O Referencial de Frenet-Serret e Grupos de Lie

Conrado Damato de Lacerda

Universidade Estadual de Campinas

O referencial de Frenet-Serret é um tema clássico de Geometria Diferencial e consiste de atribuir a cada ponto de uma curva espacial uma base ortonormal positiva de $\mathbb{R}^3$ que forneça propriedades geométricas da curva. É interessante observar que essa atribuição essencialmente produz uma curva no grupo de Lie $SO(3)$, e com isso podemos aproveitar a bem conhecida estrutura desse grupo para obter informações sobre a curva original. Nas próximas páginas descreveremos como isso pode ser feito.

O Referencial de Frenet-Serret

Seja $\gamma : [0, L] \to \mathbb{R}^3$ uma curva de classe C^k, $k \geq 3$, parametrizada por comprimento de arco (PPCA), isto é, $|\dot{\gamma}(s)| = 1$ para todo $s \in [0, L]$, em que $|\ |$ denota a norma euclideana usual de $\mathbb{R}^3$. Definimos o *vetor tangente* a γ como sendo a função $T : s \in [0, L] \mapsto \dot{\gamma}(s) \in \mathbb{R}^3$. Dois fatos acerca de T são relevantes:

- T e $\gamma(0)$ determinam γ; de fato, $\gamma(s) = \gamma(0) + \displaystyle\int_0^s T(t)dt$.
- $\dot{T} \perp T$, pois $\langle \dot{T}, T\rangle = \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{ds}|T(s)|^2 = \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{ds}1 = 0$. Não é necessário que $\dot{T}$ também seja unitário.

Definimos a *curvatura* de γ como sendo a função $\kappa : s \in [0, L] \mapsto |\dot{T}(s)| \in [0, +\infty)$. Suporemos, por motivos geométricos, que $\kappa > 0$. Com isso, definimos o *vetor normal* a γ como a função $N : s \in [0, L] \mapsto \dot{T}(s)/\kappa(s) \in \mathbb{R}^3$. Segue dessas definições que N é um campo unitário ao longo de γ perpendicular a T e vale a relação $\dot{T} = \kappa N$.

O *vetor binormal* a γ é dado por $B(s) := T(s) \times N(s)$, em que $\times$ denota o produto vetorial de $\mathbb{R}^3$. Deste modo, $(T(s), N(s), B(s))$ é uma base ortonormal positiva de $\mathbb{R}^3$ para cada $s \in [0, L]$. Chamamos a tripla (T, N, B) de *referencial de Frenet-Serret* de γ.

As equações de Frenet-Serret

São as equações que descrevem $\dot{T}$, $\dot{N}$ e $\dot{B}$ em termos do próprio referencial de Frenet-Serret. A primeira já foi obtida: $\dot{T} = \kappa N$. Para a segunda, que descreve $\dot{N}$, primeiro notamos que $|N| = 1$ implica, como no caso de T, que $\dot{N} \perp N$. Logo, $\dot{N} = \alpha T + \tau B$, em que $\alpha, \tau : [0, L] \to \mathbb{R}$. Chamamos τ de *torção* de γ, e provaremos a seguir que $\alpha = -\kappa$. Com efeito, de $\dot{T} \perp T$ temos

$$0 = \frac{d}{ds}\langle \dot{T}(s), T(s)\rangle = \langle \ddot{T}(s), T(s)\rangle + |\dot{T}(s)|^2. \tag{1}$$

Derivando ambos o lados da equação $\dot{T} = \kappa N$, obtemos $\ddot{T} = \dot{\kappa} N + \kappa \dot{N}$. Substituir essas duas relações em (1) fornece

$$0 = \langle \dot{\kappa} N + \kappa \dot{N}, T\rangle + |\kappa N|^2 = \kappa(\langle \dot{N}, T\rangle + \kappa),$$

e portanto $\alpha = \langle \dot{N}, T\rangle = -\kappa$. A segunda equação de Frenet-Serret então fica $\dot{N} = -\kappa T + \tau B$. A terceira equação, que determina $\dot{B}$, é obtida das duas primeiras mais a definição de B: como $B = T \times N$, então

$$\begin{aligned} \dot{B} &= \dot{T} \times N + T \times \dot{N} \\ &= (\kappa N) \times N + T \times (-\kappa T + \tau B) \\ &= -\tau(B \times T) \\ &= -\tau N. \end{aligned}$$

Com isso obtemos as equações de Frenet-Serret:

$$\begin{cases} \dot{T} = \kappa N \\ \dot{N} = -\kappa T + \tau B \\ \dot{B} = -\tau N. \end{cases} \tag{2}$$

O Grupo $SO(3)$

Definimos $SO(3)$ como o conjunto das matrizes $A \in M_3(\mathbb{R})$ que satisfazem $A^t A = \mathrm{I}$ (ou, equivalentemente, $AA^t = \mathrm{I}$) e $\det(A) = 1$. A primeira condição significa que as matrizes de

$SO(3)$ são ortogonais, e portanto são as matrizes de mudança entre as bases ortonormais de $\mathbb{R}^3$. Já a segunda implica que essas mudanças de base não alteram orientação, de modo que $SO(3)$ pode ser visto como o conjunto das matrizes de mudança entre bases ortonormais positivas.

