5. O Problema do Transporte

5.1. Introdução

Este problema tem por objetivo a minimização do custo total do transporte necessário ao abastecimento de *n* centros consumidores, a partir de *m* centros fornecedores.

Considerando :

a_i : quantidade disponível no fornecedor i, $i = 1,...,m.$

b_j : quantidade necessária no centro consumidor *j*, $j = 1,...,n$

x_{ij} : quantidade a transportar do centro fornecedor *i*, para o centro consumidor *j*;

c_{ij} : custo do transporte de uma unidade da carga, da origem *i* (centro fornecedor) para o destino *j* (centro consumidor);

Pode-se formular o problema de otimização da seguinte forma:

$$min\ Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$s.a. \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \\ x_{ij} \geq 0, \quad i = 1,...,m;\ j = 1,...,n \end{cases}$$

O problema do transporte apresenta, portanto, *m* restrições de oferta e *n* restrições de demanda, totalizando *m*+*n* restrições de igualdade. O número total de icógnitas x_{ij} é *m* x *n*. Uma primeira conseqüência da definição do problema pode ser observada ao se somar as *m* restrições de oferta, como também as *n* restrições de demanda.

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} a_i$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Comparando essas duas equações, conclui-se que a oferta total deve igualar a demanda total, i.e. :

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

5.2. O algoritmo do transporte

Com o objetivo de facilitar o desenvolvimento do algoritmo, apresenta-se o problema de forma simplificada, através dos quadros abaixo :

Quadro de soluções

Destinos / Origens	*1*	…	*n*	Oferta das origens
1	x_{11}	…	x_{1n}	a_1
...	...		...	...
m	x_{m1}	…	x_{mn}	a_m
Demandas dos destinos	b_1	…	b_n	

Quadro de Custos

Destinos / Origens	*1*	…	*n*	Ofertas
1	c_{11}	…	c_{1n}	a_1
...	...		...	...
m	c_{m1}	…	c_{mn}	a_m
Demandas	b_1	…	b_n	

5.2.1. Exemplos de modelos

5.2.1.1. Uma firma construtora precisa transportar postes de concreto, que se encontram armazenados em dois almoxarifados A e B, para atender às necessidades das obras I, II, e III. Sabe-se que:

a) Os almoxarifados A e B dispõem de 50 e 70 postes, respectivamente.
b) As obras I, II e III necessitam de 20, 40 e 60 postes, respectivamente.

c) O quadro de custos é o seguinte:

Destinos / Origens	I	II	III	Ofertas
A	20	15	10	50
B	12	8	16	70
Demandas	20	40	60	120 / 120

Pode-se, portanto, formular o problema como segue:

$$\min Z = 20x_{AI} + 15x_{AII} + 10x_{AIII} + 12x_{BI} + 8x_{BII} + 16x_{BIII}$$

$$s.a.\begin{cases} x_{AI} + x_{AII} + x_{AIII} = 50 \\ x_{BI} + x_{BII} + x_{BIII} = 70 \\ x_{AI} + x_{BI} = 20 \\ x_{AII} + x_{BII} = 40 \\ x_{AIII} + x_{BIII} = 60 \end{cases}$$

$$x_{AI}, x_{AII}, x_{AIII}, x_{BI}, x_{BII}, x_{BIII} \geq 0$$

Se, por exemplo, não houver estrada ligando o almoxarifado A ao canteiro da obra III, a variável x_{AIII} deve resultar igual a zero. A fim de garantir esse resultado, assume-se o custo c_{AIII} = M, muito maior que as outras grandezas envolvidas no problema.

5.2.1.2. Oferta maior que demanda

Supondo que o total de postes armazenados no almoxarifado A é 80, em vez de 50, tem-se então um excesso em oferta, igual a 30 postes. A fim de equilibrar o modelo, admite-se uma obra fictícia IV, cuja demanda é de 30 postes. Isso corresponde à restrição de demanda adicional:

$$x_{AIV} + x_{BIV} = 30$$

Além disso, as restrições de oferta devem ser alteradas para:

$$x_{AI} + x_{AII} + x_{AIII} + x_{AIV} = 80$$
$$x_{BI} + x_{BII} + x_{BIII} + x_{BIV} = 70$$

Os custos c_{AIV} e c_{BIV} devem ser considerados iguais a zero, uma vez que os 30 postes excedentes devem permanecer nos almoxarifados.

