Capítulo 2

Exercícios de Método Simplex Enunciados

Problema 1

$$\max F = 10x_1 + 7x_2$$

suj. a:

$$\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & + & x_2 & \leq & 5000 \\ 4x_1 & + & 5x_2 & \leq & 15000 \\ x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Problema 2

$$\max F = 2x_1 + x_2$$

suj. a:

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & x_2 & \geq & 2 \\ x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\ x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Problema 3

$$\max F = x_1 + 2x_2$$

suj. a:

$$\begin{array}{rcrcr} -4x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & \leq & 6 \\ x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Problema 4

$$\min z = x_1 + x_2 + x_3$$

suj. a:

$$\begin{array}{rcrcrcr} -x_1 & + & x_2 & & & \geq & 1 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Problema 5

$$\max F = x + 2y + 3z$$

suj. a:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & & & \geq & 0 \\ & & y & + & z & \leq & 2 \\ -x & & & + & z & = & 0 \\ x & & & & & \in & \Re \\ & & y & , & z & \geq & 0 \end{array}$$

Capítulo 2

Exercícios de Método Simplex Resoluções

Problema 1

$$\max F = 10x_1 + 7x_2$$

suj. a:

$$\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & + & x_2 & \leq & 5000 \\ 4x_1 & + & 5x_2 & \leq & 15000 \\ x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

O problema proposto é um problema de programação linear: a função objectivo e as restrições são funções lineares das variáveis de decisão x_1 e x_2. Este exemplo simples será usado para ilustrar a aplicação do método Simplex para resolver problemas de programação linear. Embora a resolução prática de problemas deste tipo seja (sempre) feita recorrendo a programas de computador que permitem obter a solução de problemas com milhares de restrições e variáveis, é conveniente a compreensão do funcionamento da técnica para facilitar a interpretação dos resultados obtidos.

Para se aplicar o método Simplex, é necessário que o problema satisfaça os requisitos seguintes *(forma standard)*:

(a) Todas as variáveis são não negativas (só podem assumir valores positivos ou nulos);

(b) Todas as restrições são equações (ou restrições do tipo '=');

(c) Todos os termos independentes são positivos.

No nosso exemplo, a primeira e última condição são satisfeitas. Para representar o problema na forma standard é necessário transformar as duas inequações em equações. Para isso, são introduzidas no primeiro membro das inequações novas variáveis (também não negativas) com coeficiente +1. Estas variáveis representam a "folga"entre o primeiro e o segundo membro das inequações, chamando-se por isso variáveis de folga e representando-se por s (de slack).

$$\max F = 10x_1 + 7x_2$$

suj. a:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & + & s_1 & & & = & 5000 \\ 4x_1 & + & 5x_2 & & & + & s_2 & = & 15000 \\ x_1 & , & x_2 & , & s_1 & , & s_2 & \geq & 0 \end{array}$$

A aplicação do método Simplex requer o conhecimento de uma solução básica admissível inicial, que servirá de ponto de partida para o processo iterativo. Em problemas que apenas contenham restrições do tipo $\leq$, a introdução das variáveis de folga conduz a uma solução básica admissível inicial imediata: fazem-se nulas as variáveis originais do problema (no nosso exemplo x_1 e x_2), e as variáveis de folga ficam iguais aos termos independentes das equações respectivas:

$$(x_1, x_2, s_1, s_2) = (0, 0, 5000, 15000)$$

Note-se que esta solução inicial corresponde à origem da região de soluções admissíveis, o que é sempre verdade se todas as restrições de um problema forem do tipo $\leq$ com termos independentes positivos. Neste caso a origem é uma solução básica admissível obtida imediatamente com a introdução das variáveis de folga em todas as restrições. O método Simplex pode ser aplicado manualmente recorrendo a um quadro onde se representam de forma condensada todos os parâmetros do problema (matriz dos coeficientes, termos independentes e função objectivo). Sobre esse quadro são aplicadas transformações algébricas de acordo com determinadas regras, que conduzem à obtenção da solução óptima.

variáveis básicas	x_1	x_2	s_1	s_2	termos independentes
$\downarrow$					$\downarrow$
s_1	2	1	1	0	5000
s_2	4	5	0	1	15000
$-F$	10	7	0	0	0
$\nearrow$					$\uparrow$
custos marginais					simétrico do valor da função objectivo

Uma iteração consiste em trocar uma variável da base: das variáveis não básicas escolhe-se uma para entrar para a base (irá passar de zero a um valor positivo-eventualmente nulo), e das variáveis básicas é seleccionada uma para sair da base. Esta operação corresponde a "saltar"para uma solução básica admissível vizinha (ou adjacente). Matematicamente falando, duas soluções adjacentes são aquelas que diferem de apenas uma variável básica; geometricamente são dois "cantos"da região de soluções admissíveis que estão unidos por um "lado"do poliedro que representa no espaço essa região. As soluções básicas de um problema correspondem a todas as intersecções entre as restrições, considerando também as restrições $x_i \geq 0$. De entre estas, são admissíveis aquelas que são representadas apenas por variáveis não negativas:

includegraphics[scale=0.8]simplex/simplex1

variáveis básicas	x_1	x_2	s_1	s_2	termos independentes	
$\downarrow$					$\downarrow$	
$\Leftarrow s_1$	$\boxed{2}$	1	1	0	5000	$\frac{5000}{2}$(menor quociente)
s_2	4	5	0	1	15000	$\frac{15000}{4}$
$-F$	10	7	0	0	0	
$\nearrow$	$\Uparrow$				$\uparrow$	
custos marginais	o mais positivo				simétrico do valor da função objectivo	

