CINEMÁTICA DIFERENCIAL

- Velocidade de um corpo rígido.
  - Velocidade linear.
  - Velocidade angular.

- Mapeamento de velocidades entre espaço de juntas e espaço cartesiano.

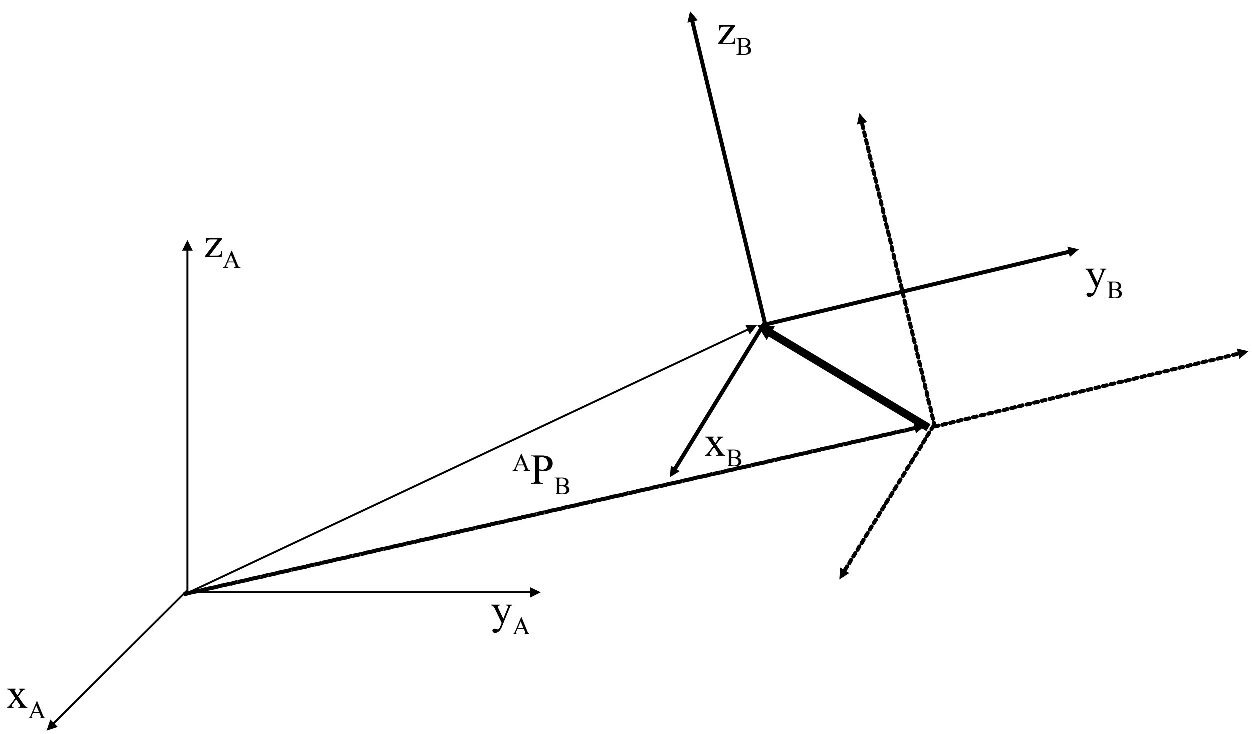
- Mapeamento de acelerações entre espaço de juntas e espaço cartesiano.

- Jacobiano.

Representação de Velocidade de um Corpo Rígido:

- **<u>Velocidade Linear</u>**: Vetor de Velocidade Linear.

$$ {}^{A}v_{B} = d({}^{A}P_{B})/dt $$



Representação de Velocidade de um Corpo Rígido:

- **Velocidade angular**:
  - Derivada dos Ângulos de Orientação.
  - Vetor de Velocidade Angular.

Representação de Velocidade de um Corpo Rígido:

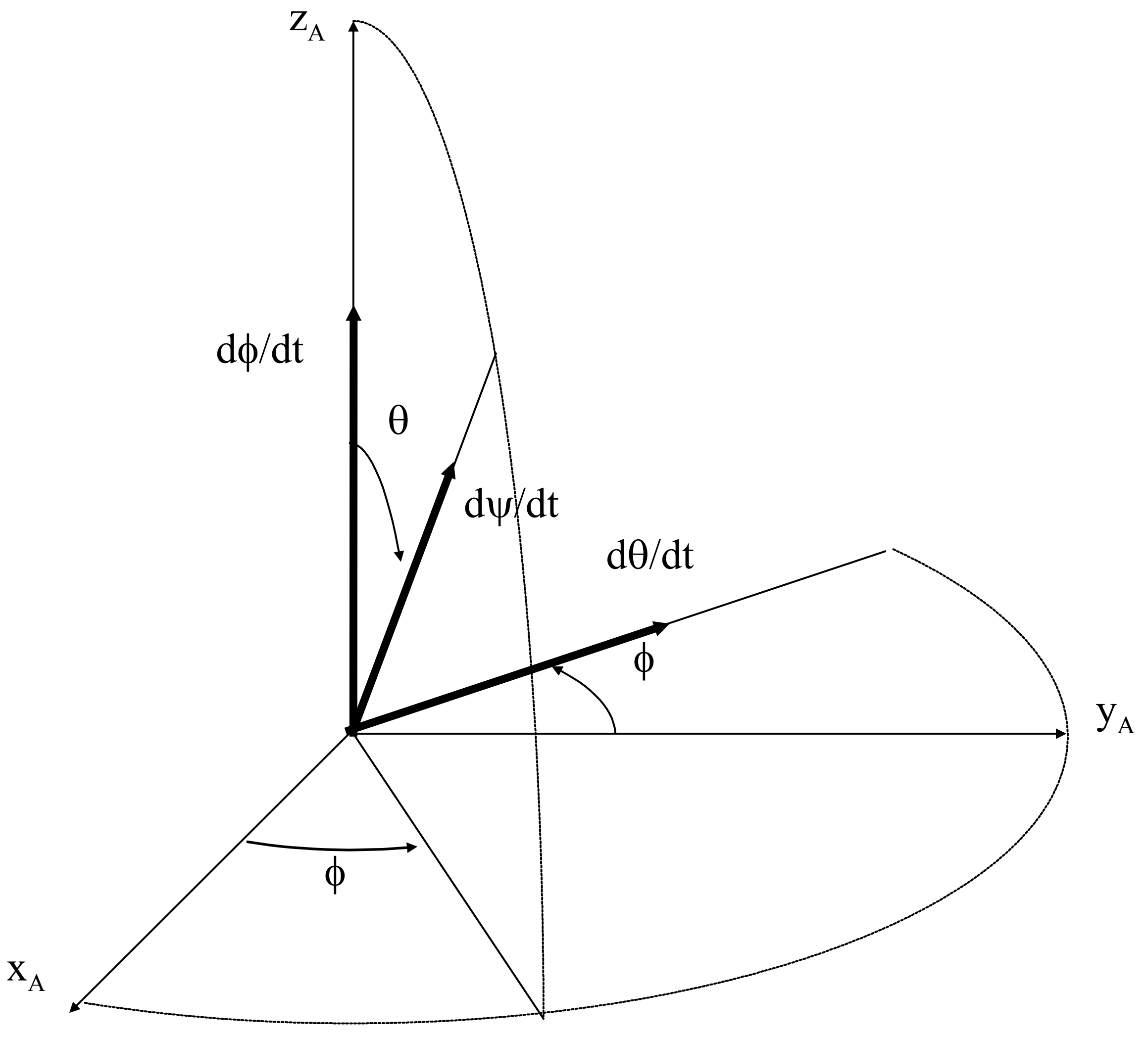
- **Derivada dos Ângulos de Orientação**:

- Seja a orientação de {B} em relação a {A} especificada através de uma tripla de ângulos de Euler ${}^A\Phi_B = [\phi \;\; \theta \;\; \psi]^T$.

⇒ A velocidade de rotação de {B} em relação a {A} pode ser expressa pela derivada de ${}^A\Phi_B$ em relação ao tempo:

$$d{}^A\Phi_B/dt = [d\phi/dt \;\; d\theta/dt \;\; d\psi/dt]T$$

Rotação representada pela derivada dos ângulos de Euler ZYZ.



