1. CINEMÁTICA

1.1. Representação de Posição e Orientação:

<u>**Sistemas Referenciais**</u>:

- Para localizar um corpo rígido no espaço tridimensional, um sistema referencial é associado ao mesmo.
- Um referencial associado a um corpo rígido é fixo no mesmo.
- Qualquer ponto do corpo rígido possuirá coordenadas invariantes no seu referencial associado.
- referencial será identificado por uma letra entre chaves. Exemplo: {A}, {i}, etc.
- Os referenciais são definidos por três vetores unitários ortogonais: $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$.

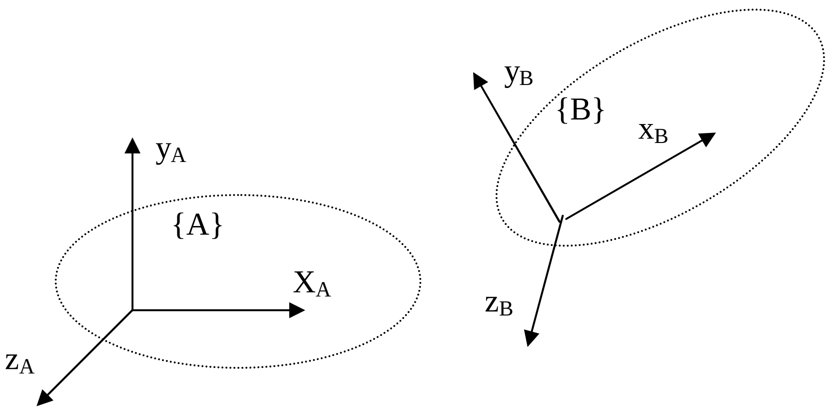

Figura 2.1. Representação da localização de corpos rígidos por meio de referenciais.

<u>**Localização de um Corpo Rígido em relação a um Referencial**</u>:

- A localização de um corpo rígido B em relação a um referencial qualquer {A} é definida pela localização do seu referencial associado {B} em relação a {A}.
- A localização de {B} em relação a {A} é completamente definida especificando:
- a posição de {B} em relação a {A}
- a orientação dos eixos de {B} em relação a os eixos de {A}.

Representação de posição de {B} em relação a {A}:

A posição de {B} em relação a {A} é definida pelo vetor de posição ${}^{A}P_B$ ligando a origem de {A} à origem de {B}, expresso em coordenadas de {A}:

$${}^{A}P_B = [{}^{A}p_{Bx} \quad {}^{A}p_{By} \quad {}^{A}p_{Bz}]^T$$

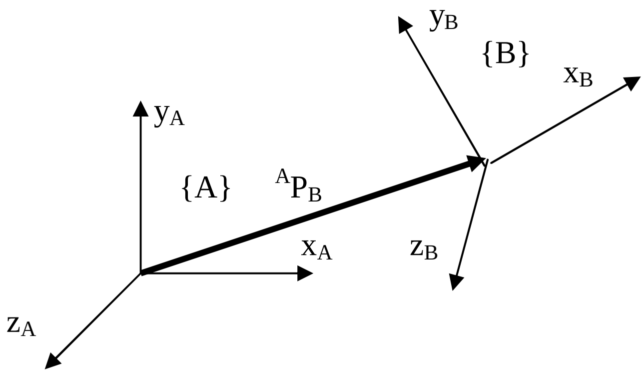

Figura 2.2. Posição de um referencial {B} em relação a um referencial {A}.

Exemplo: considere dois referenciais {A} e {B} com a mesma orientação, com a origem de {B} localizada a 5 unidades ao longo do eixo x_A. Considere um ponto P, expresso em {B} como $^BP = [2 \quad 2 \quad 1]^T$. Determine a posição de {B} em relação a {A} bem como a representação do ponto P em {A}.

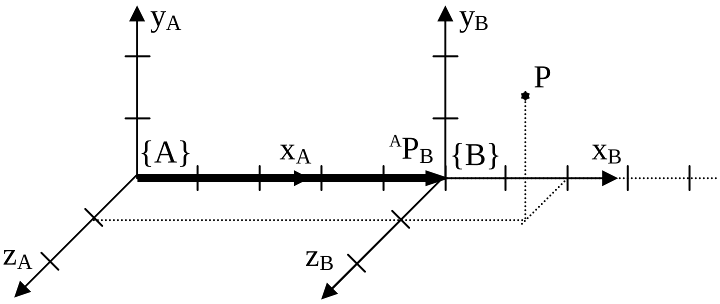

Figura 2.3. Posição em um referencial {B} transladado ao longo do eixo x_A de {A}.

Solução: A origem de {B} está localizada no ponto (5, 0, 0) em coordenadas de {A}, portanto, a posição de {B} em relação a {A} é dada por:

$^AP_B = [5 \quad 0 \quad 0]^T$

Como os dois referenciais possuem a mesma orientação:

$^AP = {}^AP_B + {}^BP = [5 \quad 0 \quad 0]^T + [2 \quad 2 \quad 1]^T = [7 \quad 2 \quad 1]^T$

Representação de orientação de {B} em relação a {A}:

A orientação de {B} em relação a {A} é definida pela matriz de rotação ^AR_B de dimensão 3x3, ortogonal, cujos vetores colunas são os eixos unitários de {B} expressos em coordenadas de {A}:

$^AR_B = [{}^Ax_B \quad {}^Ay_B \quad {}^Az_B]$

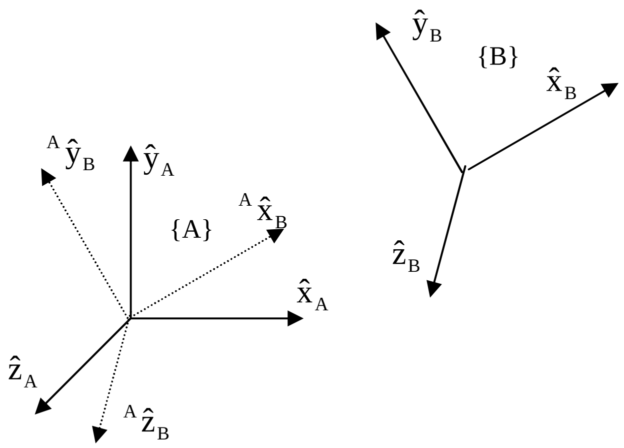

Figura 2.4. Orientação de um referencial {B} em relação a um referencial {A}.

A matriz ${}^AR_B$ é uma representação redundante de orientação, visto que possui nove elementos que satisfazem a seis restrições (os três eixos são unitários e ortogonais):

$({}^Ax_B)^T.{}^Ax_B = 1$ $\quad$ $({}^Ay_B)^T.{}^Ay_B = 1$ $\quad$ $({}^Az_B)^T.{}^Az_B = 1$

$({}^Ax_B)^T.{}^Ay_B = 0$ $\quad$ $({}^Ay_B)^T.{}^Az_B = 0$ $\quad$ $({}^Az_B)^T.{}^Ax_B = 0$

Portanto, a matriz ${}^AR_B$ é ortogonal, ou seja:

$$({}^AR_B)^{-1} = ({}^AR_B)^T$$

Se dois referenciais {A} e {B} possuem a mesma origem, um ponto P é expresso nos referenciais {A} e {B} respectivamente como:

${}^AP = [{}^Ap_x \;\; {}^Ap_y \;\; {}^Ap_z]^T$ $\qquad$ ${}^BP = [{}^Bp_x \;\; {}^Bp_y \;\; {}^Bp_z]^T$

Conhecendo a representação de P em {B}, ${}^BP$, bem como a representação dos eixos de {B} em {A}, é possível encontrar a representação de P em {A}, ${}^AP$:

$${}^AP = [{}^Bx_A{}^T.{}^BP \;\; {}^By_A{}^T.{}^BP \;\; {}^Bz_A{}^T.{}^BP]^T = [{}^Bx_A \;\; {}^By_A \;\; {}^Bz_A]^T.{}^BP \Rightarrow {}^AP = {}^BR_A{}^T.{}^BP = {}^AR_B.{}^BP$$

De forma equivalente, ${}^BP = {}^BR_A.{}^AP$, portanto:

$${}^AP = {}^AR_B.{}^BP = {}^AR_B.{}^BR_A.{}^AP \quad \Rightarrow \quad {}^AR_B.{}^BR_A = I \quad \Rightarrow \quad {}^BR_A = ({}^AR_B)^{-1} = ({}^AR_B)^T$$

Dados três referenciais {A}, {B} e {C} com origens coincidentes, temos:

$${}^AP = {}^AR_B.{}^BP, \quad {}^BP = {}^BR_C.{}^CP, \quad {}^AP = {}^AR_C.{}^CP \quad \Rightarrow \quad {}^AP = {}^AR_B.{}^BR_C.{}^CP \;\Rightarrow\; {}^AR_C = {}^AR_B.{}^BR_C$$

A matriz ${}^AR_B$ pode ser representada então como ${}^AR_B = {}^AR_C.{}^CR_B = ({}^CR_A)^T.{}^CR_B$. Assim:

$${}^AR_B = \begin{bmatrix} ({}^Cx_A)^T.{}^Cx_B & ({}^Cx_A)^T.{}^Cy_B & ({}^Cx_A)^T.{}^Cz_B \\ ({}^Cy_A)^T.{}^Cx_B & ({}^Cy_A)^T.{}^Cy_B & ({}^Cy_A)^T.{}^Cz_B \\ ({}^Cz_A)^T.{}^Cx_B & ({}^Cz_A)^T.{}^Cy_B & ({}^Cz_A)^T.{}^Cz_B \end{bmatrix}$$

Note que cada elemento da matriz é representado pelo produto interno entre um eixo unitário de {A} e um eixo unitário de {B}, sendo portanto igual ao cosseno do ângulo entre eles. Por esta razão, a matriz de rotação ${}^{A}R_{B}$ é também chamada de Matriz de Cossenos Diretores. Os valores dos cossenos diretores são independentes da escolha do referencial {C}.