- **Critério de entrada na base:**

  Entra na base a variável que tiver um coeficiente mais positivo na linha F. Estes coeficientes (custos marginais) representam o peso relativo das variáveis não básicas (neste caso x_1 e x_2), no valor da função objectivo. Podemos dizer assim que, entrando a variável x_1 para a base, o valor de F cresce 10 unidades por unidade de crescimento x_1. Note-se que isto apenas é verdade se na linha F existirem coeficientes nulos sob as variáveis básicas (porquê?). Na realidade, a linha de F é considerada como sendo uma equação adicional, onde F representa uma variável que nunca sai da base:

  $$F = 10x_1 + 7x_2$$

  pode ser representada como a equação seguinte:

  $$-F + 10x_1 + 7x_2 + 0s_1 + 0s_2 = 0$$

Escrito desta forma, F aparece com o coeficiente -1; daí a razão de o valor que aparece no 2º membro da linha F ser igual ao simétrico do valor da função objectivo. Sendo interpretada como uma equação, podemos sempre eliminar variáveis (usando operações de pivotagem apropriadas) por forma a que os coeficientes de F sob as variáveis básicas sejam sempre nulos.

Para um problema de minimização o critério de entrada na base será obviamente o contrário: entra na base a variável não básica que provoca um maior decrescimento no valor de F, ou seja, a que tiver um coeficiente mais negativo na linha F.

- **Critério de saída da base:**

  Sai da base a variável x_k (básica na equação i) que tiver um coeficiente $\frac{b_i}{a_{ij}}$ menor (sendo x_j a variável que entrou para a base).

  As duas equações representadas no quadro acima podem-se escrever ($x_2 = 0$, não básica):

$$\begin{array}{ccccccc} 2x_1 & + & s_1 & & & = & 5000 \\ 4x_1 & & & + & s_2 & = & 15000 \end{array}$$

  ou:

$$\begin{array}{ccccc} s_1 & = & 5000 & - & 2x_1 \\ s_2 & = & 15000 & - & 4x_1 \end{array}$$

  Entrando x_1 para a base, isso significa que x_1 vai passar de zero para um valor positivo. A variável a sair da base vai ser aquela que primeiro se anular, limitando assim o crescimento de x_1 (note-se que todas as variáveis envolvidas só podem assumir valores positivos ou nulos).

  Pela 1ª equação, x_1 pode subir até $\frac{5000}{2} = 2500$ para s_1 se anular (sair da base); pela segunda equação, o valor máximo para x_1 é $\frac{15000}{4} = 3750$. Logo, a variável a sair da base será s_1, pois quando x_1 cresce é s_1 que primeiro se anula, impondo assim o limite no crescimento da variável x_1 em 2500. Como regra prática, basta calcular os quocientes entre os termos independentes e os coeficientes da matriz sob a variável que vai entrar para a base, retirando da base a variável básica da equação que tiver o menor quociente.

  Analisemos com mais detalhe a 1ª equação acima:

  5000 (termo independente) é o valor que a variável básica s_1 tomava na iteração anterior.

  2 (coeficiente da matriz sob x_1) é o simétrico do peso da variável x_1 nessa equação. Por outras palavras, podemos dizer que s_1 decresce 2 unidades por unidade de crescimento de x_1, anulando-se (i. e. saindo da base) quando x_1 atinge $\frac{5000}{2}$.

  Podem assim ser tiradas algumas conclusões interessantes, em função do valor dos coeficientes da matriz, a_{ik}, sob a variável que foi escolhida para entrar para a base, x_k:

  $a_{ik} > 0$ x_{bi}, a variável básica na equação i, decresce a_{ik} unidades por unidade de crescimento de x_k, impondo assim um limite superior a x_k igual a $\frac{b_i}{a_{ik}}$ (b_i é o termo independente da equação i).

$a_{ik} = 0$ x_{bi}, a variável básica na equação i, não vê alterado o seu valor, quando x_k entra para a base. Isso significa que x_{bi} nunca sairá da base pois não limita de forma alguma o crescimento de x_k.