5.2.1.3. Oferta menor que demanda

Admitindo que a quantidade total de postes do almoxarifado A é de 30, em vez de 50, tem-se um déficit de 20 postes. O modelo pode ser equilibrado com a introdução de um almoxarifado fictício C, com capacidade de 20 postes, correspondendo à restrição adicional de oferta:

$$x_{CI} + x_{CII} + x_{CIII} = 20$$

Além disso, as restrições de demanda tornam-se:

$$\begin{aligned} x_{AI} + x_{BI} + x_{CI} &= 20 \\ x_{AII} + x_{BII} + x_{CII} &= 40 \\ x_{AIII} + x_{BIII} + x_{CIII} &= 60 \end{aligned}$$

Uma vez que os quantitativos correspondentes ao almoxarifado C não serão transportados, seus custos unitários são todos considerados nulos, não influindo na solução.

5.2.2. Determinação de uma solução inicial

5.2.2.1. Rank do sistema - Teorema

“Qualquer equação do sistema, formado pelo conjunto de restrições de igualdade do modelo do problema do transporte, pode ser obtida por uma combinação linear das equações restantes”.

Demonstração :

Seja a k-ésima equação de oferta :

$$\sum_{j=1}^{n} x_{kj} = a_k$$

Somando as demais (*m-1*) equações de oferta, tem-se:

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{m} a_i$$

ou ainda:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} - \sum_{j=1}^{n} x_{kj} = \sum_{i=1}^{m} a_i - a_k \qquad (*)$$

Somando ainda as *n* equações de demanda, tem-se:

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b_j \text{ ou}$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{i=1}^{m} a_i \text{ (**)}$$

Considerando a combinação linear resultante da subtração, membro a membro, das equações (**) e (*), fazendo (*)-(**), obtém-se:

$$-\sum_{j=1}^{n} x_{kj} = -a_k$$

ficando portanto demonstrado o teorema. Como conseqüência, o rank do sistema é $(m+n-1)$ e qualquer base deve possui $(m+n-1)$ variáveis.

5.2.2.2. Regra do Noroeste

O quadro de soluções para o problema apresentado em 5.2.1.1. é o seguinte:

Destinos / Origens	I	II	III	Oferta
A	x_{AI}	x_{AII}	x_{AIII}	50
B	x_{BI}	x_{BII}	x_{BIII}	70
Demanda	20	40	60	

O número de variáveis básicas é $n+m-1=4$. Dentre as seis variáveis do problema, quatro devem ser escolhidas para formar a base inicial. Seja inicialmente o conjunto $\{x_{AII}, x_{AIII}, x_{BII}, x_{BIII}\}$ candidato à base.

Assim, $x_{AI} = 0$ e $x_{BI} = 0$. Portanto, o sistema de equações reduz-se a:

$$\begin{aligned} x_{AII} + x_{AIII} &= 50 \\ x_{BII} + x_{BIII} &= 70 \\ x_{AII} + x_{BII} &= 40 \\ x_{AIII} + x_{BIII} &= 60 \end{aligned} \qquad (\Delta)$$

cuja matriz dos coeficientes é:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

É fácil observar que qualquer coluna de A pode ser obtida como uma combinação linear das demais, como p.ex.:

$$A_1 = A_2 + A_3 - A_4$$

Portanto, A_1, A_2, A_3 e A_4 não formam uma base A e qualquer solução do sistema (Δ) não se constitui em solução básica.

Pode-se observar que a dependência linear entre as colunas de A acontece devido ao fato de as variáveis básicas terem sido escolhidas, formando um ciclo fechado no quadro de soluções. Se em vez de x_{AII} fosse escolhida a variável x_{AI}, para pertencer ao conjunto básico, resultaria no sistema:

$$x_{AI} + x_{AIII} = 50$$
$$x_{BII} + x_{BIII} = 70$$
$$x_{AI} = 20$$
$$x_{BII} = 40$$
$$x_{AIII} + x_{BIII} = 60$$

Nesse caso, cinco equações puderam ser formadas com as possíveis variáveis básicas, mas, de acordo com o teorema do item 5.2.2.1., uma dessas equações pode ser desprezada. Com efeito:

$$L_5 = L_1 + L_2 - L_3 - L_4$$

Desprezando então a última equação, a matriz do sistema fica:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

cujo determinante é

$$|A| = 1.(-1)^{4+3}.\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)(0+1+0-0-0-0) = -1$$

Portanto o $rank(A) = 4$ e o conjunto-solução formado por { x_{AI}, x_{AIII}, x_{BII}, x_{BIII} } é um conjutno básico, i.e., a solução $x_{AI} = 20$, $x_{AIII} = 30$, $x_{BII} = 40$, $x_{BIII} = 30$ é uma solução básica compatível.

