Modelagem e Análise de Sistemas Dinâmicos – DCA0110

Prof. Anderson Cavalcanti

Slide 02 – Modelos Contínuos de Sistemas

“Nada façam por ambição egoísta ou por vaidade, mas humildemente considerem os outros superiores a vocês mesmos.

Cada um cuide, não somente dos seus interesses, mas também dos interesses dos outros.” Filipenses 2:3-4

Sumário da Apresentação

- Introdução aos modelos contínuos de sistemas dinâmicos;
- Equações Diferenciais;
- Aproximação linear de sistemas não-lineares;
- Função de transferência;
- Diagramas de Blocos;
- Grafos de fluxo de sinal;
- Modelos em Variáveis de Estado.

Introdução

- A escolha da representação matemática de um sistema é um passo muito importante para a obtenção do seu modelo e a consequente análise do mesmo;
- As equações diferenciais são uma boa representação para sistemas dinâmicos e podem ser do tipo ordinárias (EDO) ou parciais (EDP);
- No contexto dessa disciplina, apenas EDOs serão consideradas;
- Quando as EDOs são lineares ou puderem ser linearizadas, então a transformada de Laplace será uma ferramenta útil na solução das mesmas;
- Simplificações nas relações físicas dos sistemas são úteis e comuns em muitos casos.

Modelos de Equações Diferenciais

- EDOs são obtidas a partir das leis físicas que regem o processo a ser modelado;
- Para sistemas elétricos existe as Leis de Kirchhoff, para sistemas mecânicos translacionais as Leis de Newton e assim sucessivamente;
- Esse tipo de modelagem é denominada modelagem fenomenológica;
- Linearizações das leis físicas são comuns e úteis para diversos tipos de sistema.

Modelos de Equações Diferenciais

- Generalização das variáveis entre e através dos principais sistemas físicos:

Sistema	Variável através	Variável através integrada	Variável entre	Variável entre integrada
Elétrico	Corrente, i	Carga, q	Tensão, v	—
Mecânico translacional	Força, F	Momento translacional, P	Velocidade linear, v	Deslocamento linear, d
Mecânico rotacional	Torque, T	Momento angular, h	Velocidade angular, ω	Deslocamento angular, θ
Fluido	Vazão, Q	Volume, V	Pressão, P	—
Térmico	Fluxo de calor, q	Energia térmica, H	Temperatura, T	—

Exemplo Ilustrativo 1

- Sistema massa-mola-amortecedor viscoso

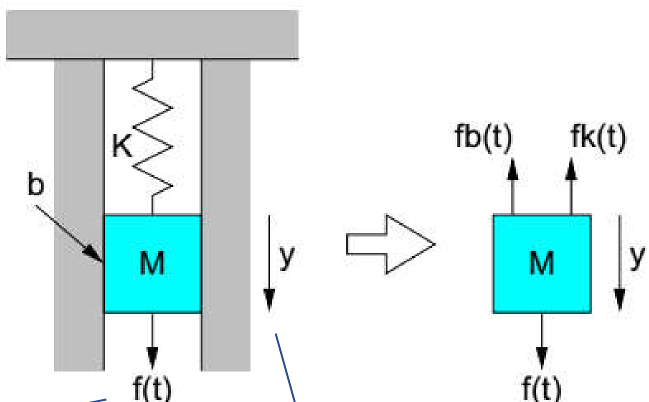
$$F = M \cdot a \Rightarrow$$
$$f(t) - b \cdot v - K \cdot y = M \cdot a \Rightarrow$$

$$f(t) - f_b(t) - f_k(t) = M \cdot a \Rightarrow$$
$$\boxed{M \cdot \ddot{y} + b \cdot \dot{y} + K \cdot y = f(t)}$$

Reescrevendo a equação com a variável velocidade ao invés da variável posição:

$$v(t) = \frac{dy}{dt} \Rightarrow$$

$$\boxed{M\dot{v} + bv + K \int v \cdot dt = f(t)}$$

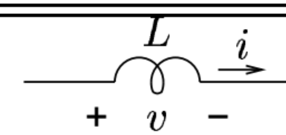
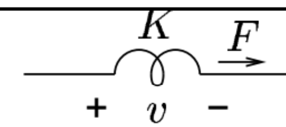
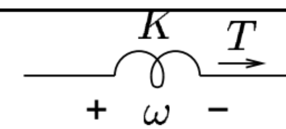
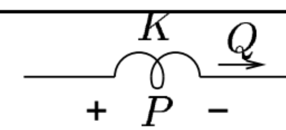


Variável de Entrada

Variável de Saída

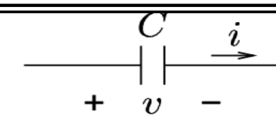
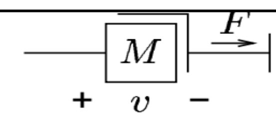
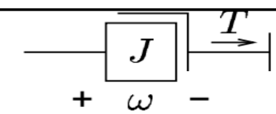
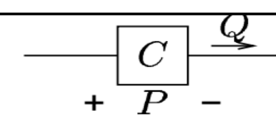
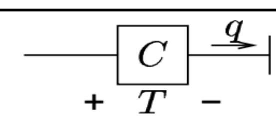
Equações Diferenciais para elementos ideais

- Elementos indutivos

Tipo de elemento	Elemento físico	Equação descritiva	Energia E ou Potência P	Símbolo
Indutivo	Indutância elétrica	$v = L\frac{di}{dt}$	$E = \frac{1}{2}Li^2$	
	Mola translacional	$v = \frac{1}{K}\frac{dF}{dt}$	$E = \frac{1}{2}\frac{F^2}{K}$	
	Mola rotacional	$\omega = \frac{1}{K}\frac{dT}{dt}$	$E = \frac{1}{2}\frac{T^2}{K}$	
	Inércia fluida	$P = I\frac{dQ}{dt}$	$E = \frac{1}{2}IQ^2$	

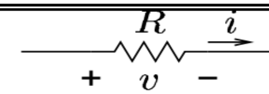
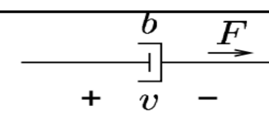
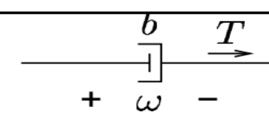
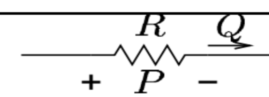
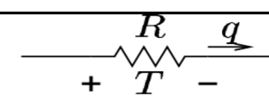
Equações Diferenciais para elementos ideais

- Elementos capacitivos

Tipo de elemento	Elemento físico	Equação descritiva	Energia E ou Potência P	Símbolo
Capacitivo	Capacitância elétrica	$i = C\frac{dv}{dt}$	$E = \frac{1}{2}Cv^2$	
	Massa (inércia)	$F = M\frac{dv}{dt}$	$E = \frac{1}{2}Mv^2$	
	Momento de inércia	$T = J\frac{d\omega}{dt}$	$E = \frac{1}{2}J\omega^2$	
	Capacitância fluida	$Q = C\frac{dP}{dt}$	$E = \frac{1}{2}CP^2$	
	Capacitância térmica	$q = C\frac{dT}{dt}$	$E = CT$	

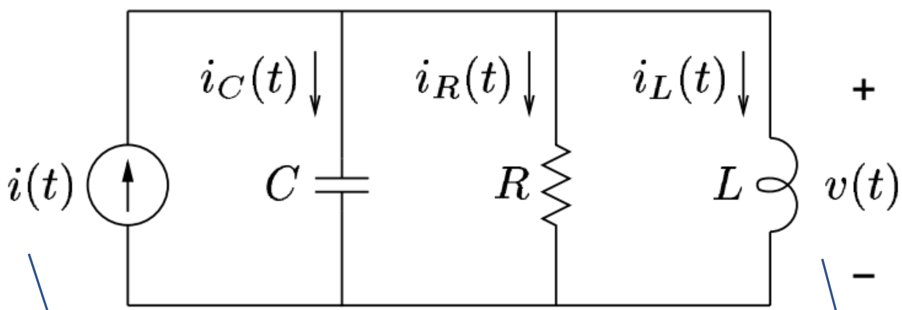
Equações Diferenciais para elementos ideais

- Elementos dissipativos

Tipo de elemento	Elemento físico	Equação descritiva	Energia E ou Potência P	Símbolo
Dissipadores	Resistência elétrica	$i = \frac{1}{R} v$	$P = \frac{1}{R} v^2$	
	Amortecedor translacional	$F = bv$	$P = bv^2$	
	Amortecedor rotacional	$T = b\omega$	$P = b\omega^2$	
	Resistência fluida	$Q = \frac{1}{R} P$	$P = \frac{1}{R} P^2$	
	Resistência térmica	$q = \frac{1}{R} T$	$P = \frac{1}{R} T$	

Exemplo Ilustrativo 2

- Circuito RLC – Encontrar a EDO que represente a relação entrada/saída



$$i_c(t) + i_r(t) + i_l(t) = i(t) \Rightarrow$$

$$\boxed{C \cdot \dot{v} + \frac{1}{R} \cdot v + \frac{1}{L} \cdot \int v \cdot dt = i(t)}$$

Variável de Entrada

Variável de Saída

Equivalência entre os sistemas

- Sistemas mecânico x Sistema elétrico

$$M\dot{v} + bv + K\int v \cdot dt = f(t)$$

$$C \cdot \dot{v} + \frac{1}{R} \cdot v + \frac{1}{L} \cdot \int v \cdot dt = i(t)$$

Velocidade linear

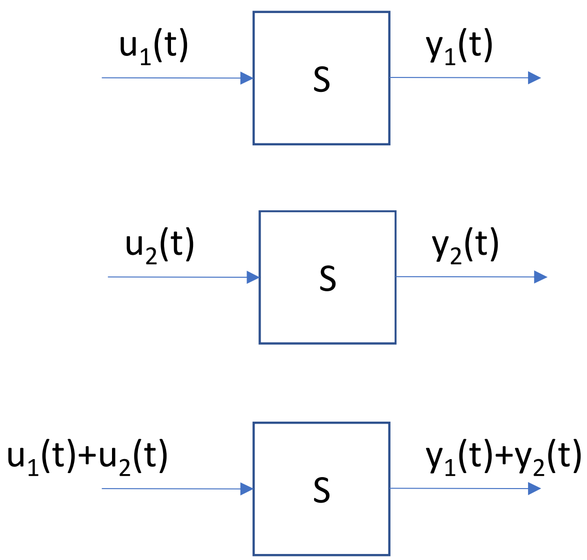
Tensão Elétrica

Aproximação Linear de Sistemas Não-Lineares

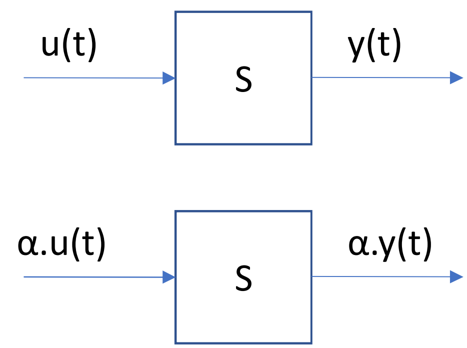
- A maioria dos sistemas físicos pode ser descrito por uma relação linear quando suas variáveis variam pouco;
- Quando a variação da variável é grande, usualmente uma descrição linear desses sistema não é satisfatória;
- Analisaremos a condição para que um sistema possa ser considerado linear (princípios da superposição e da homogeneidade) e mostraremos como aproximar sistemas não-lineares através de modelos lineares.

Condição de Linearidade de um Sistema

- Princípio da Superposição:



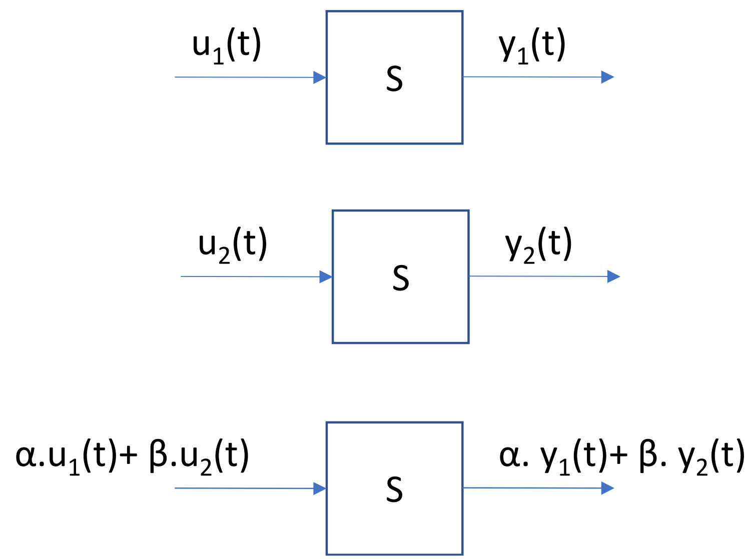
- Princípio da Homogeneidade:



α é uma constante

Condição de Linearidade de um Sistema

- Para que um sistema seja linear, deve obedecer tanto ao princípio da superposição quanto ao princípio da homogeneidade;
- Matematicamente, isso corresponde a:



Exemplo: Linear ou Não-Linear?

