Otimização de Sistemas

1. Revisão de Álgebra Linear

1.1 Matrizes

1.1.1. Definição

Conjunto de elementos ordenados em forma retangular.

Ex : $A_{(mxn)}$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 8 \\ 1 & 7 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

1.1.2. Notação :

Ex:.

$$A(m \text{ x } n) = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

1.1.3. Matrizes Especiais

a) *Matriz nula* : $a_{ij} = 0, \forall i, j (i \le m; j \le n)$.

b) *Matriz quadrada* : $m = n$ (ordem n).

c) *Matriz diagonal* : $m = n$, $a_{ij} = 0, \forall i \ne j$.

d) *Matriz identidade* (**E** *ou* **I**) : matriz diagonal com $a_{i,i} = 1$.

e) *Matriz simétrica* : $m = n$, $a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j$.

f) *Matriz transposta* de $\mathbf{A}_{(mxn)}$: $\mathrm{A}^{\mathrm{T}}(\mathrm{nxm})$, $\quad \mathrm{a}_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{T}} = \mathrm{a}_{\mathrm{ji}}$

g) *Matriz triangular*:

$a_{ij} = 0 \forall i > j$ (superior)

$a_{ij} = 0 \forall i < j$ (inferior).

h) *Matriz vetor*: matriz $(nx1)$.

1.1.4. Operações com matrizes

---

a) Igualdade : $\mathbf{A}_{(mxn)} = \mathbf{B}_{(mxn)}$, se $a_{ij} = b_{ij}, \forall i, j$.

b) Adição : $\mathbf{C}_{(mxn)} = \mathbf{A}_{(mxn)} + \mathbf{B}_{(mxn)} \Rightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \forall i, j$.

c) Multiplicação por uma constante λ:

$$\mathbf{B}_{(mxn)} = \lambda.\mathbf{A}_{(mxn)} \Rightarrow b_{ij} = \lambda.a_{ij}, \forall i, j .$$

d) Multiplicação de matrizes :

$$\mathbf{A}_{(mxn)}.\mathbf{B}_{(nxp)} = \mathbf{C}_{(mxp)}$$

onde

$$\mathrm{c}_{\mathrm{ik}} = \sum_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{n}} \mathrm{a}_{\mathrm{ij}}.\mathrm{b}_{\mathrm{jk}}, \quad \forall \mathrm{i}, \mathrm{k}$$

Notas : i) $\mathbf{A}.\mathbf{B} \neq \mathbf{B}.\mathbf{A}$

ii) $\mathbf{A}.\mathbf{E} = \mathbf{E}.\mathbf{A} = \mathbf{A}$, onde $(\mathbf{A}, \mathbf{E}_{(nxn)})$

e) Propriedades das operações com matrizes:

1. $(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$

2. $\alpha.(\lambda\mathbf{A})=\lambda.(\alpha\mathbf{A})=(\alpha\lambda)\mathbf{A}$

3. $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$

4. $\mathbf{A}(\lambda.\mathbf{B})=(\lambda.\mathbf{A})\mathbf{B}=\lambda.(\mathbf{AB})$

5. $(\alpha+\lambda)\mathbf{A}=\alpha\mathbf{A}+\lambda\mathbf{A}$

6. $\lambda(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\lambda\mathbf{A}+\lambda\mathbf{B}$

7. $\mathbf{A}(\mathbf{BC})=(\mathbf{AB})\mathbf{C}$

8. $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{AB}+\mathbf{AC}$

9. $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C}=\mathbf{AC}+\mathbf{BC}$

1.1.5. Determinantes

$$\mathrm{p}=\mathrm{a}_{\alpha 1,1}.\mathrm{a}_{\alpha 2,2}\ldots.\mathrm{a}_{\alpha n,n}$$

$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ são números distintos, $\alpha_i \neq \alpha_k$. Essa seqüência é uma permutação do conjunto $\{1,2,...,n\}$. Uma "inversão" na seqüência $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ acontece cada vez que $\alpha_i > \alpha_k$, para $i<k$.

Ex :

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4 = 2,3,1,4$ possui 2 inversões.

O n° de inversões de uma seqüência é designado por $N(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$.

Determinante de uma matriz **A** de ordem *n* é a soma dos termos *p* obtidos por todas as permutações possíveis da seqüência $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$, multiplicados por (-1) elevado ao número de inversões das respectivas seqüências:

$$|\mathbf{A}|=\det(\mathbf{A})=\sum(-1)^{\mathrm{N}(\alpha 1,\ldots,\alpha n)}.\mathrm{a}_{\alpha 1,1}.\mathrm{a}_{\alpha 2,2}\ldots\mathrm{a}_{\alpha n,n}$$

$$\text{Ex : } |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$(-1)^0 a_{11}.a_{22}.a_{33} + (-1)^2 a_{21}a_{32}.a_{13} + (-1)^2 a_{31}.a_{12}.a_{23} + (-1)^1 a_{21}.a_{12}.a_{33} + (-1)^3 a_{31}.a_{22}.a_{13} + (-1)^1 a_{11}.a_{32}.a_{23}.$$

1.1.5.1. Propriedades dos determinantes

a) Se $a_{ij} = 0 \forall i$ ou $a_{ij} = 0 \forall j \Rightarrow \det \mathbf{A} = 0$ (singular).

b) $b_{ij} = \lambda.a_{ij}$, $j = 1,2,...,n$ ou $i = 1,2,...,n \Rightarrow \det \mathbf{B} = \lambda.\det \mathbf{A}$.

c) **B** é obtida pela permuta de duas linhas ou duas colunas de **A** $\Rightarrow$ det **B** = - det **A**.

d) Se $a_{ij} = \lambda.a_{kj}, j = 1,2,...,n$ ou $a_{ij} = \lambda.a_{ik}, i = 1,2,..,n \Rightarrow \det \mathbf{A} = 0$.

e) Se $b_{ij} = a_{ij} + \lambda.a_{kj}, j = 1,2,...,n$; $i \neq k$ ou $b_{ij} = a_{ij} + \lambda.a_{ik}$ $i = 1,2,...,n;$; $j \neq k \Rightarrow \det \mathbf{A} = \det \mathbf{B}$.

