. Seu calor absorvido é dado por:

$$q = C \frac{dT(t)}{dt}$$

O calor fornecido pelo ambiente ao fluido é dado por:

$$q = \frac{1}{R} (T_m(t) - T(t))$$

Em que T é a temperatura do termômetro e R é a resistência total à passagem de calor do ambiente para o fluido.

Exemplo ilustrativo 13

Dessa forma, igualando-se as duas expressões obtém-se:

$$q = C \frac{dT(t)}{dt} = \frac{1}{R} (T_m(t) - T(t))$$

Seja $\hat{T}(t) = T(t) - T_i$ e $T'_m(t) = T_m(t) - T_i$:

$$\begin{aligned} C \frac{d\hat{T}(t)}{dt} &= \frac{1}{R} (T_m(t) - \hat{T}(t) - T_i) \\ &= \frac{1}{R} T'_m(t) - \frac{1}{R} \hat{T}(t) \end{aligned}$$

$$C \frac{d\hat{T}(t)}{dt} + \frac{1}{R} \hat{T}(t) = \frac{1}{R} T'_m(t)$$

Exemplo ilustrativo 13

Aplicando-se Laplace:

$$\left(Cs + \frac{1}{R} \right) \hat{T}(s) = \frac{1}{R} T'_m(s)$$

$$\frac{\hat{T}(s)}{T'_m(s)} = \frac{1}{R} \frac{1}{Cs + \frac{1}{R}}$$

$$\frac{\hat{T}(s)}{T'_m(s)} = \frac{1}{RCs + 1} = \frac{\frac{1}{RC}}{s + \frac{1}{RC}}$$

Exemplo ilustrativo 13

Como a temperatura do meio é constante, tem-se que:

$$T_m(t) = T_m$$

$$T'_m(t) = T_m - T_i \quad \text{Definição de } T'_m(t)$$

$$T'_m(s) = \frac{T_m - T_i}{s} \quad \text{Aplicando Laplace}$$

Exemplo ilustrativo 13

Aplicando-se $T'_m(s)$ na expressão de $\frac{\hat{T}(s)}{T'_m(s)}$, tem-se:

$$\frac{\hat{T}(s)}{T'_m(s)} = \frac{1}{RCs + 1} = \frac{\frac{1}{RC}}{s + \frac{1}{RC}}$$

$$\hat{T}(s) = \frac{\frac{1}{RC}}{s + \frac{1}{RC}} \frac{T_m - T_i}{s}$$

$$= (T_m - T_i) \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{RC}} \right)$$

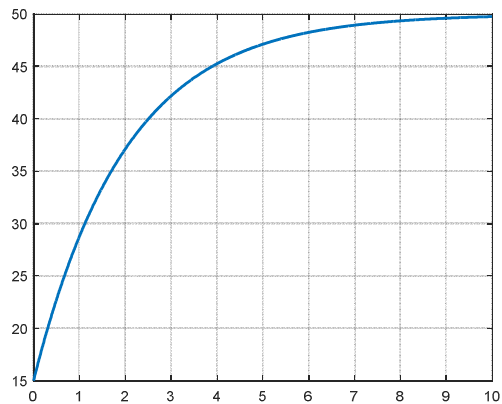
Exemplo ilustrativo 13

Aplicando-se derivadas parciais e voltando para o domínio do tempo:

$$\hat{T}(t) = (T_m - T_i) \left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right)$$

$$T(t) = T_m - (T_m - T_i)e^{-\frac{1}{RC}t}$$

$T_i < T_m$



$T_i > T_m$