- $y = x^2$ → Não-linear pois fere o princípio da superposição
- $y = mx + b$ → Não–linear pois fere o princípio da homogeneidade

  - Considerando o sistema em um ponto de operação (x_{PO}, y_{PO}) para pequenas mudanças Δx e Δy:

    $x_1 = x_{PO}$; $\quad y_1 = m.x_1 + b = m.x_{PO} + b = y_{PO}$

    $x_2 = x_{PO} + \Delta x$; $\quad y_2 = m.x_2 + b = m.(x_{PO} + \Delta x) + b = y_{PO} + m.\Delta x \rightarrow y_2 - y_{PO} = m.\Delta x$

  - Assim, a variação $\Delta y = y_2 - y_{PO}$ do sinal de saída em torno do ponto de operação y_{PO} é dada por:

$$\boxed{\Delta y = m.\Delta x}$$

Linearização por Expansão em Série de Taylor

- Considerando um sinal de saída de um sistema como uma função de uma entrada $y(t) = g[x(t)]$, a expansão em série de Taylor em torno do ponto de operação x_{PO} é dada por:

$$y = g(x) = g(x_{PO}) + \left.\frac{dg}{dx}\right|_{x=x_{PO}} \frac{(x - x_{PO})}{1!} + \left.\frac{d^2g}{dx^2}\right|_{x=x_{PO}} \frac{(x - x_{PO})^2}{2!} + \cdots$$

- Para variações pequenas em torno do ponto de operação, a função expandida pode ser bem representada considerando apenas o primeiro termo da série.

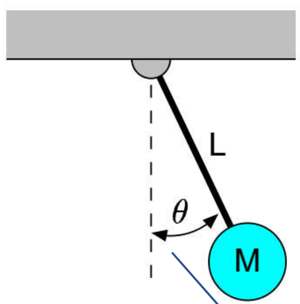
$$y = g(x_{PO}) + \left.\frac{dg}{dx}\right|_{x=x_{PO}} (x - x_{PO}) = y_{PO} + m(x - x_{PO})$$

Linearização por Expansão em Série de Taylor

- Usualmente o ponto de operação escolhido é um ponto de equilíbrio do sistema, ou seja, um ponto no qual as derivadas temporais de qualquer ordem são nulas. No ponto de equilíbrio, o sistema, na ausência de perturbações, permanece com suas variáveis de entrada/saída inalteradas.

Exemplo Ilustrativo 3

- Pêndulo Simples



$$T = MgL\sin\theta$$

Variável de Entrada

Variável de Saída

- Linearização no Ponto de Equilíbrio

$$\theta_{PO} = 0^o \qquad T_{PO} = 0$$

$$T - T_{PO} \cong MgL \left. \frac{d(\sin\theta)}{d\theta} \right|_{\theta=\theta_{PO}} (\theta - \theta_{PO})$$

$$\begin{aligned} T &= MgL(\cos 0^o)(\theta - 0^o) \\ &= MgL\theta \end{aligned}$$

Esta aproximação é razoavelmente precisa para a faixa $-\pi/4 \leq \theta \leq \pi/4$. Por exemplo, a resposta do modelo linear para uma oscilação que não ultrapassa $\pm 30^o$ não difere em mais do que 2% da resposta do modelo não-linear. ■

Linearização por Expansão em Série de Taylor

- Sistemas com mais de uma variável de entrada:

$$y = g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

- Para cada entrada, um ponto de operação é definido $x_{1PO},\ x_{2PO},\ \cdots,\ x_{nPO}$

$$\begin{aligned} y = g(x_{1PO}, x_{2PO}, \cdots, x_{nPO}) &+ \left.\frac{\partial g}{\partial x_1}\right|_{PO} (x_1 - x_{1PO}) \\ &+ \left.\frac{\partial g}{\partial x_2}\right|_{PO} (x_2 - x_{2PO}) \\ &+ \cdots \\ &+ \left.\frac{\partial g}{\partial x_n}\right|_{PO} (x_n - x_{nPO}) \end{aligned}$$

Exemplo Ilustrativo 4

- Deseja-se linearizar a EDO abaixo em seu ponto de equilíbrio:

$$\ddot{y} + y^2\dot{y} + 2y = u$$

- Considerando $\ddot{y}_{PO} = 0$ e $\dot{y}_{PO} = 0$, temos o ponto de operação $y_{PO} = u_{PO}/2.$
- Definindo novas variáveis auxiliares:

$$z = \ddot{y} \qquad u_1 = y \qquad u_2 = \dot{y} \qquad u_3 = u$$

$$z_{PO} = 0 \qquad u_{1PO} = y_{PO} = \frac{u_{PO}}{2} \qquad u_{2PO} = 0 \qquad u_{3PO} = u_{PO}$$

Exemplo Ilustrativo 4

$$z = z_{PO} + \left.\frac{\partial g}{\partial u_1}\right|_{PO} (u_1 - u_{1PO}) + \left.\frac{\partial g}{\partial u_2}\right|_{PO} (u_2 - u_{2PO}) + \left.\frac{\partial g}{\partial u_3}\right|_{PO} (u_3 - u_{3PO})$$

$$\frac{\partial g}{\partial u_1} = -2u_1u_2 - 2 \qquad \frac{\partial g}{\partial u_2} = -{u_1}^2 \qquad \frac{\partial g}{\partial u_3} = 1$$

$$\left.\frac{\partial g}{\partial u_1}\right|_{PO} = -2 \qquad \left.\frac{\partial g}{\partial u_2}\right|_{PO} = -\frac{{u_{PO}}^2}{4} \qquad \left.\frac{\partial g}{\partial u_3}\right|_{PO} = 1$$

$$z = -2(u_1 - u_{1PO}) - \left(\frac{{u_{PO}}^2}{4}\right) u_2 + (u_3 - u_{3PO}) \Rightarrow$$

$$\ddot{y} = -2(y - y_{PO}) - \left(\frac{{u_{PO}}^2}{4}\right) \dot{y} + (u - u_{PO})$$

Exemplo Ilustrativo 4

- Definindo as variáveis:

$$\Delta y = y - y_{PO} \text{ e } \Delta u = u - u_{PO}$$

- então:

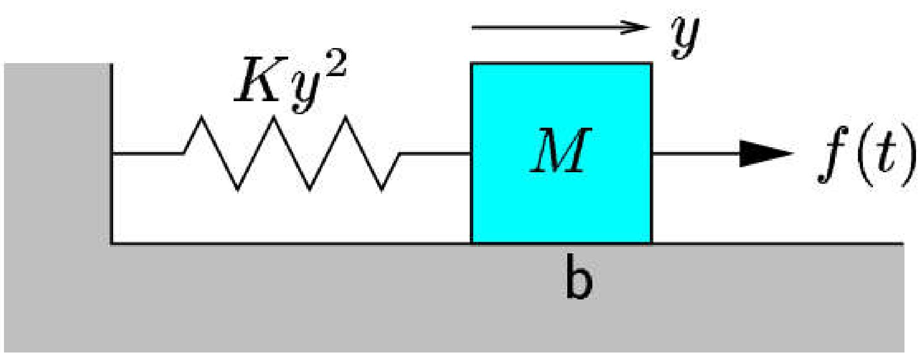
$$\begin{cases} \dot{\Delta y} = \dot{y} \\ \ddot{\Delta y} = \ddot{y} \end{cases}$$

- A equação linearizada pode ser reescrita como:

$$\ddot{\Delta y} + \left(\frac{{u_{PO}}^2}{4}\right)\dot{\Delta y} + 2\Delta y = \Delta u$$

Exemplo Ilustrativo 5

- Sistema massa-mola não-linear-amortecedor



$$M = 1.0\text{kg}$$
$$K = 25\text{N}/\text{m}^2$$
$$f(t) = 9 + 0.3\sin t,$$
$$b = 3\text{Ns}/\text{m}$$

- Encontre o modelo que relaciona a força f(t) e o deslocamento da massa y(t);
- Linearize o modelo em torno do ponto de equilíbrio;
- Encontra a solução da EDO linearizada.

Exemplo Ilustrativo 5

- Encontre o modelo que relaciona a força f(t) e o deslocamento da massa y(t):

$$f - b.\dot{y} - K.y^2 = M.\ddot{y}$$

$$f - 3\dot{y} - 25y^2 = \ddot{y}$$

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + 25y^2 = f$$

Exemplo Ilustrativo 5

- Linearização do Modelo
- Ponto de Equilíbrio: $f = f_{PO}$ $\ddot{y} = 0$ e $\dot{y} = 0$

$$25{y_{PO}}^2 = f_{PO} \quad \Rightarrow \quad y_{PO} = 0.2\sqrt{f_{PO}}$$

- Aplicação da definição da série de Taylor no Ponto de Equilíbrio:

$z = \ddot{y}$ $\quad z_{PO} = 0$

$u_1 = y$ $\quad u_{1PO} = y_{PO} = 0.2\sqrt{f_{PO}}$

$u_2 = \dot{y}$ $\quad u_{2PO} = 0$

$u_3 = f$ $\quad u_{3PO} = f_{PO}$

$$z = g(u_1, u_2, u_3) = u_3 - 3u_2 - 25{u_1}^2$$

Exemplo Ilustrativo 5

- Aplicação da definição da série de Taylor no Ponto de Equilíbrio:

$$z = z_{PO} + \left.\frac{\partial g}{\partial u_1}\right|_{PO} (u_1 - u_{1PO}) + \left.\frac{\partial g}{\partial u_2}\right|_{PO} (u_2 - u_{2PO}) + \left.\frac{\partial g}{\partial u_3}\right|_{PO} (u_3 - u_{3PO})$$

$$z = -50u_{1PO}(u_1 - u_{1PO}) - 3\,(u_2 - u_{2PO}) + (u_3 - u_{3PO})$$

$$\Delta\ddot{y} + 10\sqrt{f_{PO}}\Delta\dot{y} + 30\Delta y = \Delta f$$

- Em que:

$$\Delta y = y - y_{PO} \qquad \Delta f = f - f_{PO}$$

Exemplo Ilustrativo 5

- Com $f(t) = 9 + 0.3\sin(t)$, o ponto de operação mais natural para essa condição de operação é $f_{PO} = 9$, o que nos fornece $y_{PO} = 0.6$. Dessa forma, $\Delta y = y - 0.6$ e $\Delta f = f - 9$. A equação linearizada então é dada por:

$$\ddot{\Delta} y + 3\dot{\Delta} y + 30\Delta y = \Delta f$$

Exemplo Ilustrativo 5

- Resolução da EDO linearizada através da Transformada de Laplace
  - Considerando $F(s)$ e $Y(s)$ como sendo as Transformadas de Laplace de $\Delta f(t)$ e $\Delta y(t)$ respectivamente, aplicamos a transformada sobre a EDO em questão:

$$s^2Y(s) - s\Delta y(0) - \dot{\Delta} y(0) + 3[sY(s) - \Delta y(0)] + 30Y(s) = F(s)$$

Lembremos que:

$$\mathcal{L}[\ddot{g}(t)] = s^2G(s) - sg(0) - \dot{g}(0)$$

$$\mathcal{L}[\dot{g}(t)] = sG(s) - g(0)$$

Exemplo Ilustrativo 5

- Como o sistema estava em repouso, então $y(0) = 0$ e $\dot{y}(0) = 0$ e com as mudanças de variáveis, teremos que $\Delta y(0) = -0.6$ e $\Delta\dot{y}(0) = 0$, então:

$$[s^2 + 3s + 30]Y(s) = F(s) - 0.6s - 1.8$$

- Resolveremos a Transformada inversa considerando que:

$$\Delta f(t) = 0.3 \sin t \quad \Rightarrow \quad F(s) = \frac{0.3}{s^2 + 1}$$

Exemplo Ilustrativo 5

- Considerando o sinal $F(s)$, a transformada da saída do Sistema é dada por:

$$Y(s) = \frac{1}{s^2+3s+30}\left(\frac{0.3}{s^2+1} - 0.6s - 1.8\right) = \frac{-0.6s^3 - 1.8s^2 - 0.6s - 1.5}{(s^2+1)(s^2+3s+30)}$$

- Para calcular a transformada inversa, expandiremos em frações parciais da seguinte forma:

$$Y(s) = \frac{0.01024}{s^2+1} - \frac{0.001059s}{s^2+1} - \frac{1.807}{s^2+3s+30} - \frac{0.5989s}{s^2+3s+30}$$

Exemplo Ilustrativo 5

- Aplicando a transformada inversa (ver tabela) em cada um dos termos da expansão teremos:

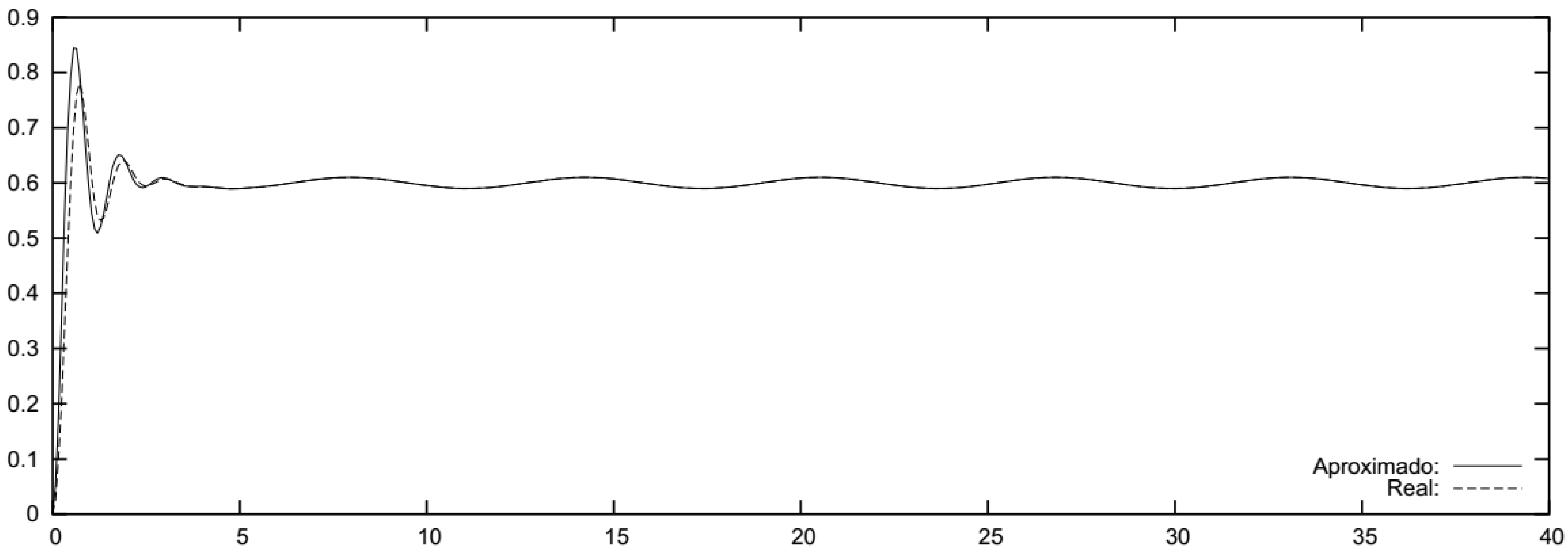
$$\begin{aligned}\Delta y(t) &= 0.01024\sin t - 0.001059\cos t - (1.807/30)[5.695e^{-1.5t}\sin(5.268t)] \\ &\quad - 0.5989[e^{-1.5t}\cos(5.268t) - 0.2847e^{-1.5t}\sin(5.268t)] \quad \Rightarrow \\ \Delta y(t) &= 0.01024\sin t - 0.001059\cos t - e^{-1.5t}[0.1725\sin(5.268t) + 0.5989\cos(5.268t)]\end{aligned}$$

- Recordando que $\Delta y = y - 0.6$, teremos que:

$$\begin{aligned}y(t) &= 0.6 + 0.01024\sin t - 0.001059\cos t \\ &\quad - e^{-1.5t}[0.1725\sin(5.268t) + 0.5989\cos(5.268t)] \\ y(t) &= 0.6 + 0.01029\sin(t - 0.1030) - 0.6232e^{-1.5t}\cos(5.268t - 0.2804)\end{aligned}$$

Exemplo Ilustrativo 5

- Comparação entre a aproximação linear e o sistema não-linear



Funções de Transferência

- É a relação entre a transformada de Laplace da variável de saída e a transformada de Laplace da variável de entrada, com todas as condições iniciais assumidas como nulas. Funções de transferência são definidas apenas para sistemas lineares e invariantes no tempo;
- A função de transferência de um sistema pode ser obtida a partir da EDO que o descreve considerando as condições iniciais como nulas;

Transformada de Laplace

- Na análise de sistemas dinâmicos se observa o comportamento da saída do referido sistema para uma determinada entrada. Isso equivale a encontrar a solução da Equação Diferencial Ordinária (EDO) linear que modela o sistema para uma determinada condição inicial.
- Uma poderosa ferramenta matemática que auxilia a resolução de EDOs lineares é a Transformada de Laplace. A Transformada de Laplace converte uma função contínua no tempo em uma função numa variável s que é complexa.

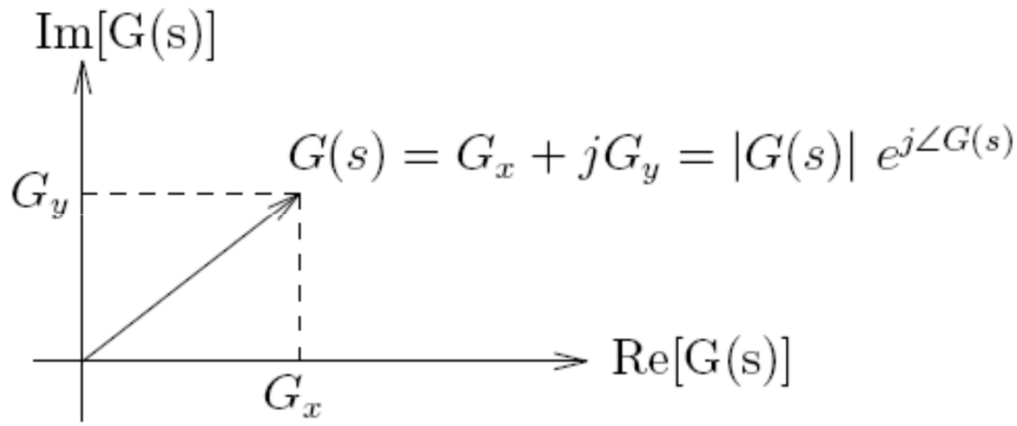
Transformada de Laplace

- Uma função $G(s)$ da variável complexa $s = \sigma + j\omega$ é racional se $G(s)$ pode ser expressa como a divisão de dois polinômios da variável complexa s. Uma função racional $G(s)$ pode ser representada da seguinte forma:

$$G(s) = G_x + jG_y$$

Transformada de Laplace

- Graficamente a função de variável complexa pode ser representada como a seguir:



- em que:

$$|G(s)| = \sqrt{G_x^2 + G_y^2}$$

$$\angle G(s) = \tan^{-1}\left(G_y / G_x\right)$$

Transformada de Laplace

- Definição e Região de Convergência: Para uma função $f(t)$ com $t \geq 0$, define-se a Transformada de Laplace de $f(t)$ como sendo a função complexa $F(s)$ obtida da seguinte forma:

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

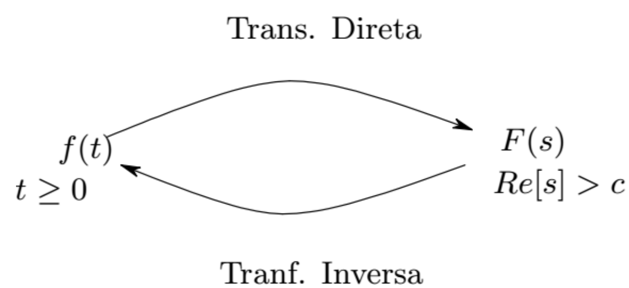
- em que $s = \sigma + j\omega$ é a variável complexa introduzida pela transformada.

Transformada de Laplace

- Sob certas condições, podemos também definir a Transformada de Laplace Inversa:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) e^{st} ds$$

- em que $t \geq 0$ e c é um número real associado à região do plano $s = \sigma + j\omega$ onde a função $F(s)$está definida. Esta região é chamada de região de convergência da Transformada de Laplace. Dentro dessa região, as funções $f(t)$para $t \geq 0$ e $F(s)$ estão ligadas de maneira biunívoca.



Exemplo: Região de convergência da Transformada de Laplace

- Seja $f(t) = e^{2t}$, para $t \geq 0$, calcule a transformada de Laplace da função e determine sua região de convergência.

$$
\begin{aligned}
F(s) &= \mathcal{L}[f(t)] = \int_{0^-}^{\infty} e^{2t}e^{-st}dt = \frac{-1}{s-2}e^{-(s-2)t}|_{0^-}^{\infty} \\
&= \frac{-1}{s-2}[\lim_{t\to\infty} e^{-(s-2)t} - \lim_{t\to 0^-} e^{-(s-2)t}] = \frac{1}{s-2} - \frac{1}{s-2}\lim_{t\to\infty} e^{-(s-2)t}
\end{aligned}
$$

Note que $s = \sigma + j\omega$ *e*

$$|e^{-j\omega t}| = |cos\omega t + jsen\omega t| = 1.$$

Assim,

$$
\lim_{t\to\infty} e^{-(s-2)t} = \begin{cases} \pm\infty & para\ Re[s] = \sigma < 2 \\ indefinido & para\ Re[s] = \sigma = 2 \\ 0 & para\ Re[s] = \sigma > 2. \end{cases}
$$

Exemplo: Região de convergência da Transformada de Laplace

- Logo, a transformada de Laplace da função e^{2t}, $t \geq 0$ só está definida na região do plano complexo definida por $Re[s] > 2$ e nessa região obtemos:

$$F(s) = \mathcal{L}[e^{2t}] = \frac{1}{s-2}$$

Exemplo Ilustrativo 6

- Considerando a EDO do circuito RLC apresentado:

$$C \cdot \dot{v} + \frac{1}{R} \cdot v + \frac{1}{L} \cdot \int v \cdot dt = i(t) \quad \Rightarrow \quad C \cdot sV(s) + \frac{1}{R} \cdot V(s) + \frac{1}{L} \cdot \frac{V(s)}{s} = I(s) \quad \Rightarrow$$

$$G(s) = \frac{V(s)}{I(s)} = \frac{RLs}{RLCs^2 + Ls + R}$$

Função de transferência que relaciona a transformada da tensão (saída) com a transformada da corrente (entrada).

Funções de Transferência

- Considerando um Sistema Linear e Invariante no Tempo (SLIT):

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y = b_0 u^{(m)} + b_1 u^{(m-1)} + \cdots + b_{m-1}\dot{u} + b_m u \qquad (n \geq m)$$

- A função de transferência do sistema acima é dada por:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\mathcal{L}[saída]}{\mathcal{L}[entrada]} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1}s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n}$$

Todas as condições iniciais são nulas

Funções de Transferência

- A FT de um sistema é um modelo matemático no sentido que constitui um método operacional de expressar a EDO que relaciona a variável de saída à variável de entrada;
- A FT é uma propriedade intrínseca do sistema, independentemente da magnitude e da natureza do sinal de entrada ou função de excitação;
- A FT inclui as unidades necessárias para relacionar o sinal de entrada ao sinal de saída; no entanto, ela não fornece qualquer informação concernente à estrutura física do sistema (As FTs de muitos sistemas fisicamente diferentes podem ser idênticas;

Funções de Transferência

- Se a FT de um sistema é conhecida, a saída ou resposta do sistema pode ser estudada para vários tipos de entrada com vistas ao entendimento da dinâmica do sistema;
- Se a FT de um sistema é desconhecida, há metodologias de obtenção da mesma de forma experimental através da aplicação de sinais entradas no sistema e observando o sinal de saída (resposta) do sistema;
- As raízes do numerador da FT são chamadas de zeros do sistema e as raízes do denominador são chamadas de polos do sistema.

Diagrama de Blocos

- A representação de sistemas dinâmicos lineares é comumente realizada através de um diagrama que relaciona seus vários subsistemas chamado diagrama de blocos;
- Um diagrama de blocos é um conjunto de blocos operacionais unidirecionais que representam a função de transferência dos subsistemas;
- A interligação dos blocos é realizada de forma a expressar as relações de interdependência das variáveis dentro do sistema.

Diagrama de Blocos

- Redução de Diagrama de Blocos: usualmente quando queremos obter uma função de transferência equivalente, podemos reduzir o diagrama de blocos utilizando técnicas de redução.

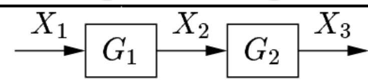
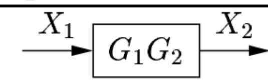
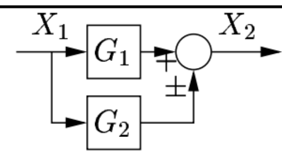
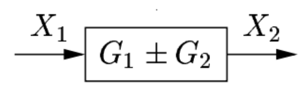
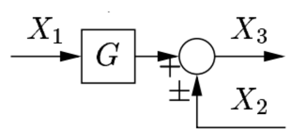
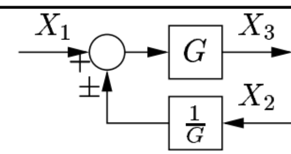
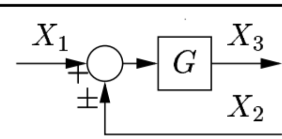
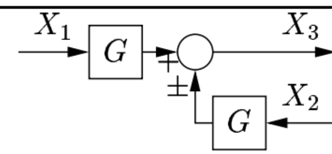
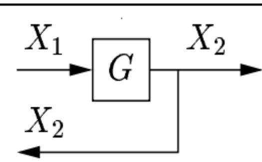
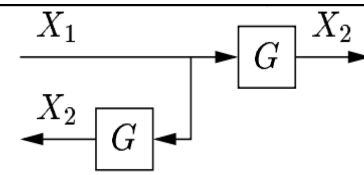
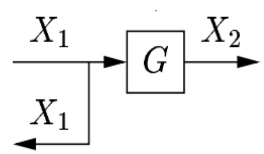
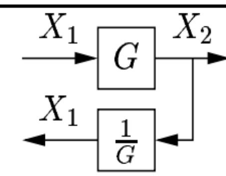
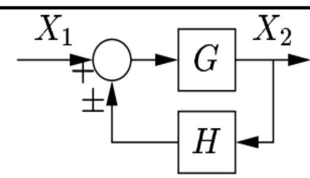
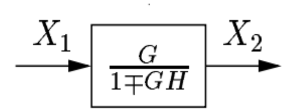
Transformação	**Diagrama original**	**Diagrama equivalente**
Combinar blocos em cascata (série)		
Combinar blocos em paralelo		
Mover um somador para antes de um bloco		
Mover um somador para depois de um bloco		

