PGEAS – Sistemas Dinâmicos Lineares – Lista L_1

Prof. Daniel Coutinho

----

(1) A dinâmica da órbita de um satélite no entorno da terra, como ilustrado na Fig. 1, é descrita pelo seguinte conjunto de equações diferenciais:

$$
\begin{aligned}
\ddot{r}(t) &= r(t)\dot{\theta}(t)^2\cos^2(\phi(t)) + r(t)\dot{\phi}(t)^2 - \frac{k}{r(t)^2} + \frac{1}{m}u_r(t) \\
\ddot{\theta}(t) &= -2\frac{\dot{r}(t)\dot{\theta}(t)}{r(t)} + 2\frac{\dot{\theta}(t)\dot{\phi}(t)\sin(\phi(t))}{\cos(\phi(t))} + \frac{1}{mr(t)\cos(\phi(t))}u_\theta(t) \\
\ddot{\phi}(t) &= -\dot{\theta}(t)^2\cos(\phi(t))\sin(\phi(t)) - 2\frac{\dot{r}(t)\dot{\phi}(t)}{r(t)} + \frac{1}{mr(t)}u_\phi(t)
\end{aligned}
\tag{1}
$$

sendo $k = r_0^3\omega_0^2$.

Determinar uma aproximação linear da dinâmica descrita em (1), considerando o seguinte ponto de operação

$$
\mathbf{x}_0(t) = \begin{bmatrix} r_0 \\ 0 \\ \omega_0 t \\ \omega_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_0(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},
$$

sendo os estados, entradas e saídas definidos como:

$$
\mathbf{x}(t) := \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \\ x_5(t) \\ x_6(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r(t) \\ \dot{r}(t) \\ \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \\ \phi(t) \\ \dot{\phi}(t) \end{bmatrix}, \ \mathbf{u}(t) := \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_r(t) \\ u_\theta(t) \\ u_\phi(t) \end{bmatrix}, \ \mathbf{y}(t) := \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r(t) \\ \theta(t) \\ \phi(t) \end{bmatrix}.
$$

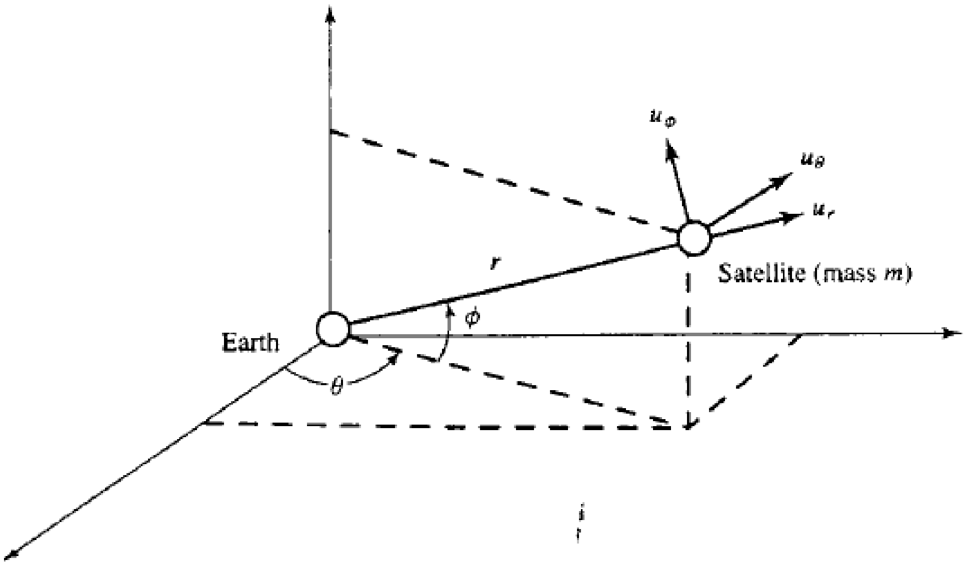

Figura 1: Diagrama da órbita de um satélite.

(2) Um determinado sistema mecânico é descrito pelo seguinte conjunto de equações diferenciais:

$$m_1\ddot{y}_1(t) + (k_1 + k_2)y_1(t) - k_2y_2(t) = u_1(t)$$
$$m_2\ddot{y}_2(t) - k_2y_1(t) + (k_1 + k_2)y_2(t) = u_2(t)$$

sendo $u_1(t)$ e $u_2(t)$ os sinais de entrada, e $y_1(t)$ e $y_2(t)$ os sinais de saída.

Obtenha uma representação por variáveis de estado e também a matriz função de transferência.

(3) Considere o modelo dinâmico de uma conta de aplicação financeira em um banco na qual a taxa de juros depende do valor depositado na conta através da seguinte lei:

$$y[k+1] = y[k] + r[k]y[k] + (0,1r[k]y[k])y[k-1] + u[k+1] \qquad (2)$$

onde $r[k]$ é a taxa de juros (variante no tempo).

(a) Obtenha uma representação por variáveis de estado para o sistema acima.

(b) Suponha que $r[k] = 0,001(1+1.05^k)$ e considere o seguinte ponto de operação $y[0] = y[-1] = 10$ e $u[0] = 0$. Obtenha uma aproximação linear da dinâmica não linear variante no tempo.

(4) Exercício 2.1 do livro texto (C.-T. Chen, Linear System - Theory and Design, 1999).

(5) Exercício 2.10 do livro texto (C.-T. Chen, Linear System - Theory and Design, 1999).