$a_{ik} < 0$ x_{bi}, a variável básica na equação i, cresce a_{ik} unidades por unidade de crescimento de x_k. Assim, do mesmo modo que para o caso anterior, x_{bi} não limita o crescimento de x_k, logo nunca sairá da base.

variáveis básicas $\downarrow$	x_1	$\cdots$	x_k	$\cdots$	x_m	b
x_{b1}	$\cdots$	$\cdots$	a_{1k}	$\cdots$	$\cdots$	b_1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\Lleftarrow x_{bi}$	$\cdots$	$\cdots$	$\boxed{a_{ik}}$	$\cdots$	$\cdots$	b_i
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{bn}	$\cdots$	$\cdots$	a_{nk}	$\cdots$	$\cdots$	b_n
$-F$	$\cdots$	$\cdots$	f_k	$\cdots$	$\cdots$	$-F_0$
			$\Uparrow$			

Com base no que se disse, podemos concluir o seguinte: se todos os coeficientes da variável que se escolheu para entrar para a base forem negativos ou nulos, isso significa que nenhuma das variáveis básicas decresce com o crescimento da nova variável candidata a básica. Assim, se esta variável pode crescer sem que qualquer das básicas se anule, então pode-se concluir que o problema não tem uma solução óptima limitada. Situações destas ocorrem quando a região de soluções admissíveis é um domínio aberto no sentido de crescimento da função objectivo.

Continuando com a resolução do exemplo dado:

base	x_1	x_2	s_1	s_2	b	
x_1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	2500	$\frac{2500}{\frac{1}{2}} = 5000$
$\Lleftarrow s_2$	0	$\boxed{3}$	-2	1	5000	$\frac{5000}{3} = 1666.7$
$-F$	0	2	-5	0	-25000	
		$\Uparrow$				

base	x_1	x_2	s_1	s_2	b
x_1	1	0	$\frac{5}{6}$	$\frac{-1}{6}$	$\frac{5000}{3}$
x_2	0	1	$\frac{-2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5000}{3}$
$-F$	0	0	$\frac{-11}{3}$	$\frac{-2}{3}$	$\frac{-85000}{3}$

Solução óptima encontrada:

Não existe nenhuma variável não básica (s_1 ou s_2, neste caso) que tenha um coeficiente positivo na linha F. Se uma dessas variáveis tivesse um coeficiente nulo, isso significava que ela poderia entrar para a base sem alterar o valor da função objectivo F (chamam-se a estas soluções alternativas à solução óptima encontrada). Note-se que as soluções alternativas assim obtidas são igualmente óptimas, já que mantêm o mesmo valor para a função objectivo F.

O valor da solução óptima para este problema seria $F = \frac{85000}{3}$ e os valores das variáveis de decisão seriam:

$$x_1 = \frac{5000}{3}, \quad x_2 = \frac{5000}{3}$$

Problema 2

$$\max F = 2x_1 + x_2$$

suj. a:

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & + & x_2 & \geq & 2 \\ x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\ x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Em primeiro lugar é necessário representar o problema na forma standard, introduzindo variáveis de folga para transformar as inequações em equações. A variável de folga da primeira restrição tem coeficiente -1 porque a inequação é do tipo $\geq$ (note-se que todas as variáveis são positivas).

$$\max F = 2x_1 + x_2$$

suj. a:

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & - & s_1 & & & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & + & & + & s_2 & = & 4 \\ x_1 & , & x_2 & , & s_1 & , & s_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Neste caso já não se obtém a solução básica inicial fazendo as variáveis de folga iguais aos termos independentes. Apesar dessa ser uma solução básica, não é admissível e como tal não pode ser usada como ponto de partida para o método Simplex.

Serão apresentados dois métodos para resolver esta questão, que permitem usar o próprio Simplex para encontrar uma solução básica admissível inicial. Os métodos são:

- **método das duas fases**
- **método das penalidades**

Antes de aplicar qualquer um dos métodos, é no entanto necessário acrescentar variáveis (chamadas **variáveis artificiais**) nas restrições que não têm variáveis básicas.

Introduzindo uma variável artificial na 1ª equação:

$$\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & x_2 & - & s_1 & & & + & a_1 & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & + & & + & s_2 & & & = & 4 \\ x_1 & , & x_2 & , & s_1 & , & s_2 & , & a_1 & \geq & 0 \end{array}$$

Seguidamente, ambos os métodos usam o método Simplex para anular (retirar da base) essas variáveis artificiais. Quando isso acontece, a solução que então se tem é uma solução básica admissível do problema original, que é usada como solução de partida para aplicar o método Simplex.

Descrição sucinta dos dois métodos:

Método das duas fases

1ª fase minimizar a função objectivo artificial $W = \sum a_i$; o objectivo desta primeira fase é retirar todas as variáveis artificiais da base, situação em que W atinge o valor mínimo de zero. A solução básica admissível assim obtida é uma solução básica admissível inicial para se aplicar o método Simplex ao problema original.

2ª fase Usando como solução básica inicial a obtida na primeira fase, resolver o problema normalmente usando o algoritmo do simplex, depois de eliminar do quadro a linha correspondente à função objectivo artificial W, e as colunas relativas às variáveis artificiais, a_i.

Método das penalidades

A função objectivo $\max F = 2x_1 + x_2$ é substituída pela função objectivo $\max F = 2x_1 + x_2 - M \sum a_i$, onde M tem um valor muito elevado. Dado que se trata de um problema de maximização, a melhoria da função objectivo implica que as variáveis artificiais passem a valer zero (sejam retiradas da base). A solução básica assim obtida é uma solução básica admissível para o problema original.