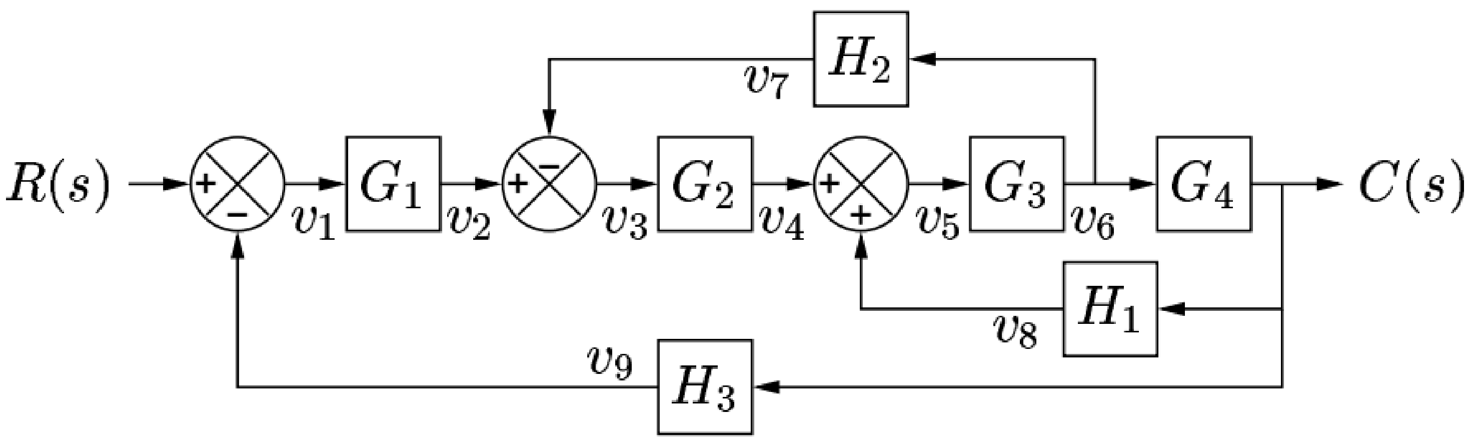
Diagrama de Blocos

- Redução do diagrama de blocos

Transformação	Diagrama original	Diagrama equivalente
Mover uma derivação para antes de um bloco		
Mover uma derivação para depois de um bloco		
Eliminar um laço realimentado		

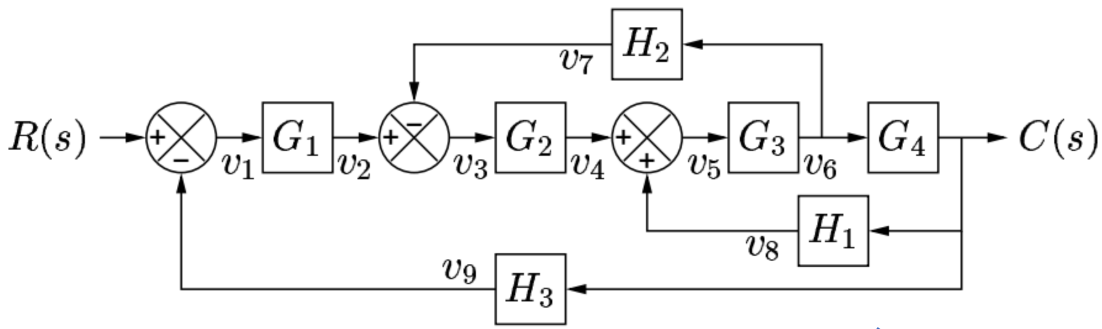
Exemplo Ilustrativo 7

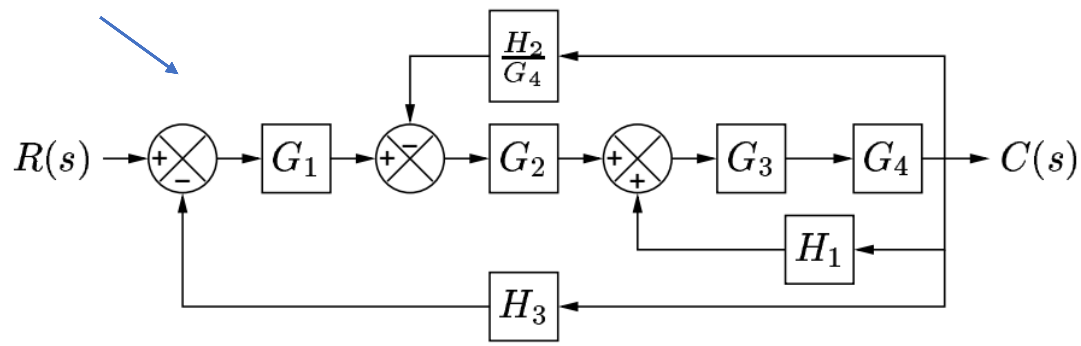
- Simplificação de Diagrama de Blocos



Exemplo Ilustrativo 7

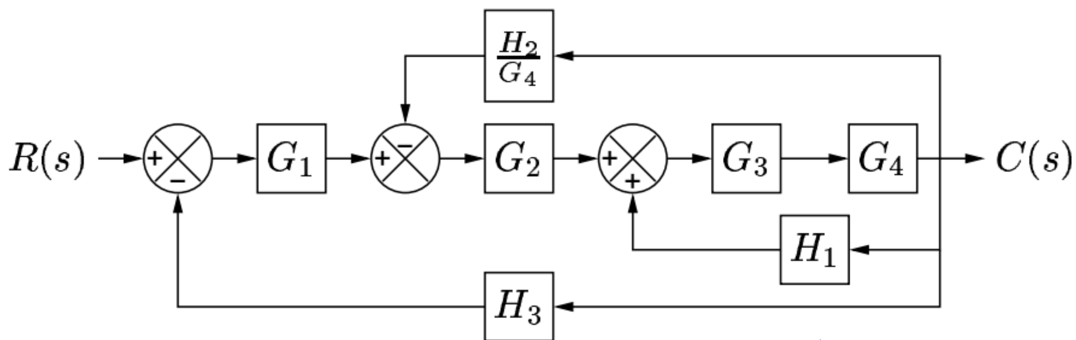
- Simplificação de Diagrama de Blocos: Mover H_2 para depois do bloco G_4

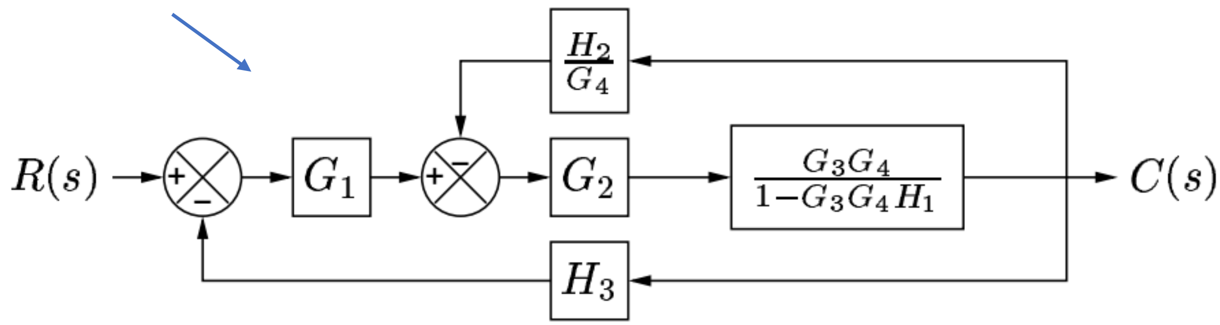




Exemplo Ilustrativo 7

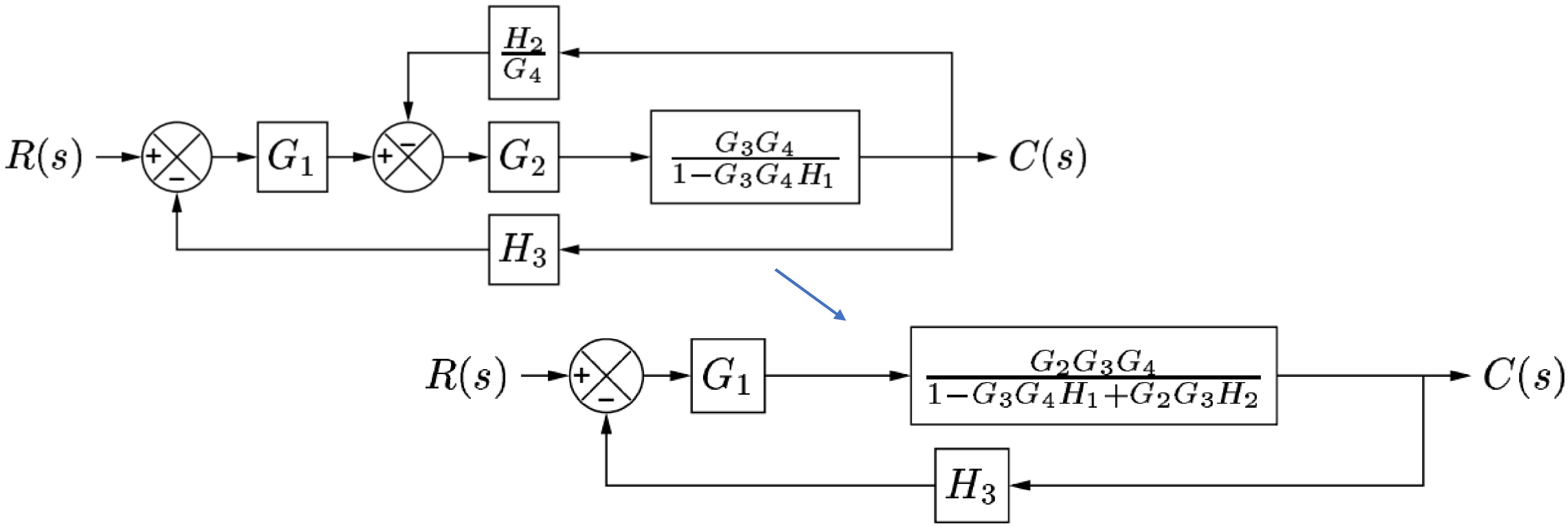
- Simplificação de Diagrama de Blocos: Eliminar o laço com realimentação H_1





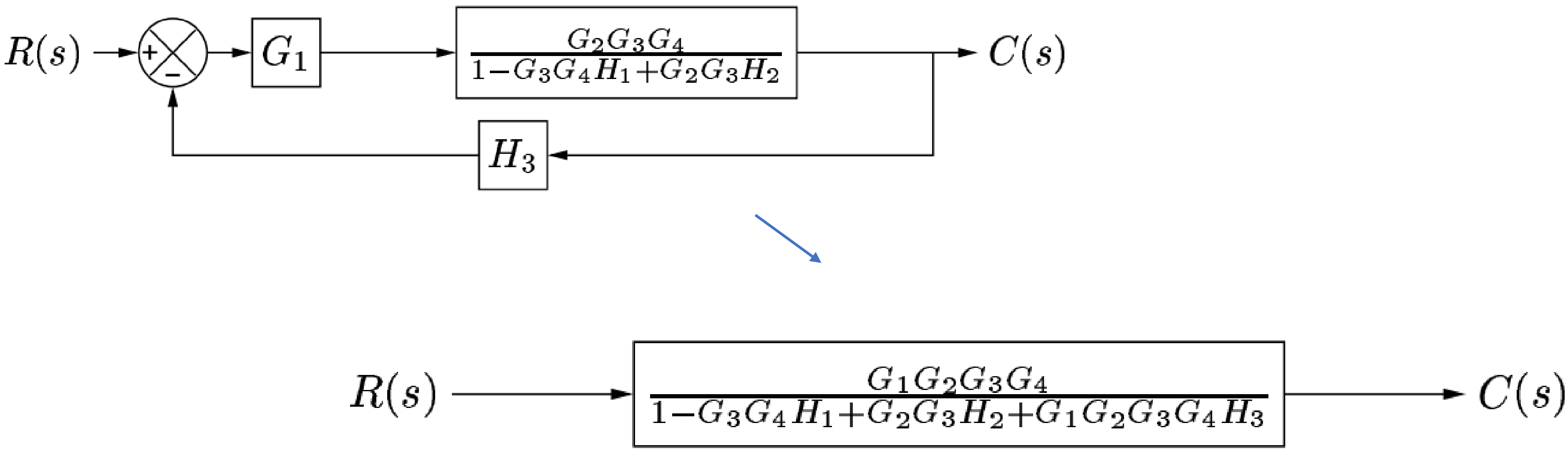
Exemplo Ilustrativo 7

- Simplificação de Diagrama de Blocos: Eliminar o laço com realimentação H_2 / G_4



Exemplo Ilustrativo 7

- Simplificação de Diagrama de Blocos: Eliminar o laço com realimentação H_3



Fórmula de Mason

- Em alguns casos, a redução do diagrama de bloco pode se tornar bem trabalhosa;
- Para casos mais complexos, uma técnica muito eficiente de resolução consiste em transformar o diagrama de blocos em um grafo de fluxo de sinal equivalente e aplicar a regra de Mason;
- A fórmula de ganho de Mason poderá ser utilizada para obter a relação entre as variáveis sem a necessidade de redução do grafo.

Grafo de Fluxo de Sinal

- É uma rede na qual os nós são diretamente conectados por ramos;
- Cada nó representa uma variável do sistema e cada ramo funciona como multiplicador do sinal;
- O Fluxo de Sinais ocorre em um única direção, a qual é indicada por uma seta colocada no ramo;
- O fator de multiplicação é indicado ao longo do ramo.