Características da representação por derivada dos ângulos de orientação:

- A integral de $d^A\Phi_B/dt$ é ${}^A\Phi_B$, que tem significado físico claro.

- $d^A\Phi_B/dt$ é um vetor de componentes de rotação não ortogonais em torno de eixos de um referencial torto, os quais variam de acordo com valor corrente de ${}^A\Phi_B$.

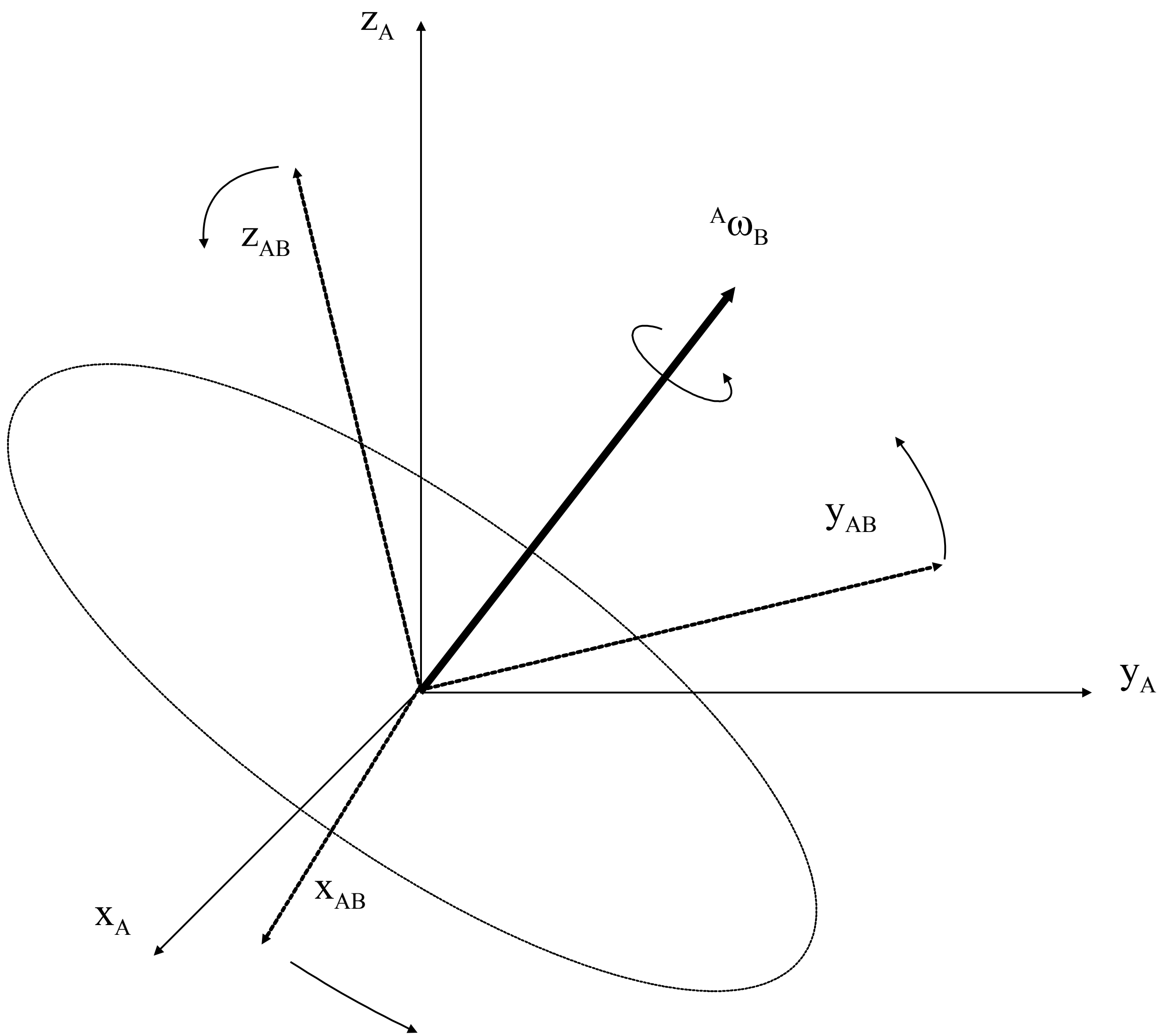
Representação de Velocidade de um Corpo Rígido:

- **<u>Vetor de Velocidade Angular</u>**:

- Seja {AB} paralelo a {B} e origem {A}. A velocidade de rotação de {B} em relação a {A} pode ser descrita como a rotação de {AB} em torno de um vetor direcional ${}^{A}\omega_{B}$ passando pela origem de {A}.
- ${}^{A}\omega_{B}$ alinhado com o eixo de rotação.
- $|{}^{A}\omega_{B}|$ igual à velocidade de rotação.

$\Rightarrow$ ${}^{A}\omega_{B}$ = Vetor de velocidade angular.

Vetor de Velocidade Angular



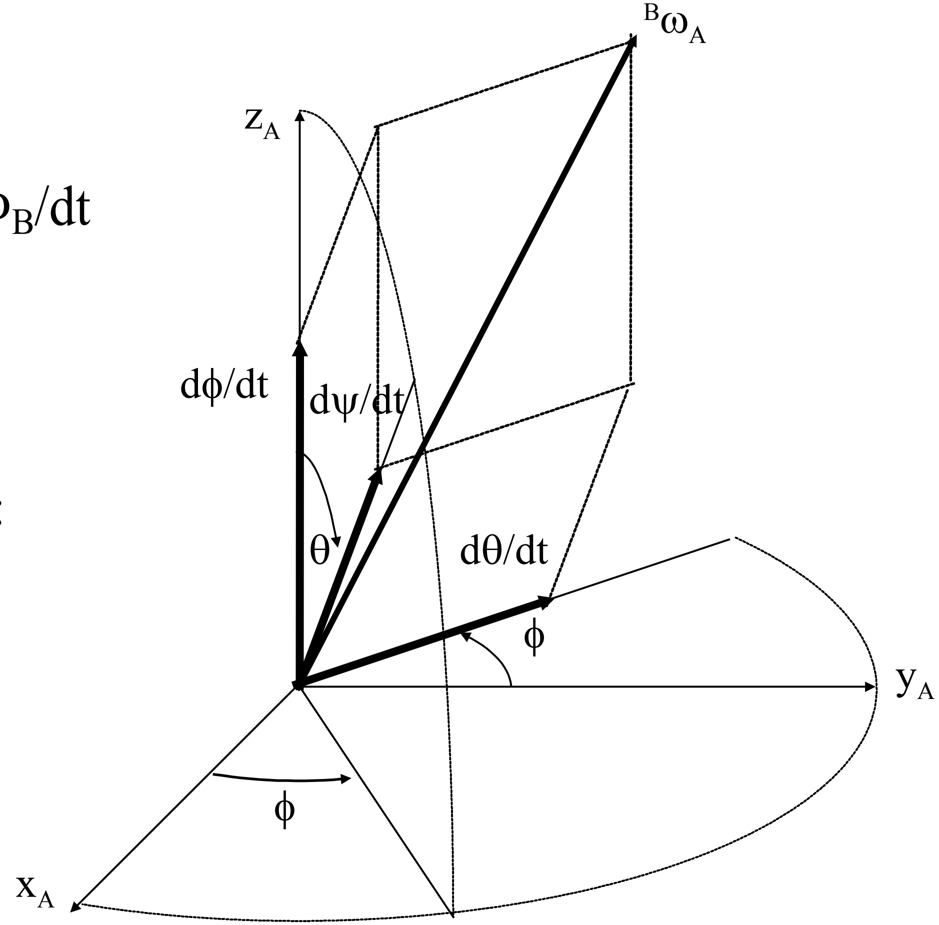
Características da representação por Vetor de Velocidade Angular:

- A integral de ${}^{A}\omega_{B}$ não tem um significado físico claro.

- ${}^{A}\omega_{B}$ é um vetor de componentes ortogonais de rotação em torno dos eixos de {A}.