Aplicando o **Método das duas fases** ao exemplo apresentado:

1ª fase:

Pretende-se minimizar $W = \sum a_i = a_1$. Como nos interessa exprimir o W apenas em função de variáveis não básicas (porquê?), vamos substituir cada variável artificial pela expressão que a representa apenas em função de variáveis não básicas.

Da 1ª equação (onde a_1 é variável básica e as outras variáveis são não básicas):

$$x_1 + x_2 - s_1 + a_1 = 2$$

pode-se escrever a_1 em função de variáveis não básicas:

$$a_1 = 2 - x_1 - x_2 + s_1$$

Assim, a função objectivo artificial a minimizar será:

$$W = a_1 = 2 - x_1 - x_2 + s_1$$

O primeiro quadro Simplex está representado a seguir. Dado que se pretende minimizar W, teremos que escolher para entrar na base a variável com coeficiente mais negativo na linha W. Dado que as variáveis x_1 e x_2 têm o mesmo coeficiente (-1), podemos escolher uma das duas variáveis para entrar na base.

base	x_1	x_2	s_1	s_2	a_1	b	
$\leftleftarrows a_1$	$\boxed{1}$	1	-1	0	1	2	$\frac{2}{1}$
s_2	1	1	0	1	0	4	$\frac{4}{1}$
$-F$	2	1	0	0	0	0	
$-W$	-1	-1	1	0	0	-2	(simétrico de W)
	$\upuparrows$						

base	x_1	x_2	s_1	s_2	a_1	b
x_1	1	1	-1	0	1	2
s_2	0	0	1	1	-1	2
$-F$	0	-1	2	0	-2	-4
$-W$	0	0	0	0	1	0

O quadro apresentado corresponde ao fim da 1ª fase do método das duas fases, dado que a função objectivo W foi minimizada até zero ($a_1 = 0$). A solução básica admissível assim obtida é uma solução básica admissível inicial para se aplicar o método Simplex ao problema original.

2ª fase:

Nesta fase pretende-se maximizar a função objectivo inicial, F, tomando como quadro de partida o último quadro da 1ª fase, depois de eliminar a linha correspondente a W e as colunas relativas às variáveis artificiais.

base	x_1	x_2	s_1	s_2	b
x_1	1	1	−1	0	2
$\leftleftarrows s_2$	0	0	$\boxed{1}$	1	2
$-F$	0	−1	2	0	−4
			$\upuparrows$		

Note-se que x_1 nunca poderia sair da base! Entrando s_1 para a base, x_1 cresce 1 unidade por unidade de crescimento de s_1, logo nunca se iria anular (e consequentemente sair da base). s_2 sai da base limitando o crescimento de s_1 em $\frac{2}{1} = 2$.

base	x_1	x_2	s_1	s_2	b
x_1	1	1	0	1	4
s_1	0	0	1	1	2
$-F$	0	−1	0	−2	−8

Não existe nenhuma variável não básica (x_2 ou s_2, neste caso) que tenha um coeficiente positivo na linha F. O valor da solução óptima para este problema seria $F = 8$ e os valores das variáveis de decisão seriam:

$$x_1 = 4, \quad x_2 = 0, \quad s_1 = 2, \quad s_2 = 0$$

Aplicando o **Método das penalidades** ao exemplo apresentado:

Como nos interessa exprimir F apenas em função de variáveis não básicas (porquê?), vamos substituir cada variável artificial pela expressão que a representa apenas em função de variáveis não básicas.

Da 1ª equação (onde a_1 é variável básica e as outras variáveis são não básicas):

$$x_1 + x_2 - s_1 + a_1 = 2$$

pode-se escrever a_1 em função de variáveis não básicas:

$$a_1 = 2 - x_1 - x_2 + s_1$$

Assim, a função objectivo a maximizar será:

$$\begin{aligned} F &= 2x_1 + x_2 - Ma_1 \\ &= 2x_1 + x_2 - M(2 - x_1 - x_2 + s_1) \\ &= -2M + (2 + M)x_1 + (1 + M)x_2 - Ms_1 \end{aligned}$$

E o quadro seguinte é o primeiro quadro simplex.

Nota: A linha dos custos marginais está dividida em duas com a única finalidade de simplificar os cálculos. A soma das duas linhas é que representa o custo marginal (p.ex.:

$2 + M$).

base	x_1	x_2	s_1	s_2	a_1	b	
$\leftleftarrows a_1$	$\boxed{1}$	1	-1	0	1	2	$\frac{2}{1}$
s_2	1	1	0	1	0	4	$\frac{4}{1}$
$-F$	2	1		0	0	0	
	M	M	$-M$			$2M$	
	$\upuparrows$						

A partir deste quadro, não é necessário manter a coluna correspondente a a_1, dado que a_1 já saiu da base.