Grafo de Fluxo de Sinal - Definições

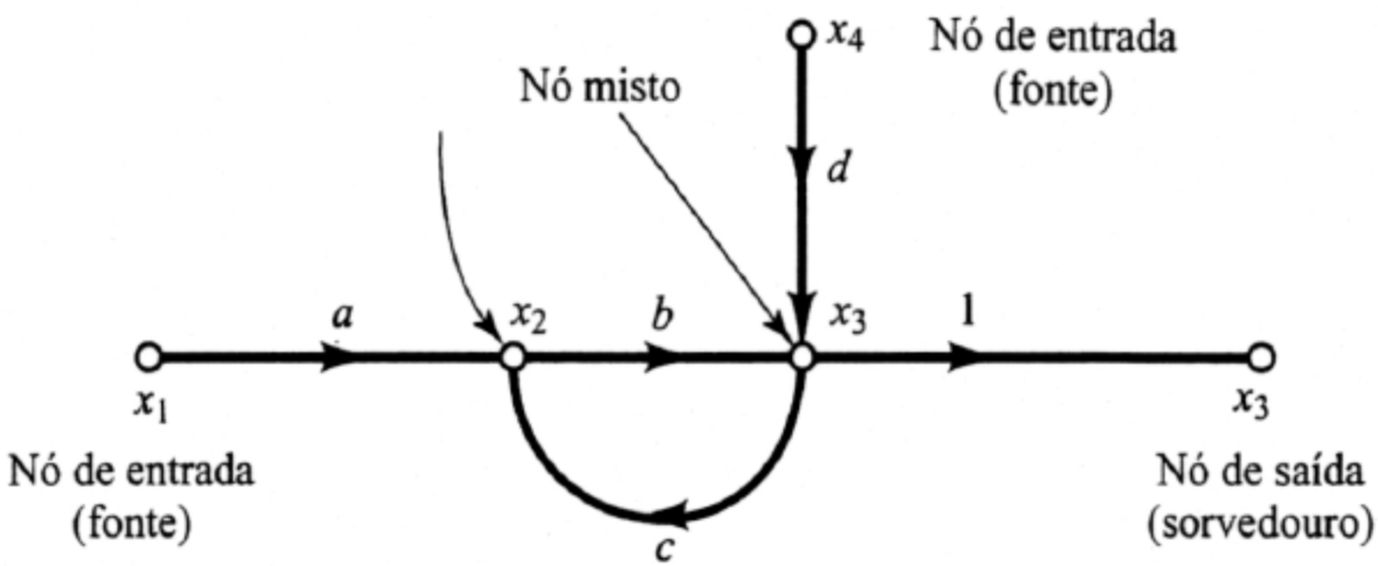
- Nó: É um ponto que representa uma variável ou sinal
- Transmitância: É o ganho real ou complexo entre dois nós. Tais ganhos podem ser expressos em termos de funções de transferência entre dois nós.
- Ramo: É um segmento direcionado unindo dois nós.
- Nó de entrada ou fonte: É um nó que contém somente ramos de saída. Isso corresponde a uma variável independente.
- Nó de saída ou sorvedouro: É um nó que contém somente ramos que chegam. Isso corresponde a uma variável dependente.
- Nó misto: É aquele que possui tanto ramos de saída quanto de chegada.

Grafo de Fluxo de Sinal - Definições

- Caminho: É um percurso através dos ramos no sentido das setas dos ramos.
  - Caminho Aberto: Se nenhum nó for atravessado mais de uma vez.
  - Caminho Fechado (ou malha): Se o caminho terminar no mesmo nó que começou e não passar por nenhum nó mais de uma vez.
- Ganho da Malha: É o produto das transmitâncias dos ramos da malha
- Malhas que não se tocam: São aquelas que não têm nenhum ramo em comum.
- Caminho de Avanço: É o caminho que se inicia no nó de entrada (fonte) e termina no nó de saída (sorvedouro) sem passar por nenhum nó mais de uma vez.
- Ganho do Caminho de Avanço: É o produto das transmitâncias de seus ramos.

Grafo de Fluxo de Sinal - Definições

- Exemplo

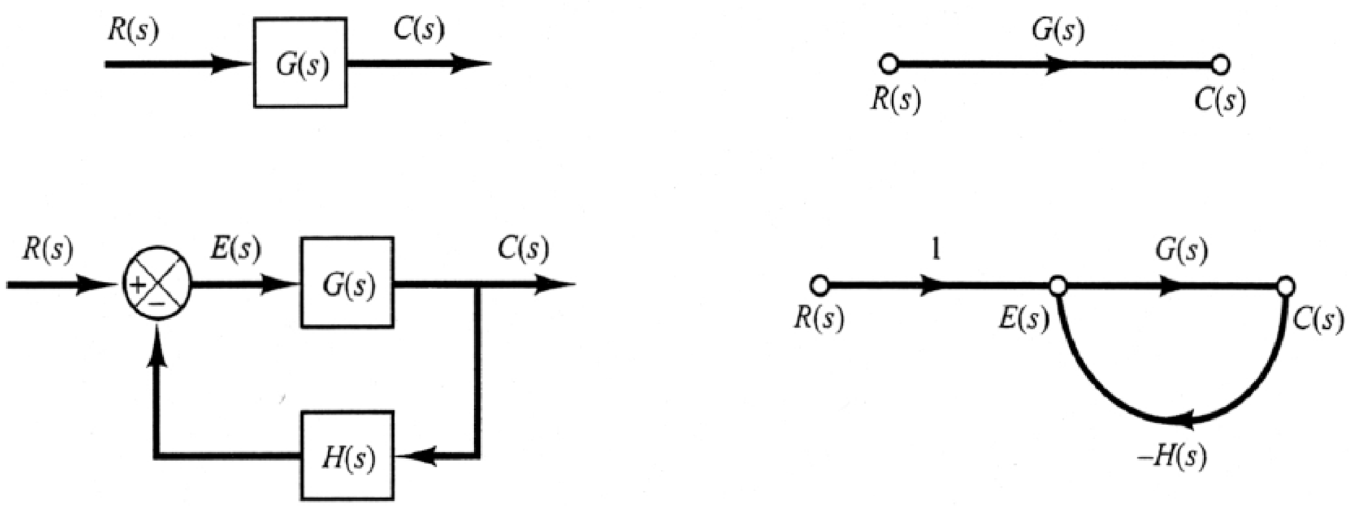


Grafo de Fluxo de Sinal - Propriedades

- Um ramo indica a dependência funcional de um sinal em relação ao outro. Um sinal percorre o ramo somente na direção especificada pela seta do ramo.
- Um nó soma os sinais de todos os ramos que chegam e transmite essa soma a todos os ramos que partem.
- Um nó misto pode ser considerado como um nó de saída pela adição de um ramo de saída com transmitância unitária. (Entretanto não é possível mudar um nó misto para um nó fonte).
- Para um dado sistema, o gráfico de fluxo de sinais não é único.

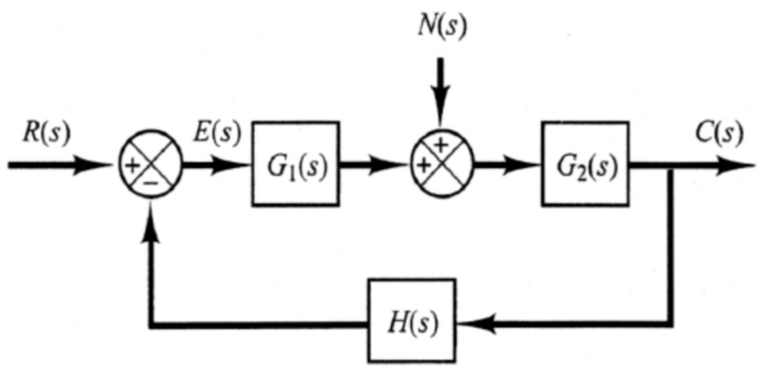
Grafo de Fluxo de Sinal

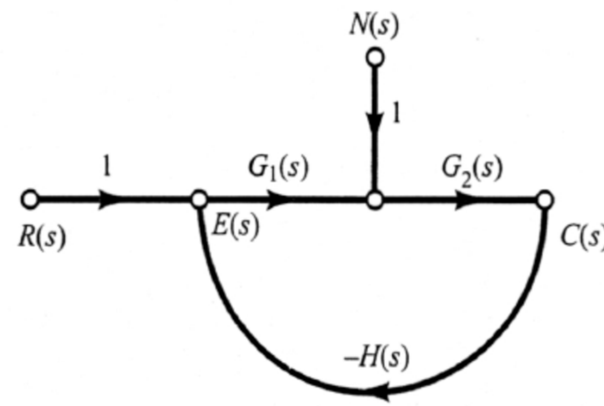
- Representação de Sistemas de Controle através de grafos de fluxo de sinal



Grafo de Fluxo de Sinal

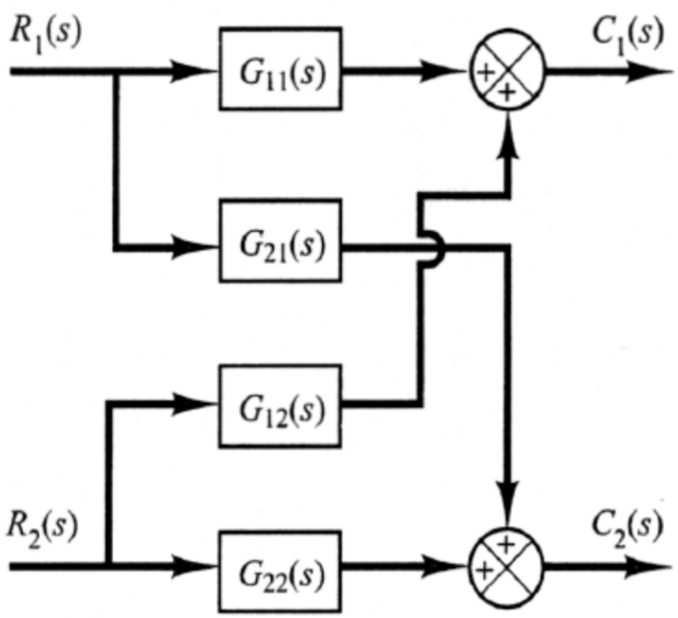
- Representação de Sistemas de Controle através de grafos de fluxo de sinal

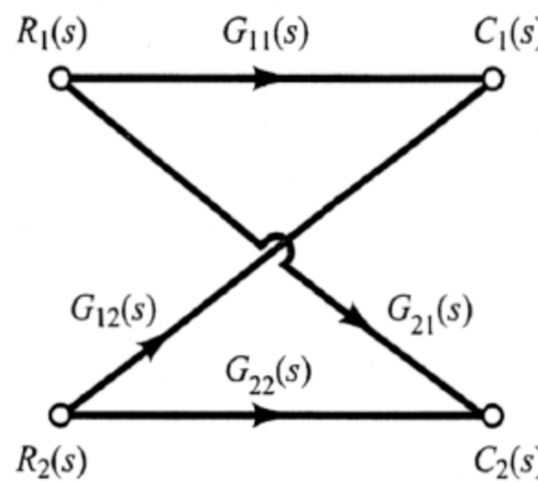




Grafo de Fluxo de Sinal

- Representação de Sistemas de Controle através de grafos de fluxo de sinal





Fórmula de Mason

- A relação de dependência entre uma variável dependente Y (saída) com a variável independente (entrada) U é dada pela regra de Mason:

$$G = \frac{Y}{U} = \frac{\sum_{i=1}^{N_C} G_i \Delta_i}{\Delta}$$

onde:

N_C: número de caminhos existentes de U para Y;
G_i: ganho do i-ésimo caminho;
Δ: determinante do grafo, calculado conforme se explica a seguir;
Δ_i: cofator do i-ésimo caminho; este cofator é calculado da mesma maneira que o determinante Δ, mas são excluídos do cálculo todos os nós que tocam o i-ésimo caminho e todos os laços dos quais estes nós fazem parte.

Fórmula de Mason

- O determinante de um grafo é dado por:

$$\Delta = 1 - \sum_{i=1}^{N_L} L_i + \sum_{j,k} L_j L_k - \sum_{l,m,n} L_l L_m L_n + \cdots$$

- em que:
  - N_L é o número de laços do grafo e L_i é o ganho do i-ésimo laço;
  - *j* e *k* variam de 1 até N_L desde que os laços *j* e *k* não se toquem;
  - *l, m* e n variam de 1 até N_L desde que os laços *l, m* e *n* não se toquem e assim sucessivamente.