1.1.5.2. Co-fator, menor complementar

$$\mathrm{A}_{ij} = (-1)^{i+j}.\mathrm{M}_{ij}$$

1.1.5.3. Expansão do determinante em co-fatores

$$\det \mathbf{A} = a_{i1}.A_{i1} + a_{i2}.A_{i2} + ... + a_{in}.A_{in} = a_{lj}.A_{lj} + a_{ej} + A_{2j} + ... + a_{nj}.A_{nj}$$

1.1.6. Determinante de uma matriz triangular

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}.\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22}.\begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{44} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22}\ldots a_{nn}$$

1.1.7. "Rank" de uma matriz, r :

Seja $\mathbf{A}_{(mxn)}$. Se:

a) Existe pelo menos uma submatriz **S** de **A**, de ordem r, com $\det \mathbf{S} \neq 0$;

b) Toda submatriz **T** de **A**, de ordem $r_l > r$, possui $\det \mathbf{T} = 0$;

então r é o "rank",

1.1.8. Matriz inversa

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1} \Leftrightarrow \mathbf{BA} = \mathbf{AB} = \mathbf{E}$$

Notas : i) $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$

ii) $A^{-1} = (cofA)^T / \det A$

1.2. Sistemas de equações lineares - tratamento matricial

1.2.1. Conversão

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & + & \cdots & + & a_{in}x_n & = & b_i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases}$$

A i-ésima equação: $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}.x_k = b_i$

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} x_1 + \cdots + \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix} x_n = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$A_1.x_1 + A_2.x_2 + \ldots + A_n x_n = \mathbf{b} \text{ ou } \mathbf{Ax} = \mathbf{b}.$$

1.2.2. Regra de Cramer

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}; \Delta = \det A$$

$$\Delta_i = \det\begin{bmatrix} & & \overset{i}{\downarrow} & & \\ A_1 A_2 \cdots & & b & \cdots A_n \\ & & & & \end{bmatrix}$$

1.2.3. Método de Eliminação de Gauss - Jordan

Consiste em diagonalizar a matriz dos coeficientes, através de operações elementares na matriz aumentada: $\bar{A} \overset{\Delta}{=} [A \ \vdots \ b]$.

As operações elementares são:

a) permuta de linhas;

b) multiplicação de uma linha por uma constante;

c) substituição de uma linha por seu valor adicionado a outra linha multiplicada por uma constante.

Ex : Resolva:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 10 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 &= 9 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 17 \end{aligned}$$

A matriz aumentada é:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 & \vdots & 10 \\ 1 & 1 & 3 & \vdots & 9 \\ 1 & 3 & 4 & \vdots & 17 \end{bmatrix} \begin{matrix} \to 1/2L_1 \\ \to L_2 - 1/2L_1 \\ \to L_3 - 1/2L_1 \end{matrix}$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & \vdots & 5 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 4 \\ 0 & 2 & 2 & \vdots & 12 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \to L_3/2 \\ \to L_2 \end{matrix}$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & \vdots & 5 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 6 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = -5 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 4 \end{matrix}$$

1.3. Espaços Vetoriais

1.3.1. Conceitos e Notação

Espaço vetorial é o conjunto de todos os vetores com número de coordenadas igual à dimensão do espaço. Ex.: O espaço vetorial R^m é o conjunto de todos os vetores (pontos) com *m* coordenadas reais.

1.3.2. Combinação Linear

Sejam $A_1, A_2, ..., A_n \in R^m$ e $x_1, ..., x_n \in R$. Então $b = x_1.A_1 + x_2.A_2 + ... + x_n.A_n$ é um vetor do R^m, chamado *combinação linear* dos vetores $A_1, A_2, ..., A_n$.

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} x_1 + \cdots + \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} x_n = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

1.3.3. Vetores Linearmente Independentes (L.I.)

Se a equação vetorial:

$$A_1.x_1 + A_2.x_2 + ... + A_n.x_n = \mathbf{0}$$

for satisfeita apenas quando $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$, então os vetores $A_1, A_2, ..., A_n$ são *L.I.* Caso contrário, diz-se que eles são *linearmente dependentes* (*L.D.*), isto é, algum vetor A_i pode ser obtido a partir de uma combinação linear dos demais vetores.

Ex:

$$\mathrm{m} = 3, \mathrm{n} = 2, \mathrm{A}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathrm{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.\mathrm{x}_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.\mathrm{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathrm{x}_1 = 0 \quad \mathrm{e} \quad \mathrm{x}_2 = 0$$

Logo, A_1 e A_2 são *L.I.*.

1.3.4. Dimensão de um espaço vetorial

É um número igual à quantidade máxima de vetores *L.I.*, pertencentes ao espaço vetorial.

1.3.5. Base

Um conjunto de vetores $e_1, e_2, ..., e_n \in R^m$ constitui-se em uma base do R^{m} se:

a) Eles forem *L.I.*

b) Qualquer vetor $x \in R^m$ puder ser obtido por uma combinação linear de $e_1, e_2, ..., e_n \in R^m$, isto é,

$$x = x_1.e_1 + x_2.e_2 + ... + x_n.e_n \,.$$

Pode-se provar que qualquer base de R^m possui *m* vetores.

Ex : $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ constituem-se em uma base do R^3, pois:

$$x_1.e_1 + x_2.e_2 + \ldots + x_n.e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0 \text{ (L.I.)}.$$

Se $x \in R^3 \Rightarrow x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1.\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2.\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3.\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, isto é, *x* é uma combinação linear de e_1, e_2 e e_3.

1.3.6. Rank de uma Matriz

Através da expansão do determinante em co-fatores, pode-se mostrar que o "*rank*" de uma matriz (m x n) é igual ao n° máximo de colunas (ou de linhas) L.I.

1.3.7. Matriz Base

Se $A_{(mxn)}$ possui *m* colunas L.I., então a matriz quadrada

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} A_{j1} & A_{j2} & \cdots & A_{jm} \end{bmatrix}$$

é uma base de *A* e a equação $A.x = b$ possui uma solução para qualquer $b \in R^m$.

Ex : $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ possui uma base $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

1.3.8. Teorema

Para $A_{(nxn)}$, são equivalentes as afirmações:

a) Existe $A^{-1}\cdot$

b) Rank de A é igual a n.

c) $\det A \neq 0$.

1.4. Solução do sistema $A.x = b$, sendo $A_{(mxn)}, x_{(nx1)}, b_{(nx1)}$ e $m < n$.

Considere o sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & + & \cdots & + & a_{in}x_n & = & b_i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

onde $m < n$. Considere $rank(A) = m$. Então, arbitrando-se os valores de $(n - m)$ variáveis, pode-se obter uma solução. Para cada conjunto de valores arbitrado, obtém-se uma solução distinta.

1.4.1. Solução básica

Sejam $A_{(mxn)}$ e $B = \lfloor A_{j1} \;,\; A_{j2} \;,\; \ldots \;,\; A_{jm} \rfloor$ uma base de *A*. Para qualquer $b \in R^m$, uma solução *x* tal que

$$\lfloor A_{j1} \quad A_{j2} \quad \ldots \quad A_{jm} \rfloor \begin{bmatrix} x_{j1} \\ x_{j2} \\ \vdots \\ x_{jm} \end{bmatrix} = b \text{ e } x_i = 0 \text{ para } i \neq j_1, \ldots, j_m .$$

é chamada de *solução básica* do sistema. As variáveis x_{ij} são chamadas *básicas* e as demais *não-básicas*.