Se $\gamma : [0, L] \to \mathbb{R}^3$ é uma curva PPCA e (T, N, B) é o seu referencial de Frenet-Serret, definimos a curva $F : [0, L] \to SO(3)$ pela condição que $F(s)$ é a matriz de mudança da base canônica de $\mathbb{R}^3$ para $(T(s), N(s), B(s))$, isto é,

$$F = \begin{pmatrix} | & | & | \\ T & N & B \\ | & | & | \end{pmatrix}.$$

Usaremos o termo *referencial de Frene-Serret* para também nos referirmos à curva F.

Teorema 1. *Seja $\mathfrak{so}(3)$ o subespaço vetorial de $M_3(\mathbb{R})$ formado pelas matrizes antissimétricas.*

1. *Seja $F : [0, L] \to SO(3)$ uma curva. Então existe uma curva $\omega : [0, L] \to \mathfrak{so}(3)$ tal que $\dot{F} = F\omega$.*

2. *Dadas $\omega : [0, L] \to \mathfrak{so}(3)$ e $A_0 \in SO(3)$, existe uma única curva $F : [0, L] \to SO(3)$ tal que $F(0) = A_0$ e $\dot{F} = F\omega$.*

Demonstração.

1. Defina $\omega : [0, L] \to M_3(\mathbb{R})$ por $\omega(s) = F(s)^t \dot{F}(s)$. Segue de $FF^t = \mathrm{I}$ que $\dot{F} = F\omega$, de modo que resta apenas provar que $\omega(s)$ é antissimétrica. Para tanto, usamos que $F^tF = \mathrm{I}$:

$$0 = \frac{d}{ds}\mathrm{I} = \frac{d}{ds}F(s)^tF(s) = \dot{F}(s)^tF(s) + F(s)^t\dot{F}(s) = \omega(s)^t + \omega(s).$$

2. A equação $\dot{F} = F\omega$ é uma EDO linear (com coeficientes não constantes), e portanto existe uma única curva $F : [0, L] \to M_3(\mathbb{R})$ que a satisfaz e tal que $F(0) = A_0$. Só falta provar que $F(s) \in SO(3)$ para todo $s \in [0, L]$. Consideremos a curva $G : s \in [0, L] \to M_3(\mathbb{R})$ dada por $G(s) = F(s)F(s)^t$. Por um lado,

$$\begin{aligned} \dot{G}(s) &= \frac{d}{ds}F(s)F(s)^t = \dot{F}(s)F(s)^t + F(s)\dot{F}(s)^t \\ &= F(s)\omega(s)F(s)^t + F(s)\omega(s)^tF(s)^t \\ &= F(s)(\omega(s) + \omega(s)^t)F(s)^t = 0, \end{aligned}$$

isto é, G é constante. Por outro, $G(0) = A_0 A_0^t = \mathrm{I}$ pois $A_0 \in SO(3)$, e portanto $FF^t = \mathrm{I}$. Por fim, $\det F(s) = \pm 1$ uma vez que $F(s)$ é uma matriz ortogonal e o sinal de $\det F(s)$ é o mesmo de $\det F(0) = \det A_0 = 1$ por continuidade. Com isso, $\det F(s) = 1$ e $F : [0, L] \to SO(3)$. □

Tomando F o referencial de Frenet-Serret de γ, escrevamos ω explicitamente

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{em que } a, b, c : [0, L] \to \mathbb{R}.$$

Pela parte 1. do Teorema 1,

$$\begin{pmatrix} | & | & | \\ \dot{T} & \dot{N} & \dot{B} \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & | \\ T & N & B \\ | & | & | \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & | \\ aN + bB & -aT + cB & -bT - cN \\ | & | & | \end{pmatrix},$$

isto é,

$$\begin{cases} \dot{T} = aN + bB \\ \dot{N} = -aT + cB \\ \dot{B} = -bT - cN. \end{cases}$$

Comparando com as equações de Frenet-Serret (2), obtemos que $a = \kappa$, $b = 0$ e $c = \tau$, de modo que