Exemplo: considere dois referenciais coincidentes, {A} e {B}. Suponha que {B} gira um ângulo θ em torno do eixo ${}^{A}z_{B}$. Encontre a matriz de rotação ${}^{A}R_{B} = R(z,\theta)$:

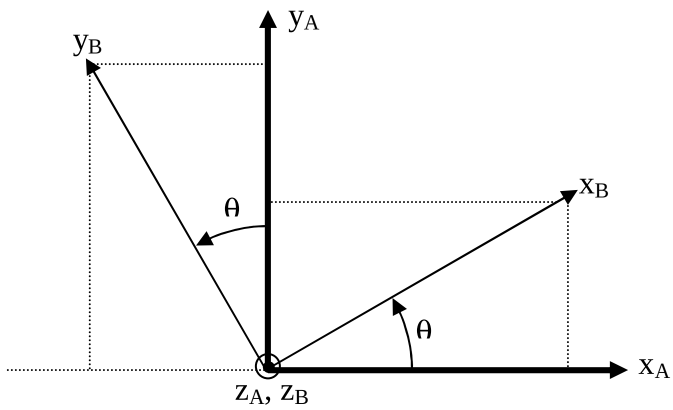

Figura 2.5. Rotação em torno do eixo z_A.

Da figura acima, através de simples relações trigonométricas, temos:

${}^{A}x_{B} = [\cos(\theta)\ \ \text{sen}(\theta)\ \ 0]^T$ ${}^{A}y_{B} = [-\text{sen}(\theta)\ \ \cos(\theta)\ \ 0]^T$ ${}^{A}z_{B} = [0\ \ 0\ \ 1]^T$

$$\Rightarrow\ {}^{A}R_{B} = R(z,\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) & 0 \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De forma análoga, para rotações em torno dos eixos x_A e y_A, temos respectivamente:

$$\Rightarrow\ {}^{A}R_{B} = R(x,\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ 0 & \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\ {}^{A}R_{B} = R(y,\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \text{sen}(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Exemplo: considere dois referenciais coincidentes, {A} e {B}. Suponha que {B} gira um ângulo θ em torno do eixo ${}^{A}z_{B}$. Considere um ponto P expresso em coordenadas de {B}, ${}^{B}P$. Encontre a representação do ponto P em coordenadas de {A}, ${}^{A}P$:

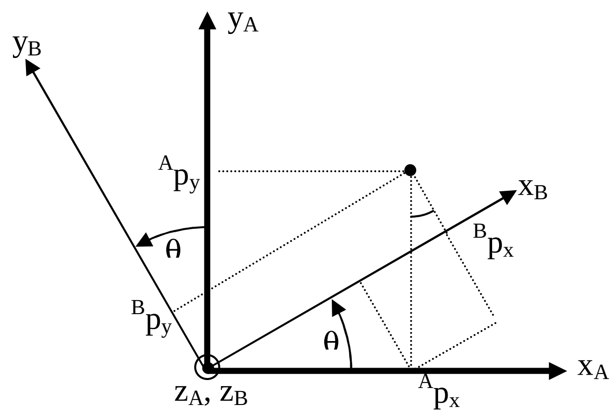

Figura 2.6. Rotação de um ponto em torno do eixo z_A.

Da figura acima, através de relações trigonométricas simples, temos:

$^Bp_x = {}^Ap_x.\cos(\theta) + {}^Ap_y.\mathrm{sen}(\theta)$ $\quad$ $^Bp_y = {}^Ap_y.\cos(\theta) - {}^Ap_x.\mathrm{sen}(\theta)$ $\quad$ $^Bp_z = {}^Ap_z$

Resolvendo para ^Ap_x, ^Ap_y, ^Ap_z:

$^Ap_x = {}^Bp_x.\cos(\theta) - {}^Bp_y.\mathrm{sen}(\theta)$ $\quad$ $^Ap_y = {}^Bp_x.\mathrm{sen}(\theta) + {}^Bp_y.\cos(\theta)$ $\quad$ $^Ap_z = {}^Bp_z$

Que em notação matricial, como era de esperar, corresponde a:

$$\begin{bmatrix} ^Ap_x \\ ^Ap_y \\ ^Ap_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta) & 0 \\ \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} ^Bp_x \\ ^Bp_y \\ ^Bp_z \end{bmatrix} \Rightarrow \quad {}^AP = R(z,\theta).{}^BP$$

<u>Outras representações de orientação</u>:

A matriz de orientação ^AR_B representa a orientação de {B} em relação a {A} de modo redundante, visto que seus nove elementos possuem seis relações de dependência (as colunas de ^AR_B são vetores unitários e perpendiculares entre si). Assim, de forma análoga à especificação de posição, três parâmetros independentes são suficientes para especificar orientação no espaço tridimensional. Existem vários esquemas e convenções utilizados para fazer esta especificação. A seguir, apresentaremos alguns deles.

Ângulos de Euler ZXZ:

Neste esquema, a orientação de {B} em relação a {A}é representada por três ângulos de rotação (ϕ, θ, ψ), exercutados nessa ordem, respectivamente, em torno dos eixos z, x e z de um referencial móvel, inicialmente coincidente com {A} e alinhado com {B} após as três rotações. A matriz de rotação equivalente a (ϕ, θ, ψ) é dada por:

$$R_{\phi\theta\psi} = R(z,\phi).R(x,\theta).R(z,\psi)$$

Definimos a seguinte nomenclatura: $\mathrm{sen}(\theta) = s\theta$, $\cos(\theta) = c\theta$. Assim:

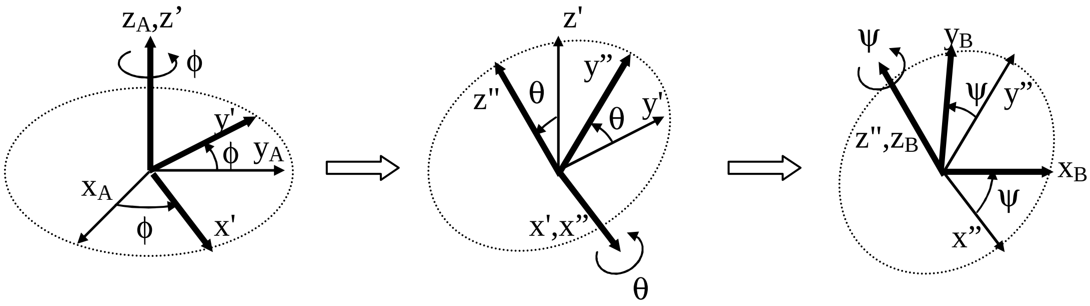

Figura 2.7. Ângulos de Euler ZXZ.

$$R_{\phi\theta\psi} = \begin{bmatrix} c\phi & -s\phi & 0 \\ s\phi & c\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta & -s\theta \\ 0 & s\theta & c\theta \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} c\psi & -s\psi & 0 \\ s\psi & c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow R_{\phi\theta\psi} = \begin{bmatrix} (c\phi.c\psi - s\phi.c\theta.s\psi) & (-c\phi.s\psi - s\phi.c\theta.c\psi) & (s\phi.s\theta) \\ (s\phi.c\psi + c\phi.c\theta.s\psi) & (-s\phi.s\psi + c\phi.c\theta.c\psi) & (-c\phi.s\theta) \\ (s\theta.s\psi) & (s\theta.c\psi) & (c\theta) \end{bmatrix}$$

Conhecendo-se a representação da orientação na forma de uma matriz de rotação $R_{\phi\theta\psi}$, é possível encontrar os ângulos de Euler ZXZ a partir de relações entre os seus elementos. Para evitar ambigüidades, utilizaremos a função arco-tangente definida nos quatro quadrantes, atan2(a, b) = arg(a + j.b) = argumento do número complexo a + j.b, de tal modo que $\theta = \text{atan2}(\text{sen}(\theta), \cos(\theta)) = \text{atan2}(k.\text{sen}(\theta), k.\cos(\theta))$, com $k > 0$. Assim:

$$\theta = \text{atan2}(\pm[R_{31}{}^2+R_{32}{}^2]^{1/2} , R_{33}) \qquad \phi = \text{atan2}(R_{13}/\text{sen}(\theta),-R_{23}/\text{sen}(\theta))$$
$$\psi = \text{atan2}(R_{31},/\text{sen}(\theta),R_{32} /\text{sen}(\theta))$$

Verifica-se que a solução para os ângulos de Euler não é única. Existem dois conjuntos de ângulos possíveis dependendo do sinal da raiz quadrada. Tomando o sinal positivo, o que equivale a limitar θ ao intervalo $0 \leq \theta \leq \pi$, eliminamos esta ambigüidade. Verifica-se também que, para $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$, a solução degenera (ocorre uma divisão por zero), o que resulta em infinitas soluções. Isto ocorre porque as rotações φ e ψ ocorrem em torno do mesmo eixo espacial e o angulo resultante da soma destes ângulos pode ser obtido de infinitos pares (φ,ψ) diferentes. Neste caso, é necessário arbitrar um deles. Assim:

Para $\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi + \psi = \text{atan2}(R_{21},R_{11})$
Para $\theta = \pi \quad \Rightarrow \quad \phi - \psi = \text{atan2}(R_{21},R_{11})$

Ângulos de Euler ZYZ:

De forma análoga ao caso anterior, neste esquema, a orientação de {B} em relação a {A}é representada por três ângulos de rotação (φ, θ, ψ), executados nessa ordem, respectivamente, em torno dos eixos z, y e z de um referencial móvel, inicialmente coincidente com {A} e alinhado com {B} após as três rotações. A matriz de rotação equivalente a (φ, θ, ψ) é dada por:

$R_{\phi\theta\psi} = R(z,\phi).R(x,\theta).R(z,\psi)$

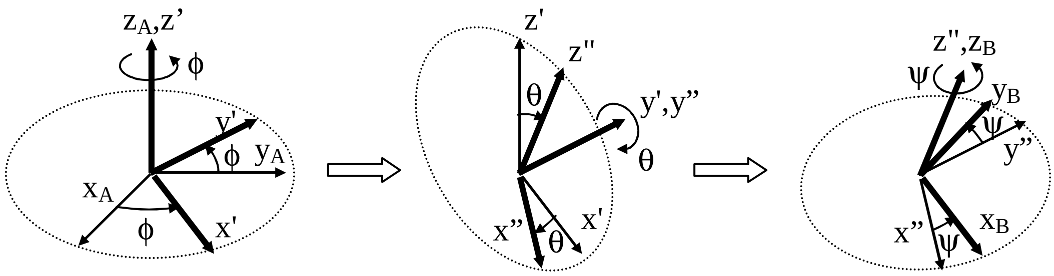

Figura 2.8. Ângulos de Euler ZYZ.