REGRA:

A fim de se evitar a formação de ciclos fechados no processo de escolha da provável base inicial, adota-se uma regra de solução para o sistema de restrições, conhecida como "Regra do Noroeste", que consiste dos seguintes passos :

a) Preencher as células do quadro de soluções, iniciando pela célula superior esquerda, colocando nessa célula a maior quantidade permitida pela oferta e pela demanda correspondentes.
b) Repita o procedimento para a célula imediatamente à direita, enquanto houver excedente de oferta disponível.
c) Acabada a oferta, siga para a célula imediatamente abaixo e repita os passos (a) e (b).
d) O processo termina ao se atingir a célula inferior direita.

Exemplo : Aplicando-se essa regra ao problema do item 5.2.1.1, tem-se:

Destino Origens	I	II	III	Oferta
A B	20	30 10	 60	50 70
Demanda	20	40	60	

A solução básica inicial, de acordo com essa regra, seria $x_{AI} = 20$, $x_{AII} = 30$, $x_{BII} = 10$, $x_{BIII} = 60$.

5.2.2.3. Processo do Custo Mínimo

A regra do Noroeste encontra uma solução básica inicial, sem obedecer a qualquer regra de otimalidade. O processo do custo mínimo leva à obtenção de uma solução básica inicial que, em geral, é melhor do que aquela encontrada pela regra do Noroeste, tendo em vista que se baseia no quadro de custos, conforme os passos a seguir:

a) Identificar no quadro de custos a célula com o menor valor de c_{ij} e colocar na célula correspondente do quadro de soluções o maior valor permitido pelas ofertas e demandas correspondentes.
b) Atualizar os valores de oferta e demanda correspondentes e retornar ao passo anterior, até que sejam "zeradas" todas as ofertas e todas as demandas.

Nesse processo, deve-se ainda evitar células que, apesar do custo mínimo, apresentem oferta ou demanda correspondentes nulas, ou que formem um ciclo fechado no quadro de soluções.

Exemplo : Considerando ainda o problema do item 5.2.2.1, tem-se :

$$\begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{c}{\textit{quadro de custos}} \\ 20 & 15 & 10 & 50 \\ 12 & \mathbf{8} & 16 & 70 \\ 20 & 40 & 60 & \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} \multicolumn{4}{c}{\textit{quadro de soluções}} & \\ & & & 50 & \\ & \mathbf{40} & & 30 & (L_2 - L_4) \\ 20 & 0 & 60 & & \end{array}$$

$$
\begin{array}{cccc}
\multicolumn{4}{c}{\textit{quadro de custos}} \\
20 & 15 & \mathbf{\mathit{10}} & 50 \\
12 & \mathbf{\mathit{8}} & 16 & 30 \\
20 & 0 & 60 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccc}
\multicolumn{4}{c}{\textit{quadro de soluções}} \\
 & & \mathbf{\mathit{50}} & 0 \\
 & \mathbf{\mathit{40}} & & 30 \\
20 & 0 & 10 &
\end{array}
$$

$$(L_5 - L_1)$$

$$
\begin{array}{cccc}
\multicolumn{4}{c}{\textit{quadro de custos}} \\
20 & 15 & \mathbf{\mathit{10}} & 0 \\
\mathbf{\mathit{12}} & \mathbf{\mathit{8}} & 16 & 30 \\
20 & 0 & 10 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccc}
\multicolumn{4}{c}{\textit{quadro de soluções}} \\
 & & \mathbf{\mathit{50}} & 0 \\
\mathbf{\mathit{20}} & \mathbf{\mathit{40}} & & 10 \\
0 & 0 & 10 &
\end{array}
\quad (L_2 - L_3)
$$

$$
\begin{array}{cccc}
\multicolumn{4}{c}{\textit{quadro de custos}} \\
20 & 15 & \mathbf{\mathit{10}} & 0 \\
\mathbf{\mathit{12}} & \mathbf{\mathit{8}} & \mathbf{\mathit{16}} & 10 \\
0 & 0 & 10 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccc}
\multicolumn{4}{c}{\textit{quadro de soluções}} \\
 & & \mathbf{\mathit{50}} & 0 \\
\mathbf{\mathit{20}} & \mathbf{\mathit{40}} & \mathbf{\mathit{10}} & 0 \\
0 & 0 & 0 &
\end{array}
$$

A solução básica inicial é $x_{AIII} = 50$, $x_{BI} = 20$, $x_{BII} = 40$, $x_{BIII} = 10$, que corresponde a $z = 1220$. Para a solução inicial encontrada pela regra do Noroeste tem-se $z = 1890$.