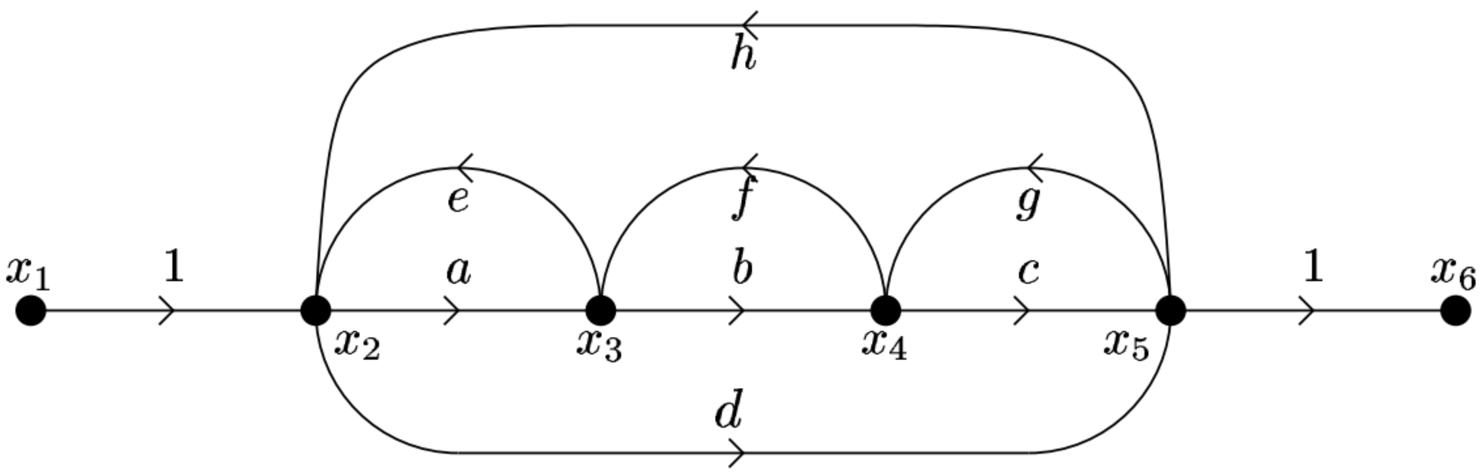
Fórmula de Mason

- Em outras palavras, o determinante do grafo é dado por:

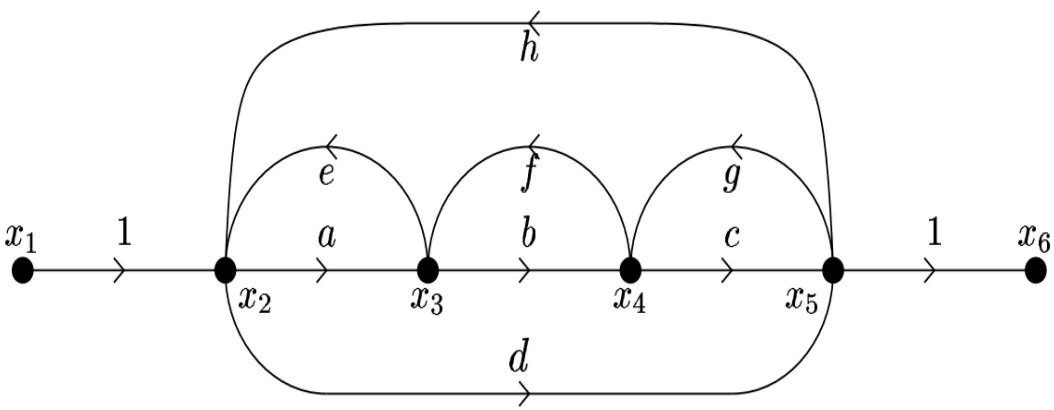
$$\begin{aligned}\Delta = 1 &- \sum(\text{ganhos de todos os laços}) \\ &+ \sum(\text{produtos dos ganhos de todas as combinações de 2 laços que não se tocam}) \\ &- \sum(\text{produtos dos ganhos de todas as combinações de 3 laços que não se tocam}) \\ &+ \cdots\end{aligned}$$

Exemplo Ilustrativo 8

- Com base no grafo de fluxo de sinal, calcule o ganho entre a variável de entrada x_1 e a variável de saída x_6.



Exemplo Ilustrativo 8



- Dois caminhos diretos:

$$G_1 = abc \qquad G_2 = d$$

- Os ganhos dos 6 laços:

$$L_1 = ae \qquad L_2 = bf \qquad L_3 = cg$$
$$L_4 = defg \qquad L_5 = abch \qquad L_6 = dh$$

- Os laços que não se tocam são os laços 1 e 3 e os laços 2 e 6

Exemplo Ilustrativo 8

- Os determinantes do grafo são:

$$\begin{aligned}
\Delta &= 1-(L_1+L_2+L_3+L_4+L_5+L_6)+(L_1L_3+L_2L_6) \\
&= 1-ae-bf-cg-defg-abch-dh+aecg+bfdh
\end{aligned}$$

$$\Delta_1 = 1$$

$$\Delta_2 = 1-(L_2) = 1-bf$$

- Com isso:

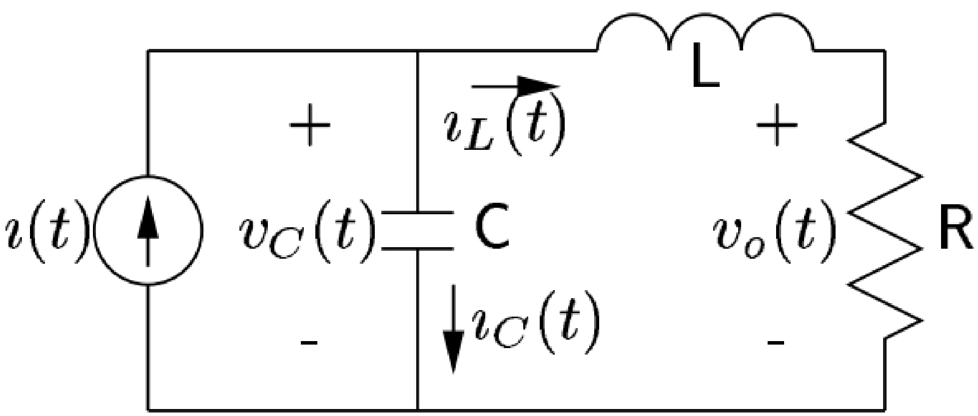
$$G = \frac{G_1\Delta_1 + G_2\Delta_2}{\Delta} = \frac{abc+d(1-bf)}{1-ae-bf-cg-defg-abch-dh+aecg+bfdh}$$

Modelos em variáveis de estado

- Estado de um sistema: conjunto de números tais que o conhecimento desses números, das funções de entrada e das equações que descrevem a dinâmica desse sistema, fornecem o estado futuro e a sua saída;
- O estado é definido por um conjunto de variáveis de estado denotados por: $[x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)]$
- O espaço n-dimensional cujos eixos coordenados correspondem às variáveis $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$ é denominado de espaço de estados. O número de variáveis de estado também corresponde à ordem do sistema;
- Qualquer estado do Sistema pode ser representado como um ponto no espaço de estados.

Exemplo Ilustrativo 9

- Circuito RLC



Modelo em Variáveis de Estado:

- Uma escolha comum das variáveis de estado para sistemas RLC passivos é a tensão no capacitor $x_1(t)$ e a corrente no indutor $x_2(t)$;
- Essa escolha é possível pois através dessas duas variáveis podemos descrever a energia armazenada no circuito de forma que a energia inicial do sistema pode ser representada pelos valores iniciais dessas variáveis $x_1(t_0)$ e $x_2(t_0)$;
- Em redes RLC passivas, o número de variáveis de estados é o número de armazenadores de energia independentes;
- Nos modelos em variáveis de estado, a dinâmica do sistema é descrita como um conjunto de EDO's de 1ª ordem em que a derivada primeira de cada variável é escrita como uma função das variáveis de estado e da(s) entrada(s) do sistema;
- O sinal de saída também deve ser expresso como uma função das variáveis de estado.

Exemplo Ilustrativo 9

- Circuito RLC – Aplicando as Leis de Kirchhoff

$$\imath = \imath_C + \imath_L \quad \Rightarrow \quad \imath = C\dot{v_C} + \imath_L \quad \Rightarrow \quad \dot{x_1} = -\left(\frac{1}{C}\right)x_2 + \left(\frac{1}{C}\right)\imath$$

$$v_C = v_L + v_R \quad \Rightarrow \quad v_C = L\dot{\imath_L} + R\imath_L \quad \Rightarrow \quad \dot{x_2} = \left(\frac{1}{L}\right)x_1 - \left(\frac{R}{L}\right)x_2$$

$$v_o = R\imath_L \quad \Rightarrow \quad v_o = Rx_2$$

- Usando as equações de estado acima e conhecendo as condições iniciais $[x_1(t_0) \quad x_2(t_0)]$ e o sinal de entrada $i(t)$, pode-se determinar o estado do sistema $[x_1(t) \quad x_2(t)], \forall t > t_0$.

Modelos em variáveis de estado

- As variáveis de estado que descrevem um sistema não são únicas;
- Infinitos conjuntos de diferentes variáveis de estado podem ser escolhidos;
- Qualquer combinação linear das variáveis de estado também pode ser adotada como variável de estado, no entanto, opta-se por variáveis que tenham significado físico e sejam preferencialmente mensuráveis.

Exemplo Ilustrativo 10

- Adotando outras variáveis de estado para o exemplo anterior $x_1^* = v_C$ e $x_2^* = v_L$ podemos deduzir que:

$$x_1 = x_1^*$$

$$x_2^* = v_C - R\imath_L = x_1 - Rx_2 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{1}{R}(x_1^* - x_2^*)$$

- Substituindo as equações acima nas equações de estado que já obtivemos teremos que:

$$\dot{x}_1^* = -\left(\frac{1}{RC}\right)x_1^* + \left(\frac{1}{RC}\right)x_2^* + \left(\frac{1}{C}\right)\imath$$

$$\dot{x}_2^* = -\left(\frac{1}{RC}\right)x_1^* + \left(\frac{1}{RC} - \frac{R}{L}\right)x_2^* + \left(\frac{1}{C}\right)\imath$$

$$v_o = x_1^* - x_2^*$$

Modelos em variáveis de estado

- Um sistema com m sinais de entrada e p sinais de saída pode ser escritos de forma genérica pelo modelo em variáveis de estado vetorial da seguinte forma:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ \mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \end{cases}$$

Equação de estados

Equação de saída

- O vetor coluna $\boldsymbol{x}(t)$ é constituído pelas n variáveis de estado e é chamado de vetor de estados:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix}$$

Modelos em variáveis de estado

- O vetor coluna $\boldsymbol{u}(t)$, chamado de vetor de entrada, é composto pelos m sinais de entrada;
- O vetor coluna $\boldsymbol{y}(t)$, chamado de vetor de saída, é composto pelos p sinais de saída;
- Para o caso particular em que $p = 1$ e $m = 1$, o sistema é monovariável e os vetores $\boldsymbol{u}(t)$ e $\boldsymbol{y}$(t) são escalares;
- Para sistemas invariantes no tempo, as funções vetoriais $\boldsymbol{f}$ e $\boldsymbol{g}$ não dependem do tempo.

Modelos em Variáveis de Estados para Sistemas Lineares e Invariantes no Tempo (SLIT)

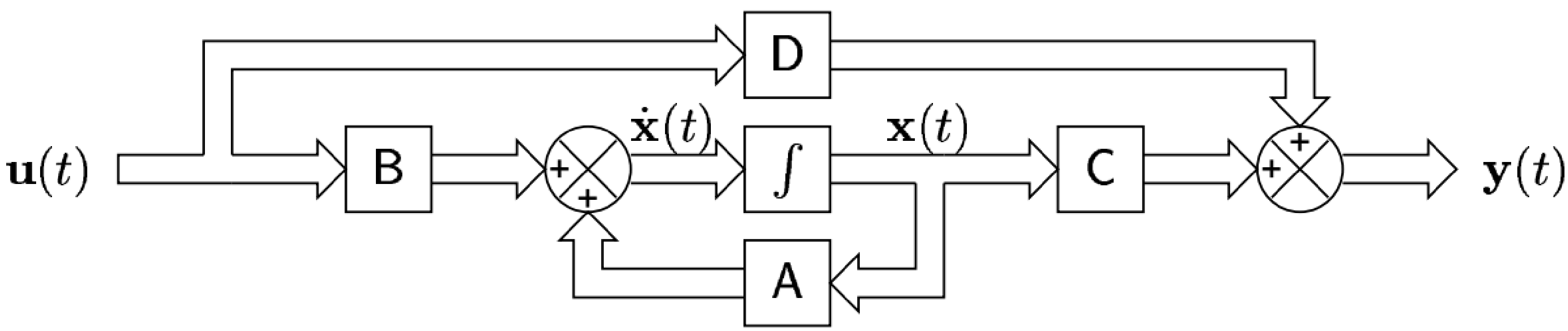
- Para SLIT, o modelo em variáveis de estado pode ser escrito na forma matricial:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathsf{A}\mathbf{x} + \mathsf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathsf{C}\mathbf{x} + \mathsf{D}\mathbf{u} \end{cases}$$

A matriz A é uma matriz quadrada $n \times n$. B é uma matriz $n \times m$, que recai em um vetor coluna $n \times 1$ para sistemas monovariáveis. C é uma matriz $p \times n$, que se torna um vetor linha $1 \times n$ para sistemas monovariáveis. Finalmente, a matrix D, de dimensões $p \times m$, transforma-se em um escalar no caso monovariável; para muitos sistemas, a matriz D é nula, significando que não há influência direta na entrada na saída.

Modelos em Variáveis de Estados para Sistemas Lineares e Invariantes no Tempo (SLIT)

- Diagrama de Blocos



Exemplo Ilustrativo 11

- Para o circuito RLC:

$$\imath = \imath_C + \imath_L \quad \Rightarrow \quad \imath = C\dot{v_C} + \imath_L \quad \Rightarrow \quad \dot{x_1} = -\left(\frac{1}{C}\right)x_2 + \left(\frac{1}{C}\right)\imath$$

$$v_C = v_L + v_R \quad \Rightarrow \quad v_C = L\dot{\imath_L} + R\imath_L \quad \Rightarrow \quad \dot{x_2} = \left(\frac{1}{L}\right)x_1 - \left(\frac{R}{L}\right)x_2$$

$$v_o = R\imath_L \quad \Rightarrow \quad v_o = Rx_2$$

- Representação Matricial:

$$\begin{bmatrix}\dot{x_1}\\ \dot{x_2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & -\frac{1}{C}\\ \frac{1}{L} & -\frac{R}{L}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\frac{1}{C}\\ 0\end{bmatrix}i \qquad\qquad y = \begin{bmatrix}0 & R\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

Solução da Equação de Estados - SLIT

- Para um SLIT:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathsf{A}\mathbf{x}(t) + \mathsf{B}\mathbf{u}(t) \quad \Rightarrow \quad s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathsf{A}\mathbf{X}(s) + \mathsf{B}\mathbf{U}(s) \quad \Rightarrow$$

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathsf{I} - \mathsf{A})^{-1}\mathbf{x}(0) + (s\mathsf{I} - \mathsf{A})^{-1}\mathsf{B}\mathbf{U}(s) \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \mathbf{X}(s) = \Phi(s)\mathbf{x}(0) + \Phi(s)\mathsf{B}\mathbf{U}(s) \\ \mathbf{Y}(s) = \mathsf{C}\mathbf{X}(s) + \mathsf{D}\mathbf{U}(s) \end{cases} \qquad \text{onde} \quad \Phi(s) = (s\mathsf{I} - \mathsf{A})^{-1}$$

- Aplicando a transformada de Laplace à matriz $\Phi(s)$ calculamos a matriz $\Phi(t)$ conhecida como matriz de transição de estados:

$$\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}\Phi(s) = \mathcal{L}^{-1}\left[(s\mathsf{I} - \mathsf{A})^{-1}\right]$$

Matriz de Transição de Estados

- Mostra-se que a matriz de transição de estados pode ser calculada em termos da função exponencial matricial:

$$\Phi(t) = e^{\mathsf{A}t} = \exp(\mathsf{A}t)$$

- A função exponencial matricial é definida como:

$$e^{\mathsf{A}t} = \exp(\mathsf{A}t) = \mathsf{I} + \mathsf{A}t + \frac{\mathsf{A}^2t^2}{2!} + \cdots + \frac{\mathsf{A}^kt^k}{k!} + \cdots$$

- Há várias formas de calcular e^{At}. Uma das principais formas de calcular essa exponencial matricial é o Teorema de Cayley-Hamilton.