Ex : O sistema:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
4x_1 & + & 0x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & 0x_5 & = & -10 \\
2x_1 & + & x_2 & + & 0x_3 & - & 2x_4 & + & 0x_5 & = & 6 \\
2x_1 & + & 0x_2 & + & 0x_3 & + & 2x_4 & + & x_5 & = & 14
\end{array}$$

possui uma solução básica dada por :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} .x_2 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} .x_3 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} .x_5 = \begin{bmatrix} -10 \\ 6 \\ 14 \end{bmatrix}$$

e $x_1 = x_4 = 0$. Segue que $x_2 = 6$, $x_3 = -10$ e $x_5 = 14$. O conjunto das variáveis básicas, para esta solução, é $\{x_2, x_3, x_5\}$, cujos índices formam o conjunto Base $\{2,3,5\}$.

Outra solução básica pode ser obtida, através de operações (transformações) elementares na matriz aumentada do sistema, para se obter o conjunto Base $\{2,3,1\}$:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 & 1 & 0 & \vdots & -10 \\ 2 & 1 & 0 & -2 & 0 & \vdots & 6 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 1 & \vdots & 14 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow L_1 - 2L_3 \\ \rightarrow L_2 - L_3 \\ \rightarrow 1/2 L_3 \end{array}$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -3 & -2 & \vdots & -38 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -1 & \vdots & -8 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & \vdots & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \text{P/ } x_4 = x_5 = 0, \\ x_1 = 7, x_2 = -8, x_3 = -38 \end{array}$$

O número máximo de soluções básicas possíveis é:

$$C_3^5 = \frac{5!}{3!2!} = 10$$

1.4.2. Solução compatível básica

Considere que são impostas restrições às variáveis do sistema anterior, do tipo: $x_i \geq 0, \;\; i = 1,...,5$. As soluções básicas encontradas não são *compatíveis* com a restrição acima. Soluções básicas que atendem às restrições de desigualdade são chamadas de *soluções compatíveis básicas*.

De uma maneira geral, tem-se:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}.x_j = b_i \;, \; i = 1,\ldots,m$$
$$x_j \geq 0, \; j = 1,\ldots,n \qquad\qquad (m < n)$$

1.5. Sistemas de Inequações Lineares

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}.x_j \leq b_i \;, i = 1,\ldots,m$$
$$\text{ou} \quad A.x \leq b$$

Esse sistema pode ser transformado em um sistema de equações lineares, através da introdução de novas variáveis:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}.x_j + x_{n+i} = b_i \;, \; i = 1,\ldots,m$$
$$x_{n+i} \geq 0$$

Para $A.x \geq b$, tem-se

$$\sum_{j=l}^{n} a_{ij}.x_j - x_{n+1} = b_i, i = 1,\ldots,m$$
$$x_{n+i} \geq 0$$

As variáveis x_{n+i}, $i = 1,\ldots,m,$ são chamadas *variáveis de folga.*

1.6. Sistemas de Equações Lineares com variáveis não negativas

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & \geq & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & \leq & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & \leq & b_m \end{cases} \qquad \begin{array}{l} x_i \geq 0, i = 1,\ldots,n, i \neq k \\ \\ x_k \;\; qq \end{array}$$

A introdução de *m* variáveis de folga transforma o sistema de inequações em um sistema de equações, conforme mostrado anteriormente. A fim de trabalhar com variáveis não negativas, substitui-se x_k por $x_k^{'} - x_k^{''}$, sendo $x'_k \geq 0$ e $x''_k \geq 0$.

1.7. Convexidade

1.7.1. Definição

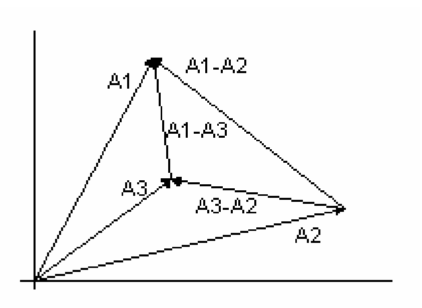
Diz-se que $b \in R^m$ é uma combinação convexa dos vetores $A_1, A_2, ..., A_n \in R^m$ se:

$$b = \alpha_1.A_1 + ... + \alpha_n A_n$$

com : $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ e $\alpha_i \geq 0$ para $i = 1,...,n$

1.7.2. Interpretação geométrica

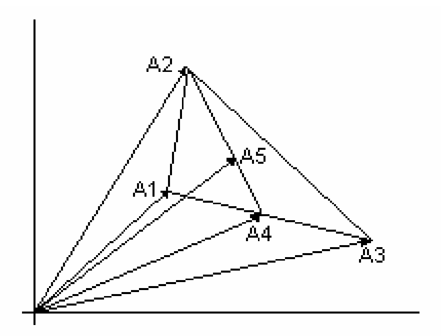
Ex$_1$: Se A_3 é uma combinação convexa de A_1 e A_2, então:



$$A_3 = \alpha.A_1 + (1-\alpha).A_2$$
$$A_3 = \alpha.A_1 + A_2 - \alpha.A_2$$
$$(A_3 - A_2) = \alpha(A_1 - A_2).$$

Isto é : os vetores $(A_3 - A_2)$ e $(A_1 - A_2)$ têm a mesma direção, já que $\alpha \in R$.

Ex$_2$:



$$A_4 = \alpha.A_1 + (1-\alpha).A_3$$
$$A_5 = (1-k).A_2 + k.A_4$$
$$= (1-k).A_2 + k.A_4$$
$$= (1-k).A_2 + k.\alpha.A_1 + k(1-\alpha).A_3$$
$$= (k.\alpha).A_1 + (1-k).A_2 + [k(1-\alpha)].A_3$$

$$\text{Se } 0 \le \alpha \le 1 \text{ e } 0 \le k \le 1 \Rightarrow \begin{cases} 0 \le k\alpha \le 1 \\ 0 \le 1-k \le 1 \\ 0 \le 1-\alpha \le 1 \\ 0 \le k(1-\alpha) \le 1 \end{cases}$$

Como $k\alpha + (1-k) + k(1-\alpha) = 1 \Rightarrow A_5$ é uma combinação convexa de A_1, A_2 e A_3.

1.7.3. Conjunto Convexo

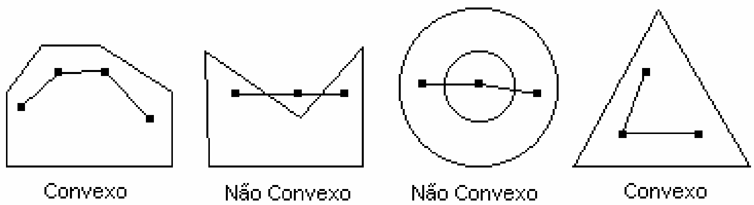
1.7.3.1. Definição

Seja $C \subset R^m$ e $A_1, A_2 \in C$, quaisquer.