Relação entre Derivada de Ângulos de Euler e Vetor de Velocidade Angular:

$$^{A}\omega_{B} = \begin{pmatrix} 0 & -s\phi & c\phi s\theta \\ 0 & c\phi & s\phi s\theta \\ 1 & 0 & c\theta \end{pmatrix} d^{A}\Phi_{B}/dt$$



Singularidade representacional:

$$\text{sen}(\theta) = 0$$

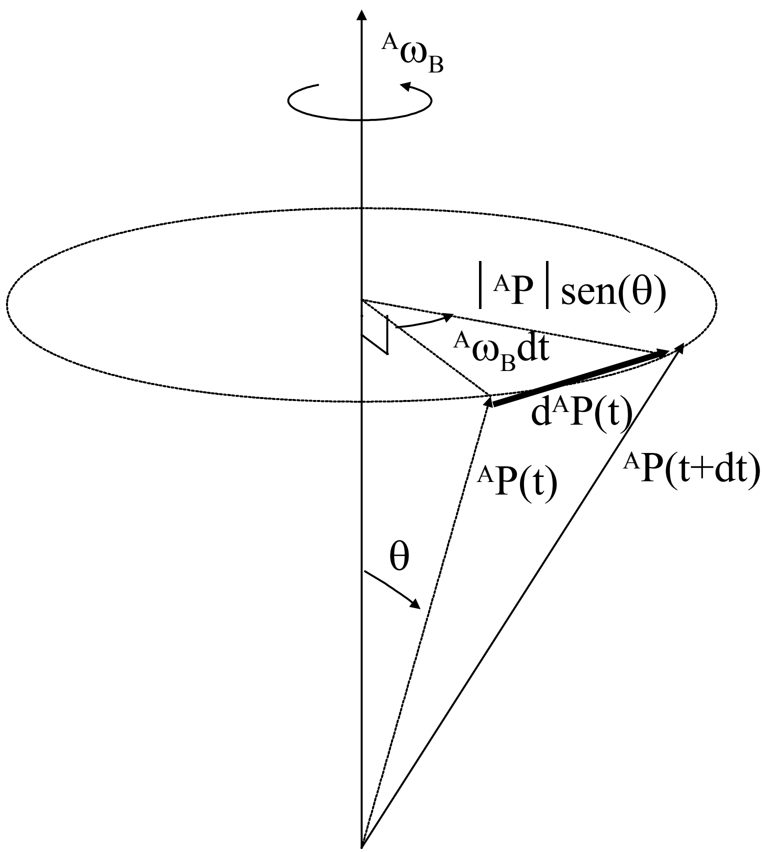
Derivada de ${}^{A}R_{B}$ vezes um vetor ${}^{B}P_{C}$:

- $d({}^{A}R_{B})/dt.{}^{B}P_{C} = [d({}^{A}x_{B})/dt \quad d({}^{A}y_{B})/dt \quad d({}^{A}z_{B})/dt].{}^{B}P_{C}$

- Considere {B} girando em relação a {A} com velocidade angular ${}^{A}\omega_{B}$.
- Considere que {A} e {B} possuem a mesma origem.
- Considere que ${}^{A}R_{B}$ variando em função de ${}^{A}\omega_{B}$.
- Dado um ponto ${}^{B}P$ fixo em {B}, ${}^{A}P$ será função de ${}^{A}\omega_{B}$.

Derivada de $^{A}R_{B}$ vezes um vetor $^{B}P_{C}$:

Velocidade de um ponto fixo em um referencial que gira.



- $d(^{A}P)$ é perpendicular a $^{A}P(t)$ e a $^{A}\omega_{B}$
- $|d(^{A}P)| = |^{A}\omega_{B}.dt|.|^{A}P|.\text{sen}(\theta)$

$\Rightarrow d(^{A}P)/dt = {}^{A}\omega_{B} \times {}^{A}P$

Assim:

- $d(^{A}x_{B})/dt = {}^{A}\omega_{B} \times {}^{A}x_{B}$
- $d(^{A}y_{B})/dt = {}^{A}\omega_{B} \times {}^{A}y_{B}$
- $d(^{A}z_{B})/dt = {}^{A}\omega_{B} \times {}^{A}z_{B}$

Derivada de ${}^{A}R_{B}$ vezes um vetor ${}^{B}P_{C}$:

- $d({}^{A}R_{B})/dt.{}^{B}P_{C} = [d({}^{A}x_{B})/dt \quad d({}^{A}y_{B})/dt \quad d({}^{A}z_{B})/dt].{}^{B}P_{C}$

$\Rightarrow d({}^{A}R_{B})/dt.{}^{B}P_{C} = [{}^{A}\omega_{B}\times{}^{A}x_{B} \quad {}^{A}\omega_{B}\times{}^{A}y \quad {}^{A}\omega_{B}\times{}^{A}z_{B}].{}^{B}P_{C}$

$\Rightarrow d({}^{A}R_{B})/dt.{}^{B}P_{C} = {}^{A}\omega_{B}\times [{}^{A}x_{B} \quad {}^{A}y_{B} \quad {}^{A}z_{B}].{}^{B}P_{C}$

$\Rightarrow d({}^{A}R_{B})/dt.{}^{B}P_{C} = {}^{A}\omega_{B}\times({}^{A}R_{B}.{}^{B}P_{C})$

Velocidades relativas em referenciais móveis:

- **Velocidade Linear Relativa:**

- Considere {A}, {B} e {C} $\Rightarrow {}^{A}P_{C} = {}^{A}P_{B} + {}^{A}R_{B}.{}^{B}P_{CB}$.

Derivando me relação ao tempo: $d({}^{A}P_{C})/dt = d({}^{A}P_{B})/dt + d({}^{A}R_{B}.{}^{B}P_{CB})/dt$

$$\Rightarrow \quad {}^{A}v_{C} = {}^{A}v_{B} + d({}^{A}R_{B}.{}^{B}P_{CB})/dt$$

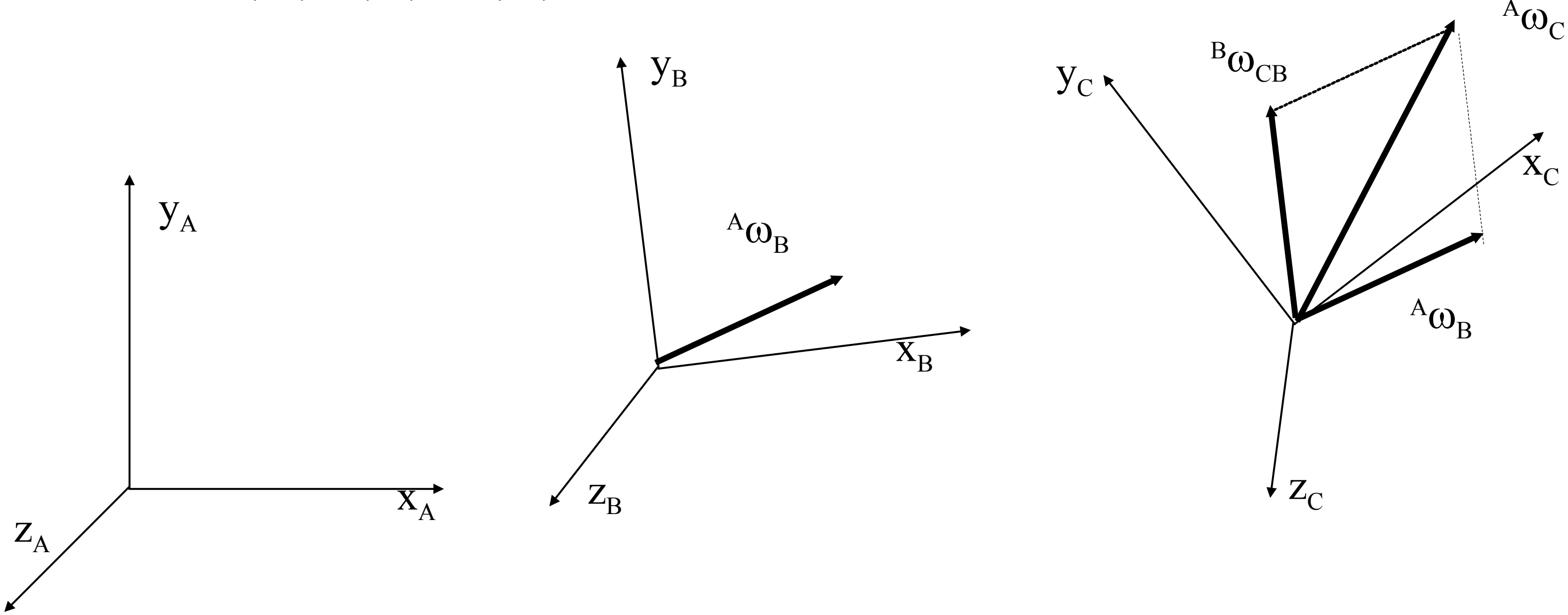
$$\Rightarrow \quad {}^{A}v_{C} = {}^{A}v_{B} + d({}^{A}R_{B})/dt.{}^{B}P_{CB} + {}^{A}R_{B}.d({}^{B}P_{CB})/dt$$

$$\Rightarrow \quad {}^{A}v_{C} = {}^{A}v_{B} + {}^{A}\omega_{B}\times({}^{A}R_{B}.{}^{B}P_{CB}) + {}^{A}R_{B}.d({}^{B}P_{CB})/dt$$