Teorema de Cayley-Hamilton

- Para uma matriz quadrada A de ordem n, sua equação característica

$$c(\lambda) = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1}\lambda + \alpha_n = 0$$

A equação característica de uma matriz é calculada fazendo $\det(\lambda I - A) = 0$

é satisfeita pela própria matriz:

$$c(\mathsf{A}) = \mathsf{A}^n + \alpha_1 \mathsf{A}^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1}\mathsf{A} + \alpha_n \mathsf{I} = 0$$

- Usando o Teorema, pode-se mostrar que, para cada função matricial f, há um polinômio p de grau menor que n tal que:

$$f(\mathsf{A}) = p(\mathsf{A}) = a_1 \mathsf{A}^{n-1} + a_2 \mathsf{A}^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\mathsf{A} + a_n \mathsf{I}$$

Teorema de Cayley-Hamilton

- A determinação dos coeficientes a_i é feita sabendo que:

$$f(\lambda_i) = p(\lambda_i), \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

em que λ_i são os autovalores de A.

Raízes da equação característica de A.

- No caso de autovalores com multiplicidade m, devemos acrescentar as seguintes condições:

$$\dot{f}(\lambda_j) = \dot{p}(\lambda_j)$$
$$\ddot{f}(\lambda_j) = \ddot{p}(\lambda_j)$$
$$\vdots$$
$$\overset{(m-1)}{f}(\lambda_j) = \overset{(m-1)}{p}(\lambda_j)$$

Exemplo Ilustrativo 12

- Calcule a função e^{At} para a matriz usando o teorema de Cayley-Hamilton:

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0.5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -0.5 \end{bmatrix}$$

- A equação característica da matriz é:

$$\det(\lambda \mathsf{I} - \mathsf{A}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \det\left(\begin{bmatrix} \lambda+1 & -0.5 & 0 \\ 0 & \lambda+1 & 0 \\ -1 & -1 & \lambda+0.5 \end{bmatrix}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad (\lambda+1)^2(\lambda+0.5) = 0$$

Os autovalores são $\lambda_1 = -0.5$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$

Exemplo Ilustrativo 12

- Aplicando o teorema Cayley-Hamilton teremos:

$$\begin{aligned} f(\mathsf{A}) &= e^{\mathsf{A}t} \\ p(\mathsf{A}) &= a_1\mathsf{A}^2 + a_2\mathsf{A} + a_3\mathsf{I} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad f(\mathsf{A}) = p(\mathsf{A}) \quad \text{se} \quad \begin{cases} f(-0.5) = p(-0.5) \\ f(-1.0) = p(-1.0) \\ \dot{f}(-1.0) = \dot{p}(-1.0) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} e^{-0.5t} = a_1(-0.5)^2 + a_2(-0.5) + a_3 \\ e^{-1.0t} = a_1(-1.0)^2 + a_2(-1.0) + a_3 \\ te^{-1.0t} = 2a_1(-1.0) + a_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 4e^{-0.5t} - 4e^{-t} - 2te^{-t} \\ a_2 = 8e^{-0.5t} - 8e^{-t} - 3te^{-t} \\ a_3 = 4e^{-0.5t} - 3e^{-t} - te^{-t} \end{cases}$$

$$e^{\mathsf{A}t} = a_1\mathsf{A}^2 + a_2\mathsf{A} + a_3\mathsf{I} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0.5te^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 2e^{-0.5t} - 2e^{-t} & 4e^{-0.5t} - 4e^{-t} - te^{-t} & e^{-0.5t} \end{bmatrix}$$

Solução da Equação de Estado usando a matriz de transição de estados

- A solução é dada por:

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)\mathrm{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

- O resultado apresentado acima, apesar de genérico para qualquer sistema, pode ser evitado resolvendo diretamente pela transformada de Laplace. Usualmente evita-se o resultado acima pela relativa dificuldade na resolução da integral de convolução.

Exemplo Ilustrativo 13

- Resolva a equação de estado do circuito RLC apresentado empregando a transformada de Laplace. Considere $C = 2.5mF$, $L = 40mH$, $R = 10\Omega$ e $i(t) = 0.1A$. Considere as condições iniciais $i_L(0) = 0A$ e $v_C(0) = 1V$.

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix} i \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -400 \\ 25 & -250 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 400 \\ 0 \end{bmatrix} i$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Exemplo Ilustrativo 13

- Solução empregando a transformada de Laplace:

$$s\mathsf{I} - \mathsf{A} = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -400 \\ 25 & -250 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & 400 \\ -25 & s+250 \end{bmatrix}$$

$$\Phi(s) = (s\mathsf{I} - \mathsf{A})^{-1} = \frac{1}{s^2 + 250s + 10.000} \begin{bmatrix} s+250 & -400 \\ 25 & s \end{bmatrix}$$

- A transformada de Laplace da equação de estados é:

A entrada empregada é um degrau de amplitude 0.1 cuja transformada é $0.1/s$

$$\mathbf{X}(s) = \Phi(s)\mathbf{x}(0) + \Phi(s)\mathsf{B}\mathbf{U}(s) = \frac{1}{s(s^2 + 250s + 10.000)} \begin{bmatrix} s^2 + 290s + 10.000 \\ 25s + 1.000 \end{bmatrix}$$

Exemplo Ilustrativo 13

- A transformada de Laplace da equação de saída é:

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{CX}(s) + \mathbf{DU}(s) = \frac{250s + 10.000}{s(s^2 + 250s + 10.000)} = \frac{1}{s} + \frac{0.33}{s+50} - \frac{0.8}{s+200}$$

- A transformada de Laplace inversa da equação de saída é:

$$v_o(t) = 1 + 0.33e^{-\frac{t}{50}} - 0.8e^{-\frac{t}{200}}$$

- A matriz de estados tem dois autovalores $\lambda_1 = -1/50$ e $\lambda_2 = -1/200$. Cada autovalor produziu na saída um termo exponencial do tipo $k_i e^{\lambda_i}, i = 1,2$. O autovalor com valor absoluto maior produzirá um decaimento exponencial mais rápido, enquanto o autovalor com valor absolute menor produzirá um decaimento mais lento.

Algoritmo de Leverrier

- É um procedimento útil para calcular a matriz $\Phi(s) = (s\mathrm{I} - \mathrm{A})^{-1}$ sem a inversão de uma matriz simbólica (em função de s);
- Seja $\Delta(s)$ o determinante de $\Phi(s)$, vamos supor que o conhecemos através dos coeficientes α_i do polinômio:

$$\Delta(s) = \det(s\mathsf{I} - \mathsf{A}) \qquad = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n$$

- É possível mostrar que:

$$\Phi(s) = \frac{1}{\Delta(s)}(\mathsf{R}_0 s^{n-1} + \mathsf{R}_1 s^{n-2} + \cdots + \mathsf{R}_{n-2} s + \mathsf{R}_{n-1})$$

Algoritmo de Leverrier

- Em que:

$$
\begin{aligned}
\mathsf{R}_0 &= \mathsf{I} \\
\mathsf{R}_1 &= \mathsf{A}\mathsf{R}_0 + \alpha_1 \mathsf{I} \\
&\vdots \\
\mathsf{R}_{n-1} &= \mathsf{A}\mathsf{R}_{n-2} + \alpha_{n-1} \mathsf{I} \\
\mathsf{R}_n &= \mathsf{A}\mathsf{R}_{n-1} + \alpha_n \mathsf{I} = 0
\end{aligned}
$$

- Os coeficientes α_i do determinante $\Delta(s)$ podem ser calculados pelo traço do produto das matrizes AR_i.

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 &= -\operatorname{trace}(\mathsf{A}\mathsf{R}_0) \\
\alpha_2 &= -\operatorname{trace}(\mathsf{A}\mathsf{R}_1)/2 \\
&\vdots \\
\alpha_n &= -\operatorname{trace}(\mathsf{A}\mathsf{R}_{n-1})/n
\end{aligned}
$$

Exemplo Ilustrativo 14

- Determine a matriz $\Phi(s) = (sI - A)^{-1}$ da matriz dada através do algoritmo de Leverrier:

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

- Aplicando o algoritmo com $n = 3$ (ordem da matriz):

$$\mathsf{R}_0 = \mathsf{I}$$

$$\mathsf{AR}_0 = \mathsf{A}$$

$$\alpha_1 = -\operatorname{trace}(\mathsf{AR}_0) = -(-1 + 0 - 1) = 2$$

$$\mathsf{R}_1 = \mathsf{AR}_0 + \alpha_1 \mathsf{I} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo Ilustrativo 14

$$\mathsf{AR}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_2 = -\operatorname{trace}(\mathsf{AR}_1)/2 = -(-1-1-2)/2 = 2$$

$$\mathsf{R}_2 = \mathsf{AR}_1 + \alpha_2 \mathsf{I} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathsf{AR}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_3 = -\operatorname{trace}(\mathsf{AR}_2)/3 = -(-1-1-1)/3 = 1$$

Exemplo Ilustrativo 14

$$\Delta(s) = s^3 + \alpha_1 s^2 + \alpha_2 s + \alpha_3 = s^3 + 2s^2 + 2s + 1$$

$$\begin{aligned}
\text{adjunta}(s\mathsf{I} - \mathsf{A}) &= \mathsf{R}_0 s^2 + \mathsf{R}_1 s + \mathsf{R}_2 \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} s^2 + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} s^2 + s + 1 & 0 & 0 \\ 0 & s^2 + 2s + 1 & -(s+1) \\ 0 & s + 1 & s(s+1) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\Phi(s) = (s\mathsf{I} - \mathsf{A})^{-1} = \frac{\text{adjunta}(s\mathsf{I} - \mathsf{A})}{\Delta(s)} = \begin{bmatrix} \frac{s^2+s+1}{s^3+2s^2+2s+1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{s^2+2s+1}{s^3+2s^2+2s+1} & -\frac{s+1}{s^3+2s^2+2s+1} \\ 0 & \frac{s+1}{s^3+2s^2+2s+1} & \frac{s(s+1)}{s^3+2s^2+2s+1} \end{bmatrix}$$

Conversão de Espaço de Estados para Função de Transferência

- Dado um sistema em espaço de estados descrito pelas matrizes A, B,C e D, sendo $\Phi(s) = (sI - A)^{-1}$, a função de transferência desse modelo, considerando $\boldsymbol{x}(0) = \mathbf{0}$, é obtida pela relação das transformadas de Laplace dos sinais de saída e de entrada. Dessa forma, temos que:

$$\mathbf{X}(s) = \Phi(s)\mathsf{B}U(s) \quad \Rightarrow \quad Y(s) = \mathsf{C}\left[\Phi(s)\mathsf{B}U(s)\right] + DU(s) \quad \Rightarrow$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \mathsf{C}\Phi(s)\mathsf{B} + D = \mathsf{C}(s\mathsf{I} - \mathsf{A})^{-1}\mathsf{B} + D$$

Conversão de Espaço de Estados para Função de Transferência

- Sabendo que a inversa de uma matriz M é dada por:

$$\mathsf{M}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathsf{M})} \cdot \mathrm{adj}(\mathsf{M})$$

então:

$$G(s) = \frac{\mathsf{C} \cdot \mathrm{adj}(s\mathsf{I} - \mathsf{A}) \cdot \mathsf{B} + D \cdot \det(s\mathsf{I} - \mathsf{A})}{\det(s\mathsf{I} - \mathsf{A})}$$

O denominador da função de transferência é a equação característica da matriz A. As raízes da equação característica são os autovalores da matriz, que correspondem aos pólos de G(s).

Exemplo Ilustrativo 15

- Determine a função de transferência do sistema descrito em espaço de estados a seguir:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} \end{cases}$$

- Resolução:

$$\Phi(s) = \left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s^2+3s+2} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}}{s^2+3s+2} = \frac{0.5s+2}{s^2+3s+2}$$

Os pólos de G(s) são os autovalores de A e são iguais a -1 e -2.

Obtenção do Modelo em Espaço de Estados a partir da função de transferência

- A partir de uma função de transferência, várias representações em espaço de estados podem ser obtidas;
- Dessa forma, não há uma metodologia única para a obtenção do modelo;
- As principais formas de obtenção são:
  - Forma canônica controlável;
  - Forma canônica observável;
  - Forma canônica de Jordan.