$$R_{\phi\theta\psi} = \begin{bmatrix} c\phi & -s\phi & 0 \\ s\phi & c\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} c\theta & 0 & s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} c\psi & -s\psi & 0 \\ s\psi & c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \; R_{\phi\theta\psi} = \begin{bmatrix} (c\phi.c\theta.c\psi - s\phi.s\psi) & (-c\phi.c\theta.s\psi - s\phi.c\psi) & (c\phi.s\theta) \\ (s\phi.c\theta.c\psi + c\phi.s\psi) & (-s\phi.c\theta.s\psi + c\phi.c\psi) & (s\phi.s\theta) \\ (-s\theta.c\psi) & (s\theta.s\psi) & (c\theta) \end{bmatrix}$$

Usando a mesma metodologia do caso anterior, é possível obter a relação inversa, que expressa os ângulos de Euler ZYZ em função de uma matriz de rotação equivalente:

$$\theta = \text{atan2}(\pm[R_{31}{}^2+R_{32}{}^2]^{1/2} \, , R_{33}) \qquad \phi = \text{atan2}(R_{23}/\text{sen}(\theta),R_{13}/\text{sen}(\theta))$$
$$\psi = \text{atan2}(R_{32}/\text{sen}(\theta),-R_{31}/\text{sen}(\theta))$$

Novamente, dois conjuntos de ângulos de Euler satisfazem a solução. Tomando o sinal positivo da raiz quadrada, o que equivale a limitar θ ao intervalo $0 \leq \theta \leq \pi$, eliminamos esta ambigüidade. Da mesma forma do que no caso anterior, verifica-se também que, para $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$, a solução degenera (ocorre uma divisão por zero), o que resulta em infinitas soluções, as quais são devidas à ocorrência de duas rotações em torno do mesmo eixo. Assim:

Para $\theta = 0$ $\Rightarrow$ $\psi + \phi = \text{atan2}(R_{21},R_{11})$
Para $\theta = \pi$ $\Rightarrow$ $\psi - \phi = \text{atan2}(R_{21},-R_{11})$

Ângulos de Euler ZYX:

De forma análoga aos casos anteriores, neste esquema, a orientação de {B} em relação a {A}é representada por três ângulos de rotação (ϕ, θ, ψ), executados nessa ordem, respectivamente, em torno dos eixos z, y e x de um referencial móvel, inicialmente coincidente com {A} e alinhado com {B} após as três rotações. A matriz de rotação equivalente a (ϕ, θ, ψ) é dada por:

$$R_{\phi\theta\psi} = R(z,\phi).R(x,\theta).R(z,\psi)$$

$$R_{\phi\theta\psi} = \begin{bmatrix} c\phi & -s\phi & 0 \\ s\phi & c\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} c\theta & 0 & s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\psi & -s\psi \\ 0 & s\psi & c\psi \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow R_{\phi\theta\psi} = \begin{bmatrix} (c\phi.c\theta) & (c\phi.s\theta.s\psi - s\phi.c\psi) & (c\phi.s\theta.c\psi + s\phi.s\psi) \\ (s\phi.c\theta) & (s\phi.s\theta.s\psi + c\phi.c\psi) & (s\phi.s\theta.c\psi - c\phi.s\psi) \\ (-s\theta) & (c\theta.s\psi) & (c\theta.c\psi) \end{bmatrix}$$

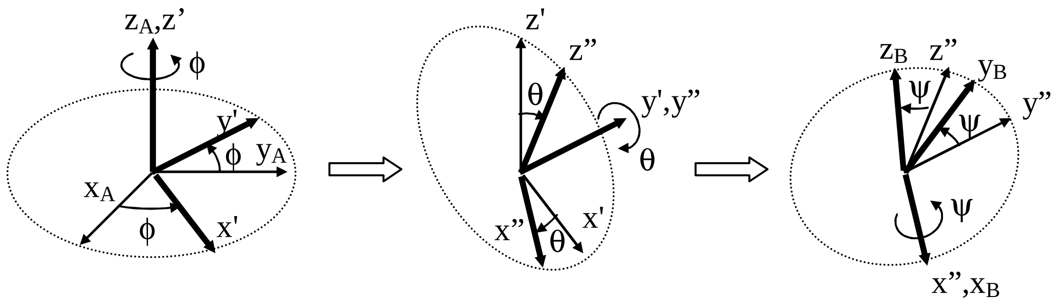

Figura 2.9. Ângulos de Euler ZYX.

Usando a mesma metodologia dos casos anteriores, é possível obter a relação inversa, que expressa os ângulos de Euler ZYX em função de uma matriz de rotação equivalente:

$$\theta = \text{atan2}(-R_{31}, \pm[R_{32}^2 + R_{33}^2]^{1/2}) \qquad \phi = \text{atan2}(R_{21}/\cos(\theta), R_{11}/\cos(\theta))$$
$$\psi = \text{atan2}(R_{32}/\cos(\theta), R_{33}/\cos(\theta))$$

Novamente, dois conjuntos de ângulos de Euler satisfazem a solução. Tomando o sinal positivo da raiz quadrada, o que equivale a limitar θ ao intervalo $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$, eliminamos esta ambigüidade. Da forma semelhante aos casos anteriores, verifica-se também que, para $\theta = -\pi/2$ ou $\theta = \pi/2$, a solução degenera (ocorre uma divisão 0/0), o que resulta em infinitas soluções, as quais são devidas à ocorrência de duas rotações em torno do mesmo eixo. Assim:

Para $\theta = -\pi/2 \quad \Rightarrow \quad \psi + \phi = \text{atan2}(-R_{12}, R_{22})$
Para $\theta = \pi/2 \quad \Rightarrow \quad (\psi - \phi) = \text{atan2}(R_{12}, R_{22})$

Os ângulos de Euler ZYX são também chamados de ângulos de Rolamento, Lançamento e Guinada (*Roll*, *Pitch*, *Yaw*), termos derivados dos movimentos de rotação de naves ou aeronaves em torno dos seus eixos principais.

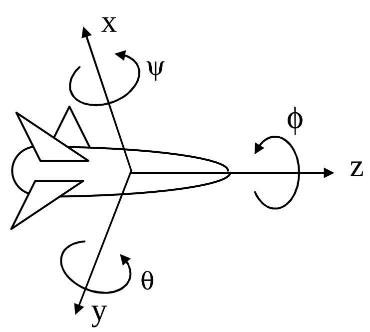

Figura 2.10. Ângulos de Rolamento, Lançamento e Guinada: ϕ, θ, ψ.

Representação equivalente Ângulo/Eixo :

Neste esquema, a orientação de {B} em relação a {A}é de forma redundante por meio de quatro parâmetros: as três componentes (k_x, k_y, k_z) de um eixo unitário direcional k e um ângulo de rotação θ em torno deste eixo. Observação: usando um eixo não unitário, o ângulo de giro θ pode ser codificado no módulo do vetor k, de modo a utilizar apenas três parâmetros (representação não redundante da orientação).
A matriz de rotação equivalente $R_{k\theta}$ pode ser obtida a partir de (k_x, k_y, k_z, θ) usando o seguinte procedimento:

- Alinhar o eixo k com o eixo z do referencial {A} através de duas rotações: giro de um ângulo α em torno do eixo x_A, seguido de um giro de um ângulo $-\beta$ em torno do eixo y_A.
- Girar um ângulo θ em torno do eixo z_A (que agora coincide com o eixo k).
- Retornar o eixo k ao seu alinhamento original revertendo as duas rotações iniciais: um giro de um ângulo β em torno do eixo y_A seguido de um giro de um ângulo α em torno do eixo x_A.

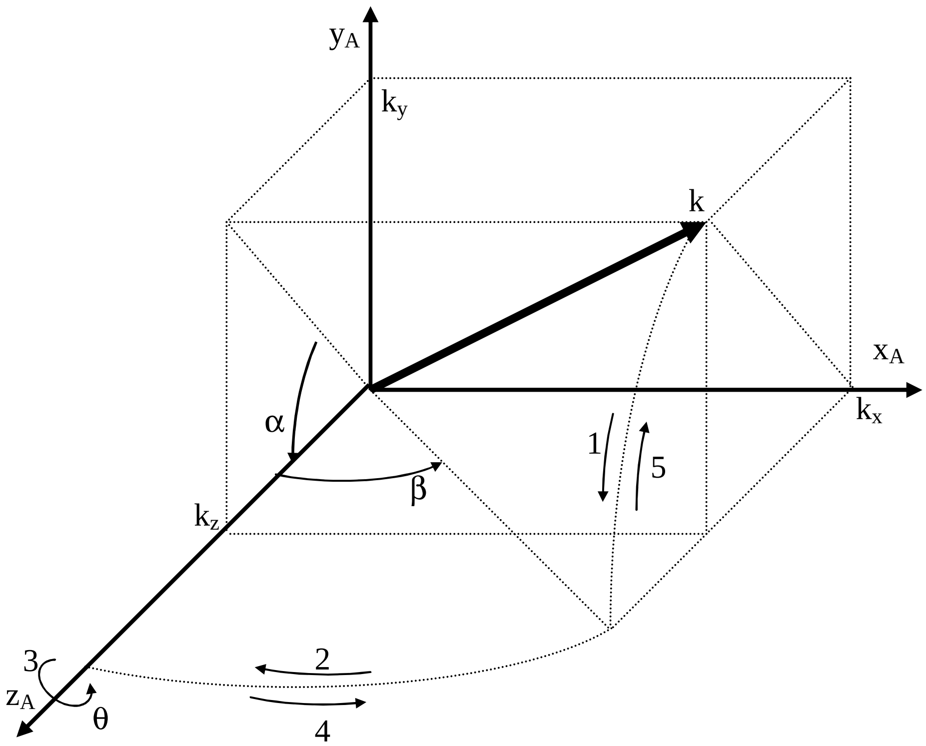

Figura 2.11. Rotação de um ângulo θ em torno de um eixo arbitrário k.