Seja $b = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2$ uma combinação convexa de A_1 e A_2, com $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, $0 \le \alpha_1, \alpha_2 \le 1$.

Se $b \in C \Rightarrow C$ é chamado de *conjunto convexo*.

Ex:



1.7.3.2. Ponto extremo

A é um ponto extremo se a condição $A = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2$, com α_1 e α_2 definidos anteriormente, implicar em $A = A_1$ ou $A = A_2$.

2.1. Conceitos

a) Otimização: alocação de recursos, em geral, limitados entre atividades competitivas, procurando atender a um certo objetivo. A minimização de custos ou a maximização de lucros. Em grande parte dos casos práticos, esse objetivo pode ser expresso por uma função, chamada "*função objetivo*" ou "*função custo*", ou ainda de "*função critério*".

b) Restrições: são as limitações existentes nos recursos disponíveis ou ainda as limitações físicas que se impõem às variáveis descritivas das atividades. Essas restrições são representadas por equações e/ou inequações.

c) Programação Linear: problema de otimização em que a função objetivo, bem como as restrições são lineares.

d) Tipos de otimização:

Critério f(x)	Restrições	Domínio das variáveis	Denominação
linear	linear	R^n	PL
convexa	linear côncava	R^n	convexa
quadrática	linear	R^n	quadrática
qualquer	quaisquer	Z^n e I^n	inteira
não-linear	não-linear	R^n	não-linear
qualquer	quaisquer	qualquer	dinâmica

2.2. Modelos

2.2.1. Atividades concorrentes

Considere uma unidade fabril com capacidade para produzir *n* produtos distintos, com diferentes níveis de consumo de recursos e que produzem lucros distintos. Deseja-se definir o nível de produção de cada produto, de forma que o lucro total obtido seja máximo.

Sejam:

a) $x_1,...,x_n$: os níveis de produção dos n produtos;

b) $c_1,...,c_n$: os lucros unitários dos n produtos;

c) $b_1,...,b_m$: os diferentes recursos disponíveis (limitados), necessários à manufatura dos n produtos;

d) $a_{i1},...,a_{in}$: os níveis de consumo do recurso *i*, cujo total é b_i, na fabricação de uma unidade dos produtos $x_1,...,x_n$, respectivamente.

Dessa forma, podemos formular o problema de otimização como:

Maximizar a função:

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

Sujeita às restrições:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i (i = 1,...,m) \quad \text{e} \quad x_j \ge 0 \quad (j = 1,...,n)$$

Exemplo: Uma fábrica produz os produtos I, II e III com níveis de consumo de recursos conforme a tabela seguinte:

Recursos	Tempo disponível (em horas/mês)	Horas/ unidade dos Produtos		
		I	II	III
MAQ 01	100	2	3	1

MAQ 02	120	1	1	2
MO 01	176	2	2	3
MO 02	132	1	2	1
Lucro Unitário ($)		10	15	20
Produção Máxima (unid.)		80,0	20,0	40,0

O problema pode ser formulado como:

$$\text{maximizar } z = 10x_1 + 15x_2 + 20x_3$$

$$\text{sujeita a}\begin{cases} \left.\begin{matrix} 2x_1 + 3x_2 + x_3 \le 100 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \le 120 \end{matrix}\right] \text{(restrições de máquinas)} \\ \left.\begin{matrix} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 176 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \le 132 \end{matrix}\right] \text{(restrições de mão-de-obra)} \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

como também : $x_1 \le 80{,}0;\ \ x_2 \le 20{,}0;\ \ x_3 \le 40{,}00 \rightarrow$ restrições de mercado.

2.2.2. O problema da dieta

Considere que uma pessoa deseja minimizar o custo de sua dieta diária, mantendo os níveis de consumo recomendados para as diferentes vitaminas.

Sejam:

a) $x_1,\dots,x_n$: os níveis de produção dos n alimentos pertencentes à dieta;

b) b_i : o nível mínimo de consumo da vitamina i;

c) $a_{i1},\dots,a_{in}$: as quantidades da vitamina i, contidas nos alimentos $1,\dots,n$, respectivamente;

d) $c_1,\dots,c_n$: os custos unitários dos alimentos $1,\dots,n$, respectivamente.

Exemplo: a dieta de uma pessoa deve constar de 03 alimentos, cujos teores de vitaminas, bem como os níveis mínimos de consumo se encontram na tabela seguinte:

Vitaminas	Consumo mínimo diário (mg)	Teor vitamínico dos alimentos (mg/unid)		
		A_1	A_2	A_3
A	80	10	5	10
B	70	8	7	6
C	100	15	3	7
D	60	20	2	9
Preços dos alimentos ($ / unid)		80	32	180

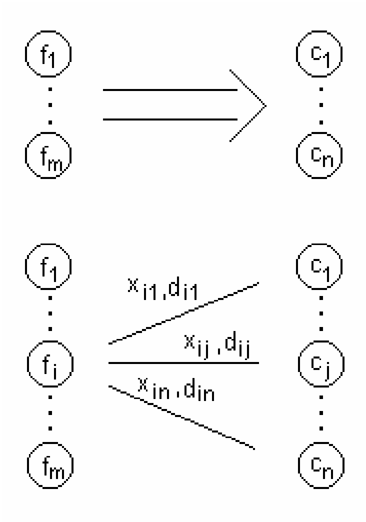
O problema pode então ser formulado como:

$$\text{minimizar } C = 80x_1 + 32x_2 + 180x_3$$

$$\text{sujeita a: } \begin{cases} 10x_1 + 5x_2 + 10x_3 \geq 80 \\ 8x_1 + 7x_2 + 6x_3 \geq 70 \\ 15x_1 + 3x_2 + 7x_3 \geq 100 \\ 20x_1 + 2x_2 + 9x_3 \geq 60 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

2.2.3. O problema do transporte

Consiste em minimizar o custo total do transporte de mercadorias de *m* centros fornecedores para *n* centros consumidores.



x_{ij}: quantidade a transportar do fornecedor i para o consumidor j.

$$z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} d_{ij}x_{ij}.$$

d_{ij} : custo unitário do transporte de i para j.

$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i$: quantidade disponível na origem i (fornecedor).

$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j$: quantidade solicitada pelo destino j (consumidor).