base	x_1	x_2	s_1	s_2	b
x_1	1	1	-1	0	2
$\leftleftarrows s_2$	0	0	$\boxed{1}$	1	2
$-F$	0	-1	2	0	-4
			$\upuparrows$		

base	x_1	x_2	s_1	s_2	b
x_1	1	1	0	1	4
s_1	0	0	1	1	2
$-F$	0	-1	0	-2	-8

Não existe nenhuma variável não básica (x_2 ou s_2, neste caso) que tenha um coeficiente positivo na linha F. O valor da solução óptima para este problema seria $F = 8$ e os valores das variáveis de decisão seriam:

$$x_1 = 4, \quad x_2 = 0, \quad s_1 = 2, \quad s_2 = 0$$

Problema 3

$$\max F = x_1 + 2x_2$$

suj. a:

$$\begin{array}{rcrcl} -4x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & \leq & 6 \\ x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Representação na forma standard:

$$\max F = x_1 + 2x_2$$

suj. a:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} -4x_1 & + & x_2 & + & s_1 & & & = & 4 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & & & + & s_2 & = & 6 \\ x_1 & , & x_2 & , & s_1 & , & s_2 & \geq & 0 \end{array}$$

base	x_1	x_2	s_1	s_2	b
$\Leftarrow s_1$	-4	$\boxed{1}$	1	0	4
s_2	2	-3	0	1	6
$-F$	1	2	0	0	0
		$\Uparrow$			

base	x_1	x_2	s_1	s_2	b
x_2	-4	1	1	0	4
s_2	-10	0	3	1	18
$-F$	9	0	-2	0	-8
	$\Uparrow$				

x_1 pode entrar para a base (i. e., crescer a partir de 0), conseguindo um ganho de 9 unidades em F por unidade de crescimento de x_1. No entanto, nem x_2 nem s_2 decrescem com o crescimento de x_1, logo não limitam o crescimento de x_1. Isto significa que a região de soluções admissíveis é um domínio aberto no sentido de crescimento de F (solução não limitada).

Problema 4

$$\min z = x_1 + x_2 + x_3$$

suj. a:

$$\begin{array}{rcrcrcl} -x_1 & + & x_2 & & & \geq & 1 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Representação na forma standard:

$$\min z = x_1 + x_2 + x_3$$

suj. a:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcl} -x_1 & + & x_2 & & & - & s_1 & + & a_1 & & & = & 1 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & & & & & + & a_2 & = & 2 \\ x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & s_1 & , & a_1 & , & a_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Aplicando o **Método das duas fases** ao exemplo apresentado:

1ª fase:

Pretende-se minimizar $W = \sum a_i = a_1 + a_2$. Como nos interessa exprimir o W apenas em função de variáveis não básicas (porquê?), vamos substituir cada variável artificial pela expressão que a representa apenas em função de variáveis não básicas.

Da 1ª equação (onde a_1 é variável básica e as outras variáveis são não básicas):

$$-x_1 + x_2 - s_1 + a_1 = 1$$

pode-se escrever a_1 em função de variáveis não básicas:

$$a_1 = 1 + x_1 - x_2 + s_1$$

Da 2ª equação (onde a_2 é variável básica e as outras variáveis são não básicas):

$$2x_1 - 2x_2 - x_3 + a_2 = 2$$

pode-se escrever a_2 em função de variáveis não básicas:

$$a_2 = 2 - 2x_1 + 2x_2 + x_3$$

Assim, a função objectivo artificial a minimizar será:

$$W = a_1 + a_2 = 1 + x_1 - x_2 + s_1 + 2 - 2x_1 + 2x_2 + x_3$$

$$W = 3 - x_1 + x_2 + x_3 + s_1$$

O primeiro quadro Simplex está representado a seguir. Dado que se pretende minimizar W, teremos que escolher para entrar na base a variável com coeficiente mais negativo na linha W, neste caso será x_1.

base	x_1	x_2	x_3	s_1	a_1	a_2	b	
a_1	-1	1	0	-1	1	0	1	
$\leftleftarrows a_2$	$\boxed{2}$	-2	-1	0	0	1	2	
$-F$	1	1	1	0	0	0	0	
$-W$	-1	1	1	1	0	0	-3	(simétrico de W)
	$\upuparrows$							

base	x_1	x_2	x_3	s_1	a_1	a_2	b	
a_1	0	0	$-\frac{1}{2}$	-1	1	$\frac{1}{2}$	2	
x_1	1	-1	$-\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	1	
$-F$	0	2	$\frac{3}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	-1	
$-W$	0	0	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	-2	(simétrico de W)

Atingiu-se o valor mínimo de W (não existindo nenhum coeficiente negativo na linha W, não se pode baixar mais o seu valor), mas esse mínimo não é zero. Quer isto dizer que não é possível encontrar uma solução básica admissível para o problema original, ou seja, a região de soluções admissíveis é um conjunto vazio.

Aplicando o **Método das penalidades** ao exemplo apresentado:

Como nos interessa exprimir F apenas em função de variáveis não básicas (porquê?), vamos substituir cada variável artificial pela expressão que a representa apenas em função de variáveis não básicas.