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Teorema 2 (Teorema Fundamental de Curvas)**.** *Sejam $\kappa, \tau : [0, L] \to \mathbb{R}$, $\kappa > 0$. Então, existe $\gamma : [0, L] \to \mathbb{R}^3$ uma curva PPCA com curvatura κ e torção τ. Além disso, se $\tilde{\gamma}$ é outra tal curva, então existe um movimento rígido $R : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, tal que $\tilde{\gamma} = R \circ \gamma$.*

Demonstração. Seja $\omega : [0, L] \to \mathfrak{so}(3)$ dada por (3) e seja $F : [0, L] \to SO(3)$ a curva que satisfaz $\dot{F} = F\omega$ e $F(0) = \mathrm{I}$ (parte 2. do Teorema 1). Para cada $s \in [0, L]$ seja $\alpha(s) = (T(s), N(s), B(s))$ a base de $\mathbb{R}^3$ tal que $[I]^{can}_{\alpha(s)} = F(s)$; é imediato que $\alpha(s)$ é base ortonormal positiva de $\mathbb{R}^3$. Defina $\gamma : [0, L] \to \mathbb{R}^3$ por $\gamma(s) = \int_0^s T(t)dt$. Claramente, $\dot{\gamma} = T$, de modo que γ é PPCA. A igualdade $\dot{F} = F\omega$ implica $\dot{T} = \kappa N$, e disso segue que κ é a curvatura de γ. Já

$B = T \times N$ decorre de $\alpha(s)$ ser base ortonormal positiva de $\mathbb{R}^3$, e portanto $\dot{N} = -\kappa T + \tau B$ (por $\dot{F} = F\omega$) implica que τ é a torção de γ. Isso mostra a primeira parte do Teorema.

Seja $(\tilde{T}, \tilde{N}, \tilde{B})$ o referencial de Frenet-Serret de $\tilde{\gamma}$ com $\tilde{F} : [0, L] \to SO(3)$ a curva associada. Mantemos as notações do parágrafo anterior. Como a curvatura e a torção de γ e $\tilde{\gamma}$ são iguais, então ambas F e $\tilde{F}$ são soluções de $\dot{G} = G\omega$, diferindo apenas nas condições iniciais. A curva $G = \tilde{F}(0)F$ satisfaz $\dot{G} = G\omega$ e $G(0) = \tilde{F}(0)$, e portanto $\tilde{F} = G = \tilde{F}(0)F$.

Seja $R_0 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a tranformação linear cuja matriz com respeito à base canônica é $\tilde{F}(0)$, isto é, $R_0(e_1) = \tilde{T}$, $R_0(e_e) = \tilde{N}$ e $R_0(e_3) = \tilde{B}$. Então, $\tilde{F} = \tilde{F}(0)F$ implica que $\tilde{T} = R_0 \circ T$, $\tilde{N} = R_0 \circ N$ e $\tilde{B} = R_0 \circ B$.

Por fim, defina $R : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ por $R(v) = R_0(v) + \tilde{\gamma}(0)$. Claramente, R é um movimento rígido. Além disso, $(R \circ \gamma)(0) = R(0) = \tilde{\gamma}(0)$ e

$$\frac{d}{ds}(R \circ \gamma)(s) = \frac{d}{ds}\left[R_0(\gamma(s)) + \tilde{\gamma}(0)\right] = R_0(T(s)) = \tilde{T}(s).$$

Portanto, $(R \circ \gamma)(s) = \tilde{\gamma}(0) + \int_0^s \tilde{T}(t)dt = \tilde{\gamma}(s)$. $\square$

Ao construir γ a partir da sua curvatura e torção, a etapa mais complicada é resolver a equação diferencial $\dot{F} = F\omega$. No entanto, caso ω seja constante, então $F(s) = F(0)\exp(s\omega)$, em que exp é a exponencial de matrizes, e o cálculo explícito pode ser feito usando a forma de Jordan de ω (cf. [2]).

O ponto-chave no que fizemos acima é o Teorema 1, que descreve as curvas em $SO(3)$ (um grupo de Lie) em termos de curvas em $\mathfrak{so}(3)$ (a álgebra de Lie de $SO(3)$). Essa é uma técnica poderosa sempre que se tenta estudar um problema geométrico através de simetrias ou referenciais, e é um dos principais temas da Teoria de Lie.

Referências

[1] Carmo, M.P. (2005) *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies.* Coleção Textos Universitários, SBM.

[2] Rossmann, W. (2002) *Lie Groups — An Introduction Through Linear Groups.* Oxford University Press.