5.2.3. Determinação da solução ótima

Obtida a solução básica compatível inicial, deve-se explicitar a função objetivo em função das variáveis não-básicas. Em seguida, o método simplex pode, em princípio, ser aplicado.

Para o exemplo tratado anteriormente, tem-se o seguinte quadro, para iniciar o processo de solução pelo método simplex:

	z	x_{AI}	x_{AII}	x_{AIII}	x_{BI}	x_{BII}	x_{BIII}	b	
Base	1	-20	-15	-10	-12	-8	-16	0	L_0
	0	1	1	1	0	0	0	50	
	0	0	0	0	1	1	1	70	L_2 - L_4
	0	1	0	0	1	0	0	20	
	0	0	1	0	0	1	0	40	

Base	1	-20	-15	-10	-12	-8	-16	0	
	0	1	1	1	0	0	0	50	
	0	0	-1	0	1	0	1	30	L_2 - L_3
	0	1	0	0	1	0	0	20	
	0	0	1	0	0	1	0	40	

Base	1	-20	-15	-10	-12	-8	-16	0	L_0+ $10L_1$ + $16L_2$+ $12L_3$+ $8L_4$
x_{AIII}	0	1	1	1	0	0	0	50	
x_{BIII}	0	-1	-1	0	0	0	1	10	
x_{BI}	0	1	0	0	1	0	0	20	
x_{BII}	0	0	1	0	0	1	0	40	
Base	1	-14	-13	0	0	0	0	1220	500+160+240+320

Uma vez que o problema é de minimização, os coeficientes negativos das variáveis não-básicas na função objetivo garantem que a solução ótima foi alcançada: $x_{AI}=0$, $x_{AII}=0$, $x_{AIII}=50$, $x_{BI}=20$, $x_{BII}=40$, $x_{BIII}=10$ e $z=1220$.

Se o processo fosse inicializado através da regra do Noroeste, ter-se-ia:

Base	1	-20	-15	-10	-12	-8	-16	0	L_0+ $20L_3$
	0	1	1	1	0	0	0	50	L_1 - L_3
	0	0	0	0	1	1	1	70	
x_{AI}	0	1	0	0	1	0	0	20	
	0	0	1	0	0	1	0	40	
Base	1	0	-15	-10	8	-8	-16	400	L_0+ $15L_1$
x_{AII}	0	0	1	1	-1	0	0	30	
	0	0	0	0	1	1	1	70	
x_{AI}	0	1	0	0	1	0	0	20	
	0	0	1	0	0	1	0	40	L_4 - L_1
Base	1	0	0	5	-7	-8	-16	850	L_0+ $8L_4$
x_{AII}	0	0	1	1	-1	0	0	30	
	0	0	0	0	1	1	1	70	L_2 - L_4

x_{AI}	0	1	0	0	1	0	0	20	
x_{BII}	0	0	0	-1	1	1	0	10	
Base	1	0	0	-3	1	0	-16	930	L_0+ $16L_2$
x_{AII}	0	0	1	1	-1	0	0	30	
x_{BIII}	0	0	0	1	0	0	1	60	
x_{AI}	0	1	0	0	1	0	0	20	
x_{BII}	0	0	0	-1	1	1	0	10	
	z	x_{AI}	x_{AII}	x_{AIII}	x_{BI}	x_{BII}	x_{BIII}	b	
Base	1	0	0	13	1	0	0	1890	L_0- $13L_1$
x_{AII}	0	0	1	1	-1	0	0	30	
x_{BIII}	0	0	0	1	0	0	1	60	L_2 -L_1
x_{AI}	0	1	0	0	1	0	0	20	
x_{BII}	0	0	0	-1	1	1	0	10	L_4+L_1
Base	1	0	-13	0	14	0	0	1500	L_0- $14L_3$
x_{AIII}	0	0	1	1	-1	0	0	30	L_1+L_3
x_{BIII}	0	0	-1	0	1	0	1	30	L_2 -L_3
x_{AI}	0	1	0	0	1	0	0	20	
x_{BII}	0	0	0	0	0	1	0	40	
Base	1	-14	-13	0	0	0	0	1220	
x_{AIII}*	0	1	1	1	0	0	0	50	
x_{BIII}*	0	-1	-1	0	0	0	1	10	
x_{BI}*	0	1	0	0	1	0	0	20	
x_{BII}*	0	0	1	0	0	1	0	40	