Da 1ª equação (onde a_1 é variável básica e as outras variáveis são não básicas):

$$-x_1 + x_2 - s_1 + a_1 = 1$$

pode-se escrever a_1 em função de variáveis não básicas:

$$a_1 = 1 + x_1 - x_2 + s_1$$

Da 2ª equação (onde a_2 é variável básica e as outras variáveis são não básicas):

$$2x_1 - 2x_2 - x_3 + a_2 = 2$$

pode-se escrever a_2 em função de variáveis não básicas:

$$a_2 = 2 - 2x_1 + 2x_2 + x_3$$

Assim, a função objectivo a minimizar será:

$$\begin{aligned} F \quad &= x_1 + x_2 + x_3 + M\,(a_1 + a_2) \\ &= 2x_1 + x_2 - M\,(1 + x_1 - x_2 + s_1 + 2 - 2x_1 + 2x_2 + x_3) \\ &= 3M + (1 - M)x_1 + (1 + M)x_2 + (1 + M)x_3 + Ms_1 \end{aligned}$$

E o quadro seguinte é o primeiro quadro simplex.

Nota: A linha dos custos marginais está dividida em duas com a única finalidade de simplificar os cálculos. A soma das duas linhas é que representa o custo marginal (p.ex.: $1 - M$).

base	x_1	x_2	x_3	s_1	a_1	a_2	b
a_1	-1	1	0	-1	1	0	1
$\leftleftarrows a_2$	$\boxed{2}$	-2	-1	0	0	1	2
$-F$	1	1	1	0	0	0	0
	$-M$	M	M	M	0	0	$-3M$
	$\upuparrows$						

base	x_1	x_2	x_3	s_1	a_1	a_2	b
a_1	0	0	$-\frac{1}{2}$	-1	1	$\frac{1}{2}$	2
x_1	1	-1	$-\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	1
$-F$	0	2	$\frac{3}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	-1
	0	0	$\frac{1}{2}M$	M	0	$\frac{1}{2}M$	$-2M$

Atingiu-se o valor mínimo de F (todos os custos marginais são $\geq$ zero) sem que tenham saído da base toda as variáveis artificiais. Isso significa que não é possível encontrar uma solução básica admissível para o problema original, ou seja, a região de soluções admissíveis é um conjunto vazio.

Problema 5

$$\max F = x + 2y + 3z$$

suj. a:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & & & \geq & 0 \\ & & y & + & z & \leq & 2 \\ -x & & & + & z & = & 0 \\ x & & & & & \in & \Re \\ & & y & , & z & \geq & 0 \end{array}$$

Como a variável x não é limitada apenas a valores não negativos, é necessário substituí-la pela diferença de duas variáveis não negativas:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & = & x_1 & - & x_2 & & \\ & & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

A representação do problema na forma standard (depois de introduzidas as variáveis artificiais) será então:

$$\max F = x_1 - x_2 + 2y + 3z$$

suj. a:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcrcrcl} x_1 & - & x_2 & - & y & & & - & s_1 & & & + & a_1 & & & = & 0 \\ & & & & y & + & z & & & + & s_2 & & & & & = & 2 \\ -x_1 & + & x_2 & & & + & z & & & & & & & + & a_2 & = & 0 \\ x_1 & , & x_2 & , & y & , & z & , & s_1 & , & s_2 & , & a_1 & , & a_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Aplicando o **Método das duas fases** ao exemplo apresentado:

1ª fase:

Pretende-se minimizar $W = \sum a_i = a_1 + a_2$. Como nos interessa exprimir o W apenas em função de variáveis não básicas (porquê?), vamos substituir cada variável artificial pela expressão que a representa apenas em função de variáveis não básicas.

Da 1ª equação (onde a_1 é variável básica e as outras variáveis são não básicas):

$$x_1 - x_2 - y - s_1 + a_1 = 0$$

pode-se escrever a_1 em função de variáveis não básicas:

$$a_1 = -x_1 + x_2 + y + s_1$$

Da 3ª equação (onde a_2 é variável básica e as outras variáveis são não básicas):

$$-x_1 + x_2 + z + a_2 = 0$$

pode-se escrever a_2 em função de variáveis não básicas:

$$a_2 = x_1 - x_2 - z$$

Assim, a função objectivo artificial a minimizar será:

$$W = a_1 + a_2 = -x_1 + x_2 + y + s_1 + x_1 - x_2 - z = y + s_1 - z$$

O primeiro quadro Simplex está representado a seguir. Dado que se pretende minimizar W, teremos que escolher para entrar na base a variável com coeficiente mais negativo na linha W, neste caso será z.

base	x_1	x_2	y	z	s_1	s_2	a_1	a_2	b
a_1	1	−1	−1	0	−1	0	1	0	0
s_2	0	0	1	1	0	1	0	0	2
$\Leftarrow a_2$	−1	1	0	$\boxed{1}$	0	0	0	1	0
$-F$	1	−1	2	3	0	0	0	0	0
$-W$	0	0	1	−1	1	0	0	0	0
				$\upuparrows$					

Note-se que embora W seja já zero (a solução básica é degenerada porque a_1 e a_2 são iguais a zero), ainda há variáveis artificiais na base que devem sair para se obter uma solução básica inicial do problema original.