2.2.4. O problema da designação

Consiste de um caso particular do problema do transporte em que: $m = n$; $a_i = 1 \quad \forall i$; $b_j = 1 \quad \forall j$. O modelo assume, portanto, a seguinte forma:

$$\min \quad z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$m = n$$

$$sendo \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1; \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1$$

$$x_{ij} \geq 0, i = 1,...,n, j = 1,...,n.$$

Além dessas restrições, deve-se considerar que:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{se a origem i corresponder ao destino } j \\ 0, \text{caso contrário.} \end{cases}$$

2.3. Representação gráfica do processo de solução

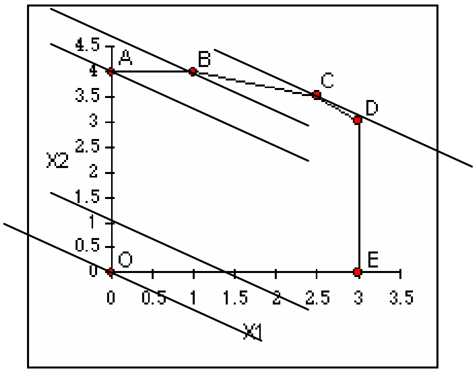
Consideremos um problema, simplificado, de atividades concorrentes, consistindo da fabricação de dois produtos (A e B), que consomem horas de máquinas e de mão-de-obra, conforme se apresenta de forma esquemática na tabela abaixo:

Recursos	Tempo disponível horas/dia	Nível de consumo dos recursos horas / unidade por produto	
		A	B
MAQ 01	13	1	3
MAQ 02	6	1	1
MO 01	6	2	-
MO 02	4	-	1
Lucro unitário ($)		12	15

O que corresponde a:

$$máx: z = 12x_1 + 15x_2$$
$$x_1 + 3x_2 \leq 13$$
$$x_1 + x_2 \leq 6$$
$$sendo: 2x_1 \leq 6 \Rightarrow x_1 \leq 3$$
$$x_2 \leq 4$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

No plano x_1 x x_2, tem-se:



Parametrizando a equação $z = 12x_1 + 15x_2$, obtemos:

$$x_2 = -\frac{4}{5}x_1 + \frac{z}{15} \qquad (1).$$

Logo, a maximização ocorrerá no ponto em que a função z assumir o máximo valor, que permite a interceptação da reta (1) com a região $\overline{OABCDE}$.

Este é o ponto C, que possui as coordenadas $x_1° = 2{,}5$ e $x_2° = 3{,}5$.

Com isso, obtemos $z = z° = 82{,}5$.

2.4. Solução algébrica - soluções básicas

O sistema $\begin{array}{l} x_1 \le 3 \\ x_2 \le 4 \\ x_1 + x_2 \le 6 \\ x_1 + 3x_2 \le 13 \\ x_{1,} x_2 \ge 0 \end{array}$ evolui para $\begin{array}{l} x_1 + x_3 = 3 \\ x_2 + x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 6 \\ x_1 + 3x_2 + x_6 = 13 \\ x_1, x_2, x_3, x_{4,} x_5, x_6 \ge 0 \end{array}$

Esse sistema possui uma solução compatível óbvia:

$$\{x_3 = 3, x_4 = 4, x_5 = 6, x_6 = 13, x_1 = 0, x_2 = 2\} \Rightarrow 0(0,0)$$

A função $z = 12x_1 + 15x_2$ assume o valor $z = 0$ para esta solução. O valor de z crescerá apenas com o crescimento de x_1 ou de x_2, o que é possível com a entrada de x_1 e/ou x_2 na base. A fim de simplificar o controle sobre o atendimento às restrições, apenas uma das variáveis será incrementada, por vez. Como a função objetivo cresce mais rapidamente com x_2 do que com x_1, então x_2 deverá entrar na base.

Adotando uma estratégia conhecida como ***"gulosa"***, a variável x_2 deve assumir o maior valor possível. Entretanto, esta não pode crescer a tal ponto de tornar outra variável negativa. Expressando as variáveis básicas em função das não-básicas, descobre-se aquela que mais rapidamente atinge o valor zero, com o crescimento de x_2. Essa deve então ceder seu lugar na base para x_2. Portanto:

$$\left.\begin{array}{l} x_3 = 3 - x_1; \quad x_1 = 0 \\ x_4 = 4 - x_2 \\ x_5 = 6 - x_1 - x_2; \quad x_1 = 0 \\ x_6 = 13 - x_1 - 3x_2; \quad x_1 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow x_4 \text{ sai da base.}$$

A nova base é então $\{x_3, x_2, x_5, x_6\}$, cuja solução básica corresponde a:

$$\{x_3 = 3, x_2 = 4, x_5 = 2, x_6 = 1, x_1 = 0, x_4 = 0\} \Rightarrow z = 60.$$

Observar que essa solução corresponde, no plano x_1 x x_2, ao ponto (0, 4), isto é, ao ponto A.

Para saber se z ainda pode crescer, devemos expressá-la em função das variáveis não-básicas:

$$z = 12x_1 + 15(4 - x_4) = 60 + 12x_1 - 15x_4$$

Como z **decresce** com x_4, esta deve permanecer fora da base. Mas z **cresce** com x_1, que deve então entrar na base. Para definir que variável deve sair da base, expressam-se as variáveis (atualmente) básicas, em função das demais. Observa-se, nas equações abaixo, que a variável x_6 é a que mais limita o crescimento de x_1.

$$\begin{array}{l} x_3 = 3 - x_1 \\ x_2 = 4 - x_4; x_4 = 0 \\ x_5 = 6 - x_1 - 4 - x_4 = 2 - x_1; x_4 = 0 \Rightarrow x_6 \text{ deve sair da base} \\ x_6 = 13 - x_1 - 12 - x_4 = 1 - x_1; x_4 = 0 \end{array}$$

Assim, a nova base fica $\{x_3, x_2, x_5, x_1\}$. Esses procedimentos podem ser implementados sobre a matriz aumentada do sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots & 6 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 13 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 - L_2 \\ L_4 - 3L_2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots & 4 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & \vdots & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -3 & 0 & 1 & \vdots & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1 - L_4 \\ \\ L_3 - L_4 \\ \\ \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & -1 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & \vdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -3 & 0 & 1 & \vdots & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \{x_3 = 2, x_2 = 4, x_5 = 1, x_1 = 1, x_4 = 0, x_6 = 0\}$$

Substituindo, na função objetivo, as variáveis básicas pelas não-básicas, usando a segunda e a quarta linhas da matriz aumentada, tem-se:

$$z = 12x_1 + 15x_2 = 12.(1 + 3x_4 - x_6) + 15 \cdot (4 - x_4)$$
$$z = 72 + 21x_4 - 12x_6 \Rightarrow x_4 \text{ deve entrar e } x_6 \text{ permanecer fora da base}$$

$$x_1 = 1 + 3x_4 - x_6;\ x_6 = 0$$
$$x_2 = 4 - x_4$$
$$x_3 = 2 - 3x_4 - x_6;\ x_6 = 0$$
$$x_5 = 1 - 2x_4 + x_6;\ x_6 = 0 \Rightarrow \text{x}_5 \text{ cede seu lugar na base para } x_4$$

Logo, tem-se:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -3/2 & 1/2 & \vdots & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & \vdots & 7/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & \vdots & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 3/2 & -1/2 & \vdots & 5/2 \end{bmatrix}$$

A nova solução básica é:

$$\{\ x_3 = 1/2,\ x_2 = 7/2,\ x_4 = 1/2,\ x_1 = 5/2, x_5 = 0,\ x_6 = 0\ \}$$

$$z = 72 + 21x_4 - 12x_6;\ x_4 = 1/2 - 1/2x_5 + 1/2x_6$$

$$z = 72 + 21/2 - 21/2x_5 + 21/2x_6 - 12x_6 \Rightarrow z = 82{,}5 - 10{,}5x_5 - 1{,}5x_6 \Rightarrow z = z° = 82{,}5$$

A entrada de x_5 ou x_6 na base reduz o valor de z. Logo $z = 82{,}5$ é o valor ótimo.