Velocidades relativas em referenciais móveis:

- **Velocidade Angular Relativa:**

Considere {A}, {B} e {C} $\Rightarrow$ ${}^A\omega_B$, ${}^B\omega_{CB}$ e ${}^A\omega_C$



$$\Rightarrow \quad {}^A\omega_C = {}^A\omega_B + {}^A R_B . {}^B\omega_{CB}$$

Representação de Aceleração de um Corpo Rígido:

- **Aceleração Linear de {B} em relação a {A}:**

$$ {}^{A}v_{B}' = d({}^{A}v_{B})/dt = [d({}^{A}v_{Bx})/dt \quad d({}^{A}v_{By})/dt \quad d({}^{A}v_{Bz})/dt]^{T} $$

- **Aceleração Angular de {B} em relação a {A}:**

$$ {}^{A}\omega_{B}' = d({}^{A}\omega_{B})/dt = [d({}^{A}\omega_{Bx})/dt \quad d({}^{A}\omega_{By})/dt \quad d({}^{A}\omega_{Bz})/dt]^{T} $$

Acelerações relativas em referenciais móveis:

- **Aceleração Linear Relativa:**

Dados {A}, {B} e {C}, ${}^{A}v_C'$ é dada por :

$${}^{A}v_C' = d{}^{A}v_C/dt = d[{}^{A}v_B + {}^{A}\omega_B \times ({}^{A}R_B.{}^{B}P_{CB}) + {}^{A}R_B.d{}^{B}P_{CB}/dt]/dt$$

$$\Rightarrow {}^{A}v_C' = {}^{A}v_B' + {}^{A}R_B.d^2({}^{B}P_{CB})/dt^2 + {}^{A}\omega_B' \times ({}^{A}R_B.{}^{B}P_{CB}) + {}^{A}\omega_B \times ({}^{A}\omega_B \times {}^{A}R_B.{}^{B}P_{CB}) +$$
$$+ 2.({}^{A}\omega_B \times {}^{A}R_B.d({}^{B}P_{CB})/dt)$$

Acelerações relativas em referenciais móveis:

- **Aceleração Angular Relativa:**

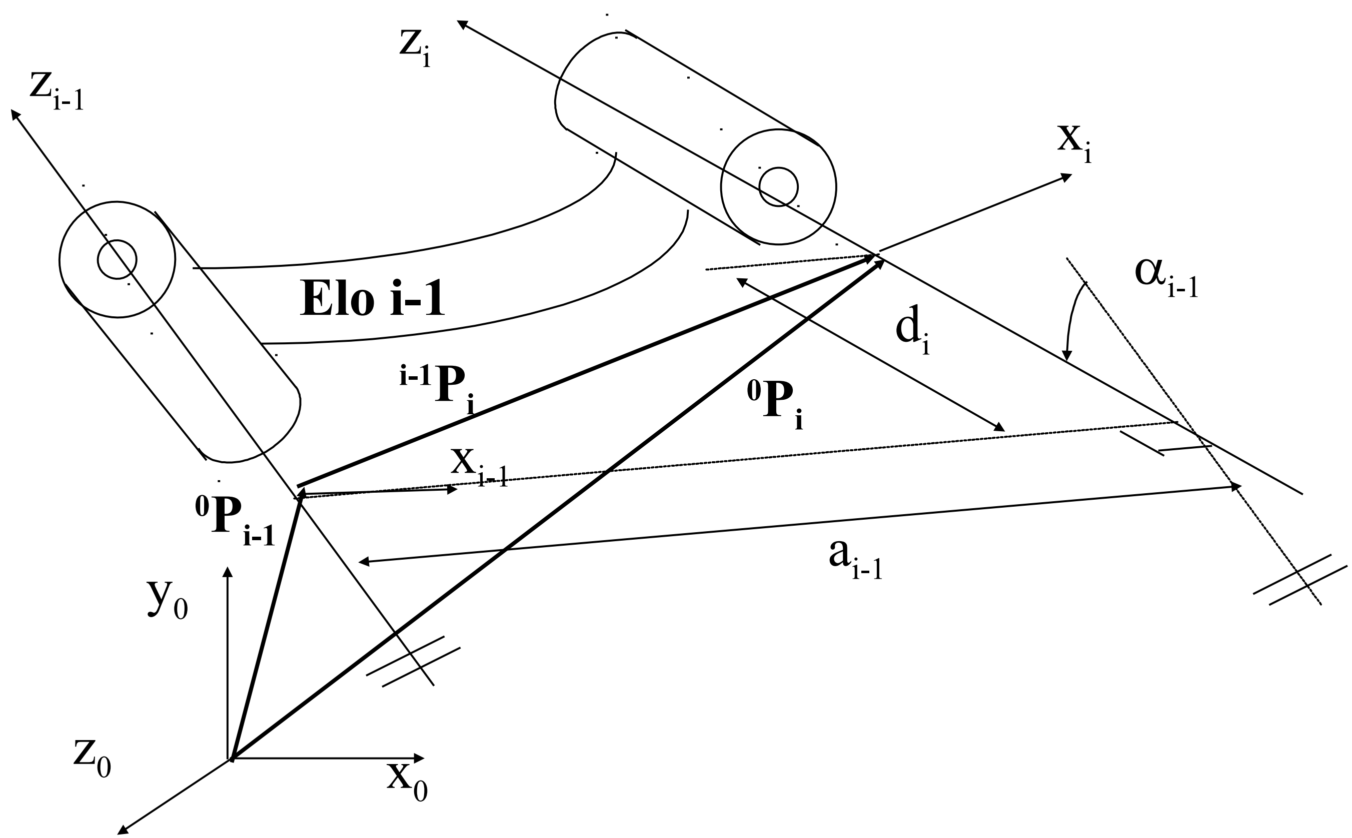
  Dados {A}, {B} e {C}, ${}^{A}\omega_{C}'$ é dada por:

  $${}^{A}\omega_{C}' = d{}^{A}\omega_{C}/dt = d[{}^{A}\omega_{B} + {}^{A}R_{B}.{}^{B}\omega_{CB}]/dt = d{}^{A}\omega_{B}/dt + d({}^{A}R_{B}.{}^{B}\omega_{C})/dt$$

$$\Rightarrow {}^{A}\omega_{C}' = {}^{A}\omega_{B}' + {}^{A}R_{B}.d{}^{B}\omega_{CB}/dt + {}^{A}\omega_{B}\times {}^{A}R_{B}.{}^{B}\omega_{CB}$$

Velocidades dos elos de um manipulador:

Posições relativas entre os elos móveis {i-1}, {i} e a base fixa {0}.



$$^{i-1}\mathbf{P}_i = [\mathbf{a}_{i-1} \quad -\mathbf{s}\alpha_{i-1}.\mathbf{d}_i \quad \mathbf{c}\alpha_{i-1}.\mathbf{d}_i]^T$$

Velocidades dos elos de um manipulador:

Substituições nas expressões de velocidades relativas em referenciais móveis:

$\{A\} \rightarrow \{0\}$

$\{B\} \rightarrow \{i\text{-}1\}$

$\{C\} \rightarrow \{i\}$

Junta Rotacional: $^{B}\omega_{CB} \rightarrow {}^{i-1}\omega_{i,i-1} = {}^{i-1}R_i . {}^{i}z_i . d\theta_i/dt$