$R_{k\theta} = R(x,-\alpha).R(y,\beta).R(z,\theta).R(y,-\beta).R(x,\alpha)$

$$\Rightarrow R_{k\theta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha & s\alpha \\ 0 & -s\alpha & c\alpha \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} c\beta & 0 & s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} c\theta & -s\theta & 0 \\ c\theta & s\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} c\beta & 0 & -s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ s\beta & 0 & c\beta \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha & -s\alpha \\ 0 & s\alpha & c\alpha \end{bmatrix}$$

Definindo $v\theta = vers(\theta) = 1 - \cos(\theta)$ e substituindo os termos dependentes de α e β por:

$s\alpha = k_y/[k_y^2 + k_z^2]^{1/2}$ $\quad c\alpha = k_z/[k_y^2 + k_z^2]^{1/2}$ $\quad s\beta = k_x$ $\quad c\beta = [k_y^2 + k_z^2]^{1/2}$

$$\Rightarrow R_{k\theta} = \begin{bmatrix} (k_x^2.v\theta+c\theta) & (k_x.k_y.v\theta-k_z.s\theta) & (k_x.k_z.v\theta+k_y.s\theta) \\ (k_x.k_y.v\theta+k_z.s\theta) & (k_y^2.v\theta+c\theta) & (k_y.k_z.v\theta-k_x.s\theta) \\ (k_x.k_z.v\theta-k_y.s\theta) & (k_y.k_z.v\theta+k_x.s\theta) & (k_z^2.v\theta+c\theta) \end{bmatrix}$$

A partir de relações entre elementos da matriz acima, é possível obter a representação ângulo-eixo equivalente à representação $R_{k\theta}$:

$$\theta = \cos^{-1}((R_{11}+R_{22}+R_{33}-1)/2)$$

$$k_x = (R_{32}-R_{23})/(2.s\theta) \qquad k_y = (R_{13}-R_{31})/(2.s\theta) \qquad k_z = (R_{21}-R_{12})/(2.s\theta)$$

A solução acima é valida $0 \le \theta \le \pi$. Para uma dada matriz $R_{k\theta}$, existem duas soluções possíveis: (k, θ) e $(-k, -\theta)$. Verifica-se também que, para $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$, a solução degenera (ocorre uma divisão por zero), o que resulta em infinitas soluções, (o eixo k torna-se indefinido). Assim, para pequenos ângulos, a solução é mal condicionada.

Exemplo: dados os referenciais {A} e {B} mostrados na figura abaixo, obtenha a matriz de rotação ${}^AR_B$ bem como a sua representação em ângulos de Euler ZXZ, ZYZ, ZYX e a representação equivalente ângulo/eixo.

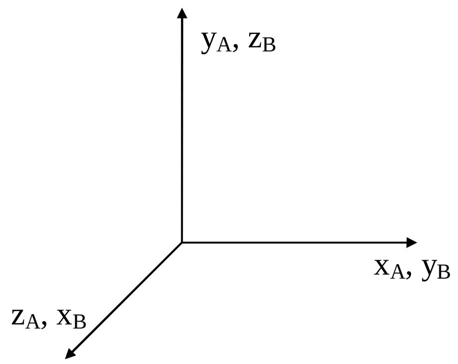

Figura 2.12. Exemplo de orientação relativa entre dois referenciais.

Expressando os eixos de {B} em {A}, obtemos a sua orientação relativa:

$${}^AR_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Os ângulos de Euler ZXZ são dados por:

$$\phi = \text{atan2}(R_{13},-R_{23}) = \text{atan2}(0,-1) = \pi$$
$$\theta = \text{atan2}([R_{31}^2+R_{32}^2]^{1/2} , R_{33}) = \text{atan2}(1,0) = \pi/2$$
$$\psi = \text{atan2}(R_{31},R_{32}) = \pi/2$$

Os ângulos de Euler ZYZ são dados por:

ϕ = atan2(R_{23},R_{13}) = atan2(1,0) = $\pi/2$
θ = atan2($[R_{31}^2+R_{32}^2]^{1/2}$, R_{33}) = atan2(1,0) = $\pi/2$
ψ = atan2(R_{32},$-R_{31}$) = atan2(0,-1) = π

Para o caso dos ângulos de Euler ZYX (*roll*, *pitch*, *yaw*), temos que ϕ é indefinido, pois ϕ = atan2(R_{21},R_{11}) = atan2(0,0). Neste caso, teremos infinitas soluções:

θ = atan2($-R_{31}$,$[R_{32}^2+R_{33}^2]^{1/2}$) atan2(-1,0)= $-\pi/2$
$\psi + \phi$ = atan2($-R_{12}$,R_{22}) = atan2(-1,0) = $-\pi/2$

Para obter uma solução é necessário arbitrar um dos ângulos. Impondo o ângulo $\phi = 0$, temos que $\psi = -\pi/2$.

A representação equivalente Ângulo/Eixo é dada por:

$\theta = \cos^{-1}((R_{11}+R_{22}+R_{33}-1)/2) = \cos^{-1}(-1/2) = 2\pi/3$

$k_x = (R_{32}-R_{23})/(2.s\theta) = -(1/3)^{1/2}$
$k_y = (R_{13}-R_{31})/(2.s\theta) = -(1/3)^{1/2}$
$k_z = (R_{21}-R_{12})/(2.s\theta) = -(1/3)^{1/2}$

1.2. Transformações Homogêneas:

Mapeamentos:

Dados dois referenciais {A} e {B} e um ponto P, conhecendo as coordenadas ^{B}P do mesmo no referencial {B}, as coordenadas ^{A}P do mesmo no referencial {A} podem ser obtidas, desde que se conheça a posição $^{A}P_{B}$ e orientação $^{A}R_{B}$ de {B} em relação a {A}, através de um mapeamento de ^{B}P para ^{A}P. A seguir, define-se {U} como um referencial universal.

Mapeamento de Translação:

Um mapeamento de translação caracteriza-se por mapear um ponto de um referencial {B} para um referencial {A}, onde {A} e {B} possuem origens diferentes mas orientações coincidentes ($^{U}P_{A} \neq {}^{U}P_{B}$, $^{U}R_{A} = {}^{U}R_{B}$). Como {A} e {B} possuem a mesma orientação, as coordenadas de P em {A} podem ser expressas diretamente através de uma soma vetorial:

$^{A}P = {}^{B}P + {}^{A}P_{B}$

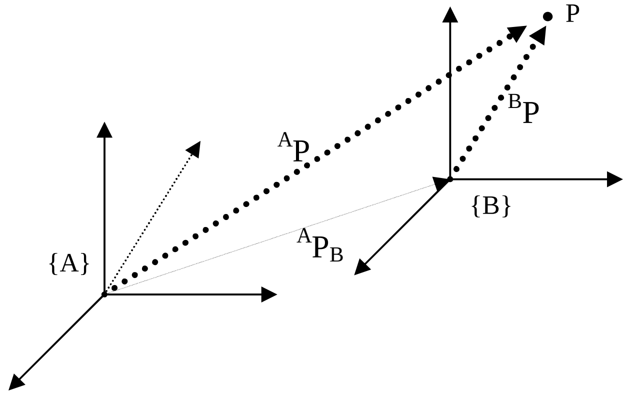

Figura 2.13. Mapeamento de Translação.

Mapeamento de Rotação:

Um mapeamento de rotação caracteriza-se por mapear um ponto de um referencial {B} para um referencial {A}, onde {A} e {B} possuem origens coincidentes mas orientações diferentes ($^{U}P_{A} = {}^{U}P_{B}$, $^{U}R_{A} \neq {}^{U}R_{B}$). Como {A} e {B} possuem a mesma origem, as coordenadas de P em {A} podem ser expressas como a projeção de ^{B}P nos eixos de {A}:

$^{A}p_{x} = {}^{B}x_{A}^{T}.{}^{B}P$ $\qquad$ $^{A}p_{y} = {}^{B}y_{A}^{T}.{}^{B}P$ $\qquad$ $^{A}p_{z} = {}^{B}z_{A}^{T}.{}^{B}P$

ou, matricialmente,

$$^{A}P = [{}^{B}x_{A}^{T}.{}^{B}P \quad {}^{B}y_{A}^{T}.{}^{B}P \quad {}^{B}z_{A}^{T}.{}^{B}P]^{T} = [{}^{B}x_{A} \quad {}^{B}y_{A} \quad {}^{B}z_{A}]^{T}.{}^{B}P \Rightarrow {}^{A}P = {}^{B}R_{A}^{T}.{}^{B}P$$

Mas, como $^{B}R_{A}$ é uma matriz ortogonal, $^{B}R_{A}^{T} = {}^{B}R_{A}^{-1} = {}^{A}R_{B}$, assim, o mapeamento de rotação é definido por:

$$^{A}P = {}^{A}R_{B}.{}^{B}P$$

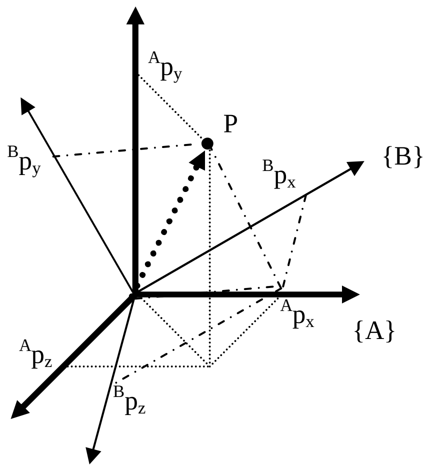

Figura 2.14. Mapeamento de Rotação.

Mapeamento Geral:

Quando os sistemas de referência {A} e {B} diferem tanto em posição como em orientação $({}^{U}P_A \neq {}^{U}P_B,\ {}^{U}R_A \neq {}^{U}R_B)$, a representação de um ponto P em {A} pode ser obtida a partir da sua representação em {B} através do seguinte procedimento:

- Por meio de um mapeamento de rotação, obter a representação ${}^{I}P$ de P em relação a um referencial intermediário {I}, tal que este possua a mesma origem que {B}, mas esteja alinhado com o referencial {A}, $({}^{U}P_I = {}^{U}P_B$ e ${}^{U}R_I = {}^{U}R_A)$.

$${}^{I}P = {}^{I}R_B.{}^{B}P = {}^{A}R_B.{}^{B}P$$

- Representar ${}^{I}P$ em {A} através de um mapeamento de translação:

$${}^{A}P = {}^{I}P + {}^{I}P_B = {}^{I}P + {}^{A}P_B$$

Assim: ${}^{A}P = {}^{A}R_B.{}^{B}P + {}^{A}P_B$

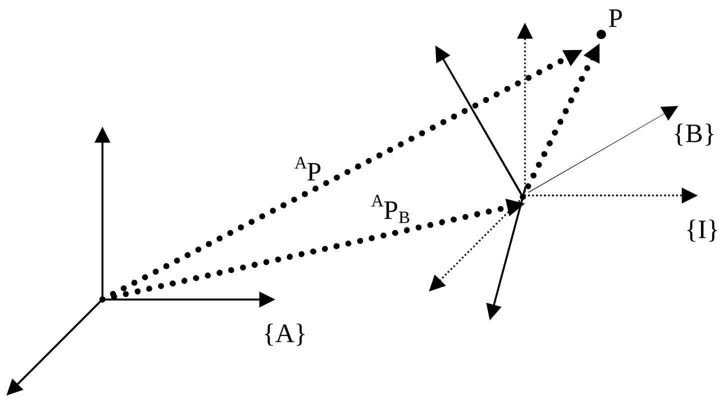

Figura 2.15. Mapeamento de Geral.