3. O Método Simplex

3.1. Teorema I

"O conjunto de todas as soluções compatíveis de um problema de programação linear é um conjunto convexo".

3.1.1. Demonstração

Seja o problema max $z = \mathbf{cx}$ sujeita a $\begin{cases} \mathbf{Ax} \le \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \ge \mathbf{0} \end{cases}$ com $c_{(nx1)}$, $x_{(nx1)}$, $A_{(mxn)}$, $b_{(mx1)}$.

Chamando C o conjunto definido por $\mathbf{Ax} \le \mathbf{b}$ e $\mathbf{x} \ge 0$.

Se $\mathbf{x}_1 \in C$ e $\mathbf{x}_2 \in C$, então:

$$\begin{cases} \mathbf{Ax}_1 \le \mathbf{b} \Rightarrow \alpha\mathbf{Ax}_1 \le \alpha\mathbf{b} \quad \text{ou} \quad \mathbf{A}(\alpha\mathbf{x}_1) \le \alpha\mathbf{b} \\ \mathbf{Ax}_2 \le \mathbf{b} \Rightarrow (1-\alpha)\mathbf{Ax}_2 \le (1-\alpha)\mathbf{b} \quad \text{ou} \quad \mathbf{A}(1-\alpha)\mathbf{x}_2 \le (1-\alpha)\mathbf{b} \\ \mathbf{x}_1 \ge 0 \quad \text{ou} \quad \text{somando}: \\ \mathbf{x}_2 \ge 0 \\ \mathbf{A}\left[\alpha\mathbf{x}_1 + (1-\alpha)\mathbf{x}_2\right] \le \mathbf{b} \end{cases}$$

Logo:

$\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x}_1 + (1-\alpha)\mathbf{x}_2 \in C$ pois :

$\alpha + (1-\alpha) = 1$ e se $0 \le \alpha \le 1$ $(0 \le 1-\alpha \le 1)$ e $\mathbf{x} \ge 0$.

Logo C é convexo.

3.2. Teorema II

"Toda solução básica compatível do sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ é um ponto extremo do conjunto convexo C ".

3.2.1. Demonstração

Considere $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ um solução básica compatível.

Então $x_i \geq 0$, $\mathrm{i} = 1,...,\mathrm{m}$.

Considere ainda $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ e $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \in C, y_i, z_i \geq 0$.

Como $\mathbf{x} \in C$, que é um conjunto convexo, então:

$$\mathbf{x} = \alpha\mathbf{y} + (1-\alpha)\mathbf{z}, 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Ou ainda:

$$x_i = \alpha y_i + (1-\alpha) z_1, \ \ (i \leq m)$$

$$x_j = 0 = \alpha y_j + (1-\alpha) z_j, \ \ (m < j \leq n).$$

a) Para $0 < \alpha < 1 \Rightarrow y_j = 0, z_j = 0, j = m,...,n.$ Assim, $\mathbf{x} = \mathbf{y} = \mathbf{z}$, já que possuem as mesmas variáveis não-básicas.

b) Para $\alpha = 0 \Rightarrow z_j = 0, j = m,...,n.$ Assim, $\mathbf{x} = \mathbf{z}$.

c) Para $\alpha = 1 \Rightarrow y_j = 0, j = m,...,n.$ Assim, $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

Portanto, **x** é *ponto extremo*.

3.3. Teorema III

"*Se a função objetivo possui máximo (ou mínimo) finito, então existe um ponto extremo do conjunto convexo C, que produz o valor ótimo da função*".

3.3.1. Demonstração

A partir do teorema II, conclui-se facilmente que o conjunto de pontos extremos, pertencentes ao espaço de soluções do problema, é um conjunto finito. Portanto, sejam $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_p$ os pontos extremos de *C*.

Seja $\mathbf{x}_0 \in \mathrm{C}$ um ponto de máximo, isto é:

$$M = z(\mathbf{x}_0) \geq z(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x}$$

Para $\alpha_j \geq 0$ e $\sum_{j=1}^{p} \alpha_j = 1,$ $\mathbf{x}_0 = \alpha_1 \mathbf{x}_1 + ... + \alpha_p \mathbf{x}_p$, já que $\mathbf{x}_0$ pertence ao conjunto convexo C.

Avaliando o valor da função objetivo no ponto $\mathbf{x}_0$, tem-se:

$$z(\mathbf{x}_0) = z(\alpha_1 \mathbf{x}_1 + ... + \alpha_p \mathbf{x}_p) = \alpha_1 z(\mathbf{x}_1) + ... + \alpha_p z(\mathbf{x}_p)$$

Seja: $\mathbf{x}_m$ um ponto extremo, tal que $z(\mathbf{x}_m) \geq z(\mathbf{x}_i), \forall i = 1,..., p$. Então, combinando essa condição com a equação acima, tem-se:

$$\alpha_1 z(\mathbf{x}_m) + \alpha_2 z(\mathbf{x}_m) + ... + \alpha_p z(\mathbf{x}_m) \geq z(\mathbf{x}_0)$$

$$ou \;\; z(\mathbf{x}_m) \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \geq z(\mathbf{x}_0)$$

Ou ainda:

$z(\mathbf{x}_m) \geq z(\mathbf{x}_0)$

Combinando com

$$z(\mathbf{x}_m) \leq z(\mathbf{x}_0) \Rightarrow z(\mathbf{x}_0) = z(\mathbf{x}_m).$$

3.3.2. Teorema IV

"Se a função objetivo assume valor máximo (mínimo) em mais de um ponto extremo, então a função tem o mesmo valor para qualquer combinação convexa desses pontos extremos".

3.3.3. Demonstração

Sejam $\mathbf{x}_1,...,\mathbf{x}_q$ pontos extremos tais que: $z(\mathbf{x}_1) = z(\mathbf{x}_2) = ... = z(\mathbf{x}_q) = M$.