Junta prismática: $d(^{B}P_{CB})/dt \rightarrow d(^{i-1}P_i)/dt = {}^{i-1}R_i . {}^{i}z_i . d(d_i)/dt$

Velocidades dos elos de um manipulador:

<u>Velocidade Angular relativa</u>: ${}^{A}\omega_{C} = {}^{A}\omega_{B} + {}^{A}R_{B}.{}^{B}\omega_{CB}$

<u>Velocidade Angular em referencial de base</u>:

${}^{0}\omega_{i} = {}^{0}\omega_{i-1} + {}^{0}R_{i-1}.{}^{i-1}\omega_{i,i-1} = {}^{0}\omega_{i-1} + {}^{0}R_{i-1}.{}^{i-1}R_{i}.{}^{i}z_{i}.d\theta_{i}/dt$

$\Rightarrow {}^{0}\omega_{i} = {}^{0}\omega_{i-1} + {}^{0}R_{i}.{}^{i}z_{i}.d\theta_{i}/dt$

Para uma junta prismática: $d(\theta_{i})/dt = 0 \Rightarrow {}^{0}\omega_{i} = {}^{0}\omega_{i-1}$

<u>Velocidade Angular em referencial de elo</u>: $(\times {}^{i}R_{0})$

$\Rightarrow {}^{i}\omega_{i} = {}^{i}R_{i-1}.{}^{i-1}\omega_{i-1} + {}^{i}z_{i}.d\theta_{i}/dt$

Velocidades dos elos de um manipulador:

<u>Velocidade Linear relativa</u>: $^{A}v_{C} = {}^{A}v_{B} + {}^{A}\omega_{B}\times({}^{A}R_{B}.{}^{B}P_{CB}) + {}^{A}R_{B}.d({}^{B}P_{CB})/dt$

<u>Velocidade Linear em referencial de base</u>:

$$
\begin{aligned}
{}^{0}v_{i} &= {}^{0}v_{i-1} + {}^{0}\omega_{i-1}\times({}^{0}R_{i-1}.{}^{i-1}P_{i}) + {}^{0}R_{i-1}.d({}^{i-1}P_{i})/dt \\
&= {}^{0}v_{i-1} + {}^{0}\omega_{i-1}\times({}^{0}R_{i-1}.{}^{i-1}P_{i}) + {}^{0}R_{i-1}.{}^{i-1}R_{i}.{}^{i}z_{i}.d(d_{i})/dt
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow {}^{0}v_{i} = {}^{0}v_{i-1} + {}^{0}\omega_{i-1}\times({}^{0}R_{i-1}.{}^{i-1}P_{i}) + {}^{0}R_{i}.{}^{i}z_{i}.d(d_{i})/dt$$

Para uma junta rotacional: $d(d_{i})/dt = 0 \Rightarrow {}^{0}v_{i} = {}^{0}v_{i-1} + {}^{0}\omega_{i-1}\times({}^{0}R_{i-1}.{}^{i-1}P_{i})$

<u>Velocidade Linear em referencial de elo</u>: $(\times{}^{i}R_{0})$

$$\Rightarrow {}^{i}v_{i} = {}^{i}R_{i-1}.({}^{i-1}v_{i-1} + {}^{i-1}\omega_{i-1}\times{}^{i-1}P_{i}) + {}^{i}z_{i}.d(d_{i})/dt$$

Acelerações dos elos de um manipulador:

Substituições nas expressões de acelerações relativas em referenciais móveis:

$\{A\} \rightarrow \{0\}$

$\{B\} \rightarrow \{i\text{-}1\}$

$\{C\} \rightarrow \{i\}$

Junta Rotacional:

$^{B}\omega_{CB} \rightarrow {}^{i-1}\omega_{i,i-1} = {}^{i-1}R_i.{}^{i}z_i.d\theta_i/dt$

$d({}^{B}\omega_{CB})/dt \rightarrow d({}^{i-1}\omega_{i,i-1})/dt = {}^{i-1}R_i.{}^{i}z_i.d^2\theta_i/dt^2$

Junta prismática:

$d({}^{B}P_{CB})/dt \rightarrow d({}^{i-1}P_i)/dt = {}^{i-1}R_i.{}^{i}z_i.d(d_i)/dt$

$d^2({}^{B}P_{CB})/dt^2 \rightarrow d^2({}^{i-1}P_i)/dt^2 = {}^{i-1}R_i.{}^{i}z_i.d^2(d_i)/dt^2$

Acelerações dos elos de um manipulador:

<u>Aceleração Angular relativa</u>: ${}^{A}\omega_{C}' = {}^{A}\omega_{B}' + {}^{A}R_{B}.d^{B}\omega_{CB}/dt + {}^{A}\omega_{B} \times {}^{A}R_{B}.{}^{B}\omega_{CB}$

<u>Aceleração Angular em referencial de base</u>:

$${}^{0}\omega_{i}' = {}^{0}\omega_{i-1}' + {}^{0}R_{i-1}.{}^{i-1}R_{i}.{}^{i}z_{i}.d^{2}\theta_{i}/dt^{2} + {}^{0}\omega_{i-1} \times {}^{0}R_{i-1}.{}^{i-1}R_{i}.{}^{i}z_{i}.d\theta_{i}/dt$$

$$\Rightarrow {}^{0}\omega_{i}' = {}^{0}\omega_{i-1}' + {}^{0}R_{i}.{}^{i}z_{i}.d^{2}\theta_{i}/dt^{2} + {}^{0}\omega_{i-1} \times {}^{0}R_{i}.{}^{i}z_{i}.d\theta_{i}/dt$$

Para uma junta prismática: $d(\theta_{i})/dt = 0$ e $d^{2}\theta_{i}/dt^{2} = 0 \Rightarrow {}^{0}\omega_{i}' = {}^{0}\omega_{i-1}'$

<u>Aceleração Angular em referencial de elo</u>: $(\times {}^{i}R_{0})$

$$\Rightarrow {}^{i}\omega_{i}' = {}^{i}R_{i-1}.{}^{i-1}\omega_{i-1}' + {}^{i}z_{i}.d^{2}\theta_{i}/dt^{2} + ({}^{i}R_{i-1}.{}^{i-1}\omega_{i-1}) \times ({}^{i}z_{i}.d\theta_{i}/dt)$$

Acelerações dos elos de um manipulador:

Aceleração Linear relativa:

$$^{A}v_{C}' = {}^{A}v_{B}' + {}^{A}R_{B}.d^{2}({}^{B}P_{CB})/dt^{2} + {}^{A}\omega_{B}'\times({}^{A}R_{B}.{}^{B}P_{CB}) + {}^{A}\omega_{B}\times({}^{A}\omega_{B}\times{}^{A}R_{B}.{}^{B}P_{CB}) +$$
$$+ 2.({}^{A}\omega_{B}\times{}^{A}R_{B}.d({}^{B}P_{CB})/dt)$$

Aceleração Linear em referencial de base:

$$^{0}v_{i}' = {}^{0}v_{i-1}' + {}^{0}R_{i-1}.{}^{i-1}R_{i}.{}^{i}z_{i}.d^{2}(d_{i})/dt^{2} + {}^{0}\omega_{i-1}'\times({}^{0}R_{i-1}.{}^{i-1}P_{i}) + {}^{0}\omega_{i-1}\times({}^{0}\omega_{i-1}\times{}^{0}R_{i-1}.{}^{i-1}P_{i}) +$$
$$+ 2.[{}^{0}\omega_{i-1}\times({}^{0}R_{i-1}.{}^{i-1}R_{i}.{}^{i}z_{i}.d(d_{i})/dt)]$$

$$\Rightarrow {}^{0}v_{i}' = {}^{0}v_{i-1}' + {}^{0}\omega_{i-1}'\times({}^{0}R_{i-1}.{}^{i-1}P_{i}) + {}^{0}\omega_{i-1}\times({}^{0}\omega_{i-1}\times{}^{0}R_{i-1}.{}^{i-1}P_{i}) + {}^{0}R_{i}.{}^{i}z_{i}.d^{2}(d_{i})/dt^{2} +$$
$$+ 2.[{}^{0}\omega_{i-1}\times({}^{0}R_{i}.{}^{i}z_{i}.d(d_{i})/dt)]$$