base	x_1	x_2	y	z	s_1	s_2	a_1	a_2	b
$\Leftarrow a_1$	$\boxed{1}$	−1	−1	0	−1	0	1	0	0
s_2	1	−1	1	0	0	1	0	−1	2
z	−1	1	0	1	0	0	0	1	0
$-F$	4	−4	2	0	0	0	0	−3	0
$-W$	−1	1	1	0	1	0	0	1	0
	$\upuparrows$								

base	x_1	x_2	y	z	s_1	s_2	a_1	a_2	b
x_1	1	−1	−1	0	−1	0	1	0	0
$\Leftarrow s_2$	0	0	$\boxed{2}$	0	1	1	−1	−1	2
z	0	0	−1	1	−1	0	1	1	0
$-F$	0	0	6	0	4	0	−4	−3	0
$-W$	0	0	0	0	0	0	1	1	0
			$\upuparrows$						

Note-se que embora a solução actual representada no quadro acima seja degenerada ($x_1 = 0$ e $z = 0$), o processo iterativo não entra em ciclo, uma vez que a próxima solução é necessariamente não degenerada. Com efeito, entrando y para a base as variáveis x_1 e z vão crescer (coeficientes a_{13} e a_{33} iguais a -1) uma unidade por unidade de crescimento de y, passando de zero para um valor positivo.

2ª fase:

Nesta fase pretende-se maximizar a função objectivo inicial, F, tomando como quadro de partida o último quadro da 1ª fase, depois de eliminar a linha correspondente a W e as colunas relativas às variáveis artificiais.

base	x_1	x_2	y	z	s_1	s_2	b
x_1	1	−1	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
$\Leftarrow y$	0	0	1	0	$\boxed{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2}$	1
z	0	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
$-F$	0	0	0	0	1	−3	−6
					$\upuparrows$		

base	x_1	x_2	y	z	s_1	s_2	b
x_1	1	-1	1	0	0	1	2
s_1	0	0	2	0	1	1	2
z	0	0	1	1	0	1	2
$-F$	0	0	-2	0	0	-4	-8

Solução óptima encontrada.

Analisemos agora cuidadosamente as restrições do problema:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & & & \geq & 0 \\ & & y & + & z & \leq & 2 \\ -x & & & + & z & = & 0 \\ x & & & & & \in & \Re \\ & & y & , & z & \geq & 0 \end{array}$$

Da terceira equação pode-se retirar que $z = x$. Dado que $z \geq 0$ então $x \geq 0$. Podemos assim escrever o problema equivalente ao problema dado, mas de resolução muito mais simples (já na forma standard):

$$\max F = x + 2y + 3z = 4x + 2y$$

suj. a:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x & - & y & - & s_1 & & & + & a_1 & = & 0 \\ x & + & y & & & + & s_2 & & & = & 2 \\ x & , & y & , & s_1 & , & s_2 & , & a_1 & \geq & 0 \end{array}$$

1ª fase:

Pretende-se minimizar $W = \sum a_i = a_1$. Como nos interessa exprimir o W apenas em função de variáveis não básicas (porquê?), vamos substituir cada variável artificial pela expressão que a representa apenas em função de variáveis não básicas.

Da 1ª equação (onde a_1 é variável básica e as outras variáveis são não básicas):

$$x - y - s_1 + a_1 = 0$$

pode-se escrever a_1 em função de variáveis não básicas:

$$a_1 = -x + y + s_1$$

Assim, a função objectivo artificial a minimizar será:

$$W = a_1 = -x + y + s_1$$

O primeiro quadro Simplex está representado a seguir. Dado que se pretende minimizar W, teremos que escolher para entrar na base a variável com coeficiente mais negativo na linha W, neste caso será x.

base	x	y	s_1	s_2	a_1	b
$\Leftarrow a_1$	$\boxed{1}$	-1	-1	0	1	0
s_2	1	1	0	1	0	2
$-F$	4	2	0	0	0	0
$-W$	-1	1	1	0	0	0
	$\Uparrow$					

base	x	y	s_1	s_2	a_1	b
x	1	-1	-1	0	1	0
$\Leftarrow s_2$	0	$\boxed{2}$	1	1	-1	2
$-F$	0	6	4	0	-4	0
$-W$	0	0	0	0	1	0
		$\Uparrow$				

2ª fase:

base	x	y	s_1	s_2	b
x	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
$\Leftarrow y$	0	1	$\boxed{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2}$	1
$-F$	0	0	1	-3	-6
			$\Uparrow$		

base	x	y	s_1	s_2	b
x	1	1	0	1	2
s_1	0	2	1	1	2
$-F$	0	-2	0	-4	-8
			$\Uparrow$		

Solução óptima: $x = z = 2$, $y = 0$, $s_1 = 2$, $s_2 = 0$, $F = 8$.
Aplicando o **Método das penalidades** ao exemplo apresentado:
Como nos interessa exprimir F apenas em função de variáveis não básicas (porquê?), vamos substituir cada variável artificial pela expressão que a representa apenas em função de variáveis não básicas.
Da 1ª equação (onde a_1 é variável básica e as outras variáveis são não básicas):

$$x_1 - x_2 - y - s_1 + a_1 = 0$$

pode-se escrever a_1 em função de variáveis não básicas:

$$a_1 = -x_1 + x_2 + y + s_1$$

Da 3ª equação (onde a_2 é variável básica e as outras variáveis são não básicas):

$$-x_1 + x_2 + z + a_2 = 0$$

pode-se escrever a_2 em função de variáveis não básicas:

$$a_2 = x_1 - x_2 - z$$

Assim, a função objectivo a maximizar será:

$$\begin{aligned} F &= x_1 - x_2 + 2y + 3z - M\,(a_1 + a_2) \\ &= x_1 - x_2 + 2y + 3z - M\,(-x_1 + x_2 + y + s_1 + x_1 - x_2 - z) \\ &= x_1 + x_2 + (2 - M)y + (3 + M)z - Ms_1 \end{aligned}$$

E o quadro seguinte é o primeiro quadro simplex.

