PGEAS – Sistemas Dinâmicos Lineares – Lista L_3

Prof. Daniel Coutinho

---

1. Considere o seguinte sistema dinâmico:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases} \tag{1}$$

   a. Determinar a matriz e^{At} utilizando
      – O método da transformada de Laplace ($e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\}$).
      – O teorema de Cayley-Hamilton ($e^{At} = \beta_0 \mathbf{I} + \beta_1 \mathbf{A}$).
      – Representação na forma diagonal ($e^{At} = \mathbf{V} e^{\hat{A}t} \mathbf{V}^{-1}$).

   b. Determine aproximadamente o esforço necessário para obter a solução de cada método. Por exemplo, todos os métodos exigem a solução de alguma forma de sistema de equações lineares. Desta forma, pode-se utilizar o número de variáveis a determinar como um parâmetro que indique o esforço necessário.

2. Para o sistema definido em (1), determine o sinal de saída $y(t)$ supondo que:

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \; u(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } \; t \geq 0 \\ 0 & \text{se } \; t < 0 \end{cases}$$

3. Obtenha representações discretas (exata e aproximada pelo método de Euler *forward*) do sistema (1), considerando um período de amostragem de $T = 1/20$ seg.

4. Prove de maneira recursiva, utilizando a definição de e^{At}, que a matriz discreta $\mathbf{B}_d$ pode ser obtida pela seguinte expressão desde que $\mathbf{A}$ seja inversível (isto é, não singular):
$$\mathbf{B}_d = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A}_d - \mathbf{I})\mathbf{B}$$
A expressão acima evita que o cálculo de $\mathbf{B}_d$ seja feito através de séries infinitas.

5. Retirado da lista, pois é o mesmo exercício 5 da lista 2.

6. Obtenha uma realização para a seguinte matriz função de transferência:
$$\hat{\mathbf{G}}(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+2}{(s+1)} & -\frac{0.5}{s+2} \\ -\frac{0.5}{s+1} & \frac{2s+6}{s+2} \end{bmatrix}$$

7. Considere o seguinte sistema MIMO:
$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases} \tag{2}$$

   a. Determine os autovalores do sistema, os polos, zeros de transmissão e zeros invariantes.

   b. Por que os polos não coincidem totalmente com os autovalores e por que não existem zeros de transmissão (principalmente quando comparados aos zeros invariantes).

8. Determine $\mathbf{A}^k$ para as seguintes matrizes:

   a.
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

b.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \tag{4}$$

9. Considere o seguinte sistema dinâmico:

$$\begin{cases} \mathbf{x}[k+1] & = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \mathbf{x}[k] + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u[k] \\ y[k] & = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}[k] \end{cases} \tag{5}$$

Determine se a resposta a entrada zero converge para zero ao $k \to \infty$.

Observações: pode-se utilizar o Matlab (ou software equivalente) para auxiliar na resolução de problemas como, por exemplo, para inverter uma matriz. Também, pode-se utilizar algum pacote de resolução simbólica para resolver operações de integração, diferenciação, etc. Mas, deve-se colocar os passos intermediários na resolução da lista de exercícios. Relembrando, a prova não terá consulta e, no máximo, permite-se a utilização de uma calculadora com operações elementares.