Seja **x** uma combinação convexa de $\mathbf{x}_1,\cdots\mathbf{x}_q$. Então:

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{q} \alpha_j \mathbf{x}_j, \sum_{j=1}^{q} \alpha_j = 1, \alpha \geq 0,$$

Logo:

$$z(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{q} \alpha_j z(\mathbf{x}_j) = z(\mathbf{x}_q) \sum_{j=1}^{q} \alpha_j = M.$$

3.4. Forma padrão - Forma canônica

Diz-se que o sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ está na forma *padrão* (*standard*) se $x_i \geq 0$, $i = 1,...,n$ e $b_j \geq 0$, $j = 1,...,m.$ Se, além disso, o sistema apresenta uma base óbvia, diz-se que ele está na *forma canônica*.

Se a forma canônica do sistema do problema anterior for aumentada de uma equação, correspondendo a função objetivo, tem-se:

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
1z & - & 12x_1 & - & 15x_2 & + & 0x_3 & + & 0x_4 & + & 0x_5 & + & 0x_6 & = & 0 \\
0z & + & 1x_1 & + & 0x_2 & + & 1x_3 & + & 0x_4 & + & 0x_5 & + & 0x_6 & = & 3 \\
0z & + & 0x_1 & + & 1x_2 & + & 0x_3 & + & 1x_4 & + & 0x_5 & + & 0x_6 & = & 4 \\
0z & + & 1x_1 & + & 1x_2 & + & 0x_3 & + & 0x_4 & + & 1x_5 & + & 0x_6 & = & 6 \\
0z & + & 1x_x & + & 3x_2 & + & 0x_3 & + & 0x_4 & + & 0x_5 & + & 1x_6 & = & 13
\end{array}
$$

Fator limitante q	Base	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	
		1	-12	-15	0	0	0	0	0	$L_0 + 15L_2$
3/0	x_3	0	1	0	1	0	0	0	3	L_1
4/1	x_4	0	0	1	0	1	0	0	4	L_2
6/1	x_5	0	1	1	0	0	1	0	6	$L_3 - L_2$
13/3	x_6	0	1	3	0	0	0	1	13	$L_4 - 3L_2$

		z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	
	Base	1	-12	0	0	15	0	0	60	$L_0 + 12L_4$
3/1	x_3	0	1	0	1	0	0	0	3	$L_1 - L_4$
4/0	x_2	0	0	1	0	1	0	0	4	L_2
2/1	x_5	0	1	0	0	-1	1	0	2	$L_3 - L_4$
1/1	x_6	0	1	0	0	-3	0	1	1	L_4

		z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	
	Base	1	0	0	0	-21	0	12	72	$L_0 + 21/2L_3$
2/3	x_3	0	0	0	1	3	0	-1	2	$L_1 - 3/2L_3$
4/1	x_2	0	0	1	0	1	0	0	4	$L_2 - 1/2L_3$
1/2	x_5	0	0	0	0	2	1	-1	1	$1/2L_3$
1/(-3)	x_1	0	1	0	0	-3	0	1	1	$L_4 + 3/2L_3$

		z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	
	Base	1	0	0	0	0	10.5	1.5	82.5	$z^{\circ} = 82.5$
	x_3	0	0	0	1	0	-1.5	0.5	0.5	

	x_2	0	0	1	0	0	0.5	0.5	3.5
	x_4	0	0	0	0	1	0.5	-0.5	0.5
	x_1	0	1	0	0	0	1.5	0.5	2.5

3.5.1. Generalização

$$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b};\ \mathbf{A}_{(mxn)}$$
$$\mathbf{x}, \mathbf{b} \geq \mathbf{0}$$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & z & x_1 & x_2 & \cdots & x_n & x_{n+1} & \cdots & x_{n+m} & b \\
\text{Fator } q & Base & 1 & a_{01} & a_{02} & \cdots & a_{0n} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
q_1 & x_{n+1} & 0 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & \cdots & 0 & b_1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
q_m & x_{n+m} & 0 & a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & 0 & \cdots & 1 & b_m
\end{array}$$

$$a_{oj}^{(0)} = \begin{cases} -c_j,\ j = 1,\dots,n \\ 0,\ j = n+1,\dots,n+m \end{cases}$$

1. Identificar uma solução básica compatível inicial.

2. Escolher variável não-básica que deve entrar na base.

$$a_{oi} = \min a_{oj}\,;\ \ j = j_1,\dots,j_n; j_k \notin B\text{; dentre } a_{oj} < 0.$$

Seleciona-se assim a variável *i* para entrar na base.

3. Escolher a variável que deve sair da base.

$$q_l = \min\left(q_j = \frac{b_j}{a_{ji}}\right); j = 1,\dots,m;\ \text{dentre os}\quad q_j \geq 0$$

Obs: O índice *l* identifica a posição no conjunto $B = \{\cdots\}$ da variável básica que deve deixar a base.

4. Transforma-se a linha l para $a_{lk}^{(t+1)} = \frac{1}{a_{li}} a_{lk}^{(t)}$; $k = 1,\ldots,n+m+1$.

5. A fim de "zerar" os demais elementos da i-ésima coluna:

$$a_{pk}^{(t+1)} = a_{pk}^{(t)} - \left[\frac{a_{pi}}{a_{li}} a_{lk} \right]^{(t)}, \quad \begin{array}{l} p = 0,1,\ldots,n(\neq l) \\ k = 1,\ldots,n+m+1 \end{array}$$

Retorna-se ao passo dois e repetem-se os demais passos, enquanto o ótimo não for atingido.

3.6. Problemas de minimização

Esses problemas podem ser resolvidos de formas distintas:

3.6.1. $Min\ z = Max\ (-z)$

Maximiza-se o simétrico da função objetivo.

3.6.2. Alteram-se os critérios de otimalidade e de entrada na base

3.7. Situações especiais

3.7.1. Empate de v variáveis na entrada

Escolhe-se arbitrariamente qualquer das "v" variáveis para entrar na base.

Obs: O n° de iterações para alcançar o "ótimo" é função da variável escolhida.

3.7.2. Empate na saída - degeneração

Isso significa que mais de uma variável se anula ao mesmo tempo. Escolhe-se aleatoriamente uma delas para deixar a base.

Nesse caso, variáveis básicas assumem o valor **<u>zero</u>**. Diz-se que a solução é *degenerada*.

