DCA0115 – Otimização de Sistemas

Lista de Exercícios

Obs.: As questões (1) e (2) se referem a problemas de otimização com restrições. Sua resolução formal deve ser feita apenas após o estudo das técnicas correspondentes.

1) Para os problemas abaixo, determine os pontos críticos da função *f* indicada, para domínio $\Re^2$. Em seguida, esboce as curvas representativas dos conjuntos C, no plano *x* x *y*. Aplique as condições de otimalidade para o problema irrestrito e localize o ponto assim obtido, no plano definido para cada conjunto C. Partindo desse ponto, minimize sua distância à curva definida por C. Adote um método de busca direcional para esse propósito.

a) $f(x,y) = (x-1)^2 + (y-1)^2$ definida em $C = \{(x,y) \in \Re^2 / 2x^2 - 5xy + 2y^2 = 0\}$

b) $f(x,y) = (x+1)^2 + (y+1)^2$ definida em $C = \{(x,y) / 2x^2 - 5xy + 2y^2 = 0\}$

c) $f(x,y) = x^2 + y^2$ definida em $C = \{(x,y) / x^2 y = 1\}$

d) $f(x,y) = x^2 - y^2$ definida em $C = \{(x,y) / x^2 y^2 - x^2 - y^2 + 1 = 0\}$

2) Seja $S = \{(x,y) \in \Re^2 \mid (x-1)(y-1) = 0\}$ e $f(x,y) = (x-1)^4 + (y-1)^4$.

a) Esboce no plano *x* x *y* o conjunto S e as curvas de nível da função *f* , para *f*(*x*, *y*)= 0, 1, 2;

b) Verifique se há um minimizador de *f* em S.

3) Partindo do ponto $(x_0, y_0) = (-1,1)^T$, calcule o valor mínimo da função:

$$f(x,y) = x^2 - \sin y + 1$$

a) Utilizando o método do gradiente, com passo ótimo, para cada iteração, determinado através de uma aproximação quadrática da função objetivo. Adote $\in = 10^{-2}$ e número máximo de iterações igual a 4.

b) Resolva o mesmo problema utilizando os métodos de Newton e BFGS.

4) Ajustar a função $y = 1 - \sin x$ a um polinômio do 2º grau, para x= [0 π]. Discretize o intervalo com um passo de 0,2π para calcular os valores (exatos) correspondentes de *y*. Como uma medida de exatidão da representação, minimize o erro quadrático da aproximação.

5) Obter as expressões para todas as primeiras e segundas derivadas da função de duas variáveis:

$$f(\mathbf{x}) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$$

Verifique que o minimizador $\mathbf{x^*} = (\mathbf{1,1})^{\mathbf{T}}$ satisfaz **g*=0** e **G*** positiva definida. Mostre que **G(x)** é singular se, somente se, $\mathbf{x}$ satisfizer a condição $x_2 - x_1^2 = 0.005$.

6) Obter as expressões para todas as primeiras e segundas derivadas da função de duas variáveis:

$$f(\mathbf{x}) = x_1^4 + x_1 x_2 + (1 + x_2)^2$$

Avalie essas derivadas em $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ e mostre que **G(0)** não é positiva definida. Verifique que $\mathbf{x^*} = (0.6959, -1.3473)^T$ atende, aproximadamente, às condições de um minimizador local.

7) Encontrar os pontos estacionários da função:

$$f(\mathbf{x}) = 2x_1^3 - 3x_1^2 - 6x_1x_2(x_1 - x_2 - 1)$$

Quais desses pontos são mínimos locais? Quais são máximos locais? Quais não são nem mínimo nem máximo locais?

8) Mostrar que a função $f(\mathbf{x}) = (x_2 - x_1^2)^2 + x_1^5$ tem apenas um ponto estacionário e que é tanto um máximo local, quanto um mínimo local.

9) Encontrar o ponto estacionário da função $f(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2 + 2x_1^3 + x_1^4$, que é o minimizador global.

10) Investigar os pontos estacionários da função

$$f(\mathbf{x}) = x_1^2 x_2^2 - 4x_1^2 x_2 + 4x_1^2 + 2x_1 x_2^2 + x_2^2 - 8x_1 x_2 + 8x_1 - 4x_2$$

11) (a) Esboce o gráfico da função $f(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + 4x_2^2 - 4x_1 - 8x_2$

Deduza $\mathbf{x}^*$ que minimiza f .

(b) Mostre que se o método da máxima descida é iniciado em $\mathbf{x}^{(1)} = (\mathbf{0,0})^{\mathbf{T}}$, não converge para $\mathbf{x}^*$ em um número finito de etapas. Existe algum valor de $\mathbf{x}^{(1)}$ para o qual exista convergência em um número finito de passos?

12) Dada uma função $f(\mathbf{x}) = a \cdot x_1^2 + b \cdot x_1x_2 + c \cdot x_2^2$, aplique as condições de 1ª. e de 2ª. ordem, para estabelecer as relações entre os números reais *a*, *b* e *c* que determinam a existência de mínimo global para *f*.