Para uma junta rotacional: $d(d_i)/dt = 0$ e $d^2 d_i/dt^2 = 0$

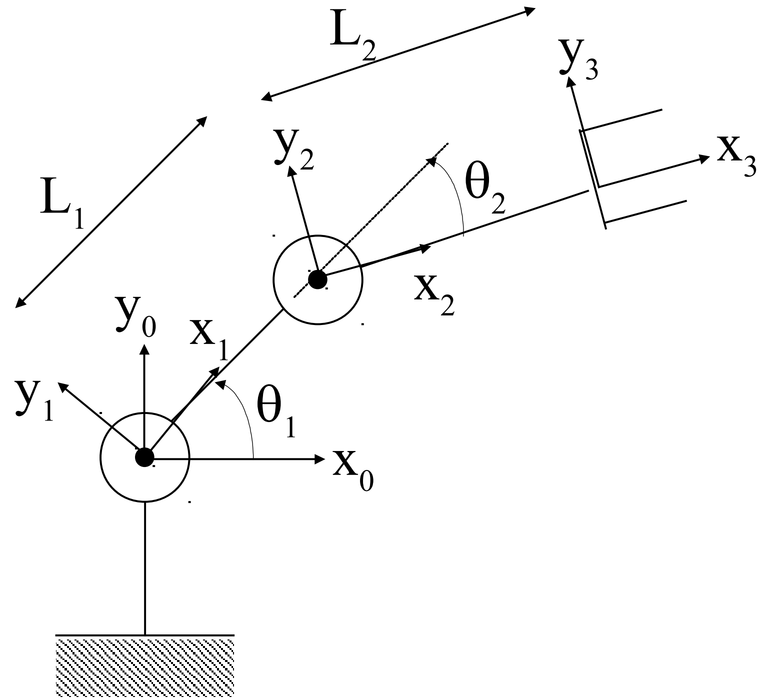
$$\Rightarrow {}^{0}v_{i}' = {}^{0}v_{i-1}' + {}^{0}\omega_{i-1}'\times({}^{0}R_{i-1}.{}^{i-1}P_{i}) + {}^{0}\omega_{i-1}\times({}^{0}\omega_{i-1}\times{}^{0}R_{i-1}.{}^{i-1}P_{i})$$

Aceleração Linear em referencial de elo: $(\times {}^{i}R_{0})$

$$\Rightarrow {}^{i}v_{i}' = {}^{i}R_{i-1}.[{}^{i-1}v_{i-1}' + {}^{i-1}\omega_{i-1}'\times{}^{i-1}P_{i} + {}^{i-1}\omega_{i-1}\times({}^{i-1}\omega_{i-1}\times{}^{i-1}P_{i})] +$$
$$+ {}^{i}z_{i}.d^{2}(d_{i})/dt^{2} + 2.[({}^{i}R_{i-1}.{}^{i-1}\omega_{i-1})\times({}^{i}z_{i}.d(d_{i})/dt)]$$

Exemplo: Calcule as velocidades e acelerações da ferramenta para o manipulador planar de dois graus de liberdade.

i	a_{i-1}	α_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	L_1	0	0	θ_2
3	L_2	0	0	0



Transformações de elo:

$$
{}^{0}T_1 = \begin{pmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad {}^{1}T_2 = \begin{pmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & L_1 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad {}^{2}T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & L_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

Cinemática direta:

$$
\Rightarrow {}^{0}T_3 = \begin{pmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & (L_1c_1+L_2c_{12}) \\ s_{12} & c_{12} & 0 & (L_1s_1+L_2s_{12}) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

Velocidades angulares:

${}^{0}\omega_{0} = [0 \quad 0 \quad 0]^{T}$ (condição inicial)

${}^{1}\omega_{1} = {}^{1}R_{0}.{}^{0}\omega_{0} + {}^{1}z_{1}.d\theta_{1}/dt = [0 \quad 0 \quad d\theta_{1}/dt]^{T}$

${}^{2}\omega_{2} = {}^{2}R_{1}.{}^{1}\omega_{1} + {}^{2}z_{2}.d\theta_{2}/dt = [0 \quad 0 \quad (d\theta_{1}/dt + d\theta_{2}/dt)]^{T}$

${}^{3}\omega_{3} = {}^{3}R_{2}.{}^{2}\omega_{2} + {}^{3}z_{3}.d\theta_{3}/dt = [0 \quad 0 \quad (d\theta_{1}/dt + d\theta_{2}/dt)]^{T}$

$\Rightarrow {}^{0}\omega_{3} = {}^{0}R_{3}.{}^{3}\omega_{3} = [0 \quad 0 \quad (d\theta_{1}/dt + d\theta_{2}/dt)]^{T}$

Velocidades lineares (como todas as juntas são rotacionais, $d(d_i)/dt = 0$):

${}^0v_0 = [0 \quad 0 \quad 0]^T$ (condição inicial).

$${}^1v_1 = {}^1R_0.({}^0v_0 + {}^0\omega_0 \times {}^0P_1) = [0 \quad 0 \quad 0]^T$$

$${}^2v_2 = {}^2R_1.({}^1v_1 + {}^1\omega_1 \times {}^1P_2) = [(L_1 s_2 d\theta_1/dt) \quad (L_1 c_2 d\theta_1/dt) \quad 0]^T$$

$${}^3v_3 = {}^3R_2.({}^2v_2 + {}^2\omega_2 \times {}^2P_3) = [(L_1 s_2 d\theta_1/dt) \quad (L_1 c_2 d\theta_1/dt + L_2(d\theta_1/dt + d\theta_2/dt)) \quad 0]^T$$

$${}^0v_3 = {}^0R_3.{}^3v_3 = [(-L_1 s_1 d\theta_1/dt - L_2 s_{12}(d\theta_1/dt + d\theta_2/dt)) \quad (L_1 c_1 d\theta_1/dt + L_2 c_{12}(d\theta_1/dt + d\theta_2/dt)) \quad 0]^T$$

Acelerações angulares:

${}^{0}\omega_{0}' = [0 \quad 0 \quad 0]^{T}$ (condição inicial)

${}^{1}\omega_{1}' = {}^{1}R_{0}.{}^{0}\omega_{0}' + {}^{1}z_{1}.d^{2}\theta_{1}/dt^{2} + ({}^{1}R_{0}.{}^{0}\omega_{0})\times({}^{1}z_{1}.d\theta_{1}/dt) = [0 \quad 0 \quad d^{2}\theta_{1}/dt^{2}]^{T}$

${}^{2}\omega_{2}' = {}^{2}R_{1}.{}^{1}\omega_{1}' + {}^{2}z_{2}.d^{2}\theta_{2}/dt^{2} + ({}^{2}R_{1}.{}^{1}\omega_{1})\times({}^{2}z_{2}.d\theta_{2}/dt) = [0 \quad 0 \quad (d^{2}\theta_{1}/dt^{2}+ d^{2}\theta_{2}/dt^{2})]^{T}$

${}^{3}\omega_{3}' = {}^{3}R_{2}.{}^{2}\omega_{2}' + {}^{3}z_{3}.d^{2}\theta_{3}/dt^{2} + ({}^{3}R_{2}.{}^{2}\omega_{2})\times({}^{3}z_{3}.d\theta_{3}/dt) = [0 \quad 0 \quad (d^{2}\theta_{1}/dt^{2}+ d^{2}\theta_{2}/dt^{2})]^{T}$

$\Rightarrow {}^{0}\omega_{3} = {}^{0}R_{3}.{}^{3}\omega_{3} = [0 \quad 0 \quad (d^{2}\theta_{1}/dt^{2}+ d^{2}\theta_{2}/dt^{2})]^{T}$

Acelerações lineares (como todas as juntas rotacionais, $d(d_i)/dt = 0$ e $d^2(d_i)/dt^2 = 0$):

$^0v_0' = [0 \quad g \quad 0]^T$ (condição inicial)

$^1v_1' = {}^1R_0.[{}^0v_0' + {}^0\omega_0' \times {}^0P_1 + {}^0\omega_0 \times ({}^0\omega_0 \times {}^0P_1)] = [s_1g \quad c_1g \quad 0]^T$