Ex : max $z = 2x_1 + 3x_2$

s.a. $x_1 \leq 3$

$x_2 \leq 4$

$x_1 + 3x_2 \leq 12$

Forma canônica:

$$\begin{cases} z - 2x_1 - 3x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 = 3 \\ x_2 + x_4 = 4 \\ x_1 + 3x_2 + x_5 = 12 \end{cases}$$

Fator q	(1)	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
	Base	1	-2	-3	0	0	0	0	$L_0 + 3L_2$
3/0	x_3	0	1	0	1	0	0	3	L_1
4/1	x_4	0	0	1	0	1	0	4	L_2
12/3	x_5	0	1	3	0	0	1	12	$L_3 - 3L_2$
	(2)	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
	Base	1	-2	0	0	3	0	12	$L_0 + 2L_3$
3/1	x_3	0	1	0	1	0	0	3	$L_1 - L_3$
4/0	x_2	0	0	1	0	1	0	4	L_2
0/1	x_5 x5	0	1	0	0	-3	1	0	L_3
	(3)	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	

	Base	1	0	0	0	-3	2	12	$L_0 + L_1$
3/3	x_3 x3	0	0	0	1	3	-1	3	$1/3L_1$
4/1	x_2	0	0	1	0	1	0	4	$L_2 + 1/3L_1$
0/(-3)	x_1	0	1	0	0	-3	1	0	$L_3 - L_1$
	(4)	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
	Base	1	0	0	1	0	1	15	$z^{\circ} = 15$
	x_4	0	0	0	1/3	1	-1/3	1	
	x_2	0	0	1	-1/3	0	1/3	3	
	x_1	0	1	0	1	0	0	3	

Se de (1) para (2) escolhermos x_5 em vez de x_4:

Fator q	(1)	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
	Base	1	-2	-3	0	0	0	0	$L_0 + L_3$
3/0	x_3	0	1	0	1	0	0	3	L_1
4/1	x_4	0	0	1	0	1	0	4	$L_2 - 1/3L_3$
12/3	x_5	0	1	3	0	0	1	12	$1/3L_3$

	(2)	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
	Base	1	-1	0	0	0	1	12	$L_0 + L_1$
3/1	x_3	0	1	0	1	0	0	3	
0/(-1/3)	x_4	0	-1/3	0	0	1	1/3	0	$L_2 + 1/3L_1$
4/(1/3)	x_2	0	1/3	1	0	0	1/3	4	$L_3 - 1/3L_1$

	(3)	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
	Base	1	0	0	1	0	1	15	$Z^{ot} = 15$
	x_1	0	1	0	1	0	0	3	
	x_4	0	0	0	1/3	1	1/3	1	
	x_2	0	0	1	-1/3	0	1/3	3	

3.7.3. Soluções Múltiplas

Ex : max $z = x_1 + 3x_2$

s.a. $x_1 \leq 3$

$x_2 \leq 4$

$x_1 + 3x_2 \leq 13$

Forma canônica:

$$\begin{cases} z - x_1 - 3x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 = 3 \\ x_2 + x_4 = 4 \\ x_1 + 3x_2 + x_5 = 13 \end{cases}$$

Fator q	(1)	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
	Base	1	-1	-3	0	0	0	0	$L_0 + 3L_2$
3/0	x_3	0	1	0	1	0	0	3	L_1
4/1	x_4	0	0	1	0	1	0	4	L_2
13/3	x_5	0	1	3	0	0	1	13	$L_3 - 3L_2$

Fator q	(2)	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
	Base	1	-1	0	0	3	0	12	$L_0 + L_3$
3/1	x_3	0	1	0	1	0	0	3	$L_1 - L_3$
4/0	x_2	0	0	1	0	1	0	4	L_2
1/1	x_5	0	1	0	0	-3	1	1	L_3

	(3)	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
	Base	1	0	0	0	00	1	13	L_0
2/3	x_3 x_3	0	0	0	1	3	-1	2	$1/3L_1$
4/1	x_2	0	0	1	0	1	0	4	$L_2 - 1/3L_1$
1/(-3)	x_1	0	1	0	0	-3	1	1	$L_3 + L_1$

	(4)	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	Base	1	0	0	0	0	1	13
	x_4	0	0	0	1/3	1	-1/3	2/3
	x_2	0	0	1	-1/3	0	1/3	10/3
	x_1	0	1	0	1	0	0	3

3.8 Solução Inicial

3.8.1. Todas as restrições do tipo $\leq$ e todos os $b_i \geq 0$

$\forall x_j \geq 0 \Rightarrow$ forma canônica (solução compatível básica óbvia).

3.8.2. $b_k < 0$, para algum *k*, ou alguma restrição do tipo $\geq$.

Nesse caso a solução básica óbvia, composta pelas *variáveis de folga*, será não compatível.

Ex:

$$\begin{aligned} &Max\ z = 2x_1 + x_2 \\ &x_1 \leq 3 \\ &x_2 \leq 4 \\ &x_1 + x_2 \geq 13 \end{aligned}$$

Para eliminar esse inconveniente, introduz-se uma *variável artificial* na k-ésima equação, cujo coeficiente deve ter sinal contrário daquele da *variável de folga* da mesma equação.

Ex :

$$x_1 + 3x_2 - x_5 + x_6 = 13$$

A fim de não alterar a k-ésima equação, deve-se garantir que a variável artificial seja nula, quando se atingir o ótimo. Isso pode ser conseguido de duas maneiras:

I. Método do "M grande"

Para não permitir que x_6 pertença à base ótima, altera-se a função-objetivo para:

$Z_{novo} = Z - Mx_6$, sendo M >> que as quantidades envolvidas no problema.

II. Método da função-objetivo artificial

Constrói-se a função $W = \sum x_{artificial}$, que deve ser minimizada. Obviamente,

$W^{ótimo} = 0$ e todos os $x_{i,\text{artificial}} = 0$.

Ex :

$$\min W = x_6 \Leftrightarrow máx(-W) = -x_6$$

Fator q	(1)	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	
	Base	1	0	0	0	0	0	1	0	$L_0 - L_3$ (linha 0 em função das variáveis não-básicas)
	x_3	0	1	0	1	0	0	0	3	L_1
	x_4	0	0	1	0	1	0	0	4	L_2
	x_6	0	1	3	0	0	-1	1	13	L_3

	(2)	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	
	Base	1	-1	-3	0	0	1	0	-13	$L_0 + 3L_2$
3/0	x_3	0	1	0	1	0	0	0	3	L_1
4/1	x_4	0	0	1	0	1	0	0	4	L_2
13/3	x_6	0	1	3	0	0	-1	1	13	$L_3 - 3L_2$

	(3)	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	
	Base	1	-1	0	0	3	1	0	-1	$L_0 + L_3$
3/1	x_3	0	1	0	1	0	0	0	3	$L_1 - L_3$
4/0	x_2	0	0	1	0	1	0	0	4	L_2
1/1	x_6	0	1	0	0	-3	-1	1	1	L_3

	(4)	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
	Base	1	0	0	0	0	0	1	0

	x_3	0	0	0	1	3	1	-1	2
	x_2	0	0	1	0	1	0	0	4
	x_1	0	1	0	0	-3	-1	1	1

	(5)	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	
	Base	1	-2	-1	0	0	0	-	0	$L_0 + L_2 + 2L_3$
	Base	1	0	0	0	-5	-2		6	
	x_3	0	0	0	1	3	1	-	2	
	x_2	0	0	1	0	1	0	-	4	
	x_1	0	1	0	0	-3	-1	-	1	