Forma Canônica Controlável

- Considerando uma função de transferência estritamente própria:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1}s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n} \quad \Rightarrow$$

$$\overset{(n)}{y} + a_1 \overset{(n-1)}{y} + \cdots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y = b_1 \overset{(n-1)}{u} + \cdots + b_{n-1}\dot{u} + b_n u$$

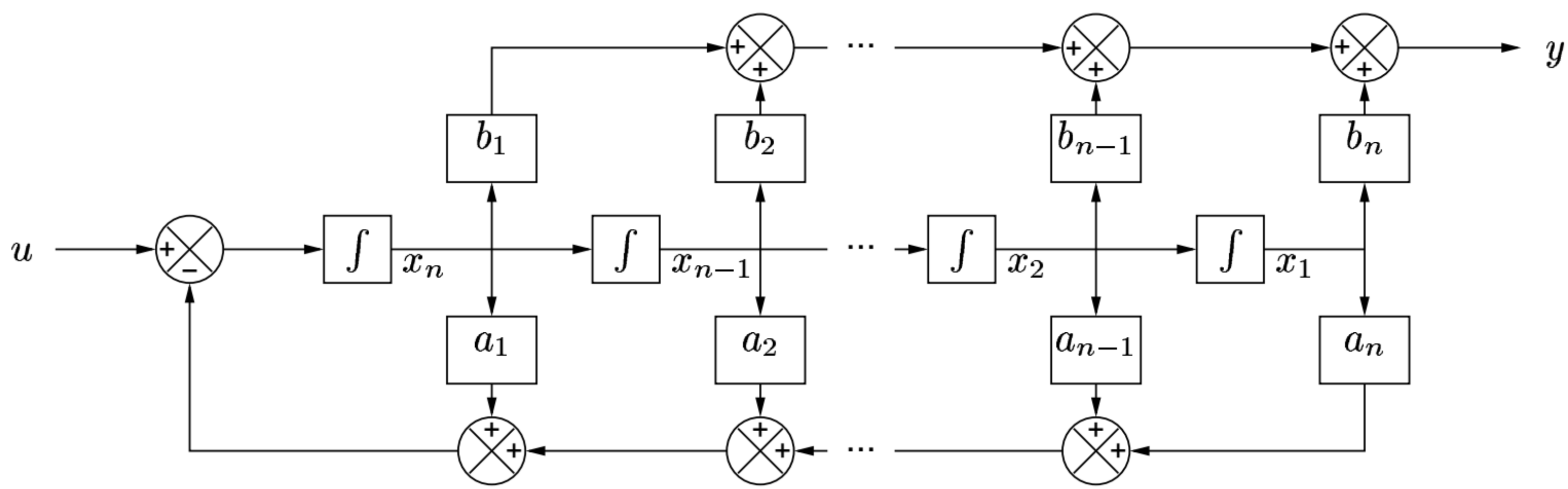
- A realização da forma canônica controlável para o sistema em questão é:

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \qquad \mathsf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathsf{C} = \begin{bmatrix} b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \dots & b_2 & b_1 \end{bmatrix} \qquad \mathsf{D} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Forma Canônica Controlável

- Diagrama de Blocos:



- Muito útil em projetos de controle por alocação de pólos;
- Quando $b_{n-1} = b_{n-2} = \cdots b_1 = 0$ então as variáveis de estado são:

$$x_1 = y \qquad x_2 = \dot{y} \qquad x_3 = \ddot{y} \qquad \cdots \qquad x_{n-1} = \overset{(n-2)}{y} \qquad x_n = \overset{(n-1)}{y}$$

Forma Canônica Observável

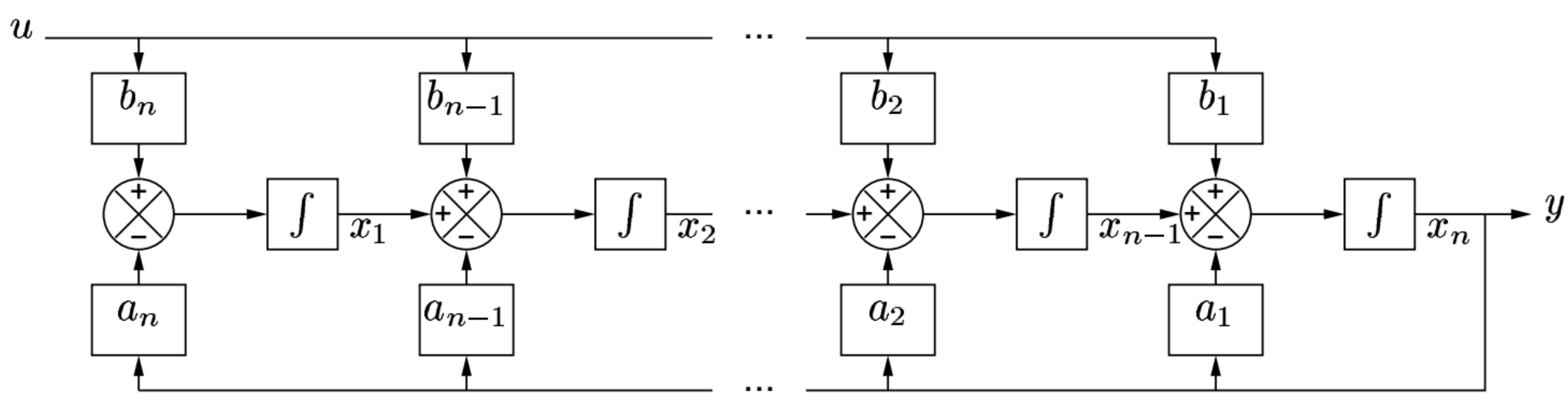
- Considerando a mesma função de transferência estritamente própria, teremos a seguinte realização na forma canônica observável:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_n \\ b_{n-1} \\ b_{n-2} \\ \vdots \\ b_2 \\ b_1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Forma Canônica Observável

- Diagrama de Blocos



Forma Canônica de Jordan

- Muito útil quando o sistema tem apenas pólos reais distintos. Considerando um sistema com apenas pólos reais distintos:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1}s + b_n}{(s+p_1)(s+p_2)(s+p_3)(s+p_4)\cdots(s+p_n)}$$
$$= \frac{c_1}{s+p_1} + \frac{c_2}{s+p_2} + \frac{c_3}{s+p_3} + \frac{c_4}{s+p_4} + \cdots + \frac{c_n}{s+p_n}$$

Forma Canônica de Jordan

- A forma canônica de Jordan, para o caso em questão, é dada por:

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} -p_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -p_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -p_3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -p_n \end{bmatrix} \qquad \mathsf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathsf{C} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \cdots & c_n \end{bmatrix} \qquad \mathsf{D} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

- No caso de pólos múltiplos, a matriz A não será diagonal e conterá elementos 1 na supra-diagonal de A e elementos 0 na matriz B. Esses elementos 1 e 0 ocorrem na linha correspondente ao pólo múltiplo (exceto o último).

Exemplo Ilustrativo 15

- Considere um sistema com apenas polos reais e com multiplicidade 3. Obtenha sua representação em espaço de estados na forma canônica de Jordan:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1}s + b_n}{(s+p_1)^3(s+p_4)\cdots(s+p_n)}$$

- Solução: a expansão em frações parciais nos fornece a seguinte expressão:

$$= \frac{c_1}{(s+p_1)^3} + \frac{c_2}{(s+p_1)^2} + \frac{c_3}{s+p_1} + \frac{c_4}{s+p_4} + \cdots + \frac{c_n}{s+p_n}$$

Exemplo Ilustrativo 15

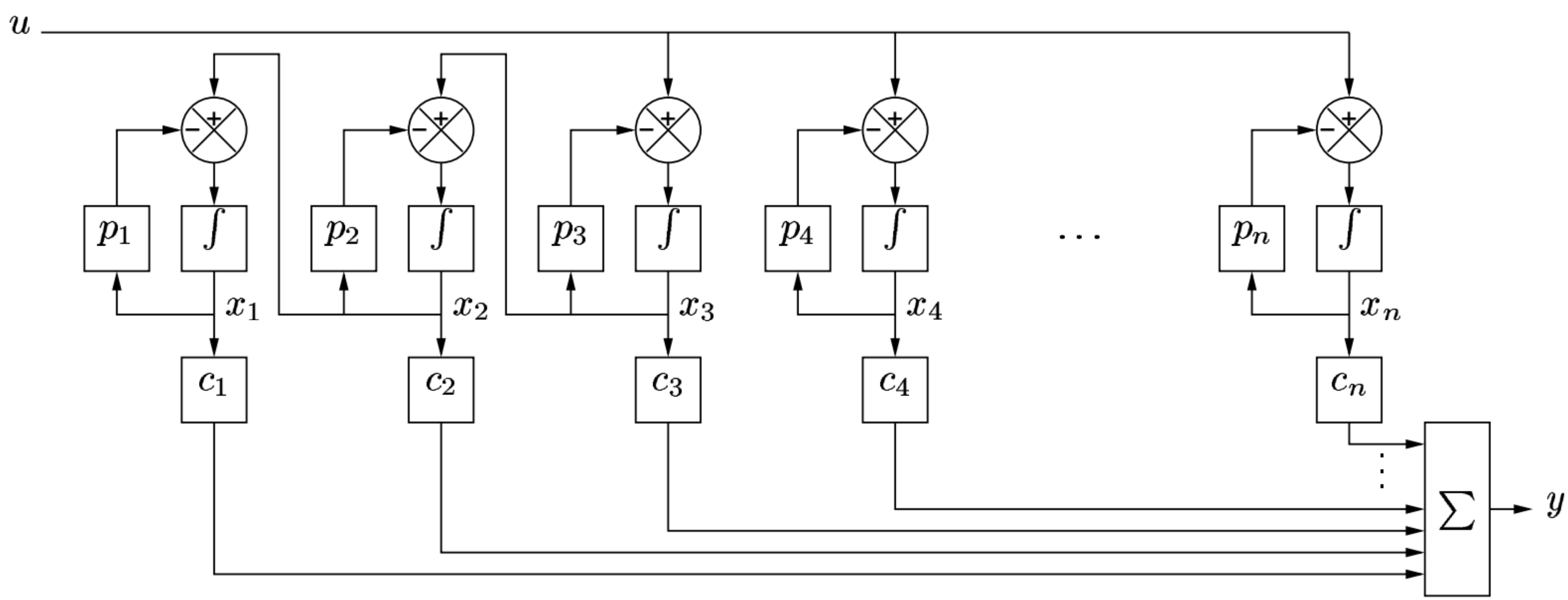
- Escrevendo o modelo na forma canônica de Jordan:

$$A = \begin{bmatrix} -p_1 & \boxed{1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -p_1 & \boxed{1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -p_n \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \boxed{0} \\ \boxed{0} \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \cdots & c_n \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo Ilustrativo 15

- Diagrama de Blocos do Exemplo:



Sistemas com número de zeros maior que número de polos

- São sistemas não-causais (a saída no instante atual é afetada por uma entrada que ocorrerá no futuro);
- Para checar matematicamente tal afirmação, basta fazer uma divisão polinomial da função de transferência. Perceberemos que a saída dependerá da derivada da entrada;
- Tais sistemas não tem significado físico.

Sistemas com número de polos igual ao número de zeros

- Considerando o sistema:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{c_0 s^n + c_1 s^{n-1} + \cdots + c_{n-1}s + c_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n}$$

- Efetuando a divisão polinomial:

$$= c_0 + \frac{b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1}s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n} = c_0 + G'(s)$$

- Em que:

$$b_1 = c_1 - c_0 a_1, \cdots, b_{n-1} = c_{n-1} - c_0 a_{n-1} \text{ e } b_n = c_n - c_0 a_n$$

Sistemas com número de polos igual ao número de zeros

- A transformada do sinal de saída e o sinal em si são dados por:

$$Y(s) = G(s)U(s) = c_0U(s) + G'(s)U(s) = c_0U(s) + Y'(s) \quad \Rightarrow$$
$$y(t) = c_o u(t) + y'(t)$$

- Nesse caso, para obter alguma realização em espaço de estados fazemos:
  - Calcular a função de transferência $G'(s)$;
  - Escolher uma das formas canônicas para escrever a realização de $G'(s)$ no espaço de estados;
  - Fazer a matriz $D = C_0$.

Exemplo Ilustrativo 16

- Considere a seguinte função de transferência:

$$G(s) = \frac{0.5s^3 + 3s^2 + 2.5s + 4}{s^3 + 4s^2 + 5s + 2}$$

- Encontre as realizações do sistema dado nas formas canônicas controlável, observável e de Jordan.
- Solução: Aplicando a divisão polinomial e a subsequente expansão em frações parciais, encontramos o seguinte sistema equivalente:

$$G(s) = 0.5 + \frac{s^2 + 3}{s^3 + 4s^2 + 5s + 2} = 0.5 + \frac{s^2 + 3}{(s+1)^2(s+2)} = 0.5 + \frac{4}{(s+1)^2} - \frac{6}{s+1} + \frac{7}{s+2}$$

Exemplo Ilustrativo 16

- Forma controlável:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -5 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0.5 \end{bmatrix} u \end{cases}$$

- Forma observável:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0.5 \end{bmatrix} u \end{cases}$$

Exemplo Ilustrativo 16

- Forma de Jordan:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 4 & -6 & 7 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0.5 \end{bmatrix} u \end{cases}$$

Referências

- Adelardo Medeiros. *Apostila de Modelagem e Análise de Sistemas Dinâmicos*, UFRN, 2003;
- Katsuhiko Ogata, *Engenharia de Controle Moderno*, Prentice Hall, 3ª ed., 1997.