$^2v_2' = {}^2R_1.[{}^1v_1' + {}^1\omega_1' \times {}^1P_2 + {}^1\omega_1 \times ({}^1\omega_1 \times {}^1P_2)] =$

$= [(s_{12}g + L_1s_2d^2\theta_1/dt^2 - L_1c_2(d\theta_1/dt)^2) \quad (c_{12}g + L_1c_2d^2\theta_1/dt^2 + L_1s_2(d\theta_1/dt)^2) \quad 0]^T$

$^3v_3' = {}^3R_2.[{}^2v_2' + {}^2\omega_2' \times {}^2P_3 + {}^2\omega_2 \times ({}^2\omega_2 \times {}^2P_3)]$

$\Rightarrow {}^3v_{3x}' = s_{12}g + L_1s_2d^2\theta_1/dt^2 - L_1c_2(d\theta_1/dt)^2 - L_2(d\theta_1/dt + d\theta_2/dt)^2$

$\Rightarrow {}^3v_{3y}' = c_{12}g + L_1c_2d^2\theta_1/dt^2 + L_1s_2(d\theta_1/dt)^2 + L_2(d^2\theta_1/dt^2 + d^2\theta_2/dt^2)$

$\Rightarrow {}^3v_{3z}' = 0$

$^0v_3' = {}^0R_3.{}^3v_3'$

$\Rightarrow {}^0v_{3x}' = -L_1s_1d^2\theta_1/dt^2 - L_1c_1(d\theta_1/dt)^2 - L_2c_{12}(d\theta_1/dt + d\theta_2/dt)^2 - L_2s_{12}(d^2\theta_1/dt^2 + d^2\theta_2/dt^2)$

$\Rightarrow {}^0v_{3y}' = L_1c_1d^2\theta_1/dt^2 - L_1s_1(d\theta_1/dt)^2 - L_2s_{12}(d\theta_1/dt + d\theta_2/dt)^2 + L_2c_{12}(d^2\theta_1/dt^2 + d^2\theta_2/dt^2) + g$

$\Rightarrow {}^0v_{3z}' = 0$

Jacobiano:

A matriz jacobiana:

Dada $f = f(q)$,

onde: $q_{N\times 1}$ e $f_{M\times 1}$

$\Rightarrow$ Matriz jacobiana $J(q)$ $M\times N$, (Jacobiano):

$$J(q) = [\partial f(q)/\partial q^T] = \begin{pmatrix} \partial f_1(q)/\partial q_1 & \dots & \partial f_1(q)/\partial q_N \\ \vdots & & \vdots \\ \partial f_M(q)/\partial q_1 & \dots & \partial f_M(q)/\partial q_N \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ $df/dt = J(q).dq/dt = [\partial f(q)/\partial q^T].dq/dt$

Jacobiano - Singularidades do mecanismo:

$V = J(q).dq/dt \Rightarrow J(q)^T.V = J(q)^T.J(q).dq/dt \Rightarrow dq/dt = [J(q)^T.J(q)]^{-1}.J(q)^T.V$

• Nº de linhas L.I. de J(q) = Nº de GDL controláveis em espaço cartesiano.
• Nº de colunas de J(q) = Nº de GDL em espaço de juntas.

• M > N, GDL em espaço de juntas insuficientes para controlar todos os GDL em espaço cartesiano (objetivo dentro de subespaço de trabalho).
• M < N, GDL em espaço de juntas excede o necessário para realizar a tarefa, ou seja, o manipulador é redundante.
• M = N, GDL espaço de juntas = GDL em espaço cartesiano, (desde que J(q) seja de *rank* completo).

$\Rightarrow \; dq/dt = J(q)^{-1}.V$

<u>Jacobiano - Singularidades do mecanismo:</u>

Se, dado q, a matriz J(q) for singular $\Rightarrow$ J(q) não é mais de *rank* completo e a inversão não é possível.

<u>Singularidades do Mecanismo</u> = {q / det(J(q) = 0}

- Singularidades nos limites do espaço de trabalho, (braço estendido).
- Singularidades no interior do espaço de trabalho, (eixos de juntas alinhados).

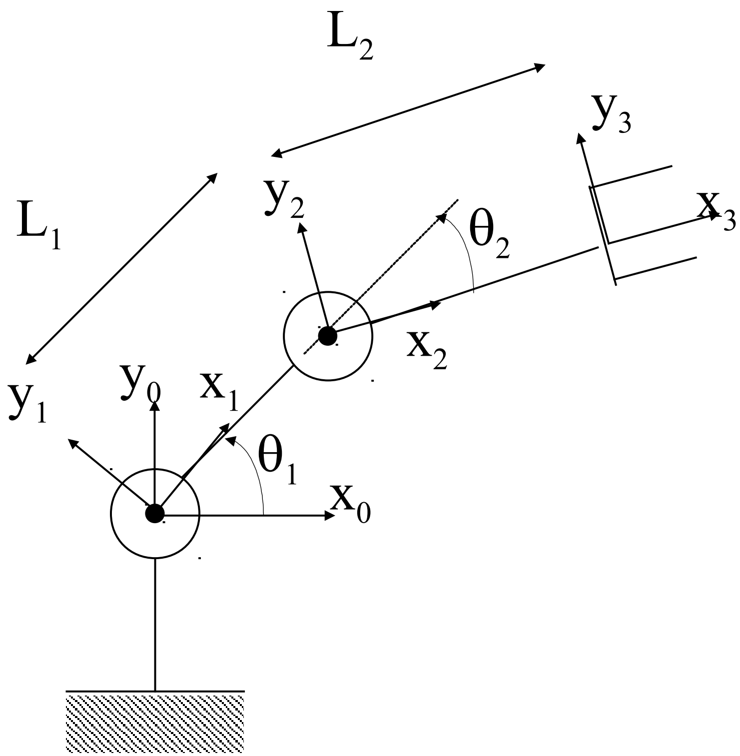
Numa singularidade, perde-se um ou mais GDL's cartesianos. $\Rightarrow$ Existirão direções nas quais é impossível movimentar a garra, independente de dq/dt.

$q \rightarrow q_{singular} \Rightarrow dq/dt = J(q)^{-1}.V \rightarrow \infty$. $\Rightarrow$ Pode sobrecarregar os atuadores.

$\Rightarrow$ É necessário implementar métodos de medição da distância às singularidades e técnicas para contorná-las.

Exemplo - jacobiano e singularidades:

Dado o manipulador articulado planar de 2 GDL, determine: a) ${}^{3}J(q)$ e ${}^{0}J(q)$, b) as singularidades do mecanismo; c) as velocidades de junta necessárias para fazer com que a garra se movimente ao longo do eixo x com velocidade ${}^{0}v_{3x}$.



Exemplo - jacobiano e singularidades:

a) Tarefa: psicionar a ferramenta em $P = [x \quad y]^T$ a partir de $q = [\theta_1 \quad \theta_2]^T$.

$\Rightarrow$ Mapeamento de velocidades correspondente:

$^3(dP/dt) = [^3v_{3x} \; ^3v_{3y}]^T = [(L_1 s_2 d\theta_1/dt) \quad (L_1 c_2 d\theta_1/dt + L_2(d\theta_1/dt + d\theta_2/dt))]^T$

$^0(dP/dt) = [^0v_{3x} \; ^0v_{3y}]^T = [(-L_1 s_1 d\theta_1/dt - L_2 s_{12}(d\theta_1/dt + d\theta_2/dt)) \quad (L_1 c_1 d\theta_1/dt + L_2 c_{12}(d\theta_1/dt + d\theta_2/dt))]^T$

$$^3(dP/dt) = {}^3J(q).dq/dt \Rightarrow \begin{pmatrix} ^3v_{3x} \\ ^3v_{3y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 s_2 & 0 \\ (L_1 c_2 + L_2) & L_2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} d\theta_1/dt \\ d\theta_2/dt \end{pmatrix}$$

$$^0(dP/dt) = {}^0J(q).dq/dt \Rightarrow \begin{pmatrix} ^0v_{3x} \\ ^0v_{3y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-L_1 s_1 - L_2 s_{12}) & (-L_2 s_{12}) \\ (L_1 c_1 + L_2 c_{12}) & (L_2 c_{12}) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} d\theta_1/dt \\ d\theta_2/dt \end{pmatrix}$$

Exemplo - jacobiano e singularidades:

b) Singularidades = configurações para as quais det(J(q) = 0.

$$\det({}^3J(q)) = \det \begin{pmatrix} L_1 s_2 & 0 \\ (L_1 c_2 + L_2) & L_2 \end{pmatrix} = L_1.L_2.\mathrm{sen}(\theta_2)$$

$\Rightarrow L_1.L_2.\mathrm{sen}(\theta_2) = 0 \Rightarrow \theta_2 = k..\pi$, com k inteiro. $\Rightarrow$

- k par $\Rightarrow$ braço esticado: singularidade no limite do espaço de trabalho.
- k impar $\Rightarrow$ braço dobrado : singularidade no interior do espaço de trabalho.