Nota: A linha dos custos marginais está dividida em duas com a única finalidade de simplificar os cálculos. A soma das duas linhas é que representa o custo marginal (p.ex.: $2 - M$).

base	x_1	x_2	y	z	s_1	s_2	a_1	a_2	b
a_1	1	-1	-1	0	-1	0	1	0	0
s_2	0	0	1	1	0	1	0	0	2
$\Leftarrow a_2$	-1	1	0	$\boxed{1}$	0	0	0	1	0
$-F$	1	-1	2	3	0	0	0	0	0
	0	0	$-M$	$+M$	$-M$	0	0	0	0
				$\upuparrows$					

base	x_1	x_2	y	z	s_1	s_2	a_1	a_2	b
$\Leftarrow a_1$	$\boxed{1}$	-1	-1	0	-1	0	1	0	0
s_2	1	-1	1	0	0	1	0	-1	2
z	-1	1	0	1	0	0	0	1	0
$-F$	4	-4	2	0	0	0	0	-3	0
	$+M$	$-M$	$-M$	0	$-M$	0	0	$-M$	0
	$\upuparrows$								

base	x_1	x_2	y	z	s_1	s_2	a_1	a_2	b
x_1	1	-1	-1	0	-1	0	1	0	0
$\Leftarrow s_2$	0	0	$\boxed{2}$	0	1	1	-1	-1	2
z	0	0	-1	1	-1	0	1	1	0
$-F$	0	0	6	0	4	0	-4	-3	0
	0	0	0	0	0	0	$-M$	$-M$	0
			$\upuparrows$						

Note-se que embora a solução actual representada no quadro acima seja degenerada ($x_1 = 0$ e $z = 0$), o processo iterativo não entra em ciclo, uma vez que a próxima solução é necessariamente não degenerada. Com efeito, entrando y para a base as variáveis x_1 e z vão crescer (coeficientes a_{13} e a_{33} iguais a -1) uma unidade por unidade de crescimento de y, passando de zero para um valor positivo.

base	x_1	x_2	y	z	s_1	s_2	b
x_1	1	-1	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
$\Leftarrow y$	0	0	1	0	$\boxed{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2}$	1
z	0	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
$-F$	0	0	0	0	1	-3	-6
					$\upuparrows$		

base	x_1	x_2	y	z	s_1	s_2	b
x_1	1	-1	1	0	0	1	2
s_1	0	0	2	0	1	1	2
z	0	0	1	1	0	1	2
$-F$	0	0	-2	0	0	-4	-8

Solução óptima encontrada.

Analisemos agora cuidadosamente as restrições do problema:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & & & \geq & 0 \\ & & y & + & z & \leq & 2 \\ -x & & & + & z & = & 0 \\ x & & & & & \in & \Re \\ & & y & , & z & \geq & 0 \end{array}$$

Da terceira equação pode-se retirar que $z = x$. Dado que $z \geq 0$ então $x \geq 0$. Podemos assim escrever o problema equivalente ao problema dado, mas de resolução muito mais simples (já na forma standard):

$$\max F = x + 2y + 3z = 4x + 2y$$

suj. a:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x & - & y & - & s_1 & & & + & a_1 & = & 0 \\ x & + & y & & & + & s_2 & & & = & 2 \\ x & , & y & , & s_1 & , & s_2 & , & a_1 & \geq & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} F &= 4x + 2y - M(a_1) \\ &= 4x + 2y - M(-x + y + s_1) \\ &= (4 + M)x + (2 - M)y - Ms_1 \end{aligned}$$

base	x	y	s_1	s_2	a_1	b
$\Leftarrow a_1$	$\boxed{1}$	-1	-1	0	1	0
s_2	1	1	0	1	0	2
$-F$	4	2	0	0	0	0
	$+M$	$-M$	$-M$	0	0	0
	$\Uparrow$					

A variável artificial foi retirada da base.

base	x	y	s_1	s_2	b
x	1	-1	-1	0	0
$\Leftarrow s_2$	0	$\boxed{2}$	1	1	2
$-F$	0	6	4	0	0
		$\Uparrow$			

base	x	y	s_1	s_2	b
x	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
$\Leftarrow y$	0	1	$\boxed{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2}$	1
$-F$	0	0	1	-3	-6
			$\Uparrow$		

base	x	y	s_1	s_2	b
x	1	1	0	1	2
s_1	0	2	1	1	2
$-F$	0	-2	0	-4	-8
			$\Uparrow$		

Solução óptima: $x = z = 2$, $y = 0$, $s_1 = 2$, $s_2 = 0$, $F = 8$.