<u>Transformação Homogênea</u>:

O mapeamento geral pode ser representado matricialmente da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} {}^{A}P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{A}R_B & {}^{A}P_B \\ 0\ 0\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} {}^{B}P \\ 1 \end{bmatrix}$$

onde: $\begin{bmatrix} {}^{A}R_B & {}^{A}P_B \\ 0\ 0\ 0 & 1 \end{bmatrix} = {}^{A}T_B$

${}^{A}T_B$ é a <u>Matriz de Transformação Homogênea</u> que representa de modo compacto a posição e orientação de {B} em relação a {A}. A linha inferior da equação matricial foi acrescentada de modo a resultar numa matriz ${}^{A}T_B$ quadrada 4x4 para a qual exista matriz inversa. Os vetores de posição 4x1 (último elemento igual a 1) são vetores de coordenadas homogêneas. Doravante, para fins de simplificação, usaremos a nomenclatura ${}^{A}P$ tanto para vetores de posição 3x1, como para vetores em coordenadas homogêneas, sempre que o contexto torne obvio as suas dimensões.

<u>Operadores de Movimento</u>:

O movimento de um referencial em relação a outro pode ser descrito usando transformações homogêneas apropriadas que definam as mudanças de posição e orientação relativas ao se passar de um referencial para outro.

Operadores de Translação:

Dado um vetor ${}^{A}P_{B}$, o <u>Operador de Translação</u> $T({}^{A}P_B/|{}^{A}P_B|, |{}^{A}P_B|)$ aplicado sobre um vetor ${}^{B}P$ o translada uma distância $|{}^{A}P_B|$ ao longo da direção do vetor unitário ${}^{A}P_B/|{}^{A}P_B|$, resultando no vetor transladado ${}^{A}P$ (em coordenadas homogêneas):

$${}^{A}P = T({}^{A}P_B/|{}^{A}P_B|, |{}^{A}P_B|).{}^{B}P$$

onde, sendo I a matriz identidade 3x3:

$$T({}^{A}P_B/|{}^{A}P_B|, |{}^{A}P_B|) = \begin{bmatrix} I & {}^{A}P_B \\ 0\ 0\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Outra maneira de abordar este problema é considerar o ponto ${}^{B}P$ fixo em relação ao referencial {B}, inicialmente coincidente com o referencial {A}. A seguir, deslocar a origem de {B} até a posição ${}^{A}P_B$ relativa a {A} através de um movimento de translação (mantendo a sua orientação paralela à orientação de {A}). Conseqüentemente, o ponto ${}^{B}P$ sofrerá também uma translação em relação ao referencial {A}, visto que ${}^{B}P$ é fixo em {B}. Conhecendo ${}^{B}P$ e o movimento de translação de {B} em relação a {A}, (${}^{A}P_B$), o operador de translação permite obter a representação ${}^{A}P$ do ponto transladado em relação ao referencial {A}. Deste modo, em coordenadas cartesianas, temos:

$${}^{A}P = {}^{B}P + {}^{A}P_B$$

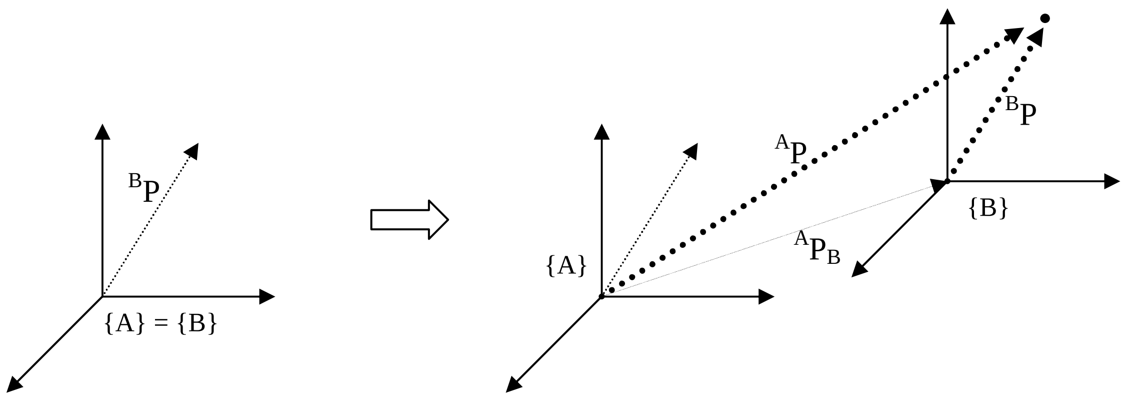

Figura 2.16. Operador de Translação.

Assim, os operadores de translação para um deslocamento linear d ao longo dos eixos x, y e z são dados respectivamente por:

$$T(x,d) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T(y,d) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T(z,d) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Operadores de Rotação:

Dado um vetor unitário k e um ângulo θ, o Operador de Rotação $R(k,\theta)$, quando aplicado sobre um vetor ${}^{B}P$, faz com que este gire o ângulo θ em torno do eixo k, resultando em um vetor rotacionado ${}^{A}P$, em coordenadas homogêneas:

$${}^{A}P = R(k,\theta).{}^{B}P$$

$$R(k,\theta) = \begin{bmatrix} & & & 0 \\ & {}^{A}R_{B} & & 0 \\ & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

onde ${}^{A}R_{B}$ é a matriz de rotação 3x3 equivalente à representação ângulo/eixo (k,θ). Outra maneira de abordar este problema é considerar o ponto ${}^{B}P$ fixo em relação ao referencial {B}, inicialmente coincidente com o referencial {A}. A seguir, girar {B} até a orientação ${}^{A}R_{B}$ relativa a {A} através de um movimento de rotação θ em torno do eixo k, (mantendo a origem de {B} coincidente com a origem de {A}). Conseqüentemente, o ponto ${}^{B}P$ sofrerá também uma rotação em relação ao referencial {A}, visto que ${}^{B}P$ é fixo em {B}. Conhecendo ${}^{B}P$ e o movimento de rotação de {B} em relação a {A}, $({}^{A}P_{B})$, o operador de rotação permite obter a representação ${}^{A}P$ do ponto rotacionado em relação ao referencial {A}. Deste modo, em coordenadas cartesianas, temos:

$${}^{A}P = {}^{A}R_{B}.{}^{B}P$$

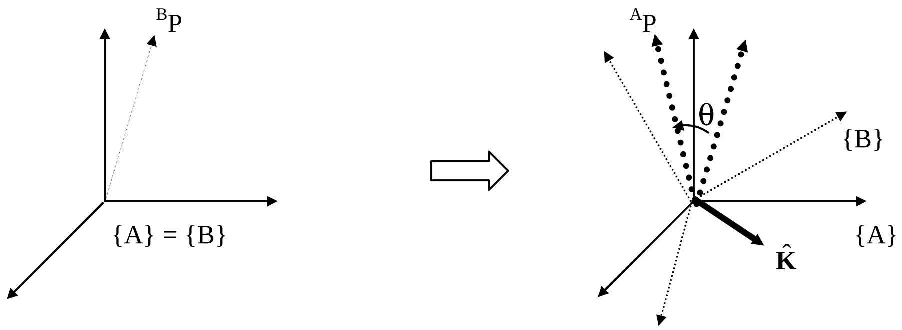

Figura 2.17. Operador de Rotação.

Assim, os operadores de rotação para um deslocamento angular θ em torno dos eixos x, y e z são dados respectivamente por:

$$R(x,\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta & -s\theta & 0 \\ 0 & s\theta & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R(y,\theta) = \begin{bmatrix} c\theta & 0 & s\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s\theta & 0 & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R(z,\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta & -s\theta & 0 \\ 0 & s\theta & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Operadores de Transformação:

Um <u>Operador de Transformação</u> aplicado sobre um vetor ^{B}P resulta num vetor ^{A}P (em coordenadas homogêneas), movimentado para uma localização genérica em relação à sua localização inicial. Esta nova localização pode ser melhor descrita matematicamente como uma combinação de uma operação de rotação de um ângulo θ em torno do vetor unitário k seguida de uma operação de translação por uma distância $|^{A}P_{B}|$ ao longo de um eixo unitário $^{A}P_{B}/|^{A}P_{B}|$.

Assim, em coordenadas cartesianas, a operação de transformação geral pode ser descrita matematicamente como:

$$^{A}P = {}^{A}R_{B}.{}^{B}P + {}^{A}P_{B}$$

Onde $^{A}R_{B}$ representa a matriz de rotação equivalente à rotação de um ângulo θ em torno do vetor k. Então, o operador de transformação geral é dado por:

$${}^{A}T_{B} = T({}^{A}P_{B}/|{}^{A}P_{B}|, |{}^{A}P_{B}|).R(k,\theta) \qquad \Rightarrow {}^{A}T_{B} = \begin{bmatrix} {}^{A}R_{B} & {}^{A}P_{B} \\ 0\ \ 0\ \ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

O operador de transformação ${}^{A}T_{B}$, aplicado a um ponto ${}^{B}P$ (em coordenadas homogêneas), resulta no ponto ${}^{A}P$ (também em coordenadas homogêneas):

$${}^{A}P = {}^{A}T_{B}.{}^{B}P$$

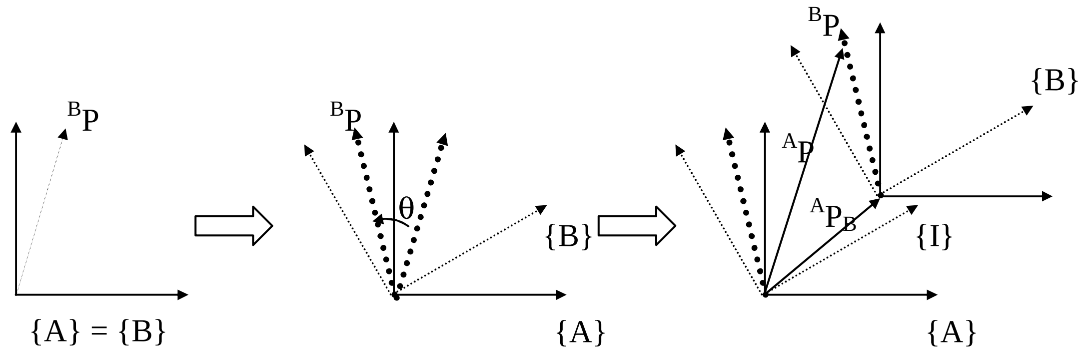

Figura 2.19. Operador de Transformação.

Exemplo: Dado o referencial {B} rotacionado 45° em torno do eixo z_A e transladado a uma distância de duas unidades ao longo do eixo x_A do referencial {A}, determinar as coordenadas do ponto ${}^{B}P = [1 \quad 1 \quad 0]^T$ em relação ao referencial {A}.

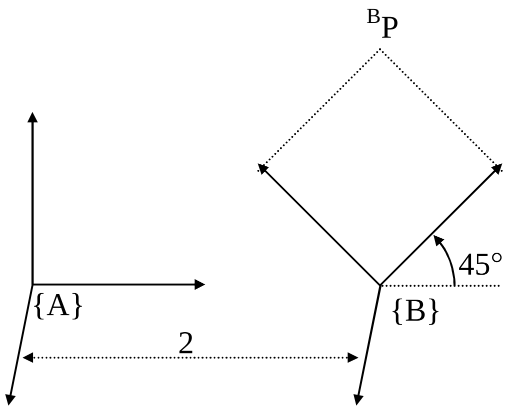

Figura 2.20. Exemplo de operador de transformação.

$${}^{A}P_{B} = [2 \quad 0 \quad 0]^T \qquad {}^{A}R_{B} = \begin{bmatrix} \cos(45^o) & -\mathrm{sen}(45^o) & 0 \\ \mathrm{sen}(45^o) & \cos(45^o) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} {}^{A}P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{A}R_{B} & {}^{A}P_{B} \\ 0\ 0\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} {}^{B}P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1/2)^{1/2} & -(1/2)^{1/2} & 0 & 2 \\ (1/2)^{1/2} & (1/2)^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow {}^{A}P = [2 \quad (1/2)^{1/2} \quad 0]^T$$

__Aritmética de Transformações__:

Transformação Composta:

Problema: conhecendo a localização de {C} em relação a {B} e a localização de {B} em relação a {A}, determinar a localização de {C} em relação a {A}.

Solução: dado um ponto P representado em {A}, {B} e {C},

$^{B}P = {}^{B}T_{C}.{}^{C}P$, $\quad$ $^{A}P = {}^{A}T_{B}.{}^{B}P$, $\quad$ $^{A}P = {}^{A}T_{C}.{}^{C}P$

Então,

$$^{A}P = {}^{A}T_{B}.{}^{B}P = {}^{A}P = {}^{A}T_{B}.({}^{B}T_{C}.{}^{C}P) = ({}^{A}T_{B}.{}^{B}T_{C}).{}^{C}P \quad \Rightarrow \quad {}^{A}T_{C} = {}^{A}T_{B}.{}^{B}T_{C}$$

$$\Rightarrow {}^{A}T_{C} = \begin{bmatrix} ({}^{A}R_{B}.{}^{B}R_{C}) & ({}^{A}P_{B} + {}^{A}R_{B}.{}^{B}P_{C}) \\ 0\ \ 0\ \ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformação Inversa:

Problema: conhecendo a localização de {B} em relação a {A}, determinar a localização de {A} em relação a {B}.

Solução: dado um ponto P representado em {A} e {B},

$$^{A}P = {}^{A}R_{B}.{}^{B}P + {}^{A}P_{B} \quad \Rightarrow \quad {}^{B}P = {}^{A}R_{B}^{-1}.({}^{A}P - {}^{A}P_{B}) = {}^{A}R_{B}^{T}.{}^{A}P - {}^{A}R_{B}^{T}.{}^{A}P_{B}$$

Então, o operador matricial que relaciona ^{A}P a ^{B}P é:

$$^{B}T_{A} = {}^{A}T_{B}^{-1} = \begin{bmatrix} ({}^{A}R_{B}^{T}) & (-{}^{A}R_{B}^{T}.{}^{A}P_{B}) \\ 0\ \ 0\ \ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Equações de Transformação:

As transformações homogêneas permitem descrever a localização relativa de corpos rígidos. Muitos problemas de robótica envolvem a determinação da localização relativa entre dois referenciais a partir do conhecimento da localização relativa destes em relação a um terceiro referencial. Nestes casos, é possível estabelecer uma equação de transformações, a qual pode ser resolvida utilizando as regras aritméticas de composição e/ou inversão de transformações homogêneas. Assim, por exemplo, conhecendo $^{A}T_{B}$ e $^{A}T_{C}$, é possível obter $^{B}T_{C}$. Assim:

$$^{A}T_{C} = {}^{A}T_{B}.{}^{B}T_{C} \quad \Rightarrow \quad {}^{B}T_{A}.{}^{A}T_{C} = {}^{B}T_{A}.{}^{A}T_{B}.{}^{B}T_{C} \quad \Rightarrow \quad ({}^{A}T_{B})^{-1}.{}^{A}T_{C} = ({}^{A}T_{B})^{-1}.{}^{A}T_{B}.{}^{B}T_{C}$$

$$\Rightarrow \quad {}^{B}T_{C} = ({}^{A}T_{B})^{-1}.{}^{A}T_{C}$$

Exemplo: seja a célula de trabalho mostrada na figura abaixo e dados os referenciais {B} (Base), {G} (Garra}, {E} (Estação) e {O} (Objeto}; determinar ${}^{G}T_{O}$ a partir das transformações homogêneas conhecidas ${}^{B}T_{G}$, ${}^{B}T_{E}$, ${}^{E}T_{O}$.

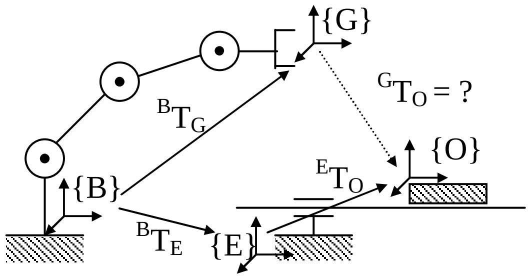

Figura 2.21. Exemplo de equação de transformação.

Solução: $\quad {}^{G}T_{O} = {}^{G}T_{B}.\,{}^{B}T_{O} = {}^{G}T_{B}.({}^{B}T_{E}.{}^{E}T_{O}) = {}^{B}T_{G}^{-1}.({}^{B}T_{E}.{}^{E}T_{O})$

2. CINEMÁTICA DIFERENCIAL

Neste capítulo abordamos a descrição do movimento do robô manipulador sem levar em conta os esforços que o produzem. Um importante problema cinemático associado ao movimento do robô é o mapeamento de velocidades e acelerações entre espaço cartesiano e espaço de juntas. Este problema pode ser descrito matematicamente através de uma matriz, que incorpora importantes informações estruturais sobre o comportamento do robô, a qual é denominada matriz jacobiana, ou simplesmente jacobiano. Um problema análogo é o mapeamento de esforços estáticos (com o manipulador parado). Este problema consiste em determinar o mapeamento entre os esforços a que a garra é submetida quando manipulando objetos (esforços em espaço cartesiano) e os esforços correspondentes exercidos pelos atuadores das juntas. Este problema está diretamente relacionado ao mapeamento definido pelo jacobiano para velocidades.

2.1. Representação de Velocidade de um Corpo Rígido:

<u>Velocidade Linear</u>:

Considere um corpo rígido com um referencial {B} fixo no mesmo. Seja a posição do corpo em relação a um referencial {A} dada pelo vetor de posição ${}^{A}P_{B}$, a velocidade com que o corpo se translada em relação a {A} é um atributo do ponto de origem ${}^{A}P_{B}$. Assim, a velocidade linear de {B} em relação a {A}, ${}^{A}v_{B}$, é definida pela derivada temporal de ${}^{A}P_{B}$:

${}^{A}v_{B} = d({}^{A}P_{B})/dt$

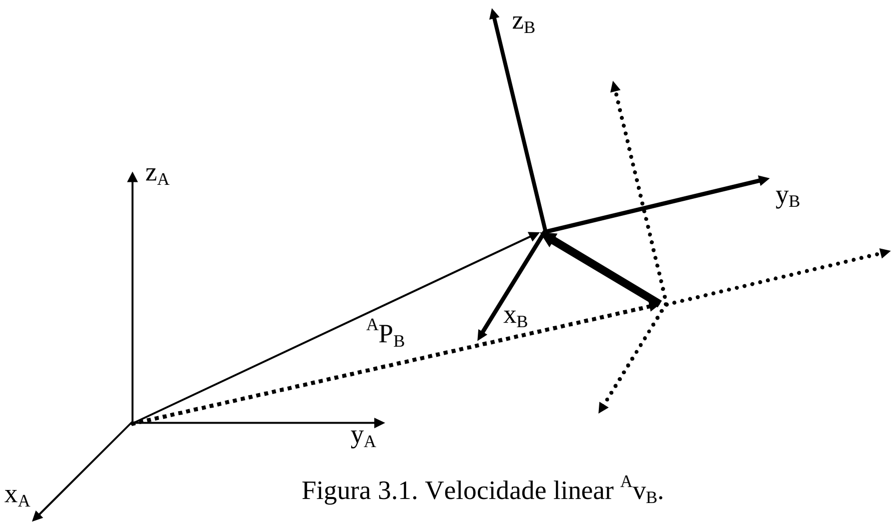

Figura 3.1. Velocidade linear ${}^{A}v_{B}$.

Velocidade Angular:

A velocidade com que um corpo gira em relação a um referencial {A} é um atributo do referencial {B} fixo no mesmo. Para representar a velocidade de rotação de {B} em relação a {A}, duas abordagens são adotadas comumente: a derivada dos ângulos de orientação e o vetor de velocidade angular.

Derivada dos ângulos de orientação:

Seja a de {B} em relação a {A} especificada através de uma tripla de ângulos de Euler ${}^{A}\Phi_{B}$ = [ϕ θ ψ]T. A velocidade de rotação de {B} em relação a {A} pode ser expressa pela derivada de ${}^{A}\Phi_{B}$ em relação ao tempo:

$d{}^{A}\Phi_{B}/dt = [d\phi/dt \;\; d\theta/dt \;\; d\psi/dt]T$

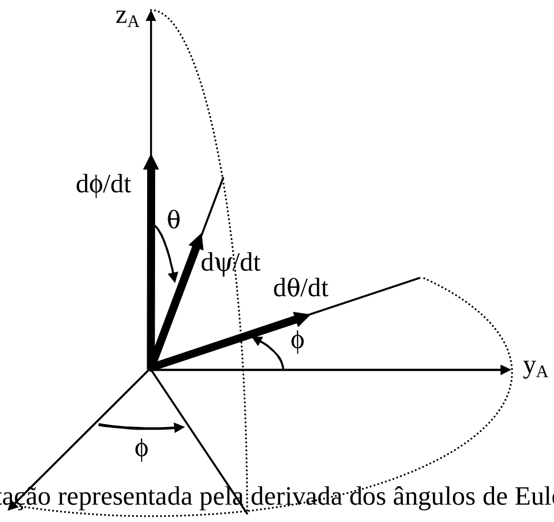

Figura 3.2. Rotação representada pela derivada dos ângulos de Euler ZYZ.

Nesta representação, a integral de $d{}^{A}\Phi_{B}/dt$ corresponde obviamente ao vetor ${}^{A}\Phi_{B}$, que tem um significado físico claro. Por outro lado, $d{}^{A}\Phi_{B}/dt$ é um vetor de componentes de rotação não ortogonais em torno de eixos de um referencial torto, os quais variam de acordo com valor corrente de ${}^{A}\Phi_{B}$.

Vetor de Velocidade Angular:

Seja a de {AB} um referencial paralelo a {B} e com origem coincidente com a origem de {A}. A mudança de orientação de {B} em relação a {A} pode ser descrita como a rotação de {AB} em torno de um vetor direcional passando pela origem de {A}. Uma forma compacta de representar esta rotação é através de um Vetor de Velocidade Angular ${}^A\omega_B$ alinhado com o eixo de rotação e cujo módulo é igual à velocidade de rotação em torno do mesmo. Nesta representação, a integral de ${}^A\omega_B$ não tem um significado físico claro. Por outro lado, ao contrário da representação por derivadas dos ângulos de Euler, ${}^A\omega_B$ é um vetor de componentes ortogonais de rotação em torno dos eixos de {A}.

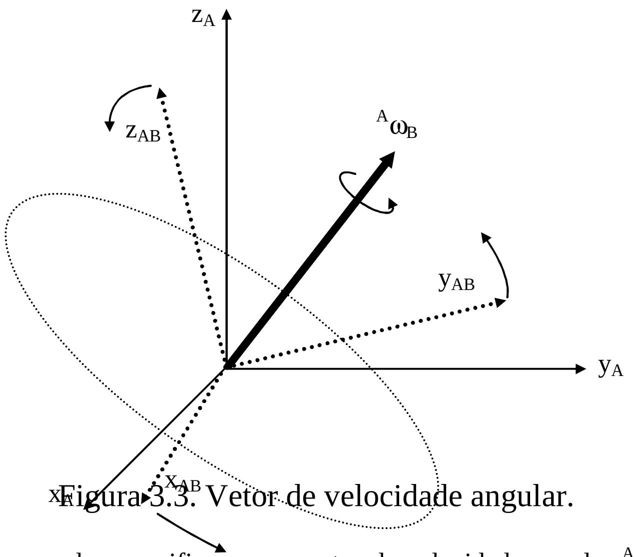

Figura 3.3. Vetor de velocidade angular.

A partir da figura abaixo, pode-se verificar que o vetor de velocidade angular ${}^A\omega_B$ se relaciona com o vetor $d^A\Phi_b/dt$ através da expressão matricial:

$${}^A\omega_B = \begin{bmatrix} 0 & -s\phi & c\phi s\theta \\ 0 & c\phi & s\phi s\theta \\ 1 & 0 & c\theta \end{bmatrix} d^A\Phi_B/dt = R_\Phi . d^A\Phi_B/dt$$

A matriz R_Φ na expressão acima é dependente do valor corrente de ${}^A\Phi_B$. Verifica-se que esta matriz torna-se singular quando sen(θ) =0. Assim, qualquer velocidade rotacional possa ser descrita através de ${}^A\omega_B$ mas, por outro lado, existem velocidades que não podem ser descritas através de $d^A\Phi_B/dt$ quando {B} assume uma orientação para a qual sen(θ) = 0. Orientações com esta propriedade são denominadas singularidades representacionais de ${}^A\Phi_B$.

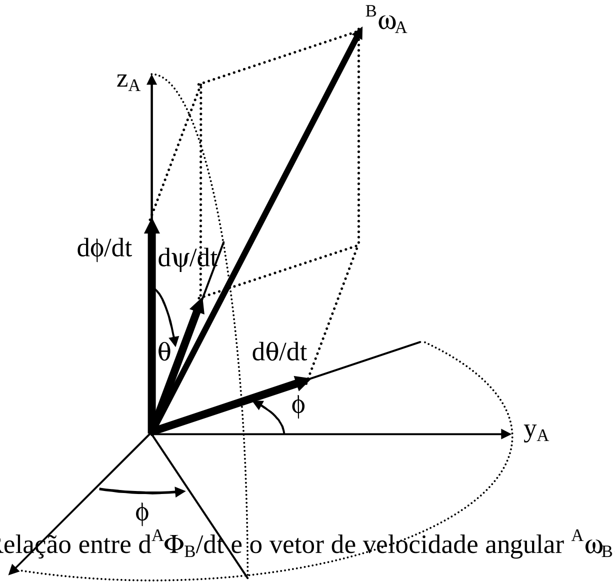

Figura 3.4. Relação entre $d^A\Phi_B/dt$ e o vetor de velocidade angular $^A\omega_B$.

2.2. Velocidades relativas em referenciais móveis:

Velocidade Linear Relativa:

Considere três referenciais móveis {A}, {B} e {C}. Denote ^AP_B a posição de {B} relativa a {A}, $^BP_{CB}$ a posição de {C} relativa a {B} e ^AP_C a posição de {C} relativa a {A}. Esta última pode ser obtida a partir de ^AP_B e ^BP_C através de uma simples soma vetorial, desde que os dois vetores sejam expressos no mesmo sistema de coordenadas. Representando $^BP_{CB}$ em {A} através da matriz de rotação ^AR_B, que especifica a orientação de {B} relativa a {A}, temos:

$$^AP_C = {}^AP_B + {}^AR_B.{}^BP_{CB}$$

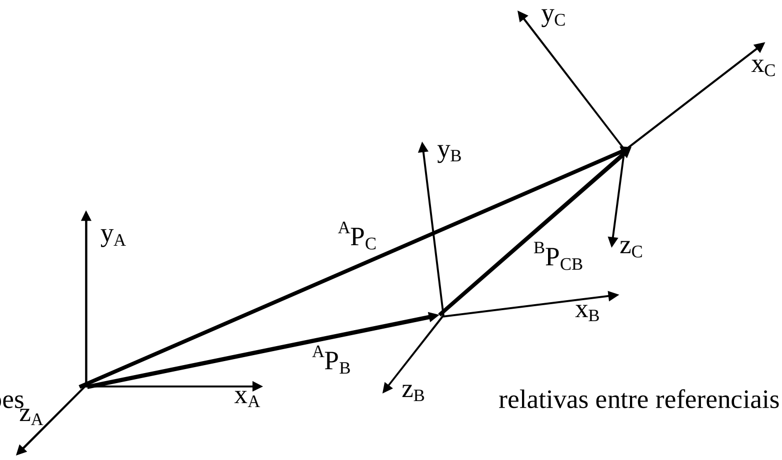

Figura 3.5. Posições relativas entre referenciais móveis.

Derivando a expressão acima podemos obter o vetor velocidade linear de {C} em relação a {A} a partir das velocidades relativas de {B} em relação a {A} e de {C} em relação a {B}:

$d({}^{A}P_{C})/dt = d({}^{A}P_{B})/dt + d({}^{A}R_{B}.{}^{B}P_{CB})/dt$

$\Rightarrow \quad {}^{A}v_{C} = {}^{A}v_{B} + d({}^{A}R_{B}.{}^{B}P_{CB})/dt$

$\Rightarrow \quad {}^{A}v_{C} = {}^{A}v_{B} + d({}^{A}R_{B})/dt.{}^{B}P_{CB} + {}^{A}R_{B}.d({}^{B}P_{CB})/dt$

O segundo termo do lado direito da equação acima, que envolve a derivada e ${}^{A}R_{B}$, é uma componente de velocidade que aparece quando ${}^{A}R_{B}$ varia, ou seja, quando {B} está girando em relação a {A}. Isto gera uma componente de velocidade linear de {C} em relação a {A}, mesmo se {B} não se translade em relação a {A} e {C} não faça o mesmo em relação a {B}. Detalhando o termo $d({}^{A}R_{B})/dt.{}^{B}P_{C}$:

$d({}^{A}R_{B})/dt.{}^{B}P_{C} = [d({}^{A}x_{B})/dt \quad d({}^{A}y_{B})/dt \quad d({}^{A}z_{B})/dt].{}^{B}P_{C}$

Para determinar as derivadas que compõem as colunas de $d({}^{A}R_{B})/dt$, considere o referencial {B} girando em relação a {A} com velocidade angular ${}^{A}\omega_{B}$. Para efeito de simplificação, considere que {A} e {B} possuem a mesma origem (${}^{A}P_{B} = 0$), diferindo apenas na sua orientação (${}^{A}R_{B}$ variando em função de ${}^{A}\omega_{B}$). Dado um ponto ${}^{B}P$ com coordenadas fixas em {B}, a sua representação em {A} ${}^{A}P$ será também função de ${}^{A}\omega_{B}$.

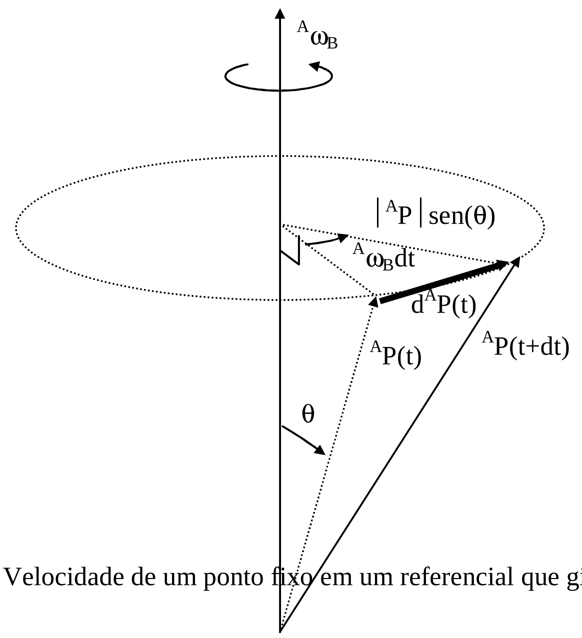

Figura 3.6. Velocidade de um ponto fixo em um referencial que gira.

Da figura acima, podemos observar que o vetor $d(^AP) = {}^AP(t+dt) - {}^AP(t)$ é perpendicular ao vetor $^AP(t)$ e ao vetor $^A\omega_B$. Por outro lado, quando $d(^AP)$ tende a zero, o seu módulo tende ao comprimento do arco $|d(^AP)| = |^A\omega_B.dt|.|^AP|.sen(\theta)$, ou seja: $|d(^AP)/dt| = |^A\omega_B|.|^AP|.sen(\theta)$. Assim, $d(^AP)/dt$ pode ser expresso como o produto vetorial dos vetores ^AP e $^A\omega_B$:

$$d(^AP)/dt = {}^A\omega_B \times {}^AP$$

Desta forma, para o caso particular em que o vetor ^AP for igual aos eixos do referencial {B} expressos em {A}, ^Ax_B, ^Ay_B e ^Az_B, temos:

$$d(^Ax_B)/dt = {}^A\omega_B \times {}^Ax_B \qquad d(^Ay_B)/dt = {}^A\omega_B \times {}^Ay_B \qquad d(^Az_B)/dt = {}^A\omega_B \times {}^Az_B$$

Assim:

$$d(^AR_B)/dt.{}^BP_{CB} = [d(^Ax_B)/dt \;\; d(^Ay_B)/dt \;\; d(^Az_B)/dt].{}^BP_{CB} = [{}^A\omega_B \times {}^Ax_B \;\; {}^A\omega_B \times {}^Ay \;\; {}^A\omega_B \times {}^Az_B].{}^BP_{CB}$$

$$\Rightarrow d(^AR_B)/dt.{}^BP_{CB} = {}^A\omega_B \times [{}^Ax_B \quad {}^Ay_B \quad {}^Az_B].{}^BP_{CB} = {}^A\omega_B \times ({}^AR_B.{}^BP_{CB})$$

Desta forma, a velocidade linear relativa de {C} em relação a {A} pode ser expressa como:

$$^Av_C = {}^Av_B + {}^A\omega_B \times ({}^AR_B.{}^BP_{CB}) + {}^AR_B.d({}^BP_{CB})/dt$$

Velocidade Angular Relativa:

De forma análoga ao caso linear, denote $^A\omega_B$ a velocidade angular de {B} relativa a {A}, $^B\omega_{CB}$ a velocidade angular de {C} relativa a {B} e $^A\omega_C$ a velocidade angular de {C} relativa a {A}. Esta última pode ser obtida a partir de $^A\omega_B$ e $^B\omega_{CB}$ através de uma simples soma vetorial, desde que os dois vetores sejam expressos no mesmo sistema de coordenadas. Representando $^B\omega_{CB}$ em {A} através da matriz de rotação ^AR_B, que especifica a orientação de {B} relativa a {A}, temos:

$$^A\omega_C = {}^A\omega_B + {}^AR_B.{}^B\omega_{CB}$$

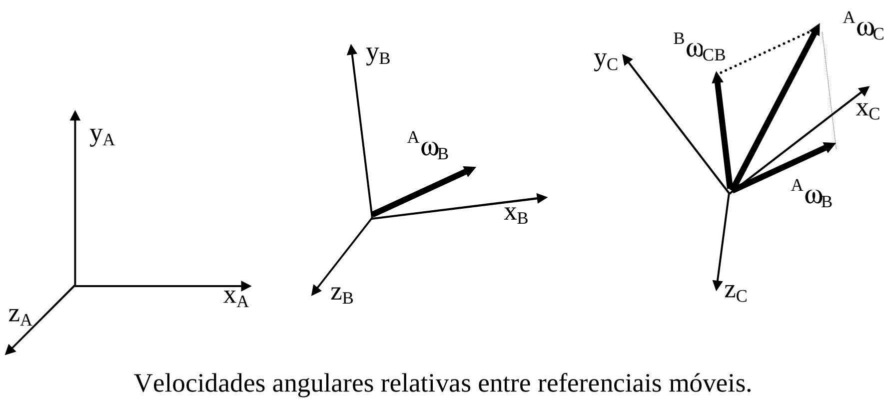

Figura 3.7. Velocidades angulares relativas entre referenciais móveis.

2.3. Representação de Aceleração de um Corpo Rígido:

Aceleração Linear:

Definimos o vetor de aceleração linear ${}^{A}v_{B}'$ de um referencial corpo rígido B relativa a um referencial {A}como a derivada temporal do vetor de velocidade linear ${}^{A}v_{B}$ de um referencial{B} relativa a {A}, onde {B} é fixo no corpo B:

$${}^{A}v_{B}' = d({}^{A}v_{B})/dt = [d({}^{A}v_{Bx})/dt \quad d({}^{A}v_{By})/dt \quad d({}^{A}v_{Bz})/dt]^{T}$$

Aceleração Angular:

Definimos o vetor de aceleração angular ${}^{A}\omega_{B}'$ de um corpo rígido B relativa a um referencial {A}como a derivada temporal do vetor de velocidade angular ${}^{A}\omega_{B}$ de um referencial {B} relativa a {A}, onde {B} é fixo no corpo:

$${}^{A}\omega_{B}' = d({}^{A}\omega_{B})/dt = [d({}^{A}\omega_{Bx})/dt \quad d({}^{A}\omega_{By})/dt \quad d({}^{A}\omega_{Bz})/dt]^{T}$$

2.4. Acelerações relativas em referenciais móveis:

Aceleração linear relativa:

Considere três referenciais móveis {A}, {B} e {C}. Denote ${}^{A}v_{C}'$ a aceleração linear de {C} relativa a {A}. Esta pode ser obtida derivando a expressão correspondente da velocidade linear ${}^{A}v_{C}$, função de ${}^{A}v_{B}$, ${}^{A}\omega_{B}$ e $d^{B}P_{CB}/dt$:

$${}^{A}v_{C}' = d^{A}v_{C}/dt = d[{}^{A}v_{B} + {}^{A}\omega_{B}\times({}^{A}R_{B}.{}^{B}P_{CB}) + {}^{A}R_{B}.d({}^{B}P_{CB})/dt]/dt$$

$$\Rightarrow {}^{A}v_{C}' = d^{A}v_{B}/dt + (d^{A}\omega_{B}/dt)\times({}^{A}R_{B}.{}^{B}P_{CB}) + {}^{A}\omega_{B}\times d({}^{A}R_{B}.{}^{B}P_{CB})/dt + d({}^{A}R_{B}.d({}^{B}P_{CB})/dt)/dt$$

$$\Rightarrow {}^{A}v_{C}' = {}^{A}v_{B}' + {}^{A}\omega_{B}'\times({}^{A}R_{B}.{}^{B}P_{CB}) + {}^{A}\omega_{B}\times(d^{A}R_{B}/dt).{}^{B}P_{CB} + {}^{A}\omega_{B}\times{}^{A}R_{B}.(d^{B}P_{CB}/dt) +$$
$$+ (d^{A}R_{B}/dt).d({}^{B}P_{CB})/dt + {}^{A}R_{B}.d^{2}({}^{B}P_{CB})/dt^{2}$$

Usando a identidade derivada anteriormente para a derivada de uma matriz de rotação ${}^{A}R_{B}$ vezes um vetor ${}^{B}V$: $d({}^{A}R_{B})/dt.{}^{B}V = {}^{A}\omega_{B}\times({}^{A}R_{B}.{}^{B}V)$, temos:

$${}^{A}v_{C}' = {}^{A}v_{B}' + {}^{A}R_{B}.d^{2}({}^{B}P_{CB})/dt^{2} + {}^{A}\omega_{B}'\times({}^{A}R_{B}.{}^{B}P_{CB}) + {}^{A}\omega_{B}\times({}^{A}\omega_{B}\times{}^{A}R_{B}.{}^{B}P_{CB}) +$$
$$+ 2.({}^{A}\omega_{B}\times{}^{A}R_{B}.d({}^{B}P_{CB})/dt)$$

Os dois primeiros termos do lado direito representam a soma vetorial das acelerações lineares de {B} e {C} expressas em {A}. O terceiro termo é uma componente de aceleração linear devido à aceleração angular de {B} e a que {C} está a uma distância ${}^{B}P_{C}$ de {B}. Os dois últimos termos representam componentes de aceleração linear coriolis (produtos de velocidades) e centrífuga (velocidades ao quadrado).

Aceleração angular relativa:

Considere três referenciais móveis {A}, {B} e {C}. Denote ${}^{A}\omega_{C}'$ a aceleração linear de {C} relativa a {A}. Esta pode ser obtida derivando a expressão correspondente da velocidade linear ${}^{A}\omega_{C}$, função de ${}^{A}\omega_{B}$, e ${}^{B}\omega_{CB}$:

$${}^{A}\omega_{C}' = d{}^{A}\omega_{C}/dt = d[{}^{A}\omega_{B} + {}^{A}R_{B}.{}^{B}\omega_{CB}]/dt = d{}^{A}\omega_{B}/dt + d({}^{A}R_{B}.{}^{B}\omega_{CB})/dt$$

$$\Rightarrow {}^{A}\omega_{C}' = {}^{A}\omega_{B}' + (d{}^{A}R_{B}/dt).{}^{B}\omega_{CB} + {}^{A}R_{B}.d{}^{B}\omega_{CB}/dt$$

Usando a identidade derivada anteriormente para a derivada de uma matriz de rotação ${}^{A}R_{B}$ vezes um vetor ${}^{B}V$: $d({}^{A}R_{B})/dt.{}^{B}V = {}^{A}\omega_{B}\times({}^{A}R_{B}.{}^{B}V)$, temos:

$${}^{A}\omega_{C}' = {}^{A}\omega_{B}' + {}^{A}R_{B}.d{}^{B}\omega_{CB}/dt + {}^{A}\omega_{B}\times {}^{A}R_{B}.{}^{B}\omega_{CB}$$

Os dois primeiros termos do lado direito representam a soma vetorial das acelerações angulares de {B} e {C} expressas em {A}. O último termo representa componentes de aceleração angular coriolis (produtos de velocidades) e centrífuga (velocidades ao quadrado).