As singularidades são independentes do referencial em que é expresso o Jacobiano:

$$\det({}^0J(q)) = \det \begin{pmatrix} (-L_1 s_1 - L_2 s_{12}) & (-L_2 s_{12}) \\ (L_1 c_1 + L_2 c_{12}) & (L_2 c_{12}) \end{pmatrix} = L_1.L_2.\mathrm{sen}(\theta_2) = \det({}^3J(q))$$

Exemplo - jacobiano e singularidades:

c) As velocidades de junta correspondentes à velocidade ${}^{0}V_{3} = [{}^{0}v_{3x} \quad 0]^{T}$ são:

$\Rightarrow \qquad q = {}^{0}J(q)^{-1}.{}^{0}V_{3x}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} d\theta_1/dt \\ d\theta_1/dt \end{pmatrix} = (1/L_1.L_2.s_2).\begin{pmatrix} (L_2c_{12}) & (L_2s_{12}) \\ (-L_1c_1-L_2c_{12}) & (-L_1s_1-L_2s_{12}) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} {}^{0}v_{3x} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \qquad d\theta_1/dt = {}^{0}v_{3x}.c_{12}/(L_1.s_2)$

$d\theta_2/dt = {}^{0}v_{3x}.(-L_1c_1-L_2c_{12})/(L_1.L_2.s_2)$

Verifica-se que, para $\theta_2 \rightarrow 0$, $d\theta_1/dt$ e $d\theta_2/dt \rightarrow \infty$.

Jacobiano para orientação dada por ângulos de Euler ZYZ:

•Orientação da garra: ${}^{0}\Phi_{N+1} = [\phi \quad \theta \quad \psi]^T \Rightarrow$ Velocidade angular $d({}^{0}\Phi_{N+1})/dt$.
•Posição da garra: ${}^{0}P_{N+1}$ $[x \;\; y \;\; z]^T \Rightarrow$ Velocidade linear $d({}^{0}P_{N+1})/dt$.

$\Rightarrow$ Localização da garra em relação à base: ${}^{0}L_{\Phi} = [{}^{0}\Phi_{N+1}{}^{T} \quad {}^{0}P_{N+1}{}^{T}]^T$

$\Rightarrow$ Velocidade generalizada: ${}^{0}V_{\Phi} = d{}^{0}L_{\Phi}/dt = [(d({}^{0}\Phi_{N+1})/dt.)^T \quad (d({}^{0}P_{N+1})/dt)^T]^T$

$\Rightarrow {}^{0}V_{\Phi} = \partial{}^{0}L_{\Phi}(q)/\partial q^T.dq/dt = {}^{0}J_{\Phi}(q).dq/dt$

onde ${}^{0}J_{\Phi}(q) = \partial{}^{0}L_{\Phi}(q)/\partial q^T$.

Jacobiano para orientação dada por ângulos de Euler ZYZ:

Lembrando que: $${}^{0}\omega_{N+1} = \begin{pmatrix} 0 & -s\phi & c\phi s\theta \\ 0 & c\phi & s\phi s\theta \\ 1 & 0 & c\theta \end{pmatrix} d^{0}\Phi_{N+1}/dt = R_{\Phi}.d^{0}\Phi_{N+1}/dt$$

Lembrando que: ${}^{0}V_{N+1} = [{}^{0}\omega_{N+1}{}^{T} \quad {}^{0}v_{N+1}{}^{T}]^{T}. \Rightarrow {}^{0}V_{N+1} = T_{\Phi}.{}^{0}V_{\Phi}$

onde, $$T_{\Phi} = \begin{pmatrix} R_{\Phi} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix}$$

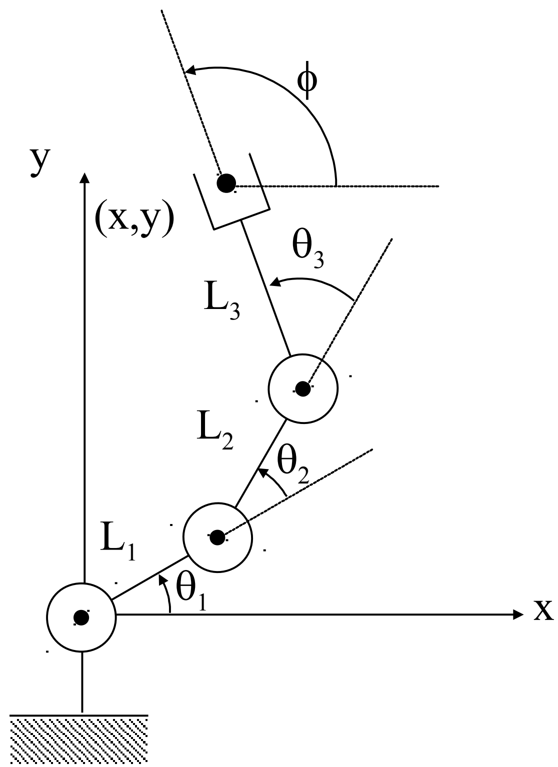
Como ${}^{0}V_{\Phi} = {}^{0}J_{\Phi}(q).dq/dt, \Rightarrow {}^{0}V_{N+1} = T_{\Phi}.{}^{0}V_{\Phi} = T_{\Phi}.{}^{0}J_{\Phi}(q).dq/dt$

Mas, ${}^{0}V_{N+1} = {}^{0}J(q).dq/dt. \Rightarrow \quad {}^{0}J(q) = T_{\Phi}.{}^{0}J_{\Phi}(q)$

Exemplo: cálculo de $^0J_\Phi$

Calcule $^0J_\Phi$ para o manipulador planar de 3 GDL abaixo, considerando:

$^0L_\Phi = [x \quad y \quad \phi]^T \Rightarrow {}^0V_\Phi = d^0L_\Phi/dt = [dx/dt \quad dy/dt \quad d\phi/dt]^T$



<u>Exemplo</u>: cálculo de $^0J_\Phi$

$x = L_1.c_1 + L_2.c_{12} + L_3.c_{123}$ $\quad$ $y = L_1.s_1 + L_2.s_{12} + L_3.s_{123}$ $\quad$ $\phi = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$

$\Rightarrow {}^0V_\Phi = d{}^0L_\Phi/dt = [dx/dt \quad dy/dt \quad d\phi/dt]^T$:

$dx/dt = -(L_1.s_1 + L_2.s_{12} + L_3.s_{123})d\theta_1/dt - (L_2.s_{12} + L_3.s_{123})d\theta_2/dt - (L_3.s_{123})d\theta_3/dt$

$dy/dt = (L_1.c_1 + L_2.c_{12} + L_3.c_{123})d\theta_1/dt + (L_2.c_{12} + L_3.c_{123})d\theta_2/dt + (L_3.c_{123})d\theta_3/dt$

$d\phi/dt = d\theta_1/dt + d\theta_2/dt + d\theta_3/dt$

$\Rightarrow {}^0V_\Phi = {}^0J_\Phi(q).dq/dt$, onde o jacobiano ${}^0J_\Phi(q)$ é dado por:

$$^0J_\Phi(q) = \begin{pmatrix} -(L_1.s_1 + L_2.s_{12} + L_3.s_{123}) & -(L_2.s_{12} + L_3.s_{123}) & -(L_3.s_{123}) \\ (L_1.c_1 + L_2.c_{12} + L_3.c_{123}) & (L_2.c_{12} + L_3.c_{123}) & (L_3.